



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

“CONTROL TÉRMICO EN UN CICLO DE
REFRIGERACIÓN POR COMPRESION DE VAPOR”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

(AREA DE ENERGÍA)

P R E S E N T A:

BILLY ARTURO FLORES MEDERO NAVARRO

DIRECTOR DE TESIS

DR. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE

Jurado

Presidente:	Dr. Jaime Cervantes De Gortari
Secretario:	Dr. Federico Méndez Lavielle
Vocal:	Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz
1 ^{er} . Suplente:	Dr. Javier Aguillón Martínez
2 ^{do} . Suplente:	Dr. Erick Emanuel Luna Rojero

Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

Tutor de Tesis

Dr. Federico Méndez Lavielle

*“No basta saber, se debe también aplicar.
No es suficiente querer, se debe también hacer”*

Johann Wolfgang Goethe (1749-1832)
Poeta y dramaturgo alemán.

Agradecimientos

No existen ni las palabras ni el espacio suficiente para agradecer a todas aquellas personas que están en mi corazón, familiares y amigos, que me alentaron a seguir adelante con sus palabras y con sus hechos...

Gracias a todos ustedes por ayudarme a construir un peldaño más de este camino al cual conocemos como vida.

Dedico esta tesis a mis padres, Fernando y Guadalupe; gracias por todo su apoyo y por los pequeños regaños, los amo.

A mis hermanos. A Sara, por todas esas charlas tan amenas y por ayudarme a seguir adelante y no dejarse vencer por las adversidades; muchas gracias bodoque ☺. A James y a Edgar; sin ustedes hubiese sido difícil llegar a este punto. Gracias por ser los mejores hermanos que uno puede desear.

Un agradecimiento especial a mi director de tesis, Federico Méndez. Muchas gracias por tu tiempo, tu dedicación y tus enseñanzas.

Gracias a la mejor universidad del mundo de habla hispana, mi *alma mater*, la Universidad Nacional Autónoma de México y a la H. Facultad de Ingeniería.

Gracias al CONACYT, al proyecto 43010, por su apoyo para la realización de este trabajo.

Índice

Índice

Índice

Jurado

Agradecimientos

Introducción	7
Resumen	10
Nomenclatura	11
Capítulo I	
Control Térmico	12
I.1 Control térmico	13
I.2 Refrigeración por compresión de vapor	14
I.2.1 Comportamiento de sistemas con compresión de vapor	15
I.2.2 Transferencias más importantes de trabajo y calor	16
I.3 Control básico de un sistema de refrigeración	17
I.4 Modelo dinámico del sistema	18
I.4.1 Modelo matemático del evaporador	19
I.4.2 Modelo matemático del condensador	21
I.4.3 Modelo matemático del ciclo de refrigeración	26
I.4.4 Modelo matemático para el COP	27
Capítulo II	
Modelado del ciclo de refrigeración y resultados	28
II.1 Modelo numérico	29
II.2 Resultados	34
Capítulo III	
Conclusiones	44
Apéndice A	
Teoría de control	49
A.1 Sistemas de control	50
A.2 Sistemas de control en lazo abierto y cerrado	51

A.3	Elementos básicos de un sistema en lazo abierto y lazo cerrado	52
A.4	Lazo cerrado contra lazo abierto.	54
A.5	Modelos matemáticos para sistemas	54
A.6	Diagrama de bloques	55
A.7	Perturbaciones	56
A.8	Estabilidad en los sistemas de control	58
A.9	Polos y ceros	58
A.10	Patrón de polos y ceros	59
A.11	Estabilidad y polos	59
A.12	Análisis del lugar geométrico de las raíces	62
A.13	Lugares geométricos de las raíces de sistemas de segundo orden	63
A.14	Interpretación del lugar geométrico de las raíces	64
A.15	Estrategias de control	66
A.16	Controladores y sintonización	67
A.17	Control de dos posiciones	67
A.18	Control proporcional	68
A.19	Control integral	70
A.20	Control proporcional integral	72
A.21	Control derivativo	73
A.22	Control proporcional derivativo	75
A.23	Control PID	75
A.24	Controladores PID en tiempo continuo	76
A.25	Estructura ideal	76
A.26	Estructura clásica	78
A.27	Estructura de parámetros independientes	79
A.28	Estructura industrial	79
A.29	Métodos de sintonización	80
A.30	Método de oscilaciones sostenidas (Ziegler-Nichols 1942)	81
A.30	Método de oscilaciones amortiguadas (Harriot 1957).	82
	Referencias	86

Índice de figuras y tablas

Figura 1.1. Componentes y diagrama T-s del ciclo inverso de Carnot	14
Figura 1.2. Diagrama T-s del ciclo de refrigeración por compresión de vapor	15
Figura 1.3. Componentes de un sistema de refrigeración por compresión de vapor	16
Figura 1.4. Detalle del evaporador	19
Figura 2.1. Diagrama de bloques para un control P	31
Figura 2.2. Diagrama de bloques para un control PI	31
Figura 2.3. Diagrama de bloques para un control PID.	32
Figura 2.4. Localización de las raíces en el plano complejo	32
Figura 2.5. Respuesta del sistema	34
Figura 2.6. Respuesta del sistema con los parámetros de los controladores reajustados	34
Figura 2.7. Comparación de la respuesta del sistema libre y controlada	35
Figura 2.8. Comportamiento general del ciclo de refrigeración	36
Figura 2.9. Comportamiento general del evaporador	37
Figura 2.10. Comportamiento general del evaporador para valores de γ mayores a 1	37
Figura 2.11. a la 2.16 Comportamiento general del condensador	38 – 41
Figura 2.17. a la 2.20. Comportamiento general del COP	41 – 43
Tabla 2.1. Estados termodinámicos del ciclo e refrigeración	30
Tabla 2.2. Método de Oscilaciones Amortiguadas	33
Tabla 2.3. Sintonización de los controladores	33
Tabla 2.4. Valores característicos para el ciclo ideal de refrigeración	36
Tabla 2.5. Valores propuestos como parámetros del evaporador	37
Tabla 2.6. Valores propuestos como parámetros para el condensador	38

Introducción

Introducción

INTRODUCCIÓN.

La ingeniería trata del conocimiento y control de los materiales y fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad. El ingeniero está interesado en el conocimiento y control de una parte de su medio. Para lograr este objetivo en forma óptima es necesario entender y modelar completamente el sistema en cuestión.

El control automático ha jugado un papel vital en el avance de la ingeniería y de la ciencia. Además de su extrema importancia en vehículos espaciales, en el guiado de proyectiles y en sistemas de pilotaje en aviones, el control se ha convertido en parte importante e integral de los procesos de manufactura e industriales modernos.

La ingeniería de control se basa en los fundamentos de la teoría de la realimentación y el análisis de sistemas lineales, e integra los conceptos de la teoría de redes y de comunicación, por ello no está limitada a alguna disciplina de la ingeniería.

Existen muchos tipos de sistemas térmicos en la industria, en el transporte y hasta en el hogar que necesitan ser controlados de alguna forma. Como ejemplos de sistemas térmicos pueden mencionarse los intercambiadores de calor, el aire acondicionado en edificios, satélites, empacamiento térmico de componentes electrónicos, manufactura, procesamiento térmico de microchips entre otros. Si no se requiere de un control preciso o si el proceso es muy lento, el tipo de control a emplear puede ser el control manual, por el contrario, pueden utilizarse sistemas mecánicos o eléctricos realimentados para que el control sea automático.

El primer trabajo significativo en control fue el regulador centrífugo de James Watt para el control de la velocidad de una máquina de vapor en el siglo XVIII. Otros pasos relevantes en las primeras etapas del desarrollo de la teoría de control [1] son los debidos a Minorsky, Hazen y Nyquist. En 1922 Minorsky trabajó en controles automáticos de dirección en barcos y mostró como se podría determinar la estabilidad a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En 1932 Nyquist desarrolló un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado sobre la base de la respuesta a lazo abierto con excitación senoidal en régimen permanente. En 1934, Hazen, que introdujo el término "servomecanismo" para los sistemas de control de posición, estudio el diseño de servomecanismos repetidores capaces de seguir una entrada variable.

Los desarrollos más recientes en la teoría de control son en la dirección de control óptimo de sistemas tanto determinísticos como estocásticos, así como en sistemas de control complejos adaptativos e inteligentes. Hay aplicaciones de la teoría de control en los campos de la ingeniería, la biología, la economía, la medicina, entre otros donde se pueden esperar resultados importantes en un futuro.

Por ejemplo, la mayoría de los sistemas térmicos son generalmente complejos ya que involucran diversos procesos físicos. Estos incluyen la convección natural y la convección forzada, la radiación, geometrías complejas, la variación de las propiedades con la temperatura, no linealidades y bifurcaciones, inestabilidad hidrodinámica, turbulencia, flujos multifase o reacciones químicas.

Es común tener grandes incertidumbres en los valores en los coeficientes de transferencia de calor, aproximaciones debidas al uso de parámetros concentrados en lugar de campos de temperatura, o propiedades de materiales que tal vez no son conocidas con precisión. En este contexto, un sistema complejo puede definirse como un sistema hecho de subsistemas, cada uno de los cuales puede ser analizado y calculado. Por las razones anteriores, regularmente los sistemas usados en la ingeniería son difíciles de modelar, y a pesar de esto, cuando es posible, la respuesta dinámica es difícil o imposible de determinar en tiempo real, que es otra de las tendencias del control.

Las dos principales razones de que los sistemas de control sean posibles de aplicar a un sistema térmico son una mayor aproximación al diseño original y la existencia de perturbaciones internas o externas que no fueron tomadas en cuenta. Actualmente, la forma típica de controlar la temperatura en cualquier sistema de refrigeración, ya sea industrial o doméstico, es por medio de un control de dos posiciones. Dicho en otras palabras, cuando la temperatura del espacio a refrigerar esta por debajo del límite inferior, se envía una señal eléctrica para que comience a funcionar el compresor; éste dejara de operar cuando la temperatura alcance su límite máximo.

El presente trabajo tiene como finalidad centrarse en los principios básicos de la teoría de control aplicada a los sistemas térmicos sólo como una forma de integración de ambas áreas de la ingeniería. Sin embargo hay aspectos del control térmico que no son considerados en este trabajo, es decir, consideraciones de equipo, como serían del tipo de sensores y de los actuadores.

Para tal efecto, se analiza un ciclo de refrigeración por compresión de vapor, el cual es considerado ideal y libre de perturbaciones externas, modificando el sistema típico de control de temperatura de dos posiciones por un control continuo para analizar los efectos en su funcionamiento. Así mismo, se pretende dejar las bases para que en un futuro se puedan analizar desde el punto de vista del control automático, diferentes aspectos de la termodinámica que han sido ignorados ya sea por su complejidad o bien por su desconocimiento.

Este trabajo consta de tres capítulos. El primero de ellos expone la forma en que el modelo dinámico del sistema, es decir el ciclo de refrigeración, es obtenido a partir de formulaciones termodinámicas. El segundo capítulo muestra como pueden aplicarse, en forma teórica, los aspectos fundamentales del control automático a un problema concreto de la termodinámica, así como los posibles resultados de tal acción. Finalmente, el capítulo tres contiene las conclusiones de este proyecto.

Resumen

Este trabajo muestra como puede aplicarse la teoría de control a un tópico en particular de la termodinámica como lo es un ciclo de refrigeración por compresión de vapor.

Para ello se utilizan herramientas matemáticas y de cómputo para analizar los efectos que se presentan al cambiar el control de dos posiciones por un control PID; efectos que muestran que una operación en un régimen caótico puede favorecer al efecto de refrigeración.

Adicionalmente, deja abierta la posibilidad de remplazar algunos de los componentes esenciales en el ciclo de refrigeración como el compresor, por uno de velocidad variable o bien la válvula de expansión, por una válvula de estrangulación variable, lo que permitiría un mayor control de las variables involucradas y sus efectos en la carga de refrigeración.

NOMENCLATURA

A	área de transferencia
COP	coeficiente de operación
C_p	capacidad térmica específica
C_r	relación del espacio muerto en el compresor
E	energía
G	constante
$h_{1,2,3,4}$	entalpía del refrigerante en los estados termodinámicos
h_{fg}	entalpía de vaporización
h	coeficiente convectivo
k	índice politrópico
K	constante característica de expansión
L	constante
\dot{m}	gasto másico del refrigerante
m	masa del refrigerante
N	revoluciones por segundo del compresor
\dot{Q}_{RN}	efecto de refrigeración neto
\dot{Q}_D	potencia disipada al medio ambiente
$P_{1,2}$	presiones en los estados termodinámicos
R	constante universal de los gases
r_p	relación de presiones
T	temperatura
t	tiempo
U	coeficiente global de transferencia
V	volumen
V_p	volumen desplazado del compresor
x	calidad de la mezcla
\dot{W}_C	potencia del compresor

Subíndices

C	condensador
c	característico
E	evaporador
ER	espacio a refrigerar
H	hielo
R	refrigerante
s	serpentin
∞	ambiente

Letras griegas

$a, b,$	constantes adimensionales
g, l, e	temperatura adimensional
q	espesor
Δ	constante de tiempo
t	densidad
r	coeficiente de conducción
k	factor de amortiguamiento
x	relativo

Control Térmico

I.1 CONTROL TÉRMICO

Existen muchos tipos de sistemas térmicos en la industria, en el transporte y hasta en el hogar que necesitan ser controlados de alguna forma. Como ejemplos pueden mencionarse los intercambiadores de calor, el aire acondicionado en edificios, satélites, empacamiento térmico de componentes electrónicos, manufactura, procesamiento térmico de microchips entre otros. Si no se requiere de un control preciso o si el proceso es muy lento, el tipo de control a emplear puede ser el control manual, por el contrario, pueden utilizarse sistemas mecánicos o eléctricos realimentados para que el control sea automático.

En años recientes con el gran desarrollo de las computadoras y el avance en las simulaciones numéricas, se ha dado un avance significativo en la solución de problemas complejos mediante el empleo de métodos de elemento finito. Tal es el caso del control de la temperatura en los sistemas de aire acondicionado en construcciones, con el objetivo de mantener un ambiente confortable [2] y sin dejar a un lado el ahorro y eficiencia energética [3].

El desarrollo tecnológico es inevitablemente un proceso dinámico. Un claro ejemplo de ello es el desarrollo en control térmico para el espacio que se realiza en la NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) con objeto de crear nuevas tecnologías para futuras misiones de exploración a otros planetas [4]. En este sentido, las temperaturas criogénicas juegan un papel preponderante, minimizando el consumo de energía.

Respecto a los sistemas térmicos y en particular la investigación experimental de cualquier ciclo de refrigeración es usualmente muy complicada, principalmente debido a los costos económicos y la gran cantidad de variables involucradas. El uso de modelos numéricos puede reducir tal costo y también facilitar el entendimiento de los fenómenos relativos al problema. Los modelos de los sistemas de refrigeración se dividen en dos diferentes tipos; los modelos en estado permanente y los modelos dinámicos.

Los sistemas térmicos analizados en estado permanente están lo suficientemente entendidos y son ampliamente utilizados como herramienta útil para la investigación de diferentes problemas térmicos, como lo es el reemplazo de los refrigerantes convencionales por refrigerantes ecológicos y para la optimización de los sistemas de aire acondicionado.

El completo entendimiento de los modelos para comprender el comportamiento dinámico de los sistemas de refrigeración aún presenta algunas dificultades. A pesar de ello, existen diferentes esfuerzos encaminados a dar algunas posibles soluciones. Estos modelos están basados en una información modular de los diferentes componentes del sistema, los cuales son modelados de forma independiente.

Generalmente, para investigar el comportamiento dinámico de un sistema de refrigeración, se consideran modelos matemáticos dinámicos para los intercambiadores, mientras que para el compresor y la válvula de expansión se consideran en estado permanente.

Autores como Koury [5] han desarrollado modelos numéricos para simular el comportamiento dinámico y permanente de un sistema de refrigeración por compresión de vapor. Estos modelos permiten evaluar la posibilidad de controlar el ciclo de refrigeración y las condiciones del refrigerante como vapor sobrecalentado, variando la velocidad del compresor y el área seccional de la válvula de expansión.

Radcenco [6] junto con Vargas [7], han demostrado que la operación intermitente de los ciclos de deshielo, en un ciclo de refrigeración por compresión de vapor, pueden ser optimizados respecto a la frecuencia de encendido y apagado. En este trabajo, los autores plantean un modelo matemático que combina las características térmicas y de transferencia de calor del sistema para producir una descripción realista del ciclo. Con este modelo, se demuestra que es posible ahorrar energía sin sacrificar la temperatura en el espacio a refrigerar.

Otros autores se han enfocado al control de la temperatura en cavidades [8], al control térmico [9] y simulaciones en intercambiadores de calor [10]. En esa misma línea de investigación, Mihir Sen [11] se ha dedicado al estudio y análisis de problemas como la conducción, a los sistemas de convección natural y la convección forzada aplicando la teoría de control a algunos de los aspectos de la termodinámica.

I.2 REFRIGERACIÓN POR COMPRESIÓN DE VAPOR

Un sistema de refrigeración se utiliza para mantener una región del espacio a una temperatura inferior a la del ambiente. El ciclo de Carnot inverso es un ciclo reversible con el que pueden compararse todos los ciclos reales. Es deseable mantener, en la medida de lo posible, los procesos de suministro y rechazo de calor a temperatura constante. Sin embargo, en el proceso de compresión solo debería intervenir la fase vapor y además la turbina, se sustituye por un dispositivo de estrangulamiento. Cuando se realizan estos cambios, el ciclo se conoce como ciclo de refrigeración por compresión de vapor.

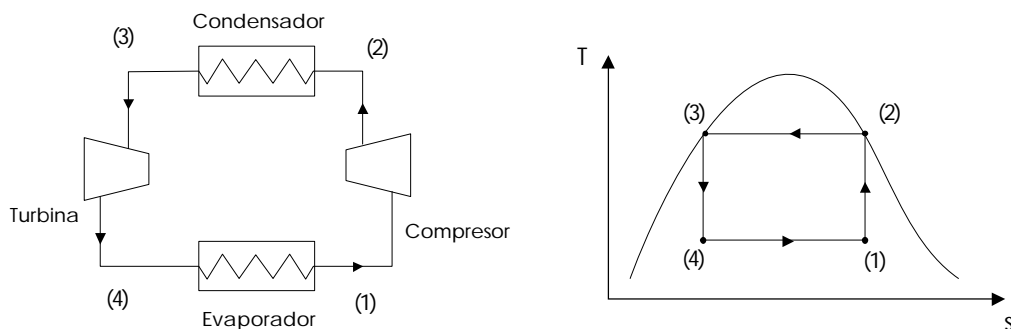


Figura 1.1. Componentes y diagrama T-s del ciclo inverso de Carnot

I.2.1. COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS CON COMPRESIÓN DE VAPOR

Si no se tienen en cuenta las irreversibilidades dentro del evaporador, del compresor y el condensador, no hay caída de presión por fricción y el refrigerante fluye a presión constante en los intercambiadores de calor. Si también se ignora la transferencia de calor al ambiente, la compresión es isoentrópica.

Con estas condiciones se obtiene el ciclo ideal de refrigeración por compresión de vapor definido por los estados 1-2-3-4-1 en el diagrama T-s de la figura 1.2.

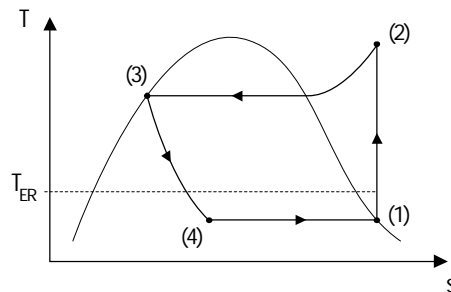


Figura 1.2. Diagrama T-s del ciclo de refrigeración por compresión de vapor.

El ciclo consta de los siguientes procesos:

- Proceso 1-2: Compresión isoentrópica del refrigerante desde el estado 1 hasta la presión del condensador en el estado 2.
- Proceso 2-3: Transferencia de calor desde el refrigerante que fluye a presión constante en el condensador. El refrigerante sale como líquido saturado en el estado 3.
- Proceso 3-4: Proceso de estrangulación desde el estado 3 hasta la mezcla de líquido vapor en el estado 4.
- Proceso 4-1: Transferencia de calor hacia el refrigerante que fluye a presión constante a través del evaporador hasta completar el ciclo.

Par el análisis y la obtención del modelo matemático del ciclo se considera que los procesos son internamente reversibles; la compresión es adiabática y la expansión a entalpía constante. Adicionalmente se desprecian los efectos ocasionados por las pérdidas por fricción y las caídas de presión.

Las temperaturas de operación del ciclo de refrigeración por compresión de vapor quedan fijadas por la temperatura a mantener en el espacio a refrigerar, T_{ER} , y la temperatura del medio ambiente, T_{∞} , donde se descarga el calor. Como muestra la figura 1.2, la temperatura del refrigerante en el evaporador debe ser menor que T_{ER} , mientras que la temperatura en el condensador debe ser mayor que T_{∞} .

I.2.2 TRANSFERENCIAS MÁS IMPORTANTES DE TRABAJO Y CALOR

Se considera que el sistema con compresión de vapor representado en la figura 1.3 opera en situación estacionaria. En la figura se muestran las transferencias más importantes de trabajo y calor, que se toman positivas en la dirección de las flechas. La energía cinética y potencial se ignoran en el análisis de cada uno de los componentes.

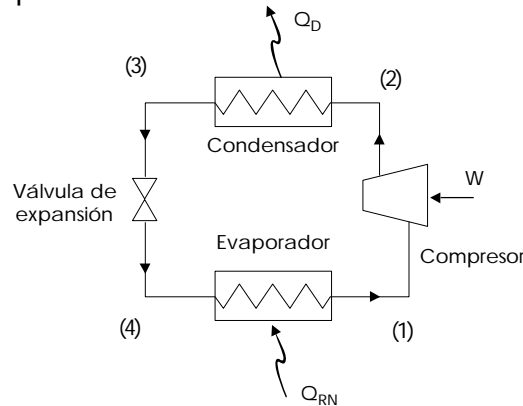


Figura 1.3. Componentes de un sistema de refrigeración por compresión de vapor

El calor transferido desde el espacio refrigerado al refrigerante, a su paso por el evaporador, produce su vaporización. Para el volumen de control que incluye el evaporador, el balance de energía da el calor transferido por unidad de masa de refrigerante:

$$\frac{\dot{Q}_R}{\dot{m}} = h_1 - h_4 \tag{1.1}$$

donde \dot{m} es el flujo del refrigerante. El calor transferido \dot{Q}_R se define como capacidad de refrigeración. En el Sistema Internacional de unidades, se expresa normalmente en kW. Otra unidad usada comúnmente es la tonelada de refrigeración, que es igual a 211 kJ/min.

El refrigerante deja el evaporador y es comprimido a una presión relativamente alta por el compresor. Asumiendo que éste opera adiabáticamente, del balance de energía, para ese volumen de control, se obtiene el trabajo que entra por unidad de masa al refrigerante:

$$\frac{\dot{W}_C}{\dot{m}} = h_2 - h_1 \tag{1.2}$$

Después, el refrigerante pasa a través del condensador, donde condensa y hay una transferencia de calor desde el refrigerante al medio que lo enfría. Para el volumen de control que incluye al condensador el calor transferido desde el refrigerante hacia los alrededores por unidad de masa es:

$$\frac{\dot{Q}_D}{\dot{m}} = h_2 - h_3 \tag{1.3}$$

Finalmente el refrigerante en el estado 3 entra en la válvula de expansión y se expande hasta la presión del evaporador. Este proceso se modela normalmente como un proceso de estrangulación, por lo que

$$h_4 = h_3 \quad (1.4)$$

La presión del refrigerante disminuye en la expansión isoentálpica e irreversible, y va acompañada de un aumento de la entropía específica. El refrigerante sale de la válvula en el estado 4 como una mezcla de líquido y vapor.

