

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

1983.

1. M. en C. Enrique Del Valle Calderón  
Profesor Titular de Tempo Completo  
D E P F I  
U N A M  
México, D.F.  
550 52 15 Ext. 4479
  
2. Dr. Octavio A. Rascón Chávez  
Director  
Facultad de Ingeniería  
U N A M  
México, D.F.  
548 33 53
  
3. Dr. Roberto Meli Piralla (Coordinador)  
Subdirector de la Sección de Estructuras  
Instituto de Ingeniería  
U N A M  
México, D.F.  
548 97 94
  
4. Dr. Luis Esteva Maraboto  
Director  
Instituto de Ingeniería  
UNAM  
México, D.F.  
548 30 44
  
5. Ing. Oscar deBuen y López de Heredia  
Profesor  
Facultad de Ingeniería  
UNAM  
México, D.F.  
550 52 15 Ext. 3909
  
6. Dr. Oscar Hernández Basilio

## EVALUACION DEL CURSO

③

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE	AGRADABLE	DESAGRADABLE

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DE VISION DE EDUCACION CONTINUA	PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DE VISION DE EDUCACION CONTINUA	FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL	RADIO UNIVERSIDAD	COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC.

REVISTAS TECNICAS	FOLLETO ANUAL	CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY"	GACETA UNAM

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR	METRO	OTRO MEDIO

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

---



---



---

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI	NO

6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

---



---

7. La coordinación académica fue:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS)	LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H.	LUNES, MIÉRCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 A 18 H.	O T R O

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

---

10. Otras sugerencias:

---



---



---



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

**T E M A I**

**COMPORTAMIENTO DE MATERIALES Y ELEMENTOS  
ESTRUCTURALES ANTE CARGAS REPETIDAS**

**DR. ROBERTO MELI PIRALLA  
Agosto, 1983**

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

TEMA 1: COMPORTAMIENTO DE MATERIALES Y ELEMENTOS ESTRUCTURALES ANTE CARGAS REPETIDAS (Texto: Capitulo 13 de la Ref 1 pp 381 a 411)

1. Características que definen la respuesta sísmica

La respuesta sísmica de una estructura depende de sus características carga-deformación ante cargas dinámicas alternadas.

La filosofía implícita en los reglamentos de diseño admite que las estructuras sobrepasen el intervalo de comportamiento elástico bajo el efecto del sismo de diseño. Interesa por tanto el comportamiento hasta la ruptura.

La respuesta de la estructura completa depende de la de los elementos que la componen y esta de la de las secciones y de los materiales. Es necesario entonces conocer las relaciones esfuerzo-deformación de los principales materiales y elementos estructurales.

Una relación carga-deformación típica ante carga monótonicamente creciente se muestra en la fig 1. Los parámetros de la curva que interesan son rigidez, resistencia y ductilidad. De la rigidez dependen no solo las deformaciones que va a presentar la estructura bajo una acción dada, sino también la magnitud de la acción sísmica que esta va a tener que soportar. De la ductilidad depende esencialmente la capacidad de disipar la energía del sismo. Para muchos materiales es válida una idealización elasto-plástica de la relación carga-deformación.

El factor de ductilidad  $\Delta/\Delta_y$  es la medida más común de la ductilidad; un material frágil tiene factor de ductilidad cercano a uno, como por ejemplo el concreto no reforzado sujeto a tensión; el acero de grado estructural puede alcanzar factores de ductilidad superiores a 20.

La ductilidad de una estructura en su conjunto es generalmente mucho menor que la ductilidad local que puede desarrollar una sección; depende del número de secciones que entran en fluencia antes del colapso de la estructura,

fig 2. Para el comportamiento sísmico de una estructura interesa su ductilidad global; para lograr un factor de ductilidad global alto se requiere que las secciones individuales tengan ductilidades grandes y que en el mecanismo de colapso de la estructura intervenga el mayor número posible de articulaciones plásticas.

Ante repeticiones de cargas alternadas la relación carga-deformación se modifica en forma más importante mientras más se sobrepase el intervalo "elástico" de comportamiento, fig 3a. Las curvas descendentes (de descarga) difieren cada vez más de las de carga y se forman "terras" o ciclos histéreticos. La respuesta sísmica depende fundamentalmente del área incluida en los lazos histéreticos que define la energía disipada por la estructura y por tanto su amortiguamiento histéretico, fig 4.

En algunos materiales y en ciertos elementos estructurales las curvas histéreticas se asemejan a las de un comportamiento elasto-plástico perfecto, fig 3b, en los que la curva para el primer ciclo de carga se mantiene aproximadamente constante ante repeticiones de ciclos y se tiene una gran capacidad de disipación de energía a través de ciclos histéreticos estables.

Otros materiales dan lugar también a ciclos histéreticos estables pero con una forma radicalmente distinta a la del primer ciclo y que incluye un área mucho menor que la que se tiene en un comportamiento elasto-plástico, fig 3d; finalmente en otros casos se tiene un deterioro progresivo de rigidez y resistencia, fig 3e, que representa un daño irreversible en la estructura y una reducción progresiva de su capacidad de absorción de energía.

Se han propuesto diversos modelos teóricos del comportamiento histéretico, los cuales se emplean para estudiar el comportamiento dinámico no lineal de estructuras (Bising, Ramberg-Osgood, Trilinear, etc).

El comportamiento sísmico en el intervalo inelástico depende esencialmente de las características de los ciclos histéreticos, el parámetro ductilidad no es suficiente para definir el comportamiento sísmico ya que a un mismo factor de ductilidad pueden corresponder capacidades muy distintas de disipación de energía.

Comportamiento ante cargas dinámicas y estáticas: La mayoría de los estudios sobre el comportamiento inelástico de estructuras se han realizado con ensayos ante pocos ciclos de carga estática alternada. Se ha considerado siempre que esto es conservador con respecto al comportamiento ante cargas dinámicas, aunque hay algunos casos en que parece no ser así.

## 2. Comportamiento de materiales (medido en especímenes estándar)

### a) Concreto simple (ref 2 pp 65 a 150)

La curva  $\sigma-\epsilon$  en compresión y tensión, fig 5, muestra un comportamiento frágil en ambos casos. Las deformaciones de falla son pequeñas. El micromecanismo causa desviaciones de la linealidad a partir de  $0.4 f_c'$  y produce deformaciones irreversibles.

Efecto de la velocidad de carga, fig 6. Aumenta la resistencia y la rigidez, pero disminuye las deformaciones de falla, y vuelve más frágil el comportamiento.

Efecto del confinamiento en el concreto (ver ref 3 pp 20 a 30). Al aumentar el esfuerzo de confinamiento aumentan tanto la resistencia como la capacidad de deformación, fig 7; los resultados de ensayos de compresión triaxial son extrapolables para el estudio del efecto del confinamiento proporcionado por el refuerzo transversal. La diferencia de eficacia de un zunchido espiral y de estribos se muestra en la fig 7b. Con espiral puede incrementarse resistencia y ductilidad; con estribos solo ductilidad, pero en forma mucho menor que con espiral.

Efecto de la repetición de carga, fig 8. Para repeticiones esfuerzos altos de compresión el concreto no confinado se deteriora rápidamente.

### b) Acero estructural, de refuerzo y de pasafuerza (ref 4 pp 42 a 64)

La curva esfuerzo-deformación del acero depende de su composición química y del tratamiento a que haya sido sometido. El módulo de elasticidad es cons-

tante. El esfuerzo de fluencia (real o aparente) aumenta con el contenido de carbono y puede incrementarse por una reducción de área o por torsión efectuado en frío, fig 9. La reseta de fluencia se pierde a medida que aumenta  $f_y$  y si se trabaja en frío. La relación  $f_y/E_s$  y la  $E_s$  disminuyen al aumentar  $f_y$ . Los factores de ductilidad son siempre grandes, exceden de 10 aún para los aceros menos dúctiles.

El efecto de la velocidad de carga en la resistencia y en la ductilidad es poco importante.

Ante el efecto de cargas alternadas que exceden la fluencia, el límite de proporcionalidad se reduce y la  $\sigma-\epsilon$  se hace más redondeada (efecto de Bauschinger); los ciclos son muy estables y no muestran deterioro (fig 10).

### c) Otros materiales

En los metales el comportamiento es cualitativamente como el del acero.

En la cerámica varía mucho según los materiales que la compongan (piezas y morteros). La fig 11 muestra algunas curvas típicas para morteros, ref 5. El comportamiento es en general muy frágil, especialmente cuando se usan materiales de alta resistencia. El comportamiento ante cargas alternadas muestra un deterioro total a veces que se cuente con un refuerzo adecuado.

Las propiedades de la madera varían según la especie, la densidad, el contenido de humedad y son muy sensibles a la velocidad de aplicación de la carga, fig 12. El modo de falla del material es muy frágil aunque las estructuras de madera pueden tener alta disipación de energía si se detallan adecuadamente las uniones (ver capítulo correspondiente).

## 3. Comportamiento de elementos estructurales

### 3.1 Vigas y columnas de concreto reforzado (ver ref 3 pp 195 a 169)

a) Flexión: La relación momento-curvatura de secciones de concreto

reforzado se obtiene a partir de las hipótesis básicas del comportamiento del concreto en flexocompresión. Las curvas de la fig 13 muestran la influencia en la resistencia y la ductilidad de las cuantías de acero de tensión y compresión en su relación con la cuantía balanceada. Se concluye que si la cuantía de refuerzo de tensión es muy inferior a la balanceada se obtienen grandes ductilidades (comparables a las del acero). El refuerzo de compresión es de gran ayuda en incrementar la ductilidad. El efecto del refuerzo transversal en la relación momento curvatura de vigas se ve en la fig 14. El confinamiento que este proporciona aumenta la ductilidad cuando la falla es cercana a la balanceada.

b) Flexocompresión: La relación momento curvatura puede calcularse con el mismo procedimiento que para elementos en flexión. La ductilidad depende del nivel de carga axial (fig 15). Para falla de compresión la ductilidad es casi nula a menos que se cuente con confinamiento importante, fig 16. Para falla de tensión se tiene cierta ductilidad, pero solo para cargas axiales muy pequeñas esta es importante.

c) Efecto de cargas repetidas en elementos en flexocompresión: En flexión simple y con cuantías bajas de acero el comportamiento es cualitativamente otro el del acero: gran ductilidad y poco deterioro. Puede producirse con buena aproximación empleando las hipótesis para concreto en flexocompresión. El deterioro ocurre solo para deformaciones muy altas debidas al pandeo del acero de compresión. La degradación es mucho mayor cuando hay esfuerzos cortantes altos en las secciones críticas (articulaciones plásticas) o también cuando hay posibilidad de deslizamiento de las barras por adherencia, ver fig 17. Importantes estudios al respecto han sido realizados en Berkeley (ref 6), y en Nueva Zelanda. Se recomiendan estribos poco espaciados para evitar pandeo de barras y para confinar el concreto, altas cuantías de acero de compresión y desprestigiar la contribución del concreto a la resistencia en cortante. En el tema de estructuras de concreto se tratará con mayor detalle este punto.

Cuando hay cargas axiales importantes la ductilidad es baja y el deterioro ante repetición de cargas es importante, fig 17c.

d) Constante, torsión y adherencia. El modo de falla ante cortante y torsión es rotante frágil; aún cuando exista refuerzo transversal se gana poca ductilidad y el deterioro es muy rápido. Algo similar es el comportamiento cuando hay problemas de adherencia. Por tanto deben tomarse factores de seguridad mayores contra estos efectos que contra flexión.

### 3.2 Elementos de concreto presfuerzo (ver ref 7 pp 49 a 81)

Si comportamiento no difiere mucho del reforzado pueden alcanzarse las mismas ductilidades siempre que la cuantía de refuerzo sea baja ( $\rho \approx 0.2$ ) y el nivel de carga vertical también. El admitir que ante el mismo de diseño fluye ya el acero de presfuerzo es debatible, porque si fluye se pierde el presfuerzo y es difícil restaurarlo.

Ante cargas repetidas el comportamiento es distinto (fig 18); se tiene mucha menor disipación de energía; por tanto para resistir un mismo sismo se requiere mayor resistencia o mayor deformación inelástica que en concreto reforzado, fig 19.

El empleo de elementos continuos presfuerzados es poco usual.

### 3.3 Elementos de acero estructural (ver ref 8 pp 125 a 159)

El comportamiento en flexión es sumamente dúctil, pero la ductilidad puede verse afectada por pandeo local o pandeo lateral después de la fluencia, fig 20. El efecto de Bauschinger suaviza el acero y lo hace más propenso al pandeo. Hay que restringir las dimensiones de las secciones para asegurar la plastificación total sin que ocurra pandeo o colocar atizadores por los espaldos. Secciones compactas. En columnas la capacidad de rotación es muy reducida. La práctica recomendable es subdiseñar las columnas de manera que las articulaciones plásticas se formen en las vigas.

Ante cargas alternas los ciclos son muy estables (si no hay problemas de pandeo) y hay gran disipación de energía, fig 21.

Hay que tener cuidado con las uniones; deben sobrediseñarse porque normalmente son ramos dúctiles que las secciones de las vigas.

### 3.4 Muros

Son elementos que proporcionan gran rigidez a las estructuras y frecuentemente se requieren en edificios de mediana o gran altura para limitar las deflexiones a valores admisibles.

a) Muros de concreto (ver ref 3 pp 610 a 660). Su comportamiento depende esencialmente de su relación altura a longitud  $H/L$  (o más estrictamente de  $\frac{H}{L}$ ). Usualmente  $H/L > 2$  y son por lo tanto elementos de flexión con bajos niveles de carga axial. Se comportan como vigas; mucha ductilidad, fig 22. Ante cargas alternadas su absorción de energía es alta y su deterioro bajo el rige flexión, fig 23. Si rige cortante mucho deterioro, fig 24. En muros bajos rige cortante casi siempre y la falla es poco dúctil y hay mucho deterioro. Problemas en las vigas que soportan los muros entre sí o con muros (se verán con más detalle en el tema de Estructuras de Concreto).

b) Muros de mampostería (ver ref 9). Son elementos rígidos y frágiles; aceptan muy poca deformación lateral. Requieren de confinamiento y/o refuerzo para tener cierta ductilidad, fig 25. Tienen mucho deterioro especialmente si las piezas son huecas. Pueden diseñarse para que rija flexión, entonces el comportamiento puede ser mucho más favorable.

### REFERENCIAS

- N M Newmark y E Rosenblueth "Fundamentals of Earthquake Engineering" Prentice Hall, 1971
- A M Neville "Properties of Hardend Concrete" en Reinforced Concrete Engineering, editado por B Bresler. Vol 1, Cap 3, J Wiley, 1974
- R Parks y T Paulay "Reinforced Concrete Structures" J Wiley, 1975
- J F McDermott "Reinforcing Steel" en Reinforced Concrete Engineering Vol 1 Cap 2 editado por B Bresler, J Wiley, 1974
- R Melli y A Reyes "Propiedades Mecánicas de la Mampostería" Instituto de Ingeniería, Informe No. 288 (Jul 1971)
- V V Bertero y E P Popov "Hysteretic Behavior of Ductile Moment-Resisting Reinforced Concrete Frame Components" Report No UERC 75-16 Univ of California, Berkeley, 1975
- R W G Blakeley "Prestressed Concrete Design" en Structural Design for Earthquakes, publicado por Centre for Continuing Education, The University of Auckland N. Zealand 1972
- G W Butcher "Steel Design" en Structural Design for Earthquakes, publicado por Centre for Continuing Education, Univ of Auckland, N Z 1972
- R Melli "Comportamiento sísmico de muros de mampostería", Instituto de Ingeniería, Informe No. 352 Abr 1975

### REFERENCIAS ADICIONALES

- J A Blum, N M Newmark y L H Canning "Design of Multistory Reinforced Concrete Building for Earthquake Motions" Portland Cement Association, 1961
- D J Dowrick "Earthquake Resistant Design", J Wiley, 1977

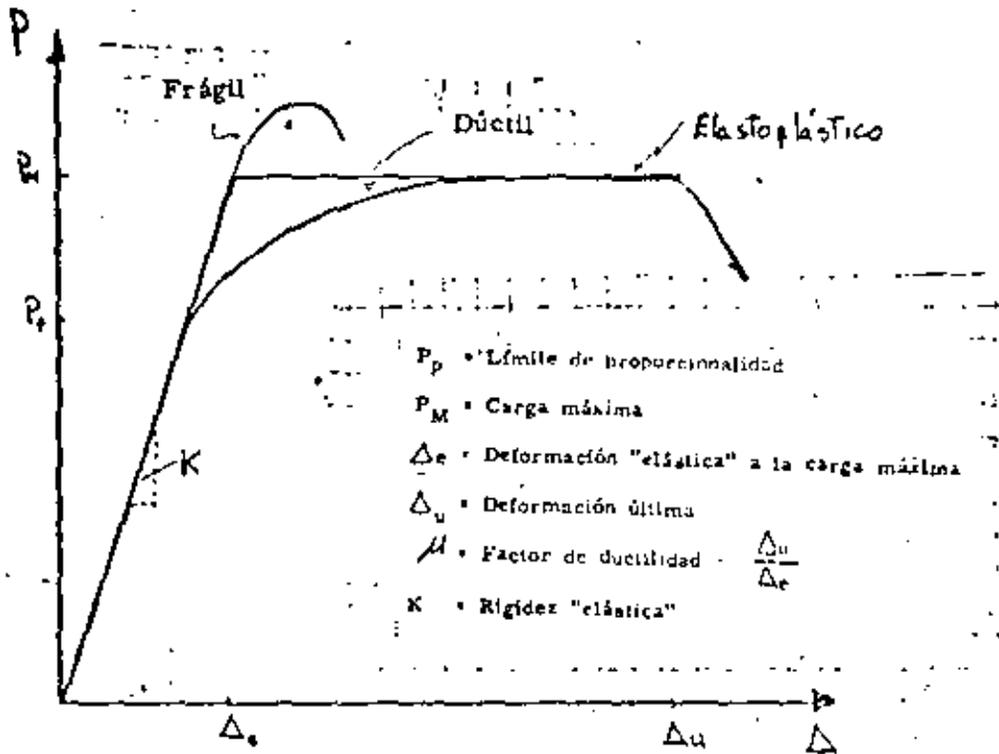
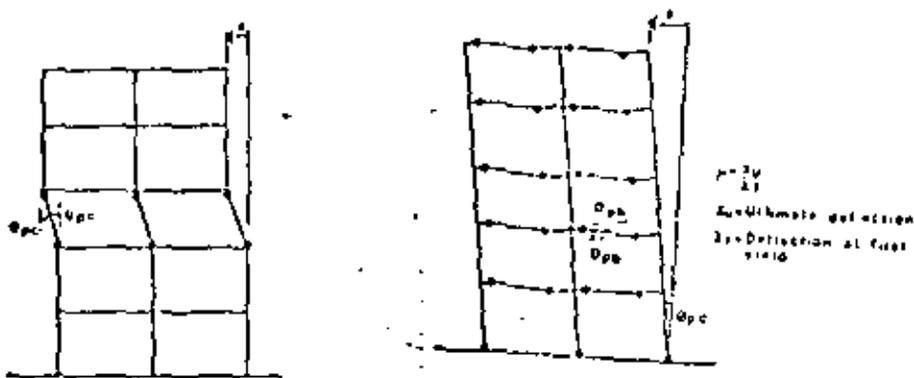


Fig 1 CURVA TÍPICA CARGA-DEFORMACION DE UN MIEMBRO ESTRUCTURAL



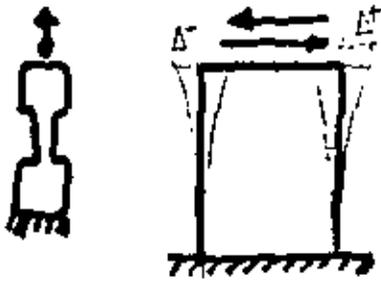
para  $x_u/x_y = 4$

$$\Delta_u/\Delta_y = 122$$

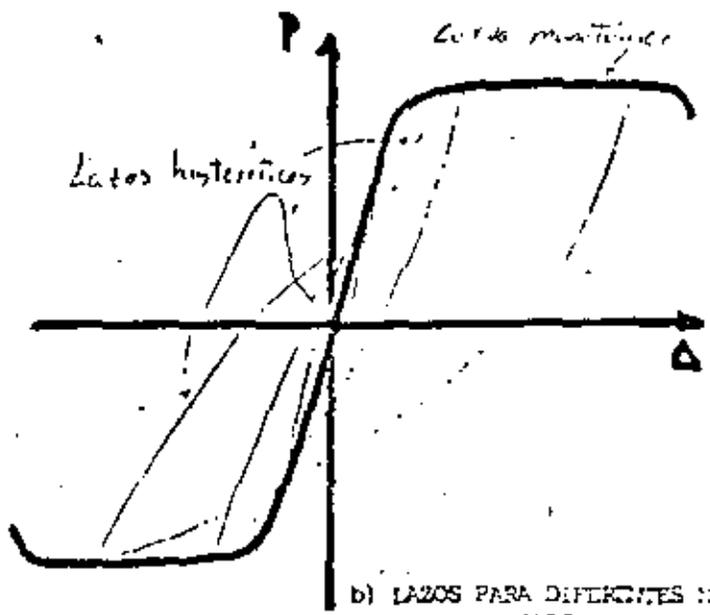
para  $x_u/x_y = 4$

$$\Delta_u/\Delta_y = 18$$

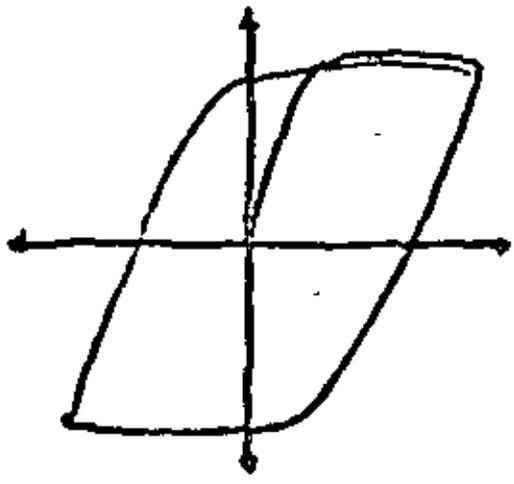
Fig 2 RELACION ENTRE DUCTILIDAD TOTAL Y DUCTILIDAD LOCAL DE UNA ESTRUCTURA



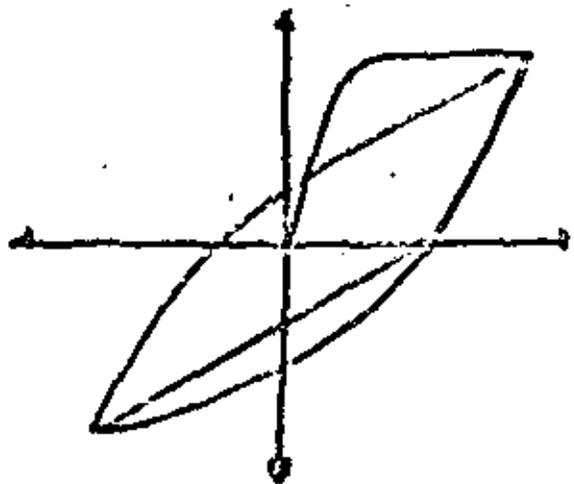
a) ENSAYES TÍPICOS



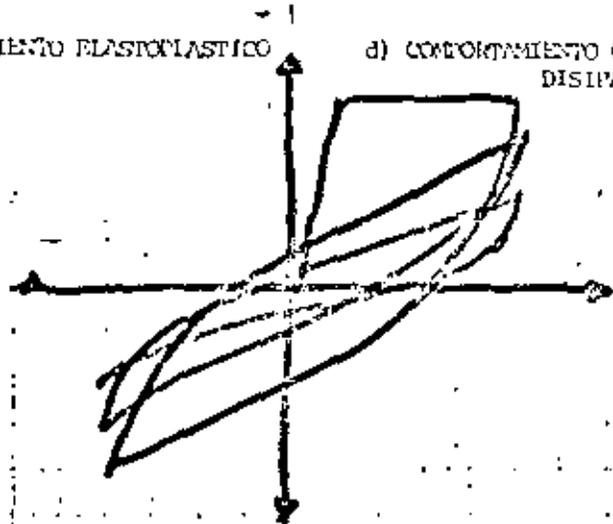
b) LAZOS PARA DIFERENTES NIVELES DE CARGA



c) COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO



d) COMPORTAMIENTO CON DETERIORO DE CAPACIDAD DE DISIPACIÓN DE ENERGÍA



e) COMPORTAMIENTO CON DETERIORO DE RESISTENCIA

Fig 3 COMPORTAMIENTO HISTÉRICO

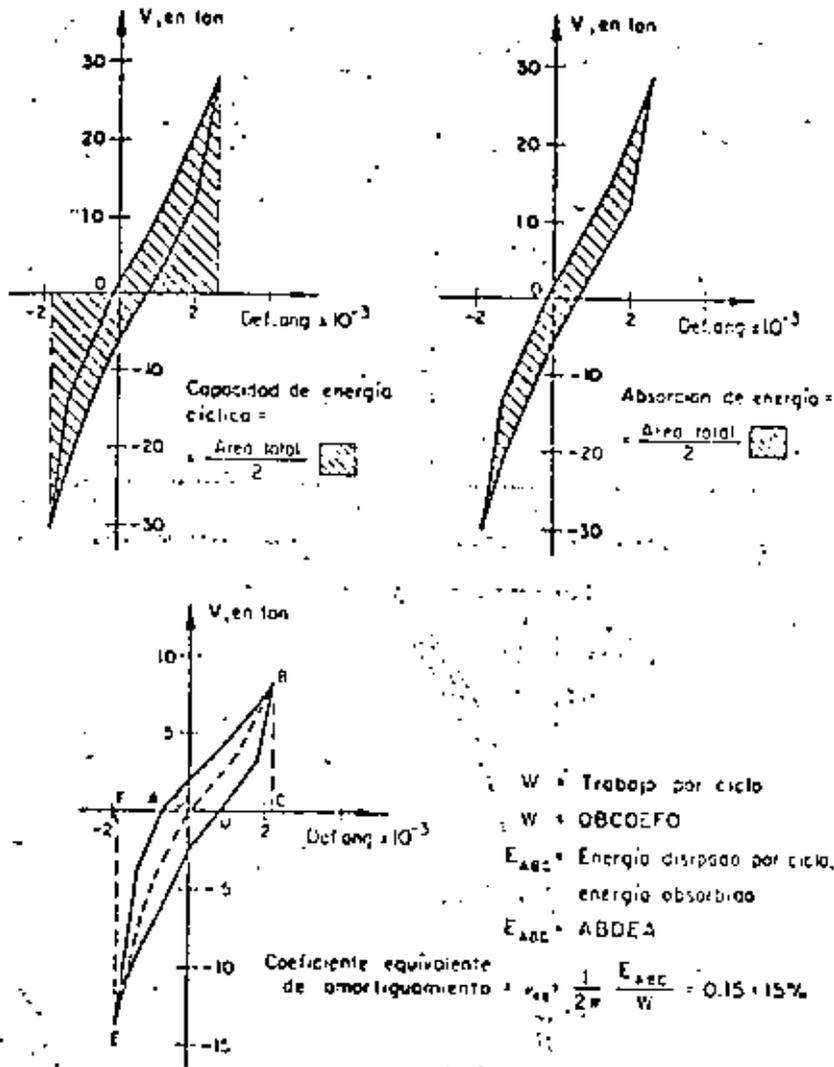
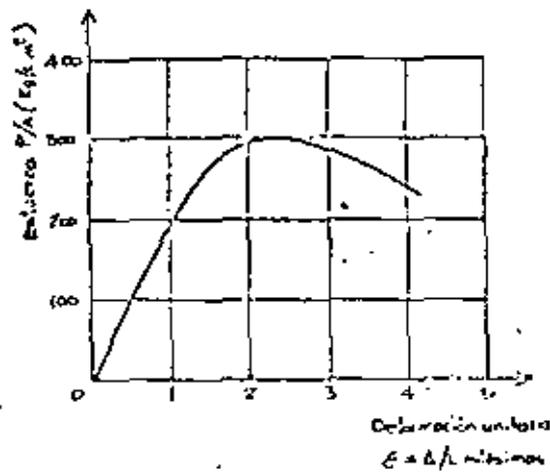
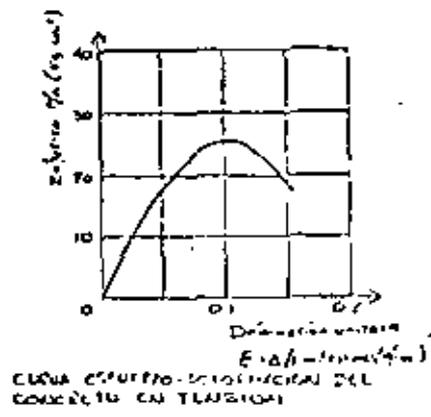


Fig 4 Definición de términos relacionados con la capacidad de disipación de energía

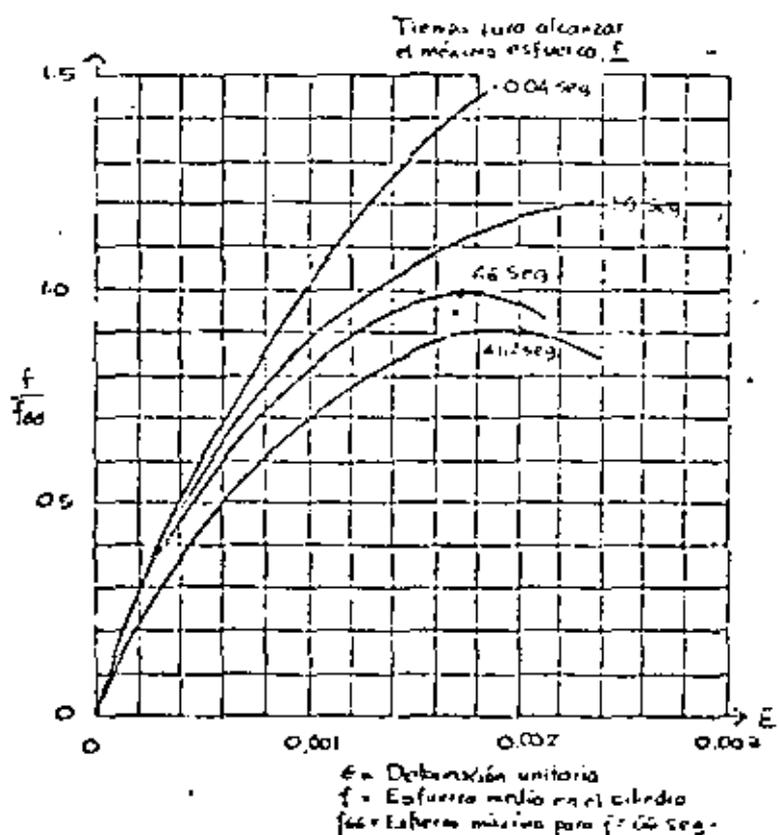


CURVA ESFUERZO-DEFORMACION DEL CONCRETO EN COMPRESION



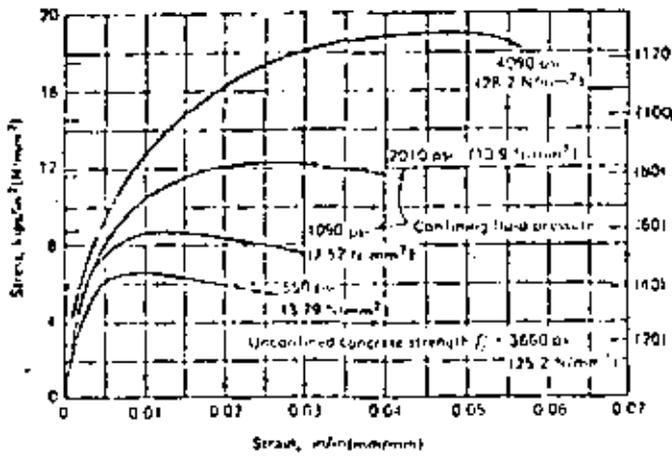
CURVA ESFUERZO-DEFORMACION DEL CONCRETO EN TENSION

Fig 5 Curvas esfuerzo deformación del concreto simple



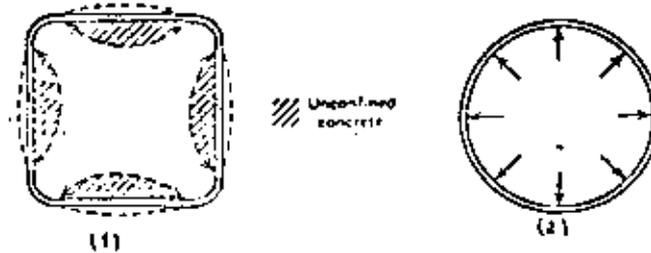
$\epsilon$  = Deformación unitaria  
 $f$  = Esfuerzo medio en el cilindro  
 $f_{0.04}$  = Esfuerzo máximo para  $f = 0.04$  seg.

Fig 6 EFECTO DE LA VELOCIDAD DE CARGA (HOLANO?)

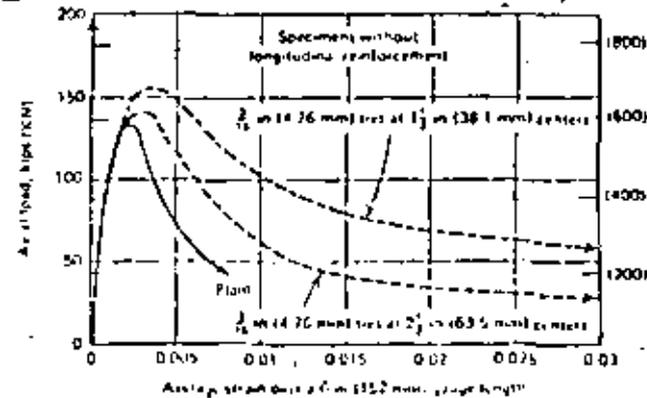
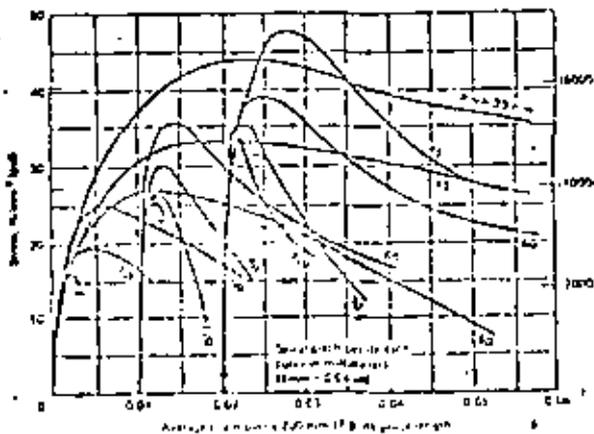


$$f'_m = f'_c + 4 f'_l$$

a) Resultados de ensayos a compresión triaxial



b) Confinamiento proporcionado por estrillos (1) y por hélice (2)



d) Curvas esfuerzo deformación de prismas de concreto con diversos contenidos de estrillos

Fig 7 Efecto del confinamiento en la curva esfuerzo deformación del concreto

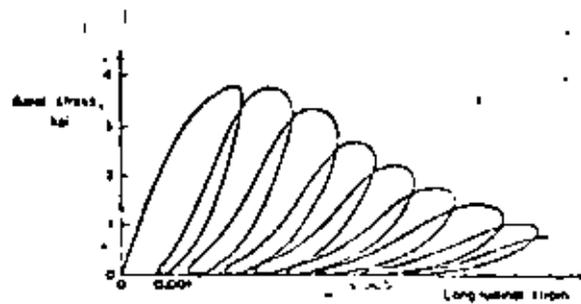


Fig 8 Efecto de la repetición de esfuerzos de compresión en el concreto simple

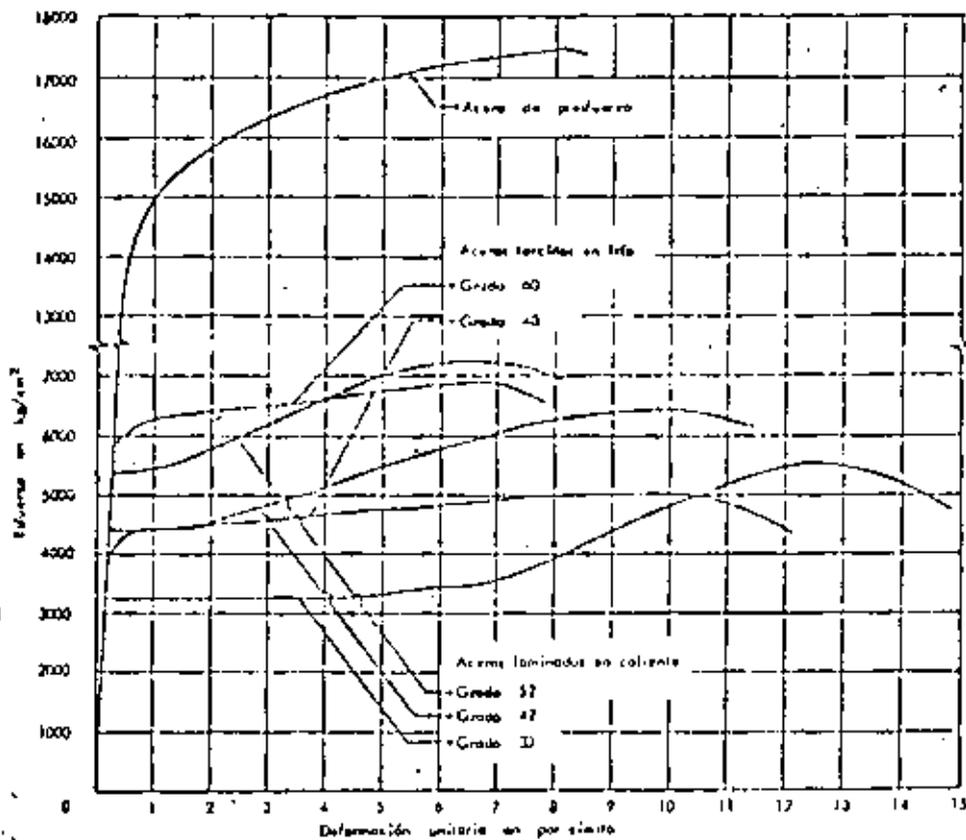


Fig 9 Curvas típicas esfuerzo-deformación para distintos tipos de acero de refuerzo

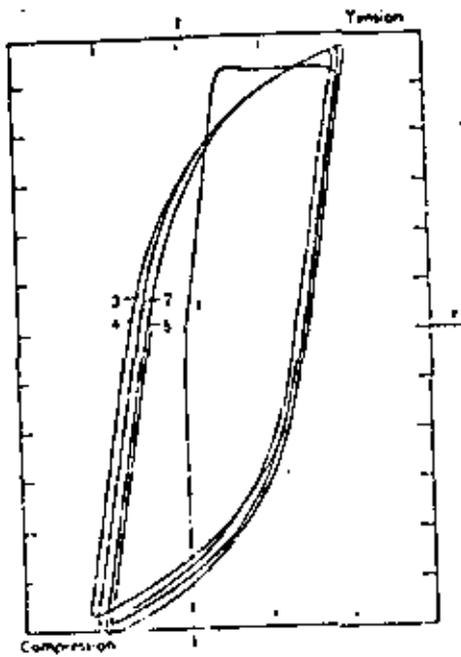


Fig 10 Ciclos histéricos en una barra de refuerzo

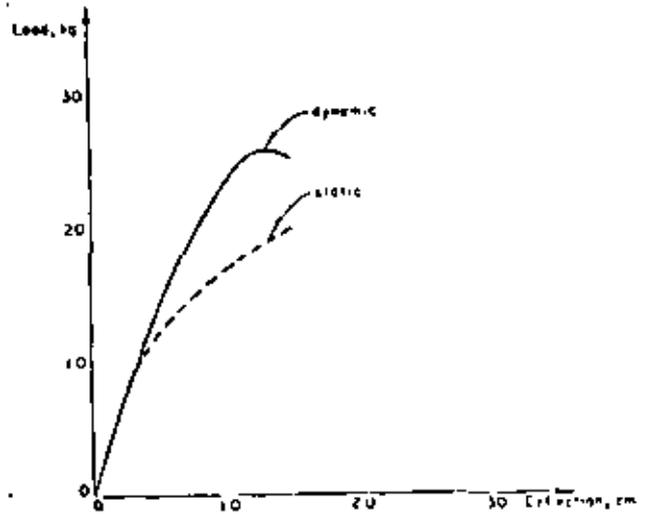


Fig 12 Curvas carga-deformación estática y dinámica para la madera

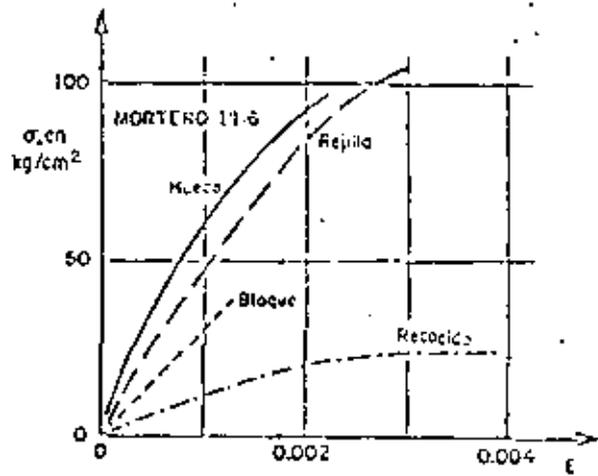
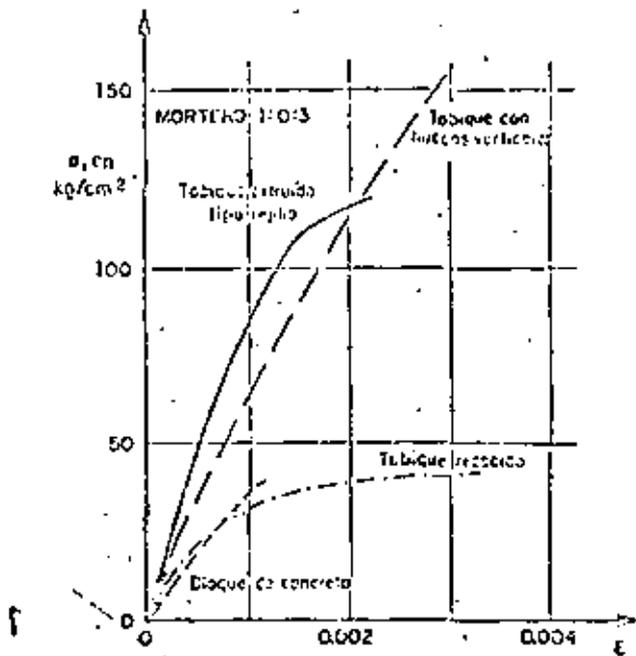


Fig 11 Curvas carga-deformación para mampostería en compresión

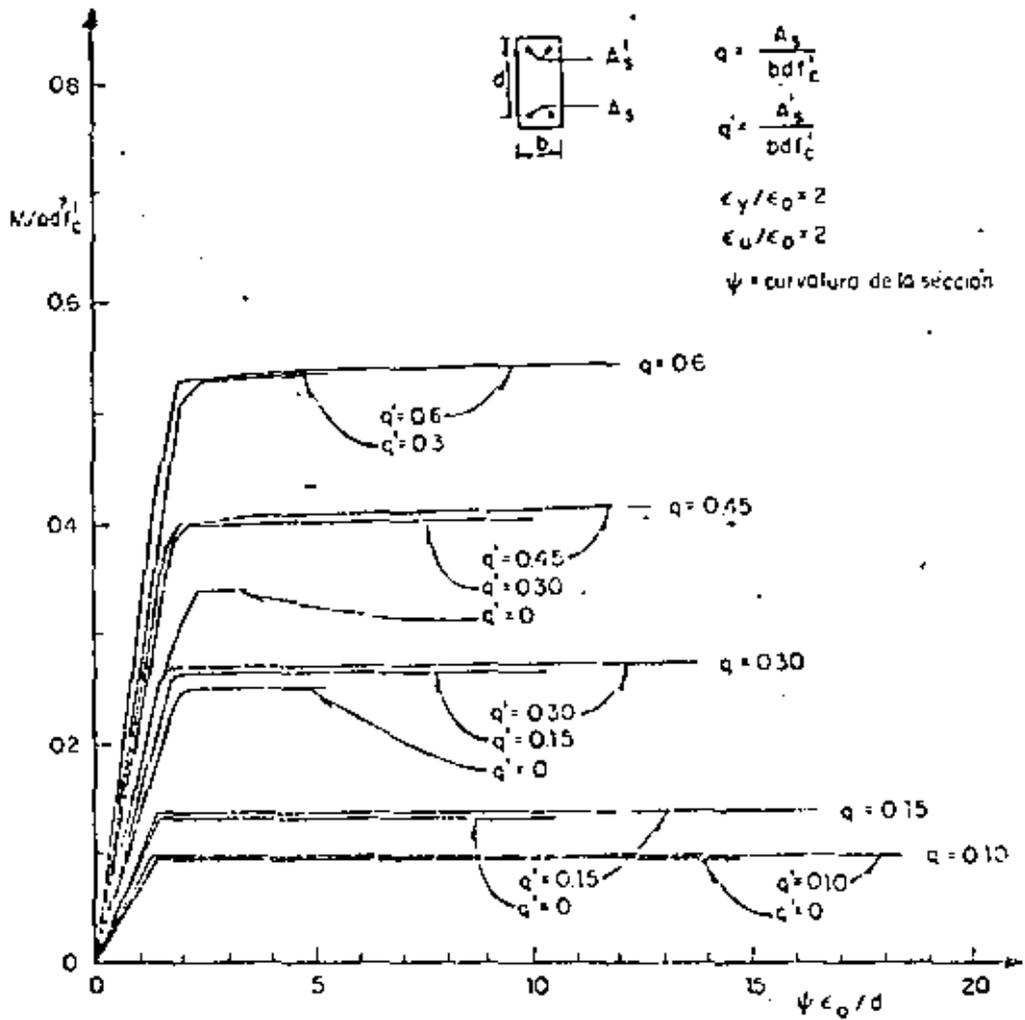
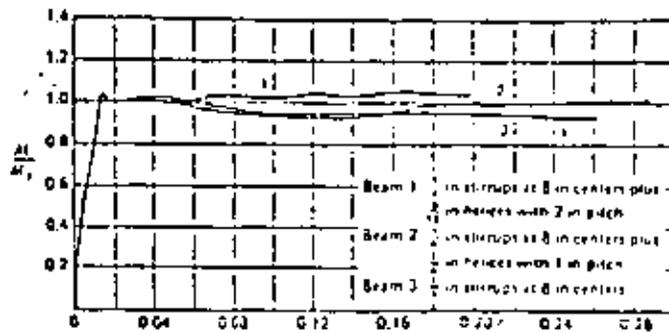
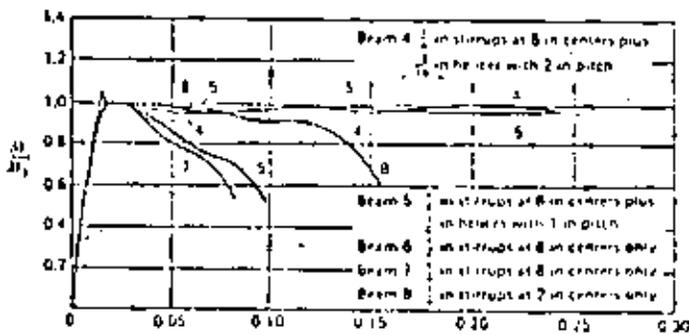


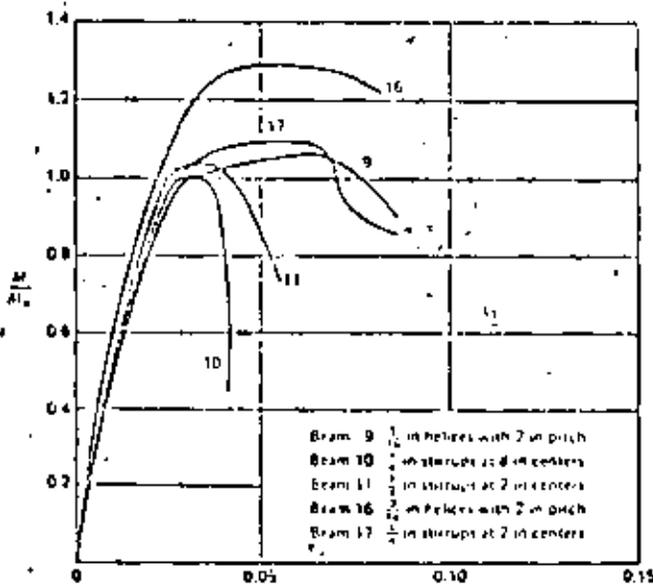
Fig 13 Relaciones Momento-Curvatura para secciones de concreto reforzado sujetas a flexión



a) Vigas subreforzadas

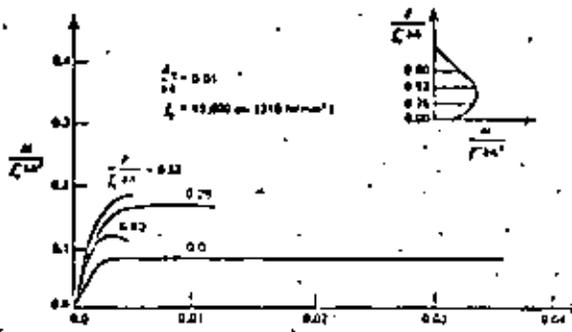


b) Vigas con folla balanceada

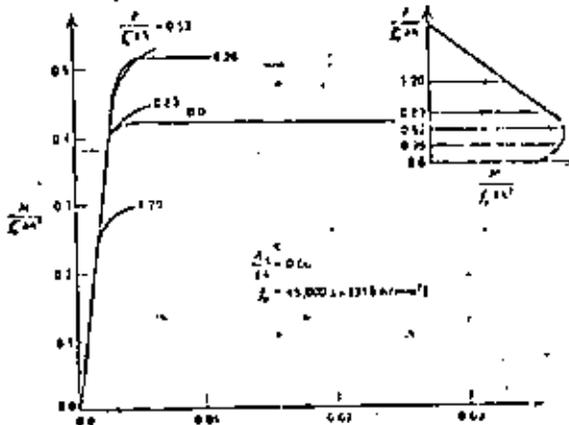


c) Vigas sobreforzadas

Fig 14 Efecto del refuerzo transversal en la relación momento-curvatura de concreto reforzado sujeto a flexión



a) Columna con baja cantidad de refuerzo



b) Columna con alta cantidad de refuerzo

Fig 15 Relaciones momento-curvatura de secciones de concreto sujetas a flexocompresión

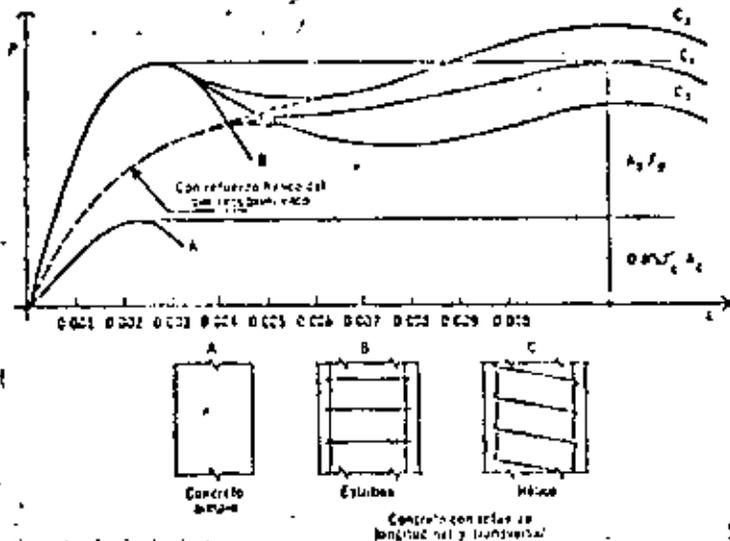
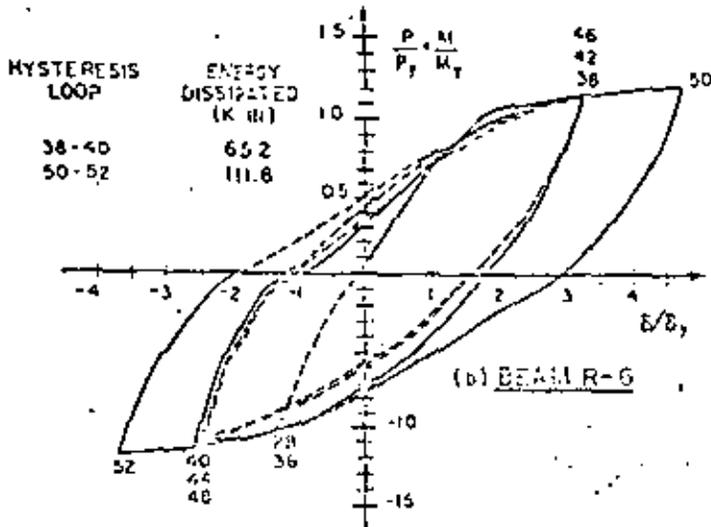
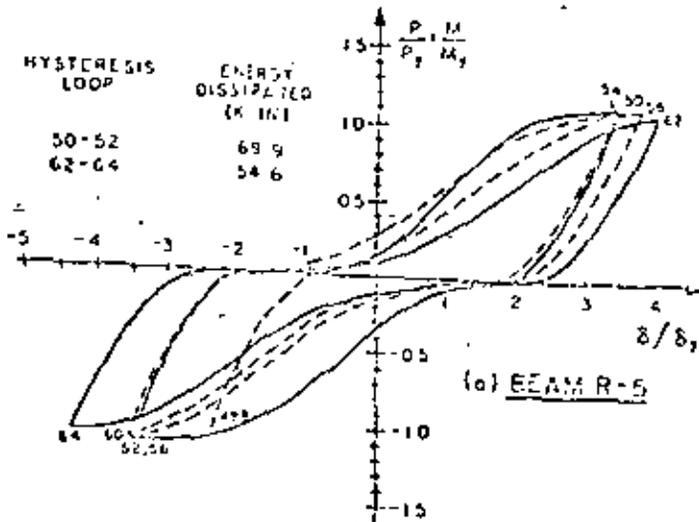


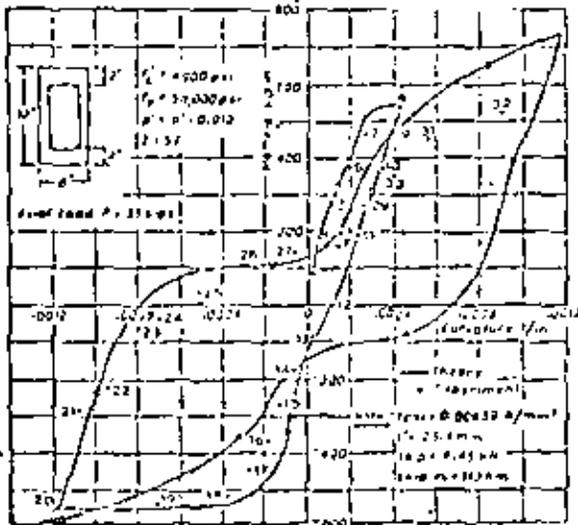
Fig 16 Efecto de confinamiento en la ductilidad de columnas



a) Falla por flexión con esfuerzos cortantes bajos



b) Falla por flexión con esfuerzos cortantes altos



c) Columna con carga axial baja

Fig 17 Comportamiento histerético de secciones de concreto reforzado

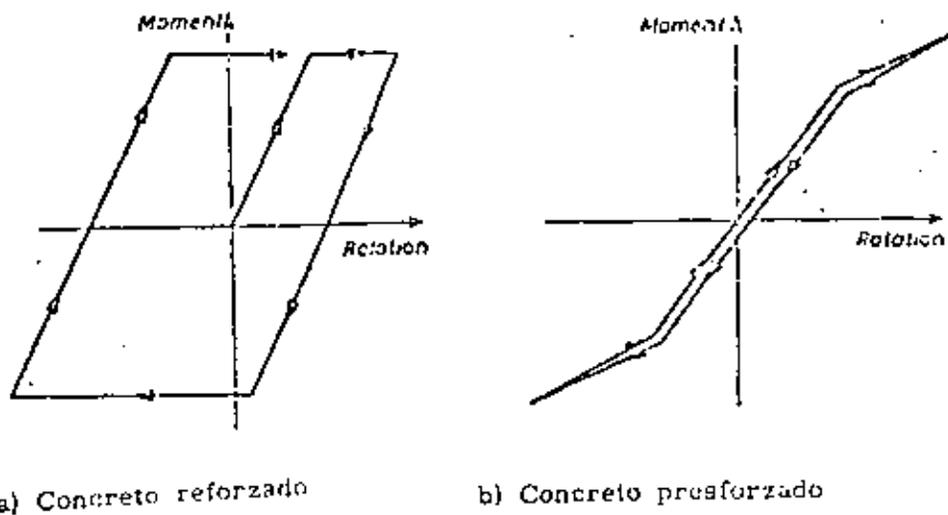


Fig 18 Comparación del comportamiento histerético del concreto reforzado y presforzado

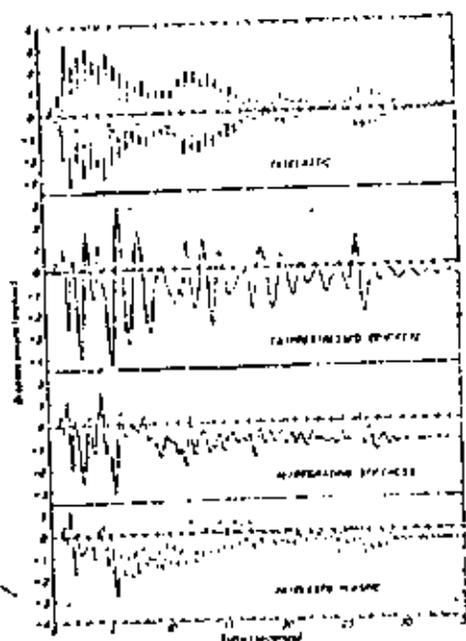
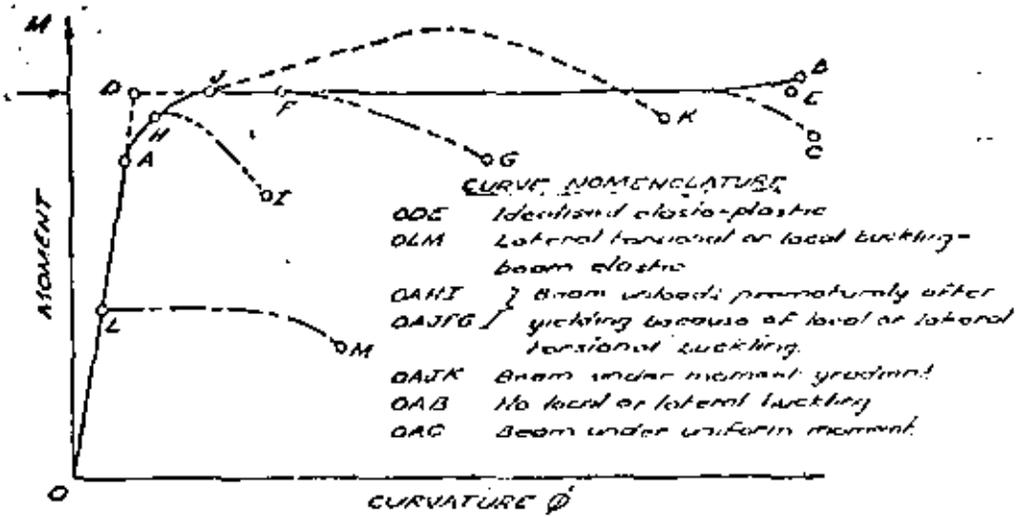


Fig 19 Comparación de deformaciones ante un sismo de un elemento de concreto reforzado y uno presforzado



a) Vigas

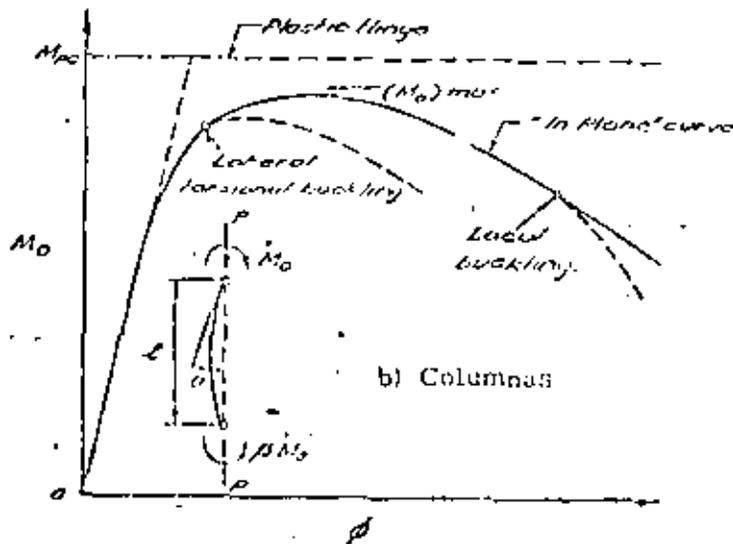


Fig 20 Relaciones momento-curvatura idealizadas en elementos de acero estructural

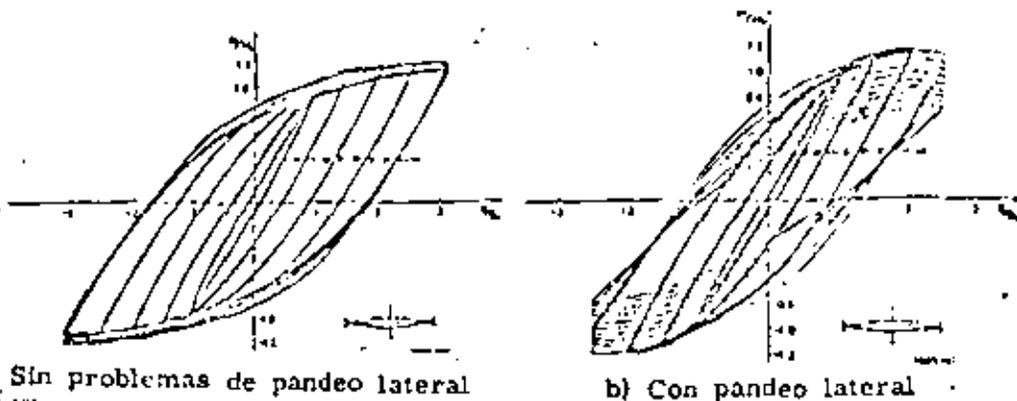
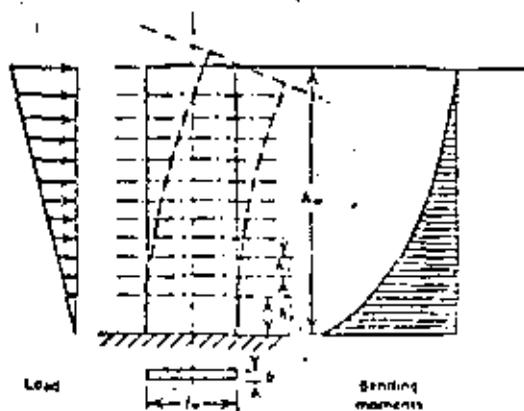
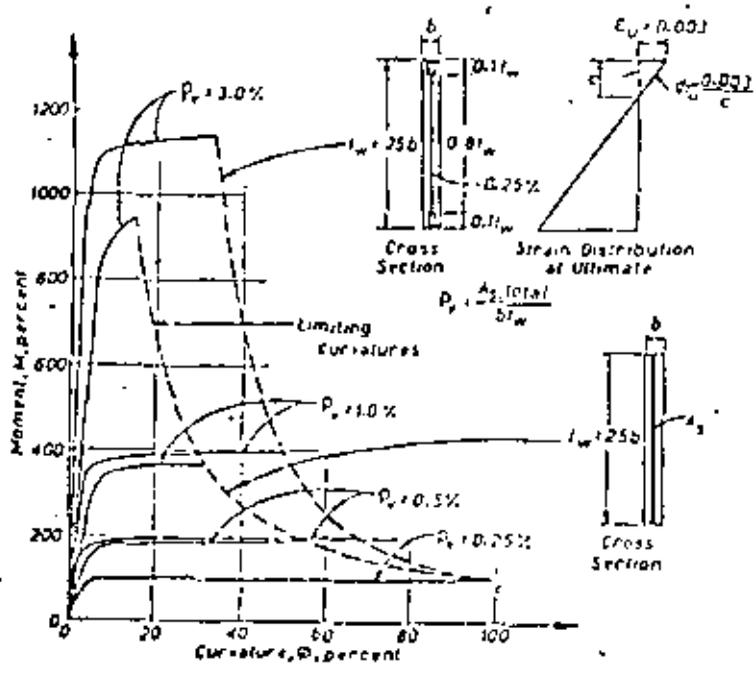


Fig 21 Comportamiento histérico de elementos de acero estructural

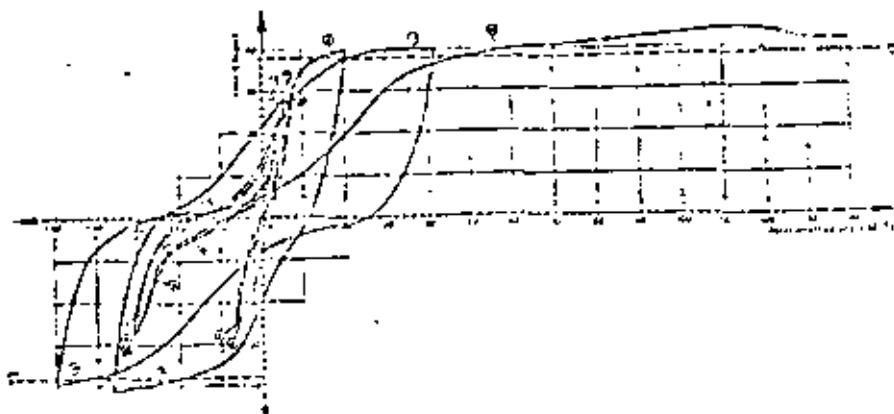


a) Deformaciones

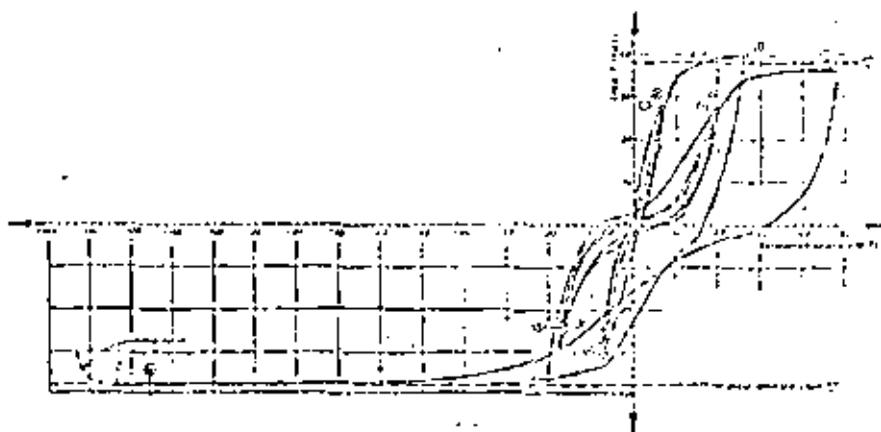


b) Relación momento-curvatura para distintas cuantías de refuerzo

Fig 22 Comportamiento de muros altos sujetos a cargas laterales

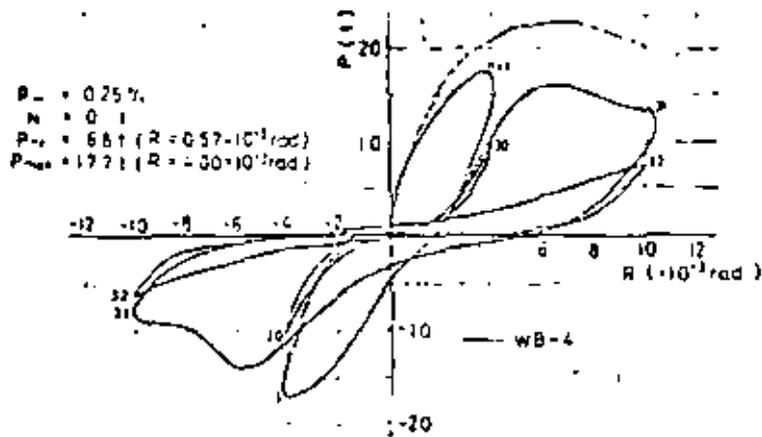


a) Falla por flexión sin agrietamiento diagonal

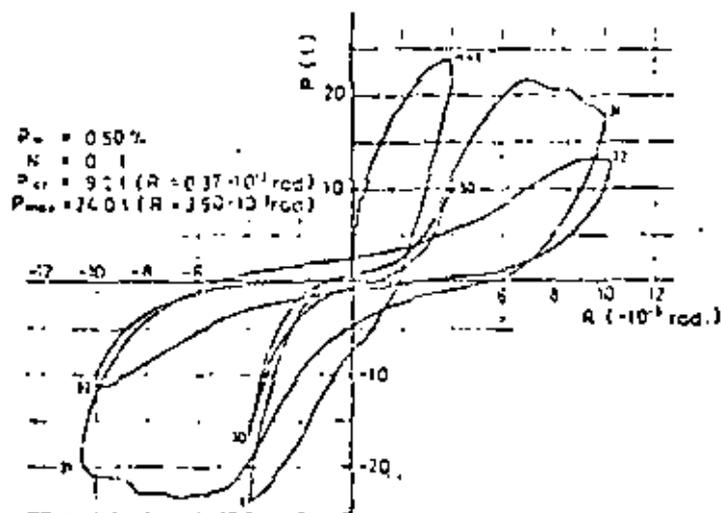


b) Falla por flexión después de agrietamiento diagonal

Fig 23 Ciclos histeréticos para muros cortos con falla por flexión

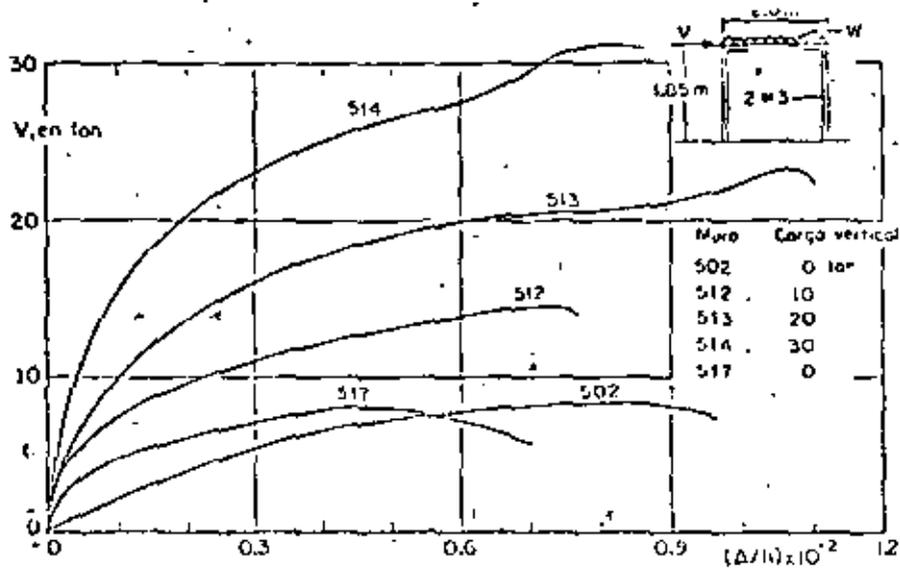


a) Cantidad de refuerzo horizontal 0.25%

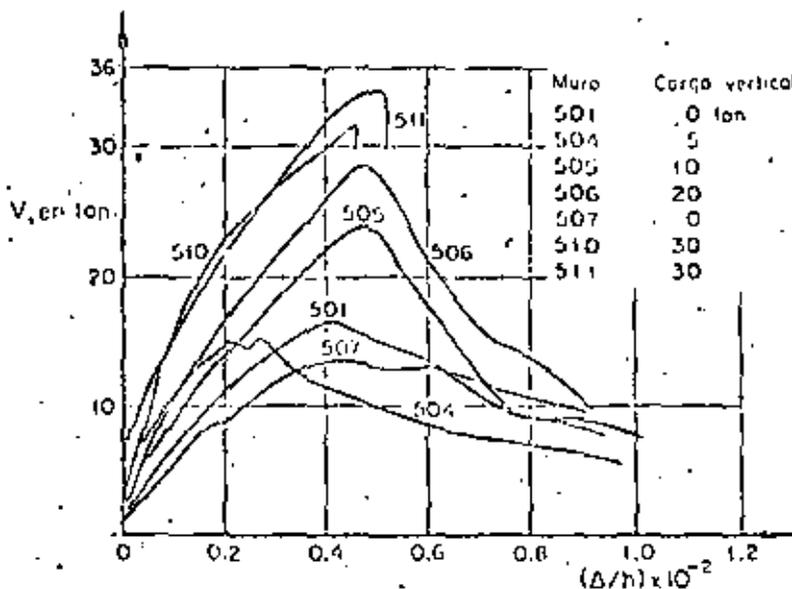


b) Cantidad de refuerzo horizontal 0.50%

Fig 24 Ciclos histeréticos en muros cortos con falla por cortante



Muros de bloque de concreto. Falta en flexión. Efecto de la carga vertical



Muros de bloque de concreto. Falta en tensión diagonal. Efecto de la carga vertical

Fig 25 Curvas Carga deformación para muros de mampostería



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

**T E M A    I I**

**ANALISIS DE ESTRUCTURAS ANTE CARGAS  
LATERALES**

**POR ENRIQUE BAZAN  
Y ROBERTO MELI PIRALLA,  
Agosto, 1983**

## 1. MARCOS SUJETOS A FUERZAS LATERALES

En el diseño sísmico es importante el análisis de marcos de edificios sujetos a fuerzas laterales y el cálculo de sus rigideces. Este capítulo describe e ilustra con ejemplos los principales métodos aproximados y exactos de análisis elástico cuya aplicación es práctica en problemas usuales. Se incluye en cada caso un resumen de las hipótesis de partida, a fin de permitir el juicio sobre la aplicabilidad a cada problema concreto.

Se hace énfasis en los métodos matriciales y en los simplificados, porque en la actualidad, cuando se requieren resultados exactos, se pueden emplear con facilidad procedimientos matriciales, debido a la rápida y creciente difusión del uso de computadoras grandes y pequeñas. Los métodos simplificados son útiles en las etapas preliminares de análisis y dimensionamiento, permiten también verificar si no se han cometido errores gruesos al emplear métodos más precisos, en especial, programas de computadora.

En los ejemplos se analiza por cada método propuesto el marco de la fig 1.1.

## 2

## 1.1 Métodos aproximados

Se describen a continuación métodos aplicables a marcos en los que son despreciables los efectos de las deformaciones axiales de los miembros. En estos métodos se entiende por rigidez,  $K$ , de un miembro el cociente de su momento de inercia entre su longitud,

## 1.1.1 Método de Bowman

Como resultado del estudio de un gran número de marcos resueltos por métodos "exactos" se ha propuesto un método aproximado de acuerdo con las siguientes hipótesis. (ref 3, 4):

1. Los puntos de inflexión en las vigas exteriores se encuentran a 0.55 de su claro, a partir de su extremo exterior. En vigas interiores, el punto de inflexión se encuentra en el centro del claro, excepto en la crujía central cuando el número de crujías es impar, o en las dos centrales si es par. En estas crujías la posición de puntos de inflexión en las vigas está forzada por condiciones de simetría y equilibrio.
2. Los puntos de inflexión en las columnas del primer entrepiso se encuentran a 0.60 de su altura, a partir de la base.

En marcos de dos o más, tres o más, o cuatro o más entrepisos, respectivamente, los puntos de inflexión en las columnas de los entrepisos último, penúltimo y antepenúltimo, respectivamente, se encuentran a 0.65, 0.60 y 0.55 de la altura correspondiente, a partir del extremo superior. En edificios de cinco o más entrepisos, los puntos de inflexión en columnas para las cuales no se ha especificado la posición se encuentran en el centro de su altura.

Esto se resume gráficamente en la fig 1.2.

3. La fuerza cortante de cada entrepiso se distribuye en la forma siguiente.

En el primer entrepiso:

Una fuerza cortante igual a

$$V_c = \frac{N - 0.5}{N + 1} V$$

se distribuye directamente entre las columnas proporcionalmente a sus rigideces. La fuerza cortante  $V_t = V - V_c$  se distribuye entre las crujías proporcionalmente a la rigidez de la viga <sup>viga</sup> que las limita en la parte superior. La cortante de cada crujía se distribuye en partes iguales entre las dos columnas que la limitan.

En pisos superiores:

Una fuerza cortante

$$V_c = \frac{N - 2}{N + 1} V$$

se distribuye directamente entre las columnas. La cortante  $V_t = V - V_c$  se distribuye entre las crujías como se hizo para planta baja.

En estas expresiones,

$V$  = fuerza cortante total en un entrepiso

$N$  = número de crujías del marco en el entrepiso considerado.

Una variante del método consiste en respetar los puntos 2 y 3, pero determinar los momentos en las <sup>vigas</sup> equilibrando en cada nudo la suma de momentos en los extremos de las columnas con momentos proporcionales a la rigidez angular natural de cada viga.

La fig 1.3 es la aplicación de este método al análisis del marco de la fig 1.1.

En la fig 1.4 se muestran algunos pasos intermedios.

### 1.1.2 Método del factor.

El método se obtiene planteando las ecuaciones de pendiente-deflexión (slope-deflection) y haciendo en algunos pasos intermedios las siguientes hipótesis (ref 5):

1. Para el cálculo de los desplazamientos lineales y angulares en un piso se considera que son iguales los valores de  $\psi$  en dos entrenisos consecutivos. Se entiende por  $\psi$  la diferencia de desplazamientos laterales de dos niveles consecutivos dividida entre la altura del entrepiso.
2. El desplazamiento angular de un nudo y el de los extremos opuestos de todas las barras que concurren al mismo son iguales.

Esto conduce al siguiente procedimiento:

1. Se calcula en cada nudo el valor  $G_n$ , que se denomina factor de viga, igual a  $\sum K_{cn} / \sum K_n$ , siendo  $\sum K_{cn}$  la suma de rigideces de las columnas que concurren a ese nudo, y  $\sum K_n$  la suma de rigideces de todas las piezas que concurren al mismo.
2. Se calcula en cada nudo  $C_n = 1 - G_n$ , que se llama factor de columna.
3. Se obtiene para cada pieza, viga o columna, en cada extremo, el valor de la suma de su factor más la mitad del factor correspondiente al extremo opuesto de la misma pieza. Los momentos en los extremos de columnas del mismo entrepiso son proporcionales a los valores de  $K(C + C'/2)$  para cada extremo de cada columna. Los momentos en los extremos de vigas que concurren a un mismo nudo son proporcionales a los valores de  $K(G + G'/2)$  correspondientes.

En la fig 1.5 se aplica este método al análisis del marco de la fig 1.1. El primer número en cada extremo es el valor del factor  $C$  o  $G$  para la pieza correspondiente. El segundo es la mitad del valor del factor para el extremo opuesto de la misma,  $C'$  o  $G'$ , y el tercero es la suma de los dos anteriores. De aquí se obtuvieron  $K(G + G'/2)$  y  $K(C + C'/2)$ . Estos aparecen subrayados con línea gruesa en la figura.

A continuación se calculó  $\Sigma K(C + C'/2)$  en cada entrepiso y se distribuyó el momento de piso ( $V_h$ ) entre todos los extremos de las columnas correspondientes. Tómese como ejemplo el extremo superior de la columna central del primer entrepiso, para el cual  $K(C + C'/2) = 5.856$

$$V_h = 150$$

$$\Sigma k(C + \frac{1}{2} C') = 49.507$$

$$M = \frac{150}{49.507} \times 5.856 = 17.74$$

Los momentos en las vigas se calculan después distribuyendo la suma de momentos de los extremos de las columnas en cada nudo proporcionalmente al valor  $K(G + G'/2)$  de cada viga.

### 1.1.3 Método de distribución en voladizo (Grinter-Tsao)

Este método es rigurosamente aplicable sólo a marcos simétricos de una cruzija y a aquellos de varias cruzijas cuyas rigideces guarden relaciones tales que sea posible descomponerlos en varios marcos simétricos de una cruzija cada uno. Sin embargo, puede aplicarse en forma aproximada al análisis de cualquier marco que se idealice como simétrico y de una cruzija, igualando la suma de rigideces de

vigas y columnas en cada entrepiso en el marco original y en el idealizado. Esto equivale a suponer que todos los nudos de un mismo nivel sufren la misma rotación (ref 6).

El método consiste en lo siguiente (fig 1.6 ).

Se permite el desplazamiento lineal de todos los nudos, hasta que se logre el equilibrio de fuerzas cortantes en cada entrepiso. En esta etapa los momentos exteriores  $-M_u$  impiden el giro de los nudos (fig 1.6b). Se eliminan después momentos, permitiendo simultáneamente giros y nuevos desplazamientos lineales sin que se altere la fuerza cortante de cada entrepiso (fig 1.6c).

Considérese una columna (fig 1.6d) en uno de cuyos extremos se permite giro y desplazamiento transversal simultáneos. Partiendo de que es nula la cortante que proviene de esta deformación, las ecuaciones de pendiente-deformación suministran las relaciones

$$M_{12} = 2EK_{12} (2\theta_1 - 3\psi_{12}) \quad (1.1)$$

$$M_{21} = 2EK_{12} (\theta_1 - 3\psi_{12}) \quad (1.2)$$

Al no haber fuerza cortante,

$$M_{21} = -M_{12} \quad (1.3)$$

De las ecs 1.1 a 1.3,

$$\theta_1 = 2\psi_{12}$$

$$M_{12} = EK_{12} \theta_1 \quad (1.4)$$

Teniendo en cuenta las ecs 1.3 y 1.4 y considerando que la deformación de la estructura será antisimétrica, se reduce el problema a la solución de la mitad del marco por distribución de momentos. En este proceso las rigideces de las vigas se calculan como  $3EI/L/2) = 6EK$ , las de las columnas como  $EK$  (de la ec 1.4) y el factor de transporte en

las columnas es  $-1$ . (ec 1.3).

El método se aplica en la fig 1.7a al marco de la fig 1.1. La rigidez de cada columna <sup>del marco idealizado</sup> se obtuvo como la suma de rigideces de todas las columnas del entrepiso, y la rigidez de las vigas como  $2 \times 6 = 12$  veces la suma de rigideces de las vigas en el nivel considerado (El coeficiente 6 toma en cuenta la rigidez modificada y el 2 toma en cuenta la rigidez de cada viga en sus dos extremos). Para llevar menos decimales las fuerzas laterales se han multiplicado por 10.

La tabla que aparece en la fig 1.7a es idéntica a una distribución de momentos por el método de Cross, por lo que no <sup>requiere</sup> explicación. Obsérvese solamente que los momentos de empotramiento se obtuvieron como el producto de la fuerza cortante en cada entrepiso por la mitad de la altura correspondiente.

Calculados los momentos en la estructura simplificada, es necesario obtener elementos mecánicos en el marco original. Para ello se distribuyen los que se obtuvieron en aquella proporcionalmente a las rigideces de las piezas de éste. El resultado de la operación se consigna en el renglón 2 correspondiente a cada pieza en la fig 1.7b.

Puede verificarse que se satisface el equilibrio de cortante en cada entrepiso. No así el equilibrio de cada nudo, ya que la hipótesis de giros iguales de todos los nudos de un nivel no necesariamente es correcta. En los renglones 3-5 se lleva a cabo una distribución de momentos con los nudos fijos linealmente. En el renglón 6 se anota el resultado final de esta distribución.

Al efectuar la distribución descrita se desequilibran las cortantes de entrepiso. Ello se observa al comparar los valores de  $\Sigma H$  para todas las columnas de un entrepiso con el producto  $Vh$  correspondiente. Los errores son tan pequeños en este caso que no justifican un refinamiento mayor; no obstante, los residuos que aquí se obtienen pueden considerarse como un nuevo sistema de cargas horizontales al cual puede aplicarse el mismo procedimiento.

### 1.1.4 Fórmulas de Wilbur

La rigidez de entrepiso es la relación entre la fuerza cortante absorbida por un marco, muro o contraviento en un entrepiso y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles que lo limitan. La rigidez así definida no es independiente del sistema de fuerzas laterales. Por tanto, para calcularla con rigor debe conocerse tal sistema con anterioridad, lo cual en general no es posible.

En marcos ordinarios de edificios el empleo de sistemas de cargas que no son estrictamente proporcionales al definitivo de análisis introduce errores de poca importancia, y usualmente es aceptable calcular las rigideces a partir de hipótesis simplificadoras sobre la forma del sistema de fuerzas laterales. En

muros, contravientos y ciertos marcos es indispensable tener en cuenta la variación de la carga lateral.

Las fórmulas de Wilbur son aplicables a marcos regulares formados por piezas de momentos de inercia constante. La versión que aquí se presenta se basa en las siguientes hipótesis:

1. Los giros en todos los nudos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales, excepto en el nivel de desplante, en donde puede suponerse empotramiento o articulación según el caso.
2. Las fuerzas cortantes en los dos entrepisos adyacentes al que interesa son iguales a la de éste.

De aquí resultan las siguientes expresiones:

Para el primer entrepiso:

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación

$$R_1 = \frac{48E}{h_1 \left[ \frac{4h_1}{\sum K_{C_1}} + \frac{h_1 + h_2}{\sum K_{L_1} + \frac{\sum K_{C_1}}{12}} \right]} \quad (1.5)$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación

$$R_1 = \frac{24E}{h_1 \left[ \frac{8h_1}{\Sigma K_{c1}} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1}} \right]} \quad (1.6)$$

Para el segundo entrepiso:

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{\Sigma K_{c2}} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{c1}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{t2}} + \frac{\Sigma K_{t1}}{12} \right]} \quad (1.7)$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{\Sigma K_{c2}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{t2}} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1}} \right]} \quad (1.8)$$

Para entrepisos intermedios:

$$R_n = \frac{48E}{h_n \left[ \frac{4h_n}{\Sigma K_{cn}} + \frac{h_m + h_n}{\Sigma K_{tm}} + \frac{h_n + h_o}{\Sigma K_{tn}} \right]} \quad (1.9)$$

En estas ecuaciones

- $R_n$  rigidez del entrepiso en cuestión
- $K_{tn}$  rigidez (I/L) de las vigas del nivel sobre el entrepiso n
- $K_{cn}$  rigidez (I/L) de las columnas del entrepiso n
- $m, n, o$  índices que identifican tres niveles consecutivos de abajo hacia arriba
- $h_n$  altura del entrepiso n.

Para el entrepiso superior, si se acepta que <sup>la</sup> cortante del penúltimo piso es el doble que la del último, se encuentra que es aplicable la fórmula para entrepiso intermedios, poniendo

La deducción de estas fórmulas y su ampliación para el caso de vigas de sección variable se presenta en la ref 7.

Para el marco de la fig 1.1 se tiene:

$$R_1 = \frac{48 \times 2000000}{600 \left[ \frac{4 \times 600}{412.5} + \frac{600 + 450}{375 + \frac{412.5}{12}} \right]} = 19086 \text{ kg/cm}$$

$$R_2 = \frac{48 \times 2000000}{450 \left[ \frac{4 \times 450}{318.75} + \frac{600 + 450}{375 + \frac{412.5}{12}} + \frac{450 + 400}{375} \right]} = 20359 \text{ kg/cm}$$

$$R_3 = \frac{48 \times 2000000}{400 \left[ \frac{4 \times 400}{206.25} + \frac{450 + 400}{375} + \frac{400 + 400}{281.25} \right]} = 18650 \text{ kg/cm}$$

$$R_4 = \frac{48 \times 2000000}{400 \left[ \frac{4 \times 400}{75} + \frac{400 + 400}{281.25} + \frac{400}{187.5} \right]} = 9122 \text{ kg/cm}$$

## 1.2 Métodos exactos

Aceptando las hipótesis de comportamiento elástico lineal, se pueden considerar como exactos a los métodos matriciales. Estos métodos se clasifican en dos: de <sup>las</sup> rigideces o de <sup>los</sup> desplazamientos, y de <sup>las</sup> flexibilidades o de las fuerzas; los nombres aluden a las cantidades que se consideran como incógnitas en el planteamiento del problema de análisis. Ambos métodos son aplicables a todo tipo de carga y en la literatura se presentan con bastante detalle (véanse por ejemplo las ref 8 y 9). Para marcos y estructuras de edificios el método más adecuado es el de rigideces que, brevemente, se presenta a continuación con énfasis en los aspectos relacionados con cargas laterales.

### 1.2.1 Método de rigideces

Para ilustrar este procedimiento considérese la estructura de la fig 1.8a.

Grado de libertad es la posibilidad que tiene un nudo de moverse en forma independiente, en cierta dirección. En marcos los movimientos son giros o desplazamientos en los nudos, como se muestra en la fig 1.8b. Si no se consideran las deformaciones axiales de las vigas y columnas, los grados de libertad son solamente los seis primeros. Además, en este ejemplo particular, aprovechando la simetría, se puede reducir el problema a uno de 4 grados de libertad (fig 1.8c y d).

En primer lugar, se obtiene la matriz de rigideces de las piezas aisladas (vigas y columnas) que forman la estructura, para los grados de libertad que les correspondan. En este caso las piezas tienen los grados de libertad mostrados en la fig 1.9.

El elemento  $k_{ij}$  de una matriz de rigideces  $K$  es la fuerza o momento que se necesita aplicar a la estructura en  $\sqrt{\text{la dirección}}$  del grado de libertad  $i$  para que se produzca un desplazamiento unitario en  $\sqrt{\text{la dirección}}$  del grado de libertad  $j$ . El conjunto ordenado de los valores de  $k_{ij}$  constituye la matriz de rigideces. Las matrices de rigideces son cuadradas, simétricas y su tamaño es igual al número de grados de libertad.

Se deduce de la fig 1.9b que para las vigas, en este caso, se cumple

$$M = \frac{3EI_V}{L} \theta$$

Si  $\theta = 1$ , de acuerdo con la definición dada, se tiene:

$$M = k_{11} = \frac{3EI_V}{L}$$

Como  $\theta$  es el único grado de libertad, de las vigas, su matriz de rigideces es:

$$\underline{k}_V = \{ 3E I_V / L \} \quad (1.9)$$

Para las columnas la matriz de rigideces se escribe:

$$\underline{K}_c = \begin{bmatrix}
 & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\
 \text{I} & 12 \frac{EI_c}{h^3} & -12 \frac{EI_c}{h^3} & -6 \frac{EI_c}{h^2} & -6 \frac{EI_c}{h^2} \\
 \text{II} & -12 \frac{EI_c}{h^3} & 12 \frac{EI_c}{h^3} & 6 \frac{EI_c}{h^2} & 6 \frac{EI_c}{h^2} \\
 \text{III} & -6 \frac{EI_c}{h^2} & 6 \frac{EI_c}{h^2} & 4 \frac{EI_c}{h} & 2 \frac{EI_c}{h} \\
 \text{IV} & -6 \frac{EI_c}{h^2} & 6 \frac{EI_c}{h^2} & 2 \frac{EI_c}{h} & 4 \frac{EI_c}{h}
 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Los números romanos corresponden a la numeración asignada a los grados de libertad en la fig 1.9a. En la fig 1.9c se ilustra como obtener las columnas I y III de la matriz dada por 1.10. Las expresiones 1.9 y 1.10 sirven para calcular las matrices de rigideces de las vigas y las columnas del ejemplo aquí presentado, empleando los valores correspondientes de  $I_y$  ( $I_z$ ), de  $L$ , de  $I_c$  ( $I_1$  o  $I_2$ ) y de  $h$ .

La matriz de rigideces de la estructura original es de  $6 \times 6$  y la de la estructura reducida es de  $4 \times 4$ . <sup>Ambas se</sup> obtienen sumando los términos de las matrices de rigideces de los elementos en los lugares que les corresponden, de acuerdo con la numeración de los grados de libertad. Esta forma de proceder se denomina método directo de rigideces y se presenta detalladamente en la ref 10. En este ejemplo se llega a:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{H^3} & -\frac{12EI_1}{H^3} & -\frac{6EI_1}{H^2} & -\frac{5EI_1}{H^2} \\ & \left(\frac{12EI_1}{H^3} + \frac{12EI_2}{H^3}\right) & \frac{6EI_1}{H^2} & \frac{6EI_1}{H^2} - \frac{6EI_2}{H^2} \\ & & \left(\frac{4EI_1}{H} + \frac{3EI_2}{L}\right) & \frac{2EI_1}{H} \\ & & & \left(\frac{4EI_1}{H} + \frac{4EI_2}{H} + \frac{3EI_2}{L}\right) \end{bmatrix}$$

simétrica

Como  $I_1 = I$ ,  $I_2 = 2I$ , y suponiendo, por sencillez, que  $L = 1.5H$  queda:

$$\underline{K} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix} \frac{12}{H^2} & -\frac{12}{H^2} & -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ & \left(\frac{12}{H^2} + \frac{12 \times 2}{H^2}\right) & \frac{6}{H} & \frac{6}{H} - \frac{6 \times 2}{H} \\ & & \left(4 + \frac{3 \times 2}{1.5}\right) & 2 \\ & & & \left(4 + 4 \times 2 + \frac{3 \times 2}{1.5}\right) \end{bmatrix}$$

simétrica

o también

$$\underline{K} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix} \frac{12}{H^2} & -\frac{12}{H^2} & -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ -\frac{12}{H^2} & \frac{36}{H^2} & \frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ -\frac{6}{H} & \frac{6}{H} & 8 & 2 \\ -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

(1.11)

Las cargas son momentos y fuerzas aplicados en los nudos y se numeran en concordancia con la numeración de los grados de libertad. Se define así el vector de cargas  $\underline{F}$ , que para el ejemplo tratado resulta:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0.5P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Los desplazamientos, arreglados en el mismo orden, constituyen el vector de desplazamientos  $\underline{r}$ :

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Para conocer  $\underline{r}$  es necesario resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\underline{K} \underline{r} = \underline{F}$$

que en este caso, en forma desarrollada, se escribe:

$$\frac{EI}{H} \begin{bmatrix} \frac{12}{H^2} & -\frac{12}{H^2} & -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ -\frac{12}{H^2} & \frac{36}{H^2} & \frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ -\frac{6}{H} & \frac{6}{H} & 8 & 2 \\ -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0.5P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Este sistema se puede resolver por diversos métodos, aunque ahora conviene hacerlo como sigue:

Definanse las siguientes matrices y vectores:

$$\underline{K}_{\delta\delta} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix} \frac{12}{H^2} & -\frac{12}{H^2} \\ -\frac{12}{H^2} & \frac{36}{H^2} \end{bmatrix}; \quad \underline{K}_{\delta\theta} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix} -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ \frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \end{bmatrix};$$

$$\underline{K}_{\theta\theta} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}; \quad \underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}; \quad (1.14)$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P \\ 0.5P \end{bmatrix}; \quad \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así la expresión 1.13 se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{\delta\delta} & \underline{K}_{\delta\theta} \\ \underline{K}_{\delta\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto del primer miembro e igualando al segundo:

$$\underline{K}_{\delta\delta} \underline{\delta} + \underline{K}_{\delta\theta} \underline{\theta} = \underline{P} \quad (1.15)$$

$$\underline{K}_{\delta\theta}^T \underline{\delta} + \underline{K}_{\theta\theta} \underline{\theta} = \underline{0} \quad (1.16)$$

De 1.16 se obtiene:

$$\underline{\theta} = -\underline{K}_{\theta\theta}^{-1} \underline{K}_{\delta\theta}^T \underline{\delta} \quad (1.17)$$

y reemplazando en 1.15 queda:

$$(\underline{K}_{\delta\delta} - \underline{K}_{\delta\theta} \underline{K}_{\theta\theta}^{-1} \underline{K}_{\theta\delta}^T) \underline{\delta} = \underline{P} \quad (1.18)$$

Este procedimiento se conoce como *condensación estática*. Nótese que la matriz de rigideces de 4 x 4 se redujo a la de 2 x 2 siguiente:

$$\underline{K}_{\delta\delta}^* = \underline{K}_{\delta\delta} - \underline{K}_{\delta\theta} \underline{K}_{\theta\theta}^{-1} \underline{K}_{\theta\delta}^T \quad (1.19)$$

$\underline{K}_{\delta\delta}^*$  se denomina *matriz de rigideces laterales* porque está referida solamente a los desplazamientos laterales; el término  $\underline{K}_{\delta\delta}$  es la parte que en la matriz original corresponde a dichos desplazamientos y el resto incluye las modificaciones debidas a que los demás grados de libertad asumen valores diferentes de cero. La expresión 1.18 se convierte en:

$$\underline{K}_{\delta\delta}^* \underline{\delta} = \underline{P} \quad (1.20)$$

(matriz de rigideces laterales) x (desplazamientos laterales) = (cargas laterales)

A continuación se calcula  $\underline{K}_{\delta\delta}^*$  ejecutando las operaciones matriciales de la expresión 1.19,

$$\underline{K}_{\theta\theta}^{-1} = \frac{H}{62EI} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \underline{K}_{\delta\theta}^{-1} \underline{K}_{\theta\delta}^T = \frac{3}{31H} \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{\delta\theta} \underline{K}_{\theta\theta}^{-1} \underline{K}_{\theta\delta}^T = \frac{18EI}{31H^3} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{\delta\delta}^* = \frac{12EI}{H^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \frac{18EI}{31H^3} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{\delta\delta}^* = \frac{12EI}{31H^3} \begin{bmatrix} 16 & -25 \\ -25 & 72 \end{bmatrix}$$

De la expresión 1.20 se deduce que:  $\underline{\delta} = \underline{K}_{\delta\delta}^{-1} \underline{P}$ , es decir:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \frac{31H^3}{6324EI} \begin{bmatrix} 72 & 25 \\ 25 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0.5P \end{bmatrix} = \frac{PH^3}{204EI} \begin{bmatrix} 84.5 \\ 33.0 \end{bmatrix}$$

$$\delta_1 = \frac{84.5PH^3}{204EI} = 0.41422 \frac{PH^3}{EI} \quad (1.21)$$

$$\delta_2 = \frac{33PH^3}{204EI} = 0.16176 \frac{PH^3}{EI}$$

Conocido  $\underline{\delta}$ , se puede calcular  $\underline{s}$  con la expresión 1.17. Nótese que ya se ha efectuado el producto  $\underline{K}_{\theta\theta}^{-1} \underline{K}_{\theta\delta}^T$  al valor  $\underline{K}_{\delta\delta}^*$ . Así se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \frac{PH^2}{2108EI} \begin{bmatrix} 294.5 \\ 418.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.13971 \frac{PH^2}{EI} \\ 0.19853 \frac{PH^2}{EI} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Los elementos mecánicos de cada una de las vigas y columnas se calculan ahora como el producto de la matriz de rigideces de la pieza correspondiente por los desplazamientos de sus extremos, todos ya conocidos.

Para la viga del primer nivel:

$$\underline{K}_v = \frac{3EI_v}{L} = \frac{3E \times 2I}{1.5H} = \frac{4EI}{H}$$

El desplazamiento que corresponde es el giro  $\theta_4$ , entonces:

$$\underline{M} = \underline{K}_v \underline{\theta}_4 = \left( \frac{4EI}{H} \right) \left( 0.19853 \frac{PH^2}{EI} \right) = 0.794PH$$

Para la columna del primer piso:

$$\underline{K}_C = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{24EI}{H^3} & -\frac{24EI}{H^3} & -\frac{12EI}{H^2} & -\frac{12EI}{H^2} \\ -\frac{24EI}{H^3} & \frac{24EI}{H^3} & \frac{12EI}{H^2} & \frac{12EI}{H^2} \\ -\frac{12EI}{H^2} & \frac{12EI}{H^2} & \frac{8EI}{H} & \frac{4EI}{H} \\ -\frac{12EI}{H^2} & \frac{12EI}{H^2} & \frac{4EI}{H} & \frac{8EI}{H} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.23)$$

Los números romanos se refieren a los grados de libertad de la columna definidos en la fig 1.9a. Los desplazamientos y rotaciones respectivos (fig 1.3) se obtienen de las ec 1.21 y 1.22, como

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{matrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ 0 \\ \theta_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{PH^2}{EI} \begin{bmatrix} 0.16176H \\ 0 \\ 0.19853 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto  $\underline{K}_C$  por los desplazamientos se obtienen los momentos M y fuerzas cortantes V (a un giro le corresponde un momento y a un desplazamiento, una fuerza cortante). Se llega a:

$$\begin{bmatrix} V_I \\ V_{II} \\ M_{III} \\ M_{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \times 0.16176 P & - & 12 \times 0.19853 P \\ -24 \times 0.16176 P & + & 12 \times 0.19853 P \\ -12 \times 0.16176 PH & + & 8 \times 0.19853 PH \\ -12 \times 0.16176 PH & + & 4 \times 0.19853 PH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.50P \\ -1.50P \\ -0.35PH \\ -1.15PH \end{bmatrix}$$

Se puede verificar fácilmente que estos elementos mecánicos están en equilibrio.

$V_{II}$  y  $M_{IV}$  son las reacciones en la base, y la fuerza cortante vale  $1.5P$ , lo cual puede deducirse por inspección de la estructura.

La fig 1.10 presenta la solución del marco de la fig 1.1 mediante el método de rigideces. No se consideraron los efectos de alargamiento y acortamiento de los miembros, para que los resultados fuesen comparables a los de los métodos aproximados.

### 1.3 Comentarios

#### 1.3.1 Precisión de los métodos aproximados

En el ejemplo aquí presentado, comparando los resultados de los métodos aproximados con la solución matricial que puede considerarse como exacta (dada en la fig 1.10), se observa que en general el método de Bowman es el que conduce a mayores errores y que el que da resultados más precisos es el método de Grinter-Tsao. El método del factor tiene un grado de precisión intermedio, pero en este caso, muy cercana a la del método de Grinter-Tsao. En otro ejemplo analizado en la ref 2, los errores del método del factor son mayores, pero se mantiene la tendencia de que el método citado es más preciso que el de Bowman y menos que el de Grinter-Tsao.

Un método simplificado bastante difundido es el de portal, basado en hipótesis muy sencillas sobre la posición de los puntos de inflexión en vigas y columnas, y sobre la distribución de cortantes en estas últimas. No se ha tratado aquí este método porque el de Bowman, al precio de poco esfuerzo adicional, da resultados sensiblemente mejores. Otro método simplificado es el del voladizo que también produce resultados menos precisos, algunos bastante errados, que los métodos aquí presentados y solo sirve para fines de análisis preliminar de marcos esbeltos. Los interesados en estos métodos pueden recurrir a la ref 2.

Las fórmulas de Wilbur y los métodos que suponen posiciones de los puntos de inflexión son aplicables solamente a marcos en los que las dimensiones rela-

## 20)

tivas de las piezas sean tales que las cargas laterales produzcan dichos puntos en las columnas. Blume (ref 11), luego de analizar varios marcos, ha propuesto que, para determinar si las vigas tienen rigidez suficiente para lograr lo anterior, se calcule el parámetro  $\rho$ , que él llama índice de rotación de nudo, dado por

$$\rho = \frac{\sum (I/\ell)_v}{\sum (I/\ell)_c}$$

$I$  es el momento de inercia de una pieza y  $\ell$  su longitud; los subíndices  $v$  y  $c$  indican viga y columna, respectivamente; las sumas se refieren a todas las columnas de un entrepiso, y para las vigas deberán considerarse primero las del piso superior y separadamente las del piso inferior. Se tienen así dos valores de  $\rho$  para el entrepiso en cuestión y, según Blume, si  $\rho$  es mayor que 0.1 las columnas tendrán punto de inflexión.

Si un marco tiene una variación paulatina de las rigideces de vigas y columnas basta calcular  $\rho$  para el entrepiso más cercano a la mitad de la altura del marco. Aunque este índice no ha sido deducido para marcos irregulares, se puede tener una idea sobre si se forman o no puntos de inflexión en las columnas valuando  $\rho$  en diferentes entrepisos. Cabe advertir que en edificios a base de losas planas con frecuencia  $\rho$  es menor que 0.1, sobre todo en los entrepisos inferiores.

Para el segundo entrepiso del marco de la fig 1.1, como las vigas de los pisos primero y segundo son iguales, usando unas u otras se tiene:

$$\rho = \frac{(5+5+5+5)/4}{(3.375+4.5+5.625+3.375+2.25)} = 1.18$$

Para el tercer entrepiso, considerando las vigas del segundo piso, resulta

$$\rho = \frac{(5+5+5+5)/4}{(2+3+4+2)/4} = 1.82$$

y si se emplean las vigas del tercer piso, se llega a

## 21

$$\rho = \frac{(5+5+5)/4}{(2+3+4+2)/4} = 1.36$$

En todos los casos  $\rho > 0.1$ , por lo que se formarán puntos de inflexión en las columnas de estos entrepisos.

Como se ha mencionado, el método combinado de Grinter-Isao-Cross demostró ser el más preciso para el marco analizado en este manual, produciendo resultados tan parecidos a los del método de rigideces, que pueden considerarse como exactos. Esto ha sido también verificado en otros marcos, con distintas rigideces y claros de vigas.

