DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA Del 7 al 23 de Mayo de 1 9 8 4 .

1. ING. JORGE TERRAZAS Y DE ALLENDE
   Director General
   Edifimex, S.A.
   Enrique Rebsamen No. 736
   Col. del Valle
   Delegación B. Juárez
   03100 México, D.F.
   687 15 11

ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA 1984 (PARTE I).

Fecha	Tema	Horario	Profesor
Del 7 al 23 de Mayo	Concepto y Naturaleza de las Decisiones Económicas y su Aplicación de las Inversiones de Capital. Las funciones de un Ejecutivo.La generación de alternativas. No-Montearios. Medida de la eficiencia económica.Eficiencia Económica contra eficiencia Mecánica. Definición de Ingeniería Económica. Naturaleza de las decisiones. Grado de certeza. Proceso de la toma de decisiones. Las inversiones de capital. El incentivo de la utilidad. Fuentes de capital. El costo por el uso del capital. El valor del dinero en el tiempo. Tasa mínima interna de recuperación. Diferencias entre el enfoque contable y el criterio de análisis económico. Desarrollo y Análisis de Modelos Matemáticos para el Cálculo de la Tasa de Recuperación. Nomenclatura. Interés simple. Factor de un pago único con interés compuesto. Factor de actualización de un pago único. Factor de interés compuesto de una serie uniforme de pagos. Factor del fondo de amortización. Factor de recuperación del capital. Factor de actualización de una serie uniforme de pagos. Observación a los modelos matemáticos anteriores. Series de pagos con gradientes de incremento. Gradiente de incremento aritmético. Gradiente de incrmento geométrico. Valores límite de las fórmulas. Interés continuo. Interés nominal e interés efectivo. Tasa de descuento. Interpolación. Pagos por adelantado. La amortización del capital y el pago de interés. Series perpetuas de pagos uniformes y el valor capitalizado. Aplicación de Modelos Matemáticos a la Comparación Económica de Alternativas. Métodos de comparación de alternativas. Resolución de problemas prácticos con aplicación de los modelos matemáti-	Lunes,Miércoles y Viernes 17 a 21 h Sábado de 9 a 13 h	Ing. Jorge Terraza Allende

cos, anteriores a la compración económica de alternativas con criterios del: costo anual, valor presente y cálculo de la tasa de recuperación. Significado e interpretación de resultados de análisis de alternativas realizadas con cada uno de los criterios anteriores.Criterios de comparación suponiendo futuros reemplazos. Determinación del nivel más económico de inversión La inversión adicional. Deferimiento de inversiones. El método de flujo de efectivo para el cálculo de la tasa de recuperación de un proyecto de inversión prospuesto. Criterios para el análisis de alternativas con períodos de vida económica diferentes.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN EL
CAMPO DE LA INGENIERIA (PARTE I)

CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y SU APLICACION A LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Ing. Jorge Terrazas y De Allen
de

MAYO, 1984

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

ING. JORGE TERRAZAS Y DE ALLENDE

ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN LA INDUSTRIA DE LA CONSTRUCCION

TEMA I

CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y SU APLICACION A LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Contenido

TEMA I

CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS.

LAS FUNCIONES DE UN EJECUTIVO.

En toda empresa, y en general, en cualquier organización, los elementos directivos de la misma, deben orientar todas sus actividades y enfocar su actitud a dos funciones primordiales.

Una primera función a la que el ejecutivo ve sujetas la mayoría de sus actividades normales y rutinarias, es la de alcanzar primero y sostener después, las normas y niveles pre-establecidos de operación general de la organización, los cuadros básicos de funcionamiento en todos aquellos aspectos que afectan a la vida de la empresa; una primera función a la que genéricamente podemos referirnos como: "alcanzar y mantener las normas" y que se refleja en todo el cúmulo de labores rutinarias como son las de vigilar que las actividades se desarrollen conforme a lo planeado, que los costos no excedan al costo " norma " prefijado, que la obra de mano ejecute el trabajo de acuerdo con el procedimiento y rendimientos pre-determinados, que las materias primas y la obra de mano que se requieran, se encuentren disponibles en todo momento (problema de inventarios), que los materiales sean suministrados de acuerdo con el programa y en las cantidades requeridas, que se mantenga y no disminuya la calidad especificada del producto y así sucesivamente.

El "mantener las normas", es en muchas ocasiones la tarea calificada como la más importante que deben llevar a cabo los ejecutivos, y por otro lado, nadie niega que esa función absorve mucho tiempo y exige un gran esfuerzo.

Sin embargo, existe otra función del ejecutivo y que consiste en mejorar esas "normas" fijadas, de tal manera que la compañía pueda mejorar la calidad de sus productos, ampliar la gama de los mismos, abrirse nuevos mercados, incrementar la productividad de sus trabajadores y la eficiencia en general de sus métodos, etc..., y en cuanto a rendimientos económicos, aumentar o al menos mantener su nivel de utilidades.

frente a las condiciones que plantea una competencia creciente. En esta segunda función, el ejecutivo debe generar alternativas, lo - cual logra sometiendo a prueba todas las rutinas, procedimientos y métodos implantados dentro de su esfera de responsabilidades y bus cando otras posibles alternativas de acción, adaptándolas o no, de acuerdo con criterios económicos.

Este segundo papel, es vital, ya que dentro de una industria compe titiva, cualquier empresa que se contente solo con mantener sus - "normas" pre-existentes, se encontrará en poco tiempo, en decaden cia a causa de la presión de la competencia.

La empresa que se limita a mantener con éxito su statuquo, mientras otras compañias mejoran sus métodos y aumentan sus utilidades, des- cubrirá eventualmente que no puede igualar los precios establecidos por sus competidores progresistas.

Desgraciadamente, muchos ejecutivos no están preparados para desa-- rrollar esta función tan importante, ya que con demasiada frecuencia, carecen totalmente de preparación para la toma de decisiones económi cas, y lo que es aún peor, en muchas ocasiones subestiman y despre-- cian esta área de actuación, lo cual origina que no obstante lo in-- tensamente que un ejecutivo trabaje en su papel de "mantener las nor mas", su empresa y él individualmente como administrador, pueden fra casar.

A un directivo le es normalmente difícil reconocer que la forma en - que se están llevando a cabo las actividades, está mal o al menos es deficiente y susceptible de mejora. Es frecuente que los distintos- niveles dentro de la empresa, ya sean los constituídos por gerentes , administradores, supervisores, sobrestantes y obreros, sean renuentes a aceptar cambios que obliguen a encauzar su forma de actuar y de pen sar, por senderos y rutinas diferentes a los seguidos anteriormente- por un largo periódo. Que cierto es aquello que decia Ortega y Gasset de que: "el hombre es un animal de costumbres...."

...

Por otro lado, esta segunda función a que hacemos referencia, implica una actitud constante de estudio, análisis e investigación, que redunde en una actualización continua de conocimientos en aspectos técnicos, administrativos, económicos, etc..., actitud que es poco frecuente encontrar en los profesionales que ya han salido de las aulas de los centros educativos, pues implica, un sacrificio constante, adicional al que ya de por si, originan las arduas labores y problemas de cada día.

En la Industria de la construcción el número de obras que deben ganarse en base a demostrar competencia, es cada vez mayor; los concursos son mas "cerrados", se reducen los márgenes para cometer -- errores; lo que implica que para continuar "compitiendo", es necesario actualizar nuestros conocimientos en aspectos como: análisis de costos, procedimientos y técnicas constructivas, planeación, programación y control de obras, especialización en áreas específicas, control administrativo a nivel obra y empresa, mecanismos de presentación e interpretación de resultados, mecanización de operaciones, análisis de inversiones, selección económica de alternativas, etc..,

En este curso, trataremos de establecer las funciones desde el punto de vista económico del ejecutivo, entendido este, en su acepción más general, como aquel en quien recae la responsabilidad de la toma de decisiones, y de presentar los principios y los procedimientos que - deben normar lo que se ha dado en llamar una "toma de decisiones -- económicas".

Analicemos esta segunda función de un ejecutivo como un proceso de - dos fases consistentes en:

1) Generar alternativas.
2) Evaluarlas y adoptarlas o no, después de analizarlas ampliamente desde el punto de vista de los criterios económicos.

Solo si el ejecutivo tiene conciencia clara de estos criterios, podrá llevar a cabo una búsqueda inteligente de alternativas y después, tomar decisiones económicamente correctas.

No nos referimos tan solo a una "motivación" general sobre la necesidad de conocer estos criterios y técnicas en forma somera, ya que nadie puede captar ni estar convencido de la necesidad de implantar determinadas mejoras o innovaciones si no las conoce profundamente.

LA GENERACION DE ALTERNATIVAS.

La segunda función del ejecutivo se desprende de la primera. Tanto si se tienen dificultades para mantener una "norma" establecida, como si no se les tiene, la "norma" misma puede ser la base de investigación, para encontrar un medio más económico para efectuar una acción determinada. Así por ejemplo, en el caso de una obra en construcción, el director de la misma puede hacerse preguntas como las siguientes: ¿ se seleccionó el equipo más adecuado en cuanto a número, tipo y capacidad de unidades ?, ¿ puede acelerarse el proceso de construcción mediante otra secuela de ataque de los diferentes frentes ?, ¿ el número de personal obrero y técnico ubicado en cada frente es el adecuado ?, ¿ debe incrementarse ?, ¿ debe disminuirse ?.., ¿ el sistema establecido para la elaboración y presentación a cobro de las estimaciones, es eficiente, oportuno y acorde al ritmo de las erogaciones ?....

Luego de un análisis profundo y sistematizado, el director de una obra, podrá determinar, con plena conciencia en los criterios económicos, si los juicios presupuestos originalmente eran los adecuados o conviene seguir nuevas alternativas.

Lo anterior, a nivel obra. Pero a nivel empresa de construcción, ¿no deberiamos plantearnos preguntas tales como : ¿ nuestro sistema de contabilidad es el adecuado?, ¿ nuestra presentación de resultados en las obras y el análisis de los mismos, es ágil, claro y oportuno ?, ¿ la departamentalización y número de empleados y oficinistas es el adecuado ?...

A partir de cada acto que se efectue de acuerdo con normas establecidas, un ejecutivo entrenado a pensar bajo esta línea de acción, podrá generar otras alternativas económicas.

La toma de decisiones económicas invade cualquier área de actividades de un ejecutivo, desde el aspecto ventas, promociones, concursos, cotizaciones, etc..., hasta el de producción, construcción, cobros,... y desde las finanzas hasta el aspecto técnico ingenieril.

Una función muy importante del ejecutivo es el estar propiciando continuamente mejoras y cambios, aunque bien es cierto que el mero cambio, por si mismo, no implica necesariamente una decisión económica. Otro claro ejemplo en el medio de la construcción, lo constituye el problema de un proyectista y calculista quien debe decidir entre hacer una estructura de acero o de concreto o mixta, atendiendo a factores como pueden ser: distintos tipos de cimentaciones dependiendo del peso de la superestructura en cada una de las alternativas, costos de conservación y mantenimiento dentro de un cierto horizonte económico, valor de recuperación de la estructura, disponibilidad de personal especializado en la localidad, etc...

" Cada peso que se gasta, se propone gastar o se propone no gastar, constituye la base de una decisión económica "..., en nuestro medio, ¿ cuántas veces el hecho de erogar o no-erogar, se autoriza por mera costumbre o "inercia"?...

Si un ejecutivo decide no hacer ningún cambio a una situación existente, esta de hecho, tomando una decisión económica, ya que la decisión de no hacer nada, implica la decisión de continuar haciendo las cosas de la misma manera y de rechazar todas las posibles alternativas de acción, tanto las generadas por él mismo después de un análisis crítico, como de las que desconoce por no haberlas buscado.

Una decisión no puede decirse que constituye una auténtica decisión económica a menos que:

1) Todas las alternativas hayan sido generadas y planteadas.

2) Todos los elementos de costo y de beneficio hayan sido considerados para cada alternativa.

3) Se sigan criterios, técnicas y procedimientos correctos para la evaluación y selección final de una alternativa.

Así por ejemplo, en el caso particular de la posibilidad de reemplazar una máquina existente, la decisión económica puede ser: aprobar el gasto de $ 80,000.00 para la compra de una máquina nueva, o rechazar este gasto y conservar la existente, o gastar $ 45,000.00 en una diferente, o autorizar $ 130,000.00 por una nueva de mayor capacidad, o invertir $ 25,000.00 en la reparación y mejora de la máquina actual. La decisión que se tome no será normalmente la correcta si se toma solo en base a la liquidez que se tenga en el momento dado.

Analicemos más detenidamente el aspecto de la generación de alternativas de acción, como paso inicial del proceso de una toma de decisiones.

" Un análisis económico puede definirse como la comparación entre altenativas, en la cual, las diferencias entre ellas, se expresan, hasta donde es factible, en términos monetarios ".

.) Cuando en una comparación de este tipo entre altenativas, estan involucrados de alguna forma, aspectos de índole técnica en ge general, se dice que se trata de un análisis de ingeniería económica.

.) " Las decisiones se toman entre alternativas ": no hay propiamente una decisión, si no hay al menos dos cursos de acción posibles.

.) Antes de tomar una decisión es necesario dejar claramente definidos los beneficios, ventajas y desventajas de cada una de las alternativas posibles, expresando los efectos o consecuencias de la posible implantación de cada alternativa, en forma tal que sean conmensurables entre si: es decir, los beneficios y costos, las ventajas y desventajas de cada alternativa, deben ser apreciados y valuados numéricamente, y estos números a su vez, expresados en las mismas unidades para poder ser comparados. Para efecto de las decisiones económicas, las unidades normalmente empleadas, y de hecho las únicas que sirven para tal fin, son las unidades monetarias.

Para hacer conmensurables y comparables las características de las diversas alternativas, pueden sugerirse dos pasos: primero, expresar cada una de las características en sus unidades físicas más apropiadas, y segundo, convertir mediante el establecimiento de una escala de valores, las unidades físicas, en unidades monetarias.

De no ser conmensurables entre sí las diferencias entre las alternativas, puede correrse el peligro de que al compararlas, se dé igual peso a diferencias triviales que a diferencias realmente importantes entre ellas.

" Debe reconocerse que solo las diferencias entre alternativas, son relevantes en su comparación".

Si por ejemplo, al comparar dos procedimientos constructivos, se estima que el factor obra de mano, será igual en ambas alternativas, o sea, que se estima tenga el mismo costo en una y en otra, podrá excluirse dicho factor para efectos de la comparación entre ellas, ya que es claro que dicho factor, al afectar igualmente a ambas alternativas, no aportará juicio alguno para la selección de una u otra.

En ocasiones se argumenta que el análisis económico de una situación para efectos de una toma de decisiones, es inútil, pues la alternativa a seguir es evidente. Aparentemente este sería el caso de un empresario que expresara: "... Tengo una máquina que tiene más de 15 años de estar funcionanado y a la cual ya no es físicamente posible seguir reparando y manteniendo en operación, por lo que sin necesidad de ningún análisis, ni de la aplicación de técnicas y fórmulas sofisticadas, concluyo que debo cambiarla por otra..." Sin embargo, podriamos hacer notar a este empresario, que de hecho, sí tomó una decisión y que ésta se inició hace varios años, pues es muy factible-que un análisis revele que debería haber cambiado esa máquina hace más de 8 años por ejemplo, y que su decisión, (aún sin haber sido fruto de un razonamiento conciente), fué equivocada, al haber optado de hecho, por la alternativa de absorver los sobrecostos de - un mantenimiento y reparaciones antieconómicas durante los últimos 8 años, rechazando ademas, los ahorros que la compra de una nueva-máquina le hubieran originado, de haberse llevado a cabo el reemplazo, económicamente justificado, de la máquina actual.

De lo anterior, concluimos que la toma de decisiones económicas en un sentido integral, incluye tanto la generación como la evaluación de las alternativas y que dado que la selección de una alternativa es siempre el objeto de una decisión, el proceso de la toma de una decisión económica, prosigue si y solo si, las posibles alternativas a seguir, han sido planteadas.

Ahora bien, la selección de la alternativa final nunca debe ser objeto de adivinanza ni dejada al " designio de los dioses ".

Ni la intuición ni las corazonadas, son del todo realistas ni confiables. Sin embargo, se puede arguir y debe aceptarse, el hecho - de que mucha de la información de que se dispone para la toma de - una decisión, está basada en meras estimaciones. A esto, puede -- responderse afirmando que esas estimaciones logradas por medio de un cuidadoso estudio de la información disponible, son de cualquier manera más confiables que meras adivinanzas o elucubraciones intuitivas. Lo anterior no quiere decir que la llamada "intuición", que-se orienta al futuro, pero que de hecho involucra consciente o in--conscientemente, ciertos recuerdos y experiencias del pasado, no -- tenga en ocasiones cierto grado de validez.

RESPONSABILIDAD POR LA TOMA DE DECISIONES ECONOMICAS.

El que un ejecutivo no este ejerciendo la segunda función a que se ha aludido, se manifiesta principalmente en una decidida tendencia a no hacer cambios, es decir, a seguir haciendo lo mismo y de la misma manera; y en el hecho de que rara vez, una inversión o una erogación se justifiquen mediante un criterio económico adecuado.

Muchos ejecutivos no sienten verdadera responsabilidad por los costos que generan o por los costos que de hecho "protegen" al mantener el statusquo. Consciente o inconscientemente, consideran el llevar a cabo erogaciones monetarias, como una consecuencia inherente e inevitable de su trabajo: como un privilegio obvio de la función ejecutiva... y cuando un ejecutivo se acostumbra a esta actitud, llega a considerar que estos costos son responsabilidad de la compañía. Si reflexionara en esto, se daría cuenta que estos costos son de su responsabilidad ya que se ubican dentro de su esfera administrativa, y es él, y no "la compañía", quien selecciona la alternativa a seguir de entre todas las demás posibles y por tanto responsable de su seguimiento.

Ahora bien, las necesidades de capital en muchos proyectos alcanzan cifras considerables. Obviamente, ese capital requerido se obtiene de diversas fuentes, internas o externas a la empresa, y es natural que tanto a los que aportan ese capital, como a los encargados de controlar su gasto, les preocupe el que sea utilizado de la manera más efectiva, ya que el éxito de un proyecto ingenieril o de un negocio en general, se mide en términos de su eficiencia financiera.

Por lo anterior, el Directivo debe combinar en cada proyecto de inversión, la técnica con los requerimientos y limitaciones financieras, sin olvidar además otros valores involucrados como pueden ser los de carácter social, humano, estético, político, etc...

El problema más serio que se deriva de aceptar o rechazar proposiciones o peticiones de adjudicación de fondos y recursos a determinados renglones (lo cual de hecho, representa alternativas de inversión), sobre la base de que tan urgentes son, radica en que el programa de utilización de recursos queda supeditado a un concurso de personalidades.

Las partidas mas importantes se adjudican al Departamento que ha - sido más elocuente en la solicitud de fondos y más persistente en- la presentación de sus requerimientos, y no al Departamento que por haber realizado un estudio económico con que respaldar su petición, ha presentado esta, en forma tardía. En una organización, toda decisión de adjudicación e inversión de fondos, debería estar respaldada y justificada con un análisis económico.

El primer criterio que debe seguirse en la selección de alternativas de inversión, es el de dar el mejor uso posible a los recursos, normalmente limitados, con que cuenta una organización obteniendo - el más alto posible rendimiento de ellos.

Estos recursos limitados con que contamos para realizar inversionnes, pueden ser de varios tipos, como bienes raices, espacio disponible, fuerza de trabajo, (técnico, obrero, administrativo...), - materiales, equipo, dinero efectivo, capacidad crediticia, etc..., pero dado que en el ámbito comercial se acostumbra expresar el valor de la mayoría de los recursos, en términos monetarios, es necesario evaluar las disponibilidades y sus limitaciones en términos de dinero.

Al evaluar una inversión propuesta, acostumbramos preguntar, si será suficientemente productiva. Este término de " suficientemente- productiva ", se refiere, como veremos en forma detallada más adelante, a la comparación entre la tasa de recuperación que esperamos obtener de dicha inversión considerando el costo total que dicha inversión implica, con la tasa de recuperación que pudiesemos obtener de otras inversiones, y teniendo como límite, una cierta tasa interna mínima atractiva de recuperación.

Sin embargo, no todas las posibles consecuencias que representa el- seguir una alternativa, pueden ser reducidas a términos monetarios, de donde se desprende que es necesario contemplar un segundo criterio en el análisis de selección de alternativas, que tome en consi-

...

deración estos factores o aspectos a los que denominaremos: valores " no-monetarios " o " no-cuantitativos ".

Con los recientes adelantos de las matemáticas, estadistica, técnicas de computación, etc..., que permiten el manejo de problemas -- económicos más complejos, el ingeniero tiene la oportunidad de jugar un papel aún más importante en el proceso de la toma de decisiones, ya que no solo cuenta con las bases matemáticas y científicas para-comprender el uso de tales técnicas, sino que además tiene el criterio ingenieril que permite reconocer las limitaciones prácticas de-estas técnicas y el efecto de la falta de información que comunmente existe en las situaciones reales, todo lo cual lo capacita para-seleccionar la alternativa más adecuada y realista.

El privilegio u obligación de un ejecutivo de señalar y elegir una-alternativa, no va desligada a la responsabilidad de demostrar que-su sugestión es la más adecuada de entre otras. Desde el inicio debe estar consciente de todos los costos resultantes de su decisión.

" Las decisiones deben estar basadas en las consecuencias que se - prevee implique la posible implantación de cada una de las alternativas ".

En muchas ocasiones, existe la deformación de considerar solo el - valor inicial de una inversión, siendo que frecuentemente los costos futuros que se generan pueden ser con mucho, más importantes - que el inicial. Así por ejemplo, la decisión de invertir $100,000.00 en una máquina, debe estar ligada a la consideración de costos futuros como pueden ser: obra de mano de operación, consumo de energía, desperdicio de material, necesidad de supervisión extra, mantenimiento y conservación necesarios, seguros, impuestos, etc... También deben considerarse beneficios o ingresos especiales, como el-valor de rescate. Todo lo cual implica que el análisis completo - de la alternativa, debe hacerse dentro de un cierto periódo que -- constituye el " horizonte económico ".

VALORES NO MONETARIOS O NO CUANTITATIVOS.

Pocas decisiones, de tipo personal o de negocios, son hechas sobre la base únicamente de consideraciones financieras. Aún más, las consideraciones sobre la eficiencia económica de un proyecto pueden verse influenciadas en gran parte por aspectos no monetarios:

" Las decisiones entre alternativas de inversión deben también considerar y dar peso, a todas aquéllas consecuencias esperadas y que se originan de la implantación de cada uno de los posibles cursos de acción, y que por una u otra razones, no pueden reducirse o expresarse en términos monetarios ".

A este tipo de factores, es frecuente referirse también con otros términos como son: factores de juicio, impoderables, intangibles, etc...

Las decisiones tácticas y recomendaciones relativas a la factibilidad de proyectos ingenieriles, deben tener en cuenta toda una serie de factores monetarios y no monetarios. Entre estos últimos podemos nombrar leyes y principios económicos, situación imperante de los negocios en un momento dado, valores sociales y humanos, objetivos personales y de grupo, gustos de consumidores, reglamentaciones gubernamentales, legislación de orden fiscal y económico, etc...

Las consideraciones sobre aspectos no monetarios adquieren especial importancia en el caso particular de las decisiones de tipo personal y en el terreno de los intereses particulares.

MEDIDA DE LA EFICIENCIA ECONOMICA:

La actividad ingenieril se desarrolla dentro de dos entornos, el físico y el económico. El éxito que se alcance manejando o alterando el entorno físico para producir bienes y servicios depende del conocimiento que se tenga de las leyes físicas. Sin embargo, el beneficio que reporten esos bienes y servicios, depende de la utilidad que proporcionen, medida esta en términos económicos. Se podrían enumerar muchos ejemplos de estructuras, máquinas, procesos, etc..., que presentan un excelente diseño físico y mecánico, pero escaso o nulo sentido económico. Por esta razón, es esencial que los proyectos ingenieriles se evaluen en términos de beneficio y de costo antes de ser aceptados.

" El pre-requisito esencial para el éxito de un proyecto ingenieril, es su factibilidad económica ".

La función normal del ingeniero consiste en manejar los elementos de un entorno, el físico, para crear utilidad en un segundo entorno, el económico.

El objetivo de todo proyecto ingenieril, es el de obtener la mayor utilidad posible, por unidad de recurso empleado, lo cual se logra mediante la más efectiva utilización de materiales, energía, obra de mano, etc..., y en general, de cualquier tipo de recurso. El grado de eficiencia que se alcance en la utilización de los recursos se mide mediante la expresión de caracter general:

$$\boxed{\text{eficiencia} = \frac{\text{resultado obtenido}}{\text{insumos.}} = \frac{\text{out put}}{\text{in put}}}$$

lo cual no es mas que el cociente entre los resultados obtenidos y los recursos empleados. Esta expresión mide el éxito de la actividad ingenieril dentro del entorno físico, en un primer nivel de eficiencia, que se conoce como "eficiencia mecánica" o también: --- "eficiencia física o tecnológica". Dentro de este primer nivel,- tanto el resultado obtenido como el insumo total requerido se expresan en unidades tales como kilowats,Btu, horas/máquina, etc... Cuando este tipo de unidades físicas está involucrado, la eficiencia siempre será menor que la unidad o menor que el 100%.

Sin embargo, para un ingeniero también le es fundamental un segundo nivel de eficiencia, la " eficiencia económica " o " eficiencia financiera ", la cual se determina con la misma fórmula general de la eficiencia, solo que traduciendo y expresando las unidades físicas tanto del "input" como del "output" a su equivalencia en valores - monetarios, de acuerdo con alguna escala de valorización adecuada- en cada caso, lo que convierte la expresión general a la forma:

$$\boxed{\text{eficiencia económica} = \frac{\text{beneficio}}{\text{costo}}}$$

Es bien sabido que la eficiencia física no puede alcanzar valores mayores de 100%.

En cambio, la eficiencia económica sí pude exceder de dicho valor,- y de hecho, solo sera aceptable cuando eso suceda,. Una alta eficiencia física no es garantía de una alta eficiencia económica. Una baja eficiencia física, no es razón suficiente para dejar de considerar una alternativa, ya que pueden existir otras circunstancias- económicas que compensen esa baja eficiencia física.

Consideremos el ejemplo de una planta de generación de energía, cuya eficiencia física sea tan solo de un 14%. Supongamos que la producción obtenida en forma de energía eléctrica y expresada en Btu, tiene un valor económico de 8 unidades monetarias por millón de unidades- producidas y que el insumo necesario en la forma de gas natural y expresado en Btu, tiene un valor económico de 0.70 unidades monetarias por millón de unidades de gas consumido. En estas condiciones:

$$\text{eficiencia mecánica} = 0.14$$

$$\text{eficiencia económica} = \frac{\text{Btu output x valor de la energía eléctrica}}{\text{Btu input x valor del gas natural.}}$$

$$= 0.14 \times \frac{8 \text{ unidades monetarias}}{0.70 \text{ unidades monetarias}}$$

$$= 1.6$$

lo cual indica una eficiencia económica de un 160%.

Otro ejemplo:

Si un inversionista decide expander su negocio y adquirir un cierto número de camiones, podrá seleccionar el tipo de camión mediante su eficiencia mecánica, pero la factibilidad y conveniencia de la inversión general, deberá contemplarla a través de la eficiencia económica, en donde el "output" o beneficio, será la retribución económica que se obtenga por el servicio de los camiones, y el "input" o costo, debe incluir los costos de operación, de depreciación, los intereses del capital invertido, los impuestos y todos los demás gastos asociados.

La forma más comunmente empleada para estimar la eficiencia financiera, es mediante la llamada " tasa de recuperación ", sobre un capital invertido, expresada en porciento: (de aquí la denominación común de : "porcentaje de recuperación")

$$\boxed{\text{tasa de recuperación (anual)} = \frac{\text{utilidad neta (anual)}}{\text{capital invertido.}}}$$

Un ejemplo de determinación de la eficiencia mecánica instantánea, la constituyen los medidores eléctricos para determinar en un instante dado, el output de un motor.

Para la evaluación final de la mayoría de los proyectos, aún en -- aquellos en los cuales el aspecto técnico ingenieril juega un papel muy importante, la eficiencia económica debe prevalecer sobre la - eficiencia física. Esto es debido a que la función y meta de la ingenieria, es crear utilidad y obtener el máximo nivel de beneficio- dentro del entorno económico, por medio de la óptima utilización de- los elementos del entorno físico; y dado que este objetivo se traduce en máximizar el servicio, y el nivel de servicio puede expresarse en términos monetarios, se concluye que el criterio económico - es la base de una evaluación, y la meta, la maximización del beneficio.

EFICIENCIA ECONOMICA CONTRA EFICIENCIA MECANICA.

La meta de todo ingeniero y en general, de la actividad empresarial y gerencial, es la de lograr una eficiencia económica dentro de rangos factibles y aceptables y no la simple búsqueda de eficiencia mecánica.

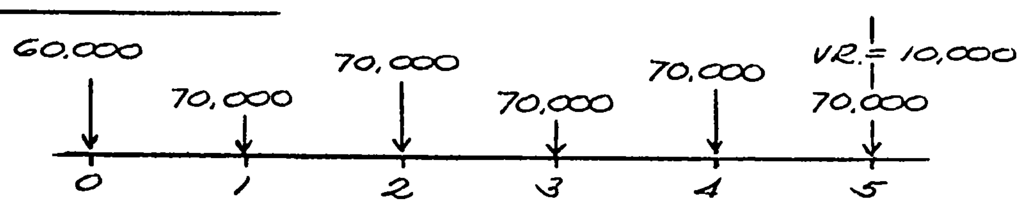
Ejemplo: Supongamos que para resolver una necesidad operativa y después de una investigación, se nos presentan dos alternativas:

Alternativa " A ": adquirir una máquina (A) con precio inicial de $ 60,000.00, con costo anual de operación (incluyendo obra de mano, combustibles, mantenimiento, etc...) de $ 70,000.00 (el cual suponemos uniforme por simplificación). Vida económica estimada de 5 años, y valor de recuperación de $ 10,000.00 al término de ese período.

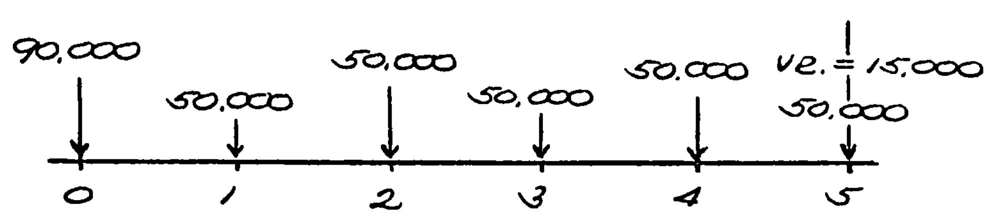
Alternativa " B ": Adquirir una máquina (B) para el mismo trabajo, con precio de adquisición de $ 90,000.00; gastos de operación de $ 50,000.00 anuales, Vida económica estimada de 5 años y valor de recuperación de $ 15,000.00

Representamos las dos alternativas de la siguiente manera:

alternativa A:



alternativa B:



El monto total del desembolso neto durante los 5 años para la alternativa " A ", es de $ 400,000.00 y para la alternativa "B" de $ 325,000.00.

(Hacemos notar que no estamos considerando en estas sumas el factor tiempo, y por tanto la variación del valor del dinero con el tiempo y como demostraremos posteriormente, la simple suma de costos es insuficiente para comparar dos alternativas.)

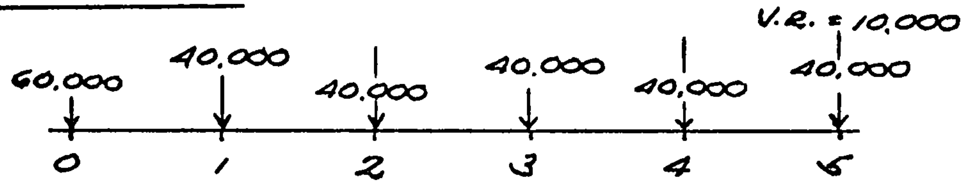
Observamos que " B " tiene mayor eficiencia mecánica, dado que hemos supuesto que en un mismo periódo ambas máquinas tienen el mismo rendimiento en cuanto a producción de servicio se refiere, pero el insumo de " B ", medido por sus gastos de operación anual es de $ 50,000.00, en tanto que el de " A ", es de $ 70,000.00. Esto es explicable ya que el sobrecosto inicial de la máquina " B " con respecto a la " A ", sugiere ventajas en la construcción de " B " (quizás mayor nivel de automatización, menor requerimiento de obra de mano, más precisión, etc...), y por tanto una mayor eficiencia mecánica.

Conclusión: " B ", realiza el mismo trabajo que " A " pero con menor cantidad total de pesos a lo largo de los 5 años considerados de comparación, luego " B ", tiene mayor eficiencia económica.

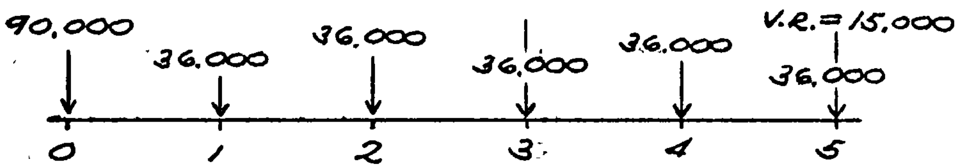
En este caso " B " tiene mayor eficiencia económica y también la mayor eficiencia mecánica, lo cual es mera coincidencia. La búsqueda de alta eficiencia económica, no necesariamente coincide con la búsqueda de alta eficiencia mecánica o tecnológica, ya que si esto fuera cierto, la elección de la alternativa más económica pudiera ser realizada en base solo a la eficiencia mecánica.

En efecto, supongamos ahora que se propone el empleo de las mismas dos máquinas anteriores " A " y " B ", pero en condiciones de menor ritmo de trabajo; y en base a esta menor utilización, los costos de operación anuales se calculan en $ 40,000.00 para " A " y en $ 36,000.00 para " B ". La nueva situación puede representarse:

Alternativa A:



Alternativa B:



El desembolso total para " A " es ahora de $ 250,000.00 y de $255,000.00 para " B ".

Observamos ahora que la máquina " B " aún la de mayor eficiencia mecánica, tiene ahora menor eficiencia económica que " A ".

Lo anterior demuestra que no hay ninguna " receta " para la selección de la alternativa más económica; por lo que habrá que hacer un análisis para cada conjunto de circunstancias. La selección de la alternativa más económica, cambió de " B " a " A "; de la máquina con mayor eficiencia mecánica, a la de menor eficiencia mecánica.

La distinta selección fué originada en este caso por un cambio en el ritmo de utilización del equipo; pero también pudiera haber sido causada por diversos factores como cambios en el costo horario de la obra de mano, en el costo unitario de la energía, en el valor de renta por metro cuadrado de piso, o cualquier otro factor de costo.

El efecto combinado de todos estos elementos de costo, debe ser evaluado, para cada situación, por el ejecutivo encargado de tomar una decisión, asi como la variación de dicho efecto combinado debido a cambios en las condicionantes del medio ambiente.

El ejemplo también ilustra el hecho de que la alternativa que se selecciones en determinadas circunstancias, puede llegar a rechazarse si estas condiciones han variado.

El análisis de alternativas con baja eficiencia mecánica, es tan necesario como el de alternativas de alta eficiencia mecánica.

La afirmación de que el objetivo primordial de la ingenieria es lograr una eficiencia económica satisfactoria, no va en contradicción con otros objetivos de la ingenieria, como son: la exactitud, la confiabilidad, la seguridad, etc..., ya que, estas cuestiones son decididas por consideraciones económicas, y pudiera suceder por ejemplo que en determinadas circunstancias, no sea economicamente factible o conveniente, diseñar un cierto mecanismo con un nivel de absoluta exactitud, ciento por ciento de confiabilidad, o perfecta seguridad, por implicar esto un alto costo y resultar antieconómico.

DEFINICION DE INGENIERIA ECONOMICA.

Cualquier concepción de la Ingenieria presenta dos enfoques: uno, concerniente al aprovechamiento de los recursos materiales y fuerzas de la naturaleza, y el otro, la busqueda continua de la satisfacción de las necesidades humanas; y dado que los recursos con que normalmente contamos, son escasos respecto a las necesidades, de aqui se desprende la esencial relación de la Ingenieria con la Economía.

El término Ingenieria Económica puede definirse como:

" El conjunto de conocimientos, técnicas y prácticas de análisis y síntesis, incluyendo consideraciones sobre factores humanos, necesarios para la evaluación del beneficio que reportan productos y servicios, generados por la actividad ingenieril, en relación a su costo ".

La primera función de la Ingeniería Económica, es la evaluación cuantitiva de los proyectos ingenieriles, en términos de beneficio y costo, antes de que estos sean ejecutados. En este aspecto, la Ingeniería Económica es similar a la Ingeniería de diseño cuya función es la de " diseñar " materiales, dimensiones y combinación de elementos estructurales de un proyecto, antes de que este sea realizado.

Un estudio económico presenta dos etapas:

a) recopilación de datos.

b) procesamiento matemático de los datos.

Ninguno de estos dos pasos constituye un fin en sí mismo, sino medios de alcanzar el verdadero y último objetivo: la determinación de la bondad y factibilidad económica de una alternativa, ~~[illegible]~~. a fin de justificar su selección y autorizar su implementación.

Ahondemos un poco más respecto a la importancia que guarda el aspecto: " económico " dentro de la Ingeniería.

Recopilando algunas definiciones que diversos autores dan de lo que es Ingeniería, tenemos que:

" La Ingeniería, más que una ciencia, es la ~~ampliación~~ aplicación de varias ciencias; es un arte que requiere la habilidad de ingenio para adoptar y aprovechar los conocimientos humanos para el beneficio de la raza humana".

" La Ingeniería es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales, adquirido por el estudio, la experiencia y la práctica, es aplicado con juicio al desarrollo de formas de emplear, económicamente, los recursos y fuerzas de la naturaleza para el beneficio de la humanidad ".

Es de todos conocida la definición muy antigua, muy breve, pero muy rica en sentido, que nos dice que:

" Ingeniero es el que hace con un peso, lo que otro que no es Ingeniero, hace con dos"....

A través de estas y muchas otras definiciones que pudiésemos buscar de Ingeniería, nos damos cuenta, que si bien es cierto que la función básica de la Ingeniería es la búsqueda de la satisfacción de las necesidades humanas mediante la aplicación de los conocimientos al mejor aprovechamiento de los recursos que brinda la naturaleza, su actuación se sanciona, se califica y se aprecia definitivamente en base a su eficiencia económica.

La actividad ingenieril, en cualquiera de sus ramas, aún en aquellas profundamente científicas o técnicas, si no se orienta en cuanto a su aplicación con un enfoque económico, no está cumpliendo con las metas inherentes a la Ingeniería.

Desde este punto de vista, refiriendonos a cualquiera de las ramas y aspectos de la Ingeniería , podemos afirmar que:

" La Ingeniería que no es económica, deja de ser Ingeniería...

Lo anterior es tan contundente, que últimamente ha empezado a rechazarse el término " Ingeniería Económica " para designar a un área específica de conocimientos y técnicas enfocadas al análisis y toma de decisiones, ya que de hecho este término compete a la Ingeniería en general y no a una rama o enfoque particular o específico de la misma.

NATURALEZA DE LAS DECISIONES.

Las rachas de buena suerte o las noches de fortuna, atestiguan el hecho de que los jugadores y aventureros algunas veces ganan. Sin embargo, podemos también hablar de infinidad de ocasiones en las que un " volado " o la "inspiración del momento ", han fallado rotundamente en cuanto a lograr un beneficio.

Por lo anterior, debido a una sincera necesidad por parte de ingenieros, científicos y administradores en general, de contar con un sistemático y lógico proceso de análisis para la toma de decisiones, es por lo que se han creado diversos métodos analíticos que constituyen las herramientas de lo que constituye hoy en día, la administración científica.

Sin embargo, tanto la intuición, como los " métodos analíticos " son reconocidos y tienen cada uno su lugar dentro del proceso de la toma de decisiones, en cuanto que la intuición, aunque se ubica en el presente, de manera inconsciente e informal, involucra recuerdos y experiencias del pasado, en los cuales se basa para hacer ciertas predicciones en el futuro.

El implantar un sistema analítico, cuesta esfuerzo y dinero, y algunas decisiones menores no justifican esa erogación, por lo que podemos afirmar que los métodos analíticos, serán empleados siempre que esto sea técnicamente factible y justificable económicamente. Fuera de estos límites, el buen juicio y la intuición, basados en la experiencia, son y serán siempre recursos necesarios y legitimos.

Al analizar una situación para efectos de una toma de decisiones habrá que determinar su "grado de sensibilidad", esto es, el qué tan vulnerable y sensible es con pequeños cambios en los factores condicionantes de esa situación. La consecuencia inmediata de la "alta sensibilidad" de una situación dada, será la de tener que garantizar, mediante estudios minuciosos, la validez de los datos que intervendrán en la toma de decisiones, y dado que los factores que pueden influir en una decisión pueden ser muy numerosos, habrá que dar primacia a aquellos a los que la situación es más sensible.

...

Por lo que respecta a los aspectos que se busca optimizar, cuando en una situación de decisión se presentan varios objetivos, es probable que, haya que reconocer, que no hay un curso de acción que optimice simultaneamente todos los objetivos. En esta circunstancia será necesario seleccionar la alternativa que equilibre de la mejor manera posible los objetivos en conflicto; es decir una alternativa que "suboptimice".

Respecto a la amplitud del periódo de estudio, podemos apuntar que los análisis basados en un horizonte económico muy corto, no necesariamente tendrán la misma eficiencia, que los que completen un horizonte mayor.

Un horizonte de comparación muy corto, puede distorsionar seriamente los valores. Un horizonte muy largo introduce incertidumbre. A medida que se alarga el horizonte de comparación, las predicciones respecto al comportamiento futuro de los factores que afecten una decisión empezarán a debilitarse en cuanto a su credibilidad.

GRADOS DE CERTEZA.

Podemos clasificar las decisiones, dentro de tres categorias generales que caracterizan las condiciones de la situación decisional y que sugieren métodos de análisis específicos en cada caso. Estas categorias son:

a) Decisiones suponiendo certeza.
b) Decisiones que reconocen riego.
c) Decisiones admitiendo incertidumbre.

.) En el primer caso, al suponer certeza, se considera que todas las condiciones del problema se conocen con seguridad; estamos basando el análisis en un conjunto de suposiciones que suponemos tienen una alta esperanza de ocurrencia.

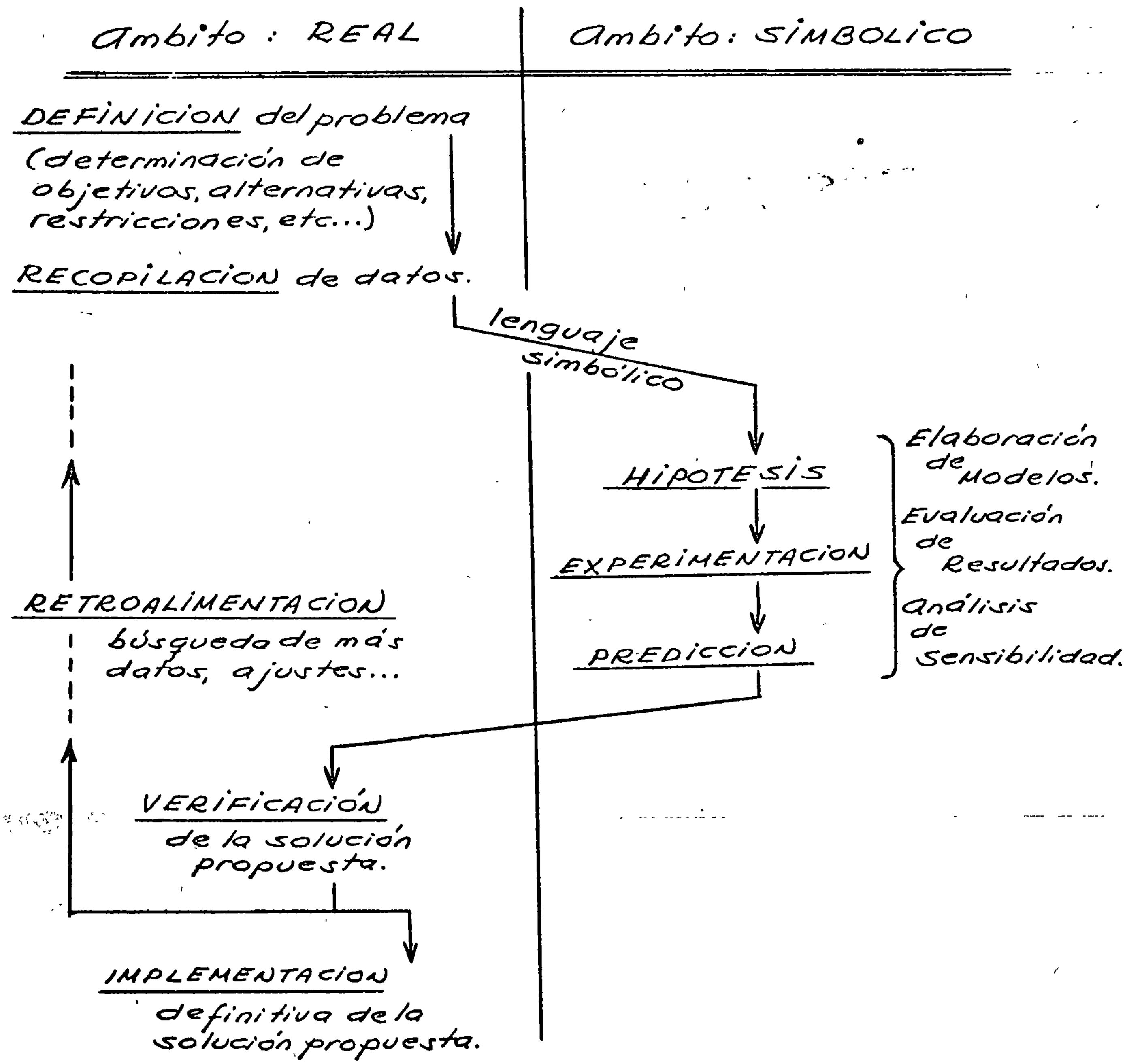
.) En el segundo caso, el análisis considera poder obtener buenas estimaciones sobre la probabilidad de ocurrencia de las futuras condiciones y del efecto económico de dichas condiciones. Es frecuente que la determinación del valor de dichas probabilidades implique erogaciones originadas por investigaciones y experimentaciones...

.) El considerar decisiones bajo condiciones de incertidumbre, implica que el analista considera prudente incluir los efectos de diferentes factores, pero le resulta imposible hacer estimaciones sobre las probabilidades de ocurrencia de esos factores y sobre el verdadero efecto de las mismas en la situación decisional.

PROCESO DE LA TOMA DE DECISIONES.

La toma de decisiones se desarrolla dentro de los ámbitos: el real, en el que tienen lugar los problemas del diario, y del simbólico, en el que se trata de representar a los problemas del ámbito real para su estudio y resolución.

Esquemáticamente el proceso puede representarse:



DEFINICION DEL PROBLEMA Y RECOPILACION DE DATOS.

El problema se origina en el ámbito real, dentro de los diversos campos de la actividad humana.

Los datos son los que definen y clasifican a un problema.

El conjunto de datos permite al analista elaborar un modelo que represente en el ámbito simbólico al problema del ámbito real.

El lenguaje simbólico permite traducir la información del ámbito real, a una forma utilizable en el ámbito simbólico.

Se formulan hipótesis respecto al comportamiento del modelo y se someten a prueba experimentándolas para tratar de simular las reacciones del modelo.

De esta experimentación surge una predicción de comportamiento.

La solución implicada en el modelo se lleva al ámbito real y se observan los resultados prácticos en esa realidad, es decir:

si la predicción sobre el comportamiento del modelo resulta válida, el problema esta resuelto. Si no, el ciclo se vuelve a repetir tratando de recopilar más información que amplie la visión del problema.

Se dice que el proceso es sistemático en cuanto a que se procede paso a paso dentro de una secuela lógica.

La definición del problema se inicia con el establecimiento preciso de los objetivos, alternativas y restricciones a las que debe sujetarse la solución que se proponga y por la captación de información relativa al problema, debiendo ser esta información, tan abundante como sea factible y de la mejor calidad posible.

Será necesario analizar el grado de sensibilidad de las alternativas y considerar la posibilidad de suboptimización. A medida que las ramificaciones e implicaciones de un problema son más amplias, la definición de las metas es más compleja.

....

Una preliminar búsqueda de soluciones, implica el enlistar todos los posibles cursos de acción.

La cantidad y calidad de los datos recopilados es fundamental, ya que todos los demás pasos del proceso, descansan en dichos datos, y ninguno de los pasos puede compensar la falta de ellos.

Ya se había comentado el que en toda decisión intervienen factores que no pueden traducirse a pesos y centavos; estos son los factores no-monetarios o intangibles.

La distinción entre los factores tangibles y los intangibles, radica en la mayor o menor facilidad y exactitud con que pueden ser expresados cuantitativamente. Como ya hemos visto, ejemplos de intangibles pueden ser: consideraciones de seguridad, reputaciones, amistades, relaciones públicas, etc...

ELABORACION DEL MODELO.

Un modelo es la representación del ámbito real en el campo de lo simbólico. Se inicia la estructuración de un modelo desde el momento de fijar objetivos y alternativas.

Un modelo muestra la relación de causa a efecto entre objetivos y restricciones.

Se maneja de tal manera que muestre el resultado final de seguir un determinado curso de acción.

Dado que las situaciones de decisión varian muy ampliamente, son necesarios varios tipos de modelos. Consideramos tres clases: físicos, esquemáticos y matemáticos. Especialmente nos interesan los modelos matemáticos para su uso en estudios económicos.

Los modelos físicos pueden ser de menor, mayor o de igual tamaño que el objeto que representan. Ejemplos de estos modelos en el campo de la ingeniería, lo constituyen: modelos de canales, rompeolas, cortinas, sistemas de tuberias, etc...

Los modelos esquemáticos son representaciones gráficas de diversas situaciones. Ejemplos de estos modelos, son los Organigramas, que muestran la división y delegación de autoridades, las gráficas de-proceso de flujo de producción, las redes econométricas, redes de-camino crítico, gráficas de punto de equilibrio, etc...

Los modelos matemáticos están constituídos por ecuaciones y fórmulas. Como ejemplos podemos nombrar a los modelos probabilísticos, a los - modelos estadísticos, a los modelos de programación lineal, etc...- Una fórmula matemática para la determinación del momento flexionante en una viga, es un modelo matemático.

EVALUACION.

El mérito de un modelo, radica en que tan eficazmente represente el comportamiento y reacciones de las situaciones que se ubican en el ámbito real. La prueba última y definitiva de un modelo, se presenta cuando las predicciones en cuanto al comportamiento del pro-- blema, se someten a la realidad.

Cada tipo de modelo se evalua en forma diferente. Un buen modelo - contribuye a completar el análisis de un problema en cuanto a que - hace más fácil y objetivo observar y preveer los resultados originados por los diversos factores que afectan a la situación en estudio.

Una vez que todo el proceso de la toma de decisiones ha sido seguido, a final de cuentas, quien debe tomar la decisión final en cuanto a la solución a implementar será aquella autoridad quién en última instancia deba asumir la responsabilidad de los resultados y --- efectos que dicha decisión pueda implicar en un futuro.

Pero debemos recordar una vez más que para que una decisión constituya autenticamente una " decisión económica ", el analista deberá -- tomar en consideración para la estructuración de su modelo, todos - los factores de tipo monetario y todos los de tipo no-monetario o - imponderables que afecten a beneficios o a costos en su situación - decisional particular.

LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Las inversiones sólidas de capital son tan importantes para la economía de una empresa individual como para la economía nacional en conjunto. La expansión de las empresas y la introducción en ellas de adelantos tecnológicos, administrativos, organizacionales, etc... representa un factor muy importante para el desarrollo económico de ellas mismas y del pais, y contribuyen considerablemente a aumentar la productividad y a elevar el nivel de vida, ya que normalmente estas inversiones se traducen en creación de fuentes de empleo, generación de impuestos, incremento del ahorro, etc...

En especial debemos tener presente, [redacted] que la Industria de la Construcción, es una de las que individualmente, dentro de la Economía en general, más intervienen directa o indirectamente en la integración del Producto Bruto Nacional.

Los problemas implicados en la definición de las políticas de inversión de capital y en la selección de las posibilidades de inversión, se cuentan entre los más difíciles que afrontan los ejecutivos en negocios. Las inversiones de capital no representan un área aislada en la toma de decisiones. Implican el conocimiento profundo de las alternativas de producción, pronósticos del mercado, conocimiento [redacted] de los precios tanto de adquisición de materias primas como de venta de los productos en el mercado, posibilidades y costo de financiamientos, costo de la obra de mano, rendimientos, legislación laboral, legislación fiscal, etc...

El proceso de la toma de decisiones en el ámbito de las inversiones, se basa en estimaciones sobre el futuro. Las inversiones en propiedades inmuebles, generalmente no pueden recuperarse en periódos de tiempo cortos. Normalmente una vez que una compañía ha asignado fondos para una determinada inversión, se ha comprometido a seguir un sendero futuro del cual no podrá desviarse fácilmente. Por consiguiente, los elementos de incertidumbre y riesgo son particularmente grandes en las decisiones que se relacionan con la inversión de capital, y ésto, aunado muy frecuentemente por desgracia a un desconocimiento por parte de los empresarios de los principios del Análisis [redacted] Económica y de su propia realidad financiera y económica, induce a los ejecutivos de negocios a tener que confiar en corazonadas, medidas de costumbre ~~o~~ reglas generales. En vista de la importancia vital de las decisiones, esto es inadmisible. Un plan económicamente sólido para las inversiones de capital, establece~~r~~ un procedimiento, una mecánica, para detectar, recopilar, analizar y evaluar todos los datos sobre la realidad de las condiciones en las que se pretende invertir a fin de poder seleccionar las propuestas más convenientes.

Las empresas de éxito, generalmente tienen más proyectos de inversiones potenciales que fondos disponibles para realizarlos, por lo que, la escasez de fondos es un factor determinante en el criterio [redacted] para aprobar los proyectos de inversión a los que vayan a adjudicarse los limitados recursos con que cuenta la empresa, la cual, en estas condiciones, se ve obligada a establecer elementos de juicio, mecanismos y criterios para seleccionar entre las alternativas propuestas.

Se pueden distinguir diversos tipos de proyectos de inversión de capital: proyectos no lucrativos, proyectos de utilidades no conmensurables, proyectos de reposición de equipo, proyectos de inversión en activos, proyectos de expansión, proyectos para la reducción de costos de operación Y/o de producción, proyectos para mejorar la calidad de la producción, proyectos para lograr el mantenimiento de cierto nivel de utilidades, proyectos de investigación y desarrollo, etc...; y los elementos de juicio que se emplean para evaluar la conveniencia de una inversión de capital propuesta, dependen de la naturaleza de la misma inversión, así por ejemplo, los proyectos de inversión que llamamos " no lucrativos", implican gastos que se originan de requerimientos legislativos, de tipo contractual, etc.., como pudiera ser el caso de una reglamentación que obligara a las empresas a la implantación de sistemas para el control de emanaciones, o a la construcción de tapiales para garantizar la seguridad de los transeuntes, o a la obligación de invertir en cursos para la alfabetización, la capacitación técnica de los trabajadores, [redacted]. u orientado a su desarrollo social y humano.

Puesto que gastos de éste tipo son obligatorios, una empresa no tiene necesidad de establecer criterios para evaluar la conveniencia de estas erogaciones.

Por otro lado, los proyectos de " utilidades no-conmensurables ", se refieren a inversiones cuyo objetivo es el de aumentar utilidades, pero cuyo monto no puede calcularse dentro de un grado razonable de exactitud. A éste tipo de inversiones pertenecen los gastos en publicidad, los de promoción, las erogaciones en cursos de actualización impartidos al personal técnico y administrativo, el costo de asesorías para la revisión de los sistemas operativos de una empresa, las inversiones para otorgar una nueva prestación a los empleados y trabajadores a fin de mejorar su condición y estado de ánimo, etc.. Puede suponerse que una compañía interesada en maximizar sus utilidades, no realizará inversiones de este tipo, a menos que esté convencida de que en última instancia, estas rendirán una utilidad. Desafortunadamente en la mayoría de los casos, es virtualmente imposible medir exactamente el ingreso marginal derivado de tales gastos.

Con respecto a las inversiones de capital de ésta categoria, la empresa debe confiar primordialmente en el criterio de su gerentes más bien que en datos cuantitativos.

Sin embargo existen otro tipo de inversiones en las cuales no solo es factible, sino en cierto aspecto obligatorio, justificar plenamente mediante un análisis económico, la estimación cuantitiva de las utilidades y del rendimiento que se espera obtener de dicha inversión. La reposición de equipo, la inversión en activos, etc.., son ejemplo de este tipo de inversiones. Si se demuestra que los ahorros en costo que se derivarán de la adquisición de una nueva maquinaria para la substitución de una existente, van a proporcionar un rendimiento satisfactorio sobre la inversión de capital correspondiente, entonces el reemplazo se vuelve económicamente conveniente y justificado.

Aunque en lo sucesivo, nos ocupemos principalmente del uso de los datos cuantitivos para determinar la conveniencia de los desembolsos de capital, es muy importante reconocer que en el análisis de factibilidad económica del último tipo de inversiones descitas, deben hacerse intervenir, el factor riesgo, que varia según la naturaleza de cada proyecto y los elementos no-cuantitivos o no-monetarios, sobre los cuales ya se hizo mención anteriormente, ya que ambos elementos pueden ser determinantes en la decisión final. Por tanto, aspectos como las buenas relaciones con el personal de trabajo, el mantenimiento de una posición de prestigio dentro de una industria, el hacer frente a la competencia, y el cumplimiento de las leyes estatales y municipales, entre muchos otros que pudiésemos citar, pueden ser los motivos que decidan una inversión, independientemente de las posibilidades de costo e ingresos. Serían ejemplo de tales erogaciones, las encaminadas a actividades tendientes a proporcionar servicios y prestaciones para los trabajadores, a la introducción de máquinaria para poder hacer frente a la competencia, a los desembolsos para investigaciones y desarrollo de nuevas técnicas y procedimientos de producción y control, a garantizar la salud y seguridad de los trabajadores, etc..

En los estudios de inversión deben incluirse todos los factores de costo y de ingreso que se estimen inherentes a los proyectos bajo consideración. Es así, que debe reflejarse cualquier ahorro previsto en los costos de materiales o los que se deriven de la utilización del equipo o de la fuerza de trabajo. Igualmente deben preveerse hasta donde sea factible los cambios que pudiesen presentarse en los costos directos, por concepto de obra de mano, materiales y manejo de los mismos, utilización del equipo, rendimientos, mantenimiento, reparaciones, etc... así como de los aumentos o disminuciones en costos indirectos específicos tales como impuestos, seguros, fianzas, administración de oficinas centrales y de campo, financiamiento, etc...

De igual manera habrá que considerar todos los beneficios directos e indirectos que cada una de las alternativas de inversión ofrezca.

Ambos factores: de egresos e ingresos, de costos y de beneficios, deberán contemplarse dentro del horizonte económico que se considere adecuado en cada caso.

EL INCENTIVO DE LA UTILIDAD.

El incentivo que existe en cualquier decisión de invertir, es el de obtener una utilidad. Toda erogación que encierre la esperanza de originar una utilidad, puede considerarse como " inversión ", y de hecho este efecto es lo que define al concepto de inversión.

La esperanza de obtener una utilidad es la motivación que induce a una persona a invertir, y en consecuencia a renunciar a satisfacer sus necesidades presentes, con la esperanza de poder satisfacer mayor número de necesidades en el futuro. Esta motivación es la que rige las inversiones de cualquier índole: personales, industriales del sector público, etc... La utilidad puede también explicarse como el resultado de la productividad del capital.

FUENTES DE CAPITAL.

Los suministros de capital de una empresa, pueden provenir de varias " fuentes " y cada una de ellas puede tener diferente " costo " para la empresa.

En términos generales, podemos clasificar las llamadas " fuentes de capital " de una empresa en:

a) Fuentes Internas.
b) Fuentes Externas.

Las fuentes internas de capital están constituídas por:

1) El capital Constitutivo o Social de la empresa, integrado por las aportaciones directas de los socios o accionistas.

2) Las utilidades no distribuidas de ejercicios anteriores comunmente llamadas " pendientes por aplicar " y que al no ser retiradas por los socios, se dejan dentro de la empresa, para incrementar el capital de trabajo. Este capital, de hecho constituye un préstamo de los socios a la empresa, para permitir las operaciones propias de la misma.

3) Los fondos de depreciación.

Las fuentes externas de capital quedan representadas por los préstamos otorgados a la empresa, por instituciones de crédito, inversionistas particulares, etc...

El capital Social es aquel que es propiedad de quienes lo usan y quienes esperan recibir en retribución: una " utilidad ".

La retribución correspondiente al capital prestado por las fuentes de financiamiento externas, se denomina: " interés ".

El prestamista solo recibe un " interés " que es prefijado en monto y plazo y no participa de ningún otro beneficio derivado de la inversión que se haga con el capital, pero por otra parte, tampoco está sujeto a riesgos ni contingencias, al menos en circuntancias normales.

Es de hacerse notar que dentro de las " utilidades " que percibe el dueño del capital podemos distinguir dos partes: un " interés ", similar al que percibe como remuneración el capital prestado, y que corresponde al " costo " propiamente dicho del capital empleado; y una segunda parte que representa una compensación adicional al dueño del capital por el riesgo en que incurre al realizar la inversión con su propio dinero.

Esta subdivisión solo es válida desde el punto de vista de un análisis económico, ya que, como veremos más tarde, el punto de vista contable no acepta el impactar la " utilidad " (al menos para efectos de libros) con éste interés, o costo interno del dinero.

Cuando en una empresa, no es posible lograr el ingreso de nuevo capital social ni conseguir más préstamos externos, el capital disponible para nuevas inversiones quedará limitado a las fuentes internas de financiamiento y su incremento estará constituído solamente por la retención de las utilidades (si las hay) y por los fondos que en cada periódo se integran a las reservas de depreciación de los activos existentes.

Sin embargo, aun en aquellos casos en que para incrementar los recursos de la empresa, sea factible recurrir al aumento del capital social mediante el ingreso de nuevos accionistas, se encuentra normalmente, cierta resistencia a seguir esta alternativa, sobre todo en las empresas pequeñas y medianas, ya que el aceptar nuevos socios implica, para el grupo actual de dueños, normalmente reducido, el sacrificar el control que tienen de la empresa.

Para calcular el " costo del capital " de la compañía, habrá que estimar primero el costo de cada una de sus fuentes de financiamiento [redacted] y analizar después la composición de la disponibilidad total.

El problema de determinar este costo del capital, la más conveniente composición de los fondos y el interefecto en los costos de cada una de las fuentes de capital, es sumamente complejo pero de gran importancia para la planeación financiera de una empresa.

Dichas complejidades provienen fundamentalmente de la dificultad de calcular el costo de cada fuente de financiamiento (que además ~~de~~ es variable y sensible a muchos factores) y del hecho de que al realizar una inversión, los fondos empleados rara vez pueden identificarse con su fuente y más bien pueden considerarse emanados de algún tipo de crisol de capitales en el cual todos los disponibles se funden y pierden su identidad.

EL COSTO POR EL USO DEL CAPITAL.

De acuerdo con el principo del incentivo de la utilidad, cada peso gastado debe satisfacer la esperanza de utilidad del dueño del capital. Por otro lado, vemos en el inciso anterior que las fuentes de financiamiento de una empresa pueden ser internas, constituidas por el capital que en forma general llamaremos " capital propio ", y externas, constituídas por " capital prestado ". A cada tipo de capital corresponde una remuneración distinta de acuerdo con sus características propias.

El término: " interés ", se emplea para designar el pago o renta correspondiente al uso del dinero y ~~que~~ representa el costo del mismo. (Recordemos que incluida dentro del concepto " utilidad", hemos distinguido una parte constituída por un " interés " por el uso mismo del capital). Esta renta que se paga por el uso del capital, en escencia es la misma que se paga o se impacta en los costos, por ejemplo, por el uso de maquinaria o equipo, ya sea éste propio o rentado.

Sin embargo, es evidente que una empresa se encuentra en situación distinta si opera con capital propio, que si lo hace con la misma cantidad de dinero, solo que con capital prestado. Hay una clara e importante diferencia entre el uso de capital propio y el uso de capital prestado, y entre los conceptos de utilidad e interés.

El capital que proviene de un préstamo, normalmente presenta las siguientes características: ha sido solicitado por tiempo determinado, transcurrido el cual, se ha prometido reintegrarlo; el interés que por su uso se pagará, ha sido previamente fijado y no depende del resultado de la inversión a que el dinero se ha destinado, es decir, teoricamente al menos, no está sujeto al elemento riesgo. Por otro lado, tampoco será incrementado ni recibirá beneficio alguno adicional, si las utilidades que se obtengan de la inversión, resultan ser mayores que las previstas. Cuando el prestamista de un capital analiza y determina la tasa de interés que le es atractiva y a la cual está dispuesto a prestar su dinero, toma en cuenta: el riesgo en el que considera poder incurrir de que su dinero no le sea devuelto-

(~~el cual~~ riesgo que trata de reducir al mínimo mediante la exigencia de garantias colaterales, avales de terceros, etc...), sus gastos administrativos y el margen de utilidad que espera obtener.

A diferencia de lo anterior, la inversión del capital propio, tiene como esperanza de retribución, una utilidad, pero de hecho nada garantiza al inversionista que dicha utilidad será obtenida, ni el tiempo en el que se obtenga, y lo que es más, casi siempre existe el riesgo de que ni el capital inicial invertido pueda ser recuperado. Se desprende de aqui, lo justo de la diferencia en monto que normalmente existe entre " utilidad " e " interés ".

Otra muy importante diferencia entre utilidad e interés, es el tratamiento que la legislación fiscal dá a uno y a otro. Para el que percibe un interés, éste constituye un beneficio, una utilidad, la cual está gravada fiscalmente; en cambio, para el que paga dicho interés, ésta erogación representa un costo, el cual es deducible fiscalmente. Las tasas de impuesto con las que el fisco grava los ingresos obtenidos en calidad de interés (como remuneración por dinero que ha sido prestado), y en calidad de utilidad (por una inversión realizada), son muy distintas. Es claro que el impacto financiero que representa el pago del impuesto correspondiente en cada caso, debe estimarse y considerarse previamente en el análisis de toda alternativa de inversión.

La obligación de compensar con un rédito ó de " pagar " por el uso de un capital a su propietario puede constituir una obligación legal como es el caso de la obligación contractual originada por el préstamo de cierto capital a un interés y a un plazo predeterminado. O puede ser una obligación moral, como es la contraida por los dirigentes de una empresa con respecto a los accionistas cuyos fondos manejan y a quienes deben redituar unos " dividendos". Aún en el caso de capital propio, existe una obligación de sentido común de reconocer un costo de nuestro propio capital, derivado del hecho de que al invertir ese capital en esa alternativa, se están

....

rechazando las utilidades o beneficios que hubiere proporcionado ese capital invertido en otra alternativa.

En forma genérica, a la tasa de interés que constituye la recompensa por el uso del capital en cualquier forma de inversión, se le denomina frecuentemente " tasa de recuperación del capital ", ó - simplemente " tasa de recuperación ".

Aún en el caso de inversiones efectuadas por alguna dependencia gubernamental, debe considerarse, al hacer el análisis de factibilidad económica, un costo correspondiente al capital por emplear y debe fijarse una tasa de recuperación al proyecto, ya que dicho capital - por emplear, ha sido obtenido por medio de recaudación de impuestos, de los particulares, y habrá que reconocer que éstos hubiesen obtenido una cierta tasa de recuperación al invertir su dinero, de no haberseles privado de este mediante el cobro de un impuesto.

De cualquier manera y sea cual sea la fuente de la cual provienen los fondos por emplear debemos reconocer que " usar dinero, cuesta dinero ".

Hay varias razones que justifican el hecho de tener que considerar un costo al capital por emplear, y que se expresa mediante una " tasa de recuperación ", cada vez que se analiza una inversión. Entre ellas podemos nombrar: 1°. la tasa de recuperación, remunera al dueño del capital por el hecho de no poder usarlo mientras aquel a -- quien se le ha confiado, lo está usando. 2º la tasa de recuperación compensa al dueño del capital por el riesgo que está corriendo al invertir su capital. 3º la tasa de recuperación, constituye un incentivo para que el dueño del capital invierta.

A menos que el impacto económico correspondiente al " costo - del Capital " sea considerado de alguna manera en un análisis de inversión, el estudio resultante será inexacto, equivoco e inútil.

Aunque la inclusión del interés es indispensable en el estudio de inversiones, la determinación de un tipo de interés apropiado es- una tarea que presenta algunas dificultades. A veces se considera erróneamente al interés como si fuese igual al rendimiento sobre la inversión. Queremos volver a insistir en que el rendimiento sobre la inversión consiste de dos elementos: interés y utilidad. El primero representa el costo del dinero empleado; el segundo, el mismo costo más una recompensa por el riesgo y la incertidumbre. El costo del capital invertido (expresado en el interés), constituye el elemento de criterio mínimo para la aceptación de proyectos de inversión de capital que se emprenden para obtener utilidades. Una empresa debe recuperar, por lo menos, el costo correspondiente al dinero empleado antes de que pueda considerar que ha obtenido una utilidad real sobre su nueva inversión. Por otra parte, el elemento de criterio de aceptación mínimo que puede considerarse como una recompensa por el riesgo y la incertidumbre, varía con la naturaleza del riesgo incurrido.

Al elegir entre las inversiones potenciales, una compañía sólo debería aceptar aquellas propuestas cuyo rendimiento esperado sobrepase, cuando menos, el costo del capital. Haciendo una comparación muy sencilla, sería antieconómico para una persona pedir dinero prestado con el propósito de realizar una inversión, si es que no va a poder invertir estos fondos en forma que le proporcionen un rendimiento mayor que los intereses que debe pagar. El costo del capital constituye el elemento de criterio mínimo de aceptación o la tasa mínima de rendimiento sobre la nueva inversión. Proyectos de capital que rindan ingresos inferiores a ésta tasa mínima aceptable, diluyen el capital de los accionistas y conducen a las empresas a un proceso de descapitalización.

Desafortunadamente, el determinar el costo del capital de una empresa es quizás el área más compleja y sujeta a controversias en el campo de las finanzas.

COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL.

Todo propietario de capital, tiene más de una alternativa para invertir su dinero. Cada vez que acepta una de esas alternativas, renuncia a la oportunidad de invertir en otras alternativas y por tanto, renuncia también al beneficio que esas otras alternativas le hubiesen reportado. Esta situación da lugar al concepto de " Costo de oportunidad ". Ejemplificando el concepto anterior a un caso muy sencillo, supongamos que una persona tiene dos oportunidades para invertir sus ahorros: adquirir bonos financieros que le reportarán un 15% de interese~~#~~ anual o invertir en una casa para habitarla con su familia. Si decide invertir sus ahorros en la compra de la casa, de hecho está rechazando la oportunidad de adquirir los bonos y por tanto rechaza también una utilidad del 15% sobre su capital, y debe reconocer entonces que esta tasa: 15%, que deja de percibir, constituye el costo del capital con el que va a financiar la compra de la casa, aunque éste capital sea suyo. Por tanto, antes de decidirse deberá comparar ésta utilidad (que dejará de percibir) con la utilidad (en éste caso, satisfacción) que le proporcionará la posesión de una casa propia para él y su familia.

