DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSO: " ANALISIS COMBINATORIO "

DENTRO DEL PROGRAMA DE SUPERACION DEL PERSONAL ACADEMICO DE LA DIVISION DE CIENCIAS BASICAS.

DIRIGIDO A: PROFESORES DE LOS DEPARTAMENTOS DE MATEMATICAS APLICADAS Y MATEMATICAS BASICAS.

12 AL 21 DE ABRIL

EDIFICIO ANEXO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

IV.- INTRODUCCIÓN A LA COMBINATORIA E INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL ANÁLISIS COMBINATORIO

Si un evento puede realizarse de m maneras diferentes y, luego de haberlo llevado a cabo, un segundo evento puede realizarse de n maneras diferentes el cumplimiento de ambos sucesos, en el orden establecido, puede ocurrir de m·n maneras diferentes. Para auxiliarnos en la comprensión de este principio, veamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO IV-1.- ¿Cuántos grupos diferentes pueden formarse con un hombre y dos mujeres, si se puede elegir de entre 3 hombres y 4 mujeres?

Solución.- Como hay 3 maneras diferentes de elegir un hombre, de entre 3 que se tienen, y existen 6 maneras diferentes de elegir 2 mujeres, de 4 con que se cuenta, el número de grupos diferentes que pueden formarse, del modo indicado, es:

$$3 \cdot 6 = 18.$$

en efecto, siendo H_1, H_2, H_3 los hombres, y M_1, M_2, M_3, M_4 las mujeres, los grupos diferentes que se forman, con un hombre y dos mujeres, son:

$$\begin{matrix} H_1M_1M_2 & H_1M_1M_3 & H_1M_1M_4 & H_1M_2M_3 & H_1M_2M_4 & H_1M_3M_4 \\ H_2M_1M_2 & H_2M_1M_3 & H_2M_1M_4 & H_2M_2M_3 & H_2M_2M_4 & H_2M_3M_4 \\ H_3M_1M_2 & H_3M_1M_3 & H_3M_1M_4 & H_3M_2M_3 & H_3M_2M_4 & H_3M_3M_4, \end{matrix}$$

que totalizan 18; no se indica, por ejemplo, $H_1M_2M_1$ ya que este grupo es el mismo que el $H_1M_1M_2$ ya anotado.

EJEMPLO IV-2.- ¿De cuántos elementos consta el conjunto

$$\mathbf{F} = \{X \mid X \text{ está formado por un hombre, 2 mujeres y un niño}\}$$

si se dispone de 3 hombres, 4 mujeres y 2 niños?

Solución.- Considerando como 1er evento a la formación de grupos (diferentes) con un hombre y dos mujeres, y como 2º evento al seleccionar un niño, de los elementos de que se dispone, como el 2º evento puede realizarse de 2 maneras diferentes, en tanto que el 1º puede llevarse a cabo de 18 maneras diferentes, según se vio en el ejemplo inmediato anterior, el conjunto $\mathbf{F}$ consta de:

$$18 \cdot 2 = 36 \text{ elementos diferentes;}$$

efectivamente, siendo H_1, H_2, H_3 los hombres, M_1, M_2, M_3, M_4 las mujeres, N_1, N_2 los niños, los elementos de F son cada uno de los 18 grupos, del ejemplo inmediato anterior, seguidos de N_1, mas los mismos 18 (grupos) seguidos de N_2, es decir:

$$F = \{H_1M_1M_2N_1, \ldots, H_3M_3M_4N_1, H_1M_1M_2N_2, \ldots, H_3M_3M_4N_2\}, \text{ con } 36$$

elementos en total.

DIAGRAMAS DE ÁRBOL.

Puede decirse que estos diagramas constituyen un método gráfico para resolver algunos problemas de análisis combinatorio, mas no todos, ya que como veremos resultaría impráctico emplearlos para problemas cuya solución, gráficamente, nos llevaría demasiado tiempo.

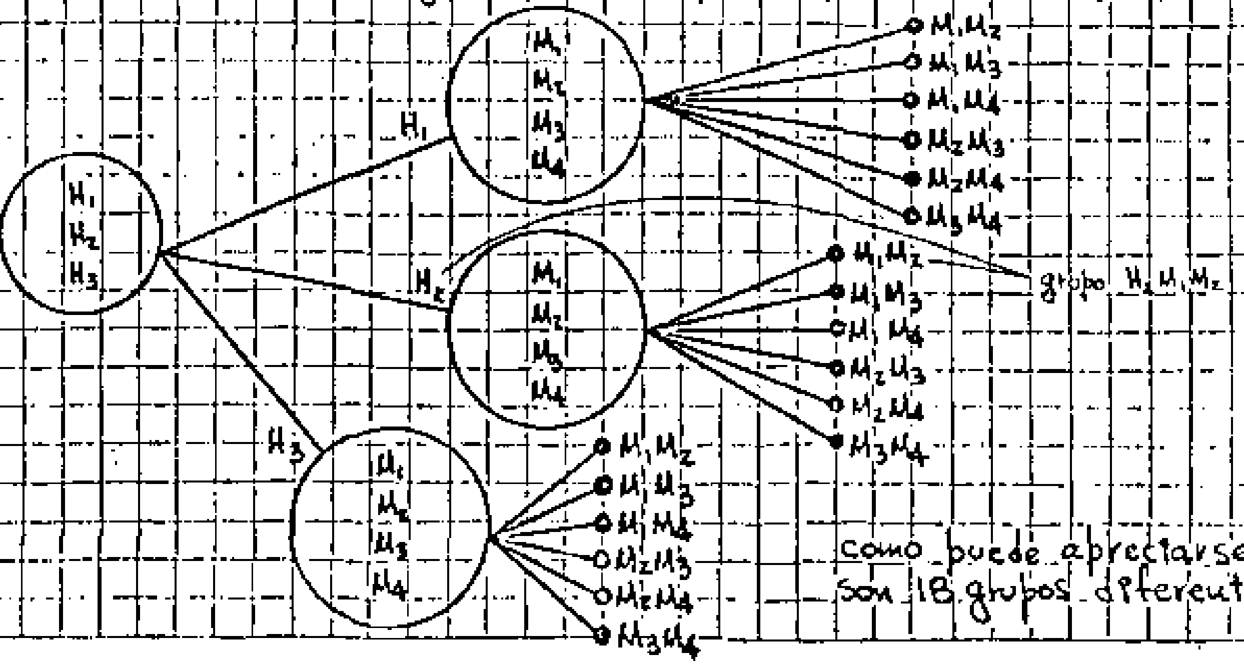
Para desarrollarlos partimos de un círculo (u óvalo) dentro del cual anotamos los elementos disponibles para realizar el 1er evento.

Posteriormente, sacamos de él tantas "ramas" como posibilidades haya de realizar dicho evento, colocando al final de cada una de ellas un círculo (u óvalo) junto al cual indicamos el elemento, o elementos, con que se realizó éste (1er evento) y dentro del cual indicamos los elementos con que puede llevarse a cabo el 2º evento.

De cada uno de estos círculos (u óvalos) sacamos otras ramas tantas como posibilidades existan de realizar el 2º evento, colocando al final de cada una de ellas un círculo (u óvalo) junto al cual indiquemos el elemento, o elementos, con que se realizó éste (2º evento), y así sucesivamente.

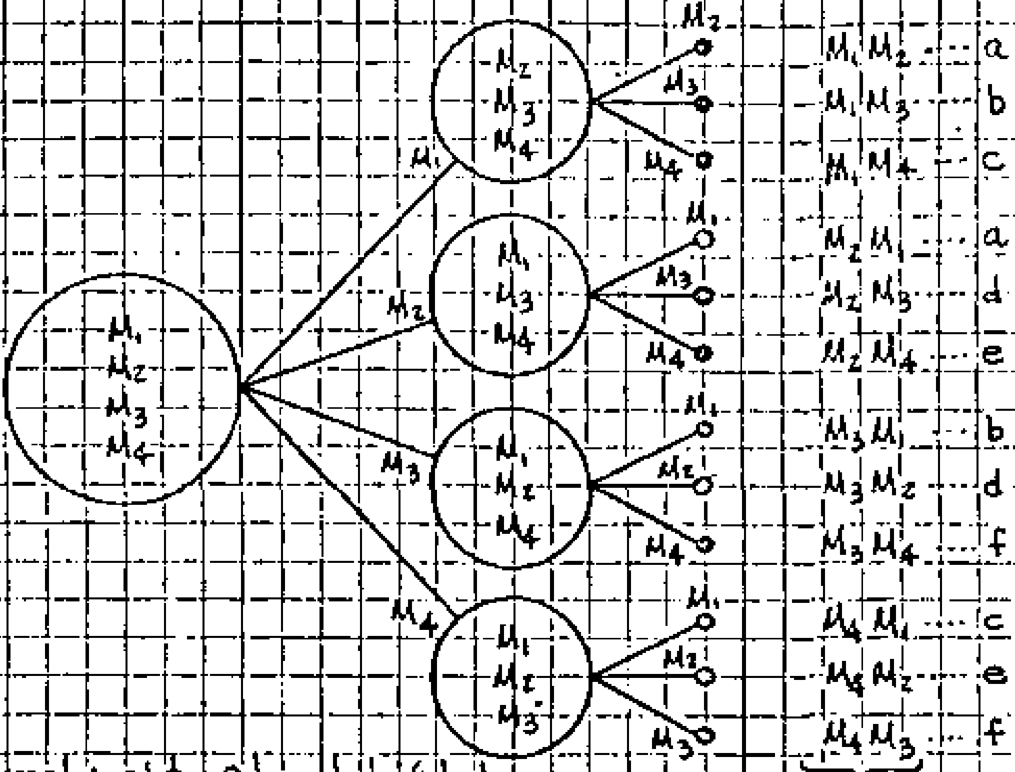
Entonces el número de círculos (u óvalos) colocados al final de las "últimas ramas del árbol" nos dará el número de maneras diferentes de cumplir con los eventos analizados, en el orden establecido. Obviamente, junto a estos últimos círculos (u óvalos) mencionados, aparecerán el elemento o elementos con que se realizó el último evento, pero ya no aparecerá nada dentro de ellos.

EJEMPLO IV-3.- El diagrama de árbol correspondiente al ejemplo IV-1 es:



como puede apreciarse, son 18 grupos diferentes.

obsérvese que en diagrama construído, junto a los últimos círculos (rellenos en dicho croquis), aparecen las diferentes formas en que se realizó el 2º evento, mismas que pudieron haberse determinado de diversas maneras, de entre las cuales pudo haberse empleado un diagrama de árbol, auxiliar, como el que se muestra a continuación:



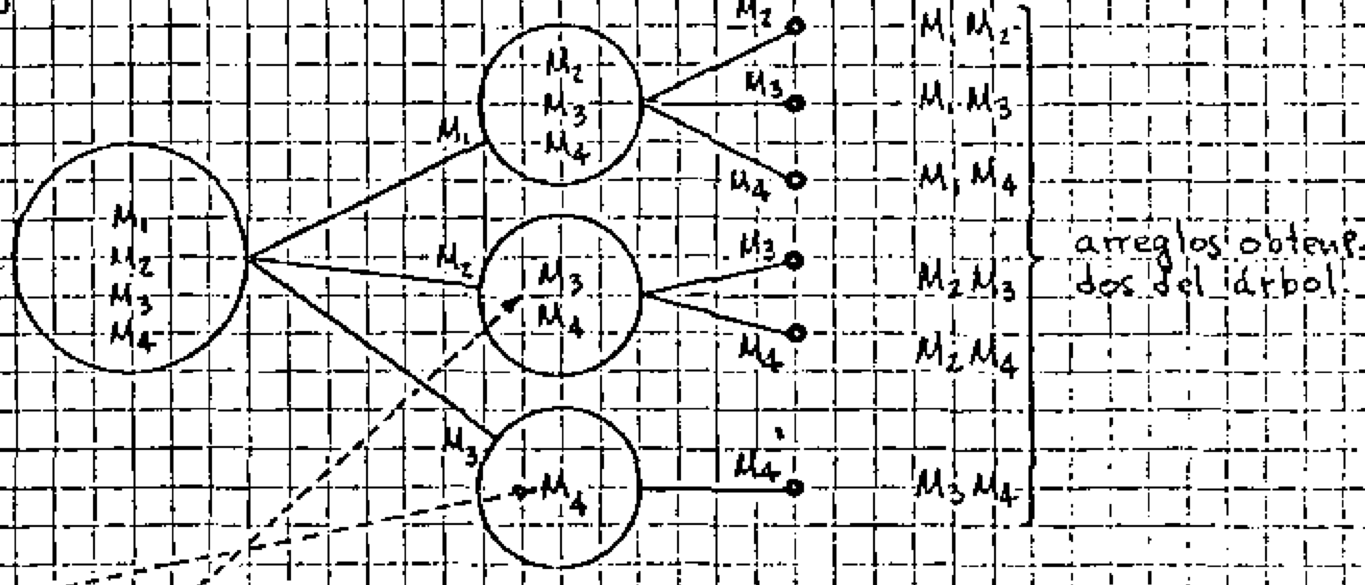
arreglos obtenidos del árbol

de los "arreglos obtenidos del árbol" podría pensarse que son 12 las maneras diferentes de elegir una pareja de mujeres si para ello se dispone de 4 (mujeres), pero si observamos los arreglos que marcamos con la misma letra, a su derecha, nos daremos cuenta que, al ser 6 el número de letras diferentes, éste es realmente el número de parejas que es posible elegir ya que (por ejemplo) los arreglos M_1M_2 y M_2M_1, marcados con la a, representan la misma pareja, independientemente de que primero se haya escogido a M_1 y después a M_2, o viceversa.

Si importara el orden de los "arreglos obtenidos del árbol" sí serían 12 las maneras diferentes de realizar el evento correspondiente, es decir que todos los "arreglos obtenidos del árbol" contarían, como sucedería en el caso de que el problema por resolver consistiera en determinar de cuantas maneras diferentes pueden ser ocupados dos asientos, A_1 y A_2, si en ellos puede sentarse sólo una mujer (por lugar) y 4 de ellas pretenden hacerlo considerando que siendo M_x y M_z las que logren sentarse, no es lo mismo que ocupen respectivamente A_1 y A_2, a que las mismas ocupen A_2 y A_1, respectivamente.

Por esta razón, cuando los elementos (que constituyen las diferentes maneras de cumplir con las condiciones de un problema) se pueden ir escogiendo sin importar el orden en que finalmente queden dispuestos, es conveniente "agotar la 1ª rama de nuestro árbol, construir la siguiente (tomando en cuenta lo sucedido durante el desarrollo de la anterior) hasta agotarla, y así sucesivamente, como puede apreciarse en los ejemplos IV-7, IV-8 y IV-9.

Siguiendo el proceso mencionado últimamente, el diagrama de árbol, auxiliar, al que hicimos referencia anteriormente necesario para determinar el número de parejas de mujeres que es posible elegir, si para esto se dispone de 4 (mujeres), es el siguiente:

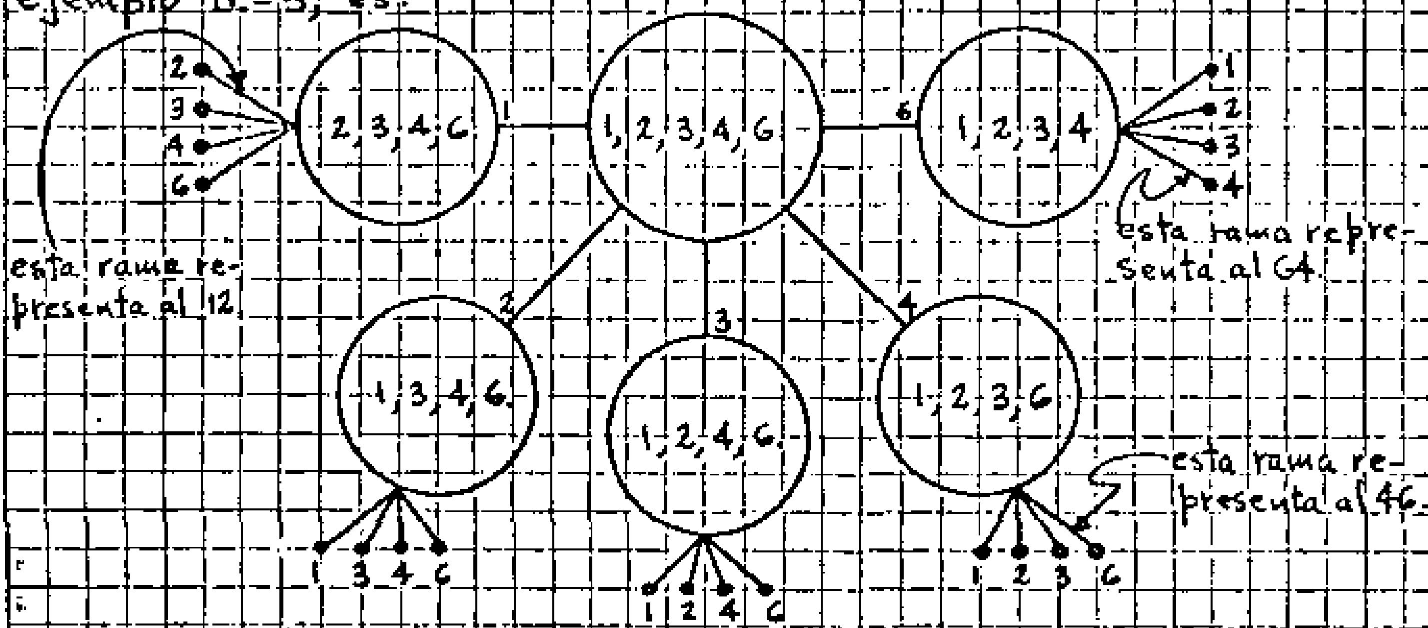


aquí ya no aparece M_1 porque ya formó pareja con M_2 en el primer desarrollo.

aquí ya no aparecen M_1 y M_2 porque M_3 ya formó pareja con ellos en los desarrollos anteriores.

