



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL

MODELADO CINEMÁTICO Y DISEÑO DE CONTROL DE UNA SUSPENSIÓN SEMIACTIVA

TESIS PROFESIONAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECATRÓNICO

Presenta

ALAN SAMPSON ROJAS

Director de Tesis

DR. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ

México, Ciudad Universitaria, Marzo de 2015



Agradecimientos

Agradezco especialmente al Dr. Francisco Cuenca Jiménez, a quien siempre guardaré una gran estima por su apoyo dedicado e incondicional, sin él este trabajo no hubiera sido posible. Sus conocimientos y recomendaciones me han apoyado ampliamente a lo largo de mis estudios, aprecio en gran medida la asistencia y amistad brindadas.

Asimismo quisiera extender mi más sincero agradecimiento al Dr. Juan Mauricio Ángeles Cervantes quien fungió como coasesor en este trabajo. Su compromiso y orientación fueron indispensables a lo largo del desarrollo de la tesis. Gracias a él despertó en mí el interés por el estudio del control.

Agradezco a mis sinodales, el Ing. Salvador García Burgos, el Ing. Luis Yair Bautista Blanco y al Ing. Mariano García del Gállego por sus recomendaciones que hicieron posible la presentación de mi trabajo.

Finalmente agradezco a mis padres; a mi madre que a lo largo de toda mi vida hizo posibles mis estudios y es ahora que tanto esfuerzo rinde frutos. Su amor ha sido mi principal motor. Agradezco con infinito cariño a mi padre quien siempre me mostró el valor del sacrificio y el esfuerzo. Agradezco que ambos me han dado la vida que merezco y más.

Índice general

1. Introducción	1
2. Estudio del mecanismo de suspensión	3
2.1. Descripción	3
2.2. Modelo cinemático	4
3. Análisis cinemático	10
3.1. Posición	10
3.2. Velocidad	12
4. Método de Lagrange aplicado a la suspensión de doble brazo en "A"	16
4.1. Vectores de posición de los centros de gravedad (c.g.)	17
4.2. Vectores de velocidad de los c.g.	18
4.3. Función lagrangiana de los componentes de suspensión	21
4.4. Ecuación de Lagrange para el mecanismo de suspensión	23
4.5. Resultados	37
5. Diseño de controlador lineal	43
5.1. Amortiguador magneto-reológico	43
5.2. Modelado del sistema	44
6. Conclusiones	47
A. Matrices de transformación	I
B. Derivada de un vector con respecto al tiempo	II
C. Derivada de una matriz con respecto a la entrada	IV
D. Dimensiones y propiedades de componentes de suspensión	V
E. Transformaciones homogéneas	VII
E.1. Matrices de traslación	VII
E.2. Matrices de rotación	VII

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas de suspensión en general permiten modificar las condiciones de movimiento de un cuerpo sujeto a diversas fuerzas, con el objetivo de evitar vibraciones, movimientos bruscos, colisiones, etc. El estudio de las suspensiones automotrices se ha ido desarrollando formalmente desde la década de 1950, iniciando únicamente con análisis cinemático y estudio de fuerzas para modelos simplificados. Principalmente debido a que su análisis espacial y dinámico resulta complejo, sin considerar aún efectos de la llanta. Con el apoyo de material de cómputo es posible simplificar hoy en día parte de la carga de cálculo y obtener información a partir de simulaciones. Como miembro de un equipo de Fórmula SAE y Baja SAE pude vislumbrar la complejidad de los sistemas de suspensión y la forma en la que pequeños cambios afectan en gran medida el desempeño del vehículo. Bajo este antecedente surgió la motivación de poder entender algunas características del comportamiento de estos sistemas dinámicos.

Existen diversas configuraciones de suspensión en los vehículos actuales, presentando cada una diversas ventajas en desempeño, robustez, flexibilidad en el diseño y costos. Por ejemplo la suspensión de brazo tirante o *trailing arm* permite un amplio recorrido, característica muy necesaria para coches todo terreno. La suspensión de tipo McPherson es compacta lo que permite montar fácilmente un motor transversal [9]; asimismo es de bajo costo debido a sus pocos componentes. La suspensión de doble brazo en "A" es muy empleada en vehículos de alto desempeño y competición, debido a la facilidad de ajustar parámetros de suspensión; de igual manera reduce los efectos de *squat* o *dive* [9]. El diseño de suspensiones automotrices a menudo no considera la dinámica del mecanismo, generalmente se emplea únicamente un enfoque cinemático en donde se estudian las curvas de *camber*, *toe* [7], etc.

Por otra parte, los sistemas de control en el automóvil han adquirido gran importancia debido a la búsqueda de eficiencia, seguridad, confort, desempeño, etcétera. El sistema de suspensión no es la excepción y recientemente han surgido diversas configuraciones de suspensiones activas y semiactivas; las primeras introducen energía al sistema para controlarlo, mientras que las segundas controlan la cantidad de energía que disipa el sistema. Algunos ejemplos de suspensiones activas abarcan el uso de servomecanismos hidráulicos para controlar la altura o inclinación del vehículo; como el sistema *Hydractive* empleado en el Citroën C5. Asimismo existen sistemas electromecánicos que ajustan los parámetros de suspensión; un ejemplo es el sistema de dirección trasera empleado en el Porsche 911 GT3, ver Figura 1.1.

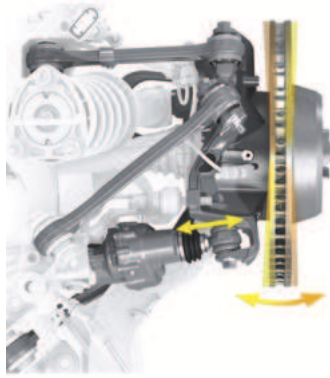


Figura 1.1: Sistema *rear axle steering* de Porsche. Cortesía de www.total911.com

Por otro lado las suspensiones semiactivas controlan la cantidad de energía que se disipa en el sistema, siendo el elemento más común el amortiguador *magneto-reológico*. Dicho componente está formado por una bobina y un amortiguador que contiene limaduras de hierro mezcladas con el fluido hidráulico en su interior. Al aplicar una diferencia de potencial a las terminales de la bobina, las limaduras de hierro se ordenan aumentando la fricción viscosa.

La primera parte de este trabajo busca establecer la ecuación dinámica de una suspensión de doble brazo en "A", a partir del método de Lagrange [3], para analizar su comportamiento bajo diferentes condiciones y así comprender su importancia. Los datos de masas e inercias de los componentes del mecanismo fueron obtenidos a partir de un software de CAD, diseñando una suspensión lo más parecido a la realidad, ver Figura 2.1. Sin embargo el objetivo de este trabajo es más cualitativo que cuantitativo así como herramienta de evaluación. En la segunda parte de este trabajo se busca establecer un controlador lineal empleando un amortiguador magneto-reológico como elemento de control, mismo que está representado por la fricción de LuGre [5]. El diseño estará basado en un modelo simplificado de la suspensión de un automóvil.

En el capítulo 2, se realiza un primer análisis de la cinemática del mecanismo empleando transformaciones que representan los desplazamientos y giros a lo largo de la suspensión. En el capítulo 3 se obtiene el Jacobiano empleando vectores con respecto a la base local. Con esta matriz será posible expresar a la ecuación diferencial en términos de la entrada. En el capítulo 4 se obtienen las velocidades de los centros de gravedad y partir de ellas, funciones lagrangianas que expresan la energía de cada cuerpo. Finalmente se desarrolla el método de Lagrange, para obtener la ecuación dinámica del mecanismo y presentar resultados de simulaciones. En el capítulo 5 se pretende realizar el diseño de un controlador lineal para un modelo simplificado empleando un amortiguador magneto-reológico. Finalmente en el capítulo 6 se presentan conclusiones y objetivos a futuro.

Capítulo 2

Estudio del mecanismo de suspensión

A lo largo de este capítulo se realiza una descripción general de la suspensión a analizar; mostrando sus principales características y componentes. Además se definirán las ecuaciones de lazo matricial que serán empleadas más adelante en la resolución de la ecuación dinámica.

2.1. Descripción

El mecanismo de suspensión de triángulos superpuestos, doble brazo en "A" o *double wishbone*, por su nombre en inglés, está formado por cuatro cuerpos: dos brazos de control, uno superior y otro inferior; una mangueta que los une junto con toda la masa no suspendida¹, y un brazo tirante o *tie rod* con el que es posible ajustar la convergencia o *toe* de la rueda. En este trabajo se analizará el mecanismo para una suspensión trasera, mismo que cuenta con un grado de libertad. Para el caso de la suspensión delantera es necesario incluir el mecanismo de dirección en donde el anclaje del brazo tirante o bieleta al chasis describe un movimiento longitudinal, agregando así un grado de libertad más.



Figura 2.1: Suspensión de doble brazo en "A".

¹La masa no suspendida está formada por la rueda, parte del sistema de frenado, la maza y la mangueta principalmente.

La suspensión trasera de doble brazo en "A" cuenta con dos juntas rotacionales, una en cada brazo ²; dos rótulas a los extremos de la mangueta y los brazos y finalmente dos rótulas a los extremos del brazo tirante, una acoplada al chasis y otra a la mangueta, ver figura 2.2. Cabe mencionar que para este me-

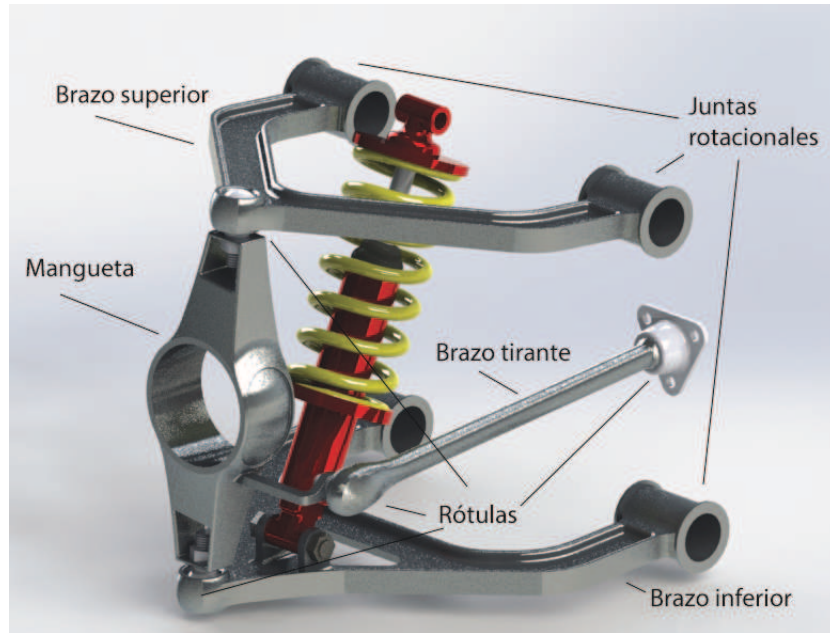


Figura 2.2: Componentes de suspensión de doble brazo en "A".

canismo el amortiguador no actúa como elemento estructural, a diferencia de otro tipo de suspensiones como la McPherson. A lo largo del desarrollo del método de Lagrange se despreciarán las masas e inercias del resorte y el amortiguador debido a que generalmente son pequeñas, por lo que no tendrán efecto en la ecuación dinámica.

2.2. Modelo cinemático

Para comenzar el estudio de este mecanismo es necesario determinar la relación que guardan cada uno de los ángulos de rótulas y juntas rotacionales, por lo que se establecerán las ecuaciones matriciales necesarias que involucren a todos los componentes de la suspensión. El marco de referencia inercial o global se coloca en el chasis del vehículo, coincidiendo en posición con la junta rotacional del brazo inferior indicado por los ejes coordenados en negro de la Figura 2.7. A partir de él se establecerán otros marcos ubicados en cada uno de los cuerpos, siguiendo la geometría completa del mecanismo. Se emplearán dos tipos de transformaciones contenidas en el apéndice *E*: rotaciones y traslaciones. $T_{z_{1-3}}$ representan traslaciones en los ejes x , y y z , respectivamente; mientras que $T_{z_{4-6}}$ representan rotaciones en los ejes x , y y z , respectivamente.

²En el análisis cinemático basta con incluir únicamente una junta. En los brazos de suspensión comerciales existen dos con el objetivo de disminuir los efectos de torsión; sin embargo, el movimiento que describen ambos es exactamente el mismo.

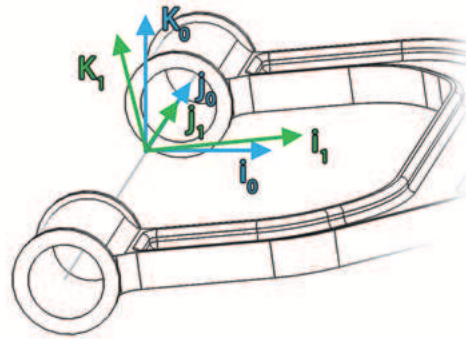


Figura 2.3: Giro en rotacional.

Para las juntas rotacionales se busca alinear el marco de referencia con el cuerpo mediante una única rotación, tal como se muestra en la figura 2.3. Eg. en la Ec. (2.1) se realiza un giro en y con un ángulo θ_{10} .

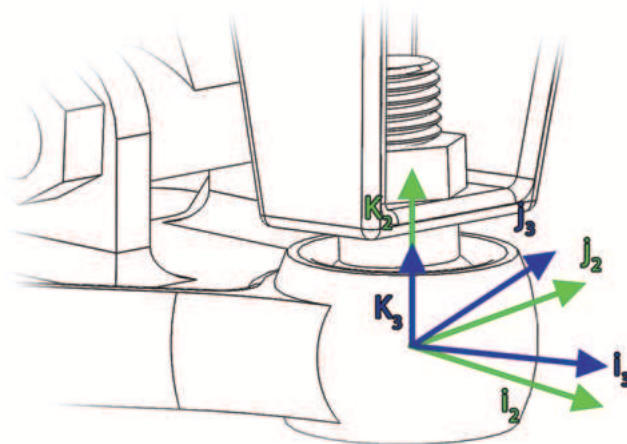


Figura 2.4: Primer giro de rótula.

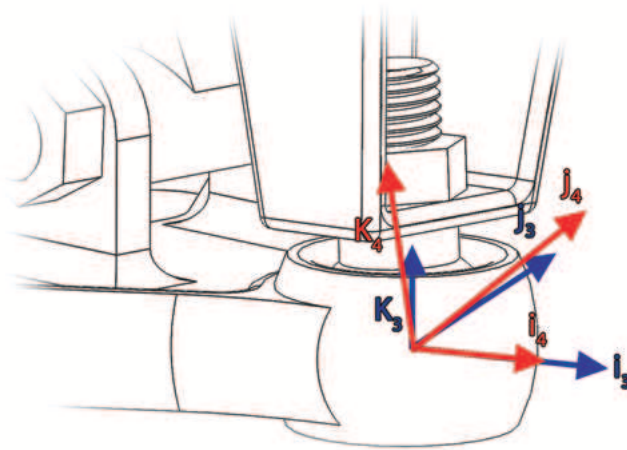


Figura 2.5: Segundo giro de rótula.

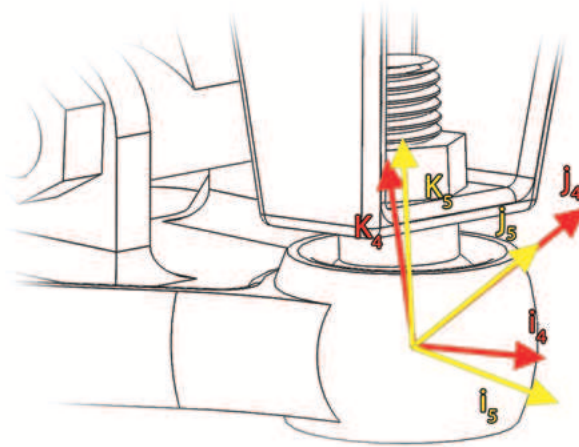


Figura 2.6: Tercer giro de rótula.

En el caso de las rótulas será necesario realizar tres giros, tal como se muestra en las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6; representando cada uno de los grados de libertad de dicha junta. Las figuras antes mostradas expresan giros sobre ejes cualesquiera para expresar las transformaciones de forma más general. Sin embargo en las Ecs. (2.1), (2.2) y (2.3) se siguió una secuencia específica, Eg. en la rótula del brazo inferior se realiza primero un giro en z con ángulo θ_{32} , posteriormente en x con un ángulo θ_{43} y finalmente en y con ángulo θ_{54} .

De este modo se proponen las siguientes ecuaciones³ iniciando desde la base global indicada por los ejes coordenados en negro de la figura 2.7.