Lo anterior deja de manifiesto, que ni para el capital propio, puede evitarse el considerar~~##~~ un costo: " el costo de oportunidad ", cuando se pretende aplicarlo a una inversión o al logro de un satisfactor. Desde el momento en que el propietario de un cierto capital decide invertir en determinada alternativa y partiendo de la base de que los recursos con que cuenta son limitados, está de hecho renunciando a la posibilidad de invertir en otras alternativas, aunque una de ellas pudiera ser, en el peor de los casos, simplemente dejar el dinero en el Banco ganando un cierto interés por bajo que este sea. Por otro lado de- debe analizar si la utilidad esperada, usualmente expresada en términos de una tasa de interés anual, es suficiente para justificar la inversión en la alternativa propuesta; y aunque estrictamente hablando, no existe costo del capital (ya que éste es propio), al invertirlo debe esperarse, como mínimo, recibir una utilidad al menos igual a la de las alternativas rechazadas, siendo esta utilidad rechazada y perdida, lo que constituye el costo de oportunidad del capital.

En orden a determinar si la tasa de recuperación esperada en una cierta inversión es suficiente, debe compararse esta tasa esperada con -- las tasas que pudieran obtenerse de usar el capital en otras alternativas.

En la industria, un empresario tiene básicamente dos alternativas de inversión del capital de la firma: una es invertir el dinero dentro de la misma empresa (como capital de trabajo para las operaciones pro-- pias de la misma), y otra es invertirlo fuera de la empresa (en compra de bonos financieros, acciones de otras empresas, etc..)

Veamoslo de esta forma: es cierto que no debería aprobarse la inversión del capital social de la empresa, (o la reinversión de las utilidades obtenidas, en su caso), dentro de la misma, si la tasa de - recuperación que se espera obtener es inferior a la que se pudiese- obtener con alguna inversión fuera de la empresa. Las oportunidades externas y sus tasas de recuperación, constituyen, desde este punto- de vista, un criterio de límite inferior para la inversión interna.- Sin embargo, la alternativa de invertir externamente a la empresa, - es muy raro que pudiese representar una situación adecuada, ya que, por un lado, dentro del campo industrial, lo normal es que a una empresa se le presenten internamente una infinidad de alternativas y posibilidades de inversión de fondos para mejorar su situación económica, para incrementar su nivel de ingresos, reducir costos de producción- u operación, inversiones en maquinaria de producción, equipo de transporte, equipo de oficina para la implementación de nuevos sistemas - administrativos, inversiones en medidas para aumentar las prestaciones del personal, etc... y por otro lado, si a la luz de una realidad, las mejores alternativas de inversión se presentan en el exterior, no hay razón para continuar con ese negocio y en consecuencia la empresa debe liquidarse.

Solo en una situación particular en la que se tenga en un momento dado, un superavit de recursos monetarios, se podría justificar que ciertos fondos fuesen destinados a la compra de bonos o acciones aún de - relativo bajo interés, cuando se prevea que, de no proceder así, di-- chos fondos permanecerán " inactivos " en una cuenta bancaria sin obtener ninguna recuperación.

Se sobre entiende que para que lo anterior pueda justificarse, la situación descrita es meramente temporal y circunstancial, ya que de no ser así lo mejor es que los administradores de la empresa,- reintegren el capital a los accionistas de la misma, por resultar evidente que de seguir dicho capital invertido en la empresa, no- podrá rendir a sus dueños una tasa de recuperación mínima esperada. Es claro que un administrador, actua incorrectamente cuando- retiene ese capital sabiendo que no puede satisfacer esas mínimas esperanzas de utilidad de los inversionistas.

Resulta entonces claro, que el costo de oportunidad de la empresa está determinado por el costo de oportunidad de sus accionistas,- ya que cada accionista, al momento de invertir en la empresa, mediante la compra de nuevas acciones o conservando las anteriormente adquiridas o prestando dinero para la operación de la empresa, está rechazando otras oportunidades de inversión y de hecho, las- utilidades que estas últimas le hubiesen podido proporcionar. -- Esas oportunidades y esas esperanzas, se convierten en consecuencia, en el costo de oportunidad del capital social de la empresa.

No podemos mencionar el costo de oportunidad sin dejar de observar que sugiere un medio de determinar el costo del capital.

Si el financiamiento se lleva a cabo con fondos ajenos, es decir, con capital prestado, la tasa de interés que se paga por el uso - del dinero claramente establece el costo del capital.

<u>EL VALOR DEL DINERO CON EL TIEMPO.</u>

Hemos visto que el dinero debe estar " ganando " cuando menos, lo que hemos llamado el costo del capital y esto da origen al concepto del valor del dinero con el tiempo, el cual puede ilustrarse de la siguiente manera:

Supongamos un préstamo de $ 1,000.00 que será usado durante los - próximos cuatro años. Consideramos que el costo del capital es de [redacted] anual.
50%

En estas condiciones, la cantidad adeudada al cabo del primer año está constituida por la cantidad original $ 1,000.00 más $ 500.00 correspondientes al costo del capital, o sea, $ 1,500.00; al final del segundo año, serán $ 1,500.00, más el costo del capital por -- ese año, $ 750.00, lo que da un total de $ 2,250.00; al final del tercer año la cantidad será de $ 2,250.00 más $ 1,125.00, o sea, - $ 3,375.00 y al final del cuarto año, serán $ 3,375.00 más - - - - $ 1,687.50, o sea, $ 5,062.50 .

Lo anterior constituye un proceso de interés compuesto, esto es, la acumulación de intereses sobre el capital original y sobre los intereses anteriormente generados.

Aplicando el concepto del valor del dinero con el tiempo en el ejemplo anterior, observamos que $ 1,000.00 de hoy, tienen un valor de $ 1,500.00 dentro de un año y de $ 2,250.00 dentro de dos, de - - - $ 3,375.00 dentro de tres, y de $ 5,062.50 dentro de cuatro. En forma inversa, también podemos decir que una cantidad de $ 5,062.50 -- dentro de cuatro años, equivalen a $ 1,000.00 hoy.

Claro que lo anterior es considerando una tasa de incremento del valor del dinero con el tiempo, de 50% anual, lo cual no siempre será cierto, ya que podrá ser mayor o menor de acuerdo con las condiciones de cada caso particular, pero al menos, lo que podemos asegurar es que dicho valor nunca es cero.

Como ejemplo de que lo anterior es cierto, preguntémonos si alguien nos querrá prestar $ 1,000.00 ofreciéndole nosotros reintegrarle -- los mismos $ 1,000.00 al cabo de un año; aún dandole plenas garan-- tías de que su dinero le será entregado sin falta y en fecha determinada. Si nadie acepta, la razón será que $ 1,000.00 de hoy, no -- equivalen a $ 1,000.00 dentro de un año. Si la mínima cantidad que alguien exige le sea pagada dentro de un año para otorgarnos el --- prestamo de $ 1,000.00 es de $ 1,500.00, esto significa que el va-- lor del dinero con el tiempo se valúa en 50% anual.

Lo anterior nos lleva además a otra consideración: supongamos que nos informan que las erogaciones que se llevarán a cabo en cierta inversión, serán: $ 1,000.00 el día de hoy, $ 1,500.00 al terminar el primer año y $ 2,250.00 al terminar el segundo año. No podemos decir, que el costo de la inversión está representado por la suma de las erogaciones: $ 1,000.00 más $ 1,500.00, mas $ 2,250.00 --- igual a $ 4,750.00 ya que estaríamos sumando cantidades cuyo monto está expresado en distinto tiempo; es decir, si bien es cierto que el desembolso real si será de $ 4,750.00, también lo es el -- hecho de que esta erogación no será efectuada de un golpe en un - momento dado, sino que parte al menos de la misma, será diferida una y dos años.

Lo correcto es, sumar las tres cantidades, pero una vez que han - sido expresadas " en un mismo tiempo ", asi por ejemplo, si actualizamos los valores de cada año al momento actual y consideramos por otro lado que la tasa representativa del valor del dinero con el tiempo, es de un $ 50%, tenemos:

Valor actual, de $ 1,000.00 gastados hoy:	$ 1,000.00
Valor equivalente actual de $ 1,500.00, que se gastarán dentro de un año:	1,000.00
Valor equivalente actual de $ 2,250.00, que se gastarán dentro de dos años.	1,000.00
Suma actualizada de las erogaciones, al día de hoy:	$ 3,000.00

Podemos establecer, que en reconocimiento del concepto de valor - de dinero con el tiempo, las cantidades de un cierto flujo de --- efectivo, deberán ser traducidas a un mismo punto del tiempo, an-- tes de ser sumadas o comparadas entre si; y es muy importante que quede claro que no pueden sumarse o compararse, cantidades expresadas en distintos puntos del tiemp.

Ahora bien, detengamonos un momento a pensar: ¿ Cuál es la razón de fondo de que siempre que analizamos una alternativa de inversión, hay necesidad de considerar un incremento del valor del dinero con el --- tiempo ?. La primera respuesta que se nos ocurre es que el tener que pagar un interés, constituye un hecho en el ámbito de los negocios y en general en el medio mercantil. Pero entonces surge a su vez, otra pregunta aún más compleja: ¿ Cómo se explica y se justifica que en los negocios, el interés del dinero, sea un hecho ?.

En economía se explica lo anterior mediante un análisis de la situación de la oferta y de la demanda de fondos para inversión. Desde- el punto de vista de la oferta, el interés es necesario como incentivo para invertir. Desde el punto de vista de la demanda, el interés es posible dado que el capital es productivo.

Desde el punto de vista de la oferta, si una persona presta dinero- que ha ahorrado, se priva de poder satisfacer en ese momento ciertas necesidades. No puede emplear su dinero en la adquisición de bienes de consumo, si se lo ha prestado a alguien, o si lo ha invertido en la compra de maquinaría o equipo (esto es, en bienes de producción), o ha comprado acciones de una empresa, o lo ha pagado como impuestos al gobierno. En todos estos casos requiere la existencia de un in-- centivo que lo compense del diferimiento que estas inversiones implican, de la satisfacción inmediata de sus necesidades.

Por otro lado hay que reconocer que otro incentivo, como es el "sentimiento de seguridad", puede en un momento dado, ser más importante que el incentivo: interés. Es común que cierta cantidad de fondos se invierten a tasas menores de interés, pero en condiciones de menor riesgo, ya que la sensación de confianza y seguridad que una- inversión de este tipo proporciona, compensa una tasa de recupera-- ción baja relativamente a las que pudieran brindar otras alternativas de inversión pero que implicasen mayor riesgo. Sin embargo, en términos generales podemos afirmar que mientras mayor sea la tasa- de interés, mayor es la motivación para diferir el consumo, e invertir con la esperanza de obtener un interés sobre nuestro dinero.

Es razonable suponer que si desaparecieran las perspectivas de obtener un interés como remuneración a la inversión del dinero, también desaparecerían los estímulos para invertir...

Ahora, desde el punto de vista de la demanda, ¿ cómo es posible pagar interés ?, esto es, ¿ cómo puede una empresa encontrar conveniente pedir dinero prestado y pagar el interés requerido por ello ?; ¿ cómo -- puede una sociedad pagar dividendos a sus accionistas, lo cual no es- más que una remuneración por la inversión de su dinero ?. La respuesta es que los bienes de capital son productivos. El capital y los -- bienes de producción (maquinaría, equipo, estructuras, etc...), son productivos. Es por esto que una empresa puede pagar un interés sobre dinero prestado, o puede atraer capital de socios que invertirá en bienes de producción, y pagarles posteriormente dividendos mayores que el interés que pudieran haber obtenido simplemente prestando su - dinero.

Con lo anterior tenemos la doble explicación al interés: "El interés puede existir porque el capital es productivo, y es necesario que el interés exista para que haya un incentivo substancial para la inversión ".

Pero quizás, más correcto que decir que los bienes de capital son productivos, sería afirmar que bajo circunstancias favorables, bienes - de capital específicos son suficientemente productivos para generar- una recuperación atractiva, y por otro lado, el problema de establecer si bajo determinadas circunstancias, bienes de capital específicos serán lo suficientemente productivos para generar una recuperación atractiva, es un problema de Ingeniería Económica. Cada situación deberá ser examinada a la luz de los beneficios y costos que las circunstancias permitan estimar. Las consideraciones de tipo técnico que un problema de este tipo implica, hacen necesaria la intervención de conceptos de Ingeniería Económica para su solución.

Un analista, conocedor de los principios y las técnicas de la Ingeniería Económica, está capacitado para hacer recomendaciones respecto a- la conveniencia o nó, de invertir en bienes de producción, ya que puede determinar si dichos bienes, bajo las circunstancias específicas del caso, serán tan productivas como para generar una tasa de recuperación (interés) lo suficientemente atractiva para justificar la inversión en ellas.

TASA MINIMA INTERNA DE RECUPERACION.

Los estados financieros de un negocio, el Balance General y el Estado de Pérdidas y Ganancias principalmente, muestran la utilidad total general obtenida por medio de la inversión realizada, pero debemos notar que de ellos solo podemos determinar la productividad promedio de cada peso. Desgraciadamente el sistema contable no está diseñado para ser más específico al respecto.

Antes de aprobar una inversión debemos insistir en que cada peso: a) garantice una tasa de recuperación y b) que ésta no sea menor que una tasa mínima de recuperación prefijada.

La determinación de la tasa mínima de recuperación se deriva de la forma o criterio de la empresa para aplicar y distribuir sus fondos disponibles, normalmente limitados y cubrir una demanda casi siempre mayor ~~de~~ que ellos.

Normalmente, cada año, una empresa podrá predecir con mayor o menor aproximación la disponibilidad de fondos con que podrá contar en ese período para cubrir los gastos de las operaciones que sus inversiones demanden. El suministro de fondos podrá provenir como ya hemos visto, principalmente de reinversión de utilidades, de liquidación y fondos de depreciación de activos fijos, líneas de crédito, créditos externos diversos o de incrementos de capital social, etc., sin embargo, generalmente ocurre que, el programa de suministros es escaso en comparación con la demanda de fondos y recursos monetarios que requieren las alternativas de inversión que se presentan.

Para ilustrar el problema supongamos que el requerimiento de fondos para el periodo siguiente, se calcula pudiera ser hasta de - - - - - $ 100,000,000.00 aproximadamente, pero se estima que entre todas las diversas fuentes de financiamiento se podrán obtener solamente unos $ 70,000.000.00 . El objetivo del director de fianzas, será obviamente, invertir los $ 70,000.000.00 disponibles, en aquellas alternativas de inversión que ofrezcan la mayor retribución y tener que rechazar proposiciones por un monto de $ 30,000,000.00 que prometen menor retribución.

Para lograr esto, partamos de la suposición de que el analista esté en posición de poder enumerar sus alternativas de inversión en orden decreciente de acuerdo con su retribución estimada y calcular el monto de la Inversión Requerida para cada alternativa, (a juzgar por - ejemplo, por la demanda estimada en el mercado, de los productos de - cada una de las diversas líneas de producción: A,B,C, etc..., como - podria ser el caso de una empresa fabricante de bienes de consumo).

Alternativas	Inversión Requerida para cada alternativa	Tasa probable de Recuperación.	Monto acumulado de Inversión
A	5,000,000.00	61% o más	5,000,000.00
B	12,000,000.00	61% - 58%	17,000,000.00
C	15,000,000.00	57% - 54%	32,000,000.00
D	10,000,000.00	53% - 50%	42,000,000.00
E	19,000,000.00	49% - 46%	61,000,000.00
F	9,000,000.00	45% - 42%	70,000,000.00
G	13,000,000.00	41% - 39%	83,000,000.00
H	6,000,000.00	38% - 36%	89,000,000.00
I	11,000,000.00	menos de 35%	100,000,000.00

En estas condiciones, el fondo disponible de $ 70,000,000.00 deberá - ser aplicado solo a aquellos proyectos que prometan una tasa de recuperación de 42% o más. Esto significa que la tasa interna mínima de recuperación aceptable para el próximo periodo y dadas las condicio-- nes anteriores, es de 42%, que es la tasa mínima de recuperación que esperamos obtener al invertir en el proyecto F, ya que bloquear recursos en alguna de las alternavas G, H, o I, que ofrecen tasa de -recuperación máxima menor de 42%, equivale a aliminar la posibilidad de invertir en una alternativa que brinde 42% o más.

Esto quiere decir que cualquier inversión que ofrezca 42% o más debe ser aprobada y cualquier proyecto que ofrezca una tasa menor, debe ser rechazada. También quiere decir que $ 30,000,000.00 de inversiones que prometen tasas de recuperación hasta de un 41% serán rechazadas. La tasa mínima de recuperación establece el límite inferior, abajo del cual no podemos invertir, es decir, establece la tasa interna mínima aceptable de recuperación.

Enfocado desde otro punto de vista, podemos decir que si en una serie de alternativas de inversión: la alternativa A es preferible a la alternativa B, la B es preferible a la C, etc...., M es la alternativa menos preferible aceptada y N es la alternativa más preferible no aceptada; el costo de oportunidad a considerar al capital, para cualquier alternativa B por ejemplo, de inversión, es la tasa de recuperación de N, ya que representa la utilidad que rechazamos automáticamente cuando aceptamos invertir en B. Así por ejemplo en el caso ilustrado, al agotarse los recursos disponibles con la alternativa F, se establece como costo de oportunidad, la tasa de 41%.

En la tabla anterior, las alternativas: A, B, C, H, I, pueden interpretarse como alternativas de inversión de diversa índole que se le presentan a un inversionista en un momento dado. O pudieran ser diversos artículos producidos por una fábrica y cuyo volumen de producción individual no puede incrementar a voluntad por estar condicionado por la demanda en el mercado; de no ser así, la empresa aplicaría la totalidad de sus recursos a producir los artículos A y B que mayor recuperación le proporcionan, aúnque también por otro lado, desearía contar con los recursos económicos suficientes para, producir la mayor variedad posible de artículos, aún los que le reportan bajo margen de utilidad, con el fin de presentar al consumidor una gama -más amplia de productos e incrementar así el área de su propio mercado. Dado que ni una ni otra alternativa son posibles, dada la limitación del mercado, por una parte, y lo limitado de sus recursos por otra, debe optar por aplicar los recursos de que dispone, para ir saturando cada uno de los renglones A, B, C,... sucesivamente, hasta el agotamiento de dichos recursos, lo cual sucede en el ejemplo planteado, en la alternativa F. Para el caso de una empresa constructora, las alternativas pudieran significar obras o conjuntos de obras, que considera puede solicitar y obtener de diversas fuentes de trabajo durante el próximo año y con cada una de las cuales, en condiciones normales y por experiencias pasadas (dado que conoce el tipo de obra que ejecuta cada fuente, precios unitarios, condiciones de trabajo, forma de pago, etc,), espera poder obtener, al finalizar cada una de ellas, una tasa de recuperación dentro del rango expresado en la tabla.

Para efectos del ejemplo planteado, los porcentajes indicados en la tabla, como probables tasas de recuperación, se refieren a tasas de utilidad neta contablemente hablando, es decir solo faltando deducir el costo del capital empleado, costo que, como veremos más adelante, y salvo el caso de que haya constituido una erogación efectiva, la Contabilidad no registra, reconociéndose solo como costo desde el punto de vista de análisis económico, para efectos de calcular la utilidad neta (económica), y determinar así la bondad económica de la inversión.

Al referirse, para efectos del grupo de alternativas I, de tasas probables de recuperación de "menos del 32%", se sobre entiende que la tasa pueda ser menor del 32% pero mayor que el porcentaje indicativo del costo del capital, ya que ni siquiera seria aceptable una inversión cuya tasa de recuperación fuese igual al costo del capital, porque en esas condiciones, el inversionista solo cubriría sus costos pero no tendría ningún margen adicional que le compensara de los riesgos en que incurre o de las desventajas u obligaciones que adquiere.

Por lo anterior el límite mínimo que se marque para considerar aceptable la tasa de recuperación de una alternativa, será superior al costo del capital en el porcentaje que el inversionista considere que queda compensado su riesgo.

Debe tomarse en consideración, que para el caso de algunas empresas, su costo "promedio" de capital, pudiese resultar más bajo que para otras, ya que si bien es cierto deben recurrir normalmente a dinero prestado para operar, el cual es caro, u operar con su capital social, que también lo es, cuentan en ocasiones con posibles anticipos, o con el financiamiento de proveedores y subcontratistas, por el cual normalmente no pagan, [redacted] y que puede representar en monto y en proporción a las otras fuentes de financiamiento, un renglón considerable. Cuando más, se podrá decir que el costo del financiamiento proporcionado por proveedores, está representado por el porcentaje de "descuentos por pronto pago", que se deja de percibir al no poder cubrir oportunamente el importe de las compras [redacted]. Financiamientos o ingresos de este tipo (ya que un anticipo no puede considerarse estrictamente como financiamiento aunque si capital disponible de trabajo), pueden abatir fuertemente el costo promedio del capital en el "crisol" de capitales de la empresa, ya que cabe recordar que el costo del capital de trabajo es el promedio de los costos de capital proveniente de las diversas fuentes de financiamiento, que como se dijo anteriormente, se funden en un solo crisol para efectos de la operación de la empresa, lo cual hace muy difícil identificar, una cantidad de dinero empleado, con la fuente de financiamiento especifica de la cual proviene.

Ahora bien, debemos reconocer, que las cosas no son en la realidad tan simples como se plantea en el ejemplo de la tabla. Por ejemplo, es probable que sea muy difícil preveer las oportunidades que se presentarán en el transcurso del próximo año o asegurar que no se pre-- [redacted] sentarán otras que las supuestas. El límite del monto de capital proveniente de financiamiento externo, normalmente no es fijo, y más bien puede afirmarse que varia de acuerdo con las oportunidades y perspectivas que se presentan a la empresa, los resultados que va obteniendo, su situación en cuanto a prestigio, solidez, etc... Otros factores pueden influir, además de la probable tasa de recuperación, en el grado de atractivo que presenten las diversas alternativas, como pueden ser, la duración del período en que se espera obtener los rendimientos de cada alternativa, o el grado de riesgo que se considere asociado a cada una de ellas; así por ejemplo, pudiera suce-- der que se decidiese invertir en la alternativa G en lugar de la F, por implicar esta última un riesgo mucho mayor que la primera, no obstante la G, ofrezca menor tasa de recuperación.

Es indudable, que las diversas alternativas de inversión, normal-- mente implican diferente grado de riesgo y que el grado de riesgo influye considerablemente en la tasa mínima que resulta atractiva para invertir en cada alternativa.

Es un hecho reconocido en el ámbito real de los negocios, que una empresa con escaso capital propio, y por tanto con mayor necesidad de capital prestado, y que en general representa alto riesgo para quien le presta, consigue ese dinero prestado a una tasa de inte-- rés mucho más alto que el que se brinda a empresas más consolida-- das y con mayor respaldo económico. Empresas en dificultades, difí cilmente encuentran financiamiento externo, aún siendo caro. A em- presas en auge, se les brinda diversas oportunidades de financia-- mientos, a tasas de interés bajas, por el hecho de que quienes in- vierten en ellas reconocen una garantía para su capital y muy ba-- jas probabilidades para el elemento riesgo.

Sin embargo, no obstante las objeciones expresadas y las dificul-- tades que puedan presentarse en cada caso particular, debe quedar claro el principio de que la tasa mínima interna de recuperación - debe ser analizada teniendo como objetivo fundamental el lograr -- dentro de la situación y condiciones particulares de cada empresa, el mejor aprovechamiento posible de los recuros de que dispone.

por todos los criterios expuestos, si a una empresa se le presen-- tan en un momento dado, amplias oportunidades de inversión por un lado, con la posibilidad de obtener de ellas altas tasas de recu-- peración, y por otro lado, se encuentra con que los recursos de -- que dispone para llevar a cabo dichas inversiones, resultan esca-- sos, en relación al monto de capital que las mismas requieren, su tasa mínima atractiva de recuperación será muy alta. Si por el con trario, durante cierto periódo, el mercado le ofrece reducidas alternativas de inversión con bajas tasas probables de recuperación, y además dispone de capital para operar, su tasa mínima atractiva de recuperación disminuirá sensiblemente, al menos mientras dichas circunstancias prevalezcan.

Si en las condiciones del ejemplo planteado en la tabla, se llegara a determinar que en promedio, el costo de capital de los - - - $ 70,000,000.00 disponibles para operar, ya considerando la composición de dicho capital y el costo individual de las diversas fuentes de financiamiento que lo integra, es de un 32%,la tasa mínima atractiva de recuperación seguiría siendo de 42%, ya que prevalece el argumento de que: "invertir en una alternativa que ofrezca una tasa de recuperación inferior a 42%, equivale a eliminar la posibilidad de invertir en otra alternativa que ofrezca 42%, o más, dado que los recursos son limitados". En estas circunstancias nos damos cuenta de que para efectos de la determinación de la tasa mínima de recuperación, el dato de un 32%, para el costo del capital , resulta irrelevante, (al menos en éste ejemplo, y dada la diferencia entre el 32% y el 42%).

Lo que cabría pensar en este caso, es en la posibilidad de conseguir mayor capital para invertir, aún a una tasa de interés más alta, con el consiguiente incremento del costo promedio del costo -- del capital, ahora en un 32%, y aplicarlo a alternativas de los grupos G, H, o I, solo teniendo cuidado de que la diferencia entre el costo promedio del capital empleado en las diversas inversiones (ya - en estas condiciones, mayor de 32%), y la tasa mínima esperada de recuperación de dichas inversiones (ya menor del 42%), sea tal que compense, de acuerdo con las consideraciones hechas anteriormente, los riesgos en que se incurre al invertir, al aceptar dinero prestado, etc...

Obviamente el objetivo que persigue un inversionista es el de obtener las tasas más altas de recuperación posibles "después" de impuestos y no "antes" de impuestos. Frecuentemente sucede que los - mejores proyectos después de impuestos, no son los mismos que los mejores antes de impuestos. Esto se explica por el hecho de que pa ra distintas circunstancias se presentan diferencias en cuanto a los factores que son fiscalmente deducibles en un caso y en otro, o al hecho de que distintos tipos de inversiones se rigen por diferente legislación fiscal y por tanto, por distintas tasas impositivas. Por lo anterior, podemos concluir que es conveniente y en ocasiones necesario,realizar los análisis económicos "después de impuestos".

Es muy conveniente hacer notar que los criterios en cuanto a la tasa mínima interna de recuperación, una vez fijada ésta dentro de una empresa, sean observados en todos los niveles de la misma y no únicamente en los niveles gerenciales. Es decir, que los efectos que la tasa mínima establecida debe tener en toda decisión de inversión dentro de la empresa, se contemple no solo en las decisiones que se tomen en las altas esferas de la Dirección, sino también en las que se tomen en los departamentos de operación, compras, etc... Es frecuente observar que en las decisiones que se toman en estratos inferiores, no se siguen las políticas de inversión dictadas por la gerencia y normalmente se toman sin previo análisis económico y solo en base a tradición, costumbre, inercia o mera intuición. Es absurdo suponer que en una empresa constructora por ejemplo, se están obteniendo efectivamente los beneficios de una adecuada política de inversiones, si esta solo se aplica en las decisiones a alto nivel gerencial, pero en el departamento de adquisición de equipos, se compra maquinaría sin justificación económica real en cuanto a la oportunidad del momento, capacidad, etc., o no se reemplaza equipo que ya ha superado su período de vida económica y continua en operación.

Resumiendo todo lo anterior, podriamos concluir que los elementos básicos en la determinación de la tasa interna mínima atractiva de recuperación son normalmente:

- La naturaleza de las alternativas de inversión que se presentan a la empresa.
- El monto de la inversión que cada una de dichas alternativas demanda.

- La tasa de recuperación esperada en cada alternativa .
- El monto disponible de los recursos con los que se hará frente a esas inversiones.
- El costo promedio real de ese capital disponible para invertir.
- El grado de riesgo que cada alternativa de inversión implique.

Hay que tener presente que la tasa interna mínima atractiva de recuperación es dinámica y cambiante, en función de las variaciones de cada uno de los factores anteriores. No existe una cifra determinada y fija como tasa mínima aceptable de recuperación, que sea apropiada bajo todas las circunstancias. Dicha tasa deberá ser analizada y establecida en cada caso y para cada situación.

DIFERENCIA ENTRE EL ENFOQUE CONTABLE Y EL CRITERIO DE ANALISIS ECONOMICO.

Un análisis económico tiene por objeto determinar si un cierto capital debe ser invertido o aplicado a otro fin distinto del actual.

Un estudio económico tiene como elementos, cursos de acción que aún no se han realizado. Tiene que ver con "eventos futuros": ¿ se debe seguir cierto curso de acción?, ¿el procedimiento es más-económico?. El análisis económico proporciona bases para las decisiones.

Ahora bien, una vez que se ha tomado la decisión de invertir y el-capital ha sido invertido, se desean conocer los resultados financieros, para lo cual se establecen mecanismos y procedimientos específicamente orientados para la determinación de los resultados - financieros y el control de las operaciones: todos los cuales constituyen la contabilidad general y la contabilidad de costos.

La contabilidad es en este sentido, la historia de un negocio; se refiere a eventos pasados. Actua ya conociendo ingresos y egresos. Estima resultados y calcula cual fué la tasa de recuperación.

El análisis económico recomienda una cierta inversión. Si la decisión se toma basada en el estudio económico, la contabilidad comprobará posteriormente si el estudio económico y las recomendaciones-fueron correctas.

La contabilidad tiene la ventaja de trabajar con hechos históricos, financieros ya acaecidos, el análisis económico solo cuenta-con estimaciones sobre el futuro.

Posteriormente, las observaciones de la contabilidad pueden ser - aprovechadas por el analista económico, pero deben saber ser interpretadas.

Como en un experimento, la contabilidad registra todos los eventos significativos financieramente hablando, de una inversión y de estos hace posible determinar los resultados y preparar un reporte financiero.

Interpretando correctamente estos reportes se toman las decisiones en el campo económico por los dirigentes.

Se trata de dos funciones distintas pero conectadas.

El contador nunca afecta las operaciones de un "costo de Capital", a menos que hayan sido efectuadas erogaciones, como pueden ser pagos de intereses bancarios, pago de hipotecas, etc..., mientras -- que el analista económico carga a cada peso, de la responsabilidad de cubrir el "costo del capital". Así por ejemplo, si la adquisición de activos o la operación de la empresa son financiadas completamente por capital social, no hay que pagar fisicamente un interés como se -- haría en el caso de que el dinero fuese prestado. En este caso, la Contabilidad no impacta los costos con el importe de un interés correspondiente al capital empleado. Sin embargo, quien realice el análisis económico de la inversión, debe considerar un interés correspondiente al capital empleado y emanado del concepto del costo de oportunidad.

Muy frecuentemente surgen conflictos entre los Ingenieros y los Contadores debido a su distinto enfoque y punto de vista respecto a -- los costos. Estas controversias reflejan un mutuo desconocimiento de los objetivos y de los procedimientos que cada uno de ellos aplica para propósitos distintos. Es necesario el reconocimiento por ambos, de la diferencia en los objetivos de su actuación.

59

T-1

½% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, ½, N)	(P/F, ½, N)	(A/P, ½, N)	(P/A, ½, N)	(A/F, ½, N)	(F/A, ½, N)	(A/G, ½, N)	N
1	1.0050	99503	1.0051	9949	1.0001	9998	0000	1
2	1.0100	99008	50385	1.9847	49885	2.0046	4613	2
3	1.0150	98515	33674	2.9696	33174	3.0143	9537	3
4	1.0201	98025	25318	3.9497	24818	4.0292	1.4531	4
5	1.0252	97538	20305	4.9248	19805	5.0491	1.9462	5
6	1.0303	97052	16963	5.8951	16463	6.0741	2.4413	6
7	1.0355	96570	14576	6.8606	14076	7.1043	2.9364	7
8	1.0407	96089	12786	7.8213	12286	8.1396	3.4304	8
9	1.0459	95611	11393	8.7772	10893	9.1800	3.9231	9
10	1.0511	95136	10279	9.7282	09779	10.225	4.4140	10
11	1.0563	94663	09368	10.674	08868	11.276	4.9063	11
12	1.0616	94192	08609	11.616	08109	12.332	5.3959	12
13	1.0669	93723	07966	12.553	07466	13.394	5.8857	13
14	1.0723	93257	07415	13.485	06915	14.460	6.3752	14
15	1.0776	92793	06938	14.413	06438	15.532	6.8614	15
16	1.0830	92332	06520	15.336	06020	16.610	7.3489	16
17	1.0884	91872	06152	16.255	05652	17.693	7.8351	17
18	1.0939	91415	05824	17.168	05324	18.781	8.3198	18
19	1.0993	90961	05531	18.078	05031	19.874	8.8046	19
20	1.1048	90508	05268	18.983	04768	20.974	9.2892	20
21	1.1103	90058	05029	19.883	04529	22.078	9.7715	21
22	1.1159	89610	04812	20.779	04312	23.183	10.253	22
23	1.1215	89164	04614	21.671	04114	24.304	10.735	23
24	1.1271	88721	04433	22.558	03933	25.425	11.216	24
25	1.1327	88280	04266	23.440	03766	26.552	11.695	25
26	1.1384	87841	04112	24.318	03612	27.685	12.173	26
27	1.1441	87404	03969	25.192	03469	28.823	12.652	27
28	1.1498	86969	03837	26.062	03337	29.967	13.129	28
29	1.1555	86536	03714	26.927	03214	31.116	13.605	29
30	1.1613	86106	03599	27.788	03099	32.272	14.081	30
31	1.1671	85678	03491	28.644	02991	33.433	14.555	31
32	1.1730	85251	03390	29.497	02890	34.600	15.029	32
33	1.1788	84827	03295	30.345	02795	35.772	15.501	33
34	1.1847	84405	03206	31.189	02706	36.951	15.974	34
35	1.1906	83986	03122	32.028	02622	38.135	16.446	35
40	1.2207	81918	02765	36.164	02265	44.147	18.790	40
45	1.2515	79901	02488	40.198	01988	50.311	21.113	45
50	1.2831	77933	02266	44.133	01766	56.630	23.416	50
55	1.3155	76014	02085	47.971	01585	63.109	25.699	55
60	1.3487	74142	01934	51.715	01434	69.751	27.960	60
65	1.3828	72317	01806	55.366	01306	76.561	30.201	65
70	1.4177	70536	01697	58.928	01197	83.543	32.422	70
75	1.4535	68799	01603	62.401	01103	90.701	34.622	75
80	1.4902	67105	01520	65.790	01020	98.040	36.802	80
85	1.5278	65453	01447	69.094	00947	105.56	38.961	85
90	1.5663	63841	01383	72.318	00883	113.27	41.099	90
95	1.6059	62269	01325	75.462	00825	121.18	43.218	95
100	1.6464	60736	01273	78.528	00773	129.29	45.316	100

F2

1% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 1, N)	(P/F, 1, N)	(A/P, 1, N)	(P/A, 1, N)	(A/F, 1, N)	(F/A, 1, N)	(A/G, 1, N)	N
1	1.0100	.99010	1.0100	.9900	1.0000	.9999	.0000	1
2	1.0201	.98030	.50757	1.9701	.49757	2.0097	.4864	2
3	1.0303	.97059	.34006	2.9406	.33006	3.0297	.9813	3
4	1.0406	.96099	.25631	3.9014	.24631	4.0598	1.4751	4
5	1.0510	.95147	.20606	4.8528	.19607	5.1003	1.9675	5
6	1.0615	.94205	.17257	5.7947	.16257	6.1512	2.4581	6
7	1.0721	.93273	.14865	6.7273	.13865	7.2125	2.9469	7
8	1.0828	.92349	.13071	7.6507	.12071	8.2845	3.4349	8
9	1.0936	.91435	.11675	8.5649	.10675	9.3672	3.9209	9
10	1.1046	.90530	.10560	9.4701	.09560	10.460	4.4047	10
11	1.1156	.89634	.09647	10.366	.08647	11.565	4.8872	11
12	1.1268	.88746	.08886	11.253	.07886	12.680	5.3682	12
13	1.1380	.87868	.08242	12.132	.07242	13.807	5.8476	13
14	1.1494	.86998	.07691	13.002	.06691	14.945	6.3253	14
15	1.1609	.86137	.07213	13.863	.06213	16.094	6.8010	15
16	1.1725	.85284	.06795	14.716	.05795	17.255	7.2754	16
17	1.1842	.84440	.06427	15.560	.05427	18.427	7.7483	17
18	1.1961	.83604	.06099	16.396	.05099	19.611	8.2192	18
19	1.2080	.82776	.05806	17.223	.04806	20.807	8.6883	19
20	1.2201	.81957	.05542	18.043	.04542	22.015	9.1560	20
21	1.2323	.81145	.05304	18.854	.04304	23.235	9.6222	21
22	1.2446	.80342	.05087	19.658	.04087	24.467	10.086	22
23	1.2571	.79547	.04889	20.453	.03889	25.712	10.549	23
24	1.2696	.78759	.04708	21.240	.03708	26.969	11.010	24
25	1.2823	.77979	.04541	22.020	.03541	28.238	11.469	25
26	1.2952	.77207	.04387	22.792	.03387	29.521	11.927	26
27	1.3081	.76443	.04245	23.556	.03245	30.816	12.383	27
28	1.3212	.75686	.04113	24.313	.03113	32.124	12.838	28
29	1.3344	.74937	.03990	25.062	.02990	33.445	13.291	29
30	1.3478	.74195	.03875	25.804	.02875	34.779	13.742	30
31	1.3612	.73461	.03768	26.539	.02768	36.127	14.191	31
32	1.3748	.72733	.03667	27.266	.02667	37.488	14.640	32
33	1.3886	.72013	.03573	27.986	.02573	38.863	15.036	33
34	1.4025	.71301	.03484	28.699	.02484	40.251	15.531	34
35	1.4165	.70595	.03401	29.405	.02401	41.653	15.973	35
40	1.4887	.67169	.03046	32.831	.02046	48.878	18.164	40
45	1.5647	.63909	.02771	36.090	.01771	56.471	20.314	45
50	1.6445	.60808	.02552	39.192	.01552	64.452	22.423	50
55	1.7284	.57857	.02373	42.142	.01373	72.839	24.491	55
60	1.8165	.55049	.02225	44.950	.01225	81.655	26.520	60
65	1.9092	.52378	.02100	47.622	.01100	90.920	28.508	65
70	2.0065	.49836	.01993	50.163	.00993	100.65	30.457	70
75	2.1089	.47418	.01902	52.582	.00902	110.89	32.366	75
80	2.2164	.45117	.01822	54.883	.00822	121.64	34.236	80
85	2.3295	.42927	.01752	57.072	.00752	132.95	36.067	85
90	2.4483	.40844	.01690	59.156	.00690	144.83	37.859	90
95	2.5732	.38862	.01636	61.138	.00636	157.32	39.614	95
100	2.7044	.36976	.01587	63.024	.00587	170.44	41.330	100

61

T-3

1½% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 1½, N)$	$(P/F, 1½, N)$	$(A/P, 1½, N)$	$(P/A, 1½, N)$	$(A/F, 1½, N)$	$(F/A, 1½, N)$	$(A/G, 1½, N)$	N
1	1 0150	98522	1 0150	9852	1 0000	1 0000	0000	1
2	1 0302	97066	51131	1 9557	49631	2 0148	4917	2
3	1 0456	95632	34340	2 9120	32840	3 0450	9857	3
4	1 0613	94219	25946	3 8540	24446	4 0905	1 4760	4
5	1 0772	92827	20910	4 7823	19410	5 1518	1 9653	5
6	1 0934	91455	17554	5 6957	16054	6 2290	2 4511	6
7	1 1098	90103	15157	6 5977	13657	7 3223	2 9351	7
8	1 1264	88772	13359	7 4853	11859	8 4320	3 4161	8
9	1 1433	87460	11962	8 3598	10462	9 5585	3 8952	9
10	1 1605	86168	10844	9 2214	09344	10 701	4 3716	10
11	1 1779	84854	09930	10 070	08430	11 862	4 8456	11
12	1 1956	83640	09169	10 906	07669	13 039	5 3169	12
13	1 2135	82404	08525	11 730	07025	14 235	5 7863	13
14	1 2317	81186	07973	12 542	06473	15 448	6 2524	14
15	1 2502	79987	07495	13 342	05995	16 680	6 7165	15
16	1 2689	78805	07077	14 130	05577	17 930	7 1781	16
17	1 2879	77640	06708	14 906	05208	19 199	7 6374	17
18	1 3073	76493	06381	15 671	04881	20 487	8 0939	18
19	1 3269	75363	06088	16 424	04588	21 794	8 5482	19
20	1 3468	74249	05825	17 167	04325	23 121	8 9998	20
21	1 3670	.73152	05587	17 898	04087	24 468	9 4493	21
22	1 3875	72071	05371	18 619	03871	25 834	9 8959	22
23	1 4083	71006	05173	19 329	03673	27 222	10 340	23
24	1 4294	69957	04993	20 023	03493	28 630	10 782	24
25	1 4509	68923	04827	20 718	03327	30 059	11 221	25
26	1 4726	67904	04674	21 397	03174	31 510	11 658	26
27	1 4947	66901	04532	22 066	03032	32 983	12 093	27
28	1 5171	65912	04400	22 725	02900	34 477	12 525	28
29	1 5399	64938	04278	23 374	02778	35 994	12 955	29
30	1 5630	63979	04164	24 014	02664	37 534	13 382	30
31	1 5864	63033	04058	24 644	02558	39 097	13 807	31
32	1 6102	62102	03958	25 265	02458	40 683	14 229	32
33	1 6344	61184	03864	25 877	02364	42 293	14 649	33
34	1 6589	60280	03776	26 479	02276	43 928	15 067	34
35	1 6838	59389	03694	27 073	02194	45 556	15 482	35
40	1 8139	55129	03343	29 913	01843	54 261	17 522	40
45	1 9541	51174	03072	32 550	01572	63 606	19 501	45
50	2 1051	47504	02857	34 997	01357	73 673	21 422	50
55	2 2677	44096	02683	37 269	01183	84 518	23 283	55
60	2 4430	40933	02539	39 378	01039	96 201	25 087	60
65	2 6318	37997	02419	41 335	00919	108 78	26 833	65
70	2 8351	35271	02317	43 152	00817	122 34	28 523	70
75	3 0542	32741	02230	44 839	00730	136 95	30 157	75
80	3 2903	30392	02155	46 405	00655	152 68	31 737	80
85	3 5445	28212	.02089	47 858	00589	169 63	33 262	85
90	3 8185	26188	02032	49 207	00532	187 89	34 734	90
95	4 1135	24310	01982	50 460	00482	207 57	36 155	95
100	4 4314	22566	01937	51 622	00437	228 76	37 524	100

62

T-1

2% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 2, N)	(P/F, 2, N)	(A/P, 2, N)	(P/A, 2, N)	(A/F, 2, N)	(F/A, 2, N)	(A/G, 2, N)	N
1	1 0200	98039	1 0200	9804	1 0000	1 0000	0000	1
2	1 0404	96117	51507	1 9415	49507	2 0199	4934	2
3	1 0612	94232	34677	2 8837	32677	3 0603	9851	3
4	1 0824	92385	26263	3 8075	24263	4 1214	1 4733	4
5	1 1040	90573	21217	4 7132	19217	5 2033	1 9584	5
6	1 1261	88798	.17853	5 6012	15853	6 3078	2 4401	6
7	1 1486	87056	15452	6 4717	13452	7 4339	2 9189	7
8	1 1716	85350	13651	7 3252	11651	8 5826	3 3940	8
9	1 1950	83676	12252	8 1619	10252	9 7541	3 8659	9
10	1 2189	82035	11133	8 9822	09133	10 949	4 3347	10
11	1 2433	80427	10218	9 7865	08218	12 168	4 8001	11
12	1 2682	78850	09456	10 574	07456	13 411	5 2622	12
13	1 2935	77304	08812	11 347	06812	14 679	5 7209	13
14	1 3194	75788	08261	12 105	06261	15 973	6 1764	14
15	1 3458	74302	07783	12 848	05783	17 292	6 6288	15
16	1 3727	72846	07365	13 577	05365	18 638	7 0778	16
17	1 4002	71417	06997	14 291	04997	20 011	7 5236	17
18	1 4282	.70017	06670	14 991	04670	21 411	7 9660	18
19	1 4567	68644	06378	15 677	04378	22 839	8 4052	19
20	1 4859	67298	.06116	16 350	04116	24 296	8 8412	20
21	1 5156	65979	05879	17 010	03879	25 781	9 2739	21
22	1 5459	64685	05663	17 657	03663	27 297	9 7033	22
23	1 5768	63417	05467	18 291	03467	28 843	10 129	23
24	1 6084	62173	05287	18 913	03287	30 420	10 552	24
25	1 6405	60954	05122	19 522	03122	32 028	10 972	25
26	1 6733	59759	04970	20 120	02970	33 669	11 388	26
27	1 7068	58588	04829	20 706	02829	35 342	11 802	27
28	1 7409	57439	04699	21 280	02699	37 049	12 212	28
29	1 7758	56313	04578	21 843	02578	38 790	12 619	29
30	1 8113	55208	04465	22 395	02465	40 565	13 023	30
31	1 8475	54126	04360	22 937	02360	42 377	13 423	31
32	1 8844	53065	04261	23 467	02261	44 224	13 821	32
33	1 9221	52024	04169	23 987	02169	46 108	14 215	33
34	1 9606	51004	04082	24 497	02082	48 031	14 606	34
35	1 9998	50004	04000	24 997	02000	49 991	14 994	35
40	2 2079	45291	03656	27 354	01656	60 398	16 886	40
45	2 4377	41021	03391	29 489	01391	71 888	18 701	45
50	2 6914	37154	03182	31 422	01182	84 573	20 440	50
55	2 9715	33652	03014	33 174	01014	98 579	22 103	55
60	3 2808	30480	02877	34 760	00877	114 04	23 694	60
65	3 6223	27607	02763	36 196	00763	131 11	25 212	65
70	3 9993	25004	02667	37 497	00667	149 96	26 661	70
75	4 4155	22647	02586	38 676	00586	170 77	28 041	75
80	4 8751	20512	02516	39 743	00516	193 75	29 355	80
85	5 3824	18579	02456	40 710	00456	219 12	30 604	85
90	5 9426	16827	02405	41 586	00405	247 13	31 791	90
95	6 5611	15241	02360	42 379	00360	278 05	32 917	95
100	7 2440	13804	02320	43 097	00320	312 20	33 984	100

63

T-5

2½% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 2½, N)	(P/F, 2½, N)	(A/P, 2½, N)	(P/A, 2½, N)	(A/F, 2½, N)	(F/A, 2½, N)	(A/G, 2½, N)	N
1	1.0250	.97561	1.0250	.9756	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.0506	.95182	.51884	1.9273	.49384	2.0243	.4930	2
3	1.0768	.92860	.35014	2.8559	.32514	3.0755	.9827	3
4	1.1038	.90595	.26582	3.7618	.24082	4.1524	1.4681	4
5	1.1314	.88386	.21525	4.6457	.19025	5.2562	1.9496	5
6	1.1596	.86230	.18155	5.5079	.15655	6.3875	2.4269	6
7	1.1886	.84127	.15750	6.3492	.13250	7.5472	2.9002	7
8	1.2184	.82075	.13947	7.1699	.11447	8.7358	3.3695	8
9	1.2488	.80073	.12546	7.9707	.10046	9.9542	3.8346	9
10	1.2800	.78120	.11426	8.7518	.08926	11.203	4.2955	10
11	1.3120	.76215	.10511	9.5140	.08011	12.483	4.7524	11
12	1.3448	.74356	.09749	10.257	.07249	13.795	5.2052	12
13	1.3785	.72543	.09105	10.982	.06605	15.140	5.6539	13
14	1.4129	.70773	.08554	11.690	.06054	16.518	6.0985	14
15	1.4482	.69047	.08077	12.381	.05577	17.931	6.5391	15
16	1.4844	.67363	.07660	13.054	.05160	19.379	6.9756	16
17	1.5216	.65720	.07293	13.711	.04793	20.864	7.4081	17
18	1.5596	.64117	.06967	14.353	.04467	22.385	7.8365	18
19	1.5986	.62553	.06676	14.978	.04176	23.945	8.2609	19
20	1.6386	.61028	.06415	15.588	.03915	25.543	8.6813	20
21	1.6795	.59539	.06179	16.184	.03679	27.182	9.0976	21
22	1.7215	.58087	.05965	16.765	.03465	28.861	9.5100	22
23	1.7645	.56671	.05770	17.331	.03270	30.583	9.9183	23
24	1.8087	.55288	.05591	17.884	.03091	32.347	10.322	24
25	1.8539	.53940	.05428	18.424	.02928	34.156	10.723	25
26	1.9002	.52624	.05277	18.950	.02777	36.010	11.119	26
27	1.9477	.51341	.05138	19.463	.02638	37.910	11.512	27
28	1.9964	.50089	.05009	19.964	.02509	39.858	11.900	28
29	2.0463	.48867	.04889	20.453	.02389	41.854	12.285	29
30	2.0975	.47675	.04778	20.929	.02278	43.901	12.665	30
31	2.1499	.46512	.04674	21.395	.02174	45.998	13.042	31
32	2.2037	.45378	.04577	21.848	.02077	48.148	13.415	32
33	2.2588	.44271	.04486	22.291	.01986	50.352	13.784	33
34	2.3152	.43191	.04401	22.723	.01901	52.610	14.149	34
35	2.3731	.42138	.04321	23.144	.01821	54.926	14.511	35
40	2.6850	.37244	.03984	25.102	.01484	67.399	16.261	40
45	3.0378	.32918	.03727	26.832	.01227	81.512	17.917	45
50	3.4370	.29095	.03526	28.361	.01026	97.480	19.483	50
55	3.8886	.25716	.03365	29.713	.00865	115.54	20.959	55
60	4.3996	.22729	.03235	30.908	.00735	135.93	22.351	60
65	4.9777	.20089	.03128	31.964	.00628	159.11	23.659	65
70	5.6318	.17756	.03040	32.897	.00540	185.27	24.887	70
75	6.3719	.15694	.02965	33.722	.00465	214.87	26.038	75
80	7.2092	.13871	.02903	34.451	.00403	248.36	27.115	80
85	8.1565	.12260	.02849	35.095	.00349	286.26	28.122	85
90	9.2283	.10836	.02804	35.665	.00304	329.13	29.062	90
95	10.441	.09578	.02765	36.168	.00265	377.63	29.937	95
100	11.813	.08465	.02731	36.613	.00231	432.51	30.751	100

3% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 3, N)$	$(P/F, 3, N)$	$(A/P, 3, N)$	$(P/A, 3, N)$	$(A/F, 3, N)$	$(F/A, 3, N)$	$(A/G, 3, N)$	N
1	1.0300	.97087	1.0300	.9709	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.0609	.94260	.52262	1.9134	.49262	2.0299	.4920	2
3	1.0927	.91514	.35354	2.8285	.32354	3.0906	.9795	3
4	1.1255	.88849	.26903	3.7170	.23903	4.1835	1.4622	4
5	1.1592	.86261	.21836	4.5796	.18836	5.3090	1.9401	5
6	1.1940	.83749	.18460	5.4170	.15460	6.4682	2.4129	6
7	1.2298	.81310	.16051	6.2301	.13051	7.6622	2.8809	7
8	1.2667	.78941	.14246	7.0195	.11246	8.8920	3.3440	8
9	1.3047	.76642	.12844	7.7859	.09844	10.158	3.8022	9
10	1.3439	.74410	.11723	8.5300	.08723	11.463	4.2555	10
11	1.3842	.72243	.10808	9.2524	.07808	12.807	4.7040	11
12	1.4257	.70139	.10046	9.9537	.07046	14.191	5.1475	12
13	1.4685	.68096	.09403	10.634	.06403	15.617	5.5863	13
14	1.5125	.66113	.08853	11.295	.05853	17.085	6.0201	14
15	1.5579	.64187	.08377	11.937	.05377	18.598	6.4491	15
16	1.6046	.62318	.07961	12.560	.04961	20.156	6.8732	16
17	1.6528	.60502	.07595	13.165	.04595	21.760	7.2926	17
18	1.7024	.58740	.07271	13.753	.04271	23.413	7.7072	18
19	1.7534	.57030	.06982	14.323	.03982	25.115	8.1169	19
20	1.8060	.55369	.06722	14.877	.03722	26.869	8.5219	20
21	1.8602	.53756	.06487	15.414	.03487	28.675	8.9221	21
22	1.9160	.52190	.06275	15.936	.03275	30.535	9.3176	22
23	1.9735	.50670	.06082	16.443	.03082	32.451	9.7034	23
24	2.0327	.49194	.05905	16.935	.02905	34.425	10.094	24
25	2.0937	.47762	.05743	17.412	.02743	36.457	10.475	25
26	2.1565	.46370	.05594	17.876	.02594	38.551	10.852	26
27	2.2212	.45020	.05457	18.326	.02457	40.707	11.224	27
28	2.2878	.43709	.05329	18.763	.02329	42.929	11.592	28
29	2.3565	.42436	.05212	19.188	.02212	45.217	11.954	29
30	2.4272	.41200	.05102	19.600	.02102	47.573	12.313	30
31	2.5000	.40000	.05000	20.000	.02000	50.000	12.666	31
32	2.5750	.38835	.04905	20.388	.01905	52.500	13.016	32
33	2.6522	.37704	.04816	20.765	.01816	55.075	13.360	33
34	2.7318	.36606	.04732	21.131	.01732	57.727	13.700	34
35	2.8137	.35539	.04654	21.486	.01654	60.459	14.036	35
40	3.2619	.30657	.04326	23.114	.01326	75.397	15.649	40
45	3.7814	.26445	.04079	24.518	.01079	92.715	17.154	45
50	4.3837	.22812	.03887	25.729	.00887	112.79	18.556	50
55	5.0819	.19678	.03735	26.774	.00735	136.06	19.859	55
60	5.8913	.16974	.03613	27.675	.00613	163.04	21.066	60
65	6.8296	.14642	.03515	28.452	.00515	194.32	22.183	65
70	7.9173	.12630	.03434	29.123	.00434	230.57	23.213	70
75	9.1783	.10895	.03367	29.701	.00367	272.61	24.162	75
80	10.640	.09398	.03311	30.200	.00311	321.33	25.034	80
85	12.334	.08107	.03265	30.630	.00265	377.82	25.834	85
90	14.299	.06993	.03226	31.002	.00226	443.31	26.566	90
95	16.576	.06033	.03193	31.322	.00193	519.22	27.234	95
100	19.217	.05204	.03165	31.598	.00165	607.23	27.843	100

T-7

65

4% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 4, N)$	$(P/F, 4, N)$	$(A/P, 4, N)$	$(P/A, 4, N)$	$(A/F, 4, N)$	$(F/A, 4, N)$	$(A/G, 4, N)$	N
1	1 0400	96154	1 0400	9615	1 0000	1 0000	0000	1
2	1 0816	92456	53020	1 8860	49020	2 0399	4900	2
3	1 1248	88900	36035	2 7750	32035	3 1215	9736	3
4	1 1698	85481	27549	3 6298	.23549	4 2464	1 4506	4
5	1 2166	82193	22463	4 4517	18463	5 4162	1 9213	5
6	1 2653	79032	19076	5 2420	15076	6 6328	2 3853	6
7	1 3159	75992	16661	6 0019	12661	7 8981	2 8429	7
8	1 3685	73069	[illegible]	6 7326	10853	9 2140	3 2940	8
9	1 4233	70259	1 3449	7 4352	09449	10 582	3 7387	9
10	1 4802	67557	12329	8 1109	08329	12 005	4 1769	10
11	1 5394	64958	11415	8 7603	07415	13 486	4 6086	11
12	1 6010	.62460	10655	9 3849	06655	15 025	5 0339	12
13	1 6650	60058	10014	9 9855	06014	16 626	5 4529	13
14	1 7316	57748	09467	10 563	05467	18 291	[illegible]	14
15	1 8009	55527	08994	11 118	.04994	20 023	6 2717	15
16	1 8729	53391	08582	11 652	04582	21 824	6 6716	16
17	1 9478	51338	08220	12 165	04220	23 697	7 0652	17
18	2 0257	49363	07899	12 659	03899	25 644	7 4526	18
19	2 1068	47465	07614	13 133	03614	27 670	7 8338	19
20	2 1911	45639	07358	13 590	03358	29 777	8 2087	20
21	2 2787	43884	07128	14 029	03128	31 968	8 5775	21
22	2 3698	.42196	06920	14 450	02920	34 247	8 9402	22
23	2 4646	40573	06731	14 856	02731	36 617	9 2969	23
24	2 5632	39013	06559	15 246	02559	39 081	9 6475	24
25	2 6658	37512	06401	15 621	02401	41 644	9.9921	25
26	2 7724	36069	06257	15 982	02257	44 310	10 330	26
27	2 8833	34682	06124	16 329	02124	47 083	10 663	27
28	2 9986	33348	06001	16 662	02001	49 966	10 990	28
29	3 1186	32066	05888	16 983	01888	52 964	11 311	29
30	3 2433	30832	05783	17 291	01783	56 083	11 627	30
31	3 3730	29647	05686	17 588	01686	59 326	11 936	31
32	3 5079	28506	05595	17 873	01595	62 699	12 240	32
33	3 6483	27410	05510	18 147	01510	66 207	12 539	33
34	3 7942	26356	05432	18 411	01432	69 855	12 832	34
35	3 9460	25342	05358	18 664	01358	73 650	13 119	35
40	4 8009	20829	05052	19 792	01052	95 022	14 476	40
45	5 8410	17120	04826	20 719	00826	121 02	15 704	45
50	7 1064	14072	04655	21 482	00655	152 66	16 811	50
55	8 6460	11566	04523	22 108	00523	191 15	17 806	55
60	10 519	09506	04420	22 623	00420	237 98	18 696	60
65	12 798	07814	04339	23 046	00139	294 95	19 490	65
70	15 570	06422	04275	23 394	00275	364 27	20 195	70
75	18 944	05279	04223	23 680	00223	443 60	20 820	75
80	23 048	04339	04181	23 915	00181	551 21	21 371	80
85	28 042	03566	04148	24 108	00148	676 05	21 856	85
90	34 117	02931	04121	24 267	00121	827 93	22 282	90
95	41 508	02409	04099	24 397	00099	1012 7	22 654	95
100	50 501	01980	04081	24 504	00081	1237 5	22 979	100

66

T-8

5% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 5, N)	(P/F, 5, N)	(A/P, 5, N)	(P/A, 5, N)	(A/F, 5, N)	(F/A, 5, N)	(A/G, 5, N)	N
1	1.0500	.95238	1.0500	.9524	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.1025	.90703	.53781	1.8593	.48781	2.0499	.4874	2
3	1.1576	.86384	.36722	2.7231	.31722	3.1524	.9671	3
4	1.2155	.82271	.28202	3.5458	.23202	4.3100	1.4386	4
5	1.2762	.78353	.23098	4.3294	.18098	5.5255	1.9021	5
6	1.3400	.74622	.19702	5.0756	.14702	6.8017	2.3575	6
7	1.4070	.71069	.17282	5.7862	.12282	8.1418	2.8048	7
8	1.4774	.67684	.15472	6.4631	.10472	9.5488	3.2441	8
9	1.5513	.64461	.14069	7.1077	.09069	11.026	3.6753	9
10	1.6288	.61392	.12951	7.7216	.07951	12.577	4.0986	10
11	1.7103	.58469	.12039	8.3062	.07039	14.206	4.5140	11
12	1.7958	.55684	.11283	8.8631	.06283	15.916	4.9214	12
13	1.8856	.53033	.10646	9.3934	.05646	17.712	5.3211	13
14	1.9799	.50507	.10103	9.8985	.05103	19.598	5.7128	14
15	2.0789	.48102	.09634	10.379	.04634	21.577	6.0969	15
16	2.1828	.45812	.09227	10.837	.04227	23.656	6.4732	16
17	2.2919	.43630	.08870	11.273	.03870	25.839	6.8418	17
18	2.4065	.41553	.08555	11.689	.03555	28.131	7.2029	18
19	2.5269	.39574	.08275	12.085	.03275	30.538	7.5565	19
20	2.6532	.37690	.08024	12.462	.03024	33.064	7.9025	20
21	2.7859	.35895	.07800	12.821	.02800	35.718	8.2412	21
22	2.9252	.34186	.07597	13.162	.02597	38.503	8.5725	22
23	3.0714	.32558	.07414	13.488	.02414	41.429	8.8966	23
24	3.2250	.31008	.07247	13.798	.02247	44.500	9.2135	24
25	3.3862	.29531	.07095	14.093	.02095	47.725	9.5234	25
26	3.5555	.28125	.06956	14.375	.01957	51.111	9.8261	26
27	3.7333	.26786	.06829	14.642	.01829	54.667	10.122	27
28	3.9200	.25510	.06712	14.898	.01712	58.400	10.411	28
29	4.1160	.24295	.06605	15.140	.01605	62.320	10.693	29
30	4.3218	.23138	.06505	15.372	.01505	66.436	10.968	30
31	4.5379	.22037	.06413	15.592	.01413	70.757	11.237	31
32	4.7647	.20987	.06328	15.802	.01328	75.295	11.500	32
33	5.0030	.19988	.06249	16.002	.01249	80.060	11.756	33
34	5.2531	.19036	.06176	16.192	.01176	85.063	12.005	34
35	5.5158	.18130	.06107	16.374	.01107	90.316	12.249	35
40	7.0397	.14205	.05828	17.158	.00828	120.79	13.277	40
45	8.9846	.11130	.05626	17.773	.00626	159.69	14.364	45
50	11.466	.08721	.05478	18.255	.00478	209.33	15.223	50
55	14.634	.06833	.05367	18.633	.00367	272.69	15.966	55
60	18.678	.05354	.05283	18.929	.00283	353.56	16.605	60
65	23.838	.04195	.05219	19.161	.00219	456.76	17.153	65
70	30.424	.03287	.05170	19.342	.00170	588.48	17.621	70
75	38.829	.02575	.05132	19.484	.00132	756.59	18.017	75
80	49.557	.02018	.05103	19.596	.00103	971.14	18.352	80
85	63.248	.01581	.05080	19.683	.00080	1244.9	18.634	85
90	80.723	.01239	.05063	19.752	.00063	1594.4	18.871	90
95	103.02	.00971	.05049	19.805	.00049	2040.4	19.068	95
100	131.48	.00761	.05038	19.847	.00038	2609.7	19.233	100

67

T-9

6% Interest Factors for Discrete Compounding Factors

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 6, N)$	$(P/F, 6, N)$	$(A/P, 6, N)$	$(P/A, 6, N)$	$(A/F, 6, N)$	$(F/A, 6, N)$	$(A/G, 6, N)$	N
1	1 0600	94340	1 0600	9434	1 0000	1 0000	0000	1
2	1 1236	89000	54544	1 8333	48544	2 0599	4852	2
3	1 1910	83962	37411	2 6729	31411	3 1835	9610	3
4	1 2624	79210	28860	3 4650	22860	4 3745	1 4269	4
5	1 3382	74726	23740	4 2123	17740	5 6370	1 8833	5
6	1 4185	70496	20337	4 9172	14337	6 9751	2 3301	6
7	1 5036	66506	17914	5 5823	11914	8 3936	2 7673	7
8	1 5938	62742	16104	6 2097	10104	9 8972	3 1949	8
9	1 6894	59190	14702	6 8016	08702	11 491	3 6130	9
10	1 7908	55840	13587	7 3600	07587	13 180	4 0217	10
11	1 8982	52679	.12679	7 8867	06679	14 971	4 4210	11
12	2 0121	49698	11928	8 3837	05928	16 869	4 8109	12
13	2 1329	46884	11296	8 8525	05296	18 881	5 1917	13
14	2 2608	44231	10759	9 2948	04759	21 014	5 5632	14
15	2 3965	41727	10296	9 7121	04296	23 275	5 9257	15
16	2 5403	39365	09895	10 105	03895	25 671	6 2791	16
17	2 6927	37137	09545	10 477	03545	28 212	6 6237	17
18	2 8542	35035	09236	10 827	03236	30 904	6 9594	18
19	3 0256	33052	08962	11 158	02962	33 759	7 2864	19
20	3 2070	31181	08719	11 469	02719	36 784	7 6048	20
21	3 3995	29416	.08501	11 763	02501	39 991	7 9148	21
22	3 6034	27751	08305	12 041	02305	43 390	8 2163	22
23	3 8196	26180	08128	12 303	02128	46 994	8 5096	23
24	4 0488	24698	07968	12 550	01968	50 814	8 7948	24
25	4 2917	23300	07823	12 783	01823	54 862	9 0719	25
26	4 5492	21982	07690	13 003	01690	59 154	9 3412	26
27	4.8222	20737	07570	13 210	01570	63 703	9 6027	27
28	5 1115	.19564	07459	13 406	01459	68 525	9 8565	28
29	5 4182	18456	07358	13 590	01358	73 637	10 102	29
30	5 7433	17412	.07265	13 764	.01265	79 055	10 341	30
31	6 0879	16426	07179	13 929	01179	84 798	10 573	31
32	6 4531	15496	07100	14 083	01100	90 886	10 798	32
33	6 8403	14619	07027	14 230	01027	97 339	11 016	33
34	7 2507	13792	06960	14 368	00960	104 17	11 227	34
35	7 6858	13011	06897	14 498	00897	111 43	11 431	35
40	10 285	09723	06646	15 046	00646	154 75	12 358	40
45	13 764	07265	06470	15 455	00470	212 73	13 141	45
50	18 419	05429	06344	15 761	00344	290 32	13 796	50
55	24 649	04057	06254	15 990	00254	394 14	14 340	55
60	32 985	03032	06188	16 161	00188	533 09	14 790	60
65	44 142	02265	06139	16 289	00139	719 03	15 160	65
70	59 071	01693	06103	16 384	00103	967 66	15 461	70
75	79 051	01265	.06077	16 455	00077	1300 8	15 705	75
80	105 78	00945	06057	16 509	00057	1746 4	15 903	80
85	141 56	00706	06043	16 548	00043	2342 7	16 061	85
90	189 44	00528	06032	16 578	00032	3140 7	16 189	90
95	253 52	00394	06024	16 600	00024	4208 7	16 290	95
100	339 26	00295	06018	16 617	.00018	5637 8	16 371	100

68

T-10

7% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 7, N)$	$(P/F, 7, N)$	$(A/P, 7, N)$	$(P/A, 7, N)$	$(A/F, 7, N)$	$(F/A, 7, N)$	$(A/G, 7, N)$	N
1	1 0700	93458	1 0700	9346	1 0000	1 000	0000	1
2	1 1449	87344	55310	1 8080	48310	2 0699	4830	2
3	1 2250	81630	38105	2 6242	31105	3 2148	9548	3
4	1 3107	76290	29523	3 3871	22523	4 4398	1 4153	4
5	1 4025	71299	24389	4 1001	17389	5 7506	1 8648	5
6	1 5007	66635	20980	4 7665	13980	7 1531	2 3030	6
7	1 6057	62275	18555	5 389[illegible]	11555	8 6539	2 7302	7
8	1 7181	58201	16747	5 9712	09747	10 259	3 1463	8
9	1 8384	54394	15349	6 5151	08349	11 977	3 5515	9
10	1 9671	50835	14238	7 0235	07238	13 816	3 9459	10
11	2 1048	47510	13336	7 4986	06336	15 783	4 3294	11
12	2 2521	44402	12590	7 9426	05590	17 888	4 7023	12
13	2 4098	41497	11965	8 3576	04965	20 140	5 0647	13
14	2 5785	38782	11435	8 7454	04435	22 550	5 4165	14
15	2.7590	36245	10980	9 1078	03980	25 128	5 7581	15
16	2 9521	33874	10586	9 4466	03586	27 887	6 0895	16
17	3 1587	31658	.10243	9 7631	03243	30 839	6 4108	17
18	3 3798	29587	09941	10 059	02941	33 998	6 7223	18
19	3 6164	27651	09675	10 335	02675	37 378	7 0240	19
20	3 8696	25842	09439	10 593	02439	40 994	7 3161	20
21	4 1404	24152	09229	10 835	02229	44 864	7 5988	21
22	4 4303	22572	09041	11 061	02041	49 004	7 8723	22
23	4 7404	21095	08871	11 272	01871	53 434	8 1367	23
24	5 0722	19715	08719	11.469	01719	58 175	8 3922	24
25	5 4273	18425	08581	11 653	01581	63 247	8 6389	25
26	5 8072	17220	08456	11 825	01456	68 674	8 8772	26
27	6 2137	16093	08343	11 986	01343	74 481	9 1070	27
28	6 6486	15041	08239	12 137	01239	80 695	9 3288	28
29	7 1140	14057	08145	12 277	01145	87 344	9 5425	29
30	7 6120	13137	08059	12 409	01059	94 458	9 7485	30
31	8 1449	12278	07980	12 531	00980	102 07	9 9469	31
32	8 7150	11474	07907	12 646	00907	110 21	10 137	32
33	9 3250	10724	07841	12 753	00841	118 92	10 321	33
34	9 9778	10022	07780	12 853	00780	128 25	10 498	34
35	10 676	09367	07723	12 947	00723	138 23	10 668	35
40	14 973	06678	07501	13 331	00501	199 62	11 423	40
45	21 001	04762	07350	13 605	00350	285 73	12 035	45
50	29 455	03395	07246	13 800	00246	406 51	12 528	50
55	41 313	02421	07174	13 939	00174	575 90	12 921	55
60	57 943	01726	07123	14 039	00123	813 47	13 232	60
65	81 268	01230	07087	14 109	00037	1146 6	13 475	65
70	113 98	00877	07062	14 160	00062	1614 0	13 666	70
75	159 86	00626	07044	14 196	00044	2269 5	13 813	75
80	224 21	00446	07031	14 222	00031	3188 8	13 927	80
85	314 47	00318	07022	14 240	00022	4478.2	14 014	85
90	441 06	.00227	07016	14 253	00016	6286 7	14 081	90
95	618 62	00162	07011	14 262	00011	8823 1	14 131	95
100	867 64	00115	.07008	14 269	00008	12381 7	14 170	100

69

T- 11

8% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 8, N)$	$(P/F, 8, N)$	$(A/P, 8, N)$	$(P/A, 8, N)$	$(A/F, 8, N)$	$(F/A, 8, N)$	$(A/G, 8, N)$	N
1	1 0800	92593	1 0800	9259	1 0000	1 0000	0000	1
2	1 1664	85734	56077	1 7832	.48077	2 0799	4807	2
3	1 2597	79383	38803	2 5770	, 30804	3 2463	9487	3
4	1 3604	73503	30192	3 3121	22192	4 5060	1 4038	4
5	1 4693	68059	25046	3 9926	.17046	5 8665	1 8463	5
6	1 5868	63017	21632	4 6228	13632	7 3358	2.2762	6
7	1 7138	58349	19207	5 2063	11207	8.9227	2 6935	7
8	1 8509	54027	17402	5 7466	09402	10 636	3 0984	8
9	1 9989	50025	16008	6 2468	08008	12 487	3 4909	9
10	2 1589	46320	14903	6 7100	06903	14 486	3 8712	10
11	2 3316	42889	14008	7 1389	06008	16 645	4 2394	11
12	2 5181	39712	13270	7 5360	05270	18 976	4 5956	12
13	2 7196	36770	12642	7 9037	04652	21 495	4 9401	13
14	2 9371	34046	12130	8 2442	04130	24 214	5 2729	14
15	3 1721	31524	11683	8 5594	03683	27 151	5 5943	15
16	3 4259	29189	11298	8 8513	03298	30 323	5 9045	16
17	3 6999	27027	10963	9 1216	02963	33 749	6 2036	17
18	3 9959	25025	10670	9 3718	02670	37 449	6 4919	18
19	4 3156	23171	10413	9 6035	02413	41 445	6 7696	19
20	4 6609	21455	10185	9 8181	02185	45 761	7 0368	20
21	5 0337	19866	09983	10 016	01983	50 422	7 2939	21
22	5 4364	18394	09803	10 200	01803	55 455	7 5411	22
23	5 8713	17032	09642	10 371	01642	60 892	7 7785	23
24	6 3410	15770	09498	10 528	01498	66 763	8 0065	24
25	6 8483	14602	09368	10 674	01368	73 104	8.2253	25
26	7 3962	13520	09251	10 809	01251	79 953	8 4351	26
27	7.9879	12519	09145	10 935	01145	87 349	8 6362	27
28	8 6269	11592	09049	11 051	01049	95 337	8 8288	28
29	9 3171	10733	08962	11 158	00962	103 96	9 0132	29
30	10 062	09938	08883	11 257	00883	113 28	9 1896	30
31	10 867	09202	08811	11 349	00811	123 34	9 3583	31
32	11 736	08520	08745	11 434	00745	134 21	9 5196	32
33	12 675	07889	08685	11 513	00685	145 94	9 6736	33
34	13 689	07305	08630	11 586	00630	158 62	9 8207	34
35	14 785	06764	08580	11 654	00580	172 31	9 9610	35
40	21 724	04603	08386	11 924	00386	259 05	10 569	40
45	31 919	03133	08259	12 108	00259	386 49	11 044	45
50	46 900	02132	08174	12 233	00174	573 75	11 410	50
55	68 911	01451	08118	12 318	00118	848 89	11 690	55
60	101.25	00988	08080	12 376	00080	1253 1	11 901	60
65	148 77	00672	08054	12 416	00054	1847 1	12 060	65
70	218 59	00457	08037	12 442	00037	2719 9	12 178	70
75	321 19	00311	08025	12 461	00025	4002 3	12 265	75
80	471 93	.00212	08017	12 473	00017	5886 6	12 330	80
85	693 42	00144	08012	12 481	00012	8655 2	12 377	85
90	1018 8	00098	08008	12 487	00008	12723 9	12 411	90
95	1497 0	00067	08005	12 491	00005	18701 5	12 436	95
100	2199 6	00045	08004	12 494	00004	27434 5	12 454	100