Entre los ingenieros estructurales ha tenido gran difusión métodos manuales más precisos aunque también más laboriosos, como el de Cross, el de Kani y otros, cuyos resultados son exactos cuando no se consideran los efectos de cargas axiales en las columnas y <sup>que</sup> han ido perdiendo vigencia por el uso cada vez mayor de computadoras y minicomputadoras, con las que se emplean los métodos matriciales. Para quienes se interesan en estos métodos se sugiere revisar la presentación y los comentarios hechos en la ref 2.

Cabe mencionar que <sup>en</sup> ninguno de los métodos aquí presentados, ni en el de las rigideces, se han incluido los efectos de segundo orden (efectos P- $\Delta$ ) sobre los cuales se hace un breve tratamiento en la sección 4.6.

### 1.3.2 Propiedades mecánicas y geométricas

Para efectuar el análisis lineal de un marco se requiere conocer el módulo de elasticidad del material que constituye los miembros y el área y el momento de inercia de las secciones transversales de los mismos.

Para marcos de concreto de peso normal, el módulo de elasticidad puede calcularse con la expresión  $10\,000 \sqrt{f'_c}$  ( $f'_c$  y E en kg/cm<sup>2</sup>) que se prescribe en la sección 1.4.1c de la ref 32.

Para valuar las propiedades geométricas de columnas de concreto reforzado

se puede considerar la sección bruta, pensando en que las mismas, por estar sujetas generalmente a compresiones altas, no tendrán mucho agrietamiento.

En vigas de concreto reforzado que no estén coladas monolíticamente con las losas es razonable usar el momento de inercia de la sección transformada, el cual, para secciones rectangulares con porcentajes usuales de refuerzo, vale alrededor del 60 por ciento del momento de inercia de la sección bruta. Si las vigas están coladas monolíticamente con la losa, entonces, en las zonas de momentos positivos, existen patines que dan lugar a una sección T cuyo momento de inercia vale de 1.5 a 2 veces el de la sección rectangular. Este efecto tiende a compensarse con el de la reducción debida al agrietamiento y parece adecuado emplear el momento de inercia de la sección rectangular no agrietada (sin patines).

Cuando el marco por analizar es una idealización de un sistema a base de losas planas (aligeradas o macizas) y columnas, se recomienda, de acuerdo con resultados experimentales, considerar que el ancho efectivo de la losa es  $c + 3h$  donde  $c$  es el ancho de la columna (perpendicular al plano del marco) y  $h$  el peralte total de la losa plana. Si la losa es aligerada, entonces conviene considerar un momento de inercia promedio entre el de los apoyos (donde hay una zona maciza) y el de la zona central (donde se deben descontar los huecos de los casetones). Nótese que esta recomendación difiere de lo estipulado en la sección 4.3.6b de las Normas Técnicas Complementarias relativas a concreto reforzado del Reglamento del Distrito Federal (ref. 32).

Para edificios de acero el módulo de elasticidad tiene un valor muy conocido, 2 000 000 kg/cm<sup>2</sup>, independiente del tipo de acero. Las propiedades de las secciones transversales vienen tabuladas en varios libros y manuales, o, en caso de no ser así, se pueden calcular con base en las dimensiones nominales de diseño.

Con frecuencia se busca que losas de piso de concreto reforzado trabajen en conjunto con las vigas de acero en que se apoyan, dando lugar a las llamadas secciones compuestas. Esto requiere que entre losa y vigas exista la capacidad para resistir los esfuerzos cortantes que

implica este trabajo solidario, para lo cual es generalmente necesaria la utilización de conectores especialmente diseñados. En este caso, en las zonas de momentos positivos debe considerarse el momento de inercia de la sección compuesta, (dividiendo el área de concreto entre la relación de módulos de elasticidad), y en donde los momentos son negativos, solo el momento de inercia de la sección de acero. Parece razonable emplear un promedio de dichos momentos de inercia, constante para toda la viga.

## 2. - SISTEMAS CON MUROS O CONTRAVIENTOS SUJETOS A CARGAS LATERALES

En muchos casos prácticos, para dar a los edificios rigidez y resistencia suficiente ante cargas laterales, se recurre al uso de muros de concreto, normalmente combinados con marcos. Otras formas de rigidizar marcos son rellenarlos con muros de mampostería o contraventearlos con elementos de concreto reforzado o de acero. Son comunes también los edificios de altura moderada en que los elementos resistentes son muros de mampostería con distintos tipos de refuerzo. En esta sección se describen métodos que sirven para analizar estos tipos de sistemas estructurales ante cargas laterales.

### 2.1 *Sistemas con muros*

#### 2.1.1 Deformaciones ante cargas laterales

Aceptando la hipótesis de comportamiento elástico lineal, las deformaciones de un muro ante cierto sistema de cargas en su plano deben calcularse con los métodos y teorías de la elasticidad. Además de las propiedades elásticas del material (como módulos de elasticidad, de cortante y de Poisson),

hay que tomar en cuenta la magnitud y distribución de las cargas la geometría del muro y la forma en que está apoyado. Existen soluciones analíticas para ciertos casos sencillos (véase por ejemplo la ref 80), y los casos de geometría o condiciones de frontera complicadas se pueden tratar con el método del elemento finito, que se describe brevemente más adelante, y que permite obtener soluciones numéricas con la precisión que se desee (ref 16 a 18).

Sin embargo, para muros de sección rectangular empotrados en su base y sujetos a una carga lateral en su extremo superior,  $P$ , como se muestra en la fig 2.1, el desplazamiento lateral del extremo cargado  $\delta$ , se puede calcular con bastante precisión con la expresión

$$\delta = \frac{Ph^3}{3EI} + \frac{Ph}{GA} \quad (2.1)$$

donde  $h$  es la altura del muro,  $I$  y  $A$  el momento de inercia y el área de su sección transversal,  $E$  el módulo de elasticidad y  $G$  el de cortante.

En la fig 2.1 se incluye una comparación entre los resultados obtenidos con la ec 2.1 y los que proporciona el método de elementos finitos (que pueden considerarse como exactos) y se observa que los errores no exceden del 4 por ciento. Aunque la figura citada cubre valores de  $b$  (longitud del muro) entre  $h$  (altura) comprendidos entre 0.5 y 2.0, la ec 2.1 da similar precisión fuera de ese intervalo porque para valores mayores de  $b/h$  son importantes solo las deformaciones por cortante consideradas con el término  $Ph/GA$ , y para valores menores son más apreciables las deformaciones debidas a flexión tomadas en cuenta con  $Ph^3/3EI$ .

De lo expuesto se concluye que para fines prácticos es suficiente calcular las deformaciones laterales de muros aislados con procedimientos de resistencia de materiales que consideren los efectos tanto de flexión como de cortante. Así se ha procedido para calcular las deformaciones en el caso mostrado en la fig 2.2. Las expresiones empleadas y los resultados se pre

sentan en la tabla 2.1

### 2.1.2 Muros bajos

En muros de sección rectangular cuya altura total no excede de un tercio de su longitud y cuya base se halla aproximadamente empotrada, las deformaciones por flexión pueden ascender a 10 ó 15 por ciento del total, o aún menos, dependiendo de las condiciones en los otros tres bordes. Es aceptable despreciar esta contribución y calcular la rigidez de entrepiso tomando en cuenta solamente las deformaciones debidas a cortante. Es entonces aplicable la fórmula

$$R = eGL/h$$

donde

R = rigidez

G = módulo de cortante del muro

e = espesor del muro

L = longitud del muro

h = altura del entrepiso donde se calcula la rigidez

En general para muros con sección diferentes de la rectangular la rigidez de entrepiso está dada por

$$R = G\Omega/h$$

donde

$\Omega$  = área efectiva de cortante del muro

### 2.1.3 Muros esbeltos

En estos muros tienen importancia las deformaciones por esfuerzo normal de

bido a flexión como las provenientes de fuerza cortante. Por ello, las rigideces de entrepiso dependen de la distribución de fuerzas horizontales en la altura. Normalmente estos muros se encuentran acoplados con marcos y la interacción altera también sus rigideces de entrepiso. Así, por una parte, las cortantes que toman los muros dependen de sus rigideces de entrepiso, y por otra, estas dependen de las primeras; por consiguiente, para conocer estas cantidades es necesario proceder por iteraciones (ref 14, 15).

Cuando las fuerzas laterales son tomadas solo por muros de distintas propiedades geométricas, es decir, si no son importante las rigideces de las vigas o de las losas que conectan a los muros, se cometen errores tolerables si dichas fuerzas se distribuyen proporcionalmente a la rigidez de cada muro, calculada para un desplazamiento unitario de su extremo superior (es decir aplicando una fuerza en dicho extremo y dividiéndola entre el desplazamiento que allí produce). Cabe advertir sin embargo que este criterio no es aplicable si las variaciones de las propiedades geométricas de las secciones transversales de los distintos muros con la altura no son aproximadamente proporcionales. También son notables los errores en los pisos inferiores, donde la influencia de los esfuerzos cortantes es mayor que la involucrada en esta forma de proceder. A continuación se presentan algunos métodos para analizar muros acoplados con marcos, que es el caso que con más frecuencia se presenta en la práctica.

#### 2.1.4 Método de Khan y Sbarounis

La versión más simple del método propuesto por estos autores (ref 15) consiste en sustituir una estructura como la de la fig 2.3 por otra equivalente reducida que se esquematiza en la fig 2.4, en la cual el sistema W representa al muro o muros de rigidez. El momento de inercia de este sistema, en cualquier piso, es la suma de los momentos de inercia de todos los muros de rigidez representados. El sistema F (marcos) incluye a las columnas, vigas y losas que contribuyan a la rigidez lateral. Las rigideces (inercia/longitud) de las columnas ( $S_c$ ) y vigas ( $S_b$ ) son la suma de las ri

gideces de todos los elementos correspondientes en la estructura.

Los sistemas W y F se consideran ligados por barras horizontales de rigidez axial infinita y de rigidez a flexión nula, de forma tal que los desplazamientos laterales de ambos sistemas son iguales, pero no los giros.

Khan y Sbarounis proponen que las cargas laterales externas se apliquen inicialmente en su totalidad al sistema W como si estuviese aislado, y se calculen los desplazamientos laterales así provocados; se pueden incluir las deformaciones debidas a cortante. Luego se suponen unos desplazamientos laterales para el sistema F. A menos que se cuente con una mejor suposición, éstos serán iguales a los calculados para el sistema W. Por medio de distribución de momentos se pueden conocer los elementos mecánicos generados por los desplazamientos supuestos y las reacciones sobre el sistema W. Se calculan enseguida las modificaciones que producen estas reacciones, aplicándolas al sistema W, nuevamente aislado. Se comparan los desplazamientos de ambos sistemas y se repite el procedimiento hasta que dichos desplazamientos sean iguales dentro de cierta tolerancia.

Las fuerzas finales en los distintos muros representados en el sistema W son proporcionales a los momentos de inercia y, conocidos los desplazamientos en los marcos representados en el sistema F, se pueden determinar sus elementos mecánicos con aplicar una sola vez <sup>la</sup> distribución de momentos.

Cuando los marcos toman una parte significativa de las cargas totales, el método expuesto puede requerir de varios ciclos y por tanto ser muy laborioso; por dicho motivo los autores presentan gráficas dando valores de los desplazamientos del conjunto W-F en términos del desplazamiento del muro en su extremo superior. Estas gráficas se reproducen en las fig 2.5 a 2.11. Para entrar a ellas, la cantidad  $S_s/S_c$  debe calcularse mediante la fórmula

$$\frac{S_s}{S_c} = \frac{\sum E_s I_s}{\sum E_c I_c} \left( \frac{10}{N} \right)^2 \quad (2.2)$$

donde  $E_s$  e  $I_s$  son, respectivamente, el módulo de elasticidad y el momento de inercia del sistema W,  $E_c$  e  $I_c$  son los correspondientes valores de las columnas del sistema F, y N es el número de pisos de la estructura.

Según la ref 15, se puede hacer una corrección de convergencia, consistente en emplear como valor inicial para el desplazamiento  $\Delta_{ii(n+1)}$  en el piso i, en el ciclo n + 1, el dado por expresión

$$\Delta_{ii(n+1)} = \Delta_{ii(n)} + \frac{\Delta_{ei(n)} - \Delta_{ii(n)}}{1 + \left( \frac{\Delta_i - \Delta_{ei(n)}}{\Delta_{ii(n)}} \right)} \quad (2.3)$$

$\Delta_{ii(n)}$  es el desplazamiento inicial del piso i en el ciclo n,  $\Delta_{ei(n)}$  el correspondiente desplazamiento al final de dicho ciclo, y  $\Delta_i$  es el desplazamiento del sistema W, también en el nivel i, cuando se lo somete a las cargas totales como si estuviese aislado.

Como una variante para simplificar el método, al calcular las fuerzas cortantes en el sistema F se pueden emplear las fórmulas de Wilbur, en vez de efectuar una distribución de momentos. Esta última se puede hacer cuando ya hayan convergido los desplazamientos y en el marco completo, no en el equivalente, para hacer un ajuste final.

Como ejemplo de aplicación, se ha analizado la estructura de la fig 2.3 con los datos adicionales dados en la fig 2.4. En todos los cálculos se han empleado como unidades metros y toneladas. Se tiene

$$I_b = 0.25 \times 0.50^3 / 12 = 0.002604$$

$$I_c = 0.40^4 / 12 = 0.002133$$

$$I_m = 0.15 \times 4^3 / 12 = 0.8$$

$$S_b = \frac{12 I_b}{6} + \frac{I_b}{4} = 0.005859$$

$$S_c = \frac{14 I_c}{3} = 0.009954$$

$$I_s = 2 I_m = 1.60$$

$$S_c / S_b = 1.70$$

$$\frac{S_s}{S_c} = \frac{1.60}{14 \times 0.002133} \left( \frac{10}{5} \right)^2 = 214 \text{ (ver expresión 2.2)}$$

Las operaciones efectuadas se resumen en la tabla 2.2. En primer lugar se han calculado, con el método de la viga conjugada, los desplazamientos  $\Delta_j$  del muro sujeto a las cargas totales; en particular el desplazamiento del piso superior  $\Delta_s$  resulta 0.0449 m. Luego se han obtenido las rigideces de entrepiso mediante las fórmulas de Wilbur, las mismas se dan en la columna  $R_j$  (se han incluido en su cálculo todas las vigas y columnas de los tres marcos).

En el primer ciclo se han usado las fig 2.5 y 2.6 para estimar los valores de  $\Delta_{ji} / \Delta_s$ . Como  $\Delta_s$  es conocido, se calculan enseguida los  $\Delta_{ji}$ , con los cuales se determinan los desplazamientos de entrepiso  $\delta_j$ , y, multiplicando éstos por las rigideces de entrepiso correspondientes, las fuerzas cortantes en el sistema F,  $V_{fj}$ . Las fuerzas cortantes que obran sobre el muro,  $V_{mi}$ , son iguales a las cortantes totales,  $V_{tj}$ , menos las respectivas  $V_{fj}$ . Conocidas las  $V_{mi}$  se pueden calcular los desplazamientos  $\Delta_{ej}$  que las mismas producen en el muro. Se comparan los  $\Delta_{ej}$  con los  $\Delta_{ji}$  para ver si son suficientemente parecidos. En este ejemplo el primer ciclo no da resultados satisfactorios, por lo que hay que seguir iterando.

Para iniciar el segundo ciclo se ha usado el criterio de convergencia dado por la expresión 2.3, como se ilustra en detalle en la tabla 2.2. Los resultados son nuevos valores de  $\Delta_{ji}$ , con los que se vuelven a ejecutar los pasos descritos en el ciclo 1. De igual manera se ha procedido en el ci-

## 31

clo 3, es decir aplicando otra vez el criterio de convergencia mencionado. Se encontró convergencia en el tercer ciclo y se aceptó que no es necesario efectuar más iteraciones puesto que los desplazamientos iniciales y finales difieren, a lo más, en 3.4 por ciento. Como valores finales  $\Delta_{fi}$ , se considerará a los que resulten del criterio de convergencia con los datos del último ciclo; se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta_{f_5} &= 0.0249 \\ \Delta_f &= 0.0185 \\ \Delta_{f_3} &= 0.0121 \\ \Delta_{f_2} &= 0.0062 \\ \Delta_{f_1} &= 0.0018\end{aligned}$$

Estos resultados dan lugar a las siguientes fuerzas cortantes en los sistemas W ( $V_{mi}$ ) y F ( $V_{fi}$ ):

$$\begin{array}{ll} V_{f_5} = 7376 (0.0249 - 0.0185) = 47.2; & V_{m_5} = 50 - 47.2 = 2.80 \\ V_{f_4} = 7376 (0.0185 - 0.0121) = 47.2; & V_{m_4} = 90 - 47.2 = 42.8 \\ V_{f_3} = 7376 (0.0121 - 0.0062) = 43.5; & V_{m_3} = 120 - 43.5 = 76.5 \\ V_{f_2} = 7676 (0.0062 - 0.0018) = 33.8; & V_{m_2} = 140 - 33.8 = 106.2 \\ V_{f_1} = 11414 (0.0018) = 20.5; & V_{m_1} = 150 - 20.5 = 129.5 \end{array}$$

En este ejemplo no se han incluido las deformaciones por cortante en el cálculo de desplazamientos, pero, a más de que en este caso no fueron significativas, esto no afecta la ilustración del método porque, de ser necesario, bastaría sumar a los desplazamientos debidos a flexión aquí calculados, los provenientes de cortante, en cada iteración. En el cálculo de fuerzas cortantes y en la aplicación del criterio de convergencia no se produce cambio alguno.

En la ref 15 se presentan además gráficas que permiten estimar las fuerzas cortantes en los sistemas W y F, en función de los parámetros  $S_c/S_b$  y  $S_s/S_c$ .

### 2.1.5 Método de McLeod

En la ref 13, McLeod presenta un procedimiento que permite estimar la fuerza cortante y el desplazamiento lateral máximos de sistemas formados por marcos y muros, así como el momento de volteo en la base de los muros, a partir de suponer que todos ellos están conectados solo en sus extremos superiores.

Para cargas laterales con distribución triangular, la fórmula que proporciona la fuerza que une a los marcos con los muros,  $P$ , es:

$$\frac{P}{W} = \frac{11}{20} \frac{\sum K_f}{\sum K_f + \sum K_m} \quad (2.4)$$

donde  $K_f$  es la rigidez lateral de cada marco entendida como la fuerza concentrada en el extremo superior que produce un desplazamiento lateral unitario en su línea de acción,  $K_m$  es la rigidez de cada muro definida en el mismo sentido y  $W$  es la carga lateral total aplicada.

Antes de calcular estas cantidades y sumarlas, se pueden representar los muros y los marcos con un solo muro y un marco de una sola cruzía, como se hace en el método de Khan y Sbarounis. Para calcular la rigidez del marco  $K_f$ , se pueden emplear las fórmulas de Wilbur, ya que conocidas las rigideces de los entrepisos,  $R_i$ , se tiene

$$\frac{1}{K_f} = \sum \frac{1}{R_i}$$

El desplazamiento lateral máximo se estima como  $P/\sum K_f$ , y la fuerza cortante máxima en el marco está dada por  $1.3P$ . El momento de volteo en la base del muro es aproximadamente igual al momento total menos  $PH$ , donde  $H$  es la altura total del muro.

Como ejemplo, considérese nuevamente el edificio cuyos datos se dan en las

fig 2.3 y 2.4. Las rigideces de entropiso,  $R_i$ , están dadas en la tabla 2.2; por tanto,

$$\frac{1}{K_f} = \frac{1}{11414} + \frac{1}{7676} + \frac{3}{7376}$$

Haciendo operaciones resulta  $K_f = 1601$  ton/m; como están incluidas todas las vigas y columnas en el cálculo de las  $R_i$ , entonces  $K_f = \Sigma K_f$ .

En este caso  $\Sigma K_m = \frac{3 \Sigma EI_w}{H^3}$ , donde  $E$  es el módulo de elasticidad de los muros  $I_w$  su momento de inercia y  $H$  su altura total. Así

$$\Sigma K_m = \frac{3 \times 1.5 \times 10^6 \times 2 \times 0.8}{15^3} = 2133 \text{ ton/m}$$

Ahora se puede emplear la fórmula 2.4 como sigue:

$$\frac{P}{W} = \frac{11}{20} \times \frac{1601}{1601 + 2133} = 0.236$$

Como  $W = 150$  ton,  $P = 0.236 \times 150 = 35.4$  ton. La estimación del desplazamiento máximo es  $P/\Sigma K_f = 35.4/1601 = 0.0221$  m. El valor de la fuerza cortante total máxima en los marcos está dado por  $1.3 P = 13 \times 35.4 = 46.02$  ton. Finalmente, el momento de volteo en los muros se estima como  $50 \times 15 + 40 \times 12 + 30 \times 9 + 20 \times 6 + 10 \times 3 \times 35.25 \times 15 = 1119$ ; a cada muro corresponde  $1119/2 = 560.5$  ton-m.

#### 2.1.6 Método del elemento finito

En la actualidad, el método del elemento finito constituye una poderosa herramienta para el análisis de estructuras complejas como ciertos muros de composición y/o geometría complicada. Para fines prácticos, las soluciones obtenidas mediante la aplicación adecuada del método a problemas elásticos lineales pueden considerarse como exactas.

Básicamente, la aplicación del método en cuestión consiste en dividir la estructura en subregiones denominadas elementos finitos, dentro de las cuales se prescribe la forma en que varían los desplazamientos en función de los valores correspondientes a ciertos puntos denominados nudos (fig 2.12) Con base en las leyes constitutivas del material (esto es, en las relaciones que existen entre esfuerzos y deformaciones, por ejemplo, la ley de Hooke), en la función adoptada para prescribir los desplazamientos, y en las relaciones entre deformaciones unitarias y desplazamientos, se determina la matriz de rigideces de cada elemento, usando, por ejemplo, el principio de trabajos virtuales. Estas matrices están referidas a los grados de libertad de los nudos del elemento.

La matriz  $\underline{K}$  de rigideces de la estructura completa se obtiene aplicando el método directo de rigideces, descrito al tratar el problema de marcos, es decir, sumando en donde les corresponda los términos de las matrices de rigideces de los elementos.

Los desplazamientos  $\underline{U}$  de los nudos, ante un sistema de cargas  $\underline{P}$  aplicadas en los mismos, se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$$

Conocidos los valores de  $\underline{U}$  se pueden calcular esfuerzos y deformaciones en cualquier punto de cada elemento, esto es, en cualquier punto de interés.

En las ref 16 a 18 se presenta con detalle el método, en forma orientada hacia el análisis de estructuras. El caso de los muros se puede modelar adecuadamente considerando que se trata de un problema de estado plano de esfuerzos, es decir, aceptando que son nulos los esfuerzos fuera del plano del muro. Aunque los elementos finitos que permiten tratar este tipo de problema pueden tener diversas formas, como triángulo o cuadriláteros, dado que las partes de un muro son usualmente rectángulos, es adecuado el uso de elementos rectangulares (véase la ref 16), como se muestra en la fig 2.12.

Existen programas para computadora que permite aplicar el método del elemento finito a diversos tipos de estructuras. Uno de los más difundidos es el que se describe en la ref 19, del cual se han desarrollado varias versiones mejoradas.

### 2.1.7 Método de la columna ancha

Este método se basa en que, como se ha expresado en la sec 2.1, las deformaciones laterales de un muro se pueden calcular con muy buena precisión con los procedimientos de resistencia de materiales, si se toman en cuenta las deformaciones debidas a flexión y a cortante; por ejemplo mediante la ec 2.1. Esta ecuación es aplicable a muros de sección diferente de la rectangular si se reemplaza  $A$  por el área efectiva de cortante  $\Omega$ . Se denomina columna ancha a un miembro así idealizado para distinguirlo de las columnas normales en que solo son importantes las deformaciones por flexión.

Para analizar sistemas de muros y muro-marco se considera cada muro como una columna ancha con sus propiedades concentradas en su eje centroidal y se supone que las zonas de las vigas que se encuentran dentro de los muros son infinitamente rígidas a flexión. Esto se ilustra en la fig 2.13, y tiene la ventaja de que los sistemas con muros se idealizan como estructuras esqueléticas, igual que los marcos.

Las deformaciones por cortante en las columnas y las zonas rígidas en las vigas modifican las respectivas matrices de rigideces. Con referencia a los grados de libertad y notación mostrados en la fig 2.14, dichas matrices se escriben:

Para las columnas anchas:

$$\left[ \begin{array}{cccccc}
 \frac{12 EI}{(1 + \alpha)h^3} & & & & & \\
 -\frac{12 EI}{(1 + \alpha)h^3} & \frac{12 EI}{(1 + \alpha)h^3} & & & & \\
 -\frac{6 EI}{(1 + \alpha)h^2} & \frac{6 EI}{(1 + \alpha)h^2} & \frac{(4 + \alpha) EI}{(1 + \alpha)h} & & & \\
 -\frac{6 EI}{(1 + \alpha)h^2} & \frac{6 EI}{(1 + \alpha)h^2} & \frac{(2 - \alpha) EI}{(1 - \alpha)h} & \frac{(4 + \alpha) EI}{(1 + \alpha)h} & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{h} & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{h} & \frac{EA}{h}
 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{simétrica} \\ \text{. . .} \end{array} \quad (2.6)$$

Para las vigas con zonas rígidas en sus extremos:

$$\frac{EI}{\lambda \epsilon} \left[ \begin{array}{cccc}
 4 + 12 \frac{Y}{\lambda} \left( 1 + \frac{Y}{\lambda} \right) & & & \\
 2 + 6 \left( \frac{Y + \beta}{\lambda} \right) + 12 \frac{Y\beta}{\lambda^2} & 4 + 12 \frac{\beta}{\lambda} \left( 1 + \frac{\beta}{\lambda} \right) & & \\
 -\frac{6}{\lambda \ell} \left( 1 + \frac{2Y}{\lambda} \right) & -\frac{6}{\lambda \ell} \left( 1 + \frac{2\beta}{\lambda} \right) & \frac{12}{\lambda^2 \ell^2} & \\
 \frac{6}{\lambda \ell} \left( 1 + \frac{2Y}{\lambda} \right) & \frac{6}{\lambda \ell} \left( 1 + \frac{2\beta}{\lambda} \right) & \frac{12}{\lambda^2 \ell^2} & \frac{12}{\lambda^2 \ell^2}
 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{simétrica} \\ \text{. . .} \end{array} \quad (2.7)$$

## 37

En casos extremos, si el área de cortante es grande o las longitudes de zonas rígidas son bastante pequeñas, las matrices anteriores coinciden con las de una viga y columna normales. Así, si dichas matrices se incluyen en un programa para resolver marcos, este servirá también para analizar sistemas muro-marco.

McLeod (ref 20) ha constatado la buena precisión del método comparando sus resultados con los de modelos elásticos a escala de muros con una hilera central de huecos. En efecto, el método es útil en casos de muros con huecos, sobre todo si se incluyen los efectos de extremos rígidos en las columnas y los de cortante en las vigas. Algunos ejemplos de idealización posibles se muestran en la fig 2.15. En ciertos casos es conveniente que las zonas rígidas en los extremos tengan forma de codo y no sean solamente rectas; para estas situaciones pueden consultarse la ref 21.

Existen programas para analizar edificios que incluyen explícitamente deformaciones por cortante y zonas rígidas (ref 22 y 23). Cuando se usan programas que no incluyan esta última opción, las zonas rígidas pueden representarse por tramos de vigas con momentos de inercia grandes, en comparación con las de las vigas y columnas del conjunto.

## 2.2 Marcos contraventeados y tableros de muros confinados por marcos

### 2.2.1 Marcos contraventeados

En el análisis de marcos contraventeados es fundamental tomar en cuenta no sólo los momentos flexionantes en trabes y columnas, sino también las fuerzas axiales que en ellas introducen las componentes horizontales y verticales de las fuerzas que obran en los contravientos.

En marcos contraventeados en todos los niveles de una misma cruzía, si las vigas y columnas no son muy robustas, una forma sencilla y razonablemente aproximada de determinar las cargas axiales en los distintos miembros, es analizar la cruzía contraventeada como una armadura, ignorando la rigidez

a flexión de las vigas y columnas.

Lo más conveniente para analizar marcos con cualquier disposición de contravientos es emplear el método de rigideces, incluyendo en la matriz de rigideces global el aporte de los contravientos. Estos usualmente se representan como elementos con solo rigidez axial, cuya matriz de rigideces, con referencia a los grados de libertad y propiedades que se indican en la fig 2.16, está dada por:

$$\underline{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Debe procederse con cuidado especial en la determinación del módulo de elasticidad, E, y del área de la sección transversal A, sobre lo cual se comenta en la sec 2.3.

### 2.2.2 Muros confinados por marcos

El caso de tableros de muros de mampostería confinados por marcos y sujetos a cargas laterales (fig 2.17) ha sido objeto de numerosas investigaciones experimentales y analíticas; en las ref 24 a 26 se incluyen revisiones de la literatura sobre el tema. Se ha reconocido (ref 27) que inicialmente tablero y marco trabajan monolíticamente con una sola unidad en la cual son importantes las deformaciones por flexión y por cortante. Bastan sin embargo cargas laterales relativamente pequeñas para que tablero y marco se separen en esquinas opuestas, de modo que el primero se apoya sobre el segundo en la forma que se indica en la fig 2.17. Se producen fuerzas axiales en vigas y columnas así como momentos y cortantes en las mismas. Los momentos son de poca importancia dado que las fuerzas de interacción se desarrollan en la proximidad de los nudos. Las fuerzas cortantes, por el contrario, son de consideración. En el tablero aparecen fuerzas de compresión diagonal que pueden producir fallas por compresión en las esquinas en contacto con el marco.

En la dirección de la otra diagonal aparecen esfuerzos de tensión en la manpostería que pueden ocasionar agrietamiento diagonal del muro.

Para el cálculo de la rigidez lateral y de los elementos mecánicos en marco y tablero una posible idealización es simular cada tablero como una diagonal equivalente en compresión, según se esquematiza en la fig 2.18. Como resultado de estudios analíticos con elementos finitos en los que se toma en cuenta el comportamiento descrito, en la ref 26 se propone que la diagonal equivalente tenga los mismos espesor,  $t$ , y módulo de elasticidad,  $E$ , que el tablero y que su ancho sea (ver fig 2.19).

$$w_0 = (0.35 + 0.022 \lambda) h^2 \quad (2.9)$$

donde

$h$  = altura del tablero entre ejes

$\lambda$  = parámetro adimensional basado en las rigideces de tablero y marco (fig 2.22)

Para determinar la matriz de rigideces de la diagonal se aplica la expresión 2.8, con  $A = w_0 t$  y  $L$  = longitud de la diagonal

Al deducir las diagonales equivalentes en la ref 26 se ha considerado que el marco no está articulado en sus esquinas (fig 2.18). La expresión 2.9 se ha deducido suponiendo  $G_m = 0.4 E_m$  y es aplicable para valores de  $\lambda$  comprendidos entre 0.9 y 11, y valores de la relación de aspecto  $c$  (ver fig 2.19) que estén entre 0.75 y 2.5. Estos intervalos cubren la mayoría de los casos prácticos.

Otro procedimiento para calcular rigidez lateral y elementos mecánicos de un sistema marco-tablero es considerar que el conjunto constituye una columna ancha con lo que es aplicable la expresión 2.6 para valuar la matriz de rigideces. El momento de inercia  $I$  se considera que proviene de la rigidez axial de las columnas y se calcula como se indica en la fig 2.19;  $E$  es el

módulo de elasticidad del marco, y  $G$  el módulo de cortante del muro. Para el área de cortante,  $\Omega$ , se adopta un valor reducido, que toma en cuenta la separación entre muro y marco, dado por

$$\Omega_s = (0.37 - 0.12 \zeta + 0.023 \lambda) (A_m + 2 A_c) \quad (2.10)$$

en esta expresión

- $\zeta$  es la relación de longitud a altura del muro
- $A_m$  es el área de la sección transversal del muro
- $A_c$  es el área de la sección de cada columna del marco, sin transformar a pesar de ser de diferente material. Estas definiciones, lo mismo que la de  $\lambda$ , se ilustran en la fig 2.22.

Como resultado del análisis considerando columnas anchas se obtienen momentos flexionantes  $M$  y fuerzas cortantes  $V$ . Las cargas axiales  $T$  de tensión y  $C$  de compresión en las columnas son:

$$T = \frac{M}{z \ell}$$

$$C = z \frac{M}{\ell}$$

siendo  $z = 1.15 - 0.2 \zeta \leq 1.0$ .

La fuerza cortante máxima en las columnas es  $0.6 V$ .

Esta aproximación también está limitada a los intervalos de valores de  $\zeta$  y  $\lambda$  que se indican para el uso de diagonales equivalentes. Como ejemplo, considérese la estructura mostrada en la fig 2.20. Para determinar las diagonales equivalentes a los tableros de mampostería se deben conocer las siguientes propiedades geométricas y mecánicas: área de las columnas,  $A_c$ , igual a  $30 \times 30 = 900 \text{ cm}^2$ ; área del muro,  $A_m$ , igual a  $15 \times (400 - 40) = 540 \text{ cm}^2$ ; módulo de elasticidad de las columnas,  $E_c = 10,000 \sqrt{200} = 141,000 \text{ kg/cm}^2$ .

En la sección 2.4.4 de la ref 31 se estipula que para cargas de corta duración, como son las sísmicas, el módulo de elasticidad de la mampostería puede calcularse como  $E_m = 400 f_m^*$ , donde  $f_m^*$  es la resistencia nominal a compresión, dada en la tabla 2.4.1.c de la misma referencia. En este caso se tiene  $f_m^* = 15 \text{ kg/cm}^2$  y, por tanto,  $E_m = 6000 \text{ kg/cm}^2$ .  $G_m$  es igual a  $0.4 E_m$ , es decir  $2400 \text{ kg/cm}^2$ . Con estos valores se puede calcular el parámetro  $\lambda$ , definido en la fig 2.19, como sigue

$$\lambda = \frac{E_c A_c}{G_m A_m} = \frac{141000 \times 900}{2400 \times 5400} = 9.8$$

Aplicando la expresión 2.9, con  $h = 3\text{m}$ , resulta  $w_e = (0.35 + 0.022 \times 9.8) 3 = 1.70 \text{ m}$ .

Las diagonales equivalentes tienen  $170 \times 15 = 2250 \text{ cm}^2$  de área, 5 m de longitud y su módulo de elasticidad es  $6000 \text{ kg/cm}^2$ .

Se ha analizado esta estructura con el método de rigideces y algunos de los resultados más importantes se muestran en la fig 2.21

## 2.3 Comentarios

### 2.3.1 Ventajas y limitaciones de los distintos métodos

El método de los elementos finitos permite obtener soluciones prácticamente exactas para cualquier problema que involucre muros, si se acepta que el comportamiento es elástico lineal, e inclusive se pueden tratar con él problemas no lineales (ref 18 y 26). Sin embargo, como se advierte en la fig 2.10, para obtener una precisión aceptable se debe representar el muro con varios elementos finitos, lo cual, en estructuras de varios pisos y crujeas, requiere de tiempos y capacidades de computadora bastante grandes, haciendo impráctica la aplicación del método. Además es alta la probabilidad de cometer errores por la gran cantidad de datos que hay que proporcionar y es difícil interpretar el elevado volumen de resultados que se obtienen. Otro asunto que hay que tener presente es que el método proporciona como resultados esfuerzos en distintos puntos, mientras que en los procedimientos para el di

mensionamiento se emplean momentos flexionantes, fuerzas cortantes y normales, que son resultantes de dichos esfuerzos, y que no son fáciles de calcular automáticamente con los programas para computadora.

Por lo anterior, el uso de elementos finitos en el análisis de edificios está reservado a ciertos casos especiales, como el de muros con geometría complicada; también se suele emplear para estudiar con más detalle algunas partes y no la totalidad del edificio.

Para una verificación adicional de la precisión del método de la columna ancha se ha analizado el conjunto muro-marco de la fig 2.22 con este método y con el de los elementos finitos. La comparación de resultados, que se muestra en la misma figura, revela que en este caso las diferencias entre los desplazamientos laterales obtenidos con ambos métodos son menores que dos por ciento, confirmando que el uso de columnas anchas conduce a resultados prácticamente exactos. Nótese que muro y marco no son del mismo material.

Con el propósito de tener una idea sobre el grado de aproximación del método de Khan y Sbarounis, se ha analizado con el método de la columna ancha la estructura simplificada de la fig 2.4 y los desplazamientos resultantes son, del piso superior al inferior, 0.0240, 0.0178, 0.0117, 0.060 y 0.0018 m, que difieren de los obtenidos en la sección 2.1.4 en menos de 4 por ciento; las cortantes que arroja el método de la columna ancha para el sistema W son -6.41, 45.25, 76.56, 106.08 y 134.88 ton, también bastante similares a las que se llegó en la sección mencionada, salvo en el piso superior, aunque hay que tener presente que allí la fuerza cortante es muy pequeña. Esto muestra que la forma en que se ha aplicado el método de Khan y Sbarounis es suficientemente precisa para fines prácticos.

También se ha analizado con el método de la columna ancha el edificio completo mostrado en la fig 2.3. Los desplazamientos y las fuerzas cortantes que toman los muros resultaron, respectivamente, 0.0203, 0.0152, 0.0101, 0.0053 y

0.0016 m, y 6.14, 54.97, 84.8, 111.8 y 136.9 ton. Las diferencias con los valores obtenidos con el método de Khan y Sbarounis se deben principalmente a que este usa una estructura equivalente. No obstante, se puede concluir que dicho método proporciona ideas bastante buenas de como se distribuyen las cortantes entre muros y marcos y de la magnitud de los desplazamientos laterales.

En la sección 2.1.5 se aplicó a este mismo edificio el método de McLeod y se encontró que el desplazamiento lateral del último piso, la fuerza cortante máxima que toman los marcos y el momento de volteo que se origina en cada muro, son 0.0221 m, 16.02 ton y 560.5 ton-m, respectivamente. Los correspondientes valores que se obtienen con el método de la columna ancha son: 0.0203 m, 43.86 ton y 484.2 ton-m. Se desprende que el método de McLeod aunque no proporciona información sobre la distribución de cortantes en altura, permite verificar con rapidez el orden de magnitud de resultados obtenidos con procedimientos más elaborados.

### 2.3.2 Propiedades mecánicas y geométricas

Como puede inferirse de la correspondientes matrices de rigideces, para analizar sistemas con muros es necesario conocer los módulos de elasticidad y de cortante, el momento de inercia, el área axial y el área de cortante de cada muro. En el caso de diagonales se deben conocer módulos de elasticidad y el área de sección transversal de cada una de ellas.

Para muros de concreto de peso normal el módulo de elasticidad,  $E_c$ , se puede valorar como  $10,000 \sqrt{f'_c}$  (con  $f'_c$  y  $E_c$  en  $\text{kg/cm}^2$ ), según se estipula en las normas correspondientes. Es aceptable considerar que el concreto es un material isótropo, con un módulo de Poisson de aproximadamente 0.2, lo cual implica que el módulo de cortante,  $G_c$ , es igual a  $E_c/2.4$ .

Para estos muros se acostumbra calcular el momento de inercia con base en su sección bruta, incluyendo el aporte de columnas o muros perpendiculares en los extremos, que trabajan como si fuesen patines y dan lugar a secciones

de los tipos T, L, C o similares; en estos casos, si un muro que funge como patín tiene un espesor  $t$ , su ancho efectivo puede considerarse igual a  $6t$ , a menos que el ancho real sea menor. La contribución de estos anchos efectivos también puede incluirse en el área de la sección transversal que interviene en el cálculo de las deformaciones axiales, pero debe excluirse al valuar el área de cortante la cual es igual al área del muro que hace las veces de alma.

De acuerdo con la ref 31, las propiedades mecánicas de la mampostería se calculan a partir de su resistencia nominal a compresión,  $f_m^*$ , sobre el área bruta. Según la sec 2.4.1 de dicha referencia,  $f_m^*$  se puede determinar a partir de ensayos de pilas, o de la resistencia nominal de las piezas y el mortero; sin embargo, para cuando no se realicen determinaciones experimentales se da allí una tabla de valores indicativos de  $f_m^*$ , en función de los tipos de pieza y de mortero, la cual se reproduce aquí como tabla 2.4. Como ayuda se ha copiado también la tabla 2.3 que presenta las proporciones recomendadas para distintas clases de morteros.

De acuerdo con las normas, para cargas de corta duración como las sísmicas, el módulo de elasticidad,  $E_m$ , es igual a  $600 f_m^*$  si la mampostería es de tabiques o bloques de cemento, e igual a  $400 f_m^*$  para mampostería de tabique de barro. El módulo de cortante,  $G_m$ , según las normas se debe tomar como  $0.3 E_m$ , pero en la ref 26 se ha encontrado que es más apropiado usar un valor 30 por ciento mayor, con lo cual  $G_m = 0.4 E_m$ ; de hecho así se determinará  $G_m$  para calcular el parámetro  $\lambda$  definido en la fig 2.19.

Las propiedades geométricas de muros de mampostería, como momentos de inercia o áreas de cortante, se pueden determinar con los criterios que se dieron para muros de concreto, en párrafos anteriores, con la aclaración de que, aun cuando se trate de muros con huecos, hay que basarse en la sección bruta, ya que así está previsto al estipular las propiedades mecánicas en la ref 31.

Cuando se trata de diagonales de acero el módulo de elasticidad es  $2000,000 \text{ kg/cm}^2$ , y es práctica común considerar sólo la diagonal en tensión, debido a que la de compresión, por tener una relación de esbeltez muy alta, se pandea ante esfuerzos pequeños.

Si las diagonales son de concreto reforzado el valor de EA depende del nivel de esfuerzos; en la ref 2 se describe un procedimiento detallado para calcular EA cuando existen esfuerzos de tensión que agrietan el concreto. Una simplificación aceptable es considerar solamente la diagonal en compresión, que es la que tiene mayor rigidez, empleando el área de su sección bruta y el módulo de elasticidad del concreto; en todo caso para la diagonal en tensión se puede usar solamente el área de acero con el módulo de elasticidad de dicho material.

TABLA 2.1 CALCULO DE DEFORMACIONES DEL MURO DE LA FIG 2.2

Nivel o entrepiso i	$h_i$	$I_i$	$V_i$	$M_i$	$E\phi_i$	$E\theta_i$	$E\delta_i$	$Ed_i$
3	3	1.5	90	0	270.0	3172.5	540.0	21810.0
2	3	2.0	150	270	742.5	2902.5	1282.5	12562.5
1	4	2.0	180	720	2160.0	2160.0	4800.0	4800.0

i	$A_i$	$E\delta^*_i$	$E d^*_i$	$E(d_i + d^*_i)$	$d_i$	$(d_i + d^*_i)$
3	0.9	750.0	3187.5	24997.5	0.014540	0.016665
2	1.2	937.5	2437.5	15000.5	0.008375	0.010000
1	1.2	1500.0	1500.0	6300.0	0.003200	0.004200

Por flexión

$$\delta_i = \frac{V_i h_i^3}{3EI_i} + \frac{M_i h_i^2}{2EI_i}$$

$$\phi_i = \frac{V_i h_i^2}{2EI_i} + \frac{M_i h_i}{EI_i}$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \phi_i$$

$$d_i = d_{i-1} + \delta_i + \theta_{i-1} h_i$$

Por cortante

$$\delta^*_i = \frac{V_i h_i}{GA_i}$$

$$d^*_i = d^*_{i-1} + \delta^*_i$$

NOTA: Las unidades empleadas son metros y toneladas.

T A B L A 2.2 METODO DE K Y SBAROUNIS

Nivel	Valores iniciales			C i c l o 1					
	$V_i$	$\Delta_i$	$R_i$	$\Delta_{ii}/\Delta_5^*$	$L_{ii}$	$\delta_{ii} = \Delta_{ii} - \Delta_{ii-1}$	$V_{fi} = R_i \delta_{ii}$	$V_{mi} = V_i - V_{fi}$	$\Delta_{ei}$
5	50	0.0449	7376	0.43	0.0193	0.0036	26.55	23.45	0.0301
4	90	0.0324	7376	0.35	0.0157	0.0045	33.19	56.81	0.0219
3	120	0.0204	7376	0.25	0.0112	0.0054	39.83	80.17	0.0140
2	140	0.0101	7676	0.13	0.0058	0.0040	30.70	109.30	0.0071
1	150	0.0028	11414	0.04	0.0018	0.0018	20.55	129.45	0.0020

\* De la gráfica de las fig 2-3 y 2.4

Nivel	Aplicación del criterio de convergencia			Ciclo 2		Ciclo 3	
	$\Delta_i - \Delta_{ei}$	$\alpha = 1 + \frac{\Delta_i - \Delta_{ei}}{L_{ii}}$	$\beta = \Delta_{ei} - \Delta_{ii}$	$\Delta_{ii(2)} = \Delta_{ii} + \frac{\beta}{\alpha}$	$\Delta_{ei}$	$\Delta_{ii}$	$\Delta_{ei}$
5	0.0146	1.77	0.0106	0.0254	0.0247	0.0250	0.0248
4	0.0105	1.67	0.0062	0.0194	0.0182	0.0187	0.0183
3	0.0064	1.57	0.0028	0.0130	0.0118	0.0123	0.0119
2	0.0030	1.52	0.0013	0.0067	0.0061	0.0063	0.0061
1	0.0008	1.44	0.0002	0.0019	0.0017	0.0018	0.0018

TABLA 2.3

PROPORCIONAMIENTOS EN VOLUMEN, RECOMENDADOS PARA  
MORTERO EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Tipo de mortero	Partes de cemento	Partes de cemento de albañilería	Partes de cal	Partes de arena <sup>+</sup>	Valor típico de la resistencia nominal en compresión, $f_b^*$ , en $\text{kg/cm}^2$
I	1	0 o 1/2	0 o 1/4	No menos de 2.25 ni más de 3 veces la suma de cementantes en volumen	125
II	1	1/2 o 1	1/4 o 1/2		75
III	1	—	1/1 o 1 1/4		40

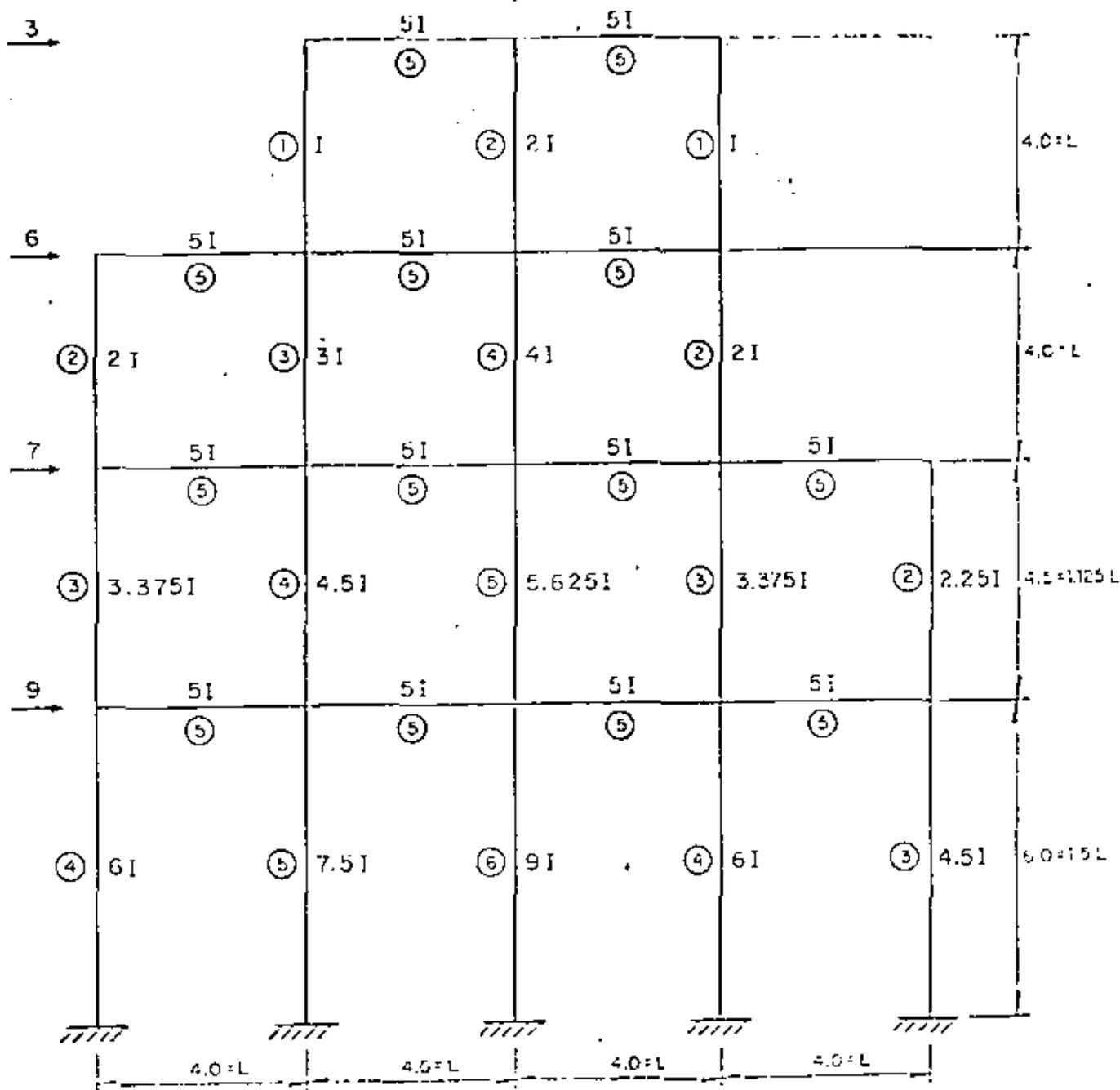
+ El volumen de arena se medirá en estado suelto.

Tabla 2.4 Propiedades <sup>de la</sup> mampostería

Pieza	Mortero	$f_m^*$	$v^*$	E	G
Tabique recocido	I	15	3.5	4500	1350
	II	15	3	4500	1350
	III	15	3	4500	1350
Tabique extruido	I	40	3	12000	3600
	II	40	2	12000	2700
	III	30	2	9000	2700
Bloque concreto pesado	I	20	3.5	10000	3000
	II	15	2.5	7500	2250
	III	15	2.5	7500	2250

Esfuerzos en  $\text{kg/cm}^2$ .

$f_m^*$  y  $v_m^*$  son esfuerzos nominales de diseño, no esfuerzos permisibles



Fuerzas en toneladas y longitudes en metros  
 $I = 7,500 \text{ cm}^4$        $E = 2000,000 \text{ kg/cm}^2$   
 ○ Rigidez ( inercia / longitud ) en terminos de  $I/L$

Fig 1.1 Marco empleado para ilustrar ejemplos.

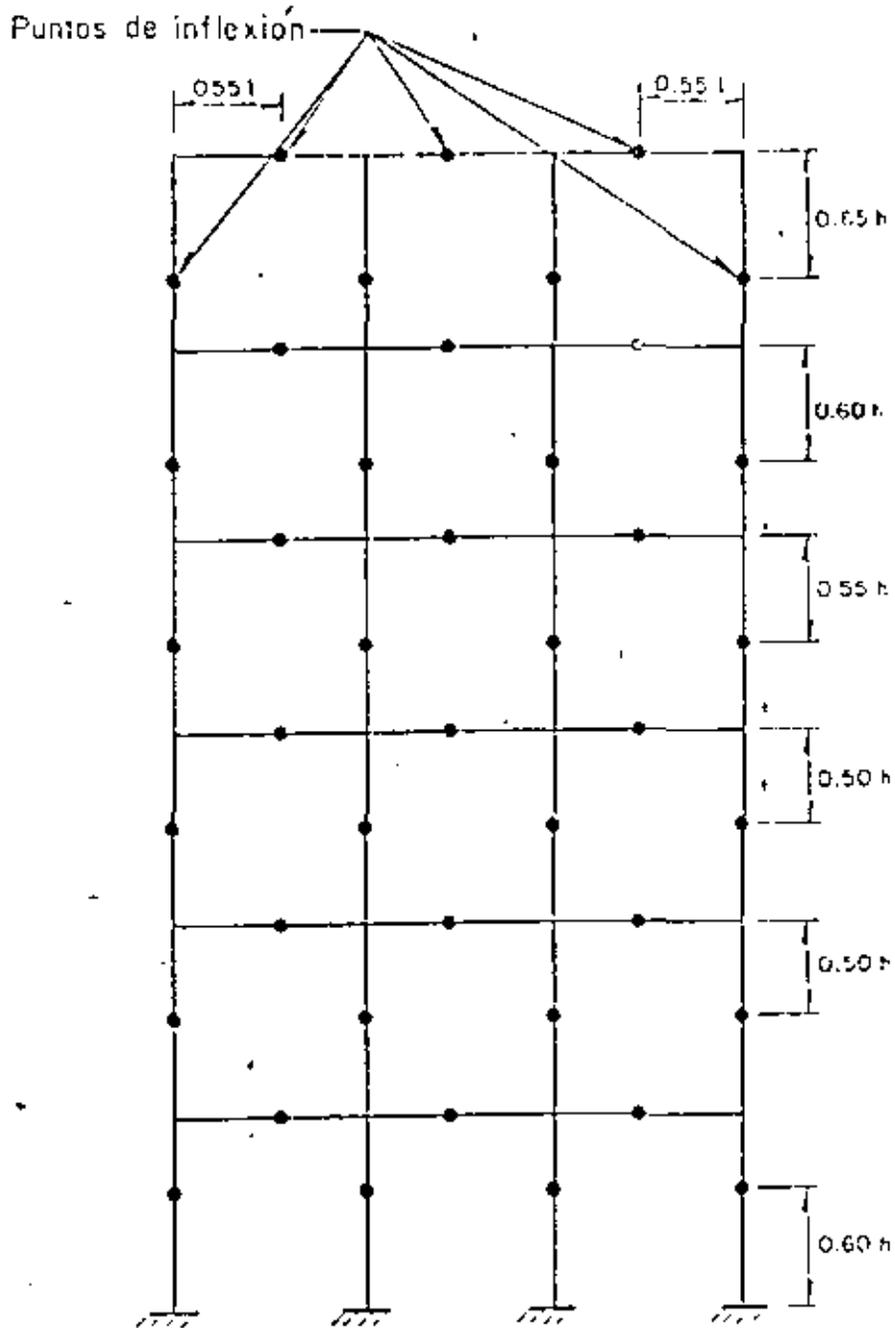
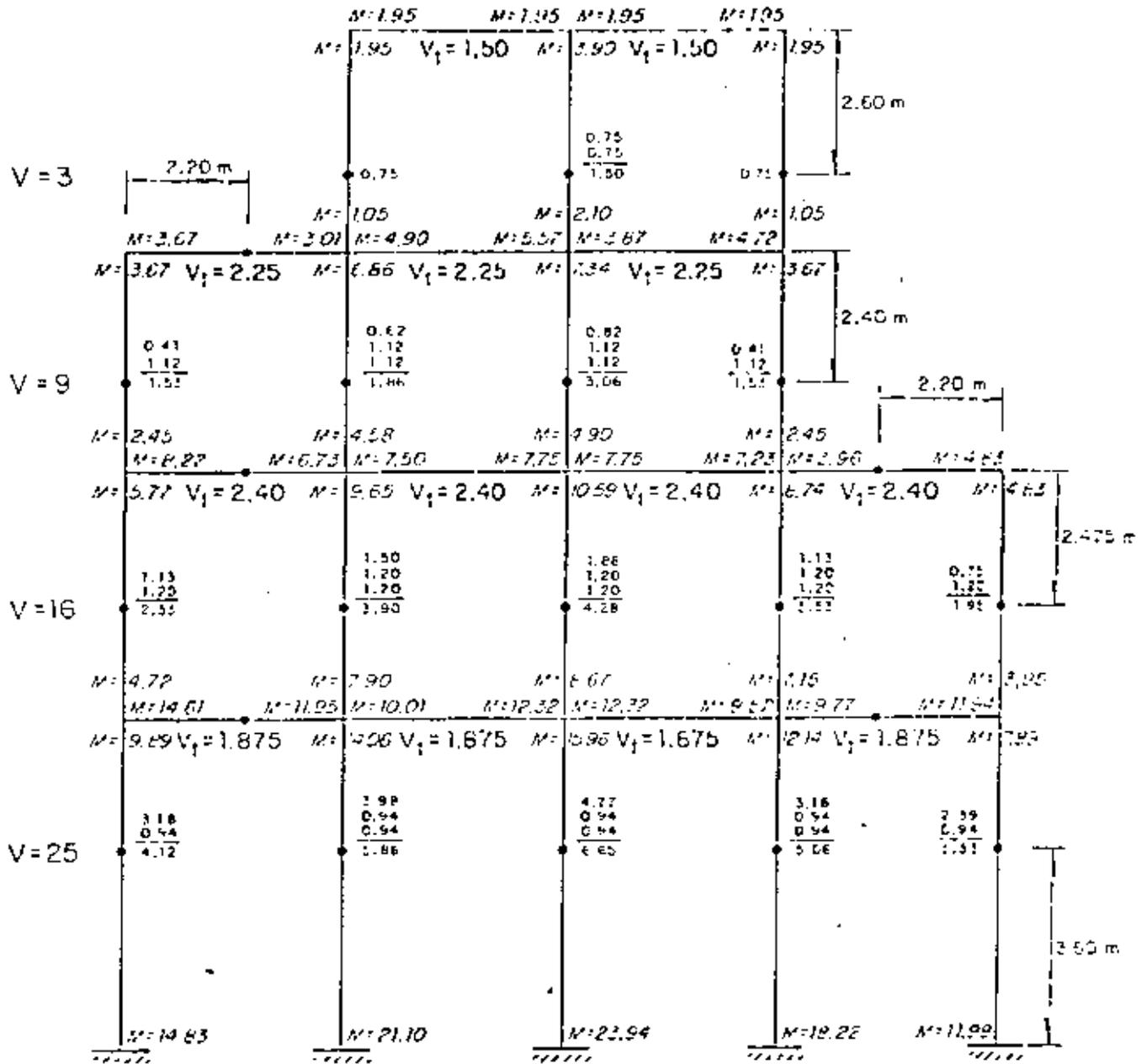


Fig. 1.2 Localización de puntos de inflexión según el método de Bowman



Nota. Todos los momentos en las vigas tienen signo menos  
 Momentos en ton-m, cortantes en ton

Fig 1.3 Aplicación del método de Bowson al marco de la fig 1.1

## Distribución de cortantes

Primer entrepiso

$$V = 25 \text{ ton}$$

$$V_c = \frac{4-0.5}{4+1} \times 25 = 17.5$$

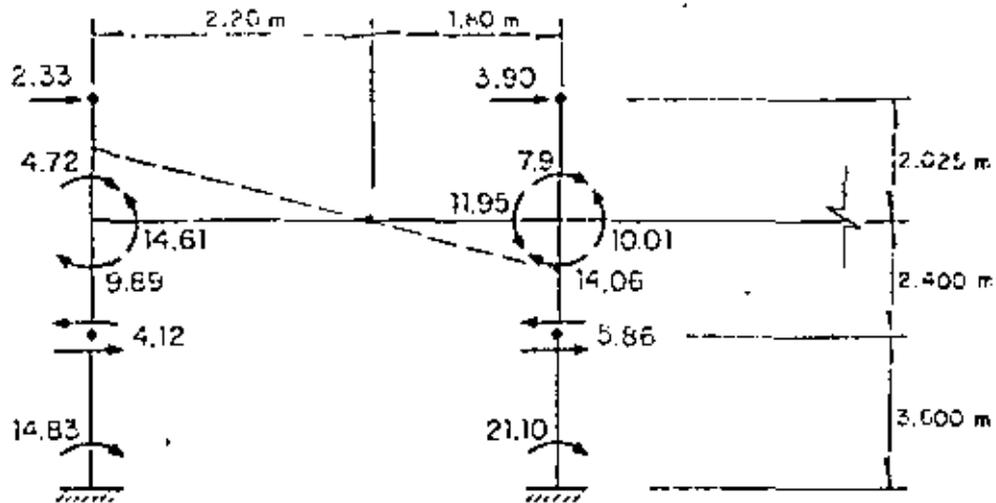
$$V_t = 25 - 17.5 = 7.5$$

Segundo entrepiso

$$V = 16 \text{ ton}$$

$$V_c = \frac{4-2}{4+1} \times 16 = 6.4$$

$$V_t = 16 - 6.4 = 9.6$$



Momentos en ton - m

$$4.12 \times 2.4 = 9.89$$

$$4.12 \times 3.6 = 14.63$$

$$14.61 \times 1.80 / 2.20 = 11.95$$

$$3.90 \times 2.025 = 7.9$$

$$14.06 + 7.9 - 11.95 = 10.01$$

$$2.33 \times 2.025 = 4.72$$

$$9.89 + 4.72 = 14.61$$

$$5.86 \times 2.40 = 14.06$$

Fig 1.4 Algunas operaciones para explicar ciertos resultados de la fig 1.3

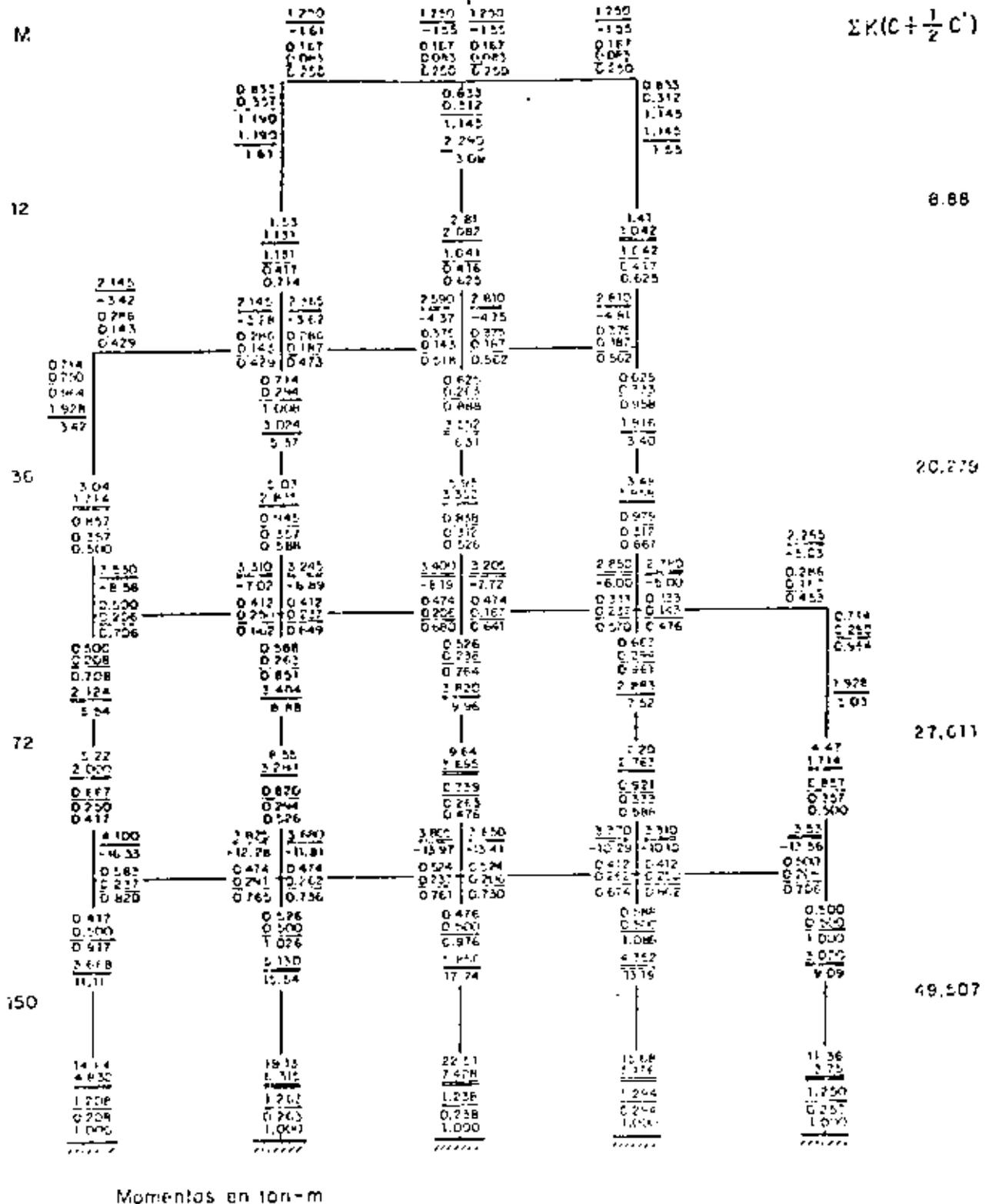


Fig 1.5 Aplicación del método del factor al marco de la fig 1.1

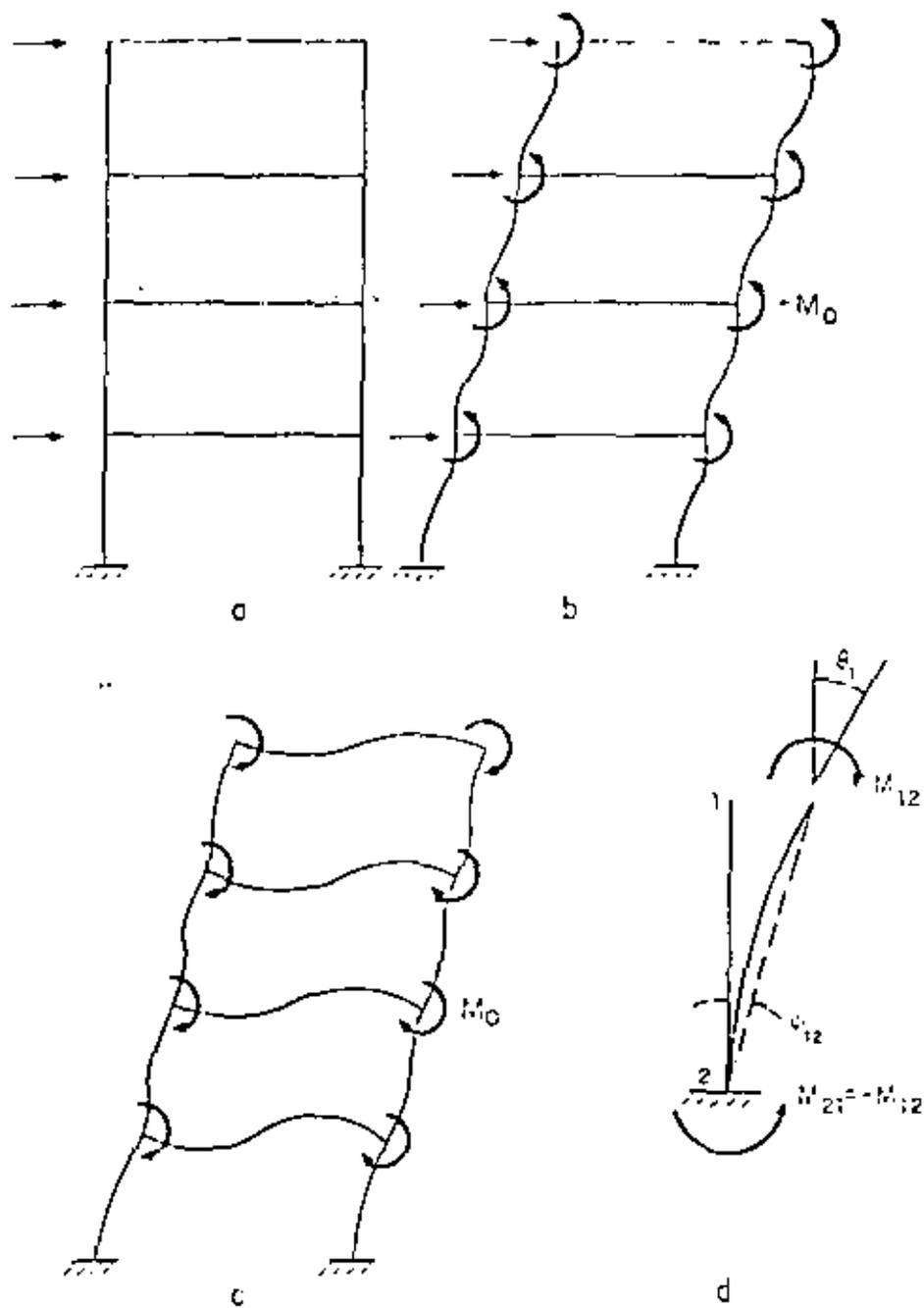
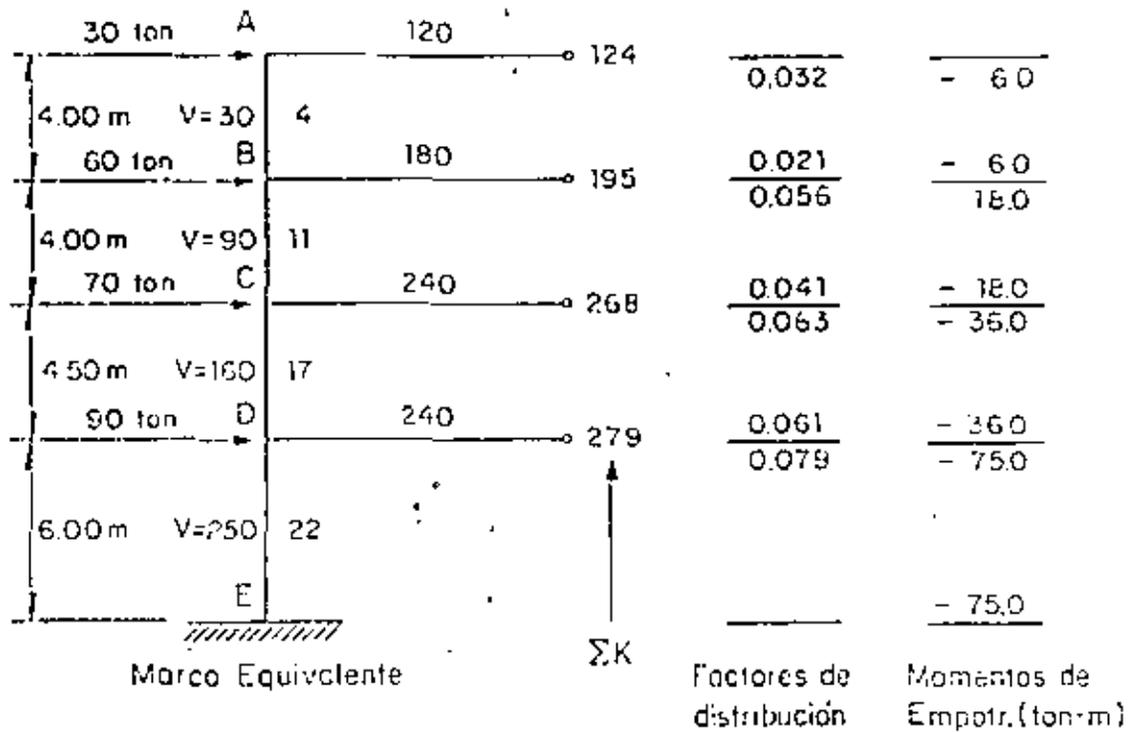


Fig 1.6 Método de Grinter - Tsao



MIEMBRO	AB	BA	BC	CB	CD	DC	DE	ED
FACTORES DE DISTRIBUCION	0.032	0.021	0.056	0.041	0.063	0.061	0.079	—
MOMS. NUDOS FIJOS	- 60	- 60	- 180	- 180	- 360	- 360	- 750	- 750
BALANCEO	+ 20	+ 50	+ 130	+ 220	+ 340	+ 680	+ 880	—
TRANSPORTE	- 50	- 20	- 220	- 130	- 680	- 340	—	- 680
BALANCEO	0	+ 10	+ 10	+ 30	+ 50	+ 20	+ 30	—
TRANSPORTE	- 10	0	- 30	- 10	- 20	- 50	—	- 30
MOMENTOS EN LAS COLUMNAS	- 64	- 56	- 191	- 169	- 391	- 329	- 659	- 541
MOMENTOS EN LAS TRABES	+ 64	+ 247	+ 560		+ 988			—

Fig 1.7 a Aplicación del método de Grinter-Tsao al marco de la fig 1.1

		16.4 +0.4 16.0		15.5 -0.5 16.0				ΣM		Vr	
		A E 083		B C 0415		C					
		E 017 -16.0 -0.5 0.1 -16.4	O 415 A 16.0 -0.5 15.5	F 017 -17.0 1.1 -0.1 -31.0	O 415 B 16.0 -0.7 15.6	G 017 -16.0 3.0 -0.1 -15.8					
											-117.8 120
		33.8 -0.3 -2.5 -4.6 41.2	-15.1 -0.1 1.0 -14.0	38.2 -0.7 -2.2 -3.0 41.2	-26.4 -0.7 2.3 -28.0	46.5 -1.7 1.5 3.5 41.2	-15.1 0.1 0.6 -14.0				
		D E 071	O 074 E	F 036	O 138 F	G 031	O 120 G				
		H 029 -34.7 -1.9 3.0 -0.2 -33.8	O 36 D 41.2 -2.3 -5.0 -0.7 33.2	I 021 -52.1 -3.0 -0.7 -0.4 -56.2	O 31 E 41.2 -2.5 5.5 -1.7 42.5	J 025 -69.5 4.4 3.9 -1.4 -62.6	O 63 F 4.2 2.7 3.0 -1.6 48.7	K 025 -34.7 1.2 2.9 0.7 -35.7			
											-349.2 360
		-26.5 -1.0 6.7 -0.9 -30.7	81.6 -2.8 -1.1 15.3 70.0	-49.3 -0.3 -1.4 -1.5 -46.1	72.0 -0.4 4.6 -2.2 70.0	-50.6 0.4 2.8 2.2 -61.5	72.7 1.0 -7.5 9.2 70.0	-34.5 -1.5 -5.9 0.6 -40.7	53.1 3.6 -5.8 -15.0 70.0		
		O 20 D H	O 50	O 18 E I	J 029	O 22 F J	K 026	O 130 K	L		
		M 030 -69.0 9.2 6.2 -1.5 -55.10	O 29 H 70.0 7.1 -2.2 -0.4 74.5	N 024 -92.0 -1.8 -3.2 -0.3 -97.3	O 26 I 70.0 -1.1 9.2 1.0 79.1	O 026 -115.0 9.2 3.5 1.0 -101.3	O 33 J 70.0 4.6 -15.0 2.9 62.5	P 021 -69.0 9.6 6.1 2.5 -62.2	O 21 K 70.0 -7.5 -11.7 -1.2 45.6	O 029 -46.0 -4.6 1.7 -0.1 -45.6	
											707.4 720
		-40.1 1.0 12.4 4.6 -58.1	142.2 1.6 -5.8 20.9 123.5	-88.4 -0.7 -6.4 -0.5 -95.6	118.4 -0.9 3.4 7.6 -95.6	-82.9 2.4 6.4 4.6 -95.6	123.0 2.4 -5.8 6.9 121.5	-75.5 -0.6 -12.2 -4.8 -93.1	107.0 1.2 4.3 -19.6 -38.7	-37.6 3.5 -2.4 -38.7	
		O 25 H M	O 42	O 22 I N	O 026	O 24 J O	P 024	O 18 Y P	O 029	O 20 L Q	
		R 033 -119.8 16.4 1.2 -102.2	O 26 M 123.5 10.4 -7.6 125.4	S 026 -149.8 -2.6 -0.9 -156.3	O 24 N 123.5 -3.8 6.9 129.0	T 026 -179.7 6.0 2.7 -169.0	O 29 O 121.7 5.4 -19.6 106.1	U 024 -119.6 16.2 -1.0 -137.0	O 50 P 123.5 -9.8 8.7 122.4	V 035 -69.9 5.2 8.7 -64.7	
											1469.3 1500
		-144.7 6.2 -152.9	-194.9 -2.6 -191.1	-225.4 4.0 -229.4	-161.0 -0.1 -161.7	-117.1 2.4 -114.7					
		R	S	T	U	V					

Fig 1.7 b Aplicación del método de Grinter - Tsao al marco de la fig 1.1

$E = \text{constante}$

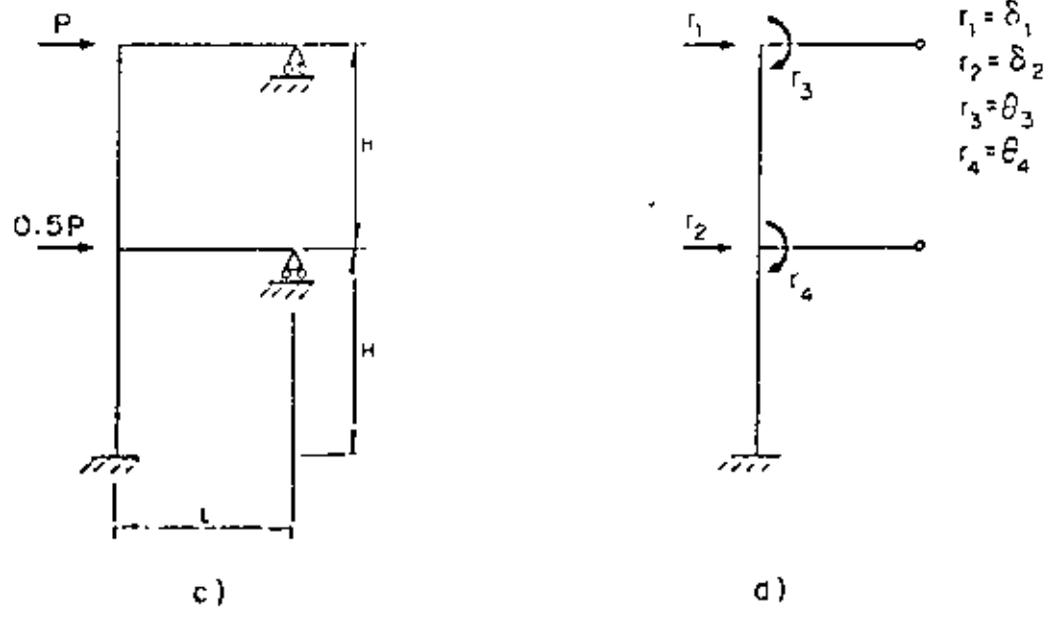
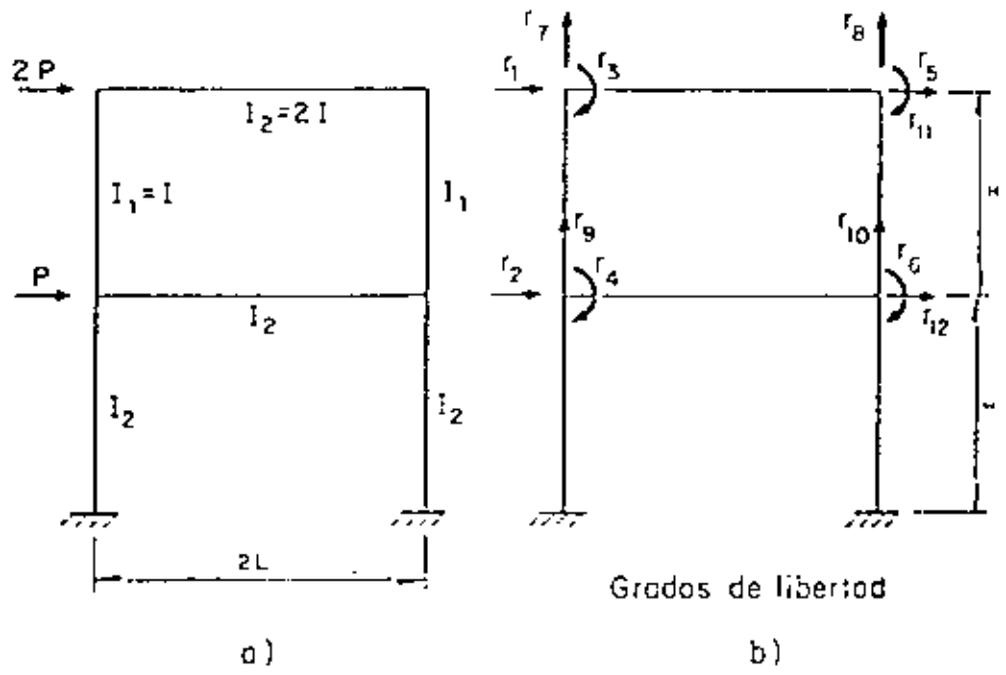
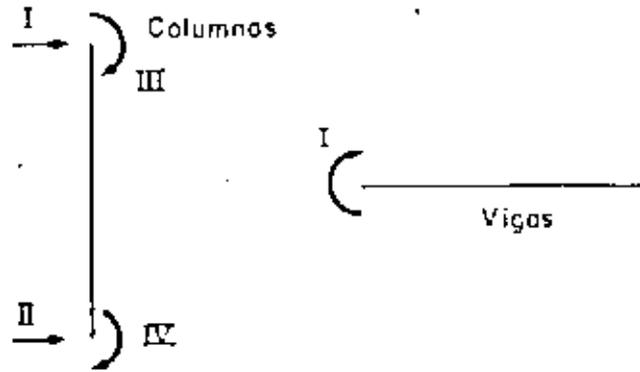
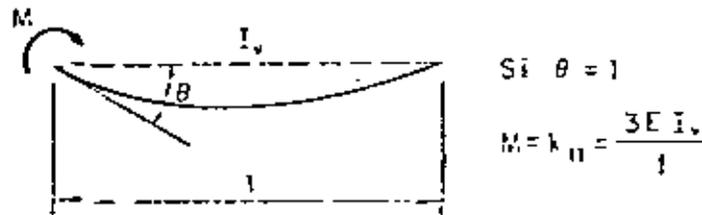


Fig 1.8 Marco empleado para ilustrar el método de rigideces

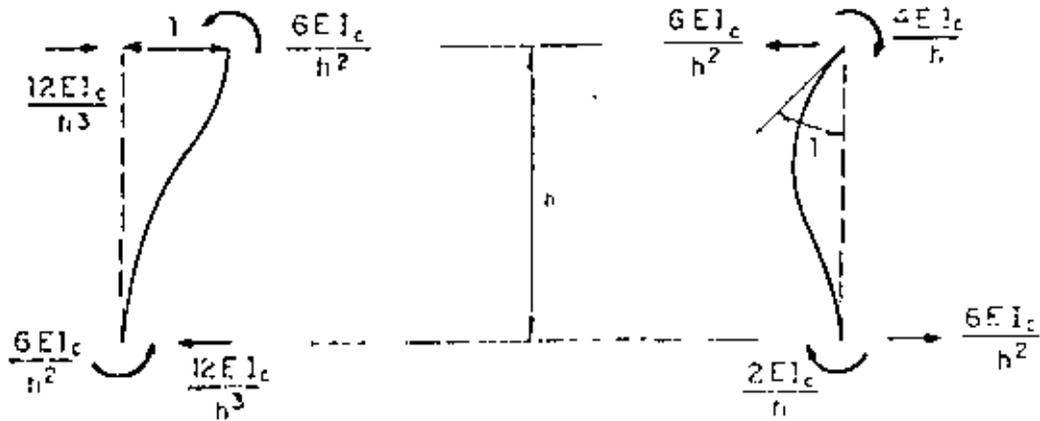


a) Grados de libertad de piezas aisladas



Si  $\theta = 1$   
 $M = k_{II} = \frac{3E I_v}{l}$

b) Vigas



c) Columnas

Fig 1.9 Elementos de la matriz de rigideces de vigas y columnas

Momentos flexionantes, en ton-m

Desplazamientos laterales, en cm

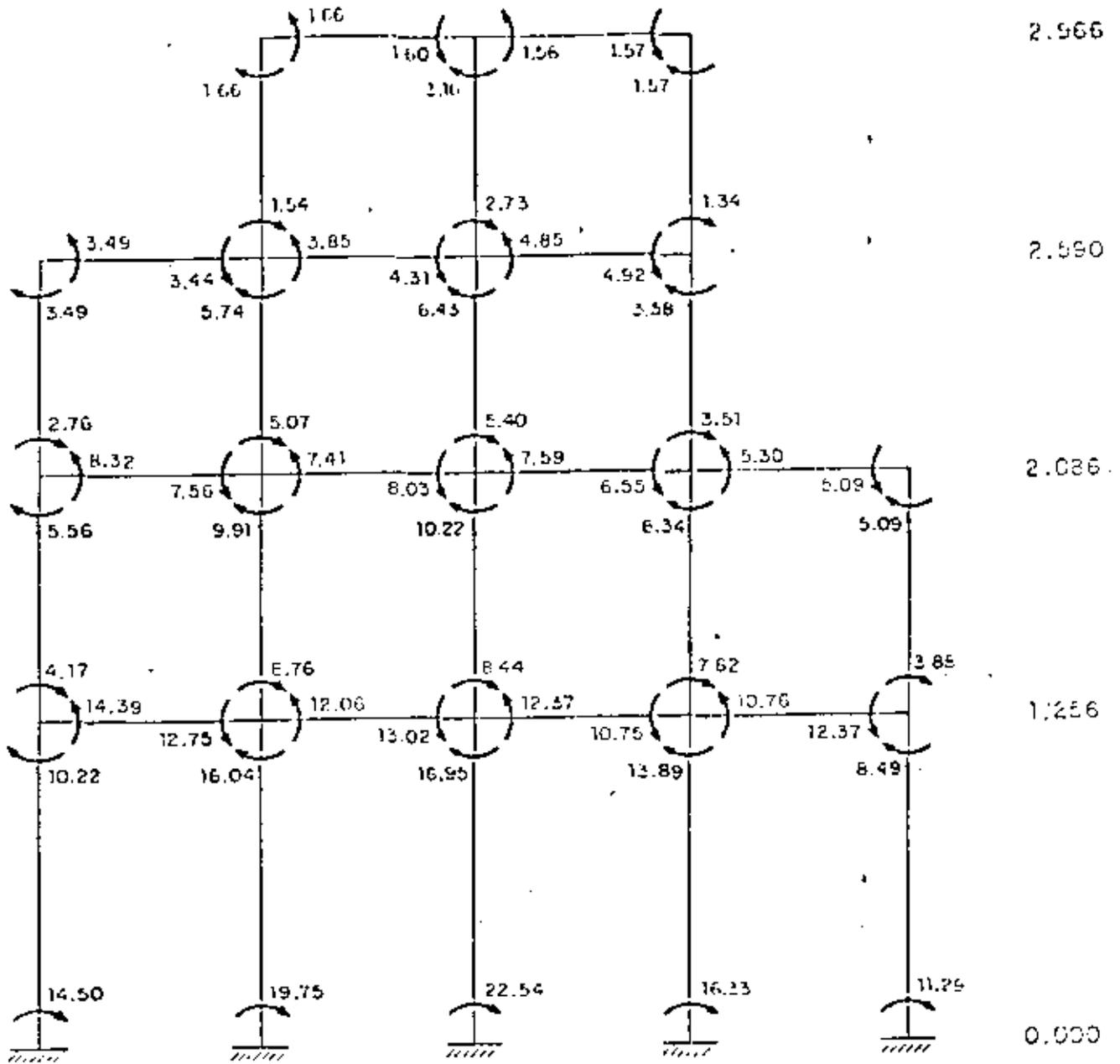
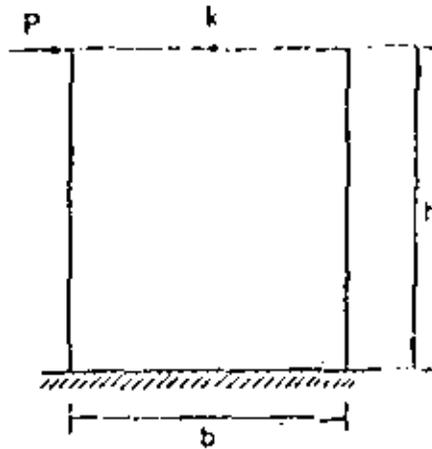


Fig 1.10 Resultados obtenidos aplicando el método de rigideces al marco de la fig 1.1

(ii)



$\delta_{ef}$  = Desplazamiento del punto k obtenido con elementos finitos

$\delta_{ca}$  = Desplazamiento del punto k obtenido con la expresión

$$\delta_{ca} = \frac{Ph^3}{3EI} + \frac{Ph}{GA}$$

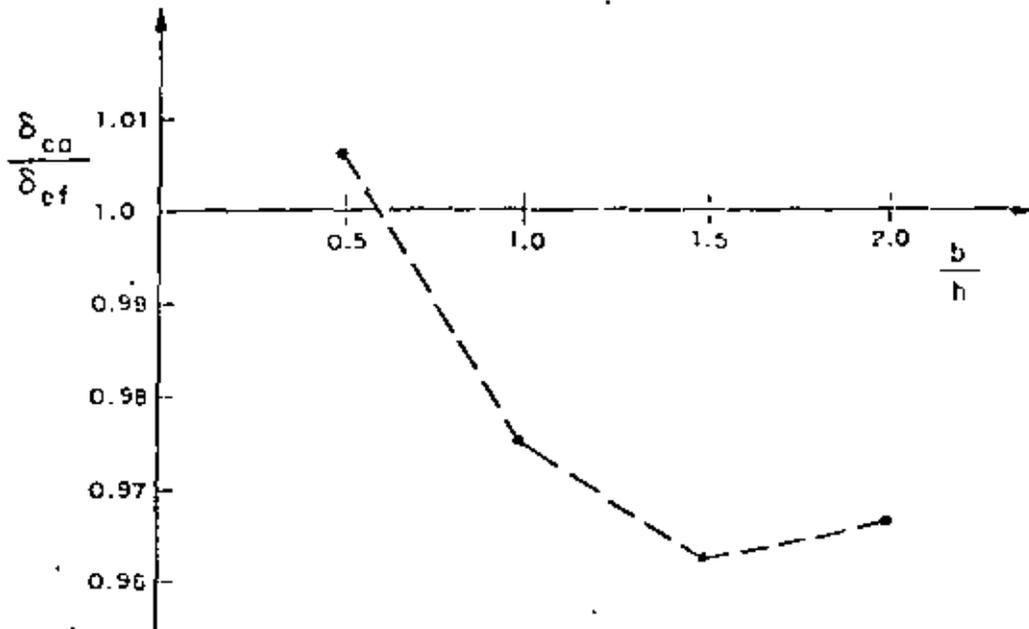
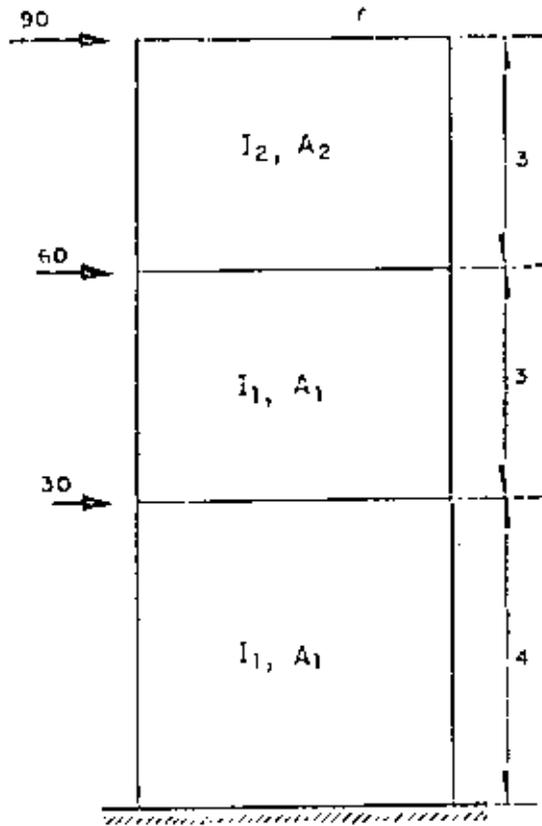


Fig 2.1 Comparación de los desplazamientos laterales de un muro obtenidos por dos métodos



Alturas en m, cargas en ton

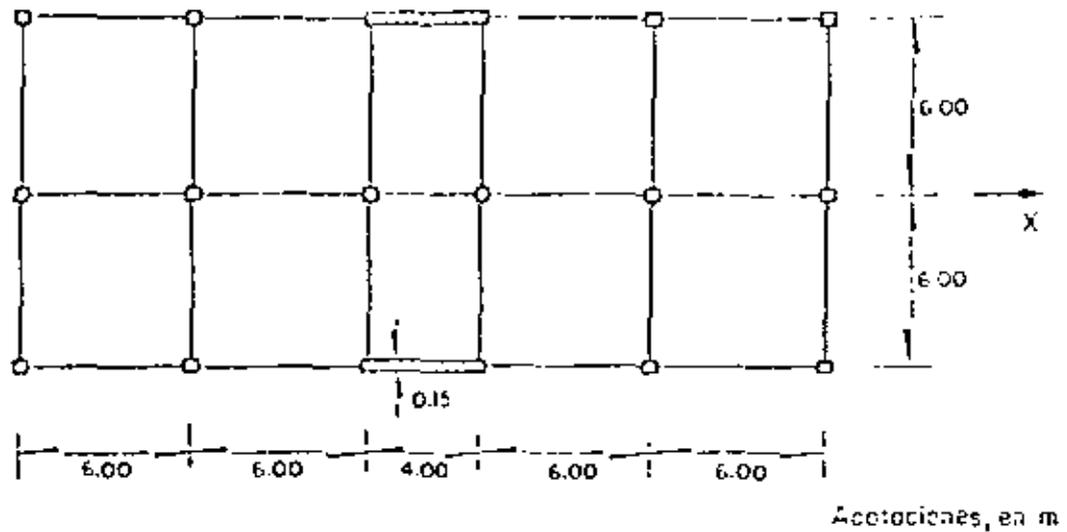
$$I_1 = 2.0 \text{ m}^4, \quad A_1 = 1.2 \text{ m}^2$$

$$I_2 = 1.5 \text{ m}^4, \quad A_2 = 0.9 \text{ m}^2$$

$$E = 1500000 \text{ ton/m}^2$$

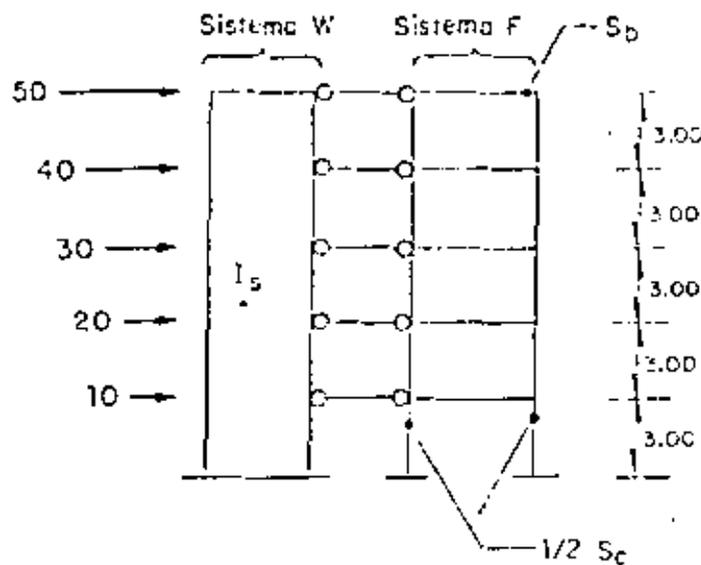
$$G = 600000 \text{ ton/m}^2$$

Fig 2.2 Muro aislado sujeto a cargas laterales



Notas: Columnas cuadradas iguales de 0.40 m de lado  
 Vigas iguales de 0.25 m de ancho por 0.50 m de peralte

Fig 2.3 Planta de un edificio con muros



Acotaciones, en m  
 Fuerzas, en ton  
 $I_s = 1,6 \text{ m}^4$   
 $S_b = 0,005859 \text{ m}^3$   
 $S_c = 0,009954 \text{ m}^3$   
 $E = 1,5 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$

Fig 2.4 Representación del edificio de la fig 2.1 en el método de Khan y Sbarounis

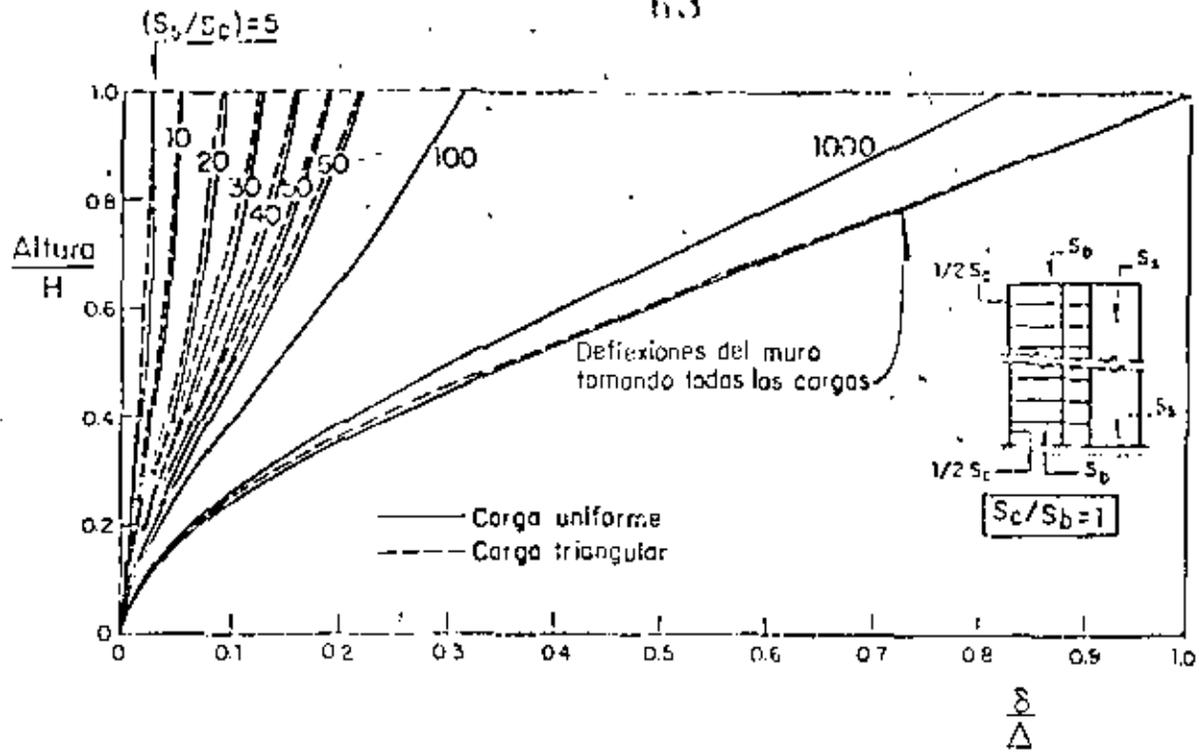


Fig 2.5 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

$\delta$  = Deflexión de la estructura a la altura correspondiente

$\Delta$  = Deflexión del extremo superior del muro aplicándose los cargas totales

H = Altura total

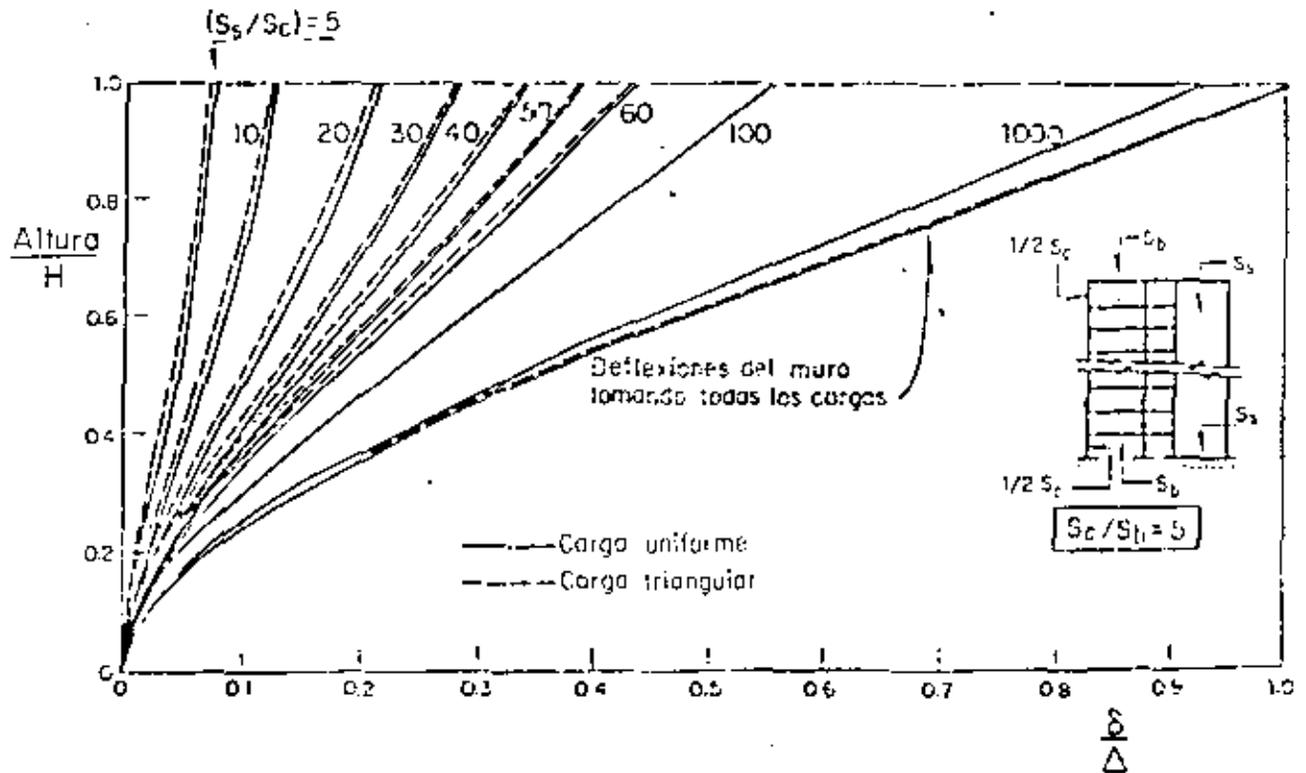


Fig 2.6 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

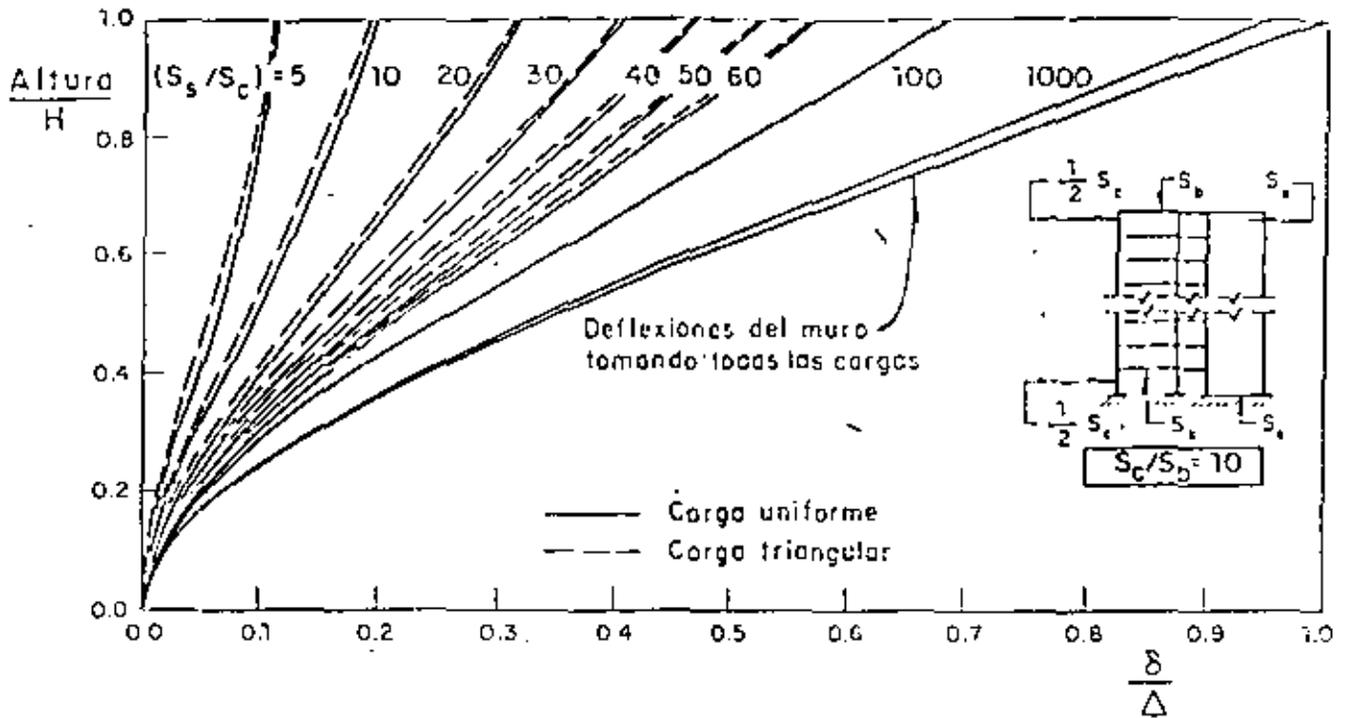


Fig 2.7 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

$\delta$  = Deflexión de la estructura a la altura correspondiente

$\Delta$  = Deflexión del extremo superior del muro aplicándose los cargas totales