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_{z5}(\theta_{10})\mathbf{T}_{z1}(x_{21})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{32})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{43})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{54})\mathbf{T}_{z3}(z_{65}) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_{z1}(x_{70})\mathbf{T}_{z3}(z_{87})\mathbf{T}_{z2}(y_{98})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{10,9})\mathbf{T}_{z1}(x_{11,10})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{12,11})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{13,12})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{14,13}) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_{z1}(x_{15,0})\mathbf{T}_{z2}(y_{16,15})\mathbf{T}_{z3}(z_{17,16})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{18,17})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{19,18})\mathbf{T}_{z1}(x_{20,19})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{21,20})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{22,21})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{23,22}) \\ \mathbf{T}_{z2}(y_{24,23})\mathbf{T}_{z1}(x_{25,24})\mathbf{T}_{z3}(z_{26,25}) \quad (2.3)$$

En la Ec. (2.1) se inicia en la base global, se avanza a través del brazo inferior y de la mangueta y se finaliza en la rótula superior, ver figura 2.7. En la Ec. (2.2) se inicia en la base global, se traslada al anclaje del brazo superior y a través de él; se finaliza en la rótula superior, ver Figura 2.8. En la Ec. (2.3) se inicia en la base global, se desplaza al acoplamiento del brazo tirante; se avanza a través de él y de la mangueta finalizando en la rótula superior, ver figura 2.9. Nótese que en la rótula del brazo tirante al chasis únicamente existen 2 giros ($\mathbf{T}_{z5}(\theta_{18,17})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{19,18})$), esto debido a que el giro sobre el eje longitudinal de este elemento no provoca movimiento en el mecanismo. Asimismo mediante el desplazamiento $\mathbf{T}_{z2}(y_{98})$ se consigue el *caster* o cástor.

De este modo se cumple que

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3 \quad (2.5)$$

Mediante estas ecuaciones será posible conocer los valores de los demás ángulos en función del ángulo del brazo inferior θ_{10} y con ello poder resolver la ecuación dinámica del mecanismo.

³Todas las transformaciones finalizarán en la rótula superior de la mangueta, siguiendo la secuencia representada en las Figuras 2.7, 2.8 y 2.9.

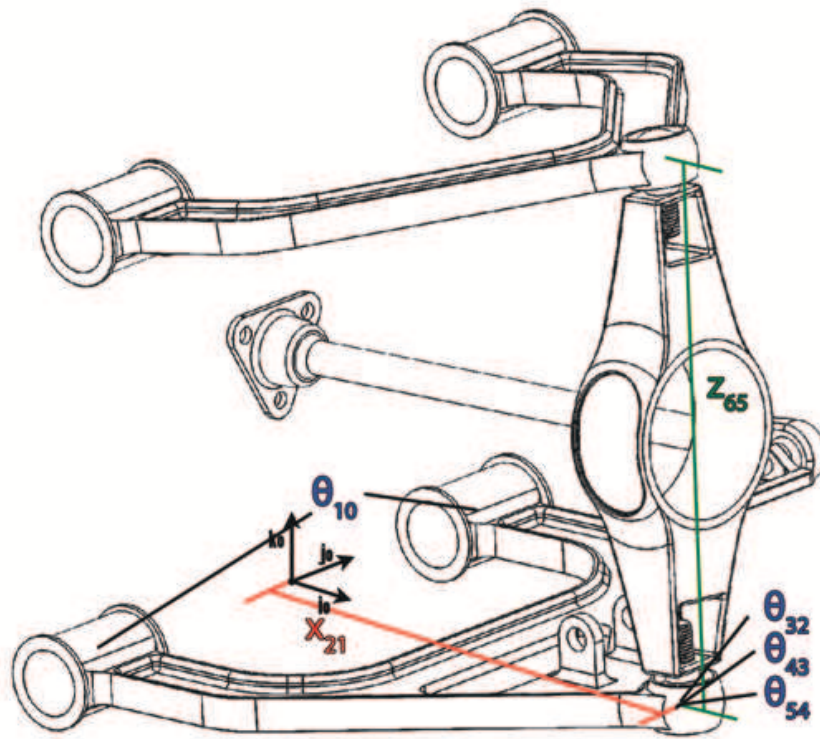


Figura 2.7: Ángulos y desplazamientos de Ec. (2.1).

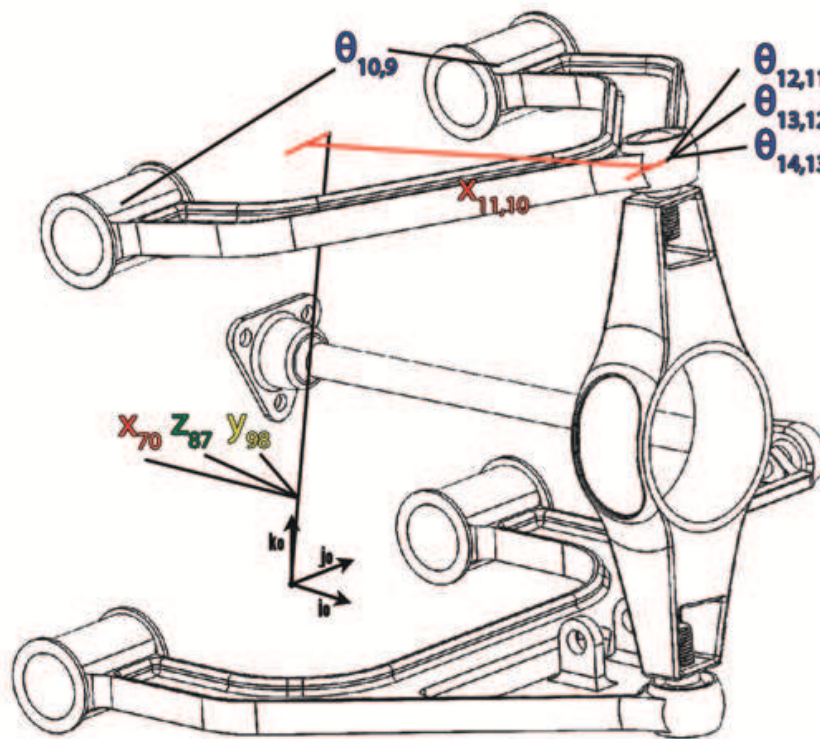


Figura 2.8: Ángulos y desplazamientos de Ec. (2.2).

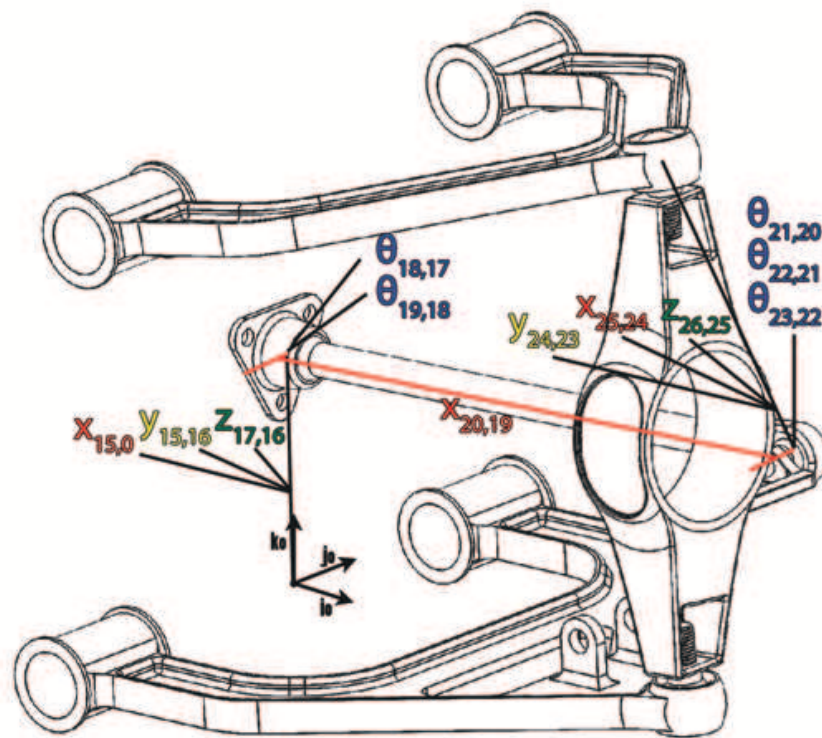


Figura 2.9: Ángulos y desplazamientos de Ec. (2.3).

Capítulo 3

Análisis cinemático

En este capítulo se proponen las ecuaciones de posición y velocidad que cierran lazos alrededor del mecanismo. A partir de establecer ecuaciones vectoriales, será posible obtener el Jacobiano del sistema. De este modo se expresarán los ángulos del mecanismo en función del grado de libertad θ_{10} .

3.1. Posición

A lo largo de este trabajo se seguirá la siguiente nomenclatura: Todos los elementos con negritas y subíndice representan vectores, siendo los que tienen mayúsculas globales y los que tienen minúsculas locales. Los elementos en negritas con subíndice y superíndice representan matrices de transformación; siendo el primero la base proyectada y el segundo la base sobre la que se proyecta; generalmente la global (0). Se entiende por base local a aquella que se encuentra alojada en el cuerpo y que no refleja sus desplazamientos, pues estando "parado" en él no será posible identificarlos. Por otro lado la base global es aquella que se encuentra fija. En ella se pueden proyectar o visualizar los desplazamientos de los demás cuerpos.

Las Ecs. (3.1) y (3.2) representan dos diferentes lazos formados por vectores a lo largo del mecanismo de suspensión; esto con el objetivo de abarcar cada uno de los cuerpos del mismo y considerar sus diferentes ángulos de movimiento. La Ec. (3.1) refleja el lazo seguido en la Figura 3.1, mientras que la Ec. (3.2) refleja el lazo seguido en la Figura 3.2.

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R}'_0 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Donde:

Los vectores globales son

$$\mathbf{R}_0 = [x_{70}, y_{98}, z_{87}]^T$$

$$\mathbf{R}'_0 = [x_{15,0}, y_{16,15}, z_{17,16}]^T$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_5^0 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}'_2 = \mathbf{R}_5^0 \mathbf{r}'_2$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_{19}^0 \mathbf{r}_4$$

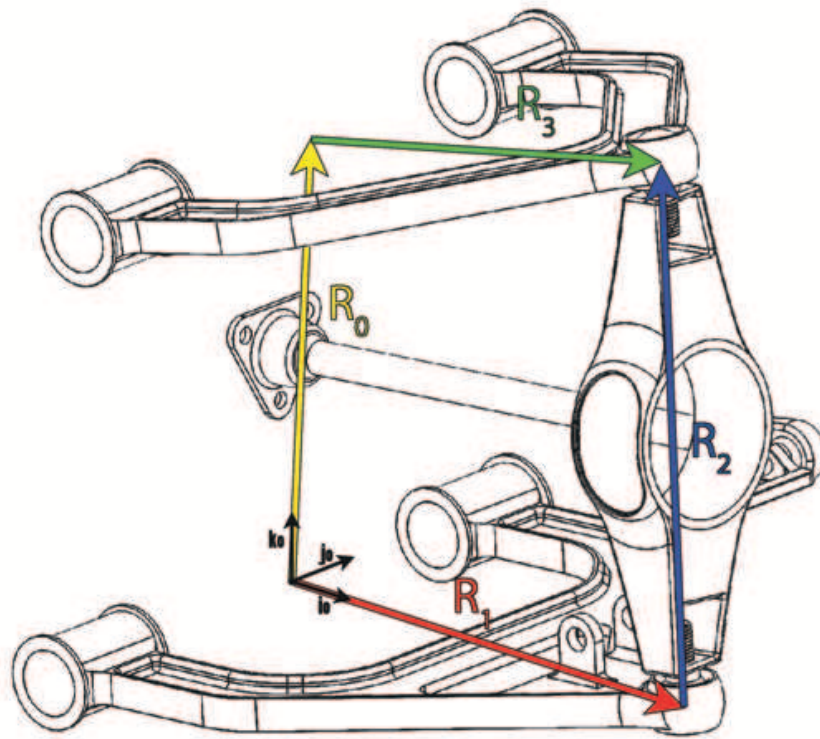


Figura 3.1: Lazo 1.

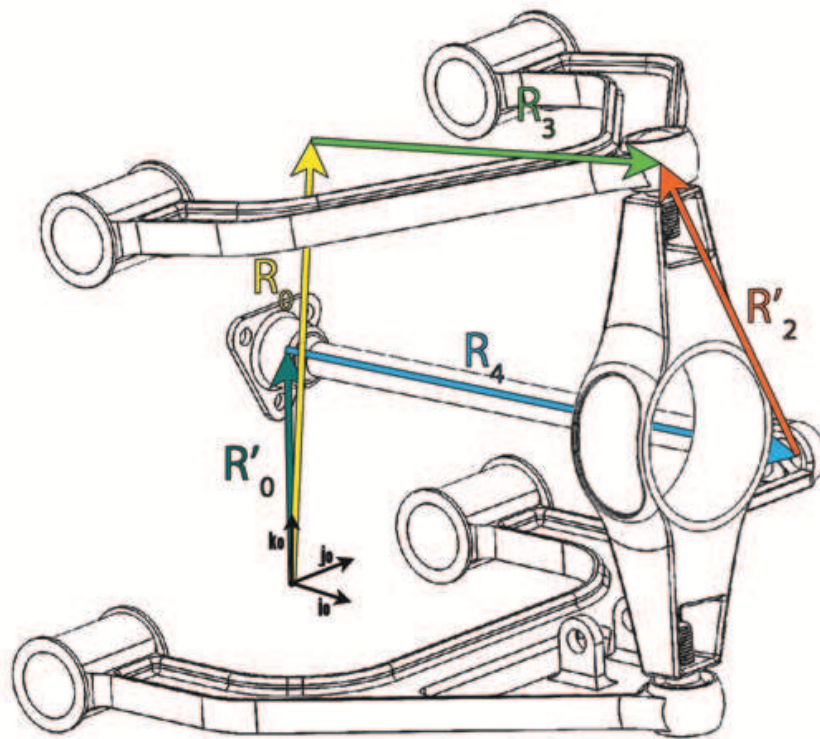


Figura 3.2: Lazo 2.

Las matrices de transformación son

$$\mathbf{R}_1^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{10})$$

$$\mathbf{R}_5^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{10})\mathbf{R}_z(\theta_{32})\mathbf{R}_x(\theta_{43})\mathbf{R}_y(\theta_{54})$$

$$\mathbf{R}_{10}^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{10,9})$$

$$\mathbf{R}_{19}^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{18,17})\mathbf{R}_z(\theta_{19,18})$$

Los vectores locales son

$$\mathbf{r}_1 = [x_{21}, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{r}_2 = [0, 0, z_{65}]^T$$

$$\mathbf{r}'_2 = [x_{25,24}, y_{24,23}, z_{26,25}]^T$$

$$\mathbf{r}_3 = [x_{11,10}, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{r}_4 = [x_{20,19}, 0, 0]^T$$

3.2. Velocidad

Derivando las Ecs. (3.1) y (3.2) se obtienen los vectores de velocidad.

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_0 = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}'_2 - \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_0 = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Sabemos que la derivada de un vector representa su velocidad, misma que se puede expresar mediante un cambio de magnitud y de ángulo:

$$\mathbf{V} = v\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

Donde \mathbf{R} es un vector de posición, v representa el cambio de magnitud del vector \mathbf{R} , \mathbf{U} es un vector unitario en dirección de \mathbf{R} y $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular. Para el caso de los vectores de este mecanismo únicamente se tienen cambios de ángulo; es decir se mantiene únicamente el segundo término.