70

F-12

9% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 9, N)	(P/F, 9, N)	(A/P, 9, N)	(P/A, 9, N)	(A/F, 9, N)	(F/A, 9, N)	(A/G, 9, N)	N
1	1 0900	91743	1 0900	.9174	1 0000	1 0000	0000	1
2	1.1881	84168	56847	1 7591	47847	2 0899	4784	2
3	1 2950	77219	39506	2 5312	30506	3 2780	.9425	3
4	1 4115	70843	30867	3 2396	21867	4 5730	1 3923	4
5	1 5386	.64993	25709	3 8896	.16709	5 9846	1 8280	5
6	1 6770	59627	22292	4 4858	13292	7 5232	2 2496	6
7	1 8280	54704	19869	5 0329	10869	9 2002	2 6572	7
8	1 9925	50187	18068	5 5347	09068	11 028	3 0510	8
9	2 1718	46043	16680	5.9952	07680	13 020	3 4311	9
10	2 3673	42241	.15582	6 4176	06582	15 192	3 7976	10
11	2 5804	38754	14695	6 8051	05695	17 559	4 1508	11
12	2 8126	35554	13965	7.1606	04965	20 140	4 4909	12
13	3 0657	32618	.13357	7 4868	04357	22 952	4 8180	13
14	3 3416	29925	12843	7 7861	03843	26 018	5 1325	14
15	3 6424	27454	12406	8 0606	03406	29 360	5 4345	15
16	3 9702	25187	12030	8 3125	03030	33 002	5 7243	16
17	4 3275	23108	11705	8 5435	02705	36 972	6 0022	17
18	4 7170	21200	11421	8 7555	02421	41 300	6 2685	18
19	5 1415	19449	11173	8 9500	02173	46 017	6 5234	19
20	5 6043	17843	10955	9 1285	01955	51 158	6 7673	20
21	6 1086	16370	10762	9 2922	01762	56 763	7 0004	21
22	6 6584	15018	10591	9 4423	01591	62 871	7 2231	22
23	7 2577	13778	10438	9 5801	01438	69 530	7 4356	23
24	7 9109	12641	10302	9 7065	01302	76 787	7 6383	24
25	8 6228	11597	10181	9 8225	01181	84 698	7 8315	25
26	9 3989	10640	10072	9 9289	01072	93 321	8 0154	26
27	10 244	.09761	.09974	10 026	00974	102 72	8 1905	27
28	11 166	08955	09885	10 116	00885	112 96	8 3570	28
29	12 171	08216	09806	10 198	00806	124 13	8 5153	29
30	13 267	07537	09734	10 273	.00734	136 30	8 6655	30
31	14 461	06915	09669	10 342	00669	149 57	8 8082	31
32	15 762	06344	09610	10 406	00610	164 03	8 9435	32
33	17 181	05820	09556	10 464	00556	179 79	9 0717	33
34	18 727	05340	09508	10 517	00508	196 97	9 1932	34
35	20 413	04899	.09464	10 566	00464	215 70	9 3082	35
40	31 408	03184	09296	10 757	00296	337 86	9 7956	40
45	48 325	02069	09190	10 881	00190	525 83	10 160	45
50	74 353	01345	09123	10 961	00123	815 04	10 429	50
55	114 40	00874	09079	11 014	00079	1260 0	10 626	55
60	176 02	00568	09051	11 047	00051	1944 6	10 768	60
65	270 82	00369	09033	11 070	00033	2998 0	10 870	65
70	416 70	00240	09022	11 084	.00022	4618 9	10 942	70
75	641 14	00156	09014	11 093	00014	7112 7	10 993	75
80	986 47	00101	09009	11 099	00009	10950 6	11 029	80
85	1517 8	00066	.09006	11 103	00006	16854 8	11 055	85
90	2335 3	00043	09004	11 106	00004	25939 2	11 072	90
95	3593 1	00028	.09002	11 108	00003	39916 6	11 084	95
100	5528 4	00018	09002	11 109	00002	61422.7	11 093	100

71

T-13

10% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 10, N)	(P/F, 10, N)	(A/P, 10, N)	(P/A, 10, N)	(A/F, 10, N)	(F/A, 10, N)	(A/G, 10, N)	N
1	1.1000	90909	1 1000	9091	1 0000	1 000	0000	1
2	1 2100	82645	57619	1 7355	47619	2 0999	4761	2
3	1 3310	75132	40212	2 4868	30212	3 3099	9365	3
4	1 4641	68302	31547	3 1698	21547	4 6409	1 3810	4
5	1 6105	62092	26380	3 7907	16380	6 1050	1 8100	5
6	1 7715	56448	22961	4 3552	12961	7 7155	2 2234	6
7	1 9487	51316	20541	4 8683	10541	9 4870	2 6215	7
8	2 1435	46651	18745	5 3349	08745	11 435	3 0043	8
9	2 3579	42410	17364	5 7589	07364	13 579	3 3722	9
10	2 5937	38555	16275	6 1445	06275	15 937	3 7253	10
11	2 8530	35050	15396	6 4950	05396	18 530	4 0639	11
12	3 1384	31863	14676	6 8136	04676	21 383	4 3883	12
13	3 4522	28967	14078	7 1033	04078	24 522	4 6987	13
14	3 7974	26333	13575	7 3666	03575	27 974	4 9954	14
15	4 1771	23940	13147	7 6060	03147	31 771	5 2788	15
16	4 5949	21763	12782	7 8236	02782	35 949	5 5492	16
17	5 0544	19785	12466	8 0215	02466	40 543	5 8070	17
18	5 5598	17986	12193	8 2013	02193	45 598	6 0524	18
19	6 1158	16351	11955	8 3649	01955	51 158	6 2860	19
20	6 7273	14865	11746	8 5135	01746	57 273	6 5080	20
21	7 4001	13513	.11562	8 6486	01562	64 001	6 7188	21
22	8 1401	12285	11401	8 7715	01401	71 401	6 9188	22
23	8 9541	11168	11257	8 8832	01257	79 541	7 1084	23
24	9 8495	10153	11130	8 9847	01130	88 495	7 2879	24
25	10 834	09230	11017	9 0770	01017	98 344	7 4579	25
26	11 917	08391	10916	9 1609	00916	109 17	7 6185	26
27	13 109	07628	10826	9 2372	00826	121 09	7 7703	27
28	14 420	06935	10745	9 3065	00745	134 20	7 9136	28
29	15 862	06304	10673	9 3696	00673	148 62	8 0488	29
30	17 448	05731	10608	9 4269	00608	164 48	8 1761	30
31	19 193	05210	10550	9 4790	00550	181 93	8 2961	31
32	21 113	04736	10497	9 5263	00497	201 13	8 4090	32
33	23 224	04306	10450	9 5694	00450	222 24	8 5151	33
34	25 546	03914	10407	9 6085	00407	245 46	8 6149	34
35	28 101	03559	10369	9 6441	00369	271 01	8 7085	35
40	45 257	02210	10226	9 7790	00226	442 57	9 0962	40
45	72 887	01372	10139	9 8628	00139	718 87	9 3740	45
50	117 38	00852	10086	9 9148	00086	1163 8	9 5704	50
55	189 04	00529	10053	9 9471	00053	1880 4	9 7075	55
60	304 46	00328	10033	9 9671	00033	3034 6	9 8022	60
65	490 34	00204	10020	9 9796	00020	4893 4	9 8671	65
70	789 69	00127	10013	9 9873	00013	7886 9	9 9112	70
75	1271 8	00079	10008	9 9921	00008	12709 0	9 9409	75
80	2048 2	00049	.10005	9 9951	00005	20474 0	9 9609	80
85	3298 7	00030	10003	9 9969	.00003	32979 7	9 9742	85
90	5312 5	00019	10002	9 9981	00002	53120 2	9.9830	90
95	8555 9	00012	10001	9 9988	00001	85556 8	9 9889	95
100	13780 6	00007	10001	9 9992	00001	137796 1	9 9927	100

72

T-14

11% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 11, N)	(P/F, 11, N)	(A/P, 11, N)	(P/A, 11, N)	(A/F, 11, N)	(F/A, 11, N)	(A/G, 11, N)	N
1	1 1100	90090	1 1100	9009	1 0000	1 000	0000	1
2	1 2321	81162	58394	1 7125	47394	2 1099	4739	2
3	1 3676	73119	40922	2 4437	29922	3 3420	9305	3
4	1 5180	65873	32233	3 1024	21233	4 7097	1 3698	4
5	1 6850	59345	27057	3 6958	16057	6 2277	1 7922	5
6	1 8704	53464	23638	4 2305	12638	7 9128	2 1975	6
7	2 0761	48166	21222	4 7121	10222	9 7831	2 5862	7
8	2 3045	43393	19432	5 1461	08432	11 859	2 9584	8
9	2 5580	39093	18060	5 5370	.07060	14 163	3 3143	9
10	2 8394	35219	16980	5 8892	05980	16 721	3 6543	10
11	3 1517	31729	16112	6 2065	05112	19 561	3 9787	11
12	3 4984	28584	15403	6 4923	04403	22 712	4 2878	12
13	3 8832	25752	14815	6.7498	03815	26 211	4 5821	13
14	4 3104	23200	14323	6 9818	03323	30 094	4 8618	14
15	4 7845	20901	13907	7 1908	.02907	34 404	5 1274	15
16	5 3108	18829	13552	7 3791	02552	39 189	5 3793	16
17	5 8950	16963	.13247	7 5487	02247	44 500	5 6180	17
18	6 5434	15282	12984	7 7016	01984	50 395	5 8438	18
19	7 2632	13768	12756	7 8392	01756	56 938	6 0573	19
20	8 0622	12404	12558	7 9633	01558	64 201	6 2589	20
21	8 9490	11174	12384	8 0750	01384	72 264	6 4490	21
22	9 9334	10067	12231	8 1757	01231	81 213	6 6282	22
23	11 026	09069	12097	8 2664	01097	91 146	6 7969	23
24	12 238	03171	11979	8 3481	00979	102 17	6 9554	24
25	13 585	07361	11874	8 4217	00874	114 41	7 1044	25
26	15 079	06631	11781	8 4880	00781	127 99	7 2442	26
27	16 738	05974	11699	8 5478	00699	143 07	7 3753	27
28	18 579	05382	11626	8 6016	00626	159 81	7 4981	28
29	20 623	04849	11561	8 6501	00561	178 39	7 6130	29
30	22 891	04368	11502	8 6937	00502	199 01	7 7205	30
31	25 409	03935	.11451	8 7331	00451	221 90	7 8209	31
32	28 204	03545	11404	8 7686	00404	247 31	7 9146	32
33	31 307	03194	11363	8 8005	00363	275 52	8 0020	33
34	34 751	02878	11326	8 8293	00326	306 83	8 0835	34
35	38 573	02592	11293	8 8552	00293	341 58	8 1594	35
40	64 999	01538	11172	8 9510	00172	581 81	8 4659	40
45	109 52	00913	11101	9 0079	00101	986 60	8 6762	45
50	184 55	00542	11060	9 0416	00060	1668 7	8 8185	50

73

 T-15

12% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 12, N)	(P/F, 12, N)	(A/P, 12, N)	(P/A, 12, N)	(A/F, 12, N)	(F/A, 12, N)	(A/G 12, N)	N
1	1 1200	89286	1 1200	8929	1 0000	1 0000	0000	1
2	1 2544	79719	59170	1 6900	47170	2 1200	4717	2
3	1 4049	71178	41635	2 4018	29635	3 3743	9246	3
4	1 5735	63552	32924	3 0373	.20924	4 7793	1 3588	4
5	1 7623	56743	27741	3 6047	15741	6 3528	1 7745	5
6	1 9738	50663	24323	4 1114	.12323	8 115	2 1720	6
7	2 2106	45235	21912	4 5637	.09912	10 088	2 5514	7
8	2 4759	40388	20130	4 9676	08130	12 299	2 9131	8
9	2 7730	36061	18768	5 3282	06768	14 775	3 2573	9
10	3 1058	32197	.17698	5 6502	05698	17 548	3 5846	10
11	3.4785	.28748	.16842	5 9376	04842	20 654	3 8952	11
12	3 8959	25668	16144	6 1943	04144	24 132	4 1896	12
13	4 3634	22918	15568	6 4235	03568	28 028	4 4682	13
14	4 8870	20462	15087	6 6281	03087	32 392	4 7316	14
15	5 4735	18270	.14682	6 8108	.02682	37 279	4 9802	15
16	6 1303	16312	14339	6 9739	.02339	42 752	5 2146	16
17	6 8659	14565	14046	7 1196	02046	48 883	5 4352	17
18	7 6899	13004	13794	7 2496	01794	55 749	5 6427	18
19	8 6126	11611	13576	7 3657	01576	63 439	5 8375	19
20	9 6462	10367	13388	7.4694	01388	72 051	6 0201	20
21	10 803	09256	13224	7 5620	01224	81 698	6 1913	21
22	12 100	08264	13081	7 6446	01081	92 501	6 3513	22
23	13 552	07379	12956	7 7184	00956	104 60	6 5009	23
24	15 178	06588	.12846	7 7843	00846	118 15	6 6406	24
25	16 999	05882	12750	7 8431	00750	133 33	6 7708	25
26	19 039	05252	12665	7 8956	00665	150 33	6 8920	26
27	21 324	04689	12590	7 9425	00590	169 37	7 0049	27
28	23 883	04187	12524	7 9844	00524	190 69	7 1097	28
29	26 749	03738	12466	8 0218	.00466	214 58	7 2071	29
30	29 959	03338	12414	8 0551	00414	241 32	7 2974	30
31	33 554	02980	12369	8 0849	00369	271 28	7 3810	31
32	37 581	02661	12328	8 1116	00328	304 84	7 4585	32
33	42 090	02376	12292	8 1353	00292	342 42	7 5302	33
34	47 141	02121	12260	8 1565	00260	384 51	7 5964	34
35	52 798	01894	12232	8 1755	00232	431 65	7 6576	35
40	93 049	01075	12130	8 2437	00130	767 07	7 8987	40
45	163 98	00610	12074	8 2825	00074	1358 2	8 0572	45
50	288 99	00346	12042	8 3045	00042	2399 9	8 1597	50

74

T-16

13% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 13, N)	(P/F, 13, N)	(A/P, 13, N)	(P/A, 13, N)	(A/F, 13, N)	(F/A, 13, N)	(A/G, 13, N)	N
1	1.1300	88496	1.1300	8850	1.0000	1.0000	0000	1
2	1.2769	78315	59949	1.6680	46949	2.1299	4694	2
3	1.4428	69305	42352	2.3611	29353	3.4068	9187	3
4	1.6304	61332	33620	2.9744	20620	4.8497	1.3478	4
5	1.8424	54276	28432	3.5172	15432	6.4802	1.7570	5
6	2.0819	48032	25015	3.9975	12015	8.3226	2.1467	6
7	2.3525	42506	22611	4.4225	09611	10.404	2.5170	7
8	2.6584	37616	20839	4.7987	07839	12.757	2.8684	8
9	3.0040	33289	19487	5.1316	06487	15.415	3.2013	9
10	3.3945	29459	18429	5.4262	05429	18.419	3.5161	10
11	3.8358	26070	17584	5.6869	04584	21.813	3.8133	11
12	4.3344	23071	16899	5.9176	03899	25.649	4.0935	12
13	4.8979	20417	.16335	6.1217	03335	29.984	4.3572	13
14	5.5346	18068	15867	6.3024	02867	34.882	4.6049	14
15	6.2541	15989	15474	6.4623	02474	40.416	4.8374	15
16	7.0672	14150	.15143	6.6038	02143	46.670	5.0551	16
17	7.9859	12522	14861	6.7290	01861	53.737	5.2588	17
18	9.0240	11081	14620	6.8399	01620	61.723	5.4490	18
19	10.197	09807	14413	6.9379	01413	70.747	5.6264	19
20	11.522	08678	14235	7.0247	01235	80.944	5.7916	20
21	13.020	07680	14081	7.1015	01081	92.467	5.9453	21
22	14.713	06796	13948	7.1695	00948	105.48	6.0880	22
23	16.626	06015	13832	7.2296	00832	120.20	6.2204	23
24	18.787	05323	13731	7.2828	00731	136.82	6.3430	24
25	21.229	04710	13643	7.3299	00643	155.61	6.4565	25
26	23.989	04168	13565	7.3716	00565	176.84	6.5613	26
27	27.108	03689	13498	7.4085	00498	200.83	6.6581	27
28	30.632	03265	13439	7.4412	00439	227.94	6.7474	28
29	34.614	02889	13387	7.4700	00387	258.57	6.8295	29
30	39.114	02557	13341	7.4956	00341	293.18	6.9052	30
31	44.199	02262	13301	7.5182	00301	332.30	6.9747	31
32	49.945	02002	13266	7.5383	00266	376.50	7.0335	32
33	56.438	01772	13234	7.5560	00234	426.44	7.0970	33
34	63.775	01568	13207	7.5717	00207	482.88	7.1506	34
35	72.065	01388	13183	7.5855	00183	546.65	7.1998	35
40	132.77	00753	13099	7.6343	00099	1013.6	7.3887	40
45	244.62	00409	13053	7.6606	00053	1874.0	7.5076	45
50	450.71	00222	13029	7.6752	00029	3459.3	7.5811	50

75

T-17

14% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 14, N)$	$(P/F, 14, N)$	$(A/P, 14, N)$	$(P/A, 14, N)$	$(A/F, 14, N)$	$(F/A, 14, N)$	$(A/G, 14, N)$	N
1	1.1400	87719	1.1400	.8772	1.0000	1.000	0000	1
2	1.2996	76947	60729	1.6466	46729	2.1399	4672	2
3	1.4815	67497	43073	2.3216	29073	3.4395	.9129	3
4	1.6889	59208	34321	2.9137	20321	4.9211	1.3369	4
5	1.9254	51937	29128	3.4330	15128	6.6100	1.7398	5
6	2.1949	45559	25716	3.8886	11716	8.535	2.1217	6
7	2.5022	39964	23319	4.2882	09319	10.730	2.4831	7
8	2.8525	35056	21557	4.6388	07557	13.232	2.8245	8
9	3.2519	30751	20217	4.9463	06217	16.085	3.1462	9
10	3.7071	26975	19171	5.2161	05171	19.337	3.4489	10
11	4.2261	.23662	18339	5.4527	04339	23.044	3.7332	11
12	4.8178	.20756	17667	5.6602	03667	27.270	3.9997	12
13	5.4923	18207	17116	5.8423	03116	32.088	4.2490	13
14	6.2612	15971	.16661	6.0020	.02661	37.580	4.4819	14
15	7.1378	14010	16281	6.1421	02281	43.841	4.6990	15
16	8.1371	12289	15962	6.2650	01962	50.979	4.9010	16
17	9.2763	10780	.15692	6.3728	01692	59.116	5.0888	17
18	10.574	09456	15462	6.4674	01462	68.392	5.2629	18
19	12.055	08295	.15266	6.5503	.01266	78.967	5.4242	19
20	13.743	07276	.15099	6.6231	.01099	91.022	5.5734	20
21	15.667	06383	.14954	6.6869	.00955	104.76	5.7111	21
22	17.860	05599	14830	6.7429	00830	120.43	5.8380	22
23	20.361	04911	14723	6.7920	00723	138.29	5.9549	23
24	23.211	04308	14630	6.8351	00630	158.65	6.0623	24
25	26.461	03779	14550	6.8729	00550	181.86	6.1609	25
26	30.165	03315	14480	6.9060	00480	208.32	6.2514	26
27	34.338	02908	.14419	6.9351	00419	238.49	6.3342	27
28	39.203	02551	14366	6.9606	00366	272.88	6.4039	28
29	44.691	02238	14320	6.9830	00320	312.08	6.4791	29
30	50.948	01963	14280	7.0026	.00280	356.77	6.5422	30
31	58.081	01722	.14245	7.0198	00245	407.72	6.5997	31
32	66.212	01510	14215	7.0349	00215	465.80	6.6521	32
33	75.482	01325	14188	7.0482	00188	532.01	6.6998	33
34	86.049	01162	14165	7.0598	00165	607.49	6.7430	34
35	98.096	01019	14144	7.0700	00144	693.54	6.7824	35
40	188.87	00529	14075	7.1050	00075	1341.9	6.9299	40
45	363.66	00275	14039	7.1232	00039	2590.4	7.0187	45
50	700.19	00143	14020	7.1326	00020	4994.2	7.0713	50

15% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 15, N)$	$(P/F\ 15, N)$	$(A/P\ 15, N)$	$(P/A\ 15, N)$	$(A/F\ 15, N)$	$(F/A, 15, N)$	$(A/G, 15, N)$	V
1	1 1500	86957	1 1500	.8696	1 0000	1 000	0000	1
2	1 3225	75614	61512	1 6257	46512	2 1499	4651	2
3	1 5208	65752	43798,	2 2832	28798	3 4724	9071	3
4	1 7490	57175	35027	2 8549	20027	4 9933	1 3262	4
5	2 0113	49718	29832	3 3521	14832	6 7423	1 7227	5
6	2 3130	43233	26424	3 7844	11424	8 7536	2 0971	6
7	2 6600	37594	24036	4 1604	09036	11 066	2 4498	7
8	3 0590	32690	22285	4 4873	07285	13 726	2 7813	8
9	3 5178	28426	20957	4 7715	05957	16 785	3 0922	9
10	4 0455	24719	19925	5 0187	04925	20 303	3 3831	10
11	4 6523	21494	19107	5 2337	04107	24 349	3 6549	11
12	5 3502	.18691	18448	5 4206	03448	29 001	3 9081	12
13	6 1527	16253	17911	5 5831	02911	34 351	4 1437	13
14	7 0756	14133	17469	5 7244	02469	40 504	4 3623	14
15	8 1[illegible]	12290	17102	5 8473	02102	47 579	4 5649	15
16	9 3575	10687	16795	5 9542	01795	55 716	4 7522	16
17	10 761	09293	.16537	6 0471	01537	65 074	4 9250	17
18	12 375	08081	16319	6 1279	01319	75,835	5 0842	18
19	14 231	07027	16134	6 1982	.01134	88.210	5 2307	19
20	16 366	06110	15976	6 2593	00976	102 44	5 3651	20
21	18 821	05313	15842	6 3124	00842	118 80	5 4883	21
22	21 644	04620	.15727	6 3586	00727	137 62	5 6010	22
23	24 891	04018	15628	6 3988	00628	159 27	5 7039	23
24	28 624	.03493	15543	6 4337	00543	184 16	5 7978	24
25	32 918	03038	15470	6 4641	00470	212 78	5 8834	25
26	37 856	02642	15407	6 4905	00407	245 70	5 9612	26
27	43 534	02297	15353	6 5135	00353	283 56	6 0318	27
28	50 064	01997	15306	6 5335	00306	327 09	6 0959	28
29	57 574	01737	15265	6 5508	00265	377 16	6 1540	29
30	66 210	01510	15230	6 5659	00230	434 73	6 2066	30
31	76 141	.01313	15200	6 5791	00200	500 94	6 2541	31
32	87 563	01142	15173	6 5905	00173	577 08	6 2970	32
33	100 69	00993	15150	6 6004	00150	664 65	6 3356	33
34	115 80	00864	15131	6 6091	00131	765 34	6 3705	34
35	133 17	00751	15113	6 6166	00113	881.14	6 4018	35
40	267 85	00373	15056	6 6417	00056	1779 0	6 5167	40
45	538 75	00186	15028	6 6543	00028	3585.0	6 5829	45
50	1083 6	00092	15014	6 6605	00014	7217 4	6 8204	50

77

T-19

20% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 20, N)$	$(P/F, 20, N)$	$(A/P, 20, N)$	$(P/A, 20, N)$	$(A/F, 20, N)$	$(F/A, 20, N)$	$(A/G, 20, N)$	N
1	1 2000	83333	1 2000	8333	1 0000	1 0000	0000	1
2	1 4400	69445	65455	1 5277	.45455	2 1999	4545	2
3	1 7280	57870	47473	2 1064	27473	3 6399	8791	3
4	2 0736	.48225	38629	2 5887	.18629	5 3679	1 2742	4
5	2 4883	40188	33438	2 9906	13438	7 4415	1 6405	5
6	2 9859	33490	30071	3 3255	10071	9 9298	1 9788	6
7	3 5831	27908	27742	3 6045	.07742	12 915	2 2901	7
8	4 2998	23257	26061	3 8371	06061	16 498	2 5756	8
9	5 1597	19331	24808	4 0309	04808	20 798	2 8364	9
10	6 1917	16151	23852	4 1924	.03852	25 958	3 0738	10
11	7 4300	13459	23110	4 3270	03110	32 150	3 2892	11
12	8 9160	11216	22527	4 4392	02527	39 580	3 4840	12
13	10 699	09346	22062	4 5326	02062	48 496	3 6596	13
14	12 839	07789	21689	4 6105	01689	59 195	3 8174	14
15	15 406	06491	21388	4 6754	.01388	72 034	3 9588	15
16	18.488	05409	21144	4 7295	01144	87 441	4 0851	16
17	22 185	04507	20944	4 7746	00944	105 92	4 1975	17
18	26 623	03756	20781	4 8121	00781	128 11	4 2975	18
19	31 947	03130	20646	4 8435	.00646	154 73	4 3860	19
20	38 337	02608	20536	4 8695	00536	186 68	4 4643	20
21	46 004	02174	20444	4 8913	00444	225 02	4 5333	21
22	55 205	01811	20369	4 9094	00369	271 02	4 5941	22
23	66 246	01510	20307	4 9245	00307	326 23	4 6474	23
24	79 495	01258	20255	4 9371	00255	392 47	4 6942	24
25	95 394	01048	20212	4 9475	00212	471 97	4 7351	25
26	114 47	.00874	20176	4 9563	00176	567 36	4 7708	26
27	137 36	00728	20147	4 9636	00147	681 84	4 8020	27
28	164 84	00607	20122	4 9696	00122	819 21	4 8291	28
29	197 81	00506	20102	4 9747	00102	984 05	4 8526	29
30	237.37	00421	20085	4 9789	.00085	1181 8	4 8730	30
31	284 84	00351	20070	4 9824	00070	1419 2	4 8907	31
32	341 81	00293	20059	4 9853	00059	1704 0	4 9061	32
33	410 17	00244	20049	4 9878	00049	2045 8	4 9193	33
34	492 21	00203	20041	4 9898	00041	2456 0	4 9307	34
35	590 65	00169	20034	4 9915	00034	2948 2	4 9406	35
40	1469 7	00068	20014	4 9966	00014	7343 6	4 9727	40
45	3657 1	00027	20005	4 9986	00005	18281 3	4 9876	45
50	9100 1	00011	20002	4 9994	00002	45497 2	4 9945	50

78

T-20

25% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 25, N)$	$(P/F, 25, N)$	$(A/P, 25, N)$	$(P/A, 25, N)$	$(A/F, 25, N)$	$(F/A, 25, N)$	$(A/G, 25, N)$	N
1	1 2500	80000	1 2500	8000	1 0000	1 0000	00000	1
2	1 5625	64000	69444	1 4400	44444	2 2500	44444	2
3	1 9531	51200	51230	1 9520	26230	3 8125	85246	3
4	2 4414	40960	42344	2 3616	17344	5 7656	1 2249	4
5	3 0518	32768	37185	2 6893	12185	8 2070	1 5631	5
6	3 8147	26214	33882	2 9514	08882	11 259	1 8683	6
7	4 7684	20972	31634	3 1661	06634	15 073	2 1424	7
8	5 9605	16777	30040	3 3289	05040	19 842	2 3872	8
9	7 4506	13422	28876	3 4631	03876	25 802	2 6048	9
10	9 3132	10737	28007	3 5705	03007	33 253	2 7971	10
11	11 642	08590	27349	3 6564	02349	42 566	2 9663	11
12	14 552	.06872	26845	3 7251	01845	54 208	3 1145	12
13	18 190	05498	26454	3 7801	01454	68 760	3 2437	13
14	22 737	04398	26150	3 8241	01150	86 949	3 3559	14
15	28 422	03518	25912	3 8593	00912	109 687	3 4530	15
16	35 527	02815	25724	3 8874	00724	138 109	3 5366	16
17	44 409	02252	25576	3 9099	00576	173 636	3 6084	17
18	55 511	01801	25459	3 9279	00459	218 045	3 6698	18
19	69 389	01441	25366	3 9424	00366	273 556	3 7222	19
20	86 736	01153	25292	3 9539	00292	342 945	3 7667	20
21	108 420	00922	25233	3 9631	00233	429 681	3 8045	21
22	135 525	00738	25186	3 9705	00186	538 101	3 8365	22
23	169 407	00590	25148	3 9764	00148	673 626	3 8634	23
24	211 758	00472	25119	3 9811	00119	843 033	3 8861	24
25	264 698	00378	25095	3 9849	00095	1054 791	3 9052	25
26	330 872	00302	25076	3 9879	00076	1319 489	3 9212	26
27	413 590	00242	25061	3 9903	00061	1650 361	3 9346	27
28	516 988	00193	25048	3 9923	00048	2063 952	3 9457	28
29	646 235	00155	25039	3 9938	00039	2580 939	3 9551	29
30	807 794	00124	25031	3 9950	00031	3227 174	3 9628	30
31	1009 742	00099	25025	3 9960	00025	4034 968	3 9693	31
32	1262 177	00079	25020	3 9968	00020	5044 710	3 9746	32
33	1577 722	00063	25016	3 9975	00016	6306 887	3 9791	33
34	1972 152	00051	25013	3 9980	00012	7884 609	3 9828	34
35	2465 190	00041	25010	3 9984	00010	9856 761	3 9858	35

79

30% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 30, N)	(P/F, 30, N)	(A/P, 30, N)	(P/A, 30, N)	(A/F, 30, N)	(F/A, 30, N)	(A/G, 30, N)	N
1	1 3000	76923	1 3000	7692	1 0000	1 000	0000	1
2	1 6900	59172	73478	1 3609	43478	2 2999	4348	2
3	2 1969	45517	55063	1 8161	25063	3 9899	8277	3
4	2 8560	35013	46163	2 1662	.16163	6 1869	1 1782	4
5	3 7129	26933	41058	2 4355	.11058	9 0430	1 4903	5
6	4 8267	20718	37839	2 6427	.07839	12 755	1 7654	6
7	6 2748	15937	35687	2 8021	05687	17 582	2 0062	7
8	8 1572	12259	34192	2 9247	04192	23 857	2 2155	8
9	10 604	09430	33124	3 0190	03124	32 014	2 3962	9
10	13 785	07254	32346	3 0915	02346	42 619	2 5512	10
11	17 921	05580	31773	3 1473	01773	56 404	2 6832	11
12	23 297	04292	31345	3 1902	01345	74 326	2 7951	12
13	30 287	03302	31024	3 2232	01024	97 624	2 8894	13
14	39 373	02540	30782	3 2486	00782	127 91	2 9685	14
15	51 185	01954	30598	3 2682	00598	167 28	3 0344	15
16	66 540	01503	30458	3 2832	00458	218 46	3 0892	16
17	86 503	01156	30351	3 2948	00351	285 01	3 1345	17
18	112 45	00889	30269	3 3036	00269	371 51	3 1718	18
19	146 18	00684	30207	3 3105	00207	483 96	3 2024	19
20	190 04	00526	30159	3 3157	00159	630 15	3 2275	20
21	247 06	00405	30122	3 3198	00122	820 20	3 2479	21
22	321 17	00311	30094	3 3229	00094	1067 2	3 2646	22
23	417 53	00240	30072	3 3253	00072	1388 4	3 2781	23
24	542 79	00184	30055	3 3271	00055	1805 9	3 2890	24
25	705 62	00142	30043	3 3286	00043	2348 7	3 2978	25
26	917 31	00109	30033	3 3297	00033	3054 3	3 3049	26
27	1192 5	00084	30025	3 3305	00025	3971 6	3 3106	27
28	1550 2	00065	.30019	3 3311	00019	5164 1	3 3152	28
29	2015 3	00050	30015	3 3316	00015	6714 4	3 3189	29
30	2619 9	00038	30011	3 3320	00011	8729 7	3.3218	30
31	3405 9	00029	30009	3 3323	00009	11350 0	3 3242	31
32	4427 6	00023	30007	3 3325	00007	14756 0	3 3261	32
33	5755 9	00017	30005	3 3327	00005	19184 0	3 3276	33
34	7482 7	00013	30004	3 3328	00004	24940 0	3 3287	34
35	9727 5	00010	30003	3 3329	00003	32423 0	3 3297	35

40% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 40, N)$	$(P/F, 40, N)$	$(A/P, 40, N)$	$(P/A, 40, N)$	$(A/F, 40, N)$	$(F/A, 40, N)$	$(A/G, 40, N)$	N
1	1 4000	71429	1 40000	.7143	1 00000	1 0000	0000	1
2	1 9600	51020	81667	1 2244	41667	2 3999	4167	2
3	2 7440	36443	62936	1 5889	22936	4 3599	7798	3
4	3 8415	26031	54077	1 8492	14077	7 1039	1,0923	4
5	5 3782	18593	49136	2 0351	09136	10 945	1 3579	5
6	7 5295	13281	46126	2 1679	06126	16 323	1 5810	6
7	10 541	09486	44192	2 2628	04192	23 853	1 7663	7
8	14.757	06776	42907	2 3306	02907	34 394	1 9185	8
9	20 660	04840	42034	2 3790	02034	49 152	2 0422	9
10	28 925	03457	41432	2 4135	01432	69 813	2 1419	10
11	40 495	02469	41013	[illegible]	01013	98 738	2 2214	11
12	56 693	01764	40718	2 4559	00718	139 23	2 2845	12
13	79 370	01260	40510	2 4685	00510	[illegible]	2 3341	13
14	111 11	00900	40363	2 4775	00363	[illegible]	2 3728	14
15	155 56	00643	40259	2 4839	00259	386 41	2 4029	15
16	217 79	00459	40184	2 4885	.00185	541 98	2 4262	16
17	304 91	00328	40132	2 4918	00132	759 77	2 4440	17
18	426 87	00234	40094	2 4941	00094	1064 6	2 4577	18
19	597 62	00167	40067	2 4958	00067	1491 5	2 4681	19
20	836 67	00120	40048	2 4970	00048	2089 1	2 4760	20
21	1171 3	[illegible]	40034	2 4978	00034	2925 8	2 4820	21
22	1639 8	00061	[illegible]	2 4984	00024	4097 1	2 4865	22
23	2295 8	00044	40017	[illegible]	00017	5737 0	2 4899	23
24	3214 1	00031	40012	[illegible]	00012	8032 8	2 4925	24
25	4499 8	00022	40009	2 4994	[illegible]	11247 2	2 4944	25

T-23

81

50% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 50, N)	(P/F, 50, N)	(A/P, 50, N)	(P/A, 50, N)	(A/F, 50, N)	(F/A, 50, N)	(A/G, 50, N)	N
1	1.5000	66667	1.5000	6667	1.00000	1.000	0000	1
2	2.2500	44444	90000	1.1111	40000	2.500	4000	2
3	3.3750	29630	.71053	1.4074	21053	4.750	7368	3
4	5.0625	19753	62308	1.6049	12308	8.125	1.0153	4
5	7.5937	.13169	57583	1.7366	07583	13.187	1.2417	5
6	11.390	08779	54812	1.8244	04812	20.781	1.4225	6
7	17.085	.05853	53108	1.8829	03108	32.171	1.5648	7
8	25.628	03902	52030	1.9219	02030	49.257	1.6751	8
9	38.443	02601	51335	1.9479	01335	74.886	1.7596	9
10	57.665	01734	50882	1.9653	00882	113.33	1.8235	10
11	86.497	01156	50585	1.9768	00585	170.99	1.8713	11
12	129.74	00771	50388	1.9845	00388	257.49	1.9067	12
13	194.61	00514	50258	1.9897	00258	387.23	1.9328	13
14	291.92	00343	50172	1.9931	00172	581.85	1.9518	14
15	437.89	00228	50114	1.9954	00114	873.78	1.9656	15
16	656.84	00152	50076	1.9969	00076	1311.6	1.9756	16
17	985.26	00101	50051	1.9979	00051	1968.5	1.9827	17
18	1477.8	00068	50034	1.9986	00034	2953.7	1.9878	18
19	2216.8	00045	50023	1.9991	00023	4431.6	1.9914	19
20	3325.2	00030	50015	1.9994	00015	6648.5	1.9939	20
21	4987.8	00020	50010	1.9996	00010	9973.7	1.9957	21
22	7481.8	00013	50007	1.9997	00007	14961.7	1.9970	22
23	11222.7	00009	50004	1.9998	00004	22443.5	1.9979	23
24	16834.1	00006	50003	1.9998	.00003	33666.2	1.9985	24
25	25251.2	00004	50002	1.9999	00002	50500.3	1.9990	25

82

T-24

60% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 60, N)	(P/F, 60, N)	(A/P, 60, N)	(P/A, 60, N)	(A/F, 60, N)	(F/A, 60, N)	(A/G, 60, N)	N
1	1.6000	.62500	1.6000	.6250	1.0000	1.000	.0000	1
2	2.5600	.39063	.98462	1.0156	.38462	2.6000	.3846	2
3	4.0959	.24414	.79380	1.2597	.19380	5.1599	.6977	3
4	6.5535	.15259	.70804	1.4123	.10804	9.2559	.9464	4
5	10.485	.09537	.66325	1.5077	.06325	15.809	1.1395	5
6	16.777	.05960	.63803	1.5673	.03803	26.295	1.2863	6
7	26.843	.03725	.62322	1.6045	.02322	43.072	1.3958	7
8	42.949	.02328	.61430	1.6278	.01430	69.915	1.4759	8
9	68.719	.01455	.60886	1.6424	.00886	112.86	1.5337	9
10	109.95	.00909	.60551	1.6515	.00551	181.58	1.5748	10
11	175.92	.00568	.60343	1.6571	.00343	291.53	1.6037	11
12	281.47	.00355	.60214	1.6607	.00214	467.45	1.6238	12
13	450.35	.00222	.60134	1.6629	.00134	748.92	1.6377	13
14	720.57	.00139	.60083	1.6643	.00083	1199.2	1.6472	14
15	1152.9	.00087	.60052	1.6652	.00052	1919.8	1.6536	15
16	1844.6	.00054	.60033	1.6657	.00033	3072.7	1.6579	16
17	2951.4	.00034	.60020	1.6661	.00020	4917.4	1.6609	17
18	4722.3	.00021	.60013	1.6663	.00013	7868.8	1.6628	18
19	7555.7	.00013	.60008	1.6664	.00008	12591.0	1.6641	19
20	12089.0	.00008	.60005	1.6665	.00005	20147.0	1.6650	20

70% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

N	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					N
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 70, N)	(P/F, 70, N)	(A/P, 70, N)	(P/A, 70, N)	(A/F, 70, N)	(F/A, 70, N)	(A/G, 70, N)	N
1	1 7000	58824	1 7000	5882	1.0000	1 000	.0000	1
2	2 8900	34602	1 0703	9343	.37037	2 700	3704	2
3	4 9130	20354	87889	1 1378	.17889	5 590	6619	3
4	8 3520	11973	79521	1 2575	.09521	10 502	8845	4
5	14 198	07043	75304	1 3279	05304	18 855	1 0497	5
6	24 137	04143	73025	1 3693	03025	33 053	1 1692	6
7	41 033	02437	71749	1 3937	01749	57 191	1.2537	7
8	69 757	01434	71018	1 4080	01018	98 224	1 3122	8
9	118 58	00843	70595	1 4165	00595	167 98	1 3520	9
10	201 59	00496	70349	1 4214	00349	286 56	1 3787	10
11	342 71	00292	70205	1 4244	00205	488 16	1 3963	11
12	582 62	00172	70120	1 4261	00120	830 88	1,4079	12
13	990 45	00101	70071	1 4271	00071	1413 5	1 4154	13
14	1683 7	00059	70042	1 4277	00042	2403 9	1 4202	14
15	2862 4	00035	70024	1 4280	00024	4087 7	1.4233	15
16	4866 0	00021	70014	1 4282	00014	6950 1	1 4252	16
17	8272 3	00012	70008	1 4284	00008	11816 0	1 4265	17
18	14063 0	00007	70005	1,4284	00005	20089 0	1 4272	18
19	23907 0	,00004	70003	1 4285	00003	34152 0	1,4277	19
20	40642 0	00002	70002	1 4285	00002	58059 0	1 4280	20

80% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

N	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					N
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 80, N)	(P/F, 80, N)	(A/P, 80, N)	(P/A, 80, N)	(A/F, 80, N)	(F/A, 80, N)	(A/G, 80, N)	N
1	1 8000	55556	1 8000	5556	1 00000	1,0000	0000	1
2	3 2400	30864	1 1571	8642	35714	2,8000	.3571	2
3	5 8319	17147	96556	1 0356	16556	6.0399	6291	3
4	10 497	09526	88423	1 1309	08423	11.871	8288	4
5	18 895	05292	84470	1 1838	04470	22.369	9706	5
6	34 012	02940	82423	1 2132	02423	41.265	1 0682	6
7	61 221	01633	81328	1 2295	01328	75.277	1 1337	7
8	110 19	00907	80733	1 2386	00733	136.49	1 1767	8
9	198 35	00504	80405	1 2437	00405	246.69	1 2044	9
10	357 04	00280	80225	1 2465	00225	445.05	1 2219	10
11	642 68	00156	80125	1 2480	00125	802.10	1 2328	11
12	1156 8	00086	80069	1 2489	00069	1444.7	1 2396	12
13	2082 2	00048	80038	1 2494	00038	2601.6	1 2437	13
14	3748 1	00027	80021	1 2496	00021	4683.8	1 2462	14
15	6746 5	00015	80012	1 2498	00012	8431.9	1 2477	15

84

T-26

90% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 90, N)$	$(P/F, 90, N)$	$(A/P, 90, N)$	$(P/A, 90, N)$	$(A/F, 90, N)$	$(F/A, 90, N)$	$(A/G, 90, N)$	N
1	1 9000	52632	1 9000	52632	1 00000	1 0000	00000	1
2	3 6100	27701	1 2448	80332	34483	2 9000	34483	2
3	6 8589	14579	1 0536	94912	15361	6 5099	59908	3
4	13 032	07673	97480	1 0258	07480	13 368	77867	4
5	24 760	04039	93788	1.0662	03788	26 401	90068	5
6	47 045	02126	91955	1 0374	01955	51 161	98081	6
7	89 386	01119	91018	1 0986	01018	98 207	1 0319	7
8	169 83	00589	90533	1.1045	.00533	187 59	1 0637	8
9	322 68	00310	90280	1 1076	.00280	357 42	1 0831	9
10	613 10	00163	90147	1 1093	00147	680 11	1 0947	10

100% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 100, N)$	$(P/F, 100, N)$	$(A/P, 100, N)$	$(P/A, 100, N)$	$(A/F, 100, N)$	$(F/A, 100, N)$	$(A/G, 100, N)$	N
1	2 000	50000	2 0000	50000	1 0000	1 000	00000	1
2	4 000	25000	1 3333	75000	33333	3 000	.33333	2
3	8 000	12500	1 1428	87500	14286	7 000	57143	3
4	16 000	06250	1 0666	93750	06667	15 000	73333	4
5	32 000	03125	1 0322	96875	03226	31 000	83871	5
6	64 00	01562	1 0158	98438	01587	63 00	90476	6
7	128 00	00781	1 0078	99219	00787	127 00	94488	7
8	256 00	00391	1 0039	99609	00392	255 00	96863	8
9	512 00	00195	1 0019	99805	.00196	511 00	98239	9
10	1024 0	00098	1 0009	99902	00098	1023 0	99022	10

TABLE A-24

50.00% COMPOUND INTEREST FACTORS

	SINGLE PAYMENTS		UNIFORM SERIES PAYMENTS				
N	COMPOUND AMOUNT F/P	PRESENT WORTH P/F	SINKING FUND A/F	COMPOUND AMOUNT F/A	CAPITAL RECOVERY A/P	PRESENT WORTH P/A	N
1	1.5000	0.6667	1.00000	1.000	1.50000	0.6667	1
2	2.2500	0.4444	0.40000	2.500	0.90000	1.1111	2
3	3.3750	0.2963	0.21053	4.750	0.71053	1.4074	3
4	5.0625	0.1975	0.12308	8.125	0.62308	1.6049	4
5	7.5937	0.1317	0.07583	13.187	0.57583	1.7366	5
6	11.3906	0.0878	0.04812	20.781	0.54812	1.8244	6
7	17.0859	0.0585	0.03108	32.172	0.53108	1.8829	7
8	25.6288	0.0390	0.02030	49.258	0.52030	1.9220	8
9	38.4431	0.0260	0.01335	74.886	0.51335	1.9480	9
10	57.6647	0.0173	0.00882	113.329	0.50882	1.9653	10
11	86.4969	0.0116	0.00585	170.994	0.50585	1.9769	11
12	129.7453	0.0077	0.00388	257.491	0.50388	1.9846	12
13	194.6179	0.0051	0.00258	387.236	0.50258	1.9897	13
14	291.9265	0.0034	0.00172	581.854	0.50172	1.9931	14
15	437.8896	0.0023	0.00114	873.780	0.50114	1.9954	15
16	656.8340	0.0015	0.00076	1311.669	0.50076	1.9970	16
17	985.2505	0.0010	0.00051	1968.503	0.50051	1.9980	17
18	1477.875	0.0007	0.00034	2953.753	0.50034	1.9986	18
19	2216.811	0.0005	0.00023	4431.625	0.50023	1.9991	19
20	3325.214	0.0003	0.00015	6648.434	0.50015	1.9994	20
22	7481.723	0.0001	0.00007	14961.450	0.50007	1.9997	22
24	16833.85	0.0001	0.00003	33665.730	0.50003	1.9999	24
25	25250.77	0.0000	0.00002	50499.570	0.50002	1.9999	25
26	37876.13	0.0000	0.00001	75750.310	0.50001	1.9999	26
28	85221.13	0.0000	0.00001	170440.30	0.50001	2.0000	28
30	191747.4	0.0000	0.00000	383493.10	0.50000	2.0000	30
32	431431.1	0.0000	0.00000	862861.50	0.50000	2.0000	32
34	970718.8	0.0000	0.00000	1941437.0	0.50000	2.0000	34

TABLE A-25

PRESENT WORTH GRADIENT FACTORS(P/G)

N	1%	2%	3%	4%	5%	6%	N
2	0.958	0.958	0.941	0.924	0.906	0.890	2
3	2.895	2.841	2.772	2.702	2.634	2.569	3
4	5.773	5.612	5.437	5.267	5.101	4.945	4
5	9.566	9.233	8.887	8.554	8.235	7.934	5
6	14.271	13.672	13.074	12.506	11.966	11.458	6
7	19.860	18.895	17.952	17.066	16.230	15.449	7
8	26.324	24.868	23.478	22.180	20.968	19.840	8
9	33.626	31.559	29.609	27.801	26.124	24.576	9
10	41.764	38.943	36.305	33.881	31.649	29.601	10
11	50.721	46.984	43.530	40.377	37.496	34.869	11
12	60.479	55.657	51.245	47.248	43.621	40.335	12
13	71.018	64.932	59.416	54.454	49.984	45.961	13
14	82.314	74.783	68.010	61.961	56.550	51.711	14
15	94.374	85.183	76.996	69.735	63.284	57.553	15
16	107.154	96.109	86.343	77.744	70.156	63.457	16
17	120.662	107.535	96.023	85.958	77.136	69.399	17
18	134.865	119.436	106.009	94.350	84.200	75.355	18
19	149.754	131.792	116.274	102.893	91.323	81.304	19
20	165.320	144.577	126.794	111.564	98.484	87.228	20
21	181.546	157.772	137.544	120.341	105.663	93.111	21
22	198.407	171.354	148.504	129.202	112.841	98.939	22
23	215.903	185.305	159.651	138.128	120.004	104.699	23
24	234.009	199.604	170.965	147.101	127.135	110.379	24
25	252.717	214.231	182.428	156.103	134.223	115.971	25
26	272.011	229.169	194.020	165.121	141.253	121.466	26
27	291.875	244.401	205.725	174.138	148.217	126.858	27
28	312.309	259.908	217.525	183.142	155.105	132.140	28
29	333.280	275.674	229.407	192.120	161.907	137.307	29
30	354.790	291.684	241.355	201.061	168.617	142.357	30
31	376.822	307.921	253.354	209.955	175.228	147.284	31
32	399.360	324.369	265.392	218.792	181.734	152.088	32
33	422.398	341.016	277.457	227.563	188.130	156.766	33
34	445.919	357.845	289.536	236.260	194.412	161.317	34
35	469.916	374.846	301.615	244.876	200.575	165.741	35
36	494.375	392.003	313.695	253.405	206.618	170.037	36
37	519.279	409.305	325.755	261.839	212.538	174.205	37
38	544.622	426.738	337.788	270.175	218.333	178.247	38
39	570.396	444.291	349.786	278.406	224.000	182.163	39
40	596.579	461.953	361.742	286.530	229.540	185.955	40
42	650.167	497.560	385.495	302.437	240.234	193.171	42
44	705.288	533.474	408.989	317.869	250.412	199.911	44
46	761.870	569.618	432.177	332.810	260.079	206.192	46
48	819.829	605.921	455.017	347.244	269.242	212.033	48
50	879.089	642.316	477.472	361.163	277.910	217.456	50

98

TABLE A-25

PRESENT WORTH GRADIENT FACTORS(P/G)

N	7%	8%	9%	10%	15%	20%	N
2	0.873	0.857	0.841	0.826	0.756	0.694	2
3	2.506	2.445	2.386	2.329	2.071	1.852	3
4	4.794	4.650	4.511	4.378	3.786	3.299	4
5	7.646	7.372	7.111	6.862	5.775	4.906	5
6	10.978	10.523	10.092	9.684	7.937	6.581	6
7	14.714	14.024	13.374	12.763	10.192	8.255	7
8	18.788	17.806	16.887	16.028	12.481	9.883	8
9	23.140	21.808	20.570	19.421	14.755	11.434	9
10	27.715	25.977	24.372	22.891	16.979	12.887	10
11	32.466	30.266	28.247	26.396	19.129	14.233	11
12	37.350	34.634	32.158	29.901	21.185	15.467	12
13	42.330	39.046	36.072	33.377	23.135	16.588	13
14	47.371	43.472	39.962	36.800	24.972	17.601	14
15	52.445	47.886	43.806	40.152	26.693	18.509	15
16	57.526	52.264	47.584	43.416	28.296	19.321	16
17	62.592	56.588	51.281	46.581	29.783	20.042	17
18	67.621	60.842	54.885	49.639	31.156	20.680	18
19	72.598	65.013	58.386	52.582	32.421	21.244	19
20	77.508	69.090	61.776	55.406	33.582	21.739	20
21	82.339	73.063	65.050	58.109	34.645	22.174	21
22	87.079	76.926	68.204	60.689	35.615	22.555	22
23	91.719	80.672	71.235	63.146	36.499	22.887	23
24	96.254	84.300	74.142	65.481	37.302	23.176	24
25	100.676	87.804	76.926	67.696	38.031	23.428	25
26	104.981	91.184	79.586	69.794	38.692	23.646	26
27	109.165	94.439	82.123	71.777	39.289	23.835	27
28	113.226	97.569	84.541	73.649	39.828	23.999	28
29	117.161	100.574	86.842	75.414	40.315	24.141	29
30	120.971	103.456	89.027	77.076	40.753	24.263	30
31	124.654	106.216	91.102	78.639	41.147	24.368	31
32	128.211	108.857	93.068	80.108	41.501	24.459	32
33	131.643	111.382	94.931	81.485	41.818	24.537	33
34	134.950	113.792	96.693	82.777	42.103	24.604	34
35	138.135	116.092	98.358	83.987	42.359	24.661	35
36	141.198	118.284	99.931	85.119	42.587	24.711	36
37	144.144	120.371	101.416	86.178	42.792	24.753	37
38	146.972	122.358	102.815	87.167	42.974	24.789	38
39	149.688	124.247	104.134	88.091	43.137	24.820	39
40	152.292	126.042	105.376	88.952	43.283	24.847	40
42	157.180	129.365	107.643	90.505	43.529	24.889	42
44	161.660	132.355	109.645	91.851	43.723	24.920	44
46	165.758	135.038	111.410	93.016	43.878	24.942	46
48	169.498	137.443	112.962	94.022	44.000	24.958	48
50	172.905	139.593	114.325	94.889	44.096	24.970	50

TABLE A-25

PRESENT WORTH GRADIENT FACTORS(P/G)

N	25%	30%	35%	40%	45%	50%	N
2	0.640	0.592	0.549	0.510	0.476	0.444	2
3	1.664	1.502	1.362	1.239	1.132	1.037	3
4	2.893	2.552	2.265	2.020	1.810	1.630	4
5	4.204	3.630	3.157	2.764	2.434	2.156	5
6	5.514	4.666	3.983	3.428	2.972	2.595	6
7	6.773	5.622	4.717	3.997	3.418	2.946	7
8	7.947	6.480	5.352	4.471	3.776	3.220	8
9	9.021	7.234	5.889	4.858	4.058	3.420	9
10	9.987	7.887	6.336	5.170	4.277	3.564	10
11	10.846	8.445	6.705	5.417	4.445	3.699	11
12	11.602	8.917	7.005	5.611	4.572	3.784	12
13	12.262	9.314	7.247	5.762	4.668	3.846	13
14	12.833	9.644	7.442	5.879	4.740	3.890	14
15	13.326	9.917	7.597	5.969	4.793	3.922	15
16	13.748	10.143	7.721	6.038	4.832	3.945	16
17	14.108	10.328	7.818	6.090	4.861	3.961	17
18	14.415	10.479	7.895	6.130	4.882	3.973	18
19	14.674	10.602	7.955	6.160	4.898	3.981	19
20	14.893	10.702	8.002	6.183	4.909	3.987	20
21	15.078	10.783	8.038	6.200	4.917	3.991	21
22	15.233	10.848	8.067	6.213	4.923	3.994	22
23	15.362	10.901	8.089	6.222	4.927	3.996	23
24	15.471	10.943	8.106	6.229	4.930	3.997	24
25	15.562	10.977	8.119	6.235	4.933	3.998	25
26	15.637	11.005	8.130	6.239	4.934	3.999	26
27	15.700	11.026	8.137	6.242	4.935	3.999	27
28	15.752	11.044	8.143	6.244	4.936	3.999	28
29	15.796	11.058	8.148	6.245	4.937	4.000	29
30	15.832	11.069	8.152	6.247	4.937	4.000	30
31	15.861	11.078	8.154	6.248	4.938	4.000	31
32	15.886	11.085	8.157	6.248	4.938	4.000	32
33	15.906	11.090	8.158	6.249	4.938	4.000	33
34	15.923	11.094	8.159	6.249	4.938	4.000	34
35	15.937	11.098	8.160	6.249	4.938	4.000	35
36	15.948	11.101	8.161	6.249	4.938	4.000	36
37	15.957	11.103	8.162	6.250	4.938	4.000	37
38	15.965	11.105	8.162	6.250	4.938	4.000	38
39	15.971	11.106	8.162	6.250	4.938	4.000	39
40	15.977	11.107	8.163	6.250	4.938	4.000	40
42	15.984	11.109	8.163	6.250	4.938	4.000	42
44	[illegible]	11.110	8.163	6.250	4.938	4.000	44
46	15.993	11.110	8.163	6.250	4.938	4.000	46
48	15.995	11.111	8.163	6.250	4.938	4.000	48
50	15.997	11.111	8.163	6.250	4.938	4.000	50

T- 29

87

TABLE A.25 Discrete Compounding: i=5%

Geometric series present worth factor, $(P\|A_1, i, j, n)$					
n	$j=4\%$	$j=6\%$	$j=8\%$	$j=10\%$	$j=15\%$
1	0 9524	0 9524	0 9524	0 9524	0 9524
2	1 8957	1 9138	1 9320	1 9501	1 9955
3	2 8300	2 8844	2 9396	2 9954	3 1379
4	3 7554	3 8643	3 9759	4 0904	4 3891
5	4 6721	4 8535	5 0419	5 2375	5 7595
6	5 5799	5 8521	6 1383	6 4393	7 2604
7	6 4792	6 8602	7 2661	7 6983	8 9043
8	7 3699	7 8779	8 4261	9 0173	10 7047
9	8 2521	8 9053	9 6192	10 3991	12 6765
10	9 1258	9 9425	10 8464	11 8467	14 8362
11	9 9913	10 9396	12 1087	13 3632	17 2016
12	10 8485	12 0466	13 4070	14 9519	19 7922
13	11 6976	13 1137	14 7425	16 6163	22 6295
14	12 5386	14 1910	16 1161	18 3599	25 7371
15	13 3715	15 2785	17 5289	20 1866	29 1407
16	14 1968	16 3764	18 9821	22 1002	32 8683
17	15 0137	17 4848	20 4769	24 1050	36 9510
18	15 8231	18 6037	22 0143	26 2052	41 4226
19	16 6248	19 7332	23 5956	28 4055	46 3200
20	17 4189	20 8736	25 2222	30 7105	51 6838
21	18 2054	22 0247	26 8952	33 1253	57 5584
22	18 9844	23 1869	28 6160	35 6550	63 9925
23	19 7559	24 3601	30 3860	38 3053	71 0394
24	20 5202	25 5445	32 2066	41 0817	78 7575
25	21 2771	26 7401	34 0791	43 9904	87 2106
26	22 0269	27 9472	36 0052	47 0375	96 4687
27	22 7695	29 1657	37 9863	50 2298	106 6086
28	23 5050	30 3959	40 0240	53 5741	117 7142
29	24 2335	31 6377	42 1199	57 0776	129 8774
30	24 9551	32 8914	44 2757	60 7480	143 1991
31	25 6698	34 1571	46 4931	64 5931	157 7895
32	26 3777	35 4348	48 7739	68 6213	173 7695
33	27 0789	36 7246	51 1198	72 8414	191 2713
34	27 7734	38 0267	53 5328	77 2624	210 4400
35	28 4612	39 3413	56 0146	81 8940	231 4343
36	29 1426	40 6683	58 5674	86 7461	254 4280
37	29 8174	42 0080	61 1932	91 8292	279 6116
38	30 4858	43 3605	63 8939	97 1544	307 1937
39	31 1478	44 7258	66 6719	102 7332	337 4026
40	31 8036	46 1042	69 5291	108 5776	370 4886
41	32 4531	47 4957	72 4681	114 7004	406 7256
42	33 0964	48 9004	75 4910	121 1147	446 4138
43	33 7335	50 3185	78 6002	127 8344	489 8817
44	34 3647	51 7501	81 7983	134 8742	537 4895
45	34 9898	53 1953	85 0878	142 2491	589 6314
46	35 6069	54 6543	88 4713	149 9753	646 7391
47	36 2221	56 1272	91 9514	158 0693	709 2857
48	36 8296	57 6141	95 5310	166 5488	777 7891
49	37 4312	59 1152	99 2128	175 4321	852 8167
50	38 0271	60 6306	102 9998	184 7384	934 9897

TABLE A 26 Discrete Compounding: $i = 5\%$

Geometric series future worth factor, $(F/A, i, j, n)$					
n	$j = 4\%$	$j = 6\%$	$j = 8\%$	$j = 10\%$	$j = 15\%$
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0900	2.1100	2.1300	2.1500	2.2000
3	3.2761	3.3391	3.4029	3.4675	3.6325
4	4.5648	4.6971	4.8328	4.9719	5.3350
5	5.9629	6.1944	6.4349	6.6846	7.3508
6	7.4777	7.8423	8.2260	8.6293	9.7297
7	9.1169	9.6530	10.2241	10.8323	12.5292
8	10.8886	11.6393	12.4492	13.3227	15.8157
9	12.8016	13.8151	14.9225	16.1324	19.6655
10	14.8650	16.1953	17.6677	19.2970	24.1666
11	17.0885	18.7959	20.7100	22.8555	29.4205
12	19.4824	21.6340	24.0771	26.8514	35.5439
13	22.0576	24.7279	27.7992	31.3324	42.6714
14	24.8255	28.0972	31.9087	36.3513	50.9577
15	27.7985	31.7630	36.4414	41.9664	60.5813
16	30.9893	35.7477	41.4356	48.2420	71.7475
17	34.4118	40.0754	46.9333	55.2490	84.6925
18	38.0803	44.7720	52.9800	63.0660	99.6803
19	42.0101	49.8649	59.6250	71.7792	117.0482
20	46.2175	55.3838	66.9220	81.4840	137.1324
21	50.7195	61.3601	74.9290	92.2857	160.3556
22	55.5342	67.8277	83.7093	104.3003	187.1948
23	60.6808	74.8226	93.3313	117.6556	218.1993
24	66.1796	82.3835	103.8694	132.4927	254.0958
25	72.0519	90.5516	115.4040	148.9670	295.3260
26	78.3203	99.3710	128.0227	167.2501	343.0172
27	85.0088	108.8890	141.8202	187.5308	398.0186
28	92.1426	119.1558	156.8992	210.0173	461.4548
29	99.7484	130.2252	173.3713	234.9391	534.5932
30	107.8545	142.1549	191.3572	262.5492	618.8983
31	116.4906	155.0061	210.9877	293.1261	716.0550
32	125.6883	168.8445	232.4047	326.9767	828.0013
33	135.4807	183.7401	255.7620	364.4393	956.9604
34	145.9032	199.7677	281.2262	405.8864	1105.5146
35	156.9926	217.0071	308.9776	451.7284	1276.5951
36	168.7884	235.5436	339.2119	502.4173	1473.5004
37	181.3317	255.4680	372.1405	558.4508	1700.4322
38	194.6664	276.8775	407.9933	620.3773	1961.5785
39	208.8385	299.8756	447.0182	688.8005	2262.2007
40	223.8968	324.5729	489.4844	764.3853	2608.2356
41	239.8927	351.0873	535.6832	847.8639	3006.5109
42	256.8804	379.5445	585.9298	940.0422	3464.8795
43	274.9172	410.0788	640.5658	1041.8080	3992.3730
44	294.0635	442.8332	699.9607	1154.1385	4599.3787
45	314.3832	477.9603	764.5147	1278.1095	5297.8426
46	335.9435	515.6229	834.6609	1414.9055	6101.5040
47	358.8155	555.9946	910.8680	1565.8303	7026.1639
48	383.0741	599.2602	993.6134	1732.3193	8089.9044
49	408.7984	645.6171	1083.5562	1915.9525	9313.6949
50	436.0716	695.2754	1181.1404	2118.4691	10721.9004

T-31

TABLE A 27 Discrete Compounding: $i = 8\%$

Geometric series present worth factor, $(P|A_1\ i,j,n)$					
n	$j = 4\%$	$j = 6\%$	$j = 8\%$	$j = 10\%$	$j = 15\%$
1	0.9259	0.9259	0.9259	0.9259	0.9259
2	1.8176	1.8347	1.8519	1.8690	1.9119
3	2.6762	2.7267	2.7778	2.8295	2.9617
4	3.5030	3.6021	3.7037	3.8079	4.0796
5	4.2992	4.4613	4.6296	4.8043	5.2699
6	5.0659	5.3046	5.5556	5.8192	6.6374
7	5.8042	6.1323	6.4815	6.8529	7.8871
8	6.5151	6.9447	7.4074	7.9057	9.3242
9	7.1997	7.7420	8.3333	8.9780	10.8545
10	7.8590	8.5246	9.2593	10.0702	12.4839
11	8.4939	9.2926	10.1852	11.1826	14.2190
12	9.1052	10.0465	11.1111	12.3157	16.0665
13	9.6939	10.7863	12.0370	13.4696	18.0338
14	10.2608	11.5125	12.9630	14.6450	20.1286
15	10.8067	12.2252	13.8889	15.8421	22.3592
16	11.3324	12.9248	14.8148	17.0614	24.7343
17	11.8386	13.6114	15.7407	18.3033	27.2634
18	12.3260	14.2852	16.6667	19.5682	29.9564
19	12.7954	14.9466	17.5926	20.8565	32.8239
20	13.2475	15.5957	18.5185	22.1687	35.8773
21	13.6827	16.2329	19.4444	23.5051	39.1286
22	14.1019	16.8582	20.3704	24.8663	42.5906
23	14.5055	17.4719	21.2963	26.2527	46.2771
24	14.8942	18.0743	22.2222	27.6648	50.2024
25	15.2685	18.6655	23.1481	29.1031	54.3822
26	15.6289	19.2458	24.0741	30.5679	58.8329
27	15.9760	19.8153	25.0000	32.0599	63.5721
28	16.3102	20.3743	25.9259	33.5796	68.6184
29	16.6321	20.9229	26.8519	35.1273	73.9919
30	16.9420	21.4614	27.7778	36.7038	79.7136
31	17.2404	21.9899	28.7037	38.3094	85.8061
32	17.5278	22.5086	29.6296	39.9447	92.2935
33	17.8046	23.0177	30.5556	41.6104	99.2015
34	18.0711	23.5173	31.4815	43.3069	106.5571
35	18.3277	24.0078	32.4074	45.0348	114.3895
36	18.5748	24.4891	33.3333	46.7947	122.7296
37	18.8128	24.9615	34.2593	48.5872	131.6102
38	19.0419	25.4252	35.1852	50.4129	141.0664
39	19.2626	25.8803	36.1111	52.2724	151.1355
40	19.4751	26.3269	37.0370	54.1663	161.8573
41	19.6797	26.7653	37.9630	56.0953	173.2719
42	19.8768	27.1956	38.8889	58.0600	185.4306
43	20.0665	27.6179	39.8148	60.0611	198.3752
44	20.2493	28.0324	40.7407	62.0393	212.1587
45	20.4252	28.4392	41.6667	64.1752	226.8357
46	20.5946	28.8385	42.5926	66.2896	242.4639
47	20.7578	29.2304	43.5185	68.4431	259.1051
48	20.9149	29.6150	44.4444	70.6365	276.8249
49	21.0662	29.9925	45.3704	72.0705	295.6932
50	21.2119	30.3630	46.2963	75.1459	315.7844

T-32 90

TABLE A 28 Discrete Compounding: $i = 8\%$

Geometric series future worth factor $(F/A_1, i, j, n)$					
n	$j = 4\%$	$j = 6\%$	$j = 8\%$	$j = 10\%$	$j = 15\%$
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.1200	2.1400	2.1600	2.1800	2.2300
3	3.3712	3.4348	3.4992	3.5644	3.7309
4	4.7658	4.9006	5.0388	5.1806	5.5502
5	6.3169	6.5551	6.8024	7.0591	7.7433
6	8.0389	8.4178	8.8160	9.2343	10.3741
7	9.9473	10.5097	11.1081	11.7446	13.5171
8	12.0590	12.8541	13.7106	14.6329	17.2585
9	14.3923	15.4763	16.6584	17.9472	21.6582
10	16.9670	18.4039	19.9900	21.7409	26.9519
11	19.8046	21.6670	23.7482	26.0739	33.1536
12	22.9284	25.2987	27.9797	31.0129	40.4583
13	26.3638	29.3348	32.7362	36.6324	49.0452
14	30.1379	33.8145	38.0747	43.0152	59.1216
15	34.2806	38.7805	44.0579	50.2540	70.9270
16	38.8240	44.2795	50.7547	58.4515	84.7323
17	43.8029	50.3623	58.2410	67.7226	100.8749
18	49.2551	57.0840	66.6003	78.1949	119.7062
19	55.2213	64.5051	75.9244	90.0104	141.6582
20	61.7459	72.6911	86.3140	103.3271	167.2226
21	68.8766	81.7135	97.8801	118.3208	196.9669
22	76.6655	91.6501	110.7443	135.1867	231.5458
23	85.1687	102.5857	125.0404	154.1419	271.7142
24	94.4469	114.6123	140.9151	175.4276	318.3428
25	104.5660	127.8302	158.5295	199.3115	372.4354
26	115.5971	142.3485	178.0604	226.0912	435.1492
27	127.6173	158.2858	199.7015	256.0966	507.8179
28	140.7101	175.7710	223.6657	289.6944	591.9787
29	154.9656	194.9443	250.1861	327.2909	689.4026
30	170.4815	215.9583	279.5182	369.3373	802.1302
31	187.3634	238.9784	311.9424	416.3337	932.5124
32	205.7256	264.1848	347.7654	468.8347	1083.2569
33	225.6917	291.7730	387.3237	527.4552	1257.4626
34	247.3954	321.9554	430.9857	592.8768	1458.7810
35	270.9814	354.9629	479.1547	665.8546	1691.2083
36	296.6060	391.0460	532.2724	747.2254	1959.7669
37	324.4384	430.4769	590.8224	837.9162	2269.7001
38	354.6616	473.5512	655.3338	938.9534	2627.4007
39	387.4733	520.5895	726.3857	1051.4740	3040.1361
40	423.0875	571.9402	804.6119	1176.7367	3516.2718
41	461.7355	627.9811	890.7054	1316.1349	4065.4371
42	503.6674	689.1225	985.4243	1471.2109	4698.7151
43	549.1536	755.8093	1089.5977	1643.6714	5428.8519
44	598.4864	828.5245	1204.1322	1835.4052	6270.5578
45	651.9818	907.7919	1330.0187	2048.5017	7240.0974
46	709.9816	994.1799	1468.3407	2285.2723	8358.7225
47	772.8549	1088.3048	1620.2820	2548.2737	9647.0049
48	841.0011	1190.8351	1787.1306	2840.3330	11131.2877
49	914.8517	1302.4957	1970.3181	3164.5769	12841.1914
50	994.8732	1424.0729	2171.3709	3524.4620	14810.7976

