



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS; CONDUCCIÓN
DE CUERPO RÍGIDO PARA TRES, CUATRO Y CINCO PUNTOS DE PRECISIÓN
USANDO LA ROTACIÓN VARIANTE DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
INGENIERÍA (ÁREA MECÁNICA)

PRESENTA:

ING. DANELIA HERNÁNDEZ SUÁREZ

ASESOR: M. I. EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ

COASESOR: DR. LUIS ALFONSO REYES ÁVILA



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F., 2006

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Luis Alejandro Ferrer Argote

Secretario: TM.I. Leopoldo Adrián González González

Vocal: M.I. Eusebio Jiménez López

1er. Suplente: M.I. Francisco Cuenca Jiménez

2do. Suplente: M.I. Javier Ochoa Estrella

Lugar donde se realizó la tesis:

Ciudad Obregón, Sonora

TUTOR DE TESIS:

M.I. Eusebio Jiménez López

FIRMA

Agradecimientos

Muy especialmente a Dios Todopoderoso por guiar mis pasos, darme la sabiduría, la salud y la perseverancia para lograr mis metas.

A mi Madre a quien debo lo que soy, por ser el pilar de mi vida, por sus sabios consejos y su constante espíritu de fé inquebrantable con el que me ha transmitido su apoyo moral y espiritual para seguir adelante.

A mis hermanos Verónica, Manuel y Lorena por la unión que nos hace fuertes, porque nunca me han dejado sola y me han acompañado en todo momento como una gran familia.

A mi esposo Jorge, con amor, por su apoyo incondicional en el transcurso de mis estudios y en todo momento, el cual fue fundamental para la culminación de mis estudios.

A mi tutor de tesis, M.I. Eusebio Jiménez López, por su dedicación, preocupación y acertados aportes para que iniciara y concluyera con éxito este trabajo de tesis.

A mi coasesor Dr. Luís Alfonso Reyes Ávila, por sus valioso trabajo de investigación, sobre el cual se verso este trabajo de tesis.

A los miembros de mi comité revisor de tesis: Dr. Luis Ferrer Argote, M.I. Leopoldo González González, M.I. Francisco Cuenca Jiménez, M.I. Javier Ochoa Estrella por su valiosa colaboración en mi proceso de enseñanza, por sus comentarios y sugerencias.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto Tecnológico Superior de Cajeme por darme la oportunidad de obtener esta maestría.

CONTENIDO

Agradecimientos	3
Contenido	4
Lista de Figuras	7
Lista de Tablas	8
Prologo	9
Resumen	11
INTRODUCCION	
I.1 Mecanismos y tipos de sintesis.....	12
I.2 Metodos de analisis y sintesis.....	13
I.3 Conceptos basicos de mecanismos.....	15
I.3.1 Mecatronica.....	15
I.4 Mecanica.....	16
I.5 Movimiento plano de un cuerpo rigido.....	18
I.6 Mecanismos y Robots.....	19
I.7 Componentes de un mecanismo.....	22
I.7.1 Grados de libertad.....	26
I.8 Modelo de Sintesis para conduccion de cuerpo rigido usando la rotacion usual.....	28
I.9 Resumen del capitulado.....	29
CAPITULO I DEFINICION DEL PROBLEMA Y RESTRICCIONES	
1.1 Definicion del problema y restricciones.....	30
1.2 Hipotesis y premisas.....	32
CAPÍTULO 2 EL MARCO TEORICO Y EL METODO DE MODELACION	
2.1 El algebra de los numeros complejos.....	33
2.2 Metodo de modelacion.....	34
CAPÍTULO 3 MODELACION DEL PROBLEMA DE SINTESIS PARA CINCO PUNTOS DE PRECISION	
3.1 Definicion del problema y restricciones.....	36

3.2 El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido cinco puntos de precisión.....	37
3.3 Configuraciones del mecanismo.....	39
3.4 Modelo de configuración en términos de la teoría de conjuntos.....	40
3.5 Vectores de posición.....	41
3.6 Ecuaciones de lazo.....	42
3.7 Sistemas de referencia locales.....	43
3.8 Ecuaciones de lazo en términos de los sistemas locales.....	46
3.9 Sistema inercial y rotaciones.....	47
3.10 Ecuaciones de lazo, ecuaciones de norma y relaciones geométricas.....	49
3.11 Sistema de ecuaciones y formulación del problema de síntesis.....	53
3.11.1 Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cinco puntos de precisión).....	55
3.12 Algunas consideraciones sobre la solución del problema.....	58
 CAPÍTULO 4 MODELACION DEL PROBLEMA DE SÍNTESIS PARA CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN	
4.1 Definición del problema y restricciones.....	59
4.2 El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido cinco puntos de precisión.....	60
4.3 Configuraciones del mecanismo.....	62
4.4 Modelo de configuración en términos de la teoría de conjuntos.....	63
4.5 Vectores de posición.....	64
4.6 Ecuaciones de lazo.....	65
4.7 Sistemas de referencia locales.....	66
4.8 Ecuaciones de lazo en términos de los sistemas locales.....	68
4.9 Sistema inercial y rotaciones.....	69
4.10 Ecuaciones de lazo, ecuaciones de norma y relaciones geométricas.....	71
4.11 Sistema de ecuaciones y formulación del problema de síntesis.....	74
4.11.1 Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cinco puntos de precisión).....	76
4.12 Algunas consideraciones sobre la solución del problema.....	78

CAPÍTULO 5	MODELACION DEL PROBLEMA DE SINTESIS PARA TRES PUNTOS DE PRECISION	
5.1	Definicion del problema y restricciones.....	79
5.2	El problema de sintesis para conduccion de cuerpo rigido cinco puntos de precision.....	80
5.3	Configuraciones del mecanismo.....	82
5.4	Modelo de configuracion en terminos de la teoria de conjuntos.....	83
5.5	Vectores de posicion.....	84
5.6	Ecuaciones de lazo.....	85
5.7	Sistemas de referencia locales.....	86
5.8	Ecuaciones de lazo en terminos de los sistemas locales.....	88
5.9	Sistema inercial y rotaciones.....	89
5.10	Ecuaciones de lazo, ecuaciones de norma y relaciones geometricas.....	90
5.11	Sistema de ecuaciones y formulacion del problema de sintesis.....	93
5.11.1	Planteamiento del problema de sintesis para conduccion de cuerpo rígido (cinco puntos de precision).....	95
5.12	Algunas consideraciones sobre la solucion del problema.....	97
	CONCLUSIONES	98
	APÉNDICE A	
A.1	Otra operacion binaria multiplicativa.....	100
A.2	Otra parametrizacion de rotaciones.....	105
	APENDICE B	
B.1	Codigo del Programa en Mathematica V4.....	111
	REFERENCIAS	114

LISTA DE FIGURAS

Figura I.1	Descripcion del sistema de la mecatronica.....	16
Figura I. 2	Esquema del sistema de la Mecanica.....	17
Figura I.3	Movimientos de un cuerpo rigido: a) Rotacion, b) Traslacion, c) Movimiento plano general.....	18
Figura I.4.	Caracteristicas antropomorficas de un robot.....	19
Figura I.5	Esquema de un manipulador.....	20
Figura I.6	Esquema de un mecanismo de cuatro barras.....	21
Figura I.7	Mecanismos de seis barras.....	21
Figura I.8	Tipos de eslabones en el plano	22
Figura I.9	Cadena cinematica: a) Abierta, b) Cerrada y c) Compuesta.....	23
Figura I.10	Grados de libertad de un cuerpo rigido en el plano.....	26
Figura I.11	Grados de libertad de un cuerpo rigido en el espacio.....	26
Figura I.12	a) Par de Rotacion, b) Par Prismatico, c) Par Superior.....	27
Figura I.13	Mecanismo de 3 Barras.....	27
Figura I.14	Mecanismo de 4 Barras.....	27
Figura I.15	Mecanismo de 5 Barras.....	28
Figura 1.1	Caracterizacion del problema.....	31
Figura 3.1	Caracterizacion del problema.....	38
Figura 3.2	Configuraciones del mecanismo.....	39
Figura 3.3	Vectores de posicion.....	41
Figura 3.4	Sistemas locales.....	44
Figura 3.5	Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos.....	54
Figura 4.1	Caracterizacion del problema.....	61
Figura 4.2	Configuraciones del mecanismo.....	62
Figura 4.3	Vectores de posicion.....	64
Figura 4.4	Sistemas locales.....	67
Figura 4.5	Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos.....	75
Figura 5.1	Caracterizacion del problema.....	81
Figura 5.2	Configuraciones del mecanismo.....	82
Figura 5.3	Vectores de posicion.....	84
Figura 5.4	Sistemas locales.....	87
Figura 5.5	Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos.....	94

LISTA DE TABLAS

Tabla I.1	Pares o juntas inferiores y superiores en un mecanismo.....	25
-----------	---	----

PRÓLOGO

Este trabajo de tesis tiene el propósito de generar conocimiento escrito para las futuras generaciones de la carrera de Mecánica y áreas afines, interesadas en la modelación, programación y simulación cinemática de robots, máquinas y mecanismos.

Los mecanismos han sido estudiados desde hace más de 500 años. Sin embargo, en el siglo pasado su estudio fue desarrollado en forma sistemática. Los mecanismos forman parte de un gran número de máquinas. Proporcionan movimientos complejos y se usan para incrementar las fuerzas en diversos dispositivos.

El estudio de los mecanismos puede realizarse de dos maneras: una asociada con el análisis de los movimientos, más propiamente, la cinemática y otra la síntesis, es decir, el diseño de las formas de los mecanismos. Uno de los mecanismos más estudiados, por su sencillez y múltiples aplicaciones, es el compuesto por 4 barras.

Por otro lado, diversas herramientas matemáticas y métodos de modelación han sido desarrollados para el análisis y síntesis de mecanismos. El álgebra compleja en su representación euleriana y los métodos geométricos han sido usados para el modelado de los mecanismos. Actualmente, se han sistematizado y parametrizado las rotaciones finitas de multicuerpos rígidos. Dicha sistematización fue hecha en el contexto del álgebra compleja.

De tal sistematización fue posible caracterizar cuatro transformaciones lineales; dos reflexiones y dos rotaciones. La primera rotación fue caracterizada usando la operación multiplicativa usual definida sobre el conjunto de las parejas ordenadas de números reales en tanto la segunda rotación fue desarrollada por medio de una nueva operación binaria llamada variante.

En este trabajo de tesis se modela el problema de síntesis de un mecanismo de cuatro barras, para este caso, se analizará el problema de conducción de cuerpo rígido con 3, 4 y 5 puntos de precisión. Se usará la rotación variante para construir los modelos.

El objetivo es aplicar el álgebra hipercompleja, en este caso, el álgebra de números complejos, para modelar diversos tipos de mecanismos y de esta forma construir el sistema de aplicaciones derivadas de la sistematización y parametrización de las rotaciones finitas de cuerpos rígidos en el plano.

Este trabajo de tesis pertenece a la línea de investigación: Aplicaciones del álgebra hipercompleja a la modelación cinemática y dinámica de multicuerpos rígidos, recientemente desarrollada por la Universidad La Salle Noroeste y por el Instituto Tecnológico Superior de Cajeme ambas instituciones están integradas a la Red ALFA.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se utiliza una rotación variante definida en el espacio vectorial de números complejos para construir el modelo de síntesis de un mecanismo de 4 barras para el problema de conducción de cuerpo rígido con 3, 4 y 5 puntos de precisión. Los modelos son generados por medio de un método paso a paso el cual consiste de definir sistemas móviles en cada configuración del mecanismo. Se usa los pasos generales del método de la ciencia para sistematizar los modelos[1]. El sistema general de ecuaciones e incógnitas fue de 20×28 para el caso de los tres puntos de precisión, el cual se redujo a un sistema de 12×12 introduciendo restricciones de configuración y área de trabajo. Para el caso de cuatro puntos de precisión, el modelo de síntesis tiene asociado un sistema de ecuaciones e incógnitas de 28×36 , y para el de 5 puntos de precisión, es de 36×42 , los cuales fueron reducidos a sistemas cuadrados de 20×20 y 28×28 respectivamente. La programación del modelo para tres puntos de precisión fue realizada en el paquete de cálculo formal MATHEMATICA V4.

Palabras claves: Modelación, mecanismo, síntesis, números complejos, álgebra hipercompleja

INTRODUCCIÓN

A través del desarrollo del presente trabajo de tesis se intentará cumplir los objetivos siguientes:

- Modelar el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido con tres, cuatro y cinco puntos de precisión usando la rotación variante del álgebra de los números complejos [1].
- Programar y simular el modelo para tres puntos de precisión en Mathematica V4 [2].

I.1 Mecanismos y tipos de síntesis

Un mecanismo es un conjunto de eslabones conectados entre sí para realizar una tarea deseada [3].

Para garantizar el cumplimiento adecuado de la tarea es necesario realizar el análisis y la síntesis cinemática. El análisis cinemático se efectúa a partir de un mecanismo dado, del cual se estudia su geometría, dimensiones, velocidad angular y aceleración angular, con el fin de determinar las características del movimiento del mecanismo. En él se plantean dos problemas fundamentales llamados: “directo” e “inverso”, que determinan la posición y orientación de un punto cinemáticamente admisible del multicuerpo y resuelven la configuración que debe adoptar para una posición y orientación dadas, respectivamente.

La etapa de síntesis es el proceso de diseño de un mecanismo que cumpla con un conjunto de tareas específicas de movimientos [4]. El problema formulado determina las longitudes de los miembros del eslabonamiento [5] y puede ser clasificado en alguna de las siguientes categorías de acuerdo con el tipo de tarea que realiza el mecanismo:

- Conducción de cuerpo rígido o generación de movimiento: que consiste en el diseño de un mecanismo que conduzca un cuerpo, no directamente unido a tierra, por “n” posiciones y orientaciones específicas sucesivas deseadas, a las cuales se les conoce como puntos de precisión o prescritos, partiendo de una cierta configuración llamada inicial u original. Como por ejemplo un contenedor de un cargador frontal, elevadores en camiones de carga y una puerta levadiza de garaje.
- Generación de funciones de una variable o movimiento coordinado de la entrada y salida de la posición, velocidad y/o aceleración. En la que se estudia el método de selección de las longitudes de los eslabones de un multicuerpo, con objeto de que la variable de salida sea una función específica de la variable de entrada. Ejemplo de ello, el mecanismo de una válvula reguladora en los automóviles, donde el mecanismo transforma las rotaciones de las levas a posiciones deseadas de la válvula en los automóviles.
- Generación de trayectoria: se centra en la generación de curvas del acoplador, el cual debe pasar por “n” posiciones sucesivas partiendo de una posición inicial, y cuya trayectoria es de interés en la realización de una cierta función. Por ejemplo la curva con forma de un mecanismo recorridor de películas, un mecanismo recolector agrícola para cosechar cebollas.

I.2 Métodos de análisis y síntesis

Tradicionalmente el análisis y síntesis de un mecanismo se realiza por diversos métodos según las necesidades del proyecto pudiendo representarse los movimientos de los mecanismos mediante diversas herramientas matemáticas tales como:

- El método gráfico desarrollado en los trabajos presentados en [6], [7], [8], en los que el análisis de limita a una o dos posiciones del mecanismo.
- Las coordenadas generalizadas utilizadas en [9] para analizar mecanismos con configuraciones restringidas como los mecanismos de cadena cerrada.
- El método matricial o de matrices homogéneas desarrollado en [10], [11], [12], [13] utilizado tanto para mecanismos planos y espaciales, en los cuales la utilización de los

vectores en los mecanismos es considerablemente más sencillo por medio de transformaciones lineales en arreglos matriciales.

- Recientemente se han parametrizado y sistematizado las rotaciones finitas de multicuerpos rígidos en el plano, dicha sistematización fue realizada en el espacio vectorial de números complejos [1]. Los resultados del desarrollo de tal sistematización fueron aplicados en [4], [5], [14], [15],[16] para modelar los movimientos de robots y para diseñar o realizar la síntesis de mecanismos planos.

Cabe señalar que en el trabajo desarrollado en [1] se han parametrizado y sistematizado las rotaciones y reflexiones de multicuerpos rígidos definidas en el espacio vectorial de números complejos. En dicho trabajo se demostró que existen dos transformaciones lineales que caracterizan dos rotaciones y dos transformaciones lineales que se identifican con dos reflexiones. Una de las transformaciones lineales es llamada rotación variante. Con la operación variante y su transformación conjugada se caracteriza la rotación variante la cual es ortogonal y de determinante positivo.

En base a lo anteriormente descrito y tomando en consideración los trabajos realizados en [1], [15],[16] y [17] (en los que se modela el problema de síntesis de un mecanismo de 4 barras usando el álgebra de los cuaterniones para generar el modelo), se desarrolla el presente trabajo de tesis con propósito de mostrar que las configuraciones obtenidas al modelar el problema de síntesis asociado con un mecanismo de cuatro barras usando la rotación variante son equivalentes a las configuraciones obtenidas en el modelo propuesto en [4]. En dicho trabajo se analizó el problema de síntesis usando la rotación usual definida en el espacio vectorial de los números complejos.

Dado a que en este trabajo de tesis se pretende modelar el problema de síntesis de posicionamiento de un mecanismo de cuatro barras plano usando la rotación variante, se usará el siguiente método para cumplir con este fin [15], [16]

- 1) Definir concretamente el problema específico y todas las condiciones en torno al problema y sus restricciones.
- 2) Asociar por cada punto de precisión un mecanismo de 4 barras.
- 3) Caracterizar el problema por medio de un modelo de la teoría de conjuntos.
- 4) Definir vectores de posición sobre los eslabones de los mecanismos y puntos de precisión.

- 5) Construir ecuaciones de lazo que relacionen los puntos de precisión, los vectores relacionados con los eslabones de los mecanismos y los pivotes.
- 6) Asociar bases locales sobre puntos de articulación de los mecanismos.
- 7) Escribir las ecuaciones de lazo en términos de las bases locales.
- 8) Asociar una base inercial sobre el origen de coordenadas. Representar los cambios de base del sistema inercial sobre cada uno de los sistemas locales en forma secuenciada. Dicha representación se realiza usando transformaciones lineales que caractericen una rotación.
- 9) Representar las ecuaciones de lazo del paso 7) en términos de las rotaciones de la base inercial, las ecuaciones de norma unitaria y las relaciones geométricas de las rotaciones con los elementos del espacio vectorial usado para el modelado.
- 10) Determine el número de ecuaciones e incógnitas del sistema. Si el sistema del paso anterior no es cuadrado, entonces establezca restricciones hasta determinar un modelo cuadrado. Formular el problema de síntesis.

I.3 Conceptos básicos de mecanismos

En esta sección se definirán los conceptos básicos de la cinemática de cuerpos rígidos en dos planos y de los mecanismos, así como algunos conceptos de interés relacionados con la mecatrónica, esto con el propósito de proporcionar un marco de referencia sobre el cual se desarrolla el presente trabajo de tesis.

I.3.1 Mecatrónica

Desde su introducción en la década de los 70's [18], el término Mecatrónica, ("mecha" de mecanismos y "tronics" de electrónica), ha implicado el desarrollo de la industria en el diseño y creación de nuevos productos, procesos o sistemas con la integración de componentes mecánicos y electrónicos controladas por computadoras inteligentes. En consecuencia la definición más aceptable del término es la propuesta por [19]: "Mecatrónica es la combinación sinérgica de la ingeniería mecánica de precisión, de la electrónica, del control automático y de los sistemas para el diseño de productos y procesos".

Un sistema mecatrónico tiene dos componentes principales: Sistema controlador y sistema controlado [20], como se muestra en la figura I.1 . El sistema controlado es el proceso mecánico que está en contacto con el mundo, con todos sus sensores y actuadores. Los rasgos distintivos de un sistema mecatrónico de otros sistemas son los tres sub-sistemas usados por el sistema controlador que son sistemas de percepción, de representación del

conocimiento, planeación y control. El sistema inteligente es normalmente incluido en la planificación y subsistema de control. Aquí, basado en la información recogida por los sensores, los métodos de inteligencia computacional se explotan para planear un curso de acción que permitirá al sistema controlado lograr las tareas dadas [20]

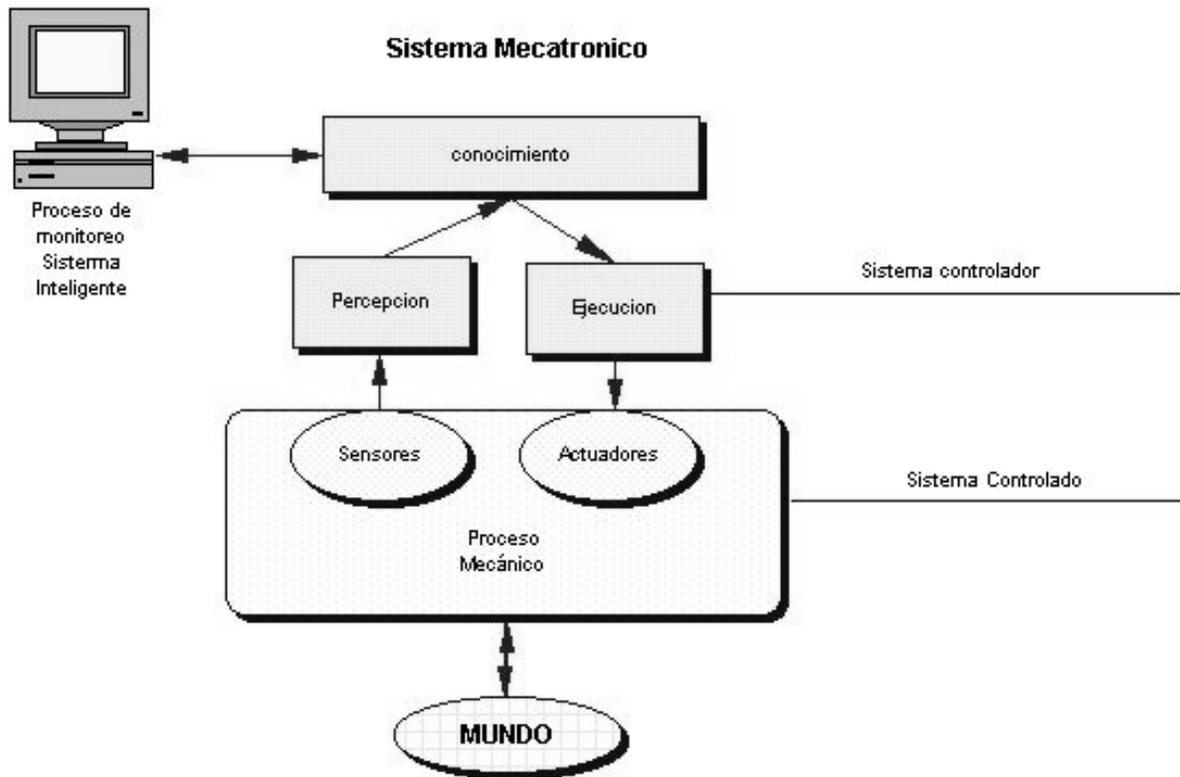


Figura I..1 Descripción del sistema de la mecatrónica

De esta manera al aplicar una filosofía de integración de todos los sistemas descritos en el diseño de productos y sistemas se obtienen ventajas importantes como son mayor flexibilidad, versatilidad, nivel de "inteligencia" de los productos, seguridad y confiabilidad así como un bajo consumo de energía entre otras. Estas ventajas se traducen en un producto con más orientación hacia el usuario y que puede producirse rápidamente a un costo reducido.

I.4 Mecánica

Como ya se describió anteriormente, un sistema mecatrónico está formado por un sistema mecánico, un sistema electrónico y un sistema inteligente. Esta sección se abocará a los sistemas mecánicos en cuanto a su diseño, por lo que en los siguientes párrafos se presentan los conceptos básicos para entender un sistema mecánico partiendo del concepto mismo de la mecánica, cómo se define y está conformado un mecanismo, hasta el diseño

del mismo mediante la síntesis confrontando el método matricial y el método de numero complejos.

La mecánica está definida como aquella ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas [21], la cual se divide en tres áreas, como se muestra en la figura I.2, la mecánica de los cuerpos rígidos, la mecánica de los cuerpos deformables y la mecánica de los fluidos.

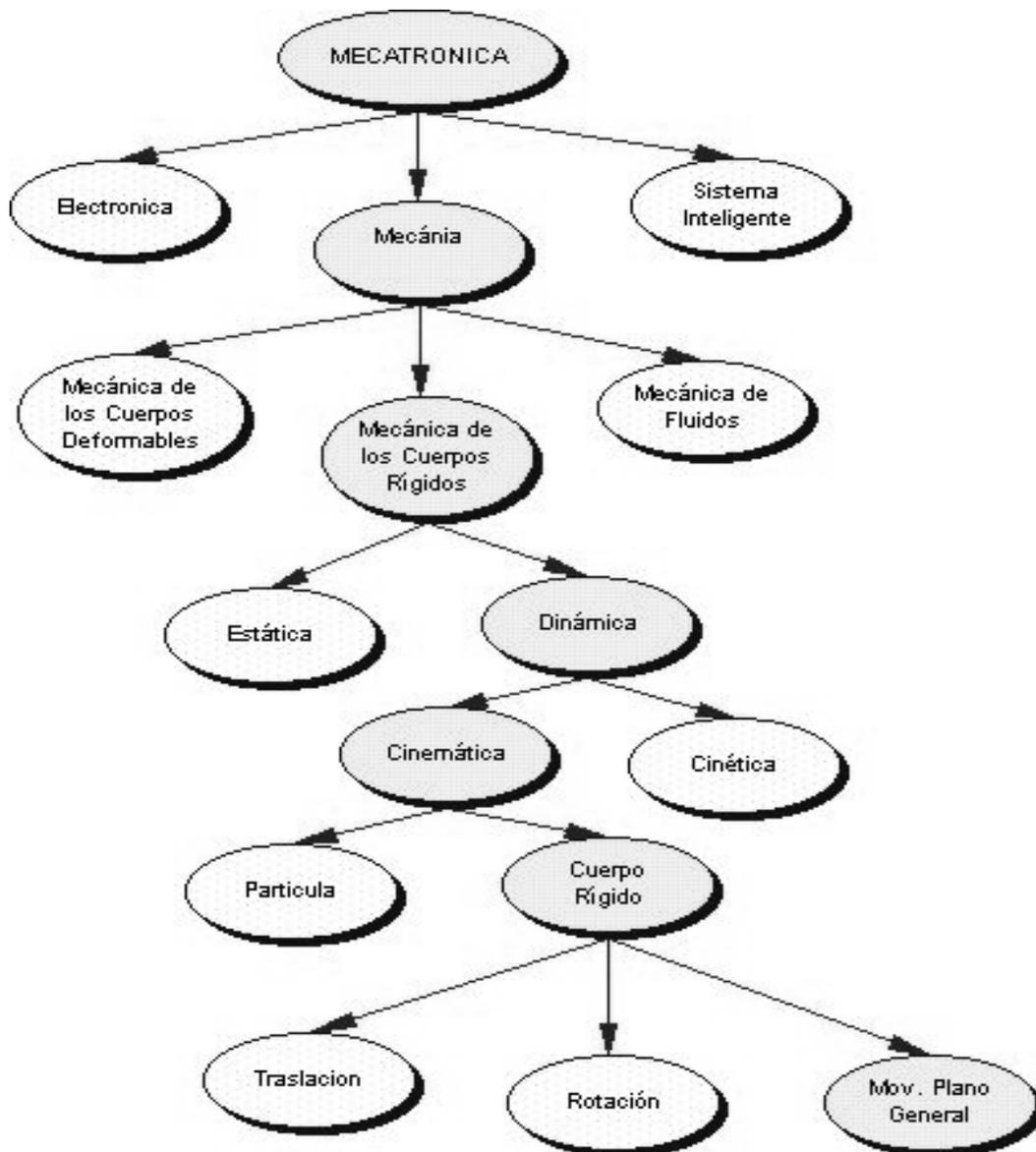


Figura I. 2 Esquema del sistema de la Mecánica

En la mecánica de los cuerpos rígidos se identifican dos caminos: la estática y dinámica; la primera trata del análisis de los sistemas en reposo por lo que el tiempo no es considerado

como un factor determinante y la segunda trata del análisis de los sistemas en movimiento, en los que sus condiciones y parámetros de interés se ven afectados por el tiempo.

La dinámica a su vez se divide en dos áreas: la cinética, que considera los efectos de las fuerzas sobre el movimiento de los cuerpos y la cinemática, que se ocupa solamente de los aspectos geométricos del movimiento externo de los cuerpos sin tomar en consideración las fuerzas que los producen [22].

La teoría de los cuerpos rígidos supone que el volumen de un cuerpo rígido se deforma bajo el efecto de fuerzas externas, pero estas deformaciones son de magnitud despreciable si se comparan con las dimensiones características del sólido, por lo que considera a los cuerpos rígidos como indeformables. En la medición de desplazamientos, velocidades, y aceleraciones, tales deformaciones volumétricas pueden ser omitidas sin introducir errores considerables [17]. Considerando lo anterior se supondrá que la distancia entre dos puntos cualesquiera del cuerpo rígido se mantendrá constante en magnitud durante todo momento, dada su indeformabilidad.

I.5 Movimiento plano de un cuerpo rígido

Es posible someter un cuerpo rígido a tres tipos de movimiento: traslación, rotación alrededor de un eje fijo y movimiento plano general [23], como se muestra en la figura I.3. La traslación ocurre si cualquier segmento lineal del cuerpo permanece paralelo a la dirección original durante el movimiento. Cuando un cuerpo rígido rota en torno a un eje fijo, todas las partículas del cuerpo, excepto aquellas que se encuentran sobre el eje de rotación, se mueven sobre trayectorias circulares. Cuando un cuerpo está sujeto a un movimiento plano general, experimenta una combinación de traslación y rotación, donde la traslación ocurre dentro de un plano de referencia y la rotación, sobre un eje perpendicular a dicho plano [23].

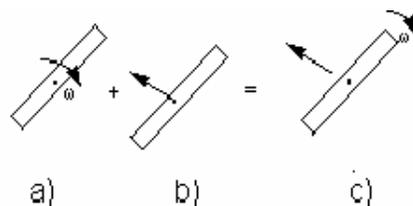


Figura I.3 Movimientos de un cuerpo rígido: a) Rotación, b) Traslación, c) Movimiento plano general. Las posiciones sucesivas de un cuerpo rígido en movimiento describen un “lugar geométrico” comúnmente llamado “trayectoria”, cuya longitud está definida por las diferentes posiciones que el cuerpo ocupa conforme varía el tiempo [17]. El movimiento de

un cuerpo será de tipo espacial, plano o lineal, si se requiere de tres, dos o una coordenada para describir su trayectoria, respectivamente.