Entonces

$$\mathbf{V}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{V}_3 = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R}_3$$

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}'_0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}_4 = \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{R}_4$$

$$\mathbf{V}'_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}'_2$$

Las velocidades angulares son

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_{10}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{32} + \boldsymbol{\omega}_{43} + \boldsymbol{\omega}_{54}$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_{10,9}$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \boldsymbol{\omega}_{18,17} + \boldsymbol{\omega}_{19,18}$$

Dichas velocidades angulares están expresadas por cambios de ángulo ($\dot{\theta}$) con respecto a bases globales.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{10} &= \dot{\theta}_{10} \mathbf{J}_0 \\
\boldsymbol{\omega}_{32} &= \dot{\theta}_{32} \mathbf{K}_2 \\
\boldsymbol{\omega}_{43} &= \dot{\theta}_{43} \mathbf{I}_3 \\
\boldsymbol{\omega}_{54} &= \dot{\theta}_{54} \mathbf{J}_4 \\
\boldsymbol{\omega}_{10,9} &= \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{J}_0 \\
\boldsymbol{\omega}_{18,17} &= \dot{\theta}_{18,17} \mathbf{J}_0 \\
\boldsymbol{\omega}_{19,18} &= \dot{\theta}_{19,18} \mathbf{K}_{18}
\end{aligned}$$

Las bases globales son

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_0 &= \mathbf{I} \mathbf{j}_0 \\
\mathbf{K}_2 &= \mathbf{R}_0^2 \mathbf{k}_2 \\
\mathbf{I}_3 &= \mathbf{R}_0^3 \mathbf{i}_3 \\
\mathbf{J}_4 &= \mathbf{R}_0^4 \mathbf{j}_4 \\
\mathbf{K}_{18} &= \mathbf{R}_0^{18} \mathbf{k}_{18}
\end{aligned}$$

Las bases locales son

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_0 &= [0 \quad 1 \quad 0]^T \\
\mathbf{k}_2 &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \\
\mathbf{i}_3 &= [1 \quad 0 \quad 0]^T \\
\mathbf{j}_4 &= [0 \quad 1 \quad 0]^T \\
\mathbf{k}_{18} &= [0 \quad 0 \quad 1]^T
\end{aligned}$$

Las matrices de transformación son

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \\
\mathbf{R}_3^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \\
\mathbf{R}_4^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \\
\mathbf{R}_{18}^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{18,17})
\end{aligned}$$

Sustituyendo las velocidades angulares en la Ec. (3.3)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_2 - \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R}_3 = \mathbf{0} \\
\dot{\theta}_{10}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_1) + \dot{\theta}_{10}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_2) + \dot{\theta}_{32}(\mathbf{K}_2 \times \mathbf{R}_2) + \dot{\theta}_{43}(\mathbf{I}_3 \times \mathbf{R}_2) + \dot{\theta}_{54}(\mathbf{J}_4 \times \mathbf{R}_2) - \dot{\theta}_{10,9}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_3) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$\dot{\theta}_{10}(\mathbf{J}_0 \times (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)) + \dot{\theta}_{32}(\mathbf{K}_2 \times \mathbf{R}_2) + \dot{\theta}_{43}(\mathbf{I}_3 \times \mathbf{R}_2) + \dot{\theta}_{54}(\mathbf{J}_4 \times \mathbf{R}_2) - \dot{\theta}_{10,9}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_3) = \mathbf{0}$$

Renombrando de acuerdo al conjunto de Ecs. (3.9):

$$\dot{\theta}_{10} \mathbf{U}_1 + \dot{\theta}_{32} \mathbf{U}_2 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{U}_3 + \dot{\theta}_{54} \mathbf{U}_4 - \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{U}_5 = \mathbf{0} \tag{3.5}$$

Sustituyendo las velocidades angulares en la Ec. (3.4):

$$\boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{R}_4 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}'_2 - \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R}_3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{18,17}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_4) + \dot{\theta}_{19,18}(\mathbf{K}_{18} \times \mathbf{R}_4) + \dot{\theta}_{10}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}'_2) + \dot{\theta}_{32}(\mathbf{K}_2 \times \mathbf{R}'_2) + \dot{\theta}_{43}(\mathbf{I}_3 \times \mathbf{R}'_2) + \dot{\theta}_{54}(\mathbf{J}_4 \times \mathbf{R}'_2) \\ - \dot{\theta}_{10,9}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_3) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Renombrando de acuerdo al conjunto de Ecs. (3.9):

$$\dot{\theta}_{18,17}\mathbf{U}_6 + \dot{\theta}_{19,18}\mathbf{U}_7 + \dot{\theta}_{10}\mathbf{U}_8 + \dot{\theta}_{32}\mathbf{U}_9 + \dot{\theta}_{43}\mathbf{U}_{10} + \dot{\theta}_{54}\mathbf{U}_{11} - \dot{\theta}_{10,9}\mathbf{U}_{12} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Para aplicar el método de Lagrange, es necesario que cada una de las variables del mecanismo (en este caso únicamente ángulos) se encuentren en términos de la entrada o grado de libertad ($\dot{\theta}_{10}$). Esto es posible ya que dado un valor de la entrada (θ_{10}), corresponde únicamente un valor para cada ángulo¹. Se expresan las Ecs. (3.5) y (3.6) en forma matricial; dichas matrices deberán ser conformables para encontrar la solución del sistema.

De manera general el sistema compuesto por las Ecs. vectoriales (3.5) y (3.6) se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{J}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \quad (3.7)$$

Representado de forma expandida es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 & \mathbf{U}_4 & -\mathbf{U}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_9 & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} & -\mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_6 & \mathbf{U}_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{54} \\ \dot{\theta}_{10,9} \\ \dot{\theta}_{18,17} \\ \dot{\theta}_{19,18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_1 \\ -\mathbf{U}_8 \end{bmatrix} \dot{\theta}_{10} \quad (3.8)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{J}_0 \times (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \\ \mathbf{U}_2 &= \mathbf{K}_2 \times \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{U}_3 &= \mathbf{I}_3 \times \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{U}_4 &= \mathbf{J}_4 \times \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{U}_5 &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{U}_6 &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{U}_7 &= \mathbf{K}_{18} \times \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{U}_8 &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}'_2 \\ \mathbf{U}_9 &= \mathbf{K}_2 \times \mathbf{R}'_2 \\ \mathbf{U}_{10} &= \mathbf{I}_3 \times \mathbf{R}'_2 \\ \mathbf{U}_{11} &= \mathbf{J}_4 \times \mathbf{R}'_2 \\ \mathbf{U}_{12} &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Cada uno de los elementos de las matrices \mathbf{J}_θ y \mathbf{J}_q son vectores columna de 3 elementos, así como el vector $\mathbf{0}$.

Nótese que el sistema es conformable y la matriz \mathbf{J}_θ es cuadrada, por lo tanto puede ser invertible. Sin

¹En este caso el mecanismo es de un grado de libertad.

embargo debido a la complejidad y al gran número de puntos analizados, se asumirá su no singularidad, ya que esto representaría atascamientos en el mecanismo. De este modo se despeja $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \quad (3.10)$$

Capítulo 4

Método de Lagrange aplicado a la suspensión de doble brazo en "A"

Para analizar la dinámica de un sistema, el método de Lagrange a diferencia del de Newton, emplea el conocimiento de las energías cinética y potencial de un cuerpo para obtener sus ecuaciones de movimiento con respecto a coordenadas generalizadas[3]. Además de simplificar el proceso de obtención de dichas ecuaciones, no requieren del cálculo de las fuerzas de restricción en las juntas cuando éstas sean holonómicas; debido a que no generan trabajo virtual. Para el caso del análisis de cuerpos, se emplean las velocidades y posiciones de los centros de gravedad, mismas con las que se expresarán sus energías cinética y potencial.

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$$

Donde L es la función lagrangiana, q es la coordenada generalizada independiente (θ_{10}) y Q el término de fuerzas generalizadas.

Se define a la función *lagrangiana* como

$$L = K - U$$

Donde K es la energía cinética del centro de gravedad de un cuerpo y se define como

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_G^T \mathbf{V}_G + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$$

y U la energía potencial del centro de gravedad de un cuerpo

$$U = -m \mathbf{g} \mathbf{R}_G = -\mathbf{W}^T \mathbf{R}_G$$

Donde m es la masa del cuerpo, \mathbf{V}_G es el vector velocidad de centro de gravedad, $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular, \mathbf{I}_G la matriz de inercias, \mathbf{g} el vector de aceleración gravitatoria y \mathbf{W} el peso del cuerpo.

Se establece que el brazo inferior es el cuerpo 1, la mangueta el cuerpo 2, el brazo superior el cuerpo 3 y el brazo tirante el cuerpo 4.

Las coordenadas generalizadas en este caso serán todos los ángulos expresados en la matriz $\boldsymbol{\theta}$ así como la entrada θ_{10} sin embargo, como esta última es independiente a las demás, será sobre la cual se calcule la ecuación de Lagrange.

4.1. Vectores de posición de los centros de gravedad (c.g.)

A continuación se calculan los vectores de posición de centros de gravedad a partir de la Figura 4.1, con ellos se obtendrán las velocidades de centros de gravedad.

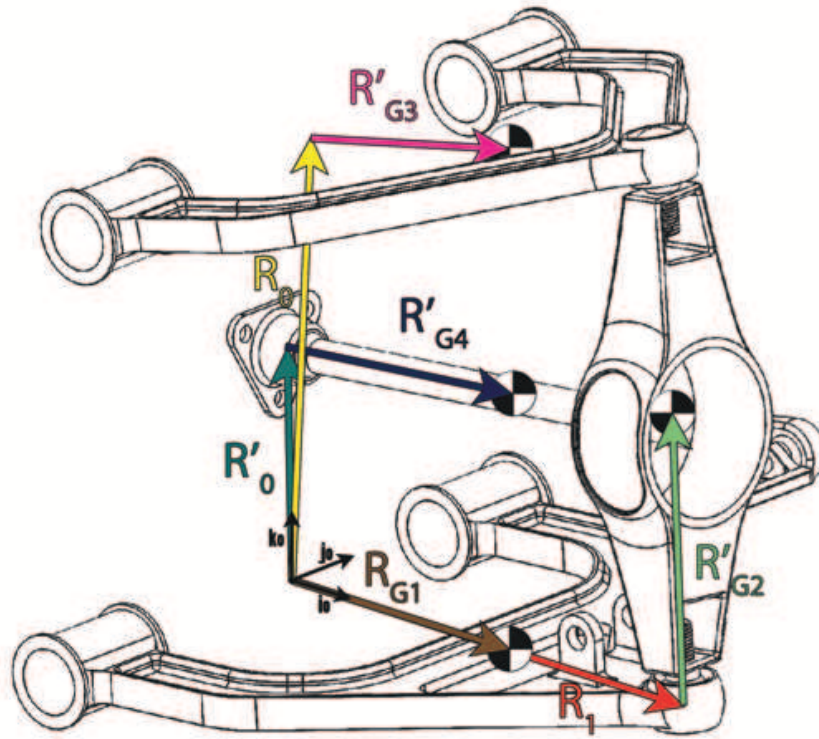


Figura 4.1: Vectores de centro de gravedad.

$$\begin{aligned} R_{G1} &= R_1^0 r_{G1} \\ R_{G2} &= R_1 + R'_{G2} \\ R_{G3} &= R_0 + R'_{G3} \\ R_{G4} &= R'_0 + R'_{G4} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} R_0 &= [x_{70}, y_{98}, z_{87}]^T \\ R'_0 &= [x_{15,0}, y_{16,15}, z_{17,16}]^T \\ R_1 &= R_1^0 r_1 \\ R'_{G2} &= R_5^0 r'_{G2} \\ R'_{G3} &= R_{10}^0 r'_{G3} \\ R'_{G4} &= R_{19}^0 r'_{G4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \\
\mathbf{R}_5^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10})\mathbf{R}_z(\theta_{32})\mathbf{R}_x(\theta_{43})\mathbf{R}_y(\theta_{54}) \\
\mathbf{R}_{10}^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10,9}) \\
\mathbf{R}_{19}^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{18,17})\mathbf{R}_z(\theta_{19,18}) \\
\mathbf{r}_1 &= [x_{21}, 0, 0]^T \\
\mathbf{r}_{G1} &= [x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}]^T \\
\mathbf{r}'_{G2} &= [x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}]^T \\
\mathbf{r}'_{G3} &= [x_{G3}, y_{G3}, z_{G3}]^T \\
\mathbf{r}'_{G4} &= [x_{G4}, y_{G4}, z_{G4}]^T
\end{aligned}$$

4.2. Vectores de velocidad de los c.g.

Sabemos que: $\mathbf{V} = v\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G1} &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_{G1} \\
\mathbf{V}_{G2} &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}'_{G2} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}'_{G2} \\
\mathbf{V}_{G3} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'_{G3} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R}'_{G3} \\
\mathbf{V}_{G4} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'_{G4} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{R}'_{G4}
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_1 &= \dot{\theta}_{10}\mathbf{J}_0 \\
\boldsymbol{\omega}_2 &= \dot{\theta}_{10}\mathbf{J}_0 + \dot{\theta}_{32}\mathbf{K}_2 + \dot{\theta}_{43}\mathbf{I}_3 + \dot{\theta}_{54}\mathbf{J}_4 \\
\boldsymbol{\omega}_3 &= \dot{\theta}_{10,9}\mathbf{J}_0 \\
\boldsymbol{\omega}_4 &= \dot{\theta}_{18,17}\mathbf{J}_0 + \dot{\theta}_{19,18}\mathbf{K}_{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}'_{G2} &= \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}'_{G2} \\
\mathbf{V}'_{G3} &= \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R}'_{G3} \\
\mathbf{V}'_{G4} &= \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{R}'_{G4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_0 &= \mathbf{I}\mathbf{j}_0 \\
\mathbf{K}_2 &= \mathbf{R}_2^0\mathbf{k}_2 \\
\mathbf{I}_3 &= \mathbf{R}_3^0\mathbf{i}_3 \\
\mathbf{J}_4 &= \mathbf{R}_4^0\mathbf{j}_4 \\
\mathbf{K}_{18} &= \mathbf{R}_{18}^0\mathbf{k}_{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_0 &= [0 \ 1 \ 0]^T \\
\mathbf{k}_2 &= [0 \ 0 \ 1]^T \\
\mathbf{i}_3 &= [1 \ 0 \ 0]^T \\
\mathbf{j}_4 &= [0 \ 1 \ 0]^T \\
\mathbf{k}_{18} &= [0 \ 0 \ 1]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \\
\mathbf{R}_3^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10})\mathbf{R}_z(\theta_{32}) \\
\mathbf{R}_4^0 &= \mathbf{R}_3^0\mathbf{R}_x(\theta_{43}) \\
\mathbf{R}_{18}^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{18,17})
\end{aligned}$$

Las ecuaciones a continuación se nombrarán de acuerdo al conjunto de Ecs. (4.8)
Sustituyendo para dejar en función de $\dot{\theta}_{10}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G1} &= (\dot{\theta}_{10}\mathbf{J}_0) \times \mathbf{R}_{G1} = \dot{\theta}_{10}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_{G1}) \\
&= \mathbf{S}_A\dot{\theta}_{10}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G2} &= (\dot{\theta}_{10}\mathbf{J}_0) \times \mathbf{R}_1 + (\dot{\theta}_{10}\mathbf{J}_0 + \dot{\theta}_{32}\mathbf{K}_2 + \dot{\theta}_{43}\mathbf{I}_3 + \dot{\theta}_{54}\mathbf{J}_4) \times \mathbf{R}'_{G2} \\
&= \dot{\theta}_{10}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_1 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}'_{G2}) + \dot{\theta}_{32}(\mathbf{K}_2 \times \mathbf{R}'_{G2}) + \dot{\theta}_{43}(\mathbf{I}_3 \times \mathbf{R}'_{G2}) + \dot{\theta}_{54}(\mathbf{J}_4 \times \mathbf{R}'_{G2}) \\
&= \mathbf{S}_1\dot{\theta}_{10} + \mathbf{S}_2\dot{\theta}_{32} + \mathbf{S}_3\dot{\theta}_{43} + \mathbf{S}_4\dot{\theta}_{54}
\end{aligned}$$

Expresando el producto de forma matricial:

$$\mathbf{V}_{G2} = \mathbf{S}_1\dot{\theta}_{10} + [\mathbf{S}_2 \ \mathbf{S}_3 \ \mathbf{S}_4 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \dot{\theta}$$

Empleando la identidad (3.10) para $\dot{\theta}$ y renombrando al vector renglón:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G2} &= \mathbf{S}_1\dot{\theta}_{10} + \mathbf{S}_B\mathbf{J}_\theta^{-1}\mathbf{J}_q\dot{\theta}_{10} \\
&= (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_B\mathbf{J}_\theta^{-1}\mathbf{J}_q)\dot{\theta}_{10} \\
&= \mathbf{S}_C\dot{\theta}_{10}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Este proceso se repetirá para las demás velocidades.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G3} &= \dot{\theta}_{10,9}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}'_{G3}) \\
&= \mathbf{S}_5\dot{\theta}_{10,9} \\
&= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{S}_5 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \dot{\theta} \\
&= \mathbf{S}_D\dot{\theta} \\
&= \mathbf{S}_D\mathbf{J}_\theta^{-1}\mathbf{J}_q\dot{\theta}_{10} \\
&= \mathbf{S}_E\dot{\theta}_{10}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G4} &= \dot{\theta}_{18,17}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}'_{G4}) + \dot{\theta}_{19,18}(\mathbf{K}_{18} \times \mathbf{R}'_{G4}) \\
&= \mathbf{S}_6 \dot{\theta}_{18,17} + \mathbf{S}_7 \dot{\theta}_{19,18} \\
&= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{S}_6 \ \mathbf{S}_7] \dot{\theta} \\
&= \mathbf{S}_F \dot{\theta} \\
&= \mathbf{S}_F \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \\
&= \mathbf{S}_G \dot{\theta}_{10}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_2 &= \mathbf{J}_0 \dot{\theta}_{10} + [\mathbf{K}_2 \ \mathbf{I}_3 \ \mathbf{J}_4 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \dot{\theta} \\
&= \mathbf{J}_0 \dot{\theta}_{10} + \mathbf{S}_H \dot{\theta} \\
&= (\mathbf{J}_0 + \mathbf{S}_H \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q) \dot{\theta}_{10} \\
&= \mathbf{S}_I \dot{\theta}_{10}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_3 &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{J}_0 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \dot{\theta} \\
&= \mathbf{S}_J \dot{\theta} \\
&= \mathbf{S}_J \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \\
&= \mathbf{S}_K \dot{\theta}_{10}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_4 &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{J}_0 \ \mathbf{K}_{18}] \dot{\theta} \\
&= \mathbf{S}_L \dot{\theta} \\
&= \mathbf{S}_L \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \\
&= \mathbf{S}_M \dot{\theta}_{10}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_1 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}'_{G2} \\
\mathbf{S}_2 &= \mathbf{K}_2 \times \mathbf{R}'_{G2} \\
\mathbf{S}_3 &= \mathbf{I}_3 \times \mathbf{R}'_{G2} \\
\mathbf{S}_4 &= \mathbf{J}_4 \times \mathbf{R}'_{G2} \\
\mathbf{S}_5 &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}'_{G3} \\
\mathbf{S}_6 &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}'_{G4} \\
\mathbf{S}_7 &= \mathbf{K}_{18} \times \mathbf{R}'_{G4} \\
\mathbf{S}_A &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}_{G1} \\
\mathbf{S}_B &= [\mathbf{S}_2 \quad \mathbf{S}_3 \quad \mathbf{S}_4 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\
\mathbf{S}_C &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_B \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\
\mathbf{S}_D &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{S}_5 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\
\mathbf{S}_E &= \mathbf{S}_D \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\
\mathbf{S}_F &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{S}_6 \quad \mathbf{S}_7] \\
\mathbf{S}_G &= \mathbf{S}_F \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\
\mathbf{S}_H &= [\mathbf{K}_2 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{J}_4 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\
\mathbf{S}_I &= \mathbf{J}_0 + \mathbf{S}_H \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\
\mathbf{S}_J &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{J}_0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\
\mathbf{S}_K &= \mathbf{S}_J \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\
\mathbf{S}_L &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{J}_0 \quad \mathbf{K}_{18}] \\
\mathbf{S}_M &= \mathbf{S}_L \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3. Función lagrangiana de los componentes de suspensión