T-33

91

TABLE A.29 Discrete Compounding i = 10%

Geometric series present worth factor, $(P\|A_1\ i\ j\ n)$					
n	$j=4\%$	$j=6\%$	$j=8\%$	$j=10\%$	$j=15\%$
1	0.9091	0.9091	0.9091	0.9091	0.9091
2	1.7686	1.7851	1.8017	1.8182	1.8595
3	2.5812	2.6293	2.6780	2.7273	2.8531
4	3.3495	3.4428	3.5384	3.6364	3.8919
5	4.0759	4.2267	4.3831	4.5455	4.9779
6	4.7627	4.9821	5.2125	5.4545	6.1133
7	5.4120	5.7100	6.0269	6.3636	7.3002
8	6.0259	6.4115	6.8264	7.2727	8.5411
9	6.6063	7.0874	7.6113	8.1818	9.8385
10	7.1550	7.7388	8.3820	9.0909	11.1948
11	7.6738	8.3664	9.1387	10.0000	12.6127
12	8.1644	8.9713	9.8817	10.9091	14.0951
13	8.6281	9.5542	10.6111	11.8182	15.6449
14	9.0666	10.1158	11.3273	12.7273	17.2651
15	9.4811	10.6571	12.0304	13.6364	18.9590
16	9.8731	11.1786	12.7208	14.5455	20.7298
17	10.2436	11.6812	13.3986	15.4545	22.5812
18	10.5940	12.1656	14.0640	16.3636	24.5167
19	10.9252	12.6323	14.7174	17.2727	26.5402
20	11.2384	13.0820	15.3589	18.1818	28.6556
21	11.5345	13.5154	15.9888	19.0909	30.8672
22	11.8144	13.9330	16.6071	20.0000	33.1794
23	12.0791	14.3354	17.2143	20.9091	35.5966
24	12.3293	14.7232	17.8104	21.8182	38.1238
25	12.5659	15.0969	18.3957	22.7273	40.7658
26	12.7896	15.4570	18.9703	23.6364	43.5278
27	13.0011	15.8041	19.5345	24.5455	46.4155
28	13.2010	16.1385	20.0884	25.4545	49.4343
29	13.3900	16.4607	20.6322	26.3636	52.5905
30	13.5688	16.7712	21.1662	27.2727	55.8900
31	13.7377	17.0704	21.6904	28.1818	59.3396
32	13.8975	17.3588	22.2052	29.0909	62.9459
33	14.0485	17.6367	22.7105	30.0000	66.7162
34	14.1913	17.9044	23.2067	30.9091	70.6578
35	14.3264	18.1624	23.6938	31.8182	74.7786
36	14.4540	18.4111	24.1721	32.7273	79.0867
37	14.5747	18.6507	24.6417	33.6364	83.5907
38	14.6889	18.8816	25.1028	34.5455	88.2994
39	14.7967	19.1040	25.5555	35.4545	93.2221
40	14.8987	19.3184	25.9999	36.3636	98.3685
41	14.9951	19.5250	26.4363	37.2727	103.7489
42	15.0863	19.7241	26.8647	38.1818	109.3739
43	15.1725	19.9160	27.2854	39.0909	115.2545
44	15.2540	20.1009	27.6983	40.0000	121.4024
45	15.3311	20.2790	28.1038	40.9091	127.8298
46	15.4039	20.4507	28.5019	41.8182	134.5493
47	15.4728	20.6161	28.8928	42.7273	141.5743
48	15.5379	20.7755	29.2766	43.6364	148.9186
49	15.5995	20.9291	29.6534	44.5455	156.5967
50	15.6577	21.0772	30.0233	45.4545	164.6238

92

T-34

TABLE A.30 Discrete Compounding: i = 10%

Geometric series future worth factor $(F \mid A_1, i, j, n)$					
n	$j = 4\%$	$j = 6\%$	$j = 8\%$	$j = 10\%$	$j = 15\%$
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.1400	2.1600	2.1800	2.2000	2.2500
3	3.4356	3.4996	3.5644	3.6300	3.7975
4	4.9040	5.0406	5.1806	5.3240	5.6981
5	6.5643	6.8071	7.0591	7.3205	8.0169
6	8.4374	8.8260	9.2343	9.6631	10.8300
7	10.5464	11.1272	11.7446	12.4009	14.2261
8	12.9170	13.7435	14.6329	15.5897	18.3087
9	15.5773	16.7117	17.9472	19.2923	23.1986
10	18.5583	20.0724	21.7409	23.5795	29.0363
11	21.8944	23.8705	26.0739	28.5312	35.9855
12	25.6233	28.1558	31.0129	34.2374	44.2364
13	29.7866	32.9836	36.6324	40.7996	54.0103
14	34.4304	38.4149	43.0152	48.3318	65.5641
15	39.6051	44.5172	50.2540	56.9625	79.1963
16	45.3665	51.3655	58.4515	66.8360	95.2530
17	51.7762	59.0424	67.7226	78.1145	114.1359
18	58.9017	67.6395	78.1949	90.9805	136.3107
19	66.8177	77.2577	90.0104	105.6384	162.3173
20	75.6063	88.0091	103.3271	122.3182	192.7807
21	85.3580	100.0172	118.3208	141.2775	228.4254
22	96.1726	113.4184	135.1867	162.8055	270.0894
23	108.1598	128.3638	154.1419	187.2263	318.7431
24	121.4405	145.0200	175.4276	214.9033	375.5089
25	136.1478	163.5709	199.3115	246.2433	441.6849
26	152.4284	184.2198	226.0912	281.7024	518.7724
27	170.4438	207.1912	256.0966	321.7908	608.5064
28	190.3715	232.7327	289.6944	367.0798	712.8924
29	212.4074	261.1176	327.2909	418.2088	834.2472
30	236.7667	292.6478	369.3373	475.8928	975.2474
31	263.6868	327.6560	416.3337	540.9315	1138.9839
32	293.4286	366.5098	468.8347	614.2190	1329.0258
33	326.2796	409.6141	527.4552	696.7546	1549.4935
34	362.5559	457.4161	592.8768	789.6553	1805.1427
35	402.6058	510.4088	665.8546	894.1684	2101.4617
36	446.8125	569.1357	747.2254	1011.6877	2444.7834
37	495.5976	634.1965	837.9162	1143.7692	2842.4136
38	549.4255	706.2523	938.9534	1292.1500	3302.7796
39	608.8069	786.0318	1051.4740	1458.7694	3835.6009
40	674.3039	874.3384	1176.7367	1645.7911	4452.0858
41	746.5353	972.0580	1316.1349	1855.6295	5165.1579
42	826.1819	1080.1667	1471.2109	2090.9776	5989.7168
43	913.9929	1199.7404	1643.6714	2354.8391	6942.9380
44	1010.7927	1331.9649	1835.4052	2650.5630	8044.6188
45	1117.4885	1478.1468	2048.5017	2981.8834	9317.5757
46	1235.0785	1639.7261	2285.2723	3352.9622	10788.1025
47	1364.6612	1818.2892	2548.2737	3768.4380	12486.4975
48	1507.4451	2015.5841	2840.3330	4233.4793	14447.6696
49	1664.7601	2233.5363	3164.5769	4753.8445	16711.8372
50	1838.0695	2474.2675	3524.4620	5335.9479	19325.3318

T-35

93

TABLE A.31 Discrete Compounding: $i = 15\%$

Geometric series present worth factor, $(P\|A_1\ i, j, n)$					
n	$j=4\%$	$j=6\%$	$j=8\%$	$j=10\%$	$j=15\%$
1	0.8696	0.8696	0.8696	0.8696	0.8696
2	1.6560	1.6711	1.6862	1.7013	1.7391
3	2.3671	2.4099	2.4531	2.4969	2.6087
4	3.0103	3.0908	3.1734	3.2579	3.4783
5	3.5919	3.7185	3.8498	3.9858	4.3478
6	4.1179	4.2971	4.4850	4.6821	5.2174
7	4.5936	4.8303	5.0816	5.3481	6.0870
8	5.0237	5.3219	5.6418	5.9851	6.9565
9	5.4128	5.7749	6.1680	6.5945	7.8261
10	5.7646	6.1926	6.6621	7.1773	8.6957
11	6.0828	6.5775	7.1261	7.7348	9.5652
12	6.3705	6.9323	7.5619	8.2681	10.4348
13	6.6307	7.2593	7.9712	8.7782	11.3043
14	6.8660	7.5608	8.3556	9.2661	12.1739
15	7.0789	7.8386	8.7165	9.7328	13.0435
16	7.2713	8.0947	9.0555	10.1792	13.9130
17	7.4454	8.3308	9.3739	10.6062	14.7826
18	7.6028	8.5484	9.6729	11.0146	15.6522
19	7.7451	8.7489	9.9537	11.4053	16.5217
20	7.8738	8.9338	10.2173	11.7790	17.3913
21	7.9903	9.1042	10.4650	12.1364	18.2609
22	8.0955	9.2613	10.6976	12.4783	19.1304
23	8.1907	9.4060	10.9160	12.8053	20.0000
24	8.2768	9.5395	11.1211	13.1181	20.8696
25	8.3547	9.6625	11.3137	13.4173	21.7391
26	8.4251	9.7759	11.4946	13.7035	22.6087
27	8.4888	9.8803	11.6645	13.9773	23.4783
28	8.5464	9.9767	11.8241	14.2392	24.3478
29	8.5985	10.0655	11.9739	14.4896	25.2174
30	8.6456	10.1473	12.1146	14.7292	26.0870
31	8.6882	10.2227	12.2468	14.9584	26.9565
32	8.7267	10.2922	12.3709	15.1776	27.8261
33	8.7615	10.3563	12.4874	15.3873	28.6957
34	8.7930	10.4154	12.5969	15.5878	29.5652
35	8.8215	10.4698	12.6997	15.7796	30.4348
36	8.8473	10.5200	12.7962	15.9631	31.3043
37	8.8706	10.5663	12.8869	16.1386	32.1739
38	8.8917	10.6089	12.9720	16.3065	33.0435
39	8.9107	10.6482	13.0520	16.4671	33.9130
40	8.9280	10.6845	13.1271	16.6207	34.7826
41	8.9436	10.7178	13.1976	16.7676	35.6522
42	8.9576	10.7486	13.2639	16.9082	36.5217
43	8.9704	10.7770	13.3261	17.0426	37.3913
44	8.9819	10.8031	13.3845	17.1712	38.2609
45	8.9923	10.8272	13.4393	17.2942	39.1304
46	9.0018	10.8495	13.4908	17.4118	40.0000
47	9.0103	10.8699	13.5392	17.5244	40.8696
48	9.0180	10.8888	13.5847	17.6320	41.7391
49	9.0250	10.9062	13.6273	17.7350	42.6087
50	9.0313	10.9222	13.6674	17.8334	43.4783

T-36 94

TABLE A.32 Discrete Compounding: i = 15%

Geometric series future worth factor, $(F\dagger A_1, i, j, n)$					
n	$j = 4\%$	$j = 6\%$	$j = 8\%$	$j = 10\%$	$j = 15\%$
1	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000
2	2 1900	2 2100	2 2300	2 2500	2 3000
3	3 6001	3 6651	3 7309	3 7975	3 9675
4	5.2650	5 4059	5 5502	5 6981	6 0835
5	7.2246	7 4792	7.7433	8 0169	8 7450
6	9 5249	9 9394	10.3741	10 8300	12 0681
7	12.2190	12 8488	13 5171	14.2261	16 1914
8	15 3878	16 2797	17.2585	18.3087	21.2802
9	19 0415	20.3155	21 6982	23 1986	27 5312
10	23 3210	25 0523	26 9519	29 0363	35 1788
11	28.2994	30 6010	33 1536	35 9855	44 5011
12	34 0838	37 0895	40 4583	44 2364	55 8287
13	40 7974	44 6651	49 0452	54 0103	69 5533
14	48.5821	53 4978	59 1216	65 5641	86 1390
15	57.6011	63 7834	70 9270	79 1963	106 1356
16	68.0422	75 7474	84 7383	95 2530	130.1930
17	80 1215	89 6499	100.8749	114.1359	159 0796
18	94 0876	105 7902	119 7062	136 3107	193 7028
19	110.2266	124 5130	141 6582	162.3173	235.1336
20	128.8674	148.2156	167.2226	192 7807	284.6354
21	150 3886	171.3550	196.9669	228 4254	343.6973
22	175.2257	200 4579	231.5458	270 0894	414 0734
23	203.8795	234 1301	271 7142	318 7431	497 8282
24	236 9261	273 0694	318.3428	375 5089	597.3950
25	275 0283	318 0787	372.4354	441 6849	715 6294
26	318 9484	370 0824	435 1492	518 7724	855.8928
27	369 5631	430 1441	507 8179	608 5064	1022.1335
28	427.8810	499.4881	591.9787	712 8924	1218.9888
29	495 0618	579 5230	689 4026	834.2472	1451 9027
30	572.4398	671 8698	802 1302	975.2474	1727.2636
31	661.5491	778 3937	932.5124	1138 9839	2052.5649
32	764 1546	901 2409	1083.2569	1329.0258	2436.5932
33	882.2859	1042 8804	1257 4826	1549.4935	2889 6473
34	1018.2772	1206 1531	1458.7810	1805 1427	3423 7942
35	1174.8130	1394.3271	1691.2883	2101 4617	4053 1681
36	1354.9811	1611 1622	1959 7669	2444 7834	4794.3188
37	1562.3322	1860 9838	2269 7001	2842.4136	5666 6185
38	1800.9501	2148 7675	2627 4007	3302.7796	6692 7359
39	2075.5314	2480 2368	3040 1361	3835 6009	7899.1896
40	2391.4775	2861.9759	3516.2718	4452 0858	9316 9929
41	2755.0002	3301.5580	4065 4371	5165.1579	10982.4054
42	3173.2432	3807 6945	4698 7151	5989.7168	12937 8093
43	3654 4225	4390 4057	5428 8619	6942.9380	15232.7302
44	4207 9864	5061.2171	6270.5578	8044 6188	17925 0267
45	4844.8008	5833 3851	7240.6974	9317.5757	21082.2757
46	5577.3622	6722 1575	8358 7225	10788.1025	24783.3864
47	6420.0413	7745 0716	9647.0049	12488 4975	29120 4790
48	7389.3653	8922.2982	11131.2877	14447 6696	34201.0732
49	8504 3406	10277.0368	12841 1914	16711.8372	40150 6349
50	9786.8251	11835.9699	14810 7976	19325.3318	47115.5409

TEMA II

DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION

TEMARIO:

Nomenclatura.

Interés Simple.

Factor de un pago Unico con interés compuesto.

Factor de Actualización de un pago único.

Factor de Interés Compuesto de una serie uniforme de pagos.

Factor del Fondo de Amortización.

Factor de Recuperación del Capital.

Factor de Acualización de una Serie uniforme de pagos.

Observaciones a los Modelos Matemáticos anteriores.

Relaciones entre las Fórmulas.

Series de Pagos con Gradiente de Incremento:

.) Gradiente de Incremento Aritmético.

.) Gradiente de Incremento Geométrico.

Valores Límite de las Fórmulas.

Interés Continuo.

Interés Nominal e Interés efectivo.

Tasa de descuento.

Interpolación

Pagos por Adelantado

La Amortización del Capital y el pago de Intereses.

Series Perpetuas de pagos uniformes y el Valor Capitalizado.

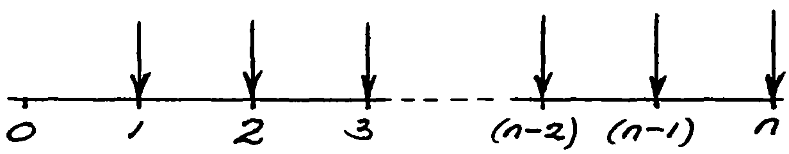
Significado del Concepto: Equivalencia entre alternativas.

DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION

NOMENCLATURA.

Para representar en forma objetiva el flujo de efectivo resultante de una inversión, resulta muy útil el empleo de una "escala de tiempo".

En esta escala, las unidades de tiempo son los periódos de interés, que no necesariamente constituyen meses o años. Cuando las erogaciones o los ingresos se llevan a cabo a lo largo de un periódo, en la escala de tiempo, se acostumbra representar el flujo de efectivo, concentrado al final de dicho periódo:



Para el desarrollo de fórmulas para el cálculo de la tasa de recupera ción utilizaremos la siguiente momenclatura:

P: Representa la suma presente de dinero. En la escala de tiempo ocurre en el punto cero, es decir, al principio del periódo inicial.

F: Representa la suma de dinero a una fecha específica futura. En la escala de tiempo, ocurre en el punto (n), es decir, al terminar el último periódo. En mucha de la literatura técnica relativa, es frecuente se represente con (S).

A: Representa el Importe de cada pago, en una serie uniforme de pagos que se efectuan al final de cada periódo. En mucha de la literatura técnica relativa, es frecuente se representa con (R).

i: Designa a la tasa de interés generada al final de cada período.

n: Representa el número de períodos de interés considerados.

El interés, (i), es la tasa de recuperación, o la recuperación en si, correspondiente a una inversión. La reinversión de intereses, y el pago de intereses sobre esos intereses, origina el proceso de interés compuesto. Se observa que este proceso refleja el concepto inherente del "valor del dinero con el tiempo", es decir, el hecho de que cada peso "crece" con el tiempo.

Para la determinación del interés por período, es necesario interpretar correctamente lo siguiente:

" 10% computado trimestralmente", indica el que se consideran cuatro períodos de interés, de 3 meses de duración cada uno y en los que se genera un 2.5 % de interés al final de cada uno de ellos.

" 10 % de interés" (sin más indicaciones), indica un interés de 10% anual. En el primer caso, el interés de 10 % es un " interés nominal", ya que el hecho de que se pague parcialmente por adelantado, da lugar a que el " interés efectivo " sea mayor.

En el segundo caso, el interés nominal y el efectivo, coinciden.

Interés Simple:

El interés simple se calcula mediante la expresión:

$I = Pni$

por tanto: $F = P + I = P + Pni = P\ (\ 1+ni\ )$

Ordinariamente la unidad de tiempo para el período de interés se considera de 1 año. Cuando es necesario calcular el interés correspondiente a una fracción de año, se considera por mera simplificación, constituido el año por 12 meses, de 30 días, con un total de 360 días. Estas consideraciones dan lugar al"interés simple ordinario ". Si se calcula sobre la base de 365 se genera el " interés simple exacto".

En la práctica, el interés simple se emplea en préstamos a corto plazo y cuando el período se mide en días.

Ejemplo:

Calcular el interés simple que originan \$ 1,000. a una tasa de interés de 6 % anual, durante 60 días.

$$I = P.n.i$$

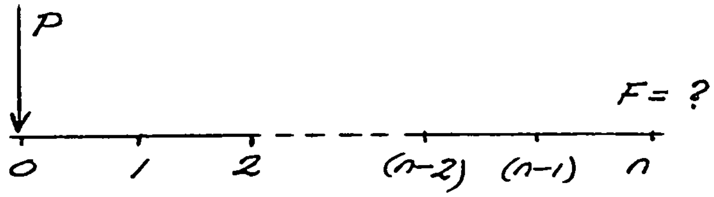
$$I = 1{,}000 \times 60 \times \left(\frac{0.06}{365}\right)$$

$$I = \$\ 9.86$$

//

FACTOR DE UN PAGO UNICO CON INTERES COMPUESTO

¿Que monto final (F) origina un capital inicial (P) invertido durante (n) periodos, a una tasa de interes compuesto: (i)?



datos: P, n, i
F = ?

El valor de P con el tiempo será:

al final del primer periodo: $P + Pi = P(1+i)$
al final del segundo periodo: $P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$

Por el método de inducción matemática, se puede concluir que al final de n periodos, la cantidad acumulada será: $F = P(1+i)^n$

al factor: $(1+i)^n$ se le denomina:
"factor de un pago único con interes compuesto"
y se representa:

a) $({}_{i-n}spcaf.)$ que significa: "single-payment compound-amount factor"
b) $(F/P, i\%, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar un pago único P para encontrar la cantidad acumulada F al final de n periodos, a una tasa de interes i.

Conclusión:

$$\boxed{\begin{array}{l} F = P(1+i)^n \\ F = P \cdot {}_{i-n}spcaf = P \cdot (F/P, i, n) \end{array}}$$

Ejemplo:

¿Cuál es la cantidad acumulada (F) por una inversión de ¢5,000. durante 7 años a una tasa de interés del 15 % anual?

$F = P \cdot {}_{i-n}spcaf$

$F = 5,000 \cdot {}_{15-7}spcaf = 5.000\ (F/P, 15, 7)$

$F = 5,000\ (1+0.15)^7 = 5.000 \times 2.6600 = ¢\,13,300.^{00}$

Ejemplo:

Consideremos el mismo problema con el que se ejemplificó el interes simple:

Calcular el monto de los intereses que generan ¢1.000. invertidos a una tasa de interes de 6 % anual durante 60 dias, considerando interes COMPUESTO.

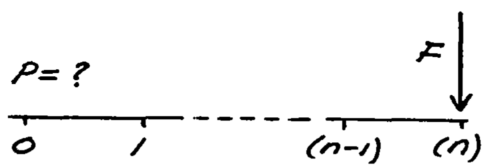
$$F = P \cdot (1+i)^n = 1.000. \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{60} = ¢\,1{,}009.^{91}$$

$$\therefore \text{Intereses} = F - P = 1{,}009.^{91} - 1.000.^{"} = ¢\,9.^{91}$$

resultado que es solo ½ % que el obtenido con interes simple, lo que podria justificar que para préstamos a corto plazo, se emplease el criterio de interes simple.

FACTOR DE ACTUALIZACION DE UN PAGO UNICO.

¿Que capital inicial (P) origina un capital final (F) después de haber sido invertido durante (n) periodos a una tasa (i) de interes compuesto?



$$\boxed{\begin{array}{c}\text{datos: } F,\ n,\ i\,\% \\ P = ?\end{array}}$$

Mediante un proceso inverso al anterior, podemos concluir que:

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n}$$

al factor: $\frac{1}{(1+i)^n}$ se le denomina: "factor de actualización de un pago único".

y se representa:

a) ${}_{i-n}\,\text{sppwf}$ que significa: single payment present worth factor.

b) $(P/F,\ i\,\%,\ n)$

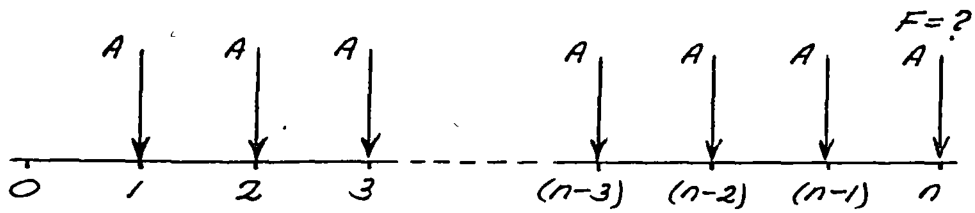
y es el factor por el cual se multiplica un valor futuro F, para obtener el valor presente P que lo originó.

Conclusión:

$$\boxed{\begin{array}{l} P = F \dfrac{1}{(1+i)^n} \\ P = F \cdot {}_{i-n}\,\text{sppwf} = F \cdot (P/F,\ i,\ n) \end{array}}$$

FACTOR DE INTERES COMPUESTO DE UNA SERIE UNIFORME DE PAGOS.

¿ Qué capital final (F), origina la inversión uniforme de una cantidad constante (A), al final de cada uno de (n) periodos y a una tasa (i) de interes compuesto ?



datos : A, n, i %.
F = ?

Cada pago A origina diferente interes compuesto, pues cada una de ellas tiene un periodo de inversión distinto : el primer pago A, será invertido durante (n−1) periodos, el segundo A, (n−2) periodos, etc..., el último A, ocurre en el punto (n) y no origina interes.

En estas condiciones, la suma F estará integrada :

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \cdots + A(1+i)^2 + A(1+i) + A \quad (1)$$

multiplicando ambos miembros por $(1+i)$:

$$F(1+i) = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \cdots + A(1+i)^3 + A(1+i)^2 + A(1+i) \quad (2)$$

restando la ecuación (1) de la (2) :

$$F(1+i) - F = A(1+i)^n - A$$

$$F(1+i-1) = A\left[(1+i)^n - 1\right]$$

de donde: $$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

al factor : $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ se le denomina: "factor de interes compuesto de una serie uniforme de pagos."

y se representa :

a) $({}_{i-n}\,uscaf)$ que significa: "uniform series compound amount factor."

b) $(F/A, i\%, n)$

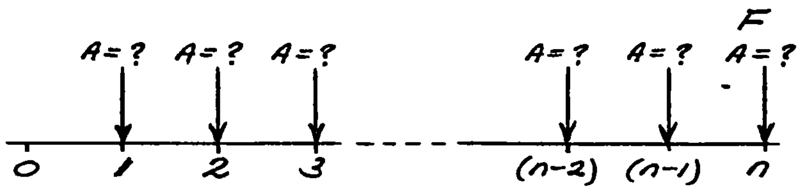
y es el factor por el cual se multiplica el valor A de cada pago uniforme, para obtener el importe acumulado F, después de n periodos y a una tasa de interes compuesta i :

Conclusión :

$$\boxed{\begin{gathered} F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \\ F = A \cdot {}_{i-n}\,uscaf = A \cdot (F/A, i\%, n) \end{gathered}}$$

FACTOR DEL FONDO DE AMORTIZACION

¿Qué capital constante (A) hay que invertir periodicamente durante (n) periodos, con una tasa (i) de interes compuesto, para acumular un capital final (F)?



datos: F, n, i%
A = ?

despejando A en la expresión anterior:

$$A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

al factor: $\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$ se le denomina:

"factor del fondo de amortización."

y se representa:

a) $({}_{i-n}sfdf)$ que significa:
sinking fund deposit factor.

b) $(A/F, i\%, n)$

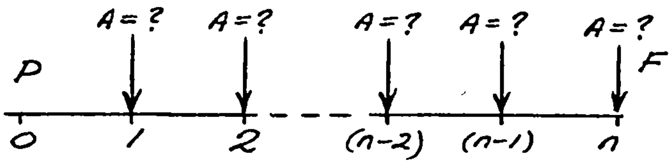
y es el factor por el que hay que multiplicar el monto final F para encontrar el importe A de los pagos uniformes y constantes que lo originan durante n periodos y a una tasa i de interes compuesto.

Conclusión:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \\ A &= F \cdot {}_{i-n}sfdf = F \cdot (A/F, i\%, n) \end{aligned}}$$

FACTOR DE RECUPERACION DEL CAPITAL

¿Qué monto uniforme (A) se debe invertir a una tasa (i) de interes compuesto, al final de cada periodo, durante (n) periodos, para obtener el mismo monto final (F) que se obtendria si se invirtiera una cantidad inicial (P) durante el mismo tiempo y a la misma tasa de interes (i)?



datos: P, n, i %.
A = ?

Habiamos determinado que: $A = F \cdot \left[\dfrac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$

pero por otro lado, tenemos que: $F = P\,(1+i)^n$

substituyendo resulta: $A = P \cdot \left[\dfrac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$

al factor: $\left[\dfrac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$ se le denomina: "factor de recuperación del capital"

y se representa:

a) $\left({}_{i-n}crf \right)$ que significa: "capital recovery factor."

b) $(A/P,\ i\%,\ n)$

y es el factor por el cual se multiplica (P) para encontrar el valor de los pagos (A) que lo recuperan al final de (n) periodos a una tasa (i) de interes compuesto.

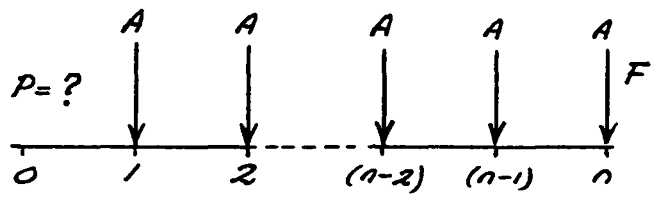
Conclusión:

$$A = P \left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = P \cdot {}_{i-n}crf = P \cdot (A/P,\ i\%,\ n)$$

FACTOR DE ACTUALIZACION DE UNA SERIE UNIFORME DE PAGOS.

¿Cuál es el capital inicial (P) que invertido durante (n) periodos a una tasa (i) de interes compuesto, produce el mismo capital final (F), que una serie uniforme de pagos (A) al final de cada uno de los (n) periodos y a la misma tasa de interes (i)?



datos: A, i%, n
P = ?

despejando el valor de (P) en la última expresión desarrollada:

$$P = A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \right]$$

al factor: $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \right]$ se le denomina:

"factor de actualización de una serie uniforme de pagos"

y se representa:

a) $({}_{i-n}\text{uspwf})$ que significa: "uniform series present worth factor"

b) $(P/A, i\%, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar el valor del pago uniforme (A) al final de cada uno de (n) periodos y a una tasa (i) de interes compuesto, para encontrar el valor (P) que recuperan.

Conclusión:

$$P = A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \right]$$

$$P = A \cdot {}_{i-n}\text{uspwf} = A \cdot (P/A, i\%, n)$$

OBSERVACIONES A LOS MODELOS MATEMATICOS ANTERIORES.

1°) Para el cálculo númerico de los valores que se obtienen de los 6 modelos matemáticos desarrollados anteriormente, se puede optar por:

a) Cálculo directo a partir de la expresión algebraica.

b) Empleo de "tablas" en las que se indica el factor resultante en cada uno de los modelos, para distintos valores de (i) y de (n).

c) Utilización de "calculadoras electrónicas " de las especificamente denominadas "financieras".

2°) Frecuentemente, en el planteamiento de algunos problemas de análisis económico, se conoce la suma (P) que será solicitada como préstamo o invertida inicialmente, así como la corriente futura de pagos (A) que su amortización o recuperación origine, o la cantidad futura (F) acumulada al final de un cierto horizonte económico; y lo que se busca es calcular la tasa de recuperación (i) de la inversión, o el número (n) de periódos necesarios para la misma.

En estas condiciones y para el caso específico de "pago único", si la incógnita es la tasa de recuperación, el problema se reduce a despejar (i) de la expresión:

$$F = P(1+i)^n$$

de donde:

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1}$$

En los demás casos, (y aun en el caso de "pago único" cuando la incógnita es n), el problema es más complejo como para ser resuelto despejando directamente los valores de (i) ó de (n) de las expresiones algebraicas, y el método más razonable en estas condiciones resulta ser el de interpolación entre valores tabulados, o el empleo de calculadoras electrónicas financieras.

3°) ALGUNAS RELACIONES ENTRE LAS FORMULAS.

De la deducción de las fórmulas, se desprende:

$$ {}_{i-n}spcaf = \frac{1}{{}_{i-n}sppwf} \qquad {}_{i-n}uscaf = \frac{1}{{}_{i-n}sfdf} \qquad {}_{i-n}crf = \frac{1}{{}_{i-n}uspwf} $$

empleando otra notación, las mismas relaciones adquieren la siguiente forma:

$$ (F/P, i\%, n) = \frac{1}{(P/F, i\%, n)} \qquad (F/A, i\%, n) = \frac{1}{(A/F, i\%, n)} \qquad (A/P, i\%, n) = \frac{1}{(P/A, i\%, n)} $$

Puede demostrarse que:

$$ 1 + {}_{i-1}spcaf + {}_{i-2}spcaf + \ldots + {}_{i-(n-2)}spcaf + {}_{i-(n-1)}spcaf = {}_{i-n}uscaf $$

y también:

$$ {}_{i-1}sppwf + {}_{i-2}sppwf + \ldots + {}_{i-(n-1)}sppwf + {}_{i-n}sppwf = {}_{i-n}uspwf $$

a partir de:

$$ {}_{i-n}crf - i = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - i = \frac{i(1+i)^n - i\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)^n - 1} $$

$$ = \frac{i(1+i)^n - i(1+i)^n + i}{(1+i)^n - 1} $$

$$ = \frac{i}{(1+i)^n - 1} = {}_{i-n}sfdf $$

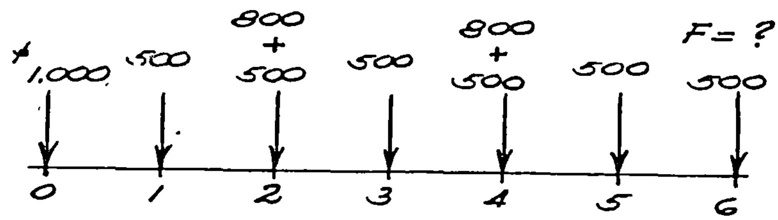
$$ \boxed{\begin{aligned} {}_{i-n}crf - i &= {}_{i-n}sfdf \\ (A/P, i, n) - i &= (A/F, i, n) \end{aligned}} $$

o también:

$$ \boxed{\begin{aligned} {}_{i-n}sfdf + i &= {}_{i-n}crf \\ (A/F, i, n) + i &= (A/P, i, n) \end{aligned}} $$

Ejemplo:

Dada la siguiente serie de pagos:



calcular el importe de la cantidad final (F) acumulada al final de los 6 años, considerando una tasa de interes del 10% :

$$F = 1.000 \cdot (1+0.10)^6 + 800\,(1+0.10)^4 + 800\,(1+0.10)^2 + 500\left[\frac{(1+0.10)^6 - 1}{0.10}\right]$$

que puede representarse :

$$F = 1.000 \cdot {}_{10-6}\text{spcaf} + 800\ {}_{10-4}\text{spcaf} + 800\ {}_{10-2}\text{spcaf} + 500\ {}_{10-6}\text{uscaf}$$

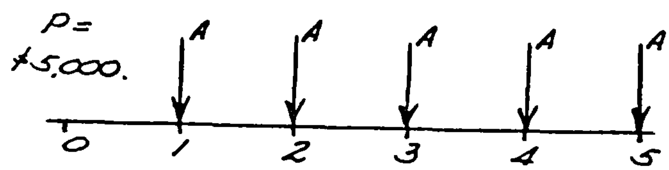
o también:

$$F = 1{,}000 \cdot (F/P,\ 10\%,6) + 800\,(F/P,\ 10\%,4) + 800\,(F/P,\ 10\%,2) +$$
$$+ 500\,(F/A,\ 10\%,6)$$

$$F = 1.000 \times 1.7716 + 800 \times 1.4641 + 800 \times 1.2100 + 500 \times 7.7156$$
$$F = 1{,}771.^{60} + 1.171.^{28} + 968.^{..} + 3.857.^{80}$$
$$F = ¢\ 7.768.^{68}$$

Ejemplo.

Sigamos paso a paso el proceso de recuperación de un capital invertido a una tasa de interes (i) durante (n) periodos. Para ejemplificar numericamente, supongamos un capital inicial: $P = ¢\ 5{,}000.$, invertido a una tasa: $i = 10\%$ durante: $n = 5$ años.



Cálculo de las anualidades:

$$A = P \cdot {}_{i-n}\text{crf} = P \cdot (A/P,\ i\%,n)$$

$$A = 5.000 \cdot {}_{10-5}\text{crf} = 5{,}000\,(A/P,\ 10\%,5)$$
$$A = ¢\,5{,}000 \cdot 0.26380 = ¢\ 1.319.$$

año	adeudo al principio del año	Intereses generados al final del año	Capital más intereses adeudados al final del año.	Pago al final del año.	Capital adeudado al final del año, despues del pago anual	Capital ya recuperado
1	¢ 5.000.	¢ 500	¢ 5.500	¢ 1.319	¢ 4.181 ①	¢ 819 ②
2	4.181.	418	4.599	1.319	3.280	901
3	3.280.	328	3.608	1.319	2.289	991
4	2.289	229	2.518	1.319	1.199	1.090
5	1.199	120	1.319	1.319	0	1.199
						¢ 5.000

① $5.500 - 1.319 = 4.181$ ② $1.319 - 500 = 819$

ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA

SERIES DE PAGOS CON GRADIENTES DE INCREMENTO

ING. JORGE TERRAZAS Y DE ALLENDE

MAYO, 1984

SERIES DE PAGOS CON GRADIENTE DE INCREMENTO

En algunos problemas de Ingeniería Económica, el flujo de efectivo puede comportarse como una serie de ingresos o egresos que se incrementan o disminuyen en cada período. Este puede ser el caso, por ejemplo, de los costos de mantenimiento de un cierto equipo, los cuales, es normal que muestren un incremento año con año.

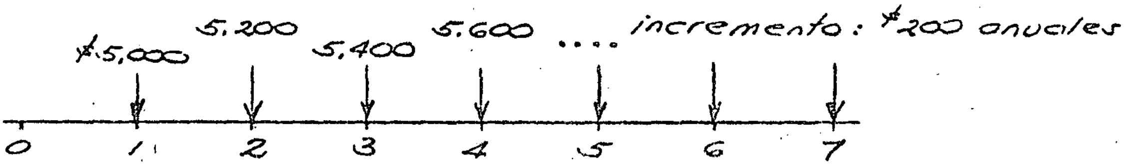
Si el incremento es el mismo en cada período, se hablará de una: "SERIE DE PAGOS CON GRADIENTE DE INCREMENTO ARITMETICO"; si los incrementos varían cada período en función de un factor constante, se tendrá una: "SERIE DE PAGOS CON GRADIENTE DE INCREMENTO GEOMETRICO".

En ambos casos, podrá tratarse también de un decremento.

Aun en el caso de que en una serie de pagos, estos varíen en forma irregular, habría que estudiar la posibilidad de ajustar dicha serie, a una de las series anteriores.

A) GRADIENTE DE INCREMENTO ARITMETICO

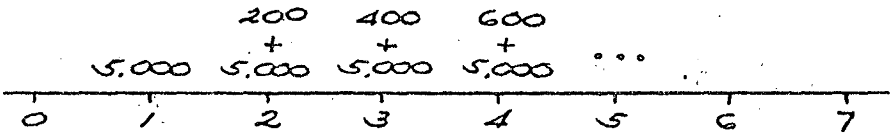
Supongamos la siguiente serie de pagos:



consideremos: $i = 8\%$

Calcular los valores de (F) o de (P) en una serie como la anterior, sería muy laborioso aplicando solo las fórmulas anteriores.

La serie anterior puede representarse:



Ya que los \$5,000. anuales constituyen una serie uniforme que puede ser manejada con los modelos matemáticos establecidos anteriormente, fijemos nuestra atención en la parte afectada por el gradiente de incremento anual, en este caso, de \$200. y al que vamos a representar con: (g). En estas condiciones, esa parte de la serie, puede representarse, generalizando además, a un horizonte de (n) períodos, de la siguiente forma:

0	0	g	$2g$	- - -	$(n-3)g$	$(n-2)g$	$(n-1)g$
0	1	2	3		$(n-2)$	$(n-1)$	n

Trataremos de traducir la serie anterior a:
una <u>SERIE UNIFORME EQUIVALENTE.</u>
de la siguiente manera:

$$F = g\cdot {}_{(n-2)}spcaf + 2g\cdot {}_{(n-3)}spcaf + \dots + (n-2)g\cdot {}_{1}spcaf + (n-1)g \quad (1)$$

número de periodos faltantes.

Multiplicando la igualdad (1) por $({}_{1}spcaf)$

$$F\cdot {}_{1}spcaf = \underbrace{g\cdot {}_{(n-1)}spcaf + 2g\cdot {}_{(n-2)}spcaf}_{\text{se obtiene de:}} + \dots + (n-2)g\cdot {}_{2}spcaf + (n-1)g\cdot {}_{1}spcaf \quad (2)$$

$${}_{(n-2)}spcaf \cdot {}_{1}spcaf = (1+i)^{n-2}\cdot(1+i)^{1} = (1+i)^{n-1} = {}_{(n-1)}spcaf$$

Restando (1) de (2):

$$F - F\cdot {}_{1}spcaf = -g\cdot {}_{(n-1)}spcaf - g\cdot {}_{(n-2)}spcaf - \dots - g\cdot {}_{2}spcaf - g\cdot {}_{1}spcaf + (n-1)g$$

cambiando de signos en ambos miembros y sacando a (g) como factor común:

$$\underbrace{F\,{}_{1}spcaf - F}_{\substack{= F\cdot(1+i) - F \\ = F + Fi - F = Fi}} = g\underbrace{\left[{}_{(n-1)}spcaf + {}_{(n-2)}spcaf + \dots + {}_{2}spcaf + {}_{1}spcaf + 1\right]}_{= {}_{n}uscaf} - ng$$

(ver: "Relaciones entre las fórmulas")

$$F\cdot i = g\cdot {}_{n}uscaf - ng \quad (3)$$

Multiplicando por el factor: ${}_{n}sfdf$ (que es el recíproco de: ${}_{n}uscaf$)

$$F\cdot i\cdot {}_{n}sfdf = g\cdot \underbrace{{}_{n}uscaf\cdot {}_{n}sfdf}_{=1} - ng\cdot {}_{n}sfdf$$

dado que: $F\cdot {}_{n}sfdf = A$
despejando:

$$A = \frac{g}{i} - \frac{n\cdot g}{i}\,{}_{n}sfdf \quad \therefore$$

$$\boxed{\begin{gathered} A = g\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i}\,{}_{i\text{-}n}sfdf\right] \\ A = g\cdot {}_{i\text{-}n}asf \end{gathered}}$$

al factor: $\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i}\,{}_{i\text{-}n}sfdf\right]$ se le denomina:
– <u>factor de serie aritmética y se representa:</u>

a) ${}_{i\text{-}n}asf$ que significa: arithmetic series factor

b) $(A/g, i\%, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar el gradiente de una serie aritmética, para encontrar el valor (A) de una serie uniforme.

Así, para el ejemplo propuesto, el valor de los pagos (A) de una serie uniforme equivalente, será:

$$A = 5{,}000 + 200\,{}_{8\text{-}7}asf = 5{,}000 + 200 \times 2.6937 = \$5{,}538.^{74}$$

Por otro lado, de la ecuación ③ se puede obtener el valor de (F):

$$\boxed{F = \frac{g}{i}\left[{}_{i-n}uscaf - n\right] = g\left[\frac{(F/A, i, n) - n}{i}\right] = g\,(F/g, i, n)}$$

También puede encontrarse el Valor Presente de la serie con gradiente aritmético:

$$P = A \cdot {}_{n}uspwf = g \cdot \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i}\,{}_{n}sfdf\right]{}_{n}uspwf$$

$$P = g \cdot \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} P &= g \cdot \frac{1}{i}\left({}_{i-n}uspwf - n \cdot {}_{i-n}sppwf\right) = \frac{g}{i}\left[(P/A, i, n) - n\,(P/F, i, n)\right] \\ P &= g \cdot {}_{i-n}gpwf = g \cdot (P/g, i, n) \end{aligned}}$$

al factor: $\frac{1}{i}\left[(P/A, i, n) - n\,(P/F, i, n)\right]$ se le denomina: "factor de actualización del gradiente de una serie aritmética."

y se representa:

a) ${}_{i-n}gpwf$ que significa: gradient present worth factor

b) $(P/g, i\%, n)$

Es claro que la relación entre los factores anteriores puede establecerse:

$$(P/g, i\%, n) = (A/g, i\%, n) \cdot (P/A, i\%, n)$$

$$(F/g, i\%, n) = (A/g, i\%, n) \cdot (F/A, i\%, n)$$

y también:

$$(A/g, i\%, n) = (P/g, i\%, n) \cdot (A/P, i\%, n)$$

Los valores de los factores: $(A/g, i\%, n)$ y $(P/g, i\%, n)$ están tabulados para diversos valores de (i) y de (n).

B) GRADIENTE DE INCREMENTO GEOMETRICO.

Consideremos una serie de pagos del tipo:

	A_1	$A_1 \cdot j$	$A_1 \cdot j^2$	$A_1 \cdot j^{n-3}$	$A_1 \cdot j^{n-2}$	$A_1 \cdot j^{n-1}$
0	1	2	3	$(n-2)$	$(n-1)$	n

Calculemos el valor de (F) acumulado al término de (n) periodos:

$$F = A_1 \cdot (1+i)^{n-1} + A_1 \cdot j\,(1+i)^{n-2} + \cdots + A_1 \cdot j^{n-3}(1+i)^2 + A_1 \cdot j^{n-2}(1+i) + A_1 \cdot j^{n-1} \quad (1)$$

multiplicando ambos miembros por: $\frac{(1+i)}{j}$

$$F\frac{(1+i)}{j} = \frac{A_1}{j}(1+i)^n + A_1 \cdot (1+i)^{n-1} + A_1 \cdot j(1+i)^{n-2} + \cdots + A_1 \cdot j^{n-4}(1+i)^3 + A_1 \cdot j^{n-3}(1+i)^2 + A_1 \cdot j^{n-2}(1+i) \quad (2)$$

restando la ecuación (2) de la (1):

$$F - F\frac{(1+i)}{j} = -\frac{A_1}{j}(1+i)^n + A_1 \cdot j^{n-1}$$

$$F\left[1 - \frac{(1+i)}{j}\right] = A_1\left[j^{n-1} - \frac{(1+i)^n}{j}\right]$$

$$F\left[j - (1+i)\right] = A_1\left[j^n - (1+i)^n\right]$$

por tanto:

$$\boxed{F = A_1\left[\frac{j^n - (1+i)^n}{j - (1+i)}\right]} \quad (I)$$

para:
$j \neq i \quad j \geq 0$

En esta expresión, (j) debe ser expresado como el factor por el que se multiplica la cantidad inicial (A_1). El valor (i %) se expresa en decimales.

Ahora bien, si (j) se expresa no como factor, sino como porcentaje de incremento sobre la cantidad base (A_1), se puede demostrar que:

$$\boxed{F = A_1\left[\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i - j}\right]} \quad (II)$$

para:
$j \neq i \quad j \geq 0$

así por ejemplo, si en una serie con gradiente de incremento geométrico, la cantidad inicial (A_1) crece geométricamente en un 7% en cada periodo, ∴

en la expresión (I) se entrará con : $j = 1.07$

en la expresión (II) se entrará con : $j = 0.07$

al factor : $\left[\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i-j}\right]$ se le denomina : "factor de serie geométrica" y se representa : $(F/A_1, i, j, n)$

$$\therefore \quad \boxed{F = A_1 \cdot (F/A_1, i, j, n)}$$

Para el caso de que : $i = j$ la expresión (II) se reduce a :

$$\underline{F = A_1 \cdot n(1+i)^{n-1}}$$

Por otro lado, de las mismas expresiones se deduce que :

$$(F/A_1, i, j, n) = (F/A_1, j, i, n) \quad \sim (3)$$

a partir del valor de (F) en (II), se pueden calcular los valores de (P) y el de (A), correspondiente este último, a una serie uniforme equivalente:

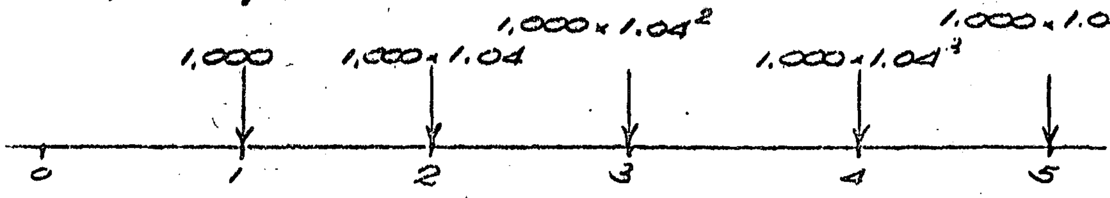
$$P = \begin{cases} \bullet \text{ para: } j \neq i \quad j \geq 0 \\ A_1\left[\frac{1-(1+j)^n(1+i)^{-n}}{i-j}\right] = A_1\left[\frac{1-(F/P, j, n)\cdot(P/F, i, n)}{i-j}\right] \\ \qquad = A_1 \cdot (P/A_1, i, j, n) \\ \bullet \text{ para: } i = j \\ A_1 \cdot \frac{n}{1+i} \end{cases}$$

Los valores de los factores : $(F/A_1, i, j, n)$ y $(P/A_1, i, j, n)$ están tabulados para diversos valores de : i, j, n debiendo tenerse presente la relación (3) para el mayor aprovechamiento de las tablas.

Ejemplo:

¿Cuál es el importe acumulado de los costos de conservación y mantenimiento de un equipo, al cabo de 5 meses, si se considera tendrán un incremento sostenido geométrico de 4% mensual sobre una erogación de 1,000 u.m. en el primer mes y se considera además que el costo del dinero es de 5% mensual?

La representación en una escala de tiempos de la situación anterior, será:



• usando (I):

$$F = A_1\left[\frac{j^n-(1+i)^n}{j-(1+i)}\right]_{\substack{j=1.04\\ i=0.05\\ n=5}}^{\text{con:}} = 1{,}000\left[\frac{(1.04)^5-(1+0.05)^5}{1.04-(1+0.05)}\right]$$

$$F = 1{,}000 \times 5.9629 = 5{,}962.^{90} \text{ um}$$

• usando (II):

$$F = A_1\left[\frac{(1+i)^n-(1+j)^n}{i-j}\right]_{\substack{j=0.04\\ i=0.05\\ n=5}}^{\text{con:}} = 1{,}000\left[\frac{(1+0.05)^5-(1+0.04)^5}{0.05-0.04}\right]$$

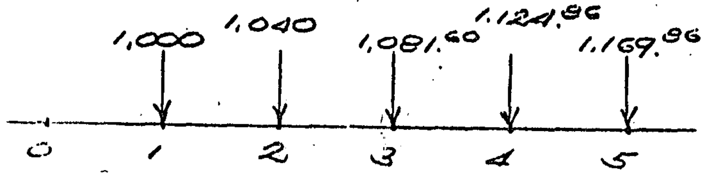
$$F = 1{,}000 \times 5.9629 = 5{,}962.^{90} \text{ um.}$$

• usando las tablas:

$$F = 1{,}000\left[F/A_1, i, j, n\right] = 1{,}000\left[F/A_1, 5\%, 4\%, 5\right]$$

$$F = 1{,}000 \times 5.9629 = 5{,}962.^{90} \text{ um.}$$

• calculando directamente en la escala de tiempos:



$$\begin{aligned}
F = 1000\,(F/P, 5\%, 4) &= 1{,}215.^{50}\\
+\,1{,}040\,(F/P, 5\%, 3) &= 1{,}203.^{90}\\
+\,1{,}081.^{60}\,(F/P, 5\%, 2) &= 1{,}192.^{50}\\
+\,1{,}124.^{86}\,(F/P, 5\%, 1) &= 1{,}181.^{14}\\
+\,1{,}169.^{86} &= 1{,}169.^{86}\\ \hline
F = \Sigma: &\ 5{,}962.^{90} \text{ um.}
\end{aligned}$$

VALORES LIMITE DE LAS FORMULAS.

°) Si el número de periodos (n) tiende a adquirir valores muy grandes, es decir: $n \to \infty$:

$$_{i-\infty}spcaf = (F/P, i, \infty) = (1+i)^{\infty} = \infty$$

$$_{i-\infty}sppwf = (P/F, i, \infty) = \frac{1}{(1+i)^{\infty}} = 0$$

$$_{i-\infty}uscaf = (F/A, i, \infty) = \frac{(1+i)^{\infty}-1}{i} = \infty$$

$$_{i-\infty}sfdf = (A/F, i, \infty) = \frac{i}{(1+i)^{\infty}-1} = 0$$

$$_{i-\infty}crf = (A/P, i, \infty) = \frac{i(1+i)^{\infty}}{(1+i)^{\infty}-1}$$

por medio de este cociente llegamos a una indeterminación, pero por otro lado:

$$_{i-\infty}crf = (A/P, i, \infty) = {}_{i-\infty}sfdf + i = 0 + i = i$$

$$_{i-\infty}uspwf = (P/A, i, \infty) = \frac{1}{_{i-\infty}crf} = \frac{1}{i}$$

$$_{i-\infty}asf. = (A/g, i, \infty) = \frac{1}{i}$$

°) Si la tasa de interes (i), adquiere o tiende a valer cero: $i \to 0$

$$_{0-n}spcaf = (F/P, 0, n) = 1$$

$$_{0-n}sppwf = (P/F, 0, n) = 1$$

$$_{0-n}uscaf = (F/A, 0, n) = n$$

$$_{0-n}sfdf = (A/F, 0, n) = \frac{1}{n}$$

$$_{0-n}crf = (A/P, 0, n) = \frac{1}{n}$$

$$_{0-n}uspwf = (P/A, 0, n) = n$$

$$_{0-n}asf = (A/g, 0, n) = \frac{n-1}{2}$$

INTERES CONTINUO.

Para el desarrollo de las fórmulas mostradas anteriormente, se aceptó inicialmente que todos los pagos ocurren en forma discreta, es decir, en cada período se consideran agrupados en un solo pago ocurriendo éste al final del período. Como consecuencia, a los intereses correspondientes se les aplican las mismas consideraciones. Surge la duda de si un sistema de pagos e intereses como el anterior refleja la realidad, y de no ser así, cual es el grado de error que introducen las suposiciones hechas.

Por un lado, es cierto que ciertos pagos en realidad se concentran en un punto específico del tiempo, como es el caso del pago para la compra de un equipo o del ingreso que se obtiene por su venta, (valor de recuperación), los cuales se ubican en la escala de tiempo, al inicio y al final del primero y último períodos respectivamente, lo cual sí refleja la realidad, pero otros efectivos de caja ocurren en forma más o menos contínua en el transcurso de un período, como sucede por ejemplo, con erogaciones semanales para el pago de obra de mano, o mensuales o bimestrales, para cubrir los gastos por concepto de energía, materiales, impuestos, operación en general, etc.., y suponerlos todos ellos concentrados o representados al final de un período, digamos anual, es evidente que configura una situación muy diferente de la real. Quizás un modelo en que se considerasen todos estos pagos fluyendo continuamente, como una corriente de agua, a lo largo del período, sería probablemente más apegado a la realidad que considerarlos concentrados al final del año. Además hay casos en que ni la inversión inicial, por ejemplo, es puntual, ya que se distribuye a lo largo de uno o varios períodos, como es el caso de la construcción de una obra en la que los pagos para sufragar los gastos de la misma, se distribuyen a todo lo largo del período que dura la construcción.

El criterio del " interés continuo " proviene de la suposición de que los costos y los beneficios se generan en cada día, en cada - hora y en cada minuto de la operación.

La verdad es que uno y otro criterios, representan e implican un conjunto de suposiciones y consideraciones, ya que en general en el ámbito real, el flujo de efectivo ni obedece totalmente a un modelo discreto, ni se comporta como un líquido que fluye continuamente. Ambos métodos proporcionan resultados aproximados y sin embargo los rangos de error que implican no son de tal magnitud que invaliden alguno de los criterios.

Sin embargo, la costumbre establecida, sobre todo en los campos de la idustria y el comercio, propician el empleo del sistema discreto. En general, el tratamiento que se da al dinero dentro de los sistemas comunmente aceptados, de pagos, compras, inversiones en bonos y acciones, otorgamiento de préstamos, hipotecas, etc.., se ajusta al sistema discreto.

El criterio de interés continuo tiene aplicación en el desarrollo de ciertos modelos matemáticos para la toma de decisiones o en aquellos casos en que por la naturaleza misma del flujo de efectivo, se hace conveniente el empleo de dicha criterio.

INTERES NOMINAL E INTERES EFECTIVO.

Muchas transacciones comerciales, estipulan que el cálculo de intereses, así como su cargo o abono, se haga en periódos uniformes menores de un año; Sin embargo, aún en estos casos, es costumbre indicar la tasa de interés de esa inversión en base anual, aunque los periódos de pago o cálculo de los intereses sean menores de un año. Así por ejemplo, si una tasa de interés es de 3% cada 6 meses, se acostumbra referirse a ella como una tasa de 6% anual, solo que al interés calculado de esta manera se le designa como: " tasa nominal de interés " para diferenciarla de la tasa real o efectiva que es algo mayor que el 6%.

Asi por ejemplo, el interés real anual o efectivo de un capital de $ 100.00 invertido a una tasa de 6% computado semestralmente, se calcula:

Intereses generados en los primeros 6 meses:

$$I = \$\ 100 \times 0.03 = \$\ 3.00$$

Capital total al iniciar el segundo semestre:

$$P + Pi = \$\ 100.00 + \$\ 3.00 = \$\ 103.00$$

Interes sobre el capital anterior al final del segundo Semestre:

$$I = \$\ 103.00 \times 0.03 = 3.09$$

Interés total acumulado durante el año:

$$\$\ 3.00 + 3.09 = \$\ 6.09$$

Tasa real en el año de interés:

$$\frac{\$\ 6.09}{100} = 0.0609 = 6.09\ \%$$

A esta tasa real de interés, con base anual, se le denomina: "tasa de interés efectiva ". De aquí en adelante vamos a emplear la denominación " tasa real " para períodos menores de un año y " tasa efectiva" exclusivamente para indicar la tasa real correspondiente a un año.

Cuando se dé como dato la tasa nominal, para poder aplicar las fórmulas, habrá que calcular primero la tasa real por período y trabajar con el número de períodos correspondientes a esa tasa real. Las tasas nominales, no sirven para base de comparación entre alternativas sino hasta que han sido convertidas a tasas efectivas.

La tasa efectiva de interés es el interés anual total percibido por unidad de capital empleado, considerando que este interés (cuando es computado en períodos menores de un año), es invertido por el resto del año tan pronto como se genera, en los mismos términos y condiciones de inversión a que esta sujeto el capital principal.

Ejemplo:

Calcular el capital acumulado y la tasa efectiva de interes de un capital de ₱100. invertido a una tasa de 6% computada cada 3 meses, durante 10 años.

Tasa real de interes en el trimestre: $6/4 = 1.5\%$
Número de periodos trimestrales en los 10 años: 40
Cantidad acumulada al término de los 10 años:

$$F = P_{1.5-40}\text{spcaf} = P\,(F/P,\,1.5,\,40) = 100.\ (1+0.015)^{40}$$

$$F = 100 \cdot 1.8140 = 181.^{40}$$

Analicemos más detenidamente el proceso:

El capital acumulado al cabo de un año, correspondiente a cada peso invertido, será:

$$F = \$1.^{\cdot\cdot}\ {}_{1.5-4}\text{spcaf} = \$\,1.0614$$

En consecuencia, el importe de los intereses ganados por año/por peso:

$$F - P = \$1.0614 - \$1.00 = \$\,0.0614$$

lo que equivale a una tasa efectiva de interes del: 6.14%

Generalizando:

$$\text{tasa efectiva de interes} = \left[\frac{F-P}{P}\right] = \left[\frac{P\,{}_{i'-M}\text{spcaf} - P}{P}\right]$$

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = \left({}_{i'-M}\text{spcaf} - 1\right) = (1+i')^{M} - 1}$$

donde (i') es la tasa real por periodo y (M) es el número de periodos que hay en un año, correspondientes a la tasa real (i')

Cuando se tiene como dato, la tasa nominal de interes anual (r), la expresión toma la forma:

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = \left(1+\frac{r}{M}\right)^{M} - 1}$$

Para el caso particular del interes continuo, el número de periodos (M) en cada uno de los cuales se computa el interes, tiende a ser muy grande, es decir:

$$M \rightarrow \infty$$

y en estas condiciones, si en la expresión: $\left(1+\frac{r}{M}\right)^M$

llamamos: $\frac{M}{r} = K$ de donde: $M = K \cdot r$

substituyendo queda: $\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K \cdot r} = \left[\left(1+\frac{1}{K}\right)^K\right]^r$

al tender: $M \rightarrow \infty$, también: $K \rightarrow \infty$

recordando que: $\lim_{K \rightarrow \infty} \left\{\left(1+\frac{1}{K}\right)^K\right\} = e$

entonces: $\lim_{M \rightarrow \infty} \left(1+\frac{r}{M}\right)^M = e^r$

en estas condiciones, para el caso del interes continuo, se tendria:

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = e^r - 1}$$

Ejemplo: ¿Qué tasa es mayor?

3% computada mensualmente

ó 3 1/2 % computada semestralmente ?

a) 3% (nominal anual) computado mensualmente:

tasa real mensual: $3/12 = 1/4$ %

número de periodos en el año: 12

tasa efectiva de interes:

$${}_{1/4-12}spcaf - 1 = 1.0304 - 1 = 0.0304 = 3.04\ \%$$

b) 3 1/2 % (nominal anual) computado semestralmente:

tasa real semestral: $3.5/2 = 1.75$ %

número de periodos en un año: 2

tasa efectiva de interes:

$${}_{1.75-2}spcaf - 1 = 1.0353 - 1 = 0.0353 = 3.53\ \%$$

∴ es mayor una tasa de 3 1/2 % computada semestralmente.

Ejercicio:

¿Qué tasa de interes real mensual es equivalente a una tasa de 20% computada trimestralmente?

por un lado:

$$i_{efect.} = (1+i)^{12}-1$$

por otro lado:

$$i_{efect.} = \left(1+\frac{0.20}{4}\right)^{4}-1$$

igualando ambas expresiones:

$$(1+i)^{12} - \cancel{1} = (1+0.05)^{4} - \cancel{1}$$

sacando raiz cuarta:

$$(1+i)^{3} = 1+0.05$$

$$1+i = (1.05)^{1/3}$$

$$i = (1.05)^{1/3} - 1$$

$$i = 0.01639 = 1.639\%$$

real mensual

comprobación:

cálculo de las tasas efectivas de interes:

$$_{1.639-12}spcaf - 1 = (F/P,\ 1.639,\ 12) - 1 = 0.2155 = 21.55\%$$

$$_{5-4}spcaf - 1 = (F/P,\ 5,\ 4) - 1 = 0.2155 = 21.55\%$$

Ejemplo:

Calcular la tasa efectiva de interes a que es invertido un capital de ₡1,000. si la tasa anual (nominal) es de 80% y es computada en periodos:

anual, semestral, trimestral, mensual, diario y continuo.

Calcular la cantidad (F) acumulada en cada caso al cabo de un año.

Periodo de computación	Número de periodos en un año	Tasa de interes real en el periodo	Cálculo	Tasa efectiva de interes	Cantidad (F) acumulada en un año.
					$F = 1{,}000\,(1+i')^{M}$
anual	1	$80/1 = 80\%$	$_{80-1}spcaf - 1 = 1.80000 - 1 = 0.80$	80.00%	₡ 1,800.
semestral	2	$80/2 = 40\%$	$_{40-2}spcaf - 1 = 1.96000 - 1 = 0.96$	96.00%	₡ 1,960.
trimestral	4	$80/4 = 20\%$	$_{20-4}spcaf - 1 = 2.07360 - 1 = 1.07360$	107.36%	₡ 2,073.^{60}
mensual	12	$80/12 = 6.667\%$	$_{6.667-12}spcaf - 1 = 2.16943 - 1 = 1.16943$	116.94%	₡ 2,169.^{43}
diario	360	$80/360 = 0.2222\%$	$_{0.222-360}spcaf - 1 = 2.22339 - 1 = 1.22339$	122.^{34}%	₡ 2,223.^{39}
continuo	$\rightarrow \infty$	$80/\infty \rightarrow 0$	$e^{0.80} - 1 = 2.22554 - 1 = 1.22554$	122.^{55}%	₡ 2,225.^{54}

El ejemplo anterior ilustra la diferencia entre tasa nominal y tasa real y la necesidad de especificar cual tasa se conoce como dato al hacer el análisis de una alternativa.

Observamos que si en el sistema de interés continuo y en el de interés discreto, se trabaja con la misma tasa efectiva, la cantidad acumulada al final de un año es la misma, lo cual indica que la diferencia entre sus tasas nominales, es irrelevante y así por ejemplo, una tasa efectiva de interés de 12.7% acumulada en el ejemplo anterior una F = $ 112.70 tanto por el sistema discreto como para el continuo.

Es claro que en el sistema de interés continuo, la tasa nominal anual siempre será distinta de la tasa efectiva, ya que la primera vale (r) y la segunda ($e^r - 1$), razón por la cual, en las tablas de interés contínuo siempre se indica la tasa efectiva con la cual se calculan, y la nominal a la cual corresponde. En cambio en el sistema de interés discreto, la tasa nominal será igual a la tasa efectiva, excepto cuando los intereses se computen en periodos menores de un año.

Vemos en el ejemplo, que los valores obtenidos para el interés continuo son muy similares a los correspondientes al interés discreto, con periodo de computación diario y aún a los de periodo de computación mensual.

TASA DE DESCUENTO.

En todos los casos que anteceden, hemos considerado que los intereses son computados y pagados al final de cada periódo de interés. Cuando el pago de los intereses se hace por adelantado, es decir, al inicio del periódo, se dice que este pago constituye un -"descuento".

Si un capital (P) inicial, es invertido y acumula una cantidad (F) al final de un cierto periódo, entonces: (F- P) representa los intereses:

sobre P, (si en los intereses son pagados al final del periódo).

sobre F, (si los intereses son descontados al inicio del periódo).

en estas condiciones:

tasa de interés : $i = \frac{F-P}{P} = \frac{F}{P} - 1$

tasa de descuento: $d = \frac{F-P}{F} = 1 - \frac{P}{F}$

de las expresiones anteriores se deduce que: $\boxed{i = \frac{d}{1-d}}$

También puede demostrarse que para el caso de la tasa de descuento:

$$\boxed{F = P\,\frac{1}{(1-d)^n} = P(1-d)^{-n} \quad ; \quad P = F(1-d)^n}$$

Ejemplo:

Calcular el descuento correspondiente a ¢1.000. pagaderos dentro de 10 años, si la tasa de descuento es del 24% computada semestralmente.

tasa de descuento (nominal) = 24%
tasa de descuento real semestral: $24/2 = 12\%$
número de periodos semestrales en 10 años = 20

La cantidad (P) que será entregada al prestatario después de descontar por adelantado los intereses, será:

$$P = F(1-d)^n = 1.000\,(1-0.12)^{20} = 1.000 \times (0.88)^{20}$$
$$P = 1.000 \times 0.07756 = ¢\,77.^{56}$$

∴ el descuento habrá sido:

$$\text{Descuento} = F - P = 1.000 - 77.^{56} = ¢\,922.^{44}$$

INTERPOLACION.

Cuando en un momento dado, los valores requeridos para determinados (i) o (n), no se encuentran en las tablas, y con el fin de no tener que calcularlos directamente a partir de las fórmulas, puede interpolarse entre los dos valores más cercanos al buscado.

Pero dado que los factores no son lineales, aceptamos que al interpolar estamos introduciendo errores, los cuales habrá que estimar para ver si están dentro de cierto rango de tolerancia, ya que para ciertos factores y para determinado rango de valores de (i) y de (n), el error que se introduce al interpolar linealmente, puede ser considerable.

En cada caso, el buen juicio y el criterio, determinarán si es prudente calcular los valores buscados mediante la interpolación o es necesario partir directamente de las fórmulas.

Ejemplo:

Calcular el valor de : ${}_{32\%-15}crf = (A/P,\ 32\%,\ 15)$

teniendo como datos los valores proporcionados por las tablas:

$${}_{30-15}crf = 0.305978$$
$${}_{35-15}crf = 0.353926$$

0.305978 — 0.353926

30 — 32 — 35

Procediendo por interpolación tendremos que:

$$\begin{aligned} {}_{32-15}crf &= 0.305978 + (0.353926 - 0.305978) \times 2/5 \\ &= 0.305978 + 0.019179 \\ &= 0.325157 \end{aligned}$$

Calculémoslo directamente a partir de la fórmula:

$${}_{32-15}crf = \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{0.32\,(1+0.32)^{15}}{(1+0.32)^{15} - 1}$$

cálculo de: $(1.32)^{15}$

$$\begin{aligned} \log\,(1.32)^{15} &= 15 \log 1.32 \\ &= 15 \times 0.120574 = 1.80861 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \therefore\ (1.32)^{15} &= \text{antilog } 1.80861 \\ &= 64.35894 \end{aligned}$$

$${}_{32-15}crf = \frac{0.32 \times 64.35894}{64.35894 - 1} = 0.32050505$$

Vemos que en este caso, la diferencia entre los valores obtenidos por interpolación y por la fórmula, es apenas de : 0.03 %

Ejemplo:

Calcular el valor de : ${}_{15-28}spcaf$

teniendo como dato los valores: ${}_{15\%-25}spcaf = 32.919$

$${}_{15\%-30}spcaf = 66.212$$

32.919 — 66.212

n=25 — n=28 — n=30

Procediendo por interpolación:

$$ {}_{15-28}spcaf = 32.919 + (66.212 - 32.919) \times 3/5 = $$
$$ = 32.919 + 19.976 $$
$$ = 52.895 $$

Calculémoslo directamente :

$$ {}_{15-28}spcaf = (1+0.15)^{28} $$
$$ \log (1.15)^{28} = 28 \log 1.15 = 28 \times 0.060698 = 1.699544 $$
$$ (1.15)^{28} = \text{antilog } 1.699544 = 50.066 $$

Vemos que en este caso, el error debido a la interpolación es de 5.65%, que en un caso específico, pudiese tener consecuencias apreciables.

Otro procedimiento que en este caso pudiere seguirse, sería:

$$ {}_{15-28}spcaf = (1+0.15)^{28} = (1+0.15)^{25} \times (1+0.15)^{3} $$

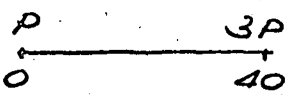
donde los valores de estos 2 factores si están tabulados :

$$ (1+0.15)^{28} = 32.919 \times 1.5209 = 50.066 $$

método con el cual también se encuentra el valor exacto.

Ejemplo:

¿A qué tasa de interes, computado trimestralmente, se triplica un capital P invertido a 10 años? Calcular la tasa real trimestral, la tasa nominal anual y la tasa efectiva.

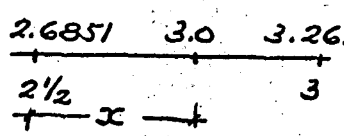


Periodos trimestrales en 10 años = 40

$$ \cancel{P \times}\ {}_{i-40}spcaf = 3\cancel{P} $$
$$ {}_{i-40}spcaf = 3 $$

en tablas se pueden encontrar los valores

$$ {}_{2\frac{1}{2}-40}spcaf = 2.6851 $$
$$ {}_{3-40}spcaf = 3.2620 $$



$$ x \text{ — } (3.000 - 2.6851) $$
$$ 0.5 \text{ — } (3.262 - 2.6851) $$

Interpolando se obtiene :

$$ i = 2.5\% + x = 2.5 + \left(\frac{3.00 - 2.6851}{3.262 - 2.6851}\right) \times 0.5 = 2.5 + 0.2729 $$

$$ i = 2.7729\% \quad (\text{tasa real trimestral}) $$

La tasa nominal será: $2.7729 \times 4 = 11.09\%$
la tasa efectiva:

$$\underset{2.7729-4}{spcaf} - 1 = (1+0.027729)^4 - 1 = 0.1156 1526 = 11.56\%$$

En este caso, el problema también puede resolverse mediante la fórmula:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[40]{\frac{3\cancel{R}}{\cancel{R}}} - 1 = \sqrt[40]{3} - 1 = 1.027845 - 1$$

$i = 2.78459\ \%$ (tasa real trimestral)

tasa nominal: $2.7846 \times 4 = 11.14\%$
tasa efectiva:

$$\underset{2.7846-4}{spcaf} - 1 = 1.116123 - 1$$

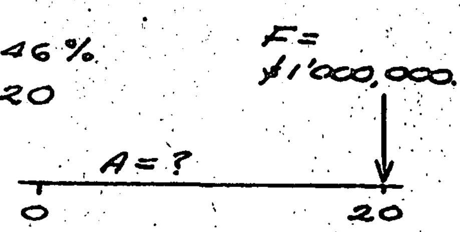
$$\therefore\ i = 11.61\ \%$$

La diferencia entre los resultados se debe al error de aproximación introducido al interpolar linealmente.

Ejemplo: Una familia se propone acumular durante los próximos 5 años: ¢1'000,000. Si se tiene oportunidad de invertir al 11.14% anual computado trimestralmente, ¿cuánto debe ahorrar trimestralmente?

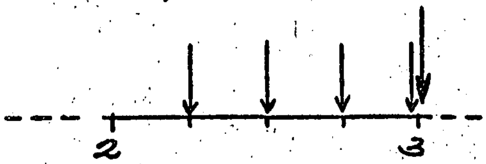
Otra familia se propone lo mismo, pero no se compromete a ahorrar trimestralmente sino en forma anual; ¿cuánto debe ahorrar en estas condiciones?

La tasa real trimestral es: $11.14/4 = 2.7846\%$.
Periodos trimestrales en 5 años: $5 \times 4 = 20$



$A = F \cdot (A/F, i, n)$
$A = 1'000,000 \cdot (A/F, 2.7846, 20)$
$A = 1'000,000 \cdot 0.038038 =$ ¢38,038./trimestrales.

La 2ª familia deberá ahorrar anualmente para alcanzar la misma meta:



$F = A \cdot (F/A, i, n) = 38,038 \cdot (F/A, 2.7846, 4)$
$F = 38,038. \times 4.1702 =$ ¢$158,626.^{04}$/anuales

Comprobación de que ambas familias lograrán su meta:

la 1ª familia:
F= ¢38,038. (F/A, 2.7846, 20)
F= ¢ 1'000,000.

la 2ª familia:
F= ¢$158,626.^{04}$ (F/A, 11.6123, 5)
F= ¢ 1'000,000.