EJEMPLO IV-4.- Mediante un diagrama de árbol, determine cuantos números (diferentes) de dos dígitos pueden formarse con el 1,2,3,4 y 6, si dichos números no deben tener dígitos repetidos.

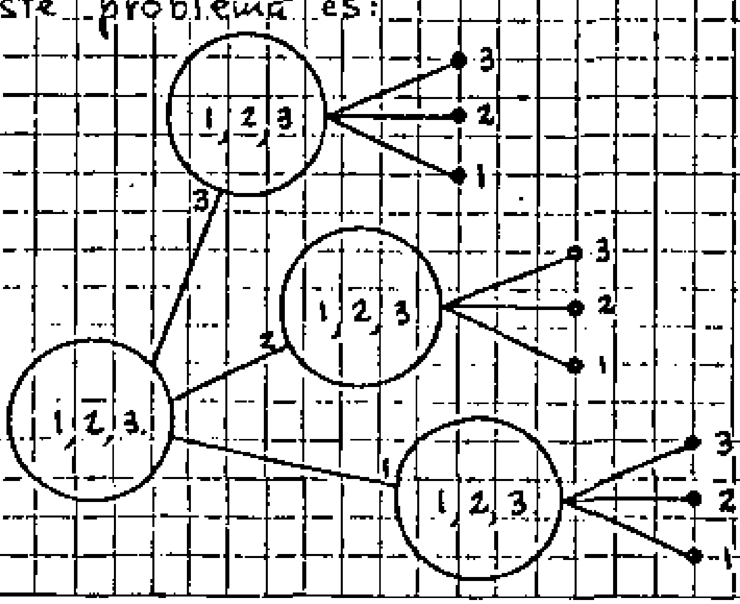
Solución.- El diagrama de árbol correspondiente a este problema, construido siguiendo el proceso indicado inmediatamente antes del ejemplo IV-3, es:



por ser 20 las últimas ramas del árbol, 20 son los números de dos dígitos que cumplen con las condiciones dadas.

EJEMPLO IV-5.- Deduzca, luego de construir el diagrama de árbol aplicable a este problema, cuantos números (diferentes) de dos dígitos pueden formarse con el 1,2 y 3.

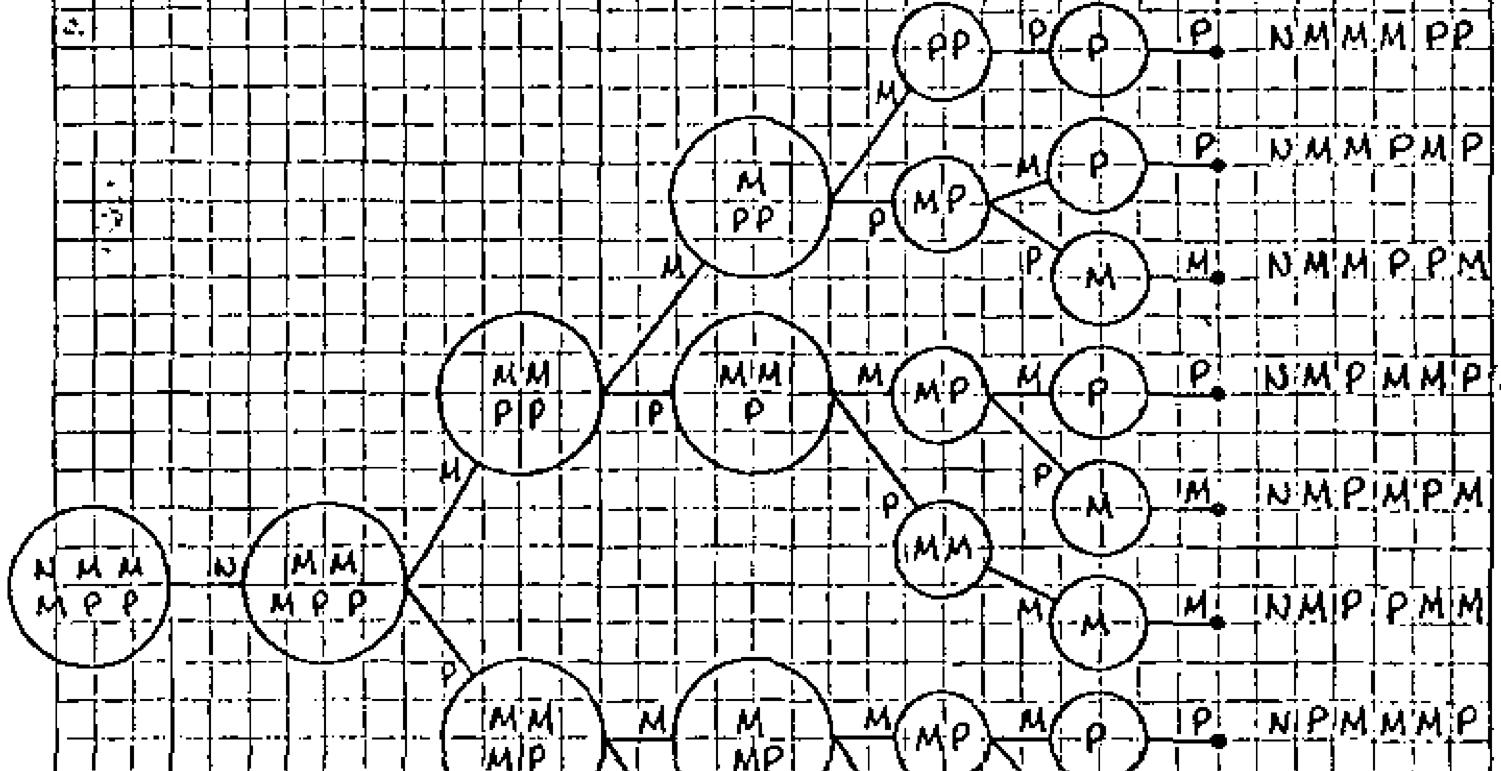
Solución.- Como, de acuerdo con el enunciado del problema, pueden formarse números con dígitos repetidos, el diagrama de árbol aplicable a este problema es:



del cual deducimos, por ser 9 las últimas ramas del árbol, que disponiendo del 1,2 y 3, pueden formarse 9 números diferentes de dos dígitos.

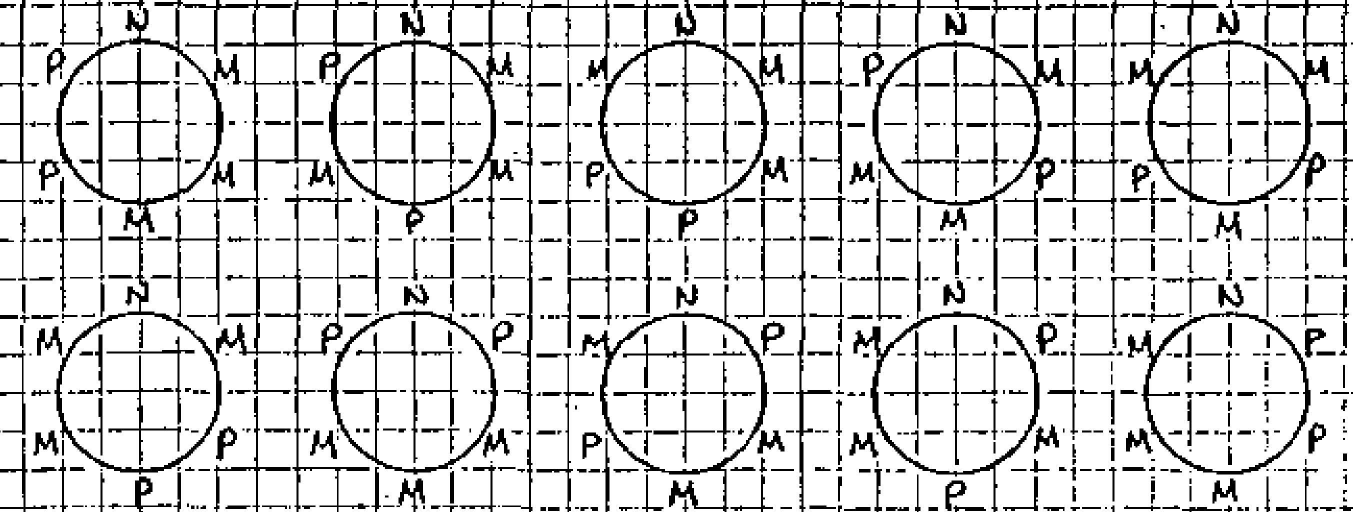
EJEMPLO IV-6.- Emplee un diagrama de árbol para obtener las diferentes maneras en que pueden colocarse en torno de una mesa circular 3 manzanas, 2 peras y una naranja, si sólo importa el orden que guardan entre sí. Luego de ello, ilustre dichas maneras de colocar las frutas.

Solución.- Como, dadas las condiciones del problema, la solución al mismo vendrá dada por el número de posibilidades diferentes de colocar enseguida de la naranja el resto de las frutas, el primer evento lo realizaremos de una sola manera, tomando la naranja para ello, llevando a cabo los eventos subsiguientes de acuerdo con los elementos con que se disponga para ellos. Si las manzanas las simbolizamos con M, la naranja con N y las peras con P, el diagrama de árbol que empleamos para resolver este problema es el siguiente:



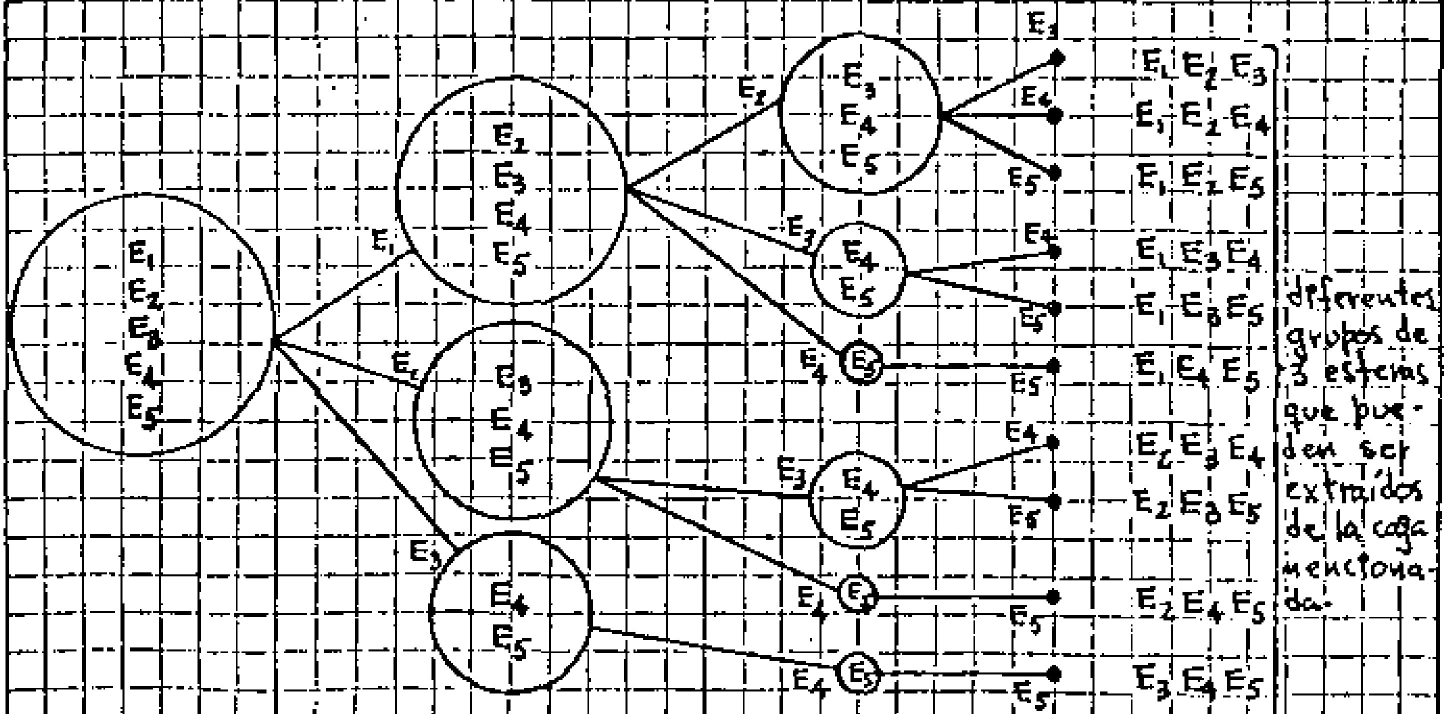
Basados en los "arreglos obtenidos del árbol", podemos decir que existen 10 maneras diferentes de colocar las 6 frutas alrededor de la mesa mencionada, cumpliendo con lo especificado.

Ilustremos esas 10 maneras diferentes de colocar las 3 manzanas, las 2 peras y la naranja, basados en los arreglos obtenidos:



EJEMPLO IV-7.- Construya un diagrama de árbol de modo que del mismo sea posible obtener el número de maneras diferentes que es posible extraer un grupo de 3 esferas de una caja que contiene 5, todas ellas diferentes.