I.6 Mecanismos y robots

De acuerdo con [24], un robot es un manipulador automático servo controlado, reprogramable, polivalente, capaz de posicionar y orientar piezas, útiles o dispositivos especiales, siguiendo trayectorias variables reprogramables, para la ejecución de tareas variadas. Así mismo [25], define al robot industrial como una máquina programable, de propósito general, que posee ciertas características antropomórficas, es decir, con características basadas en la figura humana, como se muestra en la figura I.4

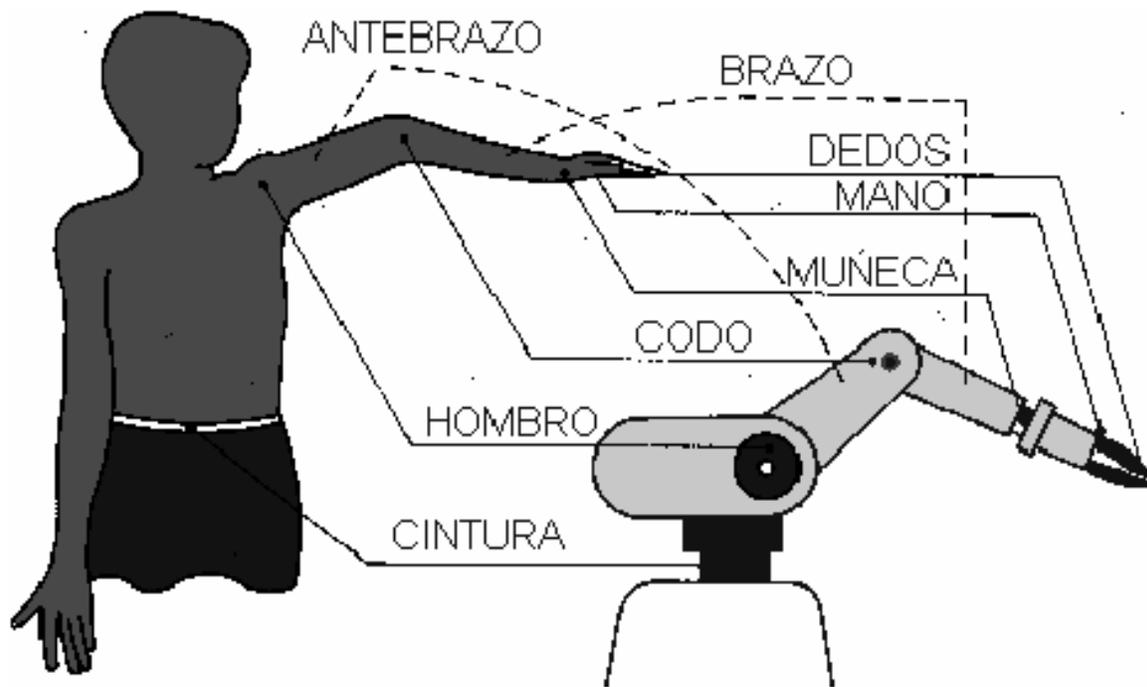


Figura I.4. Características antropomórficas de un robot

Normalmente dicho robot tiene la forma de uno o varios brazos terminados en una muñeca. Su unidad de control incluye un dispositivo de memoria y ocasionalmente de percepción del entorno. El trabajo de este robot es cíclico, pudiéndose adaptar a otra sin cambios permanentes en su material. Su diferencia con las máquinas simples, reside en que éstas diseñadas para realizar tareas simples, y un robot puede ser reprogramado para una variedad de tareas [24].

Por otro lado un manipulador está diseñado para simular brazos humanos y movimiento de manos. Dicho manipulador representa un ejemplo de cadenas cinemáticas abiertas como se muestra en la figura I.5. Mecánicamente, es el componente principal de un robot y está formado por una serie de elementos estructurales sólidos o eslabones unidos mediante [articulaciones](#) que permiten un movimiento relativo entre cada dos eslabones consecutivos.

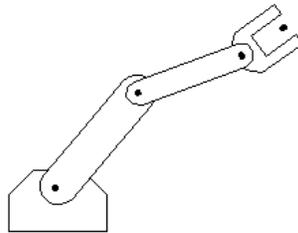


Figura I.5 Esquema de un manipulador

Una máquina es un dispositivo operado mecánica, eléctrica, o electrónicamente para realizar una tarea. Así mismo la máquina se define como una combinación de cuerpos rígidos, cuya conexión permite que sus elementos se muevan con movimientos relativos definidos y transmitan fuerzas con el fin de realizar un trabajo [24].

En cinemática, un mecanismo es un medio para transmitir, controlar, o restringir movimientos relativos. Por otro lado, en cinética se define a un mecanismo como una combinación de cuerpos rígidos o resistentes, formados y conectados para moverse entre sí con movimientos relativos definidos cuyo propósito es el de transferir movimientos y/o fuerzas de una fuente de potencia a una salida [4].

El término mecanismo se aplica también, a la combinación de cuerpos geométricos que constituyen una máquina o parte de una máquina, los cuales transmiten fuerzas, movimientos, y energía de manera predeterminada [3]. Los movimientos que son eléctrica, magnética, y neumáticamente operados se excluyen del concepto de mecanismo.

La diferencia entre la máquina y el mecanismo es que la máquina transforma energía para realizar un trabajo, mientras que el mecanismo no necesariamente realiza esta función. El término maquinaria generalmente significa máquinas y mecanismos.

El mecanismo más utilizado, dada su sencillez, es el de cuatro barras [4]. Dicho mecanismo es el eslabonamiento plano de cadena cerrada más simple que tiene tres miembros móviles (más un miembro fijo) y cuatro juntas rotacionales, como se muestra en la figura I.6.

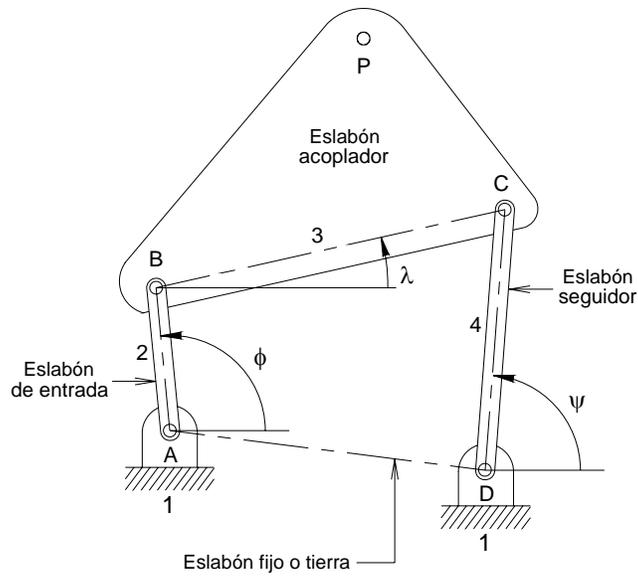


Figura I.6 Esquema de un mecanismo de cuatro barras

Por otro lado, si un eslabonamiento de cuatro barras no proporciona el desempeño requerido para una aplicación particular, usualmente se considera como siguiente alternativa uno de seis eslabonamientos, ver figura I.7

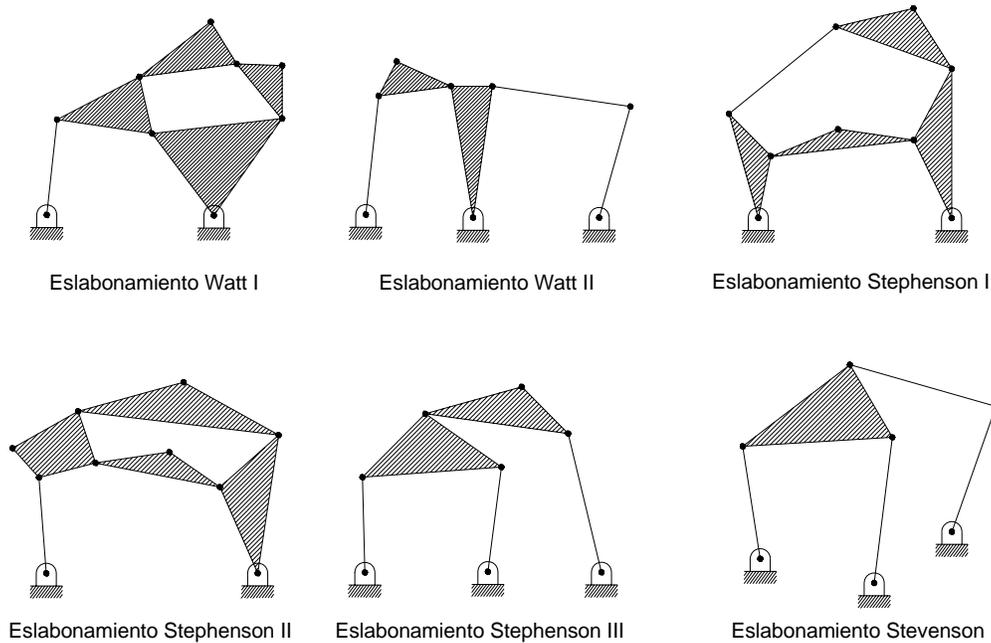


Figura I.7 Mecanismos de seis barras

I.7. Componentes de un mecanismo

Un eslabonamiento es un multicuerpo formado por eslabones o barras generalmente consideradas rígidas, conectadas por juntas como pasadores o juntas prismáticas, las cuales forman cadenas abiertas, cerradas o compuestas [4].

Por otro lado el término eslabón rígido o muchas veces llamado simplemente eslabón, es una idealización utilizada en el estudio de mecanismos que no considera deflexiones ni deformaciones en los miembros de las máquinas [3]. Un eslabón se define como un cuerpo rígido que tiene dos o más elementos conectados a otros cuerpos con el propósito de transmitir fuerzas o movimientos.

En un mecanismo se necesita por lo menos de un eslabón con posición fija a la tierra (eslabón fijo) que determine el movimiento de los demás eslabones durante el movimiento. Como se muestra en la figura I.8, los eslabones se clasifican de acuerdo con el número de nodos o puntos de unión que contienen. El número de nodos le da su nombre al eslabón: Binario = dos nodos, Terciario = tres nodos y así sucesivamente [15]

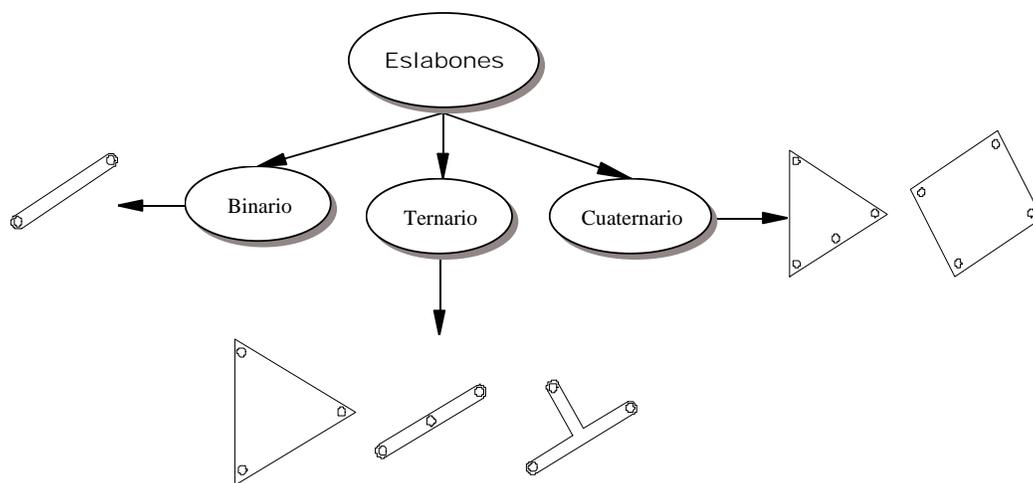


Figura I.8 Tipos de eslabones en el plano

Por otro lado, a la combinación de eslabones y pares (juntas) sin un eslabón fijo se les llama “cadena cinemática”, la cual es un ensamble de eslabones y juntas interconectados (multicuerpo) de modo que proporcionen un movimiento de salida controlado en respuesta a un movimiento de entrada proporcionado [25]. Las cadenas cinemáticas se clasifican en cadenas cerradas, abiertas y compuestas. La figura I.9 muestra dichas cadenas. En la

primera cada eslabón esta conectado a dos o más eslabones formando un lazo cerrado. En el caso de la cadena cinemática abierta cada eslabón se conecta a otro eslabón formando un solo lazo abierto. Por último las cadenas compuestas se forman de eslabones binarios y miembros de otro orden para formar dos o más circuitos cerrados [25].

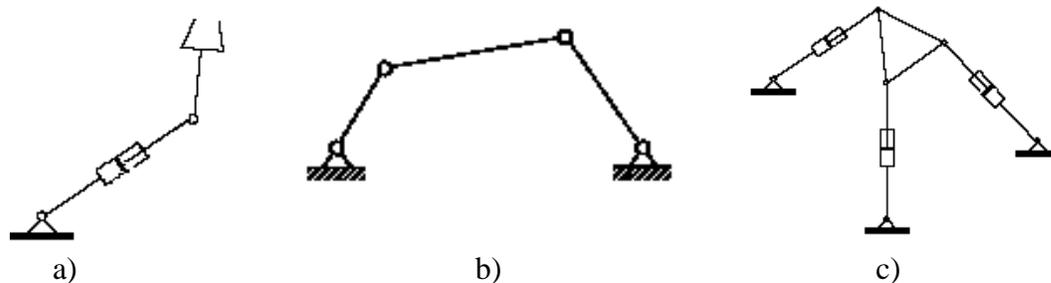


Figura I.9 Cadena cinemática: a) Abierta, b) Cerrada y c) Compuesta

Los eslabones que componen un mecanismo se conectan por medio de juntas o pares cinemáticos, los cuales se definen como la conexión entre dos o más eslabones que permiten algún movimiento potencial entre los eslabones conectados en un mecanismo [3]. Los pares pueden clasificarse respondiendo a diversas características:

- Por el tipo de contacto entre los elementos ya sea de la clase par superior o inferior.
- Por el número de grados de libertad: Rotacional 1 GDL, Prismática o Deslizante 1 GDL.
- Por el tipo de cierre de la junta, que puede ser debida a su forma que permita la unión o el cierre o debida a la aplicación de una fuerza externa que la mantenga en contacto o cierre.
- Por el número de eslabones conectados u orden de la junta que se define como el número de eslabones conectados menos uno.

En un par cinemático superior o de unión media, los elementos acoplados están en contacto por medio de un punto o una recta, como en el caso de los engranajes, discos de levas, guidores [11].

En un par cinemático inferior o de unión completa, los elementos hacen contacto superficial debido a que la geometría de acoplamiento en los “pareados” es idéntica. En un mecanismo planar los pares inferiores se subdividen en pares rotacionales y prismáticos.

En los mecanismos pueden presentarse seis tipos de pares inferiores, como se muestra en la tabla I.1:

Un par rotacional mantiene unidos los ejes de dos cuerpos rígidos. Dos cuerpos rígidos restringidos por un par de rotación tienen un movimiento rotatorio independiente alrededor de su eje común. Por consiguiente, un par rotación elimina cinco grados de libertad en mecanismo espacial. $GDL = 1$.

Un par prismático mantiene dos ejes de dos cuerpos rígidos alineados y no permite ninguna rotación. Dos cuerpos rígidos restringidos por este tipo de par podrán tener un movimiento de traslación independiente a lo largo de un eje. Por consiguiente, un par prismático elimina cinco grados de libertad en mecanismo espacial. $GDL = 1$.

El par helicoidal mantiene dos ejes de dos cuerpos rígidos alineados y permite un movimiento helicoidal (de tornillo). Dos cuerpos rígidos restringidos por un par helicoidal producen un movimiento de traslación a lo largo del eje y un movimiento de rotación correspondiente alrededor del eje. Por consiguiente, un par helicoidal elimina cinco grados de libertad en mecanismo espacial. $GDL=1$

Un par cilíndrico mantiene los ejes de dos cuerpos rígidos alineados. Dos cuerpos rígidos que son parte de este tipo de sistema tendrán un movimiento de traslación independiente a lo largo del eje y un movimiento de rotación alrededor del eje. Por consiguiente, un par cilíndrico elimina cuatro grados de libertad del mecanismo espacial. $GDL= 2$.

Un par esférico se mantiene unido dos centros esféricos. Dos cuerpos rígidos conectados podrán rotar relativamente alrededor de los ejes x , y y z , pero no habrá ninguna traslación a lo largo de cualquiera de estos ejes. Por consiguiente, un par esférico elimina tres grados de libertad en mecanismo espacial. **$GDL = 3$** .

Un par plano mantiene unidas las superficies de dos cuerpos rígidos. Dos cuerpos rígidos conectados por este tipo de par tendrán dos movimientos de traslación independientes en el plano, y un movimiento de rotación alrededor del eje perpendicular al plano. Por consiguiente, un par plano elimina tres grados de libertad en mecanismo espacial. **$GDL = 3$** .

Tipo de junta	Par inferior (I) o par superior (S)	Símbolo	Grados de Libertad	Representación Esquemática	Posible Configuración	Ejemplo Descriptivo
Rotacional	I	R	1 θ			Un pasador fijo que permite solo la rotación
Prismática	I	P	1 x			Una barra recta que solo permite el deslizamiento
Helicoidal	I	H	1 $X \text{ ó } \theta$			Un tornillo impulsor o una barra helicoidal
Cilíndrica	I	C	2 $X \text{ ó } \theta$			Un brazo que permite tanto rotación como deslizamiento
Esférica	I	S	3 θ, ϕ, γ			Una junta esférica que permite rotación en 3 direcciones angulares
Plana	I	P _L	3 x,y, θ			Una Superficie restringida que permite rotación y movimiento paralelo al plano de la superficie
Junta Universal	I	U	2 θ, ϕ			La junta universal Hooke combina 2 pares rotatorios
Engranaje	S	G	2 Rodar y trasladar			Engranajes
Par de Levas	H	*	2 Rodar y trasladar	*		Disco de levas y seguidores

Tabla I.1 Pares o juntas inferiores y superiores en un mecanismo

I.7.1 Grados de libertad

Los grados de libertad (GDL) de un cuerpo rígido se definen como el número de parámetros independientes requeridos para especificar la posición que tiene cada eslabón, relativa a un marco de referencia o a un punto fijo [3]. Así mismo, se definen como el número mínimo de variables que se requiere para especificar de manera única la configuración de un mecanismo [11]. La figura I.10 muestra un cuerpo rígido en un plano. Para determinar el GDL de este cuerpo se debe considerar de cuántas maneras distintas puede moverse la barra. En un plano bidimensional hay 3 GDL, es decir, la barra puede trasladarse a lo largo del eje de “X”, trasladarse a lo largo del eje de “Y” y puede rotarse sobre su centroide [26].

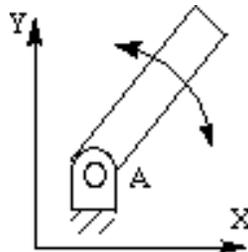


Figura I.10 Grados de libertad de un cuerpo rígido en el plano

Un cuerpo rígido en el espacio como se muestra en la figura I.11 tiene 6 GDL, es decir, tres movimientos transmitidos a lo largo de los ejes X, Y, y Z y tres movimientos rotacionales alrededor de los ejes X, Y, Z respectivamente.

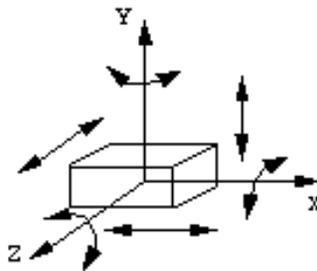


Figura I.11. Grados de libertad de un cuerpo rígido en el espacio

Cualquier cuerpo rígido no restringido tiene seis grados de libertad en el espacio y tres grados de libertad en un plano. Cada junta o par cinemático restringe la movilidad del sistema, es decir, reducen los grados de libertad de un mecanismo. Como en el caso de la figura I.12 que muestra un par de rotación, un par prismático y un par superior, los pares reducen el número de los grados de libertad. Si se tiene un par más inferior (figura I.11 a,b), se reducen los grados de libertad a 2. De igual manera si se tiene un par superior se reducen los grados de libertad a 1.

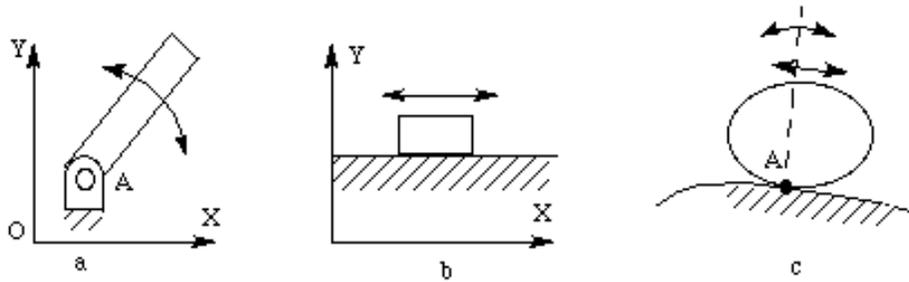


Figura I.12 a) Par de Rotación, b) Par Prismático, c) Par Superior

La influencia de una restricción cinemática en el movimiento de cuerpos rígidos tiene dos aspectos intrínsecos que son los aspectos geométricos y los aspectos físicos. En otras palabras, es posible analizar el movimiento de los cuerpos rígidos restringidos por sus relaciones geométricas o usando la segunda Ley de Newton.

Para encontrar el número de grados de libertad para un mecanismo planar se aplica la “ecuación de Gruebler” [11]:

$$GDL = 3(n - 1) - 2P_1$$

Donde:

GDL = indica los grados de libertad del mecanismo

n = es el número de eslabones

P₁ = es el número de pares inferiores de un grado de libertad

Así, si se desea obtener el número de grados de libertad de los siguientes eslabonamientos se tiene que:

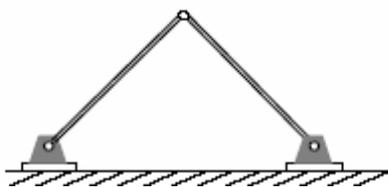


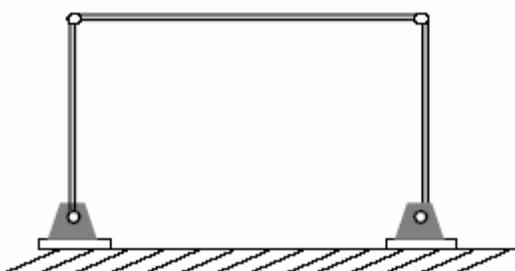
Figura I.13 Mecanismo de 3 Barras

$$n=3 \quad P_1=3$$

$$GDL = 3(n - 1) - 2P_1$$

$$GDL = 3(3 - 1) - 2(3)$$

$$GDL = 0$$

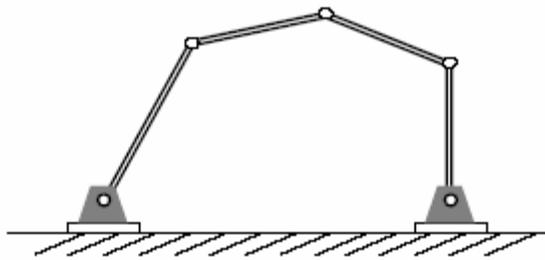


$$n=4 \quad P_1=4$$

$$GDL = 3(n - 1) - 2P_1$$

$$GDL = 3(4 - 1) - 2(4)$$

$$GDL = 1$$



$$n=5 \quad P_1=6$$

$$GDL = 3(n-1) - 2P_1$$

$$GDL = 3(5-1) - 2(6)$$

$$GDL = 0$$

Figura I.15 Mecanismo de 5 Barras

I.8 Modelo de Síntesis para conducción de cuerpo rígido usando la rotación usual

En el trabajo desarrollado en [17], se construyó el modelo de síntesis para conducción de cuerpo rígido para tres y cuatro puntos de precisión de un mecanismo de cuatro barras. Dicho modelo fue construido usando la transformación lineal desarrollada en [1] la cual representa una rotación llamada comúnmente “usual”, el modelo obtenido se caracterizó por un sistema de ecuaciones e incógnitas no cuadrado; esto es, de 28×20 . Para cuadrar el modelo fue necesario introducir restricciones, lo que condujo a un sistema cuadrado de 12 ecuaciones con 12 incógnitas. Los modelos asociados con el problema de síntesis [17] fueron programados y simulados en la plataforma Visual Basic 6.

El objetivo de este trabajo es modelar el mismo mecanismo, o más bien dicho, los problemas de síntesis descritos en [17] usando una rotación caracterizada por otra operación binaria multiplicativa llamada variante [1], con el propósito de mostrar que los modelos obtenidos en dicha rotación son equivalentes a los modelos desarrollados usando la rotación usual y con esto generalizar las aplicaciones de la sistematización del álgebra de números complejos desarrollada en [17].

Cabe señalar que existen diferencias entre las propiedades del sistema que caracteriza la rotación usual y el sistema que caracteriza la rotación variante. Sin embargo las transformaciones lineales de ambas rotaciones son equivalentes, puesto que son ortogonales y de determinante positivo.

Por ello, estrictamente hablando, ambos sistemas no son iguales en términos de sus propiedades, lo que implica una clara diferenciación entre las aplicaciones del álgebra usando la rotación usual y la rotación variante. De ello se pretende concluir, al final de este

trabajo que la aplicación de la rotación variante al modelado del problema de síntesis es una nueva herramienta matemática que formará parte de las diferentes herramientas usadas para el análisis y diseño de multicuerpos rígidos en el plano.

I.9 Resumen del capitulado

En este trabajo de tesis se modelarán los problemas de síntesis para conducción de cuerpo rígido de tres, cuatro y cinco puntos de precisión asociados con un mecanismo de cuatro barras. Para tales propósitos se usará la rotación variante desarrollada en [16] y un método de modelación descrito en [15]. Se programará en la plataforma de cálculo formal Mathematica V4 [2] únicamente el modelo para tres de precisión, dejando para un futuro trabajo como el presente la programación de los modelos de cuatro y cinco puntos de precisión.

Este trabajo de tesis está compuesto por cinco capítulos los cuales se resumen a continuación:

En el capítulo 1 se define el problema general de síntesis y sus casos particulares.

En el capítulo 2 se presentan el marco teórico de la rotación variante y el método de modelación desarrollado en [15],[16].

En el capítulo 3 se construye el modelo de síntesis para cinco puntos de precisión.

En el capítulo 4 se construye el modelo de síntesis para cuatro puntos de precisión.

En el capítulo 5 se construye el modelo de síntesis para tres puntos de precisión.

Finalmente se presentan las conclusiones derivadas del trabajo y dos apéndices, el primero muestra el marco teórico de la rotación variante y el segundo describe la programación del modelo para tres puntos de precisión.

CAPÍTULO 1

Definición del problema y restricciones

Introducción. En este capítulo se define el problema por solucionar en esta tesis, así como sus restricciones fundamentales. Es importante mencionar que se lleva una gran ventaja en cualesquiera investigación si se define correctamente el problema. En este capítulo serán usados los pasos generales del Método Científico con el propósito de sistematizar el problema de síntesis de un mecanismo de 4 barras. De acuerdo con [27], los pasos generales de dicho método son:

- 1) Motivo de la investigación.
- 2) Definición del problema.
- 3) Restricciones.
- 4) Hipótesis y premisas.
- 5) Proceso de sistematización o desarrollo del problema.
- 6) Solución.
- 7) Pruebas de la solución.

En este capítulo serán aplicados los pasos del 1) al 4).

1.1 Definición del problema y restricciones

Considere ahora el siguiente problema:

Se requiere diseñar un dispositivo para transportar un cuerpo de una posición inicial a una posición final.

Las restricciones del problema son:

- 1) El dispositivo de transporte debe ser un mecanismo de 4 barras (R_1).
- 2) El diseño del dispositivo debe ser dimensional (R_2).
- 3) El cuerpo (caja) por transportar es rígido (R_3).
- 4) El cuerpo debe pasar por cinco puntos intermedios antes de alcanzar la posición final (R_4).

- 5) El cuerpo debe pasar, en cada punto, con una orientación preestablecida y conocida (R_5).
- 6) Las coordenadas de los puntos de anclaje del mecanismo (pivotes) son fijas y conocidas (R_6).
- 7) El movimiento del mecanismo está restringido por un área de trabajo fija y conocida (R_7).
- 8) Las coordenadas de los puntos de precisión son conocidas (R_8).
- 9) La configuración del eslabón acoplador es arbitraria (R_9).

Descripción del problema:

“Una banda (B_1) transporta una caja “C” del punto “a” al punto “b” como se muestra en la figura 1.1. La caja deberá localizarse pasado un tiempo en el punto “g” situado en la banda (B_2) pasando por tres puntos intermedios llamados “d”, “e” y “f”. Se asume que el transporte de “C” de banda a banda será por medio de un mecanismo plano de cuatro barras. Las orientaciones de la caja en cada punto de precisión son $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ y ψ_5 como se muestra en la figura 1.1. La configuración del mecanismo está restringida a un área de trabajo fija y conocida”.

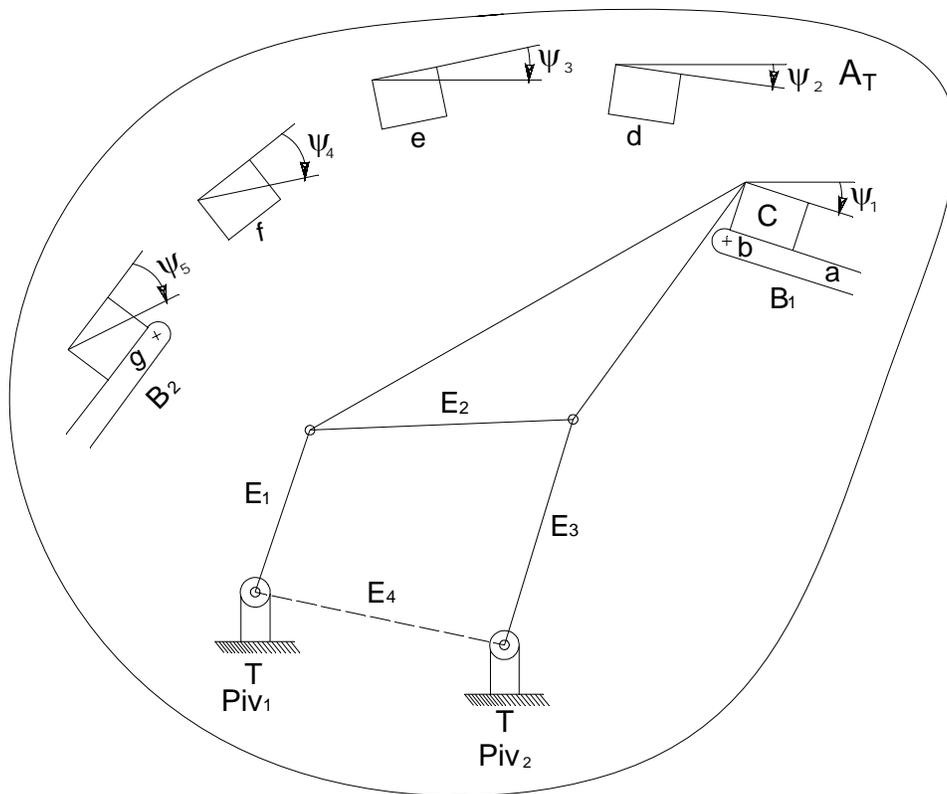


Figura 1.1 Caracterización del problema

1.2 Hipótesis y premisas

En síntesis, el problema de esta tesis consiste en determinar las longitudes principales de un mecanismo de 4 barras de tal forma que la caja (cuerpo rígido por trasportar) pueda moverse de banda a banda pasando por los puntos de precisión y con las orientaciones mostradas en la figura 1.1. En términos lógicos la hipótesis que guiará al problema hacia la solución es:

- 1) Existe el problema y su solución.
- 2) La solución del problema depende de las relaciones que existen entre los puntos de apoyo del mecanismo, su configuración, puntos de precisión y los desplazamientos angulares del cuerpo rígido conducido.
- 3) Los axiomas son los siguientes:

Axioma 1 -Las relaciones posicionales y angulares entre los puntos de apoyo del mecanismo, la configuración del mismo, los puntos de precisión y los desplazamientos angulares del cuerpo rígido conducido están definidas por ecuaciones de lazo.

Axioma 2 - Las posiciones angulares del cuerpo rígido conducido son equivalentes a las posiciones angulares del eslabón acoplador en cada punto de precisión

CAPÍTULO 2

El marco teórico y el método de modelación

Introducción. En este capítulo se presenta un breve resumen del marco teórico que será utilizado para sustentar el método de modelación del problema de síntesis. Solo se describe un resumen del álgebra de los números complejos relacionada con la rotación variante y en el apéndice A se presenta toda la sistematización de dicha álgebra. Se presentan los pasos por seguir para construir el modelo [16].

2.1 El álgebra de los números complejos

Sobre el conjunto \mathfrak{R}^2 se definen dos operaciones binarias: $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ mediante los cuales, las parejas (\mathfrak{R}^2, \oplus) y $(\mathfrak{R}^2, \otimes)$ forman dos grupos, uno aditivo y otro no conmutativo multiplicativo, respectivamente. Se demuestra que la terna $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes)$ es un cuerpo conmutativo [2].