En el sistema con compresión de vapor, el trabajo neto que recibe es igual al del compresor, ya que en la válvula de expansión no entra ni sale trabajo. El coeficiente de operación de este ciclo de refrigeración está dado por:

$$COP = \frac{\dot{Q}_R}{\dot{W}_C} = \frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}_D - \dot{Q}_R} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} \quad (1.5)$$

El coeficiente de operación disminuye cuando la temperatura media del refrigerante en el evaporador disminuye o cuando la temperatura media del refrigerante en el condensador aumenta.

I.3 CONTROL BÁSICO DE UN SISTEMA DE REFRIGERACIÓN

La función básica de un sistema de refrigeración es extraer calor de un cierto espacio el cual se desea que tenga una temperatura inferior a la del ambiente. Esto se logra mediante la circulación del refrigerante por el sistema. Así el sistema de control debe operar de tal manera que mantenga la temperatura lo más aproximado posible al valor deseado. Adicionalmente, el control de dicha temperatura se debe llevar a cabo con un mínimo de operaciones por parte de cada uno de los componentes y un máximo de seguridad para el equipo y/o los materiales [12].

El término control básico de refrigeración se refiere a un dispositivo que arranca, para, regula y/o protege el sistema de refrigeración y cada uno de los componentes. Estos sistemas de control se dividen en controles de operación, controles de actuación y controles limitadores y de seguridad.

Los controles de operación registran los cambios de las condiciones deseadas, tales como la temperatura, o su presión relacionada, y la humedad. Los controles de operación traducen estos cambios en movimiento o fuerza mecánica. En general, los dispositivos de control actúan únicamente como interruptores eléctricos para conectar o desconectar el componente apropiado. Algunos de ellos trabajan como respuesta directa a los cambios de temperatura, otros funcionan como resultado del efecto de los cambios de temperatura sobre la presión del aire o sobre la presión de un líquido.

Con mucha frecuencia, la carga térmica de un sistema de refrigeración no es constante y dicha variación se puede producir por los siguientes factores [12]:

- Variaciones de la temperatura ambiente alrededor del espacio a refrigerar.
- Variaciones de la cantidad de materia a refrigerar.
- Variaciones en la frecuencia con que se abren y cierran las puertas del espacio a refrigerar.

Todos estos factores tienden a indicar que un control automático es deseable y necesario. La velocidad de refrigeración debe controlarse para que puedan obtenerse diversos grados de enfriamiento. Esto se consigue generalmente controlando los períodos de funcionamiento del compresor, es decir, una operación intermitente [13].

Los períodos cíclicos del compresor se determinan con un elemento sensible llamado termostato [13]. Éste consiste en un tubo de corta longitud, cerrado por un extremo y lleno de refrigerante. En el otro extremo del tubo hay un fuelle conectado a un dispositivo de disparo. Un muelle se opone a la expansión del fuelle. Las variaciones de temperatura hacen que el fuelle se dilate o se contraiga. Cuando éste se dilata lo suficiente, una palanca cierra el mecanismo interruptor y el circuito eléctrico del motor del compresor se pone en marcha. Al enfriar lo suficiente el espacio a refrigerar, el fuelle se contrae logrando el efecto opuesto a la dilatación.

El termostato puede ajustarse mediante un mando para que el compresor funcione intermitentemente, control de dos posiciones, y normalmente, este mando está acoplado con el muelle antagonista del fuelle para que aumente o disminuya la presión.

Así, para analizar los efectos de modificar el control de dos posiciones por un control continuo es necesario obtener el modelo matemático que describa el comportamiento del sistema y posteriormente aplicar la teoría de control, ver apéndice A, para evaluar la mejor estrategia de control.

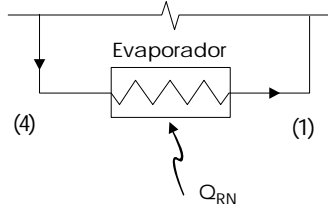
I.4 MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA

Para obtener el modelo matemático que caracteriza a un ciclo de refrigeración ideal por compresión de vapor, considerando como variable de control a la temperatura del refrigerante y como el valor de referencia a la temperatura ideal del mismo (necesaria para que se lleve a cabo la transferencia de calor entre el espacio a refrigerar y el refrigerante) se realiza el balance de energía por primera ley a cada uno de los componentes del ciclo de refrigeración, mostrados en la figura 1.3, esto es:

$$\dot{E}_{entrada} + \dot{E}_{generada} - \dot{E}_{salida} = \dot{E}_{acumulada}$$

I.4.1 MODELO MATEMÁTICO DEL EVAPORADOR

Para el evaporador de la figura 1.3, al realizar el balance de energía, obtenemos:



$$\dot{m} h_4 + \dot{Q}_R - \dot{m} h_1 = m C_p \frac{dT_R}{dt} \tag{1.6}$$

que también puede escribirse como:

$$\dot{m}(h_4 - h_1) + \dot{Q}_R = r C_p V \frac{dT_R}{dt} \tag{1.7}$$

Para encontrar el efecto de refrigeración, \dot{Q}_R , como una función de las temperaturas involucradas, se utiliza el siguiente modelo físico en el evaporador:

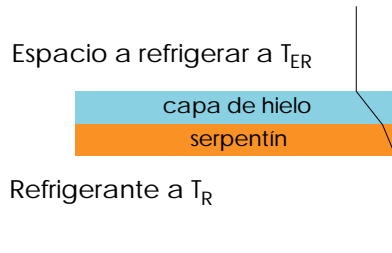


Figura 1.4 Detalle del evaporador

El coeficiente global de transferencia del evaporador de la figura 1.4 será:

$$U_E = \frac{1}{\frac{1}{h_R} + \frac{\Delta H}{k_H} + \frac{\Delta S}{k_S} + \frac{1}{h}} \tag{1.8}$$

donde:

- ΔH espesor de la capa de hielo en el serpentín
- ΔS espesor del serpentín

Por lo tanto, el efecto de refrigeración neto, \dot{Q}_{RN} , estará dado por

$$\dot{Q}_{RN} = U_E A_E (T_{ER} - T_R) \tag{1.9}$$

Para expresar la entalpía del estado 4 como una función de la temperatura [5], tenemos:

$$h_4 = h_3 = h_{A_{liq\ sat}} + xh_{fg} = h_{A_{liq\ sat}}(T_R) + x(L - GT_R) \quad (1.10)$$

donde L y G son la ordenada al origen y la pendiente, respectivamente, del modelo lineal para la entalpía de vaporización, h_{fg} , y x es la calidad de la mezcla.

Sustituyendo las ecuaciones (1.9) y (1.10) en (1.7) se obtiene que:

$$\mathbf{r}C_p V \frac{dT_R}{dt} = U_E A_E (T_{ER} - T_R) + \dot{m} \left(h_{A_{liq\ sat}}(T_R) + x(L - GT_R) - h_1(T_R) \right) \quad (1.11)$$

además, puede observarse que

$$h_{A_{liq\ sat}}(T_R) - h_1(T_R) = -h_{fg} \quad (1.12)$$

entonces, la ecuación (1.11) puede escribirse como:

$$\mathbf{r}C_p V \frac{dT_R}{dt} = U_E A_E (T_{ER} - T_R) + \dot{m} \left(-(L - GT_R) + x(L - GT_R) \right) \quad (1.13)$$

y finalmente

$$\mathbf{r}C_p V \frac{dT_R}{dt} = U_E A_E (T_{ER} - T_R) + \dot{m} (x - 1)(L - GT_R) \quad (1.14)$$

De la ecuación anterior se observa que la temperatura del refrigerante depende de las siguientes variables:

$$T_R = T_R(\mathbf{r}, C_p, V, U_E, A_E, \dot{m}, x, L, G, t)$$

Para evitar el uso de todas estas variables se adimensionaliza la ecuación (1.14). Para llevar a cabo lo anterior se proponen las siguientes variables adimensionales:

$$\mathbf{q}_E = \frac{T_{ER} - T_R}{\Delta T_C}$$

y

$$\mathbf{t} = \frac{t}{t_c}$$

donde:

T_C = temperatura característica

t_c = tiempo característico

entonces:

$$t = t_c \mathbf{t} \quad (1.15)$$

$$T_R = T_{ER} - \mathbf{q}_E \Delta T_C \quad (1.16)$$

y sustituyendo las ecuaciones (1.15) y (1.16) en la ecuación (1.14) se obtiene que:

$$-\frac{dq_E}{dt} = \frac{U_E A_E}{V} \frac{t_c}{rC_p} q_E + \frac{t_c \dot{m} L (x-1)}{rC_p V \Delta T_C} \left[1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left(1 - \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} q_E \right) \right] \quad (1.17)$$

donde el tiempo característico esta dado por

$$t_c = \frac{rC_p V}{U_E A_E} \quad (1.18)$$

y la temperatura característica es:

$$\Delta T_C = \frac{\dot{m} L}{U_E A_E} \quad (1.19)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.18) y (1.19) en la ecuación (1.17):

$$-\frac{dq_E}{dt} = q_E + (x-1) \left[1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left(1 - \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} q_E \right) \right] \quad (1.20)$$

Sean

$$g = \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} = \frac{\dot{m} L}{U_E A_E T_{ER}} \quad (1.21)$$

y

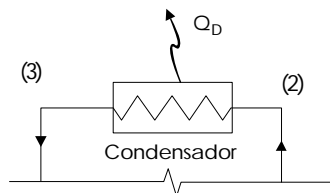
$$a = \frac{G}{L} T_{ER} \quad (1.22)$$

y sustituyendo en la ecuación (1.20), se obtiene el modelo dinámico del evaporador:

$$-\frac{dq_E}{dt} = q_E + (x-1) [1 - a(1 - gq_E)] \quad (1.23)$$

I.4.2 MODELO MATEMÁTICO DEL CONDENSADOR

Para el condensador mostrado en la figura 1.3, al realizar el balance por primera ley, tenemos



$$\dot{m}h_2 - \dot{Q}_D - \dot{m}h_3 = mC_p \frac{dT_C}{dt} \quad (1.24)$$

que puede escribirse como:

$$\dot{m}(h_2 - h_3) - \dot{Q}_D = rC_p V \frac{dT_C}{dt} \quad (1.25)$$

El calor disipado al medio ambiente, \dot{Q}_D , es:

$$\dot{Q}_D = U_c A_c (T_C - T_\infty) \quad (1.26)$$

en donde el coeficiente convectivo global viene dado por:

$$U_c = \frac{1}{\frac{1}{h_R} + \frac{\Delta s}{k_s} + \frac{1}{h_\infty}} \quad (1.27)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.26) y (1.27) en (1.25) se tiene que:

$$rC_p V \frac{dT_C}{dt} = \dot{m}(h_2 - h_3) - U_c A_c (T_C - T_\infty) \quad (1.28)$$

Para expresar las entalpías de los estados 2 y 3 como una función de la temperatura [5], nuevamente tenemos

$$h_3 = h_4 = h_{4_{liq, sat}} + xh_{fg} = h_{4_{liq, sat}}(T_R) + x(L - GT_R) \quad (1.29)$$

Suponiendo un comportamiento de gas ideal:

$$h_2 = h_1 + Cp(T_2 - T_1) \quad (1.30)$$

y además, para los procesos politrópicos, se cumple la relación:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (1.31)$$

donde:

$$k = \frac{C_p}{C_v} \quad (1.32)$$

Por definición, la relación de presiones esta dada por

$$r_p = \frac{P_2}{P_1} \quad (1.33)$$

y sustituyendo esta relación en la ecuación en (1.31)

$$T_2 = T_1 (r_p)^{\frac{k-1}{k}} \quad (1.34)$$

y como $T_2 = T_C$ y $T_1 = T_R$, entonces

$$T_C = T_R (r_p)^{\frac{k-1}{k}} \quad (1.35)$$

Sustituyendo (1.29), (1.30) y (1.35) en la ecuación (1.28), se obtiene:

$$\dot{m} \left\{ h_1(T_R) + C_p \left(T_R (r_p)^{\frac{k-1}{k}} - T_R \right) - h_{4_{liq, sat}}(T_R) - x(L - GT_R) \right\} - U_c A_c (T_C - T_\infty) = r C_p V \frac{dT_C}{dt} \quad (1.36)$$

y como $h_1 - h_4 = h_{fg}$, reescribiendo la ecuación anterior tenemos:

$$\dot{m} \left\{ C_p \left(T_R (r_p)^{\frac{k-1}{k}} - T_R \right) + h_{fg}(T_R) - x(L - GT_R) \right\} - U_c A_c (T_C - T_\infty) = r C_p V \frac{dT_C}{dt} \quad (1.37)$$

Retomando las ecuaciones (1.10) y (1.12) resulta:

$$\dot{m} \left\{ C_p \left(T_R (r_p)^{\frac{k-1}{k}} - T_R \right) + L(1-x) \left(1 - \frac{G}{L} T_R \right) \right\} - U_c A_c (T_C - T_\infty) = r C_p V \frac{dT_C}{dt} \quad (1.38)$$

Nuevamente, para adimensionar se propone que

$$\mathbf{q}_C = \frac{T_C - T_\infty}{\Delta T_C} \quad (1.39)$$

$$\mathbf{t} = \frac{t}{t_c} \quad (1.40)$$

donde:

T_C = temperatura característica
 t_c = tiempo característico

Así, de las relaciones anteriores, ecuaciones (1.39) y (1.40) tenemos:

$$T_C = T_\infty + \mathbf{q}_C \Delta T_C \quad (1.41)$$

$$t = t_c \mathbf{t} \quad (1.42)$$

y de las ecuaciones (1.16) y (1.18), es decir,

$$T_R = T_{ER} - \mathbf{q}_E \Delta T_C \quad (1.16)$$

$$t_C = \frac{\mathbf{r} C_P V}{U_E A_E} \quad (1.18)$$

la ecuación (1.38) se puede escribir como:

$$\frac{d\mathbf{q}_C}{dt} = \frac{C_P}{L} T_R \left((r_P)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) \left(1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left[1 - \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \mathbf{q}_E \right] \right) - \frac{U_C A_C}{U_E A_E} \mathbf{q}_C \quad (1.43)$$

Sea \mathbf{b} la conductancia térmica dada por:

$$\mathbf{b} = \frac{U_C A_C}{U_E A_E} \quad (1.44)$$

entonces, sustituyendo \mathbf{b} en la ecuación (1.43) tenemos:

$$\frac{d\mathbf{q}_C}{dt} = \frac{C_P}{L} T_R \left((r_P)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) \left(1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left[1 - \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \mathbf{q}_E \right] \right) - \mathbf{b} \mathbf{q}_C \quad (1.45)$$

A partir de las ecuaciones (1.21) y (1.22), es decir

$$\mathbf{g} = \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{a} = \frac{G}{L} T_{ER} \quad (1.22)$$

y sustituyéndolas en la ecuación (1.16) resulta que:

$$T_R = T_{ER} (1 - \mathbf{g} \mathbf{q}_E) \quad (1.46)$$

y sea

$$\mathbf{l} = \frac{C_P}{L} T_{ER} \quad (1.47)$$

sustituyendo estas últimas cuatro ecuaciones en la ecuación (1.45), obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{q}_C}{dt} = \mathbf{l} (1 - \mathbf{g} \mathbf{q}_E) \left((r_P)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) (1 - \mathbf{a} [1 - \mathbf{g} \mathbf{q}_E]) - \mathbf{b} \mathbf{q}_C \quad (1.48)$$

Por otro lado, el gasto másico en el compresor y en la válvula de expansión están dados respectivamente por

$$\dot{m} = NV_p \mathbf{r} \left(1 + C_r - C_r r_p^{\frac{k-1}{k}} \right) \quad (1.49)$$

$$\dot{m} = K \mathbf{r}^{\frac{1}{2}} \left[P_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.50)$$

donde

- N = revoluciones del compresor en rps
- V_p = volumen desplazado en m^3/rev
- \mathbf{r} = densidad en kg/m^3
- C_r = espacio muerto en el compresor
- K = constante característica de expansión

Considerando un compresor ideal, es decir, $C_r = 0$, entonces de la ecuación (1.49) y para garantizar que hay el mismo gasto másico en el ciclo, igualando con (1.50)

$$NV_p \mathbf{r} = K \mathbf{r}^{\frac{1}{2}} \left[P_1 (r_p - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.51)$$

de donde

$$\left(\frac{NV_p}{K} \right)^2 \frac{\mathbf{r}}{P_1} = (r_p - 1) \quad (1.52)$$

y de la ecuación de gas ideal

$$\frac{\mathbf{r}}{P_1} = \frac{1}{RT_R} \quad (1.53)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.46) y (1.53) en (1.52) se obtiene que:

$$\left(\frac{NV_p}{K} \right)^2 \frac{1}{RT_{ER} (1 - gq_E)} = (r_p - 1) \quad (1.54)$$

Sea:

$$\mathbf{e} = \left(\frac{NV_p}{K} \right)^2 \frac{1}{RT_{ER}} \quad (1.55)$$

Sustituyendo \mathbf{e} en la ecuación (1.54) y despejando a r_p se tiene que

$$r_p = \frac{e}{(1-gq_E)} + 1 \quad (1.56)$$

Finalmente, sustituyendo ésta ecuación (1.48) se obtiene el modelo dinámico para el condensador.

$$\frac{dq_C}{dt} = I(1-gq_E) \left(\left(1 + \frac{e}{(1-gq_E)} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)\{1-a[1-gq_E]\} - bq_C \quad (1.57)$$

I.4.3 MODELO MATEMÁTICO DEL CICLO DE REFRIGERACIÓN

Recopilando, las ecuaciones dinámicas que describen el ciclo ideal de refrigeración por compresión de vapor son:

Para el evaporador:

$$-\frac{dq_E}{dt} = q_E + (x-1)[1-a(1-gq_E)] \quad (1.23)$$

y para el condensador:

$$\frac{dq_C}{dt} = I(1-gq_E) \left(\left(1 + \frac{e}{(1-gq_E)} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)\{1-a[1-gq_E]\} - bq_C \quad (1.57)$$

Ambas expresiones son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; la correspondiente al evaporador, además es lineal de coeficientes constantes, mientras que la ecuación del condensador es lineal de coeficientes variables.

Se puede observar, de la ecuación 1.57, la dependencia que existe entre el condensador y el evaporador. De esta forma, al tener la solución del evaporador, esta se sustituye en la ecuación 1.57 y así obtener la respuesta del condensador. Por lo tanto, para aplicar la teoría de control, es suficiente trabajar sólo con la ecuación del evaporador, ecuación 1.23.

Estas dos últimas expresiones pueden ser resueltas por cambio de variable para obtener tanto la respuesta libre, es decir sin control alguno, del evaporador y del condensador como la respuesta controlada de este, después de aplicar alguna estrategia de control.

I.4.4 MODELO MATEMÁTICO PARA EL COP

Para obtener el modelo dinámico para el coeficiente de operación, COP, a partir de la ecuación (1.5), se tiene que:

$$COP = \frac{\dot{Q}_R}{\dot{W}_C} = \frac{\dot{Q}_{RN}}{\dot{Q}_D - \dot{Q}_{RN}} \quad (1.5)$$

de donde, a partir de las ecuaciones (1.9), (1.16), (1.26) y (1.41)

$$\dot{Q}_{RN} = U_E A_E (T_{ER} - T_R) \quad (1.9)$$

$$T_R = T_{ER} - q_E \Delta T_C \quad (1.16)$$

$$\dot{Q}_D = U_C A_C (T_C - T_\infty) \quad (1.26)$$

$$T_C = T_\infty + q_C \Delta T_C \quad (1.41)$$

Sustituyendo estas cuatro ecuaciones en (1.5) y simplificando algebraicamente, se obtiene el modelo dinámico para el coeficiente de operación como función de q_E y de q_C .

$$COP = \frac{1}{b \left(\frac{q_C}{q_E} \right) - 1} \quad (1.58)$$

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

II.1 MODELO NUMÉRICO

A partir de las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema, ecuaciones (1.23) y (1.57), se aplica la teoría clásica del control para analizar un ciclo ideal de refrigeración por compresión de vapor ante una entrada escalón unitario. En principio, para obtener la función de transferencia del sistema, es decir el evaporador, se aplica la transformada de Laplace a la ecuación (1.23), dando como resultado:

$$-(sq_E(s) - q_E(0)) = (1-x) \left[\frac{1}{s} - a \left(\frac{1}{s} - gq_E(s) \right) \right] - q_E(s) \tag{2.1}$$

De la ecuación anterior, la función de transferencia del sistema en su forma general es

$$q_E(s) = \frac{sq_E(0) + (x-1)(a-1)}{s^2 + (ag(x-1)+1)s} \tag{2.2}$$

Como la condición inicial es nula para el evaporador, es decir $q_E(0) = 0$, la función de transferencia del sistema será:

$$q_E(s) = \frac{(x-1)(a-1)}{s^2 + (ag(x-1)+1)s} \tag{2.3}$$

Para el ciclo de refrigeración por compresión de vapor mostrado en el capítulo anterior, figura 1.2,

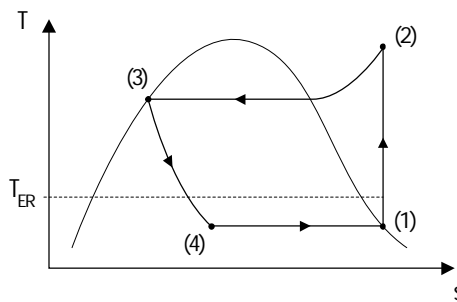


Figura 1.2. Diagrama T-s del ciclo de refrigeración por compresión de vapor.

y tomando en cuenta que el ciclo en estudio es ideal, se considera que utiliza un refrigerante 134a como fluido de trabajo funcionando con una temperatura en el evaporador de -25°C y una presión en el condensador de 0.9127 MPa [14]. El flujo másico del refrigerante es de 0.05 kg/s [5]. La temperatura del espacio a refrigerar es de -5°C [14].

Bajo estas condiciones, cada uno de los estados termodinámicos quedan definidos en la tabla 2.1.

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

Estado (1)	Estado (2)
$P_1 = 0.10725 \text{ MPa}$ $T_1 = -25 \text{ °C}$ $h_1 = 382.9 \text{ kJ/kg}$ $s_1 = 1.74 \text{ kJ/kgK}$	$P_2 = 0.8807 \text{ MPa}$ $T_2 = 43.5 \text{ °C}$ $h_2 = 426.8 \text{ kJ/kg}$ $s_2 = 1.7447 \text{ kJ/kgK}$
Estado (3)	Estado (4)
$P_3 = 0.8807 \text{ MPa}$ $T_3 = 34.72 \text{ °C}$ $h_3 = 248.7 \text{ kJ/kg}$ $s_3 = 1.166 \text{ kJ/kgK}$	$P_4 = 0.10725 \text{ MPa}$ $T_4 = -25 \text{ °C}$ $h_4 = 248.7 \text{ kJ/kg}$ $s_4 = 0.3772 \text{ kJ/kgK}$ $x = 0.3772$

Tabla 2.1. Estados termodinámicos del ciclo de refrigeración

De tablas, [14] y [15], para el refrigerante 134a, se tiene que

$$C_p = 1.46 \text{ KJ/kgK}$$

$$k = 1.9210$$

Respecto al compresor se considera que éste gira a 3600 rpm y con un volumen desplazado, V_p , de $0.00006194 \text{ m}^3/\text{rev}$ [5]. En los intercambiadores de calor se tiene un coeficiente global de transferencia de $3.158 \text{ kW/m}^2\text{K}$ [16] para el condensador, U_C , y de $2.182 \text{ kW/m}^2\text{K}$, para el evaporador, U_E ; el primero cuenta con un área de 0.56 m^2 , A_C , y el segundo posee un área de 0.15 m^2 , A_E . Adicionalmente, la constante característica de expansión, K , tiene un valor de $1.636 \times 10^{-5} \text{ m}^2$. El refrigerante tiene una densidad de 1207 kg/m^3 [15].