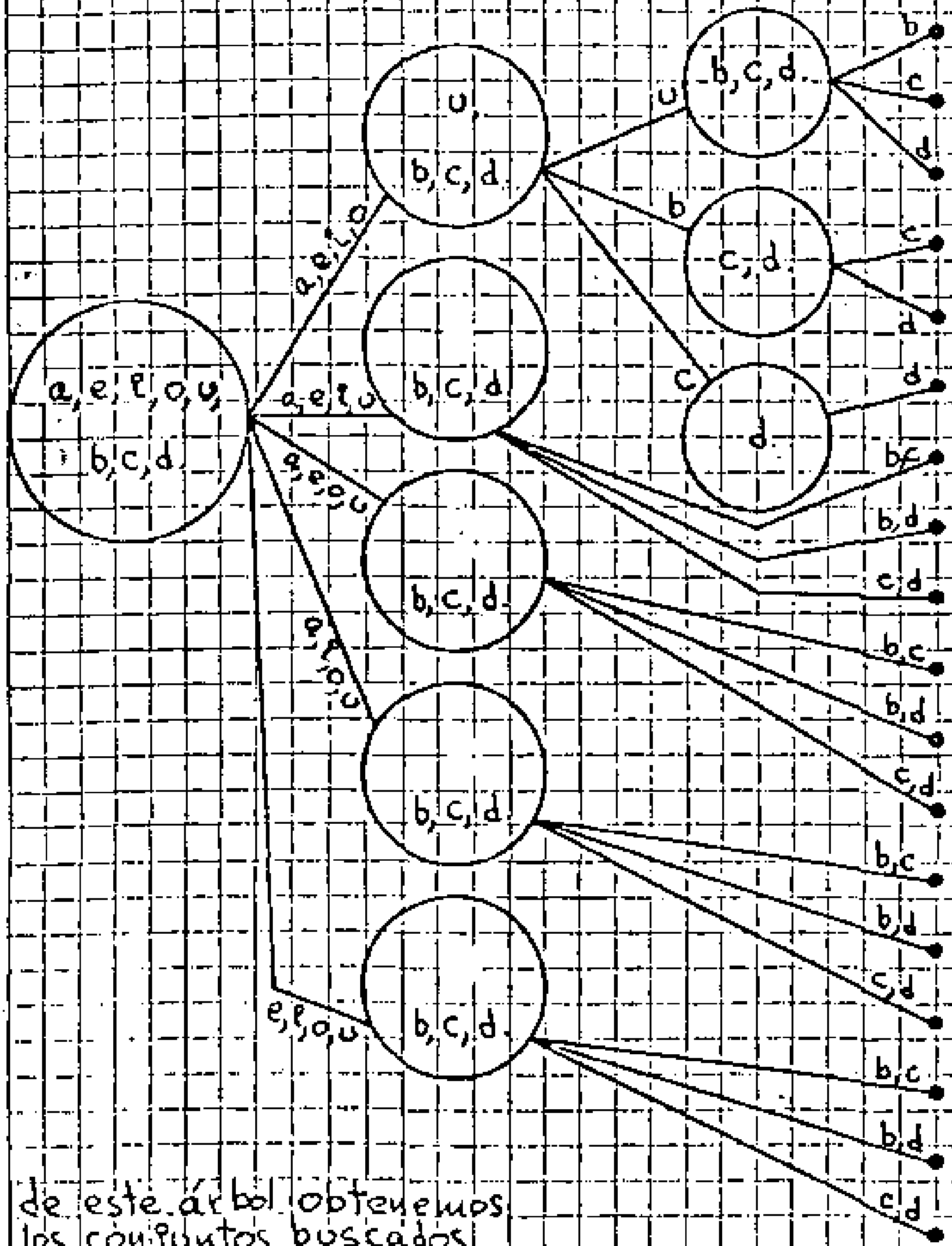
Solución.- Representando con E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5, respectivamente, a cada una de las esferas que contiene la caja mencionada, el diagrama de árbol que nos resuelve el problema es el siguiente:



Según puede apreciarse, es 10 el número de maneras diferentes posibles de extraer el grupo de tres esferas indicado.

EJEMPLO IV-8.- Obtenga, del diagrama de árbol adecuado para ello los diferentes conjuntos que conteniendo 6 letras en total, diferentes todas estas, pueden formarse de manera tal que al menos 4 de ellas sean vocales, si se dispone de las cinco vocales y de las consonantes b, c y d, tantas veces como se requieran.

Solución.- El diagrama de árbol más compacto, adecuado para resolver este problema, es el indicado a continuación:



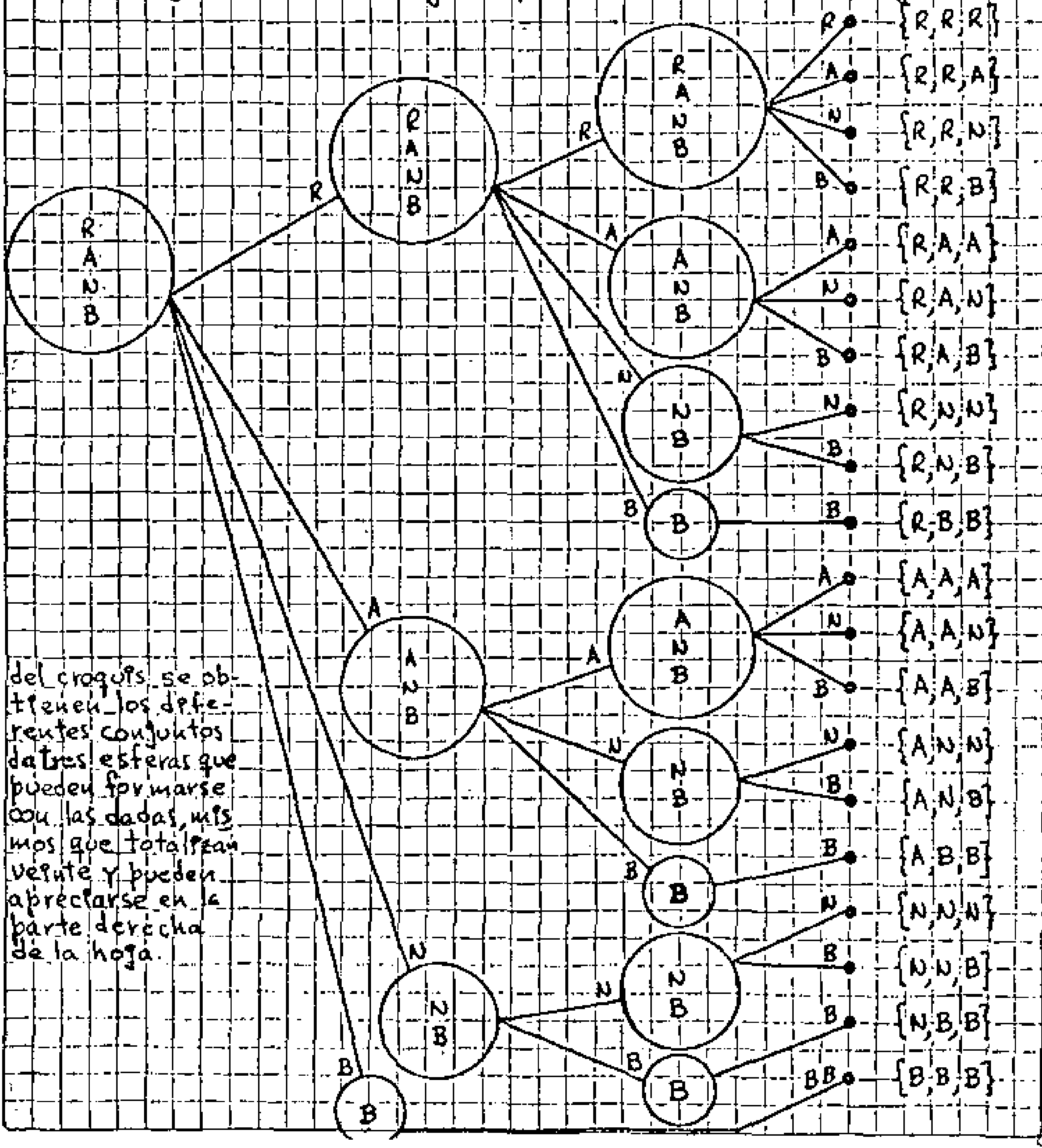
{a, e, i, o, u, b}
{a, e, i, o, u, c}
{a, e, i, o, u, d}
{a, e, i, o, b, c}
{a, e, i, o, b, d}
{a, e, i, o, c, d}
{a, e, i, u, b, c}
{a, e, i, u, b, d}
{a, e, i, u, c, d}
{a, e, o, u, b, c}
{a, e, o, u, b, d}
{a, e, o, u, c, d}
{a, i, o, u, b, c}
{a, i, o, u, b, d}
{a, i, o, u, c, d}
{e, i, o, u, b, c}
{e, i, o, u, b, d}
{e, i, o, u, c, d}

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{conjuntos buscados}}$

de este árbol obtenemos los conjuntos buscados que, según puede apreciarse, son 18 en total.

EJEMPLO IV-9.- Valiéndose del diagrama de árbol adecuado para ello, obtenga los diferentes conjuntos de tres esferas que pueden formarse si se dispone de tantas rojas, amarillas, negras y blancas (idénticas ellas siempre y cuando sean del mismo color) como se requiera.

Solución.- Simbolizando mediante R, A, N y B, respectivamente, a las esferas rojas, amarillas, negras y blancas, se tiene lo siguiente:



del croquis se obtienen los diferentes conjuntos de tres esferas que pueden formarse con las dadas, mismos que totalizan veinte y pueden apreciarse en la parte derecha de la hoja.

FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL.

Se define como factorial de un número natural cualquiera, n, al producto de todos los números naturales consecutivos desde el uno hasta n, es decir

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-2)(n-1)n \quad \cdots (IV-1),$$

que también puede escribirse:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \quad \cdots (IV-1'),$$

o bien:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)!,\ 1\le k<n \quad \cdots (IV-1'').$$

No obstante que cero no es un número natural, se define como factorial de cero (también llamado cero factorial) al primer número natural, es decir:

$$0! = 1 \quad \cdots (IV-1''')$$

EJEMPLO IV-10.- Dados $m=8$, $n=3$ y $p=2$, de acuerdo con (IV-1'), (IV-1'') y (IV-1'''), se tiene:

$$\frac{m!}{n!\,p!} = \frac{8!}{3!\,2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\,(2\cdot 1)} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2} = 3360, \text{ y,}$$

$$\frac{(m-p)!}{(m-n)!\,0!} = \frac{6!}{5!\,0!} = \frac{6\cdot 5!}{5!(1)} = 6$$

EJEMPLO IV-11.- Demuestre que

$$\frac{k!}{r!(k-r)!} + \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!} = \frac{(k+1)!}{r![(k+1)-r]!}$$

Solución.- Para tener un común denominador y así poder sumar los elementos del primer miembro, multiplicamos numerador y denominador del 1er elemento por $(k-r+1)$ en tanto que el numerador y el denominador del 2º elemento por r, ya que haciendo eso obtenemos:

$$\frac{k!}{r!(k-r)!} + \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!} = \frac{(k-r+1)(k!)}{r!(k-r+1)(k-r)!} + \frac{(r)(k!)}{(r)(r-1)!(k-r+1)!},$$

igual, de acuerdo con (IV-1''), a:

$$\frac{(k-r+1)k!}{r!(k-r+1)!} + \frac{(r)k!}{r!(k-r+1)!}$$

teniéndose entonces:

$$\frac{k!}{r!(k-r)!} + \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!} = \frac{(k-r+1+r)k!}{r!(k-r+1)!} = \frac{(k+1)k!}{r!(k+1-r)!} = \frac{(k+1)!}{r![(k+1)-r]!},$$

con lo que queda demostrada la validez de la igualdad dada.

ORDENACIONES.

Sea un conjunto cualquiera Q que contiene un total de q elementos, n de los cuales son diferentes entre sí, pudiendo tenerse $n \leq q$; definimos ordenación (u ordenación sin repetición) de orden r, de Q, a todo grupo que tiene un total de r elementos, diferentes pero igual cada uno de ellos a alguno de Q, siendo necesariamente $r \leq n$. De esto se infiere que, dos ordenaciones son diferentes: si son de diferente orden (es decir si cuentan con un número diferente de elementos), si contienen al menos un elemento diferente, o, si teniendo los mismos elementos estos se encuentran ordenados en diferente forma.

Si al número de ordenaciones diferentes de orden r, de Q, lo simbolizamos mediante O_r^n, dicho número lo podemos obtener al aplicar la expresión:

$$O_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \ldots \quad (IV-2),$$

misma que obtendremos luego de resolver los siguientes ejercicios.

EJEMPLO IV-12.- Dado el conjunto $V=\{X,Y,Z\}$, obtenga:
a) El número de ordenaciones diferentes de orden 1, de V,
b) El número de ordenaciones diferentes de orden 2, de dicho conjunto, y
c) El número de ordenaciones diferentes de orden 3, del mismo.
Verifique su respuesta en cada uno de los casos.

Solución.- Aplicando (IV-2), obtenemos:

$$a)\ O_1^3 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = 3;$$

respuesta correcta ya que las ordenaciones diferentes de orden 1, de V, son: X, Y, Z, o sea un total de 3.

$$b)\ O_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6;$$

respuesta correcta ya que las ordenaciones diferentes de orden 2, de V, son: XY, XZ, YZ, YX, ZX, ZY, que totalizan 6.

$$c)\ O_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 6;$$

respuesta también correcta, ya que las ordenaciones diferentes de orden 3 de V, son: XYZ, YXZ, ZXY, XZY, YZX, ZYX, es decir un total de 6.

EJEMPLO IV-13.- Si no se permite la repetición y se dispone del 1, 2, 3, 4 y 6, tantas veces como sea necesario:
a) ¿Cuántos números (diferentes) de dos dígitos pueden formarse con los dados?. Verifique su respuesta.
b) ¿Cuántos de tres?.
c) ¿Cuántos de cinco?.

Solución.- a) $O_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20;$

respuesta correcta ya que los números diferentes de dos dígitos no repetidos, que se pueden formar con los dados, son:

el 12, 13, 14, 16, 23, 24, 26, 34, 36, 46, 21, 31, 41, 61, 32, 42, 62, 43, 63 y el 64, es decir un total de 20, que concuerda también con lo obtenido mediante el diagrama de árbol del ejemplo IV-4.

b) $O^5_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$;

c) $O^5_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 120$.

Demostración de la validez de la expresión (IV-2).- Basados en la definición de ordenación, si los n elementos de un conjunto cualquiera Q, los representamos mediante los números naturales uno a n, las ordenaciones de orden 1 de los elementos de Q son:

1 2 3 4 5 ... $(n-1)$ n,

es decir un total de n, pudiendo escribir:

$$O^n_1 = n \quad \text{--- ⓐ};$$

las ordenaciones de orden 2, de los elementos de dicho conjunto, son:

~~1 1~~	2 1 ✓	3 1 ✓	4 1 ✓	5 1 ✓	-----	$(n-1)$ 1 ✓	n 1 ✓
1 2 ✓	~~2 2~~	3 2 ✓	4 2 ✓	5 2 ✓	-----	$(n-1)$ 2 ✓	n 2 ✓
1 3 ✓	2 3 ✓	~~3 3~~	4 3 ✓	5 3 ✓	-----	$(n-1)$ 3 ✓	n 3 ✓
1 4 ✓	2 4 ✓	3 4 ✓	~~4 4~~	5 4 ✓	-----	$(n-1)$ 4 ✓	n 4 ✓
1 5 ✓	2 5 ✓	3 5 ✓	4 5 ✓	~~5 5~~	-----	$(n-1)$ 5 ✓	n 5 ✓
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
1 $(n-1)$ ✓	2 $(n-1)$ ✓	3 $(n-1)$ ✓	4 $(n-1)$ ✓	5 $(n-1)$ ✓	-----	~~$(n-1)(n-1)$~~	$n(n-1)$ ✓
1 n ✓	2 n ✓	3 n ✓	4 n ✓	5 n ✓	-----	$(n-1)$ n ✓	~~n n~~

obsérvese que a cada ordenación de orden 1 se le asociaron $(n-1)$ elementos del conjunto, por no estar permitida la repetición (ordenaciones tachadas) según la definición; entonces, según puede apreciarse, cada una de las n ordenaciones de orden 1 dió lugar a una columna que contiene $(n-1)$ ordenaciones de orden 2, pudiendo entonces escribir:

$$O^n_2 = n(n-1) \quad \text{--- ⓑ},$$

que, tomando en cuenta ⓐ puede expresarse:

$$O^n_2 = (n-1)\, O^n_1 \quad \text{--- ⓑ'};$$

las ordenaciones de orden 3, de los elementos de Q, son

~~11 1~~	~~21 1~~	~~31 1~~	~~41 1~~	~~51 1~~	....	~~(n-1)1 1~~	~~n1 1~~
~~11 2~~	~~21 2~~	31 2 ✓	41 2 ✓	51 2 ✓	....	(n-1)1 2 ✓	n1 2 ✓
~~11 3~~	21 3 ✓	~~31 3~~	41 3 ✓	51 3 ✓	....	(n-1)1 3 ✓	n1 3 ✓
~~11 4~~	21 4 ✓	31 4 ✓	~~41 4~~	51 4 ✓	....	(n-1)1 4 ✓	n1 4 ✓
~~11 5~~	21 5 ✓	31 5 ✓	41 5 ✓	~~51 5~~	....	(n-1)1 5 ✓	n1 5 ✓
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
~~11 (n-1)~~	21 (n-1) ✓	31 (n-1) ✓	41 (n-1) ✓	51 (n-1) ✓	....	~~(n-1)1 (n-1)~~	n1 (n-1) ✓
~~11 n~~	21 n ✓	31 n ✓	41 n ✓	51 n ✓	....	(n-1)1 n ✓	~~n1 n~~
~~12 1~~	~~22 1~~	32 1 ✓	42 1 ✓	52 1 ✓	....	(n-1)2 1 ✓	n2 1 ✓
~~12 2~~	~~22 2~~	~~32 2~~	~~42 2~~	~~52 2~~	....	~~(n-1)2 2~~	~~n2 2~~
12 3 ✓	~~22 3~~	~~32 3~~	42 3 ✓	52 3 ✓	....	(n-1)2 3 ✓	n2 3 ✓
12 4 ✓	~~22 4~~	32 4 ✓	~~42 4~~	52 4 ✓	....	(n-1)2 4 ✓	n2 4 ✓
12 5 ✓	~~22 5~~	32 5 ✓	42 5 ✓	~~52 5~~	....	(n-1)2 5	n2 5 ✓
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
12 (n-1) ✓	~~22 (n-1)~~	32 (n-1) ✓	42 (n-1) ✓	52 (n-1) ✓	....	~~(n-1)2 (n-1)~~	n2 (n-1) ✓
12 n ✓	~~22 n~~	32 n ✓	42 n ✓	52 n ✓	....	(n-1)2 n ✓	~~n2 n~~
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
~~1n 1~~	2n 1 ✓	3n 1 ✓	4n 1 ✓	5n 1 ✓	....	(n-1)n 1 ✓	~~nn 1~~
1n 2 ✓	~~2n 2~~	3n 2 ✓	4n 2 ✓	5n 2 ✓	....	(n-1)n 2 ✓	~~nn 2~~
1n 3 ✓	2n 3 ✓	~~3n 3~~	4n 3 ✓	5n 3 ✓	....	(n-1)n 3 ✓	~~nn 3~~
1n 4 ✓	2n 4 ✓	3n 4 ✓	~~4n 4~~	5n 4 ✓	....	(n-1)n 4 ✓	~~nn 4~~
1n 5 ✓	2n 5 ✓	3n 5 ✓	4n 5 ✓	~~5n 5~~	....	(n-1)n 5 ✓	~~nn 5~~
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
1n (n-1) ✓	2n (n-1) ✓	3n (n-1) ✓	4n (n-1) ✓	5n (n-1) ✓	....	~~(n-1)n (n-1)~~	~~nn (n-1)~~
~~1n n~~	~~2n n~~	~~3n n~~	~~4n n~~	~~5n n~~	....	~~(n-1)n n~~	~~nn n~~

apréciese que a cada ordenación de orden 2 se le asociaron $(n-2)$ elementos de Q, por lo relativo a la repetición (las ordenaciones que contienen elementos repetidos están tachadas); entonces, según puede observarse, cada una de las $n(n-1)$ ordenaciones de orden 2 dió lugar a una columna que contiene $(n-2)$ ordenaciones de orden 3, teniéndose ahora:

$$O_3^n = n(n-1)(n-2) \quad \ldots \text{(c)},$$

o bien, tomando en cuenta (b)

$$O_3^n = (n-2)\,O_2^n \quad \ldots \text{(c')},$$

repitiendo el proceso, se obtienen: $O_{r-1}^n = n(n-1)\cdots(n-r+2)$ (q), y, $O_r^n = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ (r)

o bien: $O_{r-1}^n = (n-r+2)\,O_{r-2}^n$ (q'), y, $O_r^n = (n-r+1)\,O_{r-1}^n$ (r');

multiplicando y dividiendo (r) por $(n-r)!$, podemos escribir:

$$O_r^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

que puede escribirse:

$$O_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

con lo que queda demostrada la validez de (IV-2). Según puede apreciarse en esta expresión, r tiene que ser menor o igual que n, puesto que el factorial de números negativos no está definido.

La expresión (IV-2) pudo haberse obtenido de manera más rápida sabiendo que el número de ordenaciones de orden r, de un conjunto de n elementos diferentes, iguala a r! veces las combinaciones del mismo orden de los elementos de dicho conjunto, sin embargo se obtuvo mediante el proceso anteriormente explicado porque los cuadros empleados en éste nos servirán para obtener el número de ordenaciones con repetición, de orden r, para un conjunto de n elementos.

En efecto, como se verá más adelante, las combinaciones de orden 2 de los n elementos de un conjunto cualquiera son:

12				
13	23			
14	24	34		
⋮	⋮	⋮		
1n	2n	3n	⋯	(n-1)n,

que totalizan, según se verá

$$C_2^n = \frac{1}{2}(n)(n-1) \quad \ldots\ldots (B),$$

las combinaciones de orden 3, de los elementos de dicho conjunto, son:

123				
124	134			
125	135	145		
⋮	⋮	⋮		
12n	13n	14n	⋯	1(n-1)(n),

que son un total, de acuerdo con lo que se verá, de

$$C_3^n = \frac{1}{3}(n-2)\left[\frac{1}{2}(n)(n-1)\right], \text{ o sea: } C_3^n = \frac{1}{6}(n)(n-1)(n-2) \ldots (C)$$

y como, según se vió en el proceso seguido para obtener (IV-2), se tiene:

$$O_2^n = n(n-1) \ldots (b), \text{ y, } O_3^n = n(n-1)(n-2) \ldots (c),$$

al sustituir (b) y (c), en (B) y (C), respectivamente, se obtienen:

$$C_2^n = \frac{1}{2!} O_2^n, \text{ y, } C_3^n = \frac{1}{3!} O_r^n,$$

por lo que, continuando con el proceso que estamos siguiendo, se obtiene

$$C_r^n = \frac{1}{r!} O_r^n, \text{ de donde obtenemos: } O_r^n = r! C_r^n \quad ,$$

relación mencionada antes de iniciar este proceso, de la cual, tomando en cuenta:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad \text{(IV-8)},$$

expresión que veremos más adelante, obtenemos:

$$O_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}, \text{ que es (IV-2)}.$$

ORDENACIONES CON REPETICIÓN.

Sea un conjunto cualquiera Q que contiene q elementos en total n de los cuales son diferentes entre sí, pudiendo tenerse $n \leq q$. Definimos ordenación con repetición de orden r, de Q, a todo grupo ordenado que tiene un total de r elementos, igual cada uno de estos a alguno de los n diferentes de Q, de modo que, si $r \leq n$ dicho grupo puede tener a sus elementos: a) todos diferentes, b) iguales algunos de ellos, o, c) todos iguales entre sí, en tanto que si $r > n$ los r elementos del grupo no pueden ser, lógicamente, todos diferentes entre sí pudiendo ser: A) iguales algunos de ellos, o, B) todos iguales entre sí. De acuerdo con esta definición podemos decir que dos ordenaciones con repetición, de un cierto conjunto, son diferentes: si son de diferente orden, si contienen al menos un elemento diferente, o, si teniendo los mismos elementos estos se encuentran ordenados en diferente forma.

Para aclarar esta definición, consideremos al conjunto T que contiene tantas veces al 1, 2, 3, 4 y 5 como se requiera; son ordenaciones con repetición diferentes (todas las mencionadas a continuación, clasificadas según su orden)

de orden 3 (r=3) de T:	de orden 5 (r=5) de T:	de orden 6 (r=6) de T:
1 2 3 (r<n, caso a)	4 1 5 2 3 (r=n, caso a)	1 2 3 4 5 5 (r>n, caso A)
3 2 1 (r<n, caso a)	4 4 4 2 2 (r=n, caso b)	5 5 1 2 3 4 (r>n, caso A)
4 5 5 (r<n, caso b)	2 2 4 4 4 (r=n, caso b)	4 4 4 4 4 4 (r>n, caso B)
2 2 2 (r<n, caso c)	1 1 1 1 1 (r=n, caso c)	3 3 3 3 3 3 (r>n, caso B).

Para encontrar el número de ordenaciones con repetición (diferentes) de orden r, de Q, nos basaremos en la definición dada para las mismas, así como en los cuadros que nos sirvieron para obtener O_r^n; al número mencionado lo simbolizaremos mediante $(OR)_r^n$.

De acuerdo con la definición, las ordenaciones con repetición (diferentes) de orden 1, de Q, son:

1   2   3   4   5 . . . . . . (n-1)   n,

(recuerde que 1, 2, 3, ..., n, nos representan a cada uno de los n elementos difs. de Q). es decir n en total, pudiendo expresar:

$$(OR)_1^n = n \text{ --- } (a_R);$$

como actualmente estamos analizando el caso en que se permite la repetición, las ordenaciones tachadas en el cuadro que empleamos para obtener O_2^n ahora sí contarán, de modo que cada ordenación con repetición de orden 1 queda asociada con los n elementos del conjunto, dando lugar cada una de dichas ordenaciones con repetición a una columna con n ordenaciones con repetición del orden dos, teniéndose entonces:

$$(OR)_2^n = n(OR)_1^n;$$

que, tomando en cuenta (a_R), puede escribirse

$$(OR)_2^n = n^2 \text{ --- } (b_R);$$

al permitirse la repetición, las ordenaciones que tachamos en el cuadro empleado para obtener O_3^n ahora sí contarán, dando como consecuencia que cada ordenación con repetición de orden dos quede asociada con los n elementos de Q, dando lugar cada una de las ordenaciones con repetición mencionadas en este párrafo a una columna con n ordenaciones con repetición de orden 3, pudiendo escribir:

$$(OR)_3^n = n(OR)_2^n,$$

expresión que, tomando en consideración (b_R), puede escribirse:

$$(OR)_3^n = n^3 \text{ --- } (c_R);$$

continuando con el proceso se obtiene:

$$(OR)_r^n = n^r \text{ --- } (IV\text{-}3),$$

expresión que se buscaba, misma que tiene sentido y es válida $\forall n, r \in N$.

EJEMPLO IV-14.- Si se permite la repetición y se dispone del 1, 2 y 3, tantas veces como sea necesario:

a) ¿Cuántos números (diferentes) de dos dígitos pueden formarse con los dados? Verifique su respuesta.

b) ¿Cuántos de cinco?

c) ¿Cuántos de diez?

Solución.- De acuerdo con (IV-3), se tiene:

a) $(OR)_2^3 = 3^2 = 9,$

respuesta correcta ya que los números de dos dígitos que se pueden formar con el 1, 2 y 3 son:

el 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 y el 33, es decir un total de 9, que concuerda también con lo obtenido mediante el diagrama de árbol del ejemplo IV-5.

b) $(OR)^3_5 = 3^5 = 729$, números diferentes de 5 dígitos que pueden formarse, cumpliendo con las condiciones estipuladas.

c) $(OR)^3_{10} = 3^{10} = 531441$, son los números diferentes de 10 dígitos que se pueden formar, cumpliendo con las especificaciones dadas para ello.

Obsérvese que en el inciso a tuvimos $r<n$, en tanto que en los incisos b y c se tuvo $r>n$.

EJEMPLO IV.5.- ¿Cuántos rótulos diferentes de 5 letras alineadas pueden hacerse, si para ello se dispone sólo de letras A y B? Verifique su respuesta.

Solución.- La respuesta al problema es:

$$(OR)^2_5 = 2^5 = 32,$$

atendiendo a las condiciones del mismo. La respuesta es correcta ya que los rótulos diferentes que pueden hacerse, tomando en cuenta los datos del problema, son:

AAAAA	ABAAA	BAAAA	BBAAA
AAAAB	ABAAB	BAAAB	BBAAB
AAABA	ABABA	BAABA	BBABA
AAABB	ABABB	BAABB	BBABB
AABAA	ABBAA	BABAA	BBBAA
AABAB	ABBAB	BABAB	BBBAB
AABBA	ABBBA	BABBA	BBBBA
AABBB	ABBBB	BABBB	BBBBB,

es decir 32 en total. Como puede observarse, en este ejemplo tuvimos $r>n$.

PERMUTACIONES.

Sea un conjunto cualquiera Q con n elementos diferentes; se define como permutación, o permutación simple, de Q a todo grupo ordenado de los n elementos de ese conjunto. Por lo tanto, en cualquier permutación de Q intervienen todos los elementos de dicho conjunto, razón por la cual el número de permutaciones diferentes de Q, al que simbolizaremos mediante P_n, igualará al número de ordenaciones de orden n, diferentes, del mismo.

De acuerdo con lo anterior, podemos escribir:

$$P_n = O^n_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

o sea:

$$P_n = n! \quad \ldots\ldots \quad (IV-4).$$

EJEMPLO IV-16.- ¿De cuántas maneras diferentes pueden estar sentadas 4 personas en una banca recta que contiene 4 asientos, si sólo se admite una de ellas en cada lugar?

Solución.- Toda manera de estar sentadas las 4 personas, según se especifica, representará una permutación de los elementos del conjunto formado por dichas personas por lo que, para resolver este problema, empleamos (IV-4) obteniendo que:

$$P_4 = 4! = 24,$$

son las maneras diferentes de estar sentadas en la banca mencionada, cumpliendo con la restricción dada. Se sugiere al lector verificar esta respuesta.

EJEMPLO IV-17.- ¿De cuántas maneras diferentes pueden estar sentadas 4 personas en una banca recta que contiene 5 asientos, si sólo se admite una de ellas en cada lugar?

Solución.- Consideremos el conjunto $H = \{P_1, P_2, P_3, P_4, V\}$, donde P_1, P_2, P_3 y P_4 son las personas mencionadas y V un cierto elemento que se colocará en el lugar que queda vacío, luego de sentarse dichas personas; de este modo es fácil comprender que la respuesta a este problema, corresponde al número de permutaciones de H, es decir a:

$$P_5 = 5! = 120, \text{ maneras diferentes.}$$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Si establecemos que en toda permutación de un conjunto cualquiera Q intervienen todos los elementos del mismo, no tiene sentido hablar de "permutaciones con repetición", aunque sí de las ordenaciones con repetición de orden n, de dicho conjunto, vistas anteriormente.

Por ejemplo, de acuerdo con (IV-3), el total de números diferentes de n dígitos que pueden formarse con los n primeros números naturales lo podemos encontrar mediante:

$$(OR)_n^n = n^n \quad \ldots \quad (IV-3_n).$$

Así, el total de números diferentes de 3 dígitos que pueden formarse con el 1, el 2 y el 3 es 3^3, o sea 27; en efecto, los números diferentes de tres dígitos que se forman con el 1, el 2 y el 3 son:

111	211	311
112	212	312 *
113	213 *	313
121	221	321 *
122	222	322
123 *	223	323
131	231 *	331
132 *	232	332
133	233	333

, es decir 27 en total.

Sin embargo hay quienes sí hablan de permutaciones con repetición, definiéndolas como las ordenaciones con repetición, de orden n, de un conjunto que contiene n elementos diferentes de modo que, simbolizando con $(PR)_n$ al total de dichas permutaciones, tomando en cuenta (IV-3), establecen:

$$(PR)_n = n^n,$$

pero hay que hacer ver que, en estas condiciones, las "permutaciones" de que se habla contienen un total de n elementos, cada una, pero sólo $n!$ de ellas contiene a los n elementos diferentes del conjunto, como las que constituyen los $3! = 6$ números marcados con asterisco, de los 27 anteriormente anotados.

PERMUTACIONES DE UN CONJUNTO QUE CONTIENE ALGUNOS ELEMENTOS IGUALES ENTRE SÍ.

Consideremos el conjunto

$$S = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots, O_1, O_2, \ldots, O_\omega\},$$

que contiene n elementos en total.

Siendo diferentes los n elementos de S, el número de permutaciones de dicho conjunto igualaría $n!$, pero, como el número de permutaciones de un conjunto de α elementos diferentes iguala $\alpha!$, si $A_1 = A_2 = \cdots = A_\alpha$, el número de permutaciones de S vendrá dado por:

$$\frac{n!}{\alpha!},$$

al ser $\beta!$ el número de permutaciones de un conjunto de β elementos diferentes, si $B_1 = B_2 = \cdots = B_\beta$, además de ser $A_1 = A_2 = \cdots = A_\alpha$, el número de permutaciones de S vendrá dado ahora por:

$$\frac{n!/\alpha!}{\beta!}, \text{ equivalente a } \frac{n!}{\alpha!\,\beta!},$$

repitiendo el proceso, si $A_1 = A_2 = \cdots = A_\alpha$, $B_1 = B_2 = \cdots = B_\beta$, ..., $O_1 = O_2 = \cdots = O_\omega$, simbolizando mediante $P^n_{\alpha,\beta,\ldots,\omega}$ al número de permutaciones de un conjunto que contiene n elementos de los cuales $\alpha, \beta, \ldots, \omega$, de los n, son iguales entre sí, obtenemos:

$$P^n_{\alpha,\beta,\ldots,\omega} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\cdots\omega!} \qquad (IV\text{-}5)$$

Obviamente, haciendo $\alpha = \beta = \cdots = \omega = 1$, en esta expresión, se obtiene:

$$P^n_{1,1,\ldots,1} = \frac{n!}{1!\,1!\,1!\cdots 1!} = n!,$$ equivalente a IV-4.