Las operaciones $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ se definen de la manera siguiente:

$$\text{i) } (a, b) \oplus (\alpha, \beta) = (a + \alpha, b + \beta) \quad (2.1)$$

$$\text{ii) } (a, b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha), \\ \forall (a, b), (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$$

Cabe señalar que la operación $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es no asociativa y conmutativa []. Por otro lado, en \mathfrak{R}^2 se define un producto interno, esto es, $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ y una norma $|\bullet| : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ y, por tanto, la estructura $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes, \langle \bullet, \bullet \rangle, |\bullet|)$ es un espacio vectorial normado y con producto interno llamado el espacio vectorial de los números complejos. Por otro lado, sean $p = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, $q = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$. Entonces

$$\text{i) } \overline{p \otimes q} = \bar{q} \otimes \bar{p},$$

$$\text{ii) } p \otimes \bar{p} = \bar{p} \otimes p = -(a^2 + b^2, 0),$$

$$\text{iii) } \bar{p} \otimes q \oplus \bar{q} \otimes p = -2(a\alpha + b\beta, 0)$$

Aquí, $\bar{p} \in \mathfrak{R}^2$ es el conjugado de $p = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$. Por otro lado, la transformación lineal $R_2 : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por:

$$R_2(p, q) = \frac{1}{\|p\|} \bullet \overline{p \otimes q} \quad ; q \in \mathfrak{R} \text{ fijo} \quad (2.2)$$

es una rotación variante [2]. Además, $p, q \in \mathfrak{R}^2$ son dos complejos de norma unitaria definidos por:

$$\begin{aligned} 1) \quad p &= \{p_0, p_1\}, \quad p_0^2 + p_1^2 = 1 \\ 2) \quad q &= \{q_0, q_1\}, \quad q_0^2 + q_1^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Finalmente, las relaciones entre los componentes de los complejos $p, q \in \mathfrak{R}^2$ y las componentes de las rotaciones son las siguientes [2]:

$$\begin{aligned} 1) \quad p &= \{p_0, p_1\}; \quad p_0 \in \mathfrak{R}; \quad p_0 = -\text{Cos } \theta_1 \\ &\quad p_1 \in \mathfrak{R}; \quad p_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_1) \\ 2) \quad q &= \{q_0, q_1\}; \quad q_0 \in \mathfrak{R}; \quad q_0 = -\text{Cos } \theta_2 \\ &\quad q_1 \in \mathfrak{R}; \quad q_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aquí, $\theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{R}$ son desplazamientos angulares.

2.2 Método de modelación

En esta sección se presenta el proceso de sistematización con el cual se construirá el modelo de síntesis relacionado con el mecanismo de 4 barras motivo de estudio en este trabajo de tesis [15],[16]. El proceso de sistematización será realizado paso a paso; esto es:

- 1) Definir concretamente el problema específico y todas las condiciones en torno al problema y sus restricciones.
- 2) Asociar por cada punto de precisión un mecanismo de 4 barras.
- 3) Caracterizar el problema por medio de un modelo de la teoría de conjuntos.

- 4) Definir vectores de posición sobre los eslabones de los mecanismos y puntos de precisión.
- 5) Construir ecuaciones de lazo que relacionen los puntos de precisión, los vectores relacionados con los eslabones de los mecanismos y los pivotes.
- 6) Asociar bases locales sobre puntos de articulación de los mecanismos.
- 7) Escribir las ecuaciones de lazo en términos de las bases locales.
- 8) Asociar una base inercial sobre el origen de coordenadas. Representar los cambios de base del sistema inercial sobre cada uno de los sistemas locales en forma secuenciada. Dicha representación se realiza usando transformaciones lineales que caractericen una rotación.
- 9) Representar las ecuaciones de lazo del paso 7) en términos de las rotaciones de la base inercial, las ecuaciones de norma unitaria y las relaciones geométricas de las rotaciones con los elementos del espacio vectorial usado para el modelado.
- 10) Determine el número de ecuaciones e incógnitas del sistema. Si el sistema del paso anterior no es cuadrado, entonces establezca restricciones hasta determinar un modelo cuadrado. Formule el problema de síntesis.

CAPÍTULO 3

Modelación del problema de síntesis para cinco puntos de precisión

Introducción. En este capítulo se construye un modelo de síntesis de un mecanismo de 4 barras para el problema de conducción de cuerpo rígido: cinco puntos de precisión. Se usará el método descrito en el capítulo 2 para construir dicho modelo. Antes se procederá a definir nuevamente el problema particular.

3.1 Definición del problema y restricciones

En esta sección se plantea el problema por solucionar en esta tesis, así como sus restricciones fundamentales. Considere el siguiente problema:

“Se requiere modelar el problema de síntesis de un mecanismo”

Las restricciones (R_n) fundamentales son las siguientes:

- El mecanismo está compuesto por 4 eslabones rígidos conectados por juntas rotacionales (R_1).
- El problema de síntesis es de conducción de cuerpo rígido (R_2).
- Se analizarán cinco puntos de precisión (R_3).
- Las coordenadas de los puntos de precisión son conocidas (R_4).
- Los desplazamientos angulares relacionados con las posiciones de la conducción del cuerpo rígido son conocidas (R_5).
- Las coordenadas de los pivotes que conectan al mecanismo con la tierra del sistema son conocidas (R_6).
- El eslabón acoplador es rígido (R_7).
- Es fija y conocida el área de trabajo (R_8).

El problema formulado anteriormente y sus restricciones se sintetizan de la manera siguiente:

“Encuéntrese un modelo que permita determinar las dimensiones principales de los eslabones que componen un mecanismo tal que:

$$R_1 = \hat{R}_1$$

$$R_2 = \hat{R}_2$$

$$R_3 = \hat{R}_3$$

$$R_4 = \hat{R}_4$$

$$R_5 = \hat{R}_5$$

$$R_6 = \hat{R}_6$$

$$R_7 = \hat{R}_7$$

$$R_8 = \hat{R}_8$$

sean satisfechas.”

3.2 El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido cinco puntos de precisión

El primer paso que debe ser dado para construir el modelo de síntesis, es definir más específicamente el problema, esto es, sus características fundamentales. Considere el siguiente problema:

“Una banda (B_1) transporta una caja “C” del punto “a” al punto “b” como se muestra en la figura 3.1. La caja deberá localizarse pasado un tiempo en el punto “g” situado en la banda (B_2) pasando por tres puntos intermedios llamados “d”, “e” y “f” . Se asume que el transporte de “C” de banda a banda será por medio de un mecanismo plano de cuatro barras.”

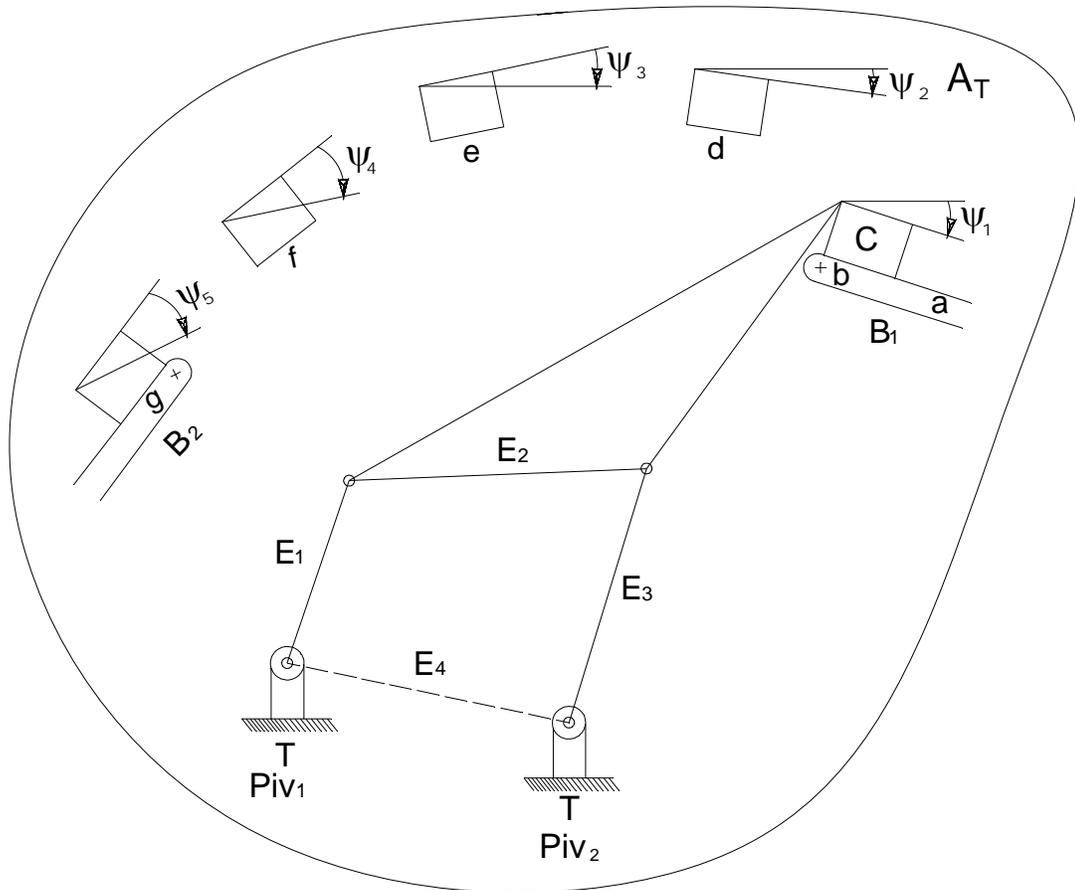


Figura 3.1. Caracterización del problema

La caja “C”, además de pasar por los puntos b, d, e, f y g deberá satisfacer las orientaciones $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5 \in \mathfrak{R}$ y el área de trabajo “AT”.

Las restricciones particulares del problema son:

- 1) La caja “C” es rígida.
- 2) No se considera el movimiento de las bandas y el análisis se centra en los puntos b, d, e, f y g.
- 3) El mecanismo no debe salir del área de trabajo.
- 4) La configuración del eslabón acoplador es arbitraria.
- 5) La orientación del eslabón acoplador debe ser igual a $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5 \in \mathfrak{R}$.

3.3 Configuraciones del mecanismo

De acuerdo con el paso 2) descrito en el capítulo 2, se debe asociar una configuración de un mecanismo por cada punto de precisión relacionado con el problema de conducción de cuerpo rígido. Dichas configuraciones se muestran en la figura 3.2.

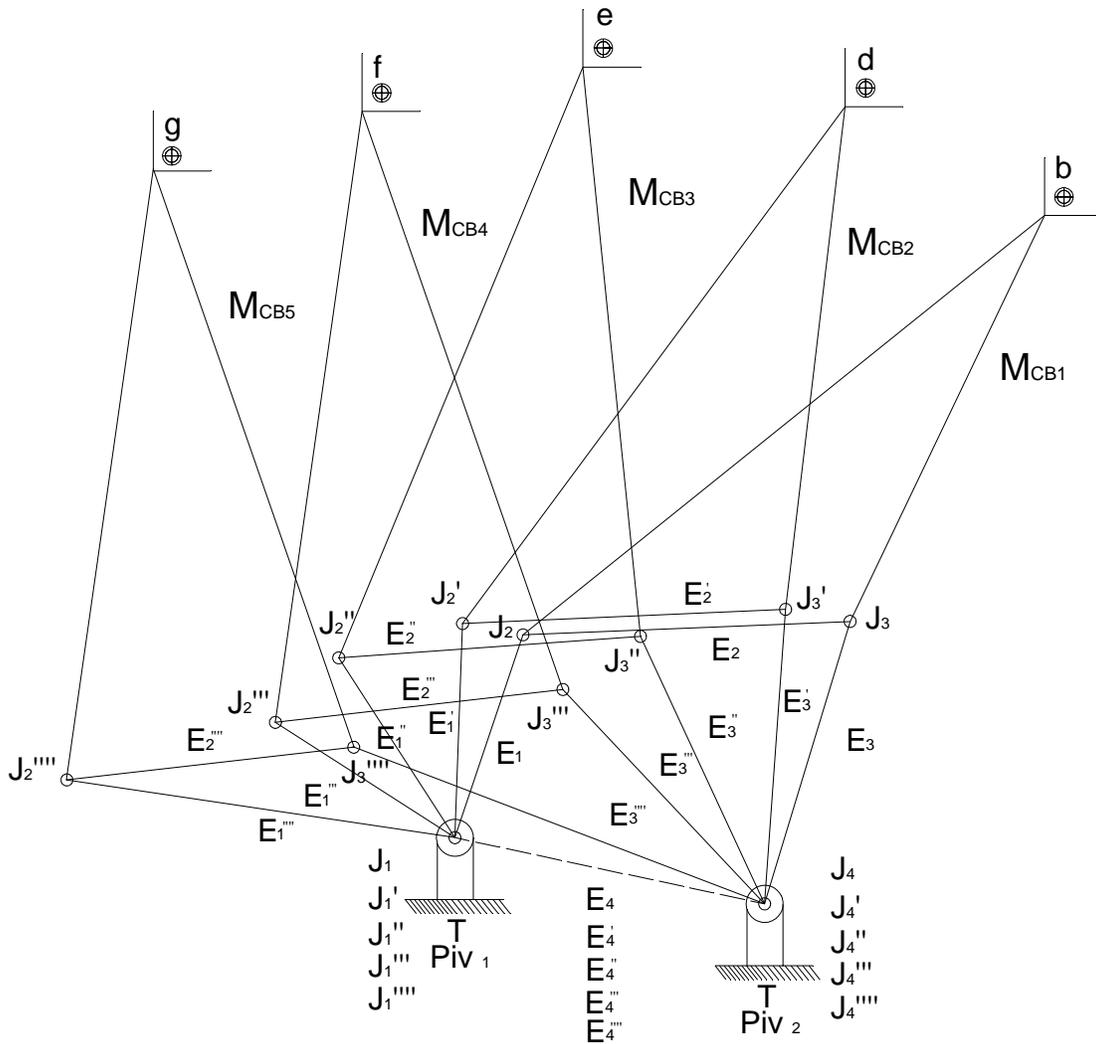


Figura 3.2. Configuraciones del mecanismo

Es importante mencionar que, en realidad, no existen cinco mecanismos sino más bien un mecanismo y cuatro configuraciones. Lo que se busca es que las dimensiones del mecanismo inicial (M_{CB1}) sean las mismas que las asociadas con las configuraciones y que, por ello, el mecanismo pueda transportar la caja C de banda a banda. Nótese que en realidad lo que busca determinar son las dimensiones de los eslabones del mecanismo; esto es, su diseño

dimensional primario o de configuración primaria. Además, las configuraciones del mecanismo mostradas en la figura 3.2 permitirán relacionar, en primera instancia, los pivotes con los puntos de precisión.

3.4 Modelo de configuración en términos de la teoría de conjuntos

Una vez definido el mecanismo y sus configuraciones, el siguiente paso es caracterizar un modelo de configuración por medio de la teoría de conjuntos[15]. Considere que existen los cinco mecanismos, entonces los multicuerpos M_{CB1} , M_{CB2} , M_{CB3} , M_{CB4} , M_{CB5} mostrados en la figura 3.2 , se pueden representar en términos de la unión de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 M_{CB1} &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 & (3.1) \\
 M_{CB2} &= E_1' \cup E_2' \cup E_3' \cup E_4' \\
 M_{CB3} &= E_1'' \cup E_2'' \cup E_3'' \cup E_4'' \\
 M_{CB4} &= E_1''' \cup E_2''' \cup E_3''' \cup E_4''' \\
 M_{CB5} &= E_1'''' \cup E_2'''' \cup E_3'''' \cup E_4''''
 \end{aligned}$$

Por otro lado, las juntas que conectan a los eslabones pueden ser representadas en términos de intersecciones, esto es:

$$\begin{aligned}
 (MCB1) \quad J_1 &= E_1 \cap E_4 & , \quad J_2 &= E_1 \cap E_2 & (3.2) \\
 J_3 &= E_2 \cap E_3 & , \quad J_4 &= E_3 \cap E_4 \\
 (MCB2) \quad J_1' &= E_1' \cap E_4' & , \quad J_2' &= E_1' \cap E_2' \\
 J_3' &= E_2' \cap E_3' & , \quad J_4' &= E_3' \cap E_4' \\
 (MCB3) \quad J_1'' &= E_1'' \cap E_4'' & , \quad J_2'' &= E_1'' \cap E_2'' \\
 J_3'' &= E_2'' \cap E_3'' & , \quad J_4'' &= E_3'' \cap E_4'' \\
 (MCB4) \quad J_1''' &= E_1''' \cap E_4''' & , \quad J_2''' &= E_1''' \cap E_2''' \\
 J_3''' &= E_2''' \cap E_3''' & , \quad J_4''' &= E_3''' \cap E_4''' \\
 (MCB5) \quad J_1'''' &= E_1'''' \cap E_4'''' & , \quad J_2'''' &= E_1'''' \cap E_2'''' \\
 J_3'''' &= E_2'''' \cap E_3'''' & , \quad J_4'''' &= E_3'''' \cap E_4''''
 \end{aligned}$$

Aquí,

$$\begin{aligned}
 E_4 &= E_4' = E_4'' = E_4''' = E_4'''' & (3.3) \\
 J_1 &= J_1' = J_1'' = J_1''' = J_1'''' \\
 J_4 &= J_4' = J_4'' = J_4''' = J_4''''
 \end{aligned}$$

Obsérvese que lo que se busca en realidad es que la siguiente relación sea satisfecha:

$$M_{CB1} = M_{CB2} = M_{CB3} = M_{CB4} = M_{CB5} \quad (3.4)$$

Los vectores de posición mostrados en la figura 3.3 se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_{CB1}) \quad & \underline{L}_1 = 2 - 1 \quad , \quad \underline{L}_2 = b - 2 \\
 & \underline{L}_3 = b - 3 \quad , \quad \underline{L}_4 = 3 - 4 \\
 (\mathbf{M}_{CB2}) \quad & \underline{L}_{1'} = 5 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{2'} = d - 5 \\
 & \underline{L}_{3'} = d - 6 \quad , \quad \underline{L}_{4'} = 6 - 4 \\
 (\mathbf{M}_{CB3}) \quad & \underline{L}_{1''} = 7 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{2''} = e - 7 \\
 & \underline{L}_{3''} = e - 8 \quad , \quad \underline{L}_{4''} = 8 - 4 \\
 (\mathbf{M}_{CB4}) \quad & \underline{L}_{1'''} = 9 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{2'''} = f - 9 \\
 & \underline{L}_{3'''} = f - 10 \quad , \quad \underline{L}_{4'''} = 10 - 4 \\
 (\mathbf{M}_{CB5}) \quad & \underline{L}_{1''''} = 11 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{2''''} = g - 11 \\
 & \underline{L}_{3''''} = g - 12 \quad , \quad \underline{L}_{4''''} = 12 - 4
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 r_{d,b} &= d - b \\
 r_{e,b} &= e - b \\
 r_{f,b} &= f - b \\
 r_{g,b} &= g - b
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dichos vectores están definidos sobre los puntos de precisión. Obsérvese que existen puntos que relacionan los vectores definidos en las expresiones (3.5) y (3.6) lo que permitirá, en la siguiente sección construir un sistema de ecuaciones de lazo.

3.6 Ecuaciones de lazo

El objetivo ahora es encontrar un modelo que permita relacionar los pivotes, el mecanismo y sus configuraciones, así como los puntos de precisión. Para ello, será usada la premisa o axioma 1 descrito en la sección 1.2 del capítulo 1 de esta tesis. Obsérvese en la figura 3.3 que dichas relaciones se pueden determinar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (\text{Piv } 1) \quad & \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus r_{d,b} = \underline{L}_{1'} \oplus \underline{L}_{2'} \\
 & \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus r_{e,b} = \underline{L}_{1''} \oplus \underline{L}_{2''} \\
 & \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus r_{f,b} = \underline{L}_{1'''} \oplus \underline{L}_{2'''} \\
 & \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus r_{g,b} = \underline{L}_{1''''} \oplus \underline{L}_{2''''}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
(\text{Piv } 2) \quad \underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus \underline{r}_{d,b} &= \underline{L}_4' \oplus \underline{L}_3' \\
\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus \underline{r}_{e,b} &= \underline{L}_4'' \oplus \underline{L}_3'' \\
\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus \underline{r}_{f,b} &= \underline{L}_4''' \oplus \underline{L}_3''' \\
\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus \underline{r}_{g,b} &= \underline{L}_4'''' \oplus \underline{L}_3''''
\end{aligned}$$

O, en forma equivalente:

$$\begin{aligned}
(\text{Piv } 1) \quad \underline{r}_{d,b} &= \underline{L}_1' \oplus \underline{L}_2' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2) \\
\underline{r}_{e,b} &= \underline{L}_1'' \oplus \underline{L}_2'' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2) \\
\underline{r}_{f,b} &= \underline{L}_1''' \oplus \underline{L}_2''' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2) \\
\underline{r}_{g,b} &= \underline{L}_1'''' \oplus \underline{L}_2'''' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
(\text{Piv } 2) \quad \underline{r}_{d,b} &= \underline{L}_4' \oplus \underline{L}_3' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3) \\
\underline{r}_{e,b} &= \underline{L}_4'' \oplus \underline{L}_3'' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3) \\
\underline{r}_{f,b} &= \underline{L}_4''' \oplus \underline{L}_3''' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3) \\
\underline{r}_{g,b} &= \underline{L}_4'''' \oplus \underline{L}_3'''' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3)
\end{aligned}$$

Nótese que el sistema de ecuaciones descrito anteriormente esta dado en términos de la operación aditiva definida en el espacio vectorial de números complejos. Por otro lado, las expresiones (3.8) son conocidas como ecuaciones de lazo [5]. Sin embargo, las expresiones o ecuaciones de lazo descritas anteriormente solo describen posiciones en términos de coordenadas cartesianas y no expresan información referente con las posiciones angulares del mecanismo y sus configuraciones y las posiciones angulares del cuerpo rígido por trasportarse. Para poder medir dichos desplazamientos angulares se asociarán, en la sección siguiente, sistemas locales móviles de referencia.

3.7 Sistemas de referencia locales

Considere que sobre las juntas que conectan los eslabones del mecanismo en estudio y sus configuraciones se asocian sistemas locales de referencia móviles de tal forma que dichos sistemas se fijen a los eslabones y roten con ellos. Dichos sistemas son ortogonales y se muestran en la figura 3.4

Observe que las bases $\underline{e}_i^I \in \mathcal{R}^2$ están asociadas con el mecanismo de referencia (M_{CB1}) y las bases $\underline{a}_i^I \in \mathcal{R}^2$, $\underline{b}_i^I \in \mathcal{R}^2$, $\underline{c}_i^I \in \mathcal{R}^2$ y $\underline{d}_i^I \in \mathcal{R}^2$ están relacionadas con las cuatro configuraciones M_{CB2} , M_{CB3} , M_{CB4} , M_{CB5} . Por otro lado, las relaciones entre los desplazamientos angulares de cuerpo rígido por trasportarse y las posiciones angulares del mecanismo y sus configuraciones están dadas por las bases $\underline{e}_i^{III} \in \mathcal{R}^2$, $\underline{a}_i^{III} \in \mathcal{R}^2$, $\underline{b}_i^{III} \in \mathcal{R}^2$, $\underline{c}_i^{III} \in \mathcal{R}^2$ y $\underline{d}_i^{III} \in \mathcal{R}^2$ esto es consecuencia del axioma 2 descrito en la sección 1.2 del capítulo 1 de este trabajo de tesis.

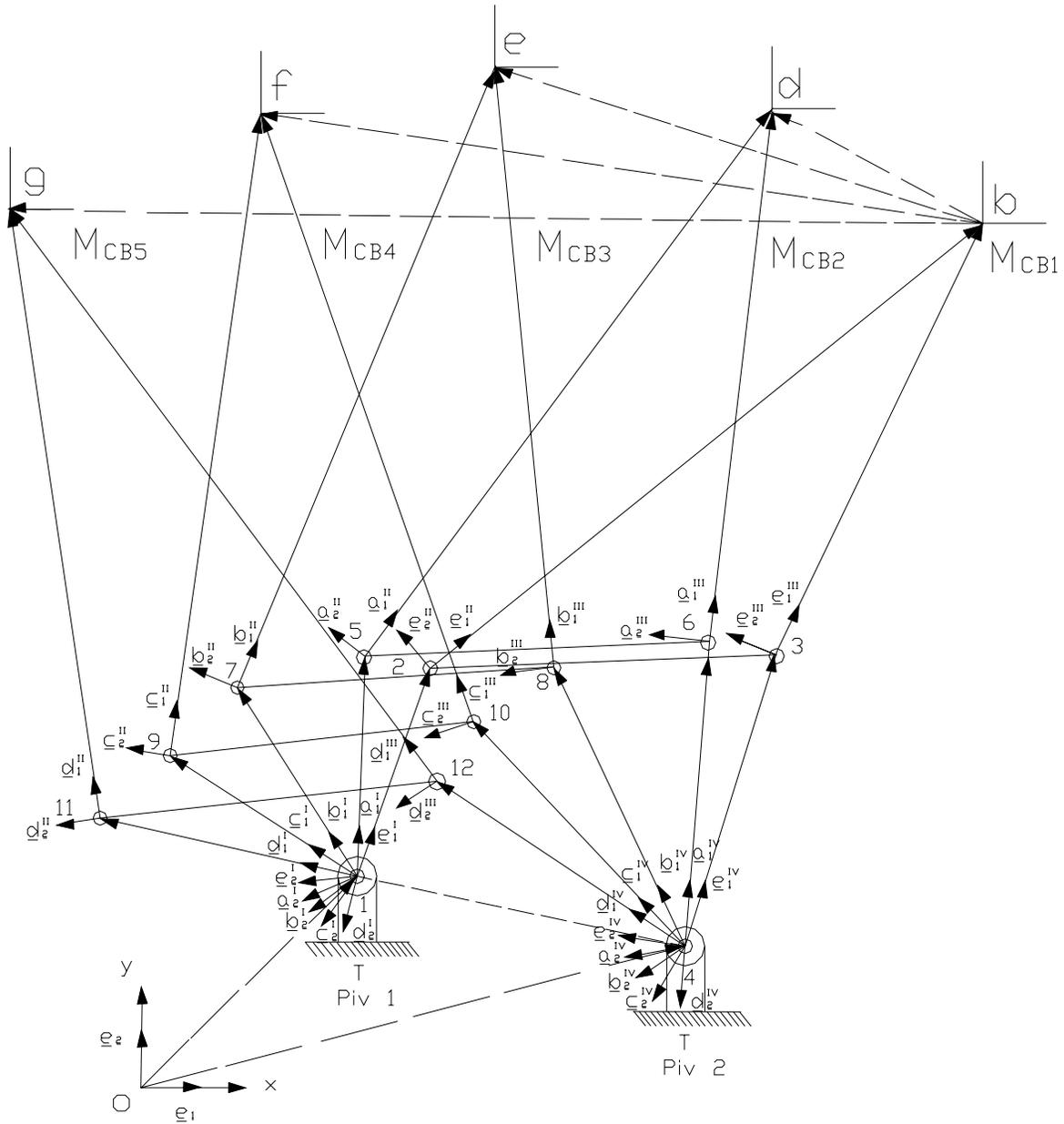


Figura 3.4. Sistemas locales

Los vectores de posición mostrados en la figura 3.4 pueden ser escritos en términos de sus longitudes (l) y las componentes de las bases locales asociadas (e, a, b, c y d); esto es:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_{CB1}) \quad & \underline{L}_1 = l_1 \bullet \underline{e}_1^I & (3.9) \\
 & \underline{L}_2 = l_2 \bullet \underline{e}_1^{II} \\
 & \underline{L}_3 = l_3 \bullet \underline{e}_1^{III} \\
 & \underline{L}_4 = l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \\
 (\mathbf{M}_{CB2}) \quad & \underline{L}_1' = l_1' \bullet \underline{a}_1^I \\
 & \underline{L}_2' = l_2' \bullet \underline{a}_1^{II} \\
 & \underline{L}_3' = l_3' \bullet \underline{a}_1^{III} \\
 & \underline{L}_4' = l_4' \bullet \underline{a}_1^{IV} \\
 (\mathbf{M}_{CB3}) \quad & \underline{L}_1'' = l_1'' \bullet \underline{b}_1^I \\
 & \underline{L}_2'' = l_2'' \bullet \underline{b}_1^{II} \\
 & \underline{L}_3'' = l_3'' \bullet \underline{b}_1^{III} \\
 & \underline{L}_4'' = l_4'' \bullet \underline{b}_1^{IV} \\
 (\mathbf{M}_{CB4}) \quad & \underline{L}_1''' = l_1''' \bullet \underline{c}_1^I \\
 & \underline{L}_2''' = l_2''' \bullet \underline{c}_1^{II} \\
 & \underline{L}_3''' = l_3''' \bullet \underline{c}_1^{III} \\
 & \underline{L}_4''' = l_4''' \bullet \underline{c}_1^{IV} \\
 (\mathbf{M}_{CB5}) \quad & \underline{L}_1'''' = l_1'''' \bullet \underline{d}_1^I \\
 & \underline{L}_2'''' = l_2'''' \bullet \underline{d}_1^{II} \\
 & \underline{L}_3'''' = l_3'''' \bullet \underline{d}_1^{III} \\
 & \underline{L}_4'''' = l_4'''' \bullet \underline{d}_1^{IV}
 \end{aligned}$$

Aquí, $l_1, l_2, l_3, l_4, l_1', l_2', l_3', l_4', l_1'', l_2'', l_3'', l_4'', l_1''', l_2''', l_3''', l_4''', l_1'''', l_2'''', l_3'''', l_4'''' \in \mathfrak{R}^+$ son las longitudes principales de los eslabones (medidas de junta a junta) que deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= l_1' = l_1'' = l_1''' = l_1'''' & (3.10) \\
 l_2 &= l_2' = l_2'' = l_2''' = l_2'''' \\
 l_3 &= l_3' = l_3'' = l_3''' = l_3'''' \\
 l_4 &= l_4' = l_4'' = l_4''' = l_4''''
 \end{aligned}$$

Con las expresiones (3.9) es posible escribir las ecuaciones de lazo (3.7) y (3.8) en términos de los sistemas locales móviles. Esto se hará en la sección siguiente.

3.8 Ecuaciones de lazo en términos de los sistemas locales.

En esta sección se usarán las expresiones para representar las ecuaciones de lazo (3.7) en función de las bases locales; esto es:

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 1)} \quad & l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II} \oplus \underline{r}_{d,b} = l_1 \bullet \underline{a}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{a}_1^{II} \\
 & l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II} \oplus \underline{r}_{e,b} = l_1 \bullet \underline{b}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{b}_1^{II} \\
 & l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II} \oplus \underline{r}_{f,b} = l_1 \bullet \underline{c}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{c}_1^{II} \\
 & l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II} \oplus \underline{r}_{g,b} = l_1 \bullet \underline{d}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{d}_1^{II}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 2)} \quad & l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III} \oplus \underline{r}_{d,b} = l_4 \bullet \underline{a}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{a}_1^{III} \\
 & l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III} \oplus \underline{r}_{e,b} = l_4 \bullet \underline{b}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{b}_1^{III} \\
 & l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III} \oplus \underline{r}_{f,b} = l_4 \bullet \underline{c}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{c}_1^{III} \\
 & l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III} \oplus \underline{r}_{g,b} = l_4 \bullet \underline{d}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{d}_1^{III}
 \end{aligned}$$

O, equivalentemente:

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 1)} \quad & \underline{r}_{d,b} = l_1 \bullet \underline{a}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{a}_1^{II} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II}] \\
 & \underline{r}_{e,b} = l_1 \bullet \underline{b}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{b}_1^{II} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II}] \\
 & \underline{r}_{f,b} = l_1 \bullet \underline{c}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{c}_1^{II} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II}] \\
 & \underline{r}_{g,b} = l_1 \bullet \underline{d}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{d}_1^{II} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II}]
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 2)} \quad & \underline{r}_{d,b} = l_4 \bullet \underline{a}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{a}_1^{III} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III}] \\
 & \underline{r}_{e,b} = l_4 \bullet \underline{b}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{b}_1^{III} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III}] \\
 & \underline{r}_{f,b} = l_4 \bullet \underline{c}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{c}_1^{III} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III}] \\
 & \underline{r}_{g,b} = l_4 \bullet \underline{d}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{d}_1^{III} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III}]
 \end{aligned}$$

Cabe señalar que las expresiones (3.12) requieren ser escritas en términos de un sistema fijo inercial o canónica. Dicho sistema se localiza en el origen de coordenadas según se muestra en la figura 3.4.