Para encontrar las constantes características L y G del modelo matemático de la ecuación (1.10), en la cual se expresa a la entalpía de vaporización como un modelo lineal [5], se seleccionan dos puntos cualesquiera, de tablas, cercanos a la temperatura del refrigerante, es decir:

T (K)	h (kJ/kg)
249	214.908
257	209.853

Así, por pares de punto se obtiene que

$$L = 372.2449 \text{ kJ/kg}$$

$$G = 0.6319 \text{ kJ/kgK}$$

Para g y a se tiene, a partir de las ecuaciones (1.21) y (1.22) y sustituyendo los valores correspondientes, que

$$g = \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} = \frac{\dot{m} L}{U_E A_E T_{ER}} = 0.21218 \quad (2.4)$$

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

$$a = \frac{G}{L} T_{ER} = 0.45494 \tag{2.5}$$

Sustituyendo éstos dos valores en la ecuación en (2.3) y simplificando, obtenemos la función de transferencia del ciclo en el dominio de s , es decir:

$$G(s) = q_E(s) = \frac{(x-1)(a-1)}{s^2 + (ag(x-1)+1)s} = \frac{0.33946}{s^2 + 0.93987s} \tag{2.6}$$

Para determinar la respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario, tomando la función de transferencia del ciclo de refrigeración, ecuación (2.6), se emplea el software para simulación de sistemas de control *Simulink* en su versión 5.

Los diagramas de bloques, en su forma general, necesarios para cada uno de los diferentes controladores considerados, es decir el control proporcional, P, proporcional-integral, PI, y el control proporcional-integral y derivativo, PID, se muestran en las figuras siguientes.

Control Proporcional:

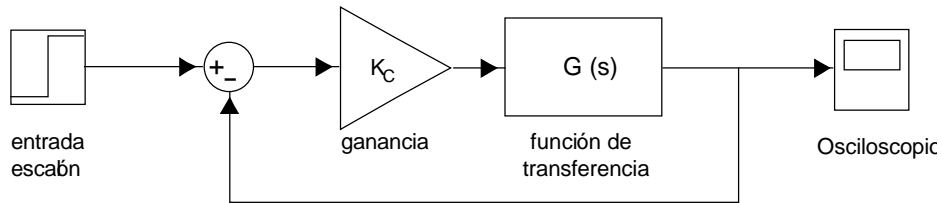


Figura 2.1. Diagrama de bloques para un control P

Control Proporcional Integral:

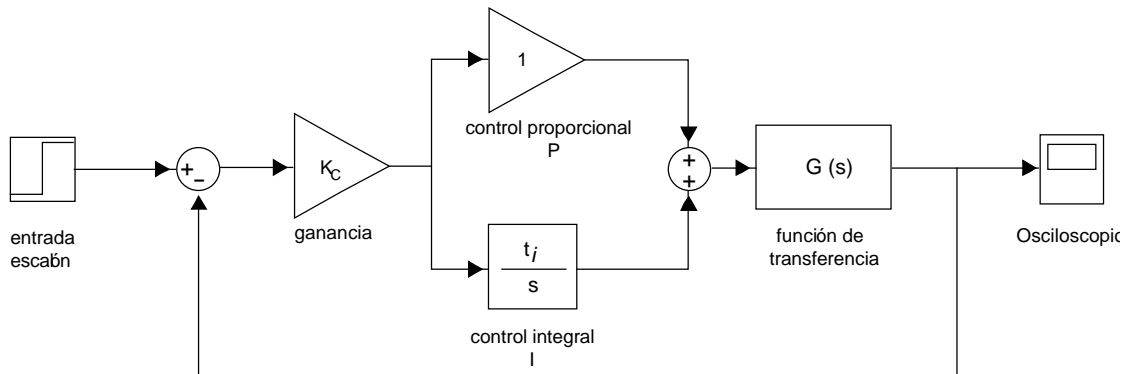


Figura 2.2. Diagrama de bloques para un control PI

Control Proporcional Integral y Derivativo:

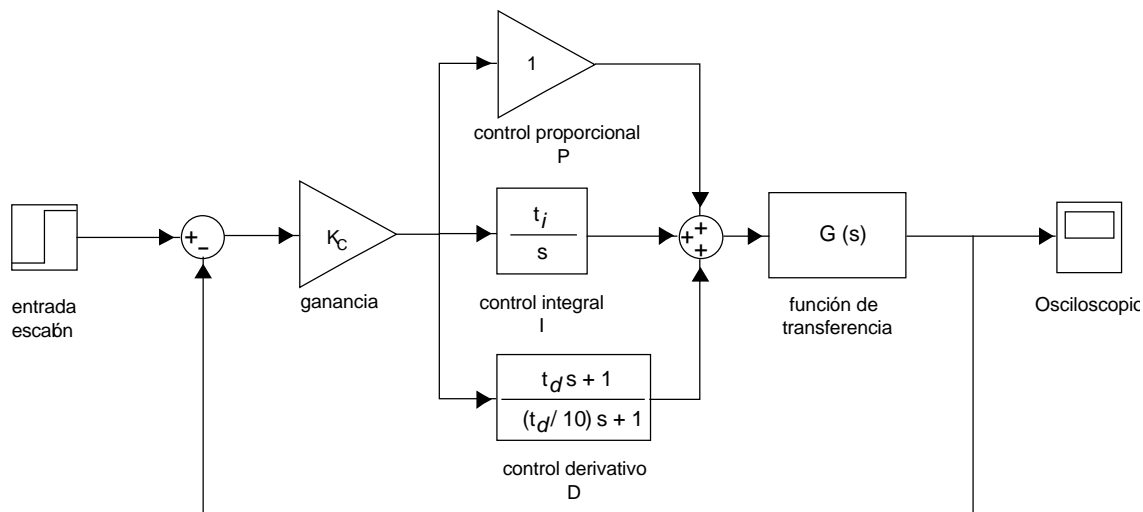


Figura 2.3. Diagrama de bloques para un control PID

Por el método de oscilaciones amortiguadas, se localizan las raíces de la ecuación (2.6) en el plano s, obteniendo así la figura 2.4.

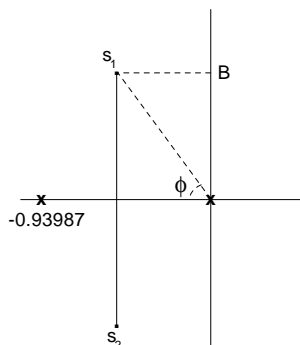


Figura 2.4. Localización de las raíces en el plano complejo

de donde

$$K_c = -\frac{s^2 + 0.93987}{0.33946} \quad (2.7)$$

$$t_o = \frac{2p}{B} \quad (2.8)$$

y

$$B = \frac{0.93987}{2} \tan f \quad (2.9)$$

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

Como el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes tiene un valor de $\zeta = 0.2176$ [16], lo que permite que la relación entre el primer y el segundo sobrepaso sea de 0.25 y así de la figura 2.4 se observa que

$$\zeta = \cos^{-1} \zeta \tag{2.10}$$

Sustituyendo el valor de ζ en la ecuación (2.10) y éste resultado en (2.9) se obtiene que

$$B = 2.1079$$

Este valor se sustituye en la ecuación (2.8), de donde

$$t_o = 2.9807$$

Así, los polos dominantes de la figura 2.1 quedan definidos por

$$s_{1,2} = -\frac{0.93087}{2} \pm j2.1079 = -0.4699 \pm j2.1079$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2.7) la magnitud de K_C es entonces,

$$K_C = -\left. \frac{s^2 + 0.93987}{0.33946} \right|_s = 13.7396$$

De acuerdo con el método de sintonización por oscilaciones amortiguadas [16] los parámetros del controlador, K_p , t_i y t_d quedan definidos de la siguiente forma:

Tipo de Controlador	K_p	t_i	t_d
P	K_C	-	-
PI	K_C	t_o	-
PID	K_C	$\frac{t_o}{1.5}$	$\frac{t_o}{6}$

Tabla 2.2 Método de Oscilaciones Amortiguadas

De esta forma, sustituyendo los valores de K_C y t_o , los parámetros de los controladores toman los siguientes valores:

Tipo de Controlador	K_p	t_i	t_d
P	13.7696	-	-
PI	13.7696	2.9807	-
PID	13.7696	0.1446	0.0361

Tabla 2.3 Sintonización de los controladores

Con estos datos, se realizan las simulaciones correspondientes para obtener la respuesta del sistema.

II.2 RESULTADOS

Una vez definidos los parámetros para cada uno de los diferentes controladores, tabla 2.3, se efectúan las simulaciones correspondientes para obtener como resultado la respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario y ésta se compara con la respuesta libre del evaporador, es decir sin control, figura 2.5.

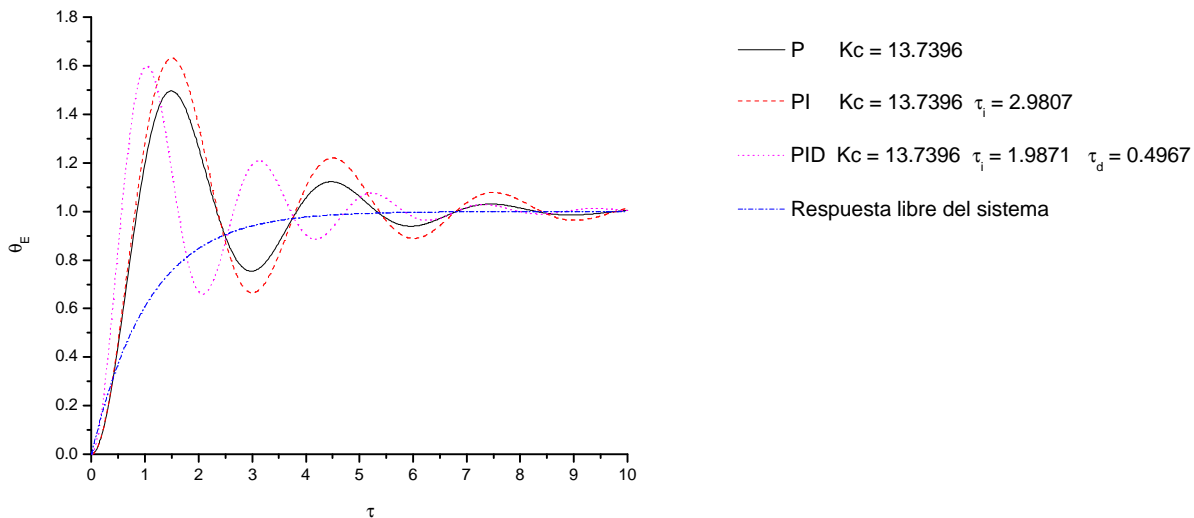


Figura 2.5. Respuesta del sistema

Como puede apreciarse de la figura anterior, ninguno de los controladores estabiliza el sistema en un tiempo menor a la respuesta libre del sistema. Por ésta razón se reajustan cada uno de los parámetros de los diferentes controladores empleados con la finalidad de disminuir la duración de los transitorios y/o las oscilaciones, obteniendo así la figura 2.6.

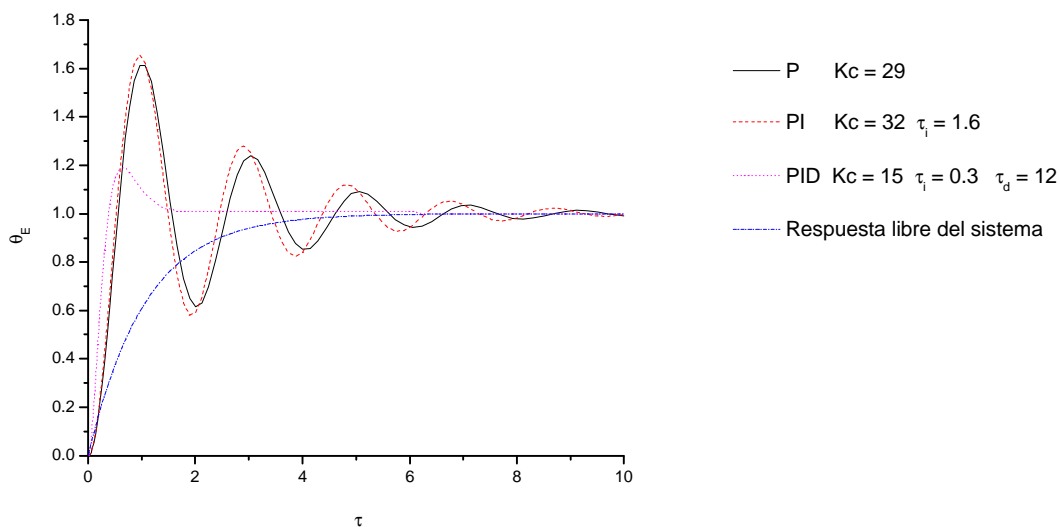


Figura 2.6. Respuesta del sistema con los parámetros de los controladores reajustados

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

De la figura anterior se observa que empleando un control Proporcional y el Proporcional-Integral, el sistema se estabiliza en mayor tiempo en comparación con el control Proporcional - Integral y Derivativo, es decir el PID, y éste a su vez tiene un menor tiempo de estabilización que la respuesta libre. Por esta razón se elige como estrategia de control al PID para el control térmico del ciclo de refrigeración en estudio.

Para apreciar el comportamiento del sistema, se comparan únicamente la respuesta libre con la respuesta controlada para el evaporador, figura 2.7.

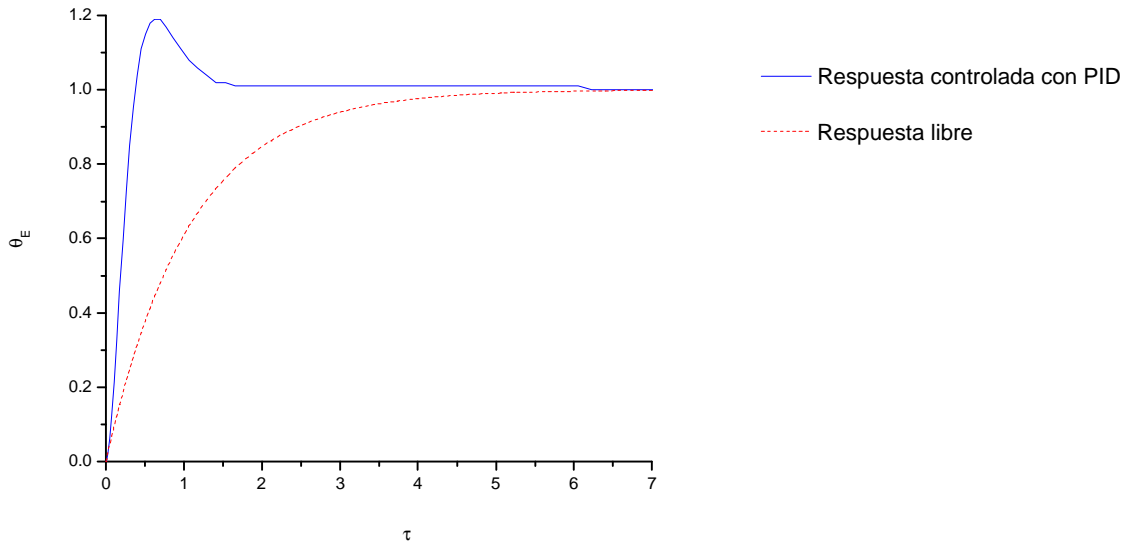


Figura 2.7. Comparación de la respuesta del sistema libre y controlada

Puede apreciarse de la figura anterior que para el ciclo de refrigeración en estudio, la duración de los transitorios en el evaporador utilizando un control PID, disminuyen en comparación con la respuesta libre y adicionalmente sólo se presenta un sobrepaso del 20%.

Así, los parámetros del PID que serán utilizados en el análisis de este ciclo quedan definidos de la siguiente forma:

$$K_C = 15, t_i = 0.3 \text{ y } \tau_d = 12$$

Con éstos parámetros, se obtienen tanto la respuesta del condensador como de el coeficiente de operación, COP, del ciclo de refrigeración, y para ello se toman las ecuaciones (1.57) y (1.58) respectivamente.

Los valores de los parámetros involucrados en el evaporador se muestran en la tabla 2.4.

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

$g?$	0.2121	G	0.6319 kJ/kg K
a	0.4549	K	1.9210
C_p	1.46 kJ/kg	x	0.3772
L	372.2449 kJ/kg	T_{ER}	268 K

Tabla 2.4 Valores característicos para el ciclo ideal de refrigeración

Sustituyendo éstos valores en las ecuaciones (1.44), (1.47) y (1.55) se tiene que los parámetros β , ε y λ quedan definidos como:

$b?$	6.0191
l	1.0511
e	0.0232

Así, definidos completamente los parámetros para el evaporador, se obtiene la respuesta tanto del condensador como del COP, figura 2.8.

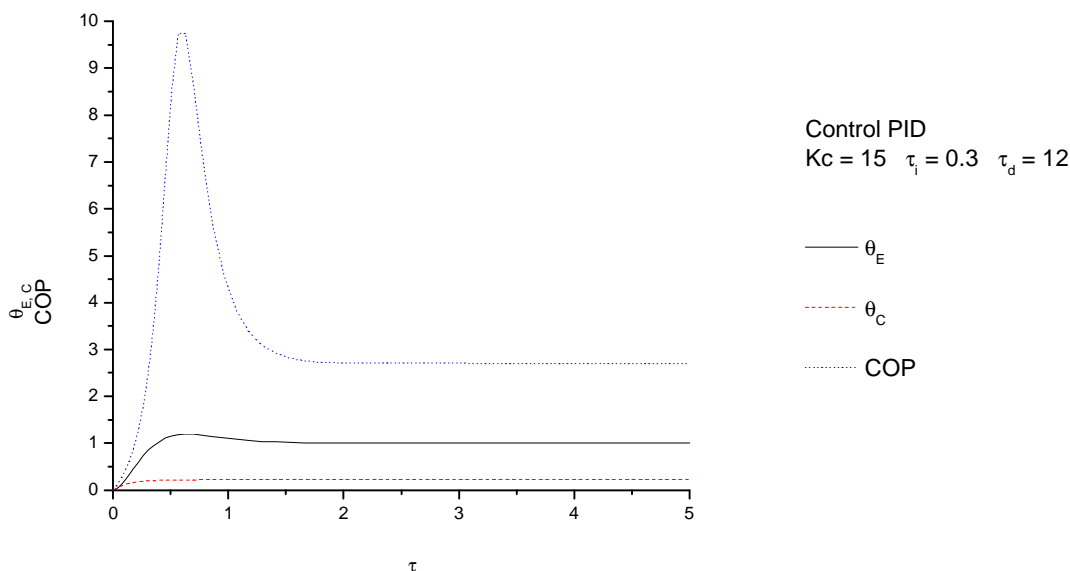


Figura 2.8. Comportamiento general del ciclo de refrigeración

Para determinar como responde el evaporador, se mantienen los parámetros del control PID fijos, variando sólo los parámetros a y g involucrados, lo que equivale a tener diferentes variaciones en el sistema, como puede ser la temperatura del espacio a refrigerar, temperatura ambiente, entre otras.

Para hacer las simulaciones correspondientes a y g se varían de acuerdo con los valores de la tabla 2.4.

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

Sustituyendo cada uno de éstos valores en la función de transferencia del evaporador, ecuación 2.3, se obtienen los resultados mostrados en la figura 2.10.

g	0.1	0.5	0.9
a	0.1	0.5	0.9

Tabla 2.5 Valores propuestos como parámetros del evaporador

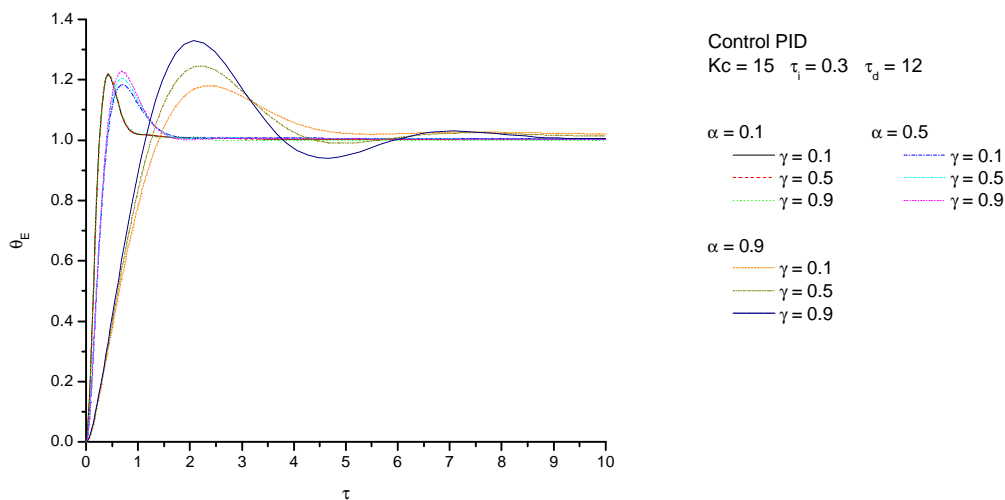


Figura 2.9. Comportamiento general del evaporador

Adicionalmente, para valores de γ mayores a 1 el evaporador responde de la siguiente forma, figura 2.11.

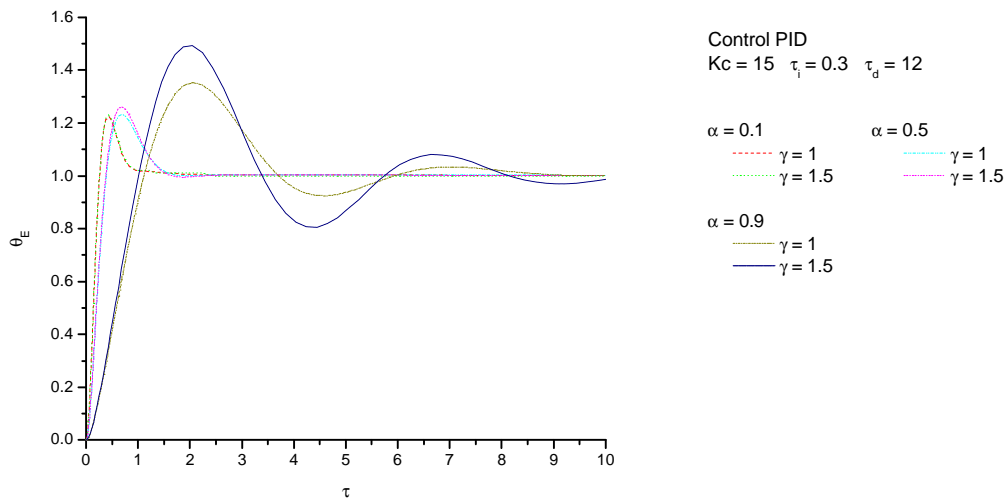


Figura 2.10. Comportamiento general del evaporador para valores de γ mayores a 1

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

Si bien, ambas figuras tienen un comportamiento similar, el valor de γ sólo puede tomar valores ligeramente mayores a la unidad para evitar que la respuesta tanto del condensador como del COP carezcan de sentido físico.