EJEMPLO IV-18.- ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse dos personas en una banca recta que contiene 5 asientos, si no se permite que ambas se sienten en un mismo lugar?

Solución: Consideremos el conjunto $H = \{P_1, P_2, V, V, V\}$, donde P_1 y P_2 son las personas mencionadas en tanto que las tres V representan a sendos objetos iguales, que pueden colocarse, cada uno de ellos, en los lugares que quedan vacíos luego de haberse sentado dichas personas; de este modo es fácil comprender que la respuesta, a este problema, corresponde al número de permutaciones de H, es decir a.

$$P^5_3 = \frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 20 \text{ maneras diferentes,}$$

respuesta correcta ya que, empleando la nomenclatura empleada al definir los elementos de H, las maneras diferentes de sentar las dos personas mencionadas en la forma indicada, son las enunciadas a continuación:

1 2 X X X	2 1 X X X	X 1 2 X X	X 2 1 X X
1 X X X 2	2 X X X 1	X 2 X X 1	X 1 X X 2
1 X X 2 X	2 X X 1 X	X X X 1 2	X X X 2 1
1 X 2 X X	2 X 1 X X	X X 1 2 X	X X 2 1 X
X 1 X 2 X	X 2 X 1 X	X X 2 X 1	X X 1 X 2

es decir 20 en total.

EJEMPLO IV-19.- ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse alineados en un estante un total de 9 libros, de los cuales 3 son de matemáticas, 4 de física y 2 de química:

a) si los de matemáticas son diferentes, los de física iguales y los de química diferentes, entre sí, de modo que los de matemáticas siempre estén juntos?

b) si los de matemáticas son iguales, los de física diferentes y los de química iguales, entre sí, de modo que los de física se encuentren juntos siempre?

Solución.- a) Como, tomando en cuenta los datos, existen P_3 maneras diferentes de colocar juntos los libros de matemáticas, y estando siempre juntos los de dicha materia existen P^7_4 maneras diferentes de colocar los elementos del conjunto formado por el "paquete de matemáticas", los 4 libros de física y los 2 de química, de acuerdo con el principio fundamental del análisis combinatorio, al aplicar las expresiones (IV-4) y (IV-5) donde corresponde, se obtienen:

$$P_3 \cdot P^7_4 = 3!\left(\frac{7!}{4!}\right) = 1260,$$

maneras diferentes de colocar los 9 libros, del modo indicado.

b) Como, tomando en cuenta los datos, existen P_4 maneras diferentes de colocar juntos los libros de física, y estando siempre juntos los de esta materia existen $P^6_{3,2}$ maneras diferentes de colocar los elementos del conjunto formado por el "paquete de física, los 3 libros de matemáticas y los dos de química, de acuerdo con el principio fundamental del análisis combinatorio, al aplicar las expresiones (IV-4) y (IV-5) donde corresponde, se obtienen:

$$P_4 \cdot P^6_{3,2} = 4!\left(\frac{6!}{3!\,2!}\right) = 1440,$$

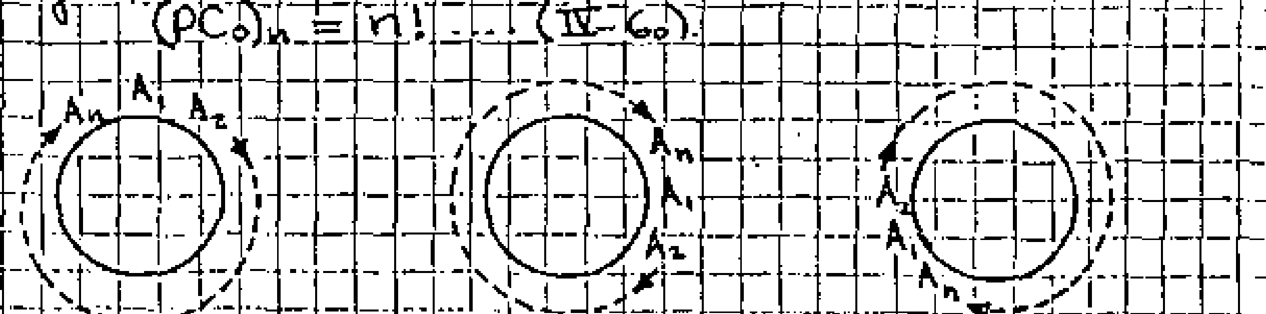
maneras diferentes de colocar los 9 libros del modo indicado.

PERMUTACIONES CIRCULARES

Se denomina así a los arreglos, alrededor de un círculo, que pueden hacerse con los n elementos de un conjunto.

Consideremos el conjunto $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, de n elementos diferentes; si importa el lugar donde esté situado cada uno de los n elementos, de modo que la disposición de los mismos, en las formas indicadas a continuación, se considere diferente, el número de permutaciones circulares (diferentes) de $\mathbf{A}$, al que representaremos con $(PC_o)_n$ igualará, obviamente, a P_n. Entonces, tomando en cuenta (IV-4), podemos escribir, existiendo necesariamente n lugares:

$$(PC_o)_n = n! \quad \ldots \quad (\text{IV-}6_o).$$



Si no importa el lugar específico donde esté situado cada uno de los n elementos, de modo que sólo importa la posición que guardan estos entre sí, el número de permutaciones circulares (diferentes) de este tipo, al que simbolizaremos mediante $(PC)_n$, igualará $(PC_o)_n/n$, en virtud de que a cada permutación de este tipo le corresponden n del tipo mencionado antes de los croquis. De acuerdo con esto, podemos escribir:

$$(PC)_n = (n-1)! \quad \ldots (IV\text{-}6)$$

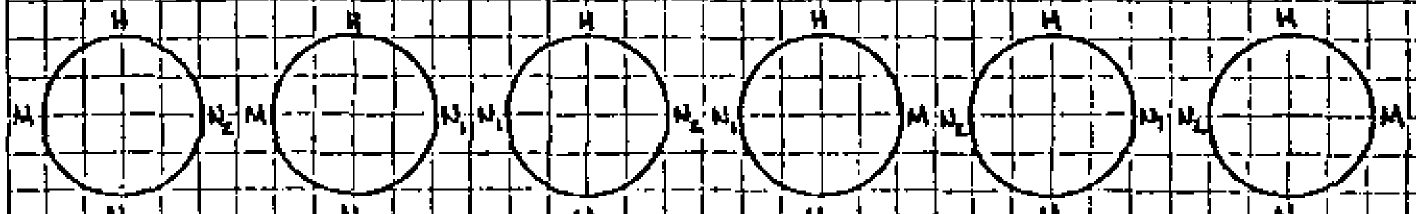
EJEMPLO IV-20.- ¿De cuántas maneras diferentes pueden estar sentados alrededor de una mesa circular, un hombre, una mujer y dos niños, contando exclusivamente la posición respecto a sí mismos? Compruebe su respuesta.

Solución.- Por las condiciones del problema la respuesta al mismo la obtendremos aplicando (IV-6), es decir que pueden tenerse

$$(PC)_4 = (4-1)! = 3! = 6,$$

maneras diferentes de estar sentadas las personas mencionadas, conforme a lo especificado; comprobación:

Siendo H el hombre, M la mujer, N_1 y N_2 los niños, las diferentes formas en que pueden estar sentados, cumpliendo con lo especificado para ello, son:



es decir un total de 6, con lo que se comprueba que la respuesta anteriormente obtenida es correcta, aplicable al problema de cómo pueden sentarse 4 personas para comer o jugar dominó.

EJEMPLO IV-21.- Suponiendo que sí pinte el hecho de que las personas del ejemplo inmediato anterior se sienten ya sea en la silla "norte", "este", "sur", o "oeste" de la mesa, ¿cuál sería la respuesta? Verifíquela.

Solución.- Aquí, debido a las condiciones dadas, obtendremos la respuesta correspondiente aplicando (IV-6a), es decir que se tienen

$$(PC_o)_4 = 4! = 24,$$

maneras diferentes de sentar a las 4 personas cumpliendo con las condiciones dadas, respuesta correcta ya que guardando los cuatro elementos las posiciones relativas de los croquis anteriores, al cambiar de lugar a H, si ocupaba la silla "norte", de modo que ocupe la "este", luego la "sur" y, finalmente, la "oeste", se tendrán $3 \cdot 6$, o sea 18, maneras diferentes más de sentarse, arrojando un total de 24 maneras diferentes de sentarse las 4 personas, cumpliendo las condiciones dadas. Lógicamente, la respuesta obtenida en este caso sería aplicable al problema de cómo pueden sentarse 4 personas, para observar un cierto espectáculo, alrededor de una mesa circular que contiene cuatro asientos.

PERMUTACIONES CIRCULARES DE UN CONJUNTO QUE CONTIENE ALGUNOS ELEMENTOS IGUALES ENTRE SÍ.

Procediendo en forma similar a la seguida para obtener $P^n_{\alpha,\beta,\ldots,\omega}$, si representamos mediante $(PC_o)^n_{\alpha,\beta,\ldots,\omega}$ al número de maneras diferentes de colocar los n objetos de un conjunto que contiene $\alpha, \beta, \ldots, \omega$, de ellos iguales, entre sí, alrededor de un círculo de n lugares, si cuenta el lugar específico donde cada uno de los n elementos se coloque, obtenemos

$$(PC_o)^n_{\alpha,\beta,\ldots,\omega} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\cdots\omega!} \quad (\text{IV-}7_o),$$

en tanto que, si sólo importa el orden que los n elementos guardan entre sí, por la razón expuesta al obtener (IV-6), podemos escribir, simbolizando con $(PC)^n_{\alpha,\beta,\ldots,\omega}$ al número de maneras diferentes de colocar los n objetos del conjunto mencionado, en las últimas condiciones mencionadas, lo siguiente:

$$(PC)^n_{\alpha,\beta,\ldots,\omega} = \frac{(n-1)!}{\alpha!\,\beta!\cdots\omega!} \quad (\text{IV-7})$$

EJEMPLO IV-22.- ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse en torno de una mesa circular 3 manzanas, 2 peras y una naranja, si sólo importa el orden que las frutas guardan entre sí?

Solución.- De acuerdo con las características del problema la respuesta al mismo la obtendremos aplicando (IV-7), o sea que se tienen:

$$(PC)^6_{3,2} = \frac{(6-1)!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\,2!} = 10,$$

maneras diferentes de colocar las frutas indicadas, cumpliendo con lo especificado en el enunciado del problema; la ilustración de estas 10 maneras diferentes puede apreciarse al final del ejemplo IV-6.

COMBINACIONES.

Sea un conjunto cualquiera Q, de n elementos diferentes; llamaremos combinación (o combinación sin repetición) de orden r, de Q a todo subconjunto de éste que contiene r elementos no repetidos, lo que implica $r \leq n$. De acuerdo con lo anterior diremos que dos combinaciones son diferentes si son de diferente orden (es decir si contienen un número diferente de elementos) o si contienen algún elemento diferente.

Si el número de combinaciones diferentes de orden r de Q, lo simbolizamos mediante C_r^n, dicho número lo podemos obtener mediante el empleo de la expresión:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad \text{(IV-8)},$$

misma que obtendremos luego de resolver los siguientes ejercicios.

EJEMPLO IV-23.- ¿De cuántas maneras diferentes puede extraerse un grupo de 3 esferas de una caja que contiene 5, todas estas diferentes?

Solución.- Como no importa el orden en que las esferas vayan siendo extraídas de la caja, aplicaremos (IV-8) para resolver el problema obteniendo:

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10 \text{ maneras diferentes};$$

respuesta congruente, como el lector puede apreciar, con lo obtenido del diagrama de árbol construido para resolver el problema del ejemplo IV-7.

EJEMPLO IV-24.- ¿Cuántos conjuntos diferentes que contengan 6 letras en total, diferentes todas éstas, pueden formarse de manera tal que al menos 4 de ellas sean vocales si se dispone de las cinco vocales y de las consonantes b, c y d, tantas veces como se requieran?

Solución.- Como no importa el orden en que las letras se vayan eligiendo, al existir C_4^5 maneras diferentes de elegir 4 vocales de entre 5 y C_2^3 maneras diferentes de elegir 2 consonantes de entre 3, existiendo C_5^5 maneras diferentes de obtener 5 vocales de entre 5 y C_1^3 maneras diferentes de obtener una consonante de entre 3, de acuerdo con el principio fundamental del análisis combinatorio, existen:

$$C_4^5 \cdot C_2^3 + C_5^5 \cdot C_1^3 = \left[\frac{5!}{(5-4)!\,4!}\right]\left[\frac{3!}{(3-2)!\,2!}\right] + \left[\frac{5!}{(5-5)!\,5!}\right]\left[\frac{3!}{(3-1)!\,1!}\right] = (5)(3)+(1)(3) = 18$$

maneras diferentes de formar los conjuntos indicados. El lector pue de ver los 18 conjuntos de letras, que es posible formar cumpliendo con las condiciones dadas, en el ejemplo IV-8 donde según puede apreciarse se construyó un solo diagrama de árbol y no dos como pudiera pensarse fueran necesarios.

Obtención de (IV-8).- Basados en la definición de combinación, si los n elementos diferentes de un conjunto cualquiera, Q, los representamos mediante los números naturales uno a n, respectivamente, las combinaciones diferentes de orden 1 de Q son:

1 2 3 4 5 .... $(n-1)$ n

es decir un total de n, pudiendo escribir

$$C_1^n = n \quad \cdots \text{(A)}$$

las diferentes combinaciones de orden 2 de dicho conjunto, mostradas sin tachar a continuación, son:

~~11~~						
12	~~22~~					
13	23	~~33~~				
14	24	34	~~44~~			
15	25	35	45	~~55~~		
⋮	⋮	⋮	⋮			
$1(n-1)$	$2(n-1)$	$3(n-1)$	$4(n-1)$	$5(n-1)$	$\cancel{(n-1)(n-1)}$	
$1n$	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$(n-1)n$	$\cancel{nn}$

si se permitiera la repetición contarían también las combinaciones tachadas, pero al no permitirse se cuenta con $(n-1)$ renglones de los cuales el 1º (de ellos) tiene una combinación (de orden 2), el 2º tiene dos combinaciones (del mismo orden), ..., el $(n-1)$º tiene $(n-1)$ combinaciones (también de orden 2).

Entonces, para n par se tendrían $(n-1)$ elementos renglones con un promedio de $[1+(n-1)]/2$, o sea $n/2$, combinaciones de orden 2 por lo que el total de combinaciones diferentes de este orden vendría dado por:

$$(n-1)(n/2)$$

Para n impar se tendrían $(n-2)$ renglones con un promedio de $[1+(n-2)]/2$, o sea $(n-1)/2$, y un renglón con $(n-1)$, combinaciones de orden 2 por lo que, en este caso, el total de combinaciones diferentes de este orden vendría dado por:

$$(n-2)\left[(n-1)/2\right] + (n-1);$$

como: $(n-2)\left[(n-1)/2\right] + (n-1) = (n-1)\left[\frac{n-2}{2}+1\right] = (n-1)(n/2)$, que es lo que se obtuvo en caso de que n fuese par, concluímos que siendo n par o impar:

$$C^n_2 = \frac{1}{2}(n)(n-1) \quad \text{(B')}$$

que tomando en cuenta (A) puede escribirse:

$$C^n_2 = \frac{1}{2}(n-1)\,C^n_1 \quad \text{(B')}$$

Aparentemente, asociando $(n-2)$ elementos de Q a cada combinación de orden 2 (por no permitirse la repetición), las combinaciones diferentes de orden 3 de dicho conjunto serían las mostradas a continuación, salvo las que están tachadas (por la razón expuesta).