Se define a la función *lagrangiana* como:

$$L = K - U$$

Para el caso de este mecanismo en el que se encuentran 4 cuerpos, se tiene lo siguiente:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \tag{4.9}$$

A continuación se desarrollan los términos de la expresión anterior.

$$L_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_{G1}^T \mathbf{V}_{G1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^T \mathbf{I}_{G1} \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{W}_1^T \mathbf{R}_{G1} \tag{4.10}$$

Empleando la Ec. (4.1) y sabiendo que $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}_{10}\mathbf{J}_0$

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}m_1(\mathbf{S}_A\dot{\theta}_{10})^T(\mathbf{S}_A\dot{\theta}_{10}) + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_{10}\mathbf{J}_0)^T\mathbf{I}_{G1}(\dot{\theta}_{10}\mathbf{J}_0) + \mathbf{W}_1^T\mathbf{R}_{G1} \\ &= \frac{1}{2}m_1\mathbf{S}_A^T\mathbf{S}_A\dot{\theta}_{10}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_0^T(\mathbf{I}_{G1}\mathbf{J}_0)\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_1^T\mathbf{R}_{G1} \\ &= \frac{1}{2}(m_1\mathbf{S}_A^T\mathbf{S}_A + \mathbf{J}_0^T(\mathbf{I}_{G1}\mathbf{J}_0))\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_1^T\mathbf{R}_{G1} \end{aligned}$$

Renombrando

$$\boxed{L_1 = \frac{1}{2}N_1\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_1^T\mathbf{R}_{G1}} \quad (4.11)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}m_2\mathbf{V}_{G2}^T\mathbf{V}_{G2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2^T\mathbf{I}_{G2}\boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{W}_2^T\mathbf{R}_{G2} \quad (4.12)$$

Empleando las Ecs. (4.2) y (4.5)

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2}m_2(\mathbf{S}_C\dot{\theta}_{10})^T(\mathbf{S}_C\dot{\theta}_{10}) + \frac{1}{2}(\mathbf{S}_I\dot{\theta}_{10})^T\mathbf{I}_{G2}(\mathbf{S}_I\dot{\theta}_{10}) + \mathbf{W}_2^T\mathbf{R}_{G2} \\ &= \frac{1}{2}m_2\mathbf{S}_C^T\mathbf{S}_C\dot{\theta}_{10}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{S}_I^T(\mathbf{I}_{G2}\mathbf{S}_I)\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_2^T\mathbf{R}_{G2} \\ &= \frac{1}{2}(m_2\mathbf{S}_C^T\mathbf{S}_C + \mathbf{S}_I^T(\mathbf{I}_{G2}\mathbf{S}_I))\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_2^T\mathbf{R}_{G2} \end{aligned}$$

Renombrando

$$\boxed{L_2 = \frac{1}{2}N_2\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_2^T\mathbf{R}_{G2}} \quad (4.13)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}m_3\mathbf{V}_{G3}^T\mathbf{V}_{G3} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_3^T\mathbf{I}_{G3}\boldsymbol{\omega}_3 + \mathbf{W}_3^T\mathbf{R}_{G3} \quad (4.14)$$

Empleando las expresiones (4.3) y (4.6)

$$L_3 = \frac{1}{2}(m_3\mathbf{S}_E^T\mathbf{S}_E + \mathbf{S}_K^T(\mathbf{I}_{G3}\mathbf{S}_K))\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_3^T\mathbf{R}_{G3}$$

Renombrando

$$\boxed{L_3 = \frac{1}{2}N_3\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_3^T\mathbf{R}_{G3}} \quad (4.15)$$

$$L_4 = \frac{1}{2}m_4\mathbf{V}_{G4}^T\mathbf{V}_{G4} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_4^T\mathbf{I}_{G4}\boldsymbol{\omega}_4 + \mathbf{W}_4^T\mathbf{R}_{G4} \quad (4.16)$$

Empleando las Ecs. (4.4) y (4.7)

$$L_4 = \frac{1}{2}(m_4\mathbf{S}_G^T\mathbf{S}_G + \mathbf{S}_M^T(\mathbf{I}_{G4}\mathbf{S}_M))\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_4^T\mathbf{R}_{G4}$$

Renombrando

$$\boxed{L_4 = \frac{1}{2}N_4\dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_4^T \mathbf{R}_{G4}} \quad (4.17)$$

Donde:

$$\begin{aligned} N_1 &= m_1 \mathbf{S}_A^T \mathbf{S}_A + \mathbf{J}_0^T (\mathbf{I}_{G1} \mathbf{J}_0) \\ N_2 &= m_2 \mathbf{S}_C^T \mathbf{S}_C + \mathbf{S}_I^T (\mathbf{I}_{G2} \mathbf{S}_I) \\ N_3 &= m_3 \mathbf{S}_E^T \mathbf{S}_E + \mathbf{S}_K^T (\mathbf{I}_{G3} \mathbf{S}_K) \\ N_4 &= m_4 \mathbf{S}_G^T \mathbf{S}_G + \mathbf{S}_M^T (\mathbf{I}_{G4} \mathbf{S}_M) \end{aligned}$$

Los pesos de los cuerpos son

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= m_1 \mathbf{g} \\ \mathbf{W}_2 &= m_2 \mathbf{g} \\ \mathbf{W}_3 &= m_3 \mathbf{g} \\ \mathbf{W}_4 &= m_4 \mathbf{g} \\ \mathbf{g} &= -9.81 \mathbf{k}_0 \\ \mathbf{k}_0 &= [0 \ 0 \ 1]^T \end{aligned}$$

Las matrices de inercias de cada cuerpo son

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{G1} &= \mathbf{R}_1^0 \mathbf{i}_{G1} \mathbf{R}_1^{0T} \\ \mathbf{I}_{G2} &= \mathbf{R}_5^0 \mathbf{i}_{G2} \mathbf{R}_5^{0T} \\ \mathbf{I}_{G3} &= \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{i}_{G3} \mathbf{R}_{10}^{0T} \\ \mathbf{I}_{G4} &= \mathbf{R}_{19}^0 \mathbf{i}_{G4} \mathbf{R}_{19}^{0T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \\ \mathbf{R}_5^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \\ \mathbf{R}_{10}^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{10,9}) \\ \mathbf{R}_{19}^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{18,17}) \mathbf{R}_z(\theta_{19,18}) \end{aligned}$$

4.4. Ecuación de Lagrange para el mecanismo de suspensión

La forma estándar de la ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$$

Desarrollando $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$

De la Ec. (4.11), derivando con respecto de $\dot{\theta}_{10}$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}_{10}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{10}} \left(\frac{1}{2} N_1 \dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_1^T \mathbf{R}_{G1} \right)$$

Debido a que N_1 , \mathbf{W}_1 y \mathbf{R}_{G1} no son función de $\dot{\theta}_{10}$, su derivada es igual a cero, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}_{10}} &= N_1 \dot{\theta}_{10} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}_{10}} \right) &= \frac{d}{dt} (N_1 \dot{\theta}_{10}) \\ &= \dot{N}_1 \dot{\theta}_{10} + N_1 \ddot{\theta}_{10} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Así con las demás funciones lagrangianas

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\theta}_{10}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{10}} \left(\frac{1}{2} N_2 \dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_2^T \mathbf{R}_{G2} \right) \\ &= N_2 \dot{\theta}_{10} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\theta}_{10}} \right) &= \dot{N}_2 \dot{\theta}_{10} + N_2 \ddot{\theta}_{10} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial \dot{\theta}_{10}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{10}} \left(\frac{1}{2} N_3 \dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_3^T \mathbf{R}_{G3} \right) \\ &= N_3 \dot{\theta}_{10} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_3}{\partial \dot{\theta}_{10}} \right) &= \dot{N}_3 \dot{\theta}_{10} + N_3 \ddot{\theta}_{10} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_4}{\partial \dot{\theta}_{10}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{10}} \left(\frac{1}{2} N_4 \dot{\theta}_{10}^2 + \mathbf{W}_4^T \mathbf{R}_{G4} \right) \\ &= N_4 \dot{\theta}_{10} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_4}{\partial \dot{\theta}_{10}} \right) &= \dot{N}_4 \dot{\theta}_{10} + N_4 \ddot{\theta}_{10} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Derivando los términos N con respecto al tiempo

$$\dot{N}_1 = m_1 (\dot{\mathbf{S}}_A^T \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_A^T \dot{\mathbf{S}}_A) + \mathbf{J}_0^T (\mathbf{I}_{G1} \mathbf{J}_0) + \mathbf{J}_0^T (\dot{\mathbf{I}}_{G1} \mathbf{J}_0) + \mathbf{J}_0^T (\mathbf{I}_{G1} \dot{\mathbf{J}}_0)$$

Debido a que \mathbf{J}_0 forma parte de la base inercial, ésta no cambia con respecto al tiempo.

$$\dot{N}_1 = 2m_1 \dot{\mathbf{S}}_A^T \mathbf{S}_A + \mathbf{J}_0^T (\dot{\mathbf{I}}_{G1} \mathbf{J}_0) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{N}_2 &= m_2 (\dot{\mathbf{S}}_C^T \mathbf{S}_C + \mathbf{S}_C^T \dot{\mathbf{S}}_C) + \dot{\mathbf{S}}_I^T (\mathbf{I}_{G2} \mathbf{S}_I) + \mathbf{S}_I^T (\dot{\mathbf{I}}_{G2} \mathbf{S}_I) + \mathbf{S}_I^T (\mathbf{I}_{G2} \dot{\mathbf{S}}_I) \\ &= 2m_2 \dot{\mathbf{S}}_C^T \mathbf{S}_C + \dot{\mathbf{S}}_I^T (\mathbf{I}_{G2} \mathbf{S}_I) + \mathbf{S}_I^T (\dot{\mathbf{I}}_{G2} \mathbf{S}_I) + \mathbf{S}_I^T (\mathbf{I}_{G2} \dot{\mathbf{S}}_I) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
\dot{N}_3 &= m_3(\dot{\mathbf{S}}_E^T \mathbf{S}_E + \mathbf{S}_E^T \dot{\mathbf{S}}_E) + \dot{\mathbf{S}}_K^T (\mathbf{I}_{G3} \mathbf{S}_K) + \mathbf{S}_K^T (\dot{\mathbf{I}}_{G3} \mathbf{S}_K) + \mathbf{S}_K^T (\mathbf{I}_{G3} \dot{\mathbf{S}}_K) \\
&= 2m_3 \dot{\mathbf{S}}_E^T \mathbf{S}_E + \dot{\mathbf{S}}_K^T (\mathbf{I}_{G3} \mathbf{S}_K) + \mathbf{S}_K^T (\dot{\mathbf{I}}_{G3} \mathbf{S}_K) + \mathbf{S}_K^T (\mathbf{I}_{G3} \dot{\mathbf{S}}_K)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
\dot{N}_4 &= m_4(\dot{\mathbf{S}}_G^T \mathbf{S}_G + \mathbf{S}_G^T \dot{\mathbf{S}}_G) + \dot{\mathbf{S}}_M^T (\mathbf{I}_{G4} \mathbf{S}_M) + \mathbf{S}_M^T (\dot{\mathbf{I}}_{G4} \mathbf{S}_M) + \mathbf{S}_M^T (\mathbf{I}_{G4} \dot{\mathbf{S}}_M) \\
&= 2m_4 \dot{\mathbf{S}}_G^T \mathbf{S}_G + \dot{\mathbf{S}}_M^T (\mathbf{I}_{G4} \mathbf{S}_M) + \mathbf{S}_M^T (\dot{\mathbf{I}}_{G4} \mathbf{S}_M) + \mathbf{S}_M^T (\mathbf{I}_{G4} \dot{\mathbf{S}}_M)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Derivando las matrices de inercias \mathbf{I}_G

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{I}}_{G1} &= \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{i}_{G1} \mathbf{R}_1^{0T} + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{i}_{G1} \dot{\mathbf{R}}_1^{0T} \\
\dot{\mathbf{I}}_{G2} &= \dot{\mathbf{R}}_5^0 \mathbf{i}_{G2} \mathbf{R}_5^{0T} + \mathbf{R}_5^0 \mathbf{i}_{G2} \dot{\mathbf{R}}_5^{0T} \\
\dot{\mathbf{I}}_{G3} &= \dot{\mathbf{R}}_{10}^0 \mathbf{i}_{G3} \mathbf{R}_{10}^{0T} + \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{i}_{G3} \dot{\mathbf{R}}_{10}^{0T} \\
\dot{\mathbf{I}}_{G4} &= \dot{\mathbf{R}}_{19}^0 \mathbf{i}_{G4} \mathbf{R}_{19}^{0T} + \mathbf{R}_{19}^0 \mathbf{i}_{G4} \dot{\mathbf{R}}_{19}^{0T}
\end{aligned}$$

Derivando los términos \mathbf{S} , el conjunto de Ecs. (4.8)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_A &= \dot{\mathbf{J}}_0 \times \mathbf{R}_{G1} + \mathbf{J}_0 \times \dot{\mathbf{R}}_{G1} \\
&= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{V}_{G1}
\end{aligned}$$

De (4.1)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_A &= \mathbf{J}_0 \times (\mathbf{S}_A \dot{\theta}_{10}) \\
&= (\mathbf{J}_0 \times \mathbf{S}_A) \dot{\theta}_{10}
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{S}}_B = [\dot{\mathbf{S}}_2 \quad \dot{\mathbf{S}}_3 \quad \dot{\mathbf{S}}_4 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$$

$$\dot{\mathbf{S}}_C = \dot{\mathbf{S}}_1 + \dot{\mathbf{S}}_B \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q + \mathbf{S}_B \dot{\mathbf{J}}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q + \mathbf{S}_B \mathbf{J}_\theta^{-1} \dot{\mathbf{J}}_q$$

$$\dot{\mathbf{S}}_D = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dot{\mathbf{S}}_5 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$$

$$\dot{\mathbf{S}}_E = \dot{\mathbf{S}}_D \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q + \mathbf{S}_D \dot{\mathbf{J}}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q + \mathbf{S}_D \mathbf{J}_\theta^{-1} \dot{\mathbf{J}}_q$$

$$\dot{\mathbf{S}}_F = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dot{\mathbf{S}}_6 \quad \dot{\mathbf{S}}_7]$$

$$\dot{S}_G = \dot{S}_F J_\theta^{-1} J_q + S_F \dot{J}_\theta^{-1} J_q + S_F J_\theta^{-1} \dot{J}_q$$

$$\dot{S}_H = [\dot{K}_2 \quad \dot{I}_3 \quad \dot{J}_4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\dot{S}_I = \dot{S}_H J_\theta^{-1} J_q + S_H \dot{J}_\theta^{-1} J_q + S_H J_\theta^{-1} \dot{J}_q$$

$$\dot{S}_J = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\dot{S}_K = \dot{S}_J J_\theta^{-1} J_q + S_J \dot{J}_\theta^{-1} J_q + S_J J_\theta^{-1} \dot{J}_q$$

$$\dot{S}_L = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{K}_{18}]$$

$$\dot{S}_M = \dot{S}_L J_\theta^{-1} J_q + S_L \dot{J}_\theta^{-1} J_q + S_L J_\theta^{-1} \dot{J}_q$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= J_0 \times \dot{R}_1 + J_0 \times \dot{R}'_{G2} \\ &= J_0 \times V_1 + J_0 \times V'_{G2} \\ &= J_0 \times (V_1 + V'_{G2}) \\ &= J_0 \times V_{G2} \end{aligned}$$

De (4.2)

$$\dot{S}_1 = (J_0 \times S_C) \dot{\theta}_{10}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 &= \dot{K}_2 \times R'_{G2} + K_2 \times \dot{R}'_{G2} \\ &= \dot{K}_2 \times R'_{G2} + K_2 \times V'_{G2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_3 &= \dot{I}_3 \times R'_{G2} + I_3 \times \dot{R}'_{G2} \\ &= \dot{I}_3 \times R'_{G2} + I_3 \times V'_{G2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}_4 &= \dot{\mathbf{J}}_4 \times \mathbf{R}'_{G2} + \mathbf{J}_4 \times \dot{\mathbf{R}}'_{G2} \\ &= \dot{\mathbf{J}}_4 \times \mathbf{R}'_{G2} + \mathbf{J}_4 \times \mathbf{V}'_{G2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}_5 &= \mathbf{J}_0 \times \dot{\mathbf{R}}'_{G3} \\ &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{V}'_{G3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}_6 &= \mathbf{J}_0 \times \dot{\mathbf{R}}'_{G4} \\ &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{V}'_{G4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}_7 &= \dot{\mathbf{K}}_{18} \times \mathbf{R}'_{G4} + \mathbf{K}_{18} \times \dot{\mathbf{R}}'_{G4} \\ &= \dot{\mathbf{K}}_{18} \times \mathbf{R}'_{G4} + \mathbf{K}_{18} \times \mathbf{V}'_{G4}\end{aligned}$$