De la misma manera, para obtener la respuesta del condensador, el cual depende del evaporador de acuerdo con la ecuación (1.57), se varían los parámetros involucrados, es decir b y e , de acuerdo con la tabla 2.6.

b	1	3	9
e	0.01	0.1	0.9

Tabla 2.6 Valores propuestos como parámetros para el condensador

De esta forma, se obtiene el comportamiento del condensador mostrado en las figuras 2.12 a la 2.17, de las cuales sólo se presentan aquellas con significado físico.

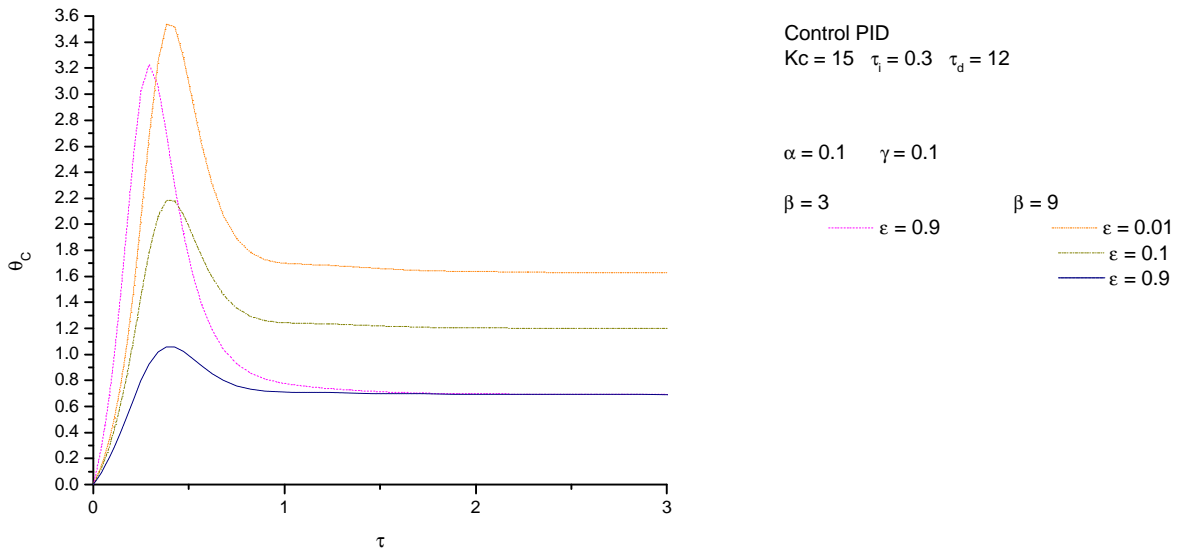


Figura 2.11. Comportamiento del condensador, primera simulación

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

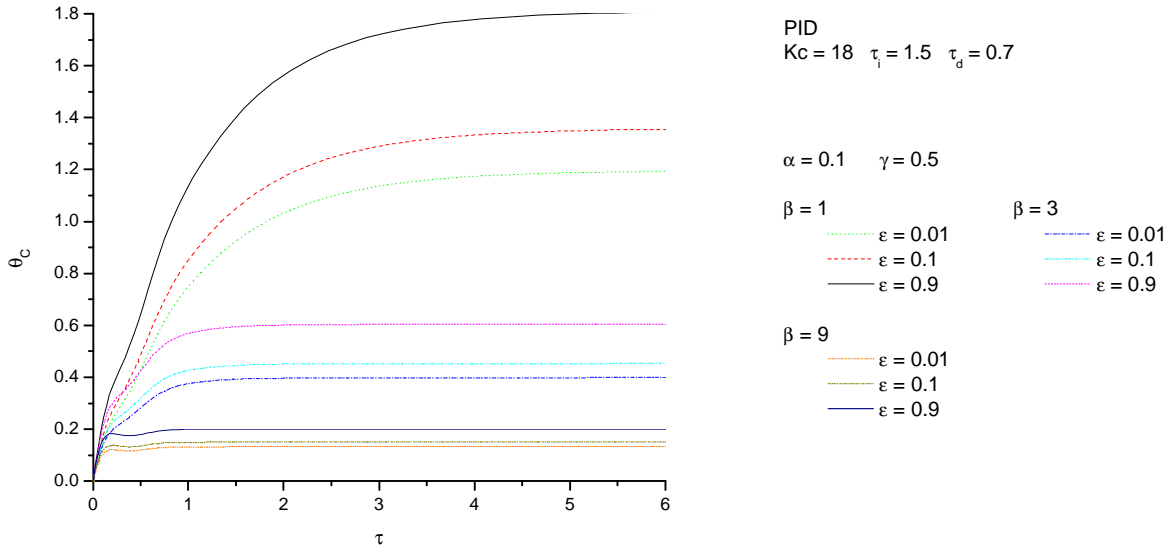


Figura 2.12. Comportamiento del condensador, segunda simulación

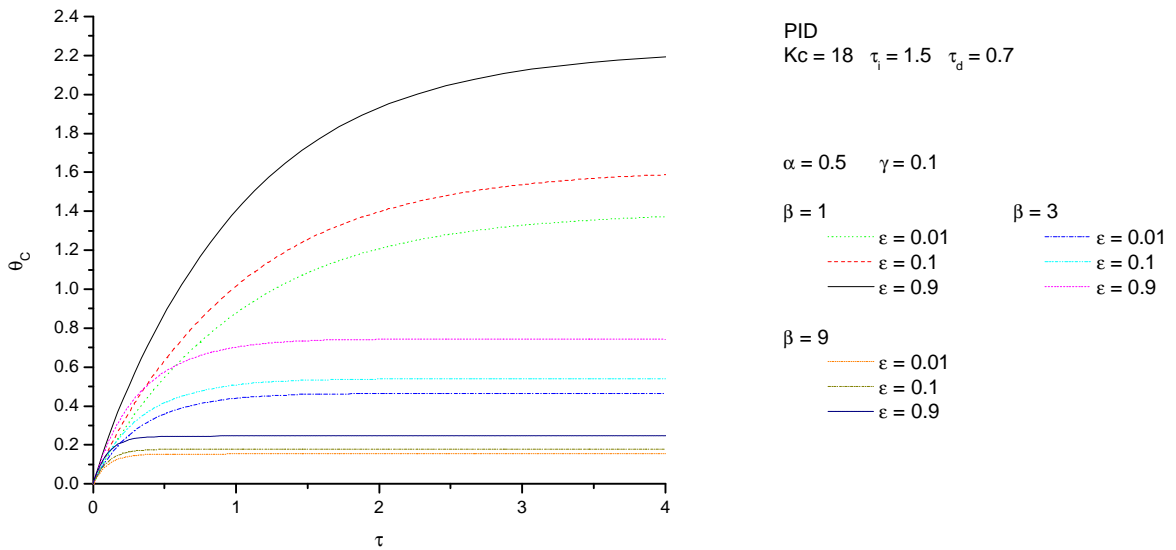


Figura 2.13. Comportamiento del condensador, tercera simulación

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

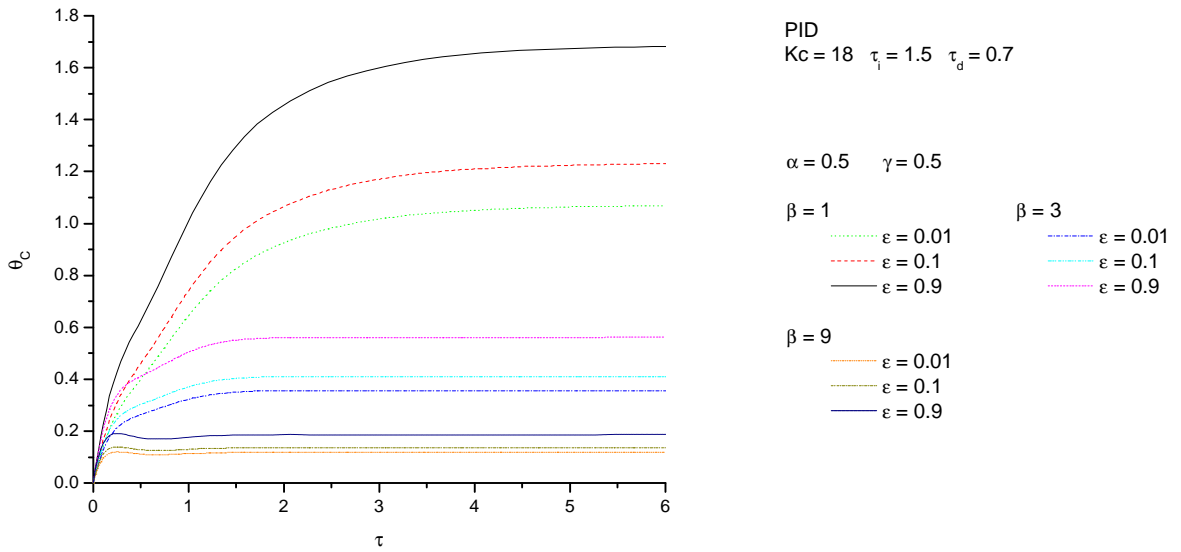


Figura 2.14. Comportamiento del condensador, cuarta simulación

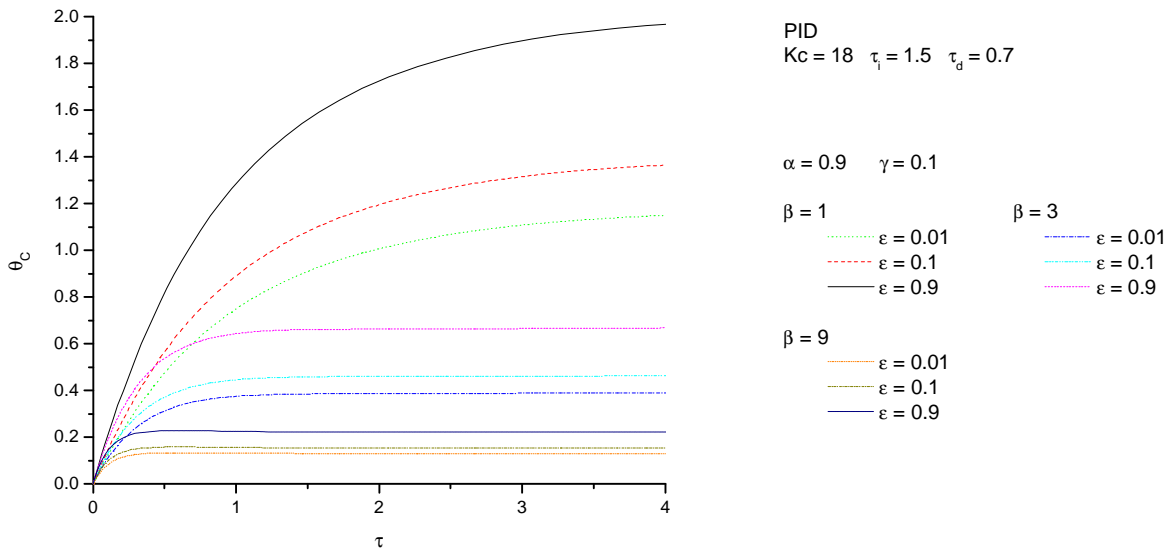


Figura 2.15 Comportamiento del condensador, quinta simulación

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

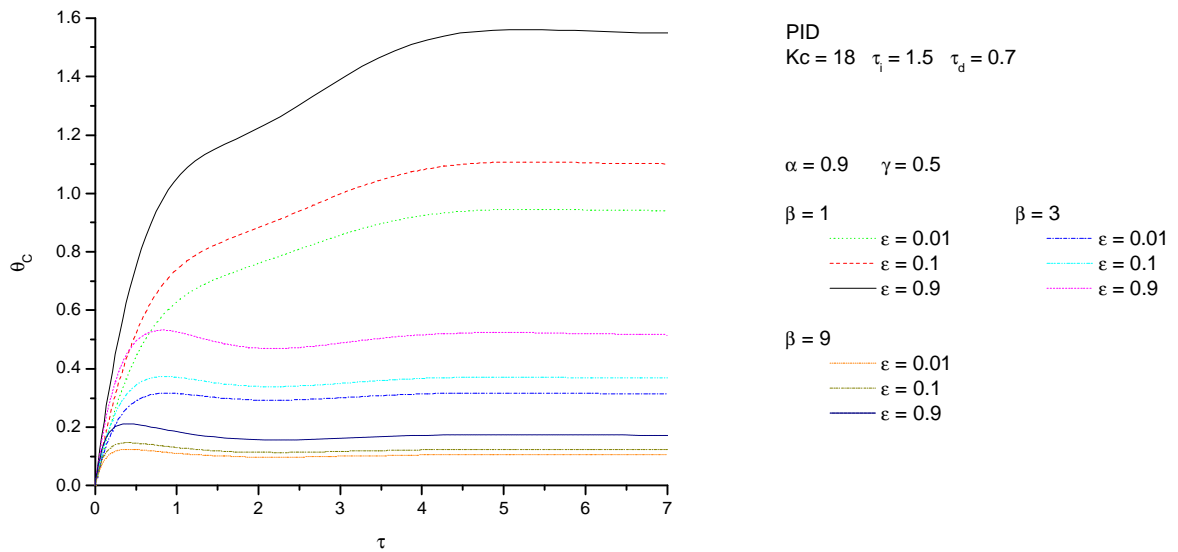


Figura 2.16. Comportamiento del condensador, sexta simulación

Una vez definida la respuesta tanto del evaporador como del condensador, se determina el comportamiento para el coeficiente de operación, COP.

Nuevamente al tener un comportamiento similar sólo se muestran algunas de las figuras con sentido físico, figuras 2.18 a la 2.21.

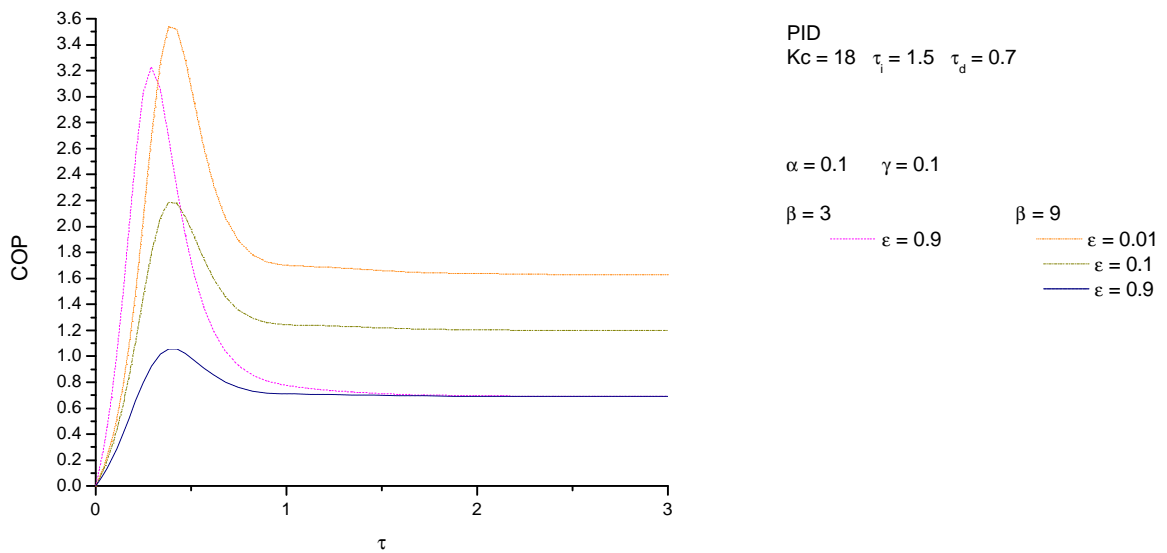


Figura 2.17. Comportamiento del COP, primera simulación

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

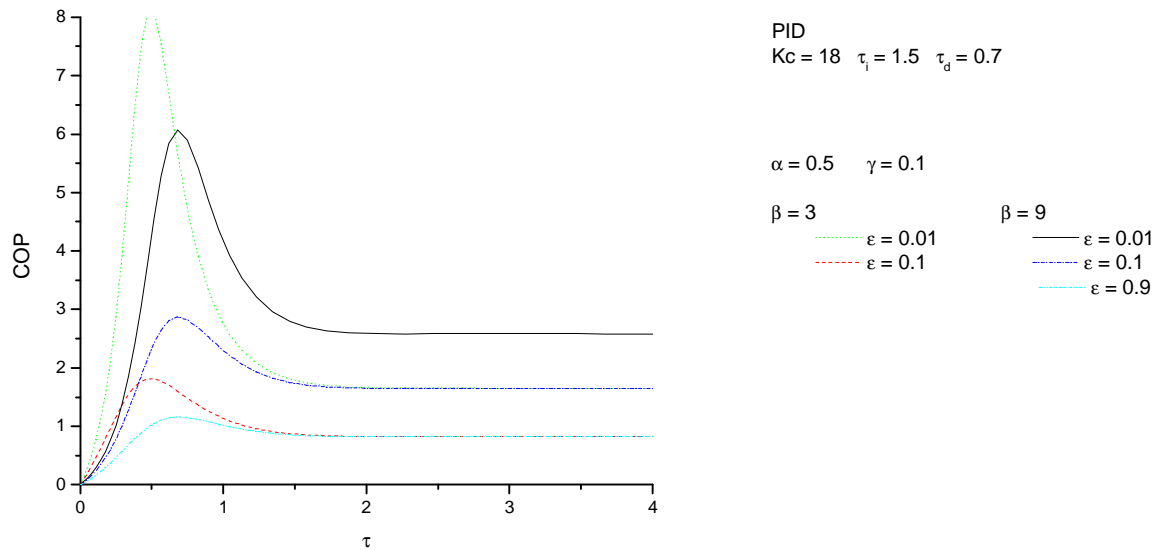


Figura 2.18. Comportamiento del COP, segunda simulación

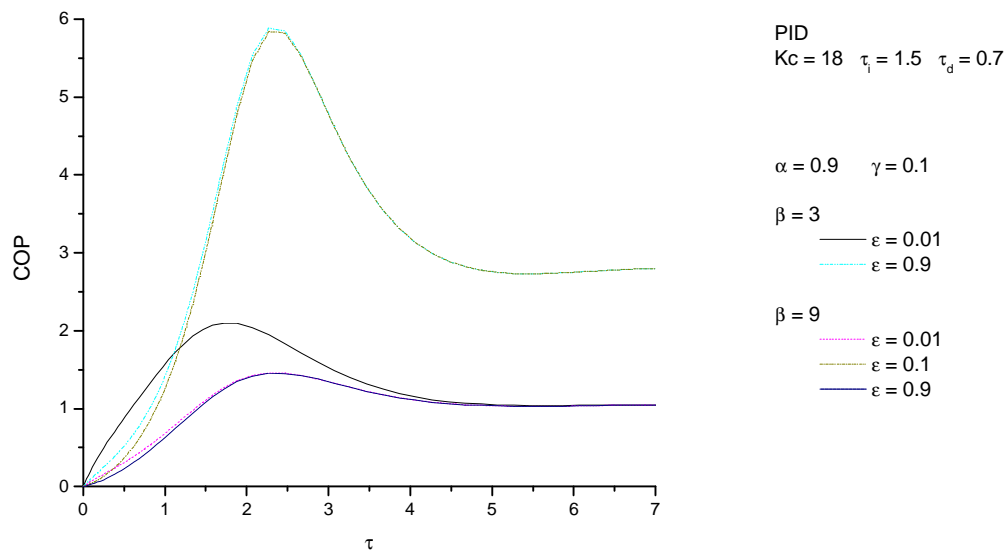


Figura 2.19. Comportamiento del COP, tercera simulación

Modelado del ciclo de refrigeración y resultados

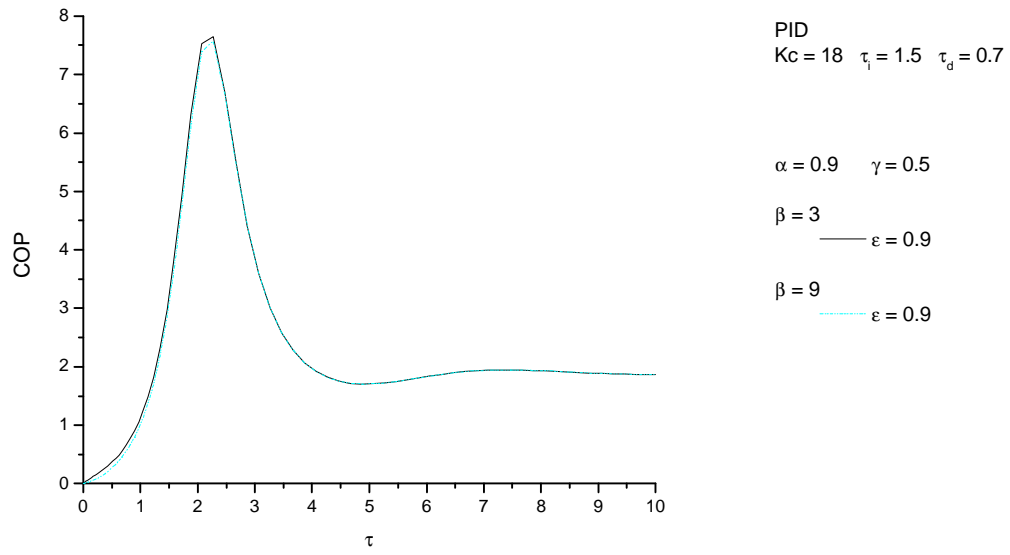


Figura 2.20. Comportamiento del COP, cuarta simulación

Conclusiones

CONCLUSIONES

Existen una gran cantidad de problemas o procesos en los que la teoría de control ha sido aplicada. Algunos de ellos son en la industria de la construcción, el calentamiento por microondas, los procesos de manufactura y materiales, entre otros.

A partir del desarrollo de este trabajo, se muestra como puede aplicarse la teoría de control a un problema en particular de la termodinámica, como lo es un ciclo ideal de refrigeración por compresión de vapor.

A partir de la figura 2.6, de el capítulo anterior, se observa como el control proporcional-integral-derivativo (PID) es la mejor estrategia de control, en comparación con el control proporcional (P) o el proporcional-integral (PI). En ésta aplicación en particular el uso de un control PID permite eliminar los transitorios más rápidamente y adicionalmente se pueden obtener oscilaciones de menor amplitud.

Se observa en la misma figura, que con los parámetros calculados de acuerdo con el método de oscilaciones amortiguadas para cada uno de los diferentes controladores, el sistema, es decir el evaporador, tiene un tiempo de estabilización semejante al de su respuesta libre. Así, para poder eliminar más rápidamente a los transitorios, es necesario realizar un ajuste más fino a los parámetros de los controladores. De esta forma, al variar cada una de las constantes se logra que la salida tenga un tiempo de estabilización menor utilizando un control PID, en comparación con su respuesta libre y con controladores P y PI.