H = Altura total

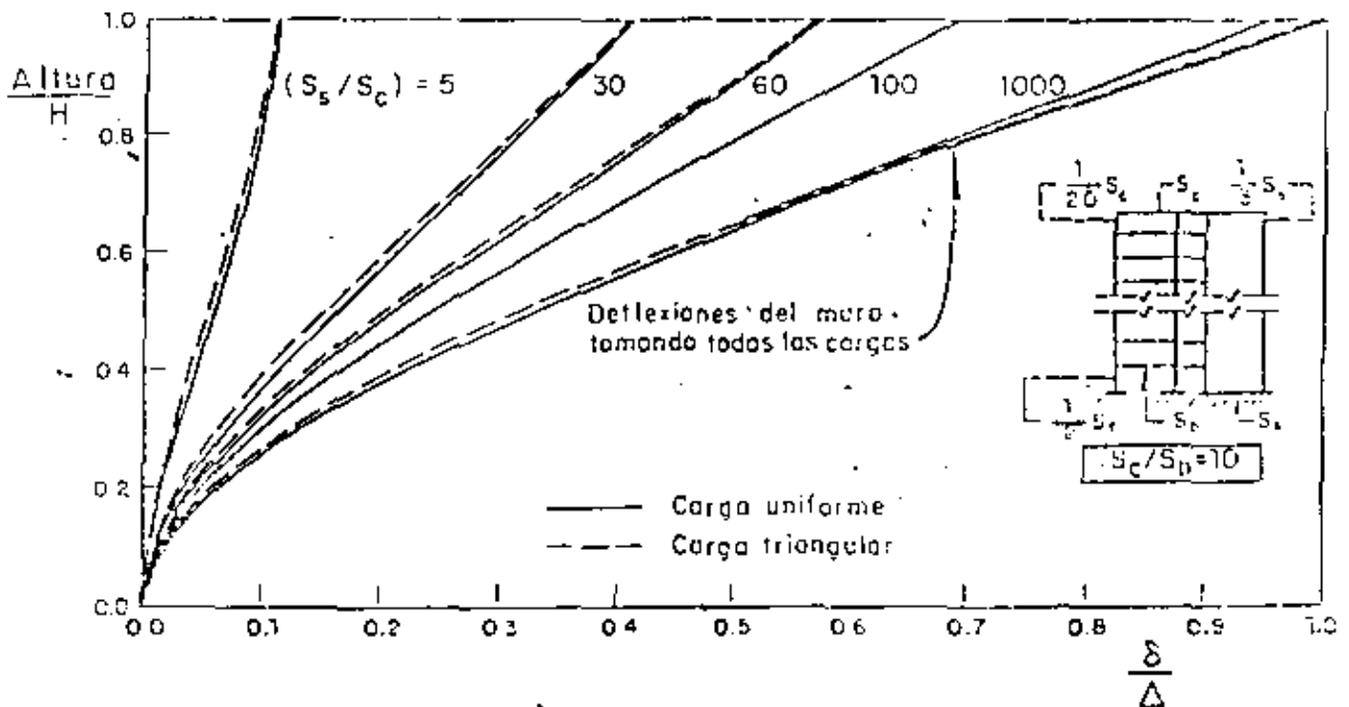


Fig 2.8 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

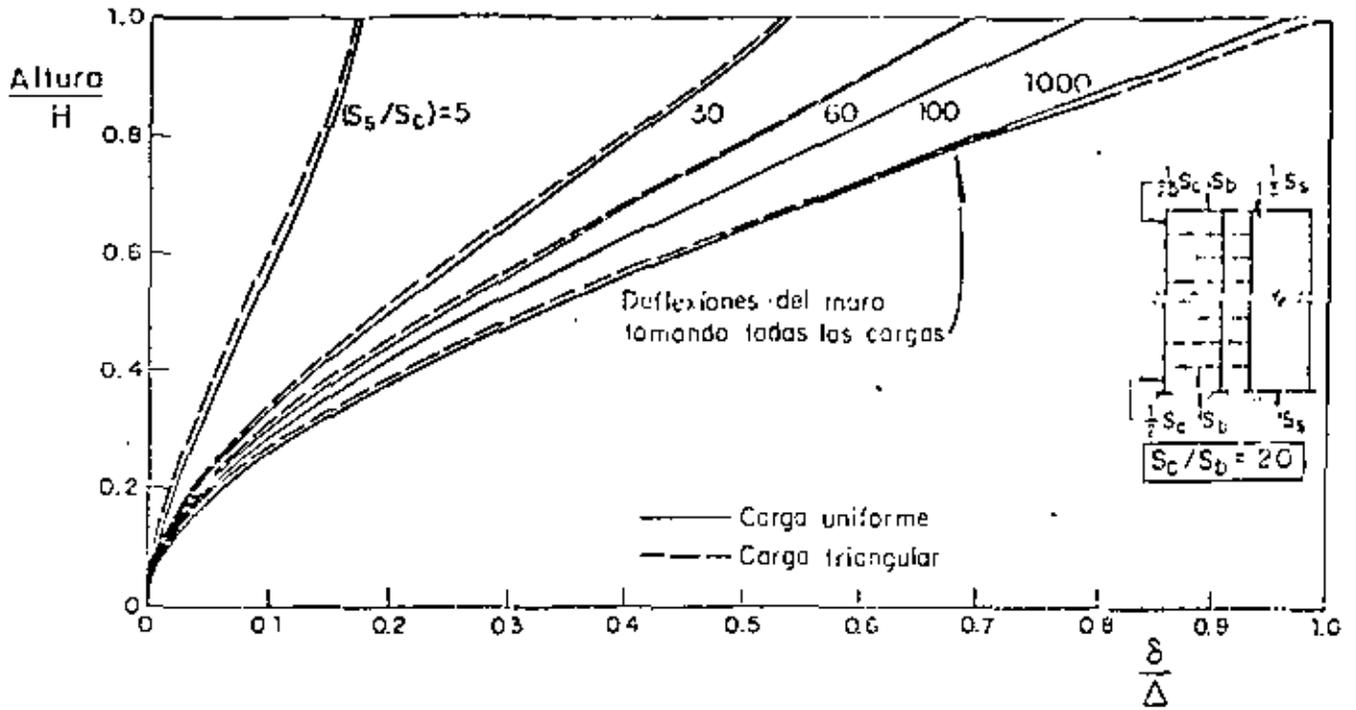


Fig 2.9 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

- $\delta$  = Deflexión de la estructura a la altura correspondiente
- $\Delta$  = Deflexión del extremo superior del muro aplicándose las cargas totales
- H = Altura total

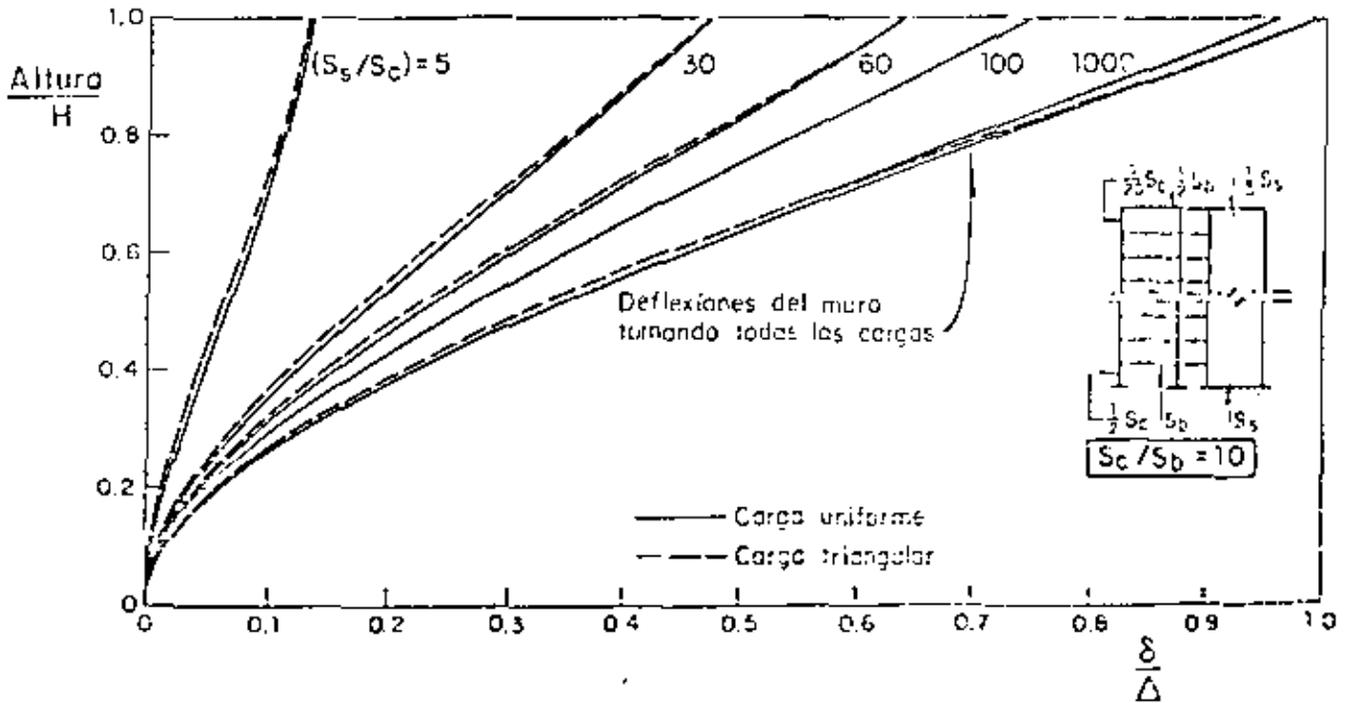
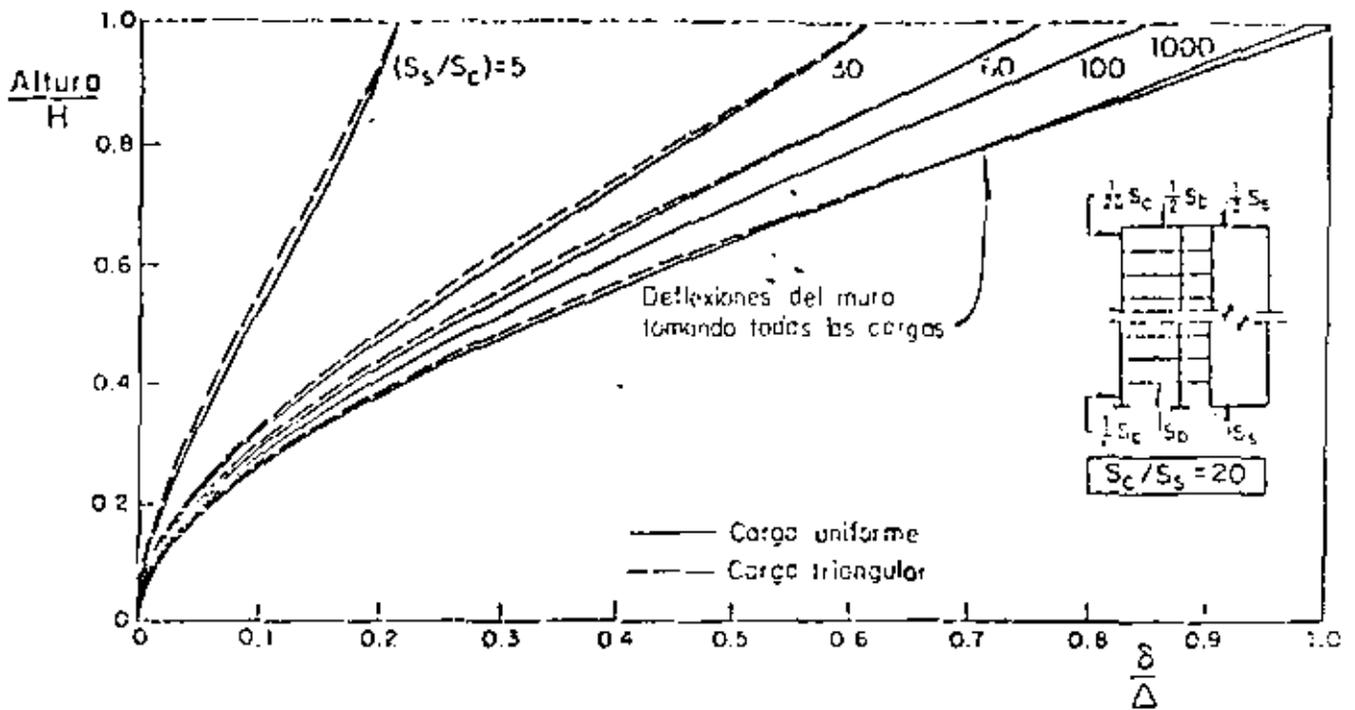


Fig 2.10 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)



$\delta$  = Deflexión de la estructura a la altura correspondiente  
 $\Delta$  = Deflexión del extremo superior del muro aplicándose los cargas totales  
 $H$  = Altura total

Fig 2.11 Gráficas de Khan y Sborounis (ref 15)

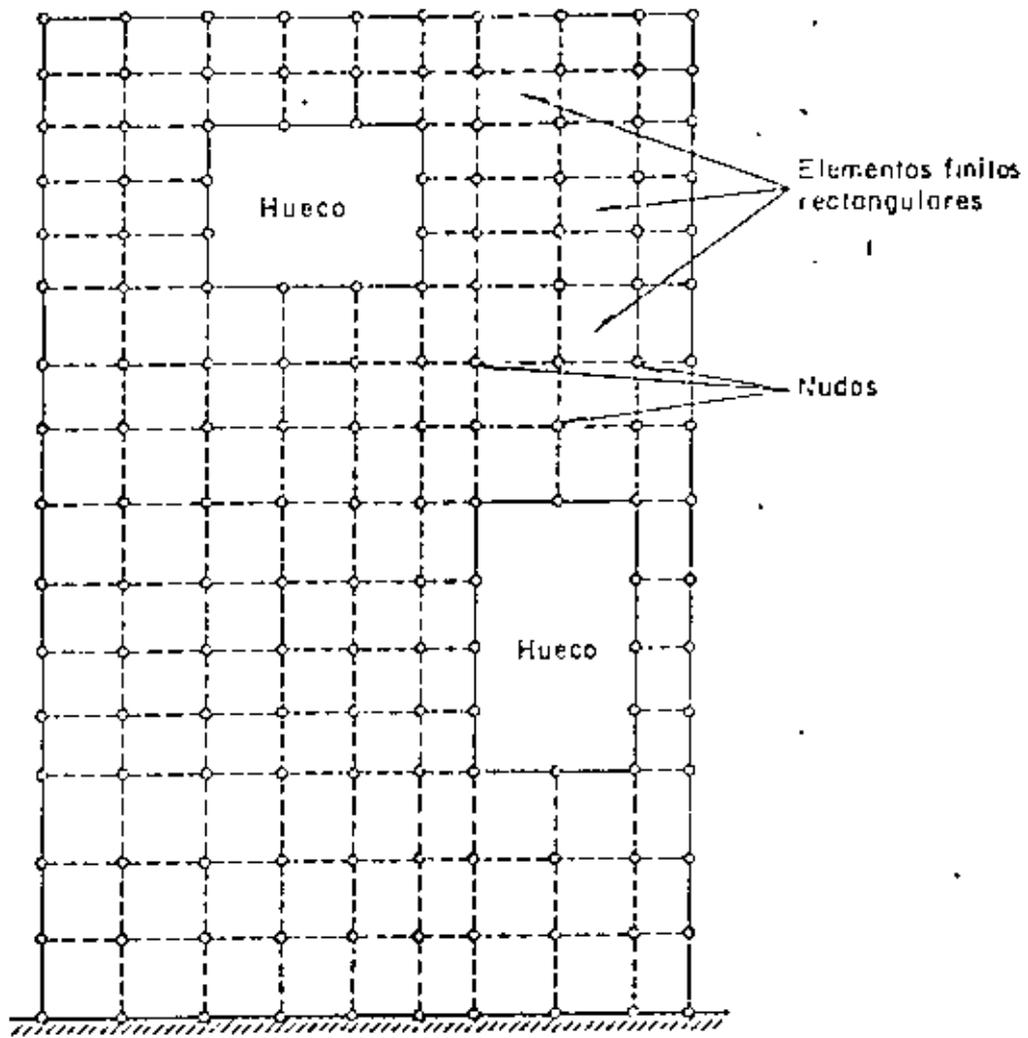
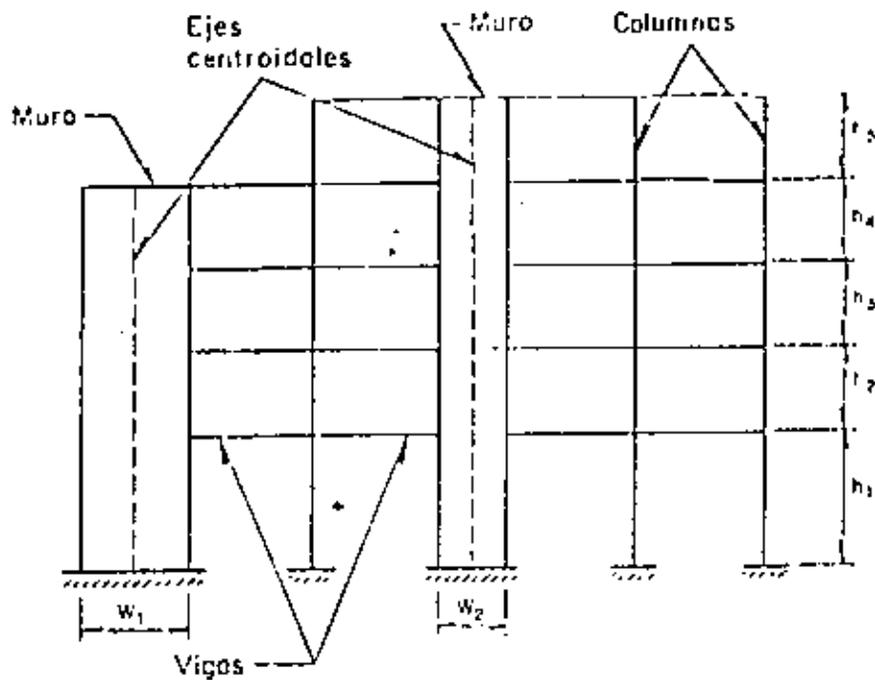
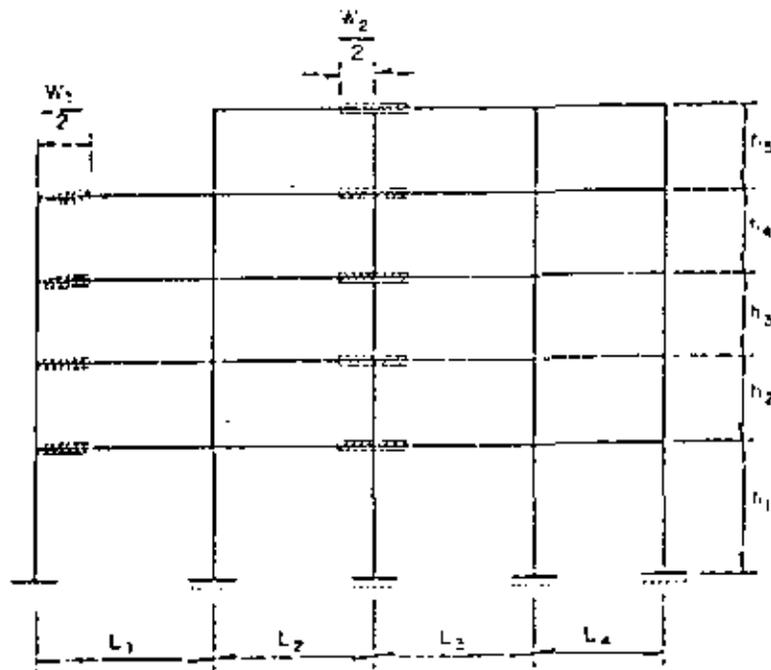


Fig 2.12 Malla de elementos finitos para analizar un muro con huecos



a) Esquema de la estructura



b) Marco con columnas anchas

Fig 2.13 Sistema muro-marco típico y su idealización como un marco con columnas anchas

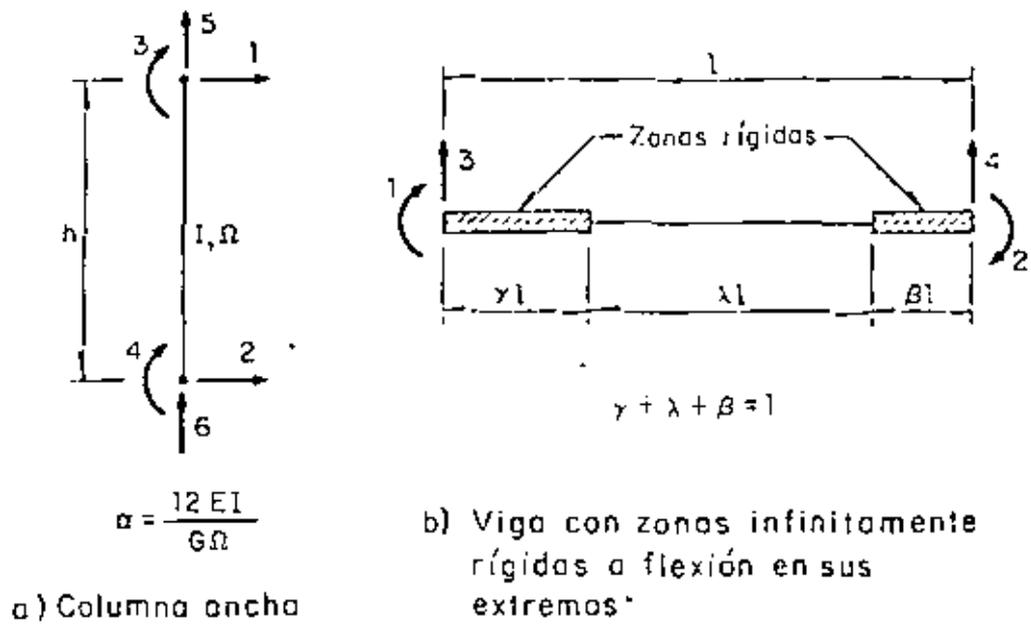


Fig 2.14 Notación y grados de libertad para columnas y vigas en el método de la columna ancha

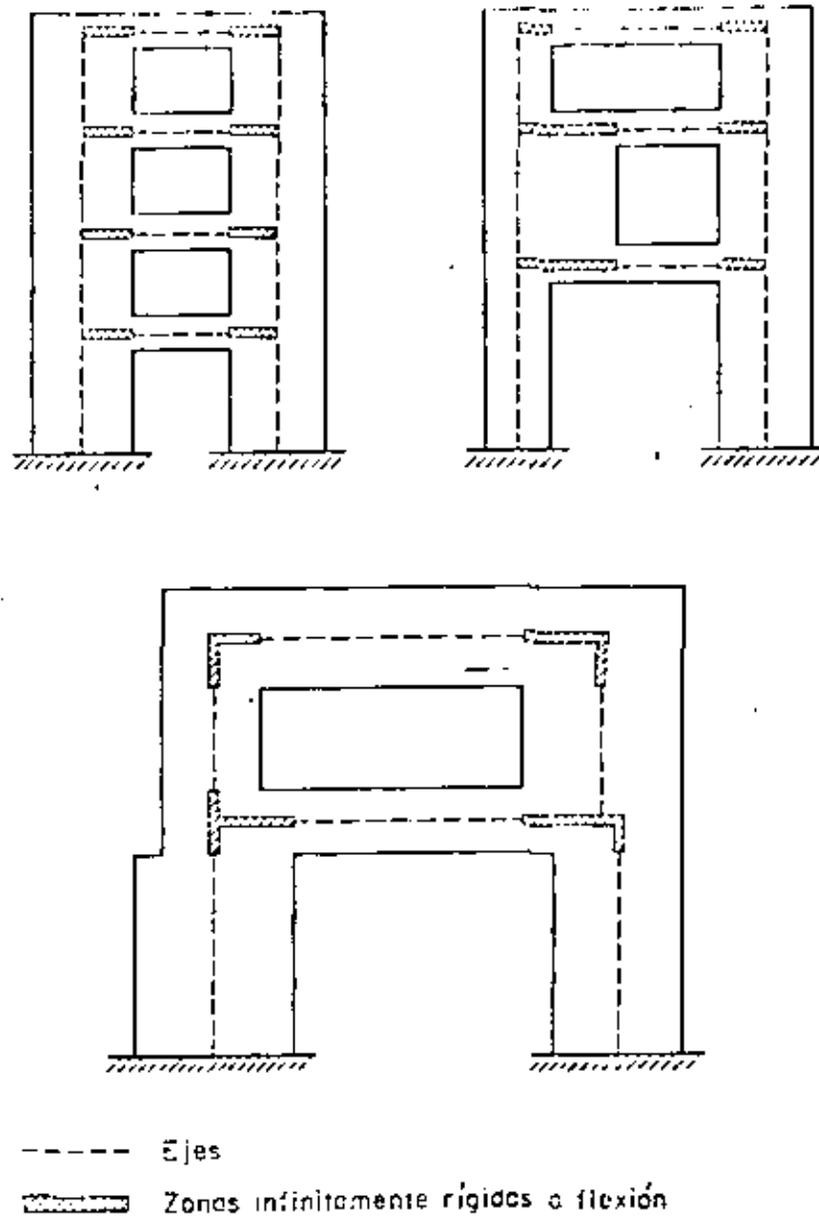


Fig 2.15 Algunos casos de muros con huecos que pueden anclizarse con el método de la columna ancha

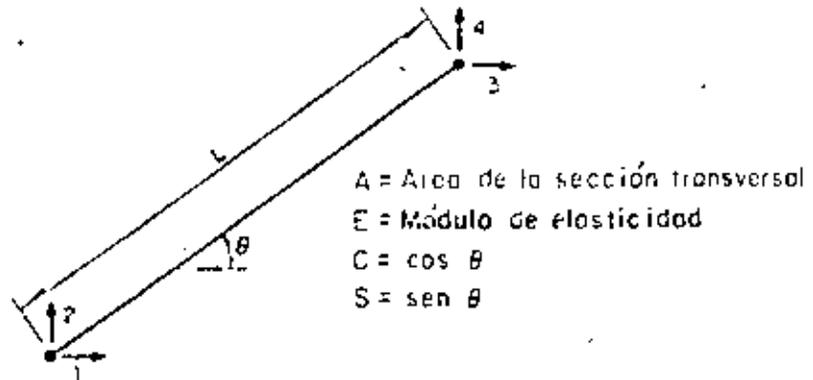


Fig 2.16 Propiedades y grados de libertad de una diagonal

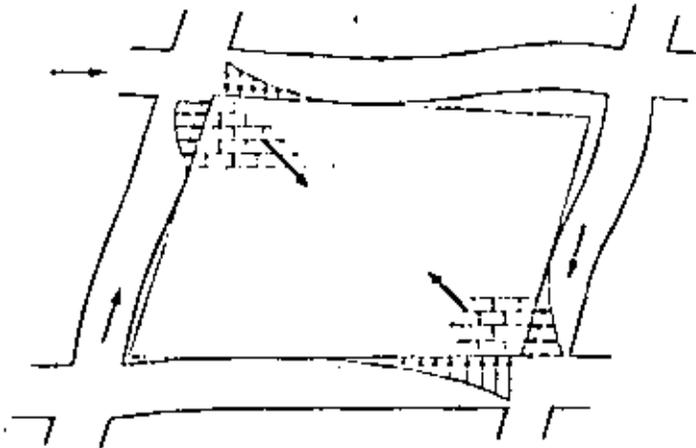


Fig 2.17 Muro de mampostería confinado por un marco

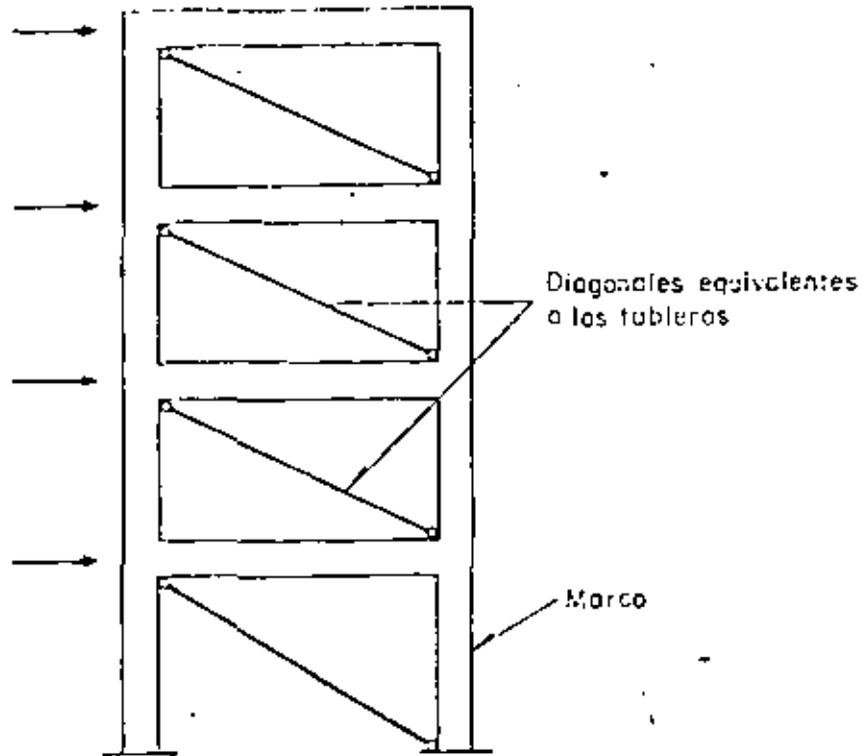
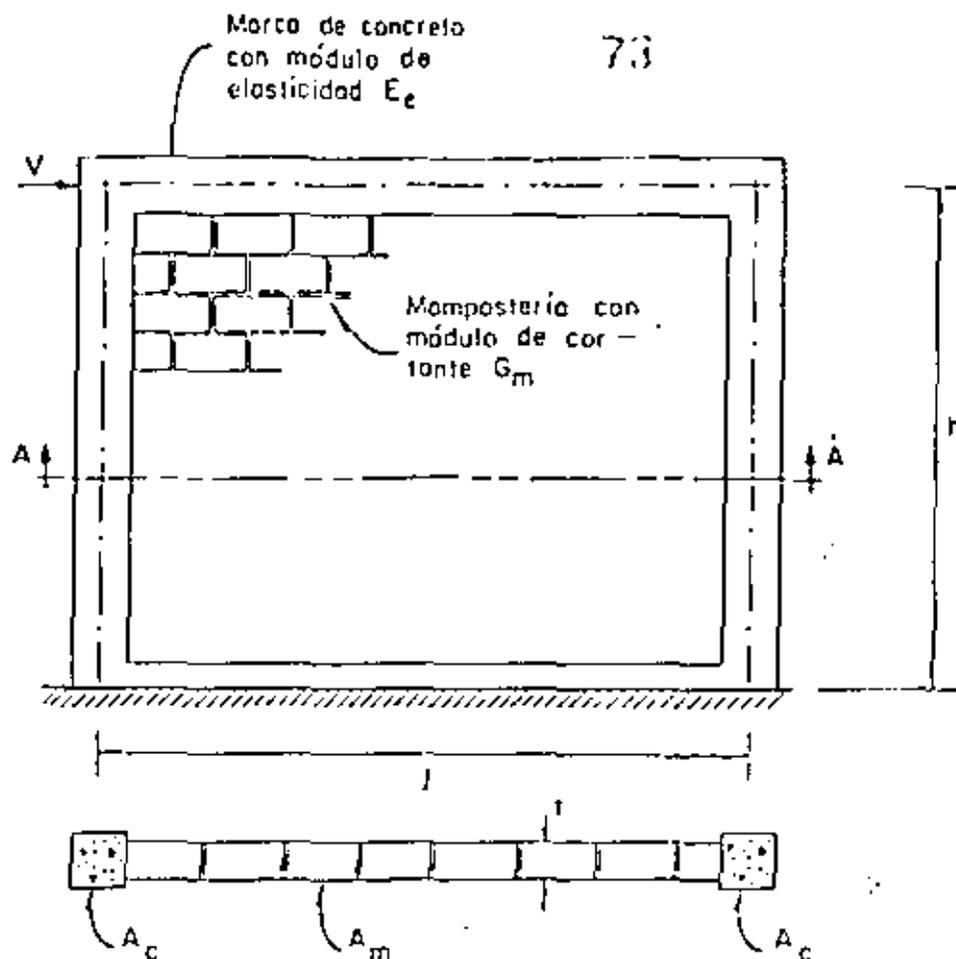


Fig 2.18 Diagonales en compresión equivalentes a tableros de mampostería confinados por vigas y columnas, cuando están sujetos a cargas laterales



Corte A-A

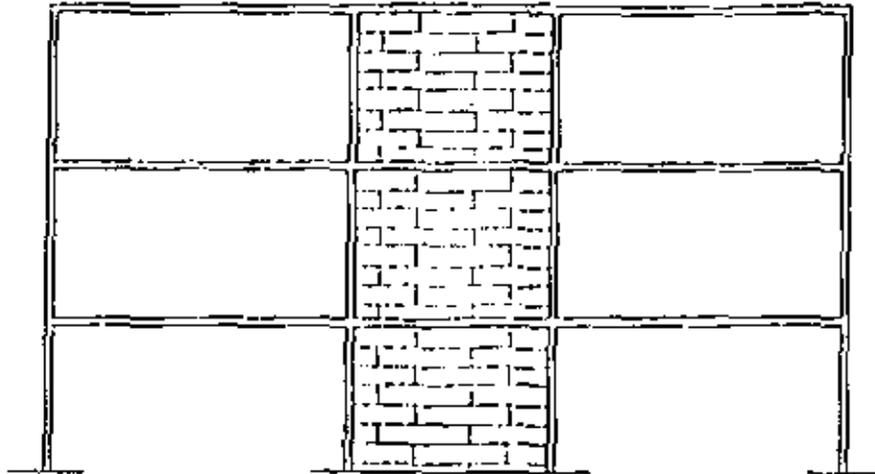
### Definiciones

$$\zeta = \frac{l}{h} = \text{relación de aspecto}$$

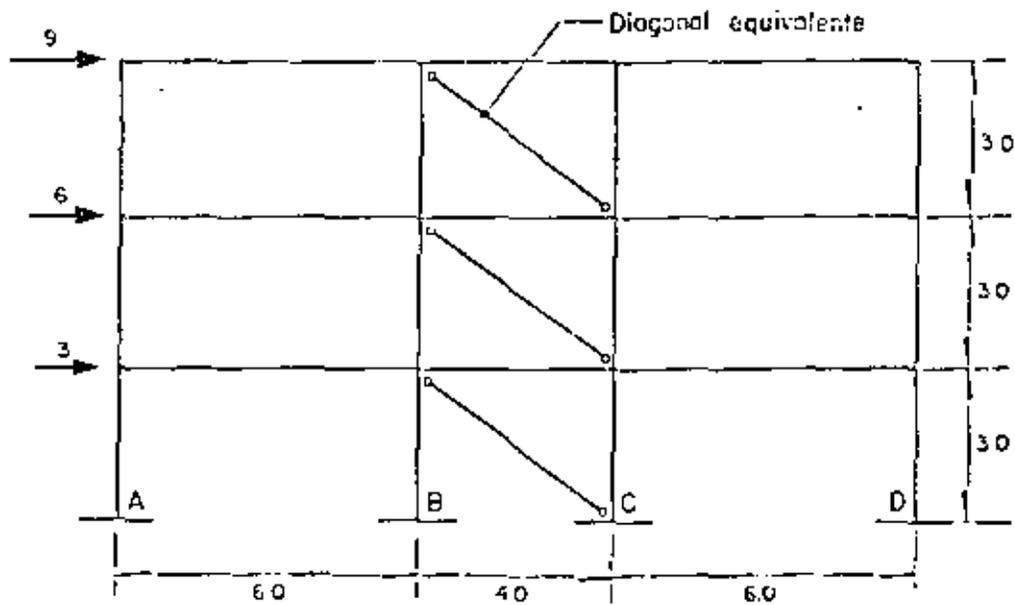
$$\lambda = \frac{E_c A_c}{G_m A_m}$$

$$I = \frac{A_c l^2}{2}$$

Fig 2.19 Definiciones empleadas para determinar la rigidez lateral de muros de mampostería confinados por marcos de concreto

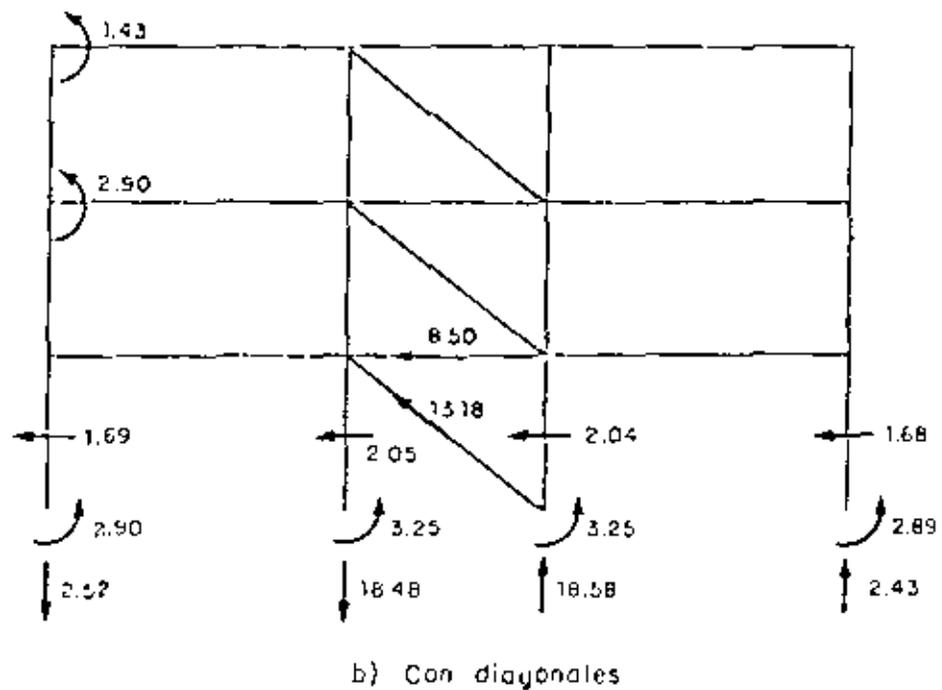
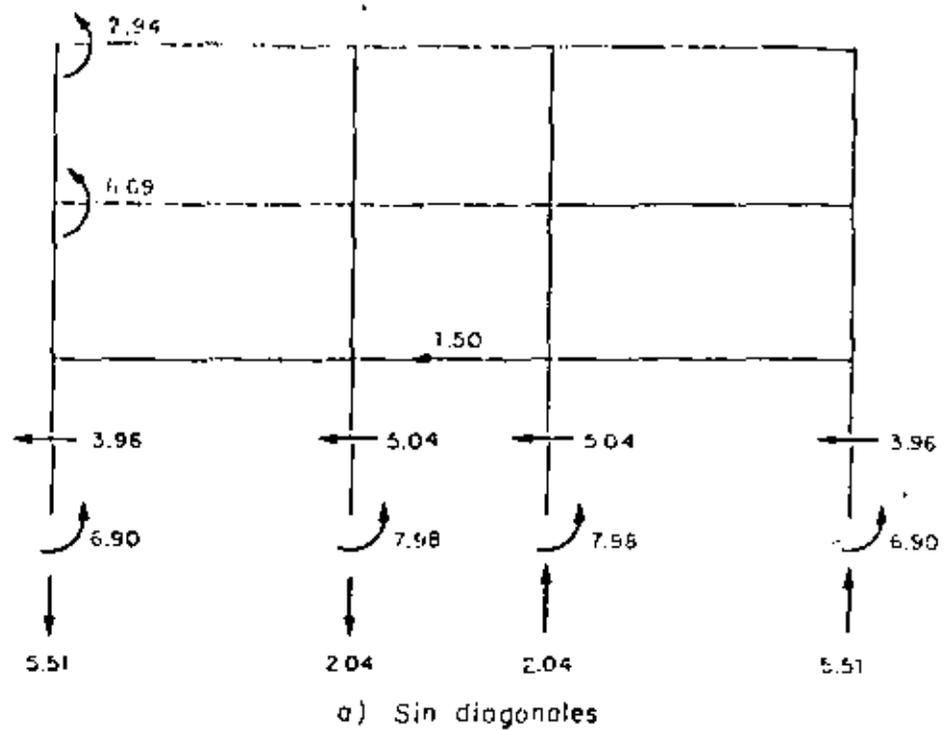


Columnas de 0.30 X 0.30 y vigas de 0.25 X 0.50, de concreto con  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$   
Muros de tabique de barro recocido de 0.15 m de espesor



Fuerzas en toneladas y longitudes en metros

Fig 2.20 Marco con muros de mampostería



Fuerzas en ton y momentos en ton-m

Fig 2.21 Algunos resultados de analizar el marco de la fig 2.19

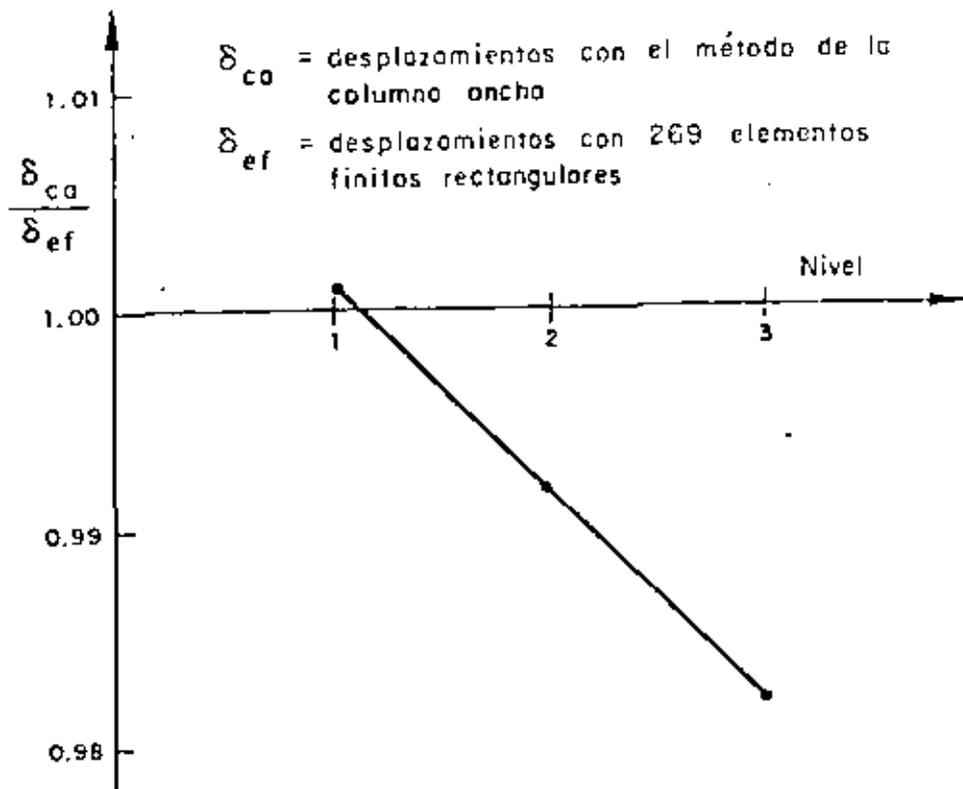
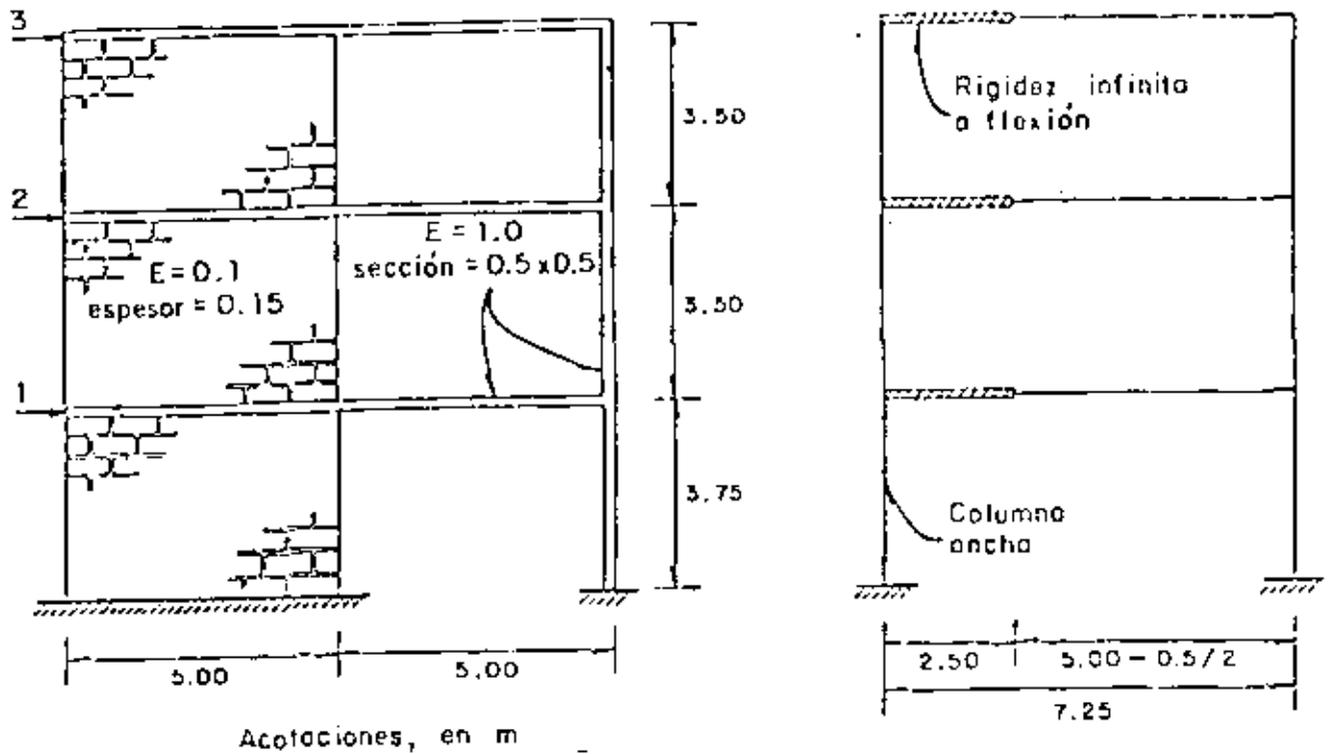


Fig 2.22 Comparación del método de elementos finitos con el de la columna ancha



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

T E M A 5

DAÑOS OBSERVADOS DURANTE TEMBLORES

H. en C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON  
Agosto, 1983

## Introducción

La ocurrencia de un movimiento sísmico intenso despierta siempre la atención de un gran número de ingenieros, sismólogos y autoridades gubernamentales, pues mucho es aún lo que debemos aprender para poder reducir cada vez más los daños y pérdidas de vidas que producen dichos movimientos.

Las deficiencias de los reglamentos de construcción, que tienen siempre un cierto atraso en relación con los avances logrados en el campo de la ingeniería sísmica; las deficiencias en cálculo, en parte también por falta de actualización de los ingenieros; la falta de detalle en los planos constructivos que hace que estos no reflejen las hipótesis hechas por el estructurista; los defectos constructivos o el comportamiento indeseable de ciertos materiales de construcción; la mala conservación o la acumulación de daños ocultos a través de varios temblores, son espectacularmente expuestos a raíz de un sismo intenso. Entre más antigua sea una construcción, mayor será la probabilidad de que alguno de los conceptos antes mencionados se manifieste.

Uno de los problemas que suelen presentarse es la falta de costumbre de la gente o su incredulidad, cuando se dice que en un cierto lugar de la tierra el riesgo sísmico es elevado. Como es sabido, los períodos de recurrencia de los sismos intensos son, afortunadamente, largos, lo que hace que muchas veces las personas se olviden del riesgo que corren y empiecen a relajarse incluso los reglamentos o bien, no se preocupe nadie por establecerlos en caso de que no existan. Sólo cuando se presenta un movimiento intenso y provoca muchos daños, surge la necesidad de componer la situación, pero esta efervescencia por desgracia es pasajera y al cabo de unos meses, todo se olvida y decae el interés.

\* Profesor Titular, Tiempo completo. DEPEFI, UNAM.

Otras personas consideran también que sismos de mediana intensidad son suficientes para probar las bondades de ciertas prácticas de cálculo o constructivas, y animados por la ausencia de daños ante estos movimientos leves, insisten en su práctica, no siempre sana, a pesar de que temblores intensos han demostrado, quizá en otra parte del mundo, que no debe seguirse y estas experiencias son de su conocimiento.

Poco a poco, a través de errores y fracasos, el hombre ha ido logrando el perfeccionamiento de los sistemas constructivos, así como el mejor conocimiento del comportamiento de los materiales al ser sometidos a los efectos de sismos intensos; sin embargo, aún falta mucho por hacer, sobre todo al nivel de vivienda popular, en países poco desarrollados o en vías de desarrollo, donde la intervención del ingeniero no existe y siguen repitiéndose los errores, como por ejemplo, del uso de mampostería de adobe, sin reforzar, combinada con sistemas de techos pesados y que no contribuyen a la resistencia.

### Sistemas estructurales

Para resistir las fuerzas laterales provocadas por los sismos, se dispone básicamente de sistemas estructurales a base de muros, sistemas estructurales a base de marcos rígidos constituidos por traveses y columnas unidas adecuadamente entre sí y sistemas estructurales constituidos por combinaciones de muros y marcos rígidos (ref. 1), fig 1.

Los muros pueden ser de carga o rigidez y estar hechos de adobe, piedra, tabique hueco o macizo o bloques huecos de concreto o bien ser de concreto reforzado. En general son bastante eficientes para resistir fuerzas elevadas en su plano si se toman precauciones especiales para evitar problemas de falla frágil. La ductilidad que pueden alcanzar estos sistemas es variable, pero en general, es menor que la que se alcanza con otros sistemas.

En ocasiones se usan grupos de muros unidos entre sí para formar tubos verticales (especialmente de concreto reforzado), que pueden comportarse de manera muy eficiente para resistir los efectos sísmicos, con ductilidad adecuada.

En muchos casos los muros no son considerados como elementos resistentes al momento de calcular la estructura; sin embargo, la falta de indicación de esto en los planos constructivos, aunada a prácticas constructivas deficientes, muchas veces de buena fé, pero ignorantes del problema que puede ocasionarse, hace que se integren los elementos que resistirán los efectos sísmicos, provocando serios problemas, como se verá más adelante.

Los sistemas estructurales a base de marcos rígidos son bastante empleados en la construcción de edificios de uso general, en los que se desconoce la distribución de los espacios durante la etapa de cálculo y se desea dar amplia libertad de uso. Se conocen también como estructuras esqueléticas y se construyen principalmente de concreto reforzado o de acero estructural aunque también suele usarse la madera en ciertos casos.

El empleo cada vez más frecuente de computadoras digitales para el análisis de este tipo de sistemas ha ido eliminando los problemas asociados a subestimaciones o sobre estimaciones de sus propiedades elástico-geométricas por el empleo de métodos aproximados de análisis sin verificar si se cumplen las restricciones de dichos métodos. Puede citarse como ejemplo la determinación de rigideces de entrepiso, y por consiguiente, de las deformaciones laterales que sufrirá la estructura, en marcos contruidos por columnas relativamente robustas en comparación con las trabes (ver 2).

Es bastante frecuente en nuestros días la combinación de sistemas a base de muros y a base de marcos. El problema fundamental de esta combinación es la determinación de la compatibilidad de deformaciones de ambos sistemas al estar sometidos a fuerzas horizontales, ya que su comportamiento aislado es completamente diferente, fig. 2. Puede ser muy eficiente esta combinación en edificios de gran altura. El empleo de computadoras digitales en el análisis es imprescindible para lograr una predicción adecuada del comportamiento de la estructura.

La estructuración que se adopte es fundamental en el éxito o fracaso de un edificio. El ingeniero estructurista no puede lograr que una forma estructural pobre, tal vez por causa de un capricho arquitectónico, se comporte satisfactoriamente en un temblor. Existe una serie de recomendaciones de tipo general (ref 3), que es conveniente seguir para lograr buenos resultados. Aun cuando no existe una forma universal para un tipo particular de estructura, esta debe de ser, siempre que sea posible: simple; simétrica; no demasiado alargada ni en planta ni en elevación; ser uniforme y tener su resistencia distribuida en forma uniforme, sin cambios bruscos; tener miembros horizontales en los que se formen articulaciones plásticas, antes que en los miembros verticales y que su rigidez sea adecuada en relación con las propiedades del subsuelo en que se construirá.

Esta última condición no se ha respetado en muchas ocasiones y ha sido la causa de problemas importantes. En general, se sabe que una estructura flexible se comporta mejor cuando está desplantada en un suelo rígido y una rígida cuando lo está en suelo blando. Aunque en esta definición quedan demasiado vagos los términos de rigidez de estructura y suelos, lo importante es que haya bastante diferencia, de ser posible, entre los períodos dominantes propios del terreno y de la estructura.

## Elementos no estructurales

Se consideran como elementos no estructurales aquellos que no contribuyen, teóricamente, a la resistencia de la estructura al ser sometida a los efectos sísmicos, tales como muros divisorios o de colindancia, fachadas, plafones, instalaciones hidráulicas, eléctricas, o de otro tipo, tanques, antenas, etc.

Los principales problemas son causados por la unión inadecuada de estos elementos a la estructura, provocando que, al deformarse ésta, se recargue con mayor o menor intensidad en aquellos, que al no estar diseñados para resistir los efectos del sismo, pueden sufrir daños considerables.

En muchos temblores recientes las mayores pérdidas económicas han ocurrido en elementos no estructurales, sobre todo en muros divisorios, de colindancia o de fachadas, debido a su elevada rigidez (no siempre compatible con su resistencia) que impide la deformación de la estructura si no hay holguras constructivas adecuadas.

Es frecuente que la estructura también resienta daños importantes, pues no está diseñada para tomar los esfuerzos que le transmiten los muros.

Resulta pues sumamente importante definir claramente en los planos constructivos cuales son los elementos que forman parte integrante de la estructura y cuales son no estructurales; indicando la forma en que deben colocarse, las holguras constructivas que deben dejarse, incluyendo los acabados y otras precauciones que se juzgue pertinentes, fig 3.

Como ya se indicó, los daños pueden ocurrir en elementos estructurales o "no estructurales". En el primer caso es necesario definir si los daños pueden poner en peligro la estabilidad de la estructura o no y que medidas deben tomarse para repararlos, como se comenta más adelante. Los daños más frecuentes son en los llamados elementos "no estructurales" cuando por alguna causa se les hace absorber fuerza sísmica; usualmente estos daños no ponen en peligro la estabilidad de la estructura pero su costo de reposición es elevado.

Los daños más comunes en elementos no estructurales consisten en:

- Agrietamientos ligeros o severos de muros o de sus acabados, figs 4 y 5.
- Colapsos parciales o totales de muros divisorios, plafones, aplanchados, etc., figs 6 y 8.
- Ruptura de tuberías o ductos de instalaciones.

En algunas ocasiones la falla o la presencia de los elementos "no estructurales" provoca fallas en miembros estructurales. La fig 8 ilustra la falla de una columna al absorber los esfuerzos que le transmitió un muro de fachada que trabajó como puntal. Nótese que la zona del muro donde los esfuerzos fueron más altos desapareció, pero la columna quedó deteriorada.

Son muy comunes las fallas de columnas cuya deformación es restringida parcialmente por la presencia de elementos "no estructurales", como pretilas o muros que no tienen la altura de entrepiso total, figs 9 a 12. En estos casos, al reducirse considerablemente la longitud de las columnas por la presencia de los elementos "no estructurales", aumenta mucho su rigidez a desplazamiento lateral, lo que hace que esas columnas absorban fuerzas mucho mayores

que aquellas para las cuales fueron diseñadas, especialmente cuando la rigidez ocurre sólo en unas cuantas columnas y las demás conservan su longitud de cálculo. La falla es espectacular y puede provocar el colapso total de la estructura al perder capacidad de carga completamente. El tramo corto de columnas es mucho más débil por cortante (falla frágil) que por flexión (falla dúctil); sin embargo, aún en casos de elementos de acero, cuyo comportamiento es dúctil se tienen problemas importantes por este concepto, fig 13. La fig 14 ilustra la forma en que puede eliminarse fácilmente este problema.

En elementos estructurales los daños más frecuentes son:

- Pérdida de verticalidad de la estructura por falla de la cimentación.
- Fallas de anclaje del refuerzo.
- Desconchamiento del recubrimiento.
- Pandeo local o generalizado.
- Golpeo contra construcciones vecinas por flexibilidad excesiva.
- Agrietamientos ligeros o severos en muros de carga o rigidez, con colapsos parciales o totales; figs 15 a 17.
- Formación de articulaciones plásticas en trabes o columnas o fallas por aplastamiento. Figs 18 a 25.
- Fractura de losas o escaleras, fig 26.
- Colapsos parciales o totales, figs 27 a 30.

Los informes del Instituto de Ingeniería Nos. 313 y 324 elaborados por el suscrito sobre los temblores de Managua el 23 de diciembre de 1972 y del ocurrido en una amplia región de México el 28 de agosto de 1973, de los cuales se han tomado la mayoría de las figuras, ilustran los daños antes mencionados, refs 4 y 5.

Se puede encontrar información adicional en numerosas publicaciones, algunas del mismo Instituto de Ingeniería de la UNAM, por ejemplo las referencias 6 a 8, o bien, descripciones de daños por temblor que han sido presentadas en los distintos congresos mundiales de ingeniería sísmica, referencias 9 a 14. El capítulo 9 de la referencia 15 ilustra el comportamiento de estructuras en los Estados Unidos a través de diversos temblores.

Como podrá observarse muchos de los daños que se han presentado podrían haberse evitado tomando precauciones mínimas durante la construcción. En otros casos, la intensidad del movimiento rebasó las predicciones que se tenían, o superó la capacidad estimada para las estructuras, obligando en ambos casos a modificar los reglamentos de construcción.

Actualmente se han refinado bastante las técnicas para estimar la sismicidad de un lugar. La determinación de la resistencia de las estructuras sometidas a sismos es también motivo de numerosas investigaciones. El uso de mesas vibradoras capaces de reproducir los movimientos sísmicos será cada vez frecuente en el futuro, lo que permitirá estudiar mejor estos efectos en modelos sin tener que esperar a que ocurran sismos intensos que descubran un nuevo tipo de falla, así como ensayar distintas formas de mejorar la resistencia de las construcciones.

Es muy frecuente que ciertas deficiencias en sistemas constructivos o estructurales hayan sido puestas en evidencia en un lugar y que esos mismos defectos sean comunes en otro lugar con sismicidad semejante, pero en el cual, hace tiempo que no han ocurrido temblores.

Lo normal es que a pesar de saber que puede haber serios daños en el segundo lugar cuando ocurra un sismo, no se haga nada para prevenirlos. Ciertamente es difícil, como ya se dijo antes, convencer a la gente del riesgo en

que se encuentra, y tal vez tenga que esperarse a que ocurran los daños para que se tomen cartas en el asunto. Evidentemente, la divulgación de este problema a nivel de autoridades gubernamentales; compañías de seguros, ingenieros estructuristas, arquitectos, etc. ayudará en la solución de este dilema.

En particular, con respecto a un sistema constructivo muy usado en la ciudad de Guadalajara para la construcción de casas y edificios a base de viguetas de acero y bóvedas de ladrillo, puede citarse la experiencia que se tuvo en 1972 en la población de Qir, Irán; ref. 17, donde se usaba un sistema muy similar que resultó seriamente dañado, figs. 31 a 35, pues la eficiencia de este sistema para absorber fuerzas laterales es muy debatible, si no se refuerza en forma adecuada.

Cabe mencionar también el caso de la construcción en Managua, a base de Taquezal, ref 4, que consiste en postes de madera hincados en el terreno, con tiras de madera horizontales clavados a ellos y rellenando los huecos con lodo o piedras. Este tipo de construcción ya había sido prohibido en Managua en 1968 a raíz de un sismo que produjo bastantes daños; sin embargo, no se hizo nada para proteger o reforzar las numerosas construcciones hechas con este sistema, que el temblor de 1972 se encargó de destruir completamente, figs. 36 a 38.

Algunos comentarios sobre la reparación de estructuras dañadas.

Después de cada temblor intenso, un buen número de estructuras quedan con daños estructurales más o menos severos y es necesario decidir si se reparan o se demuelen. En caso de repararlas, es preciso definir como debe llevarse a cabo la reparación.

No es fácil, de la simple observación de los daños, apreciar qué tan afectada puede estar una estructura. Es poco también lo que se conoce en relación con la acumulación de daños por temblor a través de varios movimientos intensos.

La reparación de una estructura debe hacerse a partir de un análisis muy detallado de la misma, teniendo especial cuidado de no alterar localmente sus propiedades resistentes, pues temblores futuros se encargarán de poner en evidencia las fallas que han sido inadecuadamente reparadas. La reparación local de elementos resistentes, bastante frecuente, puede conducir a un aumento en la rigidez del elemento reparado por lo que, en otro sismo, tomará mayor fuerza sísmica y puede volver a fallar, quizá con resultados peores que en la primera ocasión. Es muy frecuente que sea necesario reforzar elementos sanos con objeto de repartir las cargas sísmicas en una forma más adecuada. En ocasiones es conveniente poner una nueva estructura, quizá metálica, adosada a la dañada, más rígida que ésta, para absorber los efectos sísmicos en su totalidad cuidando que los sistemas de piso sean capaces de transmitir las fuerzas sísmicas adecuadamente. ref. 16.

En muchas construcciones de mampostería, el simple resane de los agrietamientos, sin estudiar por qué se agrietaron y qué puede pasar en temblores futuros, es muy peligroso, pues la estructura puede haber perdido gran parte de su capacidad a fuerzas laterales y sufrir colapsos importantes en temblores futuros. En ocasiones es mejor sustituir el elemento de mampostería dañado o reforzarlo adecuadamente. Se ha visto que un aplanado reforzado con malla puede restituir eficientemente la resistencia; sin embargo, será necesario estudiar el comportamiento de conjunto de la estructura, para decidir si sólo se refuerzan los elementos dañados o también se refuerzan otros

elementos, aparentemente sanos, pero que requieren ser reforzados para lograr un trabajo de conjunto eficiente.

### Referencias.

1. Response of buildings to lateral forces. Reporte del comité ACI 442. Journal ACI, Febrero 1971.
2. Dynamic characteristics of multistory buildings. John A. Blume. Journal of the Structural Division, ASCE, Febrero de 1968.
3. Earthquake Resistant Design. D. J. Dowrick, Wiley Interscience Publications. John Wiley and Sons, 1977.
4. Daños causados por los temblores del 23 de diciembre de 1972 en las construcciones de Managua. Enrique del Valle C. Abril 1973. Informe 313 Instituto de Ingeniería, UNAM.
5. Temblor del 28 de agosto de 1973. Aspectos estructurales. Enrique del Valle C. Octubre 1973. Informe 324 Instituto de Ingeniería, UNAM.
6. El temblor de Caracas, Julio 19 de 1967. L. Esteva, R. Díaz de Cossío, J. Elorduy, Publicación 168 Instituto de Ingeniería, UNAM, julio 1968.
7. Los efectos del terremoto del 28 de julio y la consiguiente revisión de los criterios para el diseño sísmico de estructuras. R. J. Marsal, E. Rosenblueth y F. Hiriart. Revista Ingeniería, enero 1958. (Publicación No. 6 del Instituto de Ingeniería, UNAM).
8. Temblores chilenos de mayo 1960; sus efectos en estructuras civiles.

- E. Rosenblueth. Revista Ingeniería, enero 1961, (Publicación No. 14 del Instituto de Ingeniería, UNAM).
9. Proceedings, First World Conference on Earthquake Engineering, 1 WCEE, Berkeley, California, 1956.
  10. Proceedings, Second World Conference on Earthquake Engineering, 2 WCEE, Tokio y Kioto, Japón, 1960.
  11. Proceedings, Third World Conference on Earthquake Engineering, 3 WCEE, Nueva Zelanda, 1965.
  12. Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering 4 WCEE, Santiago de Chile, 1969.
  13. Proceedings, Fifth World Conference on Earthquake Engineering, 5 WCEE, Roma, Italia, 1973.
  14. Proceedings, Sixth World Conference on Earthquake Engineering, 6 WCEE, Nueva Delhi, India, 1977.
  15. Earthquake Engineering, Robert L. Wiegel, editor. Prentice Hall, 1970.
  16. Del Valle E. Some lessons from the march 14, 1979 earthquake in Mexico City. Proceedings, Seventh World Conference on Earthquake Engineering, Estambul, Turquía, 1980.
  17. R. Razani y K. Lee "The engineering aspects of the Qir Earthquake of 10 April 1972 in Southern Iran". National Academy of Sciences, Washington (1973).

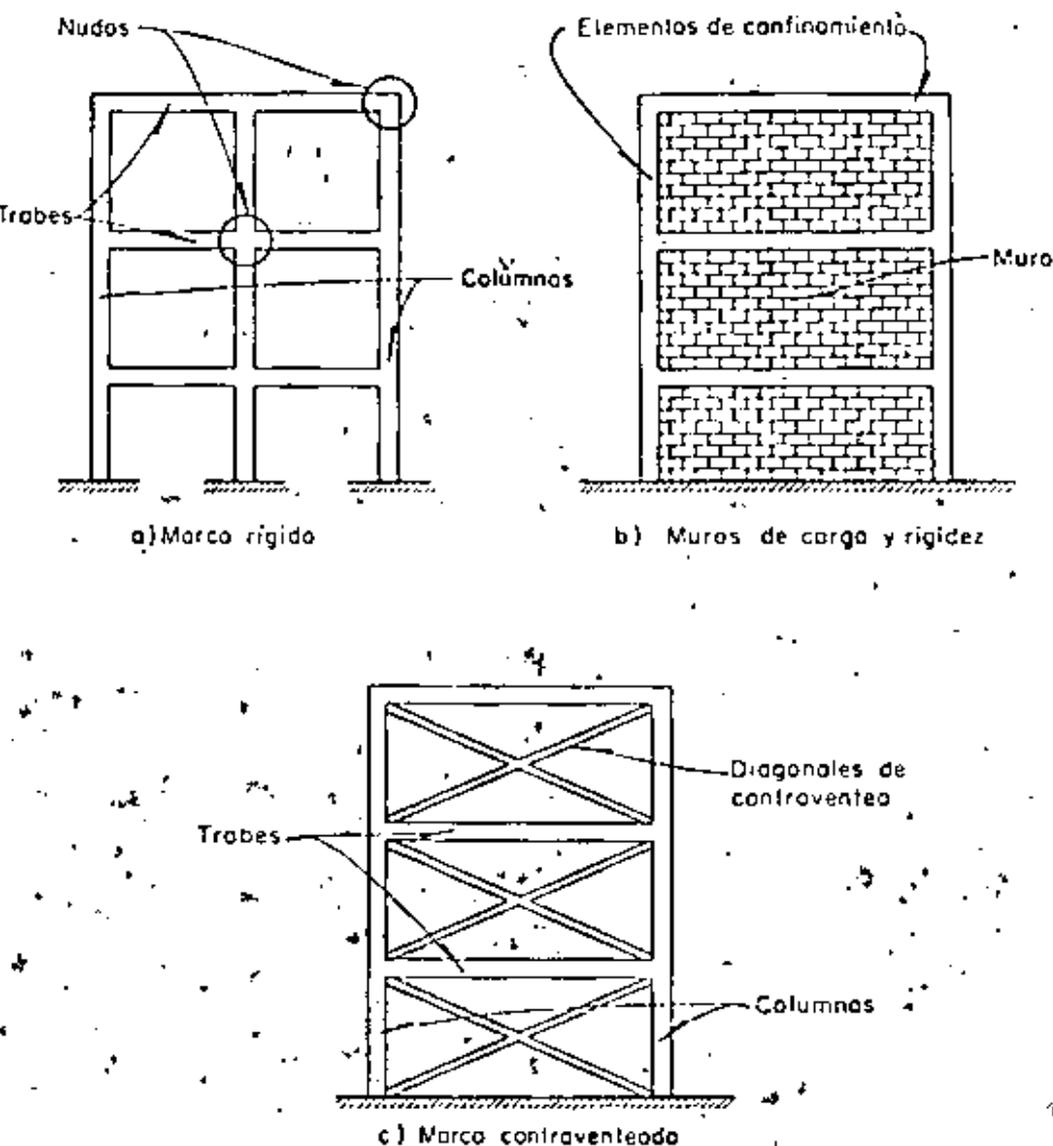


Fig 1. Elementos comúnmente empleados para resistir fuerzas laterales en las estructuras

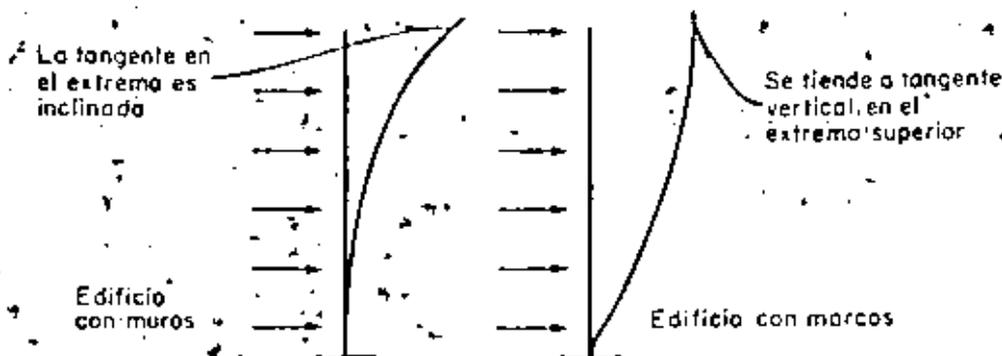


Fig 2. Deformaciones típicas en edificios con muros o marcos

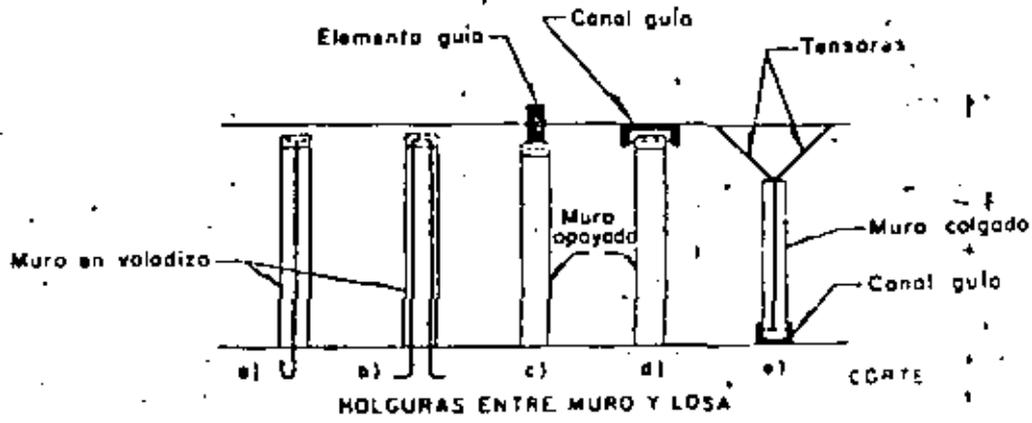


Fig 3 Posibles soluciones a muros que no forman parte integrante de la estructura



Fig. 4

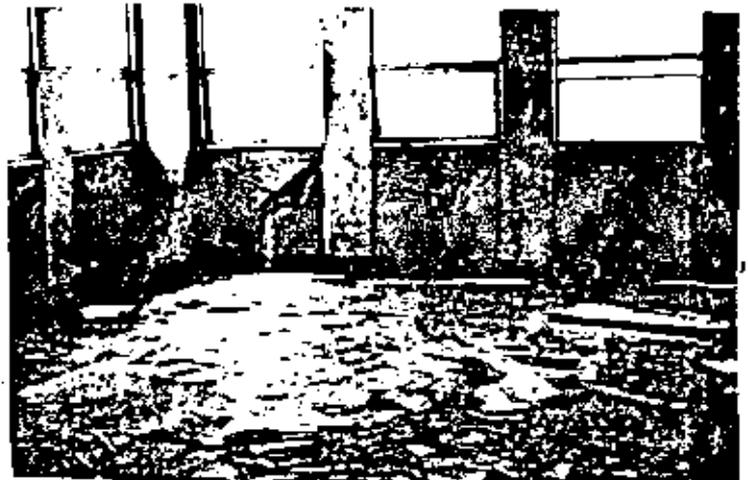


Fig. 5



Fig. 6

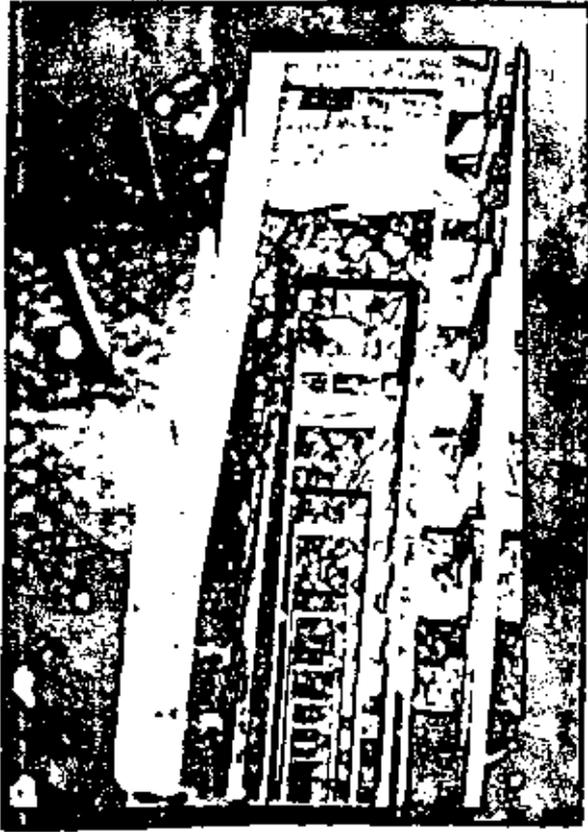


Fig. 7

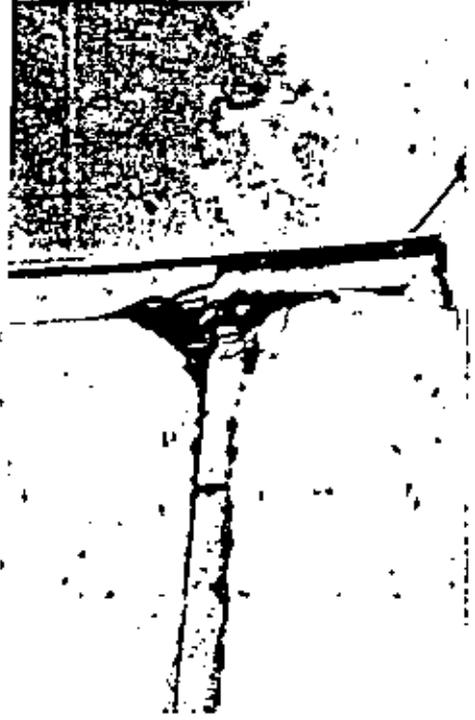


Fig. 8

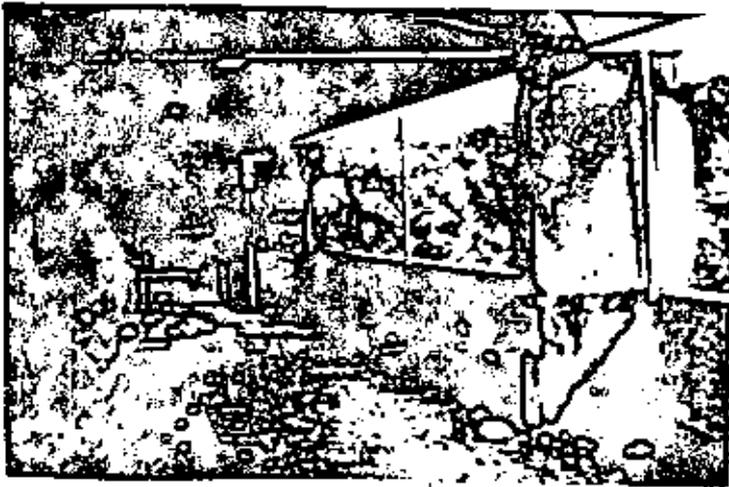


Fig. 9



Fig. 10



Fig. 11

Fig 14 Muros bajos desligados para emitir columnas cortas

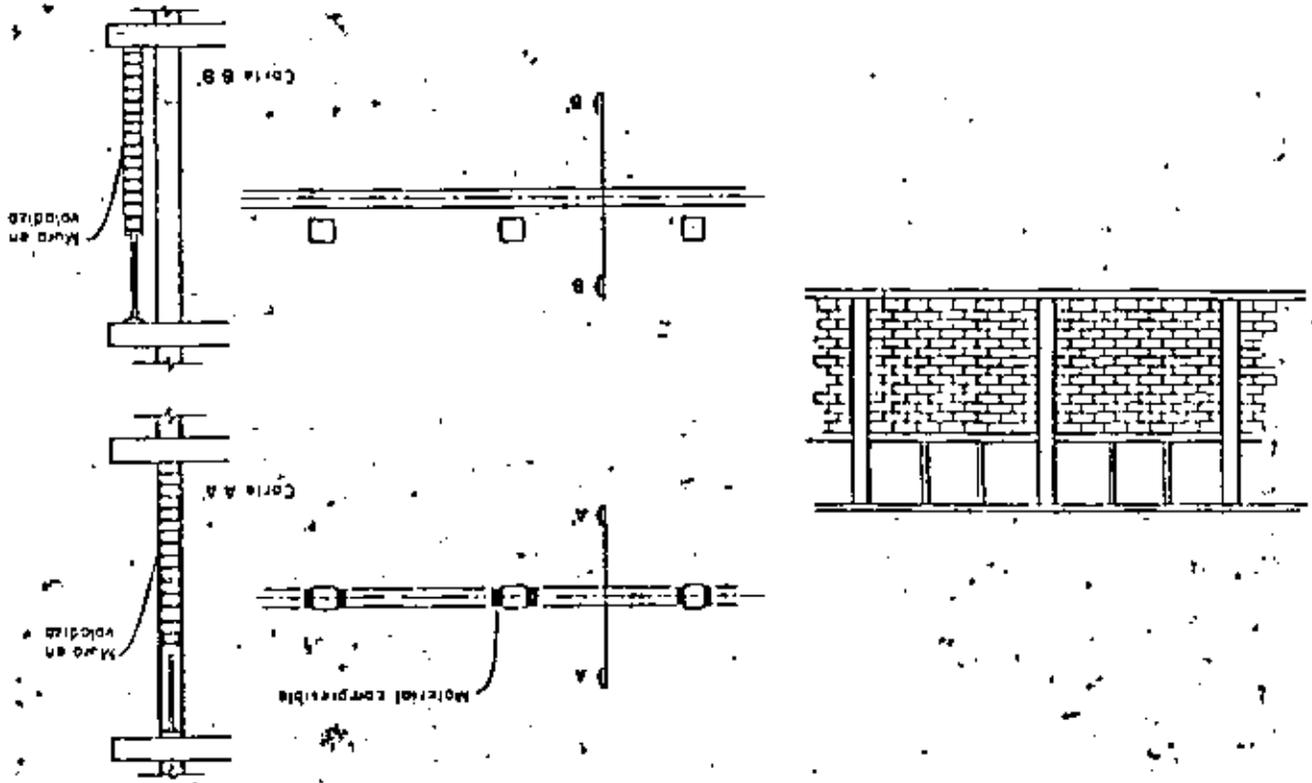


Fig 13



Fig 12





Fig. 15



Fig. 18



Fig. 16



Fig. 17



Fig. 19



Fig. 20



Fig. 21

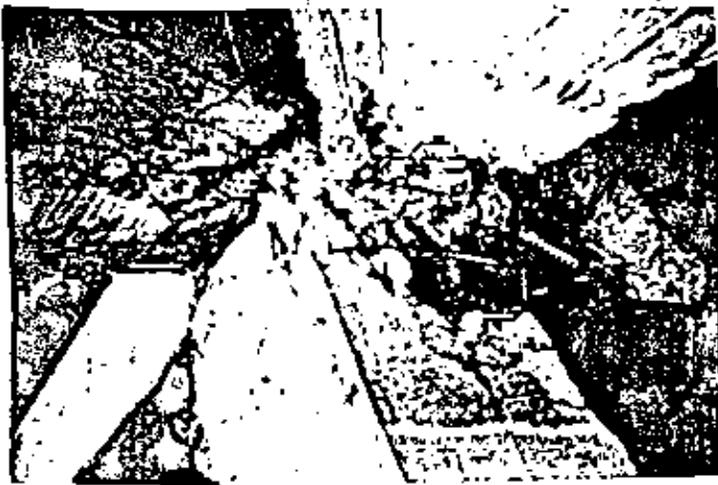


Fig. 22



Fig. 23



Fig. 24



Fig. 25



Fig. 26



Fig. 27



Fig. 28

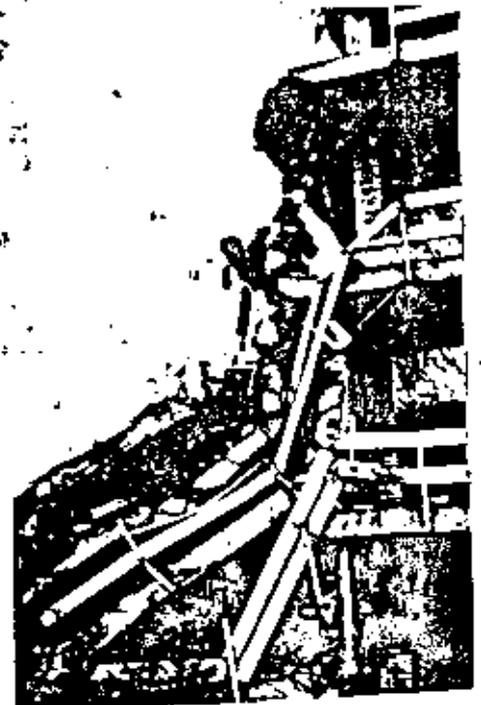
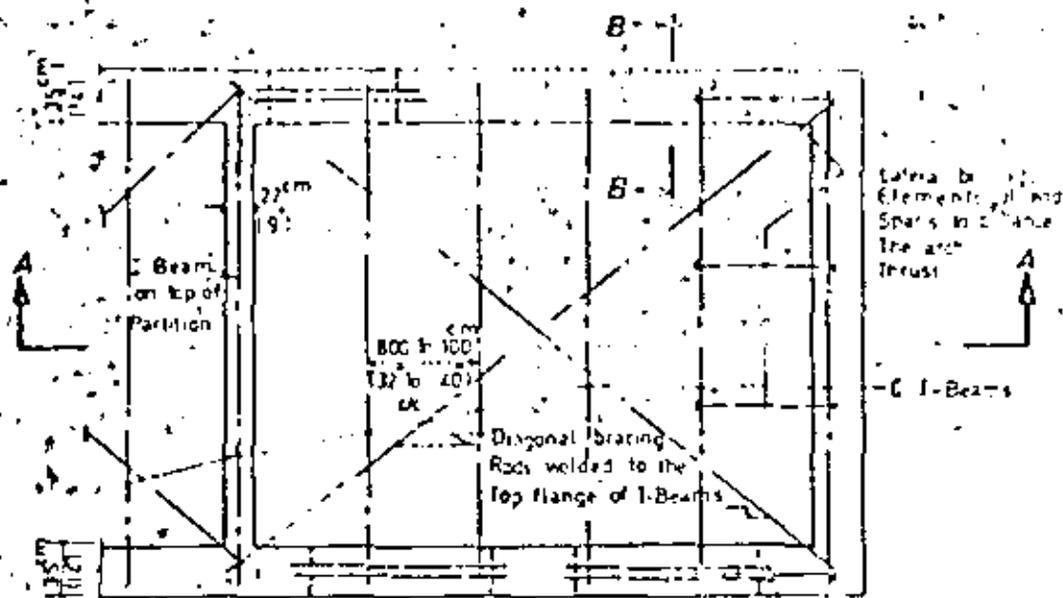


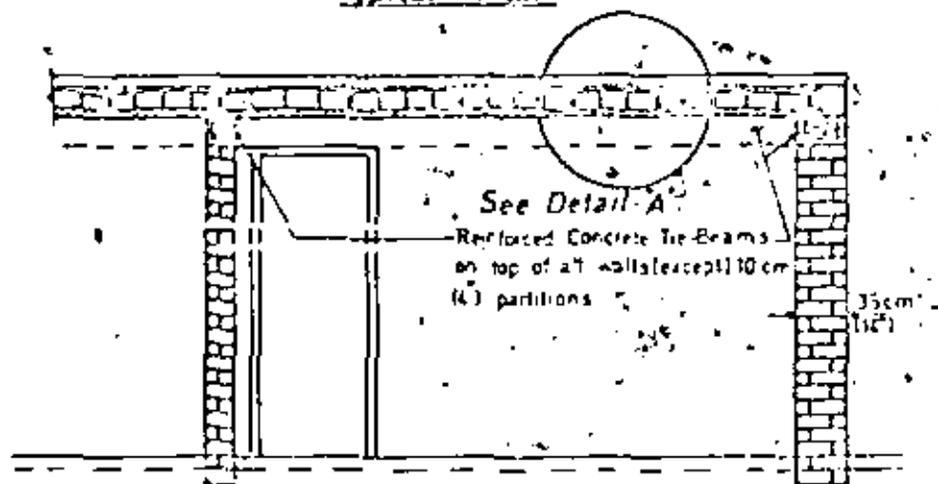
Fig. 30



Fig. 29



Typical Plan

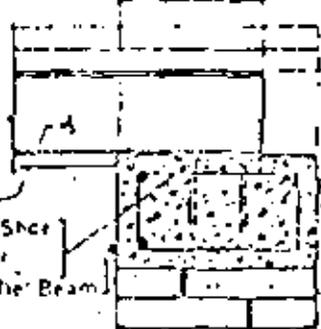


Section A-A

Shallow Brick Arches



Detail A



Section B-B

Fig 31



Fig. 32



Fig. 33.

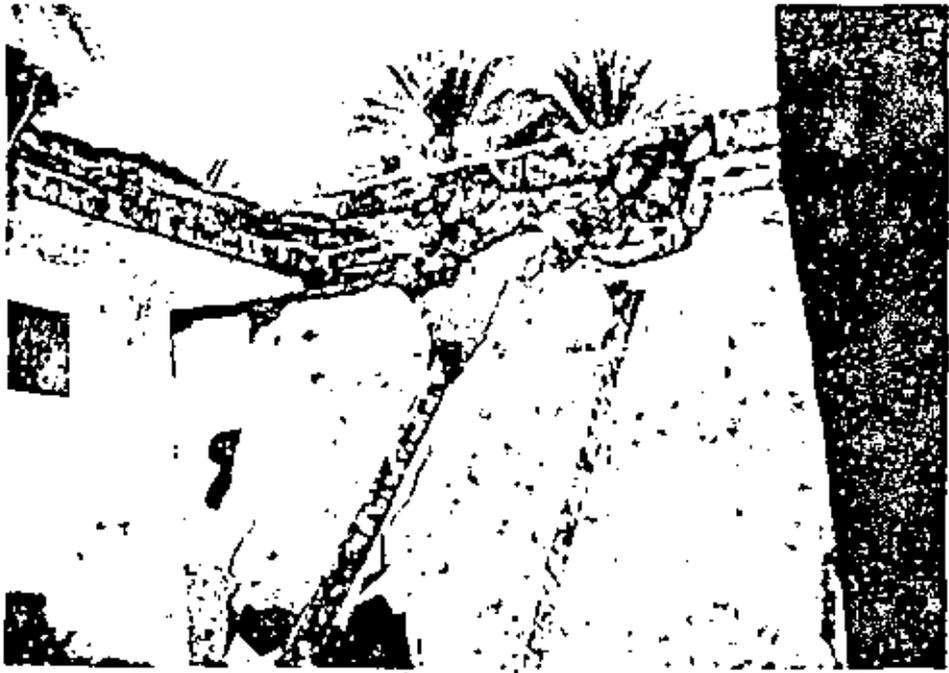


Fig. 34



Fig. 35



Fig. 36

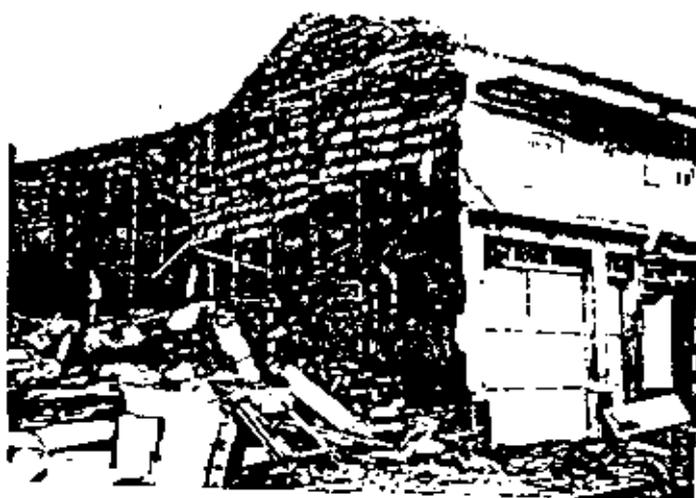


Fig. 37



Fig: 38



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

**TEMAS 4 y 6  
METODOS DE DISEÑO SISMICO Y EJEMPLOS**

**POR ENRIQUE BAZAN  
Y ROBERTO MELI PIRALIA  
Agosto, 1983**

#### 4. ANALISIS SISMICO ESTATICO-DE-EDIFICIOS

##### 4.1 Aspectos generales

El Reglamento permite en su art 238, que el análisis sísmico de edificios con altura menor de 60 m se realice de acuerdo con el método estático, que se describe en el art 240.

La aplicación de este método consta esencialmente de los siguientes pasos:

a) Se representa la acción del sismo por fuerzas horizontales que actúan en los centros de masas de los pisos, en dos direcciones ortogonales.

b) Estas fuerzas se distribuyen entre los sistemas resistentes a carga lateral que tiene el edificio (muros y/o marcos).

c) Se efectúa el análisis estructural de cada sistema resistente ante las cargas laterales que le correspondan.

En este capítulo se tratan los puntos a y b, ilustrándolos mediante ejemplos y

tratando de incluir las diversas opciones que se consideran en el art 240. El punto c ha sido objeto de los capítulos 1 y 2 de este trabajo.

Como un caso particular del análisis estático se incluye aquí lo que el Reglamento denomina método simplificado de análisis, cuya aplicabilidad y procedimiento se especifican en el art 239.

#### 4.2 *Valuación de fuerzas sísmicas sin estimar el período fundamental del edificio*

Según el inciso I del art 240, las fuerzas cortantes sísmicas en los diferentes niveles de una estructura pueden valuar se suponiendo un conjunto de fuerzas horizontales que actúan sobre cada uno de los puntos donde se supongan concentradas las masas. La fuerza actuante donde se concentra una masa  $i$  es igual al peso de la misma,  $W_i$ , por un coeficiente proporcional a la altura  $h_i$  de la masa en cuestión sobre el desplante (o nivel a partir del cual las deformaciones estructurales pueden ser apreciables), sin incluir tanques, apéndices u otros elementos cuya estructuración difiera radicalmente del resto de la estructura. El factor de proporcionalidad se tomará de tal manera que la relación  $V/W$  en la base sea igual a  $c/Q$  pero no menor que  $a_0$ . Los valores de  $c$  y de  $a_0$  están dados en los art 234 y 236, respectivamente, y se repiten en la tabla 4.1 de esta publicación.  $Q$  es el factor de reducción por ductilidad que se escoge de acuerdo con el art 235.

##### 4.2.1 *Edificios sin apéndices*

En el caso en cuestión, la aplicación de lo estipulado en el art 240 conduce a que la fuerza horizontal  $P_i$  aplicada en el centro de masas del nivel  $i$  está dada por la fórmula

$$P_i = \frac{W_i h_i}{\sum W_j h_j} c_s \sum W_j \quad (4.1)$$

donde  $c_s$  es el mayor valor entre  $c/Q$  y  $a_0$ .

La aplicación de esta fórmula se ejemplifica en la tabla 4.2 para el edificio esquematizado en la fig 4.1. Se considerará que la estructuración, los materiales y los detalles constructivos empleados son tales que el factor de ductilidad  $Q$  puede considerarse igual a 4 en la dirección  $X$ , e igual a 2 en la dirección  $Y$ . Obsérvese que los valores de  $Q$  no tienen que ser iguales en las dos direcciones, porque las estructuraciones pueden ser diferentes.

Se supondrá que la estructura está ubicada en la zona de terreno compresible (III) y que se trata de una construcción que por su importancia se clasifica como de tipo A.

Con estos datos, en la tabla 4.1 se encuentra que

$$c = 0.24 \times 1.3 = 0.312 \quad ; \quad a_0 = 0.06 \times 1.3 = 0.078$$

$$\text{en la dirección } X: c/Q = 0.312/4 = 0.078 = a_0$$

$$\text{en la dirección } Y: c/Q = 0.312/2 = 0.156 > a_0$$

Por tanto  $c_{sx} = 0.078$  y  $c_{sy} = 0.156$ . En la tabla 4.2 se presentan en forma sistematizada las operaciones para obtener las fuerzas cortantes en los entrepisos, así como su posición.

#### 4.2.2 Edificios con apéndices

En este caso no se aplica la fórmula 4.1 y para valuar las fuerzas en los pisos debe emplearse textualmente el párrafo I del art 240.

Para determinar las fuerzas en un apéndice se debe aplicar el párrafo V del art 240, según el cual se supondrá actuando sobre dicho apéndice la misma distribución de aceleraciones que le correspondería si se apoya directamente en el suelo, multiplicada por  $(c' + a_0)/a_0$ , donde  $c'$  es el factor por el que se multiplica el peso del nivel de desplante del apéndice cuando se valúan las fuerzas sobre toda la construcción.

Para ilustrar los cálculos, considérese el edificio esquematizado en la fig 4.2;

supóngase  $Q = 4$  y que se trata de una construcción del tipo B, desplantada en terreno firme. Con tales datos en la tabla 4.1 se encuentra

$$c = 0.16, \quad a_0 = 0.03$$

El coeficiente sísmico es el mayor de  $0.16/4$  y  $0.03$ , es decir  $0.04$ . Esto quiere decir que  $V/W$  debe ser igual a  $0.04$  estando incluidos en  $V$  y en  $W$  las fuerzas laterales y los pesos, respectivamente, de los apéndices.

Las fuerzas sísmicas en los pisos 1 a 5 son proporcionales a los <sup>productos de los</sup> pesos  $W_i$  por las alturas  $h_i$ . Sea  $\alpha$  la constante de proporcionalidad, entonces

$$P_5 = \alpha W_5 h_5 = 300 \times 15 \alpha = 4500 \alpha$$

$$P_4 = \alpha W_4 h_4 = 400 \times 12 \alpha = 4800 \alpha$$

$$P_3 = \alpha W_3 h_3 = 400 \times 9 \alpha = 3600 \alpha \quad (4.2)$$

$$P_2 = \alpha W_2 h_2 = 400 \times 6 \alpha = 2400 \alpha$$

$$P_1 = \alpha W_1 h_1 = 400 \times 3 \alpha = 1200 \alpha$$

Si los apéndices estuviesen apoyados directamente en el suelo, tendrían unas fuerzas sísmicas iguales a

$$P'_6 = 0.04 W'_6 = 0.04 \times 5 = 0.20$$

$$P'_7 = 0.04 W'_7 = 0.04 \times 10 = 0.40 \quad (4.3)$$

Para el apéndice que pesa  $W_6$ , el valor de  $c'$  es el factor por el cual se multiplica  $W_6$  para obtener la fuerza  $P_6$ , es decir, según las expresiones 4.2,  $c' = \alpha h_6 = 3\alpha$ . Análogamente, para el apéndice que pesa  $W_7$  se tiene  $c'_7 = \alpha h_7 = 15\alpha$ .

Las fuerzas de la expresión 4.3 tienen que multiplicarse por  $(c'_i + a_0)/a_0$ , como sigue:

$$P_6 = 0.20 (3\alpha + 0.03)/0.03 = 20\alpha + 0.20$$

$$P_7 = 0.40 (15\alpha + 0.03)/0.03 = 200\alpha + 0.40 \quad (4.4)$$

Para calcular  $\alpha$  se emplea la condición de que la suma de las fuerzas  $P_1$  a  $P_7$  entre la suma de los pesos  $W_1$  a  $W_7$  debe ser igual a 0.04. Usando las expresiones 4.2 y 4.4 se llega a:

$$16720\alpha + 0.6 = 0.04 \quad (1915)$$

de donde

$$\alpha = 0.00454545$$

sustituyendo este valor en 4.2 y 4.4 se obtiene:

$P_7 = 1.31$	,	$V_7 = 1.31$
$P_5 = 20.45$	,	$V_5 = 21.76$
$P_4 = 21.82$	,	$V_4 = 43.58$
$P_3 = 16.36$	,	$V_3 = 59.94$
$P_2 = 10.91$	,	$V_2 = 70.85$
$P_6 = 0.29$	,	$V_6 = 0.29$
$P_1 = 5.49$	,	$V_1 = 76.63$

los valores son toneladas y, como verificación  $V/W = 76.63/1915 = 0.04$ .

(Cuando la masa de los apéndices es pequeña comparada con la que se concentra en los pesos, opcionalmente, se puede ignorar en primera instancia los apéndices y aplicar la expresión 4.1. Así se tiene:

$$C_s = 0.04, \quad V_{\text{total}} = 0.04 \times \sum W_i = 0.04 \times 1900 = 76 \text{ Ton}$$

$W_5 h_5 = 300 \times 15 = 4500$	;	$P_5 = 4500 \times 0.004606 = 20.73$
$W_4 h_4 = 400 \times 12 = 4800$	;	$P_4 = 4800 \times 0.004606 = 22.11$
$W_3 h_3 = 400 \times 9 = 3600$	;	$P_3 = 3600 \times 0.004606 = 16.58$
$W_2 h_2 = 400 \times 6 = 2400$	;	$P_2 = 2400 \times 0.004606 = 11.05$
$W_1 h_1 = 400 \times 3 = 1200$	;	$P_1 = 1200 \times 0.004606 = 5.53$
$\Sigma = 16500$		$76.00$

donde  $76/16500 = 0.004606$

Las fuerzas que corresponden a los apéndices como si estuviesen desplantados sobre el suelo se dan en la expresión 4.3. Para el apéndice  $W_4$ ,  $c'$  es el

factor por el que se multiplica  $W_1$  para obtener  $P_1$ , esto es  $c_1' = P_1/W_1 =$

$5.53/400 = 0.0138$ . Similarmente para el apéndice  $W_7$ ,  $c_7' = P_5/W_5 = 20.73/300 = 0.0691$ . Como  $a_{01} = 0.03$ , los valores de 4.3 deben multiplicarse por  $(c_1' + 0.03)/0.03$ , es decir, por  $(0.0138 + 0.03)/0.03 = 1.46$  para  $W_6$ , y por  $(0.0691 + 0.03)/0.03 = 3.30$  para  $W_7$ ; se obtiene:

$$P_6 = 0.20 \times 1.46 = 0.29$$

$$P_7 = 0.40 \times 3.30 = 1.32$$

Comparando los valores  $P_6$  a  $P_7$  con los obtenidos considerando el factor de proporcionalidad  $\alpha$ , se observa que son muy similares. Las fuerzas cortantes son ahora:

- $V_7 = 1.32$
- $V_5 = 22.05$
- $V_4 = 44.16$
- $V_3 = 60.74$
- $V_2 = 71.79$
- $V_6 = 0.29$
- $V_1 = 77.61$

Se yerra ligeramente del lado de la seguridad, puesto que  $77.61/1915 = 0.0405$  en vez de 0.04.

#### 4.3 *Valuación de fuerzas sísmicas estimando el periodo fundamental del edificio*

El párrafo II del art 240 permite usar fuerzas cortantes menores que las calculadas según lo descrito en la sección precedente. Para esto se requiere calcular el periodo fundamental de vibración del edificio  $T$ , en forma aproximada, con la expresión siguiente:

$$T = 0.3 \left( \frac{\sum W_i x_i^2}{g \sum P_i x_i} \right)^{1/2} \tag{4.6}$$

en donde  $W_i$  es el peso de la masa  $i$ ,  $P_i$  la fuerza horizontal que actúa en ella

de acuerdo con el procedimiento en que no se estimó el periodo,  $x_i$  el desplazamiento correspondiente en la dirección de  $P_i$ , y  $g$  la aceleración de la gravedad.

De acuerdo con el valor resultante de  $T$ , se aplica una de las tres opciones siguientes:

i) Si  $T_1 \leq T \leq T_2$  ( $T_1$  y  $T_2$  se dan en la tabla 4.1) no se permite reducción

ii) Si  $T > T_2$  la fuerza lateral en la masa  $i$  es igual a

$$P_i = W_i (k_1 h_i + k_2 h_i^2) c/Q \quad (4.7)$$

siendo

$$k_1 = q \{ 1 - r (1 - q) \} \Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i)$$

$$k_2 = 1.5 r q (1 - q) \Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i^2)$$

$$q = (T_2/T)^r$$

$Q$  = factor de reducción por ductilidad

$h_i$  es nuevamente la altura de la masa  $i$  sobre el nivel de desplante, y  $r$ , el valor dado en la tabla 4.1.

iii) Si  $T < T_1$ , las fuerzas laterales <sup>proporcionales a</sup> son las obtenidas con el procedimiento en que no se estima el periodo, <sup>reducidas</sup> pero de tal manera que la relación  $V/W$  en la base sea igual a

$$c_{sr} = \{ a_0 + (c - a_0) T/T_1 \} / Q' \quad (4.8)$$

donde

$$Q' = 1 + (Q - 1) T/T_1$$

#### 4.3.1 Edificio tratado en la sección 4.2.1

Como ilustración, se examinará si es posible reducir las fuerzas sísmicas obtenidas en el ejemplo de la sección 4.2.1, en la dirección  $Y$ . Partiendo de va

lores de las rigideces dados en la fig 4.1 y de los resultados obtenidos en la tabla 4.2, se presentan en la tabla 4.3a los cálculos necesarios para obtener  $T$ , según la fórmula 4.6.

El resultado es  $T = 0.51$  seg, menor que  $T_1 = 0.8$  seg (tabla 4.3a), por lo que la relación  $V/W$  en la base se puede tomar, igual a la dada por la expresión 4.8, donde hay que considerar  $a_0 = 0.06 \times 1.3 = 0.078$  y  $c = 0.24 \times 1.3 = 0.312$ .

Así se obtiene:

$$Q' = 1 + (2 - 1) \frac{0.51}{0.8} = 1.64$$

$$c_{sr} = (0.078 + (0.312 - 0.078) 0.51/0.8)/1.64 = 0.139$$

Las fuerzas  $P_{iy}$  calculadas en la tabla 4.2 dan, para  $V/W$  en la base, el valor  $107.63/690 = 0.156$  (igual a  $c_{sy}$ ). Para que dicha relación valga 0.139 hay que multiplicar las  $P_{iy}$  por  $0.139/0.156 = 0.891$  y se obtienen así los valores reducidos,  $P_{iyr}$ , que se presentan en la tabla 4.3b. Esta reducción no modifica las posiciones de las cortantes, calculadas en la tabla 4.2, porque todas las fuerzas se multiplican por el mismo factor.

El periodo de este edificio a la dirección  $x$  resulta 0.97 seg, y como se encuentra entre 0.8 y 3.3 seg, no se admite reducción de las fuerzas sísmicas en esta dirección.

#### 4.3.2 Edificio tratado en la sección 4.2.2

Para estimar el periodo de este edificio se ignoran las fuerzas y pesos de los apéndices. En la tabla 4.4 se presentan los cálculos que conducen a  $T = 1.17$  seg, partiendo de los datos y resultados de la sección 4.2.2 y de la fig 4.2.

Como en este caso  $T_2 = 0.8$ , entonces  $T > T_2$  y se aplican las expresiones 4.7, en la forma presentada en la tabla 5.5.

#### 4.4 Distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes del edificio

En lo que sigue se describen dos procedimientos para distribuir las fuerzas sísmicas que actúan en los pisos de un edificio entre los diferentes elementos resistentes verticales (marcos y/o muros y/o contravientos). En ambos procedimientos se

acepta la hipótesis de que los pisos son diafragmas rígidos en su plano; la que, como se comentó en la sec 3.3, puede ser inadmisibles en ciertos casos.

En este paso del análisis sísmico hay que considerar que el art 240 especifica, en su párrafo VII, que el momento torsionante se tomará igual a la fuerza cortante de entrepiso multiplicada por la excentricidad que para cada marco resulte más desfavorable de las siguientes:  $1.5 e_s + 0.1 b$ , ó  $e_s - 0.1 b$ , donde  $e_s$  es la excentricidad torsional calculada en el entrepiso considerado y  $b$  es la máxima dimensión en planta de dicho entrepiso, medida perpendicularmente a la dirección del movimiento del terreno que se esté analizando.

También se debe tener presente que el art 237, estipula que las estructuras se analizarán bajo la acción de dos componentes horizontales ortogonales de movimiento del terreno, y que en cada sección crítica se debe considerar la suma vectorial de los efectos (desplazamientos y fuerzas internas) de un componente de movimiento del terreno con 0.3 de los efectos del otro, en adición a los efectos de fuerzas gravitatorias.