3.9 Sistema inercial y rotaciones

Para poder expresar las relaciones angulares entre el mecanismo y sus configuraciones es necesario considerar lo siguiente:

- 1) Las bases $\underline{e}_j^I, \underline{e}_j^{II}, \underline{e}_j^{III}, \underline{e}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de la canónica $\underline{e}_j \in \mathfrak{R}^2$
- 2) Las bases $\underline{a}_j^I, \underline{a}_j^{II}, \underline{a}_j^{III}, \underline{a}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{e}_j^I, \underline{e}_j^{II}, \underline{e}_j^{III}, \underline{e}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$
- 3) Las bases $\underline{b}_j^I, \underline{b}_j^{II}, \underline{b}_j^{III}, \underline{b}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{a}_j^I, \underline{a}_j^{II}, \underline{a}_j^{III}, \underline{a}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$.
- 4) Las bases $\underline{c}_j^I, \underline{c}_j^{II}, \underline{c}_j^{III}, \underline{c}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{b}_j^I, \underline{b}_j^{II}, \underline{b}_j^{III}, \underline{b}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$.
- 5) Las bases $\underline{d}_j^I, \underline{d}_j^{II}, \underline{d}_j^{III}, \underline{d}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{c}_j^I, \underline{c}_j^{II}, \underline{c}_j^{III}, \underline{c}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$.

Esta consideración permitirá modelar los cambios de base del sistema inercial sobre los sistemas móviles del mecanismo y sus configuraciones. De acuerdo con el capítulo 2 de esta tesis, la transformación lineal descrita por la expresión (2.2) puede ser usada para modelar las rotaciones de la base local sobre las móviles. Dichas rotaciones se expresan en términos de números complejos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (M_{CB1}) \quad \underline{e}_1^I &= R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1) = \overline{p \otimes \underline{e}_1} & (3.13) \\
 \underline{e}_1^{II} &= R_2(\mathbf{q}, \underline{e}_1) = \overline{q \otimes \underline{e}_1} \\
 \underline{e}_1^{III} &= R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1) = \overline{r \otimes \underline{e}_1} \\
 \underline{e}_1^{IV} &= R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1) = \overline{s \otimes \underline{e}_1} \\
 (M_{CB2}) \quad \underline{a}_1^I &= R_2(\mathbf{P}, \underline{e}_1^I) = R_2(\mathbf{P}, R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1)) = \overline{P \otimes p \otimes \underline{e}_1} \\
 \underline{a}_1^{II} &= R_2(\mathbf{Q}, \underline{e}_1^{II}) = R_2(\mathbf{Q}, R_2(\mathbf{q}, \underline{e}_1)) = \overline{Q \otimes q \otimes \underline{e}_1} \\
 \underline{a}_1^{III} &= R_2(\mathbf{R}, \underline{e}_1^{III}) = R_2(\mathbf{R}, R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1)) = \overline{R \otimes r \otimes \underline{e}_1} \\
 \underline{a}_1^{IV} &= R_2(\mathbf{S}, \underline{e}_1^{IV}) = R_2(\mathbf{S}, R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1)) = \overline{S \otimes s \otimes \underline{e}_1} \\
 (M_{CB3}) \quad \underline{b}_1^I &= R_2(\mathbf{P}', \underline{a}_1^I) = R_2(\mathbf{P}', R_2(\mathbf{P}, \underline{e}_1^I)) = R_2(\mathbf{P}', R_2(\mathbf{P}, R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1))) \\
 &= \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes \underline{e}_1} \\
 \underline{b}_1^{II} &= R_2(\mathbf{Q}', \underline{a}_1^{II}) = R_2(\mathbf{Q}', R_2(\mathbf{Q}, \underline{e}_1^{II})) = R_2(\mathbf{Q}', R_2(\mathbf{Q}, R_2(\mathbf{q}, \underline{e}_1))) \\
 &= \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes \underline{e}_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{b}_1^{\text{III}} &= R_2(\mathbf{R}', \underline{a}_1^{\text{III}}) = R_2(\mathbf{R}', R_2(\mathbf{R}, \underline{e}_1^{\text{III}})) = R_2(\mathbf{R}', R_2(\mathbf{R}, R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \\
\underline{b}_1^{\text{IV}} &= R_2(\mathbf{S}', \underline{a}_1^{\text{IV}}) = R_2(\mathbf{S}', R_2(\mathbf{S}, \underline{e}_1^{\text{IV}})) = R_2(\mathbf{S}', R_2(\mathbf{S}, R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \\
(\text{M}_{\text{CB4}}) \quad \underline{c}_1^{\text{I}} &= R_2(\mathbf{P}'', \underline{b}_1^{\text{I}}) = R_2(\mathbf{P}'', R_2(\mathbf{P}', \underline{a}_1^{\text{I}})) = R_2(\mathbf{P}'', R_2(\mathbf{P}', R_2(\mathbf{P}, R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \\
\underline{c}_1^{\text{II}} &= R_2(\mathbf{Q}'', \underline{b}_1^{\text{II}}) = R_2(\mathbf{Q}'', R_2(\mathbf{Q}', \underline{a}_1^{\text{II}})) = R_2(\mathbf{Q}'', R_2(\mathbf{Q}', R_2(\mathbf{Q}, R_2(\underline{q}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \\
\underline{c}_1^{\text{III}} &= R_2(\mathbf{R}'', \underline{b}_1^{\text{III}}) = R_2(\mathbf{R}'', R_2(\mathbf{R}', \underline{a}_1^{\text{III}})) = R_2(\mathbf{R}'', R_2(\mathbf{R}', R_2(\mathbf{R}, (R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \\
\underline{c}_1^{\text{IV}} &= R_2(\mathbf{S}'', \underline{b}_1^{\text{IV}}) = R_2(\mathbf{S}'', R_2(\mathbf{S}', \underline{a}_1^{\text{IV}})) = R_2(\mathbf{S}'', R_2(\mathbf{S}', R_2(\mathbf{S}, (R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \\
(\text{M}_{\text{CB5}}) \quad \underline{d}_1^{\text{I}} &= R_2(\mathbf{P}''', \underline{c}_1^{\text{I}}) = R_2(\mathbf{P}''', R_2(\mathbf{P}'', \underline{b}_1^{\text{I}})) = R_2(\mathbf{P}''', R_2(\mathbf{P}'', R_2(\mathbf{P}', R_2(\mathbf{P}, R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{P''' \otimes P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \\
\underline{d}_1^{\text{II}} &= R_2(\mathbf{Q}''', \underline{c}_1^{\text{II}}) = R_2(\mathbf{Q}''', R_2(\mathbf{Q}'', \underline{b}_1^{\text{II}})) = R_2(\mathbf{Q}''', R_2(\mathbf{Q}'', R_2(\mathbf{Q}', R_2(\mathbf{Q}, R_2(\underline{q}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{Q''' \otimes Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \\
\underline{d}_1^{\text{III}} &= R_2(\mathbf{R}''', \underline{c}_1^{\text{III}}) = R_2(\mathbf{R}''', R_2(\mathbf{R}'', \underline{b}_1^{\text{III}})) = R_2(\mathbf{R}''', R_2(\mathbf{R}'', R_2(\mathbf{R}', R_2(\mathbf{R}, R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{R''' \otimes R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \\
\underline{d}_1^{\text{IV}} &= R_2(\mathbf{S}''', \underline{c}_1^{\text{IV}}) = R_2(\mathbf{S}''', R_2(\mathbf{S}'', \underline{b}_1^{\text{IV}})) = R_2(\mathbf{S}''', R_2(\mathbf{S}'', R_2(\mathbf{S}', R_2(\mathbf{S}, (R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{S''' \otimes S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1}
\end{aligned}$$

Aquí, \mathbf{P}''' , \mathbf{P}'' , \mathbf{P}' , \mathbf{P} , \mathbf{p} , \mathbf{Q}''' , \mathbf{Q}'' , \mathbf{Q}' , \mathbf{Q} , \mathbf{q} , \mathbf{R}''' , \mathbf{R}'' , \mathbf{R}' , \mathbf{R} , \mathbf{r} , \mathbf{S}''' , \mathbf{S}'' , \mathbf{S}' , \mathbf{S} , $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$ son números complejos de norma unitaria. Cabe señalar que con las expresiones (3.12) es posible escribir las ecuaciones de lazo (3.10) en función de la base inercial.

3.10 Ecuaciones de lazo, ecuaciones de norma y relaciones geométricas

Las ecuaciones de lazo (3.12) se escriben al considerar las relaciones (3.13) de la manera siguiente:

$$(Piv 1) \quad \underline{r}_{d,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}] \quad (3.14)$$

$$\underline{r}_{e,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{f,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{g,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P''' \otimes P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q''' \otimes Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$(Piv 2) \quad \underline{r}_{d,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{e,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{f,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{g,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S''' \otimes S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R''' \otimes R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

Note que las ecuaciones anteriores proporcionan la información de todo el sistema de análisis, pues están relacionados todos y cada una de las variables involucradas. Además, el sistema (3.14) está formado por 16 ecuaciones escalares. Por otro lado, las ecuaciones de norma

unitaria se describen, de acuerdo con la expresión (2.3) del capítulo 2 de esta tesis, de la manera siguiente:

$$\|P''''^2\| = P''''_0^2 + P''''_1^2 = 1 \quad (3.15)$$

$$\|Q''''^2\| = Q''''_0^2 + Q''''_1^2 = 1$$

$$\|R''''^2\| = R''''_0^2 + R''''_1^2 = 1$$

$$\|S''''^2\| = S''''_0^2 + S''''_1^2 = 1$$

$$\|P''^2\| = P''_0^2 + P''_1^2 = 1$$

$$\|Q''^2\| = Q''_0^2 + Q''_1^2 = 1$$

$$\|R''^2\| = R''_0^2 + R''_1^2 = 1$$

$$\|S''^2\| = S''_0^2 + S''_1^2 = 1$$

$$\|P'^2\| = P'_0^2 + P'_1^2 = 1$$

$$\|Q'^2\| = Q'_0^2 + Q'_1^2 = 1$$

$$\|R'^2\| = R'_0^2 + R'_1^2 = 1$$

$$\|S'^2\| = S'_0^2 + S'_1^2 = 1$$

$$\|P^2\| = P_0^2 + P_1^2 = 1$$

$$\|Q^2\| = Q_0^2 + Q_1^2 = 1$$

$$\|R^2\| = R_0^2 + R_1^2 = 1$$

$$\|S^2\| = S_0^2 + S_1^2 = 1$$

$$\|p^2\| = p_0^2 + p_1^2 = 1$$

$$\|q^2\| = q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$\|r^2\| = r_0^2 + r_1^2 = 1$$

$$\|s^2\| = s_0^2 + s_1^2 = 1$$

Observe que las ecuaciones de norma son no lineales. Por otro lado, las relaciones geométricas entre las componentes de las rotaciones y los números complejos, están dadas por la relación (2.4) del capítulo 2 de esta tesis; esto es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}''' &= \{\mathbf{P}'''_0, \mathbf{P}'''_1\}; & \mathbf{P}'''_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{P}'''_0 &= -\text{Cos } \gamma_1 & (3.16) \\
& & \mathbf{P}'''_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{P}'''_1 &= -(\pm \text{Sen } \gamma_1) \\
\mathbf{Q}''' &= \{\mathbf{Q}'''_0, \mathbf{Q}'''_1\}; & \mathbf{Q}'''_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{Q}'''_0 &= -\text{Cos } \gamma_2 \\
& & \mathbf{Q}'''_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{Q}'''_1 &= -(\pm \text{Sen } \gamma_2) \\
\mathbf{R}''' &= \{\mathbf{R}'''_0, \mathbf{R}'''_1\}; & \mathbf{R}'''_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{R}'''_0 &= -\text{Cos } \gamma_3 \\
& & \mathbf{R}'''_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{R}'''_1 &= -(\pm \text{Sen } \gamma_3) \\
\mathbf{S}''' &= \{\mathbf{S}'''_0, \mathbf{S}'''_1\}; & \mathbf{S}'''_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{S}'''_0 &= -\text{Cos } \gamma_4 \\
& & \mathbf{S}'''_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{S}'''_1 &= -(\pm \text{Sen } \gamma_4) \\
\mathbf{P}'' &= \{\mathbf{P}''_0, \mathbf{P}''_1\}; & \mathbf{P}''_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{P}''_0 &= -\text{Cos } \beta_1 \\
& & \mathbf{P}''_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{P}''_1 &= -(\pm \text{Sen } \beta_1) \\
\mathbf{Q}'' &= \{\mathbf{Q}''_0, \mathbf{Q}''_1\}; & \mathbf{Q}''_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{Q}''_0 &= -\text{Cos } \beta_2 \\
& & \mathbf{Q}''_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{Q}''_1 &= -(\pm \text{Sen } \beta_2) \\
\mathbf{R}'' &= \{\mathbf{R}''_0, \mathbf{R}''_1\}; & \mathbf{R}''_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{R}''_0 &= -\text{Cos } \beta_3 \\
& & \mathbf{R}''_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{R}''_1 &= -(\pm \text{Sen } \beta_3) \\
\mathbf{S}'' &= \{\mathbf{S}''_0, \mathbf{S}''_1\}; & \mathbf{S}''_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{S}''_0 &= -\text{Cos } \beta_4 \\
& & \mathbf{S}''_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{S}''_1 &= -(\pm \text{Sen } \beta_4)
\end{aligned}$$

$\mathbf{P}' = \{P'_0, P'_1\};$	$P'_0 \in \mathfrak{R},$	$P'_0 = -\text{Cos } \phi_1$
	$P'_1 \in \mathfrak{R},$	$P'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_1)$
$\mathbf{Q}' = \{Q'_0, Q'_1\};$	$Q'_0 \in \mathfrak{R},$	$Q'_0 = -\text{Cos } \phi_2$
	$Q'_1 \in \mathfrak{R},$	$Q'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_2)$
$\mathbf{R}' = \{R'_0, R'_1\};$	$R'_0 \in \mathfrak{R},$	$R'_0 = -\text{Cos } \phi_3$
	$R'_1 \in \mathfrak{R},$	$R'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_3)$
$\mathbf{S}' = \{S'_0, S'_1\};$	$S'_0 \in \mathfrak{R},$	$S'_0 = -\text{Cos } \phi_4$
	$S'_1 \in \mathfrak{R},$	$S'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_4)$
$\mathbf{P} = \{P_0, P_1\};$	$P_0 \in \mathfrak{R},$	$P_0 = -\text{Cos } \alpha_1$
	$P_1 \in \mathfrak{R},$	$P_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_1)$
$\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\};$	$Q_0 \in \mathfrak{R},$	$Q_0 = -\text{Cos } \alpha_2$
	$Q_1 \in \mathfrak{R},$	$Q_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_2)$
$\mathbf{R} = \{R_0, R_1\};$	$R_0 \in \mathfrak{R},$	$R_0 = -\text{Cos } \alpha_3$
	$R_1 \in \mathfrak{R},$	$R_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_3)$
$\mathbf{S} = \{S_0, S_1\};$	$S_0 \in \mathfrak{R},$	$S_0 = -\text{Cos } \alpha_4$
	$S_1 \in \mathfrak{R},$	$S_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_4)$
$\mathbf{p} = \{p_0, p_1\};$	$p_0 \in \mathfrak{R},$	$p_0 = -\text{Cos } \theta_1$
	$p_1 \in \mathfrak{R},$	$p_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_1)$
$\mathbf{q} = \{q_0, q_1\};$	$q_0 \in \mathfrak{R},$	$q_0 = -\text{Cos } \theta_2$
	$q_1 \in \mathfrak{R},$	$q_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_2)$
$\mathbf{r} = \{r_0, r_1\};$	$r_0 \in \mathfrak{R},$	$r_0 = -\text{Cos } \theta_3$
	$r_1 \in \mathfrak{R},$	$r_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_3)$
$\mathbf{s} = \{s_0, s_1\};$	$s_0 \in \mathfrak{R},$	$s_0 = -\text{Cos } \theta_4$
	$s_1 \in \mathfrak{R},$	$s_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_4)$

3.11 Sistema de ecuaciones y formulación del problema de síntesis

En esta sección se discutirá el conjunto de ecuaciones e incógnitas a partir del cual se formulará el problema de síntesis. Según las expresiones (3.15) y (3.16) existen 36 ecuaciones asociadas con el sistema; éstas son: 16 ecuaciones escalares relacionadas con las ecuaciones de lazo y 20 ecuaciones asociadas con las normas unitarias. Por otro lado se tiene 44 incógnitas; éstas son: 12 de longitud relacionadas con las dimensiones de los eslabones que componen al mecanismo de referencia y 32 incógnitas de componentes de las rotaciones; esto es, los desplazamientos angulares y los ejes, dos por cada complejo asociado. Por tanto, el sistema está formado por 36 ecuaciones y 44 incógnitas

Cabe señalar que solucionar un sistema de ecuaciones no cuadrado implica la existencia de múltiples soluciones. Es necesario, por tanto, determinar un sistema cuadrado de tal forma que sea posible obtener una solución única.

Considere las restricciones siguientes:

- 1) Condición de rigidez del eslabón acoplador.
- 2) Restricción del área de trabajo.

Las consecuencias lógicas de dichas restricciones son las siguientes:

- 1) Si $\alpha_2, \phi_2, \beta_2$ y $\gamma_2 \in \mathfrak{R}$ son conocidos, entonces $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \mathbf{Q}'', \mathbf{Q}''' \in \mathfrak{R}^2$ son conocidos.
- 2) Si $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \mathbf{Q}'', \mathbf{Q}''' \in \mathfrak{R}^2$ son conocidos, entonces $\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'', \mathbf{R}''' \in \mathfrak{R}^2$ son conocidos.
- 3) $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{P}'', \mathbf{P}''' \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{S}'', \mathbf{S}''' \in \mathfrak{R}^2$ son complejos de control en el área de trabajo.

La figura 3.5 muestra los ángulos relacionados con el área de trabajo controlable del mecanismo.

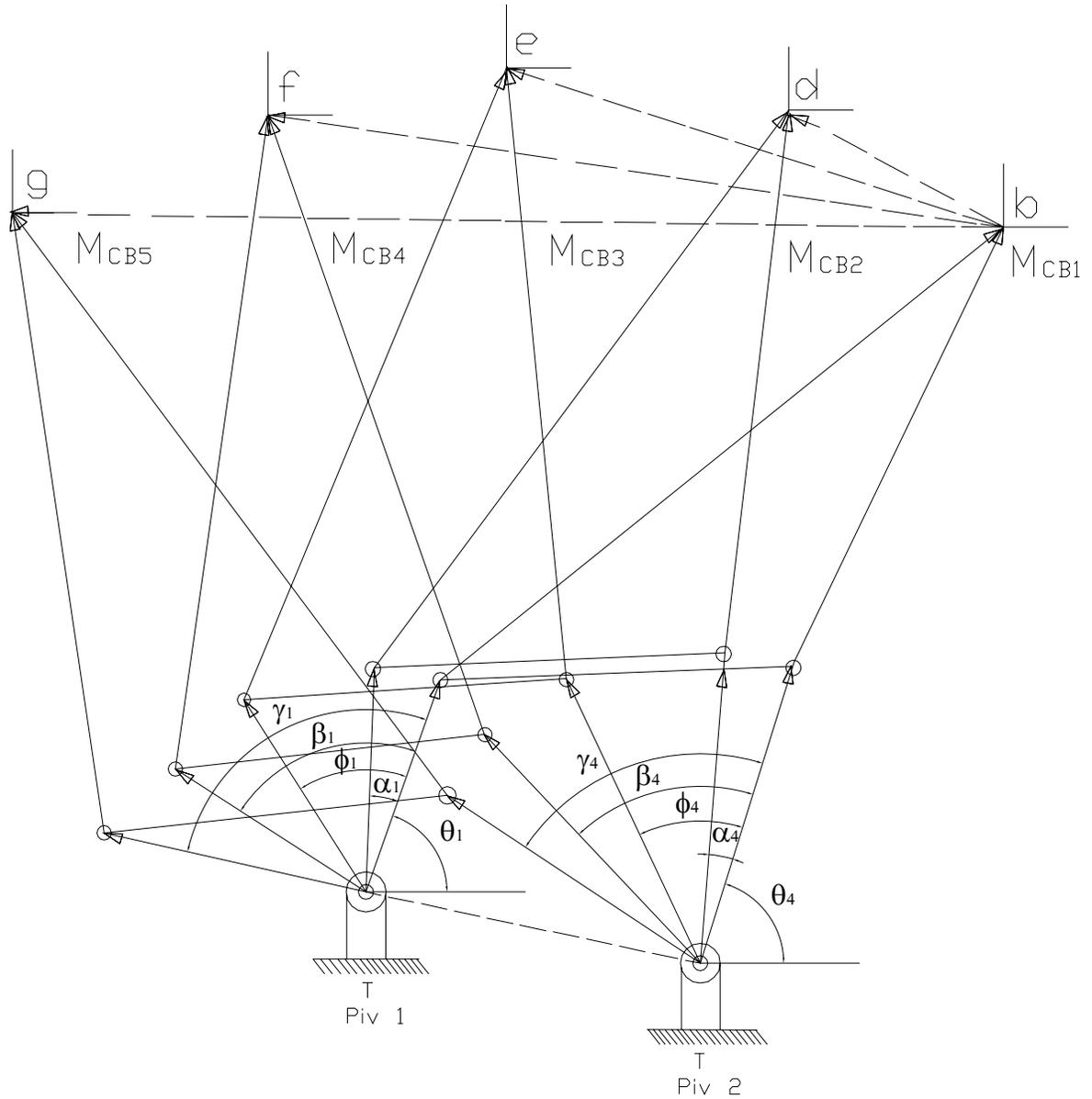


Figura 3.5. Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos

Las consideraciones anteriores permiten establecer un sistema cuadrado de 28 ecuaciones no lineales y 28 incógnitas del tipo polinomial. La formulación formal del problema de síntesis es la siguiente [15]:

3.11.1 Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cinco puntos de precisión)

“Dados los puntos de precisión $\underline{r}_{d,b} \in \mathcal{R}^2$, $\underline{r}_{e,b} \in \mathcal{R}^2$, $\underline{r}_{f,b} \in \mathcal{R}^2$, $\underline{r}_{g,b} \in \mathcal{R}^2$, $(X_{\text{Piv } 1}, Y_{\text{Piv } 1}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $(X_{\text{Piv } 2}, Y_{\text{Piv } 2}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $\mathbf{P}''' = \{P'''_0, P'''_1\}$, $\mathbf{Q}''' = \{Q'''_0, Q'''_1\}$, $\mathbf{R}''' = \{R'''_0, R'''_1\}$, $\mathbf{S}''' = \{S'''_0, S'''_1\}$, $\mathbf{P}'' = \{P''_0, P''_1\}$, $\mathbf{Q}'' = \{Q''_0, Q''_1\}$, $\mathbf{R}'' = \{R''_0, R''_1\}$, $\mathbf{S}'' = \{S''_0, S''_1\}$, con $\|\mathbf{P}'''\| = \|\mathbf{Q}'''\| = \|\mathbf{R}'''\| = \|\mathbf{S}'''\| = \|\mathbf{P}''\| = \|\mathbf{Q}''\| = \|\mathbf{R}''\| = \|\mathbf{S}''\| = 1$, encuentre $l_{2,1}$, $l_{b,2}$, $l_{b,3}$, $l_{3,4} \in \mathcal{R}^+$, $\mathbf{P}' = \{P'_0, P'_1\}$, $\mathbf{Q}' = \{Q'_0, Q'_1\}$, $\mathbf{R}' = \{R'_0, R'_1\}$, $\mathbf{S}' = \{S'_0, S'_1\}$, $\mathbf{P} = \{P_0, P_1\}$, $\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}$, $\mathbf{R} = \{R_0, R_1\}$, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1\}$, $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$, $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$, $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$, $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$ tal que las expresiones (3.14) sean satisfechas y

$$P'_0{}^2 + P'_1{}^2 = 1$$

$$Q'_0{}^2 + Q'_1{}^2 = 1$$

$$R'_0{}^2 + R'_1{}^2 = 1$$

$$S'_0{}^2 + S'_1{}^2 = 1$$

$$P_0{}^2 + P_1{}^2 = 1$$

$$Q_0{}^2 + Q_1{}^2 = 1$$

$$R_0{}^2 + R_1{}^2 = 1$$

$$S_0{}^2 + S_1{}^2 = 1$$

$$p_0{}^2 + p_1{}^2 = 1$$

$$q_0{}^2 + q_1{}^2 = 1$$

$$r_0{}^2 + r_1{}^2 = 1$$

$$s_0{}^2 + s_1{}^2 = 1''.$$

El problema arriba escrito forma un sistema de 28 ecuaciones con 28 incógnitas del tipo polinomial no lineal.

El modelo para cinco puntos de precisión es válido siempre que las condicionantes de cuerpo rígido y el área de trabajo sean consideradas. Note además, que para cada sistema de números complejos $(\mathbf{P}'', \mathbf{Q}'', \mathbf{R}'', \mathbf{S}'')$ y $(\mathbf{P}''', \mathbf{Q}''', \mathbf{R}''', \mathbf{S}''')$ propuesto, debe encontrarse las dimensiones del mecanismo, y los complejos $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$, $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$ y $(\mathbf{P}', \mathbf{Q}', \mathbf{R}', \mathbf{S}')$.

En síntesis el modelo por solucionar es el siguiente:

1) Ecuaciones (3.14)

$$(Piv 1) \quad \underline{r}_{d,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{e,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{f,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{g,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P''' \otimes P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q''' \otimes Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$(Piv 2) \quad \underline{r}_{d,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{e,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{f,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{g,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S''' \otimes S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R''' \otimes R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

y

$$P'_{0^2} + P'_{1^2} = 1$$

$$Q'_{0^2} + Q'_{1^2} = 1$$

$$R'_{0^2} + R'_{1^2} = 1$$

$$S'_{0^2} + S'_{1^2} = 1$$

$$P_0^2 + P_1^2 = 1$$

$$Q_0^2 + Q_1^2 = 1$$

$$R_0^2 + R_1^2 = 1$$

$$S_0^2 + S_1^2 = 1$$

$$p_0^2 + p_1^2 = 1$$

$$q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$r_0^2 + r_1^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_1^2 = 1$$

2) Incógnitas

2.1) De dimensión: $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4} \in \mathfrak{R}^+$.

2.2) Angulares: $\mathbf{P}' = \{P'_{0^2}, P'_{1^2}\}$, $\mathbf{Q}' = \{Q'_{0^2}, Q'_{1^2}\}$, $\mathbf{R}' = \{R'_{0^2}, R'_{1^2}\}$, $\mathbf{S}' = \{S'_{0^2}, S'_{1^2}\}$,

$\mathbf{P} = \{P_0, P_1\}$, $\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}$, $\mathbf{R} = \{R_0, R_1\}$, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1\}$, $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$,

$\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$, $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$, $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$.

3) Datos conocidos

3.1) Coordenadas de los puntos de precisión: $\underline{\mathbf{r}}_{d,b} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{\mathbf{r}}_{e,b} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{\mathbf{r}}_{f,b} \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{\mathbf{r}}_{g,b} \in \mathfrak{R}^2$.

3.2) Coordenadas de los pivotes: $(X_{\text{Piv } 1}, Y_{\text{Piv } 1}) \in \varepsilon \times \varepsilon$, $(X_{\text{Piv } 2}, Y_{\text{Piv } 2}) \in \varepsilon \times \varepsilon$.

3.3) Parámetros de los complejos: $\mathbf{P}''' = \{P'''_{0^2}, P'''_{1^2}\}$, $\mathbf{Q}''' = \{Q'''_{0^2}, Q'''_{1^2}\}$,

$\mathbf{R}''' = \{R'''_{0^2}, R'''_{1^2}\}$, $\mathbf{S}''' = \{S'''_{0^2}, S'''_{1^2}\}$, $\mathbf{P}'' = \{P''_{0^2}, P''_{1^2}\}$, $\mathbf{Q}'' = \{Q''_{0^2}, Q''_{1^2}\}$,

$\mathbf{R}'' = \{R''_{0^2}, R''_{1^2}\}$, $\mathbf{S}'' = \{S''_{0^2}, S''_{1^2}\}$.

3.12 Algunas consideraciones sobre la solución del problema

En esta sección se discuten algunas consideraciones relacionadas con el problema y su solución. En otras palabras, se realizará una síntesis del proceso de sistematización descrito en la sección anterior.

En primer lugar, el problema formulado en la sección 3.1 de este capítulo, ha sido satisfecho al plantear el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido: cinco puntos de precisión. Además, el modelo fue realizado siguiendo los pasos del método descrito en el capítulo 2 de esta tesis.

En segundo lugar, los modelos se enmarcaron dentro de las restricciones del problema con lo cual se concluye que tales modelos satisfacen las restricciones. Además, la hipótesis formulada en la sección 1.2 también fue satisfecha y, en consecuencia, las premisas o axiomas de referencia también fueron satisfechos [1], [15].

En este sentido se concluye, finalmente, que la solución del problema existe, es consistente y única para el marco de referencia básico (reglas de síntesis) y auxiliar (reglas de análisis).

CAPÍTULO 4

Modelación del problema de síntesis para cuatro puntos de precisión

Introducción. En este capítulo se construye un modelo de síntesis de un mecanismo de 4 barras para el problema de conducción de cuerpo rígido: cuatro puntos de precisión. Se usará el método descrito en el capítulo 2 para construir dicho modelo. Antes se procederá a definir nuevamente el problema particular.

4.1 Definición del problema y restricciones

En esta sección se plantea el problema por solucionar en esta tesis, así como sus restricciones fundamentales. Considere el siguiente problema:

“Se requiere modelar el problema de síntesis de un mecanismo”

Las restricciones (R_n) fundamentales son las siguientes:

- El mecanismo está compuesto por 4 eslabones rígidos conectados por juntas rotacionales (R_1).
- El problema de síntesis es de conducción de cuerpo rígido (R_2).
- Se analizarán cuatro puntos de precisión (R_3).
- Las coordenadas de los puntos de precisión son conocidas (R_4).
- Los desplazamientos angulares relacionados con las posiciones de la conducción del cuerpo rígido son conocidas (R_5).
- Las coordenadas de los pivotes que conectan al mecanismo con la tierra del sistema son conocidas (R_6).
- El eslabón acoplador es rígido (R_7).
- Es fija y conocida el área de trabajo (R_8).

El problema formulado anteriormente y sus restricciones se sintetizan de la manera siguiente:

“Encuéntrese un modelo que permita determinar las dimensiones principales de los eslabones que componen un mecanismo tal que:

$$R_1 = \hat{R}_1$$

$$R_2 = \hat{R}_2$$

$$R_3 = \hat{R}_3$$

$$R_4 = \hat{R}_4$$

$$R_5 = \hat{R}_5$$

$$R_6 = \hat{R}_6$$

$$R_7 = \hat{R}_7$$

$$R_8 = \hat{R}_8$$

sean satisfechas.”

4.2 El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido cuatro puntos de precisión

El primer paso que debe ser dado para construir el modelo de síntesis, es definir más específicamente el problema, esto es, sus características fundamentales. Considere el siguiente problema:

“Una banda (B_1) transporta una caja “C” del punto “a” al punto “b” como se muestra en la figura 4.1. La caja deberá localizarse pasado un tiempo en el punto “f” situado en la banda (B_2) pasando por dos puntos intermedios llamados “d” y “e”. Se asume que el transporte de “C” de banda a banda será por medio de un mecanismo plano de cuatro barras.”