Derivando las matrices \mathbf{J}

$$\mathbf{j}_\theta = \begin{bmatrix} \dot{U}_2 & \dot{U}_3 & \dot{U}_4 & -\dot{U}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{U}_9 & \dot{U}_{10} & \dot{U}_{11} & -\dot{U}_{12} & \dot{U}_6 & \dot{U}_7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_q = \begin{bmatrix} -\dot{U}_1 \\ -\dot{U}_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_\theta^{-1} = -\mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{j}_\theta \mathbf{J}_\theta^{-1}$$

Derivando los términos \mathbf{U} , el conjunto de Ecs. (3.9)

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \mathbf{J}_0 \times (\dot{\mathbf{R}}_1 + \dot{\mathbf{R}}_2) \\ &= \mathbf{J}_0 \times (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= \dot{\mathbf{K}}_2 \times \mathbf{R}_2 + \mathbf{K}_2 \times \dot{\mathbf{R}}_2 \\ &= \dot{\mathbf{K}}_2 \times \mathbf{R}_2 + \mathbf{K}_2 \times \mathbf{V}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_3 &= \dot{\mathbf{I}}_3 \times \mathbf{R}_2 + \mathbf{I}_3 \times \dot{\mathbf{R}}_2 \\ &= \dot{\mathbf{I}}_3 \times \mathbf{R}_2 + \mathbf{I}_3 \times \mathbf{V}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_4 &= \dot{J}_4 \times R_2 + J_4 \times \dot{R}_2 \\ &= \dot{J}_4 \times R_2 + J_4 \times V_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_5 &= J_0 \times \dot{R}_3 \\ &= J_0 \times V_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_6 &= J_0 \times \dot{R}_4 \\ &= J_0 \times V_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_7 &= \dot{K}_{18} \times R_4 + K_{18} \times \dot{R}_4 \\ &= \dot{K}_{18} \times R_4 + K_{18} \times V_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_8 &= J_0 \times \dot{R}'_2 \\ &= J_0 \times V'_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_9 &= \dot{K}_2 \times R'_2 + K_2 \times \dot{R}'_2 \\ &= \dot{K}_2 \times R'_2 + K_2 \times V'_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{10} &= \dot{I}_3 \times R'_2 + I_3 \times \dot{R}'_2 \\ &= \dot{I}_3 \times R'_2 + I_3 \times V'_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{11} &= \dot{J}_4 \times R'_2 + J_4 \times \dot{R}'_2 \\ &= \dot{J}_4 \times R'_2 + J_4 \times V'_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{12} &= J_0 \times \dot{R}_3 \\ &= J_0 \times V_3\end{aligned}$$

Donde:

$$V_1 = \omega_1 \times R_1$$

$$V_2 = \omega_2 \times R_2$$

$$V'_2 = \omega_2 \times R'_2$$

$$V_3 = \omega_3 \times R_3$$

$$V_4 = \omega_4 \times R_4$$

Derivando las bases correspondientes

$$\dot{\mathbf{K}}_2 = \dot{\mathbf{R}}_0^2 \mathbf{k}_2 + \mathbf{R}_0^2 \dot{\mathbf{k}}_2$$

Recordemos que \mathbf{k}_2 es una base local, es decir como si estuviéramos parados en el cuerpo y no fuera de él en la base global. Por lo tanto ni su posición ni su velocidad cambian con respecto de sí misma.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}}_2 &= \dot{\mathbf{R}}_0^2 \mathbf{k}_2 \\ \dot{\mathbf{I}}_3 &= \dot{\mathbf{R}}_0^3 \mathbf{i}_3 \\ \dot{\mathbf{J}}_4 &= \dot{\mathbf{R}}_0^4 \mathbf{j}_4 \\ \dot{\mathbf{K}}_{18} &= \dot{\mathbf{R}}_0^{18} \mathbf{k}_{18}\end{aligned}$$

Derivando las matrices de transformación, empleando la relación (B.6) contenida en el apéndice B

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_1^0 &= \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{10}) \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \\ \dot{\mathbf{R}}_2^0 &= \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{10}) \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \\ \dot{\mathbf{R}}_3^0 &= \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{10}) \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \boldsymbol{\Omega}_z(\dot{\theta}_{32}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \\ \dot{\mathbf{R}}_4^0 &= \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{10}) \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \boldsymbol{\Omega}_z(\dot{\theta}_{32}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \boldsymbol{\Omega}_x(\dot{\theta}_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \\ \dot{\mathbf{R}}_5^0 &= \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{10}) \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \boldsymbol{\Omega}_z(\dot{\theta}_{32}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \boldsymbol{\Omega}_x(\dot{\theta}_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{54}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \\ \dot{\mathbf{R}}_{10}^0 &= \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{10,9}) \mathbf{R}_y(\theta_{10,9}) \\ \dot{\mathbf{R}}_{18}^0 &= \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{18,17}) \mathbf{R}_y(\theta_{18,17}) \\ \dot{\mathbf{R}}_{19}^0 &= \boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}_{18,17}) \mathbf{R}_y(\theta_{18,17}) \mathbf{R}_z(\theta_{19,18}) + \mathbf{R}_y(\theta_{18,17}) \boldsymbol{\Omega}_z(\dot{\theta}_{19,18}) \mathbf{R}_z(\theta_{19,18})\end{aligned}$$

A continuación se busca separar cada uno de los términos de la matriz $\boldsymbol{\theta}$, para ello se emplea el conjunto de Ecs. (4.26).

De este modo

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{32} &= \mathbf{g}_1^T \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \mathbf{g}_1^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_{43} &= \mathbf{g}_2^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_{54} &= \mathbf{g}_3^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_{10,9} &= \mathbf{g}_4^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_{18,17} &= \mathbf{g}_5^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_{19,18} &= \mathbf{g}_6^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10}\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
\mathbf{g}_2 &= [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
\mathbf{g}_3 &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
\mathbf{g}_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \\
\mathbf{g}_5 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \\
\mathbf{g}_6 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Desarrollando $\frac{\partial L}{\partial q}$

De (4.10)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial \theta_{10}} &= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\partial \mathbf{V}_{G1}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G1} + \mathbf{V}_{G1}^T \frac{\partial \mathbf{V}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G1} \omega_1 + \frac{1}{2} \omega_1^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \omega_1 + \frac{1}{2} \omega_1^T \mathbf{I}_{G1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_1^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \\
&= m_1 \frac{\partial \mathbf{V}_{G1}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G1} \omega_1 + \frac{1}{2} \omega_1^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \omega_1 + \frac{1}{2} \omega_1^T \mathbf{I}_{G1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_1^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G1}}{\partial \theta_{10}}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

De (4.12)

$$\frac{\partial L_2}{\partial \theta_{10}} = m_2 \frac{\partial \mathbf{V}_{G2}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_2^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G2} \omega_2 + \frac{1}{2} \omega_2^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G2}}{\partial \theta_{10}} \omega_2 + \frac{1}{2} \omega_2^T \mathbf{I}_{G2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_2^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G2}}{\partial \theta_{10}} \tag{4.28}$$

De (4.14)

$$\frac{\partial L_3}{\partial \theta_{10}} = m_3 \frac{\partial \mathbf{V}_{G3}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_3^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G3} \omega_3 + \frac{1}{2} \omega_3^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G3}}{\partial \theta_{10}} \omega_3 + \frac{1}{2} \omega_3^T \mathbf{I}_{G3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_3^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G3}}{\partial \theta_{10}} \tag{4.29}$$

De (4.16)

$$\frac{\partial L_4}{\partial \theta_{10}} = m_4 \frac{\partial \mathbf{V}_{G4}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G4} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_4^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G4} \omega_4 + \frac{1}{2} \omega_4^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G4}}{\partial \theta_{10}} \omega_4 + \frac{1}{2} \omega_4^T \mathbf{I}_{G4} \frac{\partial \omega_4}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_4^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G4}}{\partial \theta_{10}} \tag{4.30}$$

Derivando las matrices de inercia con respecto a la entrada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{I}_{G1}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{i}_{G1} \mathbf{R}_1^{0T} + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{i}_{G1} \frac{\partial \mathbf{R}_1^{0T}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \mathbf{I}_{G2}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_5^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{i}_{G2} \mathbf{R}_5^{0T} + \mathbf{R}_5^0 \mathbf{i}_{G2} \frac{\partial \mathbf{R}_5^{0T}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \mathbf{I}_{G3}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{10}^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{i}_{G3} \mathbf{R}_{10}^{0T} + \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{i}_{G3} \frac{\partial \mathbf{R}_{10}^{0T}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \mathbf{I}_{G4}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{19}^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{i}_{G4} \mathbf{R}_{19}^{0T} + \mathbf{R}_{19}^0 \mathbf{i}_{G4} \frac{\partial \mathbf{R}_{19}^{0T}}{\partial \theta_{10}}
\end{aligned}$$

Derivando las velocidades de centro de gravedad

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{V}_{G1}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \theta_{10}} \times \mathbf{R}_{G1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \frac{\partial \mathbf{R}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \mathbf{V}_{G2}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \theta_{10}} \times \mathbf{R}_{G1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \frac{\partial \mathbf{R}_{G1}}{\partial \theta_{10}} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \theta_{10}} \times \mathbf{R}'_{G2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{\partial \mathbf{R}'_{G2}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \mathbf{V}_{G3}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \theta_{10}} \times \mathbf{R}'_{G3} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \frac{\partial \mathbf{R}'_{G3}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \mathbf{V}_{G4}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_4}{\partial \theta_{10}} \times \mathbf{R}'_{G4} + \boldsymbol{\omega}_4 \times \frac{\partial \mathbf{R}'_{G4}}{\partial \theta_{10}}
\end{aligned}$$

Derivando las velocidades angulares

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \dot{\theta}_{10}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{J}_0 + \dot{\theta}_{10} \frac{\partial \mathbf{J}_0}{\partial \theta_{10}} \\
&= \mathbf{0} \\
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \theta_{10}} &= \dot{\theta}_{32} \frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial \theta_{10}} + \dot{\theta}_{43} \frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial \theta_{10}} + \dot{\theta}_{54} \frac{\partial \mathbf{J}_4}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \theta_{10}} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_4}{\partial \theta_{10}} &= \dot{\theta}_{19,18} \frac{\partial \mathbf{K}_{18}}{\partial \theta_{10}}
\end{aligned}$$

Derivando los vectores de centro de gravedad

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}_{G1}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{r}_{G1} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{G2}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \theta_{10}} + \frac{\partial \mathbf{R}'_{G2}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{G3}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}'_{G3}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{G4}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}'_{G4}}{\partial \theta_{10}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{r}_1 \\
\frac{\partial \mathbf{R}'_{G2}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_5^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{r}'_{G2} \\
\frac{\partial \mathbf{R}'_{G3}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{10}^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{r}'_{G3} \\
\frac{\partial \mathbf{R}'_{G4}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{19}^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{r}'_{G4}
\end{aligned}$$

Derivando las bases globales

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{k}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_3^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{J}_4}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_4^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{j}_4 \\ \frac{\partial \mathbf{K}_{18}}{\partial \theta_{10}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{18}^0}{\partial \theta_{10}} \mathbf{k}_{18}\end{aligned}$$

Derivando las matrices empleando las relaciones contenidas en el apéndice C

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \frac{\partial \theta_{10}}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3^0}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{B}_z(\theta_{32}) \frac{\partial \theta_{32}}{\partial \theta_{10}} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_4^0}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{B}_z(\theta_{32}) \frac{\partial \theta_{32}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{R}_x(\theta_{43}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{B}_x(\theta_{43}) \frac{\partial \theta_{43}}{\partial \theta_{10}} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}_5^0}{\partial \theta_{10}} &= \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{B}_z(\theta_{32}) \frac{\partial \theta_{32}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{B}_x(\theta_{43}) \frac{\partial \theta_{43}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{R}_y(\theta_{54}) + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \mathbf{B}_y(\theta_{54}) \frac{\partial \theta_{54}}{\partial \theta_{10}}\end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{10}^0}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{B}_y(\theta_{10,9}) \frac{\partial \theta_{10,9}}{\partial \theta_{10}} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{18}^0}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{B}_y(\theta_{18,17}) \frac{\partial \theta_{18,17}}{\partial \theta_{10}} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{19}^0}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{B}_y(\theta_{18,17}) \frac{\partial \theta_{18,17}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{R}_z(\theta_{19,18}) + \mathbf{R}_y(\theta_{18,17}) \mathbf{B}_z(\theta_{19,18}) \frac{\partial \theta_{19,18}}{\partial \theta_{10}} \quad (4.38)$$

Obteniendo el término $\frac{\partial \theta}{\partial \theta_{10}}$

De la Ec. (3.7)

$$\mathbf{J}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por ∂t y dividiendo entre $\partial \theta_{10}$ se tiene

$$\mathbf{J}_\theta \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{J}_q$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta_{10}} = \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q$$

De este modo empleando la relación anterior y el conjunto de Ecs. (4.26)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_{32}}{\partial \theta_{10}} &= \mathbf{g}_1^T \frac{\partial \theta}{\partial \theta_{10}} \\ &= \mathbf{g}_1^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\ \frac{\partial \theta_{43}}{\partial \theta_{10}} &= \mathbf{g}_2^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\ \frac{\partial \theta_{54}}{\partial \theta_{10}} &= \mathbf{g}_3^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\ \frac{\partial \theta_{10,9}}{\partial \theta_{10}} &= \mathbf{g}_4^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\ \frac{\partial \theta_{18,17}}{\partial \theta_{10}} &= \mathbf{g}_5^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \\ \frac{\partial \theta_{19,18}}{\partial \theta_{10}} &= \mathbf{g}_6^T \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q\end{aligned}$$

Desarrollando al término de fuerzas generalizadas Q

Se obtienen las fuerzas generalizadas empleando los vectores de posición contenidos en la Fig. 4.2

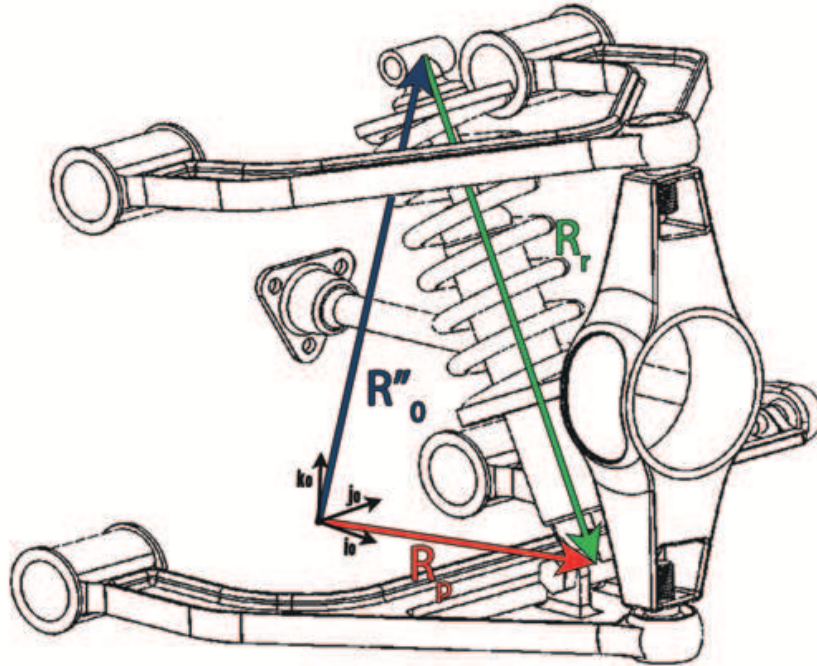


Figura 4.2: Vectores de fuerza de respuesta.