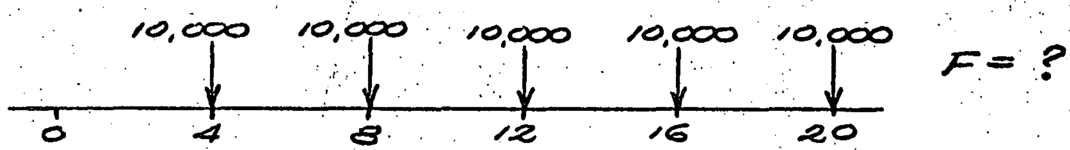
Ejemplo:

Una persona espera recibir un bono por ¢10,000 al final de cada año y por los próximos 5 años. Si planea invertir cada bono tan pronto lo reciba, a un 48 % anual computado trimestralmente, ¿cuánto tendrá acumulado al término de los 5 años?

De las condiciones planteadas:

tasa real trimestral: $48/4 = 12\%$

número de periodos trimestrales en 5 años: $5 \times 4 = 20$



1° procedimiento:

$$F = 10{,}000 \cdot (F/P, 12\%, 16) + 10{,}000 \cdot (F/P, 12\%, 12) + 10{,}000 \cdot (F/P, 12\%, 8) + 10{,}000 \cdot (F/P, 12\%, 4) + 10{,}000$$

$$F = 61{,}304 + 38{,}959 + 24{,}760 + 15{,}735 + 10{,}000$$

$$F = ¢\,150{,}758.$$

2° procedimiento:

$$F = 10{,}000 \cdot (A/F, 12\%, 4) \cdot (F/A, 12\%, 20)$$

$$F = 10{,}000 \times 0.20923 \times 72.05244 = ¢\,150{,}758.$$

3° procedimiento:

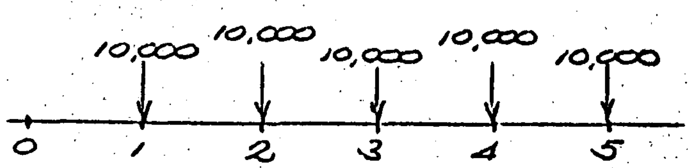
$$F = 10{,}000 \cdot (A/P, 12\%, 4) \cdot (F/A, 12\%, 16) + 10{,}000$$

$$F = 10{,}000 \times 0.32923 \times 42.75328 + 10{,}000 = ¢\,150{,}758.$$

4° procedimiento:

Calculemos la tasa efectiva correspondiente a una tasa real trimestral de 12 %:

$$\text{tasa efectiva} = (F/P, 12\%, 4) - 1 = 0.57352 = 57.352\%$$



calculemos el factor:

$$(F/A, 57.352\%, 5) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0.57352)^5 - 1}{0.57352} = 15.0758$$

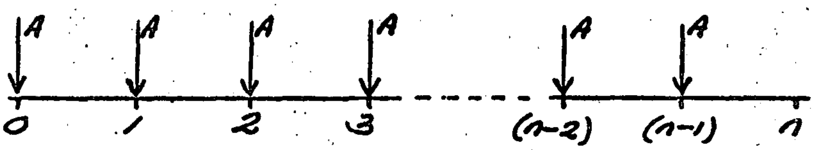
$$F = ¢10{,}000 \times 15.0758 = ¢\,150{,}758.$$

PAGOS POR ADELANTADO.

A diferencia del condicionamiento planteado en el desarrollo de los modelos matemáticos para series uniformes, en los cuales los pagos (A) se realizan al término de cada uno de los (n) períodos, existen en la práctica comercial, situaciones como son: el alquiler de inmuebles, la renta de vehículos, el pago de las primas de seguros, etc..., en las cuales los pagos (A) uniformes, se efectuan al inicio de cada periodo, constituyendo una:

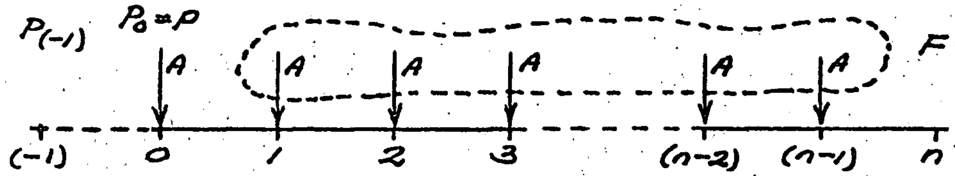
SERIE UNIFORME DE PAGOS POR ADELANTADO

la cual se representaría:



En estas condiciones, para el cálculo del Valor Presente (P), se puede proceder:

a) calcular $P_{(-1)}$ aplicando la fórmula anteriormente desarrollada: (P/A) para el punto (-1) y trasladando este valor de $P_{(-1)}$ al punto (0) calculando la (F) correspondiente:



$$P_{(-1)} = A \cdot (P/A, i, n)$$

$$P_0 = P = P_{(-1)} \cdot \underbrace{(F/P, i, 1)}_{(1+i)^1}$$

$$\therefore \quad P_{adel.} = P_{final} \cdot (1+i)$$

$$\underline{P_{adel.} = A \cdot (P/A, i, n)(1+i)}$$

b) calcular un valor (P) equivalente a una serie de (n-1) pagos (A) ubicados de: 1 a (n-1) (area punteada), y después sumarle un pago (A) (el pago ubicado en 0:

$$P_0 = P = A \cdot (P/A, i, n-1) + A$$

Con igual razonamiento, el valor de (F) puede determinarse:

c) calculando (F) en el punto (n-1), aplicando el modelo (F/A) desde el punto (-1) y transladando el valor obtenido al punto (n) mediante el modelo (F/P):

$$F = A \cdot (F/A, i, n) \cdot \underbrace{(F/P, i, 1)}_{(1+i)^1}$$

$$\therefore \quad F_{adel.} = A \cdot (F/A, i, n) \cdot (1+i)$$

d) calcular (F) a partir del valor de $P_0 = P$ obtenido de los incisos (a) ó (b)

Ejemplo:

Mostrar la diferencia entre las cantidades (P) y (F) equivalentes a una serie de pagos (A):

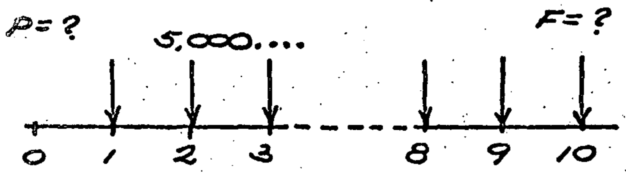
- ubicados al final de cada uno de los (n) periodos
- ubicados al inicio de cada uno de los (n) periodos.

datos: $\left\{ A = \$5{,}000 \quad i = 19\% \quad n = 10 \right.$

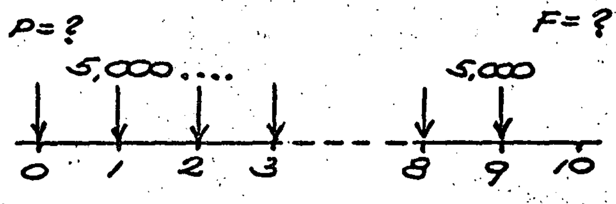
1° caso (pagos al final)

$P = 5{,}000\,(P/A, 19, 10) = \$21{,}694.^{67}$

$F = 5{,}000\,(F/A, 19, 10) = \$123{,}544.^{31}$



2° caso (pagos al inicio)



procedimiento (a):

$$P = A \cdot (P/A, i, 10) \cdot (F/P, i, 1)$$

$$P = \underbrace{5{,}000\,(P/A, 19, 10)}_{P(-1)} \cdot (F/P, 19, 1) = \$25{,}816.^{66}$$

procedimiento (b):

$$P = 5{,}000\,(P/A, 19, 9) + 5{,}000 = \$25{,}816.^{66}$$

procedimiento (c):

$$F = 5{,}000 \cdot (F/A, 19, 10) \cdot (F/P, 19, 1) = \$147{,}017.^{73}$$

procedimiento (d):

$$F = P\,(F/P, 19, 10) = 25{,}816.^{66}\,(F/P, 19, 10) = \$147{,}017.^{73}$$

Observamos que entre los 2 casos, la diferencia entre las $(P)^s$ y las $(F)^s$ es precisamente de : 19%

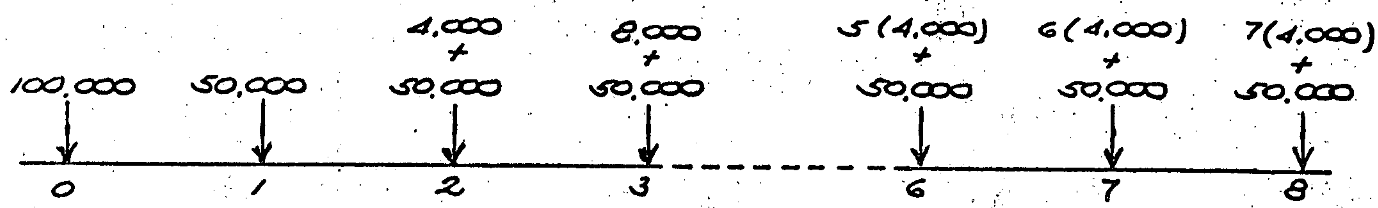
$P_{ad.} = 21{,}694.^{67}\,\underbrace{(1+i)}_{19\%} = 25{,}816.^{66}$

$F_{ad} = 123{,}544.^{31} \times 1.19 = 147{,}017.^{73}$

De los resultados anteriores, concluimos que es claro que a quien pide prestado o debe hacer los pagos, le conviene que le cobren de acuerdo con el criterio de anualidades al final de cada periodo, mientras que a quien va a percibir los pagos, le conviene el criterio de anualidades por anticipado.

Ejemplo:

Un equipo ya instalado cuesta \$100,000. Se considera tendrá un costo de operación de \$50,000 durante el primer año, los que se calcula se incrementarán en \$ 4,000 cada año. Si se estima para el capital una tasa de interes anual de 50%, ¿cuál será el costo acumulado del equipo después de 8 años de operación?



$$F = 100{,}000 \cdot (F/P, 50\%, 8) + [50{,}000 + 4{,}000\,(A/G, 50\%, 8)] \cdot (F/A, 50\%, 8)$$

50-8 asf

$$F = 100{,}000 \times 25.628 + [50{,}000 + 4{,}000 \times 1.6751] \times 49.257$$

$$F = 2'562{,}890 + 2'792{,}892 \qquad = \$\, 5'355{,}782.$$

Otro procedimiento:

$$F = [100{,}000 + 50{,}000 \cdot (P/A, 50\%, 8) + 4{,}000\,(P/G, 50\%, 8)] \cdot (F/P, 50\%, 8)$$

$$F = [100{,}000 + 50{,}000 \times 1.9219 + 4{,}000 \times 3.220] \times 25.628$$

$$F = \$\, 5'355{,}782.$$

Ejemplo:

En una Obra, un Maestro presta a los trabajadores pequeñas cantidades de dinero, cobrando intereses del 5% mensualmente pero por adelantado. Si después de un mes, la deuda no es cubierta, nuevamente cobra el 5%, y así, hasta que la cuenta es liquidada ¿cuál es la tasa efectiva equivalente de interes, que el Maestro está cobrando?

De acuerdo con el enunciado, la tasa de descuento real mensual es de un 5%:

$$d_{real\,mens.} = 5\%$$

entonces:

$$i_{real\,mensual\,equiv.} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.05}{1-0.05} = 0.05263$$

$$i_{efect.} = {}_{5.263-12}spcaf - 1 = (1+0.05263)^{12} - 1$$

$$= 1.85058 - 1$$

$$= 0.85058 = 85.058\,\%$$

Supongamos la misma situación, solo que considerando ahora plazos de interes semanales:

la taza de descuento es: $d_{real\,semanal} = 5\%$

$$i_{real\,semanal\,equiv.} = 0.05263 = 5.263\,\%$$

$$i_{efect.} = {}_{5.263-52}spcaf - 1 = (1+0.05263)^{52} - 1$$

$$= 14.399 - 1$$

$$= 13.399$$

$$= 1339.9\,\%$$

Si el descuento fuese diario:

$$d_{real\,diario} = 5\%$$

$$i_{real\,diario\,equiv.} = 5.263\%$$

$$i_{efect.} = {}_{5.263-365}spcaf - 1 = 135'097,183 - 1$$

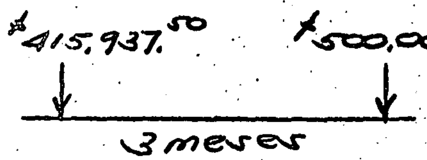
$$= 135'097,182$$

$$= 13,509'718,200\,\%$$

Ejemplo:

Un individuo solicita en un Banco, un préstamo de ₡500,000 a un plazo de 3 meses. Al serle otorgado dicho préstamo se le hace entrega de: ₡415,937.50

Se pregunta, ¿cuál es la tasa efectiva equivalente de interes que el Banco le está cobrando?



$$d = \frac{F-P}{F} = \frac{500,000 - 415,937.50}{500,000} = \frac{84,062.50}{500,000} = 0.1681 = 16.81\%$$

esta es la tasa de descuento real trimestral.
∴ la tasa de descuento nominal anual será:

$$16.81 \times 4 = 67.24\%$$

la tasa de interes (i) equivalente será:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.1681}{1-0.1681} = \frac{0.1681}{0.8319} = 0.202068/\text{trimestral}$$

$$i_{efectiva} = spcaf_{20.2068-4} - 1 = (1+0.202068)^4 - 1$$
$$= 2.0879 - 1$$
$$= 1.0879 = 108.79\%$$

Para calcular la cantidad que debía dársele líquida al cliente, el empleado del Banco procedió de la siguiente manera, sabiendo que la tasa de descuento establecida por la institución es de: 67.24% (vg.: 57.24% + 10% comisión) anual nominal:

tasa de descuento real trimestral: $\frac{67.24}{4} = 16.81\%$

descuento al cliente: ₡500,000 × 0.1681 = ₡84,062.50
por tanto, cantidad líquida a entregarle:

$$P = ₡500{,}000 - 84{,}062.50 = ₡415{,}937.50$$

Cantidad que también pudo calcular:

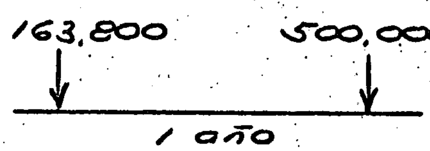
$$P = F(1-d)^n = 500,000\,(1-0.1681)^1$$
$$= 500,000 \times 0.8391$$
$$= ₡415,937.50$$

Si el préstamo se hubiese solicitado a un año:

tasa de descuento anual nominal : 67.24 %
(y real)

descuento anticipado = 500,000 × 06724
= 336,200.

cantidad líquida a entregar :
₡500,000 − 336,200 = ₡163,800.



∴ su situación real es :
recibe ₡163,800 ahora, y debe pagar ₡500,000 dentro de un año.

$$i_{efect.} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.6724}{1-0.6724} = \frac{0.6724}{0.3276} = 2.0525$$

o también :

$$i_{efect.} = \frac{F-P}{P} = \frac{500,000-163,800}{163,800} = 2.0525$$

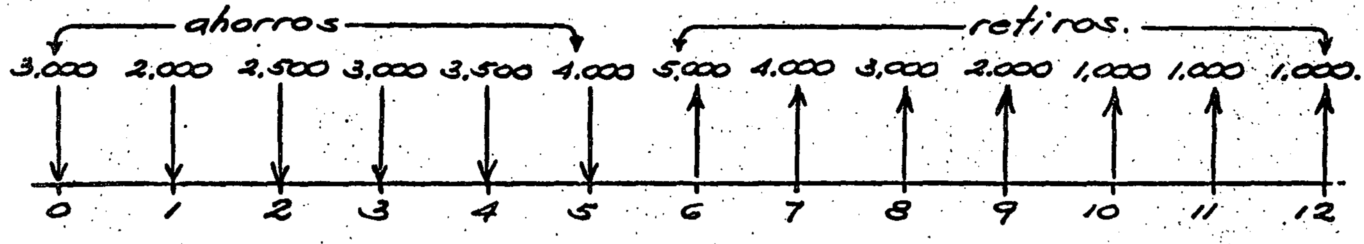
$$\therefore \quad i_{efectiva} = 205.25\ \%$$

La traducción de la tasa de descuento (d) con que realmente se afecta la operación, a una tasa (i efectiva) equivalente, es solo con el fin de poder comparar la alternativa estudiada, con otras alternativas cuyas tasas de recuperación se expresan normalmente en base anual.

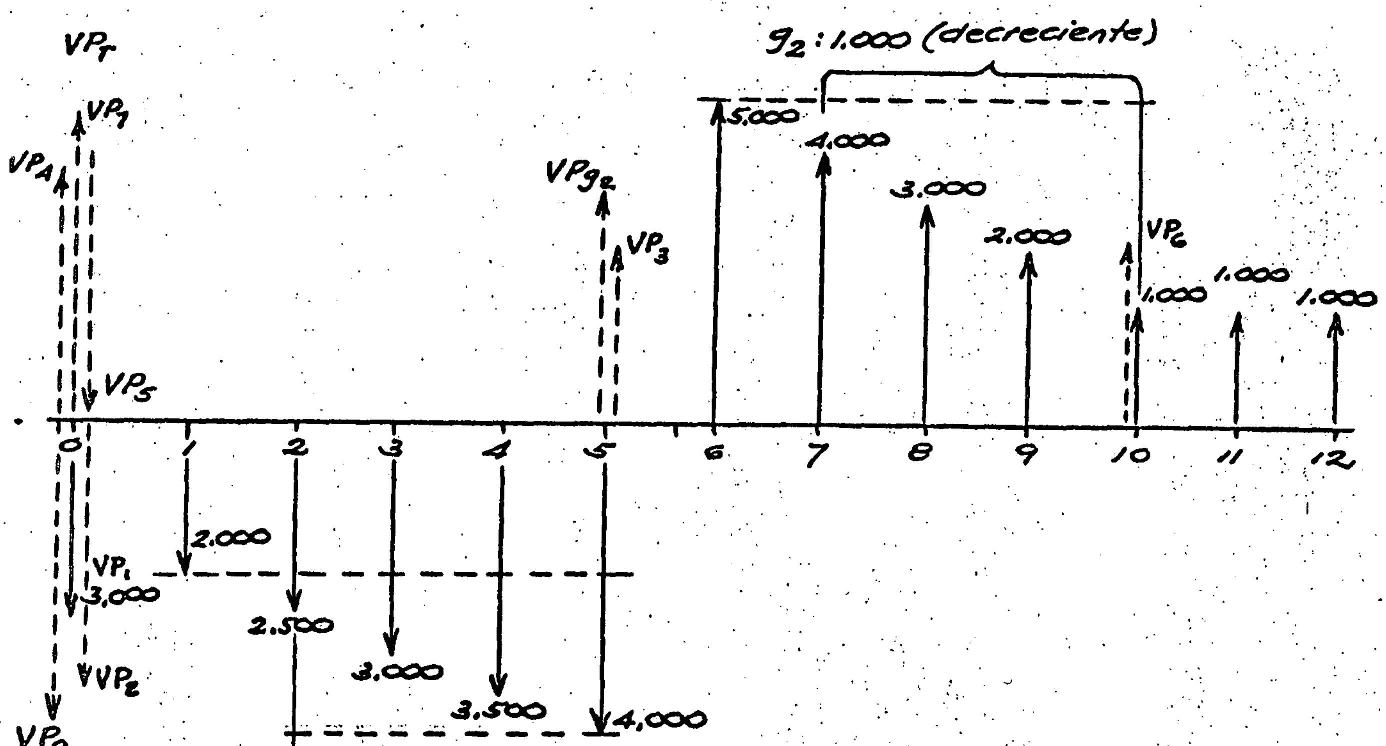
Esta (i efect.) es solo equivalente a cada situación, y esta es la razón por la cual se obtienen diferentes valores de la tasa efectiva equivalente, a partir del comportamiento de una tasa de descuento aplicada realmente en periodos trimestrales, semestrales, anuales, etc...

Ejemplo: Se planea crear un fondo de ahorro, efectuando inversiones durante los primeros 5 años a una tasa del 20% y retiros graduales a partir del año 6 y hasta el año 12, todo de acuerdo al proceso indicado en el diagrama de flujo que a continuación se detalla.

Se quiere calcular: el Valor Presente, el Valor Futuro y el importe de los pagos de una serie uniforme equivalente a la secuela de ahorros y retiros anterior.



Representemos en una forma gráfica más objetiva, tanto la secuela de ahorros y retiros, como la posición de los Valores Presentes parciales que se pueden obtener con la subdivisión del flujo de efectivo:



$VP_1 = 3.000.$ ✓

VP_2 : correspondiente a una serie unif. de ahorros de: ₡2.000.

$$VP_2 = 2{,}000 \cdot (P/A, 20\%, 5) = ₡5.981.$$ ✓

VP_{g_1} : serie de ahorros con gradiente de incremento aritmético (g_1 = ₡500.)

$$VP_{g_1} = 500\ (P/g, 20, 5) = 500 \times 4.906 = ₡2{,}453.$$ ✓

VP_3 : Valor Presente (ubicado en el año 5) correspondiente a una serie uniforme de retiros por: 5,000.

$$VP_3 = 5{,}000 \cdot (P/A, 20, 5) = ₡14.953.$$

VP_4 : Translado de VP_3 a 0 :

$$VP_4 = 14.953. \cdot (P/F, 20, 5) = ₡6.009.$$ ✓

VP_{g_2} : Valor Presente (ubicado en el año 5) correspondiente a una serie con gradiente de decremento aritmético (g_2 = 1,000)

$$VP_{g_2} = 1{,}000\ (P/g, 20, 5) = 1{,}000 \times 4.906 = ₡4{,}906.$$

VP_5 : Traslado de VP_{g_2} a 0:

$$VP_5 = 4{,}906.\ (P/F, 20, 5) = ₡1{,}972.$$ ✓

VP_6 : Valor Presente (ubicado en el año 10) de serie unif. de: 1,000

$$VP_6 = 1{,}000 \cdot (P/A, 20, 2) = ₡1.528.$$

VP_7 : Traslado de VP_6 a 0:

$$VP_7 = 1{,}528\ (P/F, 20, 10) = ₡247.$$ ✓

Determinemos el VP_{TOTAL} dando signo (+) a los depósitos y (−) a los retiros:

$$VP_{TOTAL} = VP_1 + VP_2 + VP_{g_1} - (VP_4 - VP_5) - VP_7$$

$$VP_{TOTAL} = 3{,}000 + 5{,}981. + 2{,}453. - (6{,}009 - 1{,}972) - 247 = ₡7.150.$$

El que el valor de VP_{TOTAL} haya resultado (+) significa que los ahorros depositados, superan a los retiros.

El valor (A) de los pagos de una serie uniforme equivalente, será:

$$A = 7.150 \cdot (A/P, 20, 12) = ₡1.611.$$

lo cual significa que toda la secuela de ahorros y retiros equivale a una serie de ahorros de ₡1.611. depositados al final de cada año, durante 12 años.

La cantidad (F) acumulada al final de los 12 años será:

$$F = 7{,}150\ (F/P, 20, 12) = ₡63.750.$$

que constituye el remanente de la serie de ahorros y retiros.

LA AMORTIZACION DEL CAPITAL Y EL PAGO DE INTERESES

Para el caso de una serie uniforme de pagos (A) aplicados a la recuperación de un capital (P) invertido a una tasa (i) y a (n) periodos y para el cual se desarrolló el factor: (A/P, i, n), hemos visto que el importe constante de cada uno de los pagos (A), se aplica tanto al pago de intereses como a la amortización en sí del capital invertido, siendo mayor lo que se abona a intereses en un pago cualquiera (k esimo) que lo que se abona por el mismo concepto en el pago subsecuente (k+1 esimo); contrariamente a lo que sucede con la cantidad aplicada a la amortización del capital, la cual va siendo creciente en cada pago, a lo largo de la serie de pagos (A).

Se podría demostrar que:

E_k : cantidad abonada a capital en el pago k esimo.

$$\boxed{E_k = A\,(P/F,\ i,\ n-k+1)}$$

I_k : cantidad abonada a intereses en el pago k esimo.

$$\boxed{I_k = A - E_k = A\left[1-(P/F,\ i,\ n-k+1)\right]}$$

Refiriéndonos al ejemplo en el que se siguió paso a paso el proceso de recuperación de un capital de A= \$5,000 invertido a una tasa de 10% durante 5 años, la aplicación de los modelos anteriores, daría los resultados numéricos siguientes, que coinciden con los obtenidos directamente.

$$E_1 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ \underbrace{5}_{5-1+1}) = \$819. \qquad I_1 = 1{,}319.-819. = \$500.$$

$$E_2 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ 4) = \$901. \qquad I_2 = 1{,}319.-901. = \$418.$$

$$E_3 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ 3) = \$991. \qquad I_3 = 1{,}319.-991. = \$328.$$

$$E_4 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ 2) = \$1{,}090. \qquad I_4 = 1{,}319.-1{,}090. = \$229.$$

$$E_5 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ 1) = \$1{,}199. \qquad I_5 = 1{,}319.-1{,}199. = \$120.$$

Ejercicio:

Un individuo compra un terreno de $18,800. y tiene que hacer un pago inicial de $3,760. El saldo: $15,040. deberá pagarlo durante 8 años a una tasa de 10% computada mensualmente.

Las mensualidades serán de:

$$A = P(A/P, i, n) = 15{,}040\,(A/P, \underbrace{0.834}_{10/12}, \underbrace{96}_{8\times 12}) = \$\,228.^{22}$$

El comprador, después de realizar sus pagos durante 2 años, quiere saber cuanto ha capitalizado a esa fecha:

El capital aun no pagado puede determinarse actualizando el valor de los 72 pagos mensuales aun faltantes, con una tasa de 10/12 %:

$$VP = \$\,228.^{22} \cdot (P/A,\ 10/12\,\%,\ 72) = \$\ 12{,}319.$$

por tanto, el capital ya pagado por el comprador a esa fecha, es de:

$$\$\ 15{,}040 - 12{,}319. = \$\ 2{,}721.$$

y su inversión total ya cubierta en el terreno, es de:

$$2{,}721. + 3{,}760 = \$\ 6{,}481.$$

Debe hacerse notar, que del total de pagos que el comprador ha realizado a esa fecha, y que importan:

$$24 \times \$\,228.^{22} = \$\ 5{,}477.^{28}$$

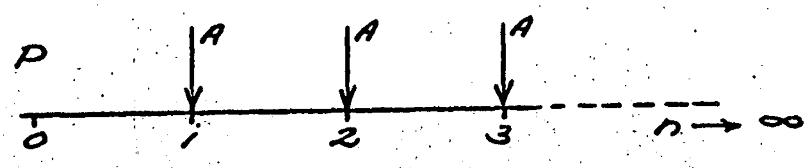
solo $2,721. han sido aplicados a amortización de capital y habiéndose aplicado los $2,756.^28 restantes, al pago de intereses.

Se podría demostrar que aproximadamente, a los 4 años 9 meses, se habrá amortizado del orden de un 50% del capital adeudado.

SERIES PERPETUAS DE PAGOS UNIFORMES Y EL VALOR CAPITALIZADO

Una serie de pagos uniformes que se prolongue indefinidamente, constituye una serie "a perpetuidad".

Es poco frecuente encontrar una serie de este tipo; sin embargo, cuando una inversión se estime tendrá una vida del orden de 50 años, o más, puede ser tratada para efectos prácticos, como una serie infinita.



dado que:

$$A = P \cdot \underbrace{(A/P, i, n)}_{\longrightarrow i}$$
cuando: $n \to \infty$

$$\therefore \quad \boxed{A = P \cdot i}$$

$$P = A \cdot \underbrace{(P/A, i, n)}_{\longrightarrow 1/i}$$
cuando: $n \to \infty$

$$\therefore \quad \boxed{P = A/i}$$

Este valor presente (P) constituye el "valor capitalizado" de una serie de pagos uniformes que se prolongan indefinidamente.

Ejemplo:

¿Que' importe mensual puede retirarse indefinidamente de una cuenta en la que se han invertido \$3'000,000. a una tasa efectiva de 15% neta anual. (después de impuestos) ?

Analicemos primero cual es la tasa real mensual correspondiente a una tasa efectiva de 15% :

$$_{i-12}spcaf - 1 = (1+i)^{12} - 1 = 0.15$$
$$(1+i)^{12} = 1.15$$
$$1+i = (1.15)^{1/12}$$
$$i = (1.15)^{1/12} - 1$$
$$i = 0.011715$$
$$i = 1.1715\ \%$$

otra forma:

$$i' = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$
$$i = \sqrt[12]{\frac{1.15}{1}} - 1$$
$$i = 1.1715\ \%$$

[explicación: necesitamos calcular la tasa real mensual ya que ese es el período en el que se harán los retiros de capital, los cuales desde ese momento no generarán más intereses. Ahora bien, la tasa real mensual no es simplemente: $15/12 = 1.25\%$. ya que aun no retirando ese capital mensualmente sino dejándolo en la cuenta, originaria una tasa efectiva de:

$$_{1.25-12}spcaf - 1 = 16.076\ \%$$

y no del 15% neto que efectivamente se recibe]

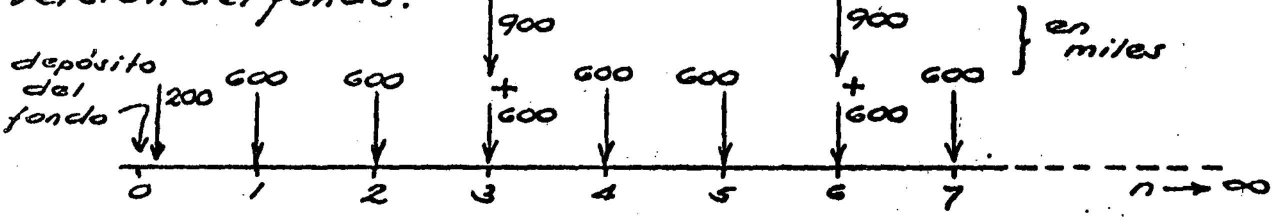
Regresando al problema:

$$A = P \cdot i$$
$$A = \$3'000,000 \times 0.011715$$
$$A = \$35,145.^{00}$$

Ejercicio:

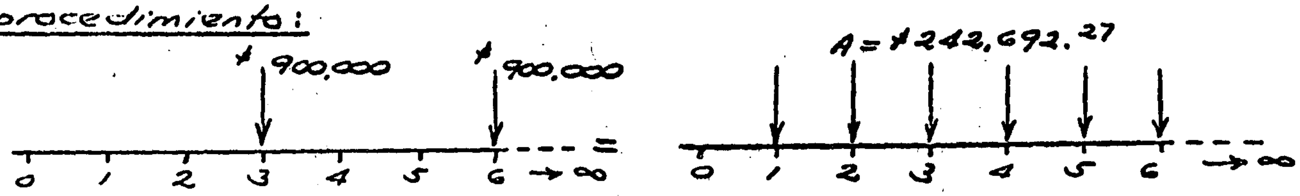
Una Institución filantrópica, decide instituir un premio anual de: ₡ 600,000 más otro de: ₡ 900,000. trianual. Se estima que los gastos iniciales de constitución serán de: ₡ 200,000.

¿Cuál es el fondo que debe depositar inicialmente la Institución o "Valor capitalizado" de la corriente de egresos que implican los premios, si se quiere garantizar la vigencia de los mismos indefinidamente, contando con poder recibir un interes de 22% anual por la inversión del fondo?



Calculemos primero, la parte del fondo que requiere el premio trianual:

1° procedimiento:



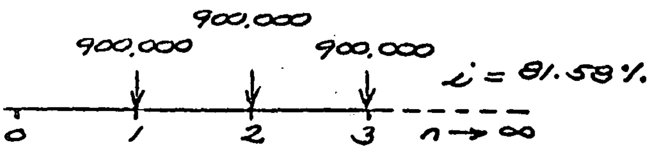
$$A = 900{,}000 \cdot (A/F, 22\%, 3) = ₡\,242{,}692.^{27}$$

$$P = \frac{A}{i} = \frac{242{,}692.^{27}}{0.22} = ₡\,1'103{,}150.$$

2° procedimiento:

Convirtamos cada 3 periodos en uno solo con una tasa de interes correspondiente:

$$\text{spcaf}_{22\%-3} - 1 = 0.8158 = 81.58\%$$



$$\therefore \quad P = \frac{A}{i} = \frac{900{,}000}{0.8158}$$

$$P = ₡\,1'103{,}150.$$

Calculemos el importe total del fondo:

$$P = \underbrace{₡\,200{,}000.}_{\text{gastos constitución}} + \underbrace{₡\,1'103{,}150}_{\text{premio trianual}} + \underbrace{\frac{₡\,600{,}000}{0.22}}_{\text{premio anual.}} = ₡\,4'030{,}422.^{73}$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN

EL CAMPO DE LA INGENIERIA

SIGNIFICADO DEL CONCEPTO:

EQUIVALENCIA ENTRE ALTERNATIVAS

ING. JORGE TERRAZAS Y DE ALLENDE

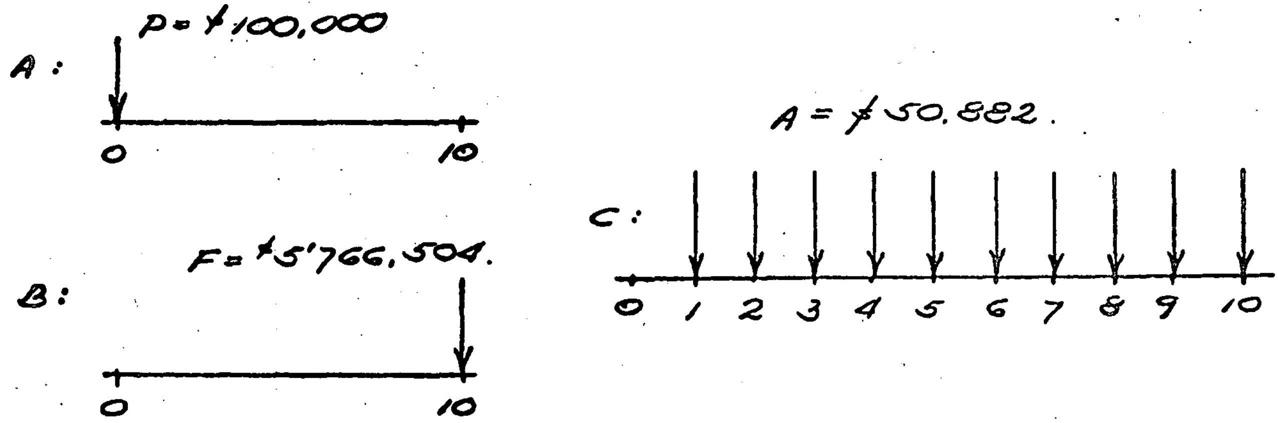
MAYO, 1984

SIGNIFICADO DEL CONCEPTO: Equivalencia entre Alternativas.

Supongamos que en un momento dado, al querer comprar un artículo, se nos presentan las siguientes alternativas para su pago:

- A) Pagar $ 100,000. ahora
- B) Pagar $ 5'766,504. dentro de 10 años
- C) Pagar $ 50,882. al final de cada año, durante los próximos 10 años.

Estas alternativas se representarían en una escala de tiempos, de la siguiente manera:



Lo primero que se nos ocurriría para comparar las alternativas, sería expresar los diferentes flujos de efectivos en una sola cantidad equivalente ubicada en un mismo punto de la escala de tiempos, es decir, en un mismo momento físico, dado que ahora las cantidades que constituyen las distintas formas de pago, están expresadas en distintos puntos del tiempo y por tanto no son comparables debido al principio del "valor del dinero con el tiempo".

Supongamos que decidimos expresar los pagos de cada alternativa mediante una única cantidad equivalente, ubicada en el momento cero, o lo que es lo mismo, vamos a Actualizar o encontrar el Valor Presente del flujo de pagos de cada alternativa; y para lo cual fijamos como la tasa de interés del dinero, nuestra tasa mínima atractiva de recuperación. Supongamos que en el momento actual en que debemos tomar la decisión, dicha tasa la estimamos en un 50% anual, en estas condiciones, tenemos:

- Valor Presente de la alternativa (A):

VP_A = \$ 100,000.

- Valor Presente de la alternativa (B):

VP_B= \$ 5'766,504. (P/F, 50%, 10)
= \$ 5'766,504. x 0.017342 = \$ 100,000.

- Valor presente de la alternativa (C):

VP_C= \$ 50,882. (P/A, 50%, 10)
= \$ 50,882. x 1.9700 = \$ 100,000.

Nos encontramos ahora, con que expresados en un mismo punto del tiempo, especificamente en el punto cero, las 3 alternativas equivalen a \$ 100,000. bajo la tasa mínima atractiva de recuperación de 50%.

Dada esta situación decimos que las 3 alternativas son "equivalentes", lo cual evidentemente no significa que las 3 alternativas sean iguales, sino que solo sus valores en el tiempo son iguales, y esto, a una tasa de interés del 50%.

Nos preguntamos ahora, ¿cuál es en estas circunstancias el criterio para decidir entre una u otra de las alternativas ? Sabemos que varios factores del tipo no-monetario pudiesen ser determinantes para la selección de una alternativa; así por ejemplo, si no tenemos la liquidez suficiente para pagar \$ 100,000. ahora, esto es determinante al menos , para rechazar la alternativa (A) y aceptar alguna de las otras alternativas mediante las cuales se difiere el pago de la deuda. Otros argumentos de este tipo, pudieran ser, riesgo, necesidad de emplear los fondos disponibles en otros fines, imagen ante el acreedor, situación general de los negocios, etc... Pero haciendo abstracción por un momento de los argumentos de tipo no-monetario, (sin que esto implique ni negar su importancia ni dejar de reconocer que en determinadas circunstancias pudiesen ser determinantes), no preguntamos si: ¿ no hay otro argumento económico que nos ayude a decidir sobre una de las 3 alternativas?, ¿nos es indiferente cual de las alternativas se seleccione?.

============================

Antes de tratar de responder en forma directa las preguntas anteriores, analicemos primero dos situaciones alternas.

Supongamos primero, que en lugar de la tasa de 50%, hubiésemos estimado como t.i.m.a.r en el momento de la decisión, una tasa del 75%. Al actualizar las corrientes de egresos y determinar el Valor Presente de cada alternativa, se tendrá:

- Valor Presente de la alternativa (A):
  $VP_A =$ \$ 100,000.
- Valor Presente de la alternativa (B):
  $VP_B =$ \$5'766,504. (P/F, 75%, 10) = \$ 21,406.
- Valor Presente de la alternativa (C):
  $VP_C =$ \$ 50,882 (P/A, 75%, 10) = \$ 67,591.

Observamos que en estas nuevas condiciones, la alternativa (B) Tiene el menor costo equivalente por lo que ahora constituye la alternativa a seleccionar, ya que en términos practicos, significa que nos convendrá mucho más diferir el pago de la deuda por 10 años y pagar al final \$ 5'766,504 e invertir durante el mismo período los \$ 100,000 a una tasa del 75% con lo que obtendriamos una cantidad mucho mayor.

Enfoquémoslo desde otro punto de vista: No seleccionamos (A) sobre (B), puesto que este significaría gastar (⟶ invertir) ahora \$ 100,000 y evitar tener que pagar (⟶ ahorrar ⟶ recibir) \$ 5'766,504. dentro de 10 años, pero visualizada como si fuese una "inversión", esta no nos es atractiva, pues la tasa de recuperación que ofrece, es tan solo del 50% que resulta inferior al límite establecido por la tasa estimada como mínima atractiva de recuperación, que ahora es del 75%, por lo que la alternativa (A) debe ser rechazada.

Si ahora nuestro acreedor nos solicitase el que la deuda fuese pagada ahora, esto solo nos seria atractivo, si el mismo aceptase recibir \$ 21,406. ahora en lugar de los \$ 100,000.

Un razonamiento similar podria aplicarse a la comparación de la alternativa (C) con respecto a la alternativa (B).

==============================

Supongamos ahora, que en lugar de la tasa de 50% estimásemos como t.i.m.a.r en el momento de la decisión, una tasa del 40%. Al actua lizar las corrientes de egresos y determinar el Valor Presente de las alternativas, se obtendría:

- Valor Presente de la alternativa (A):

$$VP_A = \$\ 100{,}000.$$

- Valor Presente de la alternativa (B):

$$VP_B = \$\ 5'766{,}504.\ (P/F,\ 40\%,\ 10) \qquad = \$\ 199{,}357.$$

- Valor Presente de la alternativa (C):

$$VP_C = \$\ 50{,}882.\ (P/A,\ 40\%,\ 10) \qquad = \$\ 122{,}807.$$

La alternativa (A) presenta en estas condiciones, el menor costo equivalente, por lo que constituye la alternativa preferible. (No pagar los \$ 100,000. ahora e invertirlos a una tasa del 40% a 10 años, no nos daria la cantidad suficiente para pagar la deuda de \$ 5'766,504. dentro de 10 años).

==============================

Teniendo como antecedente los resultados de las dos situaciones - anteriores, regresemos a la disyuntiva planteada inicialmente por la "equivalencia " entre las alternativas (A), (B) y (C), al ha-- ber estimado como t.i.m.a.r. una tasa de 50% en el momento de la compra del artículo.

Analizando más a fondo las diferencias entre las alternativas (A) y (B), observamos que:
Seleccionar (A) sobre (B), significaría gastar \$ 100,000. ahora, con lo cual se evitaría (⟶ se ahorraría) gastar \$ 5'766,504. - dentro de 10 años.
Visto como si fuese una inversión:

Elegir (A), equivale a pagar (⟶ invertir) ahora \$ 100,000, y no tener que pagar (⟶ ahorrar ⟶ recibir) \$ 5'766,504. dentro de 10 años.

¿Nos conviene esta inversión propuesta ?, ¿cuál sería la tasa de recuperación de esta inversión?, calculémosla:

$$\$\ 100{,}000.\ (F/P,\ i\ \%\ ,\ 10) = \$\ 5'766{,}504.$$

despejando:

$$(F/P,\ i\ \%\ ,\ 10) = \$\ \ 57{,}665.$$

entando en las tablas, se obtiene que el valor de (i) necesario - para que el factor (F/P) adquiera el valor 57.665 es: i= 50%.

Ahora bien, dado que este valor es igual al de la tasa estipulada como mínima atractiva de recuperación, concluimos que la inversión propuesta, representada por la alternativa (A), debe ser aceptada, por lo que podemos decir que la alternativa (A), es preferible a la alternativa (B), lo cual se expresa:

$$A \succ B$$

Recordemos que por definición, la tasa mínima atractiva de recuperación es aquella tasa mínima ante la cual responderiámos " si " a cualquier propuesta de inversión que la asegurase. Por otro lado, al definir el concepto de tasa mínima atractiva de recuperación, dejamos establecido el que una vez fijada esta, cualquier alternativa que ofrezca una tasa igual o superior a ella, debe ser aceptada y cualquiera que brinde una tasa menor debe ser rechazada; y dado que, en el ejemplo anterior se estimó que la tasa mínima era del 50%, y al analizar la alternativa (A) (enfocada como inversión) sobre la alternativa (B), se determinó que ofrecía una tasa de recuperación igual a dicha tasa mínima del 50%, concluímos que debe aceptarse la inversión propuesta por (A) al ser comparada con la alternativa (B).

De la misma manera, al comparar las alternativas (B) y (C), observamos que:
Seleccionar (C) sobre (B), significa gastar \$ 50,882. al año, durante 10 años para evitar (ahorrar) pagar \$ 5'766,504. al final de esos mismos 10 años, Visto de otra forma: equivale a invertir \$ 50,882. al final de cada año, y recibir (no tener que pagar) \$ 5'766,504. al final de los 10 años. Para calcular la tasa de recuperación que la alternativa (C) ofrece, enfocada como si fuese una inversión cuya recuperación está representada por (B), procederiamos:

$$\$\ 50,882.\ (F/A,\ i\ \%,\ 10) = \$\ 5'766,504.$$

despejado: $(F/A,\ 1\ \%,\ 10) = \$\ 113.33$

de las tablas obtenemos: $i = 50\ \%$

y siendo esta tasa igual a la tasa mínima de recuperación establecida, siguiendo un razonamiento similar al anterior, concluímos -- que la alternativa (C) es preferible a la (B), lo que se expresa:

$$C \succ B$$

Por último, al hacer la comparación entre (A) y (C) observamos que: Seleccionar (A) sobre (C) significa gastar \$ 100,000 ahora y evitar (ahorrar) pagar \$ 50.882 durante los próximos años, lo cual - visto en otra forma, equivale a invertir (pagar) ahora \$ 100,000 y recibir (no tener que pagar) \$ 50.882 al final de cada año, durante los próximos 10 años. La tasa de recuperación que la alternativa (A) ofrece, enfocada como si fuese una inversión cuya recuperación está representada por (C), sería:

$$100,000 \quad (A/P, i\%, 10) = 50.882$$

despejando: $(A/P, i\%, 10) = 0.50882$

de las tablas obtenemos: $i = 50\%$

y siendo esta tasa igual a la tasa mínima de recuperación establecida, mediante un razonamiento análogo al anterior, concluímos que la alternativa (A) es preferible a la alternativa (C), lo cual se expresa:

$$A \succ C$$

Por las tres comparaciones sucesivas anteriores, concluímos finalmente que de entre las alternativas (A) , (B) y (C) propuestas, -- debemos optar por la alternativa (A).

Todo lo anterior demuestra que aún siendo "equivalentes" ciertas alternativas propuestas, no son en si, iguales, sino que solo están ligadas por su valor a través del tiempo y que el hecho de elegir entre ellas, no cae al terreno de la indiferencia, sino que basados en principios y conceptos básicos definidos anteriormente, y sin tomar en consideración otros factores de tipo no-monetario que pudiesen influir, podemos aun en estos casos establecer criterios de juicio que nos permiten seleccionar económicamente alguna de -- ellas.

Hay que hacer notar que las 3 alternativas anteriores se refieren a distintas formas de pago , y el hecho de enfocar cada una de - ellas, como inversiones cuya recuperación es " el no tener que - pagar " en alguna de las otras formas, no constituye sino un mero artificio que en nada altera la concepción real del problema y que en cambio, si nos auxilia en el análisis económico de la - situación para efectos de seleccionar la alternativa que resulte más económica.

TEMA III

APLICACION DE MODELOS MATEMATICOS A LA COMPARACION ECONOMICA DE ALTERNATIVAS

TEMARIO

- Métodos de comparación de alternativas.
- Resolución de Problemas prácticos con aplicación de los modelos matemáticos anteriores,a la comparación económica de alternativas con los criterios del :
  Costo Anual, Valor Presente, y Cálculo de la Tasa de Recuperación.
- Significado e interpretación de resultados de análisis de - alternativas realizados con cada uno de los criterios anteriores.
- Criterios para el análisis de alternativas con periódos de vida económica diferentes.
- Criterio de comparación suponiendo futuros reemplazos.
- Determinación del nivel más económico de inversión.
- La inversión adicional.
- Diferimiento de inversiones.
- Significado relativo de la comparación de alternativas realizada con los diversos criterios.
- El método de Flujo de efectivo para el cálculo de la tasa de un proyecto de inversión propuesto.

METODOS DE COMPARACION ENTRE ALTERNATIVAS.

Vamos a aplicar todo lo anteriormente visto para el análisis de una alternativa, a la comparación entre 2 ó más alternativas.

Expondrêmos los 3 métodos más comunmente empleados en el campo industrial y mediante los cuales resulta muy práctico comparar alternativas de inversión que presenten distintas series de ingresos y egresos a lo largo del horizonte económico de comparación.

Los métodos a que se hace referencia son:

1) Método del costo anual equivalente, con tasa mínima atractiva de recuperación, establecida y aplicada como tasa de interés.

2) Método del valor presente, con tasa mínima atractiva de recuperación establecida y aplicada como tasa de interés.

3) Método de la tasa de recuperación, en donde se calcula directamente la tasa de recuperación probable de cada una de las inversiones propuestas y se comparan con la tasa mínima atractiva de recuperación establecida.

Como demostraremos en el transcurso de este Tema, los diversos criterios y métodos para la comparación económica de alternativas de inversión, son "equivalentes", es decir, que aplicados cada uno de ellos al análisis de todas las posibles alternativas de acción en una situación decisional, conducen al mismo resultado en cuanto a la alternativa que finalmente deba seleccionarse. Sin embargo, la distinta estructura de los modelos matemáticos que cada criterio emplea, asi como las características y diferencias substanciales de procedimiento que cada método sugiere, implican el tener que llevar a cabo en cada caso y para cada criterio, una correcta y adecuada interpretación de los resultados meramente numéricos que se obtengan.

Llegaremos también a la conclusión de que cada método presenta ventajas y desventajas al ser empleado como elemento de juicio en cada caso particular, debido a que en cada método se dá distinto peso a los diferentes factores de costo o ingreso, lo cual origina que para determinados tipos de problemas y circunstancias, los resultados numéricos que se obtengan aplicando un cierto método, resulten más objetivos y faciles de interpretar que los que se pudiesen obtener al aplicar otro método.

Una de las principales diferencias que presentan los métodos de comparación de alternativas mencionadas, radica en el hecho de que por un lado, en los métodos del Costo Anual y del Valor Presente, para las transformaciones que de acuerdo a estos métodos deben hacerse del flujo de efectivo real que cada alternativa de inversión presente dentro de un cierto horizonte económico, se impacta ya, una cierta tasa de recuperación, (normalmente la tasa interna mínima atractiva de recuperación del analista, en el momento del análisis), lo cual implica que al interpretar los resultados numéricos que se obtengan, deberá tomarse en cuenta que dicha tasa ya ha sido incluída como costo propiamente dicho, delcapital a emplear en la inversión propuesta. En cambio, en el método de la Tasa de Recuperación, para cada alternativa de inversión propuesta, se calcula directamente la tasa de recuperación que se espera obtener de la inversión, en función del flujo de ingresos y egresos que dicha alternativa presenta, comparándose dicha tasa esperada con la Tasa interna mínima atractiva de recuperación, procediéndose entonces a calificar la alternativa de inversión analizada como atractiva o no, pero sin olvidar tomar en cuenta también, el factor de riesgo que dicha alternativa implica.

Los criterios del Costo Anual, del Valor Presente y de la Tasa de Recuperación, así como las sistematizaciones derivadas de los mismos y que en este Tema analizaremos, son los especialmente adecuados para el análisis y comparación económica de alternativas de inversión en el campo microeconómico. Existen otros métodos de aplicación de estos criterios, especialmente diseñados para análisis de proyectos de inversión en el campo macroeconómico. Tal es el caso del llamado criterio de la Relación: Beneficio / Costo: (B/C).

Ahora bien, dado que al comparar alternativas lo que nos interesa son sus diferencias relativas y debido al hecho de que en muchos de los problemas que se nos presentan en el campo de la Ingeniería Económica, las diversas alternativas que tomamos en cuenta, son para un mismo fín, es decir, son para resolver un mismo problema, y si aceptamos someterlas a análisis y a comparación, es porque consideramos que en principio, --

cualquiera de ellas nos resolverá el problema, solo que pretendemos seleccionar la que nos resulte más económica, es por esto que normalmente y en términos generales, todas las alternativas que intervienen en la comparación, representan para nosotros el mismo beneficio. Por lo anterior, casi siempre al establecer las diferencias entre ellas, lo hacemos en base a los costos ó egresos en general y en ocasiones, el único ingreso considerado, es el valor de recuperación al final de la vida económica.

Exceptuando el caso anterior, y cuando los ingresos o beneficios monetarios en general, difieran en las alternativas en estudio, en cuanto al momento de su ocurrencia, distribución de montos o en cuanto a su seriación, deben tomarse en cuenta junto con los egresos e incluirse en el flujo de efectivo total; de otra manera el análisis resultaria incompleto y erroneo.

En éstas condiciones, todo análisis económico se inicia con la estimación de los ingresos y egresos totales que cada alternativa implica, tanto en monto como en fecha de ocurrencia (lo que se llama establecer el "flujo de efectivo" o "flujo de caja"). La etapa anterior está íntimamente ligada a la determinación del periódo dentro del cual cada alternativa deba ser estudiada, es decir, su horizonte económico.

Una vez establecidos los elementos anteriores, puede suceder que a primera vista una de las alternativas se muestre obviamente como la más económica, lo cual haga innecesario cualquier análisis posterior.

Ahora bien, rara vez ocurre lo anterior. Normalmente las alternativas presentan flujos de caja tales que muestran costos iniciales relativamente bajos y erogaciones altas a lo largo del horizonte económico, o bien, erogaciones altas iniciales que originan beneficios futuros y reducción de costos futuros. El análisis en estos casos se reduce a investigar si éstas inversiones mayores iniciales se compensan y justifican con los beneficios y ahorros que originan.

METODO DEL COSTO ANUAL (O DEL BENEFICIO ANUAL)

Este método consiste fundamentalmente, en traducir el flujo de efectivo de cada una de las alternativas por comparar, en una serie uniforme anual -- equivalente, lo que permitirá poder comparar, ya homogeneizadas, alternativas que en la realidad, presentan flujos de efectivo totalmente diferentes - entre si.

El "costo o beneficio anual" resultante, es simplemente un modelo de -- costo o beneficio en base a una tasa mínima atractiva de recuperación; es solo la representación de lo que en la realidad estimamos sucederá de seguir - cada una de las alternativas propuestas, solo que transformando los flujos - de efectivo, en series uniformes equivalentes.

El método puede emplearse para comparar las alternativas en base al costo que implican o al beneficio que apartan, razón por la cual, el método tambien se conoce como del "beneficio anual". La alternativa con el costo anual equivalente más bajo o con el beneficio anual equivalente más alto, según el caso. será la que deba seleccionarse.

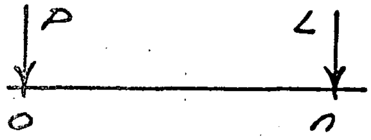
Adoptaremos la siguiente nomenclatura para la aplicación del método:

P:	Monto de la inversión inicial total; costo inicial total del equipo; costo ya instalado y funcionando.
V.R. ó L:	Valor de recuperación del activo al final de un período dado; normalmente al final de su vida económica.
n:	Horizonte económico delanálisis; Vida económica del activo, expresada normalmente en años.
I.U.:	Serie uniforme de Ingresos al final de cada período.
E.U.:	Serie uniforme de Egresos al final de cada período.
CA :	Costo anual uniforme equivalente.
BA :	Beneficio anual uniforme equivalente.

Para la aplicación del método, seguiremos dos criterios :

a) El de la Recuperación del Capital
b) El del Fondo de Amortización.

a) *Criterio del Fondo para la Recuperación del Capital.*



Distribuyendo P y L en anualidades a lo largo de (n) periodos y a una tasa (i) igual a la tasa interna mínima atractiva de recuperación:

$$\boxed{CA = P \cdot {}_{i-n}crf - L \cdot {}_{i-n}sfdf} \quad (1)$$

pero sabemos que: $_{i-n}sfdf = _{i-n}crf - i$

substituyendo en (1): $C.A. = P \cdot _{i-n}crf - L\,(_{i-n}crf - i)$

por tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} C.A. = (P-L)\cdot {}_{i-n}crf + L\cdot i \\ \text{ó} \\ C.A. = (P-L)\cdot (A/P,\, i,\, n) + L\cdot i \end{array}}$$

Los dos sumandos de la expresión anterior representan:

.) la recuperación de la fracción (P-L) con sus intereses correspondientes, más

.) los intereses correspondientes a la porción faltante(L) la cual será recuperada al final.

(Partimos de la base de que la cantidad total a recuperar deberá ser, por un lado, la cantidad total invertida (P), y por otro, los intereses de esa cantidad (P) durante (n) periodos y a una tasa (i); solo que, la cantidad a recuperar mediante los pagos anuales es solo (P-L), ya que la cantidad (L), se espera recuperarla al final de los (n) periodos).

La fórmula anterior es aplicable para valores de cero o negativos de (L), con solo las consideraciones algebraicas correspondientes.

La fórmula(1)puede aplicarse directamente también para encontrar las anualidades uniformes equivalentes, y de hecho, constituye otro criterio para encontrarlas.

b) Criterio del Fondo de Amortización

Partiendo de la fórmula(1), podemos substituir ahora el valor de: crf, sabiendo que:

$$_{i-n}crf = _{i-n}sfdf + i$$

de donde: $C.A. = P \cdot _{i-n}sfdf + P\cdot i - L\cdot _{i-n}sfdf$

finalmente:

$$\boxed{\begin{array}{l} C.A. = (P-L)\, _{i-n}sfdf + P\cdot i \\ \text{ó} \\ C.A. = (P-L)\cdot (A/F,\, i,\, n) + P\cdot i \end{array}}$$

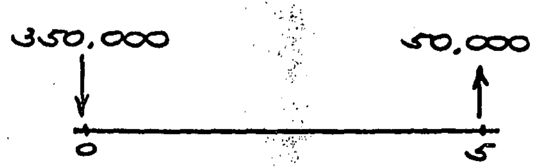
En donde los dos sumandos de la expresión, se pueden interpretar como:

•) el importe anual del fondo de amortización que reintegrará la porción $(P-L)$ del capital sin incluir los intereses.

•) el interes anual de la inversión inicial total (P)

EJEMPLO:

El costo de un equipo ya instalado y funcionando es de: ₡350,000. con un valor estimado de recuperación de: ₡50,000. al final de los 5 años de su vida util. La tasa interna mínima atractiva de recuperación se estima en un 25% anual. Se desea calcular el costo anual equivalente de la inversión propuesta.



a) Con el criterio de la recuperación del capital:

$$C.A. = (P-L)_{i-n}crf + L\cdot i = (P-L)\cdot(A/P,\ i,\ n) + L\cdot i$$
$$C.A. = (350{,}000 - 50{,}000)_{25-5}crf + 50{,}000\ (0.25)$$
$$C.A. = 300{,}000 \times 0.372 + 12{,}500$$
$$C.A. = 111{,}554.02 + 12{,}500 = ₡124{,}054.^{02}$$

b) Con el criterio del fondo de amortización:

$$C.A. = (P-L)_{i-n}sfdf + P\cdot i = (P-L)\cdot(A/F,\ i,\ n) + P\cdot i$$
$$C.A. = (350{,}000 - 50{,}000)_{25-5}sfdf + 350{,}000\ (0.25)$$
$$C.A. = 300{,}000 \times 0.12185 + 87{,}500$$
$$C.A. = 36{,}554.^{02} + 87{,}500 = ₡124{,}054.^{02}$$

Logicamente, en ambos casos el resultado es el mismo, ya que las dos fórmulas provienen de la misma expresión (1). Sin embargo, en cada caso se muestra un distinto concepto en el manejo de los elementos integrantes del costo de la inversión.

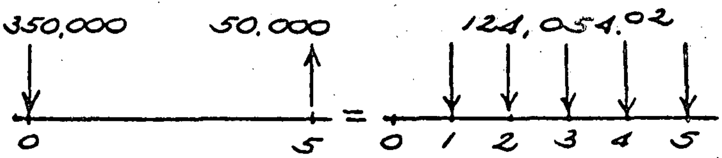
En el primer caso, el comprador abona anualmente:

•) una cantidad de ₡111,554.^{02} para pagar la deuda entera por concepto de la inversión inicial menos lo que espera recuperar al final : ¢50.000, e incluyendo los intereses correspondientes,

- otra cantidad de ¢12.500 para cubrir solamente los intereses de la parte correspondiente al valor de recuperación : ¢50.000 que espera recuperar con la venta del equipo.

En el segundo caso, el comprador paga una cantidad : ¢36,554.^{02} para ir cubriendo anualmente la fracción (P-L), sin intereses, más una segunda cantidad: ¢87.500. que cubre los intereses anuales de la deuda completa.

De los dos criterios anteriores, se concluye que las alternativas son equivalentes :



Resolviendo directamente el problema, mediante la fórmula original (1) se tendría:

$$C.A. = 350{,}000\ (A/P, 25, 5) - 50{,}000\ (A/F, 25, 5)$$

$$C.A. = 350{,}000 \times 0.372 - 50{,}000 \times 0.12185 = ¢\,124{,}054.^{02}$$

Aun habría un cuarto criterio para resolver el problema, consistente en encontrar el Valor Presente de la recuperación (L) multiplicándola por el factor (P/F). La diferencia entre el costo inicial (P) y el valor presente de la recuperación (L) se multiplica por el factor de recuperación del capital (crf ó A/P) para encontrar el valor de los pagos uniformes equivalentes anuales a lo largo de los (n) periodos.

Lo anterior se expresa algebraicamente :

$$C.A. = \left[P - L \cdot {}_{i-n}sppwf \right] \cdot {}_{i-n}crf$$

$$ó : \quad C.A. = \left[P - L\,(P/F, i, n) \right] \cdot (A/P, i, n)$$

Aplicando este criterio a los datos del problema :

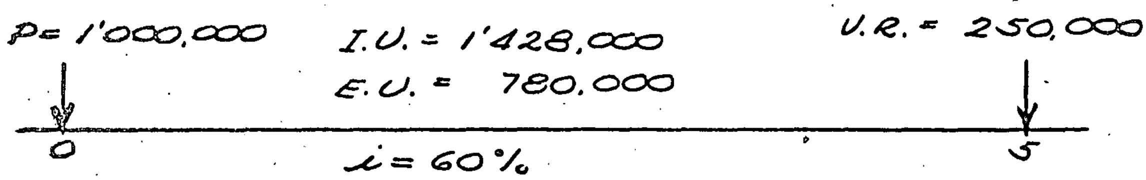
$$C.A. = \left[350{,}000 - 50{,}000\ (P/F, 25, 5) \right] \cdot (A/P, 25, 5)$$

$$C.A. = \left[350{,}000 - 50{,}000 \times 0.3277 \right] \cdot 0.37185$$

$$C.A. = 124{,}054.^{02}$$

Ejemplo:

Un activo representa una inversión inicial total de \$ 1,000.000. - Se le suponen 5 años de vida económica y una recuperación final - de \$ 250,000. La inversión implica una corriente anual de ingre-sos de \$ 1,428,000. y de gastos de \$ 780,000 durante los 5 años. Se desea determinar si el proyecto de inversión se justifica, teniendo en cuenta que la tasa atractiva mínima de recuperación se estima en 60% en el momento de realizar el análisis.



$$B.A. = -1'000,000\ (A/P,\ 60\%,\ 5) - 780,000 + 1'428,000 + 250,000\ (A/F,\ 60\%,\ 5)$$

$$= -663,253 - 780,000 + 1'428,000 + 15,813 = \$560.$$

Empleando otra nomenclatura:

$$BA = -\left[(P-L)\ {}_{i-n}crf + L \cdot i \right] + I.U. - E.U.$$

$$= -\left[(1'000,000 - 250,000)\ {}_{60-5}crf + 250,000 \times (0.60) \right] + 1'428,000 - 780,000 = \$560.$$

Concluimos que la inversión resulta en un beneficio anual de ---- \$ 560., y nos preguntamos si: ¿ con esta cifra, la inversión resulta ser atractiva?; hágase notar que se está buscando el B. A., (Beneficio Anual) por lo que los gastos se consideran con signo - negativo y los ingresos con signo positivo, y dado que el B.A., - resultó ser mayor que 0, esto significa que de esta inversión se pueda esperar un beneficio mayor al 60%. Específicamente puede decirse que la inversión, <u>sí</u> se recupera con una tasa del 60%, <u>más</u> una cantidad adicional de \$ 560. Anuales.

Observemos que en el método del Costo Anual, esta cantidad adicional al 60%, nos es expresada, no en función de un porcentaje, sino de un monto anual uniforme, equivalente a ese porcentaje.

Entonces, mientras el resultado mumérico del Beneficio Anual (B.A) en el problema anterior se mantenga mayor que cero, esto indicará que la inversión nos brinda una tasa de recuperación mayor que el

60% , siendo este excedente tanto mayor como mayor sea el valor de dicho resultado numérico.

Pero más todavía, aún en el caso de que el valor del B.A., resultase igual a cero, la inversión propuesta deberá aceptarse, pues este resultado deberá interpretarse como que la inversión se recupera " exactamente " al 60%, y siendo el 60%, el valor estimado de nuestra tasa interna mínima atractiva de recuperación, la alternativa es aceptable.

Ejemplo:

Una máquina (A) cuesta 10,000 um. ya instalada con un valor de rescate de 4,000 um. al término de 6 años; gastos de operación anual de 5,000 um. durante los 3 primeros años y de 6,000 um. durante los 3 últimos. La máquina (B), cuesta 8,000um. con 3,000 um. de recuperación al cabo de 6 años. Gastos de operación de 5,500 um. durante los 3 primeros años, y de 6,500 um. durante los últimos tres. Los incrementos en los costos de operación, se pueden entender como generados por el incremento en los costos de mantenimiento y reparaciones y por la pérdida de eficiencia motivada por la edad. La tasa mínima atractiva es de 40%.

El problema se puede representar:

alternativa (A):

						VR = 4.000
10,000	5,000	5,000	5.000	6,000	6.000	6.000
0	1	2	3	4	5	6

alternativa (B) $\qquad i = 40\%$

						VR = 3,000
8.000	5.500	5.500	5.500	6.500	6.500	6.500
0	1	2	3	4	5	6

$$CA_A = (10,000-4,000)\,{}_6crf + 4,000\,(0.40) +$$
$$+ [5.000\,{}_3uspwf + 6.000\,{}_3uspwf \cdot {}_3sppwf] \cdot {}_6crf = \$9,636.$$

otra forma:

$$CA_A = 10,000\,(A/P, 40\%, 6) + 5.000\,(P/A, 40\%, 3)\cdot(A/P, 40\%, 6) +$$
$$+ 6.000\,(F/A, 40\%, 3)\cdot(A/F, 40\%, 6) - 4.000\,(A/F, 40\%, 6)$$
$$= \$\,9,636.$$

$$CA_B = [8.000 - 3.000\,(P/F, 40\%, 6) + 5.500\,(P/A, 40\%, 3) +$$
$$+ 6.500\,(P/A, 40\%, 3)\cdot(P/F, 40\%, 3)]\cdot(A/P, 40\%, 6)$$
$$= \$\,9,636.$$

$$\therefore\ CA_A > CA_B \quad \Rightarrow \quad B \succ A$$

Como hemos visto en este ejemplo, en el caso de que las alternativas por comparar presenten corrientes anuales de flujo, irregulares, habrá que convertirlas en una corriente uniforme equivalente, lo cual puede lograrse actualizando la corriente a una fecha dada, y distribuir luego este costo a su costo anual uniforme equivalente.

SIGNIFICADO DE LA COMPARACION DE ALTERNATIVAS MEDIANTE EL CRITERIO DEL COSTO ANUAL.

La comparación de dos alternativas mediante el criterio del Costo Anual, tiene más significado e interpretación que el solo hecho de concluir que una alternativa (A) tiene mayor o menor Costo Anual que una alternativa (B).

Otra mayor significación se refiere a la mayor inversión que una de las alternativas implica respecto a la otra.

Ejemplo:

Un equipo (A) cuesta $ 22,000 ya instalado. Se estima tendrá un costo anual de operación de $ 7,000 durante los 5 años calculados de vida económica. La máquina (B) cuesta $ 17,000 y tiene gastos de $ 10,000. Para ambas máquinas el valor de recuperación se considera nulo. Se fija una tasa mínima de recuperación de 46%.

	0	1	2	3	4	5
A:	22,000	7.000	7.000	7.000	7.000	7.000
B:	17.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

Calculando el Costo Anual:

$$CA_A = 22.000\,(A/P, 46\%, 5) + 7.000 = 11.900 + 7.000 = 18.900$$
$$CA_B = 17.000\,(A/P, 46\%, 5) + 10.000 = 9.200 + 10.000 = 19.200$$

Diferencia a favor de (A) : $ 300. anuales.

Observamos que la diferencia reelevante entre (A) y (B), lo constituye el hecho de que (A) implica una inversión adicional de $ 5,000 inicialmente respecto a (B); pero (A) representa también por otro lado, un ahorro anual de $ 3,000 respecto a (B). De aqui surge la pregunta de si: ¿la inversión adicional de $ 5,000 se justifica teniendo en cuenta que se requiere una tasa del 46%? Dicho de otra manera: ¿ los $ 5,000 de inversión inicial, se alcanzan a recuperar con una tasa de 46% de interes, con los ahorros de $ 3,000 anuales?

Esta situación se representa:

	0	1	2	3	4	5
	inversión inicial adicional	ahorros.				
	5,000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000

$$\underset{\text{(anuales)}}{\text{Ahorro} - \text{Costos}} = 3.000 - 5.000\,(A/P, 46\%, 5)$$
$$= 3.000 - 2.700 = \$\,300.$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente y que significa que la inversión extra inicial en (A) sí se recupera con una tasa de interes del 46% más una suma adicional de $ 300 anuales durante 5 años.

- Supongamos ahora que los gastos anuales de (B) son de $ 9,300 en lugar de $ 10,000.

A: 22.000 E.U. = 7.000
0 — 5

$CA_A = 22.000\,(A/P, 46\%, 5) + 7.000 = 11.900 + 7.000 = 18.900$

B: 17.000 E.U. = 9.300
0 — 5

$CA_B = 17.000\,(A/P, 46\%, 5) + 9.300 = 9.200 + 9.300 = \underline{18.500}$

Diferencia a favor de B: ≠ 400/año

Esto significa que la inversión adicional de $ 5,000 en (A) no se alcanza a recuperar con los ahorros de $ 2,300 anuales: hay un déficit de $ 400 -- anuales durante los 5 años, por lo que dicha sobreinversión no se justifica y por tanto la alterantiva por seleccionar es la (B).

- Consideramos ahora, que los gastos anuales de (B) son de $ 9,700:

A: 22.000 E.U. = 7.000
0 — 5

$CA_A = 22.000\,(A/P, 46\%, 5) + 7.000 = 11.900 + 7.000 = 18.900$

B: 17.000 E.U. = 9.700
0 — 5

$CA_A = 17.000\,(A/P, 46\%, 5) + 9.700 = 9.200 + 9.700 = \underline{18.900}$

Diferencia: 0

En este caso, la inversión extra de $ 5,000 de (A), se recupera exactamente a una tasa de 46% y si hemos considerado que esta es la tasa mínima --- atractiva de recuperación fijada por el inversionista, la sobre-inversión sí - se justifica y por tanto, habrá que seguir la alternativa (A).

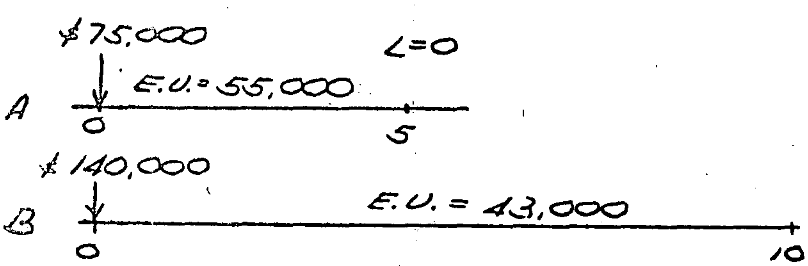
El hecho de que la selección entre dos alternativas se realice desde el punto de vista de la inversión inicial que una de ellas representa, no significa que se esté haciendo un análisis solo parcial del problema, ya que en última instancia, la finalidad es determinar cual de las dos alternativas es más conveniente.

SELECCION ENTRE ALTERNATIVAS DE DISTINTO HORIZONTE ECONOMICO DE COMPARACION

Hasta ahora nos hemos limitado a comparar alternativas de inversión con iguales periodos de análisis. Pero, ¿ que criterio debemos seguir para decidir entre alternativas con distinto horizonte de comparación, o en el caso de activos depreciables, con distinta vida económica ?