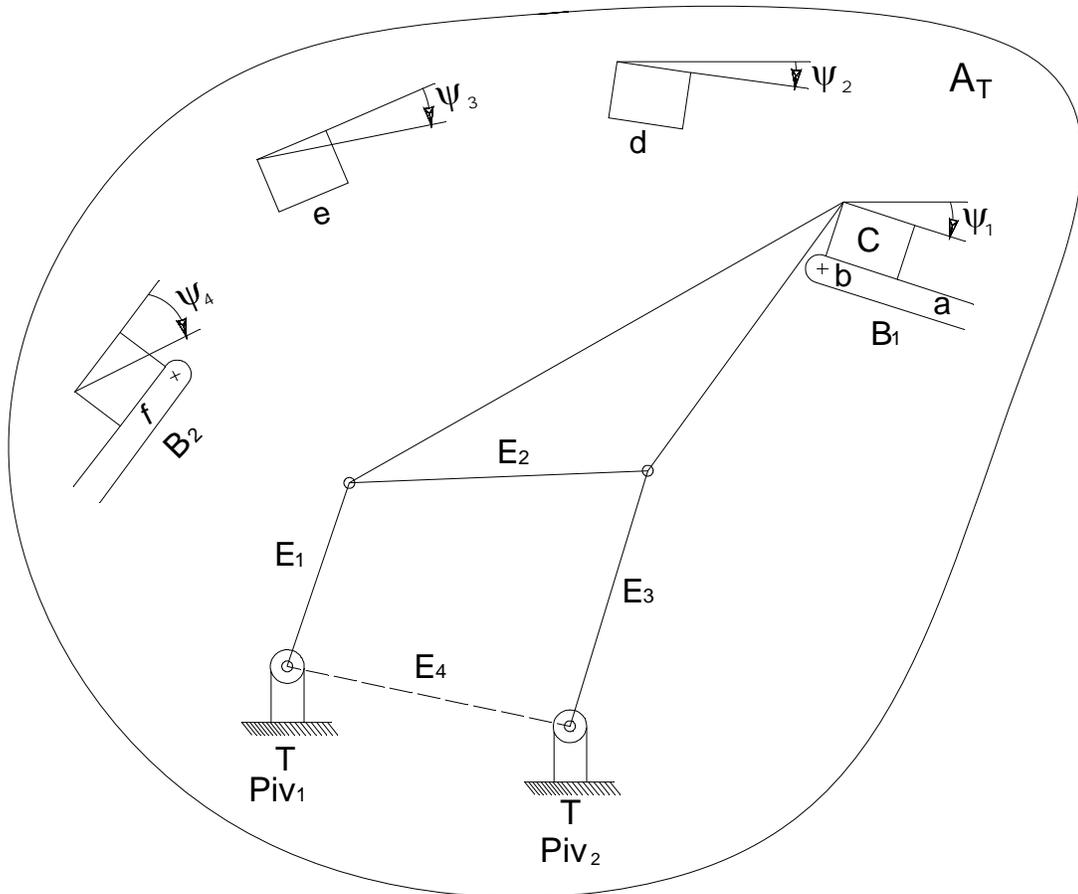


Figura 4.1. Caracterización del problema

La caja “C”, además de pasar por los puntos b, d, e, y f deberá satisfacer las orientaciones $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \in \mathfrak{R}$ y el área de trabajo “ A_T ”.

Las restricciones particulares del problema son:

- 1) La caja “C” es rígida.
- 2) No se considera el movimiento de las bandas y el análisis se centra en los puntos b, d e y f.
- 3) El mecanismo no debe salir del área de trabajo.
- 4) La configuración del eslabón acoplador es arbitraria.
- 5) La orientación del eslabón acoplador debe ser igual a $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \in \mathfrak{R}$.

4.3 Configuraciones del mecanismo

De acuerdo con el paso 2) descrito en el capítulo 2, se debe asociar una configuración de un mecanismo por cada punto de precisión relacionado con el problema de conducción de cuerpo rígido. Dichas configuraciones se muestran en la figura 4.2.

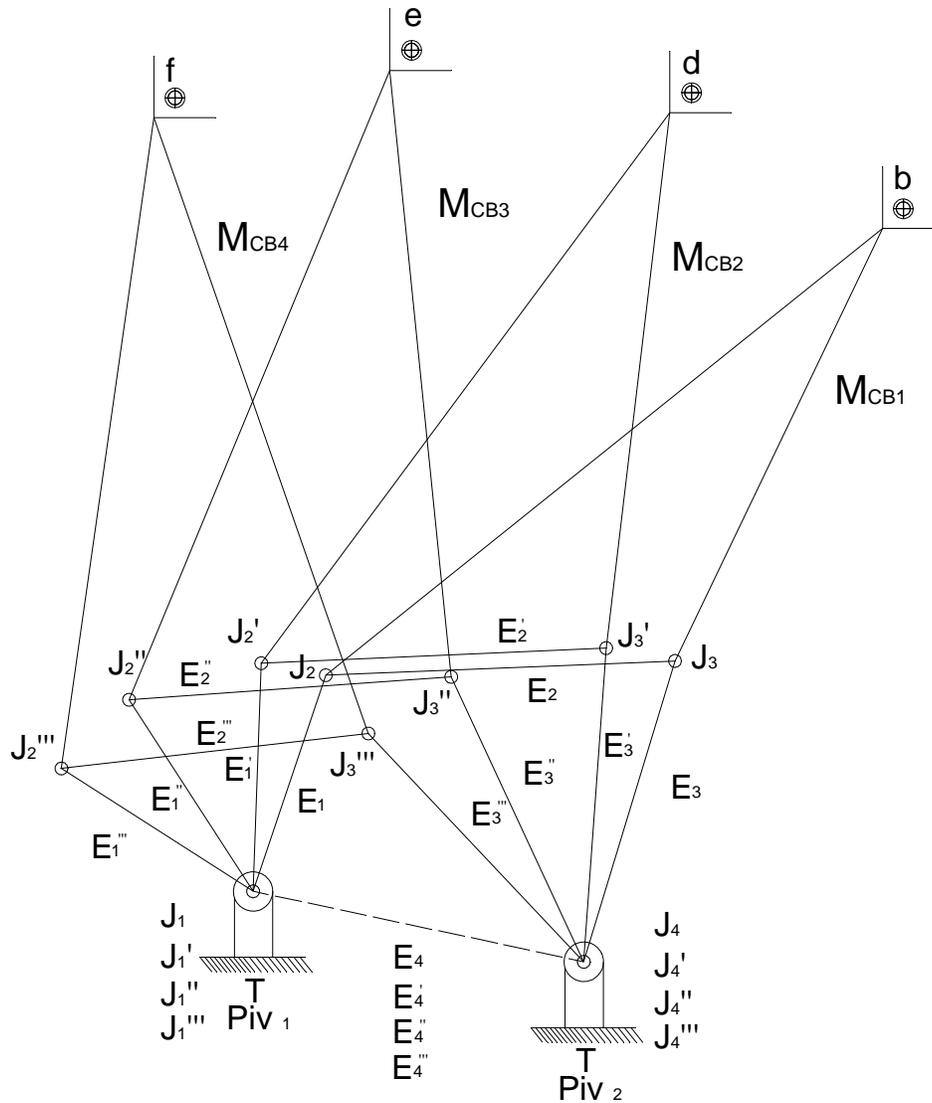


Figura 4.2. Configuraciones del mecanismo

Es importante mencionar que, en realidad, no existen cuatro mecanismos sino más bien un mecanismo y tres configuraciones. Lo que se busca es que las dimensiones del mecanismo inicial (M_{CB1}) sean las mismas que las asociadas con las configuraciones y que, por ello, el mecanismo pueda transportar la caja C de banda a banda. Nótese que en realidad lo que busca

determinar son las dimensiones de los eslabones del mecanismo; esto es, su diseño dimensional primario o de configuración primaria. Además, las configuraciones del mecanismo mostradas en la figura 4.2 permitirán relacionar, en primera instancia, los pivotes con los puntos de precisión.

4.4 Modelo de configuración en términos de la teoría de conjuntos

Una vez definido el mecanismo y sus configuraciones, el siguiente paso es caracterizar un modelo de configuración por medio de la teoría de conjuntos[15]. Considere que existen los cuatro mecanismos, entonces los multicuerpos M_{CB1} , M_{CB2} , M_{CB3} , M_{CB4} mostrados en la figura 4.2 ,se pueden representar en términos de la unión de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 M_{CB1} &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 & (4.1) \\
 M_{CB2} &= E_1' \cup E_2' \cup E_3' \cup E_4' \\
 M_{CB3} &= E_1'' \cup E_2'' \cup E_3'' \cup E_4'' \\
 M_{CB4} &= E_1''' \cup E_2''' \cup E_3''' \cup E_4'''
 \end{aligned}$$

Por otro lado, las juntas que conectan a los eslabones pueden ser representadas en términos de intersecciones, esto es:

$$\begin{aligned}
 (MCB1) \quad J_1 &= E_1 \cap E_4 & , \quad J_2 &= E_1 \cap E_2 & (4.2) \\
 & J_3 &= E_2 \cap E_3 & , \quad J_4 &= E_3 \cap E_4 \\
 (MCB2) \quad J_1' &= E_1' \cap E_4' & , \quad J_2' &= E_1' \cap E_2' \\
 & J_3' &= E_2' \cap E_3' & , \quad J_4' &= E_3' \cap E_4' \\
 (MCB3) \quad J_1'' &= E_1'' \cap E_4'' & , \quad J_2'' &= E_1'' \cap E_2'' \\
 & J_3'' &= E_2'' \cap E_3'' & , \quad J_4'' &= E_3'' \cap E_4'' \\
 (MCB4) \quad J_1''' &= E_1''' \cap E_4''' & , \quad J_2''' &= E_1''' \cap E_2''' \\
 & J_3''' &= E_2''' \cap E_3''' & , \quad J_4''' &= E_3''' \cap E_4'''
 \end{aligned}$$

Aquí,

$$\begin{aligned}
 E_4 &= E_4' = E_4'' = E_4''' & (4.3) \\
 J_1 &= J_1' = J_1'' = J_1''' \\
 J_4 &= J_4' = J_4'' = J_4'''
 \end{aligned}$$

Obsérvese que lo que se busca en realidad es que la siguiente relación sea satisfecha:

$$M_{CB1} = M_{CB2} = M_{CB3} = M_{CB4} \quad (4.4)$$

4.5 Vectores de posición

En esta sección se aplica el paso 4) del método de modelación descrito en el capítulo 2 de esta tesis. Dicho paso consiste en asociar vectores de posición sobre el mecanismo y sus configuraciones con el propósito de relacionar los pivotes, puntos de precisión y eslabones del mecanismo. La figura 4.3 muestra los vectores de posición asociados con el multicuerpo motivo de estudio en este trabajo de tesis.

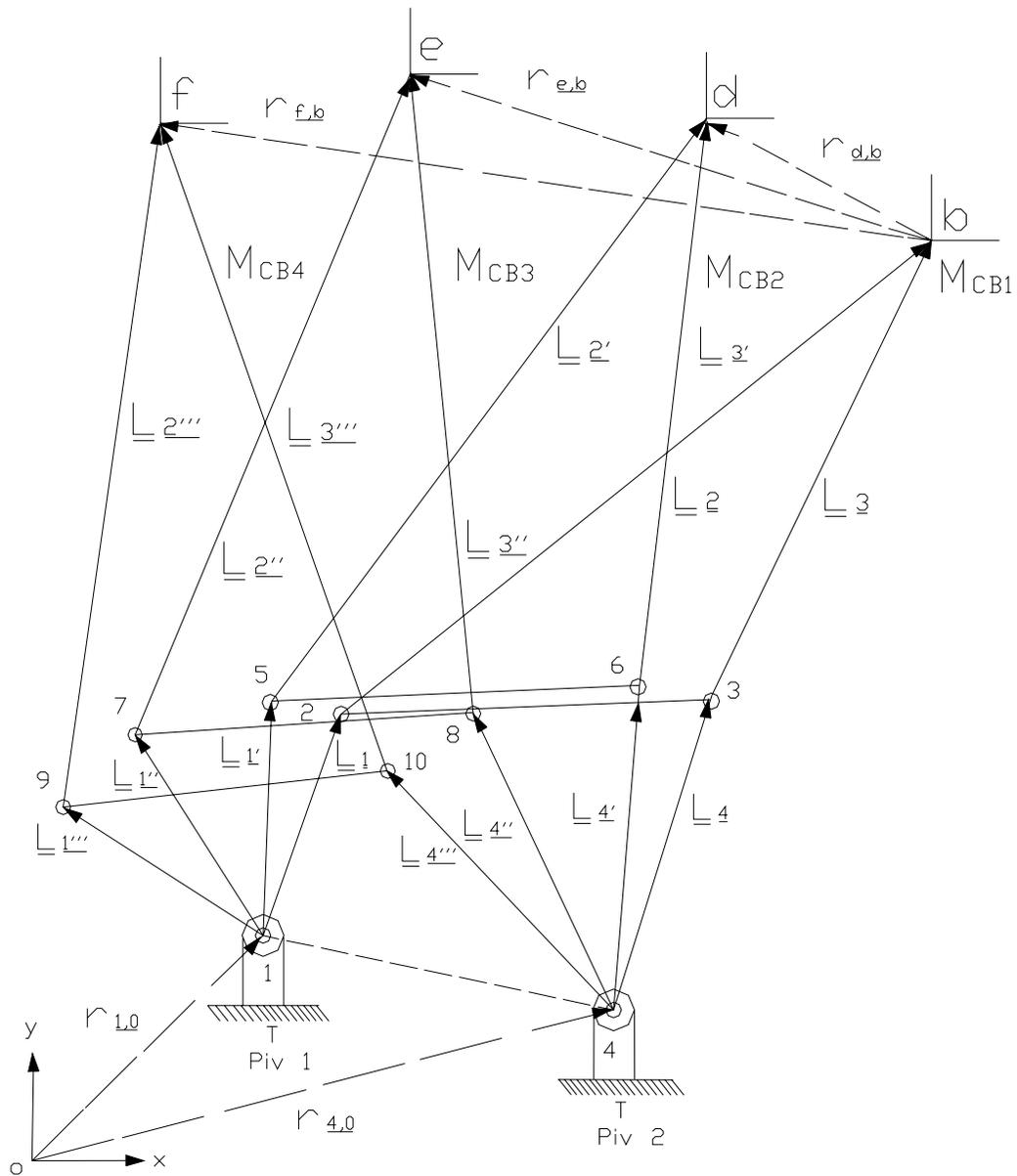


Figura 4.3. Vectores de posición

Los vectores de posición mostrados en la figura 4.3 se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (\text{M}_{\text{CB1}}) \quad & \underline{L}_1 = 2 - 1 \quad , \quad \underline{L}_2 = b - 2 \\
 & \underline{L}_3 = b - 3 \quad , \quad \underline{L}_4 = 3 - 4 \\
 (\text{M}_{\text{CB2}}) \quad & \underline{L}_{1'} = 5 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{2'} = d - 5 \\
 & \underline{L}_{3'} = d - 6 \quad , \quad \underline{L}_{4'} = 6 - 4 \\
 (\text{M}_{\text{CB3}}) \quad & \underline{L}_{1''} = 7 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{2''} = e - 7 \\
 & \underline{L}_{3''} = e - 8 \quad , \quad \underline{L}_{4''} = 8 - 4 \\
 (\text{M}_{\text{CB4}}) \quad & \underline{L}_{1'''} = 9 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{2'''} = f - 9 \\
 & \underline{L}_{3'''} = f - 10 \quad , \quad \underline{L}_{4'''} = 10 - 4
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 r_{d,b} &= d - b \\
 r_{e,b} &= e - b \\
 r_{f,b} &= f - b
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dichos vectores están definidos sobre los puntos de precisión. Obsérvese que existen puntos que relacionan los vectores definidos en las expresiones (4.5) y (4.6) lo que permitirá, en la siguiente sección construir un sistema de ecuaciones de lazo.

4.6 Ecuaciones de lazo

El objetivo ahora es encontrar un modelo que permita relacionar los pivotes, el mecanismo y sus configuraciones, así como los puntos de precisión. Para ello, será usada la premisa o axioma 1 descrito en la sección 1.2, del capítulo 1 de esta tesis. Obsérvese en la figura 4.3 que dichas relaciones se pueden determinar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (\text{Piv } 1) \quad & \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus r_{d,b} = \underline{L}_{1'} \oplus \underline{L}_{2'} \\
 & \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus r_{e,b} = \underline{L}_{1''} \oplus \underline{L}_{2''} \\
 & \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus r_{f,b} = \underline{L}_{1'''} \oplus \underline{L}_{2'''} \\
 (\text{Piv } 2) \quad & \underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus r_{d,b} = \underline{L}_{4'} \oplus \underline{L}_{3'} \\
 & \underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus r_{e,b} = \underline{L}_{4''} \oplus \underline{L}_{3''} \\
 & \underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus r_{f,b} = \underline{L}_{4'''} \oplus \underline{L}_{3'''}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

O, en forma equivalente:

$$(Piv 1) \quad \underline{r}_{d,b} = \underline{L}_1' \oplus \underline{L}_2' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2) \quad (4.8)$$

$$\underline{r}_{e,b} = \underline{L}_1'' \oplus \underline{L}_2'' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2)$$

$$\underline{r}_{f,b} = \underline{L}_1''' \oplus \underline{L}_2''' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2)$$

$$(Piv 2) \quad \underline{r}_{d,b} = \underline{L}_4' \oplus \underline{L}_3' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3)$$

$$\underline{r}_{e,b} = \underline{L}_4'' \oplus \underline{L}_3'' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3)$$

$$\underline{r}_{f,b} = \underline{L}_4''' \oplus \underline{L}_3''' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3)$$

Nótese que el sistema de ecuaciones descrito anteriormente esta dado en términos de la operación aditiva definida en el espacio vectorial de números complejos. Por otro lado, las expresiones (4.8) son conocidas como ecuaciones de lazo [5]. Sin embargo, las expresiones o ecuaciones de lazo descritas anteriormente solo describen posiciones en términos de coordenadas cartesianas y no expresan información referente con las posiciones angulares del mecanismo y sus configuraciones y las posiciones angulares del cuerpo rígido por transportarse. Para poder medir dichos desplazamientos angulares se asociarán, en la sección siguiente, sistemas locales móviles de referencia.

4.7 Sistemas de referencia locales

Considere que sobre las juntas que conectan los eslabones del mecanismo en estudio y sus configuraciones se asocian sistemas locales de referencia móviles de tal forma que dichos sistemas se fijen a los eslabones y roten con ellos. Dichos sistemas son ortogonales y se muestran en la figura 4.4

Observe que las bases $\underline{e}_i^I \in \mathfrak{R}^2$ están asociadas con el mecanismo de referencia (M_{CB1}) y las bases $\underline{a}_i^I \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{b}_i^I \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{c}_i^I \in \mathfrak{R}^2$ están relacionadas con las tres configuraciones M_{CB2} , M_{CB3} , M_{CB4} . Por otro lado, las relaciones entre los desplazamientos angulares de cuerpo rígido por transportarse y las posiciones angulares del mecanismo y sus configuraciones están dadas por las bases $\underline{e}_i^{III} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{a}_i^{III} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{b}_i^{III} \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{c}_i^{III} \in \mathfrak{R}^2$, esto es consecuencia del axioma 2 descrito en la sección 1.2 del capítulo 1 de este trabajo de tesis.

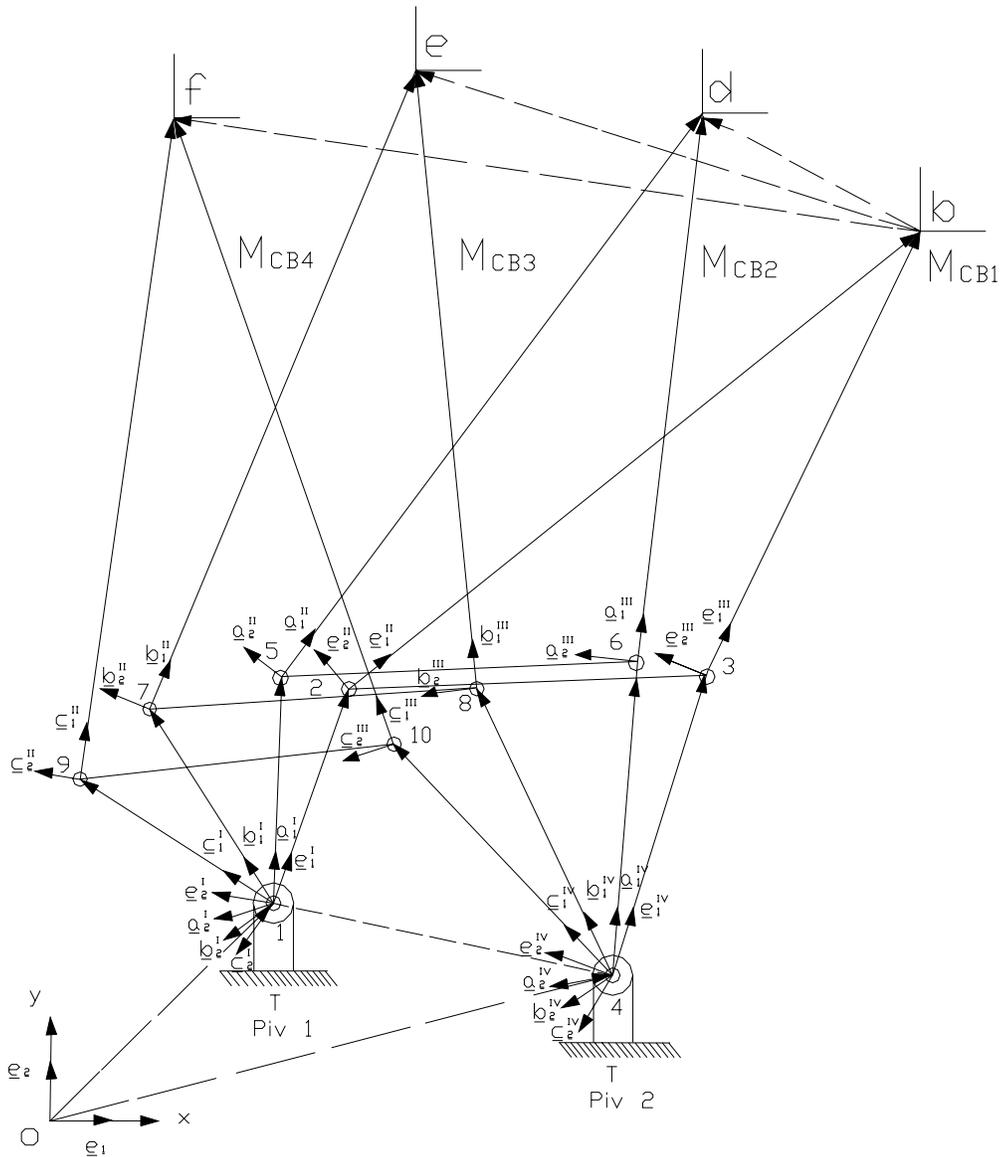


Figura 4.4. Sistemas locales

Los vectores de posición mostrados en la figura 4.4 pueden ser escritos en términos de sus longitudes(l) y las componentes de las bases locales asociadas (e, a, b y c); esto es:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_{CB1}) \quad \underline{L}_1 &= l_1 \bullet \mathbf{e}_1^I \\
 \underline{L}_2 &= l_2 \bullet \mathbf{e}_1^{II} \\
 \underline{L}_3 &= l_3 \bullet \mathbf{e}_1^{III} \\
 \underline{L}_4 &= l_4 \bullet \mathbf{e}_1^{IV}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
(\text{M}_{\text{CB2}}) \quad & \underline{L}_1' = l_1' \bullet \underline{a}_1^{\text{I}} \\
& \underline{L}_2' = l_2' \bullet \underline{a}_1^{\text{II}} \\
& \underline{L}_3' = l_3' \bullet \underline{a}_1^{\text{III}} \\
& \underline{L}_4' = l_4' \bullet \underline{a}_1^{\text{IV}} \\
(\text{M}_{\text{CB3}}) \quad & \underline{L}_1'' = l_1'' \bullet \underline{b}_1^{\text{I}} \\
& \underline{L}_2'' = l_2'' \bullet \underline{b}_1^{\text{II}} \\
& \underline{L}_3'' = l_3'' \bullet \underline{b}_1^{\text{III}} \\
& \underline{L}_4'' = l_4'' \bullet \underline{b}_1^{\text{IV}} \\
(\text{M}_{\text{CB4}}) \quad & \underline{L}_1''' = l_1''' \bullet \underline{c}_1^{\text{I}} \\
& \underline{L}_2''' = l_2''' \bullet \underline{c}_1^{\text{II}} \\
& \underline{L}_3''' = l_3''' \bullet \underline{c}_1^{\text{III}} \\
& \underline{L}_4''' = l_4''' \bullet \underline{c}_1^{\text{IV}}
\end{aligned}$$

Aquí, $l_1, l_2, l_3, l_4, l_1', l_2', l_3', l_4', l_1'', l_2'', l_3'', l_4'', l_1''', l_2''', l_3''', l_4''' \in \mathfrak{R}^+$ son las longitudes principales de los eslabones (medidas de junta a junta) que deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
l_1 &= l_1' = l_1'' = l_1''' \\
l_2 &= l_2' = l_2'' = l_2''' \\
l_3 &= l_3' = l_3'' = l_3''' \\
l_4 &= l_4' = l_4'' = l_4'''
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Con las expresiones (4.9) es posible escribir las ecuaciones de lazo (4.7) y (4.8) en términos de los sistemas locales móviles. Esto se hará en la sección siguiente.

4.8 Ecuaciones de lazo en términos de los sistemas locales.

En esta sección se usarán las expresiones para representar las ecuaciones de lazo (4.7) en función de las bases locales; esto es:

$$\begin{aligned}
(\text{Piv } 1) \quad & l_1 \bullet \underline{e}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{\text{II}} \oplus \underline{r}_{\text{d,b}} = l_1 \bullet \underline{a}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{a}_1^{\text{II}} \\
& l_1 \bullet \underline{e}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{\text{II}} \oplus \underline{r}_{\text{e,b}} = l_1 \bullet \underline{b}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{b}_1^{\text{II}} \\
& l_1 \bullet \underline{e}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{\text{II}} \oplus \underline{r}_{\text{f,b}} = l_1 \bullet \underline{c}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{c}_1^{\text{II}}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
(\text{Piv } 2) \quad l_4 \bullet \underline{e}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{\text{III}} \oplus \underline{r}_{\text{d.b}} &= l_4 \bullet \underline{a}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{a}_1^{\text{III}} \\
l_4 \bullet \underline{e}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{\text{III}} \oplus \underline{r}_{\text{e.b}} &= l_4 \bullet \underline{b}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{b}_1^{\text{III}} \\
l_4 \bullet \underline{e}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{\text{III}} \oplus \underline{r}_{\text{f.b}} &= l_4 \bullet \underline{c}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{c}_1^{\text{III}}
\end{aligned}$$

O, equivalentemente:

$$\begin{aligned}
(\text{Piv } 1) \quad \underline{r}_{\text{d.b}} &= l_1 \bullet \underline{a}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{a}_1^{\text{II}} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{\text{II}}] & (4.12) \\
\underline{r}_{\text{e.b}} &= l_1 \bullet \underline{b}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{b}_1^{\text{II}} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{\text{II}}] \\
\underline{r}_{\text{f.b}} &= l_1 \bullet \underline{c}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{c}_1^{\text{II}} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{\text{II}}] \\
(\text{Piv } 2) \quad \underline{r}_{\text{d.b}} &= l_4 \bullet \underline{a}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{a}_1^{\text{III}} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{\text{III}}] \\
\underline{r}_{\text{e.b}} &= l_4 \bullet \underline{b}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{b}_1^{\text{III}} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{\text{III}}] \\
\underline{r}_{\text{f.b}} &= l_4 \bullet \underline{c}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{c}_1^{\text{III}} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{\text{III}}]
\end{aligned}$$

Cabe señalar que las expresiones (4.12) requieren ser escritas en términos de un sistema fijo inercial o canónica. Dicho sistema se localiza en el origen de coordenadas según se muestra en la figura 4.4.

4.9 Sistema inercial y rotaciones

Para poder expresar las relaciones angulares entre el mecanismo y sus configuraciones es necesario considerar lo siguiente:

- 1) Las bases $\underline{e}_i^{\text{I}}, \underline{e}_i^{\text{II}}, \underline{e}_i^{\text{III}}, \underline{e}_i^{\text{IV}} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de la canónica $\underline{e}_i \in \mathfrak{R}^2$
- 2) Las bases $\underline{a}_i^{\text{I}}, \underline{a}_i^{\text{II}}, \underline{a}_i^{\text{III}}, \underline{a}_i^{\text{IV}} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{e}_i^{\text{I}}, \underline{e}_i^{\text{II}}, \underline{e}_i^{\text{III}}, \underline{e}_i^{\text{IV}} \in \mathfrak{R}^2$
- 3) Las bases $\underline{b}_i^{\text{I}}, \underline{b}_i^{\text{II}}, \underline{b}_i^{\text{III}}, \underline{b}_i^{\text{IV}} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{a}_i^{\text{I}}, \underline{a}_i^{\text{II}}, \underline{a}_i^{\text{III}}, \underline{a}_i^{\text{IV}} \in \mathfrak{R}^2$.
- 4) Las bases $\underline{c}_i^{\text{I}}, \underline{c}_i^{\text{II}}, \underline{c}_i^{\text{III}}, \underline{c}_i^{\text{IV}} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{b}_i^{\text{I}}, \underline{b}_i^{\text{II}}, \underline{b}_i^{\text{III}}, \underline{b}_i^{\text{IV}} \in \mathfrak{R}^2$.

Esta consideración permitirá modelar los cambios de base del sistema inercial sobre los sistemas móviles del mecanismo y sus configuraciones. De acuerdo con el capítulo 2 de esta tesis, la transformación lineal descrita por la expresión (2.2) puede ser usada para modelar las

rotaciones de la base local sobre las móviles. Dichas rotaciones se expresan en términos de números complejos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
(M_{CB1}) \quad \underline{e}_1^I &= R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1) = \overline{p \otimes e_1} \\
\underline{e}_1^{II} &= R_2(\mathbf{q}, \underline{e}_1) = \overline{q \otimes e_1} \\
\underline{e}_1^{III} &= R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1) = \overline{r \otimes e_1} \\
\underline{e}_1^{IV} &= R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1) = \overline{s \otimes e_1} \\
(M_{CB2}) \quad \underline{a}_1^I &= R_2(\mathbf{P}, \underline{e}_1^I) = R_2(\mathbf{P}, R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1)) = \overline{P \otimes p \otimes e_1} \\
\underline{a}_1^{II} &= R_2(\mathbf{Q}, \underline{e}_1^{II}) = R_2(\mathbf{Q}, R_2(\mathbf{q}, \underline{e}_1)) = \overline{Q \otimes q \otimes e_1} \\
\underline{a}_1^{III} &= R_2(\mathbf{R}, \underline{e}_1^{III}) = R_2(\mathbf{R}, R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1)) = \overline{R \otimes r \otimes e_1} \\
\underline{a}_1^{IV} &= R_2(\mathbf{S}, \underline{e}_1^{IV}) = R_2(\mathbf{S}, R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1)) = \overline{S \otimes s \otimes e_1} \\
(M_{CB3}) \quad \underline{b}_1^I &= R_2(\mathbf{P}', \underline{a}_1^I) = R_2(\mathbf{P}', R_2(\mathbf{P}, \underline{e}_1^I)) = R_2(\mathbf{P}', R_2(\mathbf{P}, R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \\
\underline{b}_1^{II} &= R_2(\mathbf{Q}', \underline{a}_1^{II}) = R_2(\mathbf{Q}', R_2(\mathbf{Q}, \underline{e}_1^{II})) = R_2(\mathbf{Q}', R_2(\mathbf{Q}, R_2(\mathbf{q}, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \\
\underline{b}_1^{III} &= R_2(\mathbf{R}', \underline{a}_1^{III}) = R_2(\mathbf{R}', R_2(\mathbf{R}, \underline{e}_1^{III})) = R_2(\mathbf{R}', R_2(\mathbf{R}, R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \\
\underline{b}_1^{IV} &= R_2(\mathbf{S}', \underline{a}_1^{IV}) = R_2(\mathbf{S}', R_2(\mathbf{S}, \underline{e}_1^{IV})) = R_2(\mathbf{S}', R_2(\mathbf{S}, R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \\
(M_{CB4}) \quad \underline{c}_1^I &= R_2(\mathbf{P}'', \underline{b}_1^I) = R_2(\mathbf{P}'', R_2(\mathbf{P}', \underline{a}_1^I)) = R_2(\mathbf{P}'', R_2(\mathbf{P}', R_2(\mathbf{P}, R_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \\
\underline{c}_1^{II} &= R_2(\mathbf{Q}'', \underline{b}_1^{II}) = R_2(\mathbf{Q}'', R_2(\mathbf{Q}', \underline{a}_1^{II})) = R_2(\mathbf{Q}'', R_2(\mathbf{Q}', R_2(\mathbf{Q}, R_2(\mathbf{q}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \\
\underline{c}_1^{III} &= R_2(\mathbf{R}'', \underline{b}_1^{III}) = R_2(\mathbf{R}'', R_2(\mathbf{R}', \underline{a}_1^{III})) = R_2(\mathbf{R}'', R_2(\mathbf{R}', R_2(\mathbf{R}, R_2(\mathbf{r}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \\
\underline{c}_1^{IV} &= R_2(\mathbf{S}'', \underline{b}_1^{IV}) = R_2(\mathbf{S}'', R_2(\mathbf{S}', \underline{a}_1^{IV})) = R_2(\mathbf{S}'', R_2(\mathbf{S}', R_2(\mathbf{S}, R_2(\mathbf{s}, \underline{e}_1)))) \\
&= \overline{S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Aquí, $P'', P', P, p, Q'', Q', Q, q, R'', R', R, r, S'', S', S, s \in \mathfrak{R}^2$ son números complejos de norma unitaria. Cabe señalar que con las expresiones (4.12) es posible escribir las ecuaciones de lazo (4.10) en función de la base inercial.