Se define el vector del punto de aplicación de la fuerza asociada al resorte y al amortiguador

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_p$$

La fuerza del resorte y del amortiguador están aplicadas en la misma línea de acción, la cual se define como

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{R}_p - \mathbf{R}_0''$$

Donde la magnitud del vector \mathbf{R}_r es

$$l = (\mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_r)^{\frac{1}{2}}$$

De este modo el vector unitario en dicha dirección es

$$\mathbf{U}_r = \frac{\mathbf{R}_r}{l}$$

La fuerza de respuesta asociada al resorte y al amortiguador es

$$\mathbf{F}_r = f_r \mathbf{U}_r$$

Donde a su vez f_r es la magnitud de la fuerza y se define como

$$f_r = -K(l - l_0) - B\dot{l}$$

Donde K y B son las constantes del resorte y del amortiguador, respectivamente. l_0 es la longitud inicial del resorte sin carga y \dot{l} se define como

$$\dot{l} = \frac{\mathbf{R}_r^T \mathbf{V}_r}{l}$$

Cuando $l < l_0$, el resorte se comprime y la fuerza del resorte se opone a dicha compresión; esto se logra gracias al signo negativo a un lado de K , sucediendo algo similar con el amortiguador

\mathbf{V}_r es el vector velocidad de \mathbf{R}_r , mismo que se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r &= \dot{\mathbf{R}}_p - \dot{\mathbf{R}}_0'' \\ \mathbf{V}_r &= \dot{\mathbf{R}}_p \\ \mathbf{V}_r &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_p \end{aligned}$$

El punto de aplicación de la fuerza proveniente del suelo se define como

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}'_s$$

Además

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_1^0 r_1 \\ \mathbf{R}'_s &= \mathbf{R}_5^0 r'_s \end{aligned}$$

De la definición de trabajo virtual

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathbf{F}^T \delta \mathbf{r} + \mathbf{M}^T \delta \mathbf{Q} = Q \delta q \\ &= \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{R}_p + \mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{R}_s \end{aligned}$$

La fuerza proveniente del suelo es

$$\mathbf{F}_s = [0, 0, f_s]^T$$

Es decir \mathbf{F}_s siempre se manifiesta en dirección vertical

Además

$$\delta \mathbf{R}_p = \delta \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_p$$

$$\delta \mathbf{R}_s = \delta \mathbf{R}_1 + \delta \mathbf{R}'_s$$

$$\delta \mathbf{R}_1 = \delta \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_1$$

$$\delta \mathbf{R}'_s = \delta \mathbf{R}'_5^0 \mathbf{r}'_s$$

$$\delta \mathbf{R}_1^0 = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{10})}{\partial \theta_{10}} \delta \theta_{10}$$

$$= \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \delta \theta_{10}$$

$$\delta \mathbf{R}'_5^0 = \delta(\mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}))$$

$$= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{10})}{\partial \theta_{10}} \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \delta \theta_{10} + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{32})}{\partial \theta_{32}} \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \delta \theta_{32}$$

$$+ \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \delta \theta_{43} + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{54})}{\partial \theta_{54}} \delta \theta_{54}$$

$$= \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \delta \theta_{10} + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{B}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \delta \theta_{32}$$

$$+ \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{B}_x(\theta_{43}) \mathbf{R}_y(\theta_{54}) \delta \theta_{43} + \mathbf{R}_y(\theta_{10}) \mathbf{R}_z(\theta_{32}) \mathbf{R}_x(\theta_{43}) \mathbf{B}_y(\theta_{54}) \delta \theta_{54}$$

Renombrando

$$\delta \mathbf{R}'_5^0 = \mathbf{A}_1 \delta \theta_{10} + \mathbf{A}_2 \delta \theta_{32} + \mathbf{A}_3 \delta \theta_{43} + \mathbf{A}_4 \delta \theta_{54}$$

$$\delta \mathbf{R}_p = \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{r}_p \delta \theta_{10}$$

$$\delta \mathbf{R}_1 = \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{r}_1 \delta \theta_{10}$$

$$\delta \mathbf{R}'_s = \mathbf{A}_1 \mathbf{r}'_s \delta \theta_{10} + \mathbf{A}_2 \mathbf{r}'_s \delta \theta_{32} + \mathbf{A}_3 \mathbf{r}'_s \delta \theta_{43} + \mathbf{A}_4 \mathbf{r}'_s \delta \theta_{54}$$

Expresando de forma matricial

$$\delta \mathbf{R}'_s = \mathbf{A}_1 \mathbf{r}'_s \delta \theta_{10} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 \mathbf{r}'_s & \mathbf{A}_3 \mathbf{r}'_s & \mathbf{A}_4 \mathbf{r}'_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta_{32} \\ \delta \theta_{43} \\ \delta \theta_{54} \\ \delta \theta_{10,9} \\ \delta \theta_{18,17} \\ \delta \theta_{19,18} \end{bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{R}'_s = \mathbf{A}_1 \mathbf{r}'_s \delta \theta_{10} + \mathbf{A} \delta \theta \quad (4.39)$$

Para expresar la ecuación anterior en términos de $\delta \theta_{10}$ se emplea la Ec. (3.7)

$$\mathbf{J}_\theta \dot{\theta} = \mathbf{J}_q \dot{\theta}_{10}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por δt y despejando $\delta \theta$

$$\delta \theta = \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q \delta \theta_{10} \quad (4.40)$$

Sustituyendo la Ec. (4.40) en (4.39)

$$\delta \mathbf{R}'_s = (\mathbf{A}_1 \mathbf{r}'_s + \mathbf{A} \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q) \delta \theta_{10} \quad (4.41)$$

Sustituyendo en la ecuación de trabajo virtual

$$\delta W = \left(\mathbf{F}_r^T \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{r}_p + \mathbf{F}_s^T (\mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{r}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{r}'_s + \mathbf{A} \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q) \right) \delta \theta_{10}$$

Comparando con la definición de trabajo virtual se observa que

$$Q = \mathbf{F}_r^T \mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{r}_p + \mathbf{F}_s^T (\mathbf{B}_y(\theta_{10}) \mathbf{r}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{r}'_s + \mathbf{A} \mathbf{J}_\theta^{-1} \mathbf{J}_q)$$

Sustituyendo términos en la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}} \right)$$

De (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= \left(\dot{N}_1 \dot{\theta}_{10} + N_1 \ddot{\theta}_{10} \right) + \left(\dot{N}_2 \dot{\theta}_{10} + N_2 \ddot{\theta}_{10} \right) + \left(\dot{N}_3 \dot{\theta}_{10} + N_3 \ddot{\theta}_{10} \right) + \left(\dot{N}_4 \dot{\theta}_{10} + N_4 \ddot{\theta}_{10} \right) \\ &= \left(\dot{N}_1 + \dot{N}_2 + \dot{N}_3 + \dot{N}_4 \right) \dot{\theta}_{10} + (N_1 + N_2 + N_3 + N_4) \ddot{\theta}_{10} \\ &= C_1 \dot{\theta}_{10} + D \ddot{\theta}_{10} \end{aligned}$$

Derivando la Ec. (4.9) con respecto a θ_{10}

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{10}} = \frac{\partial L_1}{\partial \theta_{10}} + \frac{\partial L_2}{\partial \theta_{10}} + \frac{\partial L_3}{\partial \theta_{10}} + \frac{\partial L_4}{\partial \theta_{10}}$$

De (4.27), (4.28), (4.29) y (4.30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial \theta_{10}} &= m_1 \frac{\partial \mathbf{V}_{G1}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G1} \omega_1 + \frac{1}{2} \omega_1^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \omega_1 + \frac{1}{2} \omega_1^T \mathbf{I}_{G1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_1^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \\ \frac{\partial L_2}{\partial \theta_{10}} &= m_2 \frac{\partial \mathbf{V}_{G2}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_2^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G2} \omega_2 + \frac{1}{2} \omega_2^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G2}}{\partial \theta_{10}} \omega_2 + \frac{1}{2} \omega_2^T \mathbf{I}_{G2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_2^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G2}}{\partial \theta_{10}} \\ \frac{\partial L_3}{\partial \theta_{10}} &= m_3 \frac{\partial \mathbf{V}_{G3}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_3^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G3} \omega_3 + \frac{1}{2} \omega_3^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G3}}{\partial \theta_{10}} \omega_3 + \frac{1}{2} \omega_3^T \mathbf{I}_{G3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_3^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G3}}{\partial \theta_{10}} \\ \frac{\partial L_4}{\partial \theta_{10}} &= m_4 \frac{\partial \mathbf{V}_{G4}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{V}_{G4} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_4^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G4} \omega_4 + \frac{1}{2} \omega_4^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G4}}{\partial \theta_{10}} \omega_4 + \frac{1}{2} \omega_4^T \mathbf{I}_{G4} \frac{\partial \omega_4}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_4^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G4}}{\partial \theta_{10}} \end{aligned}$$

Sustituyendo las velocidades angulares y de centro de gravedad empleando las Ecs. (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) y (4.7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial \theta_{10}} &= m_1 \frac{\partial \mathbf{V}_{G1}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_A \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G1} \mathbf{J}_0 \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_0^T \dot{\theta}_{10} \frac{\partial \mathbf{I}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{J}_0 \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_0^T \dot{\theta}_{10} \mathbf{I}_{G1} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_1^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial L_2}{\partial \theta_{10}} &= m_2 \frac{\partial \mathbf{V}_{G2}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_C \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G2} \mathbf{S}_I \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_I^T \dot{\theta}_{10} \frac{\partial \mathbf{I}_{G2}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_I \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_I^T \dot{\theta}_{10} \mathbf{I}_{G2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_2^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G2}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial L_3}{\partial \theta_{10}} &= m_3 \frac{\partial \mathbf{V}_{G3}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_E \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G3} \mathbf{S}_K \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_K^T \dot{\theta}_{10} \frac{\partial \mathbf{I}_{G3}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_K \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_K^T \dot{\theta}_{10} \mathbf{I}_{G3} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_3^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G3}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial L_4}{\partial \theta_{10}} &= m_4 \frac{\partial \mathbf{V}_{G4}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_G \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_4^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G4} \mathbf{S}_M \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_M^T \dot{\theta}_{10} \frac{\partial \mathbf{I}_{G4}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_M \dot{\theta}_{10} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_M^T \dot{\theta}_{10} \mathbf{I}_{G4} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_4}{\partial \theta_{10}} + \mathbf{W}_4^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G4}}{\partial \theta_{10}}
\end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial \theta_{10}} &= \left(m_1 \frac{\partial \mathbf{V}_{G1}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_A + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G1} \mathbf{J}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{J}_0^T \mathbf{I}_{G1} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \theta_{10}} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{J}_0^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{J}_0 \right) \dot{\theta}_{10} \right) \dot{\theta}_{10} + \mathbf{W}_1^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G1}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial L_2}{\partial \theta_{10}} &= \left(m_2 \frac{\partial \mathbf{V}_{G2}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_C + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G2} \mathbf{S}_I + \frac{1}{2} \mathbf{S}_I^T \mathbf{I}_{G2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \theta_{10}} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{S}_I^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G2}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_I \right) \dot{\theta}_{10} \right) \dot{\theta}_{10} + \mathbf{W}_2^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G2}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial L_3}{\partial \theta_{10}} &= \left(m_3 \frac{\partial \mathbf{V}_{G3}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_E + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G3} \mathbf{S}_K + \frac{1}{2} \mathbf{S}_K^T \mathbf{I}_{G3} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \theta_{10}} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{S}_K^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G3}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_K \right) \dot{\theta}_{10} \right) \dot{\theta}_{10} + \mathbf{W}_3^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G3}}{\partial \theta_{10}} \\
\frac{\partial L_4}{\partial \theta_{10}} &= \left(m_4 \frac{\partial \mathbf{V}_{G4}^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_G + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_4^T}{\partial \theta_{10}} \mathbf{I}_{G4} \mathbf{S}_M + \frac{1}{2} \mathbf{S}_M^T \mathbf{I}_{G4} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_4}{\partial \theta_{10}} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{S}_M^T \frac{\partial \mathbf{I}_{G4}}{\partial \theta_{10}} \mathbf{S}_M \right) \dot{\theta}_{10} \right) \dot{\theta}_{10} + \mathbf{W}_4^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G4}}{\partial \theta_{10}}
\end{aligned}$$

Renombrando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial \theta_{10}} &= C_2 \dot{\theta}_{10} + G_1 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \theta_{10}} &= C_3 \dot{\theta}_{10} + G_2 \\
\frac{\partial L_3}{\partial \theta_{10}} &= C_4 \dot{\theta}_{10} + G_3 \\
\frac{\partial L_4}{\partial \theta_{10}} &= C_5 \dot{\theta}_{10} + G_4
\end{aligned}$$

Sumando términos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{10}} = (C_2 + C_3 + C_4 + C_5) \dot{\theta}_{10} + G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

De este modo la ecuación de Lagrange queda

$$D\ddot{\theta}_{10} + (C_1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5) \dot{\theta}_{10} - G_1 - G_2 - G_3 - G_4 = Q$$

$$\boxed{D\ddot{\theta}_{10} + C\dot{\theta}_{10} + G = Q} \tag{4.42}$$

4.5. Resultados

Empleando las Ecs. (2.4) y (2.5) para resolver la cinemática por medio del método numérico de Newton-Raphson y la Ec. (4.42) para resolver la dinámica por medio del método de Heun, se obtienen

gráficas de los ángulos del mecanismo de suspensión. Cabe mencionar que debido a una carga excesiva de cómputo, el término C no fue incluido en la ecuación dinámica. Con anterioridad se evaluó que el impacto de éste no era significativo, pues se encontraba en el orden de milésimas en los puntos de mayor velocidad del mecanismo; mientras que los otros términos se encuentran en el orden de los miles. Sin embargo, las gráficas aquí presentadas no reflejan en su totalidad el comportamiento enteramente real de la suspensión, las diferencias no serán muy grandes. Para todas las pruebas realizadas se empleó un resorte de $60\,000 \frac{N}{m}$, un amortiguador de $350 \frac{Ns}{m}$ y una fuerza F_s de tipo escalón con magnitud de $2500\,N$. Esta fuerza representa el peso del coche aplicado súbitamente al mecanismo de la suspensión.

Las gráficas a continuación representan una comparativa entre una suspensión que emplea elementos de fibra de carbono contra elementos de aluminio¹. En ambos casos se utiliza un rin Apex 17x8.5" ET40 ARC-8 con una masa de 17.2 lb; componente especialmente diseñado para vehículos BMW de alto desempeño. Asimismo, se considera una llanta Continental Extreme Contact DWS 245/40ZR17 de 24 lb. Ambos valores de masa se suman a la mangueta.