Con los valores finales para los parámetros del controlador, se aprecia de la figura 2.7 que el evaporador se estabiliza en un tiempo aproximado de 2τ , mientras que a su respuesta libre le toma 5τ para llegar al mismo valor. Adicionalmente se presenta en esta figura, un sobrepaso del 20% y el cual, es menor al que se presenta con los otros dos controladores. Esto confirma que el control PID es la mejor estrategia de control para este caso en estudio.

Sin embargo, no debe perderse de vista el hecho de que los métodos de sintonización son sólo aproximaciones, como se muestra claramente en la figura 2.5, en donde los tres controladores producen una respuesta similar en el evaporador. Después de reajustar cada uno de los parámetros de los diferentes esquemas de control, se puede obtener una disminución en la duración de los transitorios.

Adicionalmente tanto el control proporcional como el proporcional e integral tienen un efecto muy similar en la respuesta del sistema, lo que indica que en algunas aplicaciones de la ingeniería, en donde sea necesario un control continuo, puede ser suficiente un control sencillo como el proporcional.

El comportamiento general del ciclo de refrigeración por compresión de vapor, se muestra en la figura 2.8. El tiempo de estabilización para el ciclo en general es de 2τ . En esta figura, el coeficiente de operación toma un valor máximo cercano a 10 en un tiempo de 0.7τ , como consecuencia de que la relación existente entre el condensador y el evaporador, y que a su vez es afectada por la conductancia térmica, β , es cercana al valor de uno, por lo que el denominador de la ecuación 1.58 toma un valor pequeño.

El coeficiente de operación, COP, se estabiliza en un valor de 2.67, el cual es ligeramente menor al valor obtenido en un cálculo tradicional, es decir, considerando que el ciclo opera en estado permanente, en donde toma un valor de 3.06.

Respecto a algunas de las posibles variaciones que pudieran presentarse en el evaporador se observa en la figura 2.9 que para valores pequeños de α y de γ el sistema presenta un sobrepaso cercano al 20%. Al incrementar el valor de α se presentan oscilaciones con un consecuente incremento en el tiempo de estabilización y en la amplitud del sobrepaso. A pesar de esto, el sistema se estabiliza en un tiempo cercano a 10τ y es en ese instante cuando se tiene un sobrepaso máximo del 35%, indicando así que el controlador funciona correctamente ante la presencia de ciertas modificaciones en la operación del ciclo de refrigeración, estabilizando al sistema en un tiempo ligeramente mayor al de su respuesta libre. Para las posibles variaciones del evaporador, se presentaría como máximo un sobrepaso cercano al 35%.

Adicionalmente en la figura 2.10 se muestra el comportamiento del evaporador cuando γ toma valores mayores a uno. Como resultado de esta acción, el sistema responde con un incremento en el número y amplitud de las oscilaciones, es decir, se tendría un sobrepaso máximo del 50% y el tiempo de estabilización sería cercano a 15τ . Sin embargo debe tenerse presente que para valores de γ mayores a la unidad, se contradicen las leyes que gobiernan a dicho ciclo.

En lo que concierne al condensador, figuras 2.11 a la 2.16, como este depende de lo que sucede en el evaporador, la respuesta de aquel es en la mayoría de los casos semejante a una exponencial asintótica. Para valores relativamente grandes de ε , cercanos a 1, en combinación con valores de β entre 1 y 3, el condensador tarda un tiempo de 5τ para estabilizarse, este hecho se produce en conjunto cuando los valores de α y γ son mayores a 0.5 y 0.1 respectivamente.

Para valores de β mayores a 3 el tiempo de estabilización del condensador se reduce hasta 2τ , mientras que para valores pequeños de α y γ , del orden de 0.1, junto con valores de β mayores a 3 y de ε menores a 0.9, la respuesta del evaporador se asemeja a la del evaporador, figura 2.11. Es importante resaltar que los valores de γ deben ser lo suficientemente pequeños de forma tal que garantice una respuesta satisfactoria, pues al tomar valores mayores a 1 la respuesta del condensador carece de sentido físico.

En términos generales, al incrementar el valor de los parámetros del condensador el tiempo de estabilización se incrementa y lo mismo sucede con el número de oscilaciones.

Para el coeficiente de operación, figuras 2.17 a la 2.20, en la mayoría de los casos se estabiliza después de $2t$, excepto para valores de α cercanos a 1 y con β mayor a 3. Antes de que la salida se estabilice, en todos los casos, existe un incremento considerable en su magnitud, como consecuencia de que el primer término del denominador en la ecuación del COP, ecuación 1.58, es ligeramente mayor a uno, lo que significa que el efecto del calor disipado al medio ambiente junto con la acción de la conductancia térmica, b , tienen una mayor influencia en comparación con el efecto de refrigeración justo en el instante en el que el ciclo de refrigeración entra en operación y hasta poco antes de estabilizarse.

Como consecuencia de variar los parámetros involucrados tanto en el evaporador como en el condensador, se tiene una disminución en el COP, llegando hasta un valor de 0.8, lo que equivale a un decremento del 30%. La mayor disminución del COP se presenta cuando α y γ toman un valor de 0.1 en combinación con valores grandes para β , mayores a 3, y para valores menores a 1 por parte de ε . Adicionalmente al incrementar el valor de α y de γ también aumenta el Coeficiente de Operación.

En este punto es importante aclarar, que bajo ciertas combinaciones de los parámetros involucrados en el sistema, tanto el condensador como el coeficiente de operación carecen de sentido físico, pues aparecen inconsistencias en cada una de las expresiones.

Por lo anterior, para cada sistema o planta en estudio pueden tenerse una serie de valores para cada una de las constantes correspondientes a cada controlador que pueden hacer que el sistema se vuelva inestable y por otro lado otra serie de valores para los que sería suficiente un control PI o bien un control P en lugar del control PID. La selección de la estrategia de control dependerá del sistema en estudio, su aplicación en particular y la precisión con lo que se desee controlar a la(s) variable(s) de control.

Actualmente y a pesar de la abundancia de sofisticadas herramientas y métodos avanzados de control, el controlador PID es aún el más ampliamente utilizado en la industria moderna [17], controlando más del 95% de los procesos industriales en lazo cerrado.

En términos generales los resultados obtenidos al aplicar la teoría del control a un ciclo de refrigeración por compresión de vapor son meramente cualitativos, mostrando así, que podría obtenerse un mejor desempeño utilizando un control continuo en el tiempo, como lo es el PID, a diferencia del control comúnmente utilizado, es decir, el control de dos posiciones. Para comprobar tal afirmación sería necesario obtener un modelo dinámico del sistema más representativo, que considere aspectos más significativos de un ciclo de refrigeración real.

Adicionalmente, de los resultados obtenidos, se plantea la posibilidad de que en un ciclo de refrigeración por compresión de vapor, se obtengan mayores Coeficientes de Operación si se logra operar dentro de un régimen caótico.

Los resultados obtenidos en este trabajo sólo muestran como sería el comportamiento del sistema, considerado como ideal, ante la presencia de una perturbación, y como sería su dependencia con los parámetros del ciclo.

Este proyecto es solo una pequeña introducción a la teoría del control térmico. Las ideas principales se fundamentan en una base matemática y en la teoría de control, para lo cual se incluye un anexo exclusivo para la teoría de control, el cual ha sido tomado de los autores Rodríguez [16] y Bolton [18]. Sin embargo, hay aspectos que son característicos de los sistemas térmicos, es decir, fenómenos como la difusión, la convección o la radiación son comunes en cualquier sistema térmico sea este o no complejo, sistemas no lineales que difíciles de predecir o de modelar matemáticamente.

Algunos de estos fenómenos podrían ser considerados como entradas externas al sistema. Entradas que en el diagrama de bloques podrían corresponder a algunas de las posibles perturbaciones que pudieran afectar la operación del ciclo.

La importancia de este proyecto radica en el hecho que mediante el empleo de un control continuo en el tiempo, como lo es el PID y a diferencia del control de dos posiciones usado en la mayoría de los equipos de refrigeración, se plantea la posibilidad de tener ahorros significativos en el consumo de energía, como lo muestran autores como Lars [19] y como Payne [20].

Adicionalmente, se deja abierta la posibilidad de que un control continuo en el tiempo es factible; teniendo como consecuencias que puedan cambiarse algunos de los componentes típicos de un ciclo de refrigeración por compresión de vapor, como lo son el compresor y la válvula de expansión. El efecto que tendría el cambiar el típico compresor *scroll*, por un compresor de velocidad variable, sería la posibilidad de regular el gasto másico del refrigerante y como consecuencia también variar la carga de refrigeración en una forma más precisa de acuerdo con las necesidades.

Equipos desarrollados por la compañía LG, particularmente su sistema Multi V [21] empleados para el aire acondicionado en edificios en donde simultáneamente se pueden tener zonas frías o calientes es una muestra de las aplicaciones que puede tener el control térmico. Este sistema utiliza un control continuo en el tiempo en conjunto con un flujo variable del refrigerante, lo que permite reducir los costos de operación y tener una carga de refrigeración acorde con cada recinto.

Finalmente, este trabajo es un esfuerzo para acercar dos áreas que comúnmente están separadas, es decir, la parte de control con su homóloga, la termodinámica.

Apendice A

Teoría de control

A.1 SISTEMAS DE CONTROL

El término sistema se emplea para describir un conjunto de componentes que interactúan entre si y alrededor de los cuales se dibuja una frontera imaginaria de modo que sólo es de interés la interacción entre la entrada y su salida, sin necesidad de estudiar a detalle componentes que lo forman. Un sistema puede ser una estación de generación de energía completa o sólo un motor eléctrico. No importa qué tan complejo sea un conjunto de componentes y sus interacciones dentro del sistema, se puede considerar que todos están dentro de una caja negra con las entradas y salidas al sistema indicadas con líneas, en las que la dirección de la flecha hace referencia ya sea a una entrada o a una salida. La figura a.1 ilustra el sistema de una estación de generación de energía teniendo como entrada el combustible y como su salida electricidad.

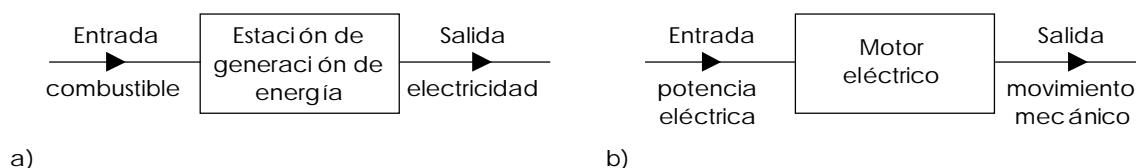


Figura a.1 Sistemas de estación de generación de energía

La ventaja de estudiar los sistemas de esta manera es que aunque existe una amplia variedad de sistemas, la relación entre la salida y la entrada tiende a ser similar. Por ejemplo, la respuesta de un sistema eléctrico RC y la aplicación súbita de un voltaje tiene el mismo tipo de relación que la respuesta de un contenedor de líquido al cual se le aplica súbitamente una entrada de calor, figura a.2

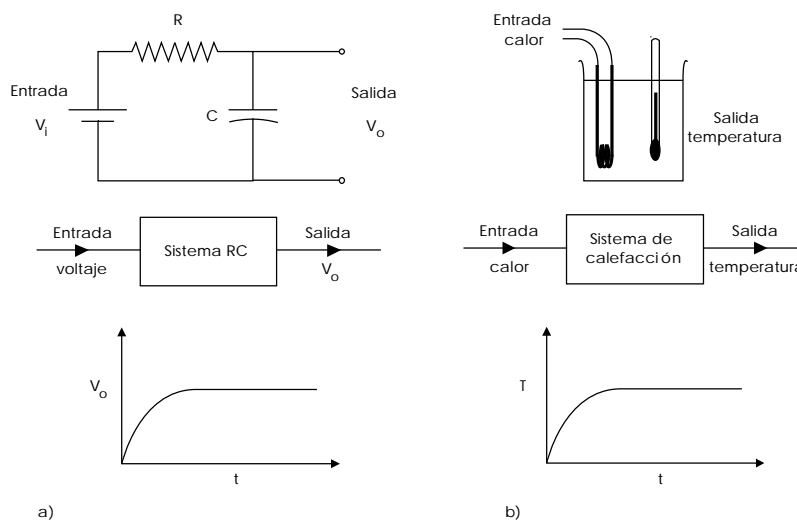


Figura a.2 Sistemas Similares
a) sistema RC, b) sistema de calentamiento

En algunas situaciones es conveniente particionar el sistema en subsistemas enlazados entre si. Por ejemplo, en la figura a.3, se puede tener un sistema de medición de temperatura con un termómetro resistivo conectado a un puente de Wheatstone y la salida mostrada en un medidor.

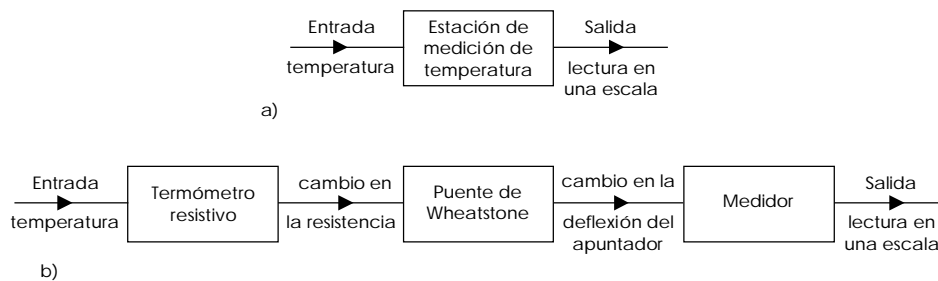


Figura a.3 Sistema de medición de temperatura
a) sistema general, b) subsistemas

Un sistema de control es aquél en el que la salida del sistema se controla para tener un valor específico o cambiarlo, según lo determine la entrada al sistema. De este modo, un sistema de control de temperatura por ejemplo, un sistema de calefacción central en una casa, figura a.4, puede tener como entrada un termostato o panel de control en el que se fija la temperatura requerida y su salida es la temperatura real producida. Esta temperatura se ajusta mediante el sistema de control, de modo que se obtenga el valor fijado por la entrada.

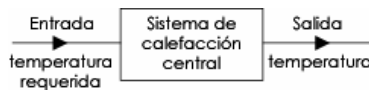


Figura a.4 Sistema de calefacción central

A.2 SISTEMAS DE CONTROL EN LAZO ABIERTO Y CERRADO

Existen dos formas básicas de sistemas de control, una es la denominada en lazo abierto y la otra en lazo cerrado. Con un sistema en lazo abierto la entrada se elige con base en la experiencia que se tiene con dichos sistemas para producir el valor de salida requerido. Esta salida, sin embargo, no se ve modificada por el cambio en las condiciones de operación externas. Por ejemplo, un calefactor eléctrico, figura a.5, puede tener un selector que permite elegir una potencia de calefacción de 1kW ó 2 kW. De este modo, la entrada al sistema está determinada por la posición del selector. La temperatura en la habitación está determinada únicamente por el hecho de que se haya elegido alguna de las dos potencias. Si se presentan cambios en las condiciones de operación, por ejemplo la apertura de una ventana, la temperatura cambiará debido a que no hay modo de que el calor de salida del calefactor se ajuste para compensar dicha condición. Éste es un ejemplo de un sistema de control en lazo abierto en el que no existen información que se realimente al calefactor para ajustarlo y mantener una temperatura constante. Los sistemas de control que operan mediante mecanismos de temporización preestablecidos son sistemas en lazo abierto.



Figura a.5 Sistema de control en lazo abierto

En un sistema de control en lazo cerrado se tiene una señal de realimentación hacia la entrada desde la salida, la cual se utiliza para modificar la entrada de modo que la salida se mantenga constante a pesar de los cambios en las condiciones de operación. El sistema de calefacción anterior se puede modificar a un sistema de lazo cerrado, figura a.6, si alguien con un termómetro monitorea la temperatura en la habitación y enciende o apaga el calefactor para mantener la temperatura constante. En esta situación existe la realimentación de una señal a la entrada referente a la temperatura, con lo que la entrada al sistema se ajusta según si su salida es la temperatura requerida. Así, la entrada al calefactor depende de la desviación de la temperatura real con la temperatura requerida.

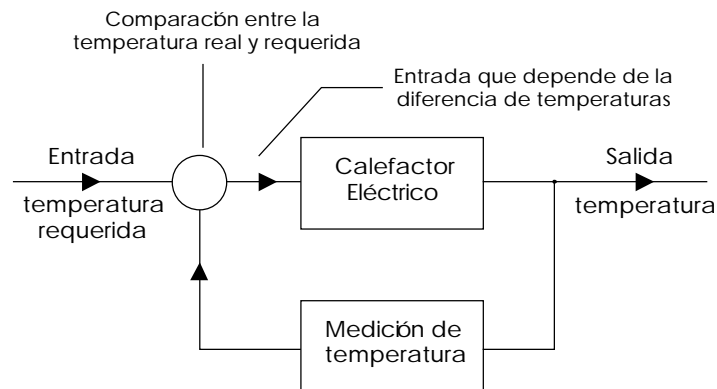


Figura a.6 Sistema de control en lazo cerrado

A.3 ELEMENTOS BÁSICOS DE UN SISTEMA EN LAZO ABIERTO Y LAZO CERRADO

Se puede considerar que un sistema en lazo abierto consiste en algunos subsistemas básicos arreglados como lo muestra la figura a.7. La entrada global al sistema es una señal, que basada en experiencias anteriores es probable que conduzca a la salida requerida. Los subsistemas son:

- Elemento de control. Este elemento determina qué acción se va a tomar dada una entrada al sistema de control.
- Elemento de corrección. Este elemento responde a la entrada que viene del elemento de control e inicia la acción para producir el cambio en la variable de control.
- Proceso. El proceso o planta es el sistema en el que se va a controlar la variable.

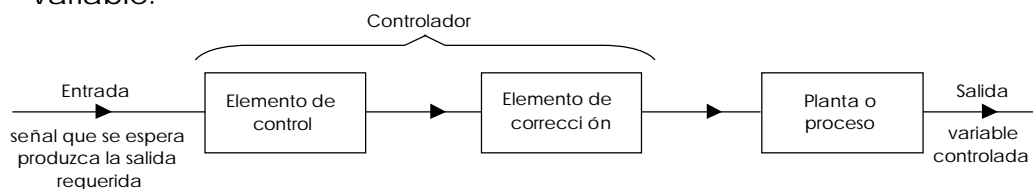


Figura a.7 Subsistemas en un sistema de control en lazo abierto

Teoría de Control

Los primeros dos subsistemas a menudo se unen para formar un elemento denominado controlador.

Un ejemplo de un sistema en lazo abierto es un calefactor eléctrico, en donde:

Variable de control	- temperatura de la habitación
Elemento de control	- una persona que toma las decisiones
Elemento de corrección	- el interruptor y el calefactor
Proceso	- la habitación

Considerando ahora que un sistema en lazo cerrado consiste en algunos subsistemas básicos ordenados como lo muestra la figura a.8.

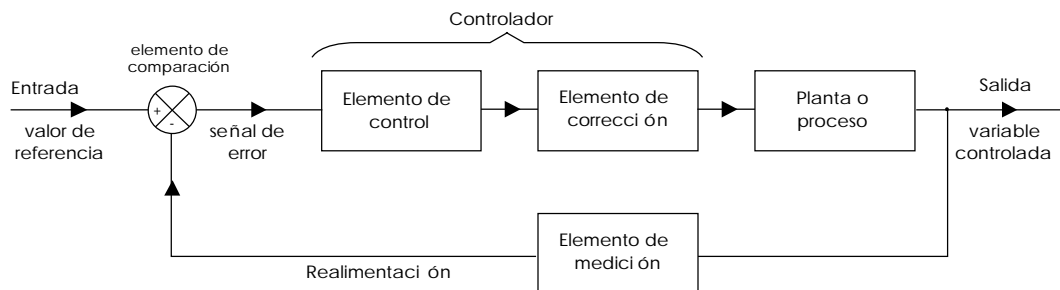


Figura a.8 Subsistemas en un sistema de control en lazo cerrado

La entrada global al sistema de control es el valor requerido de la variable, y la salida es el valor real de la variable.

- Elemento de comparación. Este elemento compara el valor requerido o de referencia de la variable por controlar con el valor medido de lo que se obtiene a la salida, y produce una señal de error la cual indica la diferencia entre ambos.

$$\text{señal de error} = \text{señal del valor de referencia} - \text{señal del valor medido}$$
- Elemento de control. Este elemento decide qué acción tomar cuando se recibe una señal de error. Se utiliza el término controlador para un elemento que incorpora el elemento de control y la unidad de corrección.
- Elemento de corrección. Este elemento se utiliza para producir un cambio en el proceso al eliminar el error, con frecuencia se denomina actuador.
- Elemento proceso. El proceso o planta es el sistema donde se va a controlar la variable.
- Elemento de medición. Este elemento produce una señal relacionada con la condición de la variable controlada y proporciona la señal de realimentación al elemento de comparación para determinar si hay o no error.

Una característica necesaria de un sistema de control en lazo cerrado es el lazo de realimentación. Este es el medio a través del cual una señal relacionada con la variable real obtenida se realimenta para compararse con la señal de referencia. Se dice que se tiene realimentación negativa cuando la señal

Teoría de Control

realimentada se sustrae el valor de referencia. La realimentación positiva se presenta cuando la señal realimentada se adiciona al valor de referencia.

El elemento de comparación se indica mediante un círculo con una cruz. Cuando en el elemento de comparación hay realimentación negativa, el valor de referencia se marca como una señal positiva y la señal de realimentación como negativa, de modo que la salida del elemento de comparación es la diferencia entre las señales. Para una realimentación positiva, ambas señales deben marcarse como positivas.

A.4 LAZO CERRADO CONTRA LAZO ABIERTO

Las ventajas de tener una trayectoria de realimentación y, por tanto, un sistema en lazo cerrado en lugar de un sistema en lazo abierto se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Más exacto en la igualación de los valores reales y requeridos para la variable de control.
2. Menor sensibilidad a las perturbaciones.
3. Menor sensibilidad a cambios en las características de los componentes.
4. La velocidad de respuesta se incrementa y por tanto, el ancho de banda es mayor, es decir el intervalo de frecuencias en los que el sistema responderá.

Algunas de las desventajas son:

1. Hay una pérdida en la ganancia en cuanto a que la función de transferencia de un sistema en lazo abierto, se reduce de G a $G/(1+GH)$ por una trayectoria de realimentación con función de transferencia H .
2. Existe una gran posibilidad de inestabilidad.
3. El sistema es más complejo y por tanto, no solo más caro, sino que también más propenso a fallas.

A.5 MODELOS MATEMÁTICOS PARA SISTEMAS

Con la finalidad de entender el comportamiento de los sistemas es necesario obtener modelos matemáticos que los representan. Considere un motor como sistema. La entrada al motor es un voltaje V y la salida es una velocidad angular ω del eje. Para muchos sistemas existen relaciones lineales razonables entre la entrada y la salida. De este modo, si existe una relación lineal entre la entrada y la salida para el motor, entonces el modelo matemático será:

$$w = GV \quad (a.1)$$

donde G es la constante de proporcionalidad. Esta relación implica que si el voltaje cambia, entonces deberá haber un cambio inmediato correspondiente en la velocidad angular del eje. Éste no será el caso, puesto que el motor toma un cierto tiempo para que el eje cambie a la nueva velocidad. Así la relación existe,

sólo cuando el sistema ha tenido suficiente tiempo para asentarse ante cualquier cambio en la entrada, es decir, esto se a lo que se denomina condición de estado estable. Entonces la ecuación se puede escribir como:

$$w_{estado\ estable} = GV_{estado\ estable} \quad (a.2)$$

Por lo tanto

$$G = \frac{w_{estado\ estable}}{V_{estado\ estable}} \quad (a.3)$$

La constante G se denomina función de transferencia o ganancia del sistema. En general, se puede definir esta función como el cociente de la salida en estado estable entre la entrada en estado estable para un sistema o subsistema.

$$Funcion\ de\ transferencia\ G = \frac{salida\ en\ estado\ estable}{entrada\ en\ estado\ estable} \quad (a.4)$$

Sin embargo, los sistemas reales pueden exhibir un comportamiento no lineal. En muchos casos tales sistemas son lineales si las señales de entrada se mantienen dentro de ciertos límites.