#### 4.4.1 Entrepisos con sistemas resistentes ortogonales

La fig 4.3 muestra, en planta, un entrepiso de un edificio en el cual se identifican con subíndices  $x$ ,  $y$ , los sistemas (marcos y/o muros) que resisten fuerzas paralelas a las direcciones  $X$ ,  $Y$ , respectivamente. La rigidez de entrepiso de cada elemento se designa por  $R_{jx}$  o  $R_{jy}$ . Se supone que éstas son conocidas. En general es posible usar valores aproximados para fines de una distribución preliminar y refinarlos teniendo en cuenta el sistema de fuerzas laterales obtenidas en cada elemento mediante la primera estimación de rigideces.

El procedimiento de distribución de fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes consiste en los siguientes pasos:

- a) La fuerza horizontal  $P_i$  aplicada en el centro de gravedad de cada nivel  $i$  se calcula como se describió en la sec 4.3.

- b) Se obtiene por estático <sup>equilibrio</sup> la línea de acción de la cortante sísmica

mica en cada entrepiso para las dos direcciones ortogonales paralelas a los sistemas resistentes.

- c) Se calculan las rigideces de entrepiso de los elementos resistentes en ambas direcciones y en todos los entrepisos.
- d) Se determina la posición del centro de torsión en cada entrepiso. Este centro es el punto por el que debe pasar la línea de acción de la fuerza cortante sísmica para que el movimiento relativo de los dos niveles consecutivos que limitan el entrepiso sea exclusivamente de traslación. En caso contrario existe torsión o rotación relativa entre dichos niveles.

Las expresiones para calcular el centro de torsión son:

$$x_t = \frac{\sum (R_{jy} x_j)}{\sum R_{jy}} \quad (4.9)$$

$$y_t = \frac{\sum (R_{jx} y_j)}{\sum R_{jx}} \quad (4.10)$$

$x_j, y_j$  son las coordenadas de los elementos resistentes.

- e) La fuerza cortante que debe ser resistida por un elemento resistente cualquiera es igual a la suma de dos efectos: el debido a la fuerza cortante del piso, supuesta actuando en el centro de torsión, y el debido al momento torsionante del piso. Si la dirección analizada del sismo es paralela al eje  $x$ , se obtienen las cortantes siguientes

En los elementos resistentes  $x$ , por efecto de la fuerza cortante aplicada en el centro de torsión:

$$\frac{V_x R_{jx}}{\sum R_{jx}} \quad (4.11)$$

En los elementos resistentes  $x$ , por efecto de la torsión:

$$\frac{M_t R_{jx} y_{jt}}{(\Sigma R_{jx} y_{jt}^2 + \Sigma R_{jy} x_{jt}^2)} \quad (4.12)$$

En los elementos resistentes  $y$ , por efecto de la torsión:

$$\frac{M_t R_{jy} x_{jt}}{(\Sigma R_{jx} y_{jt}^2 + \Sigma R_{jy} x_{jt}^2)} \quad (4.13)$$

En las expresiones anteriores,

$V_x, V_y$  = fuerza cortante sísmica en el entrepiso considerado, en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente

$x_{jt}, y_{jt}$  = distancias de los elementos resistentes con respecto al centro de torsión del entrepiso en cuestión.

$M_t$  = momento torsionante en el entrepiso considerado, que es igual al producto de la fuerza cortante en el entrepiso por la más desfavorable de las siguientes excentricidades

$$e_1 = 1.5 e_s + 0.1 b \quad (4.14)$$

$$e_2 = e_s - 0.1 b \quad (4.15)$$

donde  $e_s$  es la excentricidad calculada como la distancia entre la línea de acción de la cortante y el centro de torsión, y  $b$  la mayor dimensión en planta del entrepiso medida perpendicularmente a la dirección del sis-

mo. En la ec 4.14 a la excentricidad calculada ampli-  
ficada se le suma, en el mismo sentido, la excentrici-  
dad accidental 0.1b. En la ec 4.15, en cambio, a la  
excentricidad calculada se le resta, en sentido contra-  
rio, la excentricidad accidental; puede ocurrir que en  
este caso la excentricidad resultante sea de signo  
opuesto al de la calculada. Para cada sistema plano de-  
berá investigarse cuál de las dos excentricidades da-  
das por las ecs 4.14 y 4.15 produce efectos más desfa-  
vorables.

f) Para cada sistema plano deberán calcularse las fuerzas

laterales debidas a la suma de 100 por ciento de los efectos debidos al sismo actuando en la dirección X con 30 por ciento de los efectos producidos por el sismo actuando en la dirección X y Y viceversa. Rige el mayor de los resultados.

- g) Conocido el sistema de cargas que actúa en cada elemento resistente, este se analiza de acuerdo con los métodos presentados en los capítulos 1 y 2, u otros similares.

#### 4.4.2 Ejemplo

Para ilustrar el procedimiento expuesto en la sección anterior, en la tabla 4.6 se presentan en forma esquematizada las operaciones para la obtención de fuerzas cortantes en los elementos resistentes de los entrepisos 4 y 3 del edificio mostrado en la fig 4.1. Nótese en la tabla 4.6 que para cada dirección del movimiento sísmico se calcularon dos excentricidades ( $e_1$  y  $e_2$ ) y dos momentos torsionantes ( $M_{t1}$  y  $M_{t2}$ ). En el entrepiso 4, para la dirección X se tiene  $e_1 = 3.11$  m,  $e_2 = 0.24$  m,  $M_{t1} = 80.08$  ton-m y  $M_{t2} = 6.18$  ton-m; como se aprecia en la fig 4.4 para los elementos 1x y 2x, en los cuales el efecto de torsión se suma al de traslación, se usó  $M_{t1}$ ; en cambio para los sistemas 3x y 4x, en que ambos efectos son opuestos, se usó  $M_{t2}$ . Para valuar los efectos del sismo en x en los marcos y siempre se usa el valor mayor de  $M_t$  (80.08 en este caso)

Para que las hipótesis de análisis se cumplan, es necesario que la losa sea capaz de resistir como diafragma las fuerzas que actúan sobre ella como consecuencia de su participación transmitiendo la fuerza sísmica a los sistemas resistentes. En el sistema 1y, por ejemplo, las fuerzas cortantes en los entrepisos 3 y 4 son 52.14 y 36.76 ton; la fuerza que la losa transmite en el nivel 3 es por tanto  $52.14 - 36.76 = 15.38$  ton.

#### 4.4.3 Procedimiento matricial

Para aplicar al análisis sísmico de edificios los métodos de análisis tridimensional expuestos en el capítulo 3, hay que considerar las dos combinaciones de las excentricidades de las fuerzas cortantes y además la suma vectorial de los efectos de un componente del movimiento hori-

zonal del terreno con 0.3 de los del otro. El procedimiento que a continuación se propone permite tomar en cuenta tales requisitos.

Considérese que la matriz de rigidez lateral del edificio  $\underline{K}$  se ha partido en la forma:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L\theta} \\ \underline{K}_{L\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices L y  $\theta$  se refieren, respectivamente, a los desplazamientos laterales y a los giros de los pisos del edificio. Entonces se pueden seguir los pasos siguientes:

- a) Se escogen dos direcciones ortogonales (X,Y) en la planta del edificio.
- b) Para cada dirección:
  - b.1) Se determina la fuerza horizontal aplicada en el centro de masas de cada piso i, de acuerdo con lo descrito en la sec 4.3. Sea  $\underline{P}$  el vector formado por estas fuerzas.
  - b.2) Se calculan los desplazamientos laterales  $\underline{\delta}_0$  del edificio, sin permitir giros horizontales en los niveles:

$$\underline{\delta}_0 = \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{P}$$

- b.3) Se calculan los momentos debidos a la excentricidad directa, que valen:

$$\underline{M}_d = -\underline{K}_{L\theta}^T \underline{\delta}_0$$

y se acumulan para obtener los momentos torsionan

tes en los entrepisos  $M_{di}^*$ .

b.4) Se calculan los momentos torsionantes accidentales en los entrepisos,  $M_{ai}^*$ . Para el entrepiso  $i$  se tiene  $M_{ai}^* = 0.1 b_i V_i$ , donde  $b_i$  es la dimensión máxima de la planta  $i$  del edificio, medida perpendicularmente a la dirección en que están aplicadas las fuerzas sísmicas, y  $V_i$  el cortante en el entrepiso  $i$ .

b.5) Para cada nivel  $i$  se calculan las siguientes combinaciones de momentos torsionantes:  $M_{1i}^* = 1.5M_{di}^* + M_{ai}^*$  y  $M_{2i}^* = M_{di}^* - M_{ai}^*$ . Aquí  $M_{ai}^*$  tiene igual signo que  $M_{di}^*$ .

b.6) Con los valores obtenidos en el paso anterior, se calculan los respectivos momentos en cada nivel,  $M_1$  y  $M_2$ ; de la misma manera en que se pueden calcular las fuerzas aplicadas en los niveles a partir de las fuerzas cortantes en los entrepisos; es decir, en cualquier nivel el momento aplicado es la diferencia entre el momento torsionante del entrepiso inferior y el del entrepiso superior.

b.7) Se calculan los giros y desplazamientos que producen los momentos  $M_1$  y  $M_2$  resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{L\theta} \\ K_{L\theta}^T & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \epsilon_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ M_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2$$

b.8) Las dos combinaciones de excentricidades exigidas se pueden considerar mediante las siguientes combinaciones de giros y desplazamientos:

## COMBINACION DE DESPLAZAMIENTOS Y GIROS

$$(1) \quad \underline{\delta}_0 + \underline{\delta}_1 \quad \theta_1$$

$$(2) \quad \underline{\delta}_0 + \underline{\delta}_2 \quad \theta_2$$

Para todos los niveles de cada sistema plano  $m$  se calculan los desplazamientos de entrepiso producidos por estas combinaciones y se escogen los que tengan mayor valor absoluto. Sea  $\underline{z}_m^x$  el vector formado por estos valores cuando el sismo actúa en la dirección  $X$ , y  $\underline{z}_m^y$  el correspondiente a la dirección  $Y$ .

c) Para cada entrepiso  $i$  de cada sistema plano  $m$  se calculan

$$(\underline{z}_{mi}^x + 0.3 \underline{z}_{mi}^y)$$

$$(0.3 \underline{z}_{mi}^x + \underline{z}_{mi}^y)$$

Se considera el mayor de estos dos resultados como el desplazamiento del entrepiso  $i$ .

d) Acumulando los desplazamientos de entrepiso se obtienen los desplazamientos de los niveles, en cada sistema plano, y se calculan a partir de ellos los elementos mecánicos como se expuso en la sección 1.2.1.

En la ref 29 se presenta, como apéndice, una manera eficiente para efectuar las operaciones matriciales que implican los pasos anteriores. Este procedimiento matricial requiere la ayuda de, cuando menos, una microcomputadora.

#### 4.5 Método simplificado de análisis sísmico

##### 4.5.1 Requisitos y descripción

del R.D.F.

De acuerdo con el art 238 es aceptable efectuar un análisis estático simplifica

do en estructuras que satisfagan simultáneamente los siguientes requisitos:

- I. En cada planta, al menos el 75 por ciento de las cargas verticales estarán soportadas por muros ligados entre sí mediante losas corridas. Dichos muros deberán ser de concreto, de mampostería de piezas macizas o de mampostería de piezas huecas que satisfagan las condiciones que establezca el Departamento en las Normas Técnicas Complementarias.
- II. En cada nivel existirán al menos dos muros perimetrales de carga paralelos o que formen entre sí un ángulo no mayor de 20 grados, estando cada muro ligado por las losas antes citadas en una longitud de por lo menos 50 por ciento de la dimensión del edificio, medida en las direcciones de dichos muros.
- III. La relación entre longitud y anchura de la planta del edificio no excederá de 2.0, a menos que, para fines de análisis sísmico, se pueda suponer dividida dicha planta en tramos independientes cuya relación entre longitud y anchura satisfaga esta restricción y cada tramo resista según el criterio que marca el artículo 239 de este Reglamento.
- IV. La relación entre la altura y la dimensión mínima de la base del edificio no excederá de 1.5, y la altura del edificio no será mayor de 13m.

Para aplicar el método simplificado, según lo prescrito en el art 239, se hará caso omiso de los desplazamientos horizontales, torsiones y momentos de volteo y se verificará únicamente que en cada piso la suma de las resistencias al corte de los muros de carga, proyectadas en la dirección en que se considera la aceleración, sea cuando menos igual a la fuerza cortante total que obre en dicho piso, calculada según se describió en la sección 4.1, pero empleando los coeficientes sísmicos reducidos que se indican en la tabla 4.7, y debiéndose

verificar por lo menos, dos direcciones ortogonales. Nótese que estos coeficientes ya incluyen el factor de reducción por ductilidad.

En el cálculo de las resistencias al corte, tratándose de muros cuya relación entre la altura de pisos consecutivos,  $h$ , y la longitud,  $L$ , exceda de 1.33, la resistencia se reducirá afectándola del coeficiente  $(1.33 L/h)^2$ .

#### 4.5.2 Ejemplo

La fig 4.5 muestra esquemáticamente las plantas, alturas y pesos de un edificio al cual se tratará de aplicar el método simplificado.

Observando las plantas se aprecia que más de 75 por ciento de las cargas verticales están soportadas por muros de mampostería de piezas macizas. En la dirección  $Y$  existen dos muros perimetrales de 10 y 6 m respectivamente, que están ligados a la losa en una longitud mayor que  $0.5 \times 10 = 5$  m.

La relación entre la altura y la dimensión mínima de la planta es  $7/10 = 0.7$ , menor que 1.5, y la altura del edificio, 7 m, es menor que 13 m. Por tanto se puede aplicar el método simplificado.

Los cálculos necesarios en la dirección  $Y$  se pueden hacer como sigue:

- a) Considerando que la estructura es del grupo B, que se construirá sobre terreno correspondiente a la zona I, y que su altura es 7 m, en la tabla 4.7 se obtiene que el coeficiente sísmico, ya reducido por ductilidad, vale 0.08.
- b) Como no hay apéndices, el cálculo de fuerzas sísmicas se puede hacer con la expresión 4.1, como se muestra en la tabla 4.8. El cortante en la base es  $0.08 \times 132 = 10.56$  ton., y su valor último es  $V_u = 1.1 \times 10.56 = 11.62$  ton., donde 1.1 es el factor de carga especificado en el art 240.

- c) La longitud total de muros paralelos a la dirección Y es : 27 m, de los cuales 24 m corresponden a muros con relación h/L menor que 1.33. En ellos el esfuerzo resistente, de acuerdo con el inciso 3.3 de la ref. 31, está dado por :

$$V_R = F_R (0.7 v^*)$$

donde  $F_R$  es el factor de reducción por resistencia, igual a 0.6. Para  $v^* = 3.5 \text{ kg/cm}^2$ , se obtiene  $V_R = 1.5 \text{ kg/cm}^2$

En el muro A (fig 4.6), en planta baja,  $h/L = 4.0/2.0 = 2.0 > 1.33$ , por tanto el esfuerzo resistente vale

$$1.5 \times (1.33 \times 1/2)^2 = 0.66 \text{ kg/cm}^2. \text{ En el muro B,}$$

$h/L = 4.0/1.0 = 4.00 > 1.33$  y el esfuerzo resistente es  $1.5 (1.33 \times 1/4)^2 = 0.17 \text{ kg/cm}^2$ .

La capacidad total es por tanto

$$(2400 \times 1.5 + 100 \times 0.66 + 100 \times 0.17) 14 = 51490 \text{ kg} = 51.49 \text{ ton}$$

que es mayor que 11.62. Como la planta alta es igual a la baja, es innecesario revisarla puesto que la fuerza cortante actuante es menor.

De manera análoga se revisará el efecto sísmico en la dirección X, considerando para la resistencia los muros alineados en dicha dirección.

#### 4.6 Efectos de segundo orden y revisión de desplazamientos

El párrafo II del art 237 especifica que deberán tomarse en cuenta efectos de segundo orden (también conocidos como efectos de esbeltez) cuando la deformación total de un entrepiso dividida entre su altura, medida de piso a piso, sea mayor que 0.03 veces la relación entre la fuerza cortante del entrepiso y las fuerzas verticales debidas a acciones permanentes y variables que obren encima de este. Aunque no lo estipula el Reglamento, es recomendable propor-

cionar al edificio rigidez suficiente para que la relación citada sea menor que 0.08, con lo cual los efectos de segundo orden pueden despreciarse. En cualquier caso debe evitarse que dicha relación exceda de 0.20 porque en caso contrario los problemas de esbeltez serían muy serios y no es confiable determinar sus consecuencias con los procedimientos del Reglamento. Se entenderá por análisis de segundo orden aquel que suministre las fuerzas internas y deformaciones teniendo en cuenta la contribución de la acción de las fuerzas actuantes sobre la estructura deformada, así como la influencia de la carga axial en las rigideces. Para valorar los efectos de segundo orden, se aplicarán los procedimientos prescritos en las Normas Técnicas Complementarias.

Cuando las relaciones de esbeltez de las columnas son menores que 100, uno de los procedimientos aproximados que aceptan las Normas Técnicas Complementarias para estructuras de concreto y estructuras metálicas (ref 32 y 33) consiste en multiplicar los momentos en las columnas y los desplazamientos debidos a carga lateral, obtenidos con un análisis convencional, por el factor de amplificación

$$f_a = 1 + \frac{W_u/h}{R/Q - 1.2 W_u/h}$$

Donde R es la rigidez del entrepiso considerado (suma de rigideces de entrepiso de todos los marcos de la estructura en la dirección analizada),  $W_u$  es la suma de las cargas de diseño muertas y vivas multiplicadas por el factor de carga correspondiente, acumuladas desde el extremo superior del edificio hasta el entrepiso, considerado; Q es el factor de ductilidad y h la altura del entrepiso.

Este procedimiento da resultados muy precisos cuando se considera comportamiento elástico. Para elementos muy esbeltos el Reglamento exige la aplicación de métodos más refinados, pero es preferible no caer en estas situaciones limitar la esbeltez a valores moderados.

A continuación se revisa por este concepto el entrepiso cuarto del edificio mostrado en la fig 4.2. Ignorando los apéndices, según lo descrito en la forma opcional presentada en la séc 4.2.2 se tiene:  $V = 20.73 + 22.11 = 42.84 \text{ ton.}$

Obrán sobre este piso  $W = 300 + 400 = 700$  ton de carga vertical. Como la rigidez de entrepiso (fig 4.2) vale 100 ton/cm, el desplazamiento lateral es  $42.84/100 = 0.43$  cm; este resultado debe multiplicarse por  $Q$ , que en este caso es 4, es decir para la revisión se utilizará  $d = 0.43 \times 4 = 1.72$  cm. Hay que comparar  $d/h = 1.72/300 = 0.00573$  con  $0.08 V/W = 0.08 \times 42.84/700 = 0.00490$ . Como 0.00573 es mayor que 0.00490, hay que considerar efectos de segundo orden.

Como  $W_u = 1.1 \times 700 = 770$  queda

$$f_a = 1 + \frac{770/300}{100/4 - 1.2 \times 770/300} = 1.12$$

Entonces los desplazamientos de cada marco de este entrepiso se tomarán iguales a 1.12 veces los valores obtenidos en el análisis sin considerar los efectos de esbeltez. Los momentos en las columnas también deberán multiplicarse por  $f_a$  y los momentos en las vigas tendrán que corregirse proporcionalmente a sus rigideces angulares para que se satisfaga el equilibrio de momentos en cada nudo.

Según el art 242, las deformaciones laterales de cada entrepiso debidas a fuerzas cortantes no excederán de 0.008 veces la diferencia de elevaciones correspondientes, salvo donde los elementos que no formen parte integrante de la estructura estén ligados a ella en tal forma que no sufran daños por las deformaciones de ésta. En este caso, el límite en cuestión deberá tomarse igual a 0.016. En el cálculo de los desplazamientos se tomarán en cuenta la rigidez de todo elemento que forme parte integrante de la estructura.

En este ejemplo, la deformación lateral relativa vale  $1.72 \times 1.12/300 = 0.00642$ , que no excede ninguno de los límites mencionados en el párrafo anterior:

#### 4.7 Momentos de volteo

El párrafo VI del art 240 estipula que cuando se hace un análisis estático, el momento de volteo para cada marco o grupo de elementos resistentes en un nivel

dado podrá reducirse, tomándolo igual al calculado multiplicado por  $0.8 + 0.2z$  (siendo  $z$  la relación entre la altura a la que se calcule el factor reductivo por momento de volteo y la altura total de la construcción), pero no menor que el producto de la fuerza cortante en el nivel en cuestión multiplicada por su distancia al centro de gravedad de la parte de la estructura que se encuentre por encima de dicho nivel. En péndulos invertidos no se permite reducción de momento de volteo.

Para ejemplificar el cálculo de momento de volteo, de acuerdo con lo anterior, considérese el marco de la fig 4.6, tomado de la ref 34. En la tabla 4.9 se presentan los cálculos correspondientes. En esta tabla,  $M_V$  es el momento de volteo sin reducir;  $j$  el factor reductivo especificado en el párrafo VI del artículo 240; y  $y_g$  es la distancia del nivel considerado al centro de gravedad de la parte de la estructura por encima de dicho nivel. En este caso, el valor de  $Vy_g$  rige sobre  $jM_V$  para el diseño en todos los niveles.

#### 4.8 Comentarios

Aunque a la letra el Reglamento permite emplear el método estático de análisis sísmico en cualquier edificio de 60 m o menos metros de altura, no es recomendable aplicarlo a edificios que tengan distribuciones irregulares en elevación, ya que, en comparación con resultados de análisis dinámicos, se ha encontrado que se pueden subestimar apreciablemente las cortantes en ciertos entrepisos (ref 21). Se recomienda en este caso recurrir al análisis dinámico (véase los capítulos 4 y 5).

La mayor parte del esfuerzo adicional que se requiere para estimar el periodo fundamental del edificio es el cálculo de los desplazamientos laterales, que de todos modos debe hacerse para revisar si los mismos no son excesivos. Por tal motivo es aconsejable tratar de aprovechar la opinión de usar fuerzas sísmicas reducidas en razón de haber evaluado el periodo natural, y pueden lograrse reducciones importantes si los periodos son relativamente cortos o largos.

En los ejemplos presentados en este capítulo la combinación de los efectos de

un componente del movimiento del terreno con 30 por ciento de los efectos del otro, se ha realizado a nivel de fuerzas cortantes. Esto da los resultados adecuados para el diseño de miembros que trabajan esencialmente en el plano en el que están actuando dichas cortantes, como vigas y muros. Sin embargo para las columnas o elementos similares, que tienen flexiones importantes en dos planos verticales ortogonales, no es fácil determinar que combinación de los efectos de los componentes del temblor es la que rige el diseño, y es en vigor necesario analizar todo el edificio para el sismo actuando en una dirección y luego, separadamente, para el sismo actuando en la dirección perpendicular. La combinación de los efectos de uno y otro componente se realizará en cada elemento mecánico, cuidando de proceder coherentemente. Considérese como ejemplo el diseño de una columna a flexocompresión biaxial; se refieren la carga axial y los momentos flexionantes en dos direcciones; si para la combinación que se está considerando la carga axial proviene de 100 por ciento del sismo en x y de 30 por ciento de sismo en y, los momentos flexionantes corresponderán a los mismos porcentajes, y no sería apropiado tomar, con dicha carga axial, momentos que resulten de 30 por ciento del sismo en x con 100 por ciento del sismo en y.

## 6. ANALISIS SISMICO DINAMICO

### 6.1 Generalidades

#### del Reglamento

El art 241 especifica como métodos de análisis dinámico el análisis modal y el cálculo paso a paso de respuestas ante temblores específicos. Se tiene que emplear alguno de estos métodos cuando no se satisfacen las limitaciones que existen para aplicar el método estático.

Lo que sigue de este capítulo tratará en su mayor parte del denominado análisis modal, que con más propiedad debe llamarse análisis modal espectral, porque implica el uso de los conceptos de modos de vibrar y de espectros de diseño. El cálculo paso a paso también puede ser modal, es decir, podría hacerse encontrando en primer lugar los modos de vibrar, aunque para definir la excitación sísmica se emplean acelerogramas de temblores y no espectros.

### 6.2 Análisis modal espectral

#### 6.2.1 Espectros de diseño

Los espectros de temblores reales, como los de la fig 5.5, tienen forma irregu

gular y presentan variaciones bruscas en la respuesta máxima en función del periodo natural. Por tanto, es posible que dos estructuras que tengan casi las mismas características dinámicas, respondan de manera bastante distinta a un sismo. En la práctica este hecho tiene menos importancia de la que se le podría dar a primera vista, gracias a la influencia del amortiguamiento que hace menos bruscas las variaciones de los espectros, a que no se conoce con certeza el periodo natural por las incertidumbres que existen en el cálculo de masas y rigideces, y a que las incursiones de la estructura en el intervalo inelástico, así como la interacción suelo-estructura, modifican el periodo fundamental de vibración.

Por lo expuesto, para fines de diseño se emplean espectros de forma suavizada como los de las fig 6.1 y 6.2. Para el Distrito Federal, estos espectros están definidos en el art 236, <sup>del Reglamento</sup> y ya toman en cuenta las incertidumbres en la valuación de periodos, los efectos de temblores de distintos orígenes, la influencia del amortiguamiento y de los distintos tipos de suelo. En dicho artículo también se prescribe la manera de tomar en cuenta el comportamiento inelástico, mediante espectros reducidos por ductilidad.

El art 236 estipula que, cuando se aplique el análisis dinámico modal, se sigan las siguientes hipótesis:

I. La estructura se comporta elásticamente.

II. La ordenada del espectro,  $a$ , expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por las siguientes expresiones, donde  $c$ ,  $a_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  y  $r$  son los valores dados en la tabla 4.1.

$$a = a_0 + (c - a_0) T/T_1, \text{ si } T \text{ es menor que } T_1$$

$$a = c, \text{ si } T \text{ está entre } T_1 \text{ y } T_2$$

$$a = c (T_2/T)^r, \text{ si } T \text{ excede de } T_2$$

Aquí  $T$  es el periodo natural de interés y  $T$ ,  $T_1$  y  $T_2$  están expresados en segundos. Para evaluar las fuerzas sísmicas, estas ordenadas se dividirán entre el factor  $Q'$ , el cual se tomará igual a  $Q$  si  $T$  es mayor que  $T_1$ , e igual a

$1 + (Q - 1) T/T_1$ , en caso contrario.

En la fig 6.1 se muestran los espectros elásticos para edificios del grupo B, en las zonas I a III del Distrito Federal. En la fig. 6.2 se presentan los espectros elásticos ya reducidos para los factores de ductilidad  $Q = 2, 4$  y  $6$ , correspondientes a la zona III; nótese que entre  $T$  y  $T_1$  los espectros reducidos no son, en general, líneas rectas.

En el art 236 también se menciona expresamente en el párrafo III que las ordenadas espectrales especificadas tienen en cuenta los efectos de amortiguamiento, por lo que, excepto la reducción por ductilidad, no deben sufrir reducciones adicionales, a menos que estas se concluyan de estudios específicos aprobados por el Departamento del Distrito Federal.

#### 6.2.2 Estructuras no amortiguadas de varios grados de libertad, sin torsión

Si una estructura elástica de varios grados de libertad como la que se muestra en la fig 5.6 está sujeta al movimiento de su base, sus masas sufrirán desplazamientos, que serán función del tiempo y la aceleración. Éstos se pueden calcular resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales 5.12.

Como los modos de vibración constituyen un conjunto completo, en un instante dado el desplazamiento de una cualquiera de las masas puede expresarse como la suma de los desplazamientos debidos a la participación de cada uno de los modos naturales, esto es:

$$u_i(t) = \sum_j \phi_j(t) c_j Z_{ij} \quad (6.1)$$

En esta expresión:

$u_i(t)$  = desplazamiento relativo a la base de la masa  $i$  en el instante  $t$ .

$\phi_j(t)$  = función que expresa la variación con respecto al tiempo de la participación del modo  $j$ . El valor máximo de  $\phi_j(t)$  para cada modo puede obtenerse del espectro de desplazamientos como la ordenada que corresponde a una estructura de un grado de libertad y de igual período que el modo  $j$ ;  $\phi_j(t)$  tiene unidades de longitud.

$c_j$  = coeficiente de participación que define la escala a la que interviene el modo  $j$  en el movimiento.

$z_{ij}$  = amplitud del desplazamiento de la masa  $m_i$  en el modo  $j$ .

El símbolo  $\sum_j$  expresa suma sobre todos los modos de vibrar.

Para determinar el valor del coeficiente de participación de un modo cualquiera,  $n$ , considérese que la base sufre una variación en su velocidad igual a  $\dot{s}_0$ . Todas las masas tendrán entonces una velocidad relativa a la base

$$\dot{u}_i = -\dot{s}_0$$

que, de acuerdo con 5.1, puede expresarse

$$\sum_j \dot{\phi}_j(0) c_j z_{ij} = -\dot{s}_0$$

Teniendo en cuenta que  $\dot{\phi}_j(0) = -\dot{s}_0$ , queda

$$\sum_j c_j z_{ij} = 1$$

Multiplicando por  $m_i z_{in}$  resulta

$$\sum_j c_j m_i z_{ij} z_{in} = m_i z_{in}$$

Formando términos análogos al anterior para los diversos valores de  $i$  y sumando, se obtiene

$$\sum_i \sum_j c_j m_i z_{ij} z_{in} = \sum_i m_i z_{in}$$

Invirtiendo el orden de las sumas, y aprovechando la propiedad de ortogonalidad de los modos, es decir que,

$$\sum_i m_i z_{ij} z_{in} = 0 \quad \text{para } j \neq n$$

Se llega finalmente a

$$c_n \sum_i m_i z_{in}^2 = \sum_i m_i z_{in}$$

de donde

$$c_n = \frac{\sum_i m_i z_{in}}{\sum_i m_i z_{in}^2} \quad (6.2)$$

En forma matricial se tiene

$$c_n = \frac{Z^T M 1}{Z^T M Z} \quad (6.3)$$

Sustituyendo en la ec. 6.1 y escribiendo j en vez de n:

$$u_i(t) = \sum_j \phi_j(t) z_{ij} \frac{\sum_i m_i z_{ij}}{\sum_i m_i z_{ij}^2} \quad (6.4)$$

La ec. 6.4 indica que el desplazamiento relativo en un instante t de la masa i, debido a la contribución del modo j, se obtiene como el producto de la amplitud de dicha masa en el modo j, a una escala arbitraria, por un coeficiente de participación,  $c_j$ , y por una función del tiempo,  $\phi_j(t)$ , que es la misma que proporciona el desplazamiento relativo de la masa de una estructura de un grado de libertad y de igual periodo que el modo en cuestión. Nótese en la ec. 6.4 que el valor de  $u_i(t)$  es independiente de la escala que se adopte para los  $z_{ij}$ , puesto que si estos valores se multiplican por un factor arbitrario cual quiera  $\alpha$ , aparecerá  $\alpha^2$  en el numerador y en el denominador, sin alterar el cociente.

Conocidos los desplazamientos correspondientes a un modo, el cálculo de otras cantidades de interés para diseño, como las fuerzas cortantes y momentos flexionantes se reduce a un problema estático, como se hace ver al explicar el método de rigideces en la sec. 1.2.1.

En el Reglamento se estipulan espectros que se pueden interpretar como pseudo-

aceleraciones, es decir, que de ellos se puede obtener el valor  $A_j$  de la pseudo-aceleración máxima (igual a desplazamiento máximo por la frecuencia al cuadrado). Por ello, partiendo de la ec 6.1 se llega a

$$u_{ji} \text{ máx} = A_j c_j z_{ij} / \omega_j^2 \quad (6.5)$$

### 6.2.3 Consideraciones para diseño

Teóricamente, la ec 6.4 resuelve el problema de análisis sísmico dinámico de estructuras con varios grados de libertad, ya que permite obtener su configuración deformada en cualquier instante y, por tanto, los máximos elementos mecánicos en las secciones críticas. Como se ha mencionado en la sec 6.2.1, el valor máximo de  $z_j(t)$  se obtendrá a partir de un espectro de desplazamientos adoptado para el diseño. Esto permite conocer cualquier respuesta (fuerza cortante, deformación de entrepiso, momento de volteo, etc) máxima de la estructura,  $R_j$ , debida al modo  $j$ .

Una cota superior a la respuesta de la estructura por la participación de todos los modos es la suma de las respuestas máximas de todos los modos

$$R = \sum_j R_j$$

Este valor es siempre conservador ya que las respuestas máximas de todos los modos no son simultáneas. Con base en estudios probabilísticos se demuestra (ref 37) que en estructuras elásticas es más realista estimar la respuesta total con la expresión

$$R = \sqrt{\sum_j R_j^2} \quad (6.6)$$

Esta expresión es adecuada para sistemas cuyos periodos tengan valores bastante distintos. Por este motivo, en el art 241 del Reglamento se ha aceptado solamente cuando en el cálculo de modos de vibración no se hayan considerado como grados de libertad los giros de torsión en planta, ni las deformaciones de apéndices. Si se toma en cuenta alguno o ambos de estos últimos conceptos, se puede emplear el criterio que se explica en la sec 6.2.5.

Una de las ventajas del análisis modal reside en que solo es necesario determinar las respuestas debidas a unos cuantos de los primeros modos, porque en general la parte de la respuesta total de edificios que se debe a modos superiores es muy pequeña. El Reglamento especifica (art 241) que deben considerarse cuando menos tres modos de vibración en cada dirección de análisis y que se tienen que tomar en cuenta todos los modos con periodos mayores que 0.4 seg.

#### 6.2.4 Ejemplo

Se hará aquí el análisis sísmico de la estructura mostrada en la fig 5.7. Se supondrá que se trata de un edificio del grupo A, que se construirá en la Zona I, y que es aplicable un factor de reducción por ductilidad  $Q = 4$ . Los modos y frecuencias de vibrar se han calculado por varios procedimientos en el capítulo 5, y se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.751 \\ 2.541 \end{Bmatrix}, & \underline{Z}_2 &= \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.853 \\ -1.969 \end{Bmatrix}, & \underline{Z}_3 &= \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.804 \\ 0.321 \end{Bmatrix} \\ \omega_1^2 &= 122.0 \text{ seg}^{-2}, & \omega_2^2 &= 562.4 \text{ seg}^{-2}, & \omega_3^2 &= 1375 \text{ seg}^{-2} \\ t_1 &= 0.569 \text{ seg}, & t_2 &= 0.265 \text{ seg}, & t_3 &= 0.169 \text{ seg}^{-2} \end{aligned}$$

Se ha denotado a los periodos con  $t$  (y no  $T$ ) para evitar confusiones con los datos del espectro.

Según lo expuesto en la sec 6.2.1, los datos para determinar el espectro de diseño se obtienen en la tabla 4.1 y son en este caso:

$$c = 0.16 \times 1.3 = 0.208$$

$$a_0 = 0.03 \times 1.3 = 0.039$$

$$T_1 = 0.3 \text{ seg}$$

$$T_2 = 0.8 \text{ seg}$$

$$r = 1/2$$

Seguendo lo indicado en 6.2.4, para el primer modo se encuentra que  $t_1$  está comprendido entre  $T_1$  y  $T_2$ , por tanto

$$a_1 = c = 0.208, \quad Q_1 = 4$$

Los periodos  $t_2 = 0.265$  seg y  $t_3 = 0.169$ -seg de los modos segundo y tercero son menores que  $T_1$ ; entonces

$$a_2 = 0.039 + (0.208 - 0.039) 0.265/0.3 = 0.188$$

$$Q_2 = 1 + (4 - 1) 0.265/0.3 = 3.65$$

$$a_3 = 0.039 + (0.208 - 0.039) 0.169/0.3 = 0.134$$

$$Q_3 = 1 + (4 - 1) 0.169/0.3 = 2.69$$

Recordando que los valores  $a_i$  están expresados como fracción de  $g$ , las aceleraciones espectrales de diseño,  $A_i$ , están dadas por:

$$A_1 = 0.208 \times 981/4.00 = 51.0 \text{ cm/seg}^2$$

$$A_2 = 0.188 \times 981/3.65 = 50.5 \text{ cm/seg}^2$$

$$A_3 = 0.134 \times 981/2.69 = 48.9 \text{ cm/seg}^2$$

donde se ha considerado  $g = 981 \text{ cm/seg}^2$ .

Los coeficientes de participación se calculan con la ec 6.2. Recordando que  $m_1 = m_2 = 0.40775$  y  $m_3 = 0.20388$  (en ton-seg<sup>2</sup>/cm), se tiene

$$c_1 = \frac{0.40775 \times 1 + 0.40775 \times 1.751 + 0.20388 \times 2.541}{0.40775 \times 1^2 + 0.40775 \times 1.751^2 + 0.20388 \times 2.541^2} = 0.5513$$

$$c_2 = \frac{0.40775 \times 1 + 0.40775 \times 0.853 + 0.20388 \times 1.969}{0.40775 \times 1^2 + 0.40775 \times 0.853^2 + 0.20388 \times 1.969^2} = 0.2369$$

$$c_3 = \frac{0.40775 \times 1 - 0.40775 \times 0.803 + 0.20388 \times 0.321}{0.40775 \times 1^2 + 0.40775 \times 0.803^2 + 0.20388 \times 0.321^2} = 0.2108$$

Los desplazamientos máximos de las masas en el modo  $j$ ,  $\underline{U}_j$ , y los desplazamientos de entrepiso correspondientes,  $\delta \underline{U}_j$  resultan (ver ec. 6.5).

$$\underline{U}_1 = \frac{51.0 \times 0.5513}{122.0} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.751 \\ 2.541 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2305 \\ 0.4035 \\ 0.5856 \end{bmatrix} ; \delta \underline{U}_1 = \begin{bmatrix} 0.2305 \\ 0.1730 \\ 0.1821 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{50.6 \times 0.2369}{562.4} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.853 \\ -1.969 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0213 \\ 0.0182 \\ -0.0420 \end{bmatrix} ; \delta \underline{U}_2 = \begin{bmatrix} 0.0213 \\ -0.0031 \\ -0.0602 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_3 = \frac{48.9 \times 0.2108}{1375} \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.803 \\ 0.321 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0075 \\ -0.0060 \\ 0.0024 \end{bmatrix} ; \delta \underline{U}_3 = \begin{bmatrix} 0.0075 \\ -0.0135 \\ 0.0084 \end{bmatrix}$$

Los valores están dados en cm.

Las fuerza cortante  $V_{ij}$  en el entrepiso  $i$ , debida al modo  $j$ , se calcula multiplicando el desplazamiento del entrepiso  $\Delta_{ij}$  por la rigidez respectiva,  $k_j$ . Recordando que  $k_1 = k_2 = 200$  y  $k_3 = 80$  (en ton/cm); con los resultados que se acaban de obtener se encuentra

$$V_{11} = 200 \times 0.2305 = 46.10 \text{ ton}$$

$$V_{21} = 200 \times 0.1730 = 34.60 \text{ ton}$$

$$V_{31} = 80 \times 0.1821 = 14.57 \text{ ton}$$

$$V_{12} = 200 \times 0.0213 = 4.26 \text{ ton}$$

$$V_{22} = -200 \times 0.0031 = -0.62 \text{ ton}$$

$$V_{32} = -80 \times 0.0602 = -4.82 \text{ ton}$$

$$V_{13} = 200 \times 0.0075 = 1.50 \text{ ton}$$

$$V_{23} = -200 \times 0.0135 = -2.70 \text{ ton}$$

$$V_{33} = 80 \times 0.0084 = 0.67 \text{ ton}$$

Para estimar la respuesta debida a la combinación de todos los modos se emplea a continuación la ec 6.6. Así para los cortantes  $V_i$  y los desplazamientos relativos  $\Delta_i$  en cada entrepiso  $i$ , se obtiene:

$$V_1 = \sqrt{46.10^2 + 4.26^2 + 1.50^2} = 46.32 \text{ ton}$$

$$V_2 = \sqrt{34.60^2 + 0.62^2 + 2.70^2} = 34.71 \text{ ton}$$

$$V_3 = \sqrt{14.37^2 + 4.82^2 + 0.67^2} = 15.35 \text{ ton}$$

$$\delta_1 = \sqrt{0.2305^2 + 0.0213^2 + 0.0075^2} = 0.2316 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = \sqrt{0.1730^2 + 0.0031^2 + 0.0135^2} = 0.1736 \text{ cm}$$

$$\delta_3 = \sqrt{0.1821^2 + 0.0602^2 + 0.0084^2} = 0.1920 \text{ cm}$$

Las estimaciones de los desplazamientos totales  $u_i$  con este criterio son

$$u_1 = \sqrt{0.2305^2 + 0.0213^2 + 0.0075^2} = 0.2316 \text{ cm}$$

$$u_2 = \sqrt{0.4035^2 + 0.0182^2 + 0.0060^2} = 0.4040 \text{ cm}$$

$$u_3 = \sqrt{0.5856^2 + 0.0420^2 + 0.0024^2} = 0.5871 \text{ cm}$$

Obsérvese que la participación del modo fundamental en las respuestas es sensiblemente mayor que la del segundo y tercer modo.

Nótese también que  $u_2 - u_1 = 0.4040 - 0.2316 = 0.1724 \text{ cm}$  y  $u_3 - u_2 = 0.5871 - 0.4040 = 0.1831 \text{ cm}$ , no corresponden a las estimaciones correctas de  $\delta_2$  (0.1736 cm) y  $\delta_3$  (0.1920 cm) que son mayores. Estimar  $\delta_2$  y  $\delta_3$  como en este párrafo sería una forma inadecuada de aplicar el criterio expresado por la ec 6.6, según el cual hay que calcular para cada modo la respuesta de interés, y después emplear la ec 6.6, para la estimación de la respuesta debida a la combinación de los modos. Aunque en este ejemplo las diferencias son pequeñas, podrían ser mayores en otras situaciones.

### 6.2.5 Caso en que los modos tienen períodos de valores muy próximos entre sí

Como se ha señalado en el art 6.2.3, la expresión 6.3 no es adecuada para estimar la respuesta máxima de sistemas de varios grados de libertad que tienen períodos muy cercanos entre sí; como ocurre si se consideran, en el análisis dinámico, los apéndices o los giros de torsión en planta de los pisos. En estos casos se puede emplear el criterio propuesto en la ref. 37, según el cual la respuesta máxima debe estimarse con la siguiente expresión

$$R = \left[ \sum_i \sum_j \frac{R_i R_j}{1 + \epsilon_{ij}^2} \right]^{1/2} \quad (6.7)$$

en donde

$$\epsilon_{ij} = \frac{\omega_i^2 - \omega_j^2}{\zeta_i^2 \omega_i + \zeta_j^2 \omega_j} \quad (6.8)$$

$$\zeta_i^2 = \zeta_i + \frac{2}{\omega_i s} \quad (6.9)$$

$R_i$  es la respuesta máxima en el modo  $i$ -ésimo,  $\omega_i^2$  y  $\omega_i$  son las frecuencias circulares amortiguada y no amortiguada, y  $\zeta_i$  la fracción del amortiguamiento crítico, asociados a dicho modo (recuérdese que  $\omega_i^2 = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$  y que para valores moderados de  $\zeta_i$  la diferencia es imperceptible);  $s$  es la duración, en segundos, del segmento de ruido blanco estacionario que equivale a la familia de temblores reales de diseño.

En la ref 46 se sugiere suponer  $\zeta_i = 0.05$ , a menos que se justifique otro valor, y en la ref 47 se propone adoptar  $s$  igual a 20, 30 y 40 seg según se trate de terreno de las zonas I (dura), II (intermedia), III (blanda) respectivamente, se propone  $s = 50$  seg para terrenos de la zona IV que no estén re clasificados con base en información sobre las propiedades locales del suelo.

Nótese que  $R_i$  o  $R_j$  pueden ser positivas o negativas de acuerdo con el signo que les corresponda al calcularlas modalmente, la ambigüedad en los signos se evita considerando que la ordenada espectral es siempre positiva. Aunque el criterio anterior fue derivado suponiendo que los temblores reales

son equivalentes a segmentos de ruido blanco, su validez ha sido verificada usando temblores reales en las ref 48 y 75.

De las expresiones 6.8 y 6.9, puede colegirse que si los periodos de dos modos diferentes no son muy parecidos entre sí, es decir si  $\omega_i$  y  $\omega_j$  son bastante diferentes, entonces el valor de  $\rho_{ij}$  correspondiente es grande y más aún, su cuadrado; como el caso en que  $i = j$ ,  $\rho_{ij} = 0$ , se concluye que la fórmula 6.7 da resultados similares a los de la fórmula 6.6.

Otro criterio para combinar las respuestas modales cuando las frecuencias son cercanas entre sí, desarrollado considerando los temblores como procesos estocásticos estacionarios, se presenta en las ref 49 y 50. Consiste también en una combinación de tipo cuadrático como el anterior, es decir que la respuesta máxima se estima como:

$$R = \left[ \sum_i \sum_j R_i \rho_{ij} R_j \right]^{1/2} \tag{6.10}$$

Para el caso en que los porcentajes críticos de amortiguamiento son iguales, es decir  $\xi_i = \xi_j = \xi$ ,  $\rho_{ij}$  está dado por

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2 (1+r) r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4 \xi^2 r (1+r)^2} \tag{6.11}$$

$$r = \omega_j / \omega_i \tag{6.12}$$

En la ref 49 se presentan ejemplos de cómo usar este criterio y su aplicabilidad ha sido verificada por sus autores, comparando sus resultados con los de análisis paso a paso y empleando varios acelerogramas simulados y el registro del temblor de Taft, California, en casos en que se consideran los giros en planta de los pisos de un edificio como grados de libertad dinámicos. Nótese que para  $r = 1$ ,  $\rho_{ij} = 1$ , y la expresión 6.10 coincide con la 6.6.

6.3 Análisis, paso a paso

6.3.1 Conceptos generales y alcance

En el art. 241 también se acepta como procedimiento de análisis dinámico el cálculo paso a paso de las respuestas a temblores específicos, estipulándose que podrán emplearse para este fin acelerogramas de temblores reales o simulados, o combinaciones de estos, siempre que se usen no menos de cuatro movimientos representativos, independientes entre sí, cuyas intensidades sean compatibles con los demás criterios que consigna el Reglamento, y que se tengan en cuenta el comportamiento no lineal de la estructura y las incertidumbres que haya en cuanto a sus parámetros.

Para analizar un edificio satisfaciendo los requisitos anteriores, se tienen que emplear métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, con la ayuda de computadores digitales, aun cuando se empleen hipótesis simplificadas.

Un programa especialmente desarrollado para el análisis sísmico no lineal de edificios, es DRAIN-TABS, presentado en la ref 76. Sin embargo, este programa no es estrictamente tridimensional, porque considera al edificio formado por marcos y/o muros planos, ligados por los diafragmas de piso. Este tipo de hipótesis es aceptable si se considera comportamiento elástico, pero no si se desea tomar en cuenta el comportamiento no lineal, porque éste, sobre todo en las columnas, está influenciado decisivamente por las cargas en las tres direcciones. Aunque existen otros programas con los que se podría hacer un análisis no lineal tridimensional, no se tienen en la actualidad conocimientos suficientes sobre las leyes constitutivas que rigen el comportamiento de elementos estructurales ante cargas cíclicas en tres direcciones, y por tanto no se pueden desarrollar modelos analíticos completamente confiables. Un problema adicional es que, incluso con las limitaciones citadas, el análisis no lineal consume mucho tiempo de computadora, más aún si se tiene que hacer para varios temblores.

Por lo anterior, el análisis sísmico paso a paso no lineal de edificios ha sido aplicado a sistemas planos en trabajos de investigación, y se piensa

que es todavía impráctico usar este tipo de análisis para fines de diseño. Se continúan haciendo investigaciones para correlacionar la respuesta no lineal de edificios, con la respuesta elástica, que permitan al diseñador interpretar mejor los resultados de análisis que consideren solo comportamiento lineal.

Si se desea hacer un análisis paso a paso lineal, conviene encontrar en primer lugar los modos de vibrar del edificio, para luego calcular numéricamente la respuesta en cada modo, lo cual significa tratar con sistemas de un solo grado de libertad, puesto que las respuestas modales están desacopladas entre sí. Se tiene además la ventaja de que sólo es necesario considerar unos cuantos de los primeros modos. No obstante, hay que examinar con cuidado ciertos aspectos como el amortiguamiento y la reducción por ductilidad asociados a cada modo, la selección de temblores que sean realmente independientes entre sí y congruentes con las intensidades implícitas en los aspectos de diseño, y la manera de considerar las excentricidades accidentales.

Con el propósito de ilustrar algunos conceptos involucrados en el análisis paso a paso, se presenta a continuación un método propuesto por Newark para tal fin (ref 43). La presentación se limita a un sistema de un grado de libertad, aunque el procedimiento puede aplicarse a estructuras de varios grados de libertad (en la ref 37 se presenta un ejemplo con un sistema de dos grados de libertad). Un tratamiento más amplio de este método y otros similares se hace en dos capítulos de la ref 45, donde, entre otros asuntos, se estudian la estabilidad, la precisión y convergencia de los métodos, y también se presentan algoritmos para elaborar programas de computadora.

### 6.3.2 Método $\beta$ de Newark

En un sistema no lineal de un grado de libertad, como el de la fig 6.3, las fuerzas de amortiguamiento y de rigidez ya no son respectivamente proporcionales a la velocidad y al desplazamiento relativo ( $\dot{u}$  y  $u$ ), y en general serán funciones  $f_a$  y  $f_r$  del tiempo. Entonces la condición de equilibrio dinámico se expresa:

$$m \ddot{u} + f_d(t) + f_r(t) = -m \ddot{s}_0 \quad (6.13)$$

Sin embargo, en edificios es frecuente considerar solamente la no linealidad en las fuerzas de rigidez y aceptar que el amortiguamiento es viscoso. Así la ecuación anterior queda

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + f_r(t) = -m \ddot{s}_0 \quad (6.14)$$

Es, además, común que las fuerzas  $f_r$  se expresen como funciones no lineales del desplazamiento  $u$  y se puede escribir  $f_r(t)$  como  $f_r(u)$ .

Para resolver la ec 6.14, Newmark propuso el siguiente procedimiento (ref 43):

- Sean  $u_i$ ,  $\dot{u}_i$  y  $\ddot{u}_i$  los valores del desplazamiento, la velocidad y la aceleración relativas en el instante  $t_i$ . El subíndice  $i + 1$  denota a las cantidades correspondientes al tiempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ . Supóngase el valor de  $\ddot{u}_{i+1}$ .
- Calcúlese  $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Delta t / 2$ .
- Calcúlese  $u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + (\frac{1}{2} - \beta) \ddot{u}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{u}_{i+1} (\Delta t)^2$ .
- Calcúlese un nuevo valor de  $\ddot{u}_{i+1}$  con la ec 6.14.
- Compárese el valor obtenido en (d) con el supuesto en (a). Si se los considera suficientemente parecidos, se procede a efectuar los cálculos para el siguiente incremento de tiempo; en caso contrario, se repiten los pasos (b) a (e), con el valor de  $\ddot{u}_{i+1}$  calculado en (d).

El valor de  $\beta$  se puede asociar a la forma en que se supone que varía la aceleración en el intervalo  $\Delta t$ . Si  $\beta = 1/6$  dicha variación es lineal entre  $\ddot{u}_i$  y  $\ddot{u}_{i+1}$ ; si  $\beta = 1/4$ , la aceleración es constante, igual a  $(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})/2$ . El valor de  $\beta = 1/8$  corresponde a una variación escalonada de la aceleración. Por otra parte, el método es estable incondicionalmente cuando  $\beta$  es menor que  $1/4$ .

En la literatura (por ejemplo en las ref 37 y 45) se recomienda usar como intervalo de iteración,  $\Delta t$ , un valor del orden de  $T/10$ , o un valor más pequeño que permita representar adecuadamente la variación en el tiempo de la aceleración del terreno.  $T$  es el periodo del sistema.

Como ejemplo para ilustrar la operación de este método, considérese el sistema de un grado de libertad representado en la fig 6.3 a, cuya fuerza de rigidez varía como se indica en la fig 6.3b. Supóngase que la aceleración de la base es la mostrada en la fig 6.3c.

De los datos de la fig 6.3a se obtiene:

$$m = 80/981 = 0.08155 \text{ ton-seg}^2/\text{cm}$$

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{100/0.08155} = 35.0 \text{ seg}^{-1}; T = 2\pi/\omega = 0.13 \text{ seg}$$

$$C_{cr} = 2 \sqrt{km} = 5.711 \text{ ton-seg/cm}$$

$$C = 0.1 C_{cr} = 0.5711 \text{ ton-seg/cm}$$

Como  $0.1T = 0.013 \text{ seg}$ , se adoptará  $\Delta t = 0.02 \text{ seg}$ ; con este intervalo se representa con exactitud la variación de la aceleración  $\ddot{s}_0$ . Se considerará  $\beta = 1/5$ .

De la fig 6.3b se deduce que cuando el desplazamiento  $u$ , en cm, es menor que 0.1, la fuerza de rigidez  $f_r$  vale  $100 u$ , en ton. Si  $u$  es mayor que 0.1 cm, entonces  $f_r = 10 \text{ ton}$ .

La ecuación de equilibrio dinámico del sistema es

$$0.08155 \ddot{u} + 0.5711 \dot{u} + f_r = -0.08155 \ddot{s}_0$$

Dividiendo entre  $m$  y despejando  $\ddot{u}$  se tiene

$$\ddot{u} = -\ddot{s}_0 - 7.003 \dot{u} - f_r/0.08155 \quad (6.15)$$

La aceleración del terreno se puede expresar como

. 1 j

$$\ddot{s}_0 = 2500 t \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 0.1 \text{ seg}$$

$$\ddot{s}_0 = 500 - 2500 t \quad \text{para} \quad 0.1 \leq t \leq 0.2 \text{ seg}$$

Reemplazando  $\Delta t = 0.02$  y  $\beta = 1/5$  en las expresiones de los pasos (b) y (c) del método, se obtiene:

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + 0.01 (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.02 \dot{u}_i + 0.00012 \ddot{u}_i + 0.00003 \ddot{u}_{i+1}$$

Las operaciones para aplicar el método se resumen en la tabla 6.1. En cada incremento de tiempo se supuso inicialmente que  $\ddot{u}_{i+1}$  tenía el valor final del incremento anterior. Se ha llegado solo hasta 0.08 seg, porque en este tiempo se encuentra que la fuerza de rigidez ya no es lineal, ilustrándose así el procedimiento para este caso. Se hicieron las iteraciones necesarias para que las aceleraciones tuvieran errores solo en la sexta cifra significativa.

Conviene notar que en los lapsos en que la rigidez varía linealmente con la deformación (siendo además lineal el amortiguamiento) el método no tiene que ser iterativo, y para calcular los valores de aceleración, velocidad y desplazamiento correspondientes a un incremento de tiempo, con base en los del tiempo anterior, basta resolver por cualquier método el sistema de ecuaciones formado por las expresiones de los pasos (b) y (c) y por la ecuación de equilibrio dinámico (que en este caso sería la ec 5.2, con  $\ddot{u}$ ,  $\dot{u}$  y  $u$  con subíndices  $i+1$ ). Nótese que se trata de <sup>tres</sup> ecuaciones lineales (con coeficientes constantes); las incógnitas son  $\ddot{u}_{i+1}$ ,  $\dot{u}_{i+1}$  y  $u_{i+1}$ . Opcionalmente, en este caso se pueden considerar como incógnitas los incrementos de aceleraciones, velocidades y desplazamientos. La solución, si es así, está dada en forma explícita en la ref 45. Cuando el sistema es lineal, las iteraciones solo constituyen una forma de resolver el sistema de ecuaciones.

#### 6.4 Interacción suelo-estructura

El análisis de edificios se lleva a cabo suponiendo que el movimiento que se aplica en su base, o las fuerzas estáticas equivalentes que obran en sus distintos niveles, son independientes de las características de la cimentación. Sin embargo, existen casos en que el movimiento en cualquier punto de la frontera suelo-estructura es sensiblemente diferente del que habría ocurrido en dicho punto si la estructura no estuviese presente; en estos casos se dice que existe interacción suelo-estructura.

Como se explica en las ref. 51 y 52, es usual estudiar el problema considerando primero las diferencias en el movimiento del terreno que provienen de la rigidez del sistema estructura-cimentación como si no tuvieran masa, lo cual se denomina interacción cinemática, porque es causada fundamentalmente por la geometría de la cimentación. Las diferencias consisten, en general, en un filtrado de los componentes traslacionales del movimiento en cuestión (disminución de su amplitud en el intervalo de frecuencias altas y medias) y en la modificación de componentes rotacionales y torsionales. Estos efectos parcialmente motivan que en los reglamentos se estipulen excentricidades accidentales, que generan torsiones en planta aun en edificios completamente simétricos.

En un segundo paso, se consideran las fuerzas de inercia que se generan por la vibración de las masas de la cimentación y de la estructura, que dan lugar no solo a elementos mecánicos dentro de los distintos miembros que las componen, sino también a tres fuerzas y tres momentos (referidos a dos ejes horizontales y uno vertical) en la base. Si el suelo no es muy rígido, estas fuerzas y momentos producirán deformaciones que modifican el movimiento en la cimentación. Se habla en este caso de interacción inercial.

Para tomar en cuenta este último tipo de interacción a niveles de reglamento, se han empleado dos procedimientos. El primero consiste en modificar los espectros de diseño, y se puede decir que es la forma que de alguna manera se ha usado en el Distrito Federal, puesto que no se dan cláusulas que traten específicamente el problema y los espectros han sido propuestos calibrándolos con la práctica pasada, sin que haya hasta el momento indicios de que re

quieran modificaciones para tomar en cuenta la interacción en edificios normales.

La otra forma de considerar la interacción inercial consiste en modificar las características dinámicas de la estructura. En las ref 51 y 52 se trata este enfoque, y se propone una expresión con la que se calcula el incremento del periodo natural debido a que la base no es rígida; también se da una expresión para valuar un posible aumento en el amortiguamiento, que toma en cuenta la disipación de energía por radiación de ondas en el suelo. Esta manera de considerar la interacción se adopta en la ref 53, donde se dan una serie de puntos que permiten inclusive reducir ordenadas espectrales o coeficientes sísmicos, y calcular las deformaciones adicionales debidas a la flexibilidad del sistema suelo-cimentación. No obstante, conviene llamar la atención sobre que estas partes pueden no ser directamente aplicables en el <sup>Reglamento del</sup> Distrito Federal, por lo que se recomienda examinarlas con cuidado antes de tratar de emplearlas en algún caso particular, como podría ser un edificio esbelto o de gran altura. Por ejemplo, no sería correcto reducir fuerzas horizontales por este concepto, si simultáneamente no se considerarán <sup>posibles</sup> aumentos en las torsiones.

### 6.5 *Análisis tridimensional*

El análisis dinámico tridimensional de un edificio puede hacerse tomando en cuenta todos los grados de libertad estáticos y dinámicos que resulten relevantes. Nuevamente, el método del elemento finito es una poderosa herramienta para determinar no sólo las características de rigidez sino también las de inercia (ref 16 a 19). Sin embargo, la capacidad y el tiempo de computadora que se requerirían para analizar así un edificio son elevadas, aunque se trate de un caso con un número moderado de pisos. En análisis dinámico estas dificultades se ven acrecentadas porque la solución de un problema de valores característicos es bastante más lenta y costosa que la de problemas estáticos del mismo número de grados de libertad.

Por lo anterior, así como se hace en análisis estático, se emplea también en el análisis dinámico tridimensional la hipótesis de diafragmas rígidos. De esta manera el problema global se reduce a uno de tres grados de libertad por nivel (dos desplazamientos laterales y un giro alrededor de un eje vertical). El procedimiento para determinar la matriz de rigidez se descubrió con deta-

les corresponde la masa traslacional del nivel en cuestión, y al giro alrededor del eje vertical le corresponde la inercia rotacional de la masa con respecto a dicho eje. Nuevamente es conveniente que este eje pase por el centro de masas del nivel.

Los métodos para valuar las masas y sus momentos de inercia son bastante conocidos y no se tratarán aquí. Baste mencionar que cuando la masa está distribuida de manera más o menos uniforme en planta, se puede calcular su momento de inercia como

$$J = mr^2$$

donde  $m$  es la masa del piso y  $r$  el radio de giro de la planta. Por ejemplo, para una planta rectangular de dimensiones  $a$  y  $b$  se tiene  $r = (a^2 + b^2)/12$ .

Los principales conceptos involucrados en el análisis modal, espectral tridimensional se ilustran a continuación en un ejemplo sencillo, que permite ejecutar manualmente las operaciones matriciales. En la gran mayoría de los casos prácticos es imprescindible el uso de computadoras.

## Ejemplo

Con la finalidad de ilustrar algunos conceptos involucrados en el análisis sísmico dinámico cuando se consideran grados de libertad de torsión en los pisos, se resuelve a continuación el caso sencillo propuesto en la fig 6.4. Se trata de un edificio de un solo piso en cuatro marcos cuyas rigideces laterales se anotan en la misma figura.

Los grados de libertad dinámicos son tres, los desplazamientos en X y en Y y el giro alrededor de un eje vertical  $\theta$ , también ilustrados en la figura.

El primer paso del análisis consiste en determinar las correspondientes matrices de masa y rigideces, con respecto a algún punto de la planta. Conviene que este sea el centro de masas. Se obtiene

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 2.5k & 0 & 0.25ka \\ 0 & 2k & 0 \\ 0.25ka & 0 & 1.125ka^2 \end{bmatrix}$$

El término (3,3) de  $\underline{M}$  es simplemente el momento de inercia polar de la masa con respecto a su centro,  $J = m(a^2/12 + a^2/12)$ ; el término (3,3) de  $\underline{K}$  es el momento estático con respecto a dicho punto que se produce al dar un giro unitario a la planta (con lo cual cada marco se desplaza  $a/2$ ).

A partir de las matrices anteriores se determinan las frecuencias de vibración; aquí se empleará la ec 5.20, que se escribe

$$\begin{vmatrix} (2.5k - \omega^2 m) & 0 & 0.25ka \\ 0 & (2k - \omega^2 m) & 0 \\ 0.25ka & 0 & (1.125ka^2 - \omega^2 \frac{ma^2}{6}) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y efectuando algunas operaciones se llega a:

$$(2k - \omega^2 m) \left( \omega^4 - 9.25 \frac{k}{m} \omega^2 + 16.5 \frac{k^2}{m^2} \right) = 0$$

Las tres soluciones de la última ecuación son:

$$\omega_1^2 = 2 \text{ k/m}$$

$$\omega_2^2 = 2.41352 \text{ k/m}$$

$$\omega_3^2 = 6.83648 \text{ k/m}$$

y los correspondientes periodos de vibración resultan

$$T_1 = 4.44 \text{ m/k}$$

$$T_2 = 4.04 \text{ m/k}$$

$$T_3 = 2.40 \text{ m/k}$$

Para encontrar las formas modales hay que introducir al valor de cada frecuencia en el sistema de ecuaciones 5.19, que en este caso se escribe

$$\left( \frac{K}{1} - \omega^2 M \right) \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = 0$$

Empleando  $\omega_1^2$  se obtiene:

17

$$0.5 ku_1 + 0 v_1 + 0.25 ka\theta_1 = 0$$

$$0 u_1 + 0 v_1 + 0 \theta_1 = 0$$

$$0.25 ka u_1 + 0 v_1 + 0.792 ka^2 \theta_1 = 0$$

de la primera y tercera ecuaciones se concluye que  $u_1 = \theta_1 = 0$ ; y de la segunda, que  $v$  puede tomar un valor arbitrario, por ejemplo 1. Así

$$\underline{z}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Similarmente, con  $\omega_2^2$  y  $\omega_3^2$ ; se encuentra que

$$\underline{z}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.3459/a \end{Bmatrix}$$

$$\underline{z}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 17.3459/a \end{Bmatrix}$$

Quando se consideran como grados de libertad los giros de las plantas, el coeficiente de participación no se puede calcular con las expresiones 6.2 o 6.3, sino como

$$C_n = \frac{\underline{z}_n^T \underline{M} \underline{R}}{\underline{z}_n^T \underline{M} \underline{z}_n}$$

donde  $\underline{R}$  es un vector que contiene unos en los lugares correspondientes a los grados de libertad orientados en la dirección en que está actuando el sismo, y ceros en los demás lugares.

Así, si se considera el sismo actuando en la dirección X, se tiene:

$$\underline{R} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$C_1 = \frac{\langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & ma^2/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & ma^2/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}} = 0$$

$$C_2 = \frac{\langle 1 \quad 0 \quad -\frac{0.3459}{a} \rangle \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & ma^2/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\langle 1 \quad 0 \quad -\frac{0.3459}{a} \rangle \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & ma^2/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.3459/a \end{Bmatrix}}$$

$$= \frac{m}{m \left( 1 + \frac{0.3459^2}{6} \right)} = 0.980449$$

Similarmente se obtiene  $C_3 = 0.019552$ .

Los desplazamientos en cada modo  $j$  se calculan con la expresión 6.5, que también se puede escribir

$$\underline{U}_j = \frac{C_j A_j}{\omega_j^2} z_j$$

Se ha llamado  $A_j$  a la ordenada del espectro de aceleraciones correspondiente al periodo  $j$ -ésimo, en la dirección en que actúa el sismo.

Para el primer modo los desplazamientos son cero, por ser  $C_1 = 0$ .

Para el segundo modo resulta:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{0.980449 A_{2x}}{2.41352 \text{ k/m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.3459/a \end{Bmatrix}$$

$$u_2 = 0.406232 \text{ m } A_{2x}/k$$

$$\theta_2 = -0.14052 \text{ m } A_{2x}/(ka)$$

De manera análoga para el tercer modo resulta:

$$u_3 = 0.00285995 \text{ m } A_{3x}/k$$

$$\theta_3 = 0.0496084 \text{ m } A_{3x}/(ka)$$

Las fuerzas cortantes y los momentos de torsión se pueden calcular multiplicando las matrices de rigideces por los respectivos desplazamientos.

Así:

$$V_{2x} = 0.98045 \text{ m } A_{2x} \quad (\text{cortante en } x, \text{ modo } 2)$$

$$T_{2x} = -0.05652 \text{ m } a A_{2x} \quad (\text{momento torsor, modo } 2)$$

$$V_{3x} = 0.01955 \text{ m } A_{3x}$$

$$T_{3x} = 0.05652 \text{ m } a A_{3x}$$

Otra manera de evaluar estas cantidades es calcular primero las aceleraciones modales, iguales a los desplazamientos por la frecuencia de vibración correspondiente, y luego multiplicarlas por la matriz de masas.

Como los periodos de los modos 2 y 3 son bastante diferentes entre sí, la

respuesta debida a la combinación de modos se puede estimar como la raíz cuadrada de la suma de cuadrados.

Cuando se considera el sismo actuando en la dirección  $y$ , se debe usar

$$\underline{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Siguiendo los pasos anteriores resultan:

$$C_1 = 1 \quad , \quad C_2 = C_3 = 0$$

$$u_1 = 0$$

$$v_1 = \frac{A_{1y}}{\omega_1^2} = \frac{m A_{1y}}{2k}$$

$$\theta_1 = 0$$

$$V_{1y} = m A_{1y} \quad (\text{cortante en } y, \text{ modo } 1)$$

TABLA 4.1 VALORES DE  $c$ ,  $a_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  Y  $r$ .

ZONA	$c$	$a_0$	$T_1$ (SEG)	$T_2$ (SEG)	$r$
I (terreno firme)	0.16	0.030	0.3	0.8	1/2
II (terreno de transición)	0.20	0.045	0.5	2.0	2/3
III (terreno comprensible)	0.24	0.060	0.8	3.3	1

NOTAS:

1) La zonificación del Distrito Federal en cuanto a tipos de terreno se hace en el art 262 del Reglamento. Existe también una zona IV; los sitios incluidos en esta zona se reclasificarán en alguna de las tres anteriores de acuerdo con lo estipulado en dicho artículo, salvo que para sitios que al reclasificarse resultan en la zona III el valor de  $T_2$  no se tomará menor que 5 seg a menos que se compruebe que es aplicable un valor menor. En ningún caso  $T_2$  será menor que el indicado en esta tabla para la zona correspondiente.

2) Los valores de  $c$  corresponden a estructuras que según el art 232 se clasifican como el grupo B, entre los que se encuentran edificios de habitación y oficinas. Para construcciones clasificadas en dicho artículo como de grupo A, como estaciones de bomberos y telefónicas, hospitales, escuelas y otras, los valores de  $c$  dados en esta tabla deben multiplicarse por 1.3. Lo mismo se aplica a los valores de  $a_0$ .

T A B L A 4.2  
DE LA  
FUERZA SISMICA, CORTANTE, Y POSICION DEL CORTANTE EN CADA PISO  
DEL EDIFICIO DE LA FIG 4.1

a) Dirección X									
NIVEL O ENTREPISO	$W_i$	$h_i$	$W_i h_i$	$P_{ix}$	$V_{ix}$	$\bar{y}_i$	$P_{ix} \bar{y}_i$	$\Sigma P_{ix} \bar{y}_i$	$y_i$
5	90	16	1440	12.36	12.36	3.75	46.35	46.35	3.75
4	120	13	1560	13.39	25.75	5.50	73.65	120.00	4.66
3	150	10	1500	12.87	38.62	5.50	70.79	190.79	4.94
2	150	7	1050	9.01	47.63	5.50	49.55	140.34	5.05
1	180	4	720	6.18	53.81	6.30	38.93	279.27	5.19
S U M A S	690		6270						

$$P_i = \frac{W_i h_i}{\sum W_i h_i} \cdot c_s \cdot \Sigma W_i ; \quad y_i = \frac{\Sigma P_{ix} \bar{y}_i}{V_{ix}} ; \quad c_{sx} = 0.078$$

b) Dirección Y									
NIVEL O ENTREPISO	$W_i$	$h_i$	$W_i h_i$	$P_{iy}$	$V_{iy}$	$\bar{x}_i$	$P_{iy} \bar{x}_i$	$\Sigma P_{iy} \bar{x}_i$	$x_i$
5	90	16	1440	24.72	24.72	6.75	166.86	166.86	6.75
4	120	13	1560	26.78	51.50	9.20	246.37	413.23	8.02
3	150	10	1500	25.75	77.25	9.20	236.90	650.13	8.42
2	150	7	1050	18.02	95.27	9.20	165.78	815.91	8.56
1	180	4	720	12.36	107.63	8.50	105.06	921.08	8.56
S U M A S	690		6270						

$$x_i = \frac{\Sigma P_{iy} \bar{x}_i}{V_{iy}} ; \quad c_{sy} = 0.156$$

## NOTAS:

$\bar{x}_i, \bar{y}_i$  son las coordenadas del centro de gravedad de cada piso, donde se suponen aplicadas las fuerzas  $P_i$ ; aquí se consideran datos.  
En esta tabla las unidades de fuerza son ton., y las de longitud son m.

TABLA 4.3 REDUCCION DE FUERZAS SISMICAS EN LA DIRECCION Y DEL EDIFICIO DE LA FIG. 4.1

A) ESTIMACION DEL PERIODO FUNDAMENTAL DE VIBRACION

Nivel o entrepiso	$W_i$ (ton)	$P_{iy}$ (ton)	$V_{iy}$ (ton)	$K_{iy}$ (ton/cm)	$V_{iy}/K_{iy}$ (cm)	$x_{iy}$ (cm)	$W_{iy}x_{iy}^2$	$P_{iy}x_{iy}$ (ton-cm)
5	90	24.72	24.72	131	0.189	1.626	237.9	40.19
4	120	26.78	51.50	206	0.250	1.437	247.8	38.48
3	150	25.75	77.25	236	0.327	1.187	211.3	30.57
2	150	18.02	95.27	236	0.404	0.860	110.9	15.50
1	180	12.36	107.63	246	0.456	0.456	37.4	5.64
SUMAS							845.3	130.38

$$T = 0.3 \left( \frac{\sum W_{iy} x_{iy}^2}{\sum P_{iy} x_{iy}} \right)^{1/2} = 0.51 \text{ seg, donde } g = 981 \text{ cm/sec}^2$$

NOTA:

Los valores de  $V_{iy}/K_{iy}$  son los desplazamientos de entrepiso que, acumulados, dan los desplazamientos  $x_{iy}$

B) VALORES REDUCIDOS DE LAS FUERZAS SISMICAS

Nivel o entrepiso	$P_{iyr}$ (ton)	$V_{iyr}$ (ton)
5	22.03	22.03
4	23.86	45.89
3	22.94	68.83
2	16.06	84.89
1	11.01	95.90

NOTA:  $P_{iyr} = 0.891 P_{iy}$  (ver sec. 4.3.1)

T A B L A 4.4

ESTIMACION DEL PERIODO FUNDAMENTAL DE VIBRACION DEL EDIFICIO  
DE LA FIG 4.3

NIVEL O ENTREPISO	$W_i$ (ton)	$P_i$ (ton)	$V_i$ (ton)	$K_i$ (ton/cm)	$V_i/K_i$ (cm)	$x_i$ (cm)	$\sum W_i x_i^2$ (ton-cm <sup>2</sup> )	$\sum P_i x_i$ (ton-cm)
5	300	20.45	20.45	100	0.205	2.019	1222	41.29
4	400	21.82	42.27	100	0.423	1.814	1316	39.58
3	400	16.36	58.63	200	0.293	1.391	774	21.58
2	400	10.91	69.54	200	0.348	1.098	482	11.98
1	400	5.49	75.03	100	0.750	0.750	225	4.12
S U M A S							4020	118.55

$$T = 6.3 \left( \frac{\sum W_i x_i^2}{9 \sum P_i x_i} \right)^{1/2} = 1.17 \text{ seg, donde } g = 981 \text{ cm/seg}^2$$

NOTA:

Los valores de  $V_i/K_i$  son los desplazamientos de entrepiso que, acumulados, dan los desplazamientos totales  $x_i$ .

T A B L A 4.5  
 FUERZAS SISMICAS Y CORTANTES EN EL EDIFICIO DE LA FIG 4.5 CON  
 REDUCCION POR HABER ESTIMADO SU PERIODO FUNDAMENTAL

NIVEL O ENTREPISO	$W_i$	$h_i$	$h_i^2$	$W_i h_i$	$W_i h_i^2$	$K_1 \frac{C}{Q} W_i h_i$	$K_2 \frac{C}{Q} W_i h_i^2$	$P_i$	$V_i$
5	300	15	225	4500	67500	15.66	3.13	18.79	18.79
4	400	12	144	4800	57600	16.70	2.67	19.37	38.16
3	400	9	81	3600	32400	12.53	1.50	14.03	52.19
2	400	6	36	2400	14400	8.35	0.67	9.02	61.21
1	400	3	9	1200	3600	4.18	0.17	4.35	65.56
S U M A S	1900			16500	175500				

$$c = 0.16 \quad , \quad r = 1/2 \quad , \quad T_2 = 0.8 \text{ seg} \quad , \quad T = 1.17 \text{ seg} \quad , \quad Q = 4$$

$$q = (T_2/T)^r = 0.827$$

$$k_1 = q (1 - r) (T - q) \Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i) = 0.0870$$

$$k_2 = 1.5 r q (1 - q) \Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i^2) = 0.00116$$

$$k_1 \frac{C}{Q} = 0.00348 \quad ; \quad k_2 \frac{C}{Q} = 0.0000464$$

NOTA:

Las unidades de fuerza son ton, y las de longitud son m.

TABLA 4.6 DISTRIBUCION DE FUERZAS CORTANTES EN LOS ELEMENTOS RESISTENTES DEL EDIFICIO  
EN LA FIGURA 4.1

ENTRADA 4

SENTIDO	V	$e_1$	b	$e_1 = 1.5 e_2 + 0.1 b$	$e_2 = e_1 - 0.1 b$	$M_{11} = V e_1$	$M_{12} = V e_2$
x	25.75	1.34	11.00	3.11	0.24	33.68	2.78
y	45.89	0.91	20.00	1.57	-1.09	71.64	-56.14

$V_x = 8.02$  ;  $V_y = 8.93$  ;  $e_1 = 6.00 - 4.66$  ;  $e_2 = 0.34$  ;  $M_{11} = 29.13$  ;  $M_{12} = 2.78$   
 $V_x = 4.66$  ;  $V_y = 6.00$  ;  $e_1 = 1.93 - 8.00$  ;  $e_2 = -6.07$  ;  $M_{11} = -29.13$  ;  $M_{12} = -4.66$

EJE	$R_{jx}$	$x_j$	$R_{jx} x_j$	$x_{jt}$	$R_{jx} x_{jt}$	$R_{jx} x_{jt}^2$	DIRECTO	EFEECTO DE V TORSION	TOTAL	EFEECTO DE V TORSION	$V_y + 0.3 V_x$	$0.3 V_x + V_y$
1x	17	0.00	0	-1.00	-27.66	447.94	7.07	-0.29	6.78	0.51	48	2.76
2x	8	3.50	28	-7.50	-20.00	50.00	4.68	0.28	4.96	0.12	17	3.29
3x	6	7.50	45	-1.50	-12.00	18.00	4.68	-0.14	4.54	-0.04	1	4.54
4x	16	11.00	176	5.00	80.00	576.00	9.36	-1.524	7.836	-0.71	5.12	8.42
SUMAS	44		229			1117.94					116	

$V_x = 11.5 + 6.00 = 17.5$

EJE	$R_{jy}$	$x_j$	$R_{jy} x_j$	$x_{jt}$	$R_{jy} x_{jt}$	$R_{jy} x_{jt}^2$	DIRECTO	EFEECTO DE V TORSION	TOTAL	EFEECTO DE V TORSION	$V_y + 0.3 V_x$	$0.3 V_x + V_y$
1y	10	0.00	0	-0.91	-96.44	861.92	24.04	0.30	24.34	0.17	37.55	17.75
2y	6	6.50	39	-7.43	-14.55	35.40	1.34	0.11	1.45	0.04	1.7	3.59
3y	1	13.50	13.5	-4.57	-27.42	121.76	1.20	-0.17	1.03	-0.12	1.44	2.13
4y	16	20.00	320	11.07	952.02	10538.44	14.16	0.71	14.87	0.77	15.64	15.64
SUMAS	33		372.5			11718.52					56.31	

$V_x = \frac{1410}{306} = 4.59$

SENTIDO	V	$e_1$	b	$e_1 = 1.5 e_2 + 0.1 b$	$e_2 = e_1 - 0.1 b$	$M_{11} = V e_1$	$M_{12} = V e_2$
x	38.62	0.88	11.00	2.42	-0.22	93.41	-8.50
y	68.83	0.22	20.00	2.33	-1.36	160.37	-122.52

$V_x = 8.42$  ;  $V_y = 8.64$  ;  $e_1 = 5.82 - 4.94$  ;  $e_2 = 0.88$  ;  $M_{11} = 7.40$  ;  $M_{12} = 7.40$   
 $V_x = 4.94$  ;  $V_y = 5.82$  ;  $e_1 = 8.64 - 8.62$  ;  $e_2 = 0.02$  ;  $M_{11} = 0.02$  ;  $M_{12} = 0.02$

EJE	$R_{jx}$	$x_j$	$R_{jx} x_j$	$x_{jt}$	$R_{jx} x_{jt}$	$R_{jx} x_{jt}^2$	DIRECTO	EFEECTO DE V TORSION	TOTAL	EFEECTO DE V TORSION	$V_y + 0.3 V_x$	$0.3 V_x + V_y$
1x	20	0.00	0	-5.82	-116.40	677.41	11.36	0.44	11.80	0.29	12.10	3.67
2x	12	3.50	42	-2.32	-27.84	64.59	6.82	0.11	6.93	0.10	6.04	2.12
3x	12	7.50	90	-1.68	-20.16	33.87	6.82	-0.01	6.81	-0.01	6.81	2.09
4x	24	11.00	264	5.18	124.32	643.98	13.63	0.64	14.27	0.60	15.13	4.74
SUMAS	68		396			1419.85					40.04	

$V_x = \frac{396}{74} = 5.35$

EJE	$R_{jy}$	$x_j$	$R_{jy} x_j$	$x_{jt}$	$R_{jy} x_{jt}$	$R_{jy} x_{jt}^2$	DIRECTO	EFEECTO DE V TORSION	TOTAL	EFEECTO DE V TORSION	$V_y + 0.3 V_x$	$0.3 V_x + V_y$
1y	128	0.00	0.00	-8.64	-1105.92	9555.15	37.72	0.54	38.26	3.39	41.19	17.85
2y	6	6.50	39.00	-7.14	-12.84	27.48	1.75	0.09	1.84	0.05	1.80	1.69
3y	6	13.50	81.00	-4.86	-29.16	141.72	1.75	-0.15	1.60	-0.12	1.48	0.63
4y	56	20.00	1120.00	11.38	1090.56	12386.76	28.81	0.63	29.44	4.33	34.34	14.52
SUMAS	176		1240.00			22117.11					81.81	

$V_x = \frac{22117}{4250} = 5.20$

T A B L A 4.7

COEFICIENTES SISMICOS REDUCIDOS POR DUCTILIDAD PARA EL  
METODO SIMPLIFICADO

ZONA	MUROS DE PIEZAS MACIZAS ALTURA DE LA CONSTRUCCION			MUROS DE PIEZAS HUECAS ALTURA DE LA CONSTRUCCION		
	MENOR DE 4 m	ENTRE 4 Y 7 m	ENTRE 7 Y 13 m	MENOR DE 4 m	ENTRE 4 Y 7 m	ENTRE 7 Y 13 m
I	0.06	0.08	0.08	0.07	0.11	0.11
II	0.07	0.08	0.10	0.08	0.11	0.13
III	0.07	0.09	0.10	0.08	0.10	0.12

NOTA:

Los valores se refieren a estructuras del grupo B, para estructuras del grupo A hay que multiplicarlos por 1.3 (ver nota de la tabla 4.1).

T A B L A 4.8

CALCULO DE FUERZAS SISMICAS Y CORTANTES PARA EL EJEMPLO DE  
LA SECCION 4.5.2

NIVEL O ENTREPISO	$W_i$ (ton)	$h_i$ (m)	$W_i h_i$ (ton-m)	$P_i$ (ton)	$V_i$ (ton)
2	60	7	420	6.26	6.26
1	72	4	288	4.30	10.56
SUMAS	132		708		

35  
T A B L A 4.9

CALCULOS DEL MOMENTO DE VOLTEO PARA EL MARCO DE LA FIG 4.7

Nivel	Entrepiso	W (ton)	V (ton)	M <sub>v</sub> (ton-m)	Z	j=0.8+0.2z	jM <sub>v</sub> (ton-m)	y <sub>g</sub> (m)	Vy <sub>g</sub> (ton-m)
5		100		0	1	1	0	0	0
	5		5.1						
4		120		15.3	0.8	0.96	14.7	3.00	15.3
	4		10.5						
3		120		46.8	0.6	0.92	43.1	4.37	45.8
	3		14.5						
2		120		90.3	0.4	0.88	79.5	5.83	84.5
	2		17.1						
1		120		141.6	0.2	0.84	119.0	7.32	125.0
	1		18.4						
				196.8	0	0.80	157.2	8.8	152.0

Para el nivel 3:

$$y_g = \frac{100 \times 6 + 120 \times 3}{100 + 120} = 4.37 \text{ m}$$

Para el nivel 4:

$$y_g = \frac{100 \times 9 + 120 \times 6 + 120 \times 3}{100 + 120 + 120} = 5.83 \text{ m}$$

59  
T A B L A 6.1

METODO B DE NEWMARK APLICADO AL SISTEMA DE LA FIG 6.3

$t$ (seg)	$\ddot{x}_0$ (cm/seg <sup>2</sup> )	$\ddot{u}$ (cm/seg <sup>2</sup> )	$\dot{u}$ (cm/seg)	$u$ (cm)	$f_r$ (ton)
0.00	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
0.02	50	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
		-50.0000	-0.5000	-0.0040	-0.40
		-41.5937	-0.4159	-0.0033	-0.33
		-43.0070	-0.4301	-0.0034	-0.34
		-42.7694	-0.4277	-0.0034	-0.34
		-42.8094	-0.4281	-0.0034	-0.34
		-42.8026	-0.4280	-0.0034	-0.34
		-42.8038	-0.4280	-0.0034	-0.34
-42.8036	-0.4280	-0.0034	-0.34		
0.04	100	-42.8036	-1.2841	-0.0205	-2.05
		-65.8451	-1.5145	-0.0224	-2.24
		-61.9713	-1.4757	-0.0221	-2.21
		-62.6226	-1.4823	-0.0221	-2.21
		-62.5131	-1.4812	-0.0221	-2.21
		-62.5315	-1.4814	-0.0221	-2.21
		-62.5284	-1.4813	-0.0221	-2.21
		-62.5289	-1.4813	-0.0221	-2.21
-62.5288	-1.4813	-0.0221	-2.21		
0.06	150	-62.5288	-2.7319	-0.0642	-6.42
		-52.1077	-2.6277	-0.0634	-6.34
		-53.8597	-2.6452	-0.0635	-6.35
		-53.5652	-2.6422	-0.0635	-6.35
		-53.6147	-2.6427	-0.0635	-6.35
		-53.6064	-2.6427	-0.0635	-6.35
		-53.6078	-2.6427	-0.0635	-6.35
		-53.6075	-2.6427	-0.0635	-6.35
0.08	200	-53.6075	-3.7148	-0.127076	-10.00
		-51.3849	-3.6926	-0.1269	(constante)
		-51.5406	-3.6942	-0.1269	
		-51.5297	-3.6941	-0.1269	
		-51.5304	-3.6941	-0.1269	

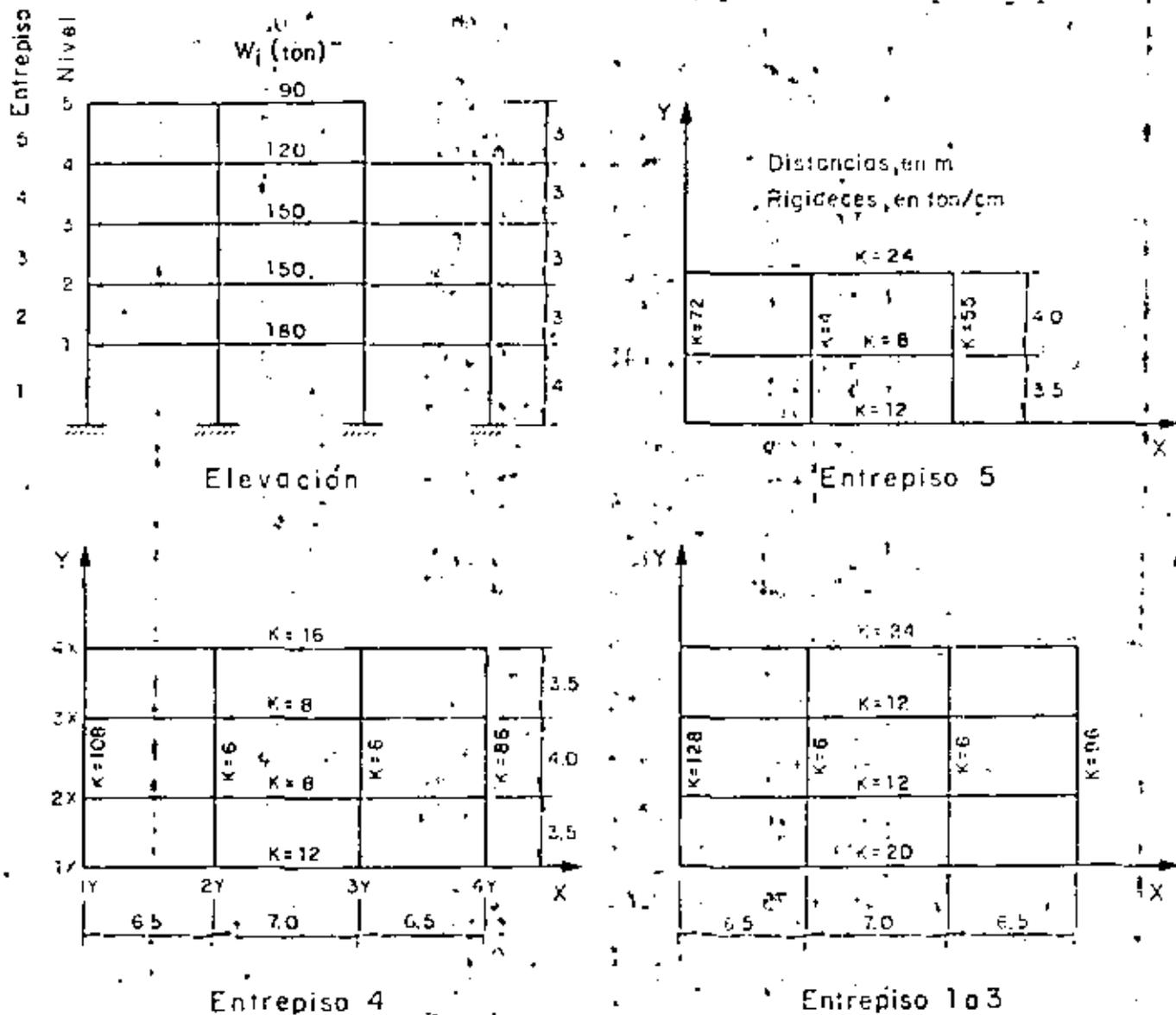


Fig 4.1 Datos para el ejemplo de análisis estático de la sección 4.2.1

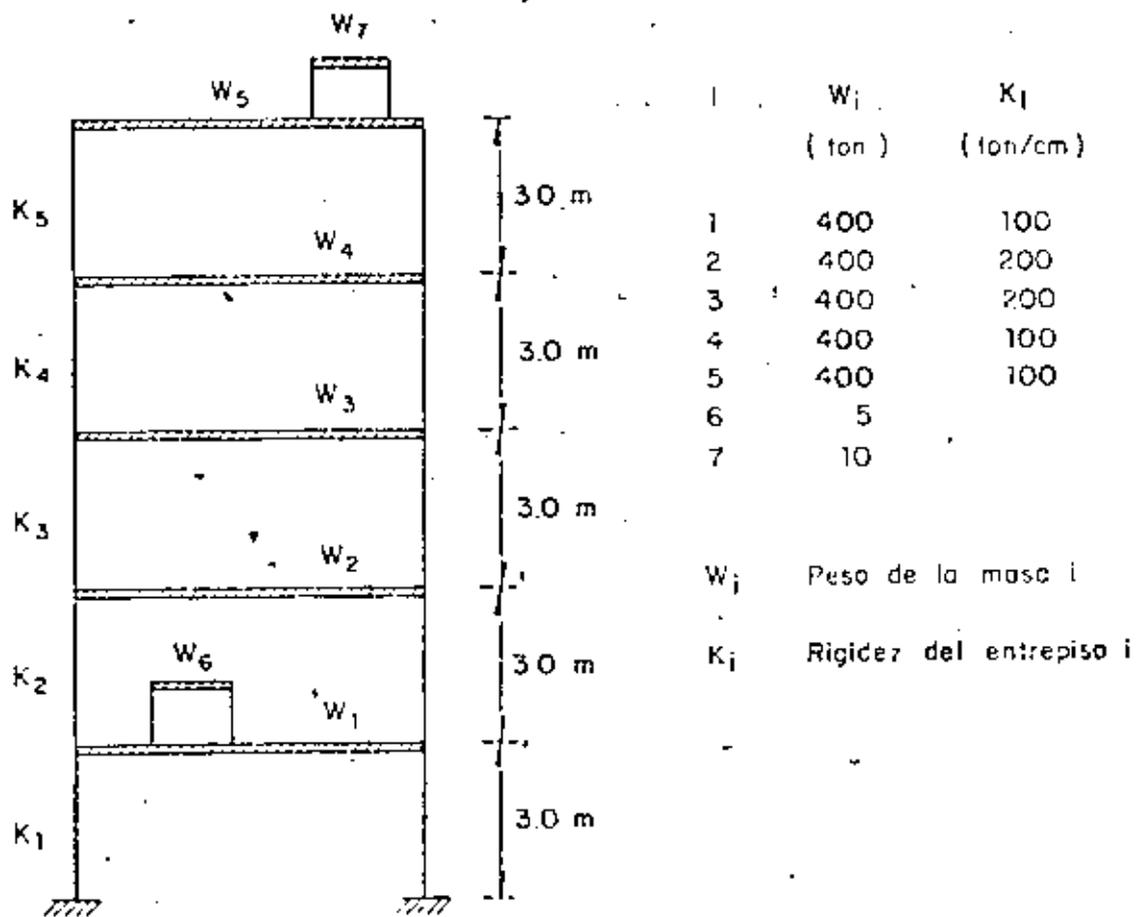


Fig 4.2 Edificio con apéndices

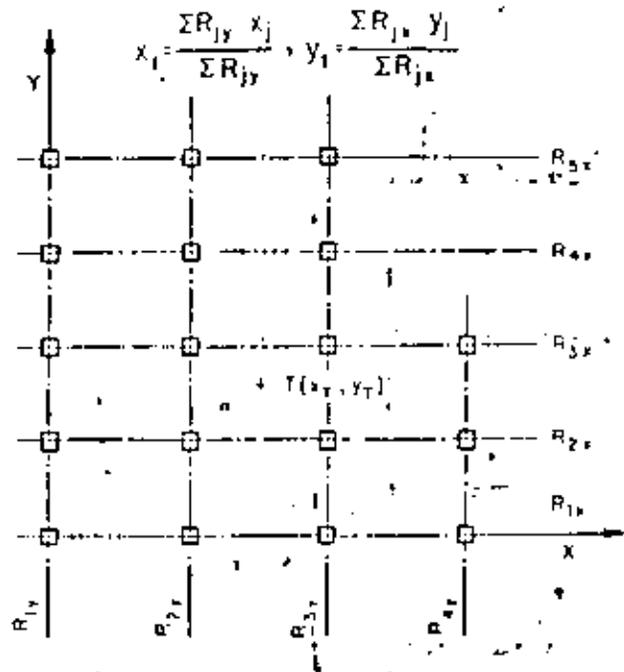
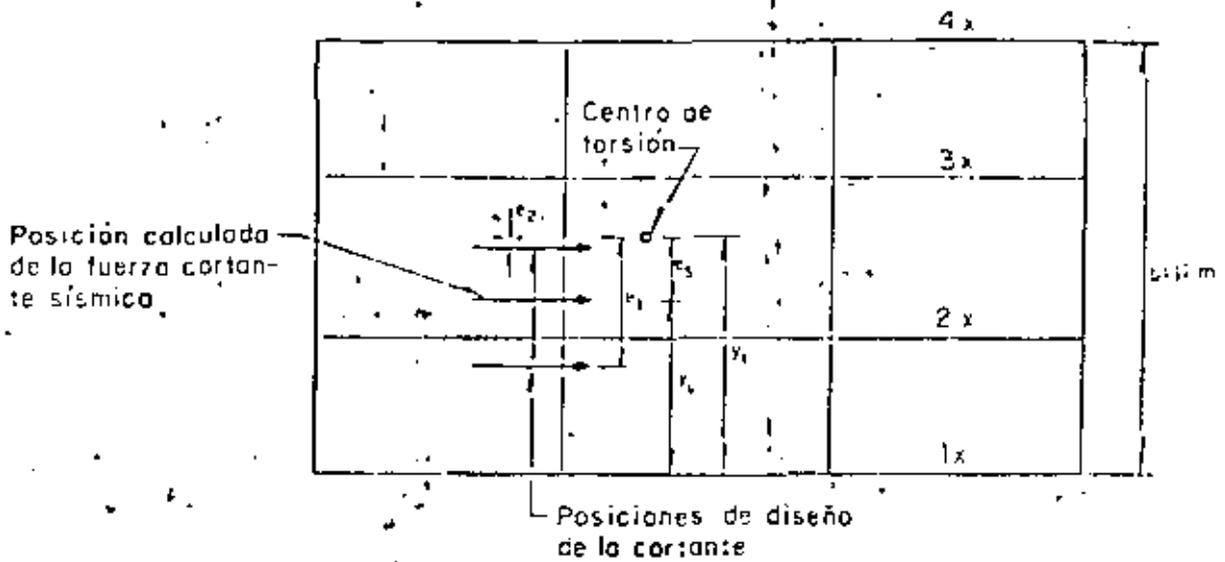


Fig 4.3 Elementos resistentes y centro de torsión

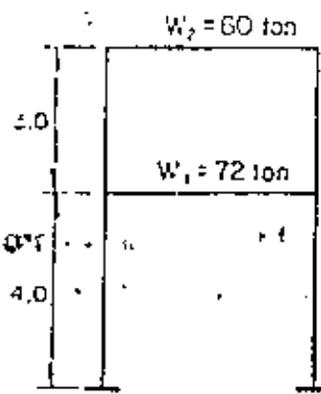
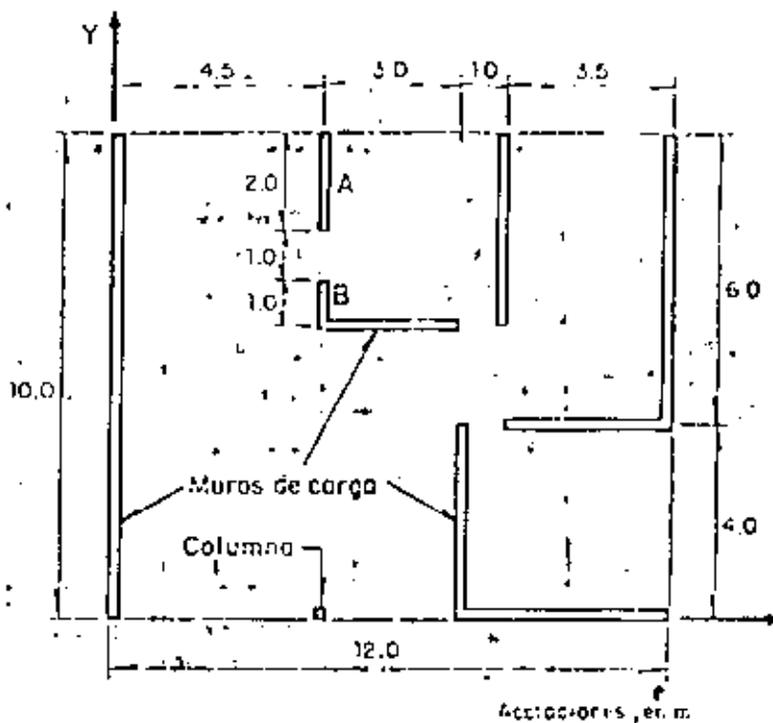


$$y_v = 4.66, y_t = 6.00, e_3 = y_t - y_v = 1.34$$

$$e_1 = 1.5 e_3 \pm 0.1b = 3.11$$

$$e_2 = e_3 - 0.1b = 0.24$$

Fig 4.4 Posiciones de la fuerza cortante sísmica para calcular los momentos torsionantes de diseño (los valores numéricos corresponden al entresiso 4 de la fig 4.1)



Los muros de carga son de tabique de barro recocido y se supone un esfuerzo constante nominal de  $3.5 \text{ kg/cm}^2$  (ver tabla de la pag 15 de la ref 31)

La estructura es para casa habitación (grupo B) y se construirá sobre terreno firme, (zona I)

Fig. 4.5 Edificio para ejemplificar el método simplificado de análisis sísmico

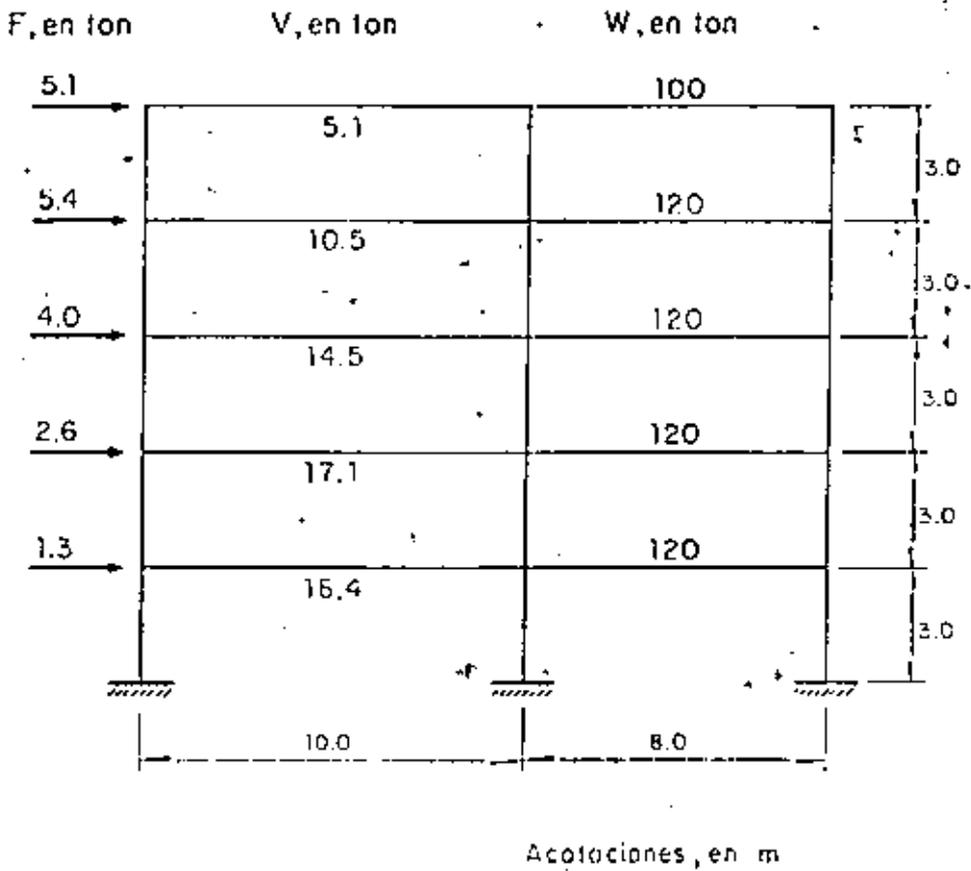


Fig 4.6 Marco para ejemplificar el cálculo de momentos de volteo

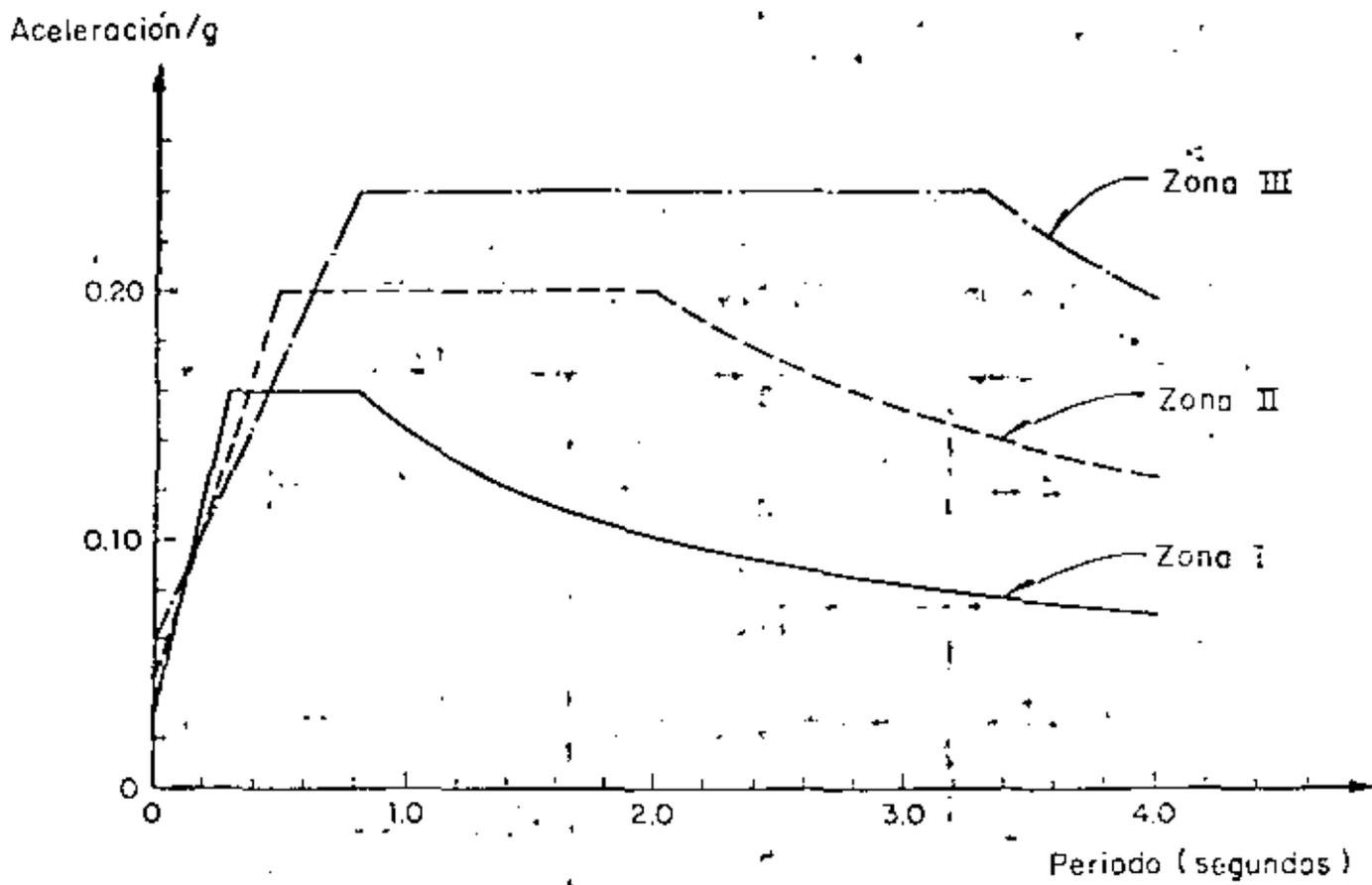


Fig 6.1 Espectros de diseño elásticos, edificios grupo B

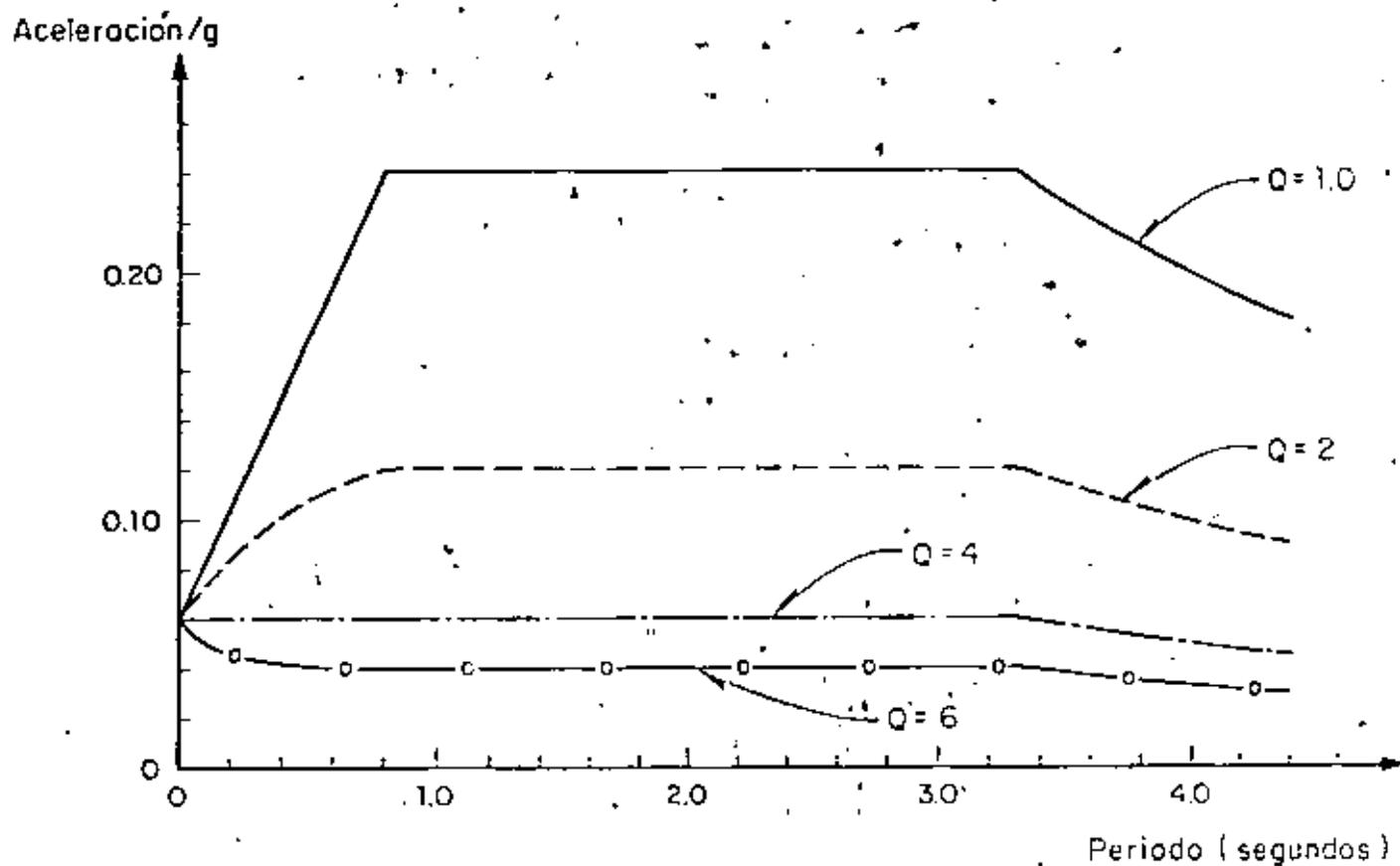
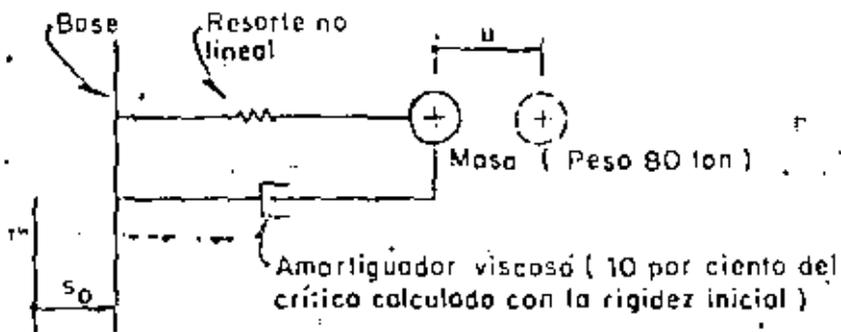
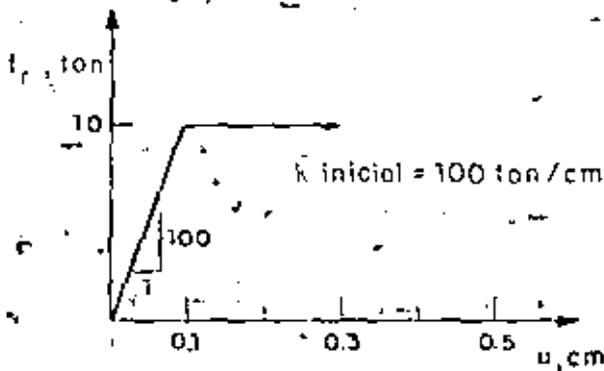


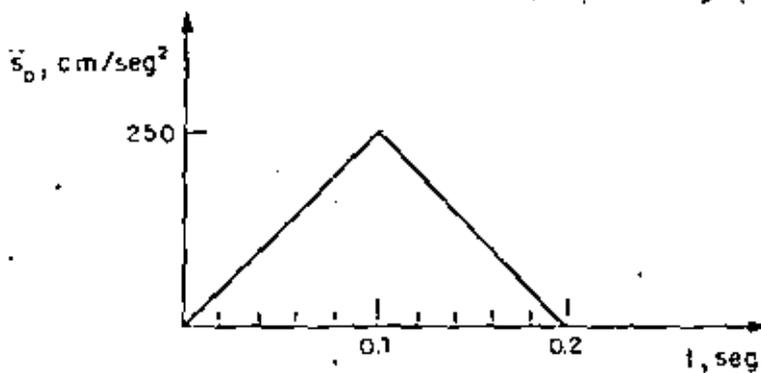
Fig 6.2 Espectros de diseño de la zona III, para ductilidades  $Q=1, 2, 4$  y  $6$ , edificios grupo B



a) Sistema con rigidez no lineal



b) Curva carga desplazamiento del resorte (simétrica con respecto al origen).



c) Aceleración de la base

Fig 6.3 Sistema no lineal de un grado de libertad

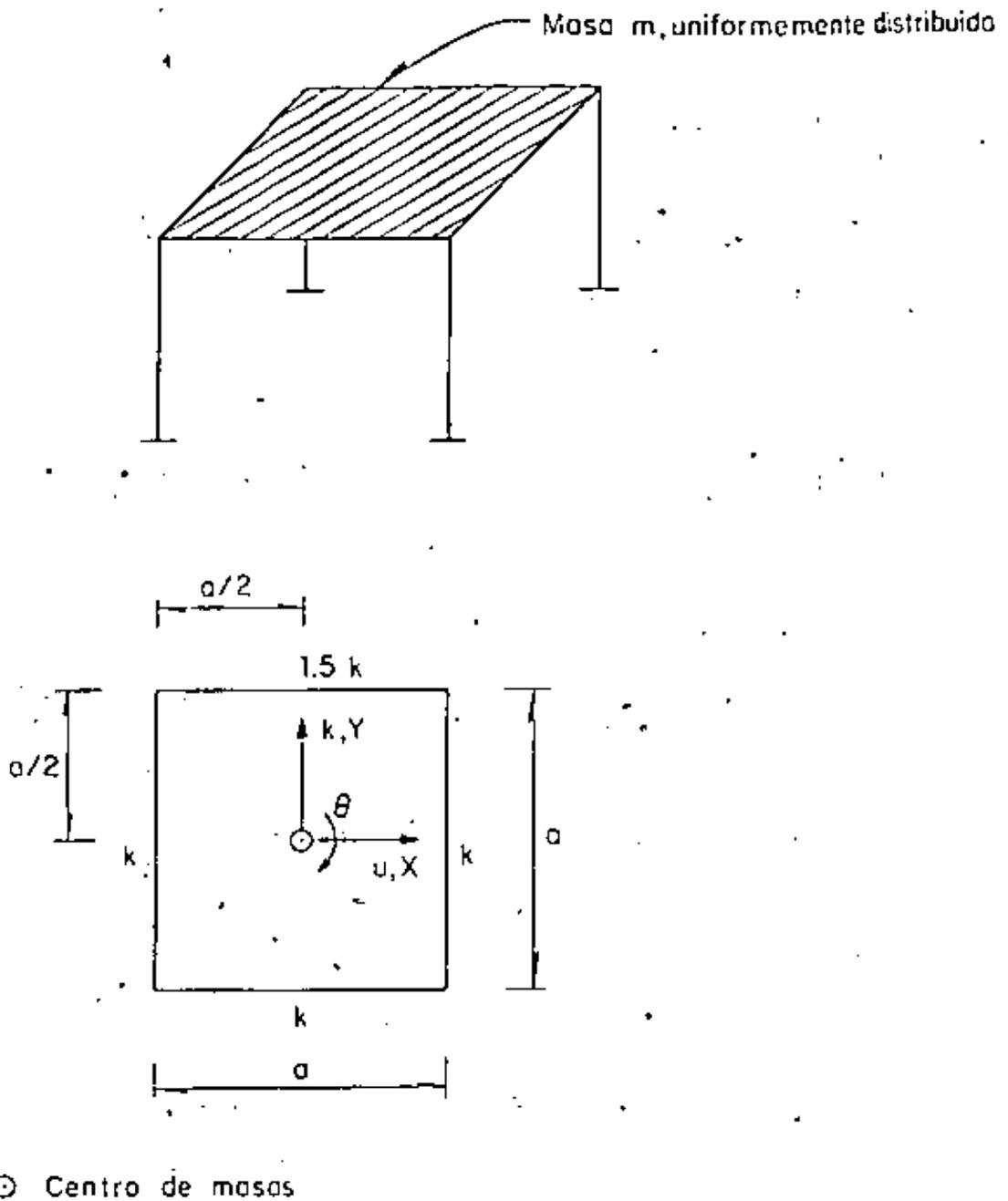


Fig 6.4 Representación esquemática de un edificio de un piso



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA -  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

**T E M A 7**

**ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**DR. ROBERTO MELI PIRALLA  
Agosto, 1983**

# CURSO DE DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

## Tema: ESTRUCTURAS DE CONCRETO

### GUIA DE ESTUDIO

R. Meli

#### 1 COMPORTAMIENTO Y ANALISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS DE CONCRETO. (ver ref. 1, pp. 496 a 515)

En las estructuras isostáticas la distribución de fuerzas internas (momentos, cortantes etc) está determinada por condiciones de equilibrio y no depende de las propiedades del material. En las hiperestáticas depende de las rigideces de los elementos y más propiamente de las características momento-curvatura ( $M-\varphi$ ) de las secciones. Como la relación  $M/\varphi$  puede variar con el nivel de carga, también la distribución de fuerzas internas varía. La relación  $M-\varphi$  para una sección de concreto puede idealizarse como trilineal (fig 1a). Si una sección se agrieta el elemento pierde rigidez y la distribución de momento cambia. Una redistribución mucho mayor ocurre si una sección llega a su momento de fluencia y se forma una "articulación plástica" (fig 1b). Los momentos en las distintas secciones pueden variar al hacerlo las rigideces de los elementos; lo que se mantiene constante son ciertas relaciones entre los momentos y las cargas que se deben cumplir por equilibrio. Por ejemplo el momento isostático en vigas

$\left(\frac{wl^2}{8} \text{ o } \frac{PL}{4}\right)$  según el tipo de carga, debe ser equilibrado por la relación  $\frac{1}{2}(M_I^- + M_D^-) + M^+$  (ver. fig. 2a). El momento de entrepiso

en un marco sujeto a cargas laterales (VH) debe ser equilibrado por la suma de momentos en las columnas (ver fig 2b). Si las secciones tienen la suficiente capacidad de rotación, no importa cuáles sean los momentos resistentes en cada sección, si su suma cumple con el mismo momento isostático se tendrá la misma carga resistente. En este principio se basan los métodos de análisis plástico (al límite) de estructuras de concreto (ver ref 1 pp 516 a 544).