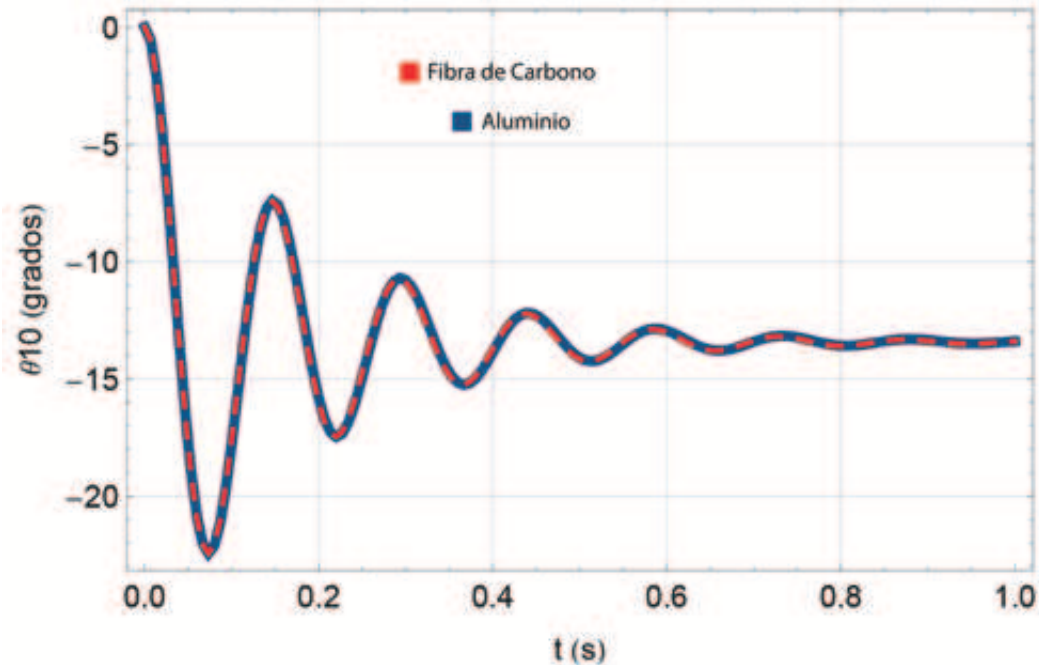


Figura 4.3: Comportamiento de θ_{10} con rin Apex y llanta Continental

¹Masas e inercias de estos componentes se encuentran en el apéndice D

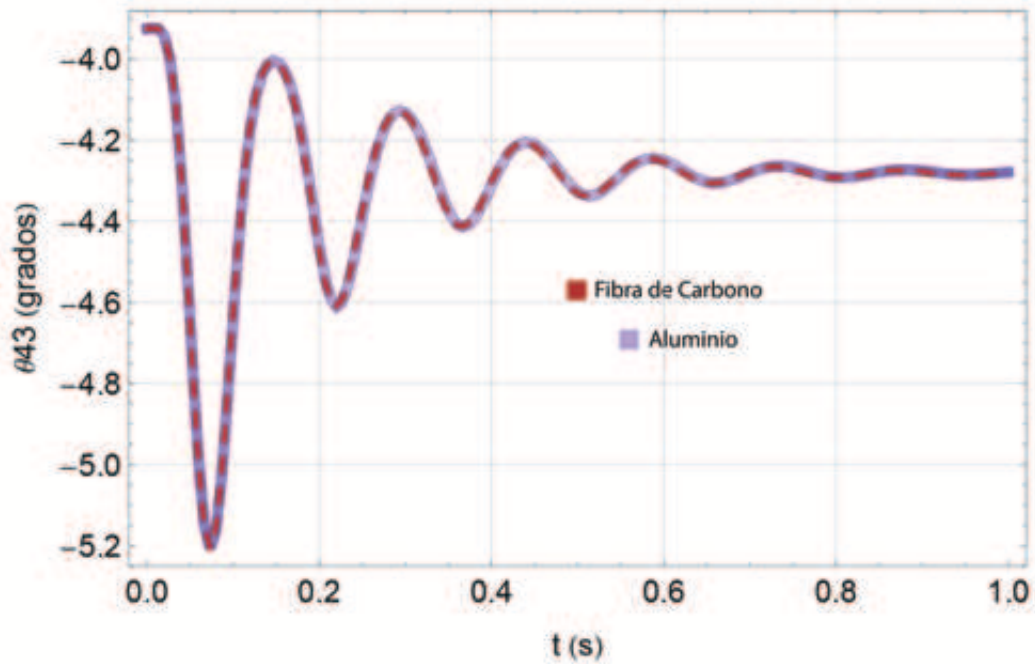


Figura 4.4: Comportamiento de θ_{43} con rin Apex y llanta Continental

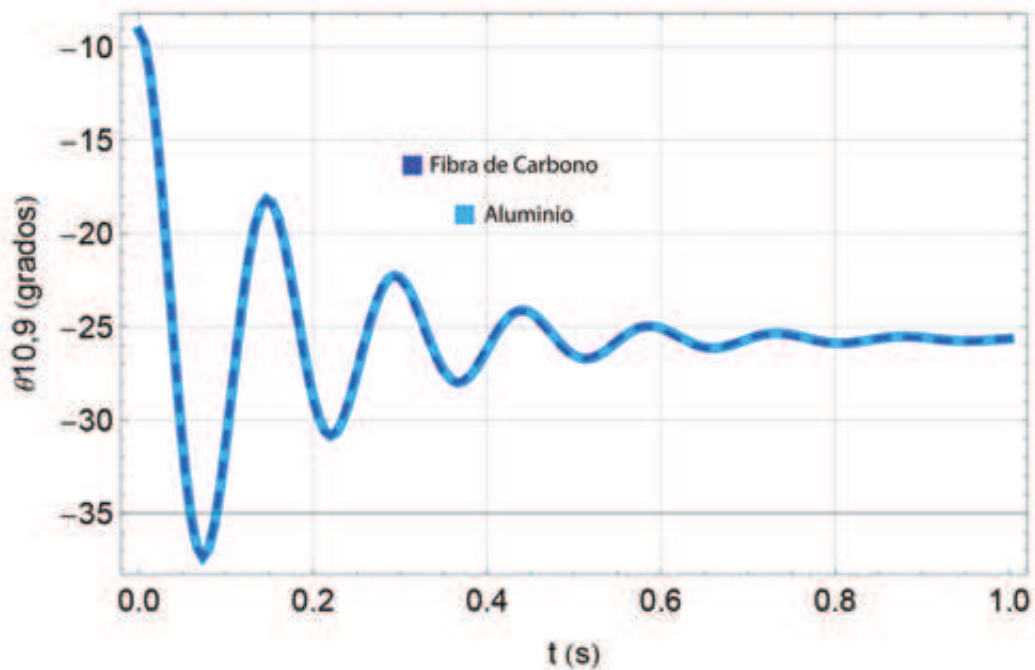


Figura 4.5: Comportamiento de $\theta_{10,9}$ con rin Apex y llanta Continental

Las curvas punteadas correspondientes a las piezas de fibra de carbono están ligeramente desplazadas a la izquierda; es decir se estabilizan de manera más rápida. Sin embargo, la diferencia es casi imperceptible. Esto se debe a que las masas de brazos tirante y de control son pequeñas comparadas a la masa no suspendida (mangueta, llanta y rin para este análisis).

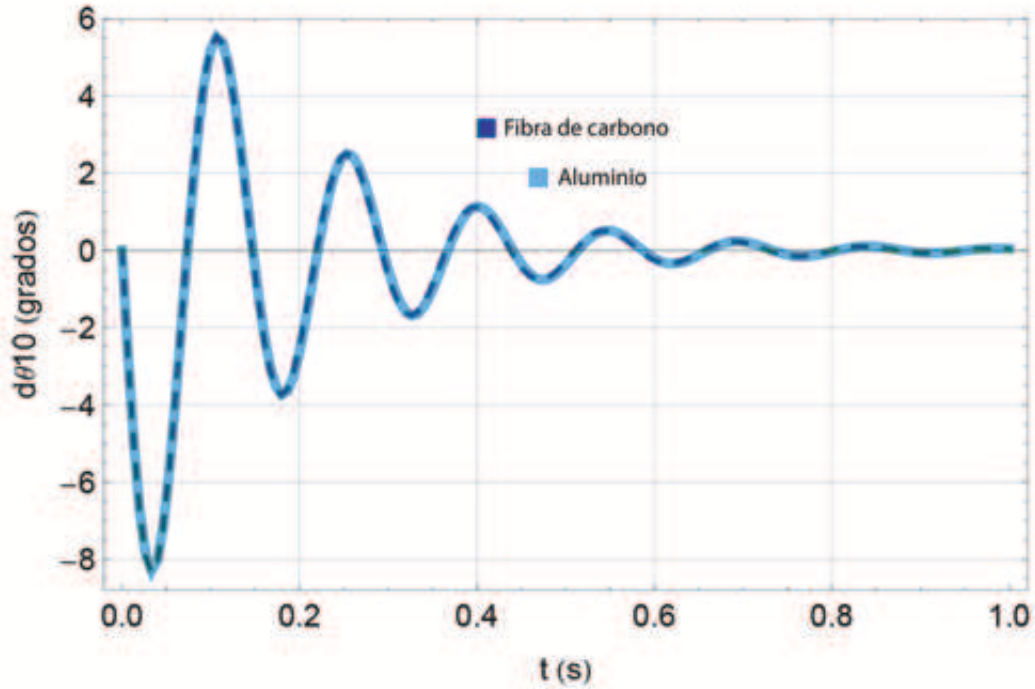


Figura 4.6: Comportamiento de $\dot{\theta}_{10}$ con rin Apex y llanta Continental

En las gráficas siguientes se contrasta el comportamiento de una suspensión, con elementos de aluminio, que emplea un rin Apex 17x8.5" y una llanta Continental Extreme Contact DWS 245/40ZR17 contra una que emplea un rin light alloy M double spoke E92N original de BMW con una masa de 10.6 kg y una llanta Michelin Pilot Sport PS2 245/40R18 93Y de 10.7 Kg.

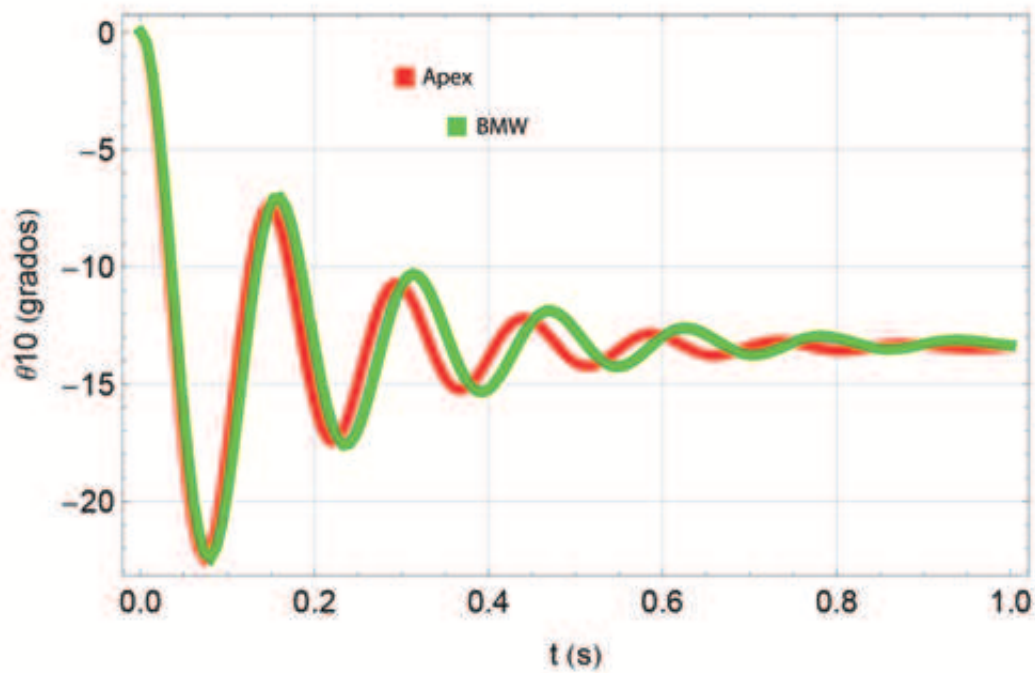


Figura 4.7: Comportamiento de θ_{10}

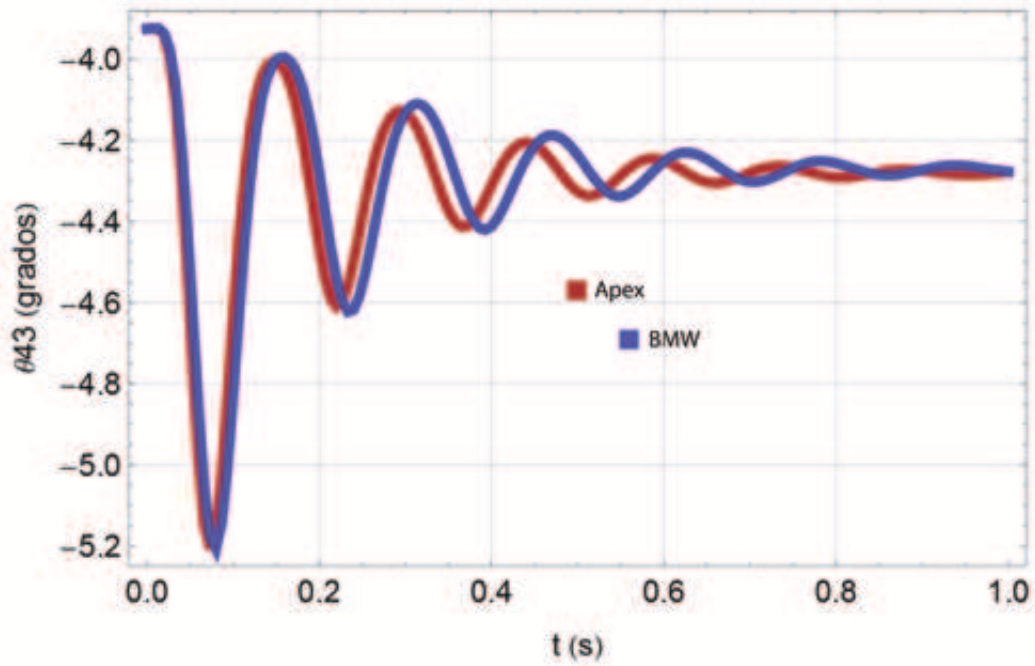


Figura 4.8: Comportamiento de θ_{43}

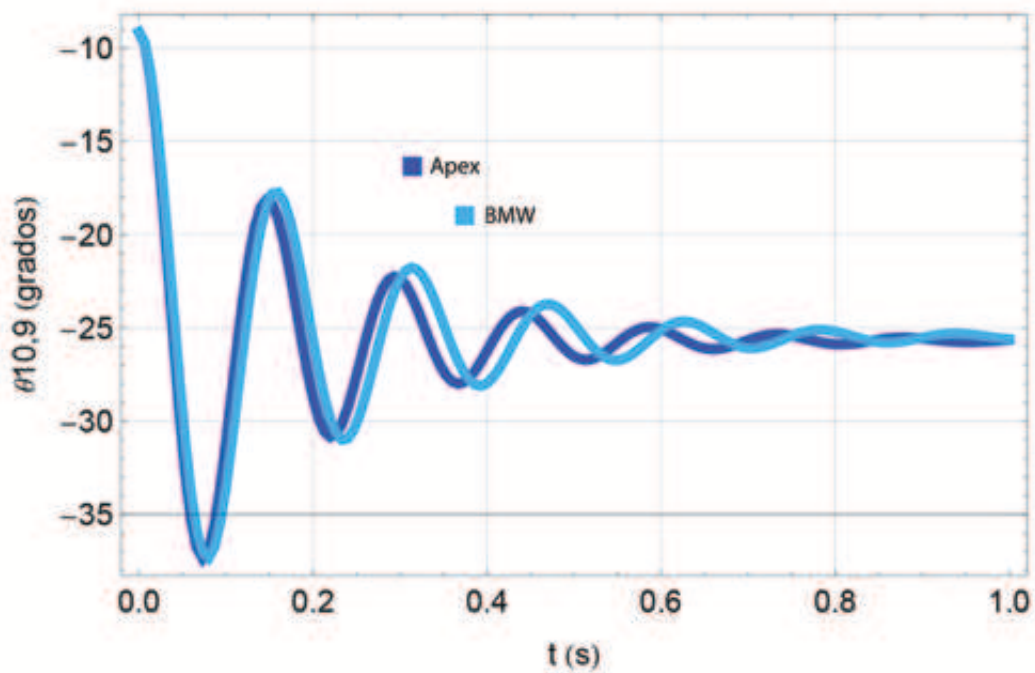


Figura 4.9: Comportamiento de $\theta_{10,9}$

Nuevamente se observa que la suspensión con los elementos de menor masa se estabiliza de manera más rápida.

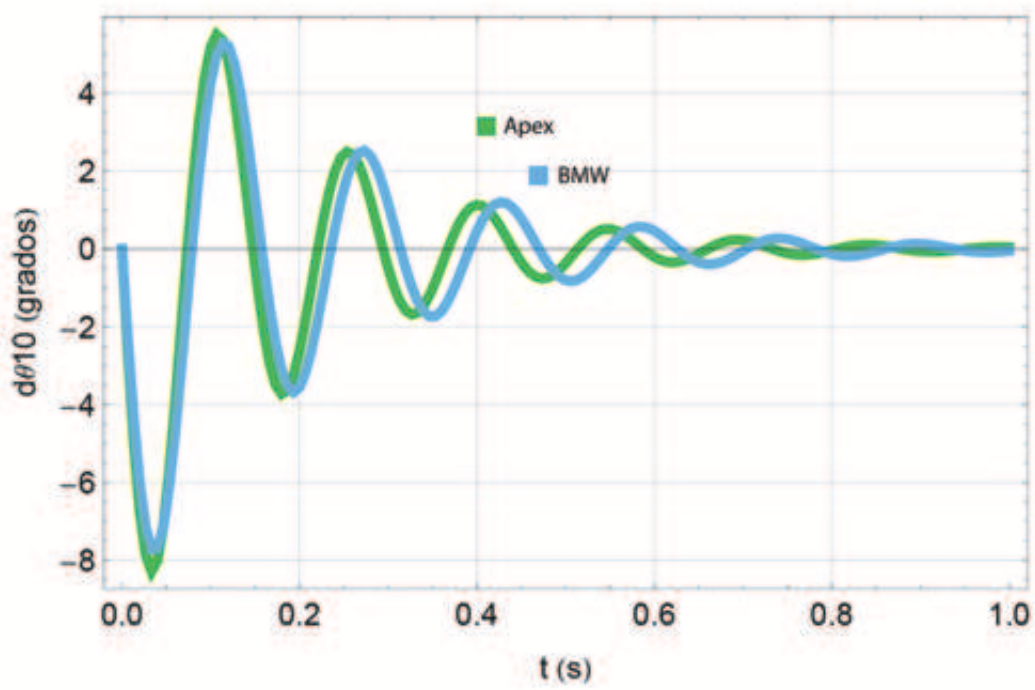


Figura 4.10: Comportamiento de $\dot{\theta}_{10}$

Capítulo 5

Diseño de controlador lineal

5.1. Amortiguador magneto-reológico

El elemento de control utilizado en este trabajo es un amortiguador magneto-reológico, cuyo modelo está definido por la fricción viscosa de LuGre [5]. Éste se basa en los conceptos del efecto Stribeck [4], representada por el efecto de cerdas, ver figura 5.1. La fricción se visualiza como una serie de fuerzas de respuesta que se manifiestan a partir de la deformación promedio de cerdas que actúan como resortes en el área de contacto. Durante el momento en que se manifiesta el coeficiente de fricción estático, se considera que una fuerza promedio actúa por la deformación microscópica de cerdas elásticas.

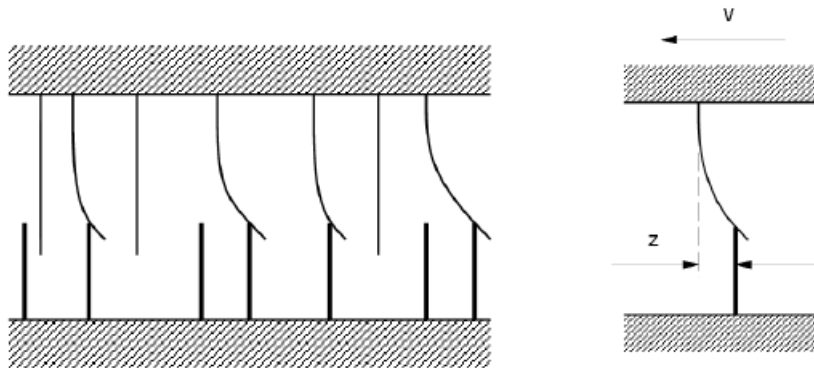


Figura 5.1: Deformación de cerdas elásticas.