A.6 DIAGRAMA DE BLOQUES

Establecer modelos para sistemas complicados es el resultado de enlazar algunos subsistemas o elementos, cada uno de los cuales tiene su propia función de transferencia. La figura a.9 muestra como representar los elementos en un diagrama.

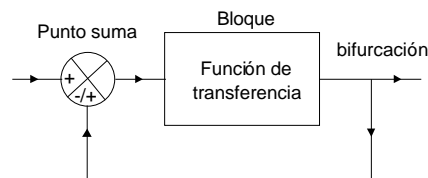


Figura a.9 Elementos de un diagrama de bloques

El termino trayectoria directa se usa para los elementos a través de los cuales pasa la señal en la dirección entrada-salida a lo largo del sistema. Las funciones de transferencia para los elementos en esta trayectoria se designan generalmente como $G(s)$ o G . El término trayectoria de realimentación se usa para los elementos por los cuales pasa la señal cuando se alimenta de regreso desde la salida hacia la entrada. Las funciones de transferencia para los elementos en esta trayectoria se designan por $H(s)$ o H . El término trayectoria de prealimentación se usa para los elementos que están en paralelo con la trayectoria directa y a través de los cuales la señal se mueve en la misma dirección, figura a.10.

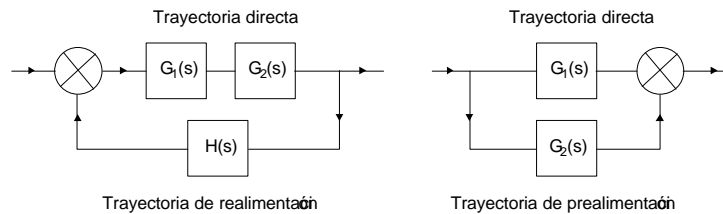


Figura a.10 Trayectoria de señal

A.7 PERTURBACIONES

Una consideración importante con un sistema de control es el efecto de cualquier perturbación. Por ejemplo, en un sistema de calefacción central con un sistema de control en lazo abierto, el calefactor se enciende para obtener la temperatura requerida en la habitación, pero que ocurriría si alguien abre una ventana. Tal perturbación se puede incorporar en el diagrama de bloques del sistema en la forma como lo indica la figura a.11. En este caso la perturbación q_d se suma a la salida del proceso. Para tal situación se tiene

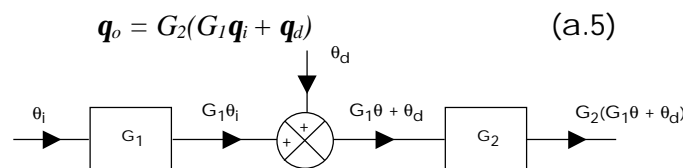


Figura a.11 Sistema de control en lazo abierto con una perturbación

El termino q_d es el error en estado estable adicionado al sistema por la presencia de la perturbación.

Si la perturbación se agrega entre los elementos 1 y 2, figura a.12, se tiene

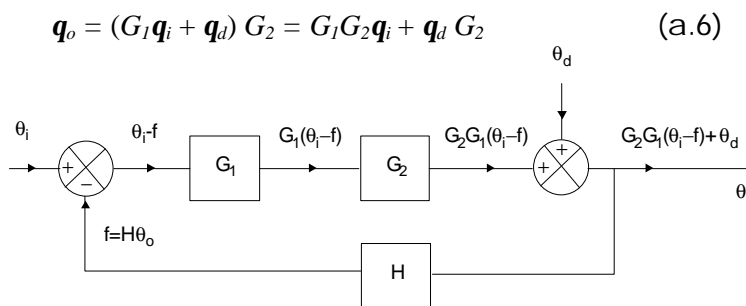


Figura a.12 Sistema de control en lazo cerrado con una perturbación

El termino $q_d G_2$ es el error en estado adicionado al sistema por la presencia de la perturbación.

Con un sistema en lazo cerrado, por ejemplo en un sistema de calefacción doméstico si el valor fijado en el termostato no se modifica y si alguien abre una ventana; el sistema de control sujeto a tal perturbación puede representarse

mediante un diagrama de bloques de la forma en que se indica en la figura a.19. La señal de error al elemento 1 es $(q_i - f)$, donde f es la señal de realimentación. La señal de salida del elemento 1 y entrada al elemento 2 es $G_1(q_i - f)$. La salida del elemento 2 es $G_1G_2(q_i - f)$. La perturbación se agrega a éste en este punto y así la salida q_o se puede escribir como:

$$q_o = G_1[G_2(q_i - f) + q_d] \tag{a.7}$$

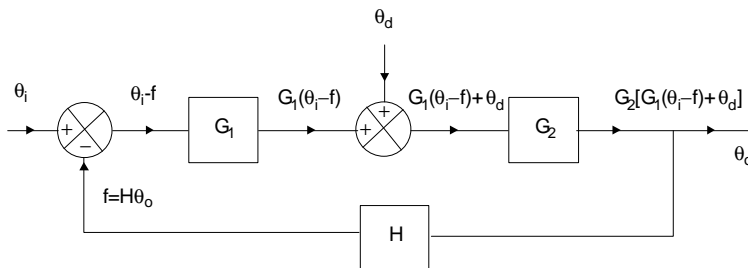


Figura a.13 Sistema de control en lazo cerrado con una perturbación

pero la realimentación f es Hq_o , por lo que

$$q_o = G_1G_2(q_i - Hq_o) + q_d \tag{a.8}$$

y reordenando se obtiene

$$q_o(1 + G_1G_2H) = G_1G_2q_i + q_d \tag{a.9}$$

$$q_o = q_i \left(\frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2H} \right) + q_d \left(\frac{1}{1 + G_1G_2H} \right) \tag{a.10}$$

El último término corresponde al error en estado estable que se incorpora al sistema mediante la perturbación. Si esta ecuación se compara con un sistema en lazo abierto se observa que el efecto de la perturbación se modifica por el factor

$$\left(\frac{1}{1 + G_1G_2H} \right) \tag{a.11}$$

Esta propiedad de modificar el efecto de una perturbación se denomina rechazo a perturbaciones. Siempre que se presente una perturbación en el sistema en lazo cerrado, su efecto se reduce por el factor

$$\left(\frac{1}{1 + GH} \right) \tag{a.12}$$

donde G es la función de transferencia de la trayectoria directa y H es la función de transferencia de la realimentación. Ésta es una de las ventajas de los sistemas

Teoría de Control

de control en lazo cerrado sobre los sistemas de control en lazo abierto: éstos son mucho mejores para aminorar los efectos de las perturbaciones en el sistema. Las perturbaciones se pueden presentar de varias formas, el término perturbación se puede interpretar como una señal no deseada la cual afecta la salida del sistema. Así, las perturbaciones pueden venir de fuentes exógenas o bien, del interior del sistema.

A.8 ESTABILIDAD EN LOS SISTEMAS DE CONTROL

En general, se dice que un sistema es estable si cuando está sujeto a una entrada o perturbación acotada, la salida es acotada. Una entrada o salida acotada tiene una magnitud finita. La condición para estabilidad también se puede expresar como que un sistema es estable si al excitarlo con un impulso la salida regresa eventualmente a cero.

Los sistemas de control en lazo abierto son inherentemente estables. Una entrada finita produce una salida finita y que en forma indefinida no cambia con el tiempo. Al incrementar la función de transferencia de un elemento no tiene efecto en la estabilidad del propio sistema.

Los sistemas en lazo cerrado pueden mostrar inestabilidad, que se puede representar como resultado de tiempos de retardo que ocurren entre el cambio en la variable y la señal de realimentación que resulta de la respuesta del sistema.

Un requerimiento importante para un sistema de control es que debe ser estable. Para sistemas lineales el requerimiento de estabilidad se puede definir en términos de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado. Los polos son las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia y los ceros las raíces del polinomio del numerador de la función de transferencia.

Un sistema no es necesariamente estable si una sola entrada produce una salida finita; todas las entradas deben de hacerlo. De manera alternativa, un sistema se puede definir como estable si al estar sujeto a una entrada impulso la salida tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. Si, al responder a la entra impulso, la salida del sistema tiende infinito a medida que el tiempo crece, entonces el sistema es inestable. Sin embargo, si la salida no tiende a cero o no crece a infinito, pero tiende a un valor finito diferente de cero, se dice que el sistema es crítica o marginalmente estable.

A.9 POLOS Y CEROS

La función de transferencia en lazo cerrado $G(s)$ de un sistema, en general se puede representar como

$$G(s) = \frac{K (s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \dots + a_1s + a_0)}{s^q (s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0)} \quad (\text{a.13})$$

y las raíces de numerador y del denominador pueden expresarse como

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (\text{a.14})$$

donde las raíces de numerador se denominan ceros, mientras que las raíces del denominador se conocen como polos, y K es la ganancia del sistema.

Los ceros son los valores de s para los cuales la función de transferencia se convierte en cero. Los polos son los valores de s para los cuales la función de transferencia es infinita, es decir, éstos hacen que el valor del denominador sea cero. Los polos y ceros pueden ser cantidades reales o complejas, pudiéndose expresar como

$$s = \sigma + j\omega \quad (\text{a.15})$$

donde σ es la parte real y $j\omega$ la parte imaginaria.

A.10 PATRON DE POLOS Y CEROS

Los polos y ceros de una función de transferencia se pueden representar en un diagrama llamado el patrón de polos y ceros. La figura a.14 ilustra los ejes que se usan para dicha gráfica. La posición de un polo se marca con una cruz, 'x', mientras que la posición de un cero por medio de un círculo, 'o'.

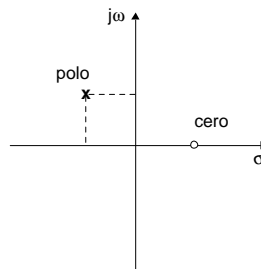


Figura a.14 Patrón de polos y ceros

La gráfica en dos dimensiones se conoce como plano s . Los polos o ceros en el lado izquierdo de la gráfica son todos negativos, los polos o ceros en el lado derecho son positivos. Los polos o ceros son reales o pares del tipo $(\sigma \pm j\omega)$.

A.11 ESTABILIDAD Y POLOS

La estabilidad de un sistema se puede determinar considerando cómo cambia la salida con el tiempo después de una entrada impulso. Con un sistema estable la salida deberá tender a cero con el tiempo, y con un sistema inestable la salida crecerá con el tiempo. En general, cuando a un sistema se le aplica un impulso, la

salida es de la forma de una suma de términos exponenciales. Si sólo uno de los términos es una exponencial creciente entonces la salida crece de manera continua con el tiempo y el sistema es inestable. Esta situación se producirá si uno de los polos tiene parte real positiva y, de esta manera, el denominador de la función de transferencia incluye un término $(s - a)$. Cuando existen pares de polos que involucran $\pm j\omega$ entonces la salida es siempre una oscilación. Está será estable si la parte real del par de polos es negativa, y será inestable si es positiva.

De esta, manera si todos los polos están en el lado izquierdo del patrón de polos y ceros, el sistema es estable. Si sólo uno de los polos está en el lado derecho de dicho patrón, éste es inestable. Un sistema es críticamente estable si uno o más polos están sobre el eje vertical del patrón de polos y ceros, es decir, tienen parte real cero y no hay polos en el lado derecho. La figura a.15 muestra las posiciones de los polos para algunos ejemplos, mientras que la figura a.16 ilustra la forma general que toman las salidas para diferentes posiciones de los polos. Si sólo interesa la estabilidad, los polos de la función de transferencia son importantes y los valores de los ceros del sistema son irrelevantes.

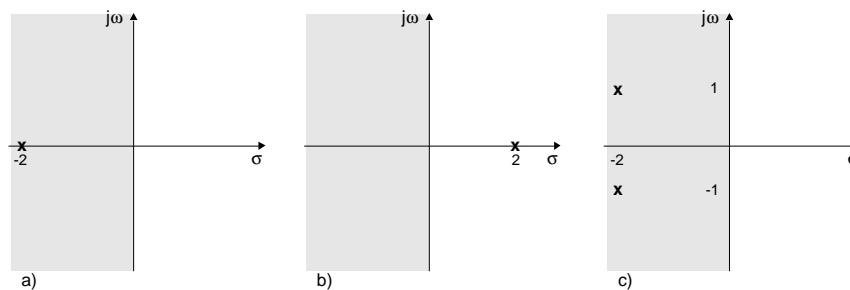
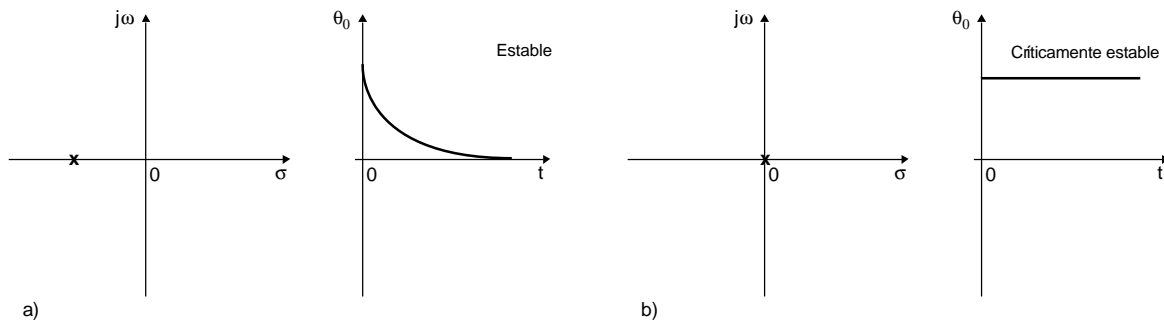


Figura a.15 Patrón de polos y ceros y estabilidad, región de estabilidad compartida. a) polo en -2 sin ceros (estable); b) polo en +2 sin ceros (inestable); c) polos en $-2 \pm j1$ sin ceros (estable)



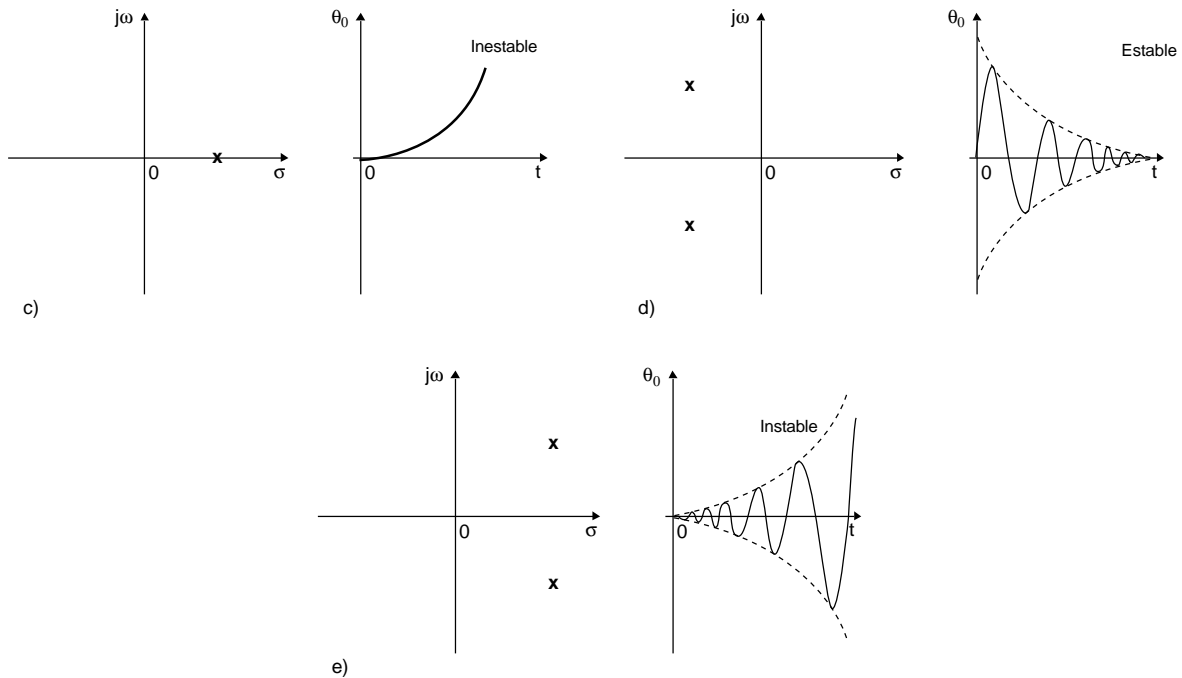
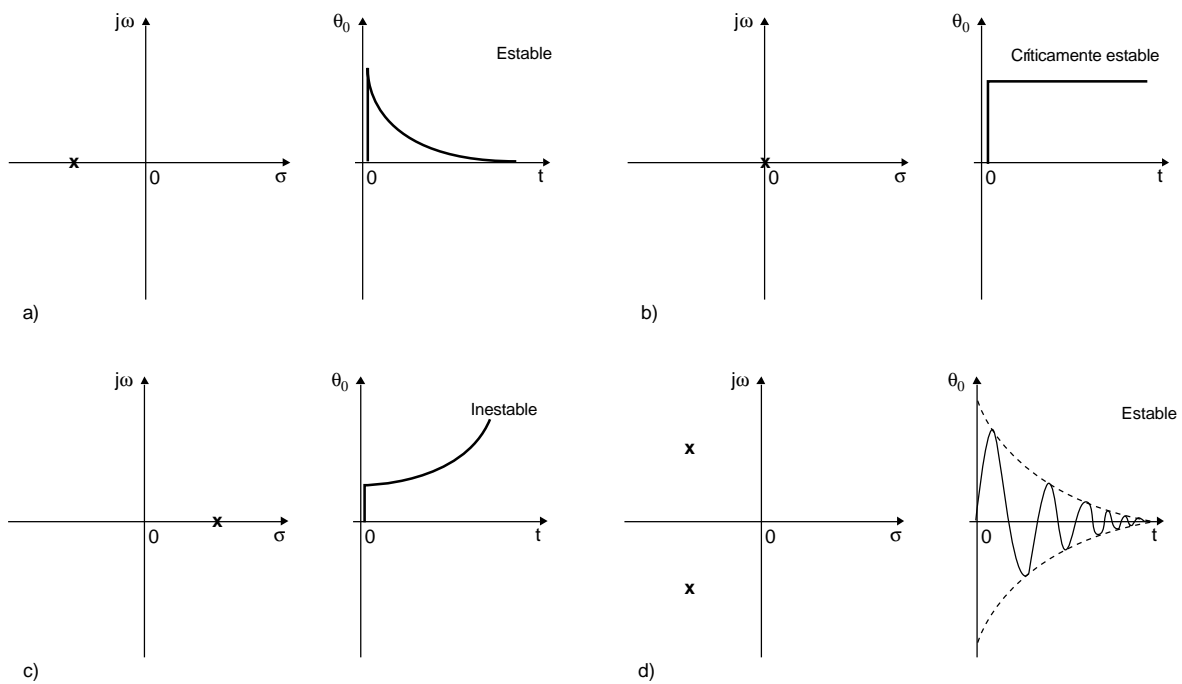


Figura a.16 Salidas para diferentes posiciones de los polos con una entrada impulso.

Una alternativa para el análisis de estabilidad anterior es considerar la estabilidad en términos de cómo cambia la salida con el tiempo después de una entrada escalón. Esto es una entrada acotada y para un sistema estable debería haber una salida acotada. Para la estabilidad en relación con las posiciones de los polos resulta la misma condición. La figura a.17 indica las formas generales que toman las salidas para diferentes tipos de polos.



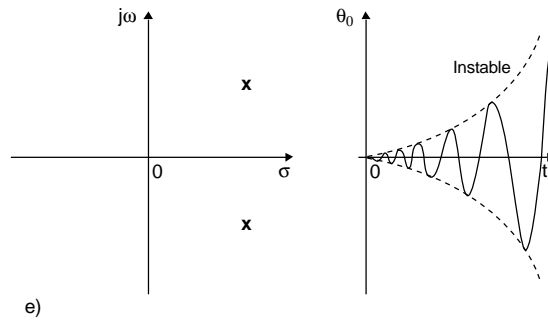


Figura a.17 Salidas para diferentes posiciones de los polos con una entrada escalón.

A.12 ANÁLISIS DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

Las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia de un sistema, denominados polos, determinan la forma general de la respuesta transitoria de ese sistema. La figura a.18 muestra, para un sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)} \tag{a.16}$$

como al cambiar la posición de los polos, p_1 y p_2 , en el plano s cambia la respuesta transitoria cuando el sistema está sujeto a un impulso.

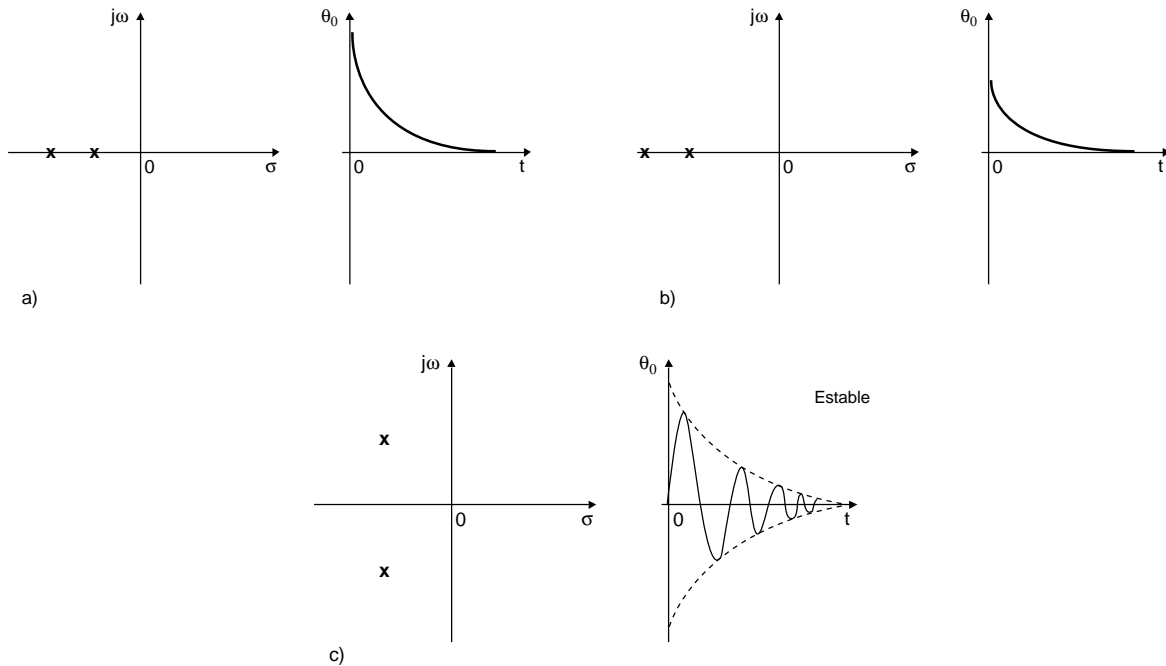


Figura a.18 Posición de los polos y respuesta al impulso.