~~11 1~~	~~12 1~~	~~22 1~~	~~13 1~~	23 1 ✓	~~33 1~~	~~14 1~~	24 1 ⊙	34 1	......	(n-1)n 1	~~nn 1~~
~~11 2~~	~~12 2~~	~~22 2~~	13 2 ✓	~~23 2~~	33 2	14 2 ⊙	~~24 2~~	34 2 *	......	(n-1)n 2	~~nn 2~~
~~11 3~~	12 3 ✓	~~22 3~~	~~13 3~~	~~23 3~~	~~33 3~~	14 3	24 3 *	~~34 3~~	......	(n-1)n 3	~~nn 3~~
~~11 4~~	12 4 ⊙	~~22 4~~	13 4	23 4 *	33 4	~~14 4~~	~~24 4~~	~~34 4~~	......	(n-1)n 4	~~nn 4~~
~~11~~ 5	12 5	~~22~~ 5	13 5	23 5	33 5	14 5	24 5	34 5	......	(n-1)n 5	~~nn~~ 5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
~~11(n-1)~~	12(n-1)	~~22(n-1)~~	13(n-1)	23(n-1)	33(n-1)	14(n-1)	24(n-1)	34(n-1)	......	~~(n-1)n(n-1)~~	~~nn(n-1)~~
~~11n~~	12n	~~22n~~	13n	23n	33n	14n	24n	34n	......	~~(n-1)n n~~	~~nn n~~

al aparecer tres veces cada una de las combinaciones no tachadas (como puede apreciarse en las marcadas con ✓, ⊙, o *) ya que por ejemplo 123, 132 y 231 son una misma combinación, el número de combinaciones diferentes de orden tres igualará un tercio del producto entre $(n-2)$ y el número de combinaciones diferentes de orden 2, es decir:

$$C^n_3 = \frac{1}{3}(n-2)\,C^n_2 \quad \text{(C')},$$

que tomando en cuenta (B) puede escribirse:

$$C^n_3 = \frac{1}{6}(n)(n-1)(n-2) \quad \text{(C)};$$

si continuamos el proceso obtendremos:

$$C^n_4 = \frac{1}{4}(n-3)\,C^n_3 \quad \text{(D')},$$

y así sucesivamente hasta obtener:

$$C^n_{r-1} = \frac{1}{r-1}(n-r+2)\,C^n_{r-2} \quad \text{(Q')}, \text{ y,}$$

$$C^n_r = \frac{1}{r}(n-r+1)\,C^n_{r-1} \quad \text{(R')}$$

multiplicando miembro a miembro las expresiones (A), (B), (C'), (D'), ... (Q'), (R'), se obtiene:

$$C_1^n \cdot C_2^n \cdot C_3^n \cdots C_{r-1}^n \cdot C_r^n = n\left[\frac{1}{2}(n-1)C_1^n\right]\left[\frac{1}{3}(n-2)C_2^n\right]\cdots\left[\frac{1}{r-1}(n-r+2)C_{r-2}^n\right]\left[\frac{1}{r}(n-r+1)C_{r-1}^n\right],$$

de donde obtenemos:

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(r-1)(r)},$$

expresión de la cual, luego de multiplicarla y dividirla por $(n-r)!$, se obtiene:

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!\,[2\cdot 3\cdot 4\cdots(r-1)(r)]},$$

que puede escribirse:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \text{ que es (IV-8)}$$

Esta expresión podríamos haberla obtenido de manera más rápida sabiendo que el número de combinaciones diferentes de orden r, de un conjunto cualquiera Q, iguala $1/r!$ veces el número de ordenaciones diferentes del mismo orden de dicho conjunto, relación que es fácil deducir ya que, según (IV-4), los r elementos (diferentes lógicamente) que constituyen una combinación cualquiera de orden r de Q, dan lugar a $r!$ ordenaciones diferentes del mismo orden, de ese conjunto, pudiendo escribir:

$$O_r^n = r!\,C_r^n,$$

de donde se obtiene:

$$C_r^n = \frac{1}{r!}\,O_r^n,$$

relación mencionada, a partir de la cual obtenemos, tomando en cuenta (IV-2):

$$C_r^n = \frac{1}{r!}\left[\frac{n!}{(n-r)!}\right],$$

que puede escribirse:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \text{ o sea (IV-8)}$$

Sin embargo, obtuvimos (IV-8) partiendo de la definición de combinación (o combinación simple) ya que los cuadros empleados al seguir este procedimiento nos serán útiles para obtener el número de combinaciones con repetición diferentes, de un cierto orden.

COMBINACIONES CON REPETICIÓN.

Sea un conjunto cualquiera Q que contiene un total de q elementos, n de los cuales son diferentes entre sí, pudiendo tenerse $n \leq q$; definimos combinación con repetición de orden r, de Q, a todo conjunto Q' que contiene un total de r elementos, ninguno de estos diferente a alguno de Q. Si $r \leq n$, Q' puede tener a sus elementos: a) todos diferentes, b) iguales algunos de ellos, o, c) todos iguales, entre sí; si $r > n$ los r elementos de Q no pueden ser, lógicamente, todos diferentes entre sí pudiendo ser: A) iguales algunos de ellos, o, B) todos iguales, entre sí.

Para aclarar esta definición consideremos un conjunto F que contiene un total de 30 frutas, de las cuales 7 son granadas, 5 manzanas, 10 uvas y 8 peras, ó sea con $n=4$. Si las granadas las representamos con g, las manzanas con m, las uvas con u, y las peras con p, decimos que son combinaciones con repeticion,

de orden 3, $r=3$, de Q:	de orden 4, $r=4$, de Q:	de orden 5, $r=5$, de Q:
g m u ($r<n$, caso a)	g m u p ($r=n$, caso a)	g m m u p ($r>n$, caso A)
u p p ($r<n$, caso b)	p p m m ($r=n$, caso b)	g m g p m ($r>n$, caso A)
m m m ($r<n$, caso c)	u u u u ($r=n$, caso c)	p p p p p ($r>n$, caso B)

Si al número de combinaciones con repetición (diferentes) de orden r, de Q, lo simbolizamos mediante $(CR)^n_r$, dicho número lo podemos obtener mediante el empleo de la expresión:

$$(CR)^n_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} \qquad (IV-9),$$

misma que obtendremos luego de resolver los siguientes ejercicios.

EJEMPLO IV-25.- ¿Cuántos conjuntos diferentes de 3 esferas pueden formarse si para ello se dispone de tantas rojas, amarillas, negras y blancas como se requiera, idénticas ellas siempre y cuando sean del mismo color?

Solución.- Como no importa el orden en que las esferas sean elegidas, aplicamos (IV-9) para resolver el problema, obteniendo:

$$(CR)^4_3 = \frac{(4+3-1)!}{(4-1)!\,3!} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20 \text{ conjuntos diferentes;}$$

obsérvese que en este ejemplo tuvimos $r<n$. El lector puede apreciar los 20 conjuntos diferentes de esferas, total que cumple con las condiciones del problema, en el ejemplo IV-9 donde empleamos un diagrama de árbol para obtenerlos.

EJEMPLO IV-26.- ¿Cuántas maneras diferentes existen de obsequiar un total de 6 frutas a una persona si para ello se dispone de 8 manzanas, 2 peras y 12 naranjas?

Solución.- Como no importa el orden en que se seleccionen las frutas sino el hecho de que sean 6 en total, el número de maneras diferentes que existirían de obsequiar a una persona dicho total, si para ello se dispusiera de un mínimo de 6 manzanas, 6 peras y 6 naranjas, vendría dado por:

$$(CR)_6^3 = \frac{(3+6-1)!}{(3-1)!\,6!} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28,$$

pero como se dispone sólo de dos peras, a este número habría que restarle el propio correspondiente a los diferentes conjuntos donde 3, 4, 5 y 6 peras formarían un total de 6 frutas (combinadas con manzanas y naranjas) que totalizan $(CR)_3^2$, $(CR)_2^2$, dos y uno, respectivamente; es decir que existen:

$$(CR)_6^3 - (CR)_3^2 - (CR)_2^2 - 2 - 1 = 28 - \frac{(2+3-1)!}{(2-1)!\,3!} - \frac{(2+2-1)!}{(2-1)!\,2!} - 2 - 1 = 28 - 4 - 3 - 2 - 1 = 18$$

maneras diferentes de obsequiar un total de 6 frutas a una persona, tomando en cuenta las condiciones dadas. Obsérvese que, durante el desarrollo de este ejemplo, la expresión (IV-9) se aplicó para los tres casos posibles de relación r a n, es decir, $r>n$, $r=n$ y $r<n$, ya que el dos y el uno mencionados anteriormente no son sino $(CR)_1^2$ y $(CR)_0^3$, respectivamente. Se recomienda al lector resuelva este problema construyendo el diagrama de árbol adecuado para ello.

Obtengamos (IV-9).- Para esto nos basaremos en la definición de combinación con repetición así como en los cuadros que nos sirvieron para obtener C_r^n.

De acuerdo con la definición, las combinaciones con repetición de orden 1, de un conjunto cualquiera Q que contiene un total de q elementos, n de los cuales son diferentes entre sí, pudiendo tenerse $n \le q$, son:

1	2	3	4	5	....	$(n-1)$	n

es decir n en total, pudiendo expresar:

$$(CR)_1^n = n \quad \ldots \text{(A}_R\text{)}$$

al permitirse la repetición, las combinaciones que tachamos en los cuadros empleados para obtener C_2^n y C_3^n, que totalizan n y $n \cdot n = n^2$, respectivamente, ahora sí contarán, de modo que podemos escribir:

$$(CR)^n_2 = C^n_2 + n \cdots \text{(B}_R\text{)}, \text{ y,}$$

$$(CR)^n_3 = C^n_3 + n^2 \cdots \text{(C}_R\text{)};$$

sustituyendo en (B_R) la expresión

$$C^n_2 = \frac{1}{2}(n)(n-1) \cdots (B),$$

obtenida anteriormente, podemos expresar:

$$(CR)^n_2 = \frac{1}{2}(n)(n-1) + n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{1}{2}(n+1)(n) \cdots (B''_R)$$

que, tomando en cuenta (A_R), puede escribirse:

$$(CR)^n_2 = \frac{1}{2}(n+1)(CR)^n_1 \cdots (B'_R);$$

si sustituimos en (C_R) la expresión

$$C^n_3 = \frac{1}{6}(n)(n-1)(n-2) \cdots (C),$$

que obtuvimos antes, podemos expresar:

$$(CR)^n_3 = \frac{1}{6}(n)(n-1)(n-2) + n^2 = \frac{n}{6}(n^2 - 3n + 2 + 6n) = \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2) =$$

$$= \frac{n}{6}(n+2)(n+1) = \frac{1}{3}(n+2)\left[\frac{1}{2}(n+1)(n)\right],$$

de donde, considerando (B''_R), obtenemos:

$$(CR)^n_3 = \frac{1}{3}(n+2)(CR)^n_2 \cdots (C'_R);$$

repitiendo el proceso, llegamos a obtener:

$$(CR)^n_{r-1} = \frac{1}{r-1}(n+r-2)(CR)^n_{r-2} \cdots (Q'_R), \text{ y,}$$

$$(CR)^n_r = \frac{1}{r}(n+r-1)(CR)^n_{r-1} \cdots (R'_R);$$

multiplicando miembro a miembro las expresiones (A_R), (B'_R), (C'_R) $\cdots$ (Q'_R) y (R'_R), se obtiene:

$$(CR)^n_1 \cdot (CR)^n_2 \cdot (CR)^n_3 \cdot \cdots \cdot (CR)^n_{r-1} \cdot (CR)^n_r = n\left[\frac{1}{2}(n+1)(CR)^n_1\right]\left[\frac{1}{3}(n+2)(CR)^n_2\right] \cdot \cdots$$

$$\cdots \cdot \left[\frac{1}{r-1}(n+r-2)(CR)^n_{r-2}\right]\left[\frac{1}{r}(n+r-1)(CR)^n_{r-1}\right];$$

de donde obtenemos:

$$(CR)^n_r = \frac{n(n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot (n+r-2)(n+r-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (r-1)(r)},$$

expresión de la cual, luego de multiplicarla y dividirla por $(n-1)!$, se obtiene:

$$(CR)_r^n = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+2)(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!\,[2\cdot3\cdot4\cdots(r-1)(r)]},$$

que puede escribirse:

$$(CR)_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$, que es (IV-9);

analizando esta expresión se ve que no hay problema de restricciones para r, es decir que es válida $\forall (r \in N) \leq n$.

GENERALIZACIÓN DEL PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL ANÁLISIS COMBINATORIO.

Sean $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$, una serie de n eventos que pueden ser realizables consecutivamente, en el orden mencionado o en el inverso.

Si dichos eventos, ligados o relacionados de algún modo, pueden realizarse de $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ maneras diferentes, respectivamente:

A) De acuerdo con el principio fundamental del análisis combinatorio, el número de maneras diferentes de cumplir con la realización de e_1 y e_2, consecutivamente y en este orden, es:

$$m_1 \cdot m_2$$

B) Considerando que el cumplir con e_1 y e_2 según el inciso A constituye un evento llamado E_1, el número de maneras diferentes de cumplir con E_1 y e_3 consecutivamente es, por el principio fundamental del análisis combinatorio:

$$[m_1 \cdot m_2] \cdot m_3 ,$$

por lo que podemos decir que, el número de maneras diferentes de cumplir con llevar a cabo e_1, e_2 y e_3, consecutivamente y en este orden es: $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$;

obsérvese que de manera similar, a la indicada en este inciso, resolvimos el problema del ejemplo IV-2.

Continuando con el proceso seguido hasta aquí podemos enunciar lo siguiente, a lo que se le conoce como "Generalización del principio fundamental del análisis combinatorio" y que nosotros, en forma abreviada, simbolizaremos mediante G.P.F.A.C. :

Si $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$, constituyen una serie de eventos que puedan realizarse de $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ maneras diferentes, respectivamente, consecutivamente y en el orden mencionado, el número de maneras diferentes que existen de cumplir con la realización de los n eventos, en el orden enunciado, es:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$$

Se sugiere al lector que demuestre la validez de la G.P.F.A.C. para el caso en que no importe el orden en que se realicen los n eventos.

Antes de ejemplificar el empleo de la G.P.F.A.C. es conveniente hacer ver que, los diferentes tipos de problemas de combinatoria que se nos presenten, dependiendo de las características de los mismos, podemos resolverlos:

1) Aplicando una sola expresión, de las obtenidas en este tema, como en el caso de los ejemplos IV-12(a, b y c), 13(a, b y c), 14(a, b y c), 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 25 y 26, resueltos anteriormente.

2) Mediante la aplicación de una o varias expresiones y el empleo, por una vez, del principio fundamental del análisis combinatorio o de la G.P.F.A.C.; ver ejemplos IV-19 (a y b), antes resuelto, y IV-28.

4) Aplicando una o varias expresiones y empleando el principio fundamental del análisis combinatorio y/o la G.P.F.A.C., tantas veces como sea necesario, como puede apreciarse en el ejemplo IV-24, resuelto anteriormente, y en los ejemplos IV-27, 29 y 30.

5) Mediante otra forma o método, como lo constituye el empleo de diagramas de árbol (según puede apreciarse en los ejemplos IV-4 a IV-9), diferente a las indicadas antes de ésta.

También es conveniente, en tanto no se cuente con experiencia, contar con un resumen que muestre conjuntamente las características particulares de cada una de las ordenaciones, permutaciones y combinaciones, mencionadas en el desarrollo de este tema, de modo que al tener un problema particular (luego de estudiar sus condiciones) auxiliado por dicho resumen, sepamos cual es la expresión que debemos aplicar para resolverlo.

Obviamente, el diagrama mostrado a continuación, que constituye el resumen mencionado, no es fácil de memorizar por lo cual, la correcta aplicación de los símbolos que contiene (mismos que representan el total de los conceptos ahí vertidos) no será posible si no se hacen los suficientes ejercicios, de modo que se adquiera la experiencia indispensable para poder resolver los diferentes problemas de combinatoria que se tengan, sin necesidad de contar con él.

Ing. Jorge Solar d.