Ejemplo:

Se nos presenta el problema de decidir sobre la adquisición entre un equipo A cuyo costo inicial total es de \$ 75,000., 5 años de vida económica y gastos anuales de operación, considerados uniformes, de ---- \$ 55,000., y otro equipo B con \$ 140,000., de inversión inicial, ------ \$ 43,000., de gastos anuales de operación y vida económica de 10 años. En ambos casos, se considera que el valor de recuperación es despreciable. Por otro lado, quien debe decidir, considera que la tasa interna mínima atractiva de recuperación de la empresa en el momento actual, es de 15%



$$CA_A = 75{,}000\,(A/P,\ 15\%,\ 5) + 55{,}000 = \quad \$\ 77{,}374.$$

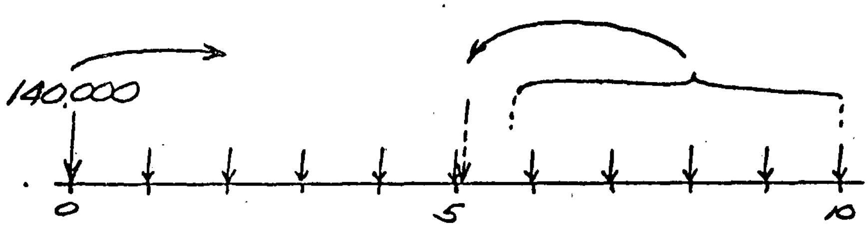
$$CA_B = 140{,}000\,(A/P,\ 15\%,\ 10) + 43{,}000 = \quad \underline{70{,}895}$$

diferencia a favor de B: $ 6.479./anuales.

Si solo consideramos un horizonte de 5 años para ambas alternativas y hacemos caso omiso a la corriente de costos en la alternativa B a partir del 5° año en adelante, existe una diferencia a favor de B, de -- \$ 6,479., anuales.

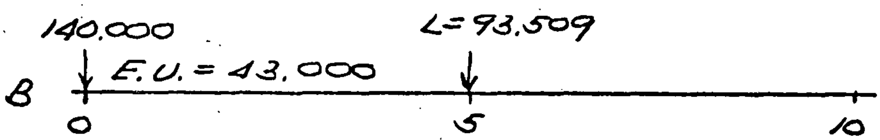
Esto, bajo cierto punto de vista, es correcto, ya que se podría -considerar que lo que ocurra en B después del 5° año, pertenece al Análisis comparativo de alternativas que se vaya a hacer a partir de dicho-periodo, solo quedando la duda de si la decisión actual no sería afectada por la decisión o curso de acción que se siguiese en la alternativa A a partir del 5° año. Analicemos esto más adelante, pero por lo pronto, sigamos ahondando en el primer criterio de despreciar lo que ocurra en B a partir del 5° año.

Podría argumentarse que de la corriente de costos que ocurre en B, la parte que no podemos ignorar, para efectos del análisis de los primeros 5 años, es la parte correspondiente a la amortización de la inversión inicial. Actualizando al año 5, la corriente de costos anuales correspondientes a este concepto, se tendría:



$$140.000\ (A/P,\ 15\%,\ 10)\cdot(P/A,\ 15\%,\ 5) = \text{₡}\ 93.509.$$

Esta cantidad vendría a representar el valor teorico de recuperación que el equipo B tendría al terminar el 5° año, y analizando el costo anual en estas condiciones se tendría:



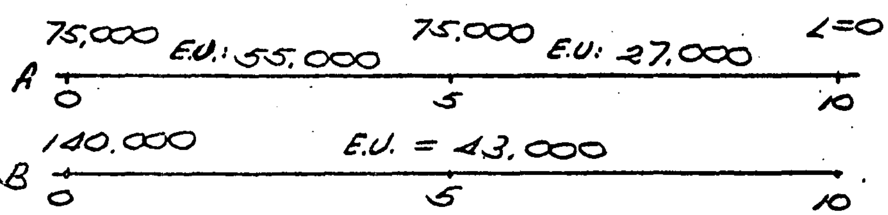
$$CA_B = (140.000 - 93.509)\ (A/P,\ 15\%,\ 5) + 93.509\ (0.15) + 43.000$$
$$= \text{₡}\ 70.895.$$

que es el mismo valor para el costo anual que el obtenido anteriormente. Esto puede explicarse de la siguiente manera:

El hecho de tratar de estimar e introducir en el análisis un valor de recuperación del equipo B al final del 5° año, tiene como finalidad tratar de eliminar los problemas que presenta la existencia de diferentes vidas económicas en las alternativas. Sin embargo, el considerar un valor de rescate al equipo al final del 5° año y por otro lado establecer que la vida económica de la máquina es de 10 años, es incongruente, a menos que el valor de rescate que se considere, sea precisamente el de \$ 93,509. Ahora bien, esto no es tan fácil de aceptar pues por un lado, si hemos supuesto que el período de vida económica es de 10 años para el equipo B, los \$ 70,895., serán el costo anual mínimo (por definición de vida económica), por lo que sería lógico suponer que el costo anual uniforme equivalente en un período menor al de la vida económica, como lo es el de 5 años, fuese mayor de \$ 70,895., lo cual implicaría que el valor de rescate al final del año 5 fuese menor a \$ 93,509. Y por otro lado, si el valor de rescate fuese mayor que \$ 93,509., esto daría lugar a que el costo anual durante los primeros 5 años fuese menor de \$ 70,895., lo que destruiría la proposición inicial de que la vida económica del equipo es de 10 años.

Todo lo anterior es por lo que respecta al equipo B; pero, ¿cómo influirá en la decisión lo que pueda ocurrir en la alternativa A a partir del 5° año?

Supongamos que el análista tiene elementos para preveer que en la alternativa A, al terminar la vida económica del primer equipo, se substituirá al final del 5° año, por un equipo ya mejorado tecnológicamente, con mismo costo inicial de \$ 75,000., 5 años de vida económica, pero solo \$ 27,000., de gastos anuales:



$$CA_A = \left[75{,}000 + 55{,}000\,(P/A, 15\%, 5) + 75{,}000\,(P/F, 15\%, 5) + 27{,}000\,(P/A, 15\%, 5)\,(P/F, 15\%, 5)\right](A/P, 15\%, 10) = \$68{,}075$$

$$CA_B = \qquad = 70{,}895$$

Vemos que el considerar una suposición sobre el reemplazo del primer equipo A, ha provocado que A sea ahora la alternativa óptima.

De todo lo anterior, se podría concluir que:

el criterio de despreciar la corriente de gastos que se origina en la alternativa de mayor vida, a partir de la terminación de la vida económica de la alternativa más corta, solo es válido si:

a) Se estima que en cada alternativa, de haber reemplazos futuros, estos plantearán condiciones totalmente similares a las condiciones del primer ciclo.

b) El periodo total en el que sean necesarios los servicios de las alternativas A y B, se considere indefinido o represente un común múltiplo de las vidas económicas de las alternativas consideradas.

Sin embargo debe reconocerse que este criterio, normalmente se sigue " por defecto", es decir, porque no hay buenas bases para considerar que sucederá lo contrario a lo que establecen las condiciones (a) y (b). En todos aquellos casos en que se prevea que las condiciones van a cambiar en los siguientes ciclos será necesario estimar la corriente de ingresos y egresos correspondiente y tomarla en cuenta para el análisis de las alternativas.

Al respecto de la condición (b), podemos hacer notar que el último ejemplo ilustra el hecho de que una vez que se há llegado, mediante la suposición de futuros reemplazos, a un horizonte económico común múltiplo para ambas alternativas, se puede proceder a la comparación numérica, ya que las decisiones que se tomen de ese periódo en adelante, en cualquiera o en ambas alternativas, serán irrelevantes a la decisión que se tome en el momento presente.

OBSERVACIONES FINALES:

Con todo lo anterior podemos concluir que para la comparación de alternativas con distinta vida económica, se puede proceder:

1º) Seleccionando un "período de estudio" o "período de análisis", igual para ambas alternativas y que consideremos representativo de una situación que suponemos será repetitiva en ciclos subsecuentes. Este período de análisis, normalmente se hará coincidir con el período de vida económica de la alternativa de menor horizonte económico.

2º) Suponer futuros reemplazos en una o en ambas alternativas con el fin de llegar a igualar los horizontes económicos de estudio.

Por lo que respecta a una variante al primer criterio, consistente en estimar un Valor de Recuperación para la alternativa de mayor duración, en una fecha ubicada a la terminación del período de análisis seleccionado, menor a su vida económica, solo se tendrán resultados distintos a los obtenidos con el criterio anterior de calcular el costo anual equivalente sobre su período completo de vida económica, si el Valor de Rescate que se considere, es diferente al que se obtenga de la actualización parcial de la corriente de anualidades correspondientes al período excedente al de análisis; pero claro está, que esto solo podrá hacerse, cuando se cuente con datos que efectivamente nos permitan suponer el que dicho Valor de Recuperación será distinto en esa fecha, basándonos en experiencias previas respecto a precios de mercado, condiciones de oferta y demanda, etc... Lo anterior querría decir que la depreciación de la inversión inicial en dicha alternativa no obedece a un modelo lineal.

Con respecto al segundo criterio, solo se obtendrán resultados diferentes a los obtenidos con el "período representativo de estudio" del primer criterio, si los reemplazos que se supongan, presentan condiciones distintas con respecto a las condiciones planteadas en la alternativa inicial a la cual reemplazar, en lo referente a monto de la inversión inicial, costos de operación y mantenimiento, eficiencia, valor de recuperación, etc..., de tal forma, que ya en el análisis de conjunto, las variantes introducidas por el o los reemplazos, puedan provocar que cambie el sentido de la decisión en cuanto a la alternativa a seleccionar, planteada por el primer criterio.

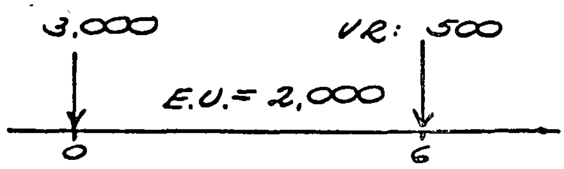
Vuelve a ser claro, que el proceder a suponer estos reemplazos, solo es justificable si realmente contamos con elementos de juicio que nos permitan suponer la estructura de dichos reemplazos y el futuro cambio de condiciones.

Ejemplo

Se requiere comprar un equipo, para lo cual se tienen 2 alternativas:

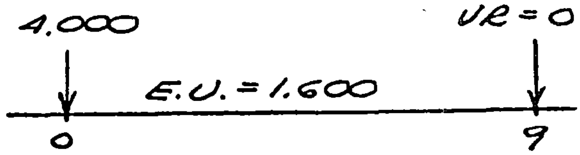
Equipo Tipo I:

costo inicial : 3,000 um.
vida económica : 6. periodos
V.R. : 500 um.
costo anual c.o.m : 2,000 um.



Equipo Tipo II:

costo inicial : 4.000 um.
vida económica : 9 periodos
V.R. : 0
costo anual c.o.m. : 1.600 um.



Tasa interna mínima atractiva considerada: 15% real/perd.

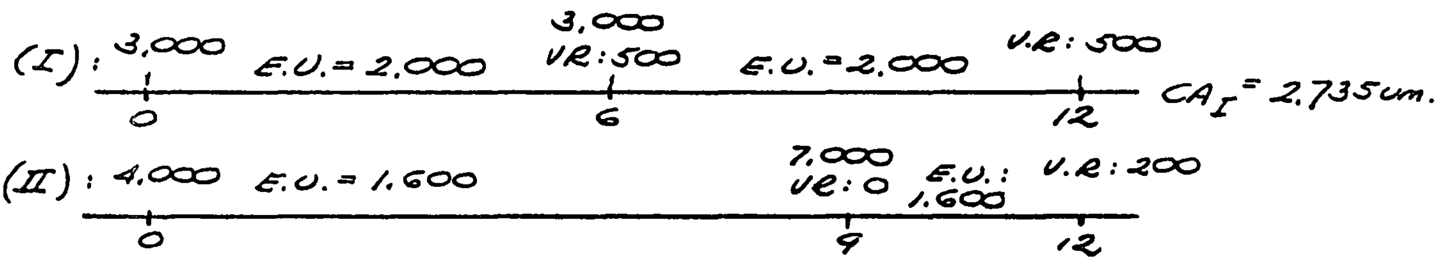
$$CA_I = (3.000-500)(A/P, 15\%, 6) + 500(0.15) + 2.000 = 2.735 \text{ um.}$$
$$CA_{II} = 4.000 \cdot (A/P, 15\%, 9) + 1.600 = 2.440. \text{ um.}$$
$$\therefore CA_{II} < CA_I \Rightarrow II > I.$$

Supongamos ahora que:

1° para la empresa en cuestión, el equipo se requerirá durante 12 periodos.

2° se prevee que mientras para el equipo (I) se podrá hacer un reemplazo a partir del periodo 6 con un equipo similar, para el equipo (II) se estima que el reemplazo se llevará a cabo a partir del periodo 9 con otro cuyo costo se estima en 7.000 um. y que tendrá valor de recuperación después de 3 años de uso, de 200 um.

La situación puede ahora resumirse:



$$CA_{II} = [4.000 + 7.000\,(P/F, 15\%, 9) - 200\,(P/F, 15\%, 12)] \cdot$$
$$\cdot\,(A/P, 15\%, 12) + 1.600$$

$$CA_{II} = 2.650 \text{ um.}$$
$$\therefore CA_{II} < CA_I \Rightarrow II > I$$

Lo que significa que dentro de las nuevas condiciones supuestas, el equipo II, sigue siendo el más conveniente.

DETERMINACION DEL NIVEL MAS ECONOMICO DE INVERSION.

Hay ocasiones en que se nos presentan alternativas "graduadas" de inversión para resolver un mismo problema. Así por ejemplo, imaginemos el caso de que con diversos equipos pudiésemos en principio asegurar un cierto volumen de producción requerido, con calidad similar y dentro de un tiempo especificado, pero presentando cada uno de estos posibles equipos, caracteristicas y condiciones distintas, en cuanto aspectos como el monto de la inversión inicial y las condiciones de pago de dicha inversión, cantidad de obra de mano consumida por unidad producida, grado requerido de especialización para los operarios, costo de las refacciones y de las reparaciones, costo y periodicidad especificada para el mantenimiento adecuado, importe de las primas de seguros, periódo de utilización del equipo, valor de recuperación que se considera poder obtener al final de la vida útil, etc..., diferencias tales, que originan el que no obstante las diversas máquinas propuestas resuelvan el problema desde el punto de vista de producción, desde el punto de vista económico, presentan diferencias substanciales, razón por la cual, es- necesario analizar las posibles alternativas con este enfoque, haciendo intervenir todas sus diferencias relativas tanto del tipo monetario como del no-monetario; ya que sabemos que a fin de cuentas, el criterio económico será el determinante para la selección de una de las alternativas.

El panorama que se presenta en estas circunstancias, se resume en el hecho de que los diversos equipos pueden seleccionarse entre un amplio rango, que va desde aquel que implica alta inversión inicial pero bajos costos de operación, mantenimiento, etc..., y alto valor probable de recuperación, hasta aquel de bajo costo total inicial (incluyendo compra, derechos, transportes, instalación, puesta en marcha, pruebas iniciales, etc..), pero elevados costos anuales equivalentes durante su vida útil y bajo valor de recuperación al final de la misma. La incógnita en cuanto a la alternativa por adoptar, se refleja en preguntas tales como: ¿ cuál es el equipo óptimo desde el punto de vista económico ?, ¿"hasta cuál " de los niveles de inversión representado por los diversos equipos disponibles, debe alcanzarse ?, o enfocado esto mismo de otra manera, y habiendo ya determinada la conveniencia de invertir en uno de los equipos: ¿ se justifica la inversión adicional que implica el equipo del siguiente nivel de inversión?...

Problemas de este tipo, pueden resolverse mediante cualquiera de los métodos de comparación de alternativas, como son: el del Costo Anual, el del Valor Presente y el del cálculo de la Tasa de Recuperación.

Ejemplo:

Se desea analizar la posibilidad de recubrir una red de tuberías de vapor, con material aislante para evitar en lo posible las pérdidas por calor. A medida que se incrementa el espesor del material aislante, la inversión inicial será mayor, pero se lograrán menores pérdidas anuales por pérdida de calor.

dato ↓   ↓ dato.

Tipo de aislamiento (número de espesor)	importe de la inversión inicial.	pérdida estimada anual por pérdidas por calor	Costo Anual unif. equiv. de recuperación del capital.	Costo Total Anual equivalente.
0 (no aislamiento)	0	$ 46,000.	0	$ 46,000.
#1	$ 36,200.	23.000.	$ 14.900.	37.900.
#2	46,300.	15.000.	19.000.	34,000.
#3	61.000.	8,500	25.040.	33.540.
#4	79.400.	6,000	32,600	38.600.
#5	109.600.	5.000	45.000	50,000
#6	146.100.	4,000	60.000	64,000.

La obtención del Costo Total anual indicado en la última columna, se logra tal como se ejemplifica para el caso del aislamiento #1:

36,200   E.U. 23,000   V.R.=0

0 ———————— 5

$$CA. = 36{,}200\ (A/P,\ 30\%,\ 5) + 23{,}000$$

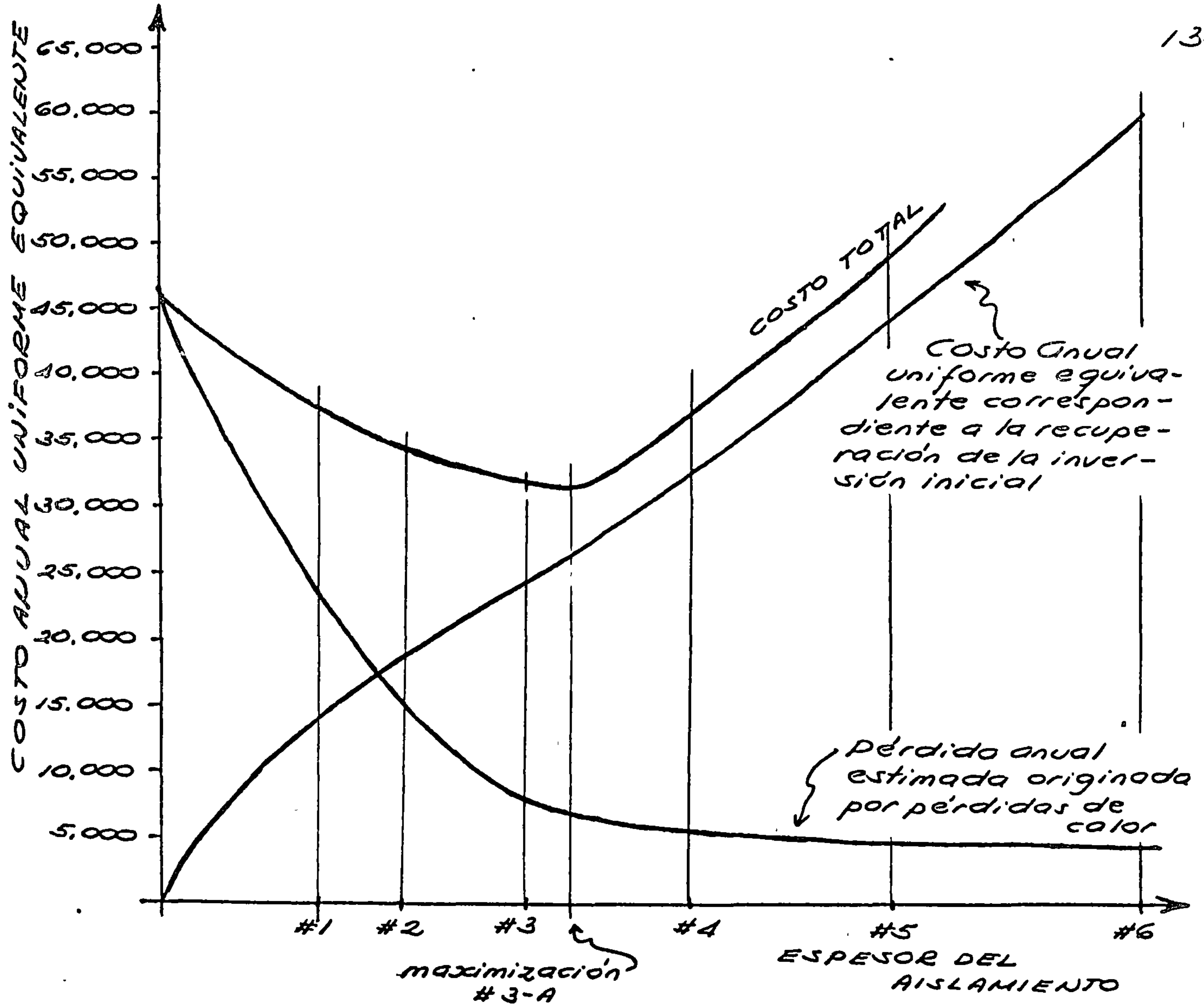
$$CA. = \underbrace{14.900}_{\text{resultado en 4ª columna.}} + \underbrace{23.000}_{\text{dato en 3ª columna.}}$$

$$C.A = 37.900.$$

Los valores estimados de los factores relativos a costos y ahorros se muestran en el cuadro anterior.

Se ha considerado que el recubrimiento tendrá una vida util de 5 años. La tasa mínima atractiva de recuperación se considera de un 30%.

observamos en la tabla,que el Costo Anual uniforme equivalente menor, es el que corresponde al recubrimiento de espesor #3, y notamos que a medida que se aumenta el espesor,(1a. columna), se incrementa el monto de la inversión inicial, (2a. columna), pero decrecen las pérdidas por fuga de calor, (3a. columna), todo lo cual origina que los costos anuales totales (5a. columna), disminuyan hasta un mínimo que corresponde precisamente a la alternativa #3. Sin embargo, a partir de este



Valor mínimo, el Costo Anual equivalente de los subsecuentes niveles de inversión, va aumentando.

El comportamiento de los factores de costo y ahorro anteriores, se muestra en la gráfica anterior.

La razón por la cual los Costos Anuales uniformes equivalentes a los espesores # 4 en adelante, va creciendo, se explica por el hecho de que la inversión total que cada uno de los niveles implica, va siendo cada vez menos atractiva dada la inversión inicial requerida y los beneficios que esta implica en cuanto a los ahorros originados por la menor pérdida de calor. Dicho de otra forma: la inversión adicional que cada uno de los diferentes espesores de aislamiento implica, comparativamente a la alternativa anterior, (esto, a partir del espesor # 3), ya no se justifica, dados los ahorros adicionales que por una menor pérdida de calor origina; al menos, considerando una tasa mínima de recuperación de 30%.

Esto último queda de manifiesto, si la comparación entre las alternativas, se realiza no en base a la inversión total que cada una de ellas implica, sino comparativamente, es decir, analizando la inversión adicional o extra, que cada nivel representa con respecto al nivel anterior y comparando con el ahorro adicional por la disminución en la pérdida de calor, que esta inversión adicional origina.

Resolvamos el problema anterior con este criterio de análisis, tal como se muestra en el cuadro siguiente, y en el cual se observa que la inversión extra de $14,700 que el espesor de # 3 representa comparativamente respecto al # 2, origina ahorros de $6,500 adicionales anuales -- por disminución en las pérdidas por calor. El resultado de $464.00 positivos anuales, significa que esa inversión adicional no solo se recupera con una tasa de 30% anuales durante 5 años, con los ahorros adicionales que origina, sino que de hecho, su tasa de recuperación es mayor que el 30% en una cantidad representada anualmente por un superhabit de $464.00 anuales.- En cambio, la inversión adicional por $18,400.00 que el espesor # 4 implica comparativamente con el espesor # 3, no se alcanza a recuperar con los ahorros de $2,500.00 anuales adicionales que origina, durante 5 años y con una tasa de 30% anual, apareciendo un deficit anual de - $5,055.00 para que esto sucediese.

Tipo de espesor del aislamiento	Inversión Inicial	Inversión Adicional	Costo de recuperación del capital de la inversión adicional.	Pérdida anual por pérdidas de calor	Ahorro anual originado por la inversión adicional	Ahorro neto después de recuperación de la inversión adicional.
—	0	—	—	46.000	—	—
# 1	36.200	dif. 36.200	× (A/P, 30%, 5) = 14,863.	23.000	dif. 23.000	(23,000 - 14.863) = + 8,137
# 2	46.300	dif 10,100	" = 4.147	15,000	dif. 8.000	(8,000 - 4.147) = + 3,853
# 3	61.000	14,700	" = 6,036	8.500	6,500	(6500 - 6,036) = + 464
# 4	79.400	18.400	" = 7.555	6.000	2.500	(2,500 - 7.555) = - 5,055
# 5	109.600	30,200	" = 12,400	5.000	1.000	(1,000 - 12.400) = - 11.400
# 6	146,100	36.500	" = 14.986	4.000	1.000	(1.000 - 14.986) = - 13,986

maximización:

# 3	61.000			8.500		
# 3 - A	65.000	dif. 4.000	× (A/P, 30%, 5) = 1,642	6,858	dif. 1642	(1642 - 1642) = 0

En el cuadro anterior, el primer renglón, correspondiente al espesor 0 (lo que equivale a no usar ningún aislamiento), no presenta valores, ya que se trata de un análisis comparativo, y no existe alternativa anterior a la alternativa de: " no usar aislamientos ".

Ahora bien ¿porqué no optar por la alternativa de espesor # 1 que es la que mayor ahorro neto origina: $8,137.00?.

La respuesta a lo anterior, lo constituye el hecho de que buscamos invertir en todas las alternativas favorables, y todas aquellas que brinden tasas anuales de recuperación de 30% o más, son atractivas, razón por la cual debemos invertir hasta en la alternativa # 3. Recordemos que la pregunta originalmente planteada fué: ¿hasta que nivel de inversión es conveniente invertir?. No invertir en la alternativa # 3, equivale a rechazar una posibilidad de inversión que nos reditua inclusive más del 30%.

El que las inversiones adicionales que implica los aislamientos # 1 y # 2, se recuperen con una tasa aún mayor que la de la inversión adicional de la alternativa de # 3, no implica que ésta última no deba aceptarse.

En este estado de cosas, si quisiéramos optimizar, deberiamos tratar de conseguir un espesor intermedio entre #3 y #4 tal que presentarse el costo menor anual equivalente (de acuerdo con el primer criterio de análisis con base en la inversión total), y que coincidiese con el punto inferior de la curva de Costos Anuales uniformes equivalentes. Este espesor es el que se muestra en la gráfica correspondiente y que corresponde a un espesor # 3-A. Si éste valor óptimo tratáse de calcularse con el criterio de análisis de la inversión adicional, sería el correspondiente a aquel cuyo: " ahorro neto después de recuperar la inversión adicional (a una tasa del 30%), "fuese de cero" lo cual significará que la inversión adicional se recupera exactamente al 30% que es el límite mínimo atractivo de inversión. Este sería el caso de un aislamiento # 3-A de espesor, con costo inicial de $65,000.00 y pérdida anual por calor de ----- $6,858.00 y por tanto con inversión adicional de $4,000.00 y ahorro adicional de $1,642.00, con respecto a la alternativa de #3, lo que cumpliría con lo anterior y representaría la maximización en cuanto a nivel de inversión se refiere.

Hacemos notar que el método del Costo Anual, solo nos muestra cual es el nivel de inversión más económico, y nos indica si una inversión se recupera a una tasa del 30% o mayor, pero sin decirnos especificamente los valores de dichas tasas. Este mismo problema puede resolverse con el método de la Tasa de Recuperación que se aplica tal y como se mostrará más adelante y con el cual sí puede calcularse las tasas de recuperación de cada alternativa de inversión total y las de las inversiones adicionales de cada nivel.

Es de hacerse notar que en este caso y por la naturaleza del problema, la comparación de las alternativas se realizó en base a determinar la del costo total mínimo.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA

A N E X O

ING. JORGE TERRAZAS Y DE ALLENDE

MAYO, 1984

En algún otro porblema, en que se contase no solo con los egresos sino con los ingresos esperados en cada alternativa, el criterio sería la búsqueda de la utilidad máxima.

========================

El método del Costo Anual también es sumamente útil para la determinación del periódo más económico de utilización de un activo depreciable, es decir, de su periódo de Vida Económica.

EJEMPLO:

Un equipo de construcción tiene un precio total de adquisición de \$ 14'000,000. y aceptemos que dado el comportamiento y montos relativos de los costos de operación y mantenimiento que para un equipo de éste tipo se presentan en la realidad durante el transcurso de los años de utilización, se considera prudente ajustar la ---- corriente de dichos costos, a un modelo de serie uniforme con gradiente de incremento geométrico. Supongamos por tanto, que los -- costos por este concepto son: \$ 1'000,000. el primer año y un incremento anual geométrico de : j=80% sobre la cantidad inicial. - Se pide calcular los costos anuales uniformes equivalentes correspondientes a los primeros 9 años de utilización, así como el periódo de Vida Económica del equipo. Se considera como t.i.m.a.r : i=60% y se estima que los Valores de Recuperación al final de cada uno de los 9 años pudieran ser respectivamente: \$ 8'500,000., \$ 6'000,000., \$ 4'000,000., \$ 3'000,000., \$ 1,500,000., -------- \$ 1'000,000., \$ 750,000., \$ 250,000. y \$ 250,000.

Calculo de los Costos Anuales uniformes equivalentes:

1 año: 14.mill. (0); VR: 8.5 mill., 1 mill. (1)

$CA_1 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 1)$	+ 1'000,000.	$- 8'500{,}000\ (A/F, 60\%, 1)$	
$CA_1 =$ 22'400,000	+ 1'000,000.	− 8'500,000	= 14'900,000

ver (A) uniforme correspondientes a la serie geométrica:

2 años: 14.mill. (0); 1.mill. (1); V.R: 6 mill, 1.8 mill. (2)

$CA_2 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 2)$	+ 1'308,000	$- 6'000{,}000\ (A/F, 60\%, 2)$	
$CA_2 =$ 13'785,000	+ 1'308,000	− 2'310,000	= 12'783,000.

3 años: 14 mill. (0); 1. mill. (1); 1.8 mill. (2); VR: 4 mll., 3.24 mll. (3)

$CA_3 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 3)$	+ 1'682,000	$- 4'000{,}000\ (A/F, 60\%, 3)$	
$CA_3 =$ 11'113,000	+ 1'682,000	− 775,000	= 12'020,000.
$CA_4 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 4)$	+ 2'130,000	$- 3'000{,}000\ (A/F, 60\%, 4)$	
$CA_4 =$ 9'913,000.	+ 2'130,000.	− 324,000	= 11'719,000.
$CA_5 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 5)$	+ 2'660,000	$- 1'500{,}000\ (A/F, 60\%, 5)$	
$CA_5 =$ 9'286,000	+ 2'660,000	− 95,000	= 11'847,000.
$CA_6 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 6)$	+ 3'277,000	$- 1'000{,}000\ (A/F, 60\%, 6)$	
$CA_6 =$ 8'932,000	+ 3'277,000	− 38,000.	= 12'171,000
$CA_7 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 7)$	+ 3'991,000	$- 750{,}000\ (A/F, 60\%, 7)$	
$CA_7 =$ 8'725,000	+ 3'991,000	− 17,400	= 12'699,000
$CA_8 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 8)$	+ 4'809,000	$- 250{,}000\ (A/F, 60\%, 8)$	
$CA_8 =$ 8'600,000	+ 4'809,000	− 3,600	= 13'405,000
$CA_9 = 14'000{,}000\ (A/P, 60\%, 9)$	+ 5'743,000	$- 250{,}000\ (A/F, 60\%, 9)$	
$CA_9 =$ 8'524,000	+ 5'743,000	− 2,200	= 14'265,000

Cálculo de las anualidades uniformes equivalentes, correspondientes a la serie geométrica:

$$\begin{cases} j = 80\% = 0.8 \\ i = 60\% = 0.6 \\ A_1 = 1'000{,}000\ ;\ n: 1 \text{ a } 9 \end{cases}$$

1 año:

1. mll

0 1

$$A = 1'000{,}000$$

---

2 años:

$$F = A_1\left[\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i-j}\right] = 1 \times \left[\frac{(1+0.6)^2 - (1+0.8)^2}{0.6-0.8}\right]$$

1.0 1.8 mll.

0 1 2

$$F = 3.4 \text{ mill.}$$

$$A = F\,(A/F, i, n) = 3.4\,(A/F, 60\%, 2) = 1'308{,}000$$

---

3 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^3 - (1.8)^3}{0.6-0.8}\right] = 8.68 \text{ mill.}$$

1.0 1.8 3.24

0 1 2 3

$$A = 8.68\,(A/F, 60\%, 3) = 1'682{,}000$$

---

4 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^4 - (1.8)^4}{0.6-0.8}\right] = 19.718 \text{ mill.}$$

$$A = 19.718\,(A/F, 60\%, 4) = 2'130{,}000$$

---

5 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^5 - (1.8)^5}{0.6-0.8}\right] = 42.048 \text{ mll.}$$

$$A = 42.048\,(A/F, 60\%, 5) = 2'660{,}000$$

---

6 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^6 - (1.8)^6}{0.6-0.8}\right] = 86.175 \text{ mll.}$$

$$A = 86.175\,(A/F, 60\%, 6) = 3'277{,}000$$

---

7 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^7 - (1.8)^7}{0.6-0.8}\right] = 171.892 \text{ mll.}$$

$$A = 171.892\,(A/F, 60\%, 7) = 3'991{,}000$$

---

8 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^8 - (1.8)^8}{0.6-0.8}\right] = 336.250 \text{ mll.}$$

$$A = 336.25\,(A/F, 60\%, 8) = 4'809{,}000$$

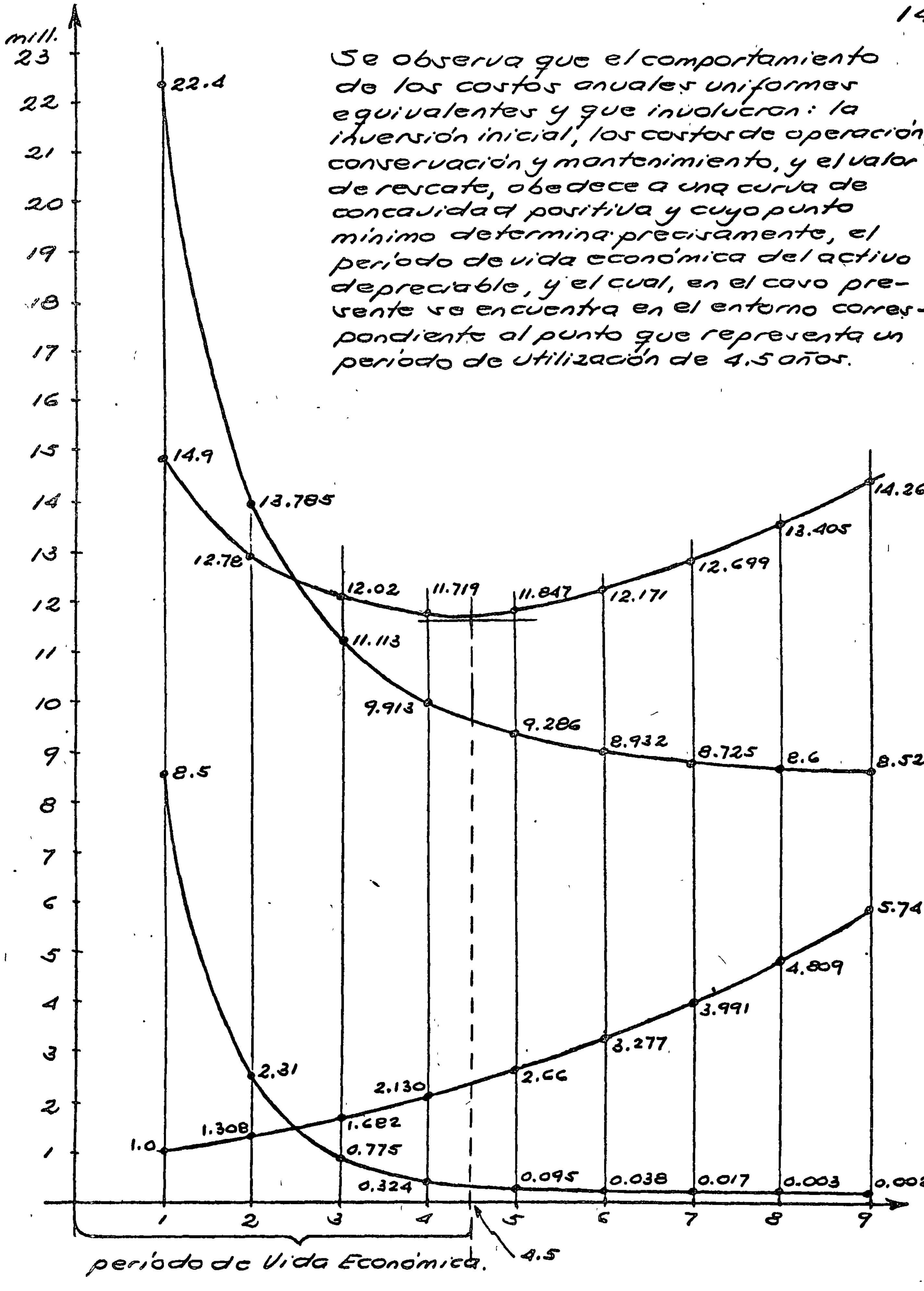
---

9 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^9 - (1.8)^9}{0.6-0.8}\right] = 648.199 \text{ mll.}$$

$$A = 648.199\,(A/F, 60\%, 9) = 5'743{,}000$$

Se observa que el comportamiento de los costos anuales uniformes equivalentes y que involucran: la inversión inicial, los costos de operación, conservación y mantenimiento, y el valor de rescate, obedece a una curva de concavidad positiva y cuyo punto mínimo determina precisamente, el período de vida económica del activo depreciable, y el cual, en el caso presente se encuentra en el entorno correspondiente al punto que representa un período de utilización de 4.5 años.



METODO DEL VALOR PRESENTE.

El método consiste fundamentalmente, en "traducir" los flujos de efectivo o las diferencias futuras entre alternativas, a una sola cantidad equivalente expresada en el momento presente, o en un mismo "punto" de la escala de tiempo.

Lo más frecuente, es que las cantidades que constituyen un flujo de efectivo, se "lleven" al punto cero o momento actual, sin embargo, en ocasiones pudiera ser más conveniente, por representatividad, por facilidad de comparación con otras alternativas, etc..., expresar concentrada la corriente de efectivo en otro punto cualquiera del tiempo distinto del punto cero.

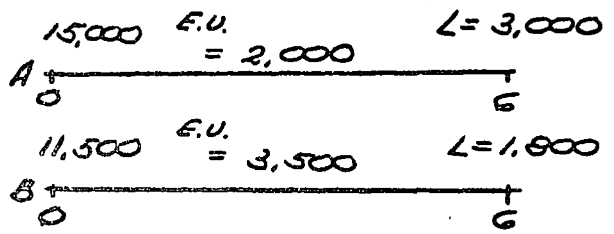
Para indicar que una cantidad ó una serie de ingresos y/o egresos, ha sido expresada en el punto cero, diremos que ha sido " actualizada ".

Es frecuente escuchar que para indicar lo anterior, se emplee el término " descontar ". Así, se dirá que una cantidad o una serie ha sido " descontada " al momento actual, sin embargo nosotros consideramos que el término" actualizar " es más correcto.

Veamos cual es la mecánica y el significado de la comparación de alternativas con el método del Valor Presente:

EJEMPLO:

Consideremos dos alternativas A y B, con los flujos de efectivo que se muestran en sus respectivas escalas de tiempo. Supongamos además, que la tasa mínima atractiva de recuperación se fija en 12 %. ¿ Cuál de las dos alternativas es más conveniente ?



Llevando la corriente de gastos y el valor de recuperación al momento actual (cero), se tiene :

$$VP_{CA} = 15{,}000 - 3{,}000\ (P/F,\ 12\%,\ 6) + 2{,}000\ (P/A,\ 12\%,\ 6)$$
$$= 15{,}000 - 3{,}000 \times 0.50663 + 2{,}000 \times 4.1114$$
$$= 15{,}000 - 1{,}520 + 8{,}223 = \quad \$\,21{,}703.$$

$$VP_{CB} = 11{,}500 - 1{,}800\ (P/F,\ 12\%,\ 6) + 3{,}500\ (P/A,\ 12\%,\ 6)$$
$$= 11{,}500 - 912 + 14{,}390 = \quad \$\ 24{,}978$$

diferencia a favor de A : $3,275.

Ya que actualizamos considerando como positivos los gastos, el Valor Presente que nos es favorable es el de la alternativa A, por representar el Costo actualizado equivalente menor.

El significado del resultado anterior es el hecho de que la sobre-inversión inicial de $ 3,500.00 que la alternativa A implica sobre la B, se justifica plenamente, ya que no solo se recupera a una tasa de 12 % en el período de 6 años con los ahorros de $ 1,500.00 anuales y con un mayor valor de recuperación, por $ 1,200.00, al final del período de servicio analizado, sino que reditúa un 12 %, más un porcentaje adicional correspondiente a una cantidad total expresada en el momento actual, de $ 3,275.

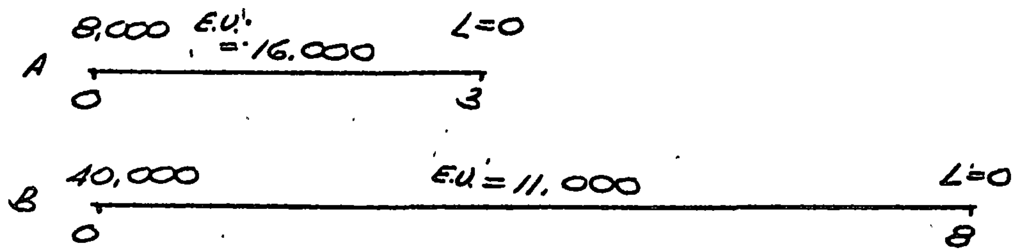
Si la diferencia hubiese sido cero, aún la alternativa más atractiva sería la A, ya que dicho resultado se interpretaría como que la sobre-inversión de A, sobre B, se recupera exactamente con una tasa de intereses del 12 %.

En el caso de que la diferencia hubiese sido negativa, esto significaría que la inversión adicional en A no se alcanzaría a recuperar con una tasa del 12 %, y siendo esta la tasa mínima atractiva de recuperación, la alternativa A sería rechazada y aceptada la B.

El método del Valor Presente puede ser empleado también para la comparación entre alternativas con distintos periodos de vida económica.

EJEMPLO:

Consideremos dos alternativas de selección de equipos cuyas características se indican en las escalas de tiempo correspondientes. Supongamos una tasa mínima atractiva de recuperación de 10 %.



Recordemos que en términos generales, el tratamiento de un problema de éste tipo puede ser abordado con dos criterios:

a) Considerar como horizonte de comparación, el periodo correspondiente a la alternativa más corta, en este caso: 3 años. Dicho de otra forma, despreciar los futuros posibles eventos y sus consecuencias, más allá de los 3 años.

b) Predecir los cursos de acción que puediesen seguirse a partir del 3er. año, a fin de buscar igualar los horizontes económicos en ambas alternativas A y B.

Apliquemos primero el criterio (a). Comparemos las alternativas con el método del Costo Anual y con el del Valor Presente:

Con el método del Costo Anual:

$$CA_A = 8{,}000\ (A/P,\ 10\%,\ 3) + 16{,}000 \qquad = \$\ 19{,}217.$$
$$CA_B = 40{,}000\ (A/P,\ 10\%,\ 8) + 11{,}000 \qquad = \underline{\quad 18{,}498\quad}$$

diferencia a favor de B : $ 719 /año

Con el método del Valor Presente:

$$VP_{cA} = 8{,}000 + 16{,}000\ (P/A,\ 10\%,\ 3) \qquad = 47{,}792$$
$$VP_{cB} = [40{,}000\ (A/P,\ 10\%,\ 8) + 11{,}000] \cdot (P/A,\ 10\%,\ 3) = \underline{\quad 46{,}004.\quad}$$

diferencia a favor de B : $ 1,788 (presente)

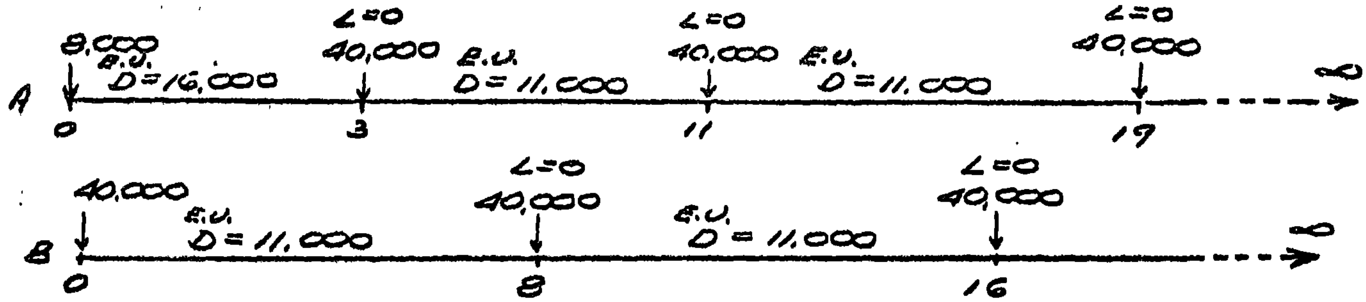
ambos resultados son equivalentes, ya que:

$$1{,}788 = 719\ (P/A;\ 10\%,\ 3)$$

De lo anterior, se desprende que el equipo B es el más económico.

Apliquemos ahora el criterio (b). Recordamos que una primera postura en cuanto a la suposición sobre los reemplazos que pudiesen hacerse a-continuación tanto de A como de B para igualar sus periodos de comparación, sería la de suponer reemplazos futuros idénticos a los originales en cada alternativa, hasta un común múltiplo que en este caso sería de 24 - años. Pero ya vimos anteriormente que esta situación nos conduce al mismo resultado, aún numericamente, que el obtenido al aplicar el criterio - (a).

Consideremos entonces que los reemplazos en cada alternativa, se harán con equipos al menos tan eficientes economicamente, como el más económico disponible actualmente. Dado, que al menos en base al criterio (a), el equipo más económico, resultó ser el B, supongamos una corriente indefinida de reemplazos a partir de A y B, con equipos Tipo B:



Actualizando cada una de las corrientes de costos y recordando que:

$$\underset{i\to\infty}{\underbrace{\text{uspwf}}_{(P/A,\,i,\,n)}} \longrightarrow \frac{1}{i} = \frac{1}{0.10} = 10$$

se tiene:

$$VP_{CA} = 8{,}000 + 16{,}000\,(P/A,\,10\%,\,3) +$$
$$+ \left[40{,}000\,(A/P,\,10\%,\,8) + 11{,}000\right] \times (P/A,\,10\%,\,\infty) \times (P/F,\,10\%,\,3)$$
$$= ¢\ 186{,}746.$$

$$VP_{CB} = \left[40{,}000\,(A/P,\,10\%,\,8) + 11{,}000\right] \times (P/A,\,10\%,\,\infty) = \underline{184{,}976.}$$

diferencia a favor de B : ¢ 1,788.

$$VP_{CB} < VP_{CA} \Rightarrow B \succ A$$

Que es el mismo resultado obtenido con el criterio A, al analizar únicamente los 3 primeros años.

Este resultado pudo haberse previsto, ya que si observamos las corrientes de costos expresados en las escalas de tiempo, notaremos que al reemplazar en el año 3, a A, con una máquina tipo B, a partir del año 3 se establece para ambas alternativas una situación idéntica, pudiendo entonces -- " simplificarse " en ambas alternativas dichos periodos a partir del año 3. Por lo anterior, el suponer reemplazos a partir del año 3, introducirá efectos en la comparación de alternativas y provocará cambio en el resultado obtenido con el criterio (a), solo a medida que el equipo de reemplazo de A, a partir del año 3, sea más eficiente económicamente que al equipo B. Así, un equipo un poco más económico que el B, igualará las alternativas; y un equipo de mayor económia aún, empleado, como reemplazo de A a par tir del 3°. año, dará supremacía a la alternativa A. Esto se explica, por el hecho de la más pronta utilización y aprovechamiento de mejoras tecnológicas en A, a partir del 3°. año.

El método del Valor Presente muestra en determinadas circunstancias, ventajas y desventajas de las alternativas en estudio, en una forma no apreciable en el método del Costo Anual.

Así por ejemplo, en aquéllas situaciones en las que la inversión inicial es predominante sobre el efecto que pudieran tener los costos anuales, de operación por ejemplo, dentro del comportamiento general de un conjunto de alternativas, el método del Valor Presente pone de manifiesto, con todo su " Peso", el efecto de las diferencias en las inversiones iniciales, lo que permitirá por otro lado, poder juzgar sobre la importancia, o no importancia, de dichos costos iniciales.

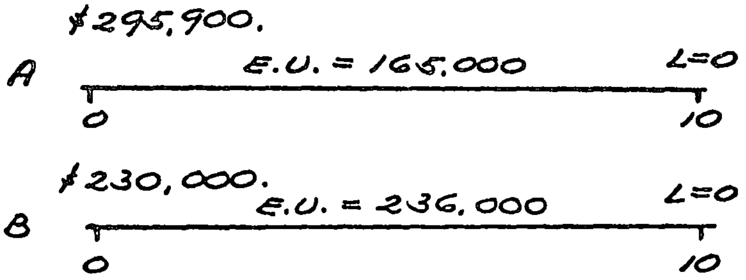
Las características fundamentales del método son: el que las cantidades ubicadas en el momento actual (o en el punto del tiempo en el cual se "actualiza" el flujo de efectivo), se muestran con su valor real, y el que las diferencias entre alternativas puedan expresarse y compararse a través de cantidades (sumas) únicas y expresadas en un solo punto y no por medio de una serie de sumas o cantidades anuales, tal como sucede en el método del Costo Anual, lo que en ocasiones puediese distorsionar la visión de conjunto sobre una situación dada.

EJEMPLO:

Al Gerente de una planta de proceso le son presentadas dos cotizaciones A y

B para la implantación de un sistema que le permitirá elevar su volumen anual de producción. Después de realizar un análisis económico, llega a la conclusión de que la alternativa A es preferible a la B y avisa al agente de ventas del sistema B, que su proposición ha sido descartada, a lo cual este responde estar dispuesto a hacer una rebaja en el precio inicial del sistema que ofrece. ¿ Cuál es el descuento que debe otorgar el agente de ventas de B, de forma tal que su sistema se convierta en la alternativa económicamente más atractiva para el Gerente ?

Las características de los sistemas A y B son las siguientes:



El Gerente estima su tasa mínima atractiva de recuperación en 20%. Dado que lo que es factible de variarse es el precio inicial, conviene analizar el problema con el criterio del Valor Presente:

$$VP_{CA} = 295,900. + 165,000\ (P/A, 20\%, 10) = \$\quad 987,659.$$

$$VP_{CB} = 230,000. + 236,000.\ (P/A, 20\%, 10) = \$\quad 1'219,423$$

$$\text{diferencia a favor de A:}\quad \$\quad 231,764.$$

Lo cual quiere decir que la alternativa A no solo no es \$ 65,900.00 más cara (como podría juzgarse si solo se atendiese al monto de las inversiones iniciales) sino que es \$231,764.00 más barata (esta cifra, expresando la diferencia al momento cero), por lo que, para que el sistema B se convierta en el más atractivo, habrá que avisar al agente de ventas que lo debe implantar totalmente gratis y acompañar su regalo con un cheque por más de $1,764.00, yá que aún con un cheque de $1,764.00 exactamente, la alternativa A, seguirá siendo la más económica por el hecho que la sobre-inversión que representa, con respecto a B, se recuperaría exactamente aún al 20 %, que es la tasa que ha sido fijada como tasa mínima atractiva de recuperación.

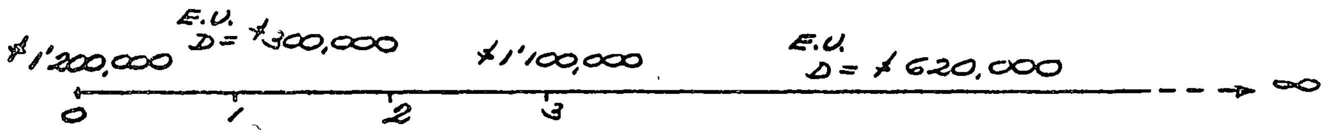
EJEMPLO:

Veamos el caso de una empresa en que se planea el crecimiento y la expansión de la misma, y para decidir sobre la construcción de una ampliación de la planta, se presentan dos alternativas: La primera es llevar a cabo la construcción en dos etapas con diferencia de 3 años entre ellas, y la segunda consiste en construír desde el principio la ampliación completa yá con la capacidad que se espera necesitar dentro de 3 años. Ambas alternativas presentan ventajas y desventajas como son: El costo de la construcción de la planta en dos partes, es más costosa que la construcción en una sola etapa, lo cual es obvio por la duplicación de ciertos trabajos y actividades como supervisión y dirección de la obra, costos indirectos, el tener que efectuar trabajos que en la segunda etapa deban destruírse, etc..., por otro lado, si la ampliación se construye desde el principio con la capacidad total, durante los primeros años funcionará a capacidad sobrada, siendo por tanto, muy ineficiente y por tanto más costosa su operación en esta etapa, pero también es muy probable que si se hace de una sola vez, quede mucho más integrada en su conjunto, de tal manera que su operación, ya en los años futuros, sea más eficiente y por tanto más económica que si se planea y construye en 2 partes.

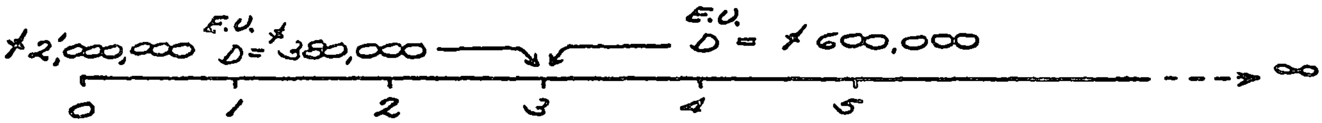
Yá funcionando se supone continuará operando un número indefinido de años

Los resultados de los estudios para una y otra alternativa se le presentan a la empresa de la siguiente manera, yá expresadas en la escala de tiempos:

a) Construcción en dos etapas: diferimiento de la inversión:



a) Construir de una sola vez:



Se considera una tasa mínima atract. de recup. de : 15 %

$$VP_{2\,etapas} = 1'200,000 + 300,000 \; {}_{15-3}uspwf + (1'100,000 + 620,000 \; {}_{15-\infty}uspwf) \times {}_{15-3}sppwf =$$

$$= 1'200,000 + 300,000 \times 2.2832 + \left(1,100,000 + \frac{620,000}{0.15}\right) \times 0.65752 =$$

$$= 1'200,000 + 684,960 + 3'441,021 \qquad = \$\,5'325,981$$

$$VP_{1\,etapa} = 2'000,000 + 380,000 \; {}_{15-3}uspwf + 600,000 \; {}_{15-\infty}uspwf \cdot {}_{15-3}sppwf =$$

$$= 2'000,000 + 380,000 \times 2.2832 + \frac{600,000}{0.15} \times 0.65752 =$$

$$= 2'000,000 + 867,616 + 2'630,080 \qquad = \$\,5'497,696$$

diferencia a favor de la 1a alternativa : $ 171,715

Lo anterior demuestra que la sobre-inversión actual de $800,000.00 que implica el construír en una sola etapa la ampliación de la planta, no se justifica, con los ahorros que origina en cuanto a la construcción total y en cuanto a la operación en los años futuros; esto, al menos, considerando una tasa de interes mínima de 15 %.

Ejemplo:

A un industrial, le es ofrecido un equipo de segunda mano en \$ 950,000. Estima que le costará unos \$ 70,000 el traslado, la instalación y el "hechar a andar" dicho equipo; y que los costos de operación conservación y mantenimiento serian de \$ 1'400,000 anuales, durante los 3 años que considera poder utilizarlo y al fin de los cuales podria venderlo en unos \$ 250,000.

Por otro lado, averigua que una máquina similar, nueva, le cuesta \$ 1'500,000 ya instalada, con costos de operación estimados en \$ 1'000,000. y valor de recuperación al final de los 3 años que la emplearia, de \$ 500,000.

¿Debe aceptar la oferta del equipo usado o debe adquirirlo nuevo? y en todo caso, ¿hasta cuánto podria ofrecer él por el equipo usado?

El industrial estima su tasa interna minima atractiva de recuperación al momento en que debe tomar su decisión, en 55%.

Para calcular el valor límite máximo atractivo (P) al cual le conviene adquirir el equipo usado, procederá de la siguiente manera:

equipo usado: P   E.U. = 1'400,000   V.R: 250,000
0 ———————— 3

equipo nuevo: 1'500,000   E.U. = 1'000,000   VR.: 500,000
0 ———————— 3

$$VP_c \text{ eq. usado} = P + 1'400,000\,(P/A, 55\%, 3) - 250,000\,(P/F, 55\%, 3)$$

$$VP_c \text{ eq. nuevo} = 1'500,000 + 1'000,000\,(P/A, 55\%, 3) - 500,000\,(P/F, 55\%, 3)$$

El valor límite se obtendrá cuando:

$$VP_c \text{ eq. nuevo} - VP_c \text{ eq. usado} = 0$$

o bien:

$$VP_c \text{ eq. nuevo} = VP_c \text{ eq. usado}$$

numericamente:

$$1'500,000 + 1'000,000\,(P/A, 55\%, 3) - 500,000\,(P/F, 55\%, 3) - P - 1'400,000\,(P/A, 55\%, 3) + 250,000\,(P/F, 55\%, 3) = 0$$

$$P = 1'500{,}000 + (1'000{,}000 - 1'400{,}000)(P/A, 55\%, 3) -$$
$$- (500{,}000 - 250{,}000)(P/F, 55\%, 3)$$

$$P = 1'500{,}000 - 400{,}000\,(P/A, 55\%, 3) - 250{,}000\,(P/F, 55\%, 3)$$
$$P = 1'500{,}000 - 531{,}973 - 67{,}713$$
$$P = 900{,}314.$$

que constituye el valor de (P) límite, o el valor de (P) en el punto de equilibrio de la decisión, y dado que el valor propuesto (P) para la compra del equipo usado es:

$$P = 950{,}000 + 70{,}000$$
$$P = 1'020{,}000 > 900{,}314.$$

luego, la compra del equipo usado, no es atractiva en estas condiciones, por lo que deberá procederse a adquirir el equipo nuevo, a menos que, con una contra-oferta, pudiese obtenerse el equipo usado en menos de:

$$\cancel{c}\,830{,}314 \quad (= 900{,}314 - 70{,}000)$$

de tal forma que el costo total de adquisición del equipo, resultase menor de ¢900,314.

El Método del Valor Presente, también permite la determinación del NIVEL DE INVERSION MAS CONVENIENTE en el caso de alternativas mutuamente excluyentes que representen niveles sucesivos o graduales de inversión, tal como el caso del recubrimiento de la tubería analizado con el Método del Costo Anual.

EJEMPLO:

Después de un estudio detallado de los presupuestos respectivos, se concluye que la instalación y operación de un edificio de productos, presenta las alternativas que se señalan en el cuadro siguiente y que implican niveles crecientes de inversión inicial, con el consiguiente incremento en el monto de los gastos totales anuales de operación, conservación, mantenimiento, impuestos, seguros, etc..., por un lado, pero también un aumento gradual del Ingreso Bruto anual esperado y del Valor de Recuperación tanto por el terreno como por el inmueble, al final de un periodo de 12 años, considerado como horizonte económico prudente y realista, dada la naturaleza del negocio, mercado, competencia, ubicación, etc...

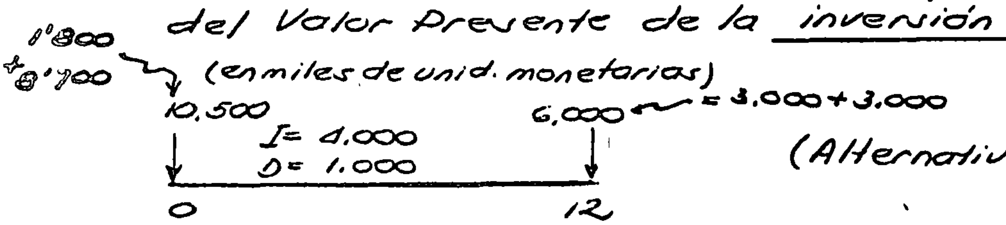
Alt.	INVERSION INICIAL		Ingreso Bruto anual	Gastos operac. anuales	VALOR DE RECUPER.	
	terreno	construcción.			terreno	construcción
T-1	$ 1'800,000	$ 8'700,000	$ 4'000,000	$ 1'000,000	$ 3'000,000	$ 3'000,000
T-2	1'800,000	13'500,000	6'500,000	1'500,000	3'000,000	4'600,000
T-3	1'800,000	21'600,000	8'500,000	2'100,000	3'000,000	7'500,000
T-4	1'800,000	33'000,000	10'250,000	2'850,000	3'000,000	11'000,000

aprox. 33% de la Inver. inicial.

La tasa mínima atractiva de recuperación se considera deba fijarse en un 18%

Comparemos las alternativas propuestas a traves del Valor Presente de la inversión total:

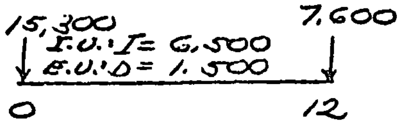
(en miles de unid. monetarias)



(Alternativa: T-1)

$$VP_{T-1} = -10,500 + (4.000 - 1000)\,(P/A, 18, 12) + 6,000\,(P/F, 18, 12)$$

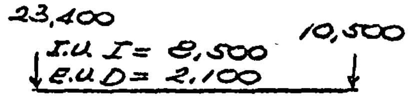
$$V.P_{T-1} = \$\ 4.703.$$



(Alternativa : T-2)

$VP_{T-2} = -15{,}300 + (6{,}500 - 1{,}500)\,(P/A, 18, 12) + 7{,}600\,(P/F, 18, 12) =$

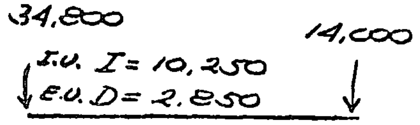
$V.P_{T-2} = \$\ 9{,}709.$



(Alternativa: T-3)

$VP_{T-3} = -23{,}400 + (8{,}500 - 2{,}100)\,(P/A, 18, 12) + 10{,}500\,(P/F, 18, 12)$

$V.P_{T-3} = \$\ 8{,}717.$



(Alternativa : T-4)

$V.P_{T-4} = -34{,}800 + (10{,}250 - 2{,}850)\,(P/A, 18, 12) + 14.000\,(P/F, 18, 12)$

$V.P_{T-4} = \$\ 2{,}591.$

La alternativa más atractiva será la (T-2) que presenta el V.P. más alto (ya que se están comparando las alternativas en función del beneficio neto).

Con el fin de maximizar la utilidad, habría que investigar la posibilidad de una alternativa que representase una inversión mayor que la de (T-2) y cuyo V.P. de las utilidades fuese superior a $ 9.709. buscando el nivel máximo de inversión, antes de iniciar el decenso de los V.P.

El análisis de las alternativas podría también llevarse a cabo mediante los <u>valores adicionales o extra</u>, de inversión inicial, de ingresos anuales, de gastos de operación y valores de recuperación, que cada alternativa representa respecto a la anterior. :

(en miles de unid. monet.)

Alt.	Inv. Inicial	Incem. Inv. Inicial	Ingr. Brutos anuales	Increm. Ingr.	Gastos	Increm. Gastos	V.R.	Increm. en V.R.
T-1	10,500	— dif.	4,000	— dif.	1,000	— dif.	6,000	— dif.
T-2	15,300	4,800 dif.	6.500	2,500	1,500	500	7.600	1,600
T-3	23.400	8.100	8,500	2.000	2,100	600	10,500	2.900
T-4	34,800	11.400	10,250	1.750	2.850	750	14.000	4.500

10,500 6,000
I.U. I = 4,000
E.U. D = 1,000

(Alternativa: T-1)

$VP_{T-1} = \$ 4,703.$

4,800 1,600
I.U. I = 2,500
E.U. D = 500

(Alternativa: T-2)

$$V.P_{T-2} = -4,800 + (2,500-500)(P/A, 18, 12) + 1,600 (P/F, 18, 12)$$

$V.P_{T-2} = \$ 5,006.$

8,100 2,900
I.U. I = 2,000
E.U. D = 600

(Alternativa: T-3)

$$V.P_{T-3} = -8100 + (2,000-600)(P/A, 18, 12) + 2,900 (P/F, 18, 12)$$

$V.P_{T-3} = \$ -772.$

11,400 4,500
I.U. I = 1,750
E.U. D = 750

(Alternativa: T-4)

$$V.P_{T-4} = -11,400 + (1,750-750)(P/A, 18, 12) + 4,500 (P/F, 18, 12)$$

$V.P_{T-4} = \$ -5,989.$

Como ratificación a los resultados obtenidos con el criterio de la inversión total, concluimos que la alternativa más conveniente es la (T-2), ya que la inversión extra o adicional que implica respecto a la (T-1) se recupera con una tasa mayor que el 18%, en tanto que la inversión extra de la (T-3) respecto a la (T-2) no se alcanza a recuperar al 18% y por tanto, no se justifica con el incremento adicional de gastos, ingresos y valor de recuperación, al menos con una t.i.m.a.r. de 18% y dentro de un horizonte económico de 12 años.

Nuevamente la maximización de las utilidades estaría lograda por una alternativa de mayor nivel de inversión que (T-2) y cuyo V.P. en el cuadro anterior, fuese 0, ya que esto significaría que la inversión adicional respecto a (T-2), se recupera exactamente al 18%.

METODO DE LA TASA DE RECUPERACION

Este método de comparación de alternativas, consiste en calcular directamente la tasa de recuperación que se espera obtener de cada una de las alternativas de inversión propuestas, lo que se analiza a partir del flujo de ingresos y de egresos que en cada una de ellas se prevée, y seleccionando aquella que ofrezca la tasa de recuperación más alta, pero teniendo en cuenta la tasa interna mínima atractiva de recuperación de quien debe decidir.

El procedimiento a implementar para lograr lo anterior se basa en el hecho de que, en el proceso de una inversión, los ingresos brutos provenientes de la misma, tienen como finalidad:

a) recuperar todas las erogaciones, costos directos e indirectos, que la inversión implique.

b) proporcionar una recuperación o utilidad.

Ahora bien, al establecer la ecuación:

$$\boxed{\text{Costos} = \text{Ingresos}}$$

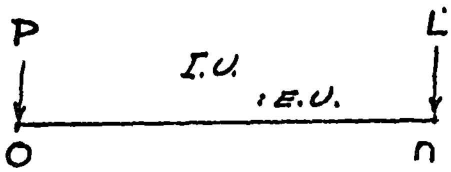
la variable que hace que se verifique la ecuación anterior es precisamente: la tasa de recuperación, o tasa de interes (i), y desde este punto de vista, podemos decir que:

"la tasa de recuperación (i) es el interes que hace que los costos (o erogaciones totales) sean equivalentes a los ingresos"

Dado que una inversión implicará ingresos y egresos, siempre se podrá calcular algún valor de (i), sin embargo, solo si el importe total de los ingresos es mayor que el de los egresos, el valor de esa tasa de interés será mayor que cero.

Claro está que para establecer la ecuación entre costos e ingresos, ambos deberán estar expresados en el mismo "tiempo", lo cual puede lograrse transportando todo el flujo de efectivo al punto 0 por ejemplo, para obtener el Valor Presente, o traduciéndolo a una serie uniforme equivalente.

Así por ejemplo, para el caso general y traduciendo el flujo de efectivo a una serie de anualidades uniforme equivalente:



La ecuación:

Costos = Ingresos

quedaría:

$$P \cdot {}_{i-n}crf + E.U. = I.U. + L \cdot {}_{i-n}sfdf$$

$$P \cdot {}_{i-n}crf - L \cdot {}_{i-n}sfdf + E.U. = I.U.$$

dado que: $${}_{i-n}sfdf = {}_{i-n}crf - i$$

$$\boxed{(P-L)\ {}_{i-n}crf. + L \cdot i + E.U. = I.U.}$$

usando otra notación:

$$\boxed{(P-L)\ (A/P,\ i\%,\ n) + L\,i + E.U. - I.U. = 0}$$

en la cual, la tasa (i) que verifica la ecuación se determina por iteraciones

De igual manera, solo que transportando el flujo de efectivo al punto 0 a fin de igualar Valores Presentes, se llegaría a:

$$\pm P \pm \sum_{j=1}^{n} F\,(P/F,\ i\%,\ j) \pm A\ (P/A,\ i\%,\ n) = 0$$

en donde el signo se aplicará dependiendo de si se trata de una erogación o de un ingreso.

EJEMPLO:

Se propone invertir en un inmueble en cuya compra inicial se requieren: ¢ 450,000, y sobre el cual se espera recibir un ingreso de ¢ 75,000 anuales con erogaciones de ¢ 30,000 durante 10 años, al cabo de los cuales, se calcula se podrá vender en ¢ 200,000. Se pide calcular la tasa de recuperación de la inversión.

$$P = \$400{,}000 \qquad I.U. = 75{,}000/\text{año} \quad E.U. = 30{,}000/\text{año} \qquad L = 200{,}000$$

0 ———————————————— 10

Establezcamos la ecuación:

$$\text{Costos} = \text{Ingresos}$$

de acuerdo con la expresión desarrollada:

$$(P-L)\,{}_{i-n}crf + L\,i + E.U. = I.U.$$

que para los datos anteriores queda:

$$(400{,}000 - 200{,}000)\,{}_{i-10}crf + 200{,}000\,(i) + 30{,}000 = 75{,}000$$

Para determinar el valor de (i), hagamos un primer intento con $i = 0\%$ (lo cual equivale a investigar si los ingresos netos son suficientes para recuperar los costos, sin tener en cuenta el factor: "valor del dinero con el tiempo")

$$200{,}000\,{}_{0-10}crf + 200{,}000\,(0) + 30{,}000 = 75{,}000$$

recordando que: $\underset{i \to 0\%}{crf} \longrightarrow \frac{1}{n}$

entonces: ${}_{0-10}crf \longrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{10} = 0.1$

$$\therefore \qquad 20{,}000 + 30{,}000 \neq 75{,}000$$

$$50{,}000 < 75{,}000$$

restando \$50,000 en ambos miembros de la desigualdad

$$0 < 25{,}000$$

lo que quiere decir que considerando una tasa de interes de 0%, los costos anuales < que los beneficios anuales por una diferencia de \$25,000, lo que significa que a una tasa de 0% la inversión se recupera, más una utilidad adicional de \$25,000 anuales.

Esta diferencia de \$25,000, respecto a la inversión inicial, representa un porcentaje de:

$$400{,}000 \text{ ———— } 100$$
$$25{,}000 \text{ ———— } x$$

$$\therefore \; i \approx \frac{25{,}000}{400{,}000} \times 100 = 6.25\ \%$$

Hagamos un 2° intento considerando: $i = 7\%$

$$200{,}000\ {}_{7\text{-}10}crf + 200{,}000\,(0.07) + 30{,}000 = 75{,}000$$
$$28{,}476 + 14{,}000 + 30{,}000 \neq 75{,}000$$
$$72{,}475 < 75{,}000$$
$$0 < 2{,}524$$

∴ a una tasa de interes del 7%:

$$C.A < B.A \quad \text{por } \$\,2{,}524.$$

Hagamos un 3° intento considerando $i = 8\%$

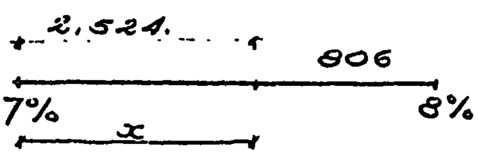
$$200{,}000\ {}_{8\text{-}10}crf + 200{,}000\,(0.08) + 30{,}000 = 75{,}000$$
$$29{,}806 + 16{,}000 + 30{,}000 \neq 75{,}000$$
$$75{,}806 > 75{,}000$$
$$806 > 0$$

∴ a una tasa de interes del 8%

$$CA > BA \quad \text{por } \$\,806.$$

es decir, impactando una tasa de interes de 8% (como costo del dinero con el tiempo), los costos exceden a los ingresos, la inversión no se alcanza a recuperar por $ 806 anuales.

Interpolando:



$$x \;\text{———}\; 2{,}524$$
$$(8-7) \;\text{———}\; (2{,}524 + 806)$$

$$i = 7.0 + x = 7.0 + \frac{2{,}524}{(2{,}524 + 806)}\,(1.0)$$

$$i = 7.0 + 0.76$$

∴ la tasa de interes de la inversión propuesta es de:

$$i = 7.76\%$$

tasa que habrá que comparar con nuestra tasa interna mínima atractiva de recuperación para juzgar finalmente si la inversión propuesta nos es o no atractiva.