El modelo está representado por

$$\begin{aligned} f &= \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x} \\ \dot{z} &= \dot{x} - \sigma_0 a_0 |\dot{x}| z (1 + a_1) \end{aligned}$$

En el término f correspondiente a la fuerza, el modelo de LuGre reproduce un efecto de tipo resorte para desplazamientos pequeños, siendo σ_0 la constante del resorte, σ_1 la fricción viscosa para los micro desplazamientos y σ_2 la fricción viscosa para las superficies en contacto.

Dentro del amortiguador magneto-reológico existe una concentración del 20-40 % de partículas de hierro mezcladas en un fluido hidráulico [5]. Al aplicar una diferencia de potencial¹ a la bobina, se forman cadenas de partículas paralelas al campo magnético provocando que el fluido se vuelva semisólido; modificando así su resistencia a la fluencia.

¹Generalmente en un rango de 12-24[V]

Si se establece que la corriente que genera el campo magnético es proporcional al voltaje aplicado v , las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} f &= \sigma_0 z v + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x} \\ \dot{z} &= \dot{x} - \sigma_0 a_0 |\dot{x}| z (1 + a_1 v) \end{aligned}$$

Cabe destacar que en este modelo no se incluyen otros efectos no lineales como la histéresis presente en la bobina y en el propio fluido hidráulico.

5.2. Modelado del sistema

El control se diseña a partir de un modelo simplificado que representa la suspensión de un vehículo; siendo su objetivo disminuir o mitigar la aceleración de la masa suspendida y así aumentar el nivel de confort dentro del automóvil.

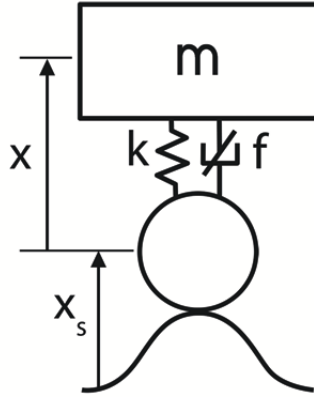


Figura 5.2: Modelo simplificado de suspensión.

Donde m representa la masa del auto, k la constante del resorte, f la fuerza asociada al amortiguador magneto-reológico, x los desplazamientos del resorte y el amortiguador, y x_s los desplazamientos del suelo. De acuerdo a la figura 5.2 los desplazamientos totales de la masa están dados por

$$x_t = x + x_s$$

De igual manera se cumple que

$$\ddot{x}_t = \ddot{x} + \ddot{x}_s$$

La suma de fuerzas en la masa m es

$$m\ddot{x}_t = -f - kx$$

Siendo f la fuerza asociada al amortiguador cuyo modelo es

$$\begin{aligned} f &= \sigma_0 z v + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x} \\ \dot{z} &= \dot{x} - \sigma_0 a_0 |\dot{x}| z (1 + a_1 v) \end{aligned}$$

Donde z modela la dinámica interna del fluido y se refiere a la deformación promedio de las cerdas en el modelo de LuGre y v es el voltaje aplicado. σ_0 , σ_1 , σ_2 , a_0 y a_1 son parámetros constantes.

Nótese que los desplazamientos y velocidades del suelo no tienen efecto sobre el sistema, pues es hasta

el momento en que existe una aceleración proveniente del mismo cuando actuarán las fuerzas de respuesta.

Representando al sistema en variables de estado

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Empleando las ecuaciones anteriores el sistema queda

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\ddot{x}_s - \frac{k}{m}x_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}x_2 + \frac{a_0\sigma_0\sigma_1}{m}|x_2|x_3 + \left(\frac{a_0a_1\sigma_0\sigma_1|x_2| - \sigma_0}{m}\right)x_3v \\ \dot{x}_3 &= x_2 - a_0\sigma_0|x_2|x_3(1 + a_1v) \\ y &= \dot{x}_2 \end{aligned}$$

Analizando los puntos de equilibrio considerando a v como una entrada y a \ddot{x}_s como una perturbación se obtiene que

$$\begin{aligned} X_2 &= 0 \\ X_1 &= -\frac{\sigma_0}{k}X_3V \end{aligned}$$

Se observa que x_1 puede estar en el equilibrio en una serie de puntos, este es un fenómeno característico de la fricción seca. Si k es muy grande, dicha sucesión de puntos disminuirá y x_1 encontrará el equilibrio más cerca del origen. Igualmente si X_3 ó la entrada son igual a cero, x_1 se estabilizará en el origen.

Linealizando el sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} + \frac{a_0\sigma_0\sigma_1}{m}X_3\text{sgn}(X_2) + \frac{a_0a_1\sigma_0\sigma_1}{m}VX_3\text{sgn}(X_2) & \frac{a_0\sigma_0\sigma_1}{m}|X_2| + \frac{a_0a_1\sigma_0\sigma_1|X_2| - \sigma_0}{m}V \\ 0 & 1 - a_0\sigma_0X_3(1 + a_1V)\text{sgn}(X_2) & -a_0\sigma_0|X_2|(1 + a_1V) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_0a_1\sigma_0\sigma_1|X_2| - \sigma_0}{m}X_3 \\ -a_0a_1\sigma_0|X_2|X_3 \end{bmatrix}$$

La condición mínima necesaria para el equilibrio es que $X_2 = 0$, y dado que $\sigma_1 = -\sigma_2$ el sistema queda

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & -\frac{\sigma_0}{m}V \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sigma_0}{m}X_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema tiene un polo en el origen sin importar el valor de V , por lo que no se puede concluir sobre su estabilidad [2].

Obteniendo la matriz de controlabilidad del sistema

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sigma_0}{m}X_3 & -\frac{\sigma_0}{m}X_3 \\ -\frac{\sigma_0}{m}X_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_0}{m}X_3 & -\frac{\sigma_0}{m}X_3 \end{bmatrix}$$

Se observa que dicha matriz es de rango 2 siempre y cuando $X_3 \neq 0$; por lo tanto el sistema es parcialmente controlable.

Debido a que se busca mitigar las aceleraciones de la masa m una posible ley de control sería

$$v = k_1(\ddot{x}_s + \ddot{x})$$

Sin embargo, se analizará en primer término si es posible estabilizar el sistema mediante un control lineal. Obteniendo la matriz $A - BK$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} + \frac{\sigma_0}{m}X_3k_1 & \frac{\sigma_0}{m}X_3k_2 & -\frac{\sigma_0}{m}V + \frac{\sigma_0}{m}X_3k_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Analizando su polinomio característico

$$s \left(s^2 - s\frac{\sigma_0}{m}X_3k_2 + \frac{\sigma_0}{m}V - \frac{\sigma_0}{m}X_3k_3 \right) + s \left(\frac{k}{m} + \frac{\sigma_0}{m}X_3k_1 \right)$$

Se observa que sin importar la elección de las constantes k_1 , k_2 y k_3 , el sistema siempre tendrá un polo en el origen por lo que no se puede garantizar su estabilidad.

Capítulo 6

Conclusiones

Para el caso del análisis dinámico de suspensión, se pensaría que las masas e inercias de los brazos tienen mayor impacto en la ecuación dinámica. Sin embargo, debido a que son pequeñas en comparación a las de la masa no suspendida, esto no se cumple. Parecería entonces que el estudio de la dinámica de suspensión no es del todo necesario. Sin embargo para otro tipo de suspensiones como la de *trailing arm*, en donde las masas de los brazos no son despreciables se tendrá un mayor impacto en la dinámica. Asimismo, a partir de los resultados de ángulos obtenidos se pueden conocer de forma más certera las posiciones e inclinaciones de la llanta y con ello determinar si las deformaciones de la misma generan las fuerzas de respuesta que mantienen al vehículo maniobrable. E.g. las deformaciones laterales asociadas al *camber* que permiten mantener en la vía a un auto durante una curva. Bajo el análisis dinámico también se pueden conocer las magnitudes y direcciones de las fuerzas en las juntas, con el objetivo de diseñar apropiadamente los componentes. De igual manera en el diseño de suspensiones se asume un *wheel ratio*¹ constante a diferencia del estudio dinámico aquí presentado donde el vector que representa las deformaciones del resorte, cambia de magnitud y de sentido; por lo tanto su relación con los desplazamientos de la llanta no es constante.

El desarrollo del método de Lagrange también permite analizar directamente las ecuaciones que rigen el movimiento a diferencia de un paquete de cómputo de análisis dinámico.

Para el caso del diseño de control, debido a que no se puede emplear un controlador lineal, la siguiente opción sería proponer uno no lineal. Considerando las propiedades del sistema un control basado en pasividad u obtenido a partir de una función de Lyapunov son opciones viables. Un control por linealización extendida o exacta puede que no logre estabilizar el sistema por las razones anteriormente expuestas. Las no linealidades principalmente estáticas impiden obtener mucha información del análisis lineal. Sin embargo, el estudio de sus puntos de equilibrio permite suponer que el sistema es estable y no asintóticamente estable, esto debido al *continuum* de puntos de equilibrio asociados a la fricción seca presente en el sistema. En un análisis más exhaustivo convendrá incorporar las no linealidades asociadas a la histéresis de la bobina y del fluido hidráulico.

Como trabajo a futuro queda el plantear por medio del método de Newton, las ecuaciones que permitan obtener las fuerzas de restricción especialmente en el chasis del vehículo. A dichas fuerzas se le opondrá únicamente la inercia del automóvil. Conociendo la masa del mismo se podría obtener su aceleración y de esta manera evaluar el desempeño del control. Esto probablemente incluya varios estados más en la ecuación dinámica pues en primer lugar el resorte no se deformará de la misma manera que si el chasis estuviera fijo, como se realizó en este trabajo; asimismo el estado interno del amortiguador deberá ser incluido.

¹Relación entre el movimiento de la rueda y la compresión del resorte.

Apéndice A

Matrices de transformación

Las matrices de transformación representan rotaciones con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Apéndice B

Derivada de un vector con respecto al tiempo

Sea un vector

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_1 \quad (\text{B.1})$$

Donde \mathbf{R}_1 es un vector en la base inercial, \mathbf{R}_1^0 es la transformación que mediante un cambio de ángulo lleva de la base local a la inercial y \mathbf{r}_1 es el vector en la base local.

Despejando \mathbf{r}_1 de (B.1)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1^{0T} \mathbf{R}_1 \quad (\text{B.2})$$

Derivando la expresión (B.1) con respecto al tiempo

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{r}}_1$$

Donde $\dot{\mathbf{r}}_1$ es cero ya que el vector en la base local no cambia con respecto al tiempo, resultando

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{r}_1 \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo (B.2) en (B.3)

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{R}_1^{0T} \mathbf{R}_1$$

Que se puede escribir como

$$\mathbf{V}_1 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_1 \quad (\text{B.4})$$

Siendo (B.4) la velocidad del vector \mathbf{R}_1 , donde

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{R}_1^{0T} \quad (\text{B.5})$$

Despejando $\dot{\mathbf{R}}_1^0$ de (B.5) se obtiene

$$\boxed{\dot{\mathbf{R}}_1^0 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_1^0} \quad (\text{B.6})$$

Empleando la ecuación (B.5) y las matrices de transformación, se obtienen las matrices omega.
 Para $\mathbf{R}_x(\theta)$

$$\dot{\mathbf{R}}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

$$\mathbf{R}_x^T(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_x(\dot{\theta}) = \dot{\mathbf{R}}_x(\theta) \mathbf{R}_x^T(\theta)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_x(\dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\theta} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.7}$$

De forma análoga para las otras matrices se obtiene

$$\boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_z(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.9}$$

Apéndice C

Derivada de una matriz con respecto a la entrada

$$\frac{d\mathbf{R}_x(\theta)}{dq} = \frac{d\mathbf{R}_x(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dq} = \mathbf{B}_x(\theta) \frac{d\theta}{dq}$$

$$\mathbf{B}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Análogamente

$$\mathbf{B}_y(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{B}_z(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Apéndice D

Dimensiones y propiedades de componentes de suspensión

Cuadro D.1: Datos de masas e inercias

	Aluminio	Fibra de Carbono
m_1 [kg]	0.974	0.721481
m_2 [kg]	0.257	0.19037
m_3 [kg]	0.821	0.608148
m_4 [kg]	0.1	0.0740741
I_{xx1} [kg · m ²]	0.01293	0.00958
I_{xy1} [kg · m ²]	-0.00063	-0.00047
I_{xz1} [kg · m ²]	0	0
I_{yy1} [kg · m ²]	0.00898	0.006652
I_{yz1} [kg · m ²]	0	0
I_{zz1} [kg · m ²]	0.02177	0.01613
I_{xx2} [kg · m ²]	0.00114	0.00084
I_{xy2} [kg · m ²]	0	0
I_{xz2} [kg · m ²]	0	0
I_{yy2} [kg · m ²]	0.00095	0.00070
I_{yz2} [kg · m ²]	-0.00001	0
I_{zz2} [kg · m ²]	0.00027	0.0002
I_{xx3} [kg · m ²]	0.01217	0.00901
I_{xy3} [kg · m ²]	-0.00002	-0.00001
I_{xz3} [kg · m ²]	-0.00004	-0.00003
I_{yy3} [kg · m ²]	0.00602	0.00446
I_{yz3} [kg · m ²]	0	0
I_{zz3} [kg · m ²]	0.01808	0.01339
I_{xx4} [kg · m ²]	0.00001	0
I_{xy4} [kg · m ²]	-0.00001	0
I_{xz4} [kg · m ²]	0	0
I_{yy4} [kg · m ²]	0.00114	0.00084
I_{yz4} [kg · m ²]	0	0
I_{zz4} [kg · m ²]	0.00114	0.00084

Dimensiones del mecanismo [m]

$$x_{21} = 0.3$$

$$z_{65} = 0.291$$

$$x_{70} = 0.036$$

$$z_{87} = 0.25$$

$$y_{98} = 0.02$$

$$x_{11,10} = 0.25$$

$$x_{15,0} = 0.05$$

$$y_{16,15} = 0.1$$

$$z_{17,16} = 0.1$$

$$x_{20,19} = 0.325$$

$$y_{24,23} = 0.1128$$

$$x_{25,24} = 0.02$$

$$z_{26,25} = 0.1826$$

$$x_{G1} = 0.15$$

$$y_{G1} = 0$$

$$z_{G1} = 0$$

$$x_{G2} = 0$$

$$y_{G2} = 0$$

$$z_{G2} = 0.15$$

$$x_{G3} = 0.12$$

$$y_{G3} = 0$$

$$z_{G3} = 0$$

$$x_{G4} = 0.151$$

$$y_{G4} = 0$$

$$z_{G4} = 0$$

$$x_p = 0.23$$

$$y_p = 0.02$$

$$z_p = 0.0225$$

$$x'_s = 0.1$$

$$y'_s = 0$$

$$z'_s = \frac{z_{65}}{2}$$

$$x''_0 = 0.1$$

$$y''_0 = 0.02$$

$$z''_0 = 0.3$$

Apéndice E

Transformaciones homogéneas

E.1. Matrices de traslación

$$\mathbf{T}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbf{T}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{T}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

E.2. Matrices de rotación

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

$$\mathbf{T}_{z5}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{T}_{z6}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

Fuente: [11]

Bibliografía

- [1] Aström, K. Canudas, C.(2008) *Revisiting the LuGre friction model*. Control Systems Magazine, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), pp. 101-114.
- [2] Chen, C. (1999) *Linear System Theory and Design*, 3a ed.. Oxford, New York, Oxford University Press.
- [3] Greenwood, T. (1965) *Principles of Dynamics*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.
- [4] Iurian, C. Ikhoulane, F. Rodellar, J. (2005) *Identification of a system with dry friction*. Universitat Politècnica de Catalunya.
- [5] Jiménez, R. (2002) *Control Semiactivo de Estructuras Civiles Utilizando Amortiguadores Magneto-reológicos*. Tesis de Mestría. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [6] Khalil, H. (1996) *Nonlinear Systems*, 2a ed.. Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall.
- [7] Milliken, W. (1995) *Race Car Vehicle Dynamics*. Warrendale, Pennsylvania, Society of Automotive Engineers.
- [8] Nikravesh, E. (1988) *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.
- [9] Reimpell, J. (1999) *The Automotive Chassis*, 2a ed.. Woburn, Massachusetts, Butterworth-Heinemann.
- [10] Slotine, J. (1991) *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.
- [11] Stejskal, V. (1996) *Kinematics and Dynamics of Machinery* Prague, Marcel Dekker, Inc..
- [12] Tsai, L. (1999) *Robot Analysis "The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators"*. New York, Wiley-Interscience.
- [13] Vázquez, J. (2009) *Análisis Dinámico de Robot Hexa*. Tesis de Mestría. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [14] Apex [en línea]. [Fecha de consulta: 28 febrero 2015]. Disponible en:<http://www.apexraceparts.com/>
- [15] Mfans 2 [en línea]. [Fecha de consulta: 28 febrero 2015]. Disponible en <http://mfans2.com/parts/catalog/>
- [16] Tire Rack [en línea]. [Fecha de consulta: 28 febrero 2015]. Disponible en:<http://www.tirerack.com/tires/index.jsp>
- [17] Total 911 [en línea]. [Fecha de consulta: 20 febrero 2015]. Disponible en:<http://www.total911.com/technology-explained-rear-axle-steering/>