CASOS DIVERSOS

Caso	Tipo	Características	Subcaso	Símbolo del total de ordenaciones, permutaciones, o combinaciones, según el caso de que se trata.
Importa el orden en que se elijan o dispongan los elementos que constituyen la solución del problema.	Ordenaciones (simples)	Cuentan con un total de r elementos, diferentes entre sí, de los n diferentes de Q (r≤n)		O^n_r (ejemplos IV-12(a, b y c) y 13(a, b y c))
	Ordenaciones con repetición.	Cuentan con un total de r elementos, igual cada uno de estos a alguno de los n diferentes de Q, pudiendo entre los r existir uno o varios repetidos. (r≤n).		$(OR)^n_r$ (ejemplos IV-14(a, b y c) y 15)
	Permutaciones (simples)	Intervienen todos los elementos de un conjunto que contiene n en total, diferentes entre sí.		P_n (ejemplos IV-16 y 17)
	Permutaciones (simples) con grupos de objetos iguales	Intervienen todos los elementos, de un conjunto que contiene n en total, de los cuales $\alpha, \beta, \ldots, \omega$, son iguales entre sí.		$P^n_{\alpha, \beta, \ldots, \omega}$ (ejemplos IV-18 y 19 (a y b))
	Permutaciones circulares (simples)	Intervienen todos los elementos, de un conjunto que contiene n en total, diferentes entre sí.	Donde sólo importa el orden que los elementos guardan entre sí	$(PC)_n$ (ejemplo IV-20)
			Donde importa el orden que los elementos guardan entre sí, y el hecho de que ocupen una posición determinada respecto al círculo	$(PC_o)_n$ (ejemplo IV-21)
	Permutaciones circulares con grupos de objetos iguales	Intervienen todos los elementos, de un conjunto que contiene n en total, de los cuales $\alpha, \beta, \ldots, \omega$, son iguales entre sí.	Donde sólo importa el orden que los elementos guarden entre sí.	$(PC)^n_{\alpha, \beta, \ldots, \omega}$ (ejemplo IV-22)
			Donde importa el orden que los elementos guardan entre sí, y el hecho de que ocupen una posición determinada respecto al círculo	$(PC_o)^n_{\alpha, \beta, \ldots, \omega}$
No importa el orden en que se elijan o dispongan los mismos	Combinaciones (simples)	Cuentan con un total de r elementos, diferentes entre sí, de los n diferentes de Q. (r≤n)		C^n_r (ejs. IV-23 y 24)
	Combinaciones con repetición	Cuentan con un total de r elementos, igual cada uno de estos a alguno de los n diferentes de Q, pudiendo repetirse uno o varios (r≤n)		$(CR)^n_r$ (ejs. IV-25 y 26)

EJEMPLO IV-27.- Para emitir señales nocturnas se cuenta con un tablero eléctrico, formado por 10 casilleros en línea, como se indica a continuación, donde los lugares que tienen anotado C, N y L corresponden a colores, números y letras, respectivamente.

C	N	N	N	L	L	L	L	L	C

a) ¿Cuántas señales diferentes pueden emitirse, de modo que no contengan letras repetidas, si para ello se dispone de los colores amarillo, verde, blanco y rojo, de los dígitos del 3 al 5, así como de las cinco vocales?

b) ¿Cuántas señales diferentes pueden ser emitidas, de tal manera que no contengan colores repetidos y, además, muestren dos letras D y tres E, si para ello se dispone de los colores verde, blanco y rojo, de los dígitos 1 y 2, así como de las letras mencionadas?

c) ¿Si la disposición de colores, números y letras fuera como se indica en seguida, cambiarían las respuestas a los incisos b y a? De ser negativa su respuesta, diga en que caso cambiarían y porqué; de ser positiva simplemente explique el porqué.

N	C	L	N	L	C	L	L	N	L

Solución.-

a) Como, tomando en cuenta las condiciones del problema, existen $(OR)^4_2$ maneras diferentes de aparecer los 2 colores, $(OR)^3_3$ de aparecer los 3 números, y P_5 de aparecer las 5 letras, al aplicar la G.P.F.A.C. obtenemos:

$$(OR)^4_2 \cdot (OR)^3_3 \cdot P_5 = 4^2 \cdot 3^3 \cdot 5! = 16 \cdot 27 \cdot 120 = 51840 \text{ señales diferentes}$$

b) Como, tomando en cuenta las condiciones del problema, existen O^3_2 maneras diferentes de aparecer los 2 colores, $(OR)^2_3$ de aparecer los 3 números, y $P^5_{2,3}$ de aparecer las 5 letras, al aplicar la G.P.F.A.C. obtenemos:

$$O^3_2 \cdot (OR)^2_3 \cdot P^5_{2,3} = \left[\frac{3!}{(3-2)!}\right] \cdot 2^3 \cdot \left[\frac{5!}{2!\,3!}\right] = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ señales diferentes}$$

c) Si los colores, números y letras ocuparan los lugares indicados en el 2º tablero indicado, no cambiarían las respuestas de los incisos b y a puesto que dichos lugares son fijos. Si los 2 colores, los 3 números y las cinco letras pudieran ocupar los casilleros que quisiéramos, las respuestas serían diferentes de las obtenidas para los incisos b y a.

EJEMPLO IV-28.- ¿De cuántas maneras diferentes podemos comprar un total de nueve libros, formado por 2 de matemáticas, 3 de física y 4 de dibujo, si están a la venta 10, 15 y 7, respectivamente, todos diferentes entre sí?

Solución.- Como existen C^{10}_2 maneras diferentes de elegir los de matemáticas, C^{15}_3 los de física, y C^7_4 los de dibujo, de acuerdo con la G.P.F.A.C. la respuesta es:

$$C^{10}_2 \cdot C^{15}_3 \cdot C^7_4 = \frac{10!}{(10-2)!\,2!}\left[\frac{15!}{(15-3)!\,3!}\right]\left[\frac{7!}{(7-4)!\,4!}\right] = (45)(455)(35) = 716,625.$$

EJEMPLO IV-29.- ¿Cuántas placas diferentes para vehículos pueden formarse de modo que, conteniendo un total de 7 elementos, primero estén colocados los números, enseguida las letras minúsculas y al final (en su caso) las mayúsculas, si deben tener un mínimo de dos y un máximo de 4 números y una cantidad fija de 3 minúsculas, si para ello se dispone de los dígitos 3, 4 y 5, de las minúsculas a, b, c y d, así como de las mayúsculas D y E, tantas veces como sea necesario?

Solución: Tomando en cuenta los datos:

1) Para el caso en que son dos números, aplicando la G.P.F.A.C., se obtienen:

$$(OR)^3_2 \cdot (OR)^4_3 \cdot (OR)^2_2 = 3^2 \cdot 4^3 \cdot 2^2 = (9)(64)(4) = 2304 \text{ placas diferentes,}$$

2) Si son 3 los números, aplicando también la G.P.F.A.C., se obtienen:

$$(OR)^3_3 \cdot (OR)^4_3 \cdot 2 = 3^3 \cdot 4^3 \cdot 2 = (27)(64)(2) = 3456 \text{ placas diferentes, y,}$$

3) Si son 4 los números, aplicando el principio fundamental del análisis combinatorio, se obtienen:

$$(OR)^3_4 \cdot (OR)^4_3 = 3^4 \cdot 4^3 = (81)(64) = 5184 \text{ placas diferentes;}$$

tomando en cuenta los casos 1, 2 y 3, podemos decir que pueden formarse:

$$2304 + 3456 + 5184 = 10944,$$

placas diferentes que pueden formarse, tomando en cuenta las condiciones dadas.

EJEMPLO IV-30.- ¿Cuál sería la respuesta al problema inmediato anterior, si además de lo indicado no se permitieran letras repetidas y no importara el orden en que estuvieran colocados los números?, es decir, si la placa 123 abdF se considera la misma que la 312 abdF, pero diferente a la 123 bdaF.

Solución.- Tendríamos entonces, para los casos 1, 2 y 3, respectivamente:

1) $(CR)^3_2 \cdot O^4_3 \cdot O^2_2 = \left[\dfrac{(3+2-1)!}{(3-1)!\,2!}\right]\left[\dfrac{4!}{(4-3)!}\right]\left[\dfrac{2!}{(2-2)!}\right] = (6)(24)(2) = 288$ placas diferentes,

2) $(CR)^3_3 \cdot O^4_3 \cdot 2 = \left[\dfrac{(3+3-1)!}{(3-1)!\,3!}\right]\left[\dfrac{4!}{(4-3)!}\right](2) = (10)(24)(2) = 480$ placas diferentes, y,

3) $(CR)^3_4 \cdot O^4_3 = \left[\dfrac{(3+4-1)!}{(3-1)!\,4!}\right]\left[\dfrac{4!}{(4-3)!}\right] = (15)(24) = 360$ placas diferentes,

por lo que, la respuesta al problema del ejemplo IV-29, tomando en cuenta las condiciones del mismo y las mencionadas inmediatamente antes de iniciar la solución de este IV-30, es:

$288 + 480 + 360 = 1128$,

placas diferentes que pueden formarse, tomando en cuenta ambas condiciones.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

En varias ocasiones tendremos necesidad de demostrar la validez, o no validez, de ciertas proposiciones que tienen que ver con el conjunto de los números naturales, N; para llevar a cabo dichas demostraciones nos podemos valer del método llamado "Inducción matemática", que se basa fundamentalmente en los Postulados o Axiomas de Peano, enunciados a continuación:

1º) $1 \in N$,

2º) Para cada $n \in N$ existe un número único, $n^* \in N$, que llamaremos siguiente de n, es decir $n^* = n+1$,

3º) Para toda $n \in N$, $n^* \neq 1$,

4º) Si $m, n \in N$, y $m^* = n^*$, necesariamente $m = n$, y,

5º) Todo subconjunto S de N, tal que:
a) $1 \in S$, y, b) $K \in S$ implica $K^* \in S$,
es el mismo conjunto N.

El método mencionado, inducción matemática, consiste en:

1) Investigar si la proposición que se tiene, que llamaremos P, se cumple para el menor valor de n a partir del cual se indica, o supone, es válida.

2) Suponer (si P se cumple para el valor de n mencionado en 1) que P es válida para $n = K$; si P no se cumple para el valor de n mencionado en 1 automáticamente P no es válida.

3) Tratar de demostrar, partiendo de la suposición indicada en 2, que P se cumple para $n = K+1$.

4) Dar por demostrado que

a) P es válida si demostramos que se cumple para el valor de K mencionado en 3, o,

b) P no es válida si demostramos que no se cumple para ese valor de n mencionado en 3.

En algunos casos, previamente a la aplicación de este método, deberemos establecer clara y correctamente la expresión correspondiente a la proposición que se tiene, para posteriormente analizarla, siguiendo dicho método.

Ya sabiendo cual es la expresión que debemos analizar, el logro de los pasos 1 y 2 del método mencionado es menos laborioso que la consecución del paso 3; para lograr el paso 3 lo más importante consiste en que determinemos o detectemos, antes de iniciar el desarrollo del mismo, lo que se debe cumplir necesariamente para que P sea válida para n=k+1, y luego realizar, con la expresión resultante de suponer válida P para n=k, las operaciones necesarias de modo de poder, luego de efectuar estas, concluir si P se cumple, o no, para n=k+1.

EJEMPLO IV-3) - Demuestre que la suma de los n primeros números naturales iguala al producto $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Solución - La validez de la proposición enunciada quedará demostrada, si logramos demostrar que

$$\sum_{n=1}^{n} n = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ es válido } \forall n \in N,$$

o bien que:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}(n)(n+1), \forall n \in N \ldots P_1; \text{ hagámoslo.}$$

1) P_1 se cumple para $n=1$, ya que $\frac{1}{2}(1)(1+1)=1$.

2) Al ocurrir el cumplimiento anterior, suponemos válido:

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1), \forall k \in N \ldots ①;$$

3) Partiendo de ① debemos demostrar que P_1 se cumple para $n=k+1$, es decir que:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1], \forall k \in N \ldots ②;$$

adicionando $(k+1)$ en ambos miembros de ① y desarrollando el segundo miembro, de la expresión resultante, obtenemos:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) = \frac{1}{2}(k^2+k+2k+2) =$$

$$= \frac{1}{2}(k^2+3k+2) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2), \forall k \in N,$$

o sea:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1], \forall k \in N,$$

que es ②, a lo que pretendíamos llegar.

4) Al quedar demostrado, según el paso 3, que P_1 se cumple para $n=k+1$, P_1 es válida, razón por la cual podemos decir que queda demostrado lo que se nos pidió.

EJEMPLO IV-32.- Diga, luego de emplear para ello el método de inducción matemática, si es válida la expresión:

$$(1+n!) > 2^n,\ \forall n \in N.$$

Solución.- Empleemos el método indicado;

1) Para $n=1$ (menor valor de n indicado en la expresión), se tiene:

$$(1+n!) = (1+1!) = 2 \text{ --- ①},\quad 2^n = 2^1 = 2 \text{ --- ②};$$

como, de acuerdo con ① y ②, para este caso $(1+n!)$ no es mayor que 2^n, de conformidad con lo indicado por el método, la expresión dada NO ES VÁLIDA. Sugerencia: Vea ejemplo IV-37.

EJEMPLO IV-33.- Emplee el método de inducción matemática para demostrar si la expresión

P_2: $1+3+5+\cdots+(2n-1) = 3n^2-2,\ \forall n \in N$, es o nó válida.

Solución.- Empleemos dicho método;

1) Para $n=1$ (menor valor de n indicado en P_2), tenemos:

$$3n^2-2 = 3(1)^2-2 = 3-2 = 1;$$

por lo cual P_2 se cumple para el menor valor de n indicado en la misma;

2) Al ocurrir el cumplimiento mencionado en 1, suponemos válido:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1) = 3k^2-2,\ \forall k \in N \text{ --- ①};$$

3) Partiendo de ① debemos demostrar que P_2, para que sea válida, se cumple para $n=k+1$, o sea que:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1] = 3(k+1)^2-2 \text{ --- ②};$$

adicionando $[2(k+1)-1]$ en ambos miembros de ① y desarrollando el segundo miembro de la expresión resultante, se obtiene:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1] = 3k^2-2+[2(k+1)-1] = 3k^2-2+2k+1 =$$
$$= 3k^2+(6k+3)-2+2k+1-(6k+3) =$$
$$= (3k^2+6k+3)-2-4k-2,$$

que puede escribirse:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1] = [3(k+1)^2-2]-4k-2,\ \forall k \in N \text{ --- ③},$$

como partiendo de ① no pudimos obtener ② sino que obtuvimos ③, al ser iguales los primeros miembros de ② y ③ pero diferentes sus segundos (miembros), ya que $3(k+1)^2-2 \neq [3(k+1)^2-2]-4k-2$, $\forall n \in N$, queda demostrado que P_2 no se cumple para $n=k+1$.

4) Al quedar demostrado, según el paso 3, que P_2 no se cumple para $n=k+1$, queda demostrado que P_2 no es válida.

EJEMPLO IV-34.- Mediante el empleo del método de inducción matemática demuestre que

$$\sum_{n=1}^{n} 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right], \text{ es válida } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución.- La proposición dada puede escribirse:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots+2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N} \ldots P_3$$

1) P_3 se cumple para $n=1$, ya que:

$$\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\right] = \frac{8}{3}\left[1-\frac{1}{4}\right] = \frac{8}{3}\left[\frac{3}{4}\right] = 2, \text{ 1}^{\text{er}} \text{ elemento de la suma.}$$

2) Suponemos válido:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right], \ \forall k \in \mathbb{N} \ldots ①;$$

3) Partiendo de ① deberemos demostrar que P_3 se cumple para $n=k+1$, es decir que:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right], \ \forall k \in \mathbb{N} \ldots ②;$$

adicionando $2\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$ en ambos miembros de ① y desarrollando el segundo miembro, de la expresión resultante, obtenemos:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right]+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k} =$$

$$= \frac{8}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{8}{3}+\left(2-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k} =$$

$$= \frac{8}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{8}{3}-\frac{2}{3}\left[(4)\left(\frac{1}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{4}\right)^{k} =$$

$$= \frac{8}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

que puede escribirse:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+2\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right], \ \forall k \in \mathbb{N},$$

que es ②, o sea a lo que debíamos llegar, para demostrar que P_3 se cumple para $n=k+1$.

4) Al ocurrir el cumplimiento de P_3 para $n=k+1$, queda demostrado que P_3 es válida, por lo cual queda demostrada la validez de la proposición dada.

EJEMPLO IV-35.- Valiéndose del método de inducción matemática demuestre que todo número complejo de la forma

$$0+ai, \quad a \in \mathbb{R},$$

elevado a una potencia entera par, da como resultado un número real.

Solución.- La validez de la proposición enunciada quedará demostrada, si logramos demostrar la validez de

$$(ai)^{2n} \in R, \ \forall a \in R, n \in N \ldots P_4, \text{ y},$$

$$(ai)^{-2n} \in R, \ \forall a \in R, n \in N \ldots P_5;$$

analicemos P_4.-

1) Para $n=1$: $(ai)^{2n} = (ai)^2 = a^2 i^2 = -a^2$, $a \in R$,
como $-a^2 \in R$, P_4 se cumple para $n=1$.