Como mero indicador para el 2° tanteo, conviene indicar que:

si $P > L$, i final $> i$ aprox. (obtenida con $i = 0\%$)
si $P = L$, i final $= i$ (obtenida con $i = 0\%$)
si $P < L$, i final $< i$ aprox. (obtenida con $i = 0\%$)

EJEMPLO

Se quiere calcular la tasa de recuperación de la inversión en un predio cuyo costo inicial es de: $425,000, y el cual, se espera produzca al ser rentado: $22,000 anuales netos (ya después de gastos) durante 5 años, al término de los cuales, se considera poder venderlo en: $625,000. Se establece por otro lado, que la "timar" es de 15%.

$P = 425{,}000$ I.U. $I = 22{,}000/\text{año}$ $L = 625{,}000$

0 ——————————— 5

Establezcamos directamente la ecuación:

Costos = Ingresos

$$425{,}000 \; {}_{i-5}crf = 22{,}000 + 625{,}000 \; {}_{i-5}sfdf$$

Para un primer intento con una tasa de interes de 0%, recordemos que:

$$\underset{i\to 0}{{}_{i-n}crf \longrightarrow \frac{1}{n}} \qquad \underset{i\to 0}{{}_{i-n}sfdf \longrightarrow \frac{1}{n}}$$

$$\therefore \quad 425{,}000\,(1/5) = 22{,}000 + 625{,}000\,(1/5)$$
$$85{,}000 < 22{,}000 + 125{,}000$$
$$85{,}000 < 147{,}000$$
$$0 < 62{,}000$$

$\therefore$ considerando $i = 0\%$: C.A. < B.A. por $62,000

Esta diferencia, con respecto a la inversión inicial de $425,000 representa un porcentaje de:

$$425{,}000 \text{ ——— } 100$$
$$62{,}000 \text{ ——— } x$$

$$\therefore \quad i \approx \frac{62{,}000}{425{,}000}(100) = 14.59\%$$

como $P<L$, la tasa final (i) deberá ser menor que la resultante de la primera aproximación.

Hagamos por tanto, un 2° intento considerando: $i = 12\%$

$$425{,}000 \; {}_{12\text{-}5}crf = 22{,}000 + 625{,}000 \; {}_{12\text{-}5}sfdf$$

$$117{,}899 < 22{,}000 + 98{,}381$$
$$117{,}899 < 120{,}381$$
$$0 < 2{,}482$$

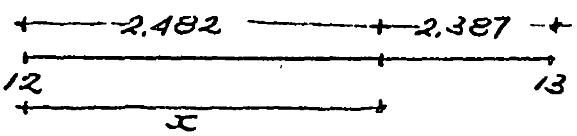
∴ a una tasa de $i = 12\%$: C.A. < B.A. por \$ 2,482.

Hagamos un 3° intento considerando $i = 13\%$

$$425{,}000 \; {}_{13\text{-}5}crf = 22{,}000 + 625{,}000 \; {}_{13\text{-}5}sfdf$$
$$120{,}834 > 22{,}000 + 96{,}447$$
$$120{,}834 > 118{,}447$$
$$2{,}387 > 0$$

∴ a una tasa de $i = 13\%$: C.A. > B.A. por \$ 2,387

Para calcular la tasa de recuperación exacta, procedamos a interpolar:



$$x \text{ ——— } 2{,}482$$
$$(13-12) \text{ ——— } (2{,}482 + 2{,}387)$$

$$i = 12 + x = 12 + \frac{2{,}482}{(2{,}482 + 2{,}387)} (1{,}0)$$

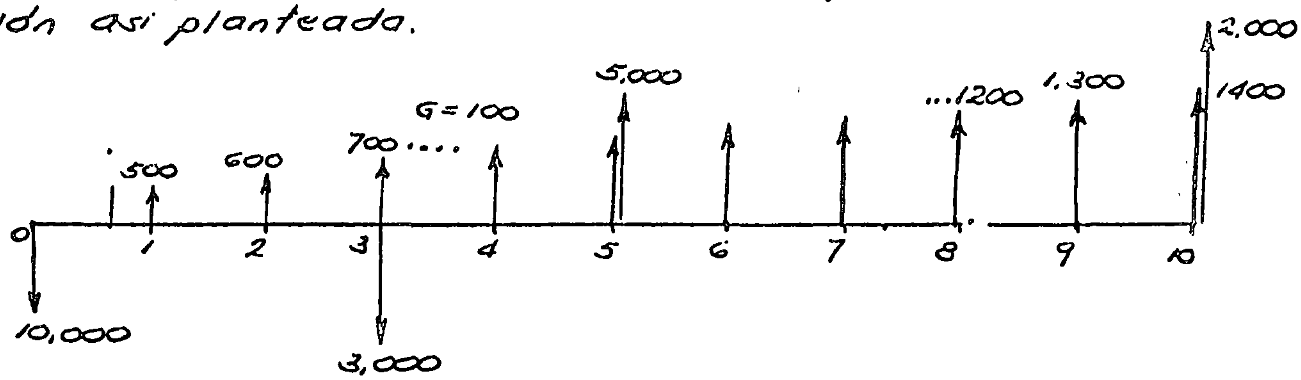
$$i = 12 + 0{,}51$$
$$i = 12{,}51\%$$

Dado que la tasa de recuperación esperada de la inversión propuesta: 12,51% es menor que la tasa interna mínima atractiva de recuperación establecida en 15% (al menos en el momento de tener que tomar la decisión) concluimos que la inversión no nos es atractiva.

EJEMPLO

Se propone una inversión que requiere egresos de: ¢10,000. al inicio y ¢3,000 tres meses después; y se preveen ingresos de: ¢500. al mes primero, ¢600. a los dos meses y así sucesivamente cantidades con incremento de ¢100. mensuales hasta el 10° mes. Se recibirán también cantidades globales adicionales de ¢5,000. en el 5° mes y de ¢2,000 en el 10° mes.

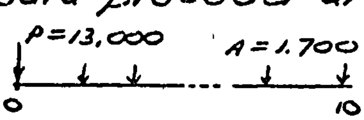
Se pide calcular la tasa de recuperación de la inversión así planteada.



Traduciendo el flujo de efectivo a V.P., dando signo (−) a los egresos y signo (+) a los ingresos e igualando la suma algebraica a 0, se obtiene:

$$0 = -10{,}000 - 3{,}000\ (P/F, i\%, 3) + 5{,}00\ \ (P/A, i\%, 10)$$
$$+ 100\ (P/G, i\%, 10) + 5{,}000\ (P/F, i\%, 5) + 2{,}000\ (P/F, i\%, 10)$$

Hagamos una comparación muy burda entre ingresos y egresos sólo con el fin de tener una primera orientación para proceder al 1° tanteo:



donde $P = 10000 + 3{,}000 = 13{,}000$

y $A = 500 + \underbrace{500}_{\substack{\text{prom:} \\ 10 \times G \div 2}} + \dfrac{(5{,}000 + 2{,}000)}{10}$

$A = 1{,}700$

$$P = A\ (P/A, i\%, 10)$$
$$1{,}3{,}000 = 1{,}700\ (P/A, i\%, 10)$$
$$7.65 = (P/A, i\%, 10)$$

buscando en las tablas se encuentra para la igualdad anterior, un valor de: $i = 5.2\%$

Procedamos a un primer tanteo con: $i = 5\%$

$$0 \neq -10{,}000 - 2{,}591.^{51} + 3{,}860.^{87} + 3.164.^{90} + 3.917.^{63} + 1.227.^{83}$$
$$0 \neq -420.^{28}$$

2° tanteo con $i = 4\%$

$$0 \neq -10{,}000 - 2.666.^{99} + 4.055.^{45} + 3.388.^{10} + 4.109.^{64} + 1.351.^{13}$$
$$0 \neq +237.^{33}$$

Interpolando:

237.33   0 $-420.^{28}$

4%   5%

x

$$237.33 \text{ ——— } x$$
$$(237.33 + 420.^{28}) \text{ ——— } (5-4)$$

$$x = \frac{237.33}{657.61}(1) = 0.36$$

$$\therefore i = 4 + 0.36 = 4.36\ \%$$

como valor de la tasa de interes real mensual

La tasa efectiva correspondiente seria:

$$\text{tasa efectiva} = {}_{4.36-12}\text{spcaf} - 1 = (1 + 0.0436)^{12} - 1$$
$$= 1.67 - 1 = 0.67$$

$$\underline{\underline{\therefore i = 67\%}}$$

Idéntico resultado se obtendria estableciendo la ecuación de costos e ingresos en base a una serie uniforme equivalente, en cuyo caso, la expresión del flujo de efectivo adquiere la forma:

$$0 = -10{,}000\ (A/P, i\%, 10) - 3{,}000\ (P/F, i\%, 3) \cdot (A/P, i\%, 10) +$$
$$+ 500 + 100\ (A/G, i\%, 10) + 5{,}000\ (P/F, i\%, 5) \cdot (A/P, i\%, 10) +$$
$$+ 2.000\ (A/F, i\%, 10)$$

Procediendo a un primer tanteo con $i = 4\%$

$$0 \neq -1{,}232.^{91} - 328.^{82} + 500 + 417.^{70} + 506.^{68} + 166.^{58}$$
$$0 \neq 29.^{23}$$

2° tanteo con $i = 5\%$

$$0 \neq -1{,}295.05 - 335.^{61} + 500 + 409.^{90} + 507.^{35} + 159.^{01}$$
$$0 \neq -54.40$$

interpolando

29.23   0 $54.^{40}$

4%   5%

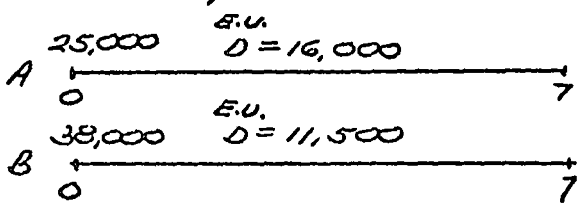
x

se obtiene una tasa real mensual de: $i = 4.36\%$

y una efectiva de: 67%

EJEMPLO

Analicemos dos alternativas de inversión cuya finalidad sea la de reducir costos, en un proceso ya establecido de producción:



La alternativa B implica una sobre-inversión inicial comparativamente más alta con respecto a A de ₡13,000.; pero la cual, se prevee originará ahorros anuales uniformes de ₡ 4,500. Lo anterior implica que se incrementen los ingresos netos anuales durante un horizonte económico de 7 años propuesto, a costa de una inversión adicional inicial de ₡ 13,000.

Dada que no contamos con los datos de la corriente completa de ingresos y egresos que cada alternativa implica a lo largo de 7 años, solo podemos hacer un análisis COMPARATIVO entre A y B, y analizar si se justifica la inversión adicional en B, con los ahorros que origina.

Establezcamos la igualdad entre los costos anuales adicionales y ahorros anuales, para calcular la tasa (i) que verifique dicha ecuación:

$$\overbrace{(38,000-25,000)}^{\text{costo anual adicional}}\ {}_{i-7}crf = \overbrace{16,000-11,500}^{\text{ingreso (ahorro) anual adicional}} \qquad (1)$$

$$13,000\ {}_{i-7}crf = 4.500$$

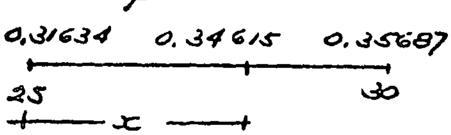
$${}_{i-7}crf = 0.34615$$

en tablas se observa que:

$${}_{25-7}crf = 0.31634$$

$${}_{30-7}crf = 0.35687$$

interpolando:



$$i = 25 + \frac{(0.34615-0.31634)}{(0.35687-0.31634)}(30-25)$$

$$i = 25 + 3.68$$

$$i = 28.68\ \%$$

El valor de : 28.68 % es la tasa de interes que hace a los costos equivalentes a los ingresos en la ecuación anterior. Es la tasa de recuperación de la inversión adicional de los $ 13,000, que se recupera con los ahorros de $ 4,500 anuales que origina durante los 7 años.

Faltaria comparar esta tasa con nuestra tasa interna minima atractiva de recuperación, y suponiendo por ejemplo, que esta fuese en ese momento dado, de un 18 %, calificariamos de inmediato la sobre inversión de $ 13,000 que la alternativa B representa, como muy atractiva.

Debe quedar claro, que este análisis solo determina si la inversión adicional que B implica respecto a A, se justifica ; es decir, sólo provee del criterio que permite elegir entre ambas alternativas.

La tasa de recuperación calculada, es la tasa de recuperación de la inversión extra, pero de ninguna manera de la inversión total, ya que para estimar esta, seria necesario contar con el dato del flujo de ingresos y egresos generales que cada una de las alternativas A y B implica.

Sin embargo, se trata de un problema de reducción de costos en un proceso ya en operación y plenamente justificado económicamente, y la duda por resolver se refiere exclusivamente a la conveniencia o no de llevar a cabo o no la sobre inversión que B requiere.

Ahora bién; la ecuación (1) puede expresarse :

$$38{,}000\ {}_{i-7}crf + 11{,}500 = 25{,}000\ {}_{i-7}crf + 16{,}000$$

de donde resulta que la tasa de recuperación (i) también establece una equivalencia entre los costos anuales.

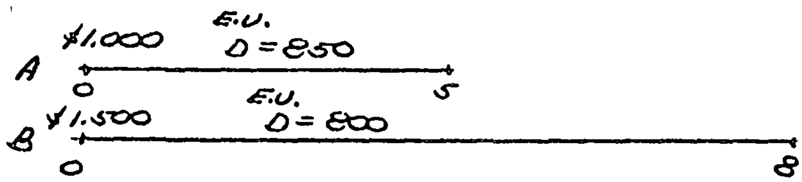
La importancia de lo anterior, radica en el hecho de que en ocasiones, resulta más simple calcular los costos anuales de las alternativas por comparar e igualarlos, que calcular el monto de la inversión adicional y de los ahorros que esta origina, para efectos del cálculo de la tasa de recuperación de la misma.

Esto resulta particularmente util, en la comparación de alternativas con vidas económicas diferentes.

EJEMPLO

Una inversión A requiere un costo inicial de ¢1.000.; costos anuales uniformes equivalentes, de operación, conservación y mantenimiento de ¢850. y se le supone una vida económica de 5 años. Una alternativa B, implica ¢1.500 de costo inicial, costos de operación, conservación y mantenimiento uniformes anuales, de ¢800 y se le considera una vida económica de 8 años. Se estima la tasa interna mínima atractiva de recuperación en un 8%. El valor de recuperación de ambas alternativas al final de sus respectivos periodos, se considera despreciable.

Graficamente, las alternativas anteriores se pueden representar:



Expresando los Costos Anuales uniformes equivalentes de cada alternativa, e igualándolas, se tiene:

$$1.000\,(A/P,\ i\%,\ 5) + 850 = 1.500\,(A/P,\ i\%,\ 8) + 800$$

1ª aproximación: con $i = 0\%$

$$1.000\,(A/P,\ 0\%,\ 5) + 850 = 1.500\,(A/P,\ 0\%,\ 8) + 800$$

recordando que: $\displaystyle {}_{i\text{-}n}crf \xrightarrow[i \to 0]{} \frac{1}{n}$

$$1.000\,(1/5) + 850 \neq 1.500\,(1/8) + 800$$
$$1.050 > 988$$
$$62 > 0$$

$\therefore$ a una tasa de: $i = 0\%$: $CA_A > CA_B$ por ¢62

o sea, que la alternativa de inversión extra, tiene menor C.A. a una tasa del 0%, por lo tanto, hay ventaja de ¢62 anuales si la inversión se considera a 0%.

Expresando esta ventaja como un porcentaje de la inversión adicional inicial de ¢500 que la alternativa B implica:

$$i \doteq \frac{62}{500} \doteq 12.4\%$$

pero: $P > L \;\therefore\; i_{final} > i_{aprox.}$

2ª aproximación: con $i = 15\%$

$$1{,}000\ (A/P,\ 15\%,\ 5) + 850 \neq 1{,}500\ (A/P,\ 15\%,\ 8) + 800$$
$$1{,}148 > 1{,}134$$
$$14 > 0$$

$\therefore$ a una tasa: $i = 15\%$ $CA_A > CA_B$ por ¢14.

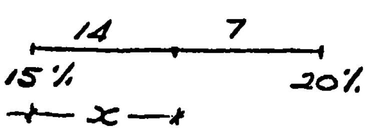
$$i \doteq 15 + \frac{14}{500} \doteq 15 + 2.8 \doteq 17.8\%$$

3ª aproximación: con $i = 20\%$

$$1{,}000\ (A/P,\ 20\%,\ 5) + 850 \neq 1{,}500\ (A/P,\ 20\%,\ 8) + 800$$
$$1{,}184 < 1{,}191$$
$$0 < 7$$

$\therefore$ a una tasa: $i = 20\%$ $CA_A < CA_B$ por ¢7.

Interpolando:



$$x \text{ — } 14$$
$$(20-15) \text{ — } (14+7)$$

$$\therefore\ i = 15 + x = 15 + \frac{14}{14+7}(20-15) = 15 + \frac{14}{21} \cdot 5 = 18.3\%$$

y dado que el valor de esta tasa de recuperación correspondiente a la inversión extra de ¢500, es mayor que la tasa mínima atractiva de recuperación estimada en un 8% en el momento de la toma de decisión, se justifica invertir en la alternativa B.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA

COMPLEMENTO

ING. JORGE TERRAZAS Y DE ALLENDE

MAYO, 1984

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

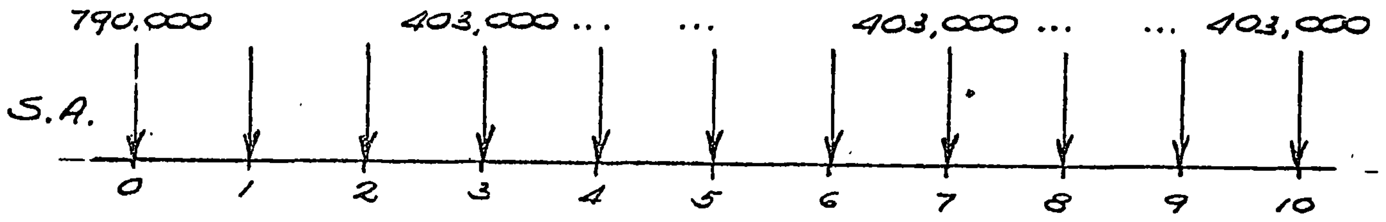
EJEMPLO:

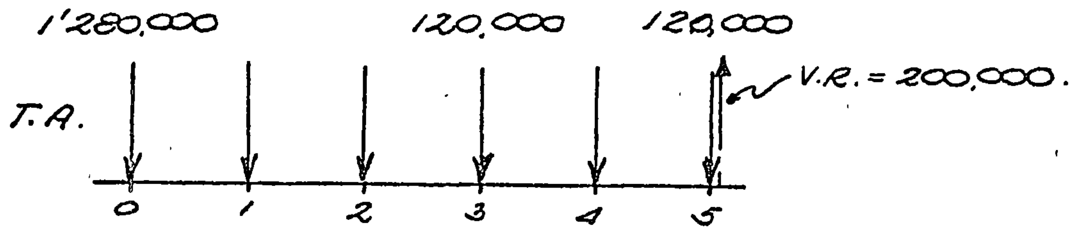
A un fabricante se le presentan 2 alternativas en cuanto a la adquisición de una maquinaria que le es necesaria dentro de su planta de elaboración de productos.
Los 2 posibles modelos a elegir entre los cuales ha llegado a la conclusión debe decidir, presentar las siguientes características:

	Semiautomática	totalmente Automática.
Inversión Total inicial	\$ 790,000.	\$ 1'280,000.
Gastos estimados anuales (considerados uniformes)	\$ 403,000.	\$ 120,000.
Valor esperado de Recuperación	0	\$ 200,000.
Vida de servicio considerada (en años)	10	5

Determinar cual es la alternativa que más le conviene, si estima en el momento de decidir, que su Tasa interna mínima atractiva de recuperación es de un 70%.

En las condiciones anteriores, el diagrama de flujo de efectivo para cada una de las alternativas anteriores sería:





1o. Criterio de Análisis:

Analizando las alternativas con el método del Costo Anual y considerando que no contamos con mayores elementos de juicio para suponer un reemplazo de la alternativa (T.A.)a partir del 5o. año, que introdujese cambios considerables en esta alternativa en dos periodos conjuntos de 10 años en total, de acuerdo con lo establecido anteriormente, procederiamos:

$$CA_{S.A.} = 790{,}000.\ (A/P,\ 70\%,\ 10) + 403{,}000. \qquad = \quad 958{,}757.$$

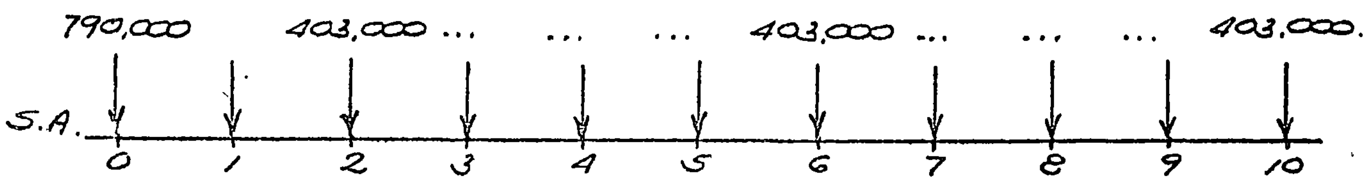
$$CA_{T.A.} = (1'280{,}000 - 200{,}000)\ (A/P,\ 70\%, 5) + 200{,}000\ (0.70) + 120{,}000 \qquad = 1'073{,}279.$$

$$CA_{S.A.} < CA_{T.A.} \Rightarrow S.A. \succ T.A.$$

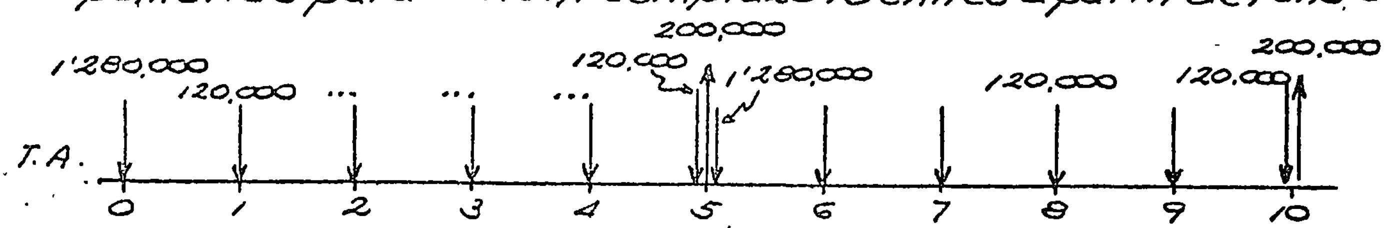
Lo que se interpreta en el sentido de que la sobre-inversión inicial que la maquinaria Totalmente Automática implica respecto a la Semi Automática,no se justifica con los ahorros que origina, al menos bajo un t.i.m.a.r. de 70%.

2o. Criterio de Análisis:

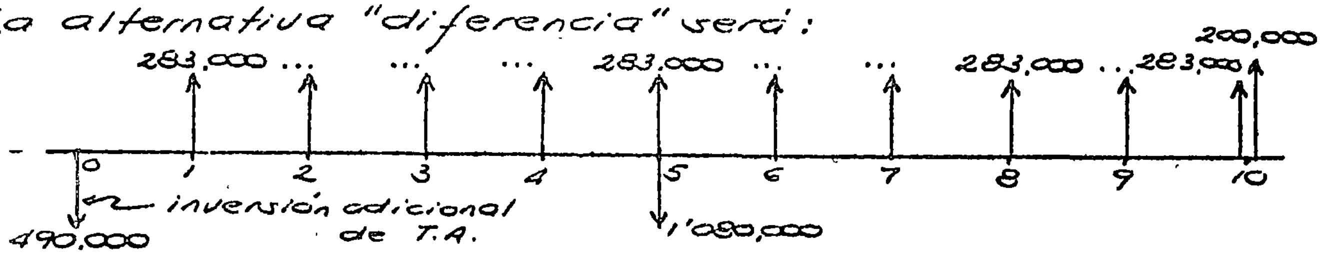
Comparemos ahora las alternativas con el método de la Tasa de Recuperación, procediendo de la siguiente manera:



Suponiendo para T.A. un reemplazo idéntico a partir del año 5°:



La alternativa "diferencia" será:



La tasa de recuperación de la inversión adicional, que la máquina (T.A.) implica respecto a la máquina (S.A.), puede calcularse llevando la corriente de inversiones y ahorros anterior, a valor presente:

$$-490{,}000 + 283{,}000\ (P/A,\ i\ \%,\ 10) - 1'080{,}000\ (P/F,\ i\ \%, 5) + \\ + 200{,}000\ (P/F,\ i\ \%,\ 10) = 0$$

y mediante iteraciones e interpolación, se puede determinar que la tasa que verifica la ecuación es :

$$i = 39.9\ \%$$

3o. Criterio de Análisis:

Idéntico resultado se alcanzaria igualando las expresiones de los Costos Anuales de las dos alternativas:

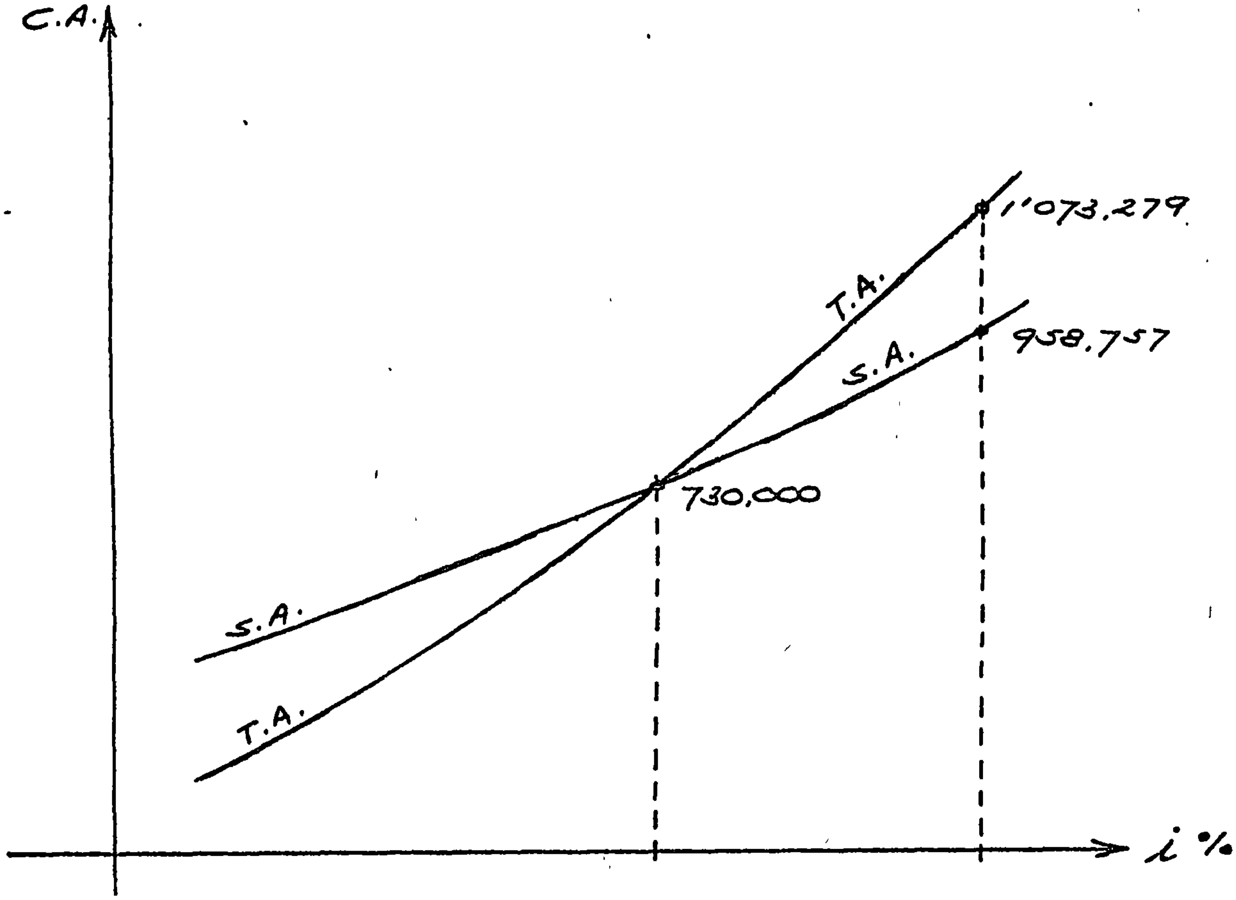
$$790{,}000\ (A/P,\ i\ \%, 10) + 403{,}000. = 1'280{,}000 (A/P,\ i\ \%,\ 5) + \\ + 120{,}000 - 200{,}000\ (A/F,\ i\%,\ 5)$$

resolviendo la ecuación anterior por iteraciones se obtendría:

$$i = 39.9\ \%$$

Ahora bién, dado que la tasa resultante de recuperación de la in-- versión adicional inicial es menor que la tasa mínima estipulada, la máquina de menor inversión inicial, la semi-automática, es la - que deba ser comprada, Si la tasa resultante hubiese sido igual al 70% o mayor, si hubiese optado por la máquina totalmente automatizada.

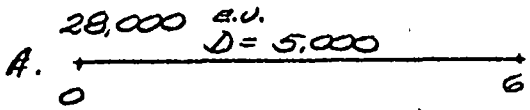
La tasa de 39.9% obtenida, puede visualizarse como el valor del " punto de equilibrio " o tasa de equilibrio de (i). Para ilustrar lo anterior, grafiquemos el Costo Anual uniforme equivalente de cada una de las 2 alternativas para diversos valores de (i), -- considerando los costos como positivos y los ingresos como negativos, lo que da lugar a la siguiente figura:



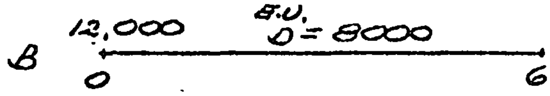
En la gráfica se observa que para valores de i menores al 39.9 %, los Costos Anuales de la máquina Totalmente Automática son menores que los correspondientes de la Semi Automática; y para valores de mayores al 39.9 %, los de la Totalmente Automática son mayores que los de la Semi Automática, por tanto, si la Tasa mínima atractiva de recuperación se hubiese fijado en un valor de 30% -- por ejemplo, se optaria por la máquina totalmente Automática ya - que siendo mayor el valor de 39.9 % encontrado, esta significaria que la inversión adicional inicial requerida por la Máquina (T.A.), se recupera a una tasa mayor que la mínima atractiva especificada, con los ahorros que origina respecto a la (S.A.).

Equivalencia entre los métodos de comparación de alternativas

Comparemos las alternativas siguientes, mediante los 3 métodos estudiados:



Consideremos una t.i.m.a.r. = 12%



Con el método del Costo Anual:

$$CA_A = 28{,}000\ (A/P,\ 12\%,\ 6) + 5{,}000 \quad = \quad 11{,}810.^{32}$$
$$CA_B = 12{,}000\ (A/P,\ 12\%,\ 6) + 8{,}000 \quad = \quad 10{,}918.^{71}$$

diferencia en contra de A : $891.^{61}$

Con el método del Valor Presente:

$$VP_A = 28{,}000 + 5{,}000\ (P/A,\ 12\%,\ 6) \quad = \quad 48{,}557.^{04}$$
$$VP_B = 12{,}000 + 8{,}000\ (P/A,\ 12\%,\ 6) \quad = \quad 44{,}891.^{26}$$

diferencia en contra de A : $3{,}665.^{78}$

Equivalencia entre los dos resultados anteriores:

$$891.^{61} = 3{,}665.^{78}\ (A/P,\ 12\%,\ 6)$$

Con el método de la Tasa de Recuperación:

la ecuación a plantear sobre la "alternativa diferencia" será:

$$(28{,}000 - 12{,}000)\ (A/P,\ i\%,\ 6) = (8{,}000 - 5{,}000)$$
$$16{,}000\ (A/P,\ i\%,\ 6) = 3{,}000$$

despejando:

$$(A/P,\ i\%,\ 6) = 0.1875$$

en tablas se leen los siguientes valores:

para $i = 3.5\%$ $\quad (A/P,\ i\%,\ 6) = 0.18767$
para $i = 4.0\%$ $\quad (A/P,\ i\%,\ 6) = 0.19076$
para $i = 3.0\%$ $\quad (A/P,\ i\%,\ 6) = 0.1846$

interpolando, se obtiene:

$$i = 3.47\% < 12\%$$

De los 3 métodos se desprende que la sobre inversión en A, no se recupera ni siquiera al 12%, por lo que la alternativa B es la más conveniente.

Cada uno de los resultados anteriores sugiere conclusiones equivalentes, pero tiene diferentes significados y por tanto diferente interpretación.

En el caso del método del Costo Anual, el que la diferencia en costos anuales sea en contra de A, se interpreta en el sentido de que la inversión inicial adicional de $16,000, que A implica, no se alcanza a recuperar al 12% establecido como tasa interna mínima atractiva de recuperación, con los ahorros de $3,000 anuales que origina. Hay un faltante de $891.61 anualmente para que esto suceda. Por otro lado, el método no nos indica la tasa (menor al 12%) que dicha sobreinversión inicial reditua.

En el método del Valor Presente, la diferencia de $3,665.78 en contra de A, representa un deficit por esta cantidad, acumulado en el momento actual, en el momento 0, para que la inversión adicional que implica A se recupere al 12%. Este método tampoco indica la tasa, menor de 12% y por tanto insuficiente, que la inversión adicional de $16,000 reditua.

Los dos resultados anteriores son equivalentes, lo que se demuestra en la igualdad:

$$891.61 \cdot (P/A,\ 12\%,\ 6) = \$3,665.98$$

Habrá que recordar, por otro lado, que en ambos casos, si la diferencia hubiese sido cero, (o mayor que cero, lógicamente) la alternativa más conveniente hubiese sido la A.

El método de la Tasa de Recuperación nos indica que la tasa con que la inversión adicional de $16,000.00 se recupera, mediante los ahorros en costo anual de operación que origina, es apenas de un 3.47% que resulta insuficiente considerando una tasa mínima de recuperación fijada de 12%.

Sin embargo en el caso particular que nos ocupa, el método de la tasa de recuperación, solo puede indicarnos la tasa de recuperación de la inversión adicional, pero no la de la inversión total, por carecer de datos respecto a la corriente completa de ingresos y egresos que cada alternativa presenta.

Puede decirse que en la mayoría de los casos, el resultado expresado mediante la tasa de recuperación de las inversiones, es mas objetivo y representativo, a los ojos de aquellos que dentro de una empresa, deben tomar las decisiones en cuanto a destinar los recursos de la empresa en las alternativas más favorables para la misma.

Hay muchas ocasiones en que un análisis superficial de una situación dada, puede conducirnos a una valorización erronea de la tasa de interes que se está pagando por el capital en esa situación dada.

Veamos un ejemplo:

Supongamos que un predio está en venta por $ 2'400,000 en las siguientes condiciones:

$ 400,000 en efectivo y $ 2'000,000 pagaderos mensualmente durante 15 años a una tasa nominal del 60%. Se requiere pagar además : $ 60,000. de gastos de apertura de crédito.

Ahora bien, si se paga al contado, se logra un descuento y en estas condiciones el predio podrá adquirirse por $ 2'100,000 y lógicamente, no habrá gastos adicionales por apertura y tramitación de crédito.

Los pagos uniformes mensuales para cubrir los $ 2'000,000 serán:

número de meses : 15 x 12 = 180
tasa real mensual: 60/12 = 5%

$\therefore$ A = 2'000,000 (A/P, 5%, 180)
A = $ 100,015. / mes durante 15 años.

Se presentan entonces al comprador 2 alternativas:

a) Pagar: $ 400,000 + 60,000 = 460,000 de inmediato y
$ 100,015 mensualmente durante 15 años.

b) Pagar: $2'100,000 y terminar la transacción.

Es claro entonces, que de cualquier manera, debe desembolsar al menos: $ 460,000 en forma inmediata, por lo que las alternativas se reducen en última instancia, a conseguir $ 1'640,000 más (para que con los $ 460,000 se completen los $ 2'100,000 y -

se compre al contado) o pagar \$ 100,015. mensuales durante 15 -- años. Es decir:

\$ 1'640,000 ahora contra \$ 100,015 mensuales

La tasa real que al comprador le representa optar por los pagos mensuales, es de:

$$1'640,000\ (A/P,\ i\%,\ 180) = 100,015.$$

$$(A/P,\ 1\%,\ 180) = \frac{100,015.}{1'640,000.} = 0.06098$$

$i = 6.1\ \%$ como tasa real mensual

$$i_{efect.} = {}_{6.1-12}\text{spcaf} - 1 = (1 + 0.061)^{12} - 1$$

$$= 2.0351 - 1$$

$$= 1.0351$$

$$\therefore\ i_{efect.} = 103.51\ \%$$

que es la tasa real que debe tomar en cuenta el comprador como -- costo del capital, al tomar su decisión y que resulta ser mucho -- más alta que la tasa de interes del 60% que a la luz de las con-- diciones reales, representa una tasa de interes solo aparente.

=======================

DETERMINACION DELNIVEL MAS ECONOMICO DE INVERSION.

El problema de determinar el nivel más económico de inversión, en una serie de alternativas " graduales ", también puede resol-- verse mediante el Método de la Tasa de Recuperación.

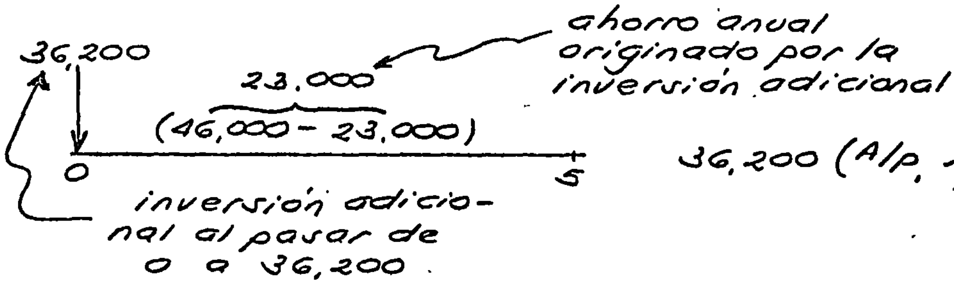
EJEMPLO

Determinar el espesor más económico del aislante con el cual - se desea recubrir la red de tuberias del problema planteado con anterioridad y resuelto con el Método del Costo Anual.

Refiriéndonos a los datos de los cuadros de las páginas 134y137y dado que no se cuenta más que con los egrésos generados en cada alternativa, el análi--

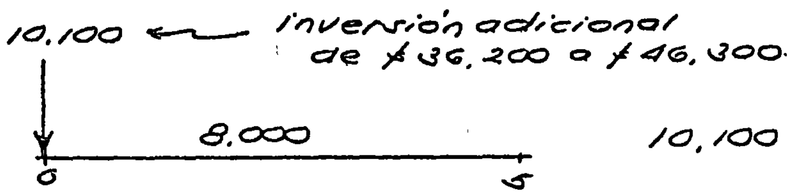
sis entre las mismas, solo podrá ser comparativo, por lo que unicamente podemos proceder calculando la tasa de recuperación de la <u>inversión adicional</u> que cada alternativa de espesor de aislamiento, implica respecto a la de un espesor menor. En el caso del espesor 0, (no poner aislante), no hay alternativa anterior.

Para el espesor tipo #1 :



$$36{,}200\,(A/P,\ i\%,\ 5) = 23{,}000$$
$$i = 56.84\ \%$$

Para el espesor tipo #2 :



$$10{,}100\,(A/P,\ i\%,\ 5) = 8.000$$
$$i = 74.28\ \%$$

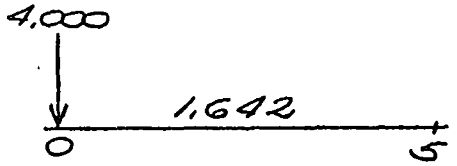
Procediendo de igual manera con los restantes espesores, encontramos los resultados que se resúmen en el siguiente cuadro :

espesor del aislamiento	tasa de recuperación de la inversión adicional
0	—
#1	56.84 %
#2	74.28 %
#3	33.97 %
#4	− 11.64 %
#5	− 40.28 %
#6	− 43.07 %

La alternativa más atractiva de inversión es la que corresponde al aislamiento #3 cuya tasa de recuperación (de la inversión adicional y no de la inversión total) es de :

$$33.97\% > 30\%$$

Nuevamente, en el plan de maximización, de contarse con un aislamiento de espesor #3-A, cuya inversión inicial fuese de $ 65.000 y pérdida anual por pérdidas de calor de $ 6,858, constituiría la alternativa óptima, ya que la inversión adicional que implicara respecto a la alternativa de aislamiento tipo #3 se recuperaría:



$4.000\ (A/P, i\%, 5) = 1642$

$i = 30\%$ que es la timar.

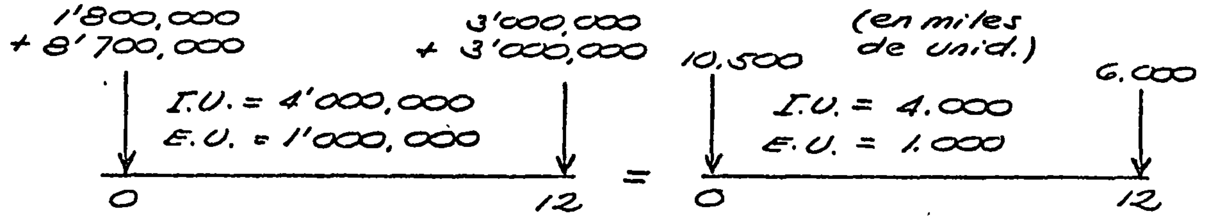
Nota: queremos recalcar que no estamos calculando la tasa de recuperación de la inversión total, y dado que buscamos responder la pregunta: ¿"hasta que nivel" es atractivo invertir?, procedemos comparando nivel por nivel hasta aquel en que la tasa de recuperación de la inversión adicional, no sea menor a la t.i.m.a.r.

EJEMPLO:

Resolvamos el problema del edificio de productos resuelto anteriormente con el método del Valor Presente.

A partir de los datos constatados en la tabla de la página 152, calculemos la tasa de recuperación de la <u>inversión total</u> de cada una de las alternativas: T-1, T-2, T-3, T-4, de la siguiente manera:

Para la alternativa T-1:



Estableciendo la ecuación:

egresos = ingresos

y expresando ambos miembros de la ecuación en anualidades uniformes equivalentes:

$$(10,500 - 6,000)\ (A/P, i\%, 12) + 6,000\ (i) + 1,000 = 4.000$$

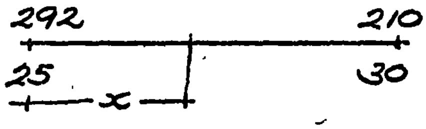
con $i = 25\%$

$$4{,}500\,(A/P,\,25\%,\,12) + 6{,}000\,(0.25) + 1{,}000 = 4.000$$
$$1{,}208 + 1500 + 1{,}000 < 4.000$$
$$3.708 < 4.000$$
$$292 < 0$$

con $i = 30\%$

$$4{,}500\,(A/P,\,30\%,\,12) + 6{,}000\,(0.30) + 1{,}000 = 4.000$$
$$1{,}400 + 1{,}800 + 1{,}000 > 4.000$$
$$4{,}210 > 4.000$$
$$210 > 0$$

interpolando :

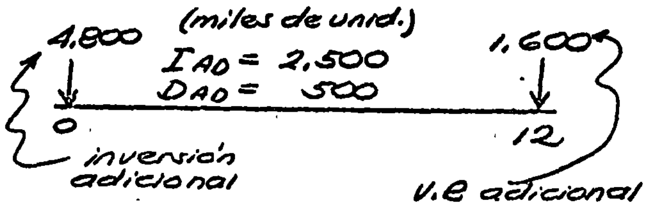


$$x \text{ —— } 292$$
$$(30-25) \text{ —— } (292+210)$$
$$x = 2.91$$

$$\therefore\ i = 25 + 2.91 = 27.91\,\%$$

De manera similar y a partir de los datos de la tabla de la página 163, se puede calcular la tasa de recuperación de la <u>inversión adicional</u> que cada alternativa implica respecto a la anterior, de la siguiente manera :

Para la alternativa T-2 :



$$(4{,}800 - 1{,}600)\,(A/P,\,i,\,12) + 1{,}600\,(i) + 500 = 2{,}500$$

con $i = 38\%$:

$$(4{,}800 - 1{,}600)\,(A/P,\,38,\,12) + 1{,}600\,(0.38) + 500 = 2{,}500$$
$$1242 + 608 + 500 < 2{,}500$$
$$2{,}350 < 2{,}500$$
$$150 < 0$$

con $i = 42\%$

$$(4{,}800 - 1{,}600)\,(A/P,\,42,\,12) + 1{,}600\,(0.42) + 500 = 2{,}500$$

$$1364 + 672 + 500 > 2{,}500$$

$$2{,}536 > 2{,}500$$

$$36 > 0$$

interpolando:

150 — 36

38 — x — 42

$$x \text{ —— } 150$$

$$(42-38) \text{ —— } (150+36) \qquad x = 3.23$$

$$\therefore\ i = 38 + 3.23 = 41.23\ \%$$

El resumen de los resultados obtenidos, se muestra en la siguiente tabla:

Alternativa	tasa de recup. de la inversión total	tasa de recup. de la inversión adicional
T-1	27.91 %	27.91 %
T-2	32.08 %	41.23 %
T-3	26.41 %	15.08 %
T-4	19.72 %	4.97 %

maximización

< 18 % (tmar)

De ambos criterios se desprende, confirmando los resultados obtenidos con el Método del Valor Presente, que la alternativa más económica es la: T-2.

La maximización se obtendría con una alternativa hipotética entre T-2 y T-3 con tasa de recuperación de la inversión total, mayor de 32.08 % y tasa de recuperación de la inversión adicional de 18 % exactamente.

Vistas en forma aislada, y de no existir las otras alternativas de inversión, cada una de ellas representa una buena inversión, pues todas ellas ofrecen una tasa de recuperación para la inversión total mayor de 18%, pero al existir otras opciones o "niveles" de inversión, y ser mutuamente excluyentes (solo se invierte en una de ellas), se busca invertir en la de más alta tasa de recuperación para la inversión, siempre y cuando la recuperación adicional que implique respecto a la alternativa anterior, se justifique a sí misma con los beneficios que origine, y se recupere a una tasa no menor de la t.i.m.a.r.

Y así por ejemplo, en el caso de la alternativa T-3, que ofrece una tasa de recuperación de 26.41 % > 18 %, la inversión adicional que implica comparativamente con la T-2, no se justifica a sí misma con los beneficios y ahorros que ella misma origina, pues se recupera a una tasa de 15.08 % que resulta ser menor que el 18 % (t.i.m.a.r.)

Esto, de hecho, es lo que origina que la inversión total disminuya comparativamente en su recuperación, de 32.08 % en la T-2, a 26.41 % en la T-3.

Veamos ahora la sistematización de los principios vertidos en el último tema, en el método que en la literatura de lengua inglesa se denomina: "discounted cash flow method", para el cálculo de la tasa de recuperación de una inversión propuesta y cuya mecánica consiste fundamentalmente en actualizar ("descontar") la corriente neta de efectivo (net cash flow) a distintas tasas de interes, razón por la cual la denominación correcta del método en nuestra terminologia, consideramos seria la de: "método del flujo actualizado de efectivo."

EJEMPLO

Consideremos la posible inversión en un predio el cual se pretende fraccionar y urbanizar para efecto de vender los lotes resultantes y cuyo flujo de efectivo se prevea bajo las siguientes condiciones:

• Compra inicial del predio	: $1'650,000.
• Pago de escrituras y gastos notariales	: 150,000.
Erogados en 3 pagos de $50,000 cada uno durante el: 1°, 2° y 3° meses	
• Obras de urbanización	: 1'500,000.
Erogados a razón de $250,000 mensuales durante los meses 3°, 4°, 5°, 6°, 7°, 8°	
• Trabajos adicionales de acondicionamiento, decoración, etc...	, 300,000.
Erogados a razón de $50,000 durante los mismos meses 3° a 8°.	
• Pago global de impuestos, el cual se supone concentrado al final durante el mes 14°	: 450,000.
• Gastos de promoción de ventas durante el 9° mes	: 50,000.
Suma bruta de egresos	: $ 4'100,000.

Por otro lado, se espera captar los ingresos por concepto de la venta de los lotes, de la siguiente forma:

• $300,000 durante los meses: 7°, 9°, 11°, 12°, 13°	: $ 1'500,000.
• Durante el mes 14°	5'000,000.
Suma bruta de ingresos esperados	: $ 6'500,000

Indicando en una escala de tiempos de 14 meses de duración, el flujo de efectivo anterior, adjudicando signo (-) a los egresos y (+) a los ingresos y siguiendo la convención usual de considerar concentrados al final del periodo los movimientos de efectivo supuestos a lo largo de cada uno de ellos, la escala resultante nos queda:

(cantidades en miles)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
terreno	-1'650														
escrituración		-50	-50	-50											
urbanización				-250	-250	-250	-250	-250	-250						
adicionales				-50	-50	-50	-50	-50	-50						
impuestos															-450
promoción										-50					
ingresos								+300		+300		+300	+300	+300	+5,000

Sumando algebraicamente las cantidades indicadas en cada uno de los periodos, obtenemos el flujo neto de efectivo (net cash flow):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
-1'650,000	-50,000	-50,000	-350,000	-300,000	-300,000	-300,000	0	-300,000	+250,000	0	+300,000	+300,000	+300,000	+4'550,000

Procedamos a elaborar la siguiente tabla:

mes	flujo neto de efectivo	Factor de actualización sppwf. al 8%	V. P. al 8%	Factor de actualización sppwf. al 5%	V.P. al 5%
0	-1'650.000	1.000	-1'650,000	1.000	-1'650.000
1	- 50,000	0.92593	- 46.297	0.95238	- 47.619
2	- 50.000	0.85734	- 42,867	0.90703	- 45,351
3	- 350.000	0.79383	- 277,841	0.86384	- 302,344
4	- 300.000	0.73503	- 220,509	0.82270	- 246,810
5	- 300,000	0.68058	- 204,174	0.78353	- 235.059
6	- 300.000	0.63017	- 189.051	0.74622	- 223,866
7	0	———	0	———	0
8	- 300.000	0.54027	- 162,081	0.67684	- 203,052
9	+ 250,000	0.50025	+ 125,063	0.64461	+ 161,152
10	0	~~0.42888~~	0	———	0
11	+ 300,000	0.42888	+ 128,664	0.58468	+ 175.404
12	+ 300,000	0.39711	+ 119.133	0.55684	+ 167,052
13	+ 300,000	0.36770	+ 110,310	0.53032	+ 159,096
14	+ 4'550,000	0.34046	+ 1'549,093	0.50507	+ 2'298,068
	+ 2'400,000		- 760.557		+ 6.671.

La ~~primera~~ segunda columna es la actualización de las cantidades individuales en cada periodo, con una tasa de interes del 0%, por lo que está constituida sencillamente por el flujo neto de efectivo y tiene como interpretación el determinar simplemente si la suma bruta de los ingresos esperados, supera a la suma total de los ingresos presupuestados, sin impactar aun con valor alguno el costo del dinero con el tiempo.

La 3ª y 5ª columnas son los factores de actualización a tasas de 8% y 5% respectivamente, así por ejemplo:

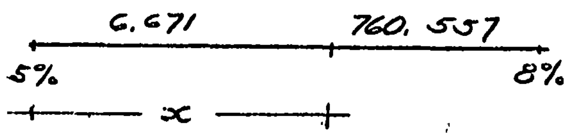
$$_{8\text{-}0}sppwf = 1.000 \qquad _{5\text{-}0}sppwf = 1.000$$

$$_{8\text{-}1}sppwf = 0.92593 \qquad _{5\text{-}1}sppwf = 0.95238$$

$$_{8\text{-}2}sppwf = 0.85734 \qquad _{5\text{-}2}sppwf = 0.90703$$

La 4ª y 6ª columnas son la actualización (Valores Presentes) del flujo neto de efectivo, con un primer tanteo considerando una tasa del 8% y un segundo tanteo a un 5%.

Con los valores "suma algebraica" de las 2 columnas anteriores, se procede a una interpolación a fin de determinar el valor de la tasa de interes que establece y verifica la igualdad en la ecuación de costos e ingresos:



$$x \;——\; 6.671$$
$$(8-5) \;——\; 767,228$$

$$i = 5 + \frac{6.671}{767,228} \times 3 = 5 + 0.026$$

$$i = 5.03\ \%$$

Dado que los periodos seleccionados para el análisis del problema y por ende, de la escala de tiempos, fueron mensuales, la tasa obtenida : 5.03% será la tasa real mensual, por lo que es necesario obtener la tasa efectiva a fin de poder comparar la tasa que brinda la alternativa de inversión ofrecida, con la tasa interna mínima atractiva de recuperación o con las tasas de recuperación de otras alternativas de inversión y que estén expresadas, como es normal, en forma de tasa anual.

$$i_{efect.} = spcaf_{5.03-12} - 1$$
$$= (1 + 0.0503)^{12} - 1$$
$$= 1.80202 - 1$$
$$= 0.80202$$

$$\therefore i = 80.2\ \%$$

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

"Engineering Economy"
E. Paul De Garmo
Ed. Collier Mac Millan (5a. edición) en adelante

"Engineering Economics"
James L. Riggs
Mc. Graw Hill Book Company.

"Principles of Engineering Economy"
E. Grant - Ireson
Ronald Press. (5a. edición) en adelante

"Engineering Economy"
H.G. Thuesen
W.J. Fabrycky
Prentice Hall. (5a. edición en adelante)

"Managerial and Engineering Economy"
George Taylor
Ed. Van Nostrand
Ed. Litton Educational Publishing Inc.

"Economic Analysis for Engineering and Managerial Decisión-making"
N.N. Barish
Mc. Graw Hill Book Company

"Analytic Models for Managerial and Engineering Economics".
Schweyer
Ed. Reinhold.

"Engineering Economy: Analysis of Capital Expenditures"
Gerald W. Smith
The Iowa State University Press

"Engineering Economy: A Behavioral Approach"
Anthony J. Tarquin
Leland T. Blank
Mc. Graw Hill Book Company.

ANALISIS DE VARIANCIA

A. MODELOS CON UN SOLO FACTOR (J TRATAMIENTOS) Y EFECTOS FIJOS

$$VAR(y_{ij}-\mu_j) = E[(y_{ij}-\mu_j)]^2 - E^2(y_{ij}-\mu_j) = E[y_{ij}^2] - 2\mu_j E[y_{ij}] + \mu_j^2$$
$$= E[y_{ij}^2] - 2\mu_j^2 + \mu_j^2 = E[y_{ij}^2] - E^2[y_{ij}]$$

A.1 Supuestos

A.1.1 Los resultados y_{ij} de la experimentación están normalmente distribuidos, $N(\mu_y, \sigma_y^2)$

A.1.2 El error e_{ij} está normalmente distribuido $N(0, \sigma_e^2)$, para cada tratamiento j.

A.1.3 El error $e_{i'j'}$ es independiente de cualquier otro error e_{ij} ($\forall i, j$ salvo $i=i'$, $j=j'$)

A.1.4 La variancia σ_e^2 de los errores aleatorios e_{ij} para un tratamiento es igual a la de los restantes tratamientos

A.2 TABLA DE RESULTADOS (MUESTRA)

TRATAMIENTOS (o niveles del factor)

	1	2	3	. . . . .	J
	y_{11}	y_{12}	y_{13}	- - -	y_{1j}
	y_{21}	y_{22}	y_{23}	- - -	y_{2j}
$\downarrow$	y_{31}	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n_j Datos por tratamiento	$\vdots$	y_{i2}	$\vdots$		$\vdots$
	y_{i1}		$\vdots$		y_{ij}
			y_{i3}		
MEDIA DEL TRATAMIENTO	μ_1	μ_2	μ_3	- - -	μ_j
TAMAÑO DE MUESTRA	n_1	n_2	n_3	- - -	n_j

$i = 1, \dots, n_j$
$j = 1, \dots, J$

Nº TOTAL DE RESULTADOS EN LA MUESTRA

$$N = \sum_{j=1}^{J} n_j$$ ← TAMAÑO TOTAL DE MUESTRA

A.3 MODELO A EMPLEAR

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij} \qquad i = 1, \dots, n_j \quad j = 1, \dots, J$$

modelo lineal

Es decir, el valor de la observación o resultado i en la muestra o tratamiento j es la suma de tres componentes: la media μ de los J tratamientos, más el efecto α_j del tratamiento j más el término de error aleatorio e_{ij}. Esto es semejante al modelo de regresión lineal. ②

A.4 RESULTADOS INTERMEDIOS (PARAMETROS)

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^{J} n_j \mu_j}{\sum_{j=1}^{J} n_j} = \frac{\sum_j n_j \mu_j}{N}$$

en donde $n_j,\ j=1,\dots,J$ es tamaño de muestra para trat. j

$\mu_j,\ j=1,\dots,J$ es media de datos en tratamiento j

El efecto del tratamiento j, α_j, se define como la desviación de la media del tratamiento j, μ_j, considerando la media de todos los tratamientos, μ, es decir

$$\alpha_j = \mu_j - \mu \qquad \left(\sum_j \alpha_j = 0\right)$$

Entonces

$$\frac{\sum_{j=1}^{J} n_j \alpha_j}{N} = \frac{\sum_j n_j(\mu_j - \mu)}{N} = \frac{\sum_j n_j \mu_j}{N} - \frac{\mu \sum_j n_j}{N}$$

$$= \mu - \mu = 0$$

Si $n_1 = n_2 = \dots = n_J$, entonces $\mu = \dfrac{n_1 \sum_j \mu_j}{\sum_j n_1} = \sum_j \mu_j / J$

y $\sum_j \alpha_j = \sum_j (\mu_j - \mu) = \sum_j \mu_j - J\mu = J\mu - J\mu = 0$

Si no existe efecto asociado con un tratamiento j, entonces $\alpha_j = 0$. Si no hay efectos provocados por cualquiera de los tratamientos, entonces

$$\therefore \alpha_j = 0 \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, J$$

y se puede concluir que

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_J$$

La ausencia absoluta de efectos es equivalente a la igualdad absoluta de todas las medias de tratamientos.

A.5 RESULTADOS INTERMEDIOS (ESTIMADORES)

Cualquier dato i observado bajo el tratamiento j es una muestra aleatoria de tamaño uno de la población de datos sometidos a dicho tratamiento. Entonces para cierta j fija

$$E(y_{ij}) = \mu_j$$

y, de acuerdo con el modelo lineal $y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij}$, se tiene que

$$\begin{aligned} E(y_{ij}) &= E(\mu + \alpha_j + e_{ij}) = \mu + \alpha_j + E(e_{ij}) \\ &= \mu + \mu_j - \mu + E(e_{ij}) \\ &= \mu_j + E(e_{ij}) \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo con los dos resultados anteriores, y considerando algún tratamiento $\underline{j}$ fijo, se tiene que

$$\mu_j = \mu_j + E(e_{ij})$$
$$E(e_{ij}) = \mu_j - \mu_j = 0$$

De igual manera, para $j = 1, \ldots, J$

$$E\left(\frac{\sum_j e_{ij}}{J}\right) = \frac{1}{J}\sum_j E(e_{ij}) = 0$$

y, para $i = 1, \ldots, n_j$

$$E\left(\frac{\sum_i \sum_j e_{ij}}{N}\right) = \frac{\sum_i \sum_j E(e_{ij})}{N} = 0$$ (4)

Por otro lado, se tiene que para una muestra de la población de resultados experimentales sujetos al tratamiento j, un estimador insesgado de μ_j, la media de la población anterior, es

$$\hat{\mu}_j = m_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}}{n_j} \qquad \left(E(m_j) = E\left(\frac{\sum_i y_{ij}}{n_j}\right) = \frac{\sum_i E(y_{ij})}{n_j} = \frac{n_j \, E(y_{ij})}{n_j} = E(y_{ij}) = \mu_j \right)$$

en tanto que un estimador de μ de la población de resultados es

$$\hat{\mu} = m = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{J} y_{ij}}{\sum_{j=1}^{J} n_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{J} y_{ij}}{N} \qquad \left(E(m) = E\left(\frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N}\right) = \frac{\sum_j n_j E(y_{ij})}{N} = \frac{\sum_j n_j \mu_j}{N} = \frac{N\mu}{N} = \mu \right)$$

Este estimador también es insesgado de μ, y se obtiene a partir de la muestra global de N elementos para el experimento completo. $\mu_j = \alpha_j + \mu$

Entonces, de acuerdo con lo anterior,

$$\hat{\alpha}_j = m_j - m \qquad \left[E(\hat{\alpha}_j) = E(m_j - m) = E(m_j) - E(m) = (\alpha_j + \mu) - \mu = \alpha_j \right.$$
$$\left. \text{porque } E(m_j) = \mu_j, \text{ y } \alpha_j = \mu_j - \mu \right]$$

es un estimador insesgado de α_j, el efecto de un tratamiento dado, j, puesto que, para dicho tratamiento, $E(e_{ij}) = 0$.

A.6 Ejemplo.-

Considérese que se desea comparar el rendimiento de combustible en millas de tres marcas distintas de automóviles: A, B y C. Se seleccionan al azar tres vehículos de la misma marca, y cada uno de ellos se conduce durante 100 millas exactamente a la misma velocidad, empleando el mismo combustible.

CASO 1: Si cada una de las marcas se supone que posee un rendimiento medio de 20 millas por galón, y que no existe variabilidad dentro de la marca en lo concerniente al rendimiento, una muestra con N=9 resultados para la cual

$n_1 = 3$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 3$, con $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ y $e_{ij} = 0$ para $\forall i, j$, puede ser la siguiente

	MARCA			
	A	B	C	
$j = 1,2,3$	20	20	20	
$i = 1,2,3$	20	20	20	$m = \mu = 20$
	20	20	20	

Por supuesto, el modelo en este caso resulta ser

$$y_{ij} = \mu + 0 + 0 = \mu$$

el cual es poco realista, puesto que asegura que no existen efectos debidos a los tratamientos (marcas) ni errores al azar del tipo e_{ij}.

<u>CASO 2</u>: Supóngase el mismo ejemplo anterior, excepto que en este caso existen diferencias entre los resultados debido al efecto de los tratamientos (marcas). En este caso $N = 9$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$, $e_{ij} = 0$, $\forall i, j$ y $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = -5$. La disposición de los resultados es ahora la siguiente:

	MARCA			
	A	B	C	
$j = 1,2,3$	20+1	20+4	20−5	
$i = 1,2,3$	20+1	20+4	20−5	$m = 20$
	20+1	20+4	20−5	$\mu = 20$

En este caso, $y_{ij} = \mu + \alpha_j$

Por ejemplo; $y_{23} = \mu + \alpha_3 = 20 + (-5) = 15$

Este modelo tampoco resulta ser muy realista, pues aun cuando supone valores $\alpha_j \neq 0$, en la práctica es muy poco posible evitar el error aleatorio del tipo e_{ij} para los distintos resultados experimentales y_{ij}.

CASO 3: Considérese de nueva cuenta el ejemplo de los rendimientos de combustible para las tres marcas A, B y C de automóviles. En este caso, se agrega la componente e_{ij} de error aleatorio al modelo lineal para y_{ij}. Aquí, $N = 9$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = -5$ y

$$e_{11} = 3 \qquad e_{12} = 0 \qquad e_{13} = -4$$
$$e_{21} = -2 \qquad e_{22} = 1 \qquad e_{23} = -1$$
$$e_{31} = 1 \qquad e_{32} = -3 \qquad e_{33} = 2$$

de tal forma que la disposición de valores y_{ij} es ahora la siguiente

MARCA

A	B	C	
$20+1+3 = 24$	$20+4+0 = 24$	$20-5-4 = 11$	
$20+1-2 = 19$	$20+4+1 = 25$	$20-5-1 = 14$	$\mu = 20$
$20+1+1 = 22$	$20+4-3 = 21$	$20-5+2 = 17$	
$m_1 = 21.67$	$m_2 = 23.33$	$m_3 = 14.00$	

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}}{9} = 19.67$$

o, puesto que $n_1 = n_2 = n_3 = 3$

$$m = \frac{21.67 + 23.33 + 14.00}{3} = 19.67$$

Para este modelo, existen diferencias de rendimiento entre las tres distintas marcas (o niveles del factor cualitativo "marca del automóvil"), así como entre diferentes vehículos de la misma marca, es decir,

diferencias dentro de las muestras de tres (7)
vehículos de cada marca. Esto se debe a que para este modelo en general $e_{ij} \neq 0$, guardando el mismo como

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij}$$

Por ejemplo, $y_{13} = 20 + 4 - 3 = 21$, y

$$\hat{\alpha}_1 = m_1 - m = 21.67 - 19.67 = 2.00 \qquad (\alpha_1 = 1)$$
$$\hat{\alpha}_2 = m_2 - m = 23.33 - 19.67 = 3.66 \qquad (\alpha_2 = 4)$$
$$\hat{\alpha}_3 = m_3 - m = 14.00 - 19.67 = -5.67 \qquad (\alpha_3 = -5)$$

Estos estimadores de α_j $(j = 1, 2, 3)$ muestran errores de $+1.00$, -0.34 y -0.67, respectivamente. En este caso los errores son pequeños, pero no existe garantía alguna de que en otro u otros experimentos se mantengan dentro de límites moderados. Por lo anterior, se requiere en estos casos evaluar qué proporción del efecto para un tratamiento en especial se debe al error aleatorio antes de decidir que "algo" sistemático está realmente ocurriendo con los resultados experimentales.

A.7 Deslinde de la variación en un experimento

El ejemplo anterior sugiere que la evidencia para efectos experimentales tiene que ver con las diferencias entre los tratamientos y las diferencias dentro de los mismos. Ahora, se separará la variabilidad de las observaciones en una parte que refleje errores de muestreo y efectos experimentales por un lado, y en otra que implique únicamente error de muestreo.

Considérese que cualquier resultado y_{ij} elemento de la muestra del tratamiento j posee una desviación respecto de m, la media de la muestra global de N elementos, dada por

$$y_{ij} - m$$

Esta desviación se puede descomponer de acuerdo con la identidad siguiente:

$$y_{ij} - m = (y_{ij} - m_j) + (m_j - m)$$

en donde $y_{ij} - m_j$ implica la desviación del resultado y_{ij} respecto de la media m_j de su muestra j, y $m_j - m$ la desviación de dicha media respecto de la media global.

Conviene hacer notar que si en lugar de hablar de muestras se hablara de poblaciones, la ecuación anterior quedaría como

$$y_{ij} - \mu = e_{ij} + \alpha_j ,$$

implicando con ello que $\hat{e}_{ij} = y_{ij} - m_j$, y $\hat{\alpha}_j = m_j - m$

Elevando al cuadrado las desviaciones de cada resultado y_{ij} respecto a m y sumando para $\forall\, i, j$, queda

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - m)^2 = \sum_i \sum_j \left[(y_{ij} - m_j) + (m_j - m) \right]^2$$

$$= \sum_i \sum_j (y_{ij} - m_j)^2 + \sum_i \sum_j (m_j - m)^2 + 2 \sum_i \sum_j (y_{ij} - m_j)(m_j - m)$$

Ahora bien,

$$2 \sum_i \sum_j (y_{ij} - m_j)(m_j - m) = 2 \sum_j (m_j - m) \sum_i (y_{ij} - m_j) = 0$$

puesto que $m_j - m$ tiene el mismo valor para toda i dentro de la muestra j, y la suma de las desviaciones $y_{ij} - m_j$ debe ser cero para los valores y_{ij} dentro de la misma muestra.

Por otro lado,

$$\sum_i \sum_j (m_j - m)^2 = \sum_j n_j (m_j - m)^2$$

Ya que, de nueva cuenta, $m_j - m$ tiene el mismo valor para cualquier valor de i ($i = 1, \ldots, n_j$) dentro del tratamiento j.

Finalmente,

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - m)^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij} - m_j)^2 + \sum_j n_j (m_j - m)^2$$

A la igualdad anterior se le llama PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS, y es válida para cualquier conjunto de J muestras distintas. Implica que la suma total de desviaciones elevadas al cuadrado respecto de la media de la muestra total de N elementos, se puede "partir" en dos: la suma de las desviaciones elevadas al cuadrado respecto de la media de cada muestra, es decir, <u>dentro</u> de las muestras, y la suma pesada de las desviaciones elevadas al cuadrado de cada media de muestra respecto de la media de los N elementos, es decir, <u>entre</u> las muestras.

Simbólicamente

$$SS_W = SS_{DENTRO} = \sum_i \sum_j (y_{ij} - m_j)^2$$

$$SS_B = SS_{ENTRE} = \sum_j n_j (m_j - m)^2$$

$$SS_T = SS_{TOTAL} = SS_W + SS_B = \sum_i \sum_j (y_{ij} - m)^2$$

en donde SS = SUM OF SQUARES ≡ SUMA DE CUADRADOS

W = WITHIN ≡ DENTRO

B = BETWEEN ≡ ENTRE

El significado de la partición es el siguiente. Es natural que los valores y_{ij} muestren diferencias entre sí, es decir, que sus valores difieran unos de otros y las diferencias se pueden deber a cualquiera de los motivos que se explican a continuación. Por un la algunas observaciones se encuentran en muestras (tratamientos) distintos, y sus diferencias se deben, ya sea al efecto del tratamiento, o a variación al azar, o a ambos. El valor de SS_B refleja la contribución que hacen los distintos tratamientos y el azar a la diferencia entre los valores y_{ij}. Por otro lado, si hay diferencia entre valores dentro de un mismo tratamiento, ella se debe únicamente al azar, puesto que todos esos valores recibieron exactamente el mismo efecto del mismo factor. Entonces, SS_W refleja la contribución que hace únicamente el azar a las diferencias de los valores y_{ij} que se encuentran en la misma muestra.

La pregunta ahora es cómo emplear la partición de la suma de cuadrados para hacer inferencias acerca de la existencia de efectos de los tratamientos en los resultados. Para responderla, se deben examinar con más detalle los valores de SS_W y de SS_B.

A.8 Suma de cuadrados DENTRO de las muestras

Considerando el modelo de un solo factor y efectos fijos de los tratamientos, es obvio que los tratamientos que se administran no pueden ser responsables de las diferencias en valores existentes entre observaciones que se encuentran dentro de un mismo grupo. Este tipo de variación dentro de los grupos debe entonces ser reflejo del error aleatorio únicamente. Se desea entonces saber qué valor poblacional se puede estimar al través de $E[SS_W]$, que es en este caso la explicación natural para las diferencias mencionadas. Entonces,

$$E(SS_W) = E\left(\sum_i \sum_j (y_{ij} - m_j)^2\right)$$

Tomando en cuenta que una varianza muestral corregida es un estimador puntual insesgado de la varianza poblacional σ_x^2 de cualquier población de característica X, se puede plantear lo siguiente:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \overset{*}{S}{}_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\text{Suma de cuadrados de las desviaciones de los datos } x_i \text{ respecto a } \bar{x}}{\text{Número de grados de libertad}}$$

en donde, $\bar{x}$ = promedio aritmético de la muestra
n = tamaño de la muestra

y $E(\overset{*}{S}{}_x^2) = \sigma_x^2$

es decir, un estimador insesgado de la varianza es la suma de las desviaciones elevadas al cuadrado de los datos x_i $(i=1,\ldots,n)$ respecto del valor más probable de la muestra, $\bar{x}$, dividida entre el número de elementos de la muestra menos uno.

En nuestro caso, SS_W puede emplearse de alguna manera para estimar la varianza del error aleatorio en el muestreo, σ_e^2, para el tratamiento j, supuesto que se sabe que explica únicamente variación (error) aleatoria en los valores de los resultados y_{ij} dentro de cada muestra del tratamiento j.