A.13 LUGARES GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

La figura a.19 muestra un sistema de segundo orden, cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{K/[s(s+1)]}{1 + K/[s(s+1)]} = \frac{K}{s^2 + s + K} \quad (a.17)$$

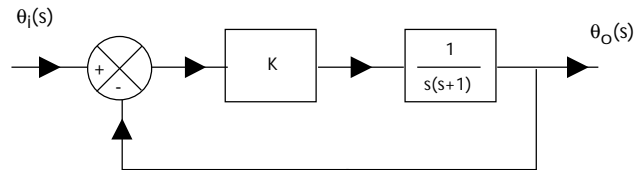


Figura a.19 Sistema de segundo orden

En este caso, las raíces del polinomio del denominador son

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4K} \quad (a.18)$$

Cuando $K = 0$, entonces $p = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$, es decir, las raíces en lazo abierto están en 0 y -1. Cuando $K = \frac{1}{4}$, entonces $p = -\frac{1}{2}$. Para los valores de K entre 0 y $\frac{1}{4}$ la raíz en 0 se hace más negativa y se mueve hacia $-\frac{1}{2}$, mientras que la raíz en -1 se hace menos negativa y se mueve hacia $-\frac{1}{2}$, figura a.20. Para $K = 1$, las raíces están dadas por $p = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-3}$. Para todos los valores de K mayores de 0.25 se presenta un par de raíces complejas, siendo constante la componente real de valor $-\frac{1}{2}$ y la parte imaginaria tiene un valor que se incrementa a medida que K aumenta.

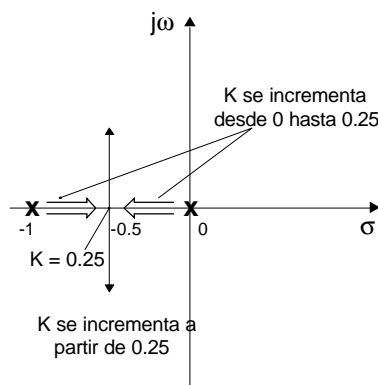


Figura a.20 Lugares geométricos de las raíces para el sistema de la figura a.19

Puesto que los valores de las raíces dependen del valor K , la respuesta del sistema a entradas externas también dependen de K . La figura a.21 muestra la respuesta del sistema con diferentes valores de K a una entrada escalón unitario. Para valores de K entre 0 y 0.25 se tiene la respuesta sobreamortiguada de un

sistema de segundo orden. Para $K = 0.25$ el sistema es críticamente amortiguado y para valores mayores a 0.25 es sistema es subamortiguado y presenta oscilaciones.

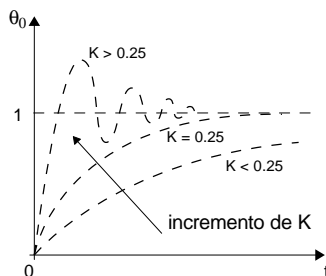


Figura a.21 Respuesta del sistema de la figura a.19 a entrada impulso

El polinomio del denominador de la función de transferencia, $s^2 + s + K$, se puede escribir de la forma $s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2$. De esta manera para este sistema $\omega_n^2 = K$ y $2\omega_n\zeta = 1$, y así $\omega_n = \sqrt{K}$ y $\omega_n\zeta = 1/2$, es decir, los valores de los polos en el amortiguamiento crítico, $\zeta = 1/(2\sqrt{K})$. A medida que K se incrementa a partir de 0.25 también, se incrementa la frecuencia natural y decrece el factor de amortiguamiento relativo.

A.14 INTERPRETACIÓN DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

El diagrama del lugar geométrico de las raíces muestra el efecto que la variación de la ganancia tiene sobre las raíces de la ecuación característica en lazo cerrado y, por tanto, el comportamiento dinámico del sistema. Esto permite observar el efecto de modificar o adicionar polos y ceros al sistema en estudio. Los polos en lazo abierto de esos diagramas actúan como las “fuentes” de los lugares geométricos y los ceros como “pozos” con K incrementándose desde un polo en lazo abierto hasta infinito en un cero. La función de transferencia en lazo cerrado de un sistema de segundo orden se puede representar como

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2z\omega_n s + \omega_n^2} \tag{a.19}$$

Si el factor de amortiguamiento relativo está entre 0 y 1, entonces los polos son complejos y el sistema produce una respuesta oscilatoria. Para esta condición se puede escribir que

$$s^2 + 2z\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega) = s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2 \tag{a.20}$$

y así

$$2z\omega_n = 2\sigma \tag{a.21}$$

de donde

$$z = \frac{s}{w_n} \quad (\text{a.22})$$

$$w_n^2 = s^2 + w^2 \quad (\text{a.23})$$

Esta última ecuación muestra que w_n es la longitud de la línea que une el origen del plano s y el polo en lazo cerrado, figura a.22.

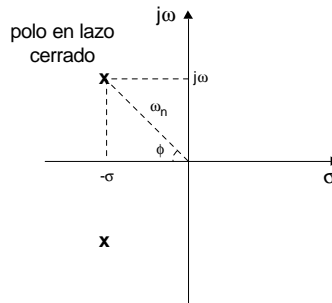


Figura a.22 Polos complejos

Debido a que σ/ζ es para el mismo triángulo, el coseno del ángulo ϕ , entonces de la ecuación (a.22)

$$z = \cos \phi \quad (\text{a.24})$$

De este modo, si la frecuencia angular de oscilación de un sistema se va a incrementar, la longitud de la línea que une al polo en lazo cerrado y el origen también se debe incrementar, figura a.23. Si el factor de amortiguamiento relativo se incrementa, entonces el ángulo ϕ entre esta línea y el eje real debe decrecer debido a que esto incrementa el $\cos \phi$.

El diagrama del lugar geométrico de las raíces también se puede usar para estudiar el efecto de cambiar la ganancia en la estabilidad del sistema. La inestabilidad relativa de un sistema se puede juzgar por la proximidad de sus lugares geométricos de las raíces al eje imaginario, un sistema con lugares geométricos de las raíces más alejados del correspondiente a otro sistema es relativamente más estable.

La introducción de un cero en el semiplano izquierdo del plano s mejora la estabilidad relativa de un sistema debido a que éste incrementa los ángulos de las asíntotas y de esta manera, mueve los lugares geométricos alejándose del eje imaginario. Cuando los lugares geométricos son paralelos al eje entonces no existe valor de K para el cual se da como resultado la inestabilidad. La introducción de un polo extra tiene el efecto contrario.

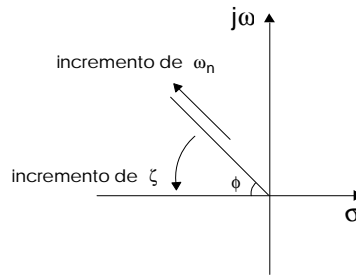


Figura a.23 Frecuencia angular y factor de amortiguamiento relativo

A.15 ESTRATEGIAS DE CONTROL

El elemento de control tiene como entrada la señal de error y como salida una señal que se convierte en la entrada a la unidad de corrección de modo que pueda iniciar la acción para eliminar el error. Existen varias formas para que el elemento de control reaccione ante una señal de error.

Con sistemas de control en lazo abierto los tipos de control más comunes son el de dos posiciones (encendido – apagado o en inglés *on – off*) o secuencias o acciones conmutadas por tiempo. Un ejemplo de control *on – off* es una persona que enciende un calefactor eléctrico para obtener la temperatura requerida en una habitación. Un ejemplo de secuencia conmutada por tiempo es la operación de una lavadora de ropa.

Con sistemas de control en lazo cerrado los tipos de control son a menudo el control de dos posiciones, el control proporcional o el control proporcional combinado con algún otro refinamiento. Con el modo de control de dos posiciones, la señal de error produce una salida del elemento de control de encendido o apagado que acciona o no al elemento de corrección, figura a.24.

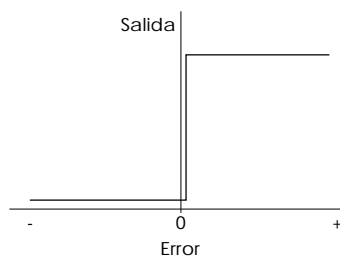


Figura a.24 modo de control de dos posiciones

Con el control proporcional la salida del elemento de control es una señal, la cual es proporcional al error: cuanto mayor sea el error mayor será la salida, figura a.25. Esto significa que el elemento de corrección recibirá una señal que depende de la magnitud de la corrección que se necesite.

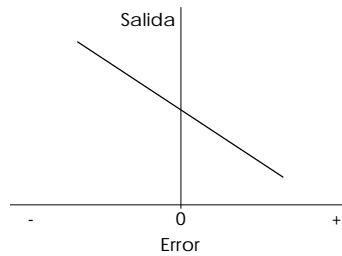


Figura a.25 Control proporcional

Debido a que el control proporcional por si solo puede presentar algunos problemas, con frecuencia se combina con otras formas de control. Existe el control derivativo, donde la salida es proporcional a la razón de cambio de la señal de error y el control integral, donde la salida en el tiempo t es proporcional a la integral de la señal de error entre $t = 0$ y t .

A.16 CONTROLADORES Y SINTONIZACIÓN

El controlador es un elemento en el sistema en lazo cerrado que tiene como entrada la señal de error y produce una salida que se convierte en la entrada al elemento correctivo. La relación entre la salida y la entrada al controlador con frecuencia se denomina ley de control. Existen tres formas de dicha ley: proporcional, integral y derivativo. En algunos sistemas es necesario mejorar el desempeño del controlador, lo cual se logra al introducir en el sistema de control elementos adicionales denominados compensadores. Esta alteración en el desempeño se denomina compensación.

A.17 CONTROL DE DOS POSICIONES

El tipo de control basado en dos posiciones, *on-off*, se conoce también como todo-nada (abierto-cerrado) y es básicamente un tipo de control discreto que sólo mantiene a la variable dentro de una banda de valores que está limitada por un máximo y un mínimo, quedando el valor deseado entre los dos límites. Como en todos los casos, el control *on-off* responde a las perturbaciones que ocurren a la variable de proceso. En el control de dos posiciones la salida del controlador envía una señal de 0% o bien de 100%, cuando el valor de la variable medida está arriba o abajo del punto de ajuste; es decir, que cuando se detecta que la variable está abajo del punto de ajuste, envía una señal para iniciar la acción de control hasta llegar al valor del punto de ajuste y cuando el controlador detecta que ya rebaso este valor, envía una señal del 0% para cancelar la acción de control, figura a.26.

Esta acción de control es aplicable a aquellos procesos que no requieren tener mucha exactitud en el control, y que tienen tiempos muertos grandes y similarmente grandes capacitancias. Además, el control de dos posiciones produce oscilaciones en el proceso. Si el proceso puede tolerar esto, entonces el

control de dos posiciones es adecuado, y sino, debemos buscar otro método aplicable.

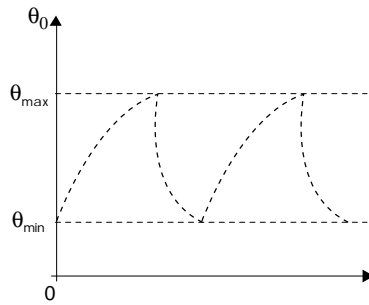


Figura a.26 Control de dos posiciones

A.18 CONTROL PROPORCIONAL

Con el control proporcional la salida del controlador es directamente proporcional a su entrada; la entrada es la señal de error, e , la cual es una función del tiempo. De esta forma

$$salida = K_p e \tag{a.25}$$

donde K_p es una constante llamada ganancia proporcional. La salida del controlador depende sólo de la magnitud del error en el instante en el que se considera. La función de transferencia, $G_c(s)$ para el controlador es

$$G_c(s) = K_p \tag{a.26}$$

El controlador es, en efecto, sólo un amplificador con ganancia constante. En cierto tiempo, un error grande produce una salida grande. La ganancia constante, sin embargo, tiende a existir sólo sobre cierto rango de errores que se conoce como banda proporcional. Una gráfica de la salida contra el error sería una línea recta con una pendiente de K_p en la banda proporcional, figura a.27.

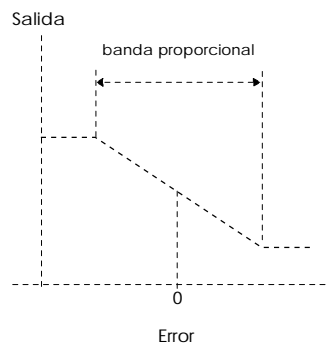


Figura a.27 Control proporcional

Es común expresar la salida del controlador como un porcentaje de la posible salida total de éste. De este modo, un 100% de cambio en la salida del

controlador corresponde a un cambio en el error desde un extremo a otro de la banda proporcional, así

$$K_p = \frac{100}{\text{banda proporcional}} \quad (\text{a.27})$$

Cuando existe una perturbación en el proceso o un cambio de punto de ajuste, el controlador tratará de llevar a la variable controlada al valor deseado; y dependiendo de la ganancia, la respuesta será más rápida y de mayor sensibilidad.

Cuando la ganancia es unitaria, es decir, $K_p = 1$, la banda proporcional será del 100%; si la ganancia aumenta, la banda proporcional disminuye (banda angosta), lo cual le da mayor rapidez de respuesta al controlador; por el contrario, si la ganancia es menor que la unidad, la banda proporcional será mayor del 100% (banda ancha), lo cual le da una menor rapidez de respuesta al controlador y hace que el proceso se vuelva lento pero con mayor estabilidad.

En el caso de que la banda proporcional sea angosta, es decir, que la ganancia sea mayor que la unidad, el controlador responderá más rápidamente, y a medida que se aumente la ganancia se llegará a un límite de estabilidad en el que ya no es conveniente subir más la ganancia porque el lazo se volverá inestable y no habrá más control, ya que se tendrán oscilaciones que llevarán al control todo-nada en forma oscilatoria. Este proceso de aumento de ganancia con el fin de eliminar el "Offset" o error en estado estacionario, necesitará, más bien, el uso de otra acción de control, que es la integral.

Debido a que la salida es proporcional a la entrada, si ésta es un error en forma de un escalón, entonces la salida también lo será, pero como una versión a escala. Esto es provisto por el controlador si opera dentro de su banda proporcional, figura a.28.

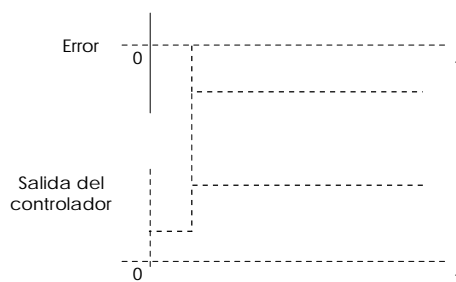


Figura a.28 Sistema con control proporcional

El control proporcional es sencillo de aplicar, en esencia sólo se requiere alguna forma de amplificador, éste podría ser un amplificador electrónico o uno mecánico. El control proporcional se representa como lo indica la figura a.29. El resultado es una función de transferencia de lazo abierto de

$$G_o(s) = K_p G_p(s) \tag{a.28}$$

donde G_p es la función de transferencia de la planta.

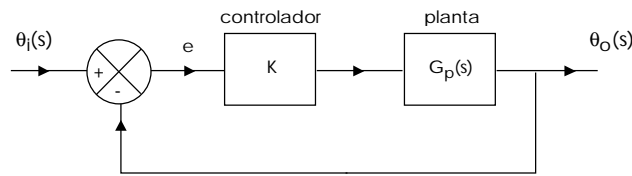


Figura a.29 Sistema con control proporcional

La principal desventaja del sistema es que el controlador no introduce un término integrador en la trayectoria directa. Esto significa que si el sistema fuera de tipo 0, entonces el controlador no cambiaría y seguiría siendo de tipo 0, con los consecuentes errores en estado estable. El controlador no introduce nuevos ceros o polos al sistema, sólo determina la ubicación de los polos en lazo cerrado. Esto se debe a que la función de transferencia en lazo cerrado con el controlador y con realimentación unitaria es

$$G(s) = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)} \tag{a.29}$$

y de esta manera, la ecuación característica tiene los valores de sus raíces afectados por K_p .

A.19 CONTROL INTEGRAL

Con el control integral la salida del controlador es proporcional a la integral de la señal de error e con el tiempo, es decir

$$salida = K_i \int_0^t e dt \tag{a.30}$$

donde K_i es la constante denominada ganancia integral y tiene unidades de seg^{-1} . La figura a.61 muestra que ocurre cuando el error es de la forma de un escalón. Debido a que después de que el error comienza, el área bajo la curva se incrementa en una razón regular, la salida del controlador se debe incrementar en la misma razón. La salida es por tanto, proporcional a la acumulación de los efectos de los errores pasados.

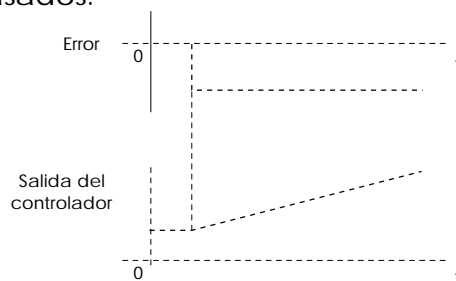


Figura a.30 Control integral

Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación (a.30) se obtiene la función de transferencia para el control proporcional

$$G_c(s) = \frac{\text{salida}(s)}{e(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (\text{a.31})$$

Así, para el sistema de la figura a.62, el control integral da una función de transferencia de la trayectoria directa de $\frac{K_i}{s}G_p(s)$ y por lo tanto, una función de transferencia en lazo abierto de la forma

$$G_o(s) = \left(\frac{K_i}{s} \right) G_p(s) \quad (\text{a.32})$$

Una ventaja del control integral es que la introducción de un término s en el denominador incrementa el tipo de sistema en 1. De esta manera, si el sistema fuera de tipo 0, el error en estado estable que se presentaría con una entrada escalón, desaparece con la acción del control integral. Una desventaja del control integral es que el término $(s - 0)$ en el denominador significa que se ha introducido un polo en el origen. Puesto que no se introducen ceros, la diferencia entre el número de polos n y el número de ceros m se incrementa en 1. Una consecuencia de lo anterior es que los ángulos de las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces decrecen, es decir, apuntan más hacia el semiplano derecho del plano s y de este modo se reduce la estabilidad relativa.

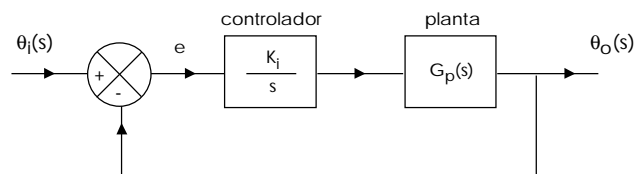


Figura a.31 Control integral

Una forma equivalente de la ecuación (a.30) es

$$\text{salida} = \frac{K_p}{t_i} \int e(t) dt \quad (\text{a.33})$$

donde K_p es la ganancia proporcional, t_i el tiempo de integración o reajuste. Así el tiempo de integración es el parámetro de sintonización de la acción integral. Este tiempo es el lapso que le lleva a la acción integral de control para igualar al cambio instantáneo producido por la acción proporcional en un error que se originó por un cambio de escalón.

Aunque la acción integral es eficiente para eliminar el error en régimen permanente, es más lenta que la acción proporcional, porque debe actuar durante un periodo de tiempo y produce un retraso de fase en el lazo de control.

La acción integral actúa en función de la velocidad de cambio de la variable controlada, de tal manera que si la variable controlada cambia en su valor, con respecto al valor deseado, funciona la integral porque existe un error. Cuando existe un cambio en el valor deseado o "punto de ajuste", la salida del controlador tiene una respuesta inmediata del control proporcional y posteriormente la rampa es la respuesta del control integral.

El número de oscilaciones y la magnitud de los picos dependerá de las ganancias y de la buena sintonización; también el tiempo de establecimiento depende de estos factores.

A.20 CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL

La reducción en la estabilidad relativa como resultado de usar el control integral se puede resolver, como una extensión, mediante el control proporcional integral (PI), figura a.32.

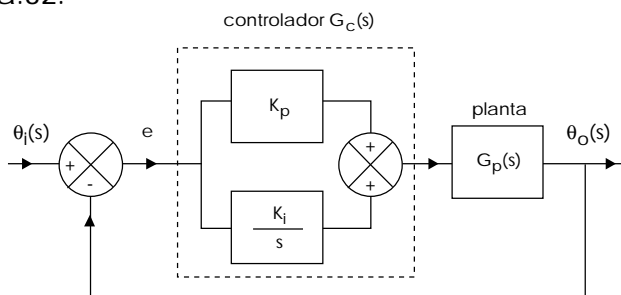


Figura a.32 Control proporcional integral

Para tal combinación la salida del controlador es

$$salida = K_p e + K_i \int_0^t e dt \tag{a.34}$$

La figura a.33 ilustra el tipo de salida del controlador que se presenta con dicho sistema cuando existe una entrada de error tipo escalón.

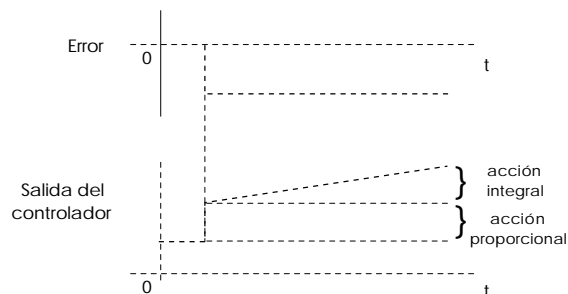


Figura a.33 Control proporcional integral

Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación (a.34) se obtiene la función de transferencia del control PI

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{sK_p + K_i}{s} = \frac{K_p}{s} \left[s + \frac{K_i}{K_p} \right] \quad (\text{a.35})$$

Si se hace $t_i = \frac{K_p}{K_i}$, la constante de tiempo integral, entonces

$$G_c(s) = \frac{K_p}{s} [s + t_i] \quad (\text{a.36})$$

y en consecuencia, la función de transferencia de la trayectoria directa para el sistema de la figura a.32 es

$$G_o(s) = \frac{K_p}{s} \left[s + \frac{1}{t_i} \right] G_p(s) \quad (\text{a.37})$$

De esta manera, mediante el uso del control PI se adicionan un cero en $-(1/t_i)$ y un polo en cero. El factor $1/s$ incrementa el tipo de sistema en 1 y elimina la posibilidad de un error en estado estable para una entrada escalón. Debido a que se introducen un nuevo polo y un nuevo cero, la diferencia entre éstos permanece sin cambios. Así, los ángulos de las asíntotas para los lugares geométricos de las raíces no cambian.

Sin embargo, el punto de intersección de las asíntotas con el eje real se mueve hacia el origen y como consecuencia, se presenta cierta reducción en la estabilidad relativa. Adicionar el polo en 0 y el cero en $s = -(1/t_i)$ da por resultado que el punto de intersección cambia por $+(1/t_i)/(n - m)$ a la derecha y se hace más positivo y cercano al origen. Sin embargo, la reducción en la estabilidad relativa no es tanto como lo es con el control integral solo.