En estructuras de concreto la resistencia puede variarse de sección modificando la cantidad o la posición de refuerzo y puede hacerse que el diagrama de momentos resistentes se ajuste prácticamente a cualquier diagrama de momentos actuantes. Esto hace que si se proporciona el refuerzo para resistir momentos proporcionales a los que resultan de un análisis elástico, todas las secciones pasarán simultáneamente de una etapa del comportamiento a otra y no habrá prácticamente redistribución de momentos. Todas las articulaciones plásticas necesarias para que se forme el mecanismo ocurrirán al mismo tiempo (teóricamente). Si se refuerza para resistir momentos distintos de los que resultan del análisis elástico pero que dan lugar al mismo momento isostático (o sea a una configuración de momentos en equilibrio bajo la misma carga última) se tendrá la misma carga de

falla, aunque algunas secciones hayan llegado prematuramente a la fluencia dando lugar a redistribuciones de momentos. Para que esto sea cierto se requiere comprobar que ninguna articulación plástica de ba, para la formación del mecanismo, tener rotaciones mayores que las que es capaz de soportar. La dificultad de esta comprobación es la razón principal de que los métodos de análisis plástico no se empleen en la práctica para estructuras de concreto.

Si la distribución de momentos no difiere mucho de la elástica las rotaciones necesarias para la formación del mecanismo serán pequeñas y las secciones que cumplan con los requisitos reglamentarios podrán soportarlas.

De lo anterior se deduce que el diagrama de momentos a la falla se ajustará a aquel según el cual se ha dimensionado la estructura y será independiente de las rigideces relativas de los elementos. Es muy conveniente, sin embargo, reforzar la estructura según el diagrama de momentos "elástico" ya que con ello se tendrá un mínimo de deformaciones inelásticas y agrietamientos antes de la falla y un comportamiento óptimo en condiciones de servicio.

Los reglamentos admiten, "redistribuir" los momentos elásticos en distintas proporciones. Los ensayos de Mattock (ref 2) ilustrados en la fig 3 muestran muy claramente que, en una viga subreforzada, redistribuciones de momentos de 25% no producen cambios

4

de comportamiento ni a la falla ni en condiciones de servicio.

En dichos ensayos la viga NR1 se reforzó de acuerdo con el diagrama de momento elástico; la viga R1 se reforzó para resistir un diagrama de momentos en que el negativo en el apoyo interior se habrá reducido en 25%; mientras que los positivos en el dentro del claro se incrementaron en 12.5% para mantener el mismo momento isostático resistente. La viga R2 se reforzó para el mismo diagrama de momentos que la R1 pero empleando acero con esfuerzo de fluencia de 4000 kg/cm<sup>2</sup> en lugar de 2800 kg/cm<sup>2</sup>.

Se aprecia como las tres vigas soportaron muy aproximadamente la misma carga máxima, fig 3i, y que las deflexiones y los agrietamientos bajo carga de servicio fueron similares. Al observar las gráficas de momentos medidos se aprecia como en la viga NR1 se obtuvo casi simultáneamente la fluencia del refuerzo negativo y el positivo, mientras que en la R1 el negativo fluyó prematuramente obligando a que el momento en el apoyo se mantuviera constante mientras que el positivo aumentaba mucho más rápidamente hasta alcanzar la fluencia y la falla por formación de mecanismo.

Los reglamentos difieren en el porcentaje de redistribución que admiten: el del Distrito Federal admite 30% para vigas (dúctiles) mientras que el ACI71 hace variar la redistribución admisible según la cuantía de refuerzo, según la fórmula

$$\% \text{ redistribución} = 20 \left( 1 - \frac{P - P'}{P_b} \right) \quad 5$$

Las ventajas de aprovechar la redistribución no son muy grandes. La principal es de poder simplificar la distribución del refuerzo y descongestionar zonas en que se acumulen muchas barras (por ejemplo en uniones viga-columna). Cuando se deba diseñar para la envolvente de distintas combinaciones de cargas, esta envolvente puede reducirse aprovechando la redistribución.

El saber que se puede contar con cierta redistribución da confianza en el uso de propiedades geométricas y mecánicas de la estructura que pueden determinarse con muy poca precisión, como el módulo de elasticidad del concreto y el momento de inercia efectivo de las secciones. El cometer un error en estos parámetros dará lugar a una distribución de momentos distinta a la que se va a presentar inicialmente, pero a la cual tenderán los momentos debido a la redistribución.

Para el análisis sísmico se suelen considerar las propiedades "estáticas" de los materiales; para el módulo de elasticidad una buena estimación se obtiene con la expresión  $E = 15000 \sqrt{f'_c}$  (ACI71) aunque para los concretos del Distrito Federal se obtienen valores mucho menores que corresponden a la expresión  $E = 10000 \sqrt{f'_c}$  (Reglamento D. F. 76).

Para los momentos de inercia hay criterios muy distintos. El más

razonable es el de considerar el momento de inercia de la sección bruta para las columnas y los elementos que es de esperarse no estén agrietados en condiciones de servicio.

Para los elementos de flexión parece mejor emplear el momento de inercia de la sección agrietada transformada el cual para cuantías normales de refuerzo corresponde aproximadamente al 60% de el de la sección bruta.

La fig 4 ilustra cuál es la diferencia en los momentos resultantes según se defina el momento de inercia de las secciones. Solo gracias a la redistribución de momentos, estructuras analizadas con tan distintos criterios pueden tener un comportamiento aceptable.

La capacidad de que las secciones sostengan grandes rotaciones y que pueda haber redistribuciones de momentos es particularmente importante en estructuras que deben soportar sismo. Como se ha explicado en otros temas de este curso, las fuerzas que pueden introducirse en una estructura en un sismo son muy superiores a las que los reglamentos especifican para un diseño estático, por ejemplo; esto implica que para disipar la energía de un sismo intenso la estructura debe entrar en un intervalo inelástico de esfuerzos y se requiere de ella gran capacidad de deformación y de disipación de energía.

En la situación descrita, un análisis elástico solo puede servir para apreciar donde se presentan las mayores fuerzas internas antes de que la

estructura entre en un comportamiento inelástico. Nuevamente hay una ventaja importante en reforzar una estructura para un diagrama de momento proporcional al que resulta de un análisis elástico. Todas las secciones llegarán aproximadamente al mismo tiempo a la fluencia y se requerirá en ellas un mínimo de deformación inelástica.

Hay que tomar en cuenta que si no todas las articulaciones plásticas ocurren simultáneamente, se requieren en las secciones que fluyen primero, factores de ductilidad locales muy altos para obtener un factor de ductilidad aceptable para la estructura en su totalidad (ver ref 1 pp 547 a 562). Lo anterior se ilustra en la fig 5 de la que se deduce que para tener un factor de ductilidad de 4 en un marco de 10 pisos se requiere un factor de ductilidad de 125 en las columnas de un piso cualquiera si ocurre un mecanismo de falla que involucre a las columnas y un factor de ductilidad de 8 si ocurre un mecanismo de falla de viga.

Lo anterior recalca la importancia de tener una distribución uniforme de resistencias en todos los elementos y la inconveniencia de tener zonas sobre-diseñadas y otras subdiseñadas.

## 2. DISEÑO DE VIGAS, COLUMNAS Y UNIONES EN MARCOS DE CONCRETO (ver ref 3 pp 393 a 432)

El marco continuo ha sido el sistema más empleado en estructuras de concreto ya que aprovecha el monolitismo y la continuidad que se pueden lograr fácilmente en este material para obtener una estructura hiperestática eficiente. La principal ventaja de este sistema en zonas sísmicas es la gran ductilidad con que puede contarse si se toman algunas precauciones en cuanto a la disposición del refuerzo. Una limitación que presenta es su poca rigidez ante cargas laterales que hace difícil mantener las deflexiones laterales dentro de los límites admisibles en edificios de varios pisos.

La capacidad de disipación de energía y la ductilidad de los marcos dependerán de las características de los tres elementos que los forman: vigas, columnas y uniones viga-columna. Como se ha visto en temas anteriores, en concreto reforzado solo pueden lograrse grandes ductilidades en elementos en que rige la flexión (vigas); por tanto habrá que diseñar de manera que las articulaciones plásticas se formen en las vigas, aunque conviene que en los tres elementos se trate de lograr la máxima ductilidad.

Los reglamentos modernos incluyen disposiciones de refuerzo para lograr ductilidad y así poder diseñar para fuerzas sísmicas reducidas, tomando en cuenta que la estructura es capaz de disipar energía

con deformaciones inelásticas. Los requisitos más completos al respecto son los contenidos en el apéndice A del reglamento ACI-71, los cuales se comentarán aquí, junto con recomendaciones de otras fuentes. En cuanto a los requisitos de tipo general se especifica que deben emplearse concretos con  $f'_c \geq 200 \text{ kg/cm}^2$  y aceros con  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Este último requisito pretende asegurar que el acero sea muy dúctil.

a) Diseño de vigas. Además de diseñar para las fuerzas que resultan del análisis sísmico hay que cumplir con los requisitos siguientes:

- Cuantía máxima de refuerzo igual a 50% de la balanceada; ver valores en la tabla de la fig 6
- Tener un refuerzo mínimo positivo y negativo en todas las secciones ( $\rho_{min} = 14/f_y$ ); mínimo dos barras en cada fecho
- Colocar en los extremos refuerzo positivo que proporcione un momento resistente igual por lo menos a la mitad del negativo
- Por lo menos una tercera parte del refuerzo negativo debe extenderse hasta un cuarto del claro y una cuarta parte debe ser continua en todo el fecho superior
- No cortar refuerzo en zonas de posibles articulaciones plásticas (a 2d del apoyo); si no pueden evitarse traslapos deberán colocarse estribos a lo largo de los mismos
- Estribos, mínimo #3, a  $d/2$  en toda la viga y a  $d/4$  en una distancia de 4 peraltes a partir del apoyo. En esta zona  $A_s \geq 0.15A_s' \frac{s}{d}$  ó  $0.15A_s' \frac{s}{d}$
- En la zona de articulación plástica (2d del apoyo) las barras que deban trabajar en compresión deberán estar confinadas por estribos (mínimo #3) a una separación no mayor de  $16\phi$  ni 30 cm.
- Debe diseñarse para la fuerza cortante que se presenta en la viga cuando se alcanzan los momentos últimos en los extremos, fig 7. Esto es con la finalidad de que pueda desarrollarse un mecanismo de falla por flexión.

Con estos requisitos se asegura un factor de ductilidad del orden de

10 en las vigas. Algunos autores (ref 4) hacen recomendaciones más conservadoras, como son estribos de confinamiento separados a no más de  $6\phi$  en los extremos, despreciar la contribución del concreto en la resistencia al corte o aumentar el factor de seguridad para el diseño por cortante.

b) Diseño de columnas

Los requisitos se ilustran en la fig 8 y se describen a continuación

- Cantidad de refuerzo entre 1 y 6%
- La suma de las capacidades en flexión de las columnas que concurren a una unión debe ser mayor que la suma de capacidades de las vigas que concurren a la misma. Esto tiende a asegurar que las articulaciones plásticas se formen en las vigas. No dice cuánto deben sobrediseñarse las columnas.
- Si  $P \leq 0.4 P_b$  (carga axial para falla balanceada) deben respetarse en la columna los mismos requisitos que para vigas.
- Cuando  $P > 0.4 P_b$  hay que confinar el núcleo de la columna por medio de espiral o estribos en una distancia igual a un peralte,  $1/6$  de la altura de la columna o 45 cm (el mayor de los tres) a partir de la cara de la viga.
- La cantidad de refuerzo espiral será  $\rho_s \geq 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$
- El área de estribos de confinamiento será por lo menos igual a  $A_{sh} = \frac{l_h \rho_s S_h}{2}$ ;  $S_h$  no mayor que 10 cm.
- Para reducir la longitud  $l_h$  pueden emplearse ganchos del mismo diámetro que los estribos cuya deformación se requiere resistir
- Separación máxima de estribos:  $d/2$ ; diseñados para resistir el cortante que se introduce en la columna al formarse las articulaciones plásticas en las vigas.

No hay que olvidar que ante la combinación de carga vertical y sismo

las columnas van a estar sujetas a un estado de flexocompresión biaxial para el cual deberán diseñarse.

c) Uniones viga-columna

La falta de anclaje del refuerzo en la conexión y la falta de refuerzo transversal en la misma ha sido una de las causas más frecuentes de fallas de marcos de concreto a raíz de temblores. Solo hasta muy recientemente se ha empezado a estudiar el comportamiento y a desarrollar procedimientos de diseño para estas uniones. El apéndice A del Reglamento ACI 71 contiene disposiciones muy limitadas al respecto. Más recientemente la misma institución ha publicado recomendaciones mucho más completas para el diseño de uniones (ref 5). Estas se presentarán más adelante.

Ante el efecto de carga vertical más sismo la zona de unión está sujeta a las condiciones de esfuerzo que se ilustran en la fig 9 y que introducen en ellas tensiones diagonales que pueden causar la falla. Mucho más grave es la situación de conexiones de extremo en las que se vuelve crítico el anclaje del refuerzo.

Diversos ensayos efectuados muestran que el comportamiento ante cargas alternadas de las conexiones es muy poco favorable cuando se llega cerca de su máxima capacidad de carga; esto lleva a la necesidad de diseñar las juntas de manera que los elementos por ellas conectadas puedan desarrollar toda su resistencia y que puedan formarse arti

culaciones plásticas en las vigas sin que las uniones se dañen. Para ello hay que tener las siguientes precauciones: colocar refuerzo transversal en la junta para que confine al concreto y para que evite falla por cortante y dar al refuerzo el anclaje adecuado.

Las recomendaciones de la ref 5 indican que las uniones de marcos que deben resistir sismo se revisen

- 1) por confinamiento se deberá proporcionar el mismo refuerzo que en los extremos de la columna: si  $P_u \geq 0.4 P_b$  es espiral o zuncho de estribos como se ha descrito en la sección anterior; sin embargo si existen vigas en los cuatro lados de la conexión, la separación de estribos puede aumentarse al doble.

- 2) por cortante: la fuerza cortante actuante se calculará con el diagrama de cuerpo libre de la fig 9 considerando que el refuerzo longitudinal puede llegar a trabajar a un esfuerzo igual a  $1.25 f_y$  ya que puede entrar en la zona de endurecimiento; esto da lugar a

$$V_u = 1.25 f_y (A_{Sb} + A_{St}) - V_{col}$$

$$V_{col} = (M_{ub} + M_{ut})/H \quad (\text{ver fig 9})$$

La resistencia al corte en la junta se calcula como la suma de una contribución del concreto

$$v_c = 0.9 \sqrt{f'_c} (1 + 0.03 N_u / A_g)$$

en que  $N_u/A_g$  es el esfuerzo de compresión sobre la columna y  $\gamma = 1.4$  si la unión está confinada normalmente a la dirección del cortante (si hay vigas transversales) y  $\gamma = 1$  si no es así.

La contribución del refuerzo al esfuerzo cortante resistente se calcula como

$$v_s = \frac{A_v f_y d}{s A_{cv}} \quad A_{cv} \text{ es el área del núcleo}$$

En todo caso

$$\frac{2}{3} v_u \leq v_s \leq 4 \sqrt{f'_c}$$

- 3) por anclaje: no se admiten traslapes en las uniones; las barras deberán tener, a partir del borde del núcleo, una longitud de desarrollo igual a

$$l_s = \frac{0.06 A_b (1.5 f_y - f_h)}{\psi \sqrt{f'_c}} \quad \text{ver fig 10}$$

en que  $\psi$  depende del confinamiento del núcleo y vale normalmente 1.4;  $f_h$  es la fuerza que resiste el gancho estándar, en caso de existir, la cual se calcula como

$$f_h = 185 (1 - 0.012 d_b) \psi \sqrt{f'_c}; \quad d_b \text{ diámetro de la barra}$$

Con los requisitos anteriores se asegura un buen comportamiento de la junta pero a costas de un refuerzo muy elaborado y difícil de colocar, ver fig 11. Hay algunas alternativas para evitar esa cantidad de refuerzo. Por ejemplo el hacer ampliaciones a la sección de la junta o usar anclajes mecánicos o soldados, ver fig 12.

El caso más crítico de uniones son las juntas de rodilla. En las que se presentan esfuerzos críticos tanto ante cargas que tiendan a abrirlas como ante las que tiendan a cerrarlas, fig 13. Se requiere en ellas formas de refuerzo particulares como las mostradas en la fig 13c.

En general parece que las recomendaciones del comité en cuestión son excesivamente severas, muy laboriosas de seguir y dan lugar a un refuerzo en las conexiones que es difícil de ejecutar.

### 3. SISTEMAS LOSA PLANA-COLUMNA

Las losas planas son ampliamente usadas en edificios debido a diversas ventajas como la sencillez de la cimbra y el peralte reducido a que dan lugar. Hay distintas versiones: con o sin capiteles, y macizas o aligeradas, fig 14. Ante cargas verticales su comportamiento está muy estudiado y los procedimientos de diseño muy comprobados, ACI-71.

En lo que respecta a su eficiencia para resistir efectos sísmicos, hay muchas controversias. Las limitaciones se refieren a su escasa rigidez ante cargas laterales y, especialmente, a la poca ductilidad que puede lograrse en este sistema, ya que es difícil evitar que la falla sea regida por cortante en la zona de conexión entre viga y columna. En diversos países, no se permite que se aproveche este sistema para resistir fuerzas sísmicas; cuando se use se requiere que las fuerzas sísmicas

micas sean tomadas íntegramente por muros de rigidez u otros sistemas. En México, sin embargo, es muy frecuente que el sistema losa plana-columna deba resistir una porción importante de las fuerzas sísmicas.

Para fines de análisis por cargas laterales, la losa se sustituye por una viga de rigidez equivalente; sin embargo, no es aplicable el criterio del ACI-71 en que la viga tiene la rigidez de la losa de centro a centro de claros adyacentes; análisis teóricos indican que ante cargas laterales resulta adecuado el criterio especificado en el Reglamento del D.F., según el cual el ancho de losa que es efectivo para trabajar como viga debe tomarse como, fig 15,

$$L_{eq} = \frac{0.5 L_2}{1 + 4.67 \frac{L_2}{L_1}} + 0.3 c_2$$

Resultados experimentales de Hawkins (ref 6) indican rigideces aún menores que las calculadas con la de esta expresión y considerando el momento de inercia de la sección agrietada.

Por lo anterior la rigidez ante cargas laterales del sistema losa plana-columna suele ser bastante reducida y resulta difícil cumplir con las limitaciones de deflexiones laterales admisibles.

El análisis sísmico, una vez definidas la viga equivalente, se realiza como en un marco y los momentos obtenidos para el marco se distribuyen entre las franjas de columna y central con los mismos coeficien

tes que para los momentos debidos a cargas verticales.

El problema principal en este sistema es la trasmisión del momento, de desequilibrio de columnas a viga, fig 16. El momento debido a sismo se trasmite a la losa por una combinación de flexión y cortante. El modo de falla es local y no permite la formación de una articulación plástica; sino que da lugar a una falla local que es muy frágil a menos que se proporcione un refuerzo por cortante. De los diversos procedimientos de refuerzo propuestos (fig 17), el más satisfactorio es el desarrollado por Hawkins que consiste en reforzar vigas ahogadas en el espesor de la losa, en un ancho igual al de la columna más un peralte de la losa, en las cuales puede colocarse abundante refuerzo transversal.

El procedimiento de diseño puede extrapolarse del especificado por el ACI-71 en que se supone que una fracción del momento de desequilibrio (en general 60%) es tomada por momento y el resto por la variación, supuesta lineal, de las fuerzas cortantes en la sección crítica, fig 16.

En cuanto a la resistencia al cortante, el esfuerzo a resistencia del concreto se puede tomar como  $v_c = \sqrt{f'_c}$  (el doble que para vigas) y la contribución de los estribos,  $v_s$  se calcula igual que en vigas (fig 18); sin embargo cuando se requiera refuerzo la contribución del concreto debe reducirse a la mitad y no se admite que  $v_u \geq 1.5 \sqrt{f'_c}$ . Aunque el incremento en resistencia por efecto del refuerzo transversal sea limita

do, su presencia es indispensable para dar cierta ductilidad a la falla.

Por lo que se ha descrito es evidente que en caso de emplear este sistema para resistir fuerzas sísmicas las reducciones por ductilidad que deban considerarse son muy inferiores a las que son admisibles para marcos.

#### 4. MUROS DE RIGIDEZ

En edificios de altura mediana o grande resulta antieconómico proporcionar la rigidez ante cargas laterales exclusivamente con marcos; la solución más empleada es que la rigidez y resistencia sísmica estén proporcionadas principalmente por muros de concreto. En temas anteriores se ha descrito el comportamiento de estos elementos ante cargas alternadas distinguiendo los muros altos en que el comportamiento está regido principalmente por los momentos flexionantes y que pueden diseñarse con los mismos procedimientos empleados para vigas, de los muros bajos en las que predomina el efecto de las deformaciones por cortante. En otro tema se ha tratado el análisis sísmico de sistemas con muros de rigidez el cual presenta dificultades mayores que el de sistema base exclusivamente de marcos.

La ductilidad y disipación inelástica de energía que puede lograrse en muros de rigidez es muy variable según rija la flexión o el cortante y según haya o no cargas verticales altas sobre el muro. Sin embargo los reglamentos suelen tratar todos los muros con el mismo criterio fijando factores reductivos por ductilidad mucho menores para estos sistemas que para los marcos.

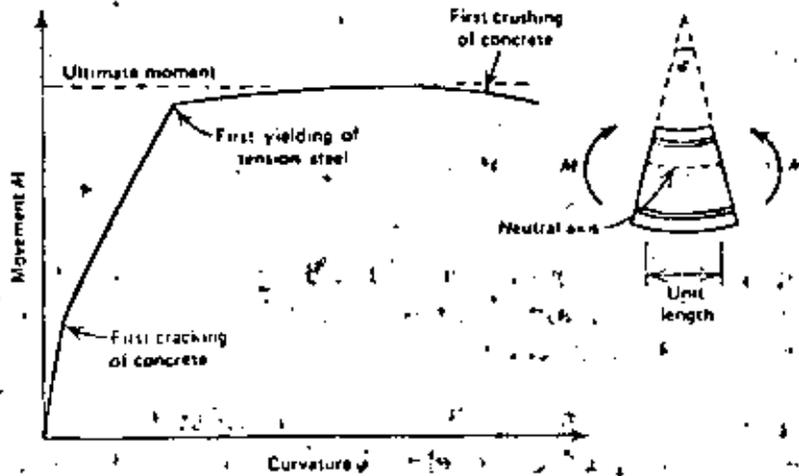
Los procedimientos de diseño de muros están dados, por ejemplo, en el ACI-71; si se trata de muros altos, tanto para flexocompresión como para cortante, se emplean los mismos métodos que para vigas y columnas; en muros cortos la resistencia a cortante es mayor y se dan expresiones particulares. Para refuerzo por cortante se requieren barras horizontales, pero en muros cortos es necesario proporcionar también refuerzo vertical, ver fig 19.

El apéndice A del ACI 71 da requisitos especiales también para muros de rigidez. Se requiere una cuantía mínima de refuerzo de 0.0025 tanto vertical como horizontal. Si la carga axial es menor que 40% de la balanceada se requiere un refuerzo mínimo de flexión de  $14/f_y$ ; si es mayor se exige que se coloquen columnas (elementos de extremos) con la capacidad suficiente para resistir la carga axial total sobre el muro. Esto último con la función de tener confinado el refuerzo de compresión.

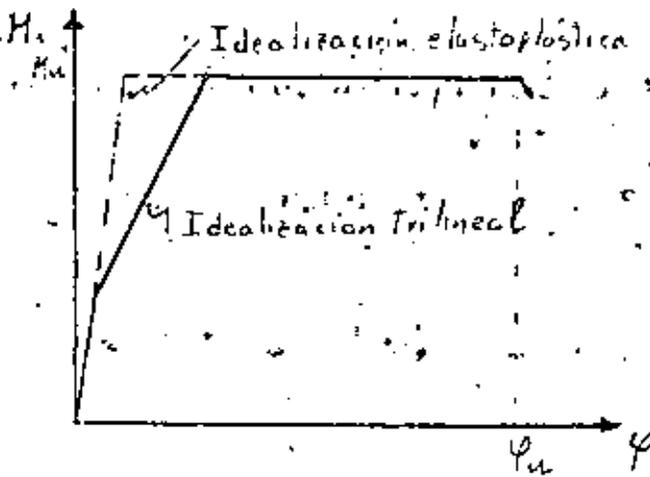
El diseño de estructuras prefabricadas así como el de estructuras especiales de concreto como tanques, chimeneas y muros de retención se trata en forma adecuada en la ref 7.

## Referencias

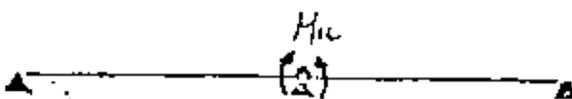
- 1 R Park y T Paulay "Reinforced Concrete Structures" J. Wiley 1975
- 2 A. H. Mattock "Redistribution of bending moments in reinforced concrete continuous beams" Proc The Institution of Civil Engineering" 13 may 1959
- 3 A. T. Derecho y M. Fintel "Earthquake Resistant Structures" Cap 12 de Handbook of Concrete Engineering, editado por M. Fintel, Van Norstrand, 1975
- 4 V. V. Bertero y E. Popov "Hysteretic Behavior of Ductile Moment-Resisting Reinforced Concrete Frame Components" Rep No EERC 75-16 Univ. California Berkeley, 1975
- 5 Comité ACI-ASCE 352 "Recommendations for Design of Beam-Column Joints in Monolithic Reinforced Concrete Structures" Journal ACI, 73, julio 1976
- 6 Comité ACI-ASCE 426 "The Shear Strength of Concrete Members. Slabs" Journal Struct Div ASCE vol. 100 ST8, ago 1974 pp 1543-1591
- 7 D J Dowrick "Earthquake Resistant Design" J Wiley, 1977



a) Forma típica de la relación  $M-\psi$



b) Idealizaciones de la  $M-\psi$

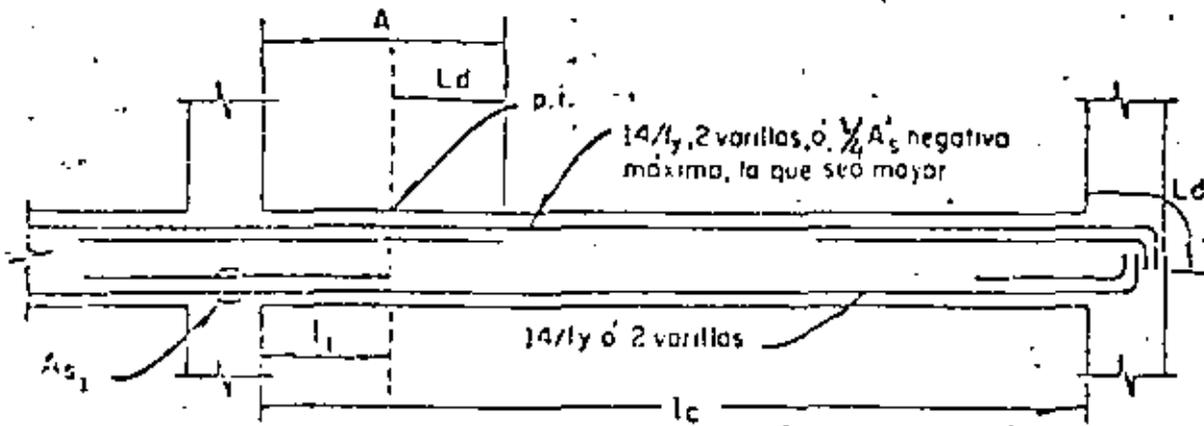


c) Articulación Plástica

Fig 1 Relaciones momento-curvatura en elementos de concreto reforzado

(No puede contarse más de la tercera parte del acero negativo en esta longitud que debe ser por lo menos de  $0.25l_c$ )

$$\rho \leq 0.5 \rho_b$$

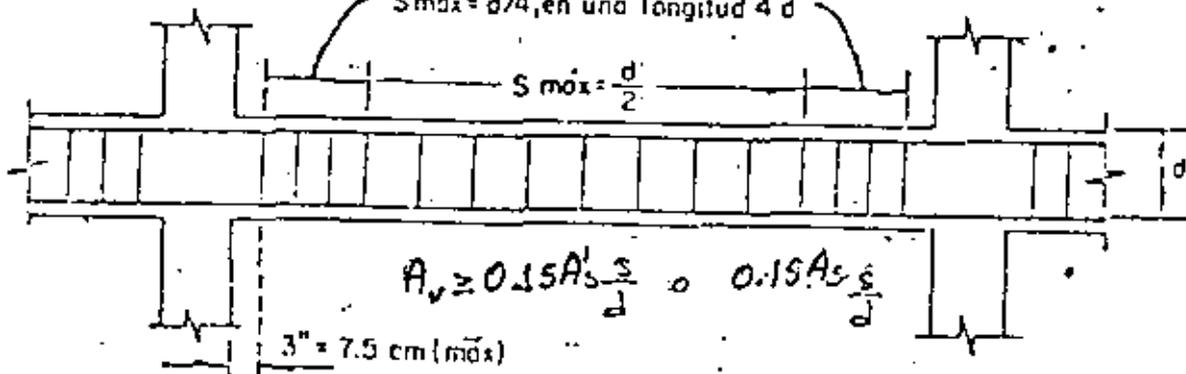


$A_{s1}$  Esta cantidad de acero debe ser tal que la resistencia por momento positivo sea por lo menos el 50% de la resistencia por momento negativo

$l_1$  Distancia requerida por momento más la longitud de anclaje p.i. Punto de inflexión (posición más desfavorable)

### a) Refuerzo longitudinal

$S_{m\acute{a}x} = 16\phi$  o  $30\text{ cm}$  en una longitud  $2d$   
 $S_{m\acute{a}x} = d/4$ , en una longitud  $4d$



### b) Refuerzo Transversal

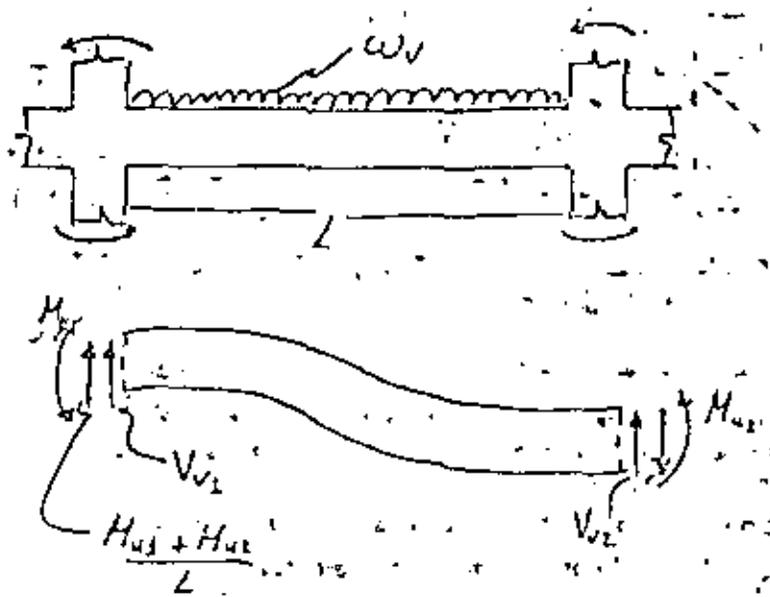
Cantidad máxima de refuerzo de tensión para elementos de marcos dúctiles

Valor de  $\rho = 0.5 \rho'$

$f_v$ $f'_c$	200	280	350
2800	0.0186	0.0247	0.0291
4200	0.0107	0.0143	0.0168

$\rho$  = cantidad de refuerzo de tensión  $\rho = A_s/bd$   
 $\rho'$  = cantidad de refuerzo de compresión  $\rho' = A'_s/bd$

### c) Cuantías máximas

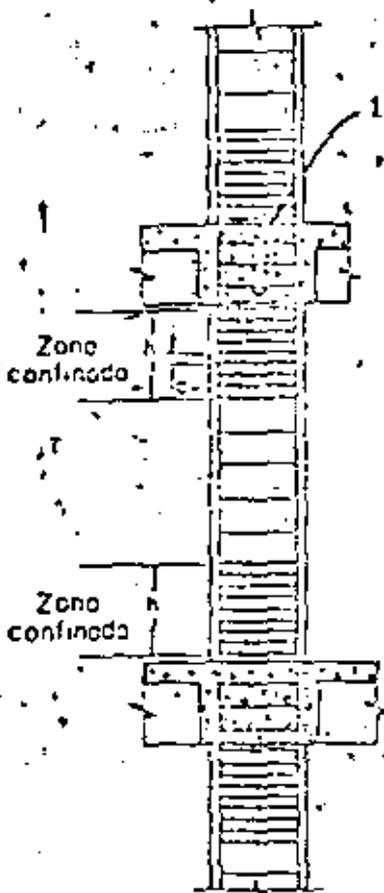


$$V_u = V_{u1} + \frac{M_{u1} + M_{u2}}{L} \quad V_c = V_{u2} + \frac{M_{u1} + M_{u2}}{L}$$

$M_{u1}, M_{u2}$  momentos últimos resistidos por las columnas

$V_{u1}, V_{u2}$  fuerzas cortantes debidas a las cargas verticales de diseño

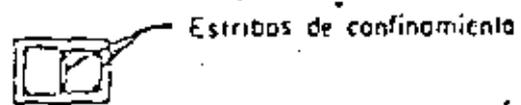
Fig 7 Fuerzas cortantes de diseño en vigas



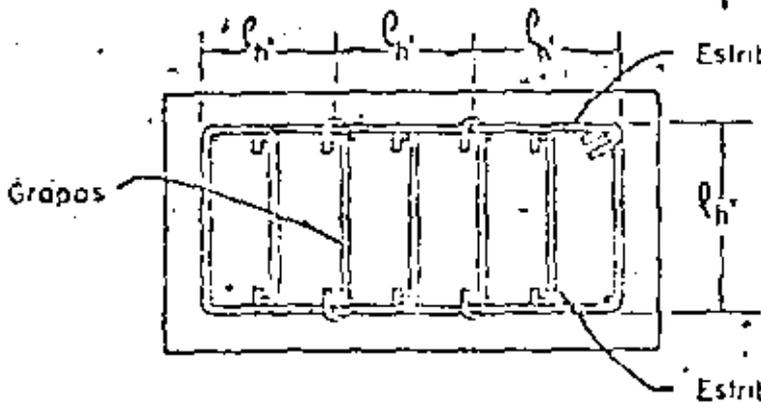
$0.03 \leq \rho \leq 0.06$   
 $\Sigma M_{Rc} \geq \Sigma M_{Ev}$   
 Si  $\rho = 0.4 \rho_s$  como vigas  
 Si  $\rho > 0.4 \rho_s$  : confinamiento

1. El refuerzo de la intersección puede separarse  $2a$ , cuando hay vigas en los cuatro loops; para otras condiciones la separación debe ser  $a$

$$\rho_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f_c'}{f_y}$$

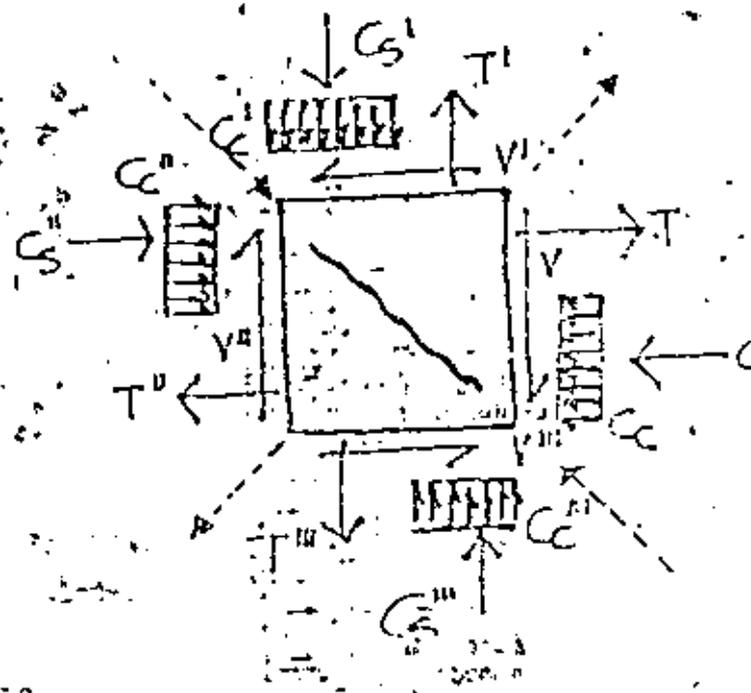
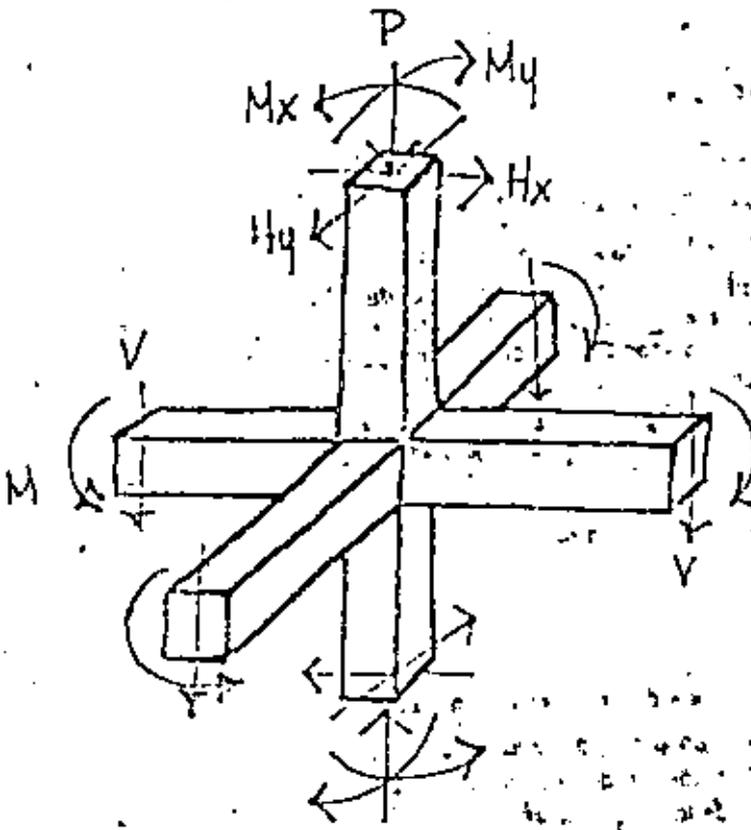


$a$  = Separación del refuerzo transversal  
 $h$  = Dimensión máxima de la columna, pero no menor de 45 cm, ni de un sexto de la altura libre



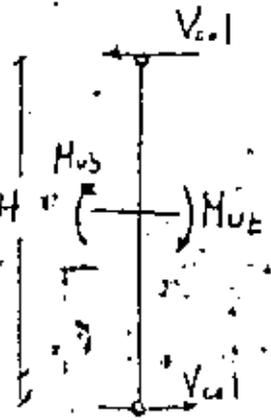
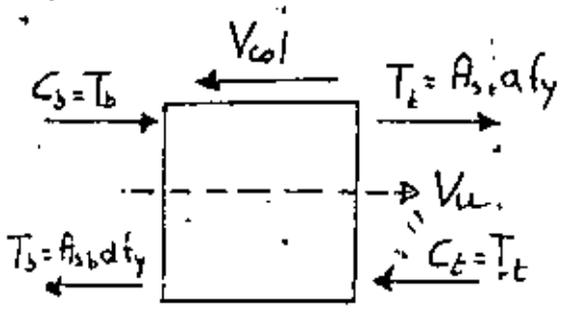
$$A_{sh} = \frac{l_h \cdot l_s \cdot s_h}{z}$$

Fig 8 Refuerzo por ductilidad en columnas



a) Cargas en la conexión

b) Fuerzas aplicadas en la junta (con líneas punteadas las resultantes que causan tensión diagonal)



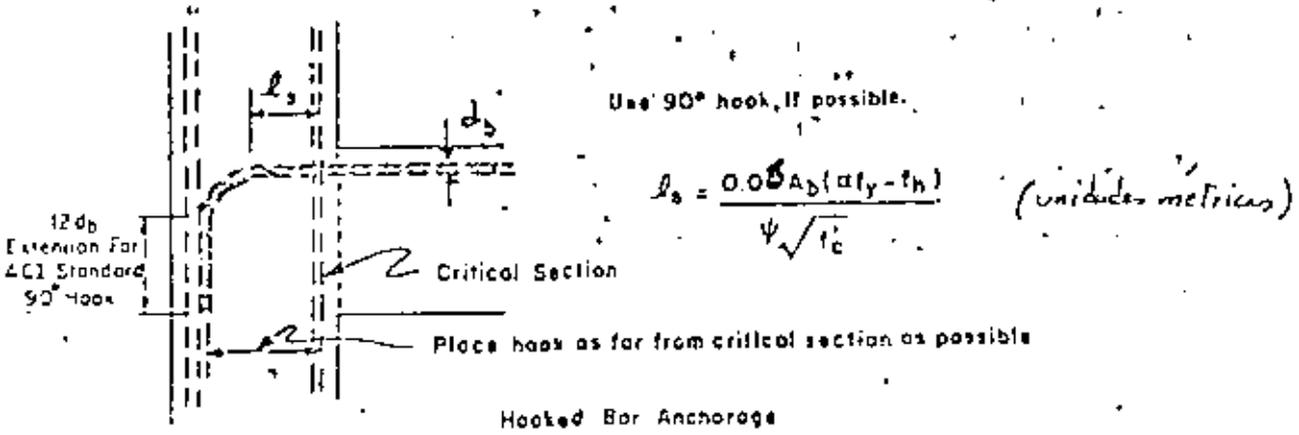
$$V_{col} = \frac{M_{Us} + M_{UE}}{H}$$

$$V_u = C_b + C_t - V_{col}$$

$$V_u = d f_y (A_{sb} + A_{st}) - V_{col}$$

c) Fuerza cortante de diseño en la unión

Fig 9 Diseño por cortante de la unión viga columna



A<sub>b</sub> = área de la barra

ψ = 1.4 (en condiciones usuales)

$$f_h = 385 (1 - 0.012 d_b) \psi \sqrt{f'_c}$$

Fig 10 Requisitos de anclaje en la unión

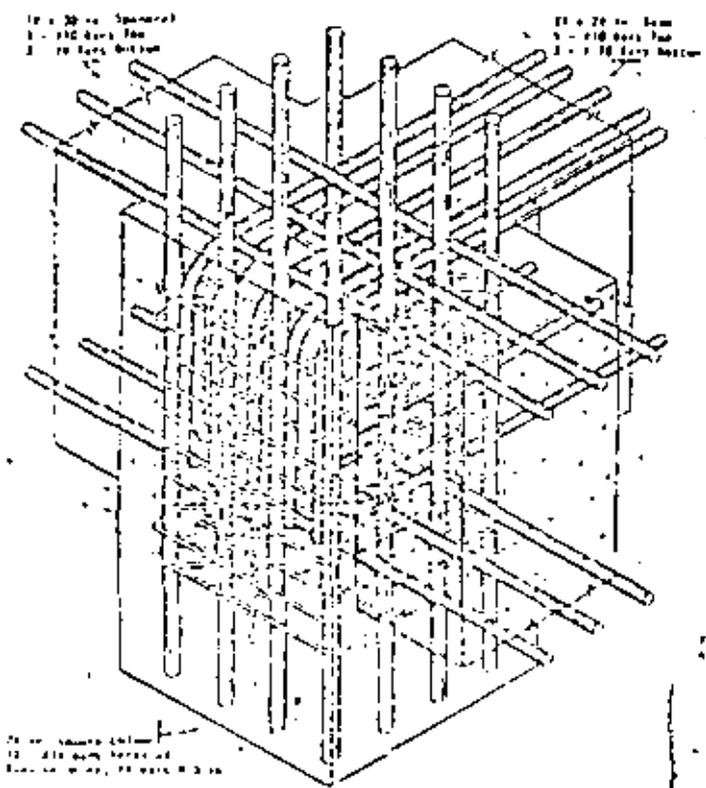


Fig 11 Refuerzo de unión de acuerdo en los requisitos de Com. ACI-ASCE 352

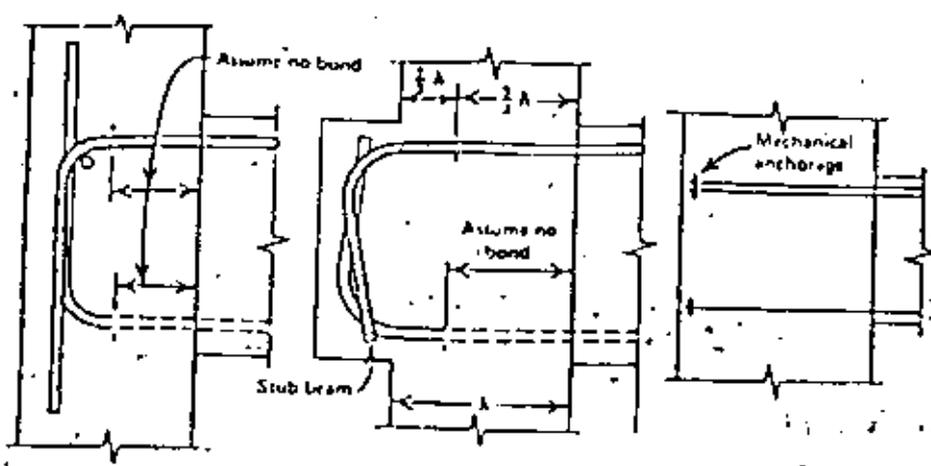
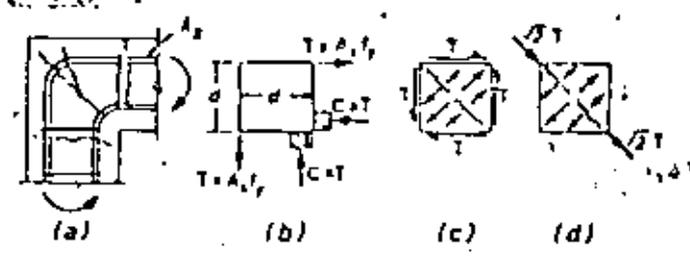
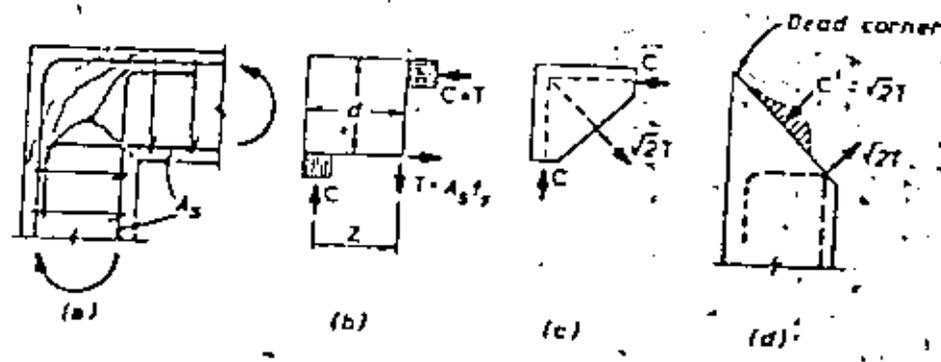


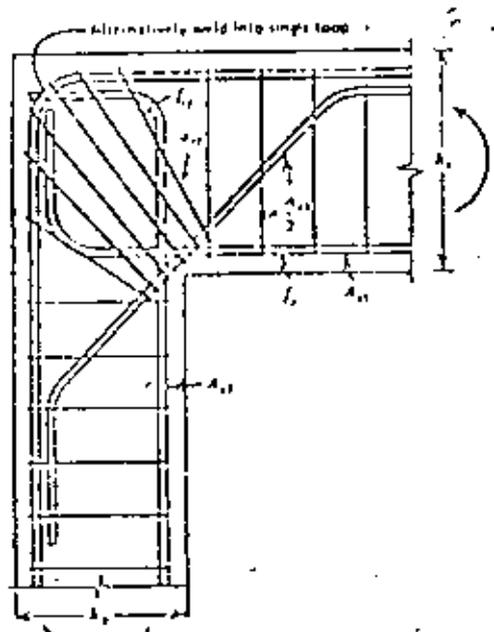
Fig 32 Formas alternativas de anclaje del refuerzo en las uniones



a) refuerzo al cerrarse la unión



b) refuerzo al abrirse la unión



c) Refuerzo recomendable en uniones de rodilla para claros grandes

Fig 33 Condiciones de esfuerzos y modalidades de refuerzo en juntas de rodilla

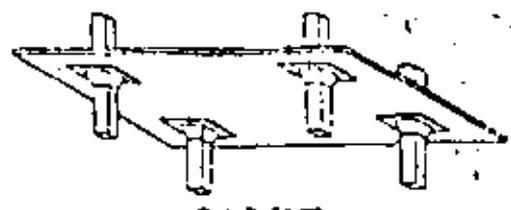


Fig. 1 - Losa plana

a) Losa plana  
con columnas rectangulares

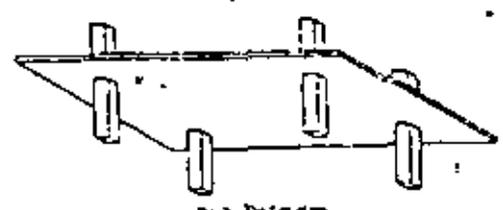
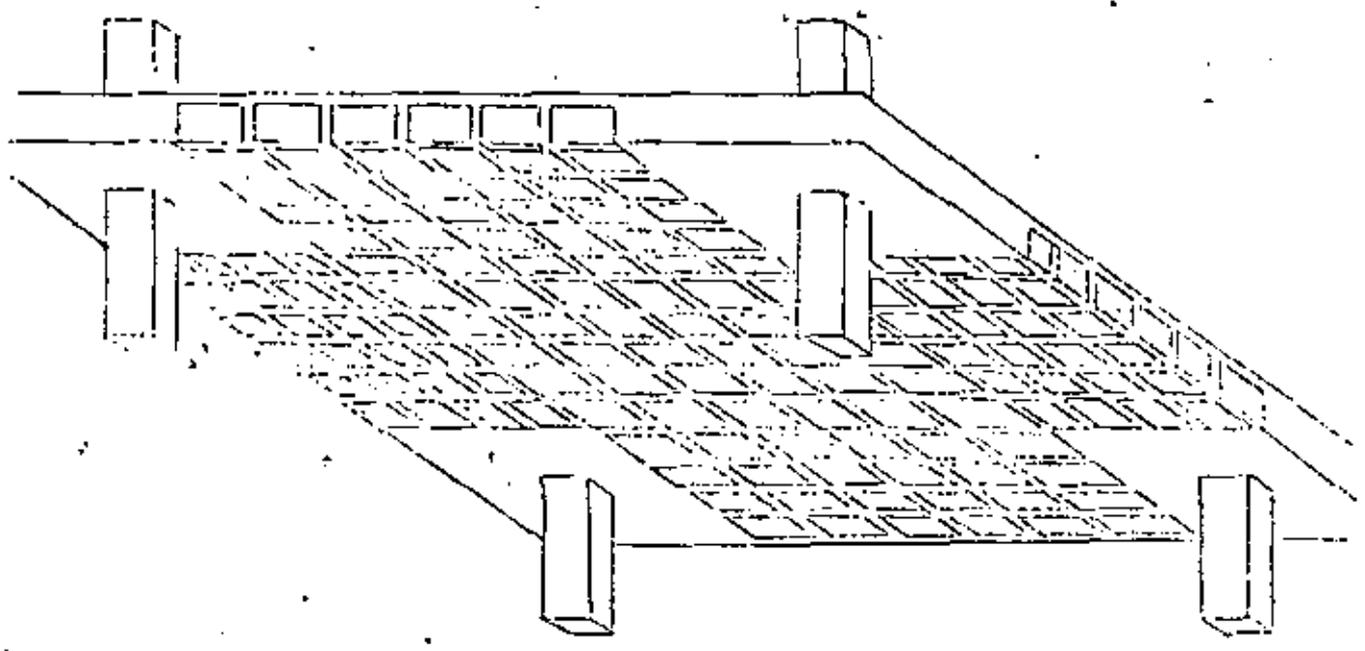


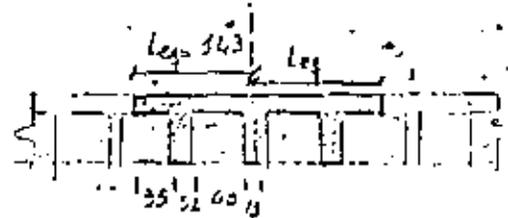
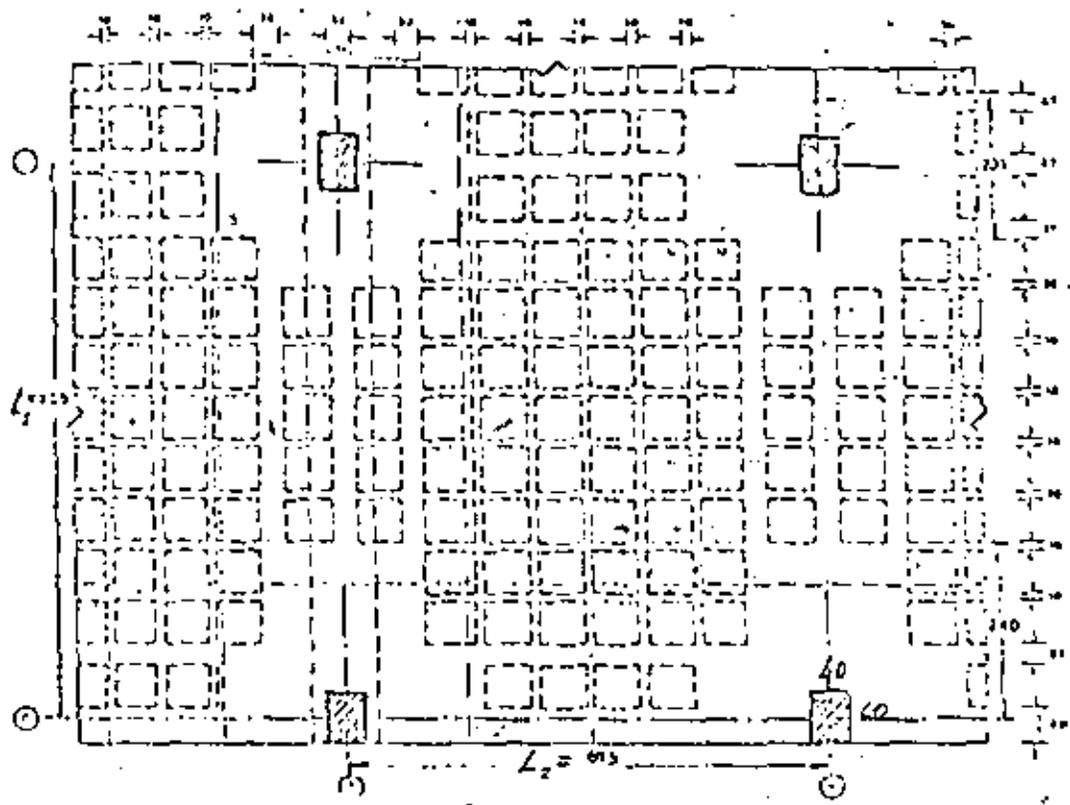
Fig. 2 - Losa plana

b) Placa plana



c) Losa plana aligerada

Fig. 14 Modalidades de losas planas

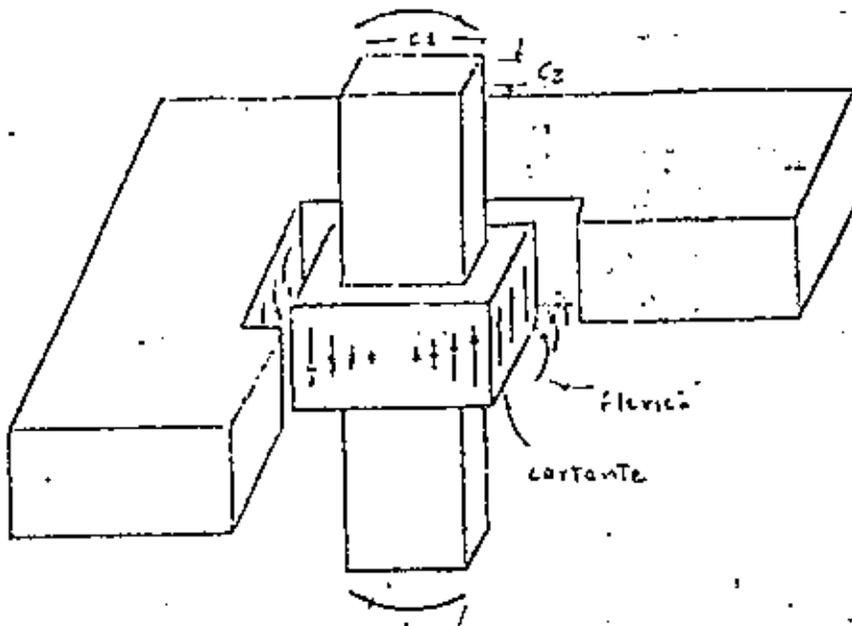


Viga equivalente

$$L_{eq} = \frac{0.5L_2}{1 + 3.67L_2/L_1} + 0.36L_2$$

$$L_{eq} = \frac{0.5 \times 675}{1 + 1.67 \times \frac{675}{750}} + 0.36 \times 675 = 343 \text{ cm}$$

Fig 15 Viga equivalente para analisis por cargas laterales

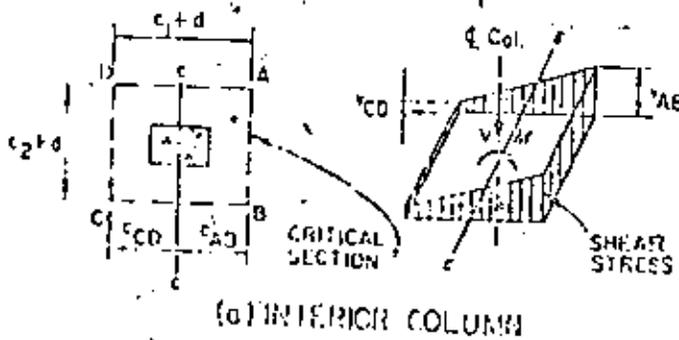


Por cortante  $\alpha M/d$

$$\alpha = 1 - \frac{v \cdot l}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{c_1 \cdot d}{c_2 + d}}}$$

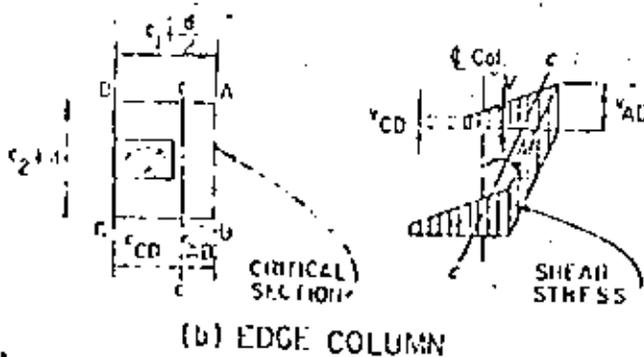
a) Fuerzas en la conexión

Por flexión  $(1 - \alpha) M/d$



$$V_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{\alpha M c_1}{J_c}$$

$$V_{CB} = \frac{V}{A_c} - \frac{\alpha M c_2}{J_c}$$



a) Distribución de esfuerzos cortantes en la sección crítica

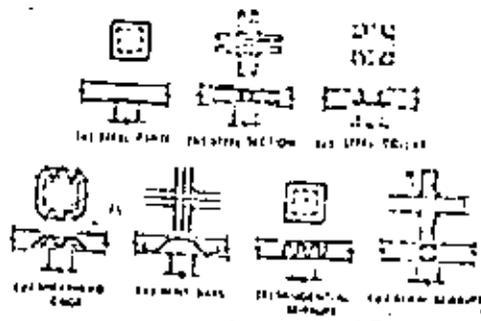
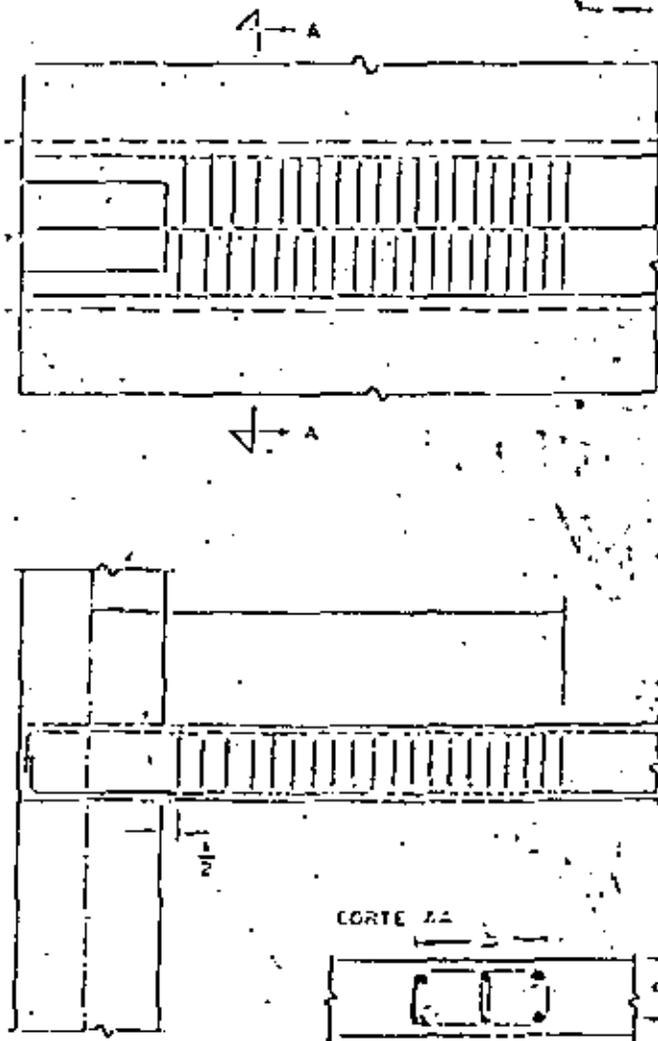


Fig 17 Modulos de resistencia por cortante en bases planas



$$v_u = \frac{V}{A_c} + \frac{\alpha H_c}{J_c}$$

$$v_c = \sqrt{f_c}$$

si  $v_u > v_c$

Se requiere

$$v_s = v_u - \frac{v_c}{2}$$

$$v_c = \frac{1.5 \sqrt{f_c}}{s b}$$

No reanillo

$$v_u > 1.5 \sqrt{f_c}$$

Fig 18 Diseño de refuerzo por cortante en

TEMA 7    ESTRUCTURAS    DE    CONCRETO

Capítulo 9 de

Manual de Diseño Sísmico  
Según el Reglamento de Construcciones  
para el Distrito Federal.

## 9. REQUISITOS PARA EL DIMENSIONAMIENTO Y DETALLE DE LAS ESTRUCTURAS

### 9.1 Aspectos generales

Se ha mencionado en capítulos anteriores que uno de los aspectos fundamentales del diseño de estructuras resistentes a sismos es el relativo al dimensionamiento y detalle de los elementos estructurales y de sus conexiones, de manera que la estructura se comporte en forma congruente con lo que se ha supuesto en el análisis. A este respecto los puntos más importantes son los relativos a que las secciones individuales sean capaces de desarrollar el grado de ductilidad implícito en el diseño y a que la estructura en su conjunto pueda, en caso de estar sujeta a un sismo intenso, desarrollar mecanismos de deformación inelástica que le permitan disipar la energía del sismo sin llegar al colapso.

Para un esquema estructural dado, el reglamento permite al proyectista diferentes opciones en cuanto a la magnitud de la reducción de las fuerzas sísmicas de diseño por efectos de ductilidad, por medio del valor del factor  $Q$ . Sin embargo, los requisitos de estructuración, dimensionamiento y detalle se hacen cada vez más rigurosos a medida que aumenta el valor de  $Q$ . Por tanto, la estructura más adecuada para una construcción dada no es necesariamente la que se diseña para el máximo valor de  $Q$  admitido por el reglamento. El proyectista deberá en cada caso hacer una evaluación económica

ca para determinar si el costo que implica cumplir los requisitos impuestos para el empleo de un  $Q$  mayor justifica el ahorro que se tiene por la reducción en las fuerzas sísmicas de diseño.

Los factores de reducción por ductilidad especificados en el reglamento son índices de la cantidad de energía que la estructura debe ser capaz de disipar en el intervalo inelástico, y no corresponden generalmente a factores de ductilidad reales; más bien, la ductilidad que debe ser capaz de desarrollar localmente una sección suele ser muy superior al valor de  $Q$  adoptado. La capacidad de disipación de energía de una estructura va a estar regida por el número de secciones que llegan a entrar en el intervalo inelástico y la capacidad de deformación (ductilidad) de las mismas. El proyectista puede elegir la estructuración y dimensionar individualmente las secciones de manera que las secciones críticas sean precisamente aquellas en que pueda desarrollar se mayor ductilidad; por otra parte, el cuidado en proporcionar ductilidad a la estructura puede verse estropeado por haber ignorado que en el mecanismo de falla intervienen otras secciones o modos de falla de tipo frágil.

En el capítulo anterior se han descrito los requisitos y precauciones a seguir en cuanto a la elección de la estructuración y al arreglo de elementos estructurales en lo que concierne al buen comportamiento sísmico general. En este capítulo se trata de los requisitos relativos a la resistencia y ductilidad de las secciones y elementos particulares. El énfasis se pone en las estructuras de concreto por ser las más comunes y aquellas en que se requieren mayores cuidados para lograr ductilidad. Se incluyen las recomendaciones más esenciales para estructuras de acero. No se tratan aquí requisitos para estructuras de mampostería, por considerar que están cubiertos con amplitud en las normas técnicas correspondientes (ref 31).

Las recomendaciones que se presentan son más detalladas que las incluidas en el reglamento. Por una parte, el carácter mismo del reglamento no permitía dedicar al problema el espacio que hubiera requerido un tratamiento minucioso de los requisitos para los diversos sistemas estructurales; por otra, los conocimientos y la reglamentación al respecto se han desarrollado en forma importante en años muy recientes, de modo que se considera necesario ampliar y, en algunos casos también corregir, los requisitos específicos del reglamento,

respetando siempre sus criterios básicos.

## 9.2 Estructuras de concreto

### 9.2.1 Introducción

Los valores de  $Q$  especificados para estructuras de concreto por el reglamento varían entre 2 y 6 dependiendo de la estructuración, según sea esta a base de marcos o de muros o de combinaciones de ambos, y dependiendo de los requisitos de dimensionamiento y detalle.

En esta sección se describen y comentan los requisitos correspondientes a los diferentes elementos estructurales, vigas, columnas, uniones y muros, para los distintos factores de reducción y son adicionales a los establecidos en las normas para estructuras construidas en zonas no sísmicas. Dichos requisitos se presentan principalmente en forma gráfica o tabular y en el texto se explica su razón de ser y su interpretación: En general no existen requisitos especiales para la adopción de  $Q = 2$ ; estos son los usuales para estructuras de concreto en zonas no sísmicas, por lo que no se hace referencia especial a ellos en lo que sigue.

### 9.2.2 Materiales

Los requisitos se resumen en el esquema siguiente:

CONCRETO	$Q = 4$	Ninguno
	$Q = 6$	Resistencia especificada en compresión, $f'_c \geq 200 \text{ kg/cm}^2$
		La desviación estándar de $f'_c$ no excederá de 35 $\text{kg/cm}^2$

	$Q = 4$	Ninguno para refuerzo longitudinal.
ACERO DE		$f_y \leq 4200$ para estribos
REFUERZO		
	$Q = 6$	$f_y \leq 4200$ kg/cm <sup>2</sup> fluencia definida

$f_y$  es el esfuerzo de fluencia especificado del refuerzo.

La resistencia en compresión del concreto tiene poca influencia en el nivel de ductilidad que puede desarrollar la estructura. La limitación de una resistencia mínima que se impone para  $Q = 6$  tiene la intención principal de evitar tipos de concreto en los que se tiene en general un pobre control de calidad. Se considera que para la adopción de  $Q = 6$  es conveniente exigir un buen control de calidad en el concreto para evitar que la variabilidad de sus propiedades pueda dar lugar a zonas mucho más débiles que el resto de la estructura y que en ellas tienda a concentrarse la disipación inelástica de energía, redundando en una menor ductilidad del conjunto. Para reforzar este punto se está agregando una limitación en la desviación estándar de la resistencia del concreto, que no debe exceder de 35 kg/cm<sup>2</sup>. Esta limitación lleva, según el inciso 10.3.1 de las Normas (ref 32), al empleo de concreto dosificado por peso y con control de humedad y absorción en los agregados.

Por lo que respecta al acero de refuerzo, las normas admiten aceros hasta con esfuerzo nominal de fluencia de 6000 kg/cm<sup>2</sup>. Estos pueden emplearse como refuerzo longitudinal cuando se diseña con  $Q = 4$ ; <sup>sin embargo,</sup> para estribos se requiere  $f_y \leq 4200$  kg/cm<sup>2</sup>. Para adoptar  $Q = 6$  se exige por una parte que el acero tenga una fluencia definida, lo cual excluye los aceros torcidos en frío, y por otra, que el esfuerzo de fluencia no exceda de 4200 kg/cm<sup>2</sup>. Se pretende con ello asegurar que pueden formarse articulaciones plásticas con alta capacidad de rotación y también eliminar la posibilidad de daños locales en aceros frágiles durante su manejo, lo cual puede reducir su capacidad de de formación.

### 9.2.3 Requisitos para vigas

Los requisitos aquí descritos se aplican a aquellos elementos que trabajan esencialmente en flexión, lo que incluye las vigas y aquellas columnas con cargas axiales muy bajas, que no excedan de  $0.1 A_g f'_c$ , en que  $A_g$  es el área de la sección bruta.

#### a) *Requisitos geométricos*

Los requisitos ilustrados en la fig 9.1, tienen como objetivos, por una parte, evitar que la ductilidad de la viga se vea limitada por problemas de pandeo lateral por la excesiva esbeltez de su alma; a eso obedecen las limitaciones de las relaciones  $l/b$  y  $h/b$ ; por otra, se pretende también asegurar que la transmisión de momentos entre viga y columna pueda realizarse sin la aparición de esfuerzos importantes por cortante y torsión. Con tal fin se limita la excentricidad que puede tener la viga con respecto a la columna y se prohíbe que la viga tenga un ancho netamente superior al lado de la columna en que se empotra.

#### b) *Requisitos para el refuerzo longitudinal*

Los requisitos se ilustran en la fig 9.2. El área mínima de refuerzo en estructuras en zonas no sísmicas o en las que se adopte  $Q = 2$ , debe cumplirse solo en aquellos lechos en que, según el análisis, aparecen tensiones para alguna combinación de acciones de diseño; cuando se diseñe con  $Q = 4$  o  $Q = 6$  se requiere el refuerzo mínimo en ambos lechos y en toda la longitud de la viga, independientemente de los resultados del análisis.

La ductilidad que es capaz de desarrollar una sección de concreto reforzado es mayor a medida que la sección es más subreforzada, es decir cuando menor es la relación entre su área de refuerzo y la que corresponde a falla balanceada; por esa razón, en los requisitos que corresponden a  $Q = 4$  solo se exige que el área de refuerzo no exceda de 75 por ciento la balanceada, <sup>mientras que</sup> cuando se diseñe para  $Q = 6$  esta debe limitarse a 60 por ciento de la balanceada. Las expresiones especificadas en las normas (ref 32), proporcionan valores conservadores del área balanceada iguales aproximadamente a 80 por ciento del valor esperado,

por tanto, los límites impuestos para  $Q = 4$  y  $Q = 6$  corresponden aproximadamente a cuantías iguales a 60 y 50 por ciento de la balanceada, respectivamente.

Los requisitos de corte de varillas tienden a evitar que aparezcan tensiones por la transmisión de esfuerzos de adherencia en las zonas donde se pretende que se formen articulaciones plásticas.

Las normas exigen también que en las secciones no afectadas por las articulaciones plásticas se compruebe que el factor de seguridad a flexión no sea menor que 1.1 veces el que se tiene en dichas articulaciones. Se piensa que este requisito se satisface automáticamente en la mayoría de los casos por la rápida variación del diagrama de momentos en las zonas extremas de las vigas y porque se refuerzan para articulaciones plásticas zonas más amplias que las que en realidad abarcarán tales articulaciones.

#### c) Requisitos para el refuerzo transversal

La cantidad y disposición de estribos ilustrada en la fig 9.3 tiende, por una parte, a asegurar cierta ductilidad en cualquier sección en caso de un agrietamiento diagonal; por otra, cuando se diseña para  $Q = 6$  se pretende que en los extremos de las vigas los estribos proporcionen confinamiento al concreto y eviten el pandeo del refuerzo de compresión para permitir el desarrollo de grandes ductilidades; por ello se limita más la separación de estribos. En la longitud de posible articulación plástica,  $l_1$ , solo se admiten estribos cerrados.

Cuando se adopte  $Q = 6$ , el dimensionamiento por cortante de las vigas deberá cumplir, además de los requisitos generales del reglamento, con lo siguiente:

- 1) En una distancia de dos veces el peralte de la viga medida a partir de la cara del apoyo se considerará nula la contribución del concreto a la resistencia a cortante.

Esto obedece a que los ensayos del elemento de concreto ante repeticiones

de cargas alternadas han mostrado que la contribución del concreto se deteriora rápidamente de manera que es recomendable ignorarla cuando se pretende que la sección sea capaz de alcanzar más de una vez rotaciones inelásticas importantes.

- 2) La revisión de la resistencia en cortante se hará aplicando un factor de carga de 1.4 a las fuerzas internas que resultan del análisis. Además, cuando el refuerzo longitudinal de la viga sea sustancialmente mayor que el se requiere para resistir los momentos flexionantes de diseño, deberá proporcionarse la resistencia por cortante suficiente para que pueda alcanzarse en los extremos de la viga los momentos máximos resistentes (negativo en un extremo y positivo en otro).

Este último requisito pretende evitar que se presente falla por cortante antes que puedan formarse las dos articulaciones plásticas en los extremos de la viga. Por tanto, la viga tiene que ser capaz de soportar las cortantes que aparecen cuando se forma el mecanismo de falla aceptado. En este aparece primero la articulación plástica de momento negativo en un extremo y posteriormente, si el efecto sísmico crece, se forma una segunda articulación plástica, de momento positivo, en el otro extremo o cerca de él. Los momentos flexionantes respectivos dependen de cómo se hayan reforzado los extremos de las secciones; las cortantes que originan se ilustran en la fig 9.4, y pueden ser muy superiores a las que resultan de los diagramas para las fuerzas especificadas.

#### 9.2.4. Requisitos para columnas

Se cubren aquí elementos sujetos a una carga axial de compresión que exceda de  $0.1 f'_c A_g$  en que  $A_g$  es el área de la sección bruta. Para columnas en que la carga axial sea menor que el límite indicado, se seguirán los requisitos para vigas.

##### a) Geometría

Los requisitos ilustrados en la fig 9.5 tienden a eliminar problemas de

pandeo para deformaciones inelásticas grandes, y a asegurar que las columnas tengan dimensiones y proporciones tales que puedan participar eficientemente en la acción de marco junto con las vigas que las conectan.

#### b) Refuerzo longitudinal

Para  $Q = 6$  es necesario revisar la capacidad en flexocompresión de las columnas con un factor de carga de 1.4. Esto obedece a propiciar que los mecanismos de deformación inelástica estén regidos por articulaciones plásticas en las vigas e impliquen pequeñas o nulas demandas de rotación inelástica en las columnas.

Para que el refuerzo longitudinal cumpla sus funciones de resistir esfuerzos longitudinales y de contener el concreto del núcleo, deberá estar restringido contra el pandeo y contra movimientos laterales antes del colado; para ello debe recordarse el requisito general incluido en las Normas Técnicas (ref 32):

Habrán estribos cerrados formando un ángulo no mayor de  $135^\circ$  alrededor de al menos una de cada dos barras longitudinales y de todas las barras de esquina; ninguna barra longitudinal que no esté soportada por la esquina de un estribo distará más de 15 cm de otra barra que sí esté soportada.

#### c) Refuerzo transversal

Para disminuir el carácter frágil de la falla por flexocompresión, en los extremos de las columnas se requiere proporcionar refuerzo de confinamiento, tanto cuando se diseña para  $Q = 4$  como para  $Q = 6$ , en una longitud que se define en la fig 9.6.

Cuando exista un muro de relleno de mampostería en contacto con la columna, pero sin abarcar toda su altura, la longitud confinada será igual a la zona libre de la columna, más una vez el lado de la columna en la dirección del plano del muro (fig 9.7).

La situación anterior no se admite para  $Q = 6$ , por lo cual el muro deberá desligarse de manera que no interfiera con la deformación de la estructura (ver subcapítulo siguiente)

Los requisitos para el refuerzo transversal se consignan en la fig 9.6.

Para  $Q = 4$  la separación de estribos en la longitud confinada es del orden de la <sup>mitad</sup> de la que se exige usualmente en columnas.

Para  $Q = 6$  el refuerzo transversal será el suficiente para resistir la fuerza cortante de diseño calculada empleando un factor de carga de 1.4 en lugar de 1.1 (Por las mismas razones expuestas respecto al refuerzo longitudinal).

Por otra parte se ha comprobado que la forma más apropiada para reducir el carácter frágil de la falla por flexocompresión en el concreto reforzado es mediante un zuncho de refuerzo helicoidal que restrinja la expansión lateral del concreto cuando este llega a esfuerzos de compresión cercanos al de falla. El refuerzo helicoidal es el más indicado, pero solo es constructivamente práctico en columnas de sección circular, <sup>o cuadrado</sup> para columnas de sección rectangular, la forma de proporcionar un confinamiento similar al de un zuncho es mediante estribos de varias ramas, o estribos y grapas poco espaciados. En la fig 9.8 se muestran diversas formas de arreglos de estribos para confinamiento.

Por lo anterior se exige que en la zona confinada,  $l_c$ , se coloque refuerzo helicoidal o una distribución de estribos (o estribos y grapas) que correspondan a una cuantía de refuerzo helicoidal no inferior a la definida como balanceada en las Normas Técnicas (ver sección 4.2.3 de las normas, ref 32) y que se determina como

$$p' = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$$

i i)

Quando el confinamiento se proporciona con refuerzo helicoidal, el área de zuncho se determina como

$$A_v = \frac{p'd s_h}{4}$$

en que  $d$  es el diámetro del núcleo confinado y  $s_h$  el paso de la hélice.

Quando el confinamiento se proporciona con estribos, la expresión dada en el inciso 4.7g de las normas resulta poco conservadora por la menor eficiencia de los estribos con respecto al zuncho. Se recomienda determinar el área del estribo como:

$$A_v = 0.75 p' \ell_n s_h$$

en que  $\ell_n$  es la longitud no soportada del estribo (fin 0.0)

#### 9.2.5 Requisitos para uniones viga-columna

Las fallas en uniones viga-columna han sido frecuentes y presentan un comportamiento general frágil; para evitarlas es necesario diseñar estas uniones para que tengan una resistencia superior a los miembros que conectan, de manera que éstos puedan desarrollar toda su capacidad. Tres aspectos pueden llegar a ser críticos en una unión viga-columna.

- a) El confinamiento del concreto en la zona de unión
- b) El anclaje del refuerzo (especialmente en columnas extremas) y
- c) La resistencia en cortante de la conexión

Es común discontinuar el refuerzo transversal en la columna en su zona de intersección con el sistema de piso; esta práctica es inadecuada, ya que debe proporcionarse confinamiento al concreto y restricción al refuerzo y debe mantenerse la misma cantidad de estribos que en los extremos de la columna longitudinal también en esa zona (fig 9.6). Cuando se trata de una columna interior, que tiene vigas en sus cuatro costados, la situación es mucho menos crítica, ya que el concreto adyacente proporciona restricción a las deformaciones transversales en la unión; por tanto, se permite aumentar al doble la separación del refuerzo en la unión con respecto al necesario en los extremos de la columna.

La falla por anclaje en uniones extremas ha sido de las más frecuentes. Cuando se emplean barras de diámetros grandes, es posible que el ancho de la columna no sea suficiente para proporcionar la longitud de anclaje necesaria al refuerzo longitudinal; en ese caso debe optarse por emplear barras de menor diámetro, o ensanchar la columna o proporcionar algún anclaje mecánico al refuerzo. En todo caso, el refuerzo longitudinal que deba terminarse en una unión viga-columna, se prolongará hasta la cara lejana de la columna y tendrá un doblaje a  $90^\circ$  seguido de un tramo recto con las características mostradas en la fig 9.10. Además, tendrá una longitud de anclaje dentro de la columna no inferior a los valores especificados en la misma figura.

Quando se diseña para  $Q = 6$ , deberá revisarse que la fuerza cortante que se presenta en la zona de unión cuando se lleguen a formar articulaciones plásticas de signos contrarios en las caras de la junta no exceda de los valores siguientes:

$$V_u \leq F_R \cdot 6 \sqrt{f'_c} \cdot bd, \text{ si hay vigas en las cuatro caras de la junta}$$

$$V_u \leq F_R \cdot 5 \sqrt{f'_c} \cdot bd, \text{ si alguna de las caras de la junta es extrema}$$

$b$  y  $d$  son el ancho y el peralte efectivo de la sección de la columna en la junta, para la dirección en que actúa la fuerza cortante. Las unidades son kg y cm.

La condición de fuerzas en la junta cuando se alcanzan los momentos máximos de las vigas en ambas caras de la junta se ilustra en la fig 9.11. De las condiciones de equilibrio se tiene

$$V_j = (A_{s1} + A_{s2}) f_y - V_{col}$$

La evaluación de la expresión anterior se dificulta porque el cortante en la columna,  $V_{col}$ , depende de la posición de los puntos de inflexión en la misma cuando se forman las articulaciones plásticas en las vigas. Una expresión aproximada para calcular  $V_j$  es

$$V_j = (A_{s1} + A_{s2}) f_y \left( 1 - \frac{1.5h}{\ell_1 + \ell_2} \right)$$

### 9.2.6 Requisitos para losas planas

Las características que deben reunir las losas planas para que sean aplicables los diferentes factores de reducción  $Q$ , están implícitas en los requisitos impuestos en los incisos anteriores.

El factor  $Q = 6$  no es admisible en este tipo de estructuración pues la formación de articulaciones plásticas en las vigas no se logra generalmente en este sistema y el mecanismo de colapso estará regido finalmente por la falla de los extremos de las columnas o por una falla local por cortante en la losa alrededor de la columna.

Para el empleo de  $Q = 4$  se requiere lo siguiente (fig 9.12)

Solo se puede considerar efectivo para cálculo de la rigidez a carga lateral y para la colocación del refuerzo longitudinal por sismo un ancho de losa igual al de la columna más vez y media el peralte de la losa a cada lado de la columna.

Al menos 75 por ciento del refuerzo por flexión debida a sismo debe cruzar el núcleo de la columna. El resto debe colocarse de una distancia no mayor que vez y media el peralte de la losa, medida a partir del paño de la columna. Debe revisarse la falla por cortante en la losa, debida a carga vertical más sismo de acuerdo con el inciso 2.1.5j de las normas (ref 32) y debe existir un refuerzo mínimo por cortante en la zona maciza alrededor de la columna que cumpla con lo indicado en la fig 9.12. Para dicha revisión la fuerza cortante y el momento de desbalanceo deberán afectarse de un factor de carga de 1.4.

La resistencia en flexocompresión en los extremos de la columna deberá revisarse con un factor de carga de 1.4 en lugar de 1.1.

En caso de no cumplir con lo anterior, las estructuras en que las fuerzas

sísmicas sean absorbidas por el efecto de marco que se forma entre las losas nervadas y las columnas deberán diseñarse para  $Q = 2$ .

### 9.2.7 Muros de rigidez

Cuando una parte o la totalidad de las fuerzas sísmicas deban ser resistidas por muros de rigidez, el valor de  $Q$  que se adoptará depende de la estructuración. En todo caso deberán cumplirse los requisitos siguientes:

Las cuantías de refuerzo horizontal y vertical no serán menores que 0.0025; el espaciamiento del refuerzo no excederá de 35 cm y este se colocará en dos capas siempre que el espesor del muro exceda de 15 cm o el esfuerzo cortante promedio en el muro debido a las cargas de diseño sea superior a  $\sqrt{f'_c}$  (en  $\text{kg/cm}^2$ ).

Además, cuando se adopte  $Q = 4$  deberá cumplirse lo siguiente:

Cuando para resistir los efectos de flexocompresión en el muro debidos a sismo se requiera refuerzo longitudinal que dé lugar a una cuantía total en exceso de 0.0075, el refuerzo necesario para flexocompresión se colocará en los extremos del muro y deberá cumplir con los requisitos para columnas (para  $Q = 4$ ), en cuanto a la distribución del refuerzo longitudinal y a la cuantía y distribución del refuerzo transversal. Como longitud confinada,  $l_c$ , se considerará la altura total del entrepiso en que se presenta la condición mencionada.

Las vigas que ligen un muro con otros o con columnas deberán cumplir con los requisitos de vigas para  $Q = 6$  cuando su relación longitud a peralte exceda de cuatro; o, cuando su relación longitud a peralte sea menor que 4, deberán estar reforzadas de acuerdo con lo establecido en 4.1.4e de las normas (ref 32).

En estructuras con muros de rigidez, la demanda de ductilidad que debe esperarse en un sismo intenso es menor que en estructuras a base de marcos; por tanto los requisitos de refuerzo son en este caso menos estrictos.

El refuerzo mínimo vertical y horizontal, cumple esencialmente fines de evitar que haya agrietamientos previos por cambios volumétricos, que afecten la capacidad del muro para resistir sismos. La colocación de dos capas de refuerzo es siempre conveniente ya que se reduce la abertura de las grietas en el alma del muro.

Debido a su gran rigidez, los muros absorben generalmente una porción mayoritaria de las fuerzas sísmicas y, especialmente cuando su liga con otros muros o marcos sea poco rígida, se inducen en ellos momentos flexionantes de gran magnitud que demandan una cuantía de refuerzo muy en exceso del mínimo. Tanto por economía, como por una mejora en la ductilidad, conviene colocar dicho refuerzo en los extremos de los muros; en ese caso, los extremos de los muros trabajarán como columnas, que, para una dirección del sismo, estarán sujetas a cargas axiales de compresión <sup>muy</sup> altas; por ello deberán cumplirse en ellos los requisitos para columnas establecidos en 9.2.4, correspondientes a  $Q = 4$ . Lo anterior implica en la casi totalidad de los casos un engrosamiento en la sección del muro en una longitud tal que permita colocar el refuerzo de manera que su cuantía no exceda la máxima admitida; además, debe existir el refuerzo transversal mínimo especificado para la zona crítica de columna,  $\ell_c$ , en toda la altura del muro.

Adicionalmente a los requisitos anteriores, hay que aplicar los del inciso 4.5.2 de las normas, que rigen el espesor del muro para evitar problemas de pandeo lateral; hay que procurar un anclaje eficiente del refuerzo horizontal del muro en los elementos extremos y, si el muro tiene huecos, debe proveerse un refuerzo especial en su periferia.

### 9.2.8 Ejemplos

La fig 9.13 muestra una porción de un marco de concreto para el cual se ha especificado

$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

La carga vertical de servicio es de 3.64 ton/m, con la cual se ha obtenido el diagrama de momentos mostrado.

#### I. DISEÑO DE LA VIGA, PARA $Q = 6$

Se ha realizado el análisis sísmico suponiendo  $Q = 6$ , previa verificación de que la estructuración cumple con los requisitos para el empleo de este factor de reducción por ductilidad. De este análisis se obtuvo el diagrama de momentos de la fig 9.13.

##### a) Momentos de diseño

Positivo en  $C_L$

Por carga vertical,  $M_{C_L} = 1.4 \times 8.8 = 12.3 \text{ ton-m}$

Negativo en A

Por carga vertical más sismo,  $M_A = 1.1 (6.5 + 9.7) = 17.8 \text{ ton-m}$

Negativo en B

Por carga vertical más sismo,  $M_B = 1.1 (11.2 + 13.3) = 26.9 \text{ ton-m}$

NOTA: En A y B aparecen momentos positivos cuando el sismo produce momentos de signo contrario a los de carga vertical. Como estos momentos son muy pequeños, en este caso, no es necesario revisar la sección por este concepto, ya que el refuerzo mínimo positivo que debe colocarse por especificación los cubre ampliamente.

b) *Cuantías límite de refuerzo longitudinal*

$$\rho_{\min} = 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.7 \sqrt{250}}{4200} = 0.0026$$

$$\rho - \rho' \leq 0.60 \rho_{\text{bal}}$$

donde

$$\rho_{\text{bal}} = \frac{4800}{f_y + 6000} \cdot \frac{f'_c}{f_y} = \frac{4800}{10200} \times \frac{0.85 \times 0.80 \times 250}{4200} = 0.0190$$

Si se supone que en las secciones críticas habrá una cuantía de refuerzo de compresión igual a la mitad del refuerzo de tensión

$$\rho' = 0.5 \rho$$

$$\rho - \rho' = 0.5 \rho \leq 0.60 \times 0.019 = 0.0114$$

por tanto

$$\rho \leq 0.023$$

c) *Refuerzo por flexión*

Negativo en B

El área de refuerzo puede determinarse de gráficas como las de las Normas

Técnicas Complementarias para estructuras de concreto (ref 32). Para sencillez del ejemplo, aquí se calculará el refuerzo suponiendo que el brazo de palanca de las fuerzas internas de tensión y compresión vale  $0.9d$ . Se ha comprobado que este valor es ligeramente conservador en todos los casos que se estudian en este ejemplo.

Se supondrá un recubrimiento al centroide del refuerzo de  $4 \text{ cm}$  en todos los casos

$$A_s = \frac{M_u}{F_R f_y j d} = \frac{2690000}{0.9 \times 4200 \times 0.9 \times 46} = 17.2 \text{ cm}^2$$

Se usarán  $3 \# 6 + 2 \# 8$ ;  $A_s = 18.6 \text{ cm}^2$ ,  $\rho = \frac{18.6}{30 \times 46} = 0.0135$

La cuantía está dentro de los límites admitidos. Este requisito ya no se revisará explícitamente en los casos siguientes, pero se ha comprobado su cumplimiento.

Negativo en A

$$A_s = \frac{1780000}{0.9 \times 4200 \times 0.9 \times 46} = 11.4 \text{ cm}^2$$

Se usarán  $4 \# 6$ ;  $A_s = 11.5 \text{ cm}^2$

Positivo en C

Para  $M_u = 12.3 \text{ ton-m}$  resulta,  $A_s = 7.9 \text{ cm}^2$

Se usarán  $3 \# 6$ ;  $A_s = 8.6 \text{ cm}^2$

Positivo en B

Se requiere la mitad del área de acero negativo  $A_s = \frac{18.6}{2} = 9.3 \text{ cm}^2$

Se usarán 3 # 6 que es solo ligeramente escaso

Positivo en A

Se requiere  $A'_s = \frac{11.5}{2} = 5.8 \text{ cm}^2$ ; se emplearán también 3 # 6.

El refuerzo longitudinal se distribuirá como en la fig 9.14

NOTA: Se ha tratado de distribuir el refuerzo de manera que se combine el cumplimiento de los requisitos de diseño con la sencillez constructiva

d) *Revisión del anclaje del refuerzo longitudinal en A*

Se requiere un gancho estándar, más una longitud horizontal igual a, (fig. 9.10)

$$\ell_a^{\text{requerida}} = \frac{f_y d_b}{20 \sqrt{f'_c}} = \frac{4200 \times 1.9}{20 \sqrt{250}} = 25 \text{ cm (rige)}$$

$$6 \quad 20 \text{ cm}$$

$$6 \quad 8 d_b = 8 \times 1.9 = 15 \text{ cm}$$

$$\ell_a^{\text{disponible}} = 50 - 4 = 46 \text{ cm} > 25$$

Hay anclaje adecuado

e) *Refuerzo transversal*

Requisitos mínimos (fig 9.3)

En una zona de dos peraltes medidos a partir de la cara de la columna

$$s_1 \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{425 d_b}{\sqrt{f_y}} = \frac{425 \times 1.91}{\sqrt{4200}} = 12.5 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \\ d/4 = 46/4 = 11 \text{ cm} \\ 24 d_v = 24 \times 0.79 = 19 \text{ cm (suponiendo } E \neq 2.5) \end{array} \right.$$

Rige

$$s_1 = 11 \text{ cm}$$

También hay que verificar que:

$$A_v f_{yv} \geq 0.06 A_b f_y$$

donde  $A_b$  es el área de la varilla de refuerzo longitudinal mayor diámetro, aquí # 8. Como  $f_{yv} = f_y$ ,  $A_v \geq 0.06 A_b$ , es decir  $A_v \geq 0.06 \times 5 = 0.3 \text{ cm}^2$ ; se usarán estribos # 2.5 con  $A_v = 0.49 \text{ cm}^2$

Fuera de la zona de dos peraltes

20

$$s = d/2 = 23 \text{ cm}$$

### Refuerzo por cortante

Revisión por cortante debido a carga vertical más sismo y con factor de carga de 1.4.