4.10 Ecuaciones de lazo, ecuaciones de norma y relaciones geométricas

Las ecuaciones de lazo (4.12) se escriben al considerar las relaciones (4.13) de la manera siguiente:

$$(Piv 1) \quad \underline{r}_{d,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}] \quad (4.14)$$

$$\underline{r}_{e,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{f,b} = l_1 \cdot \{ \overline{P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$(Piv 2) \quad \underline{r}_{d,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{e,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{f,b} = l_4 \cdot \{ \overline{S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

Note que las ecuaciones anteriores proporcionan la información de todo el sistema de análisis, pues están relacionados todos y cada una de las variables involucradas. Además, el sistema (4.14) está formado por 12 ecuaciones escalares. Por otro lado, las ecuaciones de norma unitaria se describen, de acuerdo con la expresión (2.3) del capítulo 2 de esta tesis, de la manera siguiente:

$$\|P''^2\| = P''_0{}^2 + P''_1{}^2 = 1 \quad (4.15)$$

$$\|Q''^2\| = Q''_0{}^2 + Q''_1{}^2 = 1$$

$$\|R''^2\| = R''_0{}^2 + R''_1{}^2 = 1$$

$$\|S''^2\| = S''_0{}^2 + S''_1{}^2 = 1$$

$$\|P'^2\| = P'_0{}^2 + P'_1{}^2 = 1$$

$$\|Q'^2\| = Q'_0{}^2 + Q'_1{}^2 = 1$$

$$\|R'^2\| = R'_0{}^2 + R'_1{}^2 = 1$$

$$\|S'^2\| = S'_0{}^2 + S'_1{}^2 = 1$$

$$\|P^2\| = P_0{}^2 + P_1{}^2 = 1$$

$$\|Q^2\| = Q_0{}^2 + Q_1{}^2 = 1$$

$$\|R^2\| = R_0{}^2 + R_1{}^2 = 1$$

$$\|S^2\| = S_0{}^2 + S_1{}^2 = 1$$

$$\|p^2\| = p_0{}^2 + p_1{}^2 = 1$$

$$\|q^2\| = q_0{}^2 + q_1{}^2 = 1$$

$$\|r^2\| = r_0{}^2 + r_1{}^2 = 1$$

$$\|s^2\| = s_0{}^2 + s_1{}^2 = 1$$

Observe que las ecuaciones de norma son no lineales. Por otro lado, las relaciones geométricas entre las componentes de las rotaciones y los números complejos, están dadas por la relación (2.4) del capítulo 2 de esta tesis; esto es:

$$\begin{array}{lll}
P'' = \{P''_0, P''_1\}; & P''_0 \in \mathfrak{R}, & P''_0 = -\text{Cos } \beta_1 \\
& P''_1 \in \mathfrak{R}, & P''_1 = -(\pm \text{Sen } \beta_1) \\
Q'' = \{Q''_0, Q''_1\}; & Q''_0 \in \mathfrak{R}, & Q''_0 = -\text{Cos } \beta_2 \\
& Q''_1 \in \mathfrak{R}, & Q''_1 = -(\pm \text{Sen } \beta_2) \\
R'' = \{R''_0, R''_1\}; & R''_0 \in \mathfrak{R}, & R''_0 = -\text{Cos } \beta_3 \\
& R''_1 \in \mathfrak{R}, & R''_1 = -(\pm \text{Sen } \beta_3) \\
S'' = \{S''_0, S''_1\}; & S''_0 \in \mathfrak{R}, & S''_0 = -\text{Cos } \beta_4 \\
& S''_1 \in \mathfrak{R}, & S''_1 = -(\pm \text{Sen } \beta_4) \\
P' = \{P'_0, P'_1\}; & P'_0 \in \mathfrak{R}, & P'_0 = -\text{Cos } \phi_1 \\
& P'_1 \in \mathfrak{R}, & P'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_1) \\
Q' = \{Q'_0, Q'_1\}; & Q'_0 \in \mathfrak{R}, & Q'_0 = -\text{Cos } \phi_2 \\
& Q'_1 \in \mathfrak{R}, & Q'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_2) \\
R' = \{R'_0, R'_1\}; & R'_0 \in \mathfrak{R}, & R'_0 = -\text{Cos } \phi_3 \\
& R'_1 \in \mathfrak{R}, & R'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_3) \\
S' = \{S'_0, S'_1\}; & S'_0 \in \mathfrak{R}, & S'_0 = -\text{Cos } \phi_4 \\
& S'_1 \in \mathfrak{R}, & S'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_4) \\
P = \{P_0, P_1\}; & P_0 \in \mathfrak{R}, & P_0 = -\text{Cos } \alpha_1 \\
& P_1 \in \mathfrak{R}, & P_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_1) \\
Q = \{Q_0, Q_1\}; & Q_0 \in \mathfrak{R}, & Q_0 = -\text{Cos } \alpha_2 \\
& Q_1 \in \mathfrak{R}, & Q_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_2) \\
R = \{R_0, R_1\}; & R_0 \in \mathfrak{R}, & R_0 = -\text{Cos } \alpha_3 \\
& R_1 \in \mathfrak{R}, & R_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_3) \\
S = \{S_0, S_1\}; & S_0 \in \mathfrak{R}, & S_0 = -\text{Cos } \alpha_4 \\
& S_1 \in \mathfrak{R}, & S_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_4)
\end{array} \tag{4.16}$$

$$\begin{array}{lll}
p = \{p_0, p_1\}; & p_0 \in \mathfrak{R}, & p_0 = -\text{Cos } \theta_1 \\
& p_1 \in \mathfrak{R}, & p_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_1) \\
q = \{q_0, q_1\}; & q_0 \in \mathfrak{R}, & q_0 = -\text{Cos } \theta_2 \\
& q_1 \in \mathfrak{R}, & q_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_2) \\
r = \{r_0, r_1\}; & r_0 \in \mathfrak{R}, & r_0 = -\text{Cos } \theta_3 \\
& r_1 \in \mathfrak{R}, & r_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_3) \\
s = \{s_0, s_1\}; & s_0 \in \mathfrak{R}, & s_0 = -\text{Cos } \theta_4 \\
& s_1 \in \mathfrak{R}, & s_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_4)
\end{array}$$

4.11 Sistema de ecuaciones y formulación del problema de síntesis

En esta sección se discutirá el conjunto de ecuaciones e incógnitas a partir del cual se formulará el problema de síntesis. Según las expresiones (4.15) y (4.16) existen 28 ecuaciones asociadas con el sistema; éstas son: 12 ecuaciones escalares relacionadas con las ecuaciones de lazo y 16 ecuaciones asociadas con las normas unitarias. Por otro lado se tiene 36 incógnitas; éstas son: 8 de longitud relacionadas con las dimensiones de los eslabones que componen al mecanismo de referencia y 28 incógnitas de componentes de las rotaciones; esto es, los desplazamientos angulares y los ejes, dos por cada complejo asociado. Por tanto, el sistema está formado por 28 ecuaciones y 36 incógnitas

Cabe señalar que solucionar un sistema de ecuaciones no cuadrado implica la existencia de múltiples soluciones. Es necesario, por tanto, determinar un sistema cuadrado de tal forma que sea posible obtener una solución única.

Considere las restricciones siguientes:

- 1) Condición de rigidez del eslabón acoplador.
- 2) Restricción del área de trabajo.

Las consecuencias lógicas de dichas restricciones son las siguientes:

- 1) Si α_2, ϕ_2 y $\beta_2 \in \mathcal{R}$ son conocidos, entonces $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \mathbf{Q}'' \in \mathcal{R}^2$ son conocidos.
- 2) Si $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \mathbf{Q}'' \in \mathcal{R}^2$ son conocidos, entonces $\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'' \in \mathcal{R}^2$ son conocidos.
- 3) $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{P}'' \in \mathcal{R}^2$ y $\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{S}'' \in \mathcal{R}^2$ son complejos de control en el área de trabajo.

La figura 4.5 muestra los ángulos relacionados con el área de trabajo controlable del mecanismo.

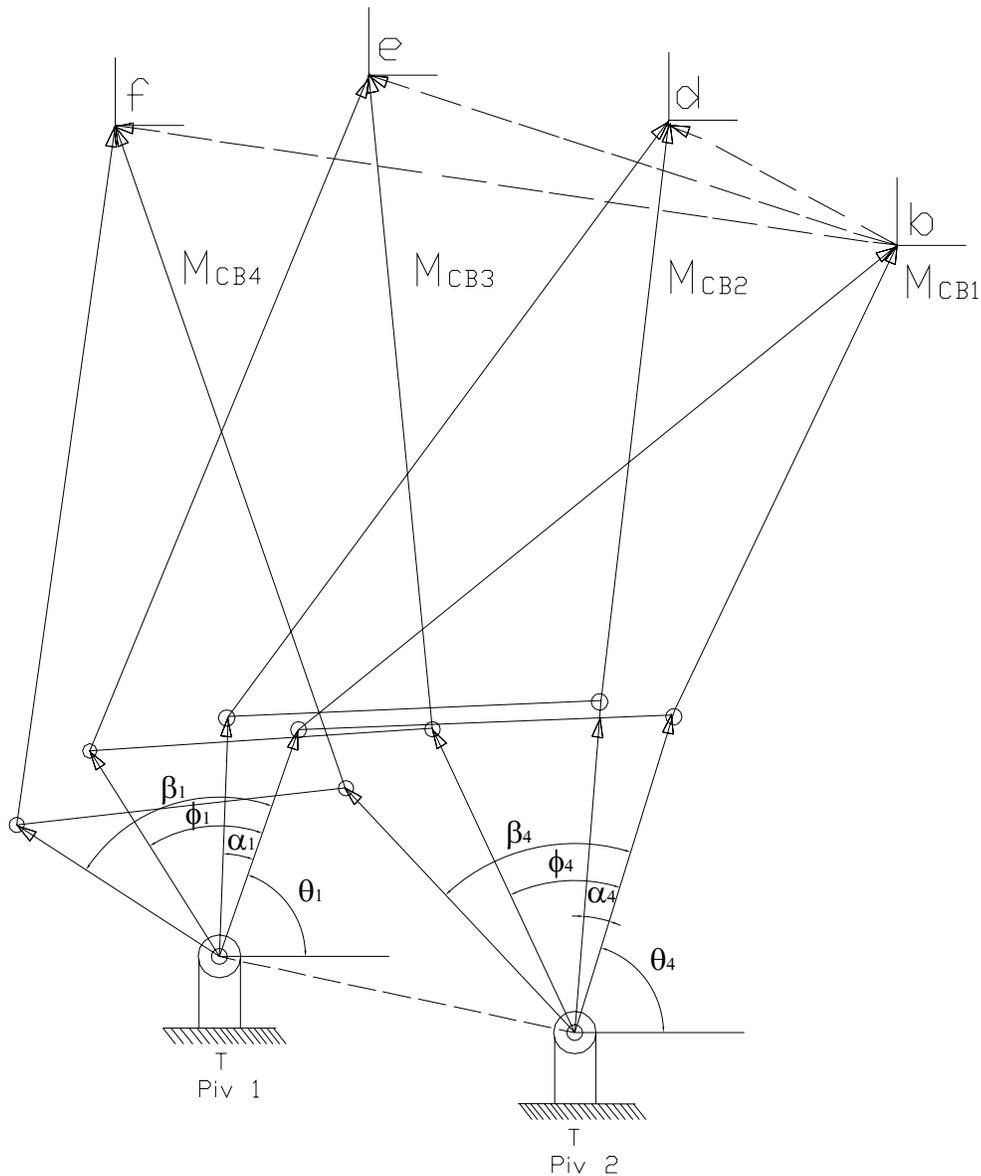


Figura 4.5. Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos

Las consideraciones anteriores permiten establecer un sistema cuadrado de 20 ecuaciones no lineales y 20 incógnitas del tipo polinomial. La formulación formal del problema de síntesis es la siguiente [15]:

4.11.1 Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cuatro puntos de precisión)

“Dados los puntos de precisión $\underline{r}_{d,b} \in \mathcal{R}^2$, $\underline{r}_{e,b} \in \mathcal{R}^2$, $\underline{r}_{f,b} \in \mathcal{R}^2$, $(X_{\text{Piv } 1}, Y_{\text{Piv } 1}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $(X_{\text{Piv } 2}, Y_{\text{Piv } 2}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $\mathbf{P}'' = \{P''_0, P''_1\}$, $\mathbf{Q}'' = \{Q''_0, Q''_1\}$, $\mathbf{R}'' = \{R''_0, R''_1\}$, $\mathbf{S}'' = \{S''_0, S''_1\}$, $\mathbf{P}' = \{P'_0, P'_1\}$, $\mathbf{Q}' = \{Q'_0, Q'_1\}$, $\mathbf{R}' = \{R'_0, R'_1\}$, $\mathbf{S}' = \{S'_0, S'_1\}$, con $\|\mathbf{P}''\| = \|\mathbf{Q}''\| = \|\mathbf{R}''\| = \|\mathbf{S}''\| = \|\mathbf{P}'\| = \|\mathbf{Q}'\| = \|\mathbf{R}'\| = \|\mathbf{S}'\| = 1$, encuentre $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4} \in \mathcal{R}^+$, $\mathbf{P} = \{P_0, P_1\}$, $\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}$, $\mathbf{R} = \{R_0, R_1\}$, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1\}$, $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$, $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$, $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$, $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$ tal que las expresiones (4.14) sean satisfechas y

$$\begin{aligned} P_0^2 + P_1^2 &= 1 \\ Q_0^2 + Q_1^2 &= 1 \\ R_0^2 + R_1^2 &= 1 \\ S_0^2 + S_1^2 &= 1 \\ p_0^2 + p_1^2 &= 1 \\ q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_1^2 &= 1 \\ s_0^2 + s_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

El problema arriba escrito forma un sistema de 20 ecuaciones con 20 incógnitas del tipo polinomial no lineal.

El modelo para cuatro puntos de precisión es válido siempre que las condicionantes de cuerpo rígido y el área de trabajo sean consideradas. Note además, que para cada sistema de números complejos $(\mathbf{P}', \mathbf{Q}', \mathbf{R}', \mathbf{S}')$ y $(\mathbf{P}'', \mathbf{Q}'', \mathbf{R}'', \mathbf{S}'')$ propuesto, debe encontrarse las dimensiones del mecanismo, y los complejos $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$, $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$.

En síntesis el modelo por solucionar es el siguiente:

1) Ecuaciones (4.14)

$$(Piv 1) \quad \underline{r}_{d.b} = l_1 \cdot \{ \overline{P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{e.b} = l_1 \cdot \{ \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{f.b} = l_1 \cdot \{ \overline{P'' \otimes P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q'' \otimes Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$(Piv 2) \quad \underline{r}_{d.b} = l_4 \cdot \{ \overline{S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{e.b} = l_4 \cdot \{ \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$\underline{r}_{f.b} = l_4 \cdot \{ \overline{S'' \otimes S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R'' \otimes R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

y

$$P_0^2 + P_1^2 = 1$$

$$Q_0^2 + Q_1^2 = 1$$

$$R_0^2 + R_1^2 = 1$$

$$S_0^2 + S_1^2 = 1$$

$$p_0^2 + p_1^2 = 1$$

$$q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$r_0^2 + r_1^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_1^2 = 1$$

2) Incógnitas

2.1) De dimensión: $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4} \in \mathfrak{R}^+$.

2.2) Angulares: $\mathbf{P} = \{P_0, P_1\}, \mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}, \mathbf{R} = \{R_0, R_1\}, \mathbf{S} = \{S_0, S_1\},$

$$\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}, \mathbf{q} = \{q_0, q_1\}, \mathbf{r} = \{r_0, r_1\}, \mathbf{s} = \{s_0, s_1\}.$$

3) Datos conocidos

3.1) Coordenadas de los puntos de precisión: $\underline{r}_{d,b} \in \mathfrak{R}^2, \underline{r}_{e,b} \in \mathfrak{R}^2, \text{ y } \underline{r}_{f,b} \in \mathfrak{R}^2.$

3.2) Coordenadas de los pivotes: $(X_{\text{Piv } 1}, Y_{\text{Piv } 1}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, (X_{\text{Piv } 2}, Y_{\text{Piv } 2}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}.$

3.3) Parámetros de los complejos: $\mathbf{P}'' = \{P''_0, P''_1\}, \mathbf{Q}'' = \{Q''_0, Q''_1\}, \mathbf{R}'' = \{R''_0, R''_1\},$
 $\mathbf{S}'' = \{S''_0, S''_1\}, \mathbf{P}' = \{P'_0, P'_1\}, \mathbf{Q}' = \{Q'_0, Q'_1\}, \mathbf{R}' = \{R'_0, R'_1\}, \mathbf{S}' = \{S'_0, S'_1\}.$

4.12 Algunas consideraciones sobre la solución del problema

En esta sección se discuten algunas consideraciones relacionadas con el problema y su solución. En otras palabras, se realizará una síntesis del proceso de sistematización descrito en la sección anterior.

En primer lugar, el problema formulado en la sección 4.1 de este capítulo, ha sido satisfecho al plantear el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido: cuatro puntos de precisión. Además, el modelo fue realizado siguiendo los pasos del método descrito en el capítulo 2 de esta tesis.

En segundo lugar, los modelos se enmarcaron dentro de las restricciones del problema con lo cual se concluye que tales modelos satisfacen las restricciones. Además, la hipótesis formulada en la sección 1.2 también fue satisfecha y, en consecuencia, las premisas o axiomas de referencia también fueron satisfechos [1], [15].

En este sentido se concluye, finalmente, que la solución del problema existe, es consistente y única para el marco de referencia básico (reglas de síntesis) y auxiliar (reglas de análisis).

CAPÍTULO 5

Modelación del problema de síntesis para tres puntos de precisión

Introducción. En este capítulo se construye un modelo de síntesis de un mecanismo de 4 barras para el problema de conducción de cuerpo rígido: tres puntos de precisión. Se usará el método descrito en el capítulo 2 para construir dicho modelo. Antes se procederá a definir nuevamente el problema particular.

5.1 Definición del problema y restricciones

En esta sección se plantea el problema por solucionar en esta tesis, así como sus restricciones fundamentales. Considere el siguiente problema:

“Se requiere modelar el problema de síntesis de un mecanismo”

Las restricciones fundamentales son las siguientes:

- El mecanismo está compuesto por 4 eslabones rígidos conectados por juntas rotacionales (R_1).
- El problema de síntesis es de conducción de cuerpo rígido (R_2).
- Se analizarán tres puntos de precisión (R_3).
- Las coordenadas de los puntos de precisión son conocidas (R_4).
- Los desplazamientos angulares relacionados con las posiciones de la conducción del cuerpo rígido son conocidas (R_5).
- Las coordenadas de los pivotes que conectan al mecanismo con la tierra del sistema son conocidas (R_6).
- El eslabón acoplador es rígido (R_7).
- Es fija y conocida el área de trabajo (R_8).

Por otro lado, el problema formulado anteriormente y sus restricciones se sintetizan de la manera siguiente:

“Encuéntrese un modelo que permita determinar las dimensiones principales de los eslabones que componen un mecanismo tal que:

$$R_1 = \hat{R}_1$$

$$R_2 = \hat{R}_2$$

$$R_3 = \hat{R}_3$$

$$R_4 = \hat{R}_4$$

$$R_5 = \hat{R}_5$$

$$R_6 = \hat{R}_6$$

$$R_7 = \hat{R}_7$$

$$R_8 = \hat{R}_8$$

sean satisfechas.”

5.2 El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido tres puntos de precisión

El primer paso que debe ser dado para construir el modelo de síntesis, es definir más específicamente el problema, esto es, sus características fundamentales. Considere el siguiente problema:

“Una banda (B_1) transporta una caja “C” del punto “a” al punto “b” como se muestra en la figura 5.1. La caja deberá localizarse en el punto “e” situado en la banda (B_2) pasando por el punto intermedio llamado “d”. Se asume que el transporte de “C” de banda a banda será por medio de un mecanismo plano de cuatro barras.”

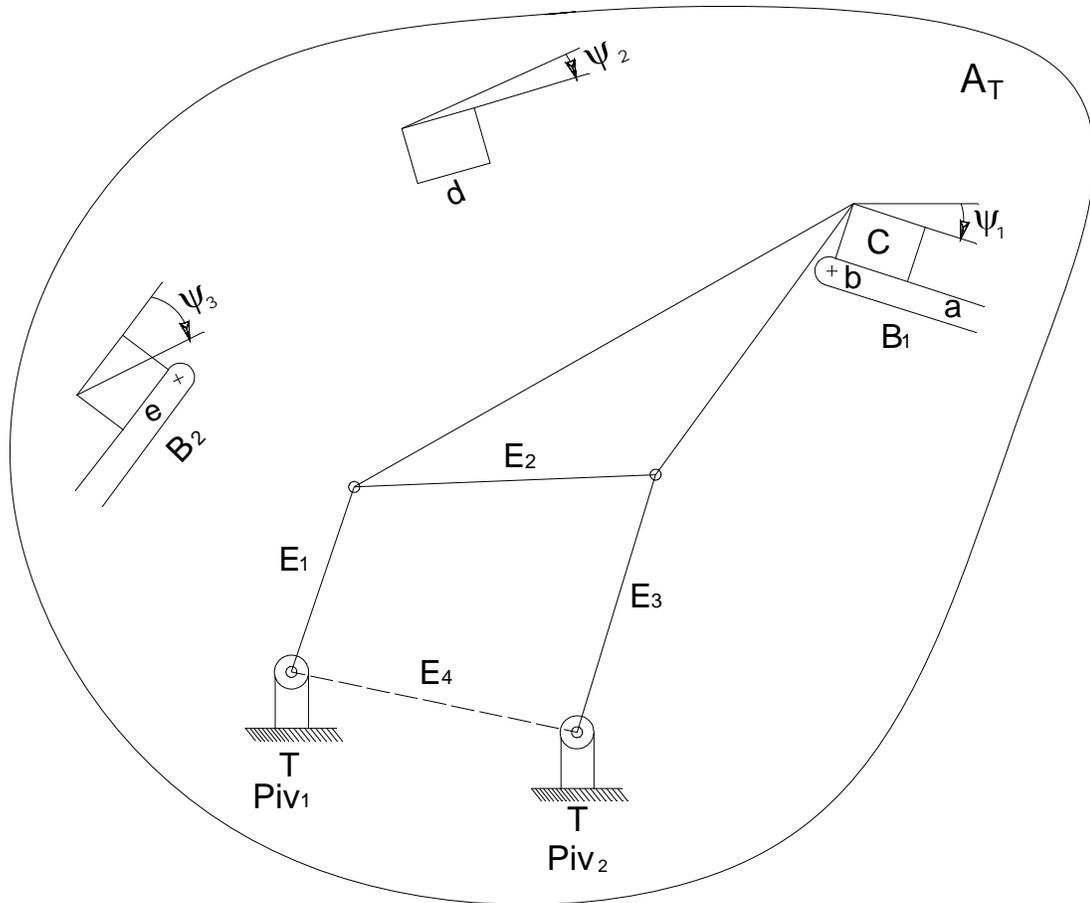


Figura 5.1. Caracterización del problema

La caja “C”, además de pasar por los puntos b, d y e, deberá satisfacer las orientaciones ψ_1 , ψ_2 , $\psi_3 \in \mathfrak{R}$ y el área de trabajo “ A_T ”.

Las restricciones particulares del problema son:

- 1) La caja “C” es rígida.
- 2) No se considera el movimiento de las bandas y el análisis se centra en los puntos b, d y e.
- 3) El mecanismo no debe salir del área de trabajo.
- 4) La configuración del eslabón acoplador es arbitraria.
- 5) La orientación del eslabón acoplador debe ser igual a $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathfrak{R}$.

5.3 Configuraciones del mecanismo

De acuerdo con el paso 2) descrito en el capítulo 2, se debe asociar una configuración de un mecanismo por cada punto de precisión relacionado con el problema de conducción de cuerpo rígido. Dichas configuraciones se muestran en la figura 5.2.

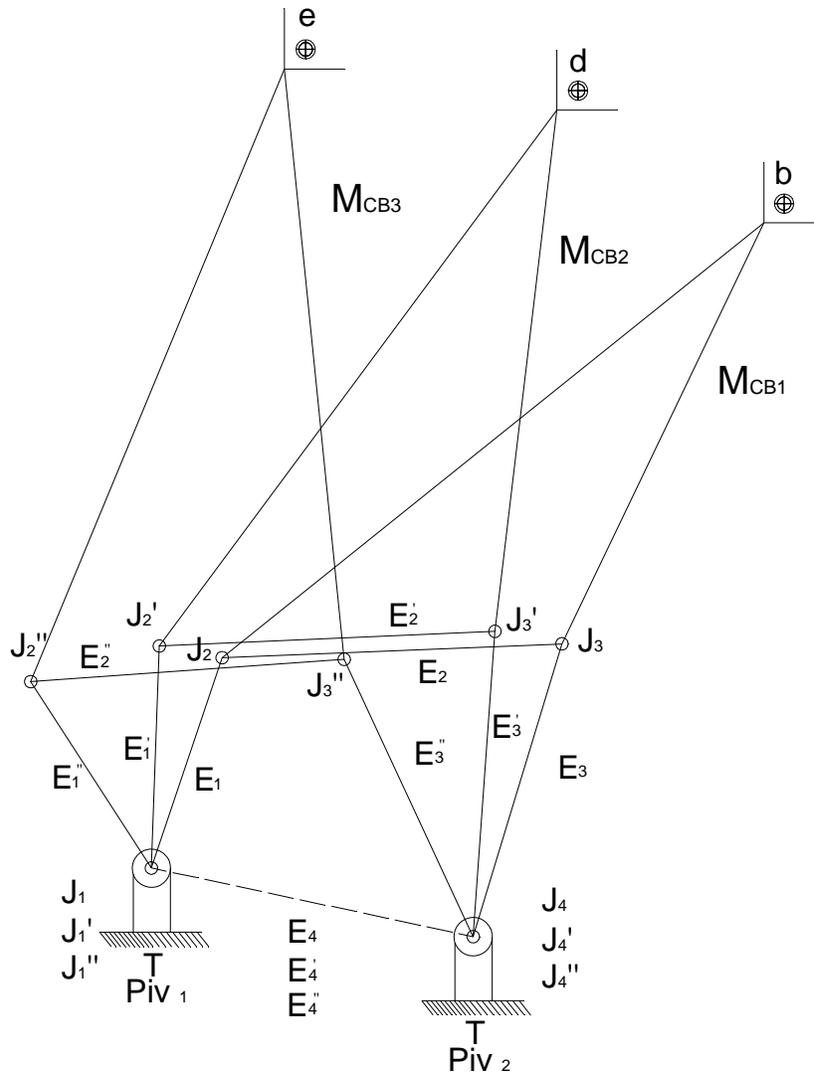


Figura 5.2. Configuraciones del mecanismo

Es importante mencionar que, en realidad, no existen tres mecanismos sino más bien un mecanismo y dos configuraciones. Lo que se busca es que las dimensiones del mecanismo inicial (M_{CB1}) sean las mismas que las asociadas con las configuraciones y que, por ello, el mecanismo pueda transportar la caja C de banda a banda. Nótese que, en realidad lo que se

busca determinar son las dimensiones de los eslabones del mecanismo; esto es, su diseño dimensional primario o de configuración primaria. Además, las configuraciones del mecanismo mostradas en la figura 5.2 permitirán relacionar, en primera instancia, los pivotes con los puntos de precisión.

5.4 Modelo de configuración en términos de la teoría de conjuntos

Una vez definido el mecanismo y sus configuraciones, el siguiente paso es caracterizar un modelo de configuración por medio de la teoría de conjuntos[15]. Considere que existen los tres mecanismos, entonces los multicuerpos M_{CB1} , M_{CB2} , y M_{CB3} mostrados en la figura 5.2 se pueden representar en términos de la unión de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} M_{CB1} &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 & (5.1) \\ M_{CB2} &= E_1' \cup E_2' \cup E_3' \cup E_4' \\ M_{CB3} &= E_1'' \cup E_2'' \cup E_3'' \cup E_4'' \end{aligned}$$

Por otro lado, las juntas que conectan a los eslabones pueden ser representadas en términos de intersecciones, esto es:

$$\begin{aligned} (M_{CB1}) \quad J_1 &= E_1 \cap E_4 & , \quad J_2 &= E_1 \cap E_2 & (5.2) \\ J_3 &= E_2 \cap E_3 & , \quad J_4 &= E_3 \cap E_4 \\ (M_{CB2}) \quad J_1' &= E_1' \cap E_4' & , \quad J_2' &= E_1' \cap E_2' \\ J_3' &= E_2' \cap E_3' & , \quad J_4' &= E_3' \cap E_4' \\ (M_{CB3}) \quad J_1'' &= E_1'' \cap E_4'' & , \quad J_2'' &= E_1'' \cap E_2'' \\ J_3'' &= E_2'' \cap E_3'' & , \quad J_4'' &= E_3'' \cap E_4'' \end{aligned}$$

Aquí,

$$\begin{aligned} E_4 &= E_4' = E_4'' & (5.3) \\ J_1 &= J_1' = J_1'' \\ J_4 &= J_4' = J_4'' \end{aligned}$$

Obsérvese que, lo que se busca en realidad es que la siguiente relación sea satisfecha:

$$M_{CB1} = M_{CB2} = M_{CB3} \quad (5.4)$$

5.5 Vectores de posición

En esta sección se aplica el paso 4) del método de modelación descrito en el capítulo 2 de esta tesis. Dicho paso consiste en asociar vectores de posición sobre el mecanismo y sus configuraciones con el propósito de relacionar los pivotes, puntos de precisión y eslabones del mecanismo. La figura 5.3 muestra los vectores de posición asociados con el multicuerpo motivo de estudio en este trabajo de tesis.