Entonces, para alguna muestra j en particular

$$E\left(\frac{\sum_i (y_{ij}-m_j)^2}{n_j-1}\right) = \sigma_e^2$$

ya que para cualquier muestra j, $\sum_i (y_{ij}-m_j)^2/(n_j-1)$ es un estimador puntual insesgado de la varianza poblacional del error, σ_e^2, para el mismo tratamiento j.

De acuerdo con lo anterior,

$$E\left[\sum_i (y_{ij}-m_j)^2\right] = (n_j-1)\,\sigma_e^2$$

, por lo cual

(12)

$$E(SS_w) = \sum_j \left[E \sum_i (y_{ij} - m_j)^2\right]$$
$$= \sum_j (n_j - 1)\sigma_e^2 = \sigma_e^2 \sum_j n_j - \sigma_e^2 \sum_j (1)$$
$$= N\sigma_e^2 - J\sigma_e^2 = (N-J)\sigma_e^2$$

Si el valor anterior se divide entre $N-J$, se obtiene un estimador insesgado de σ_e^2, la varianza poblacional error para un tratamiento j en particular, la cual, de acuerdo con las suposiciones iniciales hechas para el modelo con un factor y efectos fijos, debe ser igual para los tratamientos restantes.

$\frac{(N-J)MS_w}{\sigma_e^2} = \chi^2$

$\Rightarrow \frac{MS_w}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2}{N-J}$

De acuerdo con lo anterior,

$$E(MS_w) = \frac{E(SS_w)}{N-J} = \frac{(N-J)\sigma_e^2}{N-J} = \sigma_e^2$$

en donde MS_w = VALOR MEDIO CUADRATICO DENTRO DE LAS MUESTRAS es el valor de una estadística que estima en forma insesgada al parámetro σ_e^2, cuyo valor se supone igual para cada población de resultados sometidos a su tratamiento j $(j = 1, \ldots, J)$.

Si se toma en cuenta que la estadística $(n-1)S_x^2/\sigma_x^2$, que permite realizar estimaciones de una varianza poblacional σ_x^2 a través de una muestra de n elementos para la cual la varianza sesgada es S_x^2, posee una distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad, se puede desprender que

$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} = \chi^2_{(n-1)}$

$\Rightarrow S_x^2 = \frac{\chi^2_{(n-1)}\sigma_x^2}{n-1}$

$\chi^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n_j}^2$

$z_1 = \frac{y_{ij} - m_j}{\sigma_e}$

$$\frac{\text{Estimador de } \sigma_e^2}{\sigma_e^2} = \frac{MS_w}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2}{g.l.}$$

$\rightarrow z^2 = \frac{(y_{ij} - m_j)^2}{\sigma_e^2}$ $\quad S_x^2 = \frac{\sum (y_{ij} - m_j)^2}{n_j - 1}$

$\chi^2 = \sum \frac{(y_{ij} - m_j)^2}{\sigma_e^2}$

debe poseer una distribución χ^2 con

$\frac{\sum_j \sum_i (y_{ij} - m_j)^2 / (N-J)}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2}{N-J}$

$\chi^2 = \frac{(n_j - 1)S_j^2}{\sigma_e^2} = \frac{\nu S_j^2}{\sigma_e^2}$

$$\sum_j (n_j - 1) = N - J$$

$\frac{MS_w}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{N-J}}{N-J}$

$\frac{\chi^2}{\nu} = \frac{S_j^2}{\sigma_e^2}$

grados de libertad, ya que proviene de la

$\Rightarrow \frac{(N-J)MS_w}{\sigma_e^2} = \chi^2_{N-J}$

$\therefore \dfrac{\sum_i (y_{ij}-m_j)^2}{\sigma_e^2} = \chi^2_{(n_j-1)}$ $\qquad \hat{\sigma}_e^2 = s_j^2 = \dfrac{\sum_i (y_{ij}-m_j)^2}{(n_j-1)} \Rightarrow \sum_i (y_{ij}-m_j)^2 = s_j^2(n_j-1)$

$\dfrac{s_j^2(n_j-1)}{\sigma_e^2} = \chi^2 \Rightarrow s_j^2 = \dfrac{\chi^2_{n_j-1}}{n_j-1}\sigma_e^2 = \dfrac{\chi^2_\nu}{\nu}\sigma_e^2$

suma de J variables χ^2 $\left[\sum_j \left(\overbrace{\sum_i (y_{ij}-m_j)^2}\right)\right]$, cada una de ellas independiente del resto, y con n_j-1 grados de libertad, habida cuenta de que la distribución de origen de los datos y_{ij} se suponga normal.

A.9 Suma de cuadrados ENTRE las muestras

Para cualquier muestra j de un tratamiento, se pueden obtener los resultados siguientes:

$$m_j = \frac{\sum_i y_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_i}{n_j}(\mu + \alpha_j + e_{ij})$$

$$= \frac{\sum_i \mu}{n_j} + \frac{\sum_i \alpha_j}{n_j} + \frac{\sum_i e_{ij}}{n_j} = \frac{n_j\mu}{n_j} + \frac{n_j\alpha_j}{n_j} + \frac{\sum_i e_{ij}}{n_j}$$

$$= \mu + \alpha_j + \frac{\sum_i e_{ij}}{n_j} = \mu + \alpha_j + m_{e_j}$$

En donde $\quad m_{e_j} = \dfrac{\sum_i e_{ij}}{n_j}$

$$m = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N} = \frac{\sum_i \sum_j}{N}(\mu + \alpha_j + e_{ij})$$

$$= \frac{\sum_i\sum_j \mu}{N} + \frac{\sum_i\sum_j \alpha_j}{N} + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{N}$$

$$= \frac{N\mu}{N} + 0 + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{N} = \mu + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{N} = \mu + m_e$$

En donde $\quad m_e = \dfrac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{N} = \dfrac{\sum_j n_j m_{e_j}}{N}$

Por lo anterior,

$$m_j - m = \mu + \alpha_j + m_{e_j} - \mu + m_e = \alpha_j + (m_{e_j} - m_e)$$

Entonces,

$$SS_B = \sum_j n_j (m_j - m)^2 = \sum_j n_j (\alpha_j + [m_{e_j} - m_e])^2$$

$$= \sum_j n_j \left[\alpha_j^2 + 2\alpha_j(m_{e_j} - m_e) + (m_{e_j} - m_e)^2\right]$$

$$SS_B = \sum_j n_j \alpha_j^2 - 2\sum_j \alpha_j (m_{ej} - m_e) n_j + \sum_j n_j (m_{ej} - m_e)^2$$

$$= \sum_j n_j \alpha_j^2 - 2\sum_j \alpha_j n_j m_{ej} + 2\sum_j \alpha_j n_j m_e + \sum_j n_j (m_{ej} - m_e)^2$$

$$E(SS_B) = \sum_j n_j E(\alpha_j^2) - 2\sum_j \alpha_j n_j E(m_{ej}) + 2\sum_j \alpha_j n_j E(m_e) + E\left[\sum_j n_j (m_{ej} - m_e)^2\right]$$

Pero $E(m_{ej}) = E\left(\frac{\sum_i e_{ij}}{n_j}\right) = \frac{\sum_i E(e_{ij})}{n_j} = 0$

$$E(m_e) = E\left(\frac{\sum_i \sum_j e_{ij}}{N}\right) = \frac{\sum_i \sum_j E(e_{ij})}{N} = 0$$

puesto que $E(e_{ij}) = 0$. Por lo tanto,

$$E(SS_B) = \sum_j n_j E(\alpha_j^2) + E\left[\sum_j n_j (m_{ej} - m_e)^2\right] = \sum_j n_j \alpha_j^2 + E\left[\sum_j n_j (m_{ej} - m_e)^2\right]$$

$$= \sum_j n_j \alpha_j^2 + E\left[\sum_j n_j (m_{ej}^2 - 2 m_{ej} m_e + m_e^2)\right]$$

$$= \sum_j n_j \alpha_j^2 + E\left[\sum_j n_j m_{ej}^2 - 2 m_e \sum_j n_j m_{ej} + m_e^2 \sum_j n_j\right]$$

pero $\sum_j n_j = N$ y $m_e = \frac{\sum_i \sum_j e_{ij}}{N} = \frac{\sum_j n_j m_{ej}}{N}$, por lo cual

$$E(SS_B) = \sum_j n_j \alpha_j^2 + E\left[\sum_j n_j m_{ej}^2 - 2 N m_e^2 + N m_e^2\right]$$

$$= \sum_j n_j \alpha_j^2 + E\left(\sum_j n_j m_{ej}^2 - N m_e^2\right) = \sum_j n_j \alpha_j^2 + \sum_j n_j E(m_{ej}^2) - N E(m_e^2)$$

pero $\sigma_{m_{ej}}^2 = E(m_{ej}^2) - \cancel{E^2(m_{ej})}^{\,0} = E(m_{ej}^2) = \frac{\sigma_e^2}{n_j}$

$$\sigma_{m_e}^2 = E(m_e^2) - \cancel{E^2(m_e)}^{\,0} = E(m_e^2) = \frac{\sigma_e^2}{N}$$

puesto que $\sigma_{m_{ej}}^2$ y $\sigma_{m_e}^2$ son, respectivamente, la varianza de la distribución de muestreo (normal) de errores medios para muestras de tamaño n_j, y la varianza de la distribución de muestreo (normal) de errores medios para muestras de tamaño N. Las muestras se juzgan extraídas de una población infinita también normal de errores e_{ij}, con varianza σ_e^2.

De acuerdo con lo anterior, y realizando las sustituciones convenientes, se llega a

$$E(SS_B) = \sum_j n_j\alpha_j^2 + \sum_j n_j \frac{\sigma_e^2}{n_j} - N\frac{\sigma_e^2}{N} = \sum_j n_j\alpha_j^2 + \sum_j \sigma_e^2 - \sigma_e^2$$

$$= \sum_j n_j\alpha_j^2 + J\sigma_e^2 - \sigma_e^2 = \sum_j n_j\alpha_j^2 + (J-1)\sigma_e^2$$

Si se divide ahora $E(SS_B)$ entre $J-1$, se puede obtener un estimador insesgado de σ_e^2 siempre que $\sum_j n_j\alpha_j^2$ sea igual con cero, es decir, cuando no exista absolutamente ningún efecto debido a cualquiera de los tratamientos j $(j=1,\ldots,J)$.

Entonces,

$$E(MS_B) = \frac{E(SS_B)}{J-1} = \frac{\sum_j n_j\alpha_j^2}{J-1} + \sigma_e^2$$

$E(MS_B) = \sigma_e^2$, si no existen efectos de tratamientos

$E(MS_B) > \sigma_e^2$, si existen efectos de tratamientos

$\therefore$ MS_B = VALOR MEDIO CUADRATICO ENTRE LAS MUESTRAS $= SS_B/J-1$

El resultado anterior confirma que la variación existente ENTRE valores y_{ij} que se encuentran en distintas muestras de tratamientos se puede deber a error aleatorio, o a efectos de los tratamientos, o a ambos. Entonces, cuando se establezca la hipótesis de que los tratamientos no provocan ningún efecto en los valores y_{ij}, se podrá emplear la estadística siguiente

$$\frac{\text{Estimador de } \sigma_e^2}{\sigma_e^2} = \frac{MS_B}{\sigma_e^2}$$

la cual posee, bajo las suposiciones hechas para el modelo, una distribución χ^2 con

$J-1$ grados de libertad, puesto que el cálculo de MS_B se realiza a través de J diferentes valores de m_j $\left[\sum_j \overbrace{n_j(m_j-m)^2}\right]$. Conviene mencionar que sumando grados de libertad de SS_W y SS_B, se obtiene $N-J+J-1 = N-1$, el nº de grados de libertad para SS_T.

A. 10 Prueba F para el modelo con un factor

Tomando en cuenta los valores de $E(MS_W)$ y $E(MS_B)$ ya obtenidos, se concluye que

$$\frac{MS_W}{\sigma_e^2} \left(\begin{array}{l}\text{estima en forma } \overset{MS_W}{\text{insesgada}} \text{ a } \sigma_e^2\text{, existan} \\ \text{o no efectos de tratamientos } j.\end{array}\right)$$

$$\frac{MS_B}{\sigma_e^2} \left(\begin{array}{l}\text{estima en forma } \overset{MS_B}{\text{insesgada}} \text{ a } \sigma_e^2\text{, cuando} \\ \text{no existen efectos de tratamientos } j.\end{array}\right)$$

deben adquirir el mismo valor siempre que

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_J$$

se cumpla, es decir, que el cociente de MS_B/σ_e^2 a MS_W/σ_e^2 no sea mayor que 1.

Ello implica que la hipótesis a probar en este caso es

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_j = \cdots = \mu_J \qquad (j=1,\dots,J)$$

(o, equivalentemente, $H_0: \alpha_j = 0, \ \forall_j$)

en contra de la alternativa

H_1: Al menos una media es distinta de las otras

(o, equivalentemente, $H_1: \alpha_j \neq 0$, para alguna(s) j)

y la estadística a emplear es

$$F = \frac{\dfrac{MS_B}{\sigma_e^2}}{\dfrac{MS_W}{\sigma_e^2}} = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{\dfrac{\sum_j n_j (m_j - m)^2}{J-1}}{\dfrac{\sum_j \sum_i (y_{ij} - m_j)^2}{N-J}}$$

que es el cociente de dos variables aleatorias independientes con distribución χ^2, bajo la suposición de normalidad de la población de resultados experimentales y_{ij}.

La estadística para la prueba es entonces la F con $J-1$ y $N-J$ grados de libertad en numerador y denominador, respectivamente, siempre que la hipótesis H_0 sea verdadera, es decir, cuando no existan efectos de tratamientos. De existir efectos, MS_B tendrá un valor mayor que el de MS_W, implicando ello que el valor de F será más grande que 1. Lo anterior sugiere que la prueba de la hipótesis H_0 se debe realizar, al nivel de significancia α seleccionado, en la cola derecha de la distribución teórica de F.

A. 11 EJEMPLO

Considérese el caso 3 del ejemplo sobre rendimiento de combustible para tres marcas distintas de automóvil presentado en la sección A.6 de estas notas. La tabla de valores y_{ij} es

$i \downarrow$	MARCA A	MARCA B	MARCA C
$i=1$	24	24	11
$i=2$	19	25	14
$i=3$	22	21	17
$j \rightarrow$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
n_j	$n_1=3$	$n_2=3$	$n_3=3$
$m_j \rightarrow$	$m_1 = 21.67$	$m_2 = 23,33$	$m_3 = 14$

$J = 3$

$m_1 = \dfrac{\sum_i y_{ij}}{n_1} = \dfrac{24+19+22}{3}$ $\quad m_2 = \dfrac{24+25+21}{3}$ $\quad m_3 = \dfrac{11+14+17}{3}$

$$m = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N} = \frac{24+19+22+24+25+21+11+14+17}{9} \doteq 19.67$$

o, también,

$$m = \frac{\sum_j n_j m_j}{N} = \frac{3(21.67)+3(23.33)+3(14)}{9} = 19.67$$

Entonces, los valores de SS_W, SS_B y SS_T son los siguientes:

$$SS_W = \sum_i \sum_j (y_{ij}-m_j)^2 = (24-21.67)^2+(19-21.67)^2+(22-21.67)^2 + (24-23.33)^2+(25-23.33)^2+(21-23.33)^2 + (11-14)^2+(14-14)^2+(17-14)^2$$

$$= 39.33$$

$$SS_B = \sum_j n_j (m_j - m)^2 = 3(21.67-19.67)^2 + 3(23.33-19.67)^2 + 3(14-19.67)^2$$
$$= 148.67$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j (y_{ij}-m)^2 = (24-19.67)^2+(19-19.67)^2+(22-19.67)^2 + (24-19.67)^2+(25-19.67)^2+(21-19.67)^2 + (11-19.67)^2+(14-19.67)^2+(17-19.67)^2$$

$$= 188.00$$

y se verifica que $SS_T = SS_W + SS_B = 39.33 + 148.67 = 188.00$

Los valores de MS_W y MS_B son

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-J} = \frac{39.33}{9-3} = 6.55$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{J-1} = \frac{148.67}{3-1} = 74.33$$

por lo que

$$F = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{74.33}{6.55} = 11.35$$

para $J-1=2$ y $N-J=6$ grados de libertad:

El valor teórico de $F_{2,6}$ considerando un nivel de significancia $\alpha = 0.01$ es, de tablas, igual con 10.92, por lo que

$$F = 11.35 > F_{2,6} = 10.92$$

y se debe rechazar $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, resultado que sugiere la existencia de efectos debidos a los tratamientos. En el caso del ejemplo, el rendimiento de combustible para un automóvil depende de si éste es de marca A, B o C.

A.12 Comentarios

A.12.1 Cuando Ho resulta cierta, el valor de F debe ser cercano a la unidad. Valores mucho más pequeños de 1.0 para F generalmente implican que, siendo o no cierta H_0, MS_W adquiere valores muy grandes, lo cual a su vez supone el efecto presente de algún factor sistemático no aleatorio dentro de los datos en las muestras, que impide que MS_W refleje únicamente la variación al azar de los valores y_{ij}. La existencia de tal efecto no controlado indica fallas en las suposiciones iniciales para la generación del modelo y generalmente también que el planteamiento del experimento en sí es inadecuado.

A.12.2 Una de las suposiciones iniciales especifica que la distribución de los errores e_{ij} es normal $N(0, \sigma_e^2)$ para cada tratamiento j, y, equivalentemente, que y_{ij} está distribuida también como $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Esta suposición ayuda a justificar el desarrollo teórico del modelo, así como el empleo de la prueba F. Es posible demostrar, si se emplea el teorema del límite central, que las inferencias que se hacen para medias en el caso de poblaciones normales son válidas también para no normales, siempre que el tamaño n_j de cada muestra sea suficientemente grande. En virtud de ésto, si no resulta posible soportar los supuestos de normalidad para el modelo aquí presentado, es indispensable el manejo de muestras más grandes que permitan aproximaciones adecuadas a la distribución normal.

A. 12. 3 Otra de las suposiciones establece que σ_e^2 debe tener igual valor para cada uno de los tratamientos j. Esta suposición de homogeneidad de variancias puede pasarse por alto sin consecuencias muy graves siempre que el número de valores en cada muestra de tratamiento sea igual en todos los casos. Si, por el contrario, el número de datos en cada muestra es distinto, y en realidad los valores de σ_e^2 no son los mismos para cada tratamiento, la inferencia final en términos de la prueba F puede verse seriamente afectada.

A. 12. 4 Es extremadamente importante procurar que los datos a los que se aplique el modelo expuesto se basen en observaciones independientes entre y dentro de las muestras, es decir, que cada observación no se relacione con las distintas, con el fin de soportar debidamente la suposición inicial de que los errores e_{ij} son independientes. Esta suposición es indispensable para justificar el empleo de la prueba F al realizar el análisis de la variancia, y si no se cumple se pueden cometer errores muy granes, que podrían desviar los resultados del análisis e invalidar la inferencia final.

A.13 Fórmulas simplificadas de Cálculo

Con objeto de realizar los cálculos de SS_W, SS_B y SS_T en forma más cómoda, se pueden realizar las simplificaciones siguientes:

$$SS_T = \sum_i \sum_j (y_{ij} - m)^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij}^2 - 2m y_{ij} + m^2)$$

$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2m \sum_i \sum_j y_{ij} + \sum_i \sum_j m^2$$

Como $m = \dfrac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N}$, y $\sum_i \sum_j m^2 = N m^2$, queda

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2m(Nm) + Nm^2 = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - Nm^2$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\left(\frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N}\right)^2 = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2}{N}$$

Por otro lado,

$$SS_B = \sum_j n_j (m_j - m)^2 = \sum_j n_j (m_j^2 - 2m m_j + m^2)$$

$$= \sum_j n_j m_j^2 - 2m \sum_j n_j m_j + m^2 \sum_j n_j$$

Como $m_j = \dfrac{\sum_i y_{ij}}{n_j}$, entonces $m = \dfrac{\sum_j n_j m_j}{N}$, quedando

$$SS_B = \sum_j n_j \left(\frac{\sum_i y_{ij}}{n_j}\right)^2 - 2m(Nm) + Nm^2 = \sum_j \frac{\left(\sum_i y_{ij}\right)^2}{n_j} - Nm^2$$

$$= \sum_j \frac{\left(\sum_i y_{ij}\right)^2}{n_j} - \frac{\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2}{N}$$

Como es sabido, $SS_T = SS_W + SS_B$. Por lo tanto,

$$SS_W = SS_T - SS_B = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2}{N} - \sum_j \frac{\left(\sum_i y_{ij}\right)^2}{n_j} + \frac{\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2}{N}$$

$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_j \frac{\left(\sum_i y_{ij}^2\right)}{n_j}$$

Es costumbre generalizada presentar los resultados del análisis de varianza en la forma siguiente:

Fuente de Variabilidad	Suma de Cuadrados SS	Grados de libertad	MS	F
Entre muestras	$\sum_j \frac{(\sum_i y_{ij})^2}{n_j} - \frac{(\sum_j \sum_i y_{ij})^2}{N}$	$J-1$	$\frac{SS_B}{J-1}$	$\frac{MS_B}{MS_W}$
Dentro de muestras	$\sum_j \sum_i y_{ij}^2 - \sum_j \frac{(\sum_i y_{ij})^2}{n_j}$	$N-J$	$\frac{SS_W}{N-J}$	
Totales	$\sum_j \sum_i y_{ij}^2 - \frac{(\sum_j \sum_i y_{ij})^2}{N}$	$N-1$		

1.14 EJEMPLO

Con el fin de comparar las propiedades reflectivas de cuatro tipos diferentes de pintura, A, B, C y D, se diseñó un experimento completamente aleatorizado cuyos resultados, obtenidos mediante el empleo de un instrumento óptico especial, fueron los siguientes:

PINTURAS

	A	B	C	D
	195	45	230	110
	150	40	115	55
	205	195	235	120
	120	65	225	50
	60	145		80
		195		
$n_j \rightarrow$	5	6	4	5
$m_j \rightarrow$	166.00	114.17	201.25	83.00
$\rightarrow$	830	685	805	415

$$N = \sum_j n_j = 5+6+4+5 = 20$$

$$\sum_i \sum_j y_{ij} = \sum_j \left(\sum_i y_{ij}\right) = 830 + 685 + 805 + 415 = 2735$$

$$\frac{\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2}{N} = \frac{(2735)^2}{20} = \frac{7,480,225}{20} = 374,011.25$$

$$\sum_j \frac{\left(\sum_i y_{ij}\right)^2}{n_j} = \frac{(830)^2}{5} + \frac{(685)^2}{6} + \frac{(805)^2}{4} + \frac{(415)^2}{5}$$
$$= 137,780 + 78,204.17 + 162,006.25 + 34445 = 412,435.42$$

$$\sum_j \sum_i y_{ij}^2 = (195)^2 + (150)^2 + (205)^2 + (120)^2 + (160)^2$$
$$+ (45)^2 + (40)^2 + (195)^2 + (65)^2 + (145)^2 + (195)^2$$
$$+ (230)^2 + (115)^2 + (235)^2 + (225)^2$$
$$+ (110)^2 + (55)^2 + (120)^2 + (50)^2 + (80)^2 = 457,875$$

Por lo tanto,

$$SS_B = \sum_j \frac{\left(\sum_i y_{ij}\right)^2}{n_j} - \frac{\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2}{N} = 412,435.42 - 374,011.25 = 38,424.17$$

$$SS_W = \sum_j \sum_i y_{ij}^2 - \sum_j \frac{\left(\sum_i y_{ij}\right)^2}{n_j} = 457,875 - 412,435.42 = 45,439.58$$

$$SS_T = \sum_j \sum_i y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_j \sum_i y_{ij}\right)^2}{N} = 457,875 - 374,011.25 = 83,863.75$$

$$\left(o \quad SS_T = SS_W + SS_B = 45,439.58 + 38,424.17 = 83,863.75 \right)$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{J-1} = \frac{38,424.17}{4-1} = 12,808.05$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-J} = \frac{45,439.58}{20-4} = 2,839.97$$

$$F = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{12,808.05}{2,839.97} = 4.51$$

Con los datos anteriores se puede formular la tabla de análisis de varianza siguiente:

Fuente de variabilidad	SS	G. de l.	MS	F
Entre muestras	$SS_B = 38{,}424.17$	$J-1 = 3$	$MS_B = 12{,}808.05$	$F = \frac{12{,}808.05}{2{,}839.97} = 4.51$
Dentro de muestras	$SS_W = 45{,}439.58$	$N-J = 16$	$MS_W = 2{,}839.97$	
Totales	$SS_T = 83{,}863.75$	$N-1 = 19$		

El valor teórico de $F_{3,16}$ considerando un nivel de significancia de 1% es, de tablas, igual con 5.29, por lo cual

$$F = 4.51 < F_{3,16} = 5.29$$

quieriendo decir esto que la hipótesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

puede aceptarse al nivel de significancia empleado, resultado que supone la inexistencia de efectos en los valores de las reflectancias debidos a los diferentes tipos de pintura.

B. MODELOS CON UN SOLO FACTOR (J TRATAMIENTOS) Y EFECTOS ALEATORIOS

B.1 DESCRIPCION

El modelo anterior con efectos fijos es apropiado en su empleo cuando se piensa que los tratamientos experimentales usados cubren la gama completa de niveles del factor de interés. En el ejemplo de A.14 se supone entonces que los únicos tipos diferentes de pintura que interesa investigar, son los cuatro mencionados en el enunciado del problema, es decir, en este caso el efecto de cualquiera de los tratamientos (tipos de pintura) queda fijo, en el sentido de que ese efecto debe aparecer en cualquier repetición del experimento.

Sin embargo, se presentan en la práctica experimentos para los cuales son posibles muchos más niveles del factor de interés que los que se toman en cuenta al realizar un experimento en particular. Estos últimos constituyen entonces una simple muestra aleatoria del conjunto potencial de niveles que podría considerarse en el estudio del problema. En este caso no se considera al efecto de cualquier tratamiento como fijo, puesto que para cada repetición del experimento se puede juzgar una nueva muestra aleatoria de niveles del factor de interés (tratamientos).

B.2 SUPUESTOS

B.2.1 U_j representa un efecto j aleatorio, con distribución de probabilidad normal $\mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$.

B.2.2 Los J valores de la variable aleatoria U_j son completamente independientes entre sí.

B.2.3 Las variables aleatorias U_j son independientes del error e_{ij}.

B.2.4 Se mantienen los supuestos del modelo de efectos fijos.

B.3 MODELO A EMPLEAR

$$y_{ij} = \mu + U_j + e_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n_j \\ j = 1, \ldots, J \end{array}$$

modelo lineal

Este modelo lineal es semejante al de efectos fijos, excepto que el término que involucraba a α_j, el efecto fijo del tratamiento j, se sustituyó por U_j, el efecto aleatorio correspondiente. De lo anterior, se desprende que su manejo estadístico será muy parecido al del primer modelo, con la salvedad de los valores U_j.

B.4 PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS

Se sabe que

$$y_{ij} - m = (y_{ij} - m_j) + (m_j - m)$$

y que

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - m)^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij} - m_j)^2 + \sum_j n_j (m_j - m)^2$$

Es decir, la suma de cuadrados total es igual a la suma de cuadrados dentro de las muestras más la suma de cuadrados entre ellas, por lo que

$$SS_T = SS_W + SS_B$$

B.5 Suma de cuadrados DENTRO de las muestras

Se sabe que para una muestra del tratamiento j

$$\frac{\sum_i (y_{ij}-m_j)^2}{n_j-1}$$

es un estimador puntual insesgado de la varianza del error aleatorio para todos los resultados y_{ij} a los que se aplicó dicho tratamiento, puesto que

$$E\left(\frac{\sum_i (y_{ij}-m_j)^2}{n_j-1}\right) = \sigma_e^2$$

Entonces,

$$E(SS_w) = E\left(\sum_i \sum_j (y_{ij}-m_j)^2\right) = \sum_j \left[E\left(\sum_i (y_{ij}-m_j)^2\right)\right]$$
$$= \sum_j (n_j-1)\sigma_e^2 = N\sigma_e^2 - J\sigma_e^2 = (N-J)\sigma_e^2$$

Como

$$E(MS_w) = E\left(\frac{SS_w}{N-J}\right) = \frac{(N-J)\sigma_e^2}{N-J} = \sigma_e^2$$

entonces $SS_w/(N-J)$ estima en forma insesgada a σ_e^2, existan o no efectos de los tratamientos aleatorios. Se debe observar que el resultado en este caso es el mismo que se obtuvo para efectos fijos.

B.6 Suma de cuadrados ENTRE las muestras

Para cualquier muestra j de un tratamiento aleatorio

$$m_j = \frac{\sum_i y_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_i}{n_j}(\mu + U_j + e_{ij}) = \frac{\sum_i \mu}{n_j} + \frac{\sum_i U_j}{n_j} + \frac{\sum_i e_{ij}}{n_j}$$

$$= \frac{n_j \mu}{n_j} + \frac{n_j U_j}{n_j} + \frac{\sum_i e_{ij}}{n_j} = \mu + U_j + m_{ej}$$

en donde $m_{ej} = \dfrac{\sum_i e_{ij}}{n_j}$

También,

$$m = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N} = \frac{\sum_i \sum_j}{N} (\mu + U_j + e_{ij})$$

$$= \frac{\sum_i \sum_j \mu}{N} + \frac{\sum_i \sum_j U_j}{N} + \frac{\sum_i \sum_j e_{ij}}{N} = \mu + \frac{\sum_i \sum_j U_j}{N} + \frac{\sum_i \sum_j e_{ij}}{N}$$

$$= \mu + \bar{U} + m_e$$

en donde $m_e = \frac{\sum_i \sum_j e_{ij}}{N}$ y $\bar{U} = \frac{\sum_i \sum_j U_j}{N} = \frac{\sum_j n_j U_j}{N}$

Por lo anterior,

$$m_j - m = \mu + U_j + m_{e_j} - \mu - \bar{U} - m_e$$

$$= (U_j - \bar{U}) + (m_{e_j} - m_e)$$

$$SS_B = \sum_j n_j (m_j - m)^2 = \sum_j n_j \left([U_j - \bar{U}] + [m_{e_j} - m_e] \right)^2$$

$$= \sum_j n_j \left([U_j - \bar{U}]^2 - 2 [U_j - \bar{U}][m_{e_j} - m_e] + [m_{e_j} - m_e]^2 \right)$$

$$= \sum_j n_j (U_j - \bar{U})^2 - 2 \sum_j (U_j - \bar{U})(m_{e_j} - m_e) n_j + \sum_j n_j (m_{e_j} - m_e)^2$$

$$= \sum_j n_j U_j^2 - 2\bar{U} \overbrace{\sum_j n_j U_j}^{N\bar{U}} + \bar{U}^2 \overbrace{\sum_j n_j}^{N} - 2 \sum_j (U_j - \bar{U})(m_{e_j} - m_e) n_j + \sum_j n_j (m_{e_j} - m_e)^2$$

$$= \sum_j n_j U_j^2 - 2N\bar{U}^2 + N\bar{U}^2 - 2 \sum_j (U_j - \bar{U})(m_{e_j} - m_e) n_j + \sum_j n_j (m_{e_j} - m_e)^2$$

$$= \sum_j n_j U_j^2 - N\bar{U}^2 - 2 \sum_j (U_j - \bar{U})(m_{e_j} - m_e) n_j + \sum_j n_j (m_{e_j} - m_e)^2$$

$$E(SS_B) = \sum_j n_j E(U_j^2) - N E(\bar{U}^2) - 2E\left[(U_j - \bar{U})(m_{e_j} - m_e) n_j\right] + E\left[\sum_j n_j (m_{e_j} - m_e)^2\right]$$

En el modelo de efectos fijos se obtuvo

$$E\left[\sum_j n_j (m_{e_j} - m_e)^2\right] = \sum_j n_j E(m_{e_j}^2) - N E(m_e^2) = \sum_j n_j \frac{\sigma_e^2}{n_j} - N \frac{\sigma_e^2}{N}$$

$$= \sum_j \sigma_e^2 - \sigma_e^2 = (J-1)\sigma_e^2$$

Por lo cual

$$E(SS_B) = \sum_j n_j E(U_j^2) - N E(\bar{U}^2) - 2E\left[(U_j - \bar{U})(m_{e_j} - m_e) n_j\right] + (J-1)\sigma_e^2$$

Por otra parte, se sabe que $E(U_j) = E(\bar{U}) = 0$, y que

$$VAR(U_j) = \sigma_u^2 = E(U_j^2) - \cancel{E^2(U_j)}^{\,0} = E(U_j^2)$$

$$VAR(\bar{U}) = VAR\left(\frac{\sum_j n_j U_j}{N}\right) = E(\bar{U}^2) - \cancel{E^2(\bar{U})}^{\,0} = E(\bar{U}^2)$$

Entonces, como las U_j son independientes entre sí,

$$E(\bar{U}^2) = VAR\left(\frac{\sum_j n_j U_j}{N}\right) = \sum_j VAR\left(\frac{n_j U_j}{N}\right) =$$

$$= \sum_j \frac{n_j^2}{N^2} VAR(U_j) = \sigma_u^2 \sum_j \frac{n_j^2}{N^2}$$

La expresión para $E(SS_B)$ queda como

$$E(SS_B) = \sigma_u^2 \sum_j n_j - N\sigma_u^2 \sum_j \frac{n_j^2}{N^2} - 2E\left([U_j - \bar{U}][m_{ej} - m_e]n_j\right) + (J-1)\sigma_e^2$$

$$= N\sigma_u^2 - \sigma_u^2 \sum_j \frac{n_j^2}{N} - 2E\left([U_j - \bar{U}][m_{ej} - m_e]n_j\right) + (J-1)\sigma_e^2$$

Reordenando términos, y considerando que

$$2E\left([U_j - \bar{U}][m_{ej} - m_e]n_j\right) = 0$$

puesto que se supuso que las variables U_j son independientes de las e_{ij}, y tanto m_{ej} como m_e provienen de sumas de errores aleatorios, queda

$$E(SS_B) = (J-1)\sigma_e^2 + \sigma_u^2\left[N - \frac{\sum_j n_j^2}{N}\right]$$

Si $n = n_1 = n_2 = \ldots = n_J$, entonces, sabiendo que $N = nJ$,

$$E(SS_B) = (J-1)\sigma_e^2 + \sigma_u^2\left(N - \frac{Jn^2}{N}\right) = (J-1)\sigma_e^2 + \left(nJ - \frac{n^2 J}{nJ}\right)\sigma_u^2$$

$$= (J-1)\sigma_e^2 + n(J-1)\sigma_u^2$$

En el primer caso,

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{J-1}\right) = \frac{(J-1)\sigma_e^2}{J-1} + \frac{\sigma_u^2}{J-1}\left[N - \frac{\sum_j n_j^2}{N}\right]$$

$$E(MS_B) = \sigma_e^2 + \frac{\sigma_u^2}{J-1}\left[N - \frac{\sum_j n_j^2}{N}\right]$$

Y, cuando las muestras son del mismo tamaño,

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{J-1}\right) = \frac{(J-1)\,\sigma_e^2}{(J-1)} + \frac{n(J-1)\,\sigma_u^2}{(J-1)}$$

$$= \sigma_e^2 + n\,\sigma_u^2$$

Se puede observar en ambos casos que MS_B estima en forma insesgada a σ_e^2 siempre que σ_u^2, la variancia de los tratamientos aleatorios U_j, sea nula.

B.7 Prueba F para el modelo de efectos aleatorios

Observando el valor de $E(MS_B)$, se puede concluir que si MS_B es más grande que MS_W, esto puede deberse a que σ_u^2 es diferente de cero, es decir, a que realmente exista variación entre las muestras, o efectos de los tratamientos.

Suponiendo entonces que σ_u^2 sea cero, MS_B y MS_W son estimadores insesgados de σ_e^2, por lo que la hipótesis nula debe ser en este caso

$$H_0: \sigma_u^2 = 0$$

la cual puede probarse, en contra de la alternativa

$$H_1: \sigma_u^2 > 0 \quad ,$$

empleando la estadística

$$F = \frac{\dfrac{MS_B}{\sigma_e^2}}{\dfrac{MS_W}{\sigma_e^2}} = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{\dfrac{\sum_j n_j (m_j - m)^2}{J-1}}{\dfrac{\sum_j \sum_i (y_{ij} - m_j)^2}{N-J}}$$

que es nuevamente el cociente de dos variables alea torias independientes con distribución χ^2, bajo las suposiciones de normalidad establecidas. Dicha estadística tiene $J-1$ y $N-J$ grados de libertad, en numerador y denominador, respectivamente.

De lo anterior se desprende que los cálculos y el tipo de prueba que se realizan para el modelo de efectos aleatorios son los mismos que se tienen para el modelo de efectos fijos. Sin embargo, las conclusiones son diferentes en el caso de un eventual rechazo de la hipótesis nula. Para el modelo de efectos fijos ello significa que probablemente haya diferencia entre los J tratamientos que se emplearon, que a su vez representan todos los niveles posibles del factor.

Para el modelo de efectos aleatorios se concluirá que probablemente existe diferencia entre todos los tratamientos, de los cuales los J examinados no representan más que una muestra aleatoria.

B.8 Estimación de la varianza de los efectos aleatorios

Puesto que

$$E(MS_W) = \sigma_e^2 \quad y \quad E(MS_B) = \sigma_e^2 + \frac{\sigma_u^2}{J-1}\left[N - \frac{\sum_j n_j^2}{N}\right]$$

entonces

$$E(MS_B) - E(MS_W) = \cancel{\sigma_e^2} + \frac{\sigma_u^2}{J-1}\left[N - \frac{\sum_j n_j^2}{N}\right] - \cancel{\sigma_e^2}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\left[E(MS_B) - E(MS_W)\right](J-1)}{N - \frac{\sum_j n_j^2}{N}}$$

Y un estimador puntual de σ_u^2, cuando los tamaños de muestra son diferentes, es

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{(MS_B - MS_w)(J-1)}{N - \frac{\sum_j n_j^2}{N}}$$

Si los tamaños de las muestras son iguales todos a n, se obtiene

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{MS_B - MS_w}{n}$$

B.9 EJEMPLO

Cierta compañía que fabrica acumuladores sospecha que la temperatura del medio en el que las baterías trabajan afecta su vida activa. Se probaron treinta baterías homogéneas en sus características y, por razones de tipo económico, únicamente se tomaron en cuenta cinco diferentes valores de temperatura, asignándose al azar seis acumuladores por nivel de temperatura. La tabla de datos es la siguiente

	TEMPERATURA (°C)				
	10	15	25	50	60
TIEMPO DE VIDA ACTIVA, HORAS	2000	1980	1890	1900	1820
	1920	2000	1965	1850	1910
	1930	1900	1875	1860	1790
	2005	1870	1880	1780	1890
	1890	1810	1960	1820	1780
	1970	1900	1890	1780	1840
$n_j \rightarrow$	6	6	6	6	6
$\sum_i y_{ij} \rightarrow$	11715	11460	11460	10990	11030

Table IV. Fractiles of the F distribution

This table gives the .95, .975, and .99 fractiles of the F distribution with ν_1 and ν_2 degrees of freedom for $\nu_1 = 1(1)10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120, \infty$ and $\nu_2 = 1(1)30, 40, 60, 120, \infty$.

Example: For $\nu_1 = 8$ and $\nu_2 = 13$, the .95 fractile is 2.77.

.95 Fractiles

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	243.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Table IV (continued) .975 Fractiles

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.21	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Table IV (continued) .99 Fractiles

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.15	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	28.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.05	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.06
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.91	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.81	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

This table is abridged from Table 18 of the *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, edited by Pearson and Hartley, and is reproduced with the kind permission of E. S. Pearson and the trustees of *Biometrika*.

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \bar{y}. &&= 0.244\\
\hat{\alpha}_1 &= \bar{y}_1 - \bar{y}. &&= 0.024\\
\hat{\alpha}_2 &= \bar{y}_2 - \bar{y}. &&= -0.017\\
\hat{\alpha}_3 &= \bar{y}_3 - \bar{y}. &&= -0.014\\
\hat{\alpha}_4 &= \bar{y}_4 - \bar{y}. &&= 0.006
\end{aligned}$$

y las estimaciones correspondientes de las $\hat{\mu}_i$ están dados por $\hat{\mu}_i = \bar{y}_i$.

El análisis de la varianza descrito en esta sección se aplica a clasificaciones en una sola dirección en las que cada muestra tiene el mismo número de observaciones. Si no es éste el caso, y los tamaños de las muestras son $n_1, n_2, \ldots n_k$, sólo tenemos que substituir $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ en lugar de nk y escribir las expresiones de cálculo de SST y $SS(Tr)$ en la forma

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - C$$

En lo demás, el procedimiento es el mismo. (Ver problema 13 de la página 254.)

EJERCICIOS

1. Se hace un experimento para comparar la acción limpiadora de dos detergentes, A y B. Se ensucian 20 piezas de tela con grasa y mugre, y cada una se lava con uno de los detergentes en una máquina de tipo agitador, midiéndose después la blancura de las piezas. Criticar los aspectos siguientes del experimento:
   (a) El experimento completo se hizo con agua suave.
   (b) Quince piezas se lavaron con el detergente A y cinco con el B.
   (c) Para acelerar la prueba, se empleó agua muy caliente y un tiempo de lavado de 30 segundos.
   (d) Las medidas de blancura de todas las piezas lavadas con el detergente A se hicieron primero.
2. Un *bon vivant*, deseaba saber la causa de sus frecuentes malestares, después de beber hizo el siguiente experimento. La primera noche solo bebió whiskey con agua; la segunda, vodka y agua; la tercera, ginebra y agua, y en la cuarta, ron y agua. En cada de las siguientes mañanas tuvo malestares y llegó a la conclusión de que era el factor común, o sea el agua, lo que le hacía daño.
   (a) Esta conclusión, obviamente, es incorrecta, pero, ¿puede usted decir qué principios del proyecto experimental han sido violados?
   (b) Dé un ejemplo menos obvio de un experimento que tenga las mismas conclusiones
   (c) Suponga que nuestro amigo ha modificado su experimento de tal forma que cada una de las bebidas alcohólicas se ha empleado con, y sin, agua, de tal forma que el experimento duró 8 noches. ¿Pueden los resultados de este otro experimento servir para confirmar o refutar la hipótesis de que el agua es la causa de los malestares? Explique por qué.

Desventajas de los factoriales

1) El resultado del experimento y el análisis estadístico resultante son más complejos.
2) Con un gran número de combinaciones de tratamiento, la selección de unidades experimentales homogéneas es más difícil.
3) Convencidos de que las combinaciones de tratamiento pueden ser de muy poco o ningún interés; consecuentemente, algunos de los recursos experimentales pueden ser malgastados.

10.19 RESUMEN

En este capítulo se han discutido varios conceptos sumamente importantes. Se recomienda al lector que los examine de vez en cuando para que progrese a través de los capítulos subsecuentes. Tal repaso periódico será benéfico por diversas razones, por ejemplo: 1) Es esencial un completo entendimiento de los conceptos, principios y técnicas involucradas, para un estudio fructífero de los diseños experimentales, los cuales son temas de los tres capítulos siguientes y, 2) una apreciación de estos importantes principios manifestaría una experimentación perfeccionada.

Problemas

10.1 Eligiendo situaciones prácticas de interés en el campo de su especialidad, describa tres problemas cuyas soluciones deban ser determinadas experimentalmente.

10.2 Con respecto al problema 10 1, discuta la necesidad de un diseño experimental en cada una de las tres ilustraciones.

10.3 Algunas veces se dice que el diseño experimental consta de dos (casi distintas) partes: a) la elección de los tratamientos, unidades experimentales y características que deben observarse; b) la elección del número de unidades experimentales y la asignación del método de tratamiento respectivo. Discuta esta clasificación desde los puntos de vista del investigador y del estadístico.

10.4 Defina "error sistemático" y discuta la relación entre este factor y el diseño estadístico de experimentos.

10.5 Algunos términos que ocurren frecuentemente en las obras de referencia son: a) exactitud, b) precisión, c) validez, d) confiabilidad y e) tendencias. Restringiendo sus observaciones a la teoría estadística o a la aplicación de métodos estadísticos, defina y discuta cada uno de esos términos.

10.6 Cox (14) titula uno de sus capítulos "Diseños para la reducción de error". ¿Qué le sugiere este título?

10.7 Con respecto a factoriales, ¿qué se entiende por la frase "reproducción latente"?

10.8 Discuta el uso de la información concomitante en el diseño experimental.

10.9 Elija situaciones prácticas de interés en el campo de su especialidad, ilustre el concepto de confusión. Dé ejemplos de: a) confusión inevitable, b) confusión involuntaria y c) confusión intencional.

10.10 Eligiendo situaciones prácticas de interés en su especialidad, ilustre el concepto de aleatorización.

10.11 Con referencia al problema 10.10, discuta las dificultades (si existen) asociadas con el proceso de aleatorización.

10.12 Explique su interpretación a la frase "aleatorización restringida".

10.13 ¿Qué haría usted si en la planeación del diseño de un bloque completo azarizado, ocurriese el mismo orden de tratamientos (al azar) en cada bloque?

10.14 Discuta las siguientes formas en que pueden asignarse tratamientos a las unidades experimentales: a) al azar, b) subjetivamente y c) sistemáticamente. Haga ilustraciones que muestren los beneficios, peligros y dificultades implícitos en cada uno de los tres procedimientos.

10.15 Como encabezado de una de las secciones de su libro, Cox (14) usa la frase "La aleatorización como un artificio de cancelación". Sin hacer referencia a la discusión de Cox, ¿cuál cree usted que es la idea de dicho autor?

10.16 Cox (14) establece una distinción entre factores que representan a un tratamiento aplicado a las unidades experimentales (factores de tratamiento) y los factores correspondientes a una clasificación de las unidades experimentales en uno o más tipos (factores de clasificación). Dé ilustraciones de cada una de esas situaciones de interés en su especialidad.

10.17 Ha quedado establecido que una variable incontrolada e inconmensurable puede ser de suficiente importancia y conducir a la confusión de que dos factores controlados se interactúan en un grado significativo. Discuta esta idea incluyendo todas las implicaciones posibles. ¿Qué defensa debemos tener contra la ocurrencia de tal resultado?

10.18 Cox (14) asimismo, establece que algunas veces es conveniente clasificar los factores de la manera siguiente: a) factores cualitativos específicos, b) factores cuantitativos, c) factores cualitativos por rango y d) factores cualitativos muestreados. ¿Cómo definiría usted a cada uno de ellos? Compare sus ideas con las expresadas por Cox.

10.19 Muestre, gráficamente, lo que se entiende por una interacción. Ilustre su idea empleando los datos de los ejemplos 10.8 y 10.9.

10.20 Explique la relación, si existe, entre funciones, regresión (es decir, funciones respuesta) y los conceptos de efectos e interacciones.

10.21 ¿Cómo procedería usted para seleccionar los factores por investigar en un experimento? Ilustre esto con ejemplos de interés en su propia especialidad.

10.22 Suponiendo que los factores han sido decididos, ¿Cómo procedería para seleccionar los niveles de factor? Ilustre esto con ejemplos de interés en su propia especialidad.

10.23 Eligiendo situaciones prácticas de interés en el campo de su especialidad, ilustre diseños completamente azarizados, bloque completo azarizado y separado en secciones.

10.24 Indique cómo pretendieron "controlar el error" los ejemplos proporcionados para la solución del problema 10.23.

10.25 ¿Qué se entiende por la precisión de un experimento? ¿De un contraste?

10.26 ¿Qué se entiende por un experimento secuencial? ¿Hay alguna otra clase? Discútalas.

10.27 En el problema 10.3 se hizo referencia a: "...la elección de tratamientos, unidades experimentales y características que deben observarse". Ilustre cada uno con ejemplos de interés en el campo de su especialidad.

10.28 Discuta los siguientes conceptos relativos a la selección de unidades experimentales: a) número de unidades, b) tamaño de las unidades, c) forma de las unidades y d) independencia de las unidades.

10.29 ¿Qué se entiende por un "control" de tratamiento?

10.30 Cox (14) clasifica las observaciones en 6 grupos: a) observaciones primarias, b) observaciones substituto de las primarias, c) observaciones explicatorias, d) observaciones suplementarias para mejorar la precisión, e) observaciones suplementarias para detectar interacciones y f) observaciones para cotejar la aplicación de los tratamientos. Trate de definir e ilustrar cada uno de ellos, después compare sus ideas con las expresadas por Cox.

10.31 Basándose en las muestras dadas en la sección 10.16, construya su propia lista de "pasos en el diseño de un experimento".

10.32 Contraste el método de experimentación "un factor a la vez" con el procedimiento del factorial. Construya una tabla que muestre y compare las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

10.33 Defina: a) experimentos absolutos, b) experimentos comparativos. Dé ejemplos de cada uno de ellos. ¿Con cuál tipo está relacionado especialmente este libro?

10.34 Considere los siguientes "elementos" del método experimental:

a) Control, o la eliminación de los efectos variables extraños
b) Exactitud de los instrumentos y de la adquisición de datos
c) Reducción del número de variables por investigar
d) Planeación de la secuencia de prueba previamente a la iniciación de la experimentación
e) Detección de funciones defectuosas
f) Pruebas para la justificación de resultados
g) Análisis e interpretación de resultados.

Valorice la lista anterior por comparación con las ideas expresadas en este capítulo.

10.35 Eligiendo situaciones prácticas de interés en el campo de su especialidad, dé tres ejemplos de experimentos diseñados estadísticamente. Para cada uno de ellos, señale cómo y dónde se emplearon los conceptos expuestos en este capítulo.

10.35 Elija un problema práctico del área de su especialización. Siguiendo, donde sea práctico, los conocimientos expresados en este capítulo, diseñe un experimento para proporcionar datos importantes al problema. Justifique cualquier decisión que haga y relaciónela con la discusión en el texto. Si es posible, efectúe el experimento y después analice e interprete los resultados.

Referencias y otras obras de consulta

1. Anscombe, F. J. Quick analysis methods for random balance experimentation. *Technometrics*, 1 (No. 2):195-209, May, 1959.
2. Barbacki, S., and Fisher, R. A. A test of the supposed precision of systematic arrangements. *Ann. Eugen.*, 7:189, 1936.
3. Bicking, C. A. Some uses of statistics in the planning of experiments. *Industrial Quality Control*, 10 (No. 4):20-24. Jan., 1954
4. Bingahm, R. S., Jr. Design of experiments from a statistical viewpoint, Parts I and II. *Industrial Quality Control*, 15 (No's. 11 and 12):29-34 and 12-15, May and June, 1959.
5. Bross, I. D. J. *Design for Decision*. The Macmillan Company, New York, 1953.
6. Brownlee, K. A. The principles of experimental design. *Industrial Quality Control*, 13 (No. 8):12-20, Feb., 1957.
7. ———. *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.
8. Budne, T. A. Random balance: Part I—The missing statistical link in fact finding techniques. Part II—The techniques of analysis, Part III—Case histories. *Industrial Quality Control*, 15 (No's. 10-11-12):5-10, 11-16, 16-19, April, May, and June, 1959.

9. ———. The application of random balance designs. *Technometrics*, 1 (No. 2):139-55, May, 1959.
10. Caplan, F. Statistical design in electronics production-line experimentation. *Industrial Quality Control*, 12 (No. 5):12-13, Nov., 1955.
11. Chapin, F. S. *Experimental Designs in Sociological Research*. Harper and Brothers Publishers, New York, 1947.
12. Chew, V. (editor) *Experimental Designs in Industry*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958.
13. Cochran, W. G., and Cox, G. M. *Experimental Designs*. Second Ed. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.
14. Cox, D. R. *Planning of Experiments*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958.
15. Crump, S. L. Some aspects of experimental design. *Industrial Quality Control*, 10 (No. 4):14-16, Jan., 1954
16. Davies, O. L. (editor) *The Design and Analysis of Industrial Experiments*. Second Ed. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956.
17. DeLury, D. B. On the design of experiments. *Industrial Quality Control*, 10 (No. 4):24-29, Jan., 1954.
18. ———. Designing experiments to isolate sources of variation. *Industrial Quality Control*, 11 (No. 2):22-24, Sept., 1954.
19. Duffett, J. R. Some experience with the design of experiments. *Industrial Quality Control*, 11 (No. 3):36-40, Nov., 1954.
20. Federer, W. T. *Experimental Design* Macmillan Co., New York, 1955.
21. Finney, D. J. *Experimental Design and Its Statistical Basis*. The University of Chicago Press, Chicago, 1955.
22. ———. *An Introduction to the Theory of Experimental Design*. The University of Chicago Press, Chicago, 1960.
23. Fisher, R. A. *Statistical Methods for Research Workers*. Tenth Ed. Oliver and Boyd, Edinbunrgh, 1946.
24. ———. *The Design of Experiments*. Fourth Ed. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1947.
25. Gilbert, S. Statistical design of experiments in metallurgical research. *Industrial Quality Control*, 12 (No. 5):13-18, Nov. 1955.
26. Hunter, J. S. Determination of optimum operating conditions by experimental methods, Part II-1-2-3, Models and methods. *Industrial Quality Control*, 15 (No's. 6-7-8-):16-24, 7-15, and 6-14, Dec., 1958, Jan. and Feb., 1959.
27. Jeffreys, H. Random and systematic arrangements. *Biometrika*, 31-1, 1939.
28. Kempthorne, O. *The Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1952.
29. Leone, F. C., Nottingham, R. B., and Zucker, J. Significance tests and the dollar sign. *Industrial Quality Control*, 13 (No. 12):5-20, June, 1957.
30. Mandelson, J. The relation between the engineer and the statistician. *Industrial Quality Control*, 13 (No. 11):31-34, May, 1957.
31. Mood, A. M., The heart of a reliability program. *IRE Transaction on Reliability and Quality Control*, PGRQC-16:16-23, June, 1959.
32. National Bureau of Standards. *Projects and Publications of the National Applied Mathematics Laboratories*. April through June, 1949.
33. ———.Economy in the planning of experiments. *Industrial Quality Control*, 14 (No. 7):5-6, Jan., 1958.
34. Peach, P. The use of statistics in the design of experiments. *Industrial Quality Control*, 3 (No 3):15-17, Nov., 1946.
35. Pearson, E. S. Some aspects of the problem of randomization. *Biometrika*, 29:53, 1938.
36. ——. An illustration of "Student's" inquiry into the effect of balancing in agricultural experiments *Biometrika*. 30:159, 1938.
37. ———, and Wishart, J (editors). *"Student's" Collected Papers*. Biometrika Office, University College, London, 1942.
38. Purcell, W. R Balancing and randomizing in experiments. *Industrial Quality Control*, 7 (No. 4):7-14, Jan , 1951.
39. Quenouille, M. H *The Design and Analysis of Experiment*. Charles Griffin and Co., Ltd , London, 1953.
40. Ratner, R. A. Effect of variations in weight upon move times. Master of Science Thesis, Iowa State University, Ames, 1951.

41. Satterthwaite, F. E. Randon balance experimentation. *Technometrics,* 1 (No. 2):111-37, May, 1959.
42. Shainin, D. The statistically designed experiment. *Harvard Business Rev.,* July-Aug., 1957.
43. Snedecor, G. W. *Statistical Methods.* Fifth Ed. The Iowa State University Press, Ames, 1956.
44. "Student" (W. S. Gosset). Comparison between balanced and random arrangements of field plots. *Biometrika,* 29:363, 1938.
45. Wilson, E. B., Jr. *An Introduction to Scientific Research.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
46. Yates, F. The design and analysis of factorial experiments. *Techn. Comm. No. 35,* Imperial Bureau of Soil Science, 95 pp., 1937.
47. Youden, W. J. Statistical design. A collection by the editors of *Industrial and Engineering Chemistry* of a series of bimonthly articles by Dr W. J. Youden, National Bureau of Standards, during his six years (1954-1959) as a Contributing Editor. American Chemical Society, Washington, D.C.
48. ———. Problems of the experimenter. *National Convention Transactions,* American Society for Quality Control, pp. 41-47, 1959.
49. ———, Kempthorne, O., Tukey, J. W., Box, G. E. P. and Hunter, J. S. Discussion of the papers of Messrs. Satterthwaite and Bundne (including author's responses to discussion). *Technometrics,* 1 (No. 2):157-93, May, 1959.
50. Zelen, M., and Connor, W. S. Multi-factor experiments. *Industrial Quality Control,* 15 (No. 9):14-17, Mar., 1959.

BUSQUEDA BIBLIOGRAFICA

CURSO: ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA

COORDINADOR: ING. JORGE TERRAZAS Y DE ALLENDE

1971 I9 Ingeniería económica / [varios autores]. — México: UNAM. Facultad de Ingeniería. Centro de Educación Continua, 1971.

Contiene: Ingeniería económica / Javier Jiménez Espriu — Análisis de beneficio costo / Enrique Jiménez Espriu — Costos incrementales — Enrique Jiménez E. — Fórmulas de interés compuesto y aplicaciones / Luis Manuel Moran Moguel — Algunos aspectos en el análisis de alternativas múltiples / Carlos A. Moran Moguel — Método de la tasa de retorno / Benito Marín P. — Método del valor presente — Algunas relaciones entre contabilidad de depreciación y la ingeniería económica / Miguel Alonzo Calles — Estimación del efecto de los impuestos sobre el ingreso en ciertas decisiones de la inversión en la industria competitiva / Miguel Alonso Calles — Principles of engineering economy / Eugene L. Grant y W Grant Ireson. —

1972 E6 Evaluación de proyectos de inversion / [varios autores]. — México : UNAM. Facultad de Ingeniería. Centro de Educación Continua, 1972.

Contiene: Inversiones / Carlos Velasco — Programación de Inversiones / Carlos Velasco — Caso práctico de evaluación de proyectos sociales / Oscar McKelligan — Principios generales del análisis de beneficiios y costos; diferencias entre valores de mercado y sociales: evaluación de algunos tipos de proyectos Optima forma de expansión, un caso: peletizado en el grupo acero Hylsa / José Luis López Léautaud — El desarrollo económico y la evaluación de proyectos / Fernando Paz Sánchez — Caso práctico Sector agropecuario — Caso práctico sector industrial.

1973 E9 **Evaluación económica y métodos para decisión de inversiones de la industria minera / [varios autores]. — México : UNAM.- Facultad de Ingeniería. Centro de Educación Continua, 1973**

Temas afines: Interés, evaluación de proyectos y análisis de riego / Luzbel Napoleón Solórzano — [Planificación económica] / Luis Mariscal González — Teoría monetaria y- del crédito / Fernando Rentería — Métodos cuantitativos - de investigación económica / Rafael Herrera Balbuena.

1981 s/n **Evaluación económica de proyectos de ingeniería / Albetto Liebig. — México : UNAM. Facultad de Ingeniería. Centro de - Educación Continua, 1981.**

Contiene: Evaluación económica de proyectos de ingeniería — Factores externos que afectan a la evañiaco¡pm económica.

1979 38A **Ingeniería de costos y optimización / [varios autores]. — México: UNAM. Facultad de Ingeniería. Centro de Educación -- Continua, 1979.**

Contiene: Optimización programación lineal / José A. - Torres Fentanes — Simulación colas inventarios / José A.- Torres Fentanes.

1981 1A **Fundamentos de economía para ingenieros / José de Jesús Acosta Flores (coordinador). — México : UNAM. Facultad de Ingeniería. División de Educación Continua, 1982.**

Temas afines: Análisis económico / José de Jesús Acosta Flores — Modelos Decisionales / José de Jesús Acosta - Flores — Equilibrio / Victor Manuel Rodríguez López — -- Bienestar / Victor Manuel Rodríguez López — Fundamentos - de Contabilidad / Jorge Cardiel — Contabilidad de costos/ Jorge Cardiel

Directorio de Alumnos del Curso: ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA MAYO DE 1 9 8 4 .

Jorge I. Bermeo Vega Coordinación de Sistemas Inst. de Ing. UNAM 550 52 15 Ext. 3652	Cerro de Quetzal 336 Campestre Churubusco Coyoacán 04200 México,D.F. 549 08 42
Luis A. Ruiz de Chávez Cervantes Instituto de Ingeniería UNAM 5505214 Ext. 3614	Pabellón 151 San Angel A.Obregón 01900 México,D.F. 562 07 29
José L. Baltazar Vélez Dir. Gral. de Aeropuertos Chiapas No. 121-5° Piso Roma Cuauhtémoc 06700 México,D.F. 574 83 00	
Victorino Calderón Saavedra PEMEX Av.Marina Nal. 329 México,D.F. 2502611 Ext. 2-32-45	Calle 319 # 337 Col. Nva. Atzacoalco G.A.Madero 07420 México,D.F. 753 46 34
Claro F. Cortéz Morales S.C.T. DGA Chiapas 121 México,D.F. 574 8279	Fco.Villa 706 Cuauhtémoc Pachuca, Dgo. 30115
Juan M. Chávez Guerra Industria Eléctrica Automotriz Autopista a Querétaro 3000 Pirules Tlalnepantla México 3799377	Hda. El Lirio 21 Jardines de la Hda. Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx.
Francisco J. Díaz Arellano Calzada de Gpe. 514 Industiral G.A.Madero 07800 México, D.F. 517 29 85	
Jesús P. Díaz Frías PEMEX Gerencia de Exploración Marina Nal.329 11311 México,D.F. 2502611-23630	Máximo Rojas 18 P.E.Calles M.Hgo. 11350 México,D.F. 3963402

9. René Elías Tagle
SARH
Reforma 46
Cuauhtémoc
06000 México,D.F.
535 80 57

Lago Viedna 95
Argentina
M.Hgo.
11270 México, D.F.
527 95 95

10. Lucio Estevez Martínez
Comisión de Fomento Minero
Pte. de Tecamachalco
M.Hgo.
11000 México, D.F.
540 34 00

Miguel Angel 181 Bis
Moderna
B.Juárez
03510 México, D.F.
590 38 04

11. Arturo G. Fuentes Hdz.
PEMEX
Av.Marina Nal. 329
México,D.F.

Av.523 # 253
U.Aragón
G.A.Madero
México
7602381

12. León M. Garay Acevedo
Dir. Gral. de Ing. de Sist.
S.C.T.
Av. Michoacaán s/n
Tepalcates
Iztapalapa
México,D.F.
691 76 01 Ext.331

Av.507 # 131
S.J. de Aragón
G.A.Madero
07970 México, D.F.
551 27 02

13. Salvador García Fernández
COMETRO "C"
Altadena 23
Nápoles
03810 México,D.F.
6878117

Río Carmen 20 A
Fracc. Real del Moral
Iztapalapa
09010 México,D.F.
657 64 41

14. Sergio P. García Hdz.
Dir.de Dragado de la S.C.T.
Providencia 1857
Del Valle
México,D.F.

Roque Velasco Cerón # 33
Cristo Rey
.Obregón
México,D.F.
399 77 29

15. Filiberto González Hernández
Industria Eléctrica Automotriz, S.A.
Autopista a Querétaro 3000
V.Dorado
Tlanepantla, Edo. de Méx.

Lázaro Cárdenas 9
El MIrador
Tlanepantla,Edo. de Méx.
398 32 49

16. Daniel O. González Rojo
PEMEX
Apdo. Postal 39-285
15620 México, D.F.
558 24 33 Ext. 173

Cerrada de Eugenia 31
Del Valle
B.Juárez
03100 México, D.F.
543 10 86

17. Gilberto Gutiérrez Cirlos Gotting
Industria Eléctrica Automotriz
Autopista a Querétaro 3000
Tlanepantla, Edo. de México
379 93 77

Calle 8-A No.111
Vértiz Narvarte
B.Juárez
03600 México, D.F.
539 40 87

18. Alberto Ibarra Sagasta
SARH
Nvo. León 210-12° Piso
Hipódromo Condesa
B.Juárez
México, D.F.
574 94 10

Xochicalco 34-4
Narvarte
B.Juárez
03020 México, D.F.

19. Carlos Landetta Chombo
Industrias Resistol , S.A.
Thiers
México, D.F.
531 34 60

Saúl 16-3
Gpe. Tepeyac
G.A.Madero
07840 México, D.F.
517 96 88

20. Alejandro Lara Lazcano
Av. Gpe. 11
La Paz, Puebla,Pue.
548 31 83

21. Rubén Leyva Guzmán
Impresos y Cajas, S.A.
Arenal 42
Tránsito
Cuauhtémoc
México, D.F.
552 72 66

Calle Elena 191-2
Nativitas
B.Juárez
03500 México, D.F.

22. Mario A. López Morales
PREPSA, Construcciones, S.A. de C.V.
Oaxaca 28-601
Cuauhtémoc
06700 México, D.F.
511 61 60

Av.Coyoacán 1028-404
Valle
B.Juárez
03100 México, D.F.
559 52 66

23. José L. López Ortíz
Comisión de Fomento Minero
Pte. de Tecamachalco 26
Lomas de Chapultepec
México 10, D.F.
540 34 00-140

Zafiro 17
Fracc. Pedregal de Atizapán
Cda. López Mateos
Edo. de Méx.
822 58 82

24. Rafael Luna Avila
Estructuas y Cimentaciones, S.A.
Minería 145
Escandón
México, D.F.
516 04 60

Talara 109-8
Tepeyac Insurgentes
G.A.Madero
07020 México, D.F.
750 05 70

25. José A. Martínez A.
Secretaría de Energía, Minas e Industria Paraestatal
Fco. Márquez No. 160-1° Piso
Condesa
México, D.F.
553 91 90

Piñón 153
Nva. Sta. María
Azcapotzalco
02800 México, D.F.
556 65 24

26. Gabriel Martínez Medina
Dir. Gral. de Obras Marítimas
SCT
Providencia 807-4°
Coyoacán
México,D.F. 687 76 70

Insurgentes Nte. 240-21
Sta. Ma. la Ribera
México, D.F.

27. Manuel Meneses García
S.C.T.
D.G.O.M.
Dir. Programación Portuaria
Providencia 807
México,D.F.
687 76 70

Popocatepetl 64
La Pradera
G.A.Madero
México,D.F.
796 36 34

28. Carlos R. Mijangos Blanco
S.C.T.
D.G.A.
Chiapas 121
Roma
México, D.F.
574 83 90

Repúblicas 87
Portales
B.Juárez
México, D.F.
539 81 91

29. Jaime Murow Troice
Industrial Técnica de Pinturas, S.A.
Av. del Parque Esq. San Rafael
Lerma
Edo. de Méx.
5 08 85

Monte Pichincha 17
Lomas
M. Hgo.
México, D.F.
596 03 44

30. Jorge Orozco Colín
Constructora Metro, S.A. de C.V.
ICA
Altadena 23
Nápoles
México, D.F.
687 61 99

Calle 7 No. 12
Col. Reforma Social
M. Hgo.
11650 México, D.F.
540 30 37

31. Froylán Ortíz Cadena
Dir. Gral. de Obras Marítimas
S.C.T.
Providencia 807-4° Piso
Del Valle
México, D.F.
687 76 80

Sabino 60-13
Sta. Ma. la Ribera
Cuauhtémoc
México, D.F.
541 12 33

32. José A. Paniagua Fdz. de Córdova
Constructora Metro ICA
Altadena 23
Nápoles
México, D.F.
523 07 49

Uxmal 381
Narvarte
B.Juárez
03020 México, D.F.
543 04 60

33. Gerardo Ramírez Jiménez
SARH
Av. Nvo. León 210
Hipódromo Condesa
México, D.F.
574 94 10

Río Grande 19
Colinas del Lago
Cuautitlán Izcalli
Edo. de México

34. Delfino Rangel Yañez
E.C.S.A.
Minería 145
Escandón
México, D.F.
516 04 60

Pto. Matamoros 45
Casas Alemán
G.A.Madero
México, D.F.
753 25 70

35. Alejandro Ríos Alvarado
Fideicomiso de Minerales no Metálicos
Av.Chapultepec 536
Roma
México, D.F.
286 11 89

Retorno 50 No.11
Avante
Coyoacán
04460 México, D.F.
677 90 28

36. Ignacio Robledo Parra
S A R H
Reforma 46-4°
San Rafael
06000 México, D.F.
591 08 19 y 591 09 17

Antonio Maura 76-1
Moderna
B.Juárez
03510 México, D.F.

37. Juan A. Romero Meza
SARH
Dir.Gral, de Grande Irrigación
Av.Nvo. L. 210-11°
México, D.F.
564 73 20

Nte 73 # 380-1
Jardín Azpeitía
Azcapotzalco
02530 México, D.F.
556 09 71

38. Alejandro Ruíz Bernal
RCA, S.A. de C.V. Div. Cinescopios
Ave. Cuitlahuac 2519
Salvador Xochimanca
Azcapotzalco
02870 México,D.F.
527 60 20 Ext.185

Tenayuca 42
Narvarte
B.Juárez
03020 México,D.F.
575 82 54

39. Carlos Ruiz Palomino
Secretaría de Desarrollo Urbano
y Ecología

40. Leandro Salazar Yañez
Necaxa 28
La Laguna Ixhuatepec
Tlal. Edo. de Méx.
755 83 05

41. Rafael Sánchez Martínez
IPESA, S.A.
S. Lorenzo 153-6° Piso
México, D.F.
574 20 25

San L. Potosí 182-10
Roma
México, D.F.

42. Ma. Teresa L. Sánchez Vega
SCT
Dir.G. de O. Marítimas
México, D.F.
6877620

San Borja 1212-5
B.Juárez
03020 México, D.F.
559 70 52

43. Francisco Santana Valdés
Comisión de Fomento Minero
Av.Pte. de Tecamachalco 26
Lomas de Chapultepec
11000 México, D.F.
520 85 07

Sur 179 # 2108
Ramos Millán
08000 México, D.F.
657 61 45

44. Georgina Solana Lozano
PEMEX
Marina Nal. 329
México, D.F.
651 24 40

Rosa Violeta 198-2
Molino de Rosas
México, D.F.
250 26 11

45. Régulo N. Tobón González
Estructuras y Cimentaciones, S.A.
Minería 145 Edif. E 3° Piso
México, D.F.
516 04 60 Ext.116

Unión 181 Int. 17
Escandón
11800 México, D.F.
277 40 96

46. Marciano Torres González
Industria Eléctrica Automotriz
Autopista Méx-Quéretaro 3000
Tlalnepantla,Edo. de Mëx.
379 93 77

Priv. del Olivo No. 2
Col. Tequesq.
Tlalnepantla, Edo. de Méx.

47. Benjamín Troyse Miramontes
Ind. Téc. de Pinturas, S.A.
Av. del Parque Esq. Av. S. Rafael
Lerma, Edo. de México
91728 508885

Alteras 52
Bosques de la Herradura
México, D.F.
294 17 84

48. Fernando Vargas Pelaez
PEMEX
Marina Nal. 329-6° Edif.A
M.Hgo.
11311 México, D.F.

Sauces 5
Jard. de S.Mateo
Naucalpan,Edo. de Méx.
373 11 93

49. Modesto Villeda Martínez
Dir. Gral. de Obras Marítimas
Providencia 804
B.Juárez
México, D.F.

Tampico 5
El Pto.
Tlanepantla, Edo. de Méx.
391 47 84

50. Bolívar G. Vivar Paz
Bco. Internacional S.N.C.
Reforma 180 1° Piso
Juárez
México, D.F.
592 52 34

Dinarca 50 Int. 13
Juárez
Cuauhtémoc
México, D.F.

51 Gabriel Yáñez Luna
DU Pont, S.A. de C.V.
Homero 206
M. Hgo.
México, D.F.
250 90 33

Pico 1-A M 15 L 3
Unidad Picos Iztacalco
México, D.F.
250 90 33

52. Hernando Zamora Dorbecher
PEMEX
Marina Nal. 329
México, D.F.
250 26 11 Ext.23245

Colima 372-A
Roma
Cuauhtémoc
06700 México, D.F.
514 57 54

53. M. Antonio Zárate Mancha
Consultoria:Servicios Técnicos Agrupados, S.A.
Av.S.Antonio 321-1°
México, D.F.
598 60 36

Prolongación de Uxmal
Sta. Cruz Xoco
B.Juárez
México, D.F.
03340 688 83 41