El cortante debe revisarse a un peralte de la cara del apoyo, es decir a  $46 + 25 = 71$  cm del eje; se verá si puede resistirse con el refuerzo por confinamiento.

Cortante en A

Por carga vertical

$$V_A = 3.64 \times \frac{6.6}{2} - \frac{13.4 - 8.6}{6.6} - 3.64 \times 0.71 = 8.70 \text{ ton}$$

Por sismo

$$V_A = \frac{10.6 + 14.2}{6.6} = 3.8 \text{ ton}$$

Cortante de diseño

$$V_u = 1.4 (8.7 + 3.8) = 17.5 \text{ ton}$$

Para el cálculo del cortante que se presenta cuando se forman las articulaciones plásticas de momento positivo y negativo por sismo

hay que determinar el momento resistente negativo en A y positivo en B, con base en el refuerzo realmente colocado en dichas secciones.

Momento resistente negativo en A

$$M_{R_A} = A_s f_y 0.9 d = 4 \times 2.86 \times 4.2 \times 0.9 \times 0.46 = 19.9 \text{ ton-m}$$

## 21

Momento resistente positivo en B

$$M_{R_B}^+ = A_s f_y 0.9 d = 3 \times 2.86 \times 4.2 \times 0.9 \times 0.46 = 14.9 \text{ ton-m}$$

Cortante por sismo

$$\frac{M_{R_A}^- + M_{R_B}^+}{L} = \frac{19.9 + 14.9}{6.6} = 5.3 \text{ ton}$$

Cortante de diseño,  $V_u = 1.1 (11.3 + 5.3) = 18.2 \text{ ton}$

Cortante en B

Por carga vertical

$$V_B = 3.64 \times \frac{6.6}{2} + \frac{13.4 - 8.6}{6.6} - 3.64 \times 0.71 = 10.2 \text{ ton}$$

Por sismo

3.8 ton

Cortante de diseño

$$V_u = 1.4 (10.2 + 3.8) = 19.6 \text{ ton}$$

Cortante cuando se forman las articulaciones plásticas

Momento resistente negativo en B

$$M_{R_B}^- = (2 \times 5 + 3 \times 2.86) 4.2 \times 0.9 \times 0.46 = 32.3 \text{ ton-m}$$

Momento resistente positivo en A

$$M_{R_A}^+ = M_{R_B}^+ = 14.9 \text{ ton-m}$$

$$\text{Cortante por sismo} = \frac{32.3 + 14.9}{6.6} = 7.2$$

$$\text{Cortante de diseño} = 1.1 (10.2 + 7.2) = 19.1 \text{ ton}$$

Cortante resistente en B

La contribución del concreto se considera nula en una distancia  $2d = 92 \text{ cm}$  a partir de las caras del apoyo.

Contribución de los estribos necesarios por confinamiento (E#2.5 a 11 cm)

$$V_s = F_R A_v f_y \frac{d}{s} = 0.8 \times 2 \times 0.49 \times 4200 \times \frac{46}{11} = 13.8 \text{ ton}$$

El refuerzo por confinamiento no es suficiente para tomar el cortante en todas las secciones (cortante máximo que debe resistirse = 19.6 ton).

Se aumentará el diámetro a # 3, por lo que la fuerza cortante resulta

$$V_s = 0.8 \times 2 \times 0.71 \times 4200 \times \frac{46}{11} = 20.0 \text{ ton} > 19.6 \text{ ton}$$

con lo que se tiene resistencia suficiente.

e) Corte de barras

El refuerzo negativo se mantendrá hasta una longitud de anclaje después de la zona de articulación plástica; con eso se cubre el diagrama de momentos. No se hará aquí una determinación rigurosa de los puntos de corte.

El refuerzo resultante se ilustra en el esquema de armado de la fig 9.14.

## II DISEÑO DE LA VIGA PARA $Q = 4$

Al analizar el edificio suponiendo  $Q = 4$  se obtienen los momentos de dise

23

no siguientes:

Positivo en  $C_L$

Por carga vertical

$$M_{C_L} = 8.8 \times 1.4 = 12.3 \text{ ton-m}$$

Negativo en A

$$M_A = 1.1 (6.5 + 14.6) = 23.2 \text{ ton-m}$$

Negativo en B

$$M_B = 1.1 (11.2 + 20) = 34.3 \text{ ton-m}$$

b) *Cuantías límite del refuerzo longitudinal*

La cuantía máxima es ahora

$$\rho - \rho' = 0.75\rho_{bal} = 0.0143$$

si  $\rho = 0.5 \rho'$ , entonces  $\rho \leq 0.029$

c) *Refuerzo por flexión*

Negativo en B Para  $M_B = 34.3 \text{ ton-m}$ , se obtiene  $A_s = 21.9 \text{ cm}^2: 5 \# 8$

Negativo en A Para  $M_A = 23.2 \text{ ton-m}$   $A_s = 14.8 \text{ cm}^2: 3 \# 8$

Positivo en C Igual al de Q = 6,  $3 \# 6$

Una distribución admisible del refuerzo longitudinal se muestra en la fig 9.14.

El anclaje del refuerzo longitudinal en la columna se hará como en el caso anterior

## 24

d) Refuerzo por cortante

Requisito mínimo  $s \leq d/2$

Cortante en B

Por carga vertical  $V_B = 10.2$  ton

Por sismo  $V_B = \frac{15.9 + 21.3}{6.6} = 5.6$  ton

Cortante de diseño por carga vertical =  $1.4 \times 10.2 = 14.3$  ton

Por carga vertical más sismo =  $1.1 (10.2 + 5.6) = 17.4$  ton (rige)

Cortante resistente

Contribución del concreto ( $p > 0.01$ , inciso 2.1.5 a.I. de la ref 32)

$$V_c = 0.8 \times 0.5 \sqrt{0.8 \times 250 \times 30 \times 46} = 7800 \text{ kg} = 7.8 \text{ ton}$$

Contribución del refuerzo mínimo de cortante (# 2.5 a 23)

$$V_s = \frac{0.8 \times 2 \times 0.49 \times 4200 \times 46}{23} = 6.6 \text{ ton}$$

Este refuerzo es insuficiente para resistir el cortante en B, que es de 17.4 ton

$$s = \frac{F_R \cdot A_v \cdot f_y \cdot d}{V_u - V_c} = \frac{0.8 \times 0.98 \times 4200 \times 46}{17400 - 7800} = 16 \text{ cm}$$

Al revisar la sección A resulta un espaciamiento de 19 cm.

El esquema de armado se muestra en la fig 9.14.

Comentario: En lo que respecta al refuerzo de la viga, resulta notablemente más económico el diseño con  $Q = 6$  que con  $Q = 4$ , ya que la reducción en refuerzo longitudinal es apreciable, mientras que el aumento en refuerzo transversal es bastante menor.

### III DISEÑO DE LA COLUMNA DEL EJE 'A' PARA $Q = 6$

El objetivo del ejemplo es ilustrar el cumplimiento de los requisitos para los dos diferentes factores de reducción, por lo que se omitirá la exploración de las distintas combinaciones de cargas que resulta muy laboriosa.

Se supondrá que la combinación crítica de carga es la que se debe a carga vertical más sismo en dirección  $x$ , que arroja las fuerzas internas siguientes (fig 9.15)

$$P = 300 \text{ ton}$$

$$M_x = 19.2 \text{ ton-m}$$

$$M_y = 2.3 \text{ ton-m}$$

#### a) Requisitos generales

El factor de carga que debe aplicarse en el diseño de las columnas para  $Q = 6$  es de 1.4

$$\frac{P_U}{A_C} = \frac{1.4 \times 300000}{50 \times 50} = 168 \text{ kg/cm}^2 > 0.1 f'_C = 25 \text{ kg/cm}^2$$

Deben aplicarse por tanto los requisitos para columnas

## b) Determinación del refuerzo longitudinal.

Debido a que el momento en y es muy pequeño, puede despreciarse y diseñar la columna por flexocompresión uniaxial. Se usan aquí las gráficas de la ref 32, para lo cual se requiere calcular el parámetro

32

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c} = \frac{1.4 \times 300000}{0.85 \times 50 \times 50 \times 0.85 \times 200} = 1.16$$

Las normas especifican  $F_R = 0.85$  para columnas zunchadas; este requisito puede considerarse cumplido cuando se coloca el refuerzo transversal exigido para  $Q = 6$  en los extremos de las columnas.

El momento en x equivale a una excentricidad

$$e_x = \frac{1920000}{300000} = 6.4 \text{ cm}$$

a esta hay que agregar una excentricidad accidental

$$e_a = \begin{cases} 0.05h \\ 12 \text{ cm} \end{cases}$$

$$e_a = 0.05 \times 50 = 2.5 \text{ cm}$$

$$e_{\text{total}} = 6.4 + 2.5 = 8.9 \text{ cm}$$

Por las proporciones de la columna, el factor de amplificación por esbeltez resulta prácticamente igual a uno y no se considerará.

Entonces

$$e/h = 8.9/50 = 0.178$$

Se supondrá acero uniformemente distribuido en el perímetro y  $d = 45 \text{ cm}$  (fig 9.15); entonces:

$$d/h = \frac{45}{50} = 0.9$$

Entrando en la gráfica de la pag 185 de la ref 32 con  $K = 1.16$  y  $c/t = 0.178$   
 $6 R = 0.178 \times 1.16 = 0.206$

$$q = 0.74$$

$$A_s = q \frac{c}{f_y} b h = \frac{0.74 \times 0.85 \times 200}{4200} \cdot 50 \times 50 = 74.9 \text{ cm}^2$$

Se usará  $A_s = 10 \# 10 = 79.2 \text{ cm}^2$

La disposición de estas varillas se muestra en la fig 9.15; se colocarán 4 varillas en las caras en que son más eficientes para resistir el momento mayor.

$$\rho = \frac{79.2}{2500} = 0.032$$

c) Refuerzo transversal

Zona confinada

$$\ell_c \geq \begin{cases} \ell/6 = \frac{300}{6} = 50 \text{ cm} \\ 60 \text{ cm} \\ c_1, c_2 = 50 \text{ cm} \end{cases}$$

por tanto  $\ell_c = 60 \text{ cm}$

Refuerzo en la longitud confinada

$$\rho' = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$$

28

$$0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} = 0.45 \left( \frac{50 \times 50}{44 \times 44} - 1 \right) \frac{250}{4200} = 0.0078$$

$$0.12 \frac{f'_c}{f_y} = 0.12 \times \frac{250}{4200} = 0.0071$$

rige

$$p' = 0.0078$$

$\ell_h = 23.5$  cm según la distribución del refuerzo mostrada en la fig 9.15.

Si se usan E # 3 ,  $A_v = 0.71$ .

El área del estribo es mayor que 0.06 veces la de la barra longitudinal

$$s_h = \frac{A_v}{0.75 \ell_h p'} = \frac{0.71}{0.75 \times 23.5 \times 0.0078} = 5.16 \text{ cm}$$

$$s_{\min} \leq \begin{cases} \frac{50}{4} = 12.5 \text{ cm} \\ 10 \text{ cm} \\ \frac{350}{\sqrt{f_y}} d_b = 5.4 \times 3.2 = 17.3 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s = 5 \text{ cm}$$

Esta separación no es admisible si se emplea agregado de tamaño máximo de 3.8 cm, ya que no cumple con el requisito de que la separación libre entre estribos sea 1.5 veces el tamaño del agregado ( $1.5 \times 3.8 = 5.7$  cm). Conviene usar

E # 4 con  $A_v = 1.27$  para los que resulta

$$s_h = 9.24 \text{ cm}$$

Se usarán E # 4 a 9

## 29

Se obtendría una cantidad menor de estribos si se usara una distribución de refuerzo longitudinal que permitiese reducir la longitud libre  $L_h$ , colocando dos barras intermedias en las cuatro caras.

Fuera de la zona confinada la separación no excederá del doble de los límites para la longitud confinada.

$$s = 20 \text{ cm}$$

#### Revisión por cortante

Las fuerzas cortantes en la columna inducidas por el sismo son muy bajas.

Del análisis resulta que, por carga vertical más sismo, existe una fuerza cortante de 12 ton; entonces

$$V_u = 1.4 \times 12 = 16.8 \text{ ton}$$

La contribución del concreto es, según el inciso 2.1.5.a.II de la ref 32,

$$V_c = F_R \times 0.5 \sqrt{f_c^*} (1 + 0.007 \frac{P_u}{A_g}) bd, \text{ con } P_u \text{ en kg y } A_g \text{ en cm}^2$$

Aquí debe usarse  $F_c = 1.1$  para calcular  $P_u$ .

Considerando  $d = 45 \text{ cm}$ , se obtiene:

$$V_c = 25000 \text{ kg} = 25 \text{ ton} > 16.8$$

#### IV DISEÑO DE LA COLUMNA DEL EJE A PARA Q = 4

De un análisis aproximado de la estructura empleada para el diseño con Q = 6, la combinación crítica de carga obtenida del análisis resulta

$$P = 310 \text{ ton}$$

$$M_x = 24.5 \text{ ton-m}$$

$$M_y = 3.5 \text{ ton-m}$$

Se utiliza un factor de carga de 1.1 por ser una combinación que incluye carga accidental, y el factor de reducción es 0.7 si no se proporciona zunchos a la columna. Con esto se tiene

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c} = \frac{1.1 \times 310000}{0.7 \times 50 \times 50 \times 0.85 \times 200} = 1.15$$

$$e_x = \frac{2450000}{310000} = 7.9 \text{ cm}$$

$$e_a = 0.05 h = 0.05 \times 50 = 2.5 \text{ cm} > 2 \text{ cm}$$

$$e/t = \frac{7.9 + 2.5}{50} = 0.21$$

Entrando en la gráfica para  $d/h = 0.9$ , acero uniformemente distribuido, y con

$$K = 1.15, \text{ y}$$

$$R = 1.15 \times 0.21 = 0.24$$

se obtiene

$$q = 0.85$$

$$A_s = q \frac{f'_c}{f_y} b h = 86.0 \text{ cm}^2$$

Si se emplean 6 # 12 más 2 # 10,  $A_s = 84.2 \text{ cm}^2$

$$p = 0.034$$

$$p_{\text{mín}} = 20/f_y = 0.005, \text{ bien}$$

$$p_{\text{máx}} = 0.06 \quad \text{bien}$$

Refuerzo transversal

En la longitud confinada la separación de estribos será:

$$s_1 \leq \begin{cases} c/2 = 25 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \\ \frac{425}{\sqrt{f_y}} d_b = 6.56 \times 3.8 = 24.9 \text{ cm} \end{cases}$$

Se emplearán E # 3 a 20 cm

Fuera de la longitud confinada la separación será la prescrita por la sección 4.2.2 de las normas (ref 32)

$$s_2 \leq \begin{cases} 850/\sqrt{f_y} d_b = 13 \times 3.8 = 49.8 \text{ cm} \\ 48 d_v = 48 \times 0.95 = 45.6 \text{ cm} \\ c_{\text{mín}} = 50 \text{ cm} \end{cases}$$

Se usará  $s_2 = 45 \text{ cm}$

La disposición del refuerzo se muestra en la fig 9.15.

COMENTARIOS: El refuerzo longitudinal resulta algo mayor y el transversal algo menor en la solución para  $Q = 4$  que en la de  $Q = 6$ ; la cantidad total de acero en la solución para  $Q = 4$  puede reducirse significativamente si se coloca en los extremos de la columna suficiente refuerzo por confinamiento para poder emplear  $F_R = 0.85$  en lugar de 0.7.

### V DISEÑO DE LA UNIÓN VIGA-COLUMNA EN A PARA Q = 6

Según lo especificado en la sección 9.2.5 de este manual, deberá revisarse

#### a) El confinamiento del concreto en la zona de unión

Debido a que no existen vigas en todas las caras de la columna, en la zona de unión deberá proveerse el mismo refuerzo transversal que en los extremos de las columnas. Este ha sido calculado en el ejemplo III y consiste de E # 4 a 9 cm, más las grapas indicadas en la fig 9.15.

#### b) El anclaje del refuerzo

En la dirección y el refuerzo es continuo.

En la dirección x el anclaje de las barras de refuerzo negativo ha sido revisado en el ejemplo I.

#### c) Cortante en la unión

Deberá revisarse la posibilidad de falla por cortante en la unión en las direcciones x, y (fig 9.16).

Dirección x

$$V = A_{s2} f_y \left( 1 - \frac{1.5h}{\ell_1 + \ell_2} \right)$$

$\ell_1$ ,  $\ell_2$  son las alturas de columnas situadas arriba y abajo de la unión, las que se han supuesto de 3 m.

$$V = 4 \times 2.86 \times 4200 \left( 1 - \frac{1.5 \times 50}{600} \right) = 42042 \text{ kg} = 42 \text{ ton}$$

113

Fuerza cortante resistente del concreto

$$V_c = F_R 5 \sqrt{f_c} bd = 0.80 \times 5 \sqrt{200} \times 50 \times 46 = 130100 \text{ kg} = 130.1 \text{ ton}$$

No se requiere refuerzo.

Dirección y

El refuerzo de las vigas en esta dirección no se ha calculado; se supondrá como en la fig 9.16.

$$V_u = (A_{s1} + A_{s2}) f_y \left(1 - \frac{1.5h}{\ell_1 + \ell_2}\right) =$$

$$= (4 \times 5.05 + 3 \times 2.86) 4200 \left(1 - \frac{1.5 \times 50}{600}\right) = 105800 \text{ kg} = 105.8 \text{ ton}$$

$$V_c > V_u$$

No se requiere refuerzo.

#### VI DISEÑO DE LA UNIÓN VIGA COLUMNA EN B PARA Q = 4

No se requiere revisión por cortante; el anclaje se ha revisado en el ejemplo I y por confinamiento debe prolongarse el refuerzo transversal determinado en el ejemplo IV para los extremos de la columna, aumentando al doble la separación de estribos.

#### VII DISEÑO DE UN MURO DE RIGIDEZ

Se diseñarán los muros de la dirección corta del edificio cuya planta se muestra en la fig 9.17. Se considerará Q = 4.

Para la planta baja, el análisis estructural da los siguientes resultados:

34

para cada muro  $V = 228$  ton,  $M = 3510$  ton-m y  $P = 561$  ton.

a) *Diseño por flexocompresión*

$$M_u = 1.1 \times 3510 = 3860 \text{ ton-m}$$

$$P_u = 1.1 \times 561 = 617 \text{ ton}$$

$$f_c^* = 0.8 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2; f_c'' = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2$$

Se supondrán 20 cm de espesor y se concentrará el refuerzo en los extremos del muro; en el resto se colocará solo refuerzo por temperatura, el cual, por ser de menor cuantía y por tener menos brazo de palanca, no se considerará en la estimación de la resistencia.

Como primera aproximación se empleará la fórmula

$$M_u = F_R \left\{ A_s f_y d' + 0.5 P_u L \left( 1 - \frac{P_u}{L t f_c''} \right) \right\}$$

Las cantidades geométricas se definen en la fig 9.17. Se adoptará  $F_R = 0.85$ , por considerar que el muro en conjunto fallará por tensión y porque en los extremos se colocará refuerzo de confinamiento.

Despejando  $A_s$  se obtiene:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{M_u / F_R - 0.5 P_u L \left( 1 - \frac{P_u}{L t f_c''} \right)}{f_y d'} \\ &= \frac{3860 \times 10^5 / 0.85 - 0.5 \times 617000 \times 800 \left( 1 - \frac{617000}{800 \times 20 \times 170} \right)}{4200 \times 750} \\ &= 83.6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

• Se proponen 18  $\bar{\#}$  8,  $A_s = 90 \text{ cm}^2$ . Una cantidad así justifica un engrosa

miento en los extremos, como se muestra en la fig 9.17.

Se comprobará ahora la resistencia con un método más preciso. De acuerdo con las dimensiones dadas en la fig 9.17, la resistencia del muro a carga axial es:

$$P_u = F_R \left[ (30 \times 50 + 20(0.8kd - 50)) f_c'' + A_s' f_s - A_s f_s \right]$$

Si ambos refuerzos son iguales y están fluyendo, entonces:

$$P_u = F_R (30 \times 50 + 20(0.8kd - 50)) \times 170 = 617000$$

Considerando  $F_R = 0.85$ , se encuentra  $kd = 235.6$  cm. En la fig 9.17 se aprecia que ambos refuerzos fluyen por tener deformaciones mayores que  $f_y/E = 0.002$ . Además se observa que la falla de conjunto es por tensión porque la deformación del extremo correspondiente es  $0.0072 > 0.002$ .

Tomando momentos con respecto al centro de la sección se tiene

$$\begin{aligned} \frac{M_u}{F_R} &= 90 \times 4200 \times 750 + 30 \times 50 \times 170 \times 375 + (0.8kd - 50) 20 \times 170 (375 - 0.4kd) = \\ &= (2835 + 956 + 1322) \times 10^5 \text{ kg-cm} \end{aligned}$$

$$M_u = 0.85 \times 5113 = 4346 \text{ ton-m} > 3860$$

Si se mantienen iguales las áreas de acero  $A_s$  y  $A_s'$ , la carga axial resistente no cambia, tampoco  $kd$ , ni la contribución del concreto al momento resistente. Entonces; el refuerzo puede reducirse como sigue:

$$3860 - (956 + 1322) 0.85 = 1924 \text{ ton-m (contribución del refuerzo)}$$

Empleando kg y cm como unidades se llega a:

$$A_s f_y d' = \frac{1924 \times 10^5}{0.85}$$

$$A_s = \frac{1924 \times 10^5}{0.85 \times 4200 \times 750} = 71.9 \text{ cm}^2$$

Se usarán 14 # 8,  $A_s = A'_s = 70 \text{ cm}^2$

El porcentaje de refuerzo en cada extremo es  $70/(30 \times 50) = 0.047$ . Conviene que la zona en compresión tenga una cuantía menor que 0.06, que es la máxima recomendada por columnas; esto justifica también el ensanche.

La cuantía total de refuerzo necesaria para resistir los efectos sísmicos es:

$$\frac{A_s + A'_s}{A_{\text{muro}}} = \frac{2 \times 70}{20 \times 700 + 2 \times 30 \times 50} = 0.0082 > 0.0075$$

Por tanto se necesita refuerzo especial por confinamiento en los extremos. La cuantía de refuerzo por este concepto debe ser:

$$\rho' = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$$

$$\rho' = 0.45 \left( \frac{50 \times 30}{45 \times 25} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} = 0.15 \frac{f'_c}{f_y} = \frac{0.15 \times 250}{4200} = 0.0089$$

En columnas con estribos

$$\rho' = \frac{A_s}{0.75 L_h S_h}$$

Suponiendo  $E \# 3$  y como  $L_h = 30 - 2 \times 4 = 22 \text{ cm}$

$$S_h = \frac{0.71}{0.75 \times 22 \times 0.0089} = 4.83 \text{ cm}, \quad E \# 3 \text{ a } 5 \text{ cm}$$

Se colocarán en toda la altura del entrepiso. Para el siguiente entrepiso hay que revisar si se requiere  $p > 0.0075$ .

b) Revisión por cortante

$$V_u = 1.1 \times 228 = 250.8 \text{ ton}$$

$$v_u = \frac{V_u}{0.8 \text{ lt}} = \frac{250800}{0.8 \times 800 \times 20} = 19.6 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_R = F_R (0.5 \sqrt{f'_c} + p_h f_y), \text{ donde } p_h \text{ porcentaje de refuerzo horizontal}$$

$$v_c = 0.80 (0.5 \sqrt{170}) = 5.2 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_u - v_c = 14.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_h f_y = \frac{14.4}{0.80}; \quad p_h = \frac{14.4}{0.80 \times 4200} = 0.0043 \geq 0.0025 \text{ (refuerzo mínimo)}$$

$$p_h = \frac{A_s}{ts}; \quad s = \frac{A_s}{tp_h}; \quad \text{para } \# 3 \text{ en dos lechos } s = \frac{2 \times 0.71}{20 \times 0.0043} = 16.5 \text{ cm}$$

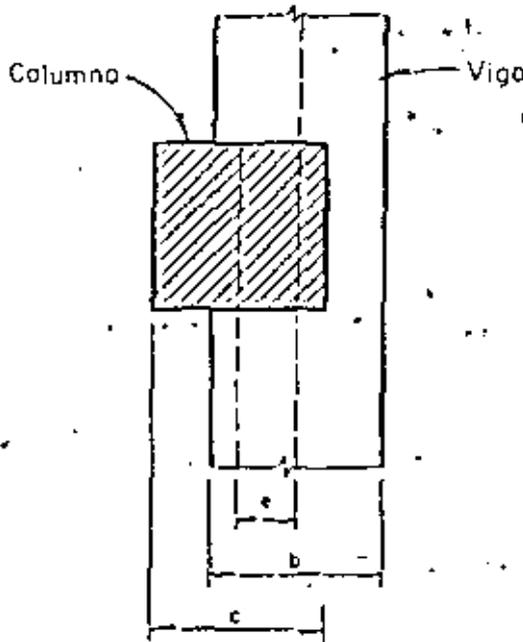
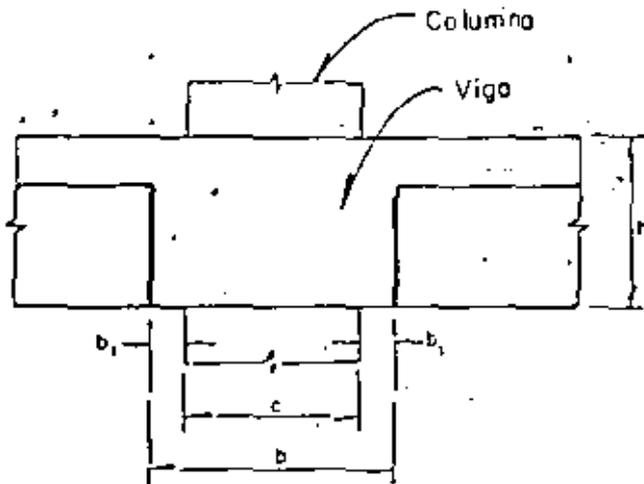
# 3 a 16, dos lechos

Refuerzo vertical

$$p_v = 0.0025 = p_{\text{mín}}$$

$$s = \frac{2 \times 0.71}{20 \times 0.0025} = 28 \text{ cm}$$

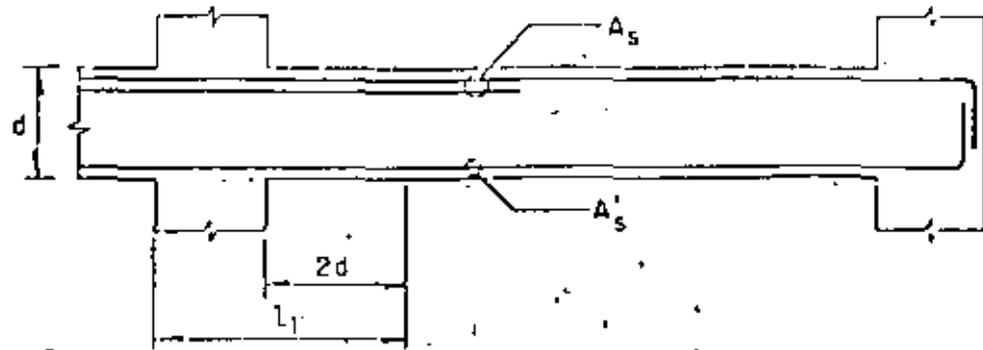
En la fig 9.17 se muestra la distribución del refuerzo



Q=4	Q=6
$b_1 \leq 1.5h$	$b_1 = 0$
$l/b \leq 40$	$h/b \leq 3$
$h/b \leq 4$	$e/b \leq 0.25$
$e/b \leq 0.5$	$l/b \leq 25$
	$b \geq 20\text{cm}$
	$l/h \geq 4$

-l, longitud libre de la viga

Fig 9.1. Requisitos geométricos para vigas de concreto reforzado



$Q = 4$

$\eta = 6$

$A_s, A'_s \geq 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b d$ , en toda la longitud de la viga

$A'_s \leq 0.75 A_s$  balanceada

Al menos 67 por ciento de  $A_s$  deberá pasar por el núcleo de la columna

$A_s, A'_s \geq \begin{cases} 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} \\ 2\#5 \end{cases}$   
en toda la longitud

$A'_s \leq 0.6 A_s$  balanceada

$\frac{A'_s}{bd} \leq \frac{100}{f_y}$

$A'_s \geq 0.5 A_s$ , en  $l_1$

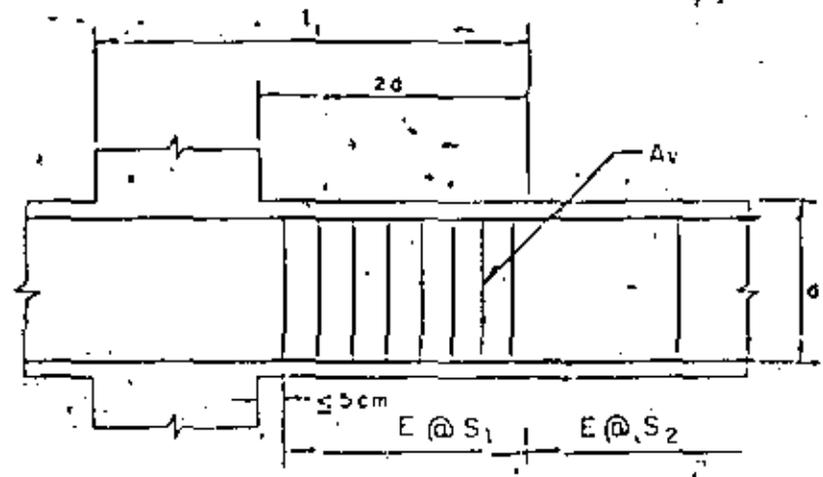
No puede haber traslapes, ni corte del refuerzo longitudinal en  $l_1$

El  $A_s$  necesario en el paño de columna no puede reducirse más de 25 por ciento en  $l_2$

Todo el refuerzo de tensión,  $A_s$ , necesario por sismo deberá pasar por el núcleo de la columna

En toda sección de la viga deberá proporcionarse una resistencia a momento negativo y positivo no menor que una cuarta parte de la máxima que se tiene en los extremos de la viga

Fig. 9.2. Requisitos para el refuerzo longitudinal de vigas de concreto



$Q = 4$

$Q = 6$

<p><math>S_1, S_2 &lt; d/2</math></p> <p>Si el diámetro de cualquier barra longitudinal excede del # 5, los estribos serán del # 2.5 o mayores</p>	<p><math>A_v f_{yv} \geq 0.06 A_b f_y</math></p> <p><math>A_v \geq \# 2.5</math></p> <p><math>S_2 \leq d/2</math></p> <p><math>A_v, f_{yv}</math> área y esfuerzo de fluencia del estribo</p> <p><math>A_b, f_y</math> área y esfuerzo de fluencia de la barra longitudinal de mayor diámetro</p> <p><math>S_1 \leq \begin{cases} 425 d_b / \sqrt{f_y} \\ 20 \text{ cm} \\ 24 \text{ diámetros del estribo} \\ d/4 \end{cases}</math></p> <p>Para dimensionamiento por cortante en <math>l_1</math></p> <p><math>V_c = 0</math></p> <p><math>F_c = 1.4</math></p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fig 9.3 Requisitos para el refuerzo transversal de vigas de concreto

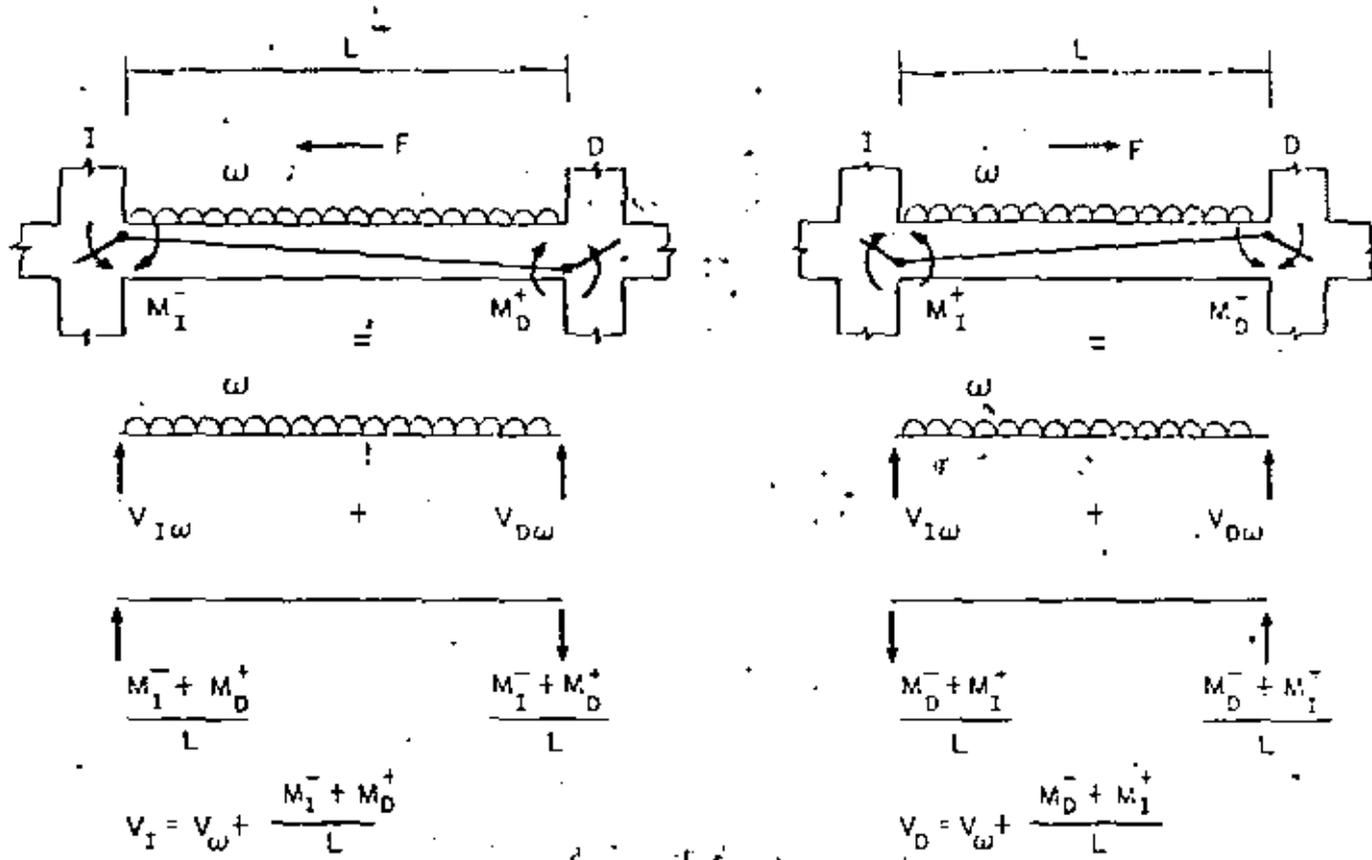


Fig 9.4. Fuerzas cortantes para revisar vigas cuando  $Q=6$

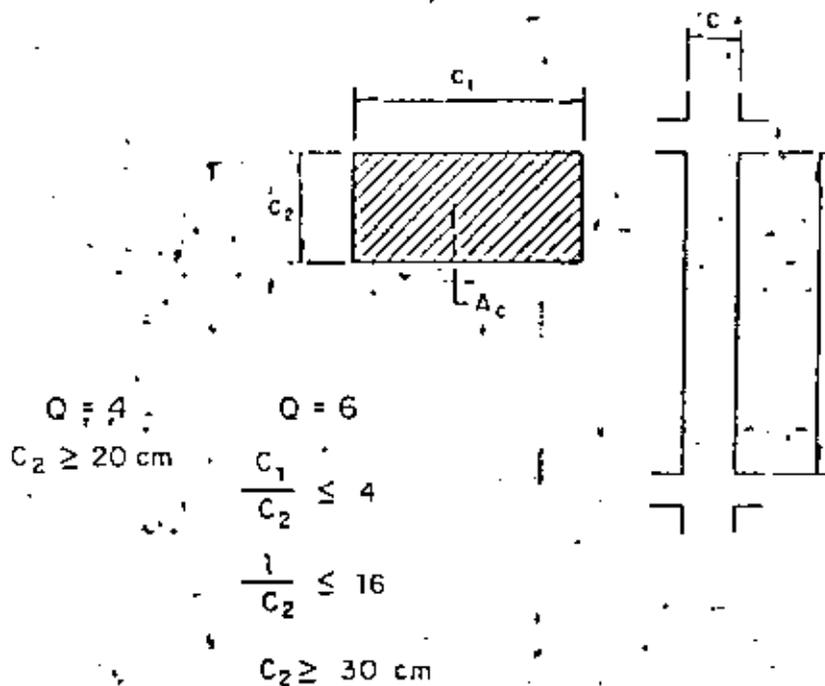


Fig 9.5. Requisitos para las dimensiones de columnas

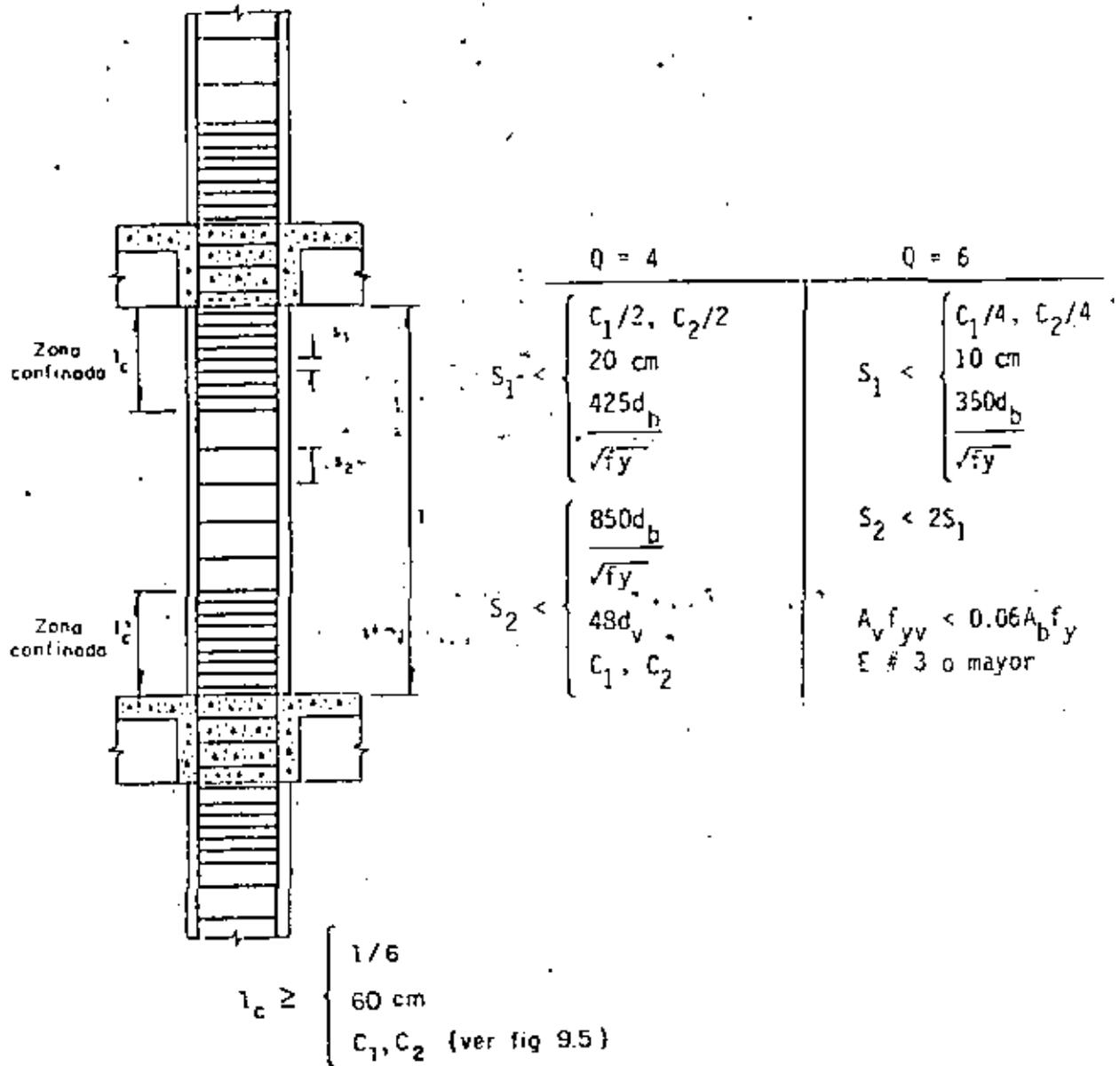


Fig 9.6 Requisitos para refuerzo transversal en columnas de concreto

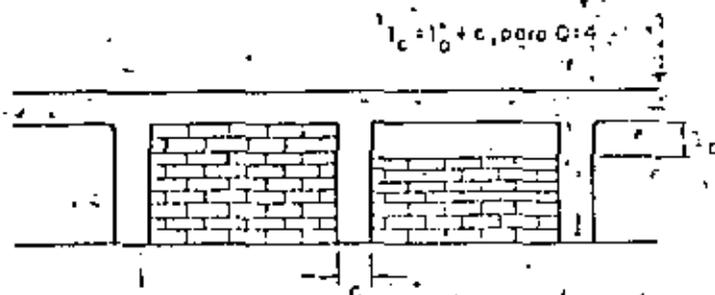


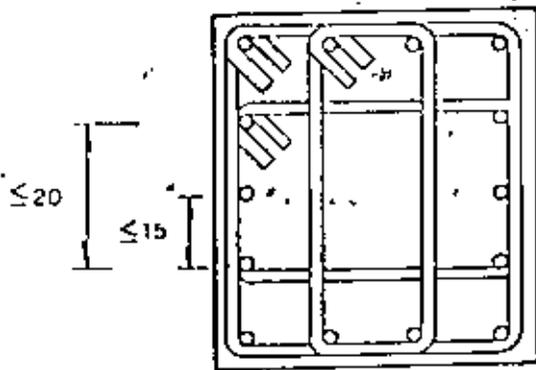
Fig 9.7. Longitud requerida de confinamiento para columnas en contacto con muros de mampostería



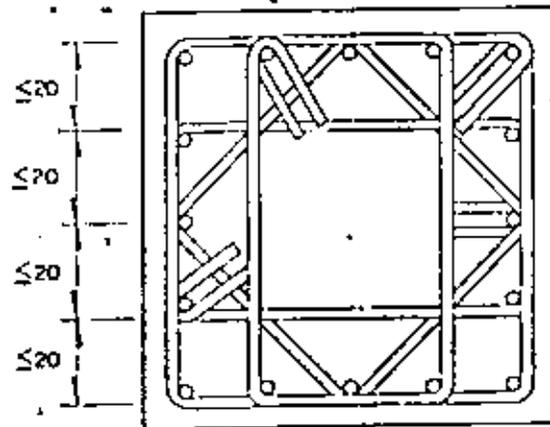
a) Dos estribos traslapados

b) Dos estribos traslapados

Anotaciones en cm



c) Tres estribos traslapados



d) Cuatro estribos traslapados

Fig 9.8 Diversos arreglos de estribos y grapas para confinamiento de columnas.

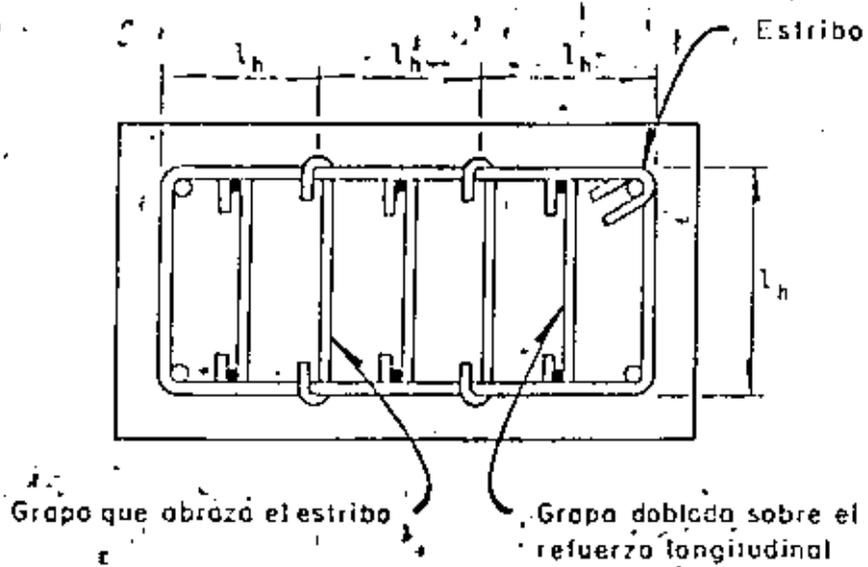
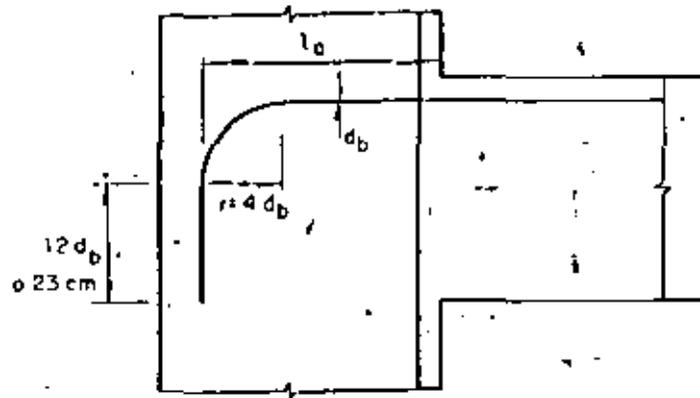
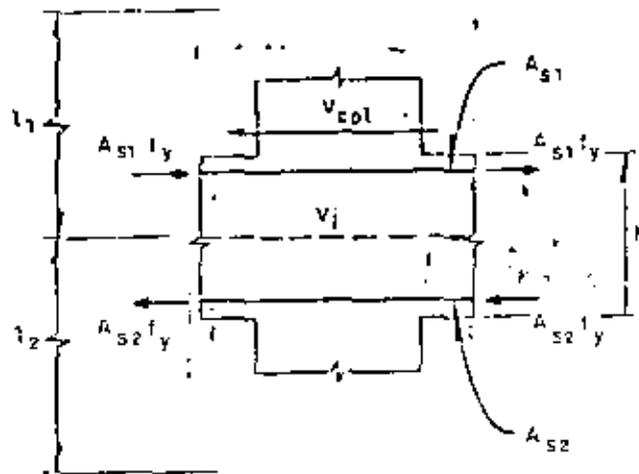


Fig 9.9 Longitud no soportada de estribos



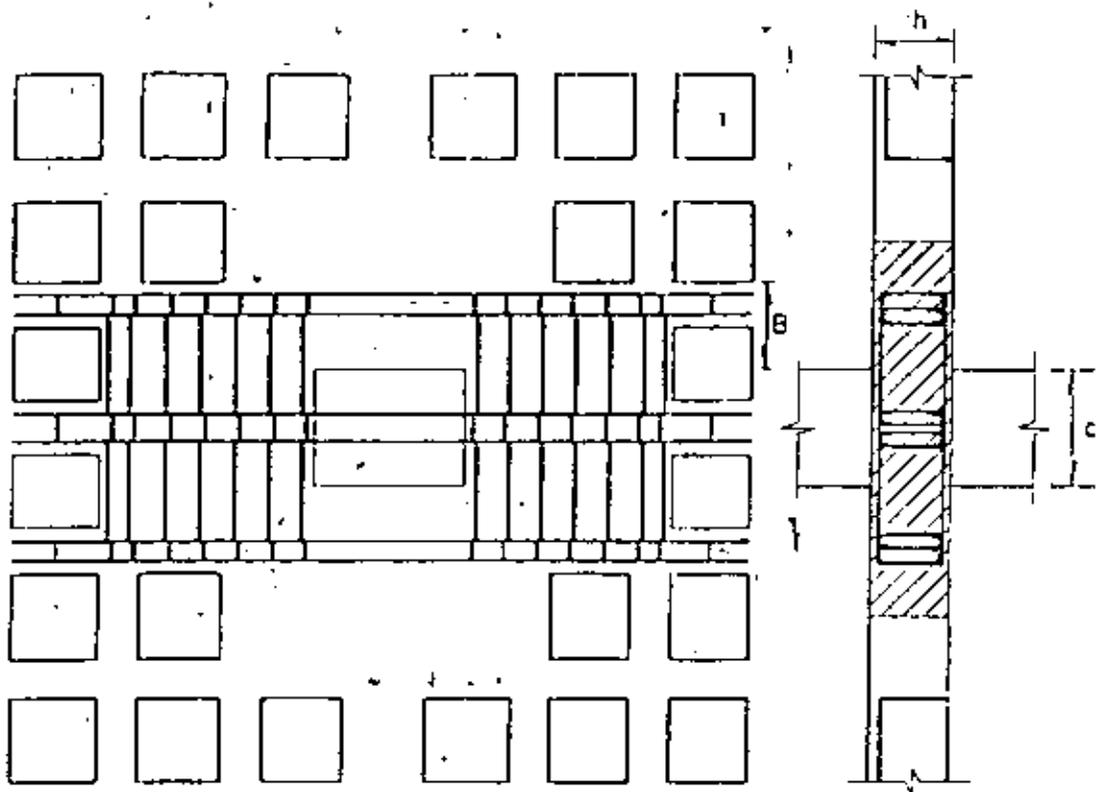
$$l_a \geq \begin{cases} l_y d_b \\ 20 \sqrt{l_c} \\ 20 \text{ cm} \\ 8 d_b \end{cases}$$

Fig 9.10 Anclaje de refuerzo longitudinal de vigas



$l_1$ , altura de columna en entresiso superior  
 $l_2$ , altura de columna en entresiso inferior

Fig 9.11 Fuerza cortante en una unión viga-columna



Solo se indica el refuerzo en una dirección; en la otra habrá un refuerzo similar

$$L \geq 1.5 h$$

$$B \geq h/2$$

$$s \leq d/3$$

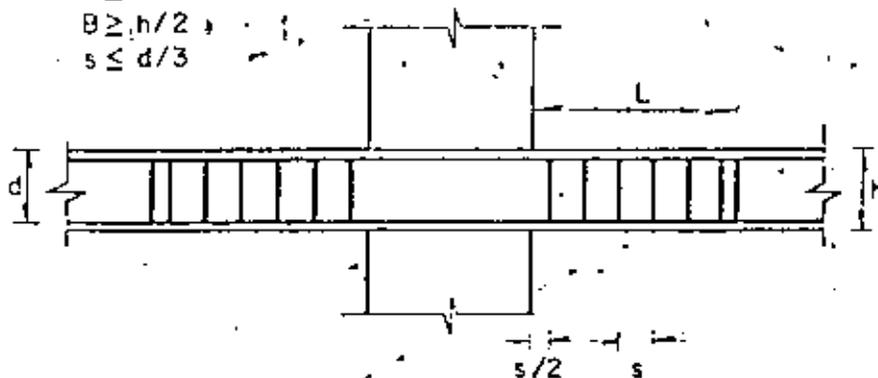


Fig 9.12 Refuerzo en la conexión losa plana - columna

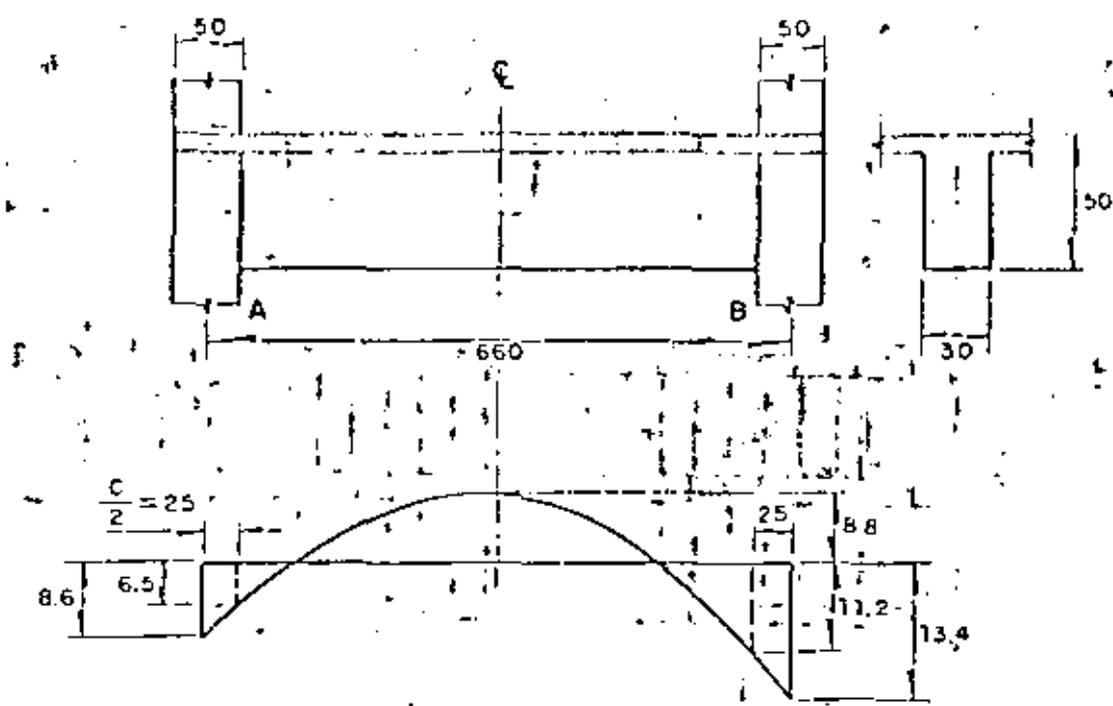


Diagrama de momentos por carga vertical

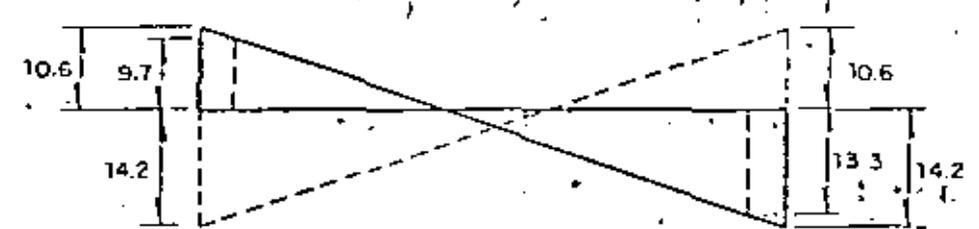


Diagrama de momentos sísmicos,  $Q = 6$

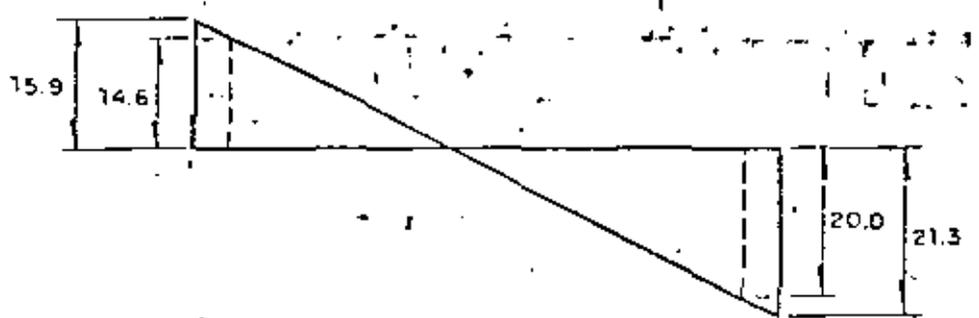
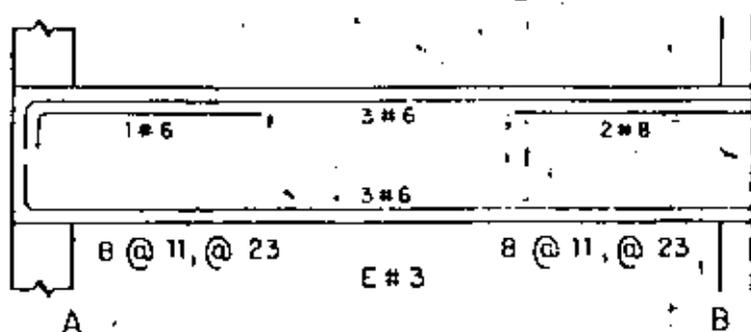
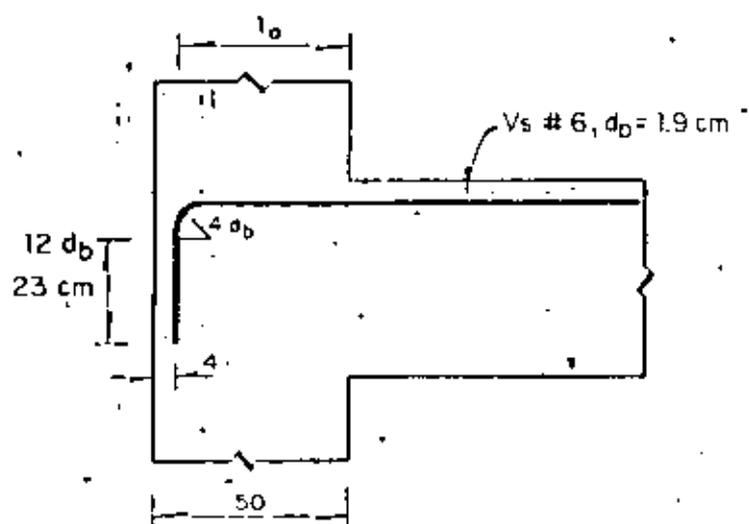


Diagrama de momentos sísmicos,  $Q = 4$

Longitudes, en cm  
Momentos, en ton-m

Fig 9.13 Datos para el ejemplo de diseño de una viga de concreto reforzado

a) Resultados para  $Q=6$ 

b) Revisión de longitud de anclaje

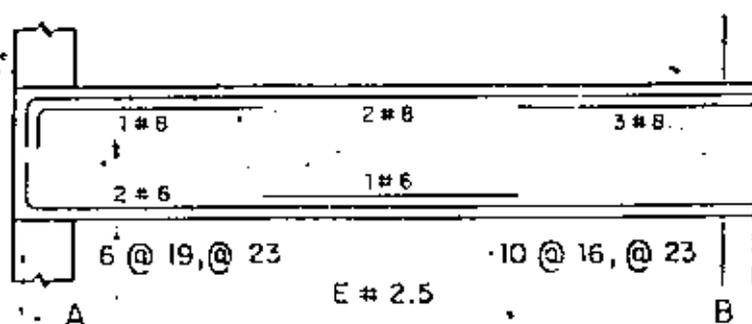
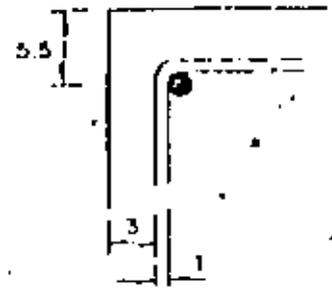
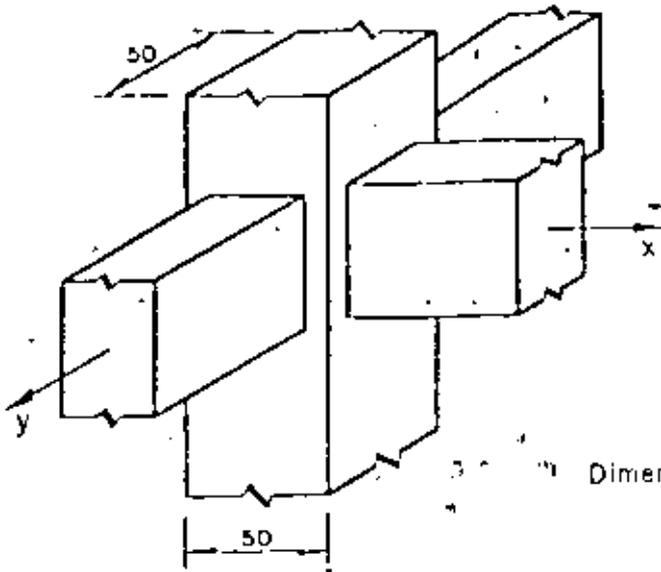
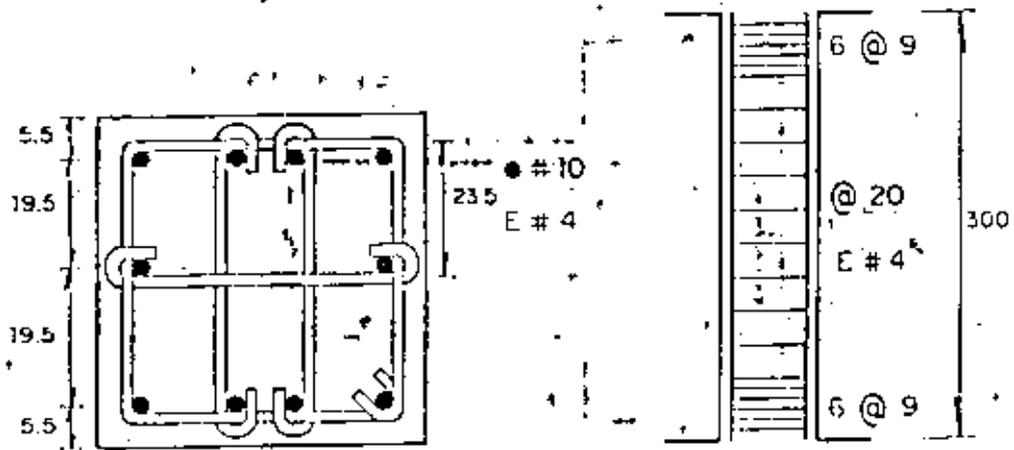
c) Resultados para  $Q=4$ 

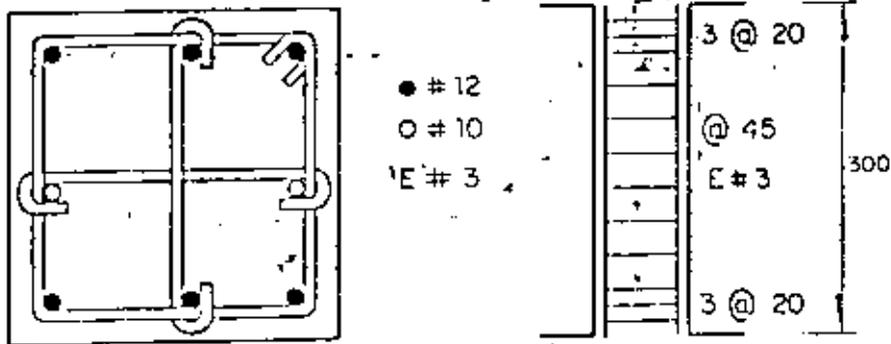
Fig 9.14. Resultados del ejemplo de diseño de vigas



Dimensiones, en cm



Refuerzo para  $Q=6$



Refuerzo para  $Q=4$

Fig 9.15. Datos y resultados de los ejemplos de diseño de columnas

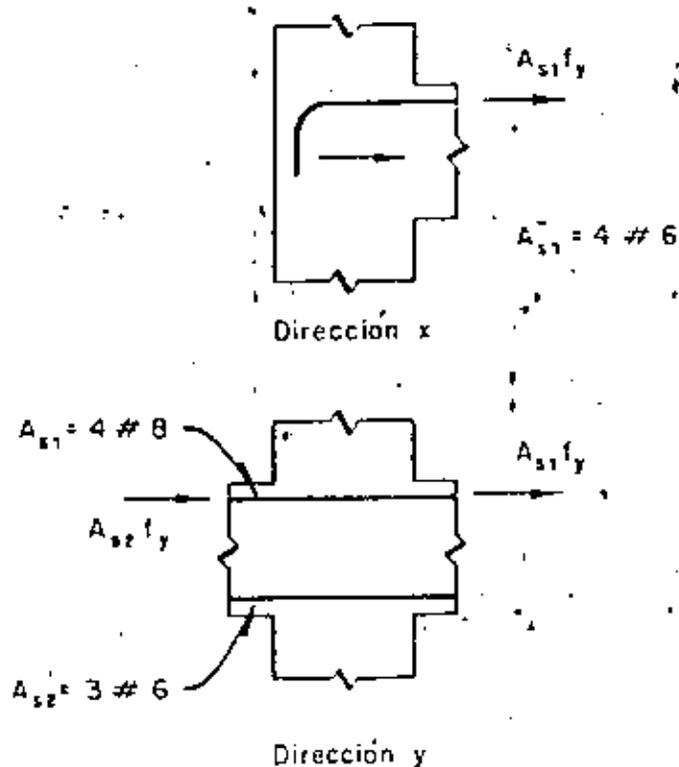
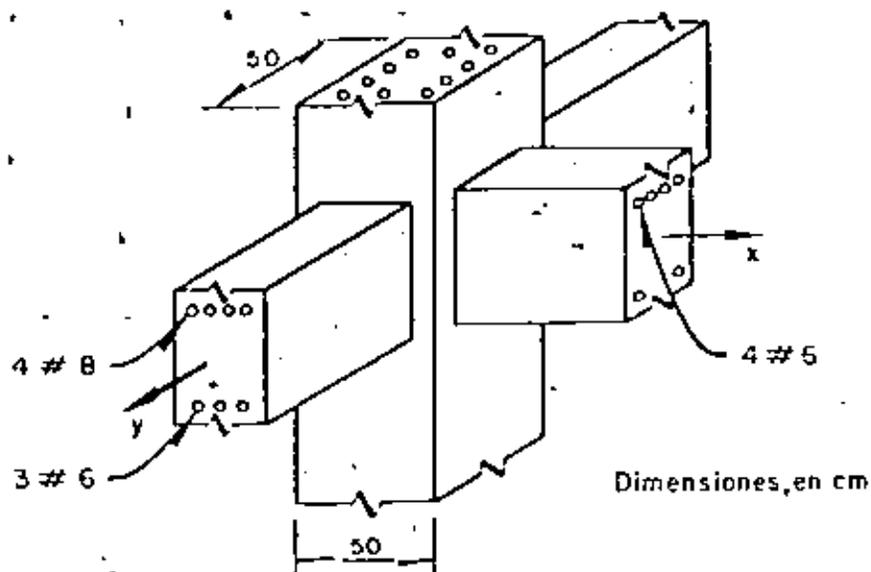
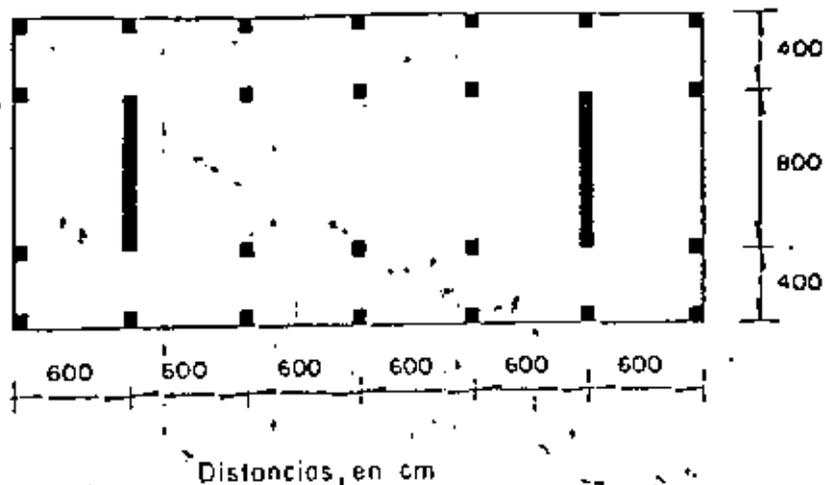


Fig. 9.16 Fuerzas cortantes en el ejemplo de diseño de una unión viga-columna de concreto



$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$   
 $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

11 nivel idénticos, altura de entrepisos = 300

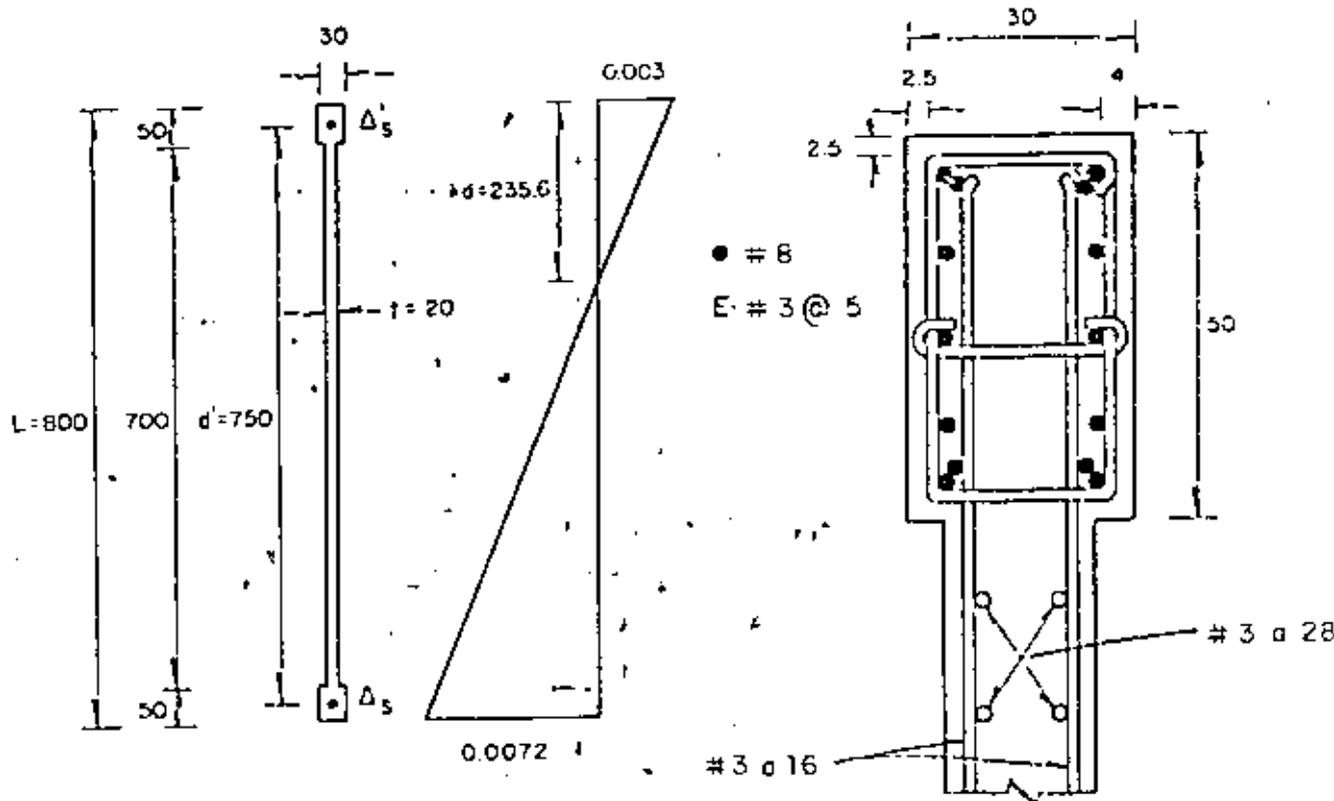


Fig 9.17. Datos y resultados del ejemplo de diseño de un muro de concreto



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

**DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS  
DE ACERO**

**ING. OSCAR DE BUEN LOPEZ DE HEREDIA**

*Julio, 83*

## DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

- 4.1 Introducción
- 4.2 Comportamiento de estructuras de acero durante temblores reales
- 4.3 Marcos rígidos
- 4.4 Miembros estructurales. Comportamiento y diseño
  - 4.4.1 Vigas. Pandeo lateral
    - Inestabilidad de vigas completamente plastificadas
    - Capacidad de rotación
    - Diseño
  - 4.4.2 Columnas
    - Flexión biaxial
    - Columnas cargadas cíclicamente
  - 4.4.3 Conexiones
    - Conexiones viga columna cargadas cíclicamente
    - Comportamiento de la zona de la columna comprendida entre las vigas ("panel zone")
- 4.5 Diseño de marcos rígidos
- 4.6 Control de desplazamientos ("Drift control")
- 4.7 Contraventeo
- 4.8 Diafragmas
- 4.9 Otras estructuras
- 4.10 Falla frágil y desgarramiento laminar ("Lamellar-tearing")
  - Diseño de una conexión viga-columna de un marco rígido de edificio (acero A36)
  - A method for the plastic design of unbraced multistory frames
  - Factores de ductilidad  $Q$  de estructuras tipo I
  - (reglamento de las construcciones para el D.F., 1976)

Ing. Oscar de Buen López de Heredia

Julio, 1983

## DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

Oscar de Buen\*

4.1 INTRODUCCION. Toda la energía que recibe un edificio que se comporta elásticamente durante un temblor, cada vez que su base se mueve en un sentido, es almacenada como energía de deformación, y devuelta durante el movimiento en sentido contrario. En cambio, si el comportamiento es inelástico, una parte de la energía se disipa en forma de amortiguamiento y flujo plástico, y sólomente se almacena el resto.

Puesto que los edificios modernos se diseñan en general, tomando como base respuestas mucho menores que las que corresponden a un comportamiento elástico ilimitado, bajo sísmos intensos sufren deformaciones plásticas en zonas localizadas, en las que se disipa un porcentaje elevado de la energía; además, a diferencia de las construcciones antiguas, carecen casi totalmente de muros divisorios y otros elementos no estructurales, de manera que la estructura propiamente dicha debe disipar casi toda la energía impartida por los temblores.

Una estructura reticular hiperestática dúctil puede admitir deformaciones inelásticas importantes, localizadas en las zonas en que las solicitaciones son máximas, las que se convierten eventualmente en articulaciones plásticas que permiten que haya una redistribución de elementos mecánicos, de manera que en emergencias severas los miembros menos cargados acuden en ayuda de los más cargados, y la resistencia máxima depende del conjunto y no del elemento más débil en el intervalo elástico. Además, si el número de articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso es elevado, durante su formación y rotación se disipa una gran cantidad de energía, y se reduce considerablemente la demanda de capacidad de absorción en las zonas en que los esfuerzos se mantienen por debajo del límite de elasticidad.

---

\* Profesor del area de estructuras, Facultad de Ingeniería, UNAM. Ingeniero consultor.

El acero estructural es un material muy dúctil, con el que se pueden obtener estructuras hiperestáticas que llenan los requisitos de los párrafos anteriores, es, por consiguiente, muy adecuado para la construcción en zonas sísmicas. Sin embargo, su ductilidad no se conserva necesariamente en las estructuras, por lo que el diseño y la construcción deben hacerse de manera que no se pierda esa propiedad.

#### 4.2 COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO DURANTE TEMBLORES REALES.

El comportamiento de edificios con estructura de acero durante sismos reales ha sido satisfactorio en general, desde el punto de vista de su resistencia. Las estructuras han tenido resistencia suficiente aún en edificios de hasta 10 ó 12 pisos diseñados exclusivamente por carga vertical o con juntas flexibles, capaces de transmitir únicamente momentos reducidos. Sin embargo, los muros, cancelas y otros elementos no estructurales han sufrido en ocasiones daños considerables, debido a una rigidez lateral insuficiente.

Solo dos temblores intensos han afectado ciudades con un número elevado de edificios altos con estructura de acero: el de San Francisco de 1906 (magnitud 8 1/4, según la escala de Richter) y el de julio de 1957 en la Ciudad de México, de magnitud 7.5.

En San Francisco, los edificios altos con estructura de acero completa se comportaron satisfactoriamente: algunos de ellos estaban provistos de marcos rígidos o contraventeo en diagonal, mientras que otros no tenían más resistencia lateral adicional que la proporcionada por los muros de relleno, omitidos en planta baja en la mayoría de los casos; a pesar de que las juntas viga-columna eran semirígidas, los daños en las estructuras fueron despreciables. Los edificios afectados fueron uno de 19 pisos, uno de 16, ocho entre 11 y 15 y once de 6 a 10 pisos.

Había también un cierto número de construcciones con muros exteriores de carga y marcos interiores de acero; aunque sufrieron más daños, no se produjo ningún colapso (ref 4.1).

En 1957 había en la Ciudad de México un número importante de edificios con estructura de acero de alturas comprendidas entre 10 y 22 pisos; además, un par de años antes se terminó la construcción de uno de 45 pisos; este, la Torre Latinoamericana, es bien conocido por su excelente comportamiento, ya que no sufrió daños de ningún tipo durante el temblor.

Un edificio de 20 pisos, totalmente soldado en taller y en obra, tampoco resintió daños aunque se diseñó para fuerzas horizontales estáticas correspondientes a un coeficiente sísmico de tan sólo 0.025, constante en toda la altura.

En la época en que se construyeron estos edificios se utilizaban exclusivamente métodos elásticos de análisis y diseño, y no se tomaba ninguna precaución especial para asegurar un comportamiento adecuado en el intervalo inelástico; sin embargo, conviene señalar que las especificaciones de diseño en vigor llevaban probablemente a estructuras más robustas que las se obtendrían ahora.

Muchos edificios diseñados exclusivamente para cargas verticales, o con fuerzas horizontales muy reducidas, soportaron el temblor sin daños estructurales, pero con problemas excesivos en muros, cancelas, etc; varios de ellos tuvieron que ser rigidizados posteriormente, y cuando menos uno fué demolido.

El comportamiento descrito pone en evidencia la alta capacidad que tienen las estructuras de acero para resistir temblores de intensidad mucho mayor que la de diseño, aún cuando no se tomen precauciones especiales para aumentar su capacidad de absorción de energía, y la necesidad de utilizar en muchas ocasiones elementos rigidizantes para evitar daños no estructurales excesivos.

Los edificios altos con estructura de acero afectados en temblores posteriores (Anchorage, Alaska, 1964; Caracas, Venezuela, 1967; Managua, Nicaragua, 1972; Ciudad de Guatemala, 1976) han sido pocos, y han tenido también un comportamiento excelente.

También fué muy satisfactorio el comportamiento de los edificios con estructura de acero en el temblor de la Ciudad de México de marzo de 1979.

4.3 MARCOS RIGIDOS. El comportamiento de un marco rígido completo, o de un entrepiso de uno de varios niveles, sometido a la acción de cargas verticales constantes y fuerzas horizontales crecientes, queda definido por su gráfica  $Q - \Delta$ , fuerza horizontal-desplazamiento lateral (fig 4.1).

Desde que se inicia el proceso de carga, y hasta que se forma la primera articulación plástica, todo el marco está en el intervalo elástico (para simplificar la discusión se están ignorando los esfuerzos residuales y se está suponiendo que el factor de forma de las secciones empleadas en la estructura es igual a 1.0).

Los incrementos adicionales de carga son resistidos por una estructura de rigidez deteriorada por la aparición de la primera articulación plástica, la que experimenta rotaciones crecientes bajo momento flexionante constante, igual al momento plástico resistente de la sección,  $M_p$ , cuando aumentan los desplazamientos laterales.

Cuando aparece la segunda articulación plástica disminuye otra vez la rigidez del conjunto, y el proceso continúa, formándose un número cada vez mayor de articulaciones, hasta que la estructura se convierte en un mecanismo que se desplaza lateralmente mientras disminuye la fuerza horizontal. Todas las articulaciones experimentan rotaciones plásticas, que son generalmente máximas en las que se forman primero y disminuyen de magnitud en las siguientes, mientras los momentos se conservan iguales a los momentos plásticos resistentes de las secciones respectivas.

La que se acaba de describir es la forma de trabajo más eficiente de una estructura de acero, ya que la carga que ocasiona la formación del mecanismo de colapso en la estructura completa es la máxima que puede soportar y a la que corresponde una mayor absorción de energía antes de la falla; sin embargo, hay un número grande de factores que pueden hacer que el comportamiento no sea el descrito y que la estructura falle bajo cargas menores que la de colapso plástico.

Los fenómenos más importantes que pueden ocasionar una falla prematura son los siguientes:

1. Incapacidad de alcanzar el momento plástico resistente en alguna o algunas de las secciones en que deben aparecer articulaciones plásticas
2. Capacidad de rotación insuficiente
3. Falla de miembros aislados
4. Falla de conexiones
5. Inestabilidad de conjunto de la estructura completa o de parte de ella.

El pandeo local de alguno de los elementos planos que la componen, el pandeo lateral del miembro del que forma parte, o la fractura debida a ductilidad insuficiente del material (algunos aceros de alta resistencia, por ejemplo), o a que la pierda durante procesos inadecuados de fabricación, por trabajar a temperaturas muy bajas o sometido a estados triaxiales de esfuerzos o a sollicitaciones que ocasionen fatiga, son fenómenos que pueden hacer que una sección falle cuando el momento no llega todavía al plástico teórico, o bajo el momento plástico pero cuando las rotaciones son menores que las necesarias para que se forme el mecanismo de colapso.

La falla de una viga o columna fuera de las articulaciones plásticas puede deberse a pandeo local o lateral o a una combinación de ambos, y las conexiones pueden ser incapaces de resistir los elementos mecánicos que les transmiten las vigas y columnas que concurren en ellas.

Finalmente, si la estructura es poco rígida lateralmente los efectos de segundo orden producidos por las cargas verticales al obrar sobre la estructura deformada pueden ocasionar una falla por inestabilidad del conjunto de la estructura completa o de alguno de sus entrepisos, bajo fuerzas horizontales menores que las que ocasionarían la formación del mecanismo de colapso.

Todos los fenómenos anteriores han sido objeto de copiosas investigaciones, teóricas y experimentales, en elementos estructurales y marcos rígidos.

dos completos sometidos a cargas que crecen monotónicamente hasta la falla, pero su comportamiento bajo sollicitaciones cíclicas se ha empezado a estudiar hace relativamente pocos años, y no se cuenta todavía con información suficiente para conocerlo por completo.

Las estructuras deben diseñarse de manera que las deformaciones plásticas se presenten en zonas en las que las sollicitaciones conservan magnitudes elevadas, puesto que el trabajo absorbido es función de las deformaciones y de las fuerzas interiores correspondientes; por este motivo, en los marcos rígidos conviene buscar que las articulaciones se formen en las vigas, que pueden admitir rotaciones importantes cuando actúa en ellas el momento plástico íntegro, y no en las columnas, cuya capacidad de rotación se ve disminuida por fuerza axial, y que, aún en los casos en que admiten rotaciones importantes lo hacen bajo un momento reducido,  $M_{pc}$ , que puede ser mucho menor que el plástico completo, sobre todo si la compresión es importante.

Además, debe lograrse un equilibrio entre la rigidez y la resistencia de las diversas partes, porque las más rígidas atraen una porción más elevada de la fuerza sísmica, y si no pueden resistirla constituyen eslabones débiles de la estructura; este aspecto debe tenerse en cuenta durante todo el proceso de diseño, desde que empieza a planearse la estructuración hasta que se dimensionan los últimos detalles.

4.4 MIEMBROS ESTRUCTURALES. COMPORTAMIENTO Y DISEÑO. Una curva como la de la fig 4.1 contiene toda la información necesaria sobre el comportamiento de un marco bajo cargas verticales constantes y fuerzas horizontales que crecen monotónicamente hasta la falla, pues además de proporcionar su resistencia máxima permite determinar el desplazamiento correspondiente a cualquier intensidad de las fuerzas horizontales y da una medida de su capacidad de absorción de energía. Conocida la curva carga-desplazamiento se puede determinar el coeficiente de seguridad con respecto al colapso y la magnitud de los desplazamientos que experimenta el marco bajo cargas de trabajo; si el primero o los segundos no son aceptables se modifican los

perfiles, ajustándolos hasta que la curva indique que el comportamiento es el deseado. En marcos de edificios de varios niveles se necesita, en teoría, la curva de cada uno de los entresijos, pero para fines prácticos de diseño suele bastar con conocer la de un número reducido de ellos, representativos a todos los demás.

El comportamiento de un marco durante un temblor no es igual al que tendría si obraran sobre él fuerzas horizontales de magnitud creciente aplicadas siempre en el mismo sentido, pero las curvas  $Q-\Delta$  que se obtienen en esas condiciones proporcionan una buena indicación de su respuesta bajo sollicitaciones sísmicas. Más adelante se discuten algunos resultados relativos al comportamiento de marcos con cargas horizontales cíclicas.

Para obtener la curva  $Q-\Delta$  de una estructura deben conocerse las características de los elementos que la componen, de manera que primero hay que diseñar las vigas y columnas y conexiones entre ellas, y determinar después la curva fuerza horizontal-desplazamiento, para saber si el trabajo de la estructura en conjunto es adecuado. De aquí la necesidad de estudiar el comportamiento y los métodos de diseño de los elementos que componen la estructura y de las uniones entre ellos.

4.4.1 Vigas. Las vigas soportan directamente las cargas verticales, vivas y muertas, que obran sobre la estructura, al mismo tiempo que mantienen a las columnas con la configuración necesaria para que puedan resistir fuerzas horizontales (en marcos no contraventados) y contribuyen a la rigidez del conjunto. Obran sobre ellas fuerzas transversales y momentos aplicados en los extremos que producen flexiones importantes, acompañadas por fuerzas cortantes; las fuerzas normales suelen ser despreciables, excepto cuando las vigas forman parte de crujeas contraventadas. Se tratan básicamente como miembro en flexión, y la fuerza cortante influye en su comportamiento sólo en casos poco frecuentes.

Los aspectos fundamentales del comportamiento de las barras flexionadas por momentos de intensidad creciente se determinan estudiando experimentalmente vigas con cargas transversales alojadas en su plano de simetría,

que crecen lentamente desde cero hasta llegar a la resistencia máxima de la barra, y trazando las curvas que relacionan las deflexiones en el plano de carga y en planos normales a él con la magnitud de las fuerzas exteriores.

En la fig 4.2 se ha dibujado el conjunto de curvas que se obtiene experimentalmente al cargar hasta el colapso la viga mostrada, cuyo tercio central trabaja en flexión pura (Ref 4.2,4.3); los puntos de aplicación de las cargas y los apoyos están provistos de soportes que impiden los desplazamientos laterales de los dos patines y la rotación de las secciones transversales al rededor del eje longitudinal.

En la fig 4.2 se muestra el comportamiento de la viga en el plano de la flexión y fuera de él, por medio de las curvas momento-deflexión vertical y momento-deflexión lateral de los patines, trazadas para la sección media del tramo central.

La respuesta inicial, elástica lineal, termina al comenzar el flujo plástico, cuando la suma de los esfuerzos residuales y los normales producidos por las cargas llega por primera vez al esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ , en alguna de las secciones del tramo central.

Al fluir plásticamente una porción cada vez mayor del material de la parte de la viga que está en flexión uniforme disminuye su capacidad para soportar incrementos adicionales de carga, hasta que finalmente desaparece, cuando el momento flexionante iguala al plástico resistente de la sección,  $M_p$ ; a partir de ese instante la curva  $M - V_0$  se hace aproximadamente horizontal, pues la deformación crece sin cambio apreciable en la carga hasta que llega a ser varias veces mayor que la existente cuando se inicia el flujo plástico.

El patín comprimido del tramo central se empieza a desplazar lateralmente cuando el momento flexionante vale  $M_p$ , y sus deflexiones aumentan gradualmente al mismo tiempo que crecen los desplazamientos verticales  $V_0$ ; las secciones transversales pierden su forma inicial y se distorsionan como se muestra esquemáticamente en la figura 4.2b.

Finalmente, la resistencia de la viga se agota cuando se pandea localmente el lado crítico del patín comprimido, en la región central.

El comportamiento que se acaba de describir es típico de vigas provistas de contraventeo lateral y formadas por elementos planos con relaciones ancho/grueso adecuadas para posponer la falla por pandeo lateral o local hasta después de que se presenten deformaciones plásticas importantes bajo un momento igual al de plastificación de sus secciones transversales, pero hay otros posibles comportamientos; algunos de ellos se ilustran en la fig 4.3, por medio de sus curvas momento-deflexión en el plano de la carga.

La curva llena OAB corresponde a vigas que no se pandean lateral ni localmente, cuyo material llega a entrar en el intervalo de endurecimiento por deformación; este caso es poco frecuente en estructuras reales.

La situación más común, que se describió tomando como base la fig 4.2, es la correspondiente a la curva OAC.

OADE corresponde a una viga en la que el momento flexionante varía rápidamente a lo largo del eje: el endurecimiento por deformación en la zona de momento máximo hace que éste suba por arriba de  $M_p$ ; después la curva descende cuando se inician fenómenos de pandeo lateral y local.

Las curvas OAFG, OAHJ y OJK describen fallas por pandeo lateral o local o por combinación de ambos, las dos primeras en el intervalo inelástico y la tercera en el elástico.

La curva OAB representa el mejor comportamiento posible y OAC corresponde a un comportamiento que es también muy satisfactorio, siempre que la zona DN, durante la que se presentan deformaciones crecientes bajo momento  $M_p$  constante, sea de amplitud suficiente para que la barra tenga la ductilidad necesaria para el trabajo correcto de la estructura de la que forma parte.

**PANDEO LATERAL.** Las curvas de la fig 4.4 muestran esquemáticamente el comportamiento de una viga en flexión; la curva  $M_0 - \theta$ , momento-rotación en un extremo, representa el comportamiento en el plano de carga, y las curvas  $M_0 - u$  ó  $M_0 - \phi$ , momento-desplazamiento lateral o momento-rotación al rededor del eje longitudinal, describen el pandeo lateral. Si la viga fuese perfectamente recta y no hubiese ninguna excentricidad en las cargas, las curvas  $M_0 - u$  y  $M_0 - \theta$  serían como las trazadas con línea llena, y el

punto A correspondería a la bifurcación del equilibrio; a partir de él la viga puede, en teoría, admitir momentos mayores manteniéndose en su plano (trayectoria AB) o desplazarse lateralmente bajo momento prácticamente constante, de acuerdo con AC.

En las vigas reales no hay nunca bifurcación del equilibrio, pues las imperfecciones iniciales inevitables hacen que los desplazamientos laterales comiencen desde que se empiezan a aplicar las cargas, y la falla no es por pandeo propiamente dicho; sin embargo, la carga crítica teórica es un límite superior de la resistencia real, que se utiliza con fines de diseño.

Desde el punto de vista de su resistencia al pandeo lateral, una viga de acero en flexión se comporta de alguna de las maneras siguientes: si es muy corta, sus secciones transversales se plastifican por completo antes de pandearse, de manera que resiste el momento  $M_p$  y aún lo supera, gracias al endurecimiento por deformación; si es de longitud intermedia su resistencia disminuye por la plastificación parcial que precede al pandeo, que se inicia en el intervalo inelástico, y si es larga su capacidad de carga queda controlada por pandeo elástico; un mismo perfil puede tener cualquiera de los tres comportamientos, dependiendo de la separación que haya entre las secciones transversales fijadas lateralmente.

Los tres intervalos en que se descompone el comportamiento de las barras flexionadas se ilustra en la fig 4.5, en la que se muestran los momentos resistentes en función de las longitudes libres de pandeo. En las zonas en que se prevea la formación de articulaciones plásticas correspondientes al mecanismo de colapso, las vigas de marcos rígidos de edificios que se construyan en zonas sísmicas deben estar en el primer intervalo, en el que la inestabilidad lateral no evita que se alcance, o aún sobrepase, el momento plástico resistente, ni reduce sustancialmente la capacidad de rotación del perfil. En zonas alejadas de las articulaciones plásticas pueden ser en cualquiera de los otros dos intervalos, pero deben diseñarse con coeficientes de seguridad adecuados para evitar fallas por inestabilidad antes de que se forme el mecanismo.

INESTABILIDAD DE VIGAS COMPLETAMENTE PLASTIFICADAS. En los perfiles de acero de sección I ó H flexionados alrededor del eje de mayor momento de inercia se presentan dos fenómenos de inestabilidad, pandeo lateral y pandeo local, que constituyen debilidades propias de esos perfiles por lo que aparecen siempre, eventualmente, aunque se tomen precauciones para evitarlos; sin embargo, si las relaciones ancho/grueso de los elementos planos que los constituyen se conservan dentro de ciertos límites, y se coloca un contravento lateral adecuado, se logra que las dos formas de pandeo se retrasen lo suficiente para que los perfiles mencionados se comporten satisfactoriamente, tanto bajo cargas estáticas como dinámicas, es decir, para que sean capaces de soportar el momento plástico y de mantenerlo durante rotaciones importantes.

Las curvas de la fig 4.6 muestran un comportamiento adecuado y otro inadecuado, desde el punto de vista de la capacidad de rotación de la viga (se supone que ésta puede resistir el momento  $M_p$ , pues de no ser así se tendría una situación más desfavorable que cualquiera de las dos mostradas, y la descarga empezaría antes de que el momento llegase a valer  $M_p$ ).

En un gran número de experiencias (4.3, 4.4) realizadas con perfiles H, flexionados alrededor del eje de mayor momento de inercia se ha observado que las deflexiones laterales se inician en cuanto el momento llega a  $M_p$ , independientemente de la distancia entre puntos soportados lateralmente, pero si esa distancia es menor o igual que una cierta longitud crítica el comienzo del pandeo lateral no corresponde a la falla, la que se presenta eventualmente cuando se pandea localmente el patín comprimido, después de que la viga ha experimentado deformaciones laterales importantes sin que disminuya su resistencia.

El comportamiento de las vigas en flexión uniforme es sustancialmente diferente de las que están sometidas a momentos de intensidad variable a lo largo de su eje. La disminución eventual de resistencia se debe en los dos casos a una combinación de pandeo local y lateral, pero cambia el orden en que se presentan los dos fenómenos; cuando el momento es constante el patín comprimido se plastifica en una longitud considerable, lo que ocasiona

na una gran pérdida de rigidez que hace que crezcan rápidamente las deflexiones laterales y las compresiones en la zona cóncava del patín, hasta que aparece una onda de pandeo local originada por esfuerzos de compresión de dos tipos, unos uniformes, ocasionados por la flexión en el plano de carga, y otros que crecen linealmente a lo ancho del patín, debidos a la flexión lateral. En cambio, cuando el momento varía a lo largo del eje de la viga la zona plastificada del patín comprimido es de longitud reducida, y conserva una rigidez apreciable que hace que las deflexiones laterales aumenten muy poco; la falla se inicia por pandeo local debido a esfuerzos uniformes en todo el patín, ocasionados exclusivamente por flexión en el plano de carga, y el colapso se produce por pandeo lateral debido a la pérdida de rigidez producida por el pandeo local del patín comprimido. El comportamiento descrito se comprueba con resultados experimentales (4.5) en los que se demuestra que en perfiles H sometidos a flexión bajo momentos que varían rápidamente de intensidad la descarga se debe a desplazamientos laterales grandes, y la importancia de la relación ancho/grueso disminuye drásticamente.

Cuando se forma una articulación plástica en el extremo de una viga de un marco rígido la región plastificada queda sometida a momentos que varían de intensidad rápidamente a lo largo del eje, y las restricciones que hay en sus extremos son elevadas, pues en uno está en contacto con la zona elástica adyacente, bastante más rígida; y en el otro está ligado a la columna; en esas condiciones, se ha demostrado (4.6, 4.7) que para que el patín comprimido se pandee localmente bajo carga estática, debe plastificarse en una longitud igual a la de una onda de pandeo local, fig 4.7.

Si la viga está cargada cíclicamente, de manera que el momento en el extremo conectado con la columna cambia de signo en cada uno de los ciclos, los patines trabajan alternadamente en tensión y compresión; el patín comprimido se pandea localmente cuando las solicitaciones alcanzan un cierto valor, formándose una onda semejante a la que producen las cargas estáticas, figs 4.8 y 4.9, la que desaparece cuando cambia el sentido del momento, y se forma en el otro patín; así, las ondas de pandeo en compresión apa-

recen y desaparecen en cada uno de los ciclos del proceso de carga, y si el pandeo lateral está impedido la falla se inicia eventualmente al formarse una grieta en la zona en que las deformaciones son máximas (ref 4.8), fig 4.8, en la que las severas distorsiones de los patines causan deformaciones inelásticas considerablemente mayores que en el extremo empotrado.

En la ref 4.8 se resumen los resultados obtenidos cargando cíclicamente vigas en voladizo, por medio de un sistema con el que se controlan los desplazamientos, hacia arriba y abajo del extremo libre; cuando las deformaciones unitarias en la zona de los patines en contacto con el empotramiento eran de 2.5 por ciento no aparecieron grietas en la sección empotrada, y la falla se produjo siempre en la zona de deformaciones máximas de las ondas de pandeo; solamente cuando las deformaciones impuestas se redujeron a  $\pm 1$  por ciento se inició la falla por agrietamiento en el empotramiento y no en las ondas de pandeo local, después de un número muy elevado de ciclos de carga.

Se deduce de aquí que en estructuras sometidas a solicitaciones que producen condiciones de carga total o parcialmente reversibles el pandeo local es mucho más crítico que la fatiga de bajo número de ciclos del material en sí y, si se evita, aumenta considerablemente el número de ciclos que pueden resistir las vigas bajo una deformación dada.

En la fig 4.10 se resumen los resultados de las experiencias mencionadas.

De acuerdo con los resultados anteriores, cuando la relación ancho/grueso de los patines se hace menor que la especificada para carga estática aumenta la vida de los perfiles H cargados cíclicamente, al retrasarse la iniciación del pandeo local, y podría lograrse el mismo objeto colocando atiesadores verticales que impidiesen la distorsión de las secciones trasversales críticas (ref 4.14). Sin embargo, esta conclusión está en desacuerdo con otros resultados experimentales; así, en la ref 4.9 se demues-

tra que el pandeo local de los patines no ocasiona una pérdida inmediata de resistencia, y se indica que al formarse las ondas de pandeo local y distribuirse las deformaciones máximas puede, incluso, aumentar significativamente la vida de una viga, y en la ref 4.10 se encuentra que el comportamiento de perfiles H cuyos patines tienen una relación ancho/grueso mayor que la especificada para diseño plástico bajo carga estática (21 en vez de 17) es satisfactorio, pues aunque el pandeo local se inicia muy pronto no afecta significativamente el comportamiento del marco del que forma parte la viga.

A diferencia de las vigas de la ref 4.8, las de la ref 4.10 se cargaron con fuerzas verticales que permanecieron constantes mientras se aplicaban las horizontales cíclicas, lo que hizo que las ondas de pandeo local no desaparecieran completamente en cada ciclo; además, estuvieron provistas de contraventeo lateral en puntos separados, distancias bastante menores que las especificadas en las normas del AISC, pero que daban soporte únicamente al patín superior, ya que se trató de reproducir las condiciones existentes en estructuras reales, en las que el sistema de piso proporciona soporte lateral continuo a los patines superiores.

En los resultados de ensayos de subconjuntos, formados por una columna y dos vigas, fig 4.11; sometidos a cargas verticales constantes y horizontales cíclicas, reportados en la ref 4.11, se observa que las inversiones de carga acentúan las imperfecciones locales y aceleran la iniciación del pandeo local y torsional en las regiones de las vigas en que se forman articulaciones plásticas; haciendo que disminuyan la resistencia y rigidez de la estructura, lo que lleva a recomendar que se coloque un sistema de contraventeo que proporcione soporte lateral a los patines inferiores, comprimidos, de las regiones plastificadas.

En la ref 4.12 se describen los resultados obtenidos con dos subconjuntos que difieren exclusivamente en las relaciones ancho/grueso de los patines y almas de las vigas (11.7 y 47 en el primero, 10.2 y 33 en el segundo), provistos de contraventeo lateral, en los patines superiores, con separaciones menores que las especificadas para carga estática; la capacidad de rota

ción de las vigas del segundo subconjunto fué apreciablemente mayor que la de las vigas del primero; en éste apareció una onda de pandeo local en el patín comprimido cuando la rotación en la articulación plástica era de 0.040 rad, y el pandeo lateral se presentó, después de varios ciclos, al invertir la rotación a - 0.028 rad, con disminución en la resistencia, mientras que en aquel no hubo pandeo local bajo inversiones de la rotación plástica de 0.030 rad a - 0.016 rad, y aunque se formó una pequeña onda al llegar a - 0.029 rad el pandeo lateral se inició con rotaciones de 0.040 rad, y aún entonces no influyó en la resistencia del espécimen.

Los resultados anteriores indican que el comportamiento de las estructuras mejora cuando se utilizan vigas con relaciones ancho/grueso, en patines y alma, menores que las especificadas para diseño plástico bajo carga estática, y cuando se coloca más contraventeo lateral; sin embargo, en la ref 4.11 se sugiere que el índice de desplazamiento  $\Delta/h$  máximo de cada entrepiso, bajo el temblor de diseño más intenso, se limite a 0.03 para evitar problemas excesivos de inestabilidad; en ese caso, si se desprecia la contribución al desplazamiento de las deformaciones elásticas e inelásticas de la junta y de las deformaciones elásticas de las columnas y vigas, la capacidad de rotación máxima necesaria en las articulaciones plásticas de los extremos de las vigas puede tomarse conservadoramente igual a 0.03 rad, y aunque los estudios efectuados hasta ahora no permiten asegurarlo de manera definitiva, parece que las vigas que cumplen las relaciones ancho/grueso especificadas para carga estática y que tienen el patín superior soportado lateralmente en forma continua pueden admitir rotaciones de esa magnitud, y aún mayores, sin que disminuya su resistencia.

En resumen, aunque la información experimental con que se cuenta no es del todo concluyente, parece indicar que si las vigas están soportadas lateralmente en forma adecuada basta con que se cumplan las relaciones ancho/grueso especificadas para diseño plástico bajo carga estática para que su comportamiento bajo carga cíclica sea satisfactorio; la situación cambia cuando aumenta la longitud no soportada lateralmente, pues en ese caso el pandeo

lateral se inicia poco después que el local, y la combinación de ambos ocasionan una falla prematura. En marcos rígidos de edificios urbanos es fácil lograr que el sistema de piso proporcione soporte lateral continuo al patín superior de las vigas y, si es necesario, el inferior puede fijarse por medio de atiesadores verticales; sin embargo, en estructuras de otros tipos puede ser recomendable escoger límites de las relaciones ancho/grueso y de la separación entre soportes laterales más conservadoras que las que se fijan para carga estática.

**CAPACIDAD DE ROTACION.** Cuando no se presentan fallas prematuras, las curvas carga-deformación de las vigas tienen la forma indicada en la fig 4.12, en la que se han tomado el momento y la rotación en el extremo,  $M$  y  $\theta$ , como parámetros representativos de los sistemas de cargas y deformaciones.

Llamando  $\theta_u$  a la rotación en el instante en que se inicia la descarga y  $\theta_p$  a la rotación elástica ficticia correspondiente al momento plástico resistente de la viga (es decir, el ángulo que habría girado el extremo al llegar el momento a  $M_p$  si el comportamiento fuese elástico hasta entonces) la capacidad de rotación de la viga,  $R$ , es, por definición,

$$R = (\theta_u/\theta_p) - 1$$

$R$  es nula cuando el miembro no puede soportar el momento  $M_p$  durante ningún intervalo de rotaciones, pues en ese caso  $\theta_u = \theta_p$ .

El cociente  $\theta_u/\theta_p$ , o  $\delta_u/\delta_p$ , donde  $\delta$  es un desplazamiento lineal cualquiera, es el factor de ductilidad de la viga.

En las refs 4.6, 4.7 y 4.13 se presentan expresiones que relacionan la capacidad de rotación  $R$  de vigas  $M$  bajo momento uniforme o variable, producido por carga estática, con los distintos parámetros que afectan su comportamiento; con ellas se puede determinar la separación entre puntos soportados lateralmente necesaria para obtener una capacidad de rotación de

seada o inversamente, calcular la capacidad de rotación para una separación dada. Por ejemplo, si la separación entre contraventeos es  $35 r_y$  es una viga  $H$  compacta de acero A36 con tramos adyacentes elásticos, bajo momento uniforme, la capacidad de rotación excede de 10.5, y si se desea una  $R$  de 3 basta con soportar lateralmente puntos separados distancias iguales a  $60 r_y$ . Bajo momento variable el pandeo lateral es menos importante, y longitudes no contraventeadas del orden de  $75 r_y$  suelen ser adecuadas en la mayoría de los casos.

**DISEÑO.** En la actualidad no se cuenta con información suficiente sobre la demanda de capacidad de rotación en estructuras sometidas a sismos intensos ni sobre la que éstas pueden proporcionar, por lo que mientras se obtiene mayor información teórica y experimental, en las zonas en que se formarán articulaciones plásticas ligadas con el mecanismo de colapso las vigas de estructuras que se construirán en zonas sísmicas deben satisfacer, cuando menos, los requisitos relativos a relaciones ancho/grueso de patines y almas y a separación entre puntos soportados lateralmente que se exigen en diseño plástico, independientemente de que los métodos empleados para el análisis y diseño sean clásticos, basados en esfuerzos permisibles, o plásticos.

De acuerdo con la ref 4.15, esos requisitos son:

Yield Stress (Esfuerzo de Fluencia)	Maximum Allowable Width-To-Thickness Ratios <sup>1</sup>			Maximum Allowable Laterally unsupported distance <sup>2</sup>	
	Flanges (Patines)	Webs (almas)		$1.0 \geq M/M_p > -0.5$	$-0.5 \geq M/M_p > -1.0$
		$P/P_y \leq 0.27$	$P/P_y > 0.27$		
36 Ksi (24.84 KN/cm <sup>2</sup> )	17.0	$68.7 - 9.61 P/P_y$	42.8	$63.2 r_y$	$38.2 r_y$
50 Ksi (34.50 KN/cm <sup>2</sup> )	14.0	$58.3 - 81.6 P/P_y$	36.3	$52.5 r_y$	$27.5 r_y$
65 Ksi (44.85 KN/cm <sup>2</sup> )	12.0	$51.1 - 71.5 P/P_y$	31.9	$46.2 r_y$	$21.2 r_y$

1 Relaciones ancho/grueso máximas admisibles.

2 Distancias no soportadas lateralmente máximas admisibles

Todas las secciones en que aparezcan articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso deben contraventearse lateralmente en forma adecuada para evitar desplazamientos laterales y torsionales, y la longitud no soportada entre esas secciones y puntos adyacentes contraventeados similarmente no debe sobrepasar la dada en las dos últimas columnas de la tabla, en las que  $r_y$  es el radio de giro del miembro alrededor del eje débil,  $M$  es el menor de los momentos en los extremos del segmento no contraventado y  $M/M_p$ , relación entre momentos en los extremos, es positiva si el segmento se flexiona en curvatura doble y negativa si lo hace en curvatura simple.