2) Suponemos válido: $(ai)^{2k} = R_k$, $R_k \in R \ldots ①$;

3) Partiendo de ① debemos demostrar que P_4 se cumple para $n=k+1$, es decir que $(ai)^{2(k+1)} \in R$;

multiplicando ambos miembros de ① por $(ai)^2$ y desarrollando el segundo miembro, de la expresión resultante, obtenemos:

$$(ai)^{2k} \cdot (ai)^2 = R_k (ai)^2 = R_k(-a^2) = -a^2 R_k, \ a \in R, R_k \in R,$$

que, tomando en cuenta leyes de exponentes y que $-a^2 R_k \in R$, por tenerse $-a^2, R_k \in R$, puede escribirse:

$$(ai)^{2(k+1)} \in R,$$

expresión que muestra que P_4 se cumple para $n=k+1$.

4) Al ocurrir el cumplimiento mencionado en 3, queda demostrada la validez de P_4;

analicemos ahora P_5.-

1) Para $n=1$: $(ai)^{-2n} = (ai)^{-2} = \dfrac{1}{(ai)^2} = \dfrac{1}{-a^2} = -\dfrac{1}{a^2}$, $a \in R$,
como $-\dfrac{1}{a^2} \in R$, P_5 se cumple para $n=1$.

2) Suponemos válido: $(ai)^{-2k} = R_k$, $R_k \in R \ldots ①'$;

3) Multiplicando ambos miembros de ①' por $(ai)^{-2}$ y desarrollando el segundo miembro, de la expresión resultante, obtenemos:

$$(ai)^{-2k} \cdot (ai)^{-2} = R_k \cdot (ai)^{-2} = -\frac{1}{a^2} R_k, \ a \in R, R_k \in R,$$

que al tomar en cuenta leyes de exponentes y que $-\frac{1}{a^2} R_k \in R$, puede escribirse:

$$(ai)^{-2(k+1)} \in R,$$

expresión que muestra que P_5 se cumple para $n=K+1$.

4) Al cumplirse (según 3) P_5 para $n=K+1$, queda demostrada la validez de la misma.

Al quedar demostrada la validez de P_4 y P_5, valiéndonos del método de inducción matemática, hemos demostrado que todo número complejo $0+ai$, $a\in R$, elevado a una potencia entera par, da como resultado un número real.

EJEMPLO IV-36.- Demuestre la validez de la expresión

$$[1+(n+1)!]>[2+2n!],\ \forall (n>1)\in N \cdots P_6$$

Solución.- Tomando en cuenta las propiedades de las desigualdades, para demostrar la validez de P_6 bastará demostrar la validez de

$$(n+1)!>(1+2n!),\ \forall (n>1)\in N \cdots P_6',$$

para lo cual emplearemos el método de inducción matemática;

1) Para $n=2$, menor valor de n a partir del cual se indica P_6' es válida se tiene:

$$(n+1)!=(2+1)!=3!=6 \cdots ①,\ y,\ (1+2n!)=1+2(2!)=1+4=5 \cdots ②;$$

de acuerdo con ① y ②, P_6' es válida para $n=2$ pues $6>5$.

2) Al cumplirse P_6' para $n=2$, supondremos ahora que es válido:

$$(K+1)!>(1+2K!),\ \forall (K>1)\in N \cdots ③;$$

3) Partiendo de ③ deberemos demostrar que se cumple:

$$(K+2)!>[1+2(K+1)!],\ \forall (K>1)\in N \cdots ④;$$

multiplicando ambos miembros de ③ por $(K+2)$, obtenemos:

$$(K+2)(K+1)!>(K+2)(1+2K!),\ \forall (K>1)\in N,$$

que puede escribirse:

$$(K+2)!>(K+2KK!+2+4K!)=(K+2K!+2+2KK!+2K!),\ \forall (K>1)\in N,$$

o bien:

$$(K+2)!>(K+2K!+2+2K!(K+1))=(1+K+K!+1+2(K+1)K!),\ \forall (K>1)\in N,$$

de donde obtenemos:

$$(K+2)!>[1+2(K+1)!+1+K+K!],\ \forall (K>1)\in N \cdots ⑤;$$

comparando los segundos miembros de ④ y ⑤, podemos relacionarlos mediante

$$[1+2(K+1)!+1+K+K!]>[1+2(K+1)!],\ \forall K\in N \cdots ⑥;$$

de ⑤ y ⑥:

$$(K+2)!>[1+2(K+1)!],\ \forall (K>1)\in N,$$

que es a lo que deseábamos llegar, o sea ④, con lo que queda demostrado que P_6 se cumple para $n=K+1$.

4) Al cumplirse P_6' para $n = K+1$, según puede apreciarse en el paso 3, automáticamente queda demostrada la validez de P_6.

EJEMPLO IV-37.- Diga si es válida la expresión:

$$(1+n!) > 2^n,\ \forall (n>3) \in N \ldots P_7$$

Solución.- Analicemos P_7 siguiendo el método de inducción matemática:

1) Para $n=4$, se tiene: $(1+n!) = 1+4! = 1+24 = 25 \ldots ①$, y, $2^n = 2^4 = 16 \ldots ②$, por ① y ②, P_7 se cumple para el menor valor de n correspondiente a la misma.

2) Al ocurrir el cumplimiento mencionado en el paso 1, lo que debemos hacer ahora es suponer válido:

$$(1+K!) > 2^K,\ \forall (K>3) \in N \ldots ③;$$

3) Partiendo de la expresión inmediata anterior, ③, deberemos demostrar que P_7 se cumple para $n = K+1$, equivalente esto a demostrar que

$$[1+(K+1)!] > 2^{(K+1)},\ \forall (K>3) \in N \ldots ④,\ \text{hagámoslo;}$$

multiplicando ambos miembros de ③ por el número natural 2, obtenemos:

$$2(1+K!) > 2 \cdot 2^K,\ \forall (K>3) \in N,$$

que puede escribirse:

$$[2+2K!] > 2^{(K+1)},\ \forall (K>3) \in N, \ldots ⑤,$$

como los primeros miembros de ④ y ⑤ quedan relacionados mediante la expresión

$$[1+(K+1)!] > [2+2K!],\ \forall (K>3) \in N \ldots ⑥,$$

de ⑤ y ⑥ obtenemos:

$$[1+(K+1)!] > [2+2K!] > 2^{(K+1)},\ \forall (K>3) \in N,$$

que, tomando en cuenta las propiedades de las desigualdades, da lugar a:

$$[1+(K+1)!] > 2^{(K+1)},\ \forall (K>3) \in N, \ldots ④,$$

expresión que implica el cumplimiento de P_7 para $n = K+1$.

4) Al quedar demostrado, según el paso anterior, que P_7 se cumple para $n = K+1$, queda demostrada la validez de P_7.

Nota.- El lector puede confirmar que la expresión ⑥, que aparece en el paso 3 del desarrollo de este ejemplo, es correcta ya que, al ser válido

$$[1+(n+1)!] > [2+2n!],\ \forall (n>1) \in N \ldots P_6,$$

según se demostró en el desarrollo de la solución del ejemplo inmediato anterior, IV-36, obviamente podemos establecer como válido

$$[1+(K+1)!] > [2+2K!],\ \forall (K>3) \in N,\ \text{que es ⑥.}$$

NÚMEROS COMBINATORIOS Y TRIÁNGULO DE PASCAL.

Se define como número combinatorio y se le simboliza mediante $\binom{n}{r}$ a aquel cuyo valor iguala C_r^n, es decir:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad \text{(IV-10)};$$

de acuerdo con esta definición, cada uno de los números combinatorios del arreglo del lado izquierdo, de los mostrados a continuación, tiene su valor anotado en el lugar correspondiente del arreglo de la derecha, conocido éste como "Triángulo de Pascal"

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array}$$

Como puede observarse, los números localizados en los renglones 2º, 3º, 4º y 5º del Triángulo de Pascal, corresponden a los coeficientes de los desarrollos de $(X+Y)^1$, $(X+Y)^2$, $(X+Y)^3$ y $(X+Y)^4$, respectivamente, ya que:

$$(X+Y)^1 = X+Y \quad \text{①},$$

$$(X+Y)^2 = X^2+2XY+Y^2 \quad \text{②},$$

$$(X+Y)^3 = X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3 \quad \text{③}, \text{ y}$$

$$(X+Y)^4 = X^4+4X^3Y+6X^2Y^2+4XY^3+Y^4 \quad \text{④};$$

congruentemente con lo mencionado, podemos escribir ①, ②, ③ y ④, respectivamente, como sigue:

$$(X+Y)^1 = \binom{1}{0}X^1Y^0+\binom{1}{1}X^0Y^1 \quad \text{①'},$$

$$(X+Y)^2 = \binom{2}{0}X^2Y^0+\binom{2}{1}X^1Y^1+\binom{2}{2}X^0Y^2 \quad \text{②'},$$

$$(X+Y)^3 = \binom{3}{0}X^3Y^0+\binom{3}{1}X^2Y^1+\binom{3}{2}X^1Y^2+\binom{3}{3}X^0Y^3 \quad \text{③'}, \text{ y},$$

$$(X+Y)^4 = \binom{4}{0}X^4Y^0+\binom{4}{1}X^3Y^1+\binom{4}{2}X^2Y^2+\binom{4}{3}X^1Y^3+\binom{4}{4}X^0Y^4 \quad \text{④'},$$

que pueden escribirse:

$(X+Y)^1=\binom{1}{0}X^{1-0}Y^0+\binom{1}{1}X^{1-1}Y^1$ .... (1''),

$(X+Y)^2=\binom{2}{0}X^{2-0}Y^0+\binom{2}{1}X^{2-1}Y^1+\binom{2}{2}X^{2-2}Y^2$ .... (2''),

$(X+Y)^3=\binom{3}{0}X^{3-0}Y^0+\binom{3}{1}X^{3-1}Y^1+\binom{3}{2}X^{3-2}Y^2+\binom{3}{3}X^{3-3}Y^3$ .... (3''), y,

$(X+Y)^4=\binom{4}{0}X^{4-0}Y^0+\binom{4}{1}X^{4-1}Y^1+\binom{4}{2}X^{4-2}Y^2+\binom{4}{3}X^{4-3}Y^3+\binom{4}{4}X^{4-4}Y^4$ ... (4''),

o bien, en forma resumida:

$$(X+Y)^1=\sum_{r=0}^{1}\binom{1}{r}X^{1-r}Y^r \quad \text{........ (1''')},$$

$$(X+Y)^2=\sum_{r=0}^{2}\binom{2}{r}X^{2-r}Y^r \quad \text{........ (2''')},$$

$$(X+Y)^3=\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}X^{3-r}Y^r \quad \text{........ (3'''), y,}$$

$$(X+Y)^4=\sum_{r=0}^{4}\binom{4}{r}X^{4-r}Y^r \quad \text{........ (4''')};$$

Según puede apreciarse: (1'''), (2'''), (3''') y (4'''), son las expresiones correspondientes a

$$(X+Y)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}X^{n-r}Y^r$$

para $n=1, 2, 3$ y 4, respectivamente, por lo que esta última expresión puede, aparentemente, ser considerada como general, para todo valor de n en N.

TEOREMA DEL BINOMIO.

Este teorema establece (de acuerdo con la generalización mencionada últimamente) que, para todo valor de n en N, el desarrollo de $(X+Y)^n$ podemos obtenerlo mediante la suma de los productos $\binom{n}{r}X^{n-r}Y^r$, haciendo variar r desde cero hasta n, es decir:

$$(X+Y)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}X^{n-r}Y^r, \ \forall n\in N \quad \text{.... (IV-11)};$$

probemos su validez, empleando el método de inducción matemática

1) Para $n=1$, se tiene: $(X+Y)^n=(X+Y)^1=X+Y$ ... (a), y,

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}X^{n-r}Y^r=\sum_{r=0}^{1}\binom{1}{r}X^{1-r}Y^r=\binom{1}{0}X^{1-0}Y^0+\binom{1}{1}X^{1-1}Y^1=X+Y \quad \text{... (b)};$$

al observar (a) y (b), concluimos que (IV-11) se cumple para $n=1$.

2) Suponemos válido: $(X+Y)^K=\sum_{r=0}^{K}\binom{K}{r}X^{K-r}Y^r,\ \forall K\in N$ ...©.

3) Multiplicando ambos miembros de © por $(X+Y)$, obtenemos:

$$(X+Y)(X+Y)^K=\left[\left(\frac{K!}{K!0!}\right)X^KY^0+\left(\frac{K!}{(K-1)!1!}\right)X^{K-1}Y^1+\cdots+\left(\frac{K!}{[K-(r-1)]!(r-1)!}\right)X^{K-(r-1)}Y^{r-1}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{K!}{(K-r)!r!}\right)X^{K-r}Y^r+\cdots+\left(\frac{K!}{1!(K-1)!}\right)X^1Y^{K-1}+\left(\frac{K!}{0!K!}\right)X^0Y^K\right](X+Y)=$$
$$=\left[\begin{array}{l}X^{K+1}Y^0+KX^KY^1+\cdots+\left(\frac{K!}{(K-r+1)!(r-1)!}\right)X^{K-r+2}Y^{r-1}+\\+\left(\frac{K!}{(K-r)!r!}\right)X^{K-r+1}Y^r+\cdots+KX^2Y^{K-1}+X^1Y^K+\\+X^KY^1+KX^{K-1}Y^2+\cdots+\left(\frac{K!}{(K-r+1)!(r-1)!}\right)X^{K-r+1}Y^r+\\+\left(\frac{K!}{(K-r)!r!}\right)X^{K-r}Y^{r+1}+\cdots+KX^1Y^K+X^0Y^{K+1}\end{array}\right];$$

factorizando obtenemos:

$$(X+Y)^{K+1}=\left[\begin{array}{l}X^{K+1}Y^0+(K+1)X^KY^1+\cdots+\left(\frac{K!}{(K-r)!r!}+\frac{K!}{(K-r+1)!(r-1)!}\right)X^{K-r+1}Y^r+\\+\cdots+(1+K)X^1Y^K+X^0Y^{K+1}\end{array}\right],$$

que puede escribirse, tomando en cuenta lo visto en el ejemplo IV-11, como sigue:

$$(X+Y)^{K+1}=\left[\begin{array}{l}\left(\frac{(K+1)!}{(K+1)!0!}\right)X^{K+1}Y^0+\left(\frac{(K+1)!}{[(K+1)-1]!1!}\right)X^{(K+1)-1}Y^1+\cdots+\\+\left(\frac{(K+1)!}{[(K+1)-r]!r!}\right)X^{(K+1)-r}Y^r+\cdots+\left(\frac{(K+1)!}{1![(K+1)-1]!}\right)X^1Y^{(K+1)-1}+\\+\left(\frac{(K+1)!}{0!(K+1)!}\right)X^0Y^{K+1}\end{array}\right]$$

o bien, en forma abreviada: $(X+Y)^{K+1}=\sum_{r=0}^{K+1}\binom{K+1}{r}X^{(K+1)-r}Y^r$,

expresión que implica que (IV-11) se cumple para $n=K+1$.

4) Al quedar demostrado, según el paso 3 que (IV-11) se cumple para $n=K+1$, queda demostrada la validez del "Teorema del binomio".

EJEMPLO IV-38.- Obtenga el término de $\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^{16}$ que contenga a x^4.

Solución.- De acuerdo con el teorema del binomio, podemos escribir:

$$\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^{16}=\sum_{r=0}^{16}\binom{16}{r}(3x)^{16-r}\left(-\frac{5}{x^2}\right)^r;$$

para que $\binom{16}{r}(3x)^{16-r}\left(-\frac{5}{x^2}\right)^r=\alpha x^4$, es necesario, por lo que toca a los exponentes, que: $(16-r)+(-2r)=4$,

que se cumple si $16-3r=4$, o sea para $r=4$;

entonces, el término buscado es:

$$\binom{16}{4}(3x)^{16-4}\left(-\frac{5}{x^2}\right)^4=\left(\frac{16!}{12!\,4!}\right)\left(3^{12}x^{12}\right)\left(5^4x^{-8}\right)=(1820)(3^{12})(5^4)\,x^4.$$

Obviamente, pudimos haber obtenido el término indicado desarrollando el binomio dado en su totalidad, pero nos hubiéramos tardado mucho más que siguiendo el proceso empleado en la solución del ejemplo.