La posición del cero que se introduce está determinada por la ganancia integral, K_i , es decir, ésta se determina mediante la constante de tiempo integral, t_i . La ganancia proporcional, K_p , determina las posiciones de los polos en lazo cerrado.

A.21 CONTROL DERIVATIVO

Con la forma derivativa del controlador, la salida es proporcional a la razón de cambio con el tiempo del error, es decir

$$salida = K_d \frac{de}{dt} \quad (\text{a.38})$$

donde K_d es la ganancia derivativa y tiene unidades de seg. La figura a.34 muestra qué ocurre cuando hay un error de entrada rampa. Con el control derivativo, tan pronto como la señal de error inicia puede haber una salida del

controlador muy grande, ya que ésta es proporcional a la razón de cambio de la señal de error y no a su valor. De este modo puede proporcionar una acción correctiva grande antes de que se presente un error grande. Sin embargo, si el error es constante, no hay acción correctiva. Así el control derivativo es insensible a señales de error constantes o que varían con lentitud y en consecuencia no se usa solo.

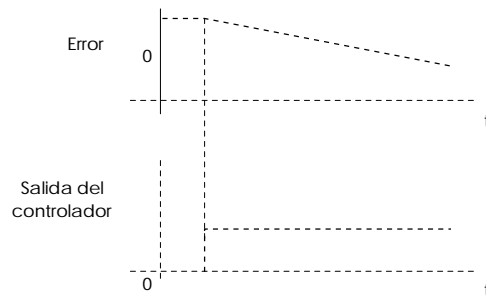


Figura a.34 Control derivativo

Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación a.38 se tiene la función de transferencia de

$$G_c(s) = K_d s \tag{a.39}$$

Por lo tanto, para el sistema en lazo cerrado que se muestra en la figura a.35, la presencia del control derivativo produce una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K_d s G_p(s)}{1 + K_d s G_p(s)} \tag{a.40}$$

Si la planta es de tipo 1 o mayor, entonces la aplicación de la acción derivativa es para cancelar una s en el denominador y así reducir el orden en 1. No obstante, la acción derivativa no se usa sola, sino en conjunto con otra forma de controlador. Cuando se usa esta acción de control se logra que la respuesta sea más rápida.

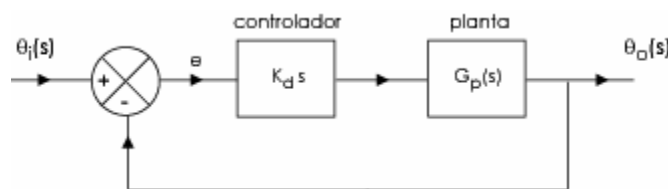


Figura a.35 Control derivativo

Existen dificultades en la implantación de una ley de control derivativa, por lo que en la práctica se obtiene una buena aproximación mediante el uso de un compensador en adelanto. Éste tiene una función de transferencia de la forma

$$G_c(s) = \frac{K(s+z)}{s+p} \quad (\text{a.41})$$

con $p > z$.

A.22 CONTROL PROPORCIONAL DERIVATIVO

Si el control derivativo se usa con el control proporcional, figura a.36, entonces la función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_o(s) = (K_p + K_d s) G_p(s) \quad (\text{a.42})$$

$$G_o(s) = K_d \left(\frac{1}{t_d} + s \right) G_p(s) \quad (\text{a.43})$$

donde $t_d = K_p/K_d$ y se denomina constante de tiempo derivativa. Con esta forma de control se ha introducido un cero en $s = -1/t_d$. Tampoco habrá cambios en el tipo de sistema y por tanto, en los errores en estado estable.

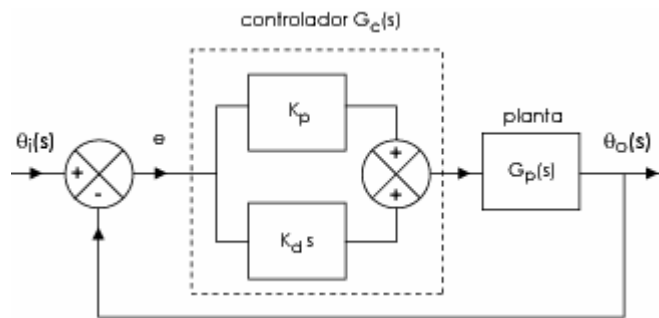


Figura a.36 Control proporcional derivativo

A.23 CONTROL PID

Los controladores PID han sido utilizados en el ámbito industrial durante casi 60 años con gran éxito en la mayoría de los problemas que se presentan en plantas de procesos industriales.

Aún hoy en día con las facilidades y flexibilidad que se obtienen con la implantación de algoritmos de control en forma digital, muchos lazos en el ámbito industrial están siendo controlados con versiones discretas del controlador PID básico.

A.24 CONTROLADORES PID EN TIEMPO CONTINUO

Considérese un sistema de control con la topología mostrada en la figura a.37:

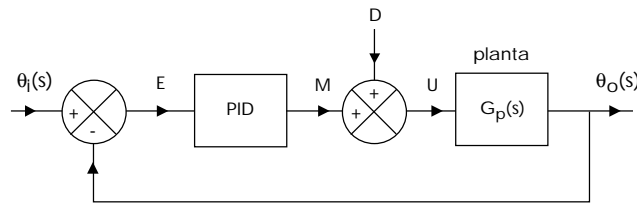


Figura a.37 Estructura general de un controlador PID

donde:

- $q_i(s)$: Es la señal de referencia o punto de ajuste (*Set Point*)
- E : Es la señal de error
- M : Es la señal de salida del controlador
- D : Es la señal de perturbación
- U : Es la señal o variable de control (variable manipulada)
- $q_o(s)$: Es la señal de salida (variable controlada)

La planta o proceso a ser controlada está caracterizada mediante una función de transferencia, que en general puede ser de cualquier orden, siendo en este caso $G_p(s)$. El controlador PID en este caso, puede tener alguna de las estructuras siguientes:

- a) Ideal
- b) Clásica
- c) Parámetros independientes
- d) Industrial

A.25 ESTRUCTURA IDEAL

El controlador proporcional integral derivativo, PID, con un sistema de la forma como lo ilustra la figura a.38, dará una salida para una entrada de error e , de la forma

$$salida = K_p e + K_i \int_0^t e dt + K_d \frac{de}{dt} \quad (a.44)$$

y cuya función de transferencia es

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (a.45)$$

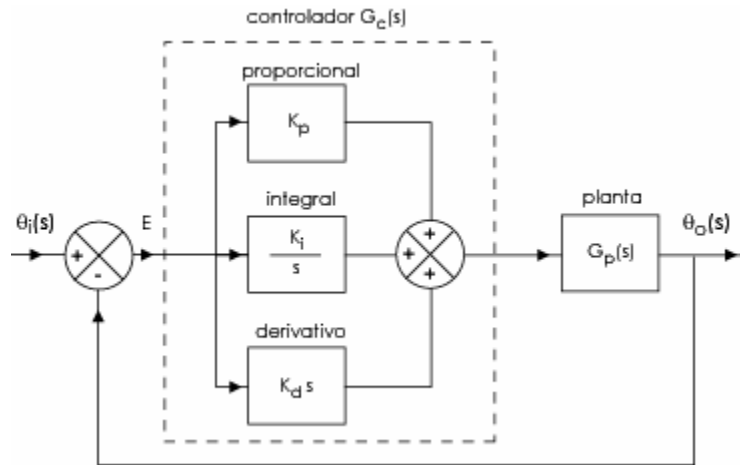


Figura a.38 Control proporcional integral derivativo

Debido a que la constante de tiempo integral, t_i , es K_p/K_i y la constante de tiempo derivativa, t_d , es K_d/K_p , la ecuación (a.79), puede escribirse como

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p s} + \frac{K_d}{K_p} s \right) \quad (a.46)$$

o bien

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{t_i s} + t_d s \right) \quad (a.47)$$

La función de transferencia en lazo abierto para el sistema de la figura a.68 es

$$G_o(s) = G_c(s)G_p(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{t_i s} + t_d s \right) G_p(s) \quad (a.48)$$

De este modo, el controlador PID ha incrementado el número de ceros en 2 y el número de polos en 1. También el factor $1/s$ incrementa el tipo de sistema en 1. En la ecuación anterior se supone que se ha empleado un diferenciador ideal. En la práctica se usa un compensador de adelanto.

Los compensadores se pueden definir como componentes insertos en el sistema de control para aumentar el desempeño del controlador. Cuando el compensador se incluye en la trayectoria directa del lazo de control se dice entonces que éste va a ser un compensador en cascada. Los compensadores se usan para mejorar el desempeño y para moldear al lugar geométrico de las raíces. Las dos formas más comunes de compensadores en cascada tienen la función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{K(s+z)}{s+p} \quad (\text{a.49})$$

cuando $z > p$ se conoce como compensador de atraso en cascada, y cuando $z < p$, como compensador de adelanto en cascada.

Un compensador de atraso introduce el polo en lazo abierto más cercano al origen que el cero, mientras que un compensador de adelanto en cascada introduce el cero más cercano al origen que el polo.

A.26 ESTRUCTURA CLÁSICA

La estructura clásica está caracterizada mediante la relación entrada-salida:

$$M(s) = K_p \left[1 + \frac{1/t_i}{s} + T_d s \right] \left[\frac{1+t_d s}{1+t_a s} \right] E(s) \quad (\text{a.50})$$

donde:

K_p : Es la constante del modo proporcional

t_i : Es el tiempo del modo integral

t_d : Es el tiempo del modo derivativo

t_a : Es la constante de tiempo del filtro y está definida de la forma:

$$t_a = \frac{t_d}{N} \quad (\text{a.51})$$

y con $3 \leq N \leq 20$. Normalmente se utiliza el valor de $N = 10$.

El diagrama de bloques queda en este caso como se observa en la figura a.39.

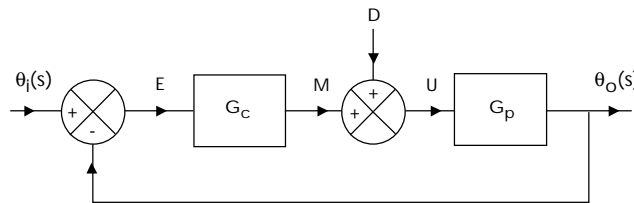


Figura a.39

donde:

$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1/t_i}{s} \right] \left[\frac{1+t_d s}{1+t_a s} \right] \quad (\text{a.52})$$

A.27 ESTRUCTURA DE PARÁMETROS INDEPENDIENTES

La estructura de parámetros independientes queda definida mediante la ecuación:

$$M(s) = K_p \left[1 + \frac{1/t_i}{s} \right] E(s) - \left[\frac{t_d s}{t_a s + 1} \right] q_o(s) \quad (a.53)$$

donde:

K_p : Es la constante del modo proporcional

t_i : Es el tiempo del modo integral

t_d : Es el tiempo del modo derivativo

t_a : Es la constante de tiempo del filtro

El diagrama de bloques queda en este caso como se muestra en la figura a.40.

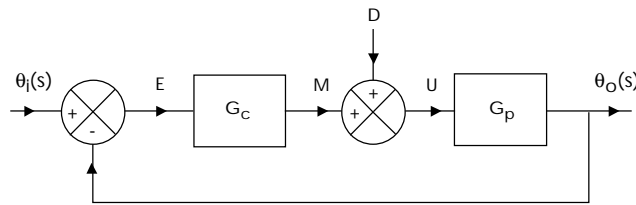


Figura a.40

donde:

$$G_{c_1}(s) = K_p \left[1 + \frac{1/t_i}{s} \right] \quad (a.55)$$

y

$$G_{c_2}(s) = \frac{t_d s}{t_a s + 1} \quad (a.56)$$

A.28 ESTRUCTURA INDUSTRIAL

La estructura industrial queda definida a través de la relación entrada-salida:

$$M(s) = K_p \left[1 + \frac{1/t_i}{s} \right] \left[q_i(s) - \left[\frac{t_d s + 1}{t_a s + 1} \right] Y(s) \right] \quad (a.57)$$

donde:

K_p : Es la constante del modo proporcional

t_i : Es el tiempo del modo integral

t_d : Es el tiempo del modo derivativo

t_a : Es la constante de tiempo del filtro y está definida de la forma:

$$t_a = \frac{t_d}{N} \quad (\text{a.58})$$

y con $3 \leq N \leq 20$.

Empleando esta estructura de controlador el diagrama de bloques del sistema se muestra en la figura a.41.

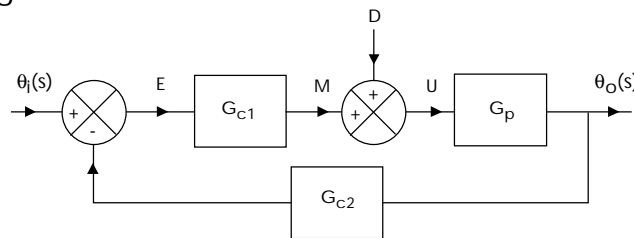


Figura a.41

donde:

$$G_{c_1}(s) = K_p \left[1 + \frac{1/t_i}{s} \right] \quad (\text{a.59})$$

y

$$G_{c_2}(s) = \frac{t_d s + 1}{t_a s + 1} \quad (\text{a.60})$$

A.29 MÉTODOS DE SINTONIZACIÓN

El proceso de sintonización de controladores, consiste en ajustar los parámetros del controlador para producir una respuesta en lazo cerrado deseada. La sintonización del lazo de control es análoga al procedimiento que se sigue al afinar la máquina de un automóvil o al de ajuste (sintonización) de una televisión. La sintonización de un controlador proporcional integral derivativo (PID o controlador de tres modos), presenta algunas dificultades puesto que son tres los parámetros que se deben ajustar; la ganancia (K_p), el tiempo integral (t_i) y el tiempo derivativo (t_d). El ajuste de los parámetros del controlador se puede llevar a cabo para satisfacer un juego de especificaciones de diseño, éste es quizá uno de los procedimientos que mayor dificultad, puesto que son tres los parámetros a ajustar y necesariamente sería un procedimiento de prueba y error. Otra forma alternativa de hacerlo sería mediante la técnica de contornos de las raíces, que

es la misma del Lugar Geométrico de las Raíces pero con variación múltiple de parámetros.

Por otra parte, existen algunos procedimientos estándar que están basados en criterios para minimizar la función de error de varias maneras distintas. Es necesario mencionar que los resultados que se obtienen al aplicar estos procedimientos, no son los parámetros óptimos, sin embargo, dan una indicación de los parámetros iniciales y a partir de éstos es necesario hacer un reajuste de los mismos en caso de no obtener la respuesta de lazo cerrado deseada.

A.30 MÉTODO DE OSCILACIONES SOSTENIDAS (Ziegler-Nichols 1942)

En este método los parámetros del controlador se calculan a partir de las características dinámicas del proceso a controlar. Estas características son representadas por la "ganancia límite (de un controlador proporcional) y el período de oscilación, esto es, el sistema (proceso) se realimenta con un controlador proporcional, de acuerdo a la topología que se presenta en la figura a.42.

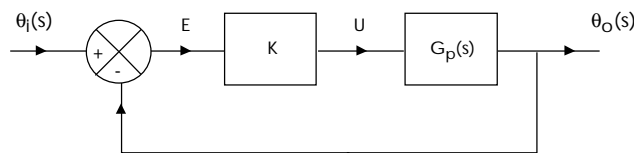


Figura a.42

La ganancia del controlador proporcional se varía (incrementa) hasta que el sistema realimentado presenta oscilaciones sostenidas y se evalúa el período de oscilación, es decir, la respuesta escalón de lazo cerrado es de la forma que se muestra en la figura a.43.

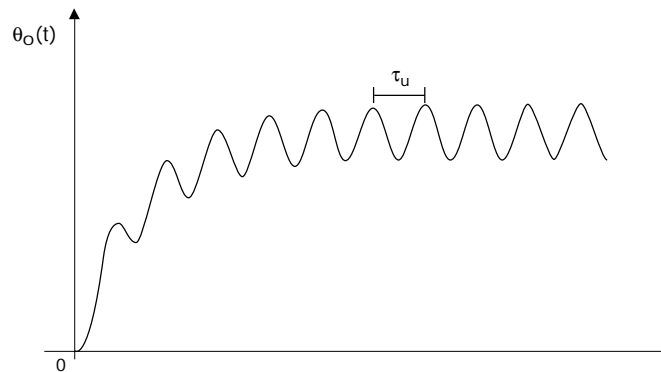


Figura a.43

donde, las características dinámicas del proceso son:

- K_u : Es el valor para el cual el sistema realimentado presenta oscilaciones sostenidas.
- t_u : Es el período de oscilación de la señal de salida del sistema en segundos.

Las ecuaciones de sintonización son en este caso:

Tipo de controlador	K_p	t_i	t_d
P	$\frac{K_u}{2}$	-	-
PI	$\frac{K_u}{2.2}$	$\frac{t_u}{1.2}$	-
PID	$\frac{K_u}{1.7}$	$\frac{t_u}{2}$	$\frac{t_u}{8}$

A.31 MÉTODO DE OSCILACIONES AMORTIGUADAS (Harriot 1957)

En muchos casos no es posible determinar las características dinámicas del proceso, requeridas por el método de oscilaciones sostenidas, debido a la naturaleza del proceso a controlar. Para resolver tal situación, se propone un segundo método que es el de oscilaciones amortiguadas. Este método consiste en realimentar el sistema a controlar con un controlador proporcional, empleando la configuración que se muestra en la figura a.44.

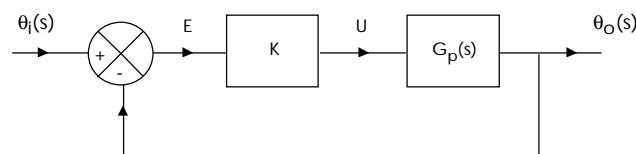


Figura a.44

La ganancia del controlador proporcional se varía hasta que la respuesta escalón del sistema realimentado tiene la forma mostrada en la figura a.45.

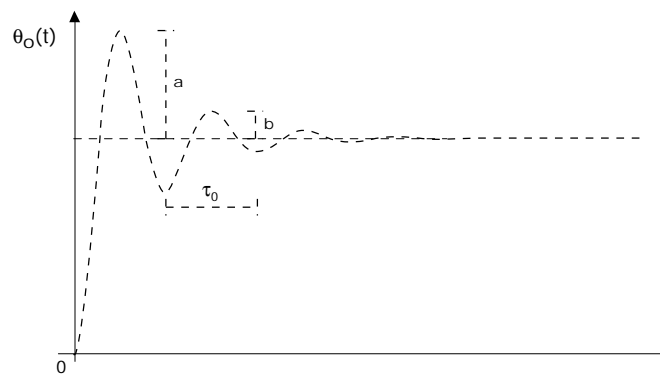


Figura a.45

La relación entre el primer y segundo sobrepaso debe ser igual a 0.25, esto es:

$$\frac{b}{a} = 0.25$$

Esta condición se logra cuando el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes es de 0.2176. En este caso, el proceso queda caracterizado desde el punto de vista dinámico mediante:

- K_p : Es el valor de K para el cual la respuesta escalón del sistema realimentado presenta una relación entre el segundo y primer sobrepaso de 0.25.
- t_o : Es el periodo de oscilación de la respuesta escalón del sistema realimentado para las condiciones especificadas.

Las ecuaciones de sintonización son en este caso:

Tipo de Controlador	K_p	t_i	t_d
P	K_p	-	-
PI	K_p	t_o	-
PID	K_p	$\frac{t_o}{1.5}$	$\frac{t_o}{6}$

Referencias

Referencias

REFERENCIAS.

- [1] Bolton, William, Ingeniería de control, 2a ed., México, Alfaomega, 2001, 397 p.
- [2] Kulkarni, Manohar, Hong Feng, Energy optimal control of residential space conditioning system based on sensible heat transfer modeling, Building and Environment, 39 (2004), 31 – 38.
- [3] Palomo del Barrio, Elena, Lefebvre, Gilles, Behar, Philippe, Using model size reduction techniques for thermal control applications in buildings, Building and Environment, 33 (2000), 1 – 14.
- [4] Swanson, Theodore, Birur, Gajanana, NASA thermal control technologies for robotic spacecraft, Applied Thermal Engineering, 23 (2003), 1055 – 1065.
- [5] Koury R.N.N., Machado L., Ismael, K.A.R., Numerical simulation of a variable speed refrigeration system, International Journal of refrigeration, 24(2001) 192-200.
- [6] Radcenco V., Vargas J.V.C., Bejan A., Lim J.S., Two design aspects of defrosting refrigerators, International Journal of Refrigeration, Vol 18, No. 2, pp 76-86, 1995.
- [7] Vargas J.V.C., Bejan A., Lim J.S., When to defrost a refrigerator, and when to remove the scale from the heat exchanger of a power plant, International Journal of Mass Transfer, Vol 37, No. 3, pp 523-532, 1994.
- [8] Lacoa, Ulises, Sen, Mihir, Yang Kwang-Tzu, Temperature control in two dimensional air-filled cavity, ASME, 35th National Heat Transfer Conference, California, 2001.
- [9] Sen, Mihir, Principles of thermal control, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, 2004.
- [10] Sorour Alotaibi, Sen, Mihir, Yang Kwang-Tzu, Thermal control of heat exchangers, ASME, 35th National Heat Transfer Conference, California, 2001.
- [11] Sen, Mihir, A review of principles and applications of thermal control, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, 2003.
- [12] R. Warren Marsh, C. Thomas Olivo, Principios de la refrigeración, 2a ed., Diana, 1994, 572p.
- [13] Ernest Tricom, ABC del aire acondicionado, Alfaomega-Marcomo, 1996, 144p.

- [14] Cengel, Yunus A., Michael A. Boles, Termodinámica, México, McGraw-Hill, 1996.
- [15] Wark, Kenneth, Termodinámica, México, Interamericana McGraw-Hill, 1991, 922p.
- [16] Rodríguez Ramírez Francisco, Apuntes internos de control, Departamento de Ingeniería de Control, División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería UNAM, 2005.
- [17] K. J. Åström & T.H. Hägglund, New tuning methods for PID controllers. Proceedings of the 3rd European Control Conference, p. 2456-62.
- [18] Bolton, William, Mecatrónica: sistemas de control electrónico en ingeniería mecánica y eléctrica, 2ª ed., México, Alfaomega, 2001, 542 p.
- [19] Larsen, Lars S., Thybo, Claus, Stoustrup Jakob, Control methods utilizing energy optimizing schemes in refrigeration system, Central RD – Refrigeration and Air Conditioning, Danfoss A/S and Aalborg University: Department of Control Engineering, Denmark.
- [20] Payne, V., O'Neal, D.L., Defrost cycle performance for an air-source heat pump with a scroll and reciprocating compressor, International Journal of Refrigeration, Vol 18, No. 2, pp 107-112, 1995.
- [21] Catalogo de productos LG para aire acondicionado, 2005.
- [22] Incropera, Frank P., DeWitt, David, Fundamentos de transferencia de calor, 4a ed., Prentice Hall, México, 1999, 886p.
- [23] Burghardt, M. David, Ingeniería termodinámica, México, Harla, 1984, 558 p.
- [24] Dorf, Richard C., Sistemas modernos de control, México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989, 568 p.
- [25] Moran, Michael J., Fundamentos de termodinámica técnica, 2a ed., Barcelona, Reverte, 1994, Tomo I y II.
- [26] Ogata, Katsuhiko, Ingeniería de control moderna, 4a ed., Madrid, Pearson – Prentice hall, 2003, 984 p.