El efecto de la fuerza cortante sobre el momento plástico resistente de las vigas es despreciable casi siempre; en la ref 4.16 se indica que no es necesario modificarlo si la fuerza cortante no excede de  $(\sigma_y/\sqrt{3}) w d_w$ , donde  $\sigma_y$  es el esfuerzo de fluencia del acero y  $w$  y  $d_w$  son, respectivamente, el grueso y el peralte del alma.

En los tramos entre articulaciones las vigas se diseñan utilizando métodos elásticos y empleando factores de carga adecuados para evitar fallas prematuras, anteriores a la formación del mecanismo de colapso.

**4.4.2 Columnas.** Las columnas de los marcos rígidos deben ser capaces de soportar las cargas que les transmiten las vigas adyacentes y los tramos de columnas que se encuentran sobre ellas, llevándolas eventualmente a la cimentación, así como los momentos producidos por cargas verticales que reciben de las vigas; además, deben ayudar a soportar las fuerzas horizontales en marcos contraventeados, y resistirlas en su totalidad en los que no tienen contraventeo, y contribuir a darle al marco la rigidez necesaria para evitar problemas de pandeo de conjunto. Trabajan fundamentalmente en flexocompresión, y suelen ser despreciables los efectos que ocasionan en ellas las fuerzas cortantes. En general están sometidas a flexocompresión biaxial, pues forman parte simultáneamente de dos marcos, frecuentemente ortogonales.

Una barra flexocomprimida puede fallar por alguna de las causas que se enumeran a continuación, o por una combinación de dos o más de ellas:

1. Porque se alcance su resistencia máxima bajo momento y fuerza axial combinados, al formarse articulaciones plásticas en la sección o secciones en las que el momento tiene su mayor intensidad.
2. Por inestabilidad en el plano de los momentos ocasionada por exceso de flexión en ese plano, teniendo en cuenta la acción simultánea de la fuerza normal.
3. Por pandeo lateral debido a flexotorsión.
4. Por pandeo debido a compresión axial alrededor de los ejes de menor momento de inercia.
5. Por pandeo local.

Cualquiera de las cuatro últimas formas de falla puede iniciarse en el intervalo elástico o en el inelástico, dependiendo de la mayor o menor esbeltez de la pieza en consideración o de los elementos planos que la forman.

La primera forma de falla es crítica cuando la barra tiene paredes gruesas y sus condiciones de apoyo y carga son tales que pueden formarse articulaciones plásticas en la zona central o en uno o en los dos extremos, producidas por fuerzas de menor intensidad que las que ocasionarían la falla por pandeo; esta condición suele corresponder al colapso de columnas aisladas, pero no necesariamente al de las que forman parte de estructuras reticulares.

La segunda condición es crítica en barras flexionadas alrededor de sus ejes de menor momento de inercia, y también cuando la flexión se presenta en el plano de mayor resistencia pero el pandeo lateral está impedido por las características geométricas de las secciones transversales (tubos, secciones en cajón) o por la presencia de elementos exteriores de contraventeo.

La falla por pandeo lateral (condición 3) se presenta en miembros de sección  $H$  o similar, flexionados alrededor de sus ejes de mayor momento de

inercia, y desprovistos de elementos exteriores adecuados de contraventeos; se caracteriza por una flexión lateral de la barra en un plano perpendicular al de aplicación de los momentos, acompañada por un retorcimiento alrededor del eje longitudinal.

La condición 4 es crítica cuando la fuerza axial es mucho más importante que la flexión y el comportamiento se aproxima al de una columna en compresión axial, y la 5 cuando las relaciones ancho/grueso de patines o alma están por encima de ciertos límites.

La forma de falla más común en columnas de edificios, es la correspondiente a la combinación de los dos primeros casos, es decir, por formación de un número de articulaciones plásticas suficiente para que se conviertan en un mecanismo, bajo la acción de las solicitaciones incrementadas por efectos de segundo orden debidos a la interacción de la compresión y los desplazamientos ocasionados por los momentos flexionantes.

El pandeo lateral por flexotorsión puede hacer que disminuya la resistencia, pero las longitudes y las dimensiones de las secciones transversales de las columnas de edificios son tales que ese fenómeno no suele ser crítico, y lo mismo sucede con el pandeo local. Tampoco tiene importancia el pandeo de Euler, ya que la flexión juega un papel importante en la gran mayoría de los casos.

Una columna de un marco provisto de contraventeos o de muros de corte de rigidez y resistencia adecuadas falla cuando se forman en ella, tres articulaciones plásticas, fig 4.13.

El comportamiento de las columnas de marcos no contraventeados es radicalmente diferente. La estabilidad del conjunto depende básicamente de las vigas; si son muy flexibles las columnas actúan esencialmente como cuerpos rígidos, y el desplazamiento horizontal se debe principalmente a la flexión de las vigas; cada entrepiso se convierte en un mecanismo cuando se forman articulaciones en los extremos de todas ellas, con lo que desaparecen las restricciones y los desplazamientos crecen ilimitadamente, fig 4.14a.

Si las vigas son rígidas las columnas resisten las deflexiones laterales trabajando en flexión; la condición de colapso se alcanza también cuando el entrepiso se convierte en un mecanismo, al formarse articulaciones plásticas en los dos extremos de todas las columnas (la estabilidad lateral del marco no depende de cada una de ellas en particular, sino del comportamiento de todas las de cada entrepiso, ya que el colapso no se presenta cuando una o más columnas se convierten en mecanismos, pues las restantes siguen proporcionando rigidez lateral al conjunto).

En la fig 4.14b se ha representado el caso teórico de vigas infinitamente rígidas.

Puede presentarse situaciones intermedias, en las que algunas columnas fallan al formarse articulaciones plásticas en sus dos extremos y otras cuando desaparecen las restricciones proporcionadas por las vigas; incluso, hay casos en que las dos situaciones tienen lugar en una misma pieza, en uno y otro de sus extremos.

Cuando en un entrepiso de un marco no contraventeado se utilizan columnas de resistencias muy diferentes, alguna de ellas puede fallar como se muestra en la fig 4.13b, si las restantes proporcionan resistencia lateral suficiente para posponer la falla del conjunto; sin embargo, esta situación debe evitarse en estructuras construídas en zonas sísmicas, pues se tendrían eslabones débiles que precipitarían la falla.

De acuerdo con la práctica usual, el diseño de estructuras que se construirán en zonas sísmicas se hace de manera que las articulaciones plásticas se formen en las vigas, mientras las columnas se conservan básicamente en el intervalo elástico. Por este motivo se han efectuado menos estudios referentes al comportamiento inelástico de columnas bajo cargas cíclicas que de vigas en condiciones análogas, pero se cuenta con alguna información, que se discutirá más adelante.

El comportamiento de una barra recta aislada sometida a la acción simultánea de fuerzas de compresión axial y pares aplicados en los extremos puede representarse por medio de la curva momento-rotación en el extremo,

obtenida aplicando primero la fuerza de compresión y después momentos de intensidad creciente, en uno solo o en ambos extremos, mientras la compresión se mantiene constante.

Los parámetros principales que determinan la respuesta de la pieza son su esbeltez, la magnitud de la fuerza de compresión y la manera en que están aplicados los momentos, que pueden producir curvatura simple o doble; además, el problema se complica si la pieza puede fallar por pandeo lateral o cuando uno de sus extremos se desplaza linealmente respecto al otro.

En la fig 4.15 se han trazado en forma cualitativa varias curvas  $M-\theta$ , todas correspondientes a columnas en las que no hay pandeo local ni lateral y cuyos extremos están fijos linealmente: cada colección de curvas ilustra la importancia de uno de los parámetros mencionados arriba.

La fig 4.15a corresponde a una columna muy corta, en la que no hay inestabilidad de ninguna clase; cuando la fuerza normal es nula se obtiene la curva  $M-\theta$  característica de una pieza en flexión, que resiste un momento de intensidad máxima igual a  $M_p$  y lo mantiene durante rotaciones importantes, y al crecer  $P$  gradualmente se van obteniendo curvas semejantes a la primera pero cuya ordenada máxima no es  $M_p$  sino  $M_{pc}$ , momento plástico reducido por efecto de la fuerza normal.

Las otras tres figuras describen el comportamiento de piezas largas. En la b se han trazado varias curvas, obtenidas para valores constantes de  $q$  y de  $L/r$  y para intensidades crecientes de la fuerza axial ( $q$  es el cociente del menor entre el mayor de los momentos en los extremos); al aumentar la compresión disminuye tanto el momento máximo que resiste la pieza como su capacidad de rotación.

Cuando varía  $L/r$ , manteniéndose  $q$  y  $P$  constantes, o cuando la variable es  $q$ , mientras las otras dos cantidades se conservan fijas, el efecto sobre el comportamiento de la columna es análogo: al aumentar la relación de esbeltez, o tender los momentos en los extremos hacia valores iguales que

23

producen curvatura simple en flexión pura, disminuyen tanto la resistencia como la capacidad de rotación (figs 4.15c y d).

Cualquiera de las curvas de la fig 4.15 puede interrumpirse prematuramente si se presenta un fenómeno de pandeo local o lateral, cuya importancia varía también con los parámetros que caracterizan el problema.

Aún admitida la imposibilidad de que haya pandeo, la resistencia de las barras flexocomprimidas largas queda limitada por inestabilidad, como lo demuestra la forma de las curvas de las figs 4.15b, c y d, que tienen una rama ascendente, correspondiente a configuraciones estables, seguida de un punto en el que la pendiente es nula y el equilibrio indiferente (resistencia máxima) y de una rama descendente, característica de estados de equilibrio inestable. La inestabilidad, que se presenta sin que la barra se salga del plano de la flexión, y que no es un fenómeno de pandeo (no hay bifurcación del equilibrio), se debe a la interacción de momentos y fuerza normal y a la disminución de rigidez producida por la plastificación parcial.

La resistencia de una columna flexionada alrededor de su eje de mayor momento de inercia, que se conserva durante todo el proceso de carga en el plano de la flexión, puede determinarse utilizando métodos elásticos o elastoplásticos. En el primer caso se toma como límite de utilidad estructural la aparición del esfuerzo de fluencia en la sección crítica, y no corresponde a la resistencia máxima de la columna, que puede admitir incrementos adicionales de carga hasta su colapso por inestabilidad en el plano de la flexión.

Despreciando los esfuerzos residuales, puede considerarse que el comportamiento elástico termina cuando

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}}}{S_x} = \sigma_y$$

En  $M_{\text{máx}}$  se incluye el momento producido por la fuerza  $P$  al actuar sobre la pieza deformada.

Dividiendo los dos miembros entre  $\sigma_y$ , teniendo en cuenta que  $A\sigma_y = P_y$  y  $S_{x-y} = (M_x)_y$ , y expresando el momento máximo como el producto de un factor de amplificación  $\phi$  por el mayor de los momentos aplicados en los extremos, la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{P}{P_y} + \phi \frac{M_0}{(M_x)_y} = 1.0 \quad (1)$$

Las expresiones teóricas exactas de  $\phi$  resultan inadecuadas para diseño, por lo que la ec. 1 suele sustituirse por las dos ecuaciones aproximadas siguientes, que deben satisfacerse simultáneamente:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{C_m}{1 - P/P_E} \frac{M_0}{(M_x)_y} \leq 1.0 \quad (2)$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M_0}{(M_x)_y} \leq 1.0 \quad (3)$$

Con la fórmula 2, se comprueba que los esfuerzos máximos amplificados por efectos de segundo orden no exceden el límite de fluencia, y con la (3) se hace la misma comprobación en el extremo de la columna en que actúa el mayor de los momentos exteriores; en los extremos no hay amplificación.

$C_m M_0$  es un momento uniforme ficticio aproximadamente equivalente a los momentos reales variables; si los extremos de la columna no se desplazan linealmente  $C_m$  se calcula con la expresión  $C_m = 0.6 + 0.4 M/M_0 \geq 0.4$ , en la que  $M$  es el menor y  $M_0$  el mayor de los momentos en los extremos, y  $M/M_0$  es positivo cuando la barra se flexiona en curvatura simple y negativo cuando lo hace en curvatura doble;  $1 - P/P_E$ , donde  $P_E$  es la carga crí

tica de Euler de pandeo en el plano de la flexión, es un factor de amplificación del momento uniforme equivalente  $C_{M_0}$ , que tiene en cuenta, aproximadamente, la interacción fuerza axial-momento.

Se cuenta con varios métodos para calcular la resistencia máxima de las columnas en el intervalo inelástico (refs 4.17 y 4.18), y se han desarrollado procedimientos que permiten determinar la curva completa momento-rotación en un extremo (refs 4.19 a 4.21); esta curva es de importancia fundamental en diseño sísmico, pues con ella se obtienen la capacidad de rotación y de absorción de energía; sin embargo, las curvas han sido deducidas para miembros con carga axial constante y momentos aplicados en uno o en dos extremos que crecen monotónicamente hasta la falla, por lo que proporcionan únicamente una indicación cualitativa del comportamiento de columnas sometidas a solicitaciones dinámicas.

En la fig 4.16 (ref 4.21) se muestran tres curvas momento-rotación típicas obtenidas para tres columnas iguales, con relación de esbeltez en el plano de flexión:  $L/r_x = 30$  y fuerzas de compresión  $P = 0.30 P_y$ , sometidas a momentos de intensidad creciente aplicados en los extremos que guardan entre sí relaciones diferentes en cada caso; la columna en curvatura doble es la que se encuentra en la condición más favorable, y la más crítica es la flexionada en curvatura simple; los momentos tienen intensidades iguales en los dos casos.

La columna no puede soportar el momento  $M_p$  completo en ninguno de los casos, pues parte de su resistencia debe destinarse a la fuerza de compresión, pero en a y b tiene una capacidad de rotación importante bajo momento constante igual a  $M_{pc}$ , mientras que en c los efectos de segundo orden son máximos, el momento resistente no llega a  $M_{pc}$  y la capacidad de rotación es muy pequeña; este fenómeno se agudiza cuando aumentan  $L/r_x$  y  $P$ , de manera que las columnas esbeltas y con compresión importante resisten un momento máximo apreciablemente menor que  $M_{pc}$ , y tienen una capacidad de rotación muy reducida, o aún nula.

Las columnas de edificios construidos en zonas sísmicas son, en general, poco esbeltas y la flexión suele ser predominante en su diseño, por lo que sus relaciones  $P/P_y$  son bajas; además, se flexionan en curvatura doble bajo la acción combinada de fuerzas verticales y solicitaciones sísmicas; por todo esto, su capacidad de rotación suele ser importante, del orden de la mitad de la predicha para vigas (ref 4.21).

Las ecuaciones aproximadas 2 y 3 pueden utilizarse también para describir la condición de carga que ocasiona la iniciación del pandeo elástico de una columna, fuera del plano de flexión; para ello, basta sustituir en la ec 2 a  $P_y$  y  $(M_x)_y$  por  $P_{cr}$  y  $M_{crx}$ , que representan la carga crítica de Euler para pandeo alrededor del eje de menor momento de inercia y el momento crítico de pandeo elástico de la barra flexionada uniformemente alrededor de su eje de mayor momento de inercia; la ec 3 se conserva sin cambio.

La resistencia de barras flexocomprimidas que fallan por exceso de flexión en el plano de los momentos es relativamente insensible a cambios en las dimensiones de las secciones transversales, por lo que un solo conjunto de curvas correspondiente a una relación  $q$  dada entre momentos extremos es aplicable a todas las secciones H, laminadas o formadas por placas, de dimensiones semejantes a las laminadas; en cambio, la resistencia al pandeo lateral depende de manera importante de la sección transversal de la columna.

Se ha determinado (ref 4.22) que la relación adimensional  $K_T/Ad^2$ , donde  $K_T$  es la constante de torsión de Saint-Venant,  $A$  el área y  $d$  el peralte de la sección, constituye el parámetro geométrico principalmente responsable de cambios en el momento crítico, tanto en el intervalo elástico como en el inelástico, y que la resistencia al pandeo lateral es proporcional a él; todas las variables restantes que definen la geometría de las secciones transversales, reducidas a una forma adimensional, son aproximadamente constantes para relaciones  $P/P_y$  y  $L/r_y$  fijas, aún en el intervalo inelástico, de manera que pueden construirse curvas (ref 4.22) que proporcionan las relaciones de esbeltez límite en función de  $K_T \times 10^6/Ad^2$  y de  $P/P_y$ , y que son aplicables a todas las secciones H laminadas con aproximación suficiente para diseño.

Los resultados proporcionados por las curvas son conservadores cuando se aplican a columnas de edificios sobre los que actúan cargas horizontales, pues corresponden a piezas libremente apoyadas con momentos iguales en los extremos que las flexionan en curvatura simple, y las columnas mencionadas siempre tienen restricciones en los extremos y, además, se flexionan en curvatura doble; teniendo ésto en cuenta, y estudiando las curvas, se concluye que el pandeo lateral por flexotorsión no ocasiona disminuciones en la resistencia de la mayoría de las secciones H que se utilizan en edificios, cuando actúan sobre ellos cargas verticales y horizontales estáticas.

Si en la ec 2 se sustituye  $P_y$  por la carga crítica de pandeo inelástico de la columna comprimida axialmente, correspondiente a la relación de esbeltez más grande, y  $(M_x)_y$  por el momento máximo que podría resistir la pieza si estuviese sometida únicamente a flexión, incluyendo efectos de pandeo lateral por flexotorsión cuando sean significativos, se obtiene la ec 4, que proporciona pares de valores de P y  $M_0$  que ocasionan la falla por inestabilidad; aunque empírica, la ec 4, proporciona buena precisión para diseño.

La ec 3, se sustituye por la (5), que describe la condición correspondiente a la formación de una articulación plástica en un extremo, de manera que cuando se satisface alguna de las ecs 4 o 5, está a punto de agotarse la resistencia de un miembro sujeto a compresión y a flexión en su plano de mayor resistencia, ya sea por pandeo lateral, o por formación de una articulación plástica en uno de sus extremos.

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m}{1 - P/P_E} \frac{M_0}{M_m} = 1.0 \quad (4)$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M_0}{1.18 M_p} = 1.0 \quad (5)$$

$M_m$ , momento máximo que puede resistir el miembro en ausencia de fuerza normal, puede calcularse aproximadamente con la expresión empírica (ref 4.15).

$$M_m = \left[ 1.07 - \frac{(L/r_y) \sqrt{Q_y}}{26\,500} \right] M_p \leq M_p$$

Esta ecuación proporciona un valor aproximado del momento crítico de pandeo lateral para  $q = +1.0$ ; cuando los valores de los momentos en los extremos guardan otra relación, puede corregirse utilizando el coeficiente  $C_m$ .

De las ecs 4 y 5, se obtienen dos valores del momento exterior  $M_0$ ; el menor de ellos es el máximo que resiste la columna en combinación con la fuerza axial  $P$ .

$$M_0 = \frac{1}{C_m} \left(1 - \frac{P}{P_E}\right) \left(1 - \frac{P}{P_{cr}}\right) M_m \tag{4'}$$

$$M_0 = 1.18 \left(1 - P/P_y\right) M_p \tag{5'}$$

**FLEXION BIAXIAL.** El problema por resolver es determinar la intensidad máxima de las solicitaciones que puede resistir una columna cuando actúan en ella, simultáneamente, una fuerza axial de compresión y momentos aplicados alrededor de los dos ejes centroidales y principales de sus secciones extremas; no es un problema de pandeo por bifurcación del equilibrio, pues las secciones transversales se desplazan lineal y angularmente desde un principio, sino de inestabilidad producida por la interacción de momentos y fuerza axial.

En la ref 23 se desarrolla un método aproximado para el diseño elástico de columnas de sección transversal H con pares aplicados en los extremos alrededor de los dos ejes centroidales y principales, que constituyen la base de las recomendaciones contenidas en las refs 4.24 y 4.25.

Para que el esfuerzo normal no sobrepase al de fluencia en ningún punto deben satisfacerse simultáneamente las tres condiciones siguientes:

$$\sigma_a + \sigma'_{bx} + \sigma'_{by} \leq \sigma_y \quad (6)$$

$$\sigma_a + \sigma''_{bx} + \sigma''_{by} \leq \sigma_y \quad (7)$$

$$\sigma_a + N_x \sigma_{bx} + N_y \sigma_{by} \leq \sigma \quad (8)$$

$\sigma_a$ ,  $\sigma_{bx}$  y  $\sigma_{by}$  son los esfuerzos normales directos producidos por la fuerza axial y por momentos uniformes ficticios equivalentes aplicados alrededor de  $x$  y  $y$ , que se calculan con las expresiones

$$(M_x)_{eq.} = (1/\sqrt{F})_x M_{0x} = C_{mx} M_{0x}$$

$$(M_y)_{eq.} = (1/\sqrt{F})_y M_{0y} = C_{my} M_{0y}$$

en las que  $M_{0x}$  y  $M_{0y}$  son los momentos mayores alrededor de  $x$  y  $y$  y los factores  $1/\sqrt{F}$ , que están tabulados en la ref 4.23, son muy semejantes a los coeficientes  $C_m$ , calculados para flexión alrededor de cada uno de los ejes centroidales y principales.

$\sigma'_{bx}$ ,  $\sigma'_{by}$ ,  $\sigma''_{bx}$  y  $\sigma''_{by}$  son los esfuerzos máximos en los extremos de la columna, calculados con los momentos exteriores aplicados en ellos,  $N_x$  y  $N_y$  son factores de amplificación que se determinan con las fórmulas de la

ref 4.23, y  $\sigma$  es un esfuerzo normal reducido para tener en cuenta los efectos de las imperfecciones geométricas inevitables en las columnas.

Los esfuerzos en los dos extremos se revisan con las ecs 6 y 7 y la condición de estabilidad con la ec 8.

La resistencia máxima real, en el intervalo inelástico, de columnas aisladas de sección H en flexocompresión biaxial, se ha determinado estableciendo su relación carga-deformación completa, por medio de métodos numéricos en los que las cargas exteriores se aplican en una secuencia de incrementos suficientemente pequeños; se han obtenido así ecuaciones de interacción que expresan las condiciones de falla por formación de una articulación plástica en alguna sección transversal, o por inestabilidad de la columna (refs 4.26 a 4.30).

En secciones contraventeadas (extremos de la columna) debe satisfacerse la condición

$$\left(\frac{M_x}{M_{pcx}}\right)^\xi + \left(\frac{M_y}{M_{pcy}}\right)^\xi \leq 1.0 \quad (9)$$

$M_x$  y  $M_y$  son los momentos que actúan en la sección considerada y  $M_{pcx}$  y  $M_{pcy}$  los momentos plásticos, reducidos por fuerza axial, correspondientes a flexión alrededor de x y y, que se calculan con las ecuaciones

$$M_{pcx} = 1.18 M_{px} \left[ 1 - (P/P_y) \right] \leq M_{px}$$

$$M_{pcy} = 1.19 M_{py} \left[ 1 - (P/P_y)^2 \right] \leq M_{py}$$

en las que  $M_{px}$  y  $M_{py}$  son los momentos plásticos de la sección.

En secciones H en las que la relación del ancho del patín al peralte del alma está comprendida entre 0.5 y 1.0,  $\xi$  está dado por

$$\xi = 1.6 - \frac{P/P_y}{2 \ln (P/P_y)}$$

donde  $\ln$  indica logaritmo natural.

La estabilidad entre puntos contraventeados se comprueba con la ecuación

$$\left( \frac{C_{mx} M_x}{M_{ucx}} \right)^\eta + \left( \frac{C_{my} M_y}{M_{ucy}} \right)^\eta \leq 1.0 \quad (10)$$

$M_x$  y  $M_y$  son los momentos mayores, aplicados en uno u otro extremo de la columna, y  $M_{ucx}$  y  $M_{ucy}$  son los momentos resistentes en flexión, disminuidos por pandeo lateral por flexotorsión, cuando éste es crítico.

$$M_{ucx} = M_{ux} \left[ 1 - (P/P_u) \right] \left[ 1 - (P/P_{Ex}) \right]$$

$$M_{ucy} = M_{py} \left[ 1 - (P/P_u) \right] \left[ 1 - (P/P_{Ey}) \right]$$

$P_u$  es la carga crítica de pandeo inelástico de la columna ( $P_{cr}$  en la ec 4),  $P_{Ex}$  y  $P_{Ey}$  las de pandeo elástico,  $M_{ux}$  el momento plástico para flexión alrededor de x, reducido por pandeo lateral cuando sea necesario (ec 4'), y el exponente  $\eta$  vale

$$\eta = 0.4 + P/P_y + b_f/d \geq 1.0, \text{ cuando } b_f/d \geq 0.3$$

$$\eta = 1.0, \text{ cuando } b_f/d \leq 0.3$$

$b_f$  y  $d$  son el ancho del patín y el peralte de la sección I ó H .

Para utilizar las ecs 9 y 10 en el diseño de columnas de marcos no contraventados ("sway frames") deben determinarse los momentos producidos por la carga última por medio de un análisis de segundo orden en el que se incluye el efecto PA .

En la ref 4.30 se recomienda que cuando se utilicen las ecs 9 y 10 para determinar la resistencia de columnas en flexocompresión biaxial se tengan en cuenta las precauciones siguientes:

1. Las secciones deben dimensionarse de manera que las solicitaciones producidas por viento o sismo, que son reversibles, no ocasionen esfuerzos que sobrepasen el límite de fluencia nominal.
2. Las secciones deben dimensionarse de manera que las solicitaciones variables, ocasionadas por viento o sismo más carga vertical (con un factor de carga de 1.5 multiplicado por 0.7, o algo así, para tener en cuenta la probabilidad de ocurrencia) no ocasionen esfuerzos que excedan del límite de fluencia nominal del material.
3. Debe recordarse que el método se ha desarrollado suponiendo que no hay pandeo local prematuro (secciones compactas).

En la ref 4.16 se recomienda que la resistencia de las columnas en flexocompresión biaxial, ante fallas por inestabilidad, se determine con la ecuación

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_{mx} M_x}{M_{crx} (1 - P/P_{EX})} + \frac{C_{my} M_y}{M_{cyy} (1 - P/P_{EY})} \leq 1.0 \quad (11)$$

que es una extensión de la ec 4.

**COLUMNAS CARGADAS CICLICAMENTE.** La información experimental sobre el comportamiento de elementos flexocomprimidos cargados cíclicamente que se posee en la actualidad es todavía bastante reducida, y se limita a seccio

nes flexionadas alrededor de uno sólo de sus ejes centroidales y principales; se carece totalmente de información relativa a miembros en flexocompresión biaxial.

Se han ensayado espécimenes aislados de sección transversal H de los tipos que se muestran en la fig 4.17; en las experiencias reportadas en las refs 4.31 a 4.33 se ha utilizado la barra libremente apoyada con una carga aplicada en el centro del claro, y la pieza en voladizo con una fuerza horizontal en el extremo libre se ha empleado en las refs 4.34 y 4.35; en todos los casos la fuerza transversal Q se aplica cíclicamente mientras la normal P se mantiene constante, cambiando su intensidad de un ensaye a otro para determinar cómo influye en el comportamiento de la columna.

Los incrementos de fuerza axial (que se expresa en general en la forma adimensional  $P/P_y$ ) producen siempre un efecto desfavorable en la respuesta de la columna; si se evitan los desplazamientos laterales, la falla se inicia siempre por pandeo local de los patines, que crece en ciclos sucesivos de carga y se extiende eventualmente al alma; la combinación de las dos formas de pandeo local ocasiona el colapso del miembro, precedido por un retorcimiento alrededor del eje longitudinal.

Los resultados obtenidos en la ref 4.31 se resumen en la fig 4.18, en la que se muestra la relación entre las amplitudes de las deflexiones y el número de ciclos de carga que resiste la columna hasta la fractura, para dos valores de  $P/P_y$ ; cuando la fuerza axial crece disminuyen las amplitudes de las deflexiones y el número de ciclos que produce la falla.

En la ref 4.34 se muestra que la capacidad de rotación disminuye cuando aumentan las relaciones ancho/grueso de patines y alma, o cuando crece la fuerza axial mientras se conservan fijas esas relaciones.

Como los estudios sobre columnas sometidas a cargas cíclicas en el intervalo inelástico distan mucho de ser completos, y no se conoce la influencia de su comportamiento en la respuesta de entrepisos de marcos rígidos, el diseño de éstos se hace, como ya se ha mencionado, de manera que

las articulaciones plásticas se formen en las vigas mientras que las columnas se conservan básicamente en el intervalo elástico hasta el colapso (la única excepción la constituyen las articulaciones plásticas en sus bases), sin embargo, la respuesta real de una estructura sometida a la acción simultánea de cargas gravitacionales y sollicitaciones sísmicas es tan compleja que es imposible asegurar que durante temblores intensos no se formarán articulaciones plásticas en algunas columnas, aunque al hacer el diseño se haya tratado de evitarlas; varios son los factores que pueden ocasionar el comportamiento mencionado:

1. El diseño se hace siempre con las dimensiones de las secciones tabuladas en los manuales y tomando como base el esfuerzo de fluencia nominal del acero, y en los perfiles reales tanto éste como aquellas difieren, a veces sustancialmente, de los valores teóricos; como una consecuencia, las resistencias reales pueden ser bastante diferentes de las calculadas, y la combinación de un aumento de resistencia en una trabe con una disminución en la columna en que se apoya puede hacer que la articulación que teóricamente debería formarse en la primera aparezca en realidad en la segunda.
2. En el análisis y el diseño no suelen tenerse en cuenta las aceleraciones verticales de las masas del edificio, las que incrementan las fuerzas axiales en las columnas, con respecto a las calculadas, y hacen que disminuya su capacidad para resistir flexión.
3. Los efectos de los modos superiores de vibración, que suelen despreciarse, pueden también hacer que se formen articulaciones plásticas en algunas columnas.

Los factores mencionados son tan complejos y las incertidumbres ligadas con ellos tan grandes que no se puede tenerlos en cuenta explícitamente en el diseño, por lo que es importante reconocer la posibilidad de que se formen articulaciones plásticas en las columnas y prever el comportamiento correspondiente.

En la ref 4.36 se reportan los resultados obtenidos estudiando experimentalmente seis subconjuntos formados por una columna y las dos vigas que conectan en ella, semejantes a los de las refs 4.11, 4.12 y 4.37, sometidos a compresión constante y fuerzas horizontales cíclicas, cuyas vigas se sobrediseñaron deliberadamente para obligar a que las articulaciones plásticas se formasen en los extremos de las columnas; éstas se flexionan alrededor del eje de mayor momento de inercia en cuatro de los subconjuntos y del de menor en los otros dos. Tomando como base el número limitado de pruebas realizadas, se concluye que puede admitirse que se formen articulaciones plásticas en las columnas en las que  $P/P_y$  no excede de 0.5, ya que tienen un comportamiento satisfactorio, gracias en gran parte al endurecimiento por deformación, pero que deben evitarse cuando la fuerza axial excede de la mitad de  $P_y$ , pues se observó una disminución drástica de resistencia en especímenes con  $P/P_y$  de 0.6 y 0.8.

En la ref 4.10 se llega a conclusiones semejantes en dos marcos, en uno de los cuales las columnas se flexionan alrededor del eje x mientras que en el otro el eje de flexión fue el y; y las relaciones  $P/P_y$  fueron 0.26 y 0.41, respectivamente.

En todas las columnas de las estructuras estudiadas en las refs 4.10 y 4.36 se empleó una sección w8 x 48, que tiene relaciones ancho/grueso de 14.4 en los patines y 16.3 en el alma; la esbeltez  $L/r_y$  de las columnas de la ref 4.36 fue mucho menor que la máxima admisible para diseño plástico bajo carga estática, pero la de las columnas del marco de la ref 4.10 flexionadas alrededor de x fue de 52, valor no muy alejado del máximo admisible en secciones H de acero A36 bajo momento variable producido por carga estática, que es 63.2. Aunque la información reportada es limitada, parece indicar que las columnas con relaciones de esbeltez usuales en edificios, cuyos patines y alma cumplen las relaciones ancho/grueso especificadas para diseño plástico, deben tener un comportamiento adecuado en marcos sometidos a efectos sísmicos, e incluso admitir la formación y rotación de articulaciones plásticas, siempre que la fuerza de compresión no exceda de alrededor del cincuenta por ciento de  $P_y$ .

4.4.3 Conexiones. Las conexiones transmiten los elementos mecánicos, momentos flexionantes y fuerzas cortantes y normales, de las vigas a las columnas y viceversa, así como las fuerzas de las diagonales de contraventeo al marco propiamente dicho, con lo que se logra que todos los elementos de la estructura trabajen en conjunto. En este capítulo se considera únicamente el caso en que los marcos están provistos de juntas rígidas entre vigas y columnas, capaces de transmitir de una a otras los elementos mecánicos íntegros que hay en ellas, de manera que los únicos desplazamientos lineales o angulares relativos entre sus extremos son los debidos a las deformaciones de la conexión.

En la fig 4.19 se muestran tres tipos de conexiones viga-columna que se emplean comúnmente en marcos de edificios, correspondientes al nivel superior, a una columna lateral y a una interior.

Aunque casi todos los estudios que se han realizado hasta ahora corresponden a marcos planos con las vigas unidas a los patines de las columnas (se ha efectuado también un número reducido de pruebas de laboratorio con especímenes en los que llegan al alma), en estructuras reales casi siempre hay tres o cuatro vigas en cada conexión, que llegan a los patines y a los dos lados del alma, y que forman parte de los dos marcos planos que se cruzan en la columna.

Si la columna pasa corrida a través de la junta, que es lo más común en marcos de edificios, el diseño de la conexión consiste fundamentalmente en:

1. Proyecto de los medios de unión entre traveses y columna para transmitir a ésta los elementos mecánicos que hay en las secciones extremas de cada una de aquellas, utilizando soldadura o pernos de alta resistencia (los remaches no se usan en estructuras modernas); en juntas soldadas la unión puede realizarse en forma directa o por medio de placas soldadas a los patines, ángulos en el alma, etc.

2. Revisión de la columna para determinar si su resistencia y rigidez son adecuadas para soportar los elementos mecánicos que le transmiten las vigas.
3. Diseño, en su caso, de los refuerzos necesarios (atiesadores, placas adosadas al alma, etc).

El diseño de conexiones realizado de acuerdo con la práctica norteamericana (refs 4.15 y 4.16) se basa en los resultados reportados en la ref 4.38, en la que se determinan los factores que deben tenerse en cuenta, y la manera de satisfacerlos, para lograr un comportamiento satisfactorio de conexiones viga-columna de marcos rígidos con carga estática, diseñados plásticamente.

Se ensayaron conexiones de dos tipos, unas con dos vigas, soldadas a los patines de la columna, y otras con cuatro, que llegan a los patines y al alma. Las vigas se soldaron directamente a la columna en todos los casos, por que estas conexiones tienen ciertas ventajas económicas y funcionales y, además, al suprimir las placas en los patines y las ménsulas de asiento se eliminan algunas variables que dificultarían la determinación de esfuerzos y deformaciones en la zona de la conexión. Sin embargo, las fórmulas desarrolladas pueden utilizarse también cuando las fuerzas en los patines se transmiten a la columna por medio de placas.

Las vigas fueron iguales en todos los especímenes, trece en total, mientras que se variaron los perfiles de las columnas para simular las condiciones existentes en los niveles superiores, intermedios e inferiores; diez especímenes estuvieron formados por un tramo de columna y dos vigas soldadas a sus patines, y algunos de ellos se reforzaron con atiesadores horizontales colocados entre los patines de las vigas o con placas verticales adosadas al alma de la columna, o paralelas a ella, mientras que en otros no se colocó ningún refuerzo. Las cargas se aplicaron, en todos los casos, como se muestra en la fig 4.20, y se incrementaron lentamente hasta la falla.

Tres de los especímenes se hicieron con cuatro vigas, dos conectadas a uno y otro lado del alma de la columna, pero cada uno de ellos idéntico en todo lo demás a uno de los del primer grupo, pues su objeto fue determinar la influencia de las vigas que llega al alma; se encontró que las juntas del segundo tipo son más rígidas y resistentes que las del primero.

La compresión axial tuvo poca influencia en el comportamiento de las conexiones; las columnas no mostraron ningún indicio particular de falla bajo cargas de 1.65 veces la de trabajo, ni tampoco cuando al final de cada prueba se aumentaron al doble de las de trabajo, conservando al mismo tiempo las fuerzas finales en las vigas (las cargas de trabajo correspondieron a un esfuerzo axial medio de alrededor de  $1000 \text{ kg/cm}^2$ ; el acero empleado fue ASTM A7, con un límite de fluencia teórico de  $2320 \text{ kg/cm}^2$ ).

Una conexión es satisfactoria cuando puede desarrollar el momento plástico de las vigas mientras obra sobre la columna la compresión producida por las cargas correspondientes y tiene, además, capacidad de rotación suficiente para que se forme una segunda articulación plástica en la zona central de las vigas sin que disminuya su resistencia, o resistencia adecuada para permitir en la primera articulación las rotaciones necesarias para que aparezca la segunda.

Para determinar si el comportamiento es satisfactorio deben investigarse los puntos siguientes:

1. Resistencia de las regiones de la columna adyacentes a los patines en tensión y compresión de las vigas, cuando no se colocan atiesadores.
2. Aumento de la resistencia de la conexión debido a la presencia de atiesadores.
3. Posibilidad de falla de la columna ocasionada por una combinación de esfuerzos normales y cortantes.

4. Efecto sobre el comportamiento de la conexión del par de vigas ligadas al alma de la columna.
5. Rotación requerida en las conexiones y capacidad de giro de las mismas . . .

Del estudio de los resultados experimentales se deduce que puede apreciarse el efecto de la carga axial en la columna, y que se obtienen resultados conservadores analizando y diseñando las conexiones de cuatro vigas como si no existiesen las que llegan por alma, pues éstas proporcionan una acción atiesadora que refuerza la conexión más que lo que la debilitan los esfuerzos triaxiales que se desarrollan en ella.

El punto 5 se ha investigado analítica y experimentalmente, y aunque la rotación requerida varía con la geometría de la estructura y las condiciones de carga, se ha calculado una rotación tipo, mayor que la necesaria en la mayoría de los casos; todas las juntas ensayadas admiten rotaciones más grandes, bajo momento prácticamente constante. Además, si se le dá a la conexión la resistencia adecuada, la rotación necesaria para la formación del mecanismo de colapso se presenta en el extremo de la viga adyacente a ella.

En la fig 4.21a se muestran esquemáticamente los momentos y fuerzas existentes en una junta interior de un marco con cargas verticales, y en la fig 4.21b se sustituyen los efectos que ocasiona una de las vigas por las fuerzas que aplican sus patines a la columna; se desprecian las fuerzas que actúan en el alma, cuya importancia es secundaria.

Las fuerzas que transmiten los patines a la columna se reparten en un área cada vez mayor, de manera que la intensidad de los esfuerzos disminuye al aumentar la distancia a la cara exterior; puede considerarse que los esfuerzos normales se distribuyen como se muestra en la fig 4.21b, de manera que en la sección donde termina la curva de unión entre el patín y el alma de la columna cada una de las fuerzas es resistida por una porción del alma de longitud  $t_b + 5 k_c$ , donde  $t_b$  es el grueso del patín de la viga y  $k_c$

la distancia del exterior de la columna a la sección definida arriba.

Si el producto del esfuerzo de fluencia por el área  $w (t_b + 5 k_c)$ , donde  $w$  es el grueso del alma de la columna, es menor que la fuerza  $A_f \sigma_y$  que transmite uno de los patines de la viga cuando se plastifica su sección extrema ( $A_f$  es el área del patín), la columna fluye plásticamente en tensión o compresión frente a los patines de la viga; además, pueden presentarse fallas prematuras por pandeo del alma en la zona comprimida o por fractura de la soldadura del patín en tensión, como se muestra en la fig 4.22, en la que se ha dibujado la columna deformada, exagerando, para mayor claridad, la magnitud de las deformaciones.

Para evitar el flujo plástico del alma de la columna frente a cualquiera de los patines de la viga y la posible fractura en la zona de tensión, debe satisfacerse la condición

$$\sigma_y w (t_b + 5 k_c) \geq A_f \sigma_y \quad (12)$$

de manera que desde este punto de vista no hacen falta atiesadores si

$$w \geq A_f / (t_b + 5 k_c) \quad (13)$$

Si las vigas y la columna están hechas de aceros diferentes, sus esfuerzos de fluencia se conservan al pasar de la ec 12 a la 13.

Además, para evitar el pandeo de la zona comprimida del alma debe cumplirse también la condición expresada por la fórmula 14, ref 4.15:

$$w \geq d_c \sqrt{\sigma_y} / 150 \quad (14)$$

$d_c$  es el peralte del alma de la columna, medido entre los bordes de las curvas de transición.

La falla más común frente al patín de tensión suele producirse como se describe a continuación: el patín de la columna está compuesto por dos placas que pueden considerarse empotradas en tres de sus bordes, uno en contacto con el alma y dos normales a ella, a una distancia que se determina experimentalmente, y libre a lo largo del otro, cargadas con la fuerza existente en el patín de la viga, que permanece más o menos uniformemente repartida hasta que las placas alcanzan su resistencia última; cuando esto sucede los bordes exteriores de los patines se curvan hacia fuera, causando una deformación excesiva en la parte central de la soldadura, en la parte central del patín de la columna adyacente a ella y en su unión con el alma, y la falla se presenta eventualmente por agrietamiento de alguna de esas regiones, generalmente la soldadura, cuando se agota su capacidad de fluir plásticamente y no puede seguir la deformación de los patines.

La resistencia total del patín de la columna es aproximadamente igual a la suma de las resistencias de las dos placas y la parte central, rígida, de ancho  $m$  (fig 4.22), adyacente al alma; que admite esfuerzos de intensidad  $\sigma_y$ ; teniendo esto en cuenta y haciendo algunas hipótesis conservadoras, se obtiene una expresión con la que se calcula el grueso mínimo del patín de la columna para el que no se necesitan atiesadores:

$$t_c = 0.4 \sqrt{A_f} \tag{15}$$

El factor 0.4 se ha obtenido para secciones H laminadas, y puede requerir modificación cuando la ec 15 se aplique a perfiles hechos con tres placas soldadas.

En resumen, no se necesitan atiesadores frente a los patines comprimidos de las vigas si se satisfacen simultáneamente las ecuaciones 13 y 14,

ni frente a los que están en tensión si se cumple la condición (13) y el grueso del patín de la columna es igual o mayor que el dado por la ec 15; en caso contrario deben colocarse atiesadores de las dimensiones necesarias para que su resistencia, sumada a la de la columna, iguale a la fuerza aplicada por la viga.

Quando los momentos en las dos vigas de una conexión interior son de signos contrarios, y de magnitudes considerablemente diferentes, o cuando son del mismo signo, como sucede en los niveles inferiores de edificios sometidos a efectos sísmicos, aparecen esfuerzos cortantes elevados en el tablero de alma de la columna comprendido entre los patines de las vigas, que pueden hacer que sea necesario reforzarlo.

En la fig 4.23a se muestran los momentos y fuerzas cortantes y normales que actúan en una conexión interior típica, y en la fig 4.23b se ha dibujado el diagrama de cuerpo libre del atiesador superior; las fuerzas horizontales que obran sobre él son la fuerza cortante en la columna superior,  $V_{col}$ , las que ejercen los patines de las vigas,  $T_b$  y  $T_c$ , que son aproximadamente iguales a los momentos respectivos divididos entre el peralte, y la fuerza cortante en el alma,  $\tau w d_c$ , que debe resistir a las anteriores.

Por consiguiente:

$$\tau w d_c = \frac{M_b}{d_b} + \frac{M_c}{d_b} - V_{col}$$

Haciendo  $\tau = \tau_y = \sigma_y / \sqrt{3}$  y despejando  $w$  se obtiene el grueso del alma necesario para resistir las fuerzas cortantes:

$$w = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y d_c} \left( \frac{M_b + M_c}{d_b} - V_{col} \right) \quad (16)$$

Quando el grueso del alma de la columna es menor que el calculado con la ec 16, debe reforzarse por medio de placas adosadas o paralelas a ella o con atiesadores en diagonal.

Si la columna es extrema, los momentos  $M_b$  y  $M_c$  se reducen a uno sólo.

En el comentario de la ref 4.15 se recomienda que el grueso mínimo del alma para el que todavía no se requiere refuerzo se calcule con la ecuación

$$w = \frac{\sqrt{3}}{0.95} \frac{\Delta M}{d_b \times 0.95 d_c} \tag{17}$$

Se obtiene espesores 20 a 30 por ciento mayores que con la ec 16, debido a que en la ec 17 se incluyen factores de 0.95 en los peraltes de viga y columna y no se tiene en cuenta el efecto benéfico de la fuerza cortante en la columna.

Estudios posteriores han confirmado que las reglas propuestas en las especificaciones AISC (ref 4.15), que son las que se acaban de desarrollar (con excepción de la ec 16, que proviene de la ref 4.16), son adecuadas para diseñar conexiones completamente soldadas, o con soldadura en los patines y ménsulas o placas verticales soldadas a la columna y ligadas al alma de la viga con pernos de alta resistencia, cargadas estáticamente; en la ref 4.39, por ejemplo, se comprueba que las conexiones diseñadas así pueden utilizarse en diseño plástico, pues permiten que se alcance la carga plástica límite de las vigas y tienen rigidez elástica adecuada y capacidad de rotación suficiente.

CONEXIONES VIGA-COLUMNA CARGADAS CICLICAMENTE. Para determinar el comportamiento bajo solicitaciones sísmicas de los diversos medios de unión que se utilizan en conexiones viga-columna, se han efectuado experiencias de laboratorio con vigas en voladizo ligadas en un extremo a una columna y sometidas en el otro a cargas normales a su eje, de magnitud y sentido variables, aplicadas cíclicamente; las uniones se han hecho con soldadura, pernos de alta resistencia o una combinación de ambos, y en las columnas se han utilizado perfiles de resistencia suficiente para que no haya fallas en ellas; en la mayoría de los casos la viga se ha conectado a un patín de la columna, pero en algunos la conexión se ha hecho por el alma (refs 4.9, 4.40, 4.41 y 4.42).

Se ha estudiado también el comportamiento del tablero de columna comprendido entre los patines de las vigas, en los subconjuntos sometidos a cargas cíclicas de las refs 4.11, 4.12, 4.36 y 4.37.

En la ref 4.9 se reportan los resultados obtenidos al ensayar 17 especímenes de los tipos mostrados en las figs 4.24 y 4.25 y 6 especímenes en los que la viga se conecta al alma de la columna.

Las conexiones en que los patines y el alma de la viga están soldados directamente a la columna, los primeros con soldaduras de penetración completa y la segunda con soldaduras de filete, fueron las más satisfactorias.

Se ensayaron además ocho especímenes adicionales, todos con los patines soldados directamente a la columna, dos de ellos con el alma también soldada, cinco con el alma unida por medio de pernos de alta resistencia y uno sin ninguna liga entre el alma de la viga y la columna (refs 4.40 y 41); los especímenes con pernos tuvieron por objeto determinar el comportamiento de este tipo de juntas, que se emplean con alguna frecuencia en estructuras reales, y el último, en el que no se conectó el alma de la viga, tuvo un carácter exploratorio.

Las conclusiones generales que se obtienen de las experiencias descritas son:

1. Todas las conexiones, incluyendo la que no se soldó en el alma\* desarrollaron resistencias superiores a las predichas por la teoría plástica simple, al mismo tiempo que transmitían fuerzas cortantes importantes; el endurecimiento por deformación contribuye significativamente a ese comportamiento muy satisfactorio

---

\* Esto difiere del comportamiento de una conexión semejante reportada en la ref 4.39 la que, bajo carga estática exclusivamente, resistió solamente el 51 por ciento de la carga máxima predicha por la teoría plástica simple; aunque un solo espécimen no es concluyente, este resultado parece señalar que las juntas cargadas cíclicamente tienen un comportamiento superior al de otras iguales con carga estática.

2. Los diagramas histeréticos carga-deflexión producidos por cargas repetidas son muy estables en todas las juntas ensayadas, y se conservan sin cambio durante ciclos consecutivos de la misma intensidad, lo que indica que las conexiones son muy confiables y absorben una cantidad definida de energía en cada ciclo, para un desplazamiento prescrito (figs 4.26 y 4.27).
3. Las curvas histeréticas de los especímenes conectados con pernos de alta resistencia en patines y alma tienen una forma característica (fig 4.28), ocasionada por el deslizamiento de las superficies de falla. También deslizaron los pernos colocados en el alma de juntas con patines soldados.
4. La capacidad de soportar cargas cíclicas severas parece asegurada en conexiones debidamente diseñadas y fabricadas; su capacidad intrínseca de absorción de energía es grande, y pueden resistir con seguridad adecuada un número de ciclos de carga aparentemente mayor que el que puede esperarse durante la vida útil de estructuras reales.
5. La calidad de la mano de obra y la inspección durante y después de la fabricación son de importancia fundamental para obtener buenos resultados; esto fue puesto en evidencia por la falla prematura de dos especímenes con soldaduras defectuosas.

COMPORTAMIENTO DE LA ZONA DE LA COLUMNA COMPRENDIDA ENTRE LAS VIGAS ("PANEL ZONE") (refs 4.11, 4.12 y 4.42). La falla de una junta viga-columna puede deberse a aplastamiento o pandeo del alma de la columna, a distorsión de sus patines o a flujo o pandeo por cortante del tablero del alma. Ya se han dado recomendaciones para diseño que evitan las tres primeras formas de falla; aunque deducidas para carga estática, se ha comprobado experimentalmente que las conexiones diseñadas de acuerdo con ellas tienen un comportamiento satisfactorio bajo carga cíclica. En lo que sigue se estu

dia la última forma de falla, y se dan recomendaciones de diseño para lograr un comportamiento correcto, desde ese punto de vista, en estructuras cargadas cíclicamente.

La respuesta de una junta viga-columna de un marco rígido sometido a la acción combinada de fuerzas verticales y horizontales queda representada adecuadamente por un diagrama  $\Delta M - \gamma^{\text{av}}$ , donde  $\gamma^{\text{av}}$  es la distorsión angular media de la conexión y  $\Delta M$  es la suma de los momentos que le transmiten las dos vigas, o la única que llega a la junta en columnas extremas.

La complejidad del problema hace que sea necesario recurrir a simplificaciones para trazar la curva mencionada, conservando únicamente los parámetros más importantes: resistencia al cortante del tablero, incluyendo placas de refuerzo paralelas al alma de la columna cuando las haya, resistencia de los elementos que rodean al tablero (la resistencia a la flexión de los patines de la columna y la rigidez en el plano de las almas de las vigas juegan un papel muy importante en el comportamiento post-elástico de las juntas), efectos benéficos de las fuerzas cortantes en las columnas, que tienen sentido contrario a las producidas por los momentos de las vigas, y efecto de la carga axial en la columna.

No se ha estudiado la influencia de los elementos de unión en el comportamiento del tablero de alma, pues todos los especímenes ensayados se han fabricado con las vigas soldadas a las columnas, en alma y patines.

En las refs 4.11 y 4.12, en las que se reportan los resultados obtenidos al ensayar ocho subconjuntos formados por una columna y dos vigas, sujetos a cargas cíclicas representativas de temblores severos, se estudia en detalle el comportamiento de los tableros de alma; en todas las conexiones se evitó el aplastamiento del alma de la columna y la distorsión de sus patines diseñándolas según las recomendaciones de las refs 4.15 y 4.16, y colocando atiesadores horizontales cuando se necesitaron de acuerdo con ellas; el comportamiento de todas las juntas demostró, como se mencionó arriba, que las recomendaciones indicadas son válidas para estructuras

cargadas cíclicamente, aunque se dedujeron originalmente para carga estática.

En dos especímenes de características representativas de los pisos superiores se revisó el tablero de alma utilizando el criterio basado en esfuerzos permisibles; de acuerdo con él no se necesitaron refuerzos en el alma, pero sí atiesadores entre los patines superiores e inferiores de las vigas. Debido a distorsiones importantes del alma de la columna por cortante inelástico no se pudieron formar las articulaciones plásticas de las vigas, lo que hizo que la resistencia lateral de los especímenes fuese baja, pues la junta constituyó un eslabón débil. Otros dos especímenes semejantes, reforzados con placas adosadas al alma de la columna o paralelas a ella, tuvieron un comportamiento satisfactorio.

Los otros cuatro subconjuntos, característicos de niveles bajos, en los que la rigidez y resistencia de las columnas son grandes respecto a las de las vigas, no requirieron refuerzos de ningún tipo, y las vigas pudieron desarrollar su momento plástico completo.

Las deformaciones excesivas del tablero de alma de las dos primeras conexiones ocasionaron un cambio brusco en la curvatura de la columna al nivel de los atiesadores horizontales, que produjo a su vez dobleces locales en los patines acompañados por concentraciones de esfuerzos elevadas, que llevaron a una fractura del material (fig 4.29).

En la fig 4.30 se reproducen diagramas histeréticos típicos de dos de las juntas; la A1 pertenece a un subconjunto representativo de un nivel superior, y la B1 a uno inferior; se ve en ellos que las conexiones son elementos muy dúctiles y con una gran reserva de resistencia por encima de la iniciación del flujo plástico, que la disminución de rigidez en el intervalo inelástico es pequeña y gradual, y que los ciclos histeréticos son muy estables, aún para distorsiones grandes. Todo esto indica que las juntas detalladas cuidadosamente, en las que se evita el aplastamiento del alma y la distorsión de los patines de la columna por medio de atiesadores adecuados, y en las que todas las soldaduras se hacen correctamente, son elementos con gran capacidad de disipación de energía.

Los experimentos muestran claramente que para desarrollar la capacidad total de carga del subconjunto es indispensable que la resistencia de la junta sea igual o mayor que la requerida para desarrollar la capacidad total de las vigas; sin embargo, conviene hacer el diseño de manera que haya cierta deformación plástica en las juntas mientras los miembros que llegan a ellas alcanzan su capacidad última, ya que es preferible que se presenten deformaciones plásticas reducidas en varios elementos estructurales a que se concentren en uno sólo; si las conexiones se hacen demasiado rígidas se obliga a que toda la deformación plástica se presente en las vigas, y su capacidad de rotación puede agotarse antes de tiempo, a menos que las relaciones ancho/grueso de patines y alma sean muy reducidas y las secciones soportadas lateralmente están muy cerca unas de otras.

En las refs 4.11 y 42 se propone la ec 18 para determinar el esfuerzo cortante medio en el tablero de alma:

$$\tau_{av.} = \frac{(\Delta M/d_b) (1 - \rho)}{(d_c - t_c) w + 62.4 I_{cf}/d_b^2} \quad (18)$$

$\rho = V_{col.} d_b/\Delta M$  corresponde a la acción benéfica de la fuerza cortante en las columnas, arriba y abajo de la junta, y los dos términos del denominador representan las resistencias al cortante del tablero y a la flexión de los patines de la columna; el segundo término es generalmente pequeño comparado con el primero, pero tiene cierta importancia cuando los patines de la columna son gruesos. Se recomienda hacer  $\Delta M$  igual a la suma de los momentos plásticos resistentes de las dos vigas, para garantizar que se alcanzará la resistencia máxima de los miembros individuales antes de que haya una falla de la junta.

El efecto de la fuerza axial se tiene en cuenta, con buena precisión, calculando un esfuerzo de fluencia por cortante reducido, dado por

$$\bar{\tau}_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_y}\right)^2} \quad (19)$$

De acuerdo con los estudios efectuados hasta ahora, esta ecuación es aplicable para  $P/P_y \leq 0.5$ .

Si  $\tau_{av}$  es menor o igual que  $\bar{\tau}_y$  no hay flujo plástico general del tablero y no hace falta reforzarlo; en caso contrario, deben colocarse placas adosadas al alma o paralelas a ella, que resistan el exceso de fuerza cortante.

4.5 DISEÑO DE MARCOS RIGIDOS. No se puede determinar la cantidad de energía que deberá absorber y disipar una estructura durante el temblor más intenso a que quedará sometida durante su vida útil, ni se sabe el número de ciclos de carga y descarga que tendrá que resistir; tampoco puede conocerse con exactitud la capacidad de rotación requerida en sus articulaciones plásticas ni, en general, el factor de ductilidad que deberá desarrollar cada uno de sus miembros.

En esas condiciones, la información con que se cuenta sobre la ductilidad y capacidad de absorción de energía de elementos aislados, vigas, columnas y conexiones, o de subconjuntos o marcos completos, no puede utilizarse en forma directa en el diseño. Sin embargo, sí se pueden diseñar las estructuras de manera que su respuesta ante sollicitaciones sísmicas intensas sea la más adecuada, a la que correspondan la resistencia y capacidad de absorción de energía máximas posibles.

Para ello, cualquiera que sea el método de análisis y diseño, elástico o plástico, los perfiles de vigas y columnas deben escogerse de manera que tengan capacidad de rotación elevadas, y las juntas diseñarse para que no constituyan eslabones débiles; además, se buscará en general que las articulaciones plásticas ligadas con el mecanismo de colapso se formen en las vigas (con excepción de las que aparecen en las bases de las columnas), aunque se tomarán las medidas necesarias para que los extremos de las columnas puedan admitir rotaciones plásticas importantes sin que disminuya su resistencia.

Así, en estructuras en zonas sísmicas no se utilizarán, por ejemplo, traves armadas aperaltadas formadas por placas delgadas, aunque desde un punto de vista elástico sean muy eficientes.

En todos los casos deben calcularse los desplazamientos relativos de entrepiso producidos por las sollicitaciones de trabajo y la resistencia máxima de la estructura, para saber si los primeros no ocasionan daños excesivos en elementos no estructurales y conocer el coeficiente de seguridad respecto al colapso.

Una manera conveniente de estudiar el comportamiento de una estructura bajo cargas de trabajo y cerca del colapso es utilizando un método elasto-plástico para determinar las curvas completas fuerza horizontal-desplazamiento correspondientes a los perfiles obtenidos en un diseño preliminar. Se cuenta con varios programas de computadora, algunos muy completos, para resolver el problema; sin embargo, hasta la fecha se han utilizado principalmente procedimientos simplificados, en los que la estructura se descompone en varios subconjuntos sencillos y relativamente fáciles de analizar, y se obtiene su respuesta como la suma de las de esos subconjuntos (refs 4.43 a 4.45).

El método aproximado que más se ha utilizado, y que tiene probablemente más ventajas, es el de las refs 4.44 y 4.45, con el que se determinan las curvas fuerza horizontal-desplazamiento lateral de entrepisos aislados de marcos rígidos; para ello se separa del resto de la estructura el entrepiso que se desea estudiar, sustituyendo las columnas superiores por sus acciones sobre los nudos, se descompone en una serie de subconjuntos, formados por una columna y la viga o vigas que llegan a ella, se obtiene la curva fuerza horizontal-desplazamiento de cada subconjunto y, finalmente, se superponen para determinar la del entrepiso completo.

En la forma en que se suele emplear, el método descrito subestima el efecto PA, pues en el cálculo de los desplazamientos laterales no se tienen en cuenta las deformaciones de las juntas; no es difícil incluirlas, sin

embargo, ya sea efectuando un estudio preciso (ref 4.46) o incrementando los desplazamientos  $\Delta$  calculados en forma usual en un cierto porcentaje, que depende de la rigidez al cortante de las juntas.

Si en el diseño de vigas, columnas y conexiones, se tienen en cuenta los aspectos discutidos en las secciones anteriores, en lo que se refieren a relaciones ancho/grueso, contraventeo lateral, refuerzo de las conexiones, etc, el comportamiento bajo solicitaciones sísmicas de los marcos diseñados siguiendo este camino es satisfactorio, como lo demuestran los resultados experimentales reportados.

En las refs 4.10 a 4.12, 4.36 y 4.37, se comprueba que los subconjuntos y marcos completos diseñados de acuerdo con las normas AISC para diseño plástico, y hechos con juntas viga-columna totalmente soldadas, son sumamente dúctiles y pueden admitir deformaciones inelásticas muy importantes cuando están sometidos a desplazamientos laterales repetidos y de sentido variable; además, su resistencia máxima bajo cargas verticales constantes y horizontales cíclicas excede considerablemente la que tienen cuando las fuerzas horizontales crecen monotónicamente, lo que se debe principalmente al endurecimiento por deformación y al efecto  $P\Delta$  (ref 4.47). Por ejemplo, tres de los marcos de la ref 4.10 experimentaron deformaciones inelásticas 14 veces mayores que las producidas por las cargas de trabajo, que corresponden a un índice nominal de desplazamiento ("*nominal drift index*") de 0.043. En la ref 4.11 se recomienda que el diseño se haga de manera que aún bajo temblores extremos los índices de desplazamiento ("*story drifts*") permanezcan por debajo de 0.03, para evitar problemas de inestabilidad producidos por el efecto  $P\Delta$ ; para ello se sugiere que tanto las vigas como las columnas que concurren en cada nudo sean capaces de resistir el momento total que hay en él aumentado en  $0.03 Ph$ , donde  $P$  es la fuerza de compresión en la columna y  $h$  su altura, y se recomienda que se eviten relaciones  $P/P_y$  demasiado altas.

Los ciclos histuréticos carga lateral-desplazamiento son sumamente reproducibles, aún para desplazamientos mucho mayores que los que corresponden a la carga máxima.

Es una práctica común limitar los desplazamientos de entrepiso, bajo condiciones de servicio, a valores comprendidos entre 0.0025 y 0.003 h, que se pueden incrementar en 30 por ciento, aproximadamente, cuando en los desplazamientos calculados se incluyen las deformaciones de las juntas: los desplazamientos reales suelen ser menores, pues en los cálculos no se incluye generalmente el efecto rigidizador de elementos no estructurales como cubos de escaleras, muros divisorios, etc, ni la influencia de las losas u otros sistemas de piso.

Cuando el piso es una losa de concreto u otro sistema rígido y resistente, conviene diseñarlo y construirlo para que trabaje en conjunto con las vigas; se logra así que aumente la rigidez del sistema y disminuyan los desplazamientos laterales, al mismo tiempo que crece la resistencia de las vigas, cuando menos en algunas secciones.

Al reconocer el trabajo de conjunto de las trabes y el sistema de piso se obtienen estructuras más económicas y se llega a una descripción más realista de su comportamiento; por ejemplo, cambia la posición de algunas articulaciones plásticas, que pueden incluso formarse en las columnas en vez de en las vigas, como parecería si se tomase en cuenta únicamente la resistencia y rigidez de los elementos de acero (ref 4.48).

4.6 CONTROL DE DESPLAZAMIENTOS. ("DRIFT CONTROL"). Cualquier control razonable de los desplazamientos de entrepiso evita la falla por inestabilidad de conjunto, aún en el intervalo inelástico, al limitar la intensidad de los momentos  $P\Delta$ ; sin embargo, suele necesitarse un control más estricto para asegurar la integridad de las conexiones y minimizar los daños no estructurales. La conservación de los desplazamientos laterales máximos por debajo de ciertos límites es, pues, esencial para lograr un comportamiento adecuado de cualquier edificio, y al efectuar el diseño debe tenerse en cuenta que la manera en que se controlan los desplazamientos es fundamental

para obtener soluciones económicas y eficientes estructuralmente.

Los desplazamientos laterales de entrepiso son producidos por cinco factores principales:

1. Deformación, por flexión y cortante, de las columnas (fig 4.31a)
2. Rotación de los nudos, producida por las deformaciones elásticas e inelásticas de las vigas y de los medios de unión entre ellas y las columnas (fig 4.31b)
3. Distorsiones del tablero de las juntas (fig 4.31c)
4. Flexión de conjunto de la estructura, como un resultado de los cambios de longitud de las columnas
5. Rotación del edificio como un conjunto.

En el cálculo de los desplazamientos debe incluirse el efecto  $PA$ , tanto bajo condiciones de trabajo como cerca del colapso.

En la fig 4.32, tomada de la ref 4.37 se muestran los desplazamientos totales de las columnas de dos subconjuntos, y se indican las contribuciones de los tres primeros factores al desplazamiento (el cambio de longitud de la columna no influye en las deformaciones de los subconjuntos ensayados en la referencia mencionada). Las contribuciones  $\Delta_c$ , producidas por la deformación de las columnas, son muy pequeñas porque los especímenes ensayados se diseñaron de manera que las columnas se conservasen en el intervalo elástico durante todo el proceso de carga, en A2, que corresponde a un nivel superior y cuya conexión se diseñó elásticamente, predominan los desplazamientos ocasionados por la deformación de la junta, mientras que en B2, tomado de un nivel inferior, en el que el grueso del alma de la columna es mucho mayor, los desplazamientos más importantes son los producidos por las deformaciones de las vigas.

En los especímenes ensayados en la ref 4.12 se manifiesta la misma tendencia que en B2, lo que indica que la importancia de los desplazamientos ocasionados por las deformaciones de las juntas disminuye drásticamente cuando

do se diseñan de manera que se satisfagan las condiciones expresadas por las ecuaciones 18 y 19.

Si las juntas no están atiesadas correctamente se producirán deformaciones del alma y los patines de las columnas, frente a los patines de las vigas, que sumadas a las deformaciones por cortante harán que aumenten todavía más los desplazamientos de los entrepisos.

Para controlar económicamente los desplazamientos laterales debe estudiarse cuál de las componentes puede disminuirse más con la menor cantidad de material y mano de obra adicional. Como los desplazamientos laterales son generalmente casi proporcionales a los cocientes  $L/EI$  de las vigas, suele ser más eficiente reducir los desplazamientos debidos a las deformaciones de las vigas que los ocasionados por las columnas, pero al hacerlo debe tenerse en cuenta que el aumento de resistencia de las vigas puede ser causa de que cuando se exceda la resistencia elástica de la estructura las articulaciones plásticas se formen en las columnas, lo que no suele ser conveniente.

Si se necesita reforzar los tableros de alma de las juntas para reducir su deformación, puede ser económico utilizar columnas más pesadas, con almas más pesadas, con almas más gruesas, o colocar placas de refuerzo.

Una de las variables más importantes en el control de los desplazamientos laterales es el número de columnas que resisten la fuerza cortante total en cada entrepiso; si se aumentan las columnas también las juntas, pero cada una de ellas requiere menos soldadura, pues los patines de las vigas resultan más delgados; además, al aumentar la cantidad de columnas se reduce la longitud de las trabes y disminuye la componente del desplazamiento debida a sus deformaciones. Estas consideraciones llevan a las estructuras tabulares, con muchas columnas, muy juntas, en el perímetro, ligadas entre sí por vigas cortas y aperaltadas, como una solución adecuada para edificios altos en zonas sísmicas.

En edificios de altura intermedia puede lograrse un control adecuado de los desplazamientos utilizando marcos contraventeados o muros de rigidez.

4.7 CONTRAVENTEEO. Las estructuras construídas en zonas sísmicas tienen que satisfacer, entre otros, dos requisitos fundamentales: los desplazamientos relativos de entrepiso producidos por sismos de intensidad moderada no deben sobrepasar ciertos límites, y su resistencia máxima tiene que ser la necesaria para que soporten sismos de intensidad elevada sin fallar ni sufrir daños estructurales excesivos; para ello se requiere que se satisfagan dos condiciones, una de rigidez bajo cargas de trabajo y otra de resistencia y capacidad de absorción de energía.

En estructuras formadas por marcos rígidos ordinarios es difícil satisfacen los dos requisitos simultáneamente, pues si se refuerzan hasta que los desplazamientos de entrepiso bajo cargas de trabajo queden dentro de límites admisibles se obtienen resistencias mucho mayores que las necesarias (ref 4.48).

La rigidez lateral aumenta de una manera económica, sobre todo en edificios de altura media, colocando contraventeos en un cierto número de marcos, compatibles con los requisitos arquitectónicos y funcionales (por ejemplo, en los marcos extremos en que haya muros y en el perímetro del área de elevadores, escaleras y baños); los marcos restantes se apoyan en los contraventeados a través de los diafragmas horizontales constituídos por los sistemas de piso. Conviene que los contraventeos se coloquen en toda la altura, ininterrumpidamente, y pueden estar formados por elementos en X, en K o con alguna otra configuración.

Para fines de diseño, los marcos contraventeados se suelen tratar como si estuviesen formados por dos sistemas separados: un marco rígido ordinario, que soporta las cargas permanentes, y un sistema vertical de contraventeo que trabaja como una armadura y resiste las cargas horizontales, al mismo tiempo que proporciona la rigidez necesaria para evitar la inestabilidad de conjunto; las vigas y columnas de las crujiás contraventeadas son comunes a los dos sistemas. El contraventeo se suele diseñar como una armadura vertical con articulaciones en los nudos, que debe resistir las fuerzas horizontales más el efecto PA, así como proporcionar rigidez adecuada bajo cargas de trabajo y evitar el pandeo de conjunto cuando actúan sobre la estructura las cargas verticales factorizadas.

En la ref 4.16 se estudia el contraventeo en X y se proporcionan fórmulas para determinar el área de las diagonales, de manera que satisfagan las condiciones mencionadas, y en la ref 4.49 se resuelve el mismo problema para contraventeo en K ; en las dos referencias se utilizan fuerzas estáticas horizontales equivalentes a las solicitaciones producidas por viento o sismo, y en ninguna de ellas se estudian efectos dinámicos.

Para determinar la respuesta sísmica de un marco contraventeado por su perposición de la del marco propiamente dicho y la de los elementos de contraventeo se necesita conocer el comportamiento de éstos, por lo que se han realizado experiencias de laboratorio con barras rectas sometidas a tensiones y compresiones alternadas.

En la fig 4.33 se describe el comportamiento de una barra de esbeltez moderada, articulada en los dos extremos, con una fuerza axial que es inicialmente de tensión, cambia a compresión, y vuelve a ser finalmente de tensión; para trazar la curva se supone que la barra se pandea cuando la compresión alcanza el valor predicho por la teoría de Euler,  $P_{CR}$ , o el límite plástico,  $P_y$ .

Al aplicar una tensión creciente la barra se alarga elásticamente desde el origen hasta 1, y bajo carga  $P_y$  constante hasta 2; después de este punto empieza a disminuir la tensión axial, que llega a cero y se convierte en compresión. El miembro se conserva recto hasta que se pandea elásticamente en 3, y se deforma lateralmente hasta que aparece una articulación plástica en el centro, producida por la acción combinada de la fuerza normal  $P$  y el momento  $P\delta$ . Los acortamientos posteriores ocasionan aumentos de los desplazamientos laterales y disminución de la fuerza axial necesaria para que la articulación siga girando, curva 4-5; en 5 cambia la dirección de la deformación axial, y el miembro actúa elásticamente hasta llegar a 6, donde la fuerza axial y el momento se anulan, pero subsiste una deformación axial residual debida a que el eje no recupera la forma recta inicial. Al volver a aplicar fuerzas de tensión aumentan los momentos en la barra hasta que se forma de nuevo la articulación plástica, punto 7, ahora en flexotensión, que gira mientras la pieza continúa enderezándose, y crece la ten

si3n hasta regresar eventualmente al punto 2.

El comportamiento determinado experimentalmente concuerda bastante bien con el que se acaba de describir, como lo demuestran las curvas de la fig 4.34, que se han obtenido con una barra sometida a ciclos consecutivos de fuerzas alternadas de tensi3n y compresi3n, en los que se mantienen constantes las deformaciones (ref 4.51).

Las experiencias realizadas con miembros aislados indican que la fuerza de compresi3n m3xima (carga de pandeo) disminuye al aumentar el n3mero de ciclos, que los miembros cortos tienen mayor capacidad de absorci3n de energ3a que los largos y que la respuesta hister3tica es casi igual a la est3tica (refs 4.51 a 4.53).

En la ref 4.54 se demuestra que los resultados predichos anal3ticamente y los obtenidos experimentalmente concuerdan bastante bien en los primeros ciclos de carga, excepto en las regiones en que las fuerzas de tensi3n y compresi3n son m3ximas; adem3s, la precisi3n de los m3todos anal3ticos disminuye en ciclos subsecuentes, a causa, aparentemente, de las dificultades para tomar en cuenta los cambios de longitud del espec3men; esto hace pensar que tal vez sea conveniente desarrollar relaciones fuerza-deformaci3n emp3ricas.

En este campo se necesita considerable trabajo experimental y anal3tico adicional.

Se han efectuado tambi3n estudios sobre contraventeos compuestos por dos diagonales cruzadas (ref 4.55) y sobre marcos de un piso y una cruj3a provistos de contravientos de distintos tipos, con carga vertical constante y horizontal c3clica, refs 4.56, 4.57 y 4.60, para comparar su respuesta con la de marcos similares no contraventeados y determinar las soluciones m3s eficientes; las relaciones carga-deformaci3n propuestas para contraventeos sencillos pueden aplicarse a los dobles, o a marcos contraventeados, aplicando el m3todo de superposici3n.

Finalmente, se cuenta con algunas investigaciones analíticas (refs 4.58, 4.59), en las que se ha determinado la respuesta elasto-plástica de marcos contraventeados de varios pisos, sometidos a registros de temblores reales; se ha encontrado que en general experimentan desplazamientos menores y menos actividad plástica en vigas y columnas que los no contraventeados, y que las diagonales diseñadas con los métodos recomendados en los códigos resultan demasiado esbeltas y fluyen antes que las vigas, de manera que los marcos contraventeados diseñados en forma usual son muy eficientes para resistir las fuerzas estáticas especificadas en los códigos, pero tienen una capacidad de absorción de energía reducida. Para contrarrestar parcialmente esas desventajas es frecuente que se especifique que las diagonales se diseñen con fuerzas mayores que las calculadas (ref 4.63).

Para que los marcos contraventeados tengan capacidad de absorción de energía adecuada debe hacerse un diseño balanceado, que produzca estructuras en las que contraventeos y vigas entren simultáneamente en el intervalo inelástico, con lo que se obtienen las ventajas del contraventeo, mayor rigidez y resistencia con costo reducido, mientras se conserva una capacidad de absorción de energía elevada. Al efectuar el diseño de esta manera los elementos de contraventeo resultan mucho más robustos que los que se obtienen al aplicar las reglas de las refs 4.15, 4.16 y 4.49.

Para incrementar la capacidad de absorción de energía del sistema se ha propuesto introducir excentricidades calculadas en las uniones de las diagonales, de manera que entre ellas y las columnas queden tramos de viga libres, sometidos predominantemente a flexión, en los que se forman articulaciones plásticas. Todavía no se ha utilizado este método en estructuras reales, aparentemente, pero se han efectuado estudios analíticos bastante completos y algunos experimentales, que indican que el concepto es prometedor (refs 4.61, 4.62).

4.8 DIAFRAGMAS. En algunos edificios construídos en los últimos tiempos en el Reino Unido y en los U.S.A. se ha utilizado la lámina de acero acanalada en fachadas y muros divisorios interiores pues presenta ventajas estéticas, de ligereza, economía y facilidad de construcción.

A menos que se tomen precauciones especiales para desligarlos, la de formación de los cancelos de lámina durante un temblor debe ser compatible con la de la estructura, de manera que reciben una parte de las sollicitaciones sísmicas proporcional a su rigidez.

Como la distancia entre columnas suele ser mayor que altura de entre piso, las láminas se colocan con las canales en posición vertical, para que resistan las fuerzas normales a su superficie, producidas por el viento, por ejemplo, trabajando en el sentido corto. La conexión con las vigas y columnas de la estructura se hace por medio de elementos perimetrales diseñados para transmitir fuerzas cortantes en el plano del tablero, mientras se reduce a un mínimo la transmisión de fuerzas verticales, para evitar el pandeo por compresión de la lámina de acero. En la fig 4.35 se muestra un cancel de lámina, en elevación, y un posible detalle de liga con la viga superior, que trabaja de la manera deseada.

El tablero de lámina se liga a los miembros perimetrales por medio de soldaduras de fillete colocadas entre la canal y los elementos planos de la lámina, a uno y otro lado de ésta (o de un solo lado si se emplean ángulos como elementos perimetrales), y las láminas se unen entre sí con soldaduras verticales.

Para valuar la contribución de los cancelos de lámina a la respuesta sísmica del edificio se necesita contar con métodos para obtener su rigidez y resistencia, de manera que se puedan calcular las fuerzas sísmicas que actuarán en ellos y determinar si pueden soportarlas con un coeficiente de seguridad adecuado contra la falla; como sucede siempre en diseño sísmico, las dos propiedades deben estar adecuadamente balanceadas, para obtener los beneficios máximos sin poner en peligro la estabilidad del elemento.

Se han efectuado estudios teóricos y experimentales para determinar la rigidez y resistencia de los tableros de lámina acanalada (refs 4.64 a 4.67).

La flexibilidad de un diafragma completo es la suma de las flexibilidades debidas a la distorsión de las canales de la lámina, a la deformación por cortante del diafragma y a los movimientos y deformaciones de los elementos de liga con las vigas y columnas del marco, y de las soldaduras que ligan las diferentes láminas entre sí; la falla puede presentarse por desgarramiento de la lámina en las uniones de los bordes, ruptura de las soldaduras en las juntas verticales, flujo plástico, inestabilidad de los elementos perimetrales o falla del tablero por pandeo producido por cortante.

En las refs 4.64, 4.66 y 4.67 se estudian los distintos factores que intervienen en la flexibilidad y resistencia del conjunto y se dan fórmulas para evaluarlos, y en la ref 4.65 se investiga el pandeo elástico por cortante y se proporcionan expresiones simplificadas para determinar la resistencia correspondiente. Este tipo de falla es importante porque representa la resistencia máxima que puede proporcionar un diafragma dado, por lo que en muchos casos puede ser conveniente diseñar los elementos de unión de las láminas entre sí, y del conjunto con la estructura de manera que no fallen prematuramente, para que la resistencia del diafragma sea la correspondiente al pandeo por cortante.

En la referencia 4.68 se propone que las fuerzas sísmicas sean resistidas por los marcos, haciendo su análisis y diseño en forma ordinaria, y los cancelles divisorios se emplean únicamente para reducir los desplazamientos laterales a valores aceptables; así, la seguridad de la estructura no depende de los cancelles, pero éstos son fundamentales para que su comportamiento en condiciones de servicio sea adecuado; más adelante, cuando el conjunto diafragma-marco se haya estudiado más a fondo, convenirá seguramente utilizar también la resistencia de los cancelles, para obtener diseños más económicos.

Calculada la rigidez de los cancelos con el método del elemento finito, en la ref 4.68 se determinan los desplazamientos producidos por un sistema de fuerzas horizontales en un marco de tres crujeas y veintiseis niveles, suponiendo primero que el marco las resiste en su totalidad y colocando después diafragmas hechos con lámina de tres calibres diferentes, 12, 16 y 20, en el entre eje central, en toda la altura. Los diafragmas reducen los desplazamientos laterales a una fracción comprendida entre el 45 y 65 por ciento, aproximadamente, de los del marco no rigidizado, que se mantiene prácticamente constante en toda la altura (los desplazamientos horizontales totales del nivel superior son de 10.09" en el marco, 5.89" (56%) cuando se emplea láminas del No 20, y 5.28" (52%) y 4.74" (47%) cuando las láminas son del calibre 16 y 12, respectivamente).

4.9 OTRAS ESTRUCTURAS. El estudio de su comportamiento bajo temblores reales y las investigaciones teóricas y experimentales realizadas hasta la fecha, indican que los marcos rígidos de acero, contraventados o no, constituyen sistemas estructurales capaces de resistir las sollicitaciones producidas por sismos intensos y de disipar grandes cantidades de energía, gracias principalmente a que pueden admitir deformaciones inelásticas muy importantes sin pérdida de resistencia. Aunque algunos puntos requieren más estudios, todo parece indicar que se obtienen resistencia y ductilidad suficientes analizando los marcos con métodos elásticos o plásticos, diseñándolos de manera que la mayoría de las articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo eventual de colapso se formen en las vigas, y cumpliendo los requisitos sobre relaciones ancho/grueso y contraventeo lateral que se especifican para diseño plástico de estructuras cargadas estáticamente.

Las condiciones mencionadas se pueden satisfacer sin dificultades especiales en edificios urbanos para oficinas o departamentos, pero no en otros tipos de estructuras de acero, tales como tanques elevados o chimeneas.

Los tanques elevados soportados por una estructura tridimensional formada por cuatro o más columnas ligadas entre sí con puntales horizontales

y diagonales cruzadas esbeltas, que trabajan únicamente en tensión, constituyen un sistema estructural cuyo comportamiento en temblores pasados ha sido con frecuencia poco satisfactorio; la falla de una de las diagonales o de alguna de sus conexiones, generalmente en la parte superior de la torre, ocasiona una pérdida de simetría en la estructura resistente que origina momentos de torsión importantes y el colapso por flexión de las columnas que limitan el tablero; puesto que en estas estructuras es difícil obtener niveles apreciables de ductilidad, deben diseñarse para que resistan fuerzas sísmicas altas conservándose en el intervalo elástico, y las diagonales y sus uniones deben dimensionarse con coeficientes de seguridad elevados.

En chimeneas y otras torres altas autosoportadas de acero es importante evitar el pandeo de las paredes, que son generalmente de espesor relativamente pequeño. Además, como es probable que las sollicitaciones producidas por temblores intensos excedan las utilizadas en el diseño, debe esperarse que partes de la estructura fluyan plásticamente y conviene concentrar las deformaciones plásticas en elementos que no ocasionen la falla de la estructura y que, en caso necesario, sean fácilmente reemplazables. Los más convenientes son los pernos de anclaje, (ref 4.14), que deben hacerse de longitud suficiente para permitir deformaciones plásticas bajo las tensiones máximas producidas por el momento de volteo, y que se construyen de manera que puedan ser sustituidos en caso necesario, lo que se logra anclándolos en elementos especiales ahogados en el cemento de concreto, de los que se desprenden haciéndolos girar.

4.10 FALLA FRÁGIL Y DESGARRAMIENTO LAMINAR ("LAMELLAR TEARING"). La fractura frágil es más frecuente en las estructuras soldadas que en las que se fabrican con conectores mecánicos, debido a una combinación de posibles defectos en las soldaduras, esfuerzos residuales elevados, y continuidad, que reduce la posibilidad de que se detenga la propagación de las grietas. Durante la fabricación y el montaje deben tomarse las medidas necesarias para reducir a un mínimo los fenómenos que pueden ocasionar comportamiento

frágil, y si las condiciones son especialmente severas deben utilizarse aceros con propiedades adecuadas a bajas temperaturas.

La soldadura de perfiles laminados o de placas para transmitir fuerzas en la dirección perpendicular a su grueso (fig 4.36) debe hacerse con especial cuidado, ya que puede producir desgarramiento laminar del material. La resistencia del acero determinada normalmente al grueso es similar a la longitudinal o trasversal, pero su capacidad de deformación en esa dirección es frecuentemente tan solo ligeramente superior a la correspondiente al límite de elasticidad.

El desgarramiento laminar se presenta en placas muy restringidas, en la superficie de contacto entre inclusiones no metálicas microscópicas y el acero que las rodea, debido a la incapacidad de éste para admitir las deformaciones en la dirección normal al grueso impuestas por la contracción de soldaduras. Puede presentarse en placas de cualquier espesor, pero es mucho más frecuente en las gruesas, porque en ellas se depositan soldaduras más grandes, que se contraen más al enfriarse.

La experiencia enseña que el desgarramiento laminar no aparece casi nunca en placas de gruesos menores de 20 a 25 mm, aunque ha habido algunas excepciones (ref 4.69). La consideración de diseño más importante consiste en reducir a un mínimo las deformaciones normales al grueso de las placas que se presentan en áreas localizadas.

En la Fig 4.37 se muestran detalles que pueden ocasionar el fenómeno en estudio, y se dan algunas ideas referentes a cómo mejorarlos.

## REFERENCIAS

- 4.1 Degenkolb, H. J., "Design of Earthquake-Resistant Structures-Steel Frame Structures", in Earthquake Engineering, R. L. Wiegel, editor, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1970)
- 4.2 Galambos, T. V., "Structural members and Frames", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1960)
- 4.3 Lee, G. C., and Galambos, T. V., "Post Buckling Strength of Wide-Flange Beams", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings, American Society of Civil Engineering, Vol 88, No EM1 (1962)
- 4.4 Lee, G. C., Ferrara, A. T., and Galambos, T. V., "Experiments on Braced Wide-Flange Beams", Bulletin No 99, Welding Research Council, New York (1964)
- 4.5 Lukey, A.F., Smith, R. J., Hosain, M. V., and Adams, P. F., "Experiments on Wide-Flange Beams under Moment Gradient", Bulletin No 142, Welding Research Council, New York (1969)
- 4.6 Lay, M. G., "Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes", Journal of the Structural Division, Proceedings, American Society of Civil Engineers, Vol 91, No ST6 (1965)
- 4.7 Lay, M. G., and Galambos, T. V., "Inelastic Beams under moment Gradient", J. Str. Divi., Procs., ASCE, Vol 93, No ST1 (1967)
- 4.8 Bertero, V. V., and Popov, E. P., "Effect of Large Alternating Strains of Steel Beams", J. Str. Div., Proc., ASCE, Vol 91, No ST1 (1965)
- 4.9 Popov, E. P., and Pinkney, L. B., "Cyclic Yield Reversal in Steel Building", Connections", J. Str, Proc. ASCE, Vol 95, No ST3 (1969)
- 4.10 Carpenter, L. D., and Lu, L.W., "Reversed and Repeated Load Tests of Full-Scale Steel Frames", Bulletin No 24, American Iron and Steel Institute, New York (1973)

- 4.11 Krawinkler, H., Bertero, V. V., and Popov, E. P., "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblages", Report No EERC 71-7, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, Cal. (1971)
- 4.12 Bertero, V. V., Krawinkler, H., and Popov, E. P., "Further studies on seismic behavior of steel Beam-Column Subassemblages", Report No EERC 73-27, Earth. Eng. Res. Center, College of Eng., Univ. of California, Berkeley, Cal (1978)
- 4.13 Lay, M. G., and Galambos, T V, "Inelastic Steel Beams under Uniform Moment", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol 91, No ST6 (1965)
- 4.14 Newmark, N. M., and Rosenblueth, E., "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1971)
- 4.15 "Specification for the design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings" and Commentary to the Specification, American Institute of Steel Construction (1969), with supplements No 1, 2 and 3
- 4.16 "Plastic Design in Steel-A guide and Commentary", American Society of Civil Engineers, Manual of Engineering Practice No 41, 2<sup>nd</sup> Edition (1971)
- 4.17 Ketter, R. L., "Stability of Beam-Columns above the Elastic Limit", Proceedings ASCE, Vol 81, Separate No 692 (1955)
- 4.18 Galambos, T. V., and Ketter, R. L., "Columns under Combined Bending and Thrust", Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol 126, Part 1 (1961)
- 4.19 Galambos, T. T., Lecture 10, "Plastic Design of Multi-Story Frames- Lecture Notes", Fritz Engineering Laboratory Report No 273.20, Lehigh University, Bethlehem, Pa (1965)
- 4.20 Ojalvo, M., and Fukumoto, Y., "Nomographs for the Solution of Beam-Columns Problems", Bulletin No 78; Welding Research Council, New York (1962)

- 4.21 Galambos, T. V., and Lay, M. G., "Studies on the Ductility of Steel Structures", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol 91, No ST4 (1965)
- 4.22 Galambos, T. V., Adams, P. F., and Fukumoto, Y., "Further Studies on the Lateral-Torsional Buckling of Steel Beam-Columns" Bulletin No 115, Welding Research Council, New York (1966)
- 4.23 Bakes, J. F., Horne, M. R., and Heyman, J., "The Steel Skeleton", Vol 2, Cambridge University Press, Cambridge, England (1956)
- 4.24 "Joint Committess Second Report on Fully Rigid Multi-Story Welded Steel Frames", The Institution of Structural Engineers, London, England (1971)
- 4.26 Santathaporn, S., and Chen, W. F., "Interaction Curves for Sections under Combined Biaxial Bending and Axial Forces", Bulletin No 148, Welding Research Council, New York (1970)
- 4.27 Chen, W. F., and Atsuta, T., "Interaction Equations for Biaxially Load Sections", J. Str. Div., Proc., ASCE, Vol 98, No ST5 (1972)
- 4.28 Santathaporn, S., and Chen, W. F., "Analysis of Biaxially Loaded Steel H-Columns", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol 99, No ST3 (1973)
- 4.29 Tebedge, N., and Chen, W. F., "Design Criteria for H Columns under Biaxial Loading", J. Str. Div., Proc., ASCE, Vol 100, No ST3 (1974)
- 4.30 Springfield, J., "Design of Columns Subject to Biaxial Bending", Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, Vol 12, No 3 (1975)
- 4.31 Yamada, M., "Low Cycle Fatigue Fracture Limits of Various Kinds of Structural Members subjected to Alternately Repeated Plastic Bending under Axial Compression as an Evaluation Basis of Design Criteria for Aseismic Capacity", Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile (1969)
- 4.32 Yamada, M., "Effect of Cyclic Loading on Buildings", State of Art Report No 1, Technical Committee 18, International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Bethlehem Pa (1972)

- 4.33 Suzuki, T., and Ono, T., "An Experimental study of Inelastic Behavior of Steel Members Subjected to Repeated Loading", Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India (1977)
- 4.34 Mitani, I., Makino, M., and Matsui, C., "Influence of Local Buckling on Cyclic Behavior of Steel Beam-Columns", Preprints, Sixth World Conf. on Earthquake Eng., New Delhi, India (1977)
- 4.35 Kato, B., and Akiyama, H., "Inelastic Bar Subjected to Thrust and Cyclic Bending", J. Str. Div., Proc., ASCE, Vol 95, No ST1 (1969)
- 4.36 Popov, E. P., Bertero, V. V. and Chandramouli, S., "Hysteretic Behaviour of Steel Columns", Report No EERC 75-11, Earth. Eng. Res. Center, College of Eng., Univer. of California, Berkeley, Cal. (1975)
- 4.37 Bertero, V. V., Popov, E. P., and Krawinkler, H., "Beam-Column Subassemblages under Repeated Loading", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol 98, No ST5 (1972)
- 4.38 Graham, J. D., Sherbourne, A. N., Khabbaz, R. N., and Jensen, C. D., "Welded Interior Beam-To-Column Connections", American Institute of Steel Construction (1959)
- 4.39 Parfitt, J. Jr, and Chen, W. F., "Tests of Welded Steel Beam-to-Column Moment Connections", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol 102, No ST 1 (1976)
- 4.40 Popov, E. P., and Stephen, R. M., "Cyclic Loading on Full-Size Steel Connections", Report No EERC 70-3, Earth. Eng. Res. Center, College of Eng. Univ. of California, Berkeley, Cal (1970)
- 4.41 Popov, E. P., and Bertero, V. V., "Cyclic Loading of Steel Beams and Connections", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol 99, No ST6 (1973)
- 4.42 Krawinkler, H., Bertero, V. V., and Popov, E. P., "Shear Behavior of Steel Frame Joints", J. Str. Div. Proc, ASCE, Vol 101, No ST11 (1975)

- 4.43 Daniels, J. H., and Lu, L. W., "The Subassemblage Method of Designing Unbraced Multi-Story Frames", Fritz Eng. Lab. Report 273.37, Lehigh University, Bethlehem, Pa (1966)
- 4.44 De Buen, O., "A modification to the Subassemblage Method of Designing Unbraced Multi-Story Frames", Fritz Eng. Lab. Report 273.37, Lehigh University, Bethlehem, Pa (1966)
- 4.45 Powell, G. H., and M. B. El Hafez, "Subassemblage Concept for Tall Frames analysis", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol 100, No ST8 (1979)
- 4.46 Becker, R., "Panel Zone Effect on the Strength and Stiffness of Steel Rigid Frames", Eng. J., AISC, Vol 12, No 1 (1975)
- 4.47 Kato, B., and Lu, L. W., "Instability Effects under Dynamic and Repeated Load", State of Art Report No 3, Technical Committee 16, International Conference on Planning and Design of Tall Building, Lehigh University, Bethlehem, Pa. (1972)
- 4.48 De Buen, O., "Antiseismic Design of Multi-Story Steel Frames by Plastic Methods"; Proceedings, Fourth World Conf. on Earth. Eng., Santiago, Chile (1969)
- 4.49 "Plastic Design of Braced Multi-story Steel Frames"; American Iron and Steel Institute, New York (1968)
- 4.50 Wakabayashi, M., "Frames under Strong Impulsive, Wind or Seismic Loading", State of Art Report No 6, Technical Committee No 15, International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Bethlehem, Pa (1972)
- 4.51 Shihata, M., Nakamura, T., Yoshida, N., Morino, S., Nomaka, T., and Wakabayashi, M., "Elastic Plastic Behavior of Steel Braces under Repeated Axial Loading", Proceedings, Fifth World Conf. on Earth. Eng., Rome, Italy (1974)

- 4.52 Kahn, L. F., and Hanson, R. D., "Inelastic Cycles of Axially Loaded Steel Members", J. St. Div., Proc. ASCE, Vol 102, No ST5 (1976)
- 4.53 Wakabayashi, M., Matsui, C., and Mitani, I., "Cyclic Behavior of a Restrained Steel Brace under Axial Loading", Preprints, Sixth World Conf. on Earth Eng., New Delhi, India
- 4.54 Higginbotham, A. B., and Hanson, R. D., "Axial Hysteretic Behavior of Steel Members", J. S. Div., Proc., ASCE, Vol 102, No ST7 (1976)
- 4.55 Wakabayashi, M., Nakamura, T., Shibata, M., Yoshida, N., and Masuda, H., "Hysteretic Behavior of Steel Braces Subjected to Horizontal Load due to Earthquake", Preprint Sixth World Conf. on Earth. Eng. New Delhi, India (1977)
- 4.56 Wakabayashi, M., Matsui, C., Minami, K., and Mitani, I., "Inelastic Behavior of steel Frame subjected to Constant Vertical and Alternating Horizontal Loads", Proceeding, Fifth World Conf. on Earth. Eng. Rome, Italy (1979)
- 4.57 Tomahashi, R., Kaneta, K., and Ishida, T., "On the Rigidity and Ductility of Steel Bracing Assemblage" Proceedings, Fifth World Conf. on Earth, Eng., Rome, Italy (1974)
- 4.58 Goel, S. C., and Hanson, R. D., "Seismic Behavior of Multistory Braced Steel Frames", J. Str. Div. Proc. ASCE, Vol 100, No ST1 (1974)
- 4.59 Anderson, J. C., "Seismic Behavior of K-Braced Framing Systems", J. Str. Div., Proc. ASCE, No St 10 (1975)
- 4.60 Yamada, M., Tsuji, B., and Nakanishi, S., "Elasto-Plastic Behavior of Braced Frames under Cyclic Horizontal Loading", Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India
- 4.61 Wyllie, L. A., Jr., and Degenkolb, H. J., "Improving the Seismic Response of Braced Frames" Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng. New Delhi, India (1977)

- 4.62 Kaldjian, M. J., "Inelastic Cyclic Response of Split K Braced Frames", Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India (1977)
- 4.63 "Uniform Building Code", 1976 Edition, International Conference of Building Officials" Whittier, Cal. (1976)
- 4.64 Bryan, E. R., "The Stressed Skin Design of Steel Building", Constrado Monographs, Crosby Lackwood Staples, London, England (1972)
- 4.65 Easley, J. T., "Buckling Formulas For Corrugated Metal Shear Diaphragms" , J. Str. Div., Proc., ASCE, Vol 101, No ST7 (1975)
- 4.66 Davies, J. M., "Calculation of Steel Diaphragm Behavior", J. Str. Div. Proc. ASCE, Vol 102, No ST7 (1976)
- 4.67 El-Dakhakhni, "Shear of Light-Gage Partitions in Tall Buildings", J. Str. Div. Proc. ASCE, Vol 102, No St 7 (1976)
- 4.68 Milla, C. J. "Light Gage Steel Infill Panels in Multistory Steel Frames", Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, Vol 11, No 2 (1974)
- 4.69 American Institute of Steel Construction, "Commentary on Highly Res<sub>u</sub>trained Welded Connections", Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, Vol 10, No 3 (1973) (See also discussion by N. B. Jones and W. A. Milek, Eng. J., Vol 12, No 1 (1975))

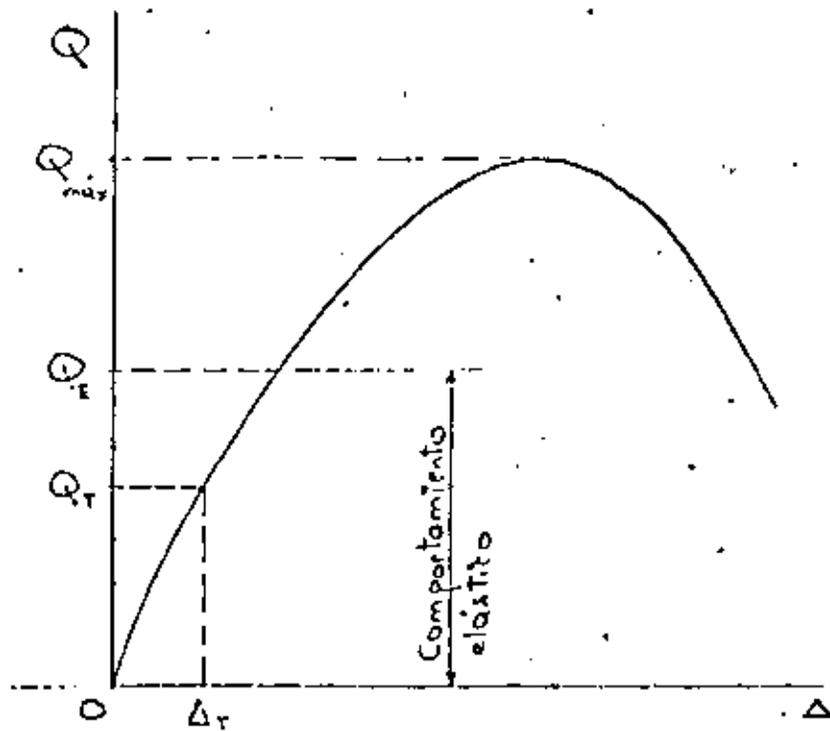


FIG. 4.) GRÁFICA FUERZA HORIZONTAL-DESPLAZAMIENTO LATERAL (Q-Δ) DE UN ENTREPISO

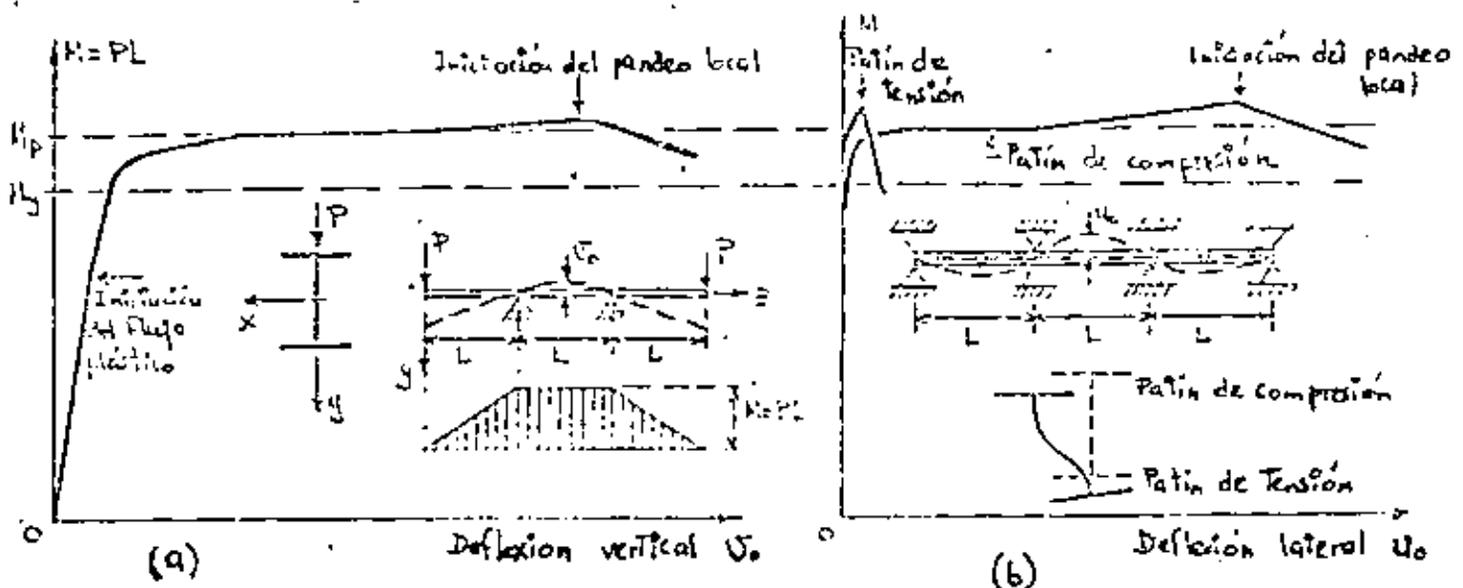
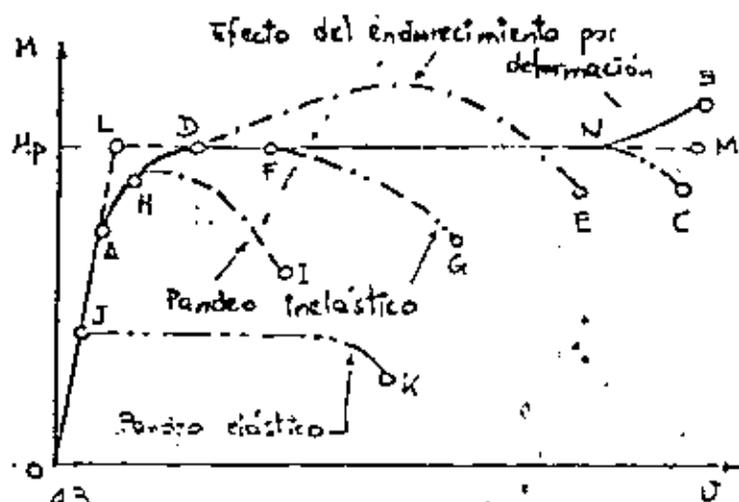
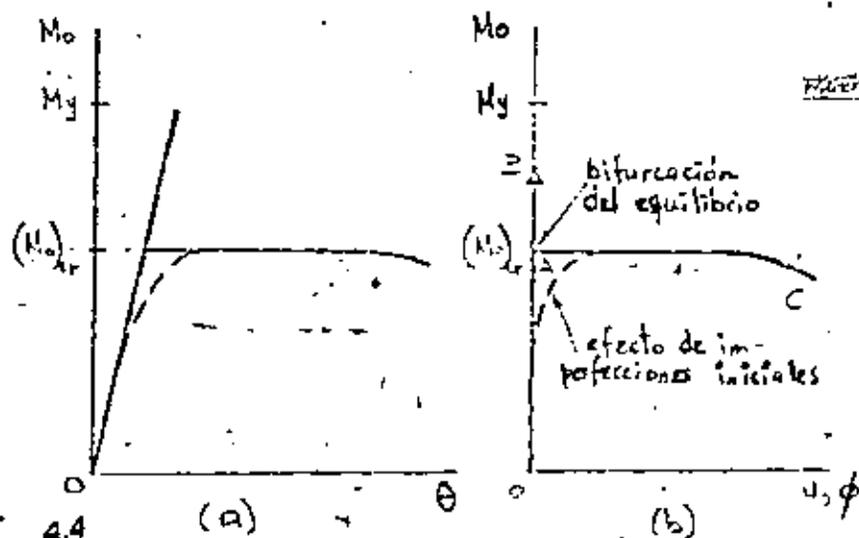


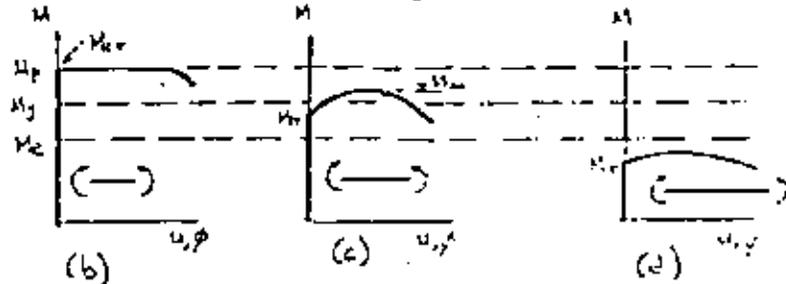
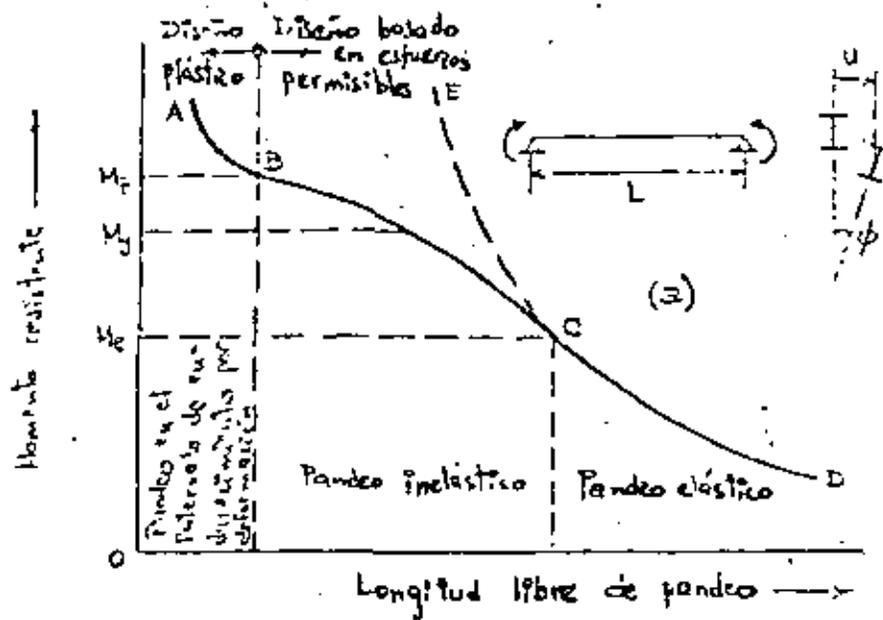
FIG. 2. Curvas momento-deflexión de una viga en flexión pura