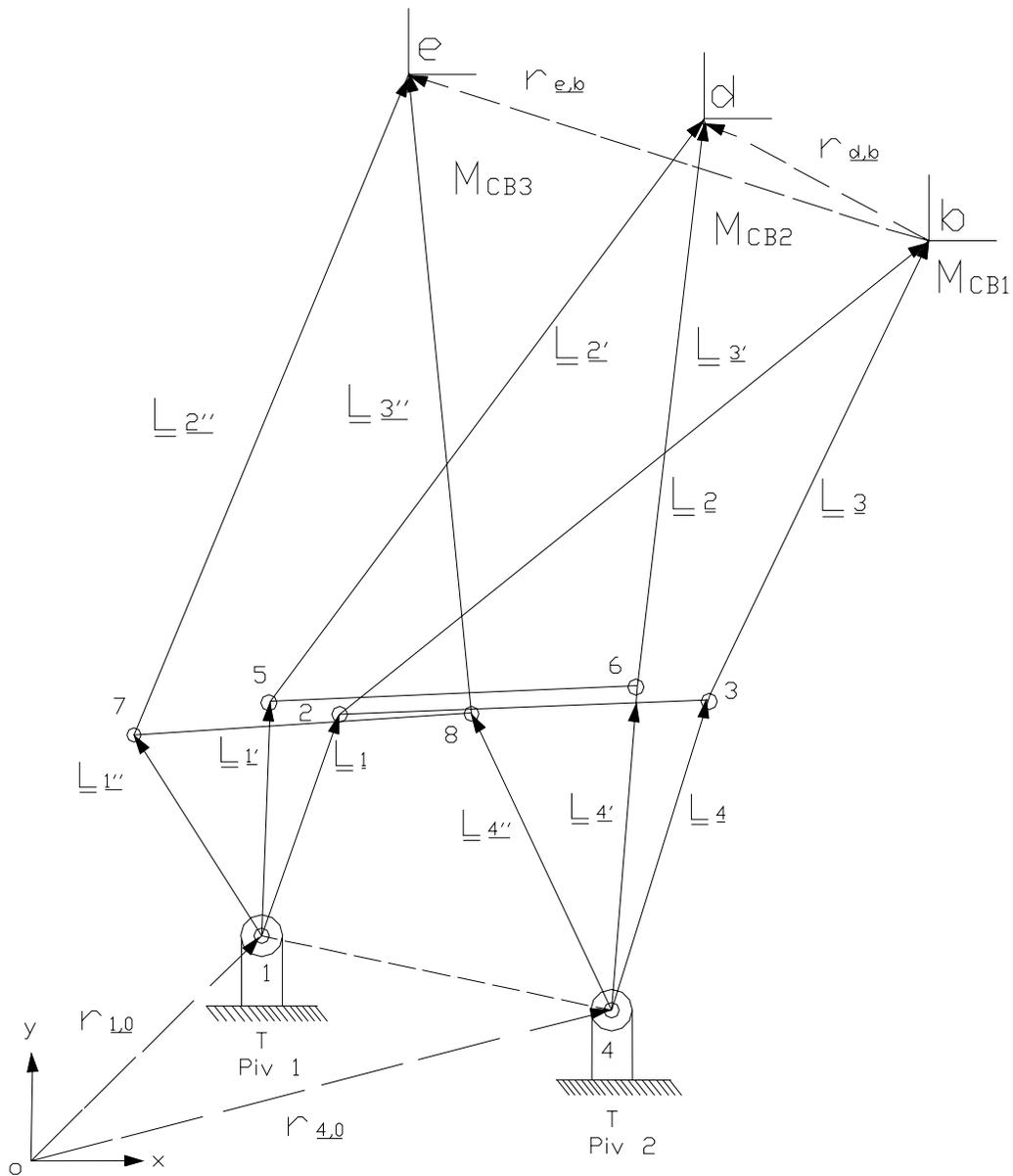


Figura 5.3. Vectores de posición

Los vectores de posición mostrados en la figura 5.3 se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (M_{CB1}) \quad \underline{L}_1 &= 2 - 1 & , & \quad \underline{L}_2 = b - 2 \\
 & \underline{L}_3 = b - 3 & , & \quad \underline{L}_4 = 3 - 4 \\
 (M_{CB2}) \quad \underline{L}_1' &= 5 - 1 & , & \quad \underline{L}_2' = d - 5 \\
 & \underline{L}_3' = d - 6 & , & \quad \underline{L}_4' = 6 - 4 \\
 (M_{CB3}) \quad \underline{L}_1'' &= 7 - 1 & , & \quad \underline{L}_2'' = e - 7 \\
 & \underline{L}_3'' = e - 8 & , & \quad \underline{L}_4'' = 8 - 4
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 \underline{r}_{d,b} &= d - b \\
 \underline{r}_{e,b} &= e - b
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dichos vectores están definidos sobre los puntos de precisión. Obsérvese que existen puntos que relacionan los vectores definidos en las expresiones (5.5) y (5.6) lo que permitirá, en la siguiente sección construir un sistema de ecuaciones de lazo.

5.6 Ecuaciones de lazo

El objetivo ahora es encontrar un modelo que permita relacionar los pivotes, el mecanismo y sus configuraciones, así como los puntos de precisión. Para ello, será usada la premisa o axioma 1 descrito en la sección 1.2, del capítulo 1 de esta tesis. Obsérvese en la figura 5.3 que dichas relaciones se pueden determinar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (\text{Piv } 1) \quad \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus \underline{r}_{d,b} &= \underline{L}_1' \oplus \underline{L}_2' \\
 \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \oplus \underline{r}_{e,b} &= \underline{L}_1'' \oplus \underline{L}_2'' \\
 (\text{Piv } 2) \quad \underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus \underline{r}_{d,b} &= \underline{L}_4' \oplus \underline{L}_3' \\
 \underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3 \oplus \underline{r}_{e,b} &= \underline{L}_4'' \oplus \underline{L}_3''
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

O, en forma equivalente:

$$(Piv 1) \quad \underline{r}_{d,b} = \underline{L}_1' \oplus \underline{L}_2' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2) \quad (5.8)$$

$$\underline{r}_{e,b} = \underline{L}_1'' \oplus \underline{L}_2'' - (\underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2)$$

$$(Piv 2) \quad \underline{r}_{d,b} = \underline{L}_4' \oplus \underline{L}_3' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3)$$

$$\underline{r}_{e,b} = \underline{L}_4'' \oplus \underline{L}_3'' - (\underline{L}_4 \oplus \underline{L}_3)$$

Nótese que el sistema de ecuaciones descrito anteriormente esta dado en términos de la operación aditiva definida en el espacio vectorial de números complejos. Por otro lado, las expresiones (5.8) son conocidas como ecuaciones de lazo [5]. Sin embargo, las expresiones o ecuaciones de lazo descritas anteriormente solo describen posiciones en términos de coordenadas cartesianas y no expresan información referente con las posiciones angulares del mecanismo y sus configuraciones y las posiciones angulares del cuerpo rígido por transportarse. Para poder medir dichos desplazamientos angulares se asociarán, en la sección siguiente, sistemas locales móviles de referencia.

5.7 Sistemas de referencia locales

Considere que sobre las juntas que conectan los eslabones del mecanismo en estudio y sus configuraciones se asocian sistemas locales de referencia móviles de tal forma que dichos sistemas se fijen a los eslabones y roten con ellos. Dichos sistemas son ortogonales y se muestran en la figura 5.4

Observe que las bases $\underline{e}_i^I \in \mathfrak{R}^2$ están asociadas con el mecanismo de referencia (M_{CB1}) y las bases $\underline{a}_i^I \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{b}_i^I \in \mathfrak{R}^2$ están relacionadas con las dos configuraciones M_{CB2} y M_{CB3} . Por otro lado, las relaciones entre los desplazamientos angulares de cuerpo rígido por transportarse y las posiciones angulares del mecanismo y sus configuraciones están dadas por las bases $\underline{e}_i^{III} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{a}_i^{III} \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{b}_i^{III} \in \mathfrak{R}^2$, esto es consecuencia del axioma 2 descrito en la sección 1.2 del capítulo 1 de este trabajo de tesis.

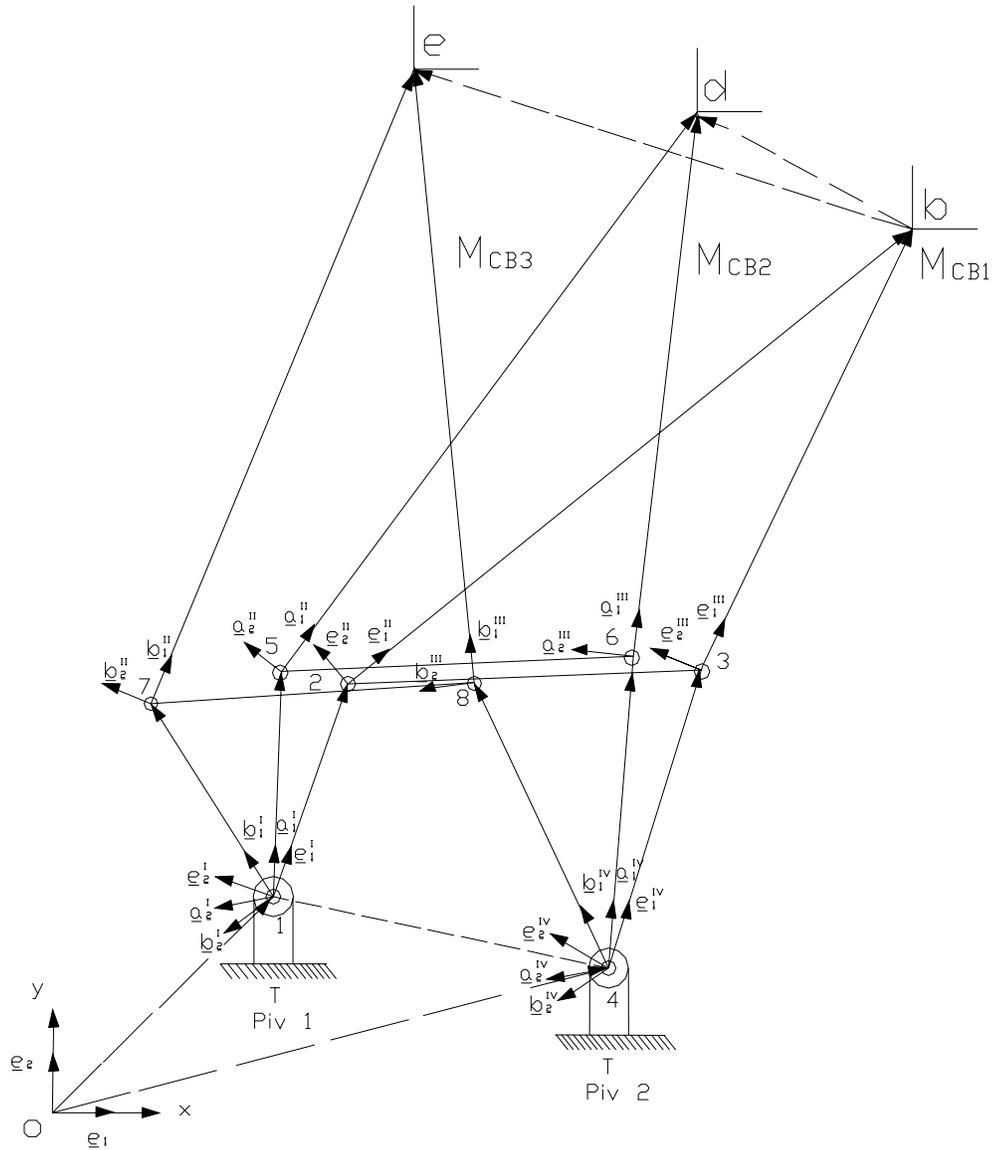


Figura 5.4. Sistemas locales

Los vectores de posición mostrados en la figura 5.4 pueden ser escritos en términos de sus longitudes (l) y las componentes de las bases locales asociadas (e , a , y b); esto es:

$$\begin{aligned}
 (M_{CB1}) \quad \underline{L}_1 &= l_1 \bullet \underline{e}_1^I & (5.9) \\
 \underline{L}_2 &= l_2 \bullet \underline{e}_1^{II} \\
 \underline{L}_3 &= l_3 \bullet \underline{e}_1^{III} \\
 \underline{L}_4 &= l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{M}_{\text{CB2}}) \quad & \underline{L}_1' = l_1' \bullet \underline{a}_1^{\text{I}} \\
& \underline{L}_2' = l_2' \bullet \underline{a}_1^{\text{II}} \\
& \underline{L}_3' = l_3' \bullet \underline{a}_1^{\text{III}} \\
& \underline{L}_4' = l_4' \bullet \underline{a}_1^{\text{IV}} \\
(\text{M}_{\text{CB3}}) \quad & \underline{L}_1'' = l_1'' \bullet \underline{b}_1^{\text{I}} \\
& \underline{L}_2'' = l_2'' \bullet \underline{b}_1^{\text{II}} \\
& \underline{L}_3'' = l_3'' \bullet \underline{b}_1^{\text{III}} \\
& \underline{L}_4'' = l_4'' \bullet \underline{b}_1^{\text{IV}}
\end{aligned}$$

Aquí, $l_1, l_2, l_3, l_4, l_1', l_2', l_3', l_4', l_1'', l_2'', l_3'', l_4'' \in \mathfrak{R}^+$ son las longitudes principales de los eslabones (medidas de junta a junta) que deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
l_1 &= l_1' = l_1'' & (5.10) \\
l_2 &= l_2' = l_2'' \\
l_3 &= l_3' = l_3'' \\
l_4 &= l_4' = l_4''
\end{aligned}$$

Con las expresiones (5.9) es posible escribir las ecuaciones de lazo (5.7) y (5.8) en términos de los sistemas locales móviles. Esto se hará en la sección siguiente.

5.8 Ecuaciones de lazo en términos de los sistemas locales.

En esta sección se usarán las expresiones para representar las ecuaciones de lazo (5.7) en función de las bases locales; esto es:

$$\begin{aligned}
(\text{Piv 1}) \quad & l_1 \bullet \underline{e}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{\text{II}} \oplus \underline{r}_{\text{d.b}} = l_1 \bullet \underline{a}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{a}_1^{\text{II}} & (5.11) \\
& l_1 \bullet \underline{e}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{\text{II}} \oplus \underline{r}_{\text{e.b}} = l_1 \bullet \underline{b}_1^{\text{I}} \oplus l_2 \bullet \underline{b}_1^{\text{II}} \\
(\text{Piv 2}) \quad & l_4 \bullet \underline{e}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{\text{III}} \oplus \underline{r}_{\text{d.b}} = l_4 \bullet \underline{a}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{a}_1^{\text{III}} \\
& l_4 \bullet \underline{e}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{\text{III}} \oplus \underline{r}_{\text{e.b}} = l_4 \bullet \underline{b}_1^{\text{IV}} \oplus l_3 \bullet \underline{b}_1^{\text{III}}
\end{aligned}$$

O, equivalentemente:

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 1)} \quad \underline{r}_{d.b} &= l_1 \bullet \underline{a}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{a}_1^{II} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II}] \\
 \underline{r}_{e.b} &= l_1 \bullet \underline{b}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{b}_1^{II} - [l_1 \bullet \underline{e}_1^I \oplus l_2 \bullet \underline{e}_1^{II}]
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 2)} \quad \underline{r}_{d.b} &= l_4 \bullet \underline{a}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{a}_1^{III} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III}] \\
 \underline{r}_{e.b} &= l_4 \bullet \underline{b}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{b}_1^{III} - [l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} \oplus l_3 \bullet \underline{e}_1^{III}]
 \end{aligned}$$

Cabe señalar que las expresiones (5.12) requieren ser escritas en términos de un sistema fijo inercial o canónica. Dicho sistema se localiza en el origen de coordenadas según se muestra en la figura 5.4.

5.9 Sistema inercial y rotaciones

Para poder expresar las relaciones angulares entre el mecanismo y sus configuraciones es necesario considerar lo siguiente:

- 1) Las bases $\underline{e}_j^I, \underline{e}_j^{II}, \underline{e}_j^{III}, \underline{e}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de la canónica $\underline{e}_j \in \mathfrak{R}^2$
- 2) Las bases $\underline{a}_j^I, \underline{a}_j^{II}, \underline{a}_j^{III}, \underline{a}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{e}_j^I, \underline{e}_j^{II}, \underline{e}_j^{III}, \underline{e}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$
- 3) Las bases $\underline{b}_j^I, \underline{b}_j^{II}, \underline{b}_j^{III}, \underline{b}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ son rotaciones de las bases $\underline{a}_j^I, \underline{a}_j^{II}, \underline{a}_j^{III}, \underline{a}_j^{IV} \in \mathfrak{R}^2$.

Esta consideración permitirá modelar los cambios de base del sistema inercial sobre los sistemas móviles del mecanismo y sus configuraciones. De acuerdo con el capítulo 2 de esta tesis, la transformación lineal descrita por la expresión (2.2) puede ser usada para modelar las rotaciones de la base local sobre las móviles. Dichas rotaciones se expresan en términos de números complejos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{(M}_{CB1}) \quad \underline{e}_1^I &= R_2(p, \underline{e}_1) = \overline{p \otimes e_1} \\
 \underline{e}_1^{II} &= R_2(q, \underline{e}_1) = \overline{q \otimes e_1} \\
 \underline{e}_1^{III} &= R_2(r, \underline{e}_1) = \overline{r \otimes e_1} \\
 \underline{e}_1^{IV} &= R_2(s, \underline{e}_1) = \overline{s \otimes e_1}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
(\text{M}_{\text{CB2}}) \quad \underline{a}_1^{\text{I}} &= \mathbf{R}_2(P, \underline{e}_1^{\text{I}}) = \mathbf{R}_2(P, \mathbf{R}_2(p, \underline{e}_1)) = \overline{P \otimes p \otimes \underline{e}_1} \\
\underline{a}_1^{\text{II}} &= \mathbf{R}_2(Q, \underline{e}_1^{\text{II}}) = \mathbf{R}_2(Q, \mathbf{R}_2(q, \underline{e}_1)) = \overline{Q \otimes q \otimes \underline{e}_1} \\
\underline{a}_1^{\text{III}} &= \mathbf{R}_2(R, \underline{e}_1^{\text{III}}) = \mathbf{R}_2(R, \mathbf{R}_2(r, \underline{e}_1)) = \overline{R \otimes r \otimes \underline{e}_1} \\
\underline{a}_1^{\text{IV}} &= \mathbf{R}_2(S, \underline{e}_1^{\text{IV}}) = \mathbf{R}_2(S, \mathbf{R}_2(s, \underline{e}_1)) = \overline{S \otimes s \otimes \underline{e}_1} \\
(\text{M}_{\text{CB3}}) \quad \underline{b}_1^{\text{I}} &= \mathbf{R}_2(P', \underline{a}_1^{\text{I}}) = \mathbf{R}_2(P', \mathbf{R}_2(P, \underline{e}_1^{\text{I}})) = \mathbf{R}_2(P', \mathbf{R}_2(P, \mathbf{R}_2(p, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes \underline{e}_1} \\
\underline{b}_1^{\text{II}} &= \mathbf{R}_2(Q', \underline{a}_1^{\text{II}}) = \mathbf{R}_2(Q', \mathbf{R}_2(Q, \underline{e}_1^{\text{II}})) = \mathbf{R}_2(Q', \mathbf{R}_2(Q, \mathbf{R}_2(q, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes \underline{e}_1} \\
\underline{b}_1^{\text{III}} &= \mathbf{R}_2(R', \underline{a}_1^{\text{III}}) = \mathbf{R}_2(R', \mathbf{R}_2(R, \underline{e}_1^{\text{III}})) = \mathbf{R}_2(R', \mathbf{R}_2(R, \mathbf{R}_2(r, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes \underline{e}_1} \\
\underline{b}_1^{\text{IV}} &= \mathbf{R}_2(S', \underline{a}_1^{\text{IV}}) = \mathbf{R}_2(S', \mathbf{R}_2(S, \underline{e}_1^{\text{IV}})) = \mathbf{R}_2(S', \mathbf{R}_2(S, \mathbf{R}_2(s, \underline{e}_1))) \\
&= \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes \underline{e}_1}
\end{aligned}$$

Aquí, $P', P, p, Q', Q, q, R', R, r, S', S, s \in \mathfrak{R}^2$ son números complejos de norma unitaria. Cabe señalar que con las expresiones (5.13) es posible escribir las ecuaciones de lazo (5.10) en función de la base inercial.

5.10 Ecuaciones de lazo, ecuaciones de norma y relaciones geométricas

Las ecuaciones de lazo (5.12) se escriben al considerar las relaciones (5.13) de la manera siguiente:

$$(\text{Piv 1}) \quad \underline{r}_{\text{d.b}} = l_1 \cdot \{ \overline{P \otimes p \otimes \underline{e}_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q \otimes q \otimes \underline{e}_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes \underline{e}_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes \underline{e}_1} \}] \quad (5.14)$$

$$\underline{r}_{\text{e.b}} = l_1 \cdot \{ \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes \underline{e}_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes \underline{e}_1} \} - [l_1 \cdot \{ \overline{p \otimes \underline{e}_1} \} \oplus l_2 \cdot \{ \overline{q \otimes \underline{e}_1} \}]$$

$$(\text{Piv 2}) \quad \underline{r}_{\text{d.b}} = l_4 \cdot \{ \overline{S \otimes s \otimes \underline{e}_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R \otimes r \otimes \underline{e}_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes \underline{e}_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes \underline{e}_1} \}]$$

$$\underline{r}_{\text{e.b}} = l_4 \cdot \{ \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes \underline{e}_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes \underline{e}_1} \} - [l_4 \cdot \{ \overline{s \otimes \underline{e}_1} \} \oplus l_3 \cdot \{ \overline{r \otimes \underline{e}_1} \}]$$

Note que las ecuaciones anteriores proporcionan la información de todo el sistema de análisis, pues están relacionados todos y cada una de las variables involucradas. Además, el sistema (5.14) está formado por 8 ecuaciones escalares. Por otro lado, las ecuaciones de norma unitaria se describen, de acuerdo con la expresión (2.3) del capítulo 2 de esta tesis, de la manera siguiente:

$$\|P'^2\| = P'_{0'}{}^2 + P'_{1'}{}^2 = 1 \quad (5.15)$$

$$\|Q'^2\| = Q'_{0'}{}^2 + Q'_{1'}{}^2 = 1$$

$$\|R'^2\| = R'_{0'}{}^2 + R'_{1'}{}^2 = 1$$

$$\|S'^2\| = S'_{0'}{}^2 + S'_{1'}{}^2 = 1$$

$$\|P^2\| = P_0{}^2 + P_1{}^2 = 1$$

$$\|Q^2\| = Q_0{}^2 + Q_1{}^2 = 1$$

$$\|R^2\| = R_0{}^2 + R_1{}^2 = 1$$

$$\|S^2\| = S_0{}^2 + S_1{}^2 = 1$$

$$\|p^2\| = p_0{}^2 + p_1{}^2 = 1$$

$$\|q^2\| = q_0{}^2 + q_1{}^2 = 1$$

$$\|r^2\| = r_0{}^2 + r_1{}^2 = 1$$

$$\|s^2\| = s_0{}^2 + s_1{}^2 = 1$$

Observe que las ecuaciones de norma son no lineales. Por otro lado, las relaciones geométricas entre las componentes de las rotaciones y los números complejos, están dadas por la relación (2.4) del capítulo 2 de esta tesis; esto es:

$$\begin{array}{lll}
P' = \{P'_0, P'_1\}; & P'_0 \in \mathfrak{R}, & P'_0 = -\text{Cos } \phi_1 \\
& P'_1 \in \mathfrak{R}, & P'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_1) \\
Q' = \{Q'_0, Q'_1\}; & Q'_0 \in \mathfrak{R}, & Q'_0 = -\text{Cos } \phi_2 \\
& Q'_1 \in \mathfrak{R}, & Q'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_2) \\
R' = \{R'_0, R'_1\}; & R'_0 \in \mathfrak{R}, & R'_0 = -\text{Cos } \phi_3 \\
& R'_1 \in \mathfrak{R}, & R'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_3) \\
S' = \{S'_0, S'_1\}; & S'_0 \in \mathfrak{R}, & S'_0 = -\text{Cos } \phi_4 \\
& S'_1 \in \mathfrak{R}, & S'_1 = -(\pm \text{Sen } \phi_4) \\
P = \{P_0, P_1\}; & P_0 \in \mathfrak{R}, & P_0 = -\text{Cos } \alpha_1 \\
& P_1 \in \mathfrak{R}, & P_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_1) \\
Q = \{Q_0, Q_1\}; & Q_0 \in \mathfrak{R}, & Q_0 = -\text{Cos } \alpha_2 \\
& Q_1 \in \mathfrak{R}, & Q_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_2) \\
R = \{R_0, R_1\}; & R_0 \in \mathfrak{R}, & R_0 = -\text{Cos } \alpha_3 \\
& R_1 \in \mathfrak{R}, & R_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_3) \\
S = \{S_0, S_1\}; & S_0 \in \mathfrak{R}, & S_0 = -\text{Cos } \alpha_4 \\
& S_1 \in \mathfrak{R}, & S_1 = -(\pm \text{Sen } \alpha_4) \\
p = \{p_0, p_1\}; & p_0 \in \mathfrak{R}, & p_0 = -\text{Cos } \theta_1 \\
& p_1 \in \mathfrak{R}, & p_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_1) \\
q = \{q_0, q_1\}; & q_0 \in \mathfrak{R}, & q_0 = -\text{Cos } \theta_2 \\
& q_1 \in \mathfrak{R}, & q_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_2) \\
r = \{r_0, r_1\}; & r_0 \in \mathfrak{R}, & r_0 = -\text{Cos } \theta_3 \\
& r_1 \in \mathfrak{R}, & r_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_3) \\
s = \{s_0, s_1\}; & s_0 \in \mathfrak{R}, & s_0 = -\text{Cos } \theta_4 \\
& s_1 \in \mathfrak{R}, & s_1 = -(\pm \text{Sen } \theta_4)
\end{array} \tag{5.16}$$

5.11 Sistema de ecuaciones y formulación del problema de síntesis

En esta sección se discutirá el conjunto de ecuaciones e incógnitas a partir del cual se formulará el problema de síntesis. Según las expresiones (5.15) y (5.16) existen 20 ecuaciones asociadas con el sistema; éstas son: 8 ecuaciones escalares relacionadas con las ecuaciones de lazo y 12 ecuaciones asociadas con las normas unitarias. Por otro lado, se tiene 28 incógnitas; éstas son: 4 de longitud relacionadas con las dimensiones de los eslabones que componen al mecanismo de referencia y 24 incógnitas de componentes de las rotaciones; esto es, los desplazamientos angulares y los ejes, dos por cada número complejo asociado. Por tanto, el sistema está formado por 20 ecuaciones y 28 incógnitas

Cabe señalar que solucionar un sistema de ecuaciones no cuadrado implica la existencia de múltiples soluciones. Es necesario, por tanto, determinar un sistema cuadrado de tal forma que sea posible obtener una solución única.

Considere las restricciones siguientes:

- 1) Condición de rigidez del eslabón acoplador.
- 2) Restricción del área de trabajo.

Las consecuencias lógicas de dichas restricciones son las siguientes:

- 1) Si α_2 y $\phi_2 \in \mathfrak{R}$ son conocidos, entonces $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathfrak{R}^2$ son conocidos.
- 2) Si $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathfrak{R}^2$ son conocidos, entonces $\mathbf{R}, \mathbf{R}' \in \mathfrak{R}^2$ son conocidos.
- 3) $\mathbf{P}, \mathbf{P}' \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{S}, \mathbf{S}' \in \mathfrak{R}^2$ son complejos de control en el área de trabajo.

La figura 5.5 muestra los ángulos relacionados con el área de trabajo controlable del mecanismo.

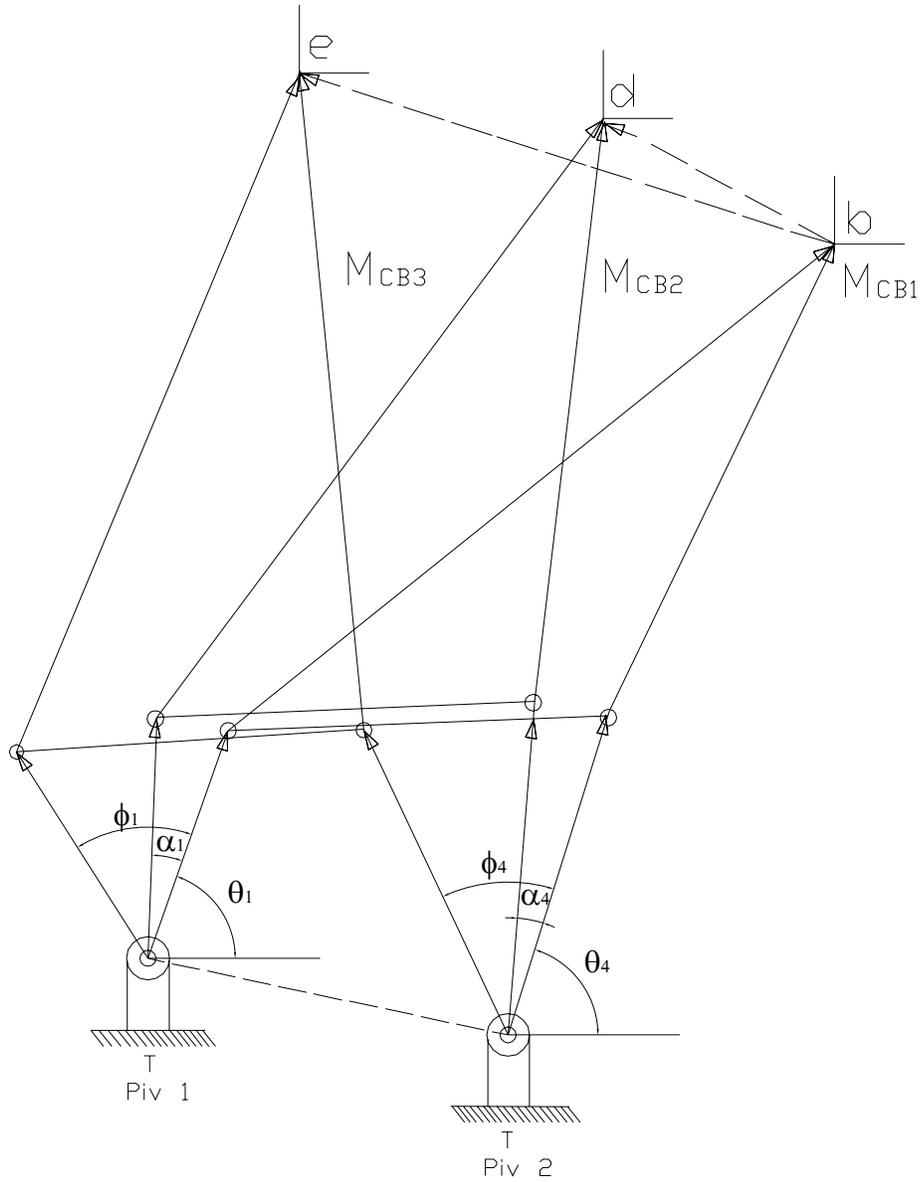


Figura 5.5. Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos

Las consideraciones anteriores permiten establecer un sistema cuadrado de 12 ecuaciones no lineales y 12 incógnitas del tipo polinomial. La formulación formal del problema de síntesis es la siguiente [15]:

5.11.1 Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión)

“Dados los puntos de precisión $\underline{r}_{d,b} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{r}_{e,b} \in \mathfrak{R}^2$, $(X_{Piv\ 1}, Y_{Piv\ 1}) \in \varepsilon \times \varepsilon$, $(X_{Piv\ 2}, Y_{Piv\ 2}) \in \varepsilon \times \varepsilon$, $P' = \{P'_0, P'_1\}$, $Q' = \{Q'_0, Q'_1\}$, $R' = \{R'_0, R'_1\}$, $S' = \{S'_0, S'_1\}$, $P = \{P_0, P_1\}$, $Q = \{Q_0, Q_1\}$, $R = \{R_0, R_1\}$, $S = \{S_0, S_1\}$, con $\|P'\| = \|Q'\| = \|R'\| = \|S'\| = \|P\| = \|Q\| = \|R\| = \|S\| = 1$, encuentre $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4} \in \mathfrak{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$ tal que las expresiones (5.14) sean satisfechas y

$$\begin{aligned} p_0^2 + p_1^2 &= 1 \\ q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_1^2 &= 1 \\ s_0^2 + s_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

El problema arriba escrito forma un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas del tipo polinomial no lineal.

El modelo para tres puntos de precisión es válido siempre que las condicionantes de cuerpo rígido y el área de trabajo sean consideradas. Note además que, para cada sistema de números complejos (P, Q, R, S) y (P', Q', R', S') propuesto, debe encontrarse las dimensiones del mecanismo y los complejos (p, q, r, s) .

En síntesis el modelo por solucionar es el siguiente:

1) Ecuaciones (5.14)

$$(Piv\ 1) \quad r_{d,b} = 11 \bullet \{ \overline{P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus 12 \bullet \{ \overline{Q \otimes q \otimes e_1} \} - [11 \bullet \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus 12 \bullet \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$r_{e,b} = 11 \bullet \{ \overline{P' \otimes P \otimes p \otimes e_1} \} \oplus 12 \bullet \{ \overline{Q' \otimes Q \otimes q \otimes e_1} \} - [11 \bullet \{ \overline{p \otimes e_1} \} \oplus 12 \bullet \{ \overline{q \otimes e_1} \}]$$

$$(Piv 2) \quad r_{d,b} = 14 \bullet \{ \overline{S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus 13 \bullet \{ \overline{R \otimes r \otimes e_1} \} - [14 \bullet \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus 13 \bullet \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

$$r_{e,b} = 14 \bullet \{ \overline{S' \otimes S \otimes s \otimes e_1} \} \oplus 13 \bullet \{ \overline{R' \otimes R \otimes r \otimes e_1} \} - [14 \bullet \{ \overline{s \otimes e_1} \} \oplus 13 \bullet \{ \overline{r \otimes e_1} \}]$$

y

$$\begin{aligned} p_0^2 + p_1^2 &= 1 \\ q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_1^2 &= 1 \\ s_0^2 + s_1^2 &= 1'' \end{aligned}$$

2) Incógnitas

2.1) De dimensión: $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4} \in \mathfrak{R}^+$,

2.2) Angulares: $p = \{p_0, p_1\}, q = \{q_0, q_1\}, r = \{r_0, r_1\}, s = \{s_0, s_1\}$

3) Datos conocidos

3.1) Coordenadas de los puntos de precisión: $\underline{r}_{d,b} \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{r}_{e,b} \in \mathfrak{R}^2$.

3.2) Coordenadas de los pivotes: $(X_{Piv 1}, Y_{Piv 1}) \in \varepsilon \times \varepsilon, (X_{Piv 2}, Y_{Piv 2}) \in \varepsilon \times \varepsilon$.

3.3) Parámetros de los complejos: $P' = \{P'_0, P'_1\}, Q' = \{Q'_0, Q'_1\}, R' = \{R'_0, R'_1\},$
 $S' = \{S'_0, S'_1\}, P = \{P_0, P_1\}, Q = \{Q_0, Q_1\}, R = \{R_0, R_1\}, S = \{S_0, S_1\}.$

5.12 Algunas consideraciones sobre la solución del problema

En esta sección se discuten algunas consideraciones relacionadas con el problema y su solución. En otras palabras, se realizará una síntesis del proceso de sistematización descrito en la sección anterior.

En primer lugar, el problema formulado en la sección 5.1 de este capítulo, ha sido satisfecho al plantear el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido: tres puntos de precisión. Además, el modelo fue realizado siguiendo los pasos del método descrito en el capítulo 2 de esta tesis.

En segundo lugar, los modelos se enmarcaron dentro de las restricciones del problema con lo cual se concluye que tales modelos satisfacen las restricciones. Además, la hipótesis formulada en la sección 1.2 también fue satisfecha y, en consecuencia, las premisas o axiomas de referencia también fueron satisfechos [1], [15].

En este sentido se concluye, finalmente, que la solución del problema existe, es consistente y única para el marco de referencia básico (reglas de síntesis) y auxiliar (reglas de análisis).

CONCLUSIONES

A través del desarrollo del presente trabajo de tesis se cumplieron los objetivos siguientes:

- Modelar el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido con tres, cuatro y cinco puntos de precisión usando la rotación variante del álgebra de los números complejos [1].
- Programar y simular el modelo para tres puntos de precisión en Mathematica V4 [2].

En este trabajo de tesis se han construido las ecuaciones que gobiernan el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido relacionado con mecanismo de 4 barras. Para tal propósito, se ha utilizado la rotación variante definida en el espacio vectorial de números complejos y un método de modelación paso a paso. Los resultados obtenidos de este trabajo de tesis se resumen en los puntos siguientes:

- 1) El modelo de síntesis para el caso del mecanismo estudiado se caracteriza por un sistema de 20 ecuaciones polinomiales no lineales con 28 incógnitas.
- 2) Al introducir las restricciones de cuerpo rígido del eslabón acoplador y las condiciones del área de trabajo el sistema de ecuaciones se redujo de 20×28 a un sistema cuadrado de 12×12 .
- 3) Para el caso de cuatro puntos de precisión, el modelo de síntesis tiene asociado un sistema de ecuaciones e incógnitas de 28×36 y se redujo a un sistema de 20×20 .
- 4) Para 5 puntos de precisión el modelo fue de 36×42 y reducido a 28×28 .
- 5) El método usado para modelar el problema de síntesis es funcional en el sentido de ordenar el análisis y la modelación.

Finalmente, futuros trabajos por desarrollar relacionados con este informe son los siguientes:

- Programación y simulación de los problemas de síntesis para conducción de cuerpo rígido: 4 y 5 puntos de precisión.
- Análisis de mecanismos usando una rotación variante de cuaterniones.
- Modelación del problema de síntesis entrada - salida.
- Modelación y simulación de síntesis espacial.

APÉNDICE A

A.1 Otra operación binaria multiplicativa

Considérese entonces la operación $\otimes: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por [1]:

$$(a,b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \quad (\text{A.1})$$

Se estudiarán ahora las propiedades de dicha operación a través de los resultados siguientes [1]:

Teorema A.1. La operación $\otimes: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es no asociativa.

Demostración. Sean $p=(a,b)$, $q=(\alpha,\beta)$, $r=(c,d)$, entonces,

$$\begin{aligned} p \otimes (q \otimes r) &= (a,b) \otimes \{ (\alpha,\beta) \otimes (c,d) \} \\ &\equiv (a,b) \otimes \{ (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \} \\ &\equiv (-a(-a\alpha + b\beta) + b(a\beta + b\alpha), a(a\beta + b\alpha) + b(-a\alpha + b\beta)) \\ &\equiv (a^2\alpha - ab\beta + b^2\alpha + ab\beta, a^2\beta + ab\alpha - ab\alpha + b^2\beta) \\ &\equiv (c(a\alpha + b\beta) + d(b\alpha - a\beta), (a\alpha + b\beta)d + (a\beta - b\alpha)c). \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} (p \otimes q) \otimes r &= \{ (a,b) \otimes (\alpha,\beta) \} \otimes (c,d) \equiv (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \otimes (c,d) \\ &= (-c(-a\alpha + b\beta) + d(a\beta + b\alpha), d(-a\alpha + b\beta) + c(a\beta + b\alpha)) \\ &= (c(a\alpha - b\beta) + d(a\beta + b\alpha), d(-a\alpha + b\beta) + c(a\beta - b\alpha)). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p \circledast (q \circledast r) \neq (p \circledast q) \circledast r.$$

Teorema A.2 El elemento $\underset{\sim}{\mathbf{1}} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2, 2ba)$, es tal que si $p = (a, b)$, entonces, $p \circledast \underset{\sim}{\mathbf{1}} \equiv p$.

Demostración. En efecto, sean $p = (a, b)$ y $\underset{\sim}{\mathbf{1}} = (\alpha, \beta)$ tal que $p \circledast \underset{\sim}{\mathbf{1}} \equiv p$, esto es:

$$(a, b) \circledast (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b),$$

Por tanto,

$$-a\alpha + b\beta = a, \quad a\beta + b\alpha = b.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$\alpha = -\frac{1}{a} (a - b\beta), \quad a\beta - \frac{b}{a} (a - b\beta) = b.$$

Por tanto, $\beta(a^2 + b^2) = 2ba$. Esto es $\beta = \frac{2ba}{a^2 + b^2}$. También,

$$\alpha = -\frac{1}{a} \left(a - \frac{2b^2 a}{a^2 + b^2} \right) = \frac{1}{a^2 + b^2} (-a^2 - b^2 + 2b^2) \equiv \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Por tanto, $\underset{\sim}{\mathbf{1}} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2, 2ba)$.

Teorema A.3. Sea $p = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, entonces, el elemento $p' = \frac{1}{a^2 + b^2} (a, b)$, es tal que

$$p \circledast p' \equiv \underset{\sim}{\mathbf{1}}.$$

Demostración. En efecto, sea $p' \equiv (\alpha, \beta)$ tal que $p * p' \equiv \underset{\sim}{1}$, esto es,

$$(a, b) \otimes (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \equiv \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2, 2ba).$$

Entonces,

$$-a\alpha + b\beta \equiv \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2) \quad , \quad a\beta + b\alpha = 2ab.$$

Esto es,

$$\alpha = -\frac{1}{(a^2 + b^2)a} (b^2 - a^2) + \frac{b}{a}\beta.$$

Por tanto,

$$a\beta - \frac{b}{a(a^2 + b^2)} (b^2 - a^2) + \frac{b^2}{a} \beta = \frac{1}{a^2 + b^2} 2ab.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{b^2}{a}\right) \beta &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left(2ab + \frac{b}{a}(b^2 - a^2)\right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left(ab + \frac{b^3}{a}\right) = \frac{b}{a(a^2 + b^2)} (a^2 + b^2) = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right) \beta = \frac{b}{a},$$

De donde, $\beta = \frac{b}{a^2 + b^2}$, y

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{a(a^2 + b^2)}(b^2 - a^2) + \frac{b}{a}\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \equiv \frac{1}{a(a^2 + b^2)}\{-b^2 + a^2 + b^2\} \\ &\equiv \frac{a}{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Por tanto, $p' = \frac{1}{a^2 + b^2}(a, b) = \frac{1}{a^2 + b^2}p$.

■

Teorema A.4. Sean $p, q, r \in \mathfrak{R}^2$. Entonces, las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$p \otimes (q \oplus r) = p \otimes q \oplus p \otimes r,$$

$$(p \oplus q) \otimes r = p \otimes r \oplus q \otimes r.$$

Demostración. En efecto, sean $p = (a, b)$, $q = (\alpha, \beta)$ y $r = (c, d)$, entonces

$$\begin{aligned}p \otimes (q \oplus r) &= (a, b) \otimes (\alpha + c, \beta + d) \\ &\equiv (-a(\alpha + c) + b(\beta + d), b(\alpha + c) + a(\beta + d)) \\ &= (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \oplus (-ac + bd, ad + bc) \\ &= (a, b) \otimes (\alpha, \beta) \oplus (a, b) \otimes (c, d) \\ &\equiv p \otimes q \oplus p \otimes r.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}(p \oplus q) \otimes r &= (a + \alpha, b + \beta) \otimes (c, d) \\ &= (-c(a + \alpha) + d(b + \beta), d(a + \alpha) + c(b + \beta)) \\ &= (-ca + db, da + cb) \oplus (-c\alpha + d\beta, d\alpha + c\beta) \\ &= (a, b) \otimes (c, d) \oplus (\alpha, \beta) \otimes (c, d) \\ &\equiv p \otimes r \oplus q \otimes r.\end{aligned}$$

Teorema A.5. La operación $\odot: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es conmutativa. En efecto si $p = (a, b)$, $q = (\alpha, \beta)$, entonces,

$$\begin{aligned} p \odot q &\equiv (a, b) \odot (\alpha, \beta) \equiv (-a\alpha + b\beta, b\alpha + a\beta) = (-\alpha a + \beta b, \alpha b + \beta a) \\ &\equiv (\alpha, \beta) \odot (a, b) \equiv q \odot p. \end{aligned}$$

Los siguientes resultados son satisfechos para la operación $\odot [2]: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$.

Teorema A.6. Sean $p = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, $q = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$. Entonces

- i) $\overline{p \odot q} = \overline{q} \odot \overline{p}$,
- ii) $p \odot \overline{p} = \overline{p} \odot p = -(a^2 + b^2, 0)$,
- iii) $\overline{p} \odot q \oplus \overline{q} \odot p = -2(a\alpha + b\beta, 0)$.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \overline{p \odot q} &= \overline{(a, b) \odot (\alpha, \beta)} = \overline{(-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha)} = \overline{(-a\alpha + b\beta, -a\beta - b\alpha)} \\ &= (\alpha, -\beta) \odot (a, -b) = \overline{q} \odot \overline{p}. \end{aligned}$$

También,

$$p \odot \overline{p} = (a, b) \odot (a, -b) = (-a^2 - b^2, 0) = -(a^2 + b^2, 0).$$

Finalmente, se tiene que:

$$\overline{p} \odot q \equiv (a, -b) \odot (\alpha, \beta) = (-a\alpha - b\beta, -b\alpha + a\beta),$$

y

$$\bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} \equiv (\alpha, -\beta) \circledast (a, b) = (-\alpha a - \beta b, -\beta a + \alpha b),$$

Por tanto,

$$\bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} = -2(a\alpha + b\beta, 0).$$

Tomando en cuenta la transformación $T_R : \mathcal{C}_R \rightarrow \mathfrak{R}$, definida en incisos anteriores, se observa que la siguiente relación es satisfecha:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -\frac{1}{2} T_R \{ \bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} \}.$$

A.2 Otra parametrización de rotaciones

Se presenta ahora una transformación lineal $R_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ fijo, que se construirá al tomar el conjugado de la transformación $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definida en la sección anterior. Tal transformación resultará ser una rotación, puesto que será ortogonal y su determinante será positivo. Se estudiarán también algunas otras representaciones de la transformación aquí construída. Sea entonces la transformación $R_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definida por [1] :

$$R_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2. \quad (\text{A.2.1})$$

Algunas propiedades de la transformación definida anteriormente serán estudiadas a continuación.

Teorema A.7. La transformación $R_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es lineal ortogonal de determinante positivo.

Demostración. En efecto, siendo $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$ y tomando en cuenta la distributividad de la operación $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, el teorema 1.16 y la conmutatividad de la multiplicación, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \circledast (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r})} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \circledast \mathbf{r}} \} \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{p}} \circledast \overline{\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}} \circledast \overline{\mathbf{r}} \} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{q}} \circledast \overline{\mathbf{p}} \oplus \overline{\mathbf{r}} \circledast \overline{\mathbf{p}} \} \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{p}} \circledast \overline{\mathbf{q}} \oplus \overline{\mathbf{p}} \circledast \overline{\mathbf{r}} \} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}} \circledast \overline{\mathbf{q}} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}} \circledast \overline{\mathbf{r}} \\
&= \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}).
\end{aligned}$$

También,

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \circledast (\alpha \mathbf{q})} \equiv \alpha \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}} \equiv \alpha \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= -\frac{1}{2} \text{T}_R \left\{ \overline{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \circledast \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \overline{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r})} \circledast \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \text{T}_R \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} (\overline{\mathbf{p}} \circledast \overline{\mathbf{q}}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \oplus (\overline{\mathbf{p}} \circledast \overline{\mathbf{r}}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \right\}
\end{aligned}$$

Al desarrollar esta última expresión se obtiene el resultado buscado pues, siendo $p = (a,b)$, $q = (\alpha,\beta)$, y $r = (c,d)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{(p \circledast q) \circledast (p \circledast r)} \oplus \overline{(p \circledast r) \circledast (p \circledast q)} &\equiv -2 \|p\|^2 (c\alpha + d\beta, 0) \\ &= -2 \|p\|^2 \mathbf{T}_R^{-1}\{\langle q, r \rangle\}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle \mathbf{R}_2(p, q), \mathbf{R}_2(p, r) \rangle \equiv \langle q, r \rangle.$$

Finalmente, al observar que:

$$\mathbf{R}_2(p, \underline{e}_1) = \frac{1}{\|p\|} \overline{(a,b) \circledast (1,0)} = \frac{1}{\|p\|} (-a, -b),$$

$$\mathbf{R}_2(p, \underline{e}_2) = \frac{1}{\|p\|} \overline{(a,b) \circledast (0,1)} = \frac{1}{\|p\|} (b, -a),$$

la matriz de $\mathbf{R}_2(p, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, está dada por:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}_2(p, \bullet)} = \frac{1}{\|p\|} \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

de donde $\det \mathbf{M}_{R_2(p, \bullet)} \equiv 1$.

Teorema A.8. La transformación $R_2(p, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ puede ser representada en la forma siguiente:

$$R_2(p, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-a \tilde{\mathbf{I}} - b \tilde{\mathbf{W}}\} = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \tilde{\mathbf{I}} + b \tilde{\mathbf{W}}\},$$

donde $\tilde{\mathbf{I}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es la transformación identidad y la transformación $\tilde{\mathbf{W}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ está dada por

$$\tilde{\mathbf{W}} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1.$$

Demostración. En efecto, es suficiente con observar que la matriz de $R_2(p, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_{R_2(p, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ -a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para encontrar la representación exponencial de la transformación $R_2(p, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, es necesario interpretar físicamente los parámetros de la misma en términos de la geometría definida por el producto interno usual en \mathfrak{R}^2 . Para esto, es de fundamental importancia el resultado presentado en el teorema siguiente.

Teorema A.9. Sea $u = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$, $p = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ y $v = R_2(p, u) \in \mathfrak{R}^2$, entonces las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\cos \theta = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} a, \quad \text{Sen } \theta = \pm \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} b,$$

donde θ es el ángulo formado por los vectores u, v .

Demostración. En efecto, el coseno del ángulo formado por los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} está dado por:

$$\begin{aligned}\text{Cos } \theta &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \{ \langle (q_0, q_1), \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-aq_0 + bq_1, -aq_1 - bq_0) \rangle \} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{p}\|} \{-aq_0^2 - aq_1^2\} \equiv -\frac{a}{\|\mathbf{p}\|}.\end{aligned}$$

Además, de la relación $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$, se obtiene:

$$\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta = 1 - \frac{a^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \{\|\mathbf{p}\|^2 - a^2\} = \frac{b^2}{\|\mathbf{p}\|^2}.$$

Por tanto, $\text{Sen } \theta = \pm \frac{b}{\|\mathbf{p}\|}$.

Al utilizar el teorema anterior, se obtiene la siguiente representación de la transformación $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$:

Corolario A.1. La transformación $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, admite la siguiente representación:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \tilde{\mathbf{I}} \pm \text{Sen } \theta \tilde{\mathbf{W}}.$$

Demostración. En efecto,

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a \tilde{\mathbf{I}} + b \tilde{\mathbf{W}}) = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ -\|\mathbf{p}\| \text{Cos } \theta \tilde{\mathbf{I}} \pm \|\mathbf{p}\| \text{Sen } \theta \tilde{\mathbf{W}} \}$$

$$= \text{Cos } \theta \underline{\mathbf{I}} \pm \text{Sen } \theta \underline{\mathbf{W}}.$$

Teorema A.10. Sea $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, entonces, la siguiente igualdad es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2 \underline{\mathbf{e}}_3 \equiv (0, 0, -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2).$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &\equiv q_0 \{ \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1 \} \underline{\mathbf{e}}_3 \\ &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ -a q_0 q_1 - b q_0^2 + a q_0 q_1 - b q_1^2 \} \underline{\mathbf{e}}_3 \\ &\equiv -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2 \underline{\mathbf{e}}_3. \equiv (0, 0, -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2). \end{aligned}$$

■

Corolario A.2. Sea $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$, $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, entonces, la igualdad siguiente es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv (0, 0, \pm \text{Sen } \theta \|\mathbf{q}\|^2).$$

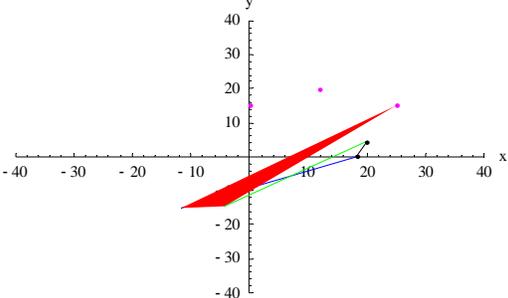
Demostración. El resultado se obtiene de combinar los teoremas 1.9 y A.10

APÉNDICE B

B.1 Código del Programa en Mathematica V4 [27]

$\text{Rob}[p_ , q_] := \{-p[[1]]*q[[1]] + p[[2]]*q[[2]], -p[[1]]*q[[2]] - p[[2]]*q[[1]]\};$ $\text{Conj}[p_] := \{p[[1]], -p[[2]]\}$ $\text{Nm}[p_] := p[[1]]^2 + p[[2]]^2$	Función Multiplicación de la rotación variante de complejos Función del conjugado Función de la norma
$e1 = \{1, 0\}; e2 = \{0, 1\};$	Definición de la base inercial
$P1 = \{25, 15\};$ $P2 = \{12, 20\};$ $P3 = \{0, 15\};$	Coordenadas de los puntos de precisión
$P21 = P2 - P1;$ $P31 = P3 - P1;$	Vectores definidos entre los puntos de precisión
$\text{ClearAll}[p2, p3, q2, q3, r2, r3, s2, s3]$	Limpieza de variables
$B2 = 20*\text{Degree}; B3 = 25*\text{Degree};$ $\text{alfa2} = 30*\text{Degree}; \text{alfa3} = 30*\text{Degree};$ $\text{gama2} = 15*\text{Degree}; \text{gama3} = 20*\text{Degree};$	Desplazamientos angulares de la manivela Desplazamientos angulares del acoplador Desplazamientos angulares del seguidor
$p2 = -\{\text{Cos}[B2], \text{Sin}[B2]\};$ $p3 = -\{\text{Cos}[B3], \text{Sin}[B3]\};$ $q2 = -\{\text{Cos}[\text{alfa2}], \text{Sin}[\text{alfa2}]\};$ $q3 = -\{\text{Cos}[\text{alfa3}], \text{Sin}[\text{alfa3}]\};$ $r2 = -\{\text{Cos}[\text{gama2}], \text{Sin}[\text{gama2}]\};$ $r3 = -\{\text{Cos}[\text{gama3}], \text{Sin}[\text{gama3}]\};$	Parámetros de rotación correspondientes Manivela Acoplador Seguidor
$s2 = q2;$ $s3 = q3;$	Consideraciones de rigidez
$\text{ClearAll}[e11, e21, e31, e41, a11, a21, a31, a41,$ $b11, b21, b31, b41, p1, q1, r1, s1,$ $p11, p12, q11, q12, r11, r12, s11, s12]$	Limpieza de variables
$p1 = \text{N}[\{p11, p12\}]; \quad q1 = \text{N}[\{q11, q12\}];$ $r1 = \text{N}[\{r11, r12\}]; \quad s1 = \text{N}[\{s11, s12\}];$	Cálculo de las bases locales de los mecanismos virtuales
$e11 = \text{N}[\text{Rob}[p1, e1]];$ $e21 = \text{N}[\text{Rob}[q1, e1]];$ $e31 = \text{N}[\text{Rob}[r1, e1]];$ $e41 = \text{N}[\text{Rob}[s1, e1]];$ $a11 = \text{N}[\text{Rob}[p2, e11]];$ $a21 = \text{N}[\text{Rob}[q2, e21]];$ $a31 = \text{N}[\text{Rob}[r2, e31]];$ $a41 = \text{N}[\text{Rob}[s2, e41]];$ $b11 = \text{N}[\text{Rob}[p3, a11]];$ $b21 = \text{N}[\text{Rob}[q3, a21]];$ $b31 = \text{N}[\text{Rob}[r3, a31]];$ $b41 = \text{N}[\text{Rob}[s3, a41]];$	Bases asociadas a la primera configuración (Mecanismo 1) Bases asociadas a la segunda configuración (Mecanismo 2) Bases asociadas a la tercera configuración (Mecanismo 3)
$\text{ClearAll}[l2, li, ld, l4, EC1, EC2, EC3, EC4]$	Limpieza de variables
$EC1 = \text{Simplify}[l2 a11 + li a21 - li e21 - l2 e11 - P21];$ $EC2 = \text{Simplify}[l2 b11 + li b21 - li e21 - l2 e11 - P31];$ $EC3 = \text{Simplify}[l4 a31 + ld a41 - ld e41 - l4 e31 - P21];$ $EC4 = \text{Simplify}[l4 b31 + ld b41 - ld e41 - l4 e31 - P31];$	Ecuaciones de lazo (pivote 1) Ecuaciones de lazo (pivote 2)
$\text{sol} = \text{FindRoot}[\{$ $\quad EC1[[1]] == 0,$ $\quad EC1[[2]] == 0,$	Solución al sistema de ecuaciones

<pre> EC2[[1]] == 0, EC2[[2]] == 0, EC3[[1]] == 0, EC3[[2]] == 0, EC4[[1]] == 0, EC4[[2]] == 0, Nm[p1] == 1, Nm[q1] == 1, Nm[r1] == 1, Nm[s1] == 1 }, {l2, 90}, {li, 120}, {ld, 25}, {l4, 60}, {p11, 0}, {p12, 1}, {q11, 0}, {q12, 1}, {r11, 0}, {r12, 1}, {s11, 0}, {s12, 1}, MaxIterations -> 250); </pre>	<p>Condiciones iniciales para resolver el sistema</p>
<pre> l2 = l2 /. sol[[1]]; li = li /. sol[[2]]; ld = ld /. sol[[3]]; l4 = l4 /. sol[[4]]; p11 = p11 /. sol[[5]]; p12 = p12 /. sol[[6]]; q11 = q11 /. sol[[7]]; q12 = q12 /. sol[[8]]; r11 = r11 /. sol[[9]]; r12 = r12 /. sol[[10]]; s11 = s11 /. sol[[11]]; s12 = s12 /. sol[[12]]; </pre>	<p>Definición del vector solución</p>
<pre>ClearAll[l1, O2, O4]</pre>	<p>Limpieza de variables</p>
<pre> l1 = l2 e11 + li e21 - ld e41 - l4 e31; O2 = P1 - li e21 - l2 e11; O4 = P1 - ld e41 - l4 e31; </pre>	<p>Resultados que definen la configuración del mecanismo Marco Pivote O2 Pivote O4</p>
<pre> Print["Longitudes"] Print["manivela: ", l2] Print["acoplador izq.: ", li] Print["acoplador der. ", ld] Print["seguidor: ", l4] Print[" "] Print["Configuraci\u00f3n inicial"] Print["manivela: ", N[2*ArcCos[p11]*180/Pi], "\[CenterDot]"] Print["acoplador izq.: ", N[2*ArcCos[q11]*180/Pi], "\[CenterDot]"] Print["acoplador der.: ", N[2*ArcCos[s11]*180/Pi], "\[CenterDot]"] Print["seguidor: ", N[2*ArcCos[r11]*180/Pi], "\[CenterDot]"] </pre>	<p>Impresión de la solución</p>

<pre>] Print[" "] Print["Pivotes"] Print["O2: ", O2] Print["O4: ", O4] </pre>	
<pre> Pivotes O2 : { 18.2406, -0.0560388} O4 : { 18.3425, -4.928} </pre>	<p>Graficación y simulación</p> <p>Se redefinen bases b_{ij} para graficar cada configuración del mecanismo. El primer subíndice está asociado al eslabón, mientras que el segundo subíndice se asocia a la j-ésima configuración del mecanismo:</p>
<pre> b1[1] = e11; b1[2] = a11; b1[3] = b11 b2[1] = e21; b2[2] = a21; b2[3] = b21 b3[1] = e31; b3[2] = a31; b3[3] = b31 </pre>	<p>Bases asociadas</p>
<pre> For[t = 1, t <= 3, t += 1, es11 = Line[{O2, O2 + 11}]; es12 = Line[{O2, O2 + 12 b1[t]}]; es13 = Polygon[{O2 + 12 b1[t], O2 + 12 b1[t] + li b2[t], O2 + 11 + 14 b3[t], O2 + 12 b1[t]}]; es14 = Line[{O2 + 11, O2 + 11 + 14 b3[t]}]; pprec = {Point[P1], Point[P2], Point[P3]}; or2 = Point[O2]; or4 = Point[O4]; marco = Graphics[{AbsoluteThickness[1.5], es11}]; manivela = Graphics[{AbsoluteThickness[1.5], RGBColor[0, 0, 1], es12}]; acoplador = Graphics[{Hue[1], es13}]; seguidor = Graphics[{AbsoluteThickness[1.5], RGBColor[0, 1, 0], es14}]; puntos = Graphics[{PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 1], pprec}]; pivote1 = Graphics[{PointSize[0.01], or2}]; pivote2 = Graphics[{PointSize[0.01], or4}]; Show[marco, manivela, acoplador, seguidor, puntos, pivote1, pivote2, Axes -> True, PlotRange -> {{-40, 40}, {-40, 40}}, AxesLabel -> {"x", "y"}, DefaultFont -> {"Times", 8}]]; </pre>	<p>Subrutina de graficación</p>
	<p>Salida gráfica</p>

REFERENCIAS

- [1] Reyes L. Sobre la parametrización de las rotaciones y reflexiones de multicuerpos rígidos en el plano. Parte I: el marco teórico. (1998) ISBN 968-64-02-08-X. Estudios Ocasionales México. Universidad Anáhuac del Sur.
- [2] Wolfram Stephen. "Mathematica V4: A System for doing Mathematics by computer". Addison-Wesley, 1992.
- [3] Wilson C. y Sadler J. "Kinematics and Dynamics of Machinery"
Edit: Harper Collins, New York, 1993
- [4] Erdman A., Sandor Geoerge "Mechanism Design: analysis and Synthesis"
Edit. Prentice Hall, E.C. New Jersey, 1997
- [5] Angeles J. Fundamentals of robotics mechanical system. (1997). New York. Springer-Verlag.
- [6] Japan Trade Mark Kohhoku, Class 9, Shou 46-32713, 46-32714, Jan. 1971.
- [7] Yi Zhang, Susan Finger, Stephanie Behrens Introduction to Mechanisms
Carnegie Mellon University
<http://www-2.cs.cmu.edu/People/rapidproto/home.html#top>
- [8] Shigley J E and Vicker J J, "Theory of Machines and Mechanisms",
McGraw Hill, 1980.
- [9] Fathi G., Chélet R.. 1994 "Restricted Configurations"
<http://www.edicionsupc.es/ftppublic/pdfmostra/EM02901M.pdf>
- [10] Jiménez E. Simulación de un proceso de manufactura con obstáculo en la línea de producción. México. (1998). (Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [11] Cuenca J. Francisco. "Modelado del análisis Cinemático de una Plataforma Paralela Plana": Una aplicación del álgebra de Cuaterniones. Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica. UNAM – DEPI, México D. F., 1996.
- [12] Cuenca F. Jiménez E., Reyes L. "Modelación cinemática de posicionamiento de un robot paralelo tipo RRR. (1999). Coloquio 1999, Facultad de Ingeniería, UNAM.

- [13] Norton, Robert L., "Diseño de maquinaria una introducción a la síntesis y al análisis de mecanismos y máquinas ", México McGraw-Hill 1995
- [14] Jiménez E. Reyes L. (2004). Modelación cinemática de posicionamiento de un robot de 3 gdl usando Cuaterniones. Informe interno de investigación. ISBN 968 - 36 - 5844 – 1. Universidad La Salle Noroeste
- [15] Reyes L., Jiménez E., Hernández D., “Sobre La Parametrización de las Rotaciones y Reflexiones Rígidas en el Plano: Aplicaciones a Problemas de Síntesis de Mecanismos”. Informe interno de investigación. (2005) ISBN 968-5844-21-6 Universidad La Salle Noroeste.
- [16] Reyes L., Jiménez E., “Modelación Del Problema De Síntesis De Un Mecanismo De Cuatro Barras Para Conducción De Cuerpo Rígido 3 Puntos De Precisión Usando La Rotación Variante De Los Números Complejos” (2002), División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Sección Mecánica, Instituto Mexicano del Transporte. Instituto Tecnológico Superior de Cajeme.
- [17] Martínez G. Análisis y síntesis de un mecanismo de 4 barras; conducción de cuerpo rígido para tres y cuatro puntos de precisión usando números complejos. (2004). Tesis de Maestría en Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México.
- [18] Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Robótica Industrial
<http://www.chi.itesm.mx/~cim/robind/robotica.html>
- [19] J.A. Rietdijk "Ten propositions on mechatronics", in Mechatronics in Products and Manufacturing Conference, Lancaster, Inglaterra, 1989
- [20] H.-J. Herpel, N. Wehn and M. Glesner, "Computer-Aided Prototyping of Application Specific Embedded Controllers in Mechatronics", by J. Rozenbilt and K. Buchenrieder (Eds), Ch. 21, pp.425-442, IEEE Press, New York, 1995
- [21] Beer P. F., Johnston E.R. “Mecánica Vectorial para ingenieros: Estática y Dinámica” Edit. Mc Graw Hill, México, D.F. 1998
- [22] Das Kassimali, Sami “Mecánica para ingenieros: Dinámica” Edit. Limusa, México, D.F. 1999

- [23] R.C. Hibbeler “Ingeniería Mecánica: Dinámica” Edit.:Pearson
Educación, México, D.F.1996
- [24] Centro de Formación del Profesorado e Innovación Educativa Estructura de un
Robot Industrial
http://www.cpr2valladolid.com/tecno/cyr_01/robotica/sistema/morfologia
- [25] Mikell Groove “Automation, Production Systems and Computer Integrated
Manufacturing” Edit: Mc Graw Hill, 1993
- [26] Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Robótica Industrial
<http://www.chi.itesm.mx/~cim/robind/robotica.html>
- [27] Ferrer L., Jiménez E. “La necesidad del método Científico Como Herramienta de
Trabajo, Para La Presente y Futura Ingeniería.(2006) World Congress
on Computer science, Engineering and Technology Education”
Santos, Brasil.