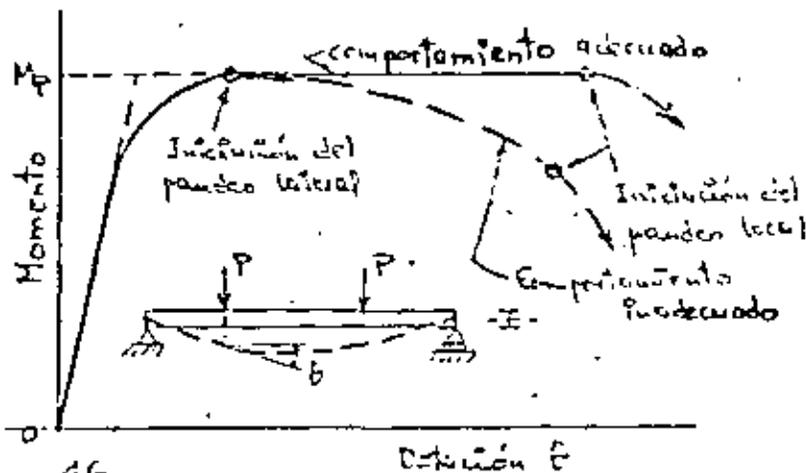
4.3  
FIG. 4.3. Curvas momento-deflexión de vigas



4.4  
FIG. 4.4. Comportamiento de una viga en flexión pura



4.5  
 FIG. 4.5. COMPORTAMIENTO DE VIGAS DE DIFERENTES LONGITUDES



4.6  
 FIG. 4.6. CURVAS MOMENTO-ROTACIÓN DE UN TRAMO DE VIGA EN FLEXIÓN PURA.

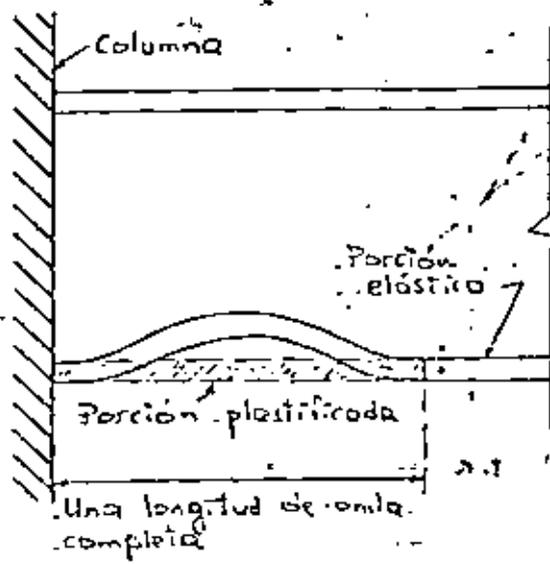


FIG. 4.7. PANDEO LOCAL DEL PATÍN COMPRESIONADO EN EL EXTREMO DE UNA VIGA

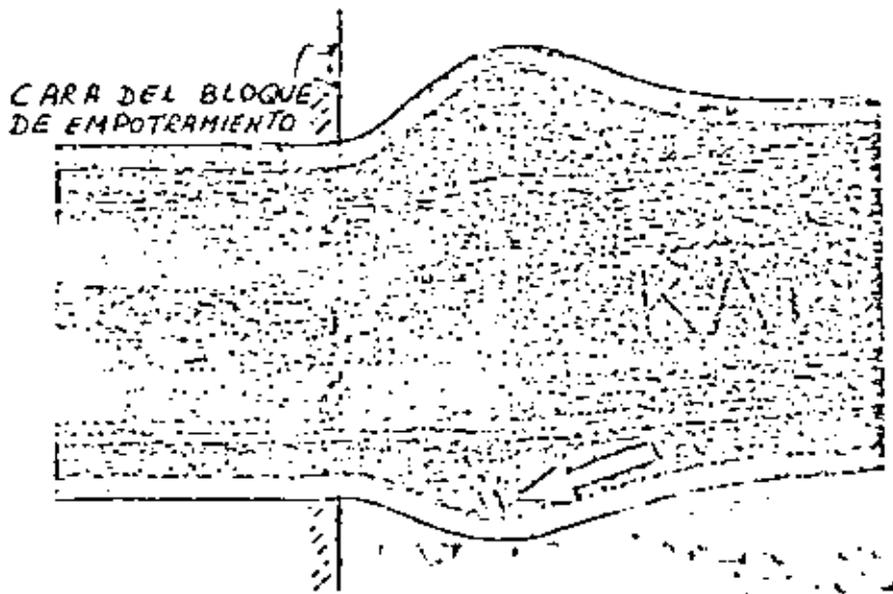


FIG 4.8 INICIACION TIPICA DE UNA FRACTURA

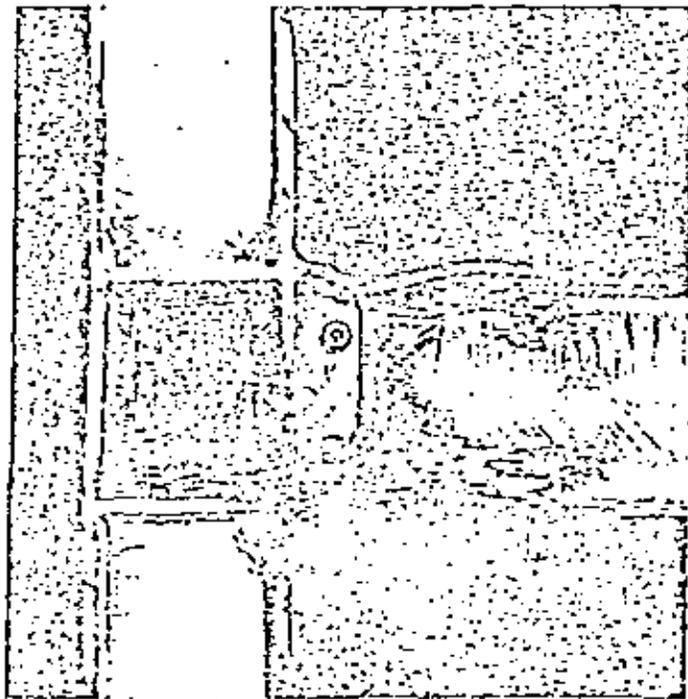
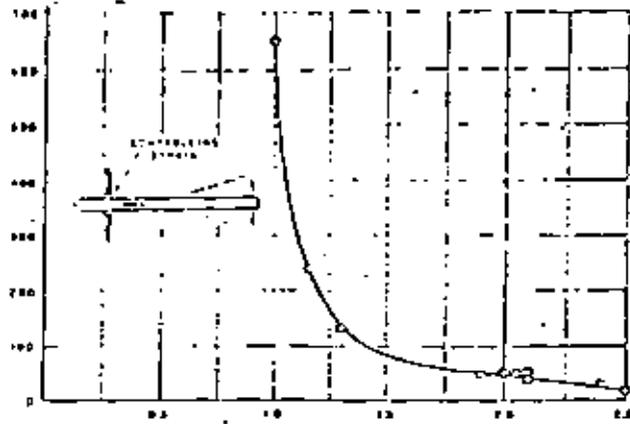


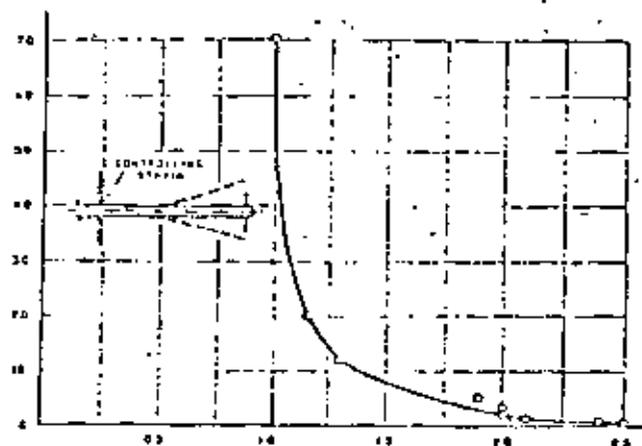
FIG. 4.9 PANDEO DEL PATIN  
EN UNA VIGA

CICLOS A  
LA FALLA



DEFORMACION CICLICA CONTROLADA (%)

CICLOS PARA  
EL PANDEO LOCAL



DEFORMACION CICLICA CONTROLADA

FIG. 4.10 NUMERO DE CICLOS REQUERIDOS PARA LOGRAR FRACTURA O PANDEO LOCAL COMO UNA FUNCION DE LA DEFORMACION CICLICA CONTROLADA

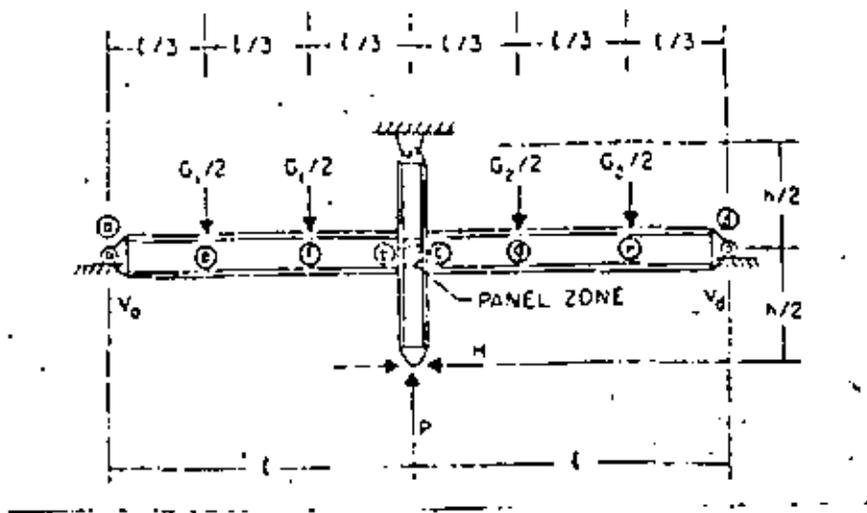


FIG. 4.11

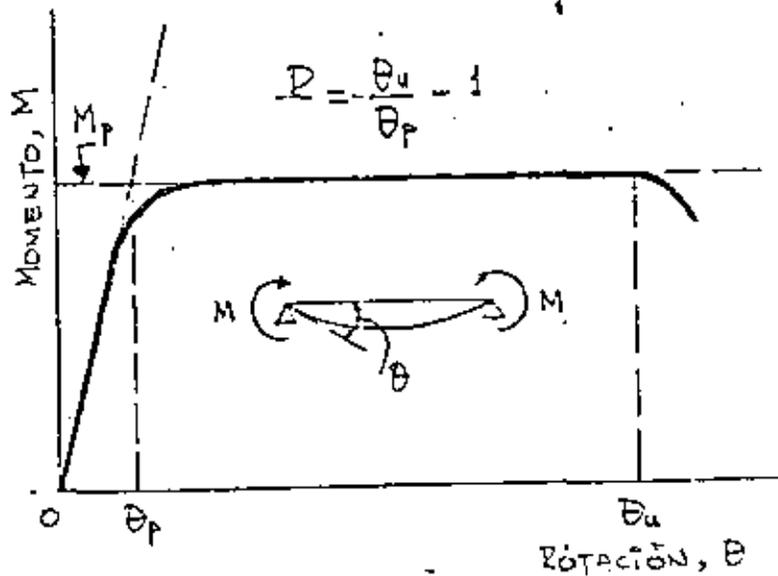
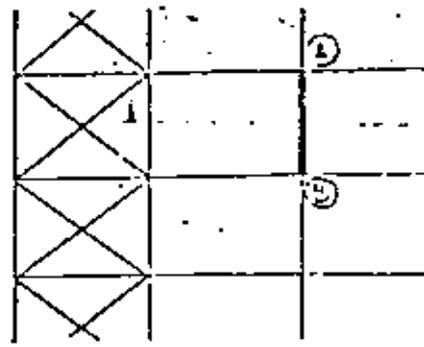
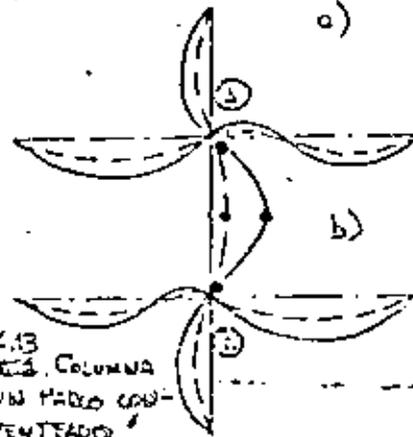


FIG. 4.12 CURVA MOMENTO-ROTACIÓN DE UNA VIGA Y CAPACIDAD DE ROTACIÓN



a)

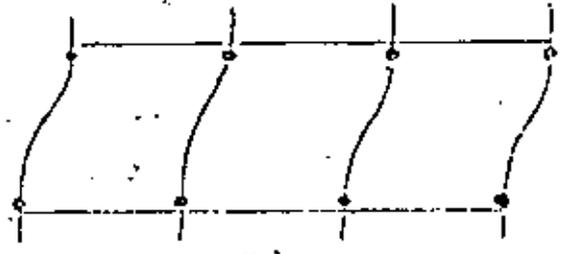


b)

4.13  
FIG. 13. COLUMNA  
DE UN PARO CON-  
TRAVENTADO



(c)



(d)

4.14  
FIG. 14. COLUMNAS DE ARCOS NO CONTRAVENTADOS

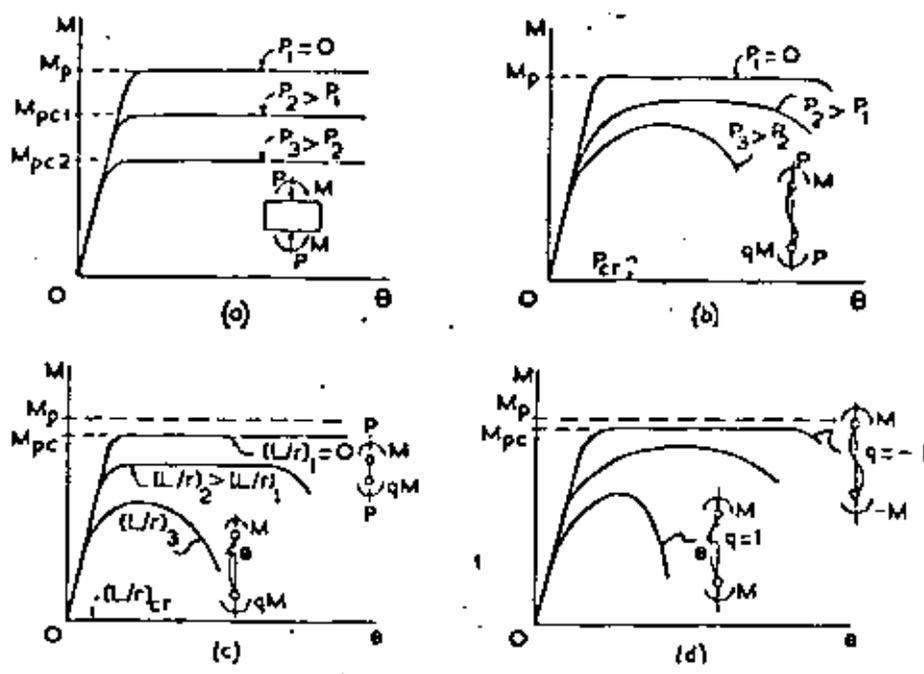


FIG 4.15 CURVAS MOMENTO-ROTACION DE COLUMNAS QUE FALLAN POR EXCESO DE FLEXION EN EL PLANO DE LOS MOMENTOS

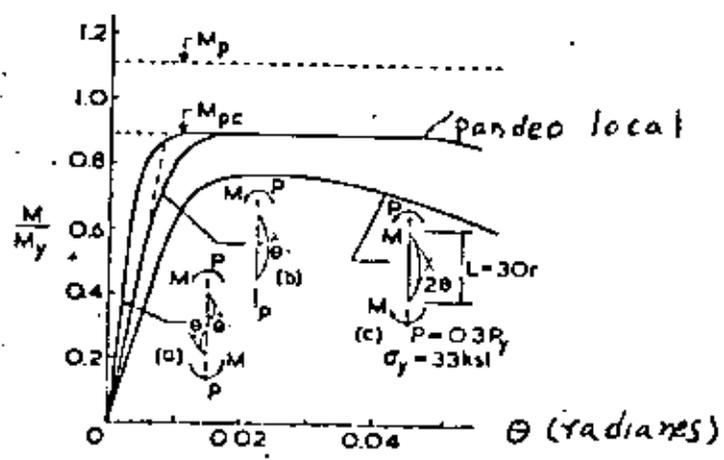


FIG 4.16 CURVAS MOMENTO-ROTACION TÍPICAS DE UNA VIGA-COLUMNA

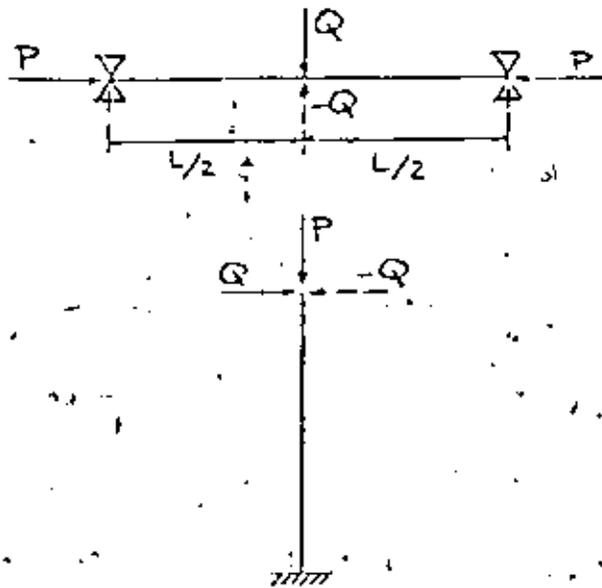


FIG 4.17 ESPECIMENES UTILIZADOS PARA ESTUDIAR COLUMNAS FLEXOCOMPRESAS CARGADAS CICLICAMENTE

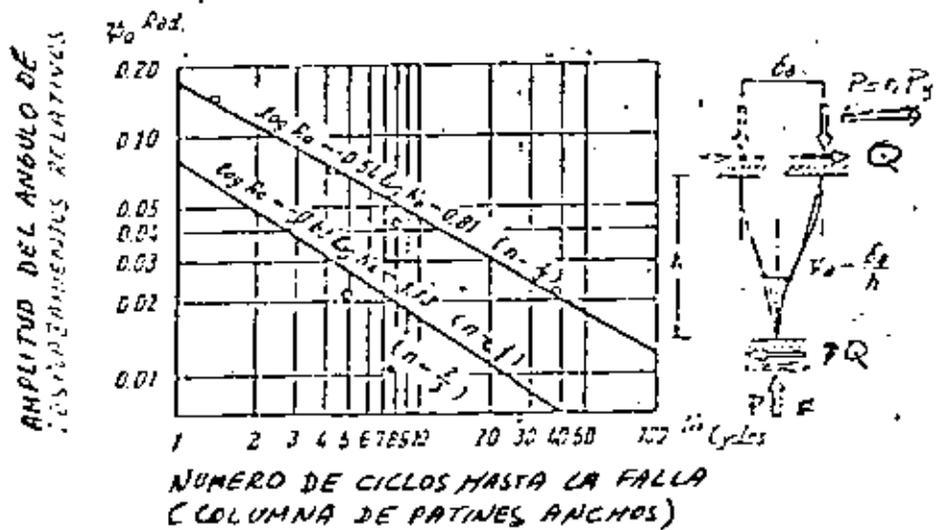
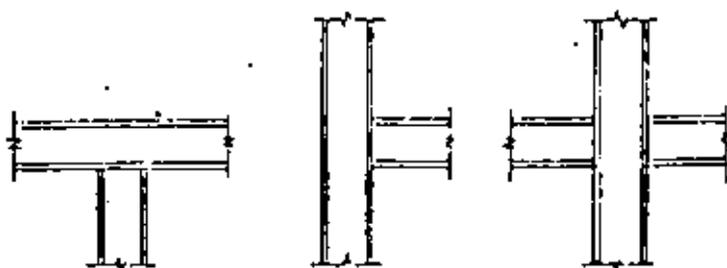


FIG 4.18 LIMITE DE FRACTURA DE POCOS CICLOS EN COLUMNAS DE PATINES ANCHOS



.. FIG. 4.19 CONEXIONES VIGA-COLUMNA

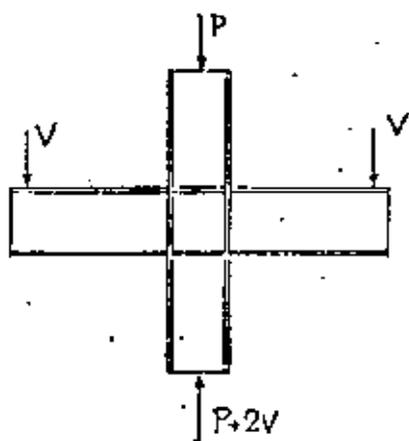


FIG. 4.18 <sup>20</sup> CONDICIÓN DE CARGA DE LOS ESPECÍMENES

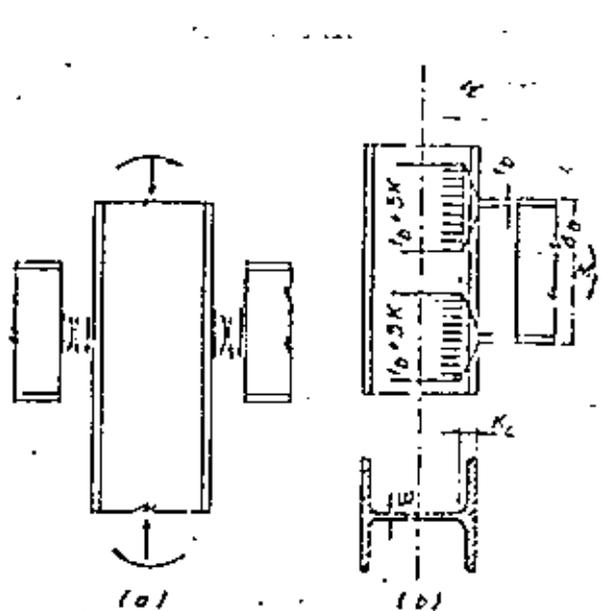


FIGURA 4.21

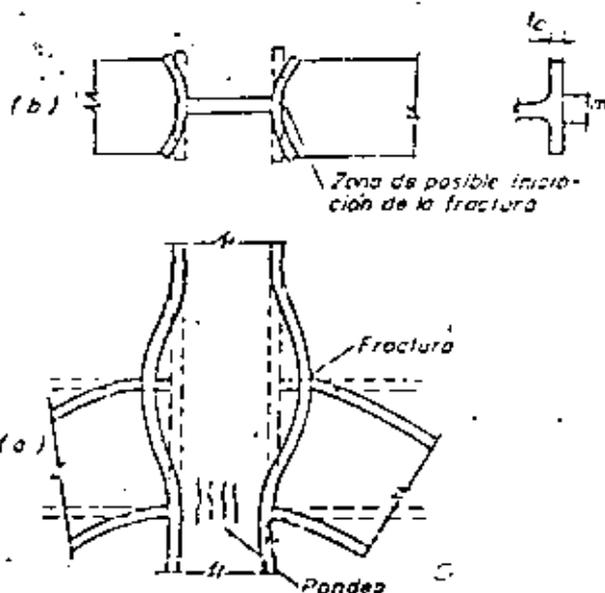


FIGURA 4.22

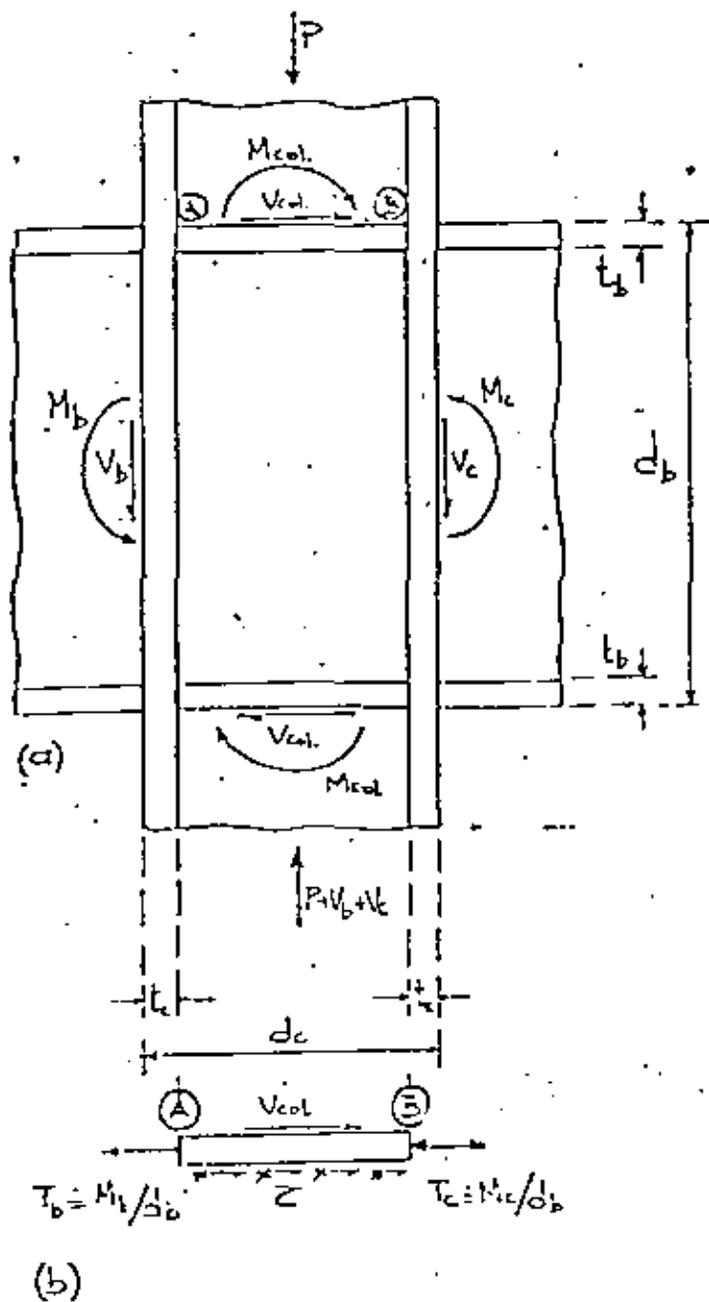


FIG. 4.23 ELEMENTOS MECÁNICOS EN UNA CONEXIÓN VIGA-COLUMNA INTERIOR

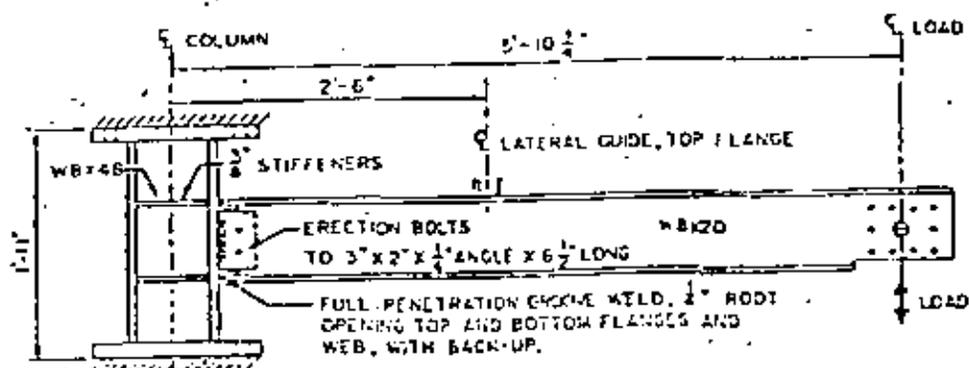


FIG. 4.24 ESPECIMEN TIPO F-1

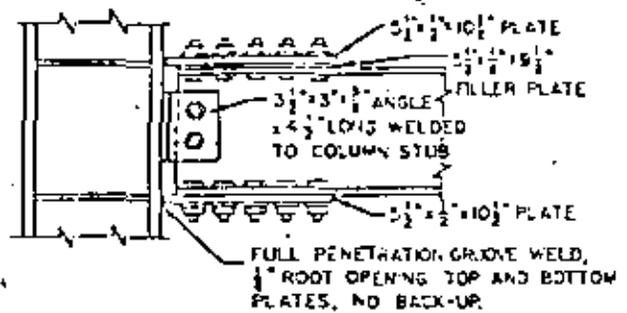
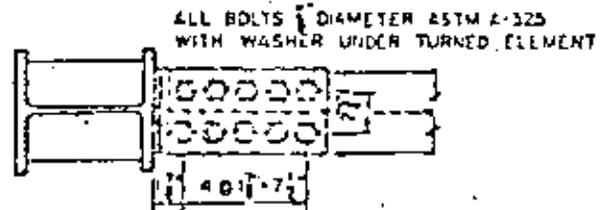
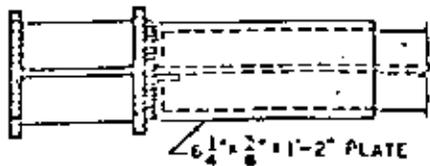
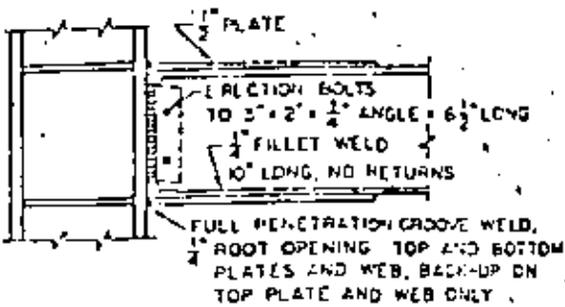
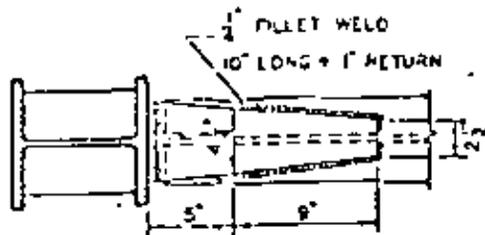


FIG 4.25

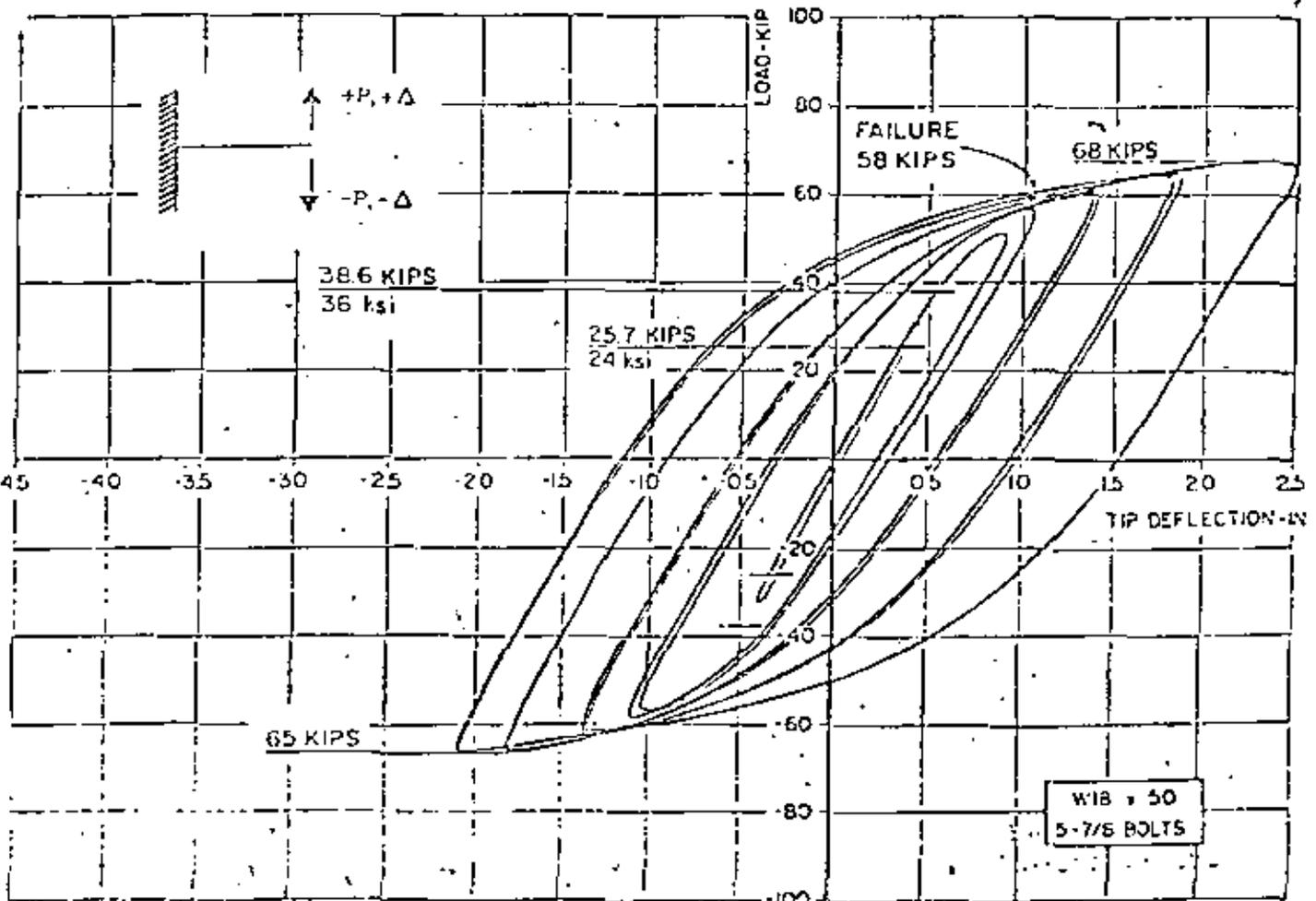


FIG 4.26 CICLOS HISTERETICOS CARGA-DESPLAZAMIENTO

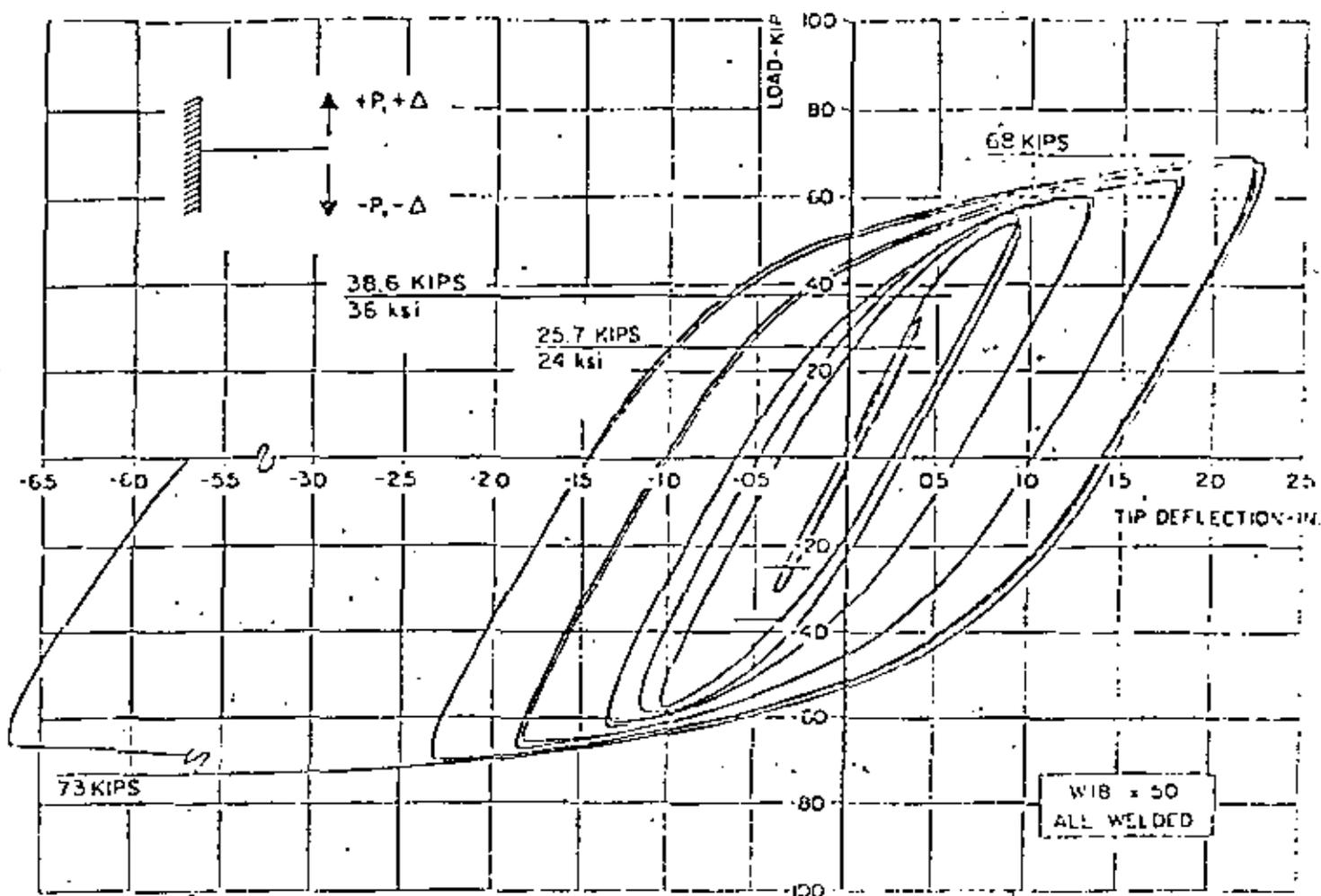


FIG 4.27 CICLOS HISTERETICOS CARGA-DESPLAZAMIENTO PARA EL ESPECIMEN N° 2

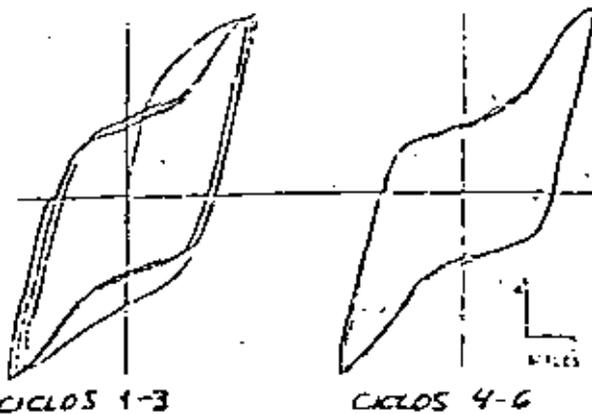


FIG 4.28 CICLOS HISTERETICOS CARGA-DESPLAZAMIENTO EXPERIMENTALES PARA EL ESPECIMEN F3-C5

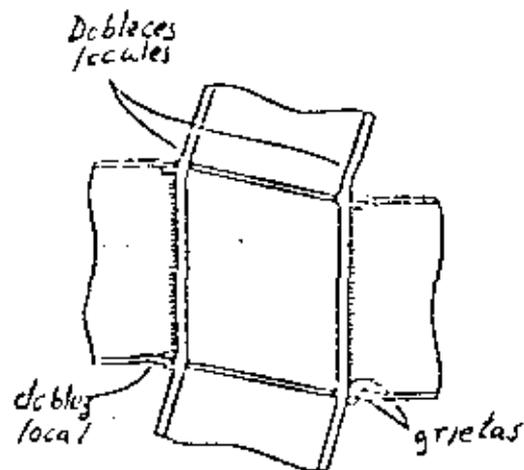
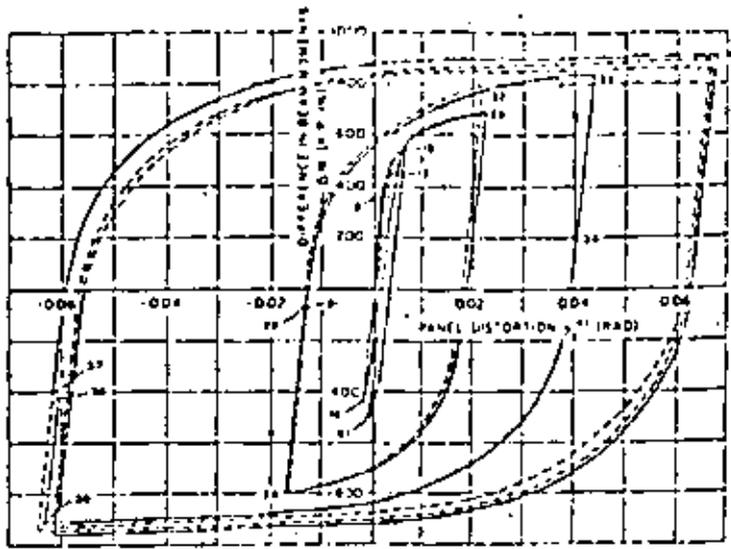
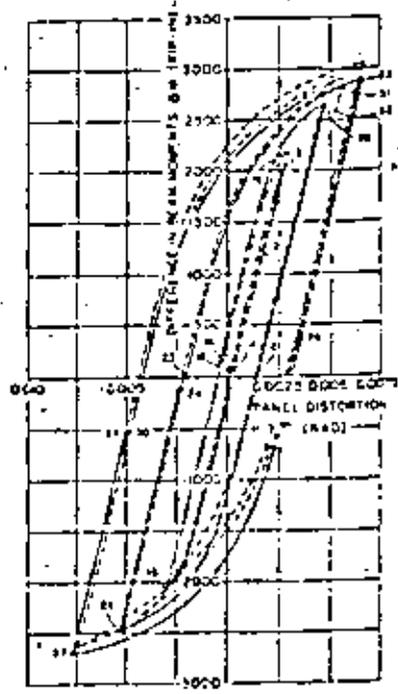


FIG. 4.29 EFECTOS LOCALES CAUSADOS POR DISTORSIONES EN PANELES



(b) SPECIMEN A-1

FIG. 430 4.37



(c) SPECIMEN B-1

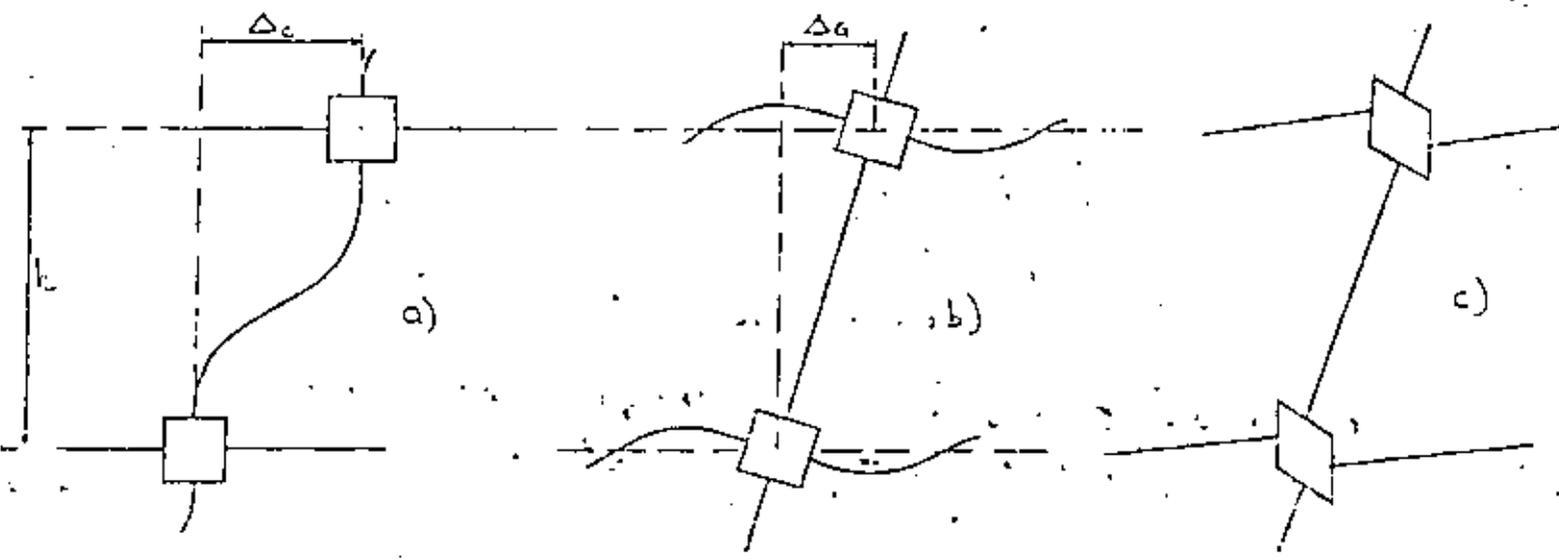


FIG. 431 DESPLAZAMIENTOS LATERALES DE ENTREPISO

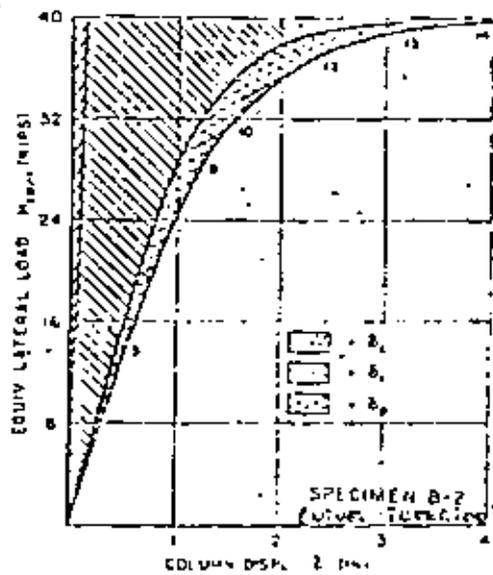
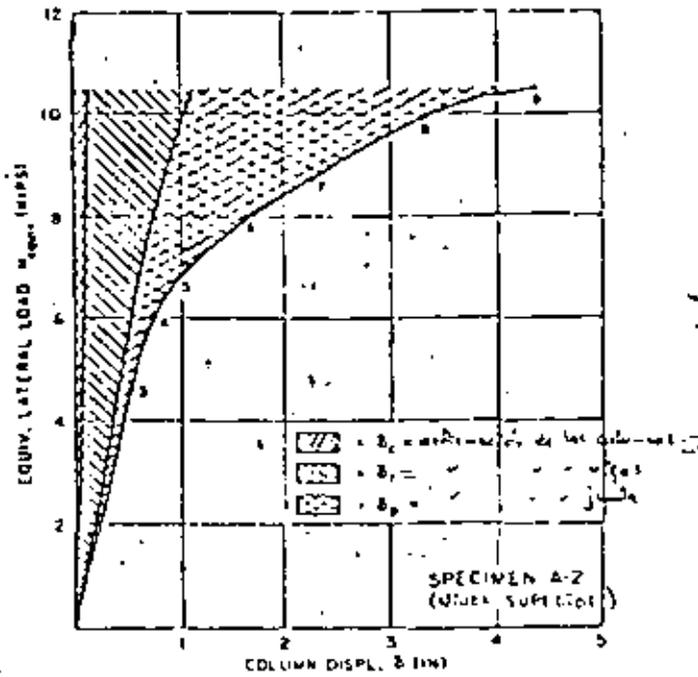


FIG 4.32 COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTOS  
 EN UNA COLUMNA (Ref. 4.37)

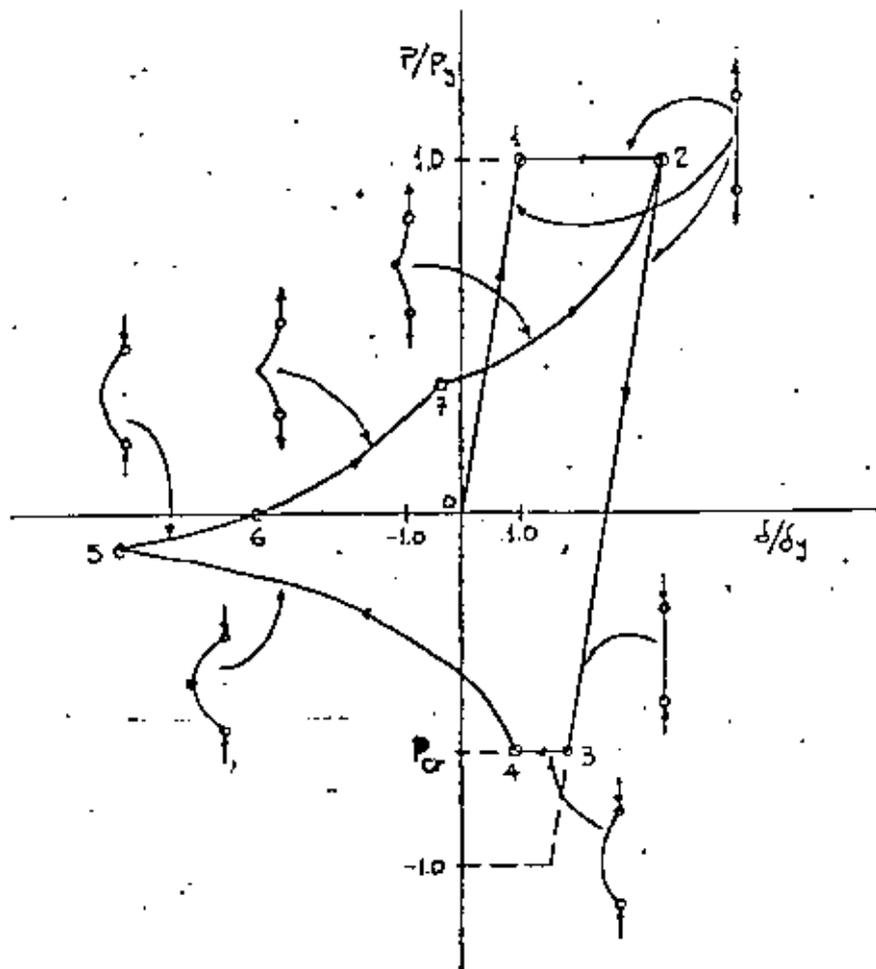
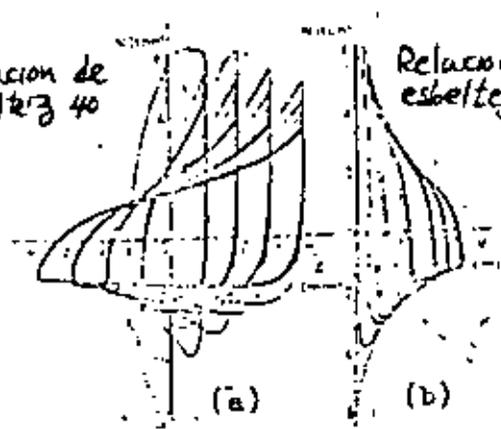


FIG. 4.33 COMPORTAMIENTO DE UNA BARRA EN TENSION-COMPRESION CICLICAS

Relacion de esbeltez 40



Relacion de esbeltez 40

(a)

(b)

FIG 4.34 RELACIONES N-A y N-V PARA RELACIONES DE ESBELTEZ 40

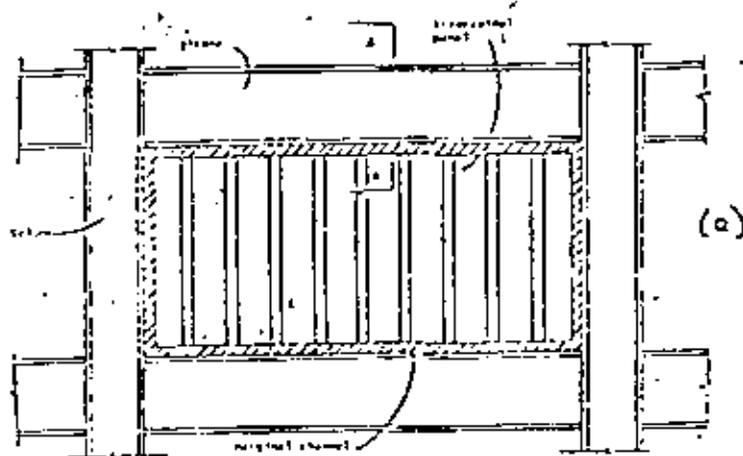


FIG 4.35 CONSTRUCCION PROPUESTA PARA MARCOS CON RELLENO (ELEVACION)

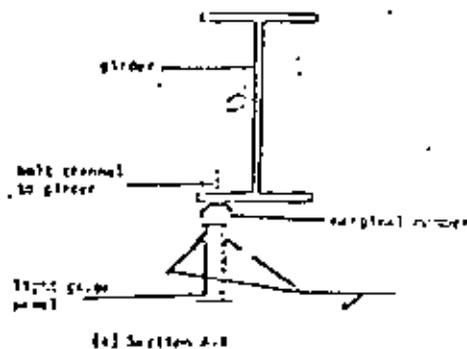
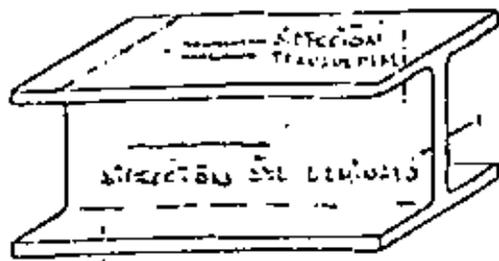


FIG 4.35 (b)



2 - DIRECCION DE TENDENCIA AL GRESO

FIG 4.36 TERMINOLOGIA RELACIONADA CON LA DIRECCION DEL LAMINADO

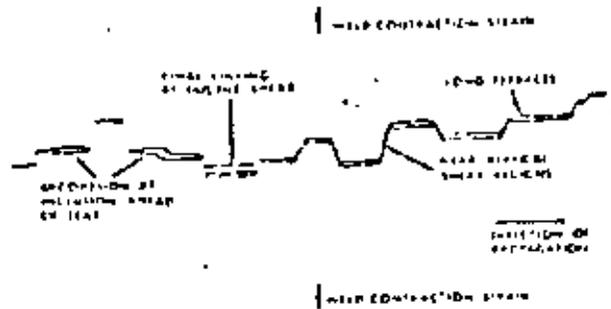
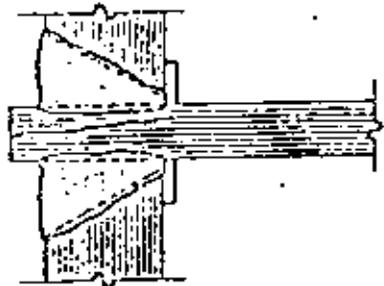
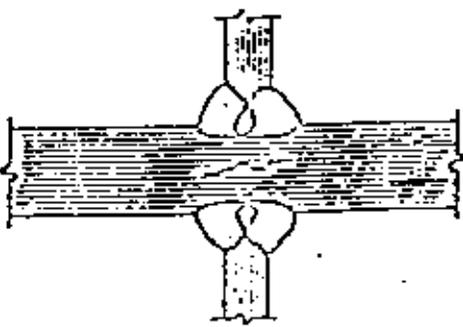


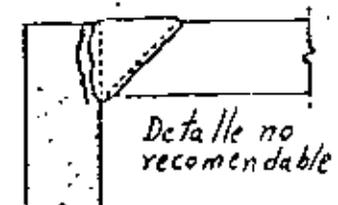
Diagrama de un desgarramiento laminar parcialmente desarrollado



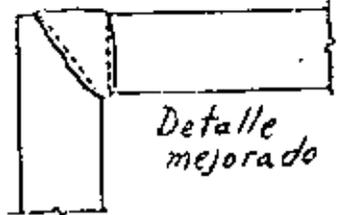
(a)



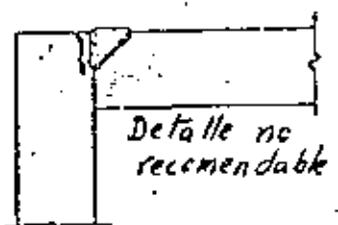
(b)



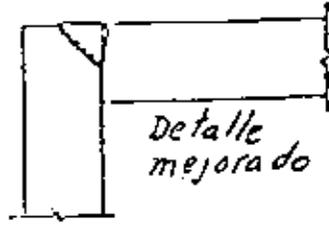
Detalle no recomendable



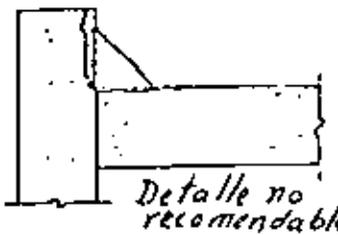
Detalle mejorado



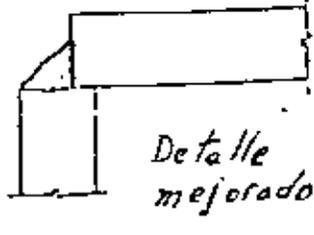
Detalle no recomendable



Detalle mejorado



Detalle no recomendable



Detalle mejorado

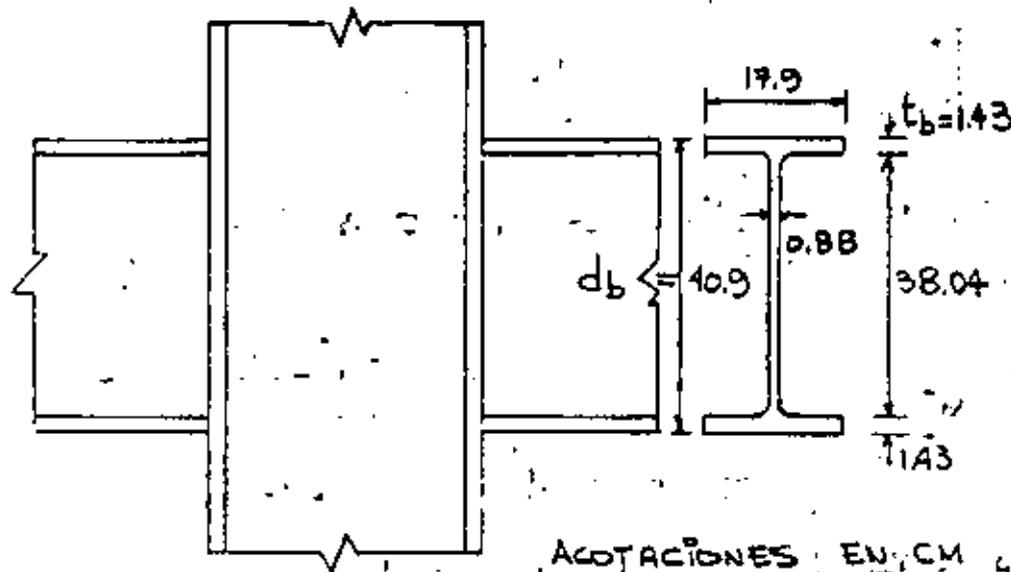
Fig. 4.37

DISEÑO DE UNA CONEXIÓN VIGA-COLUMNA DE UN MARCO RÍGIDO DE EDIFICIO (ACERO A36).

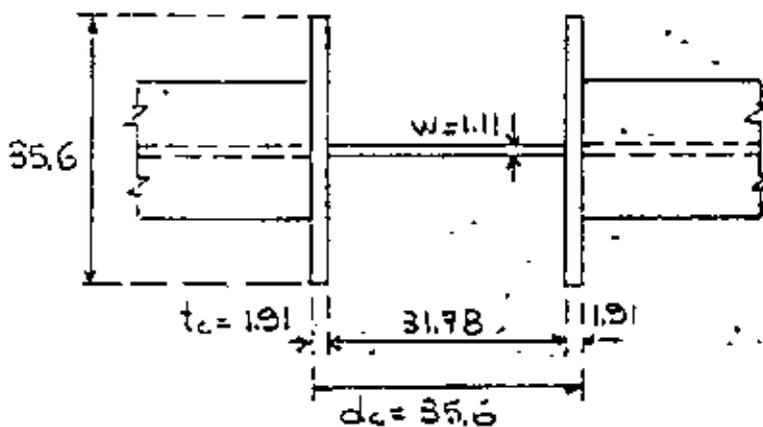
1

PERFILES: COLUMNA: 1 H 356 MM X 356 MM X 134 KG/M

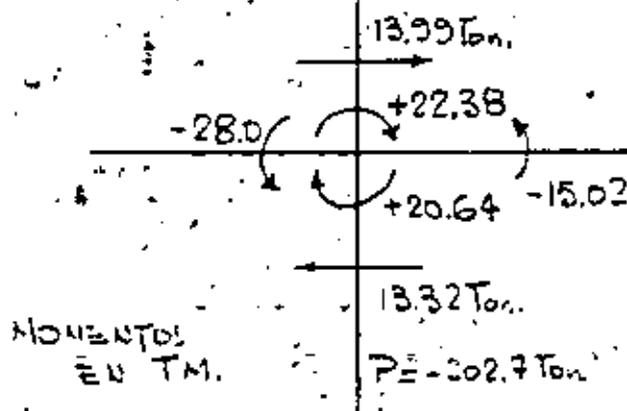
VIGAS: 1 IPB 16" X 7" X 67.1 KG/M



ACOTACIONES EN CM



ELEMENTOS MECÁNICOS POR  
CARGA VERTICAL + SISMO DE  
IZQUIERDA A DERECHA



## 2 REVISIÓN DEL GRUESO DEL ALMA DE LA COLUMNA POR CORTEZUE

CONVIENE EMPEZAR CON ESTA REVISIÓN, PUES SI HACE FALTA AUMENTAR EL GRUESO DEL ALMA DE LA COLUMNA CAMBIA EL COMPORTAMIENTO DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS ARIESADORES HORIZONTALES.

$$\text{Ec. 16. } W_{\text{rec}} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y d_c} \left( \frac{M_b + M_c}{d_b} - V_{\text{col}} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2530 \times 35.6} \left( \frac{2800000 + 1502000}{40.9} - 13990 \right) = 1.75 \text{ cm} > 1.11$$

$$\text{Ec. 17. } W_{\text{rec}} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y} \frac{\Delta M}{0.95 d_b \times 0.95 d_c} = 2.24 \text{ cm} = 1.28 \times 1.75$$

LA EC. 17 INDICA QUE SE REQUIERE UN ALMA 28% MÁS GUESA QUE LA CALCULADA CON LA EC. 16.

$$\text{Ec. 18. } C_{\text{av}} = \frac{(\Delta M / d_b)(1 - \rho)}{(d_c - t_c)W + 62.4 I_{ct} / d_b^2}$$

$$(M_p)_y = Z_y \sigma_y = 1343.7 \times 2530 = 3399600 \text{ Kg.cm}$$

$$\rho = \frac{V_{\text{col}} d_b}{\Delta M} = \frac{13990 \times 40.9}{3399600 \times 2} = 0.084; \quad I_{ct} = \frac{b_c t_c^3}{12} = \frac{35.6 \times 1.91^3}{12} = 20.7 \text{ cm}^3$$

$$C_{\text{av}} = \frac{(6799200 / 40.9)(1 - 0.084)}{(35.6 - 1.91)1.11 + 62.4 \times 20.7 / 40.9^2} = \frac{150275}{37.396 + 0.772} = 3989 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Ec. 19. } \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left( \frac{P}{P_y} \right)^2}; \quad P_y = A \sigma_y = 171.27 \times 2.53 = 433.31 \text{ Ton}$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{2530}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left( \frac{202.7}{433.31} \right)^2} = 1231 \text{ Kg/cm}^2 < 3989$$

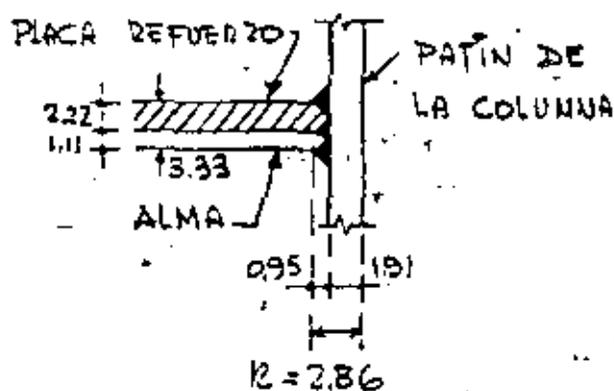
DE ACUERDO CON LAS ECS. 18 Y 19 EL ALMA NECESITA REFUERZO.

DESPRECIANDO LA RESISTENCIA A LA FLEXIÓN DE LOS PATINES DE LA COLUMNA, EL GRUESO DE LA PLACA DE REFUERZO SE CALCULA CON LA EXPRESIÓN

$$t_R = \frac{\bar{Z}_{AV} - \bar{Z}_y}{\bar{Z}_y} w = \frac{3989 - 1291}{1291} \times 1.11 = 2.32 \text{ cm}$$

SE COLOCARÁ UNA PLACA ADOBADA AL ALMA DE 2.22 cm ( $3/8''$ ) (SI SE APLICA LA EC. 10 CON  $w = 3330$ ) (GRUESO TOTAL = 2.22 + 1.11 = 3.33 cm). SE OBTIENE  $\bar{Z}_{AV} = 1348 \text{ Kg/cm}^2 = \bar{Z}_y$ .

EN GENERAL, DEBE DEVISARSE QUE LA PLACA ADOBADA NO FALLE POR PANDEO POR CORTANTE.



EN LA ZONA DE LA PLACA DE REFUERZO CONVIENE UTILIZAR SOLDADURAS DE PENETRACIÓN COMPLETA EN ELLA Y EN EL ALMA, PARA DESARROLLAR SU RESISTENCIA INTEGRAL, Y REFORZARLA CON

CORDONES PARA AUMENTAR LA DISTANCIA  $R$ .

### ATIESADORES HORIZONTALES

#### 1. FRENTE AL PATÍN COMPRIMIDO

$$\text{Ec. 13. } w_{\text{req}} = \frac{A_f}{t_b + 5R_c} = \frac{17.9 \times 1.43}{1.43 + 5 \times 2.86} = 1.63 \text{ cm} < 3.33$$

$$\text{Ec. 14. } w \geq d_c \sqrt{f_y} / 1509 = 35.6 \sqrt{2530} / 1509 = 1.19 \text{ cm} < 3.33$$

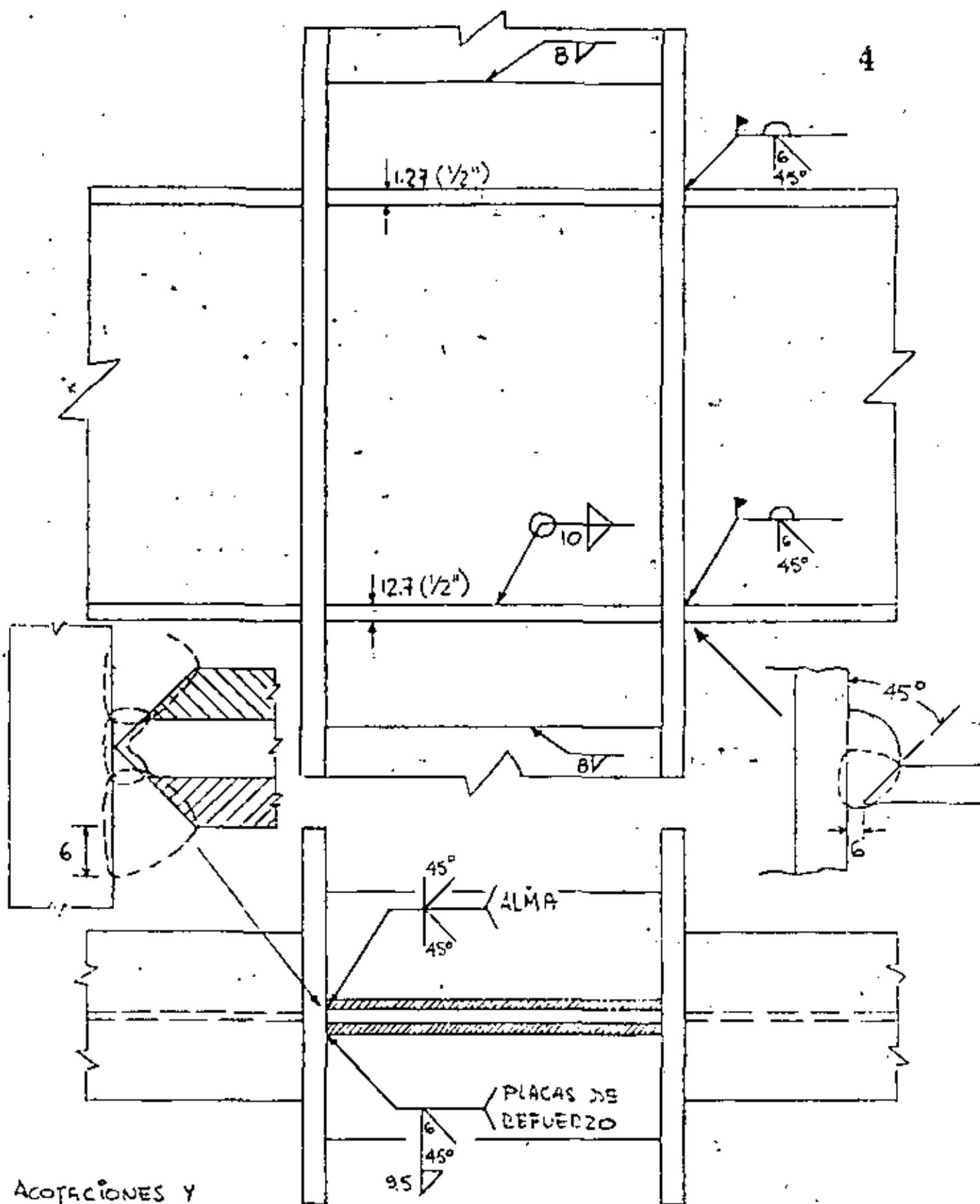
NO SE NECESITAN ATIESADORES

#### 2. FRENTE AL PATÍN EN TENSIÓN

$$\text{Ec. 15. } t_c = 0.4 \sqrt{A_f} = 0.4 \sqrt{17.9 \times 1.43} = 2.02 \text{ cm} > 1.91$$

SE NECESITAN ATIESADORES. SE COLOCARÁN DE UN TAMAÑO

MÍNIMO, PARA EVITAR LA FLEXIÓN DE LOS PATINES DE LA COLUMNA.



ACOTACIONES Y  
TAMAÑOS DE  
SOLDADURA EN  
MM.

DOS PLACAS DE REFUERZO DE 14.3 MM (7/16") C/U.

SE COLOCAN ATORNILLOS HORIZONTALES FRENTE A LOS DOS  
PATINES DE LAS VIGAS TENIENDO EN CUENTA QUE DURANTE UN TE

# A Method for the Plastic Design of Unbraced Multistory Frames

OSCAR DE BUEN

In a building without vertical bracing or shear walls, the frames must be able to resist gravity loads and the combination of vertical and horizontal loads, plus second order effects due to vertical load-lateral displacement interaction. Besides, frame stiffness must be sufficient to keep lateral displacements under working loads below maximum allowable values.

Two different load factors are used in plastic design—one for vertical loads only and a smaller one for the combination of vertical permanent and horizontal accidental loads. Design of two or three stories at the top of unbraced buildings is generally governed by gravity loads, because the beams and columns necessary to support vertical loads are also able to resist gravity plus horizontal loads under a reduced load factor. The importance of horizontal forces increases in lower stories, and their design is governed by the combination of both types of loads.

Design of upper stories is usually made with no consideration of lateral displacements. A revision is carried out later in order to verify that the overall critical load is not smaller than the collapse mechanism load. If necessary, the structure is modified or the critical load is taken as the limit of structural usefulness.

When design is governed by combined gravity and lateral loads, collapse takes place by instability, characterized by increasing lateral displacements under horizontal loads that grow to a maximum and decrease afterwards. Behavior of the structure can be ascertained studying the formation of successive plastic hinges due to increasing horizontal forces which act upon the structure, loaded from the beginning with complete factored vertical loads. Beams and columns are assumed to remain in the elastic range between plastic hinges. Influence of axial loads on column bending strength, second order moments, and compatibility conditions must be taken into account.

A method for the design of beams and columns in stories of regular frames governed by the combination of gravity and lateral loads is presented in this paper. To this end,

*Oscar de Buen is Professor of Civil Engineering, National University of Mexico, and a Consulting Engineer, Mexico City.*

horizontal load-lateral displacement curves ( $Q-\Delta$  curves) corresponding to preliminary sizes of beams and columns are plotted for all or some of the stories. If the story behavior, as depicted by the  $Q-\Delta$  curve, is not satisfactory from the point of view of strength or lateral stiffness, preliminary sizes are modified and a new curve is plotted.

The method can be easily programmed for use in computerized plastic design. Nevertheless, one of the main advantages of the method is its simplicity, which makes it suitable for simple manual computations. It is, therefore, a powerful tool for the design of medium size, regular buildings that do not justify the use of computers, and for the approximate revision of buildings designed by computer, employing elastic or plastic methods.

The method described in this paper is related to a method originally developed at Lehigh University,<sup>1-5</sup> which was later simplified by the writer and others.<sup>6-9</sup> The amount of numerical work is drastically reduced, although keeping enough accuracy for practical purposes, and computations are systematized by arranging them in tabular form. Besides, the method is based on the condition that plastic hinges shall appear only in beams (with the exception of column bases). This condition is in accordance with modern design philosophy, especially in seismic areas.

## SECOND-ORDER ANALYSIS

Analysis of multistory rigid frames has traditionally been made using first-order elastic theory, but second-order effects can be significant, especially in unbraced frames.

In current design practice, second-order effects are usually considered, in an indirect and approximate way, by using interaction equations for column design. Moments computed by a first-order elastic or plastic analysis are more or less arbitrarily amplified, and effective lengths longer than actual lengths are used. Beams are designed using the original first-order moments.<sup>10</sup> Incorrect results are obtained when each column is treated individually, especially if the frames are geometrically irregular or column and beam stiffnesses change considerably in each story or in adjacent stories. Also, design of beams to support first-order

moments is irrational, as they have to equilibrate the amplified moments that columns apply to the joints.

The number of factors that has to be taken into account in an exact elastoplastic second-order analysis is high, but most of them are usually neglected in ordinary design problems.<sup>11,12</sup> The two most important factors in multistory frame behavior are formation of an increasing number of plastic hinges and interaction of vertical loads and story lateral displacements ( $P\Delta$  effect). Only these two factors will be considered in this paper.

EVALUATION OF  $P\Delta$  EFFECTS

$P\Delta$  effects can be evaluated making a first-order analysis of the structure under actual vertical loads and horizontal loads, increased in the amount necessary to reproduce, approximately, second-order effects.

The fictitious additional shear force,  $V_i$ , that has to be applied to story  $i$  of a multistory frame is given by

$$V_i = \frac{P_i}{h_i} \Delta_{i,i-1} \quad (1)$$

where

- $P_i$  = weight of the level under consideration plus every level above it
- $\Delta_{i,i-1}$  = relative horizontal displacement between the upper and lower levels of the story
- $h_i$  = story height (Fig. 1)

BASIC EQUATIONS

Columns in any story of a building subjected to the combined action of gravity loads and horizontal wind or earthquake forces must resist bending moments produced by the horizontal shear force  $Q$ , plus those due to the total vertical load  $P$  acting upon the laterally deformed structure (Fig. 2).  $P\Delta$  moments are similar to those produced by a fictitious shear force  $P\Delta/h$ .

$P$  and  $\Delta$  are equal to  $P_i$  and  $\Delta_{i,i-1}$  in Eq. (1). Equilibrium of horizontal loads gives:

$$\Sigma M_c = Qh + P\Delta \quad (2)$$



Fig. 1. Lateral displacement of a multistory rigid frame

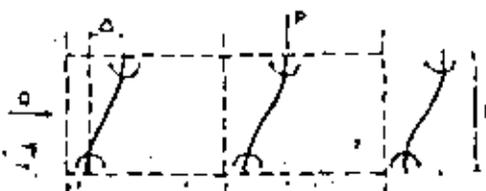


Fig. 2. Forces which produce bending in columns

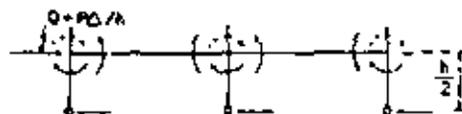


Fig. 3. Substructure corresponding to an intermediate story (vertical loads not shown)

$$Q = \frac{\Sigma M_c}{h} - P \frac{\Delta}{h} \quad (3)$$

$\Sigma M_c$  is the sum of the moments in both ends of all columns in the story.

Equation (3) shows clearly that the  $P\Delta$  effect reduces the structure's capability to resist lateral load.

The substructure in Fig. 3 is obtained assuming that the point of inflection in each column is at mid-height of the column<sup>2,8</sup> and isolating the upper part of the story. The  $P\Delta$  effect is included by increasing the horizontal load. Vertical loads are not shown.

From the equilibrium of horizontal forces:

$$\Sigma M_c = \left( Q + P \frac{\Delta}{h} \right) \frac{h}{2} = \frac{Qh}{2} + P \frac{\Delta}{2} \quad (4)$$

In this equation, and in the rest of the paper,  $\Sigma M_c$  refers only to the moments acting in the upper end of the story columns.

Joint moments are also in equilibrium; then,

$$\Sigma M_c = (\Sigma M_c)_L + (\Sigma M_c)_U$$

where  $\Sigma M_c$  is the sum of moments at both ends of every beam in the level under study, due to horizontal forces, including the fictitious one,  $P\Delta/h$ , and  $(\Sigma M_c)_L$  and  $(\Sigma M_c)_U$  are the sums of moments at the ends of the columns connecting to the joints of that level, below and above it, also due to horizontal loads.

Assuming that  $(\Sigma M_c)_U = (\Sigma M_c)_L = \Sigma M_c$ ,

$$\Sigma M_c = 2\Sigma M_c \quad (5)$$

The assumption that leads to Eq. (5) is conservative, but sufficiently accurate for design purposes.<sup>2</sup>

From Eqs. (4) and (5),  $Q = (\Sigma M_c - P\Delta/2)/(h/2)$  and  $\Sigma M_c = \Sigma M_c/2$ ; then,

$$Q = \frac{\Sigma M_c - P\Delta}{h} = \frac{\Sigma M_c}{h} - \frac{P\Delta}{h} \quad (6)$$

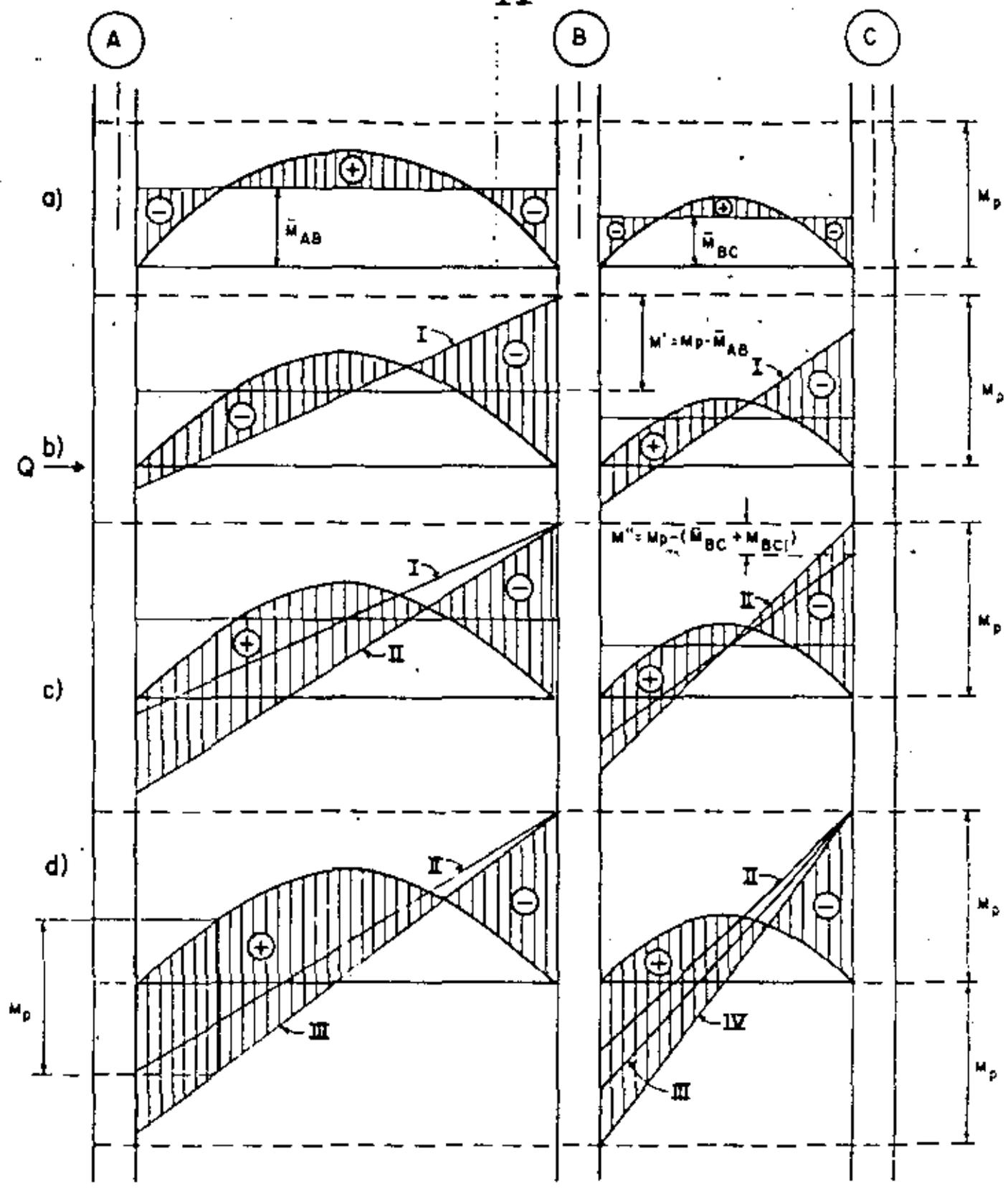


Fig. 3. Bending moment diagrams for the different loading stages

Application of slope-deflection equations to an isolated column leads to<sup>6,8</sup>

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{\Sigma M_p h}{12EI_c} + \theta \quad (7)$$

where  $\Sigma M_p$  is the end moment of the beam that connects to an exterior column, or the sum of the end moments of two beams if it is an interior one;  $\theta$  is the angle of rotation at the column's upper end, and  $I_c$  its moment of inertia.

To obtain Eq. (7) it has been assumed that the column behaves elastically and that its stiffness is independent of the axial load. Neither assumption is strictly true, but they do not introduce significant errors in columns with slenderness ratios and axial loads in the range which is usual in buildings.<sup>8</sup>

Equation (7) can be generalized to cover the complete story:

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{h}{12E} \Sigma \frac{M_p}{I_c} + \theta \quad (8)$$

$\Sigma M_p$  is now the sum of moments at both ends of all beams in the level, and  $\Sigma I_c$  is the sum of moments of inertia of all the columns that contribute to the story's lateral stiffness. It has been assumed that  $\theta$  is the same for every joint in the level.<sup>8</sup>

Equation (8) can finally be written as:

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{h}{12E \Sigma I_c} \Sigma M_p + \theta \quad (9)$$

188

The two basic equations to obtain the  $Q-\Delta$  curve are Eqs. (6) and (9), developed for a complete building story. They are applied to an isolated frame in the numerical examples at the end of this paper.

#### Q- $\Delta$ CURVE OF A STORY

Loads initially applied to the story are the working gravity loads multiplied by the load factor corresponding to the combination of permanent and accidental loads. Bending moment diagrams are determined using clear beam spans and assuming no rotation at the joints. Unbalanced moments are resisted by the columns meeting at each joint (Fig. 4a).

Upon application of the horizontal load the story deflects laterally and additional moments have to be computed and added to those due to vertical load (Fig. 4b).

The first stage in the loading process ends with the formation of the first plastic hinge. It develops at the leeward end of one of the girders, where vertical and horizontal load moments are additive. The horizontal load additional moment necessary to develop a plastic hinge at the leeward end of each girder is  $M' = M_p - \bar{M}$ , where  $M_p$  and  $\bar{M}$  are the girder plastic moment and fixed end moment.

The joint rotation corresponding to each  $M'$  moment is now computed:

$$M' = S\theta' = C_1 EK\theta' \quad (10)$$

$$\theta' = M'/C_1 EK$$

where  $S$  is the girder stiffness and  $C_1$  a numerical factor.

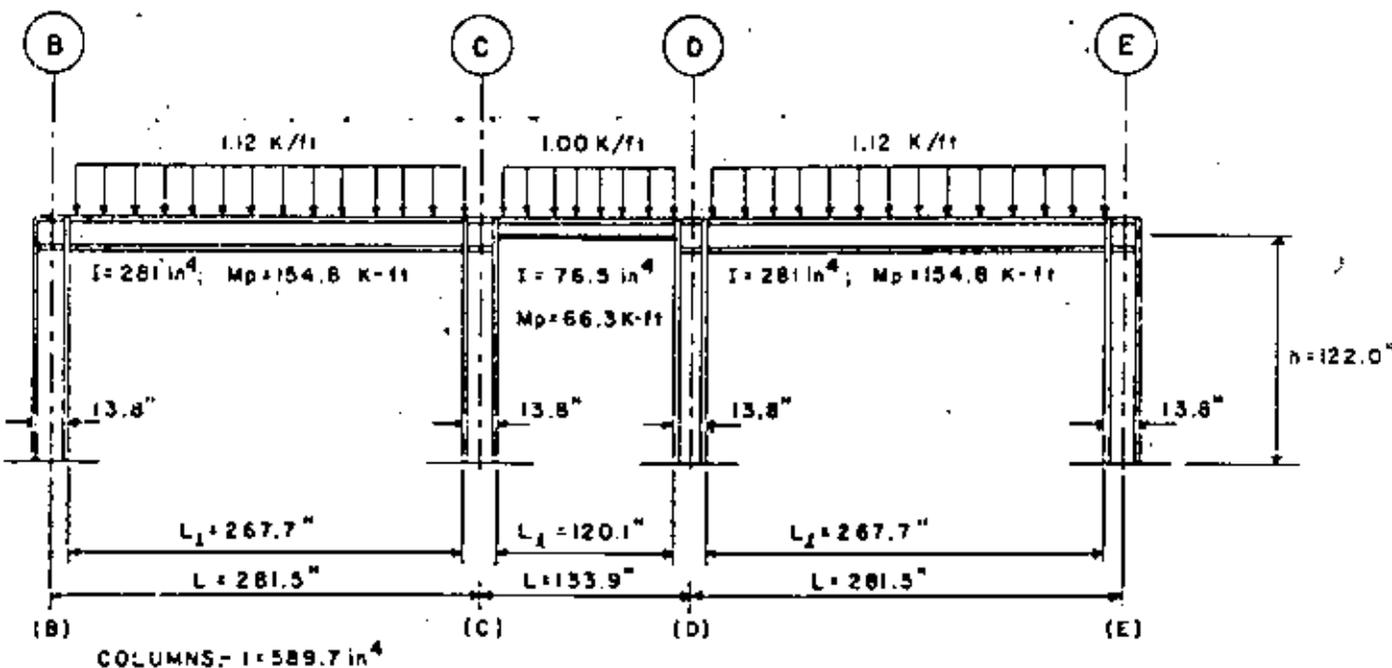
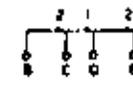
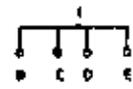


Fig. 5. Frame analyzed in illustrative example No. 1

Table 1

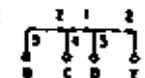
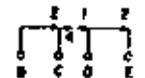
ROW	CONCEPT	UNITS	SEQUENCE OF PLASTIC HINGE FORMATION							
			(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)		
1	H	K	122.0							
2	PI TOTAL LOAD	Kips	502.2							
3	$H \times L_1 / L_1$	$\text{in}^3$		1.05			0.64		1.05	
4	$H \times L_1$	K-in		154.8			66.3		154.8	
5	$M_1 \times W L_1^2 / 8$	K-in <sup>2</sup>		69.7			12.5		69.7	
6	$M_1 \times W L_1^2 / 8$	K-in <sup>2</sup>	48.3	48.3	0.3	0.3	48.3	48.3	48.3	
7	$C_1$	—	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	
8	$S_1 \times C_1 \times R_1$	K-in	15225	15225	9280	9280	15225	15225	15225	
9	$M_1 \times M_p \times W$	K-in <sup>2</sup>	108.3	108.3	58.0	58.0	108.3	108.3	108.3	
10	$\theta_1 \times M_1 / S_1$	—	0.00711	0.00711	0.00625	0.00625	0.00711	0.00711	0.00711	
11	$\theta_1$	—	0.00625							
12	$M_1 \times S_1 \theta_1$	K-in	95.2	95.2	58.0	58.0	95.2	95.2	95.2	
13	$\Sigma M_1$	K-in	486.8							
14	$\Sigma I_c$	$\text{in}^4$	2358.8							
15	$(\Delta / L)_1$	—	0.00711							
16	$Q_1$	Kips	45.28							
17	$M_{R1} \times Q_1 \times M_1$	K-in		141.7		66.3		141.7		
18	$M_{L1} \times Q_1 \times M_1$	K-in	-48.7		-48.7			-48.7		
19	$C_2$	—	6.0	6.0	3.0	—	6.0	6.0	6.0	
20	$S_2 \times C_2 \times R_2$	K-in	15225	15225	4840	—	15225	15225	15225	
21	$M_2 \times M_p \times W_2$	K-in <sup>2</sup>		15.1		0		15.1		
22	$M_2 \times M_p \times W_2$	K-in <sup>2</sup>	106.1		18.6		106.1		106.1	
23	$\theta_2 \times M_2 / S_2$	—	0.00697	0.00696	0.00358	—	0.00697	0.00697	0.00697	
24	$\theta_2$	—	0.00086							
25	$M_2 \times S_2 \theta_2$	K-in	15.1	15.1	4.0	—	15.1	15.1	15.1	
26	$\Sigma M_2$	K-in	56.4							
27	$\Sigma I_c$	$\text{in}^4$	2358.8							
28	$(\Delta / L)_2$	—	0.00096							
29	$Q_2$	Kips	5.1							
30	$(\Delta / L)_1$	—	0.00810							
31	$Q_1 + Q_2 \times Q_2$	Kips	50.38							
32	$M_{R2} \times M_1 \times M_2$	K-in		154.8		66.3		154.8		
33	$M_{L2} \times M_1 \times M_2$	K-in	-16.8		-16.8			-16.8		



189

Table 1 (cont'd)

ROW	CONCEPT	UNITS	SEQUENCE OF PLASTIC HINGE FORMATION				
			(B)	(C)	(D)		
34	$C_3$	—	3 0	—	3 0	—	—
35	$S_3 \cdot C_3 E_3$	K-FI	7612 3	—	4640	—	7612 3
36	$M_R^1 \cdot M_P \cdot M_{R2}$	K-FI	—	0	—	0	—
37	$M_C^1 \cdot M_P \cdot M_{L2}$	K-FI	93 0	—	12.6	—	93 0
38	$\theta^1 \cdot M^1 / S_3$	—	0 01222	—	0 00277	—	0 01222
39	$\theta_3$	—	0 00272	—	—	—	—
40	$M_3 \cdot S_3 \theta_3$	K-FI	20 7	—	12 6	—	20 7
41	$\Sigma M_3$	K-FI	54 0	—	—	—	—
42	$\Sigma T_3$	K-FI	1789 1	—	—	—	—
43	$(\Delta^1)_3$	—	0 00285	—	—	—	—
44	$\theta_3$	K-FI	3 9	—	—	—	—
45	$(\Delta^1)_T$	—	0 01095	—	—	—	—
46	$\theta_1$	K-FI	34 28	—	—	—	—
47	$M_{L3} \cdot M_{L2} \cdot M_3$	K-FI	—	154 8	—	46 3	—
48	$M_{L3} \cdot M_{L2} \cdot M_3$	K-FI	-82 3	—	-66 3	—	-82 3
49	$C_4$	—	3 0	—	0	—	3 0
50	$S_4 \cdot C_4 E_4$	K-FI	7612 8	—	—	—	7612 8
51	$M_R^1 \cdot M_P \cdot M_{R3}$	K-FI	—	0	—	0	—
52	$M_C^1 \cdot M_P \cdot M_{L3}$	K-FI	72 3	—	—	—	72 3
53	$\theta^1 \cdot M^1 / S_4$	—	0 00950	—	—	—	0 00950
54	$\theta_4$	—	0 00950	—	—	—	—
55	$M_4 \cdot S_4 \theta_4$	K-FI	72 3	—	—	—	72 3
56	$\Sigma M_4$	K-FI	144 6	—	—	—	—
57	$\Sigma T_4$	K-FI	1179 4	—	—	—	—
58	$(\Delta^1)_4$	—	0 01002	—	—	—	—
59	$\theta_4$	K-FI	9 2	—	—	—	—
60	$(\Delta^1)_T$	—	0 02097	—	—	—	—
61	$\theta_T$	K-FI	63 48	—	—	—	—
62	$M_{L4} \cdot M_{L3} \cdot M_4$	K-FI	—	154 8	—	46 3	—
63	$M_{L4} \cdot M_{L3} \cdot M_4$	K-FI	-154 8	—	-66 3	—	-154 8
64	$\Sigma M / L_1$	K-FI	13 88 1	13 88 1	13 25 1	13 25 1	13 88 1
65	$\Sigma L_1 / 2$	K-FI	12 49 1	12 49 1	5 00 1	5 00 1	12 49 1
66	$V$	K-FI	139 1	26 37 1	8 25 1	46 25 1	139 1
67	$\theta / 2$	F	0 58	0 58	0 58	0 58	0 58
68	$M \cdot M_{L1} \cdot M_{L2}$	K-FI	125 6	170 1	71 1	26 9	155 6
69	$\Sigma COL$	K-FI	155 6 72 1	241 2 72 1	120 6	257 3 72 1	116 3



10  
11

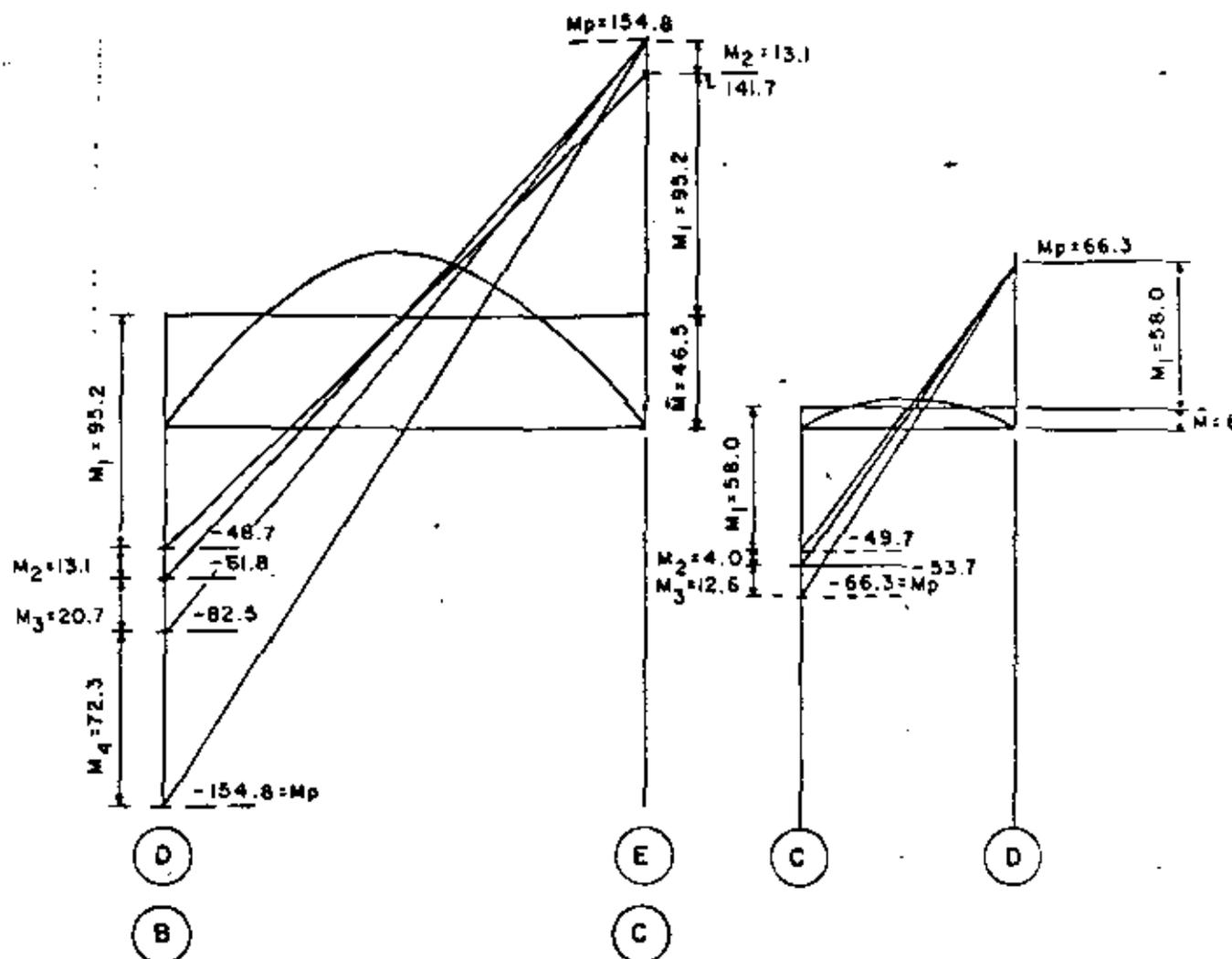


Fig. 6 Bending moment diagrams for illustrative example No. 1

If the girder cross section is constant,  $C_1 = 6$ ,  $K = 1/l$ .

The smallest  $\theta'$  angle is the one corresponding to the first plastic hinge (in Fig. 4 it has been assumed that the first hinge develops at the leeward end of beam AB). When that angle is known, Eq. (10) is used to compute the moments at the ends of each beam corresponding to it. The sum of the beams end moments,  $\Sigma M_i$ , is taken into Eq. (9), and the lateral displacement determined as  $\Delta/h$ . Finally, Eq. (6) gives the horizontal load  $Q$  that produces that displacement. Coordinates of a point in the  $Q-\Delta/h$  curve are now known: the straight line from the origin to that point is a good representation of the first part of the  $Q-\Delta/h$  curve.

The bending moment diagram corresponding to the formation of the first plastic hinge is diagram 1, Fig. 4b.

The second stage is similar to the first, but the stiffness of beam AB is reduced because of the plastic hinge developed at the leeward end (if the moment of inertia of the beam is constant, the stiffness is  $3EI/l = 3EK$ ); also, the

moment at the plastic hinge location does not change. The second stage ends when a new plastic hinge develops at leeward end of beam BC, for instance (Fig. 4c).

In the third stage of the loading process, both beams and plastic hinges at the leeward end, and column C does not contribute any longer to the story's lateral rigidity. Moment of inertia is not included in  $\Sigma I_c$ , Eq. (9).

A number of plastic hinges sufficient to transform the story into a mechanism eventually develops (Fig. 4d). Up to then, the  $Q-\Delta/h$  curve consists of several straight lines connecting the points which represent the termination of each stage. Upon formation of the mechanism, the relationship between horizontal load and lateral displacement is given by a descending straight line that passes through the point corresponding to the last plastic hinge. The equation of this line is:

$$Q = -\frac{P\Delta}{h} + \frac{M_i}{h}$$

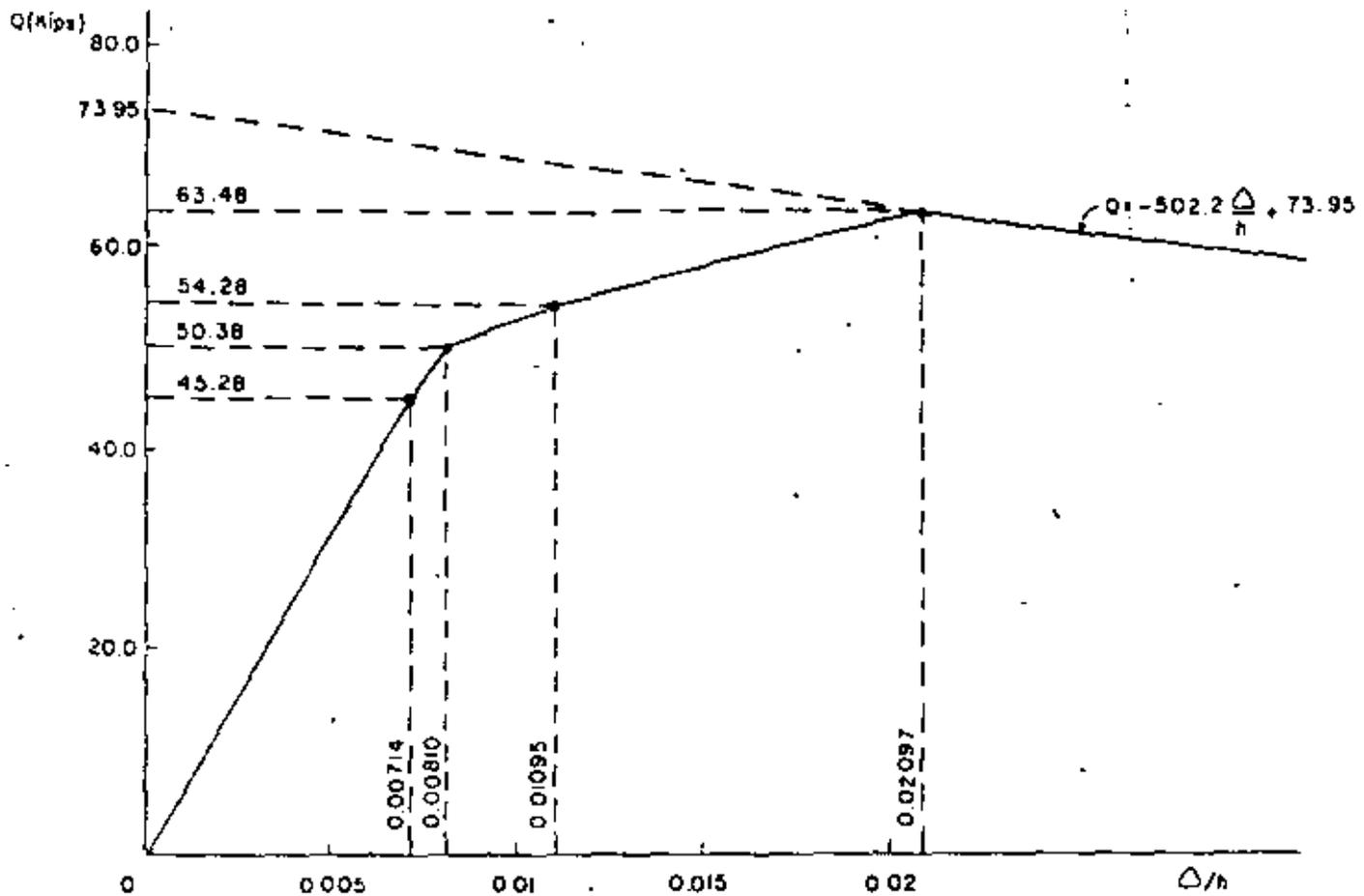


Fig. 7. Horizontal load-lateral deflection curve for illustrative example No. 1

where  $M_r$  is the total restraining moment provided by all of the beams in the story when the last plastic hinge develops.

The complete horizontal load-lateral displacement curve can now be plotted.

Numerical solution of a given problem is considerably facilitated by tabulating the computations, as shown in the illustrative example. It is generally convenient to plot simultaneously the bending moment diagrams, as in Fig. 4, to check the numerical results. The diagram is necessary if the second plastic hinge in one or more beams develops in an intermediate section, instead of the windward end, because the hinge position and windward moment are then graphically determined (Fig. 4d). Also, bending moment diagrams are necessary when the beams and the floor slab work as composite members, in order to find the zones of positive and negative bending moment.\*

\* A paper on this topic will be submitted for publication in the near future.

## COLUMN DESIGN

Columns must be able to resist axial loads and bending moments applied to them by the beams until formation of the story collapse mechanism. The moments at the column faces must be increased by  $Vd/2$  to obtain the design moments at the column center line, where  $V$  is the shear force at the girder end and  $d$  is the column depth.

As the  $P\Delta$  effect has already been considered, column sizes are checked using a formula for beam-columns whose ends can not displace laterally.

If the designer wants to make sure that no plastic hinges will develop at the column ends, he can use a load factor bigger than that employed in beam design (if this precaution is not taken, some plastic hinges can possibly develop in the columns because of differences between the assumed and actual response of the structure and factors not considered in analysis and design, such as differences between real and specified yield points or handbook and actual geometric properties of rolled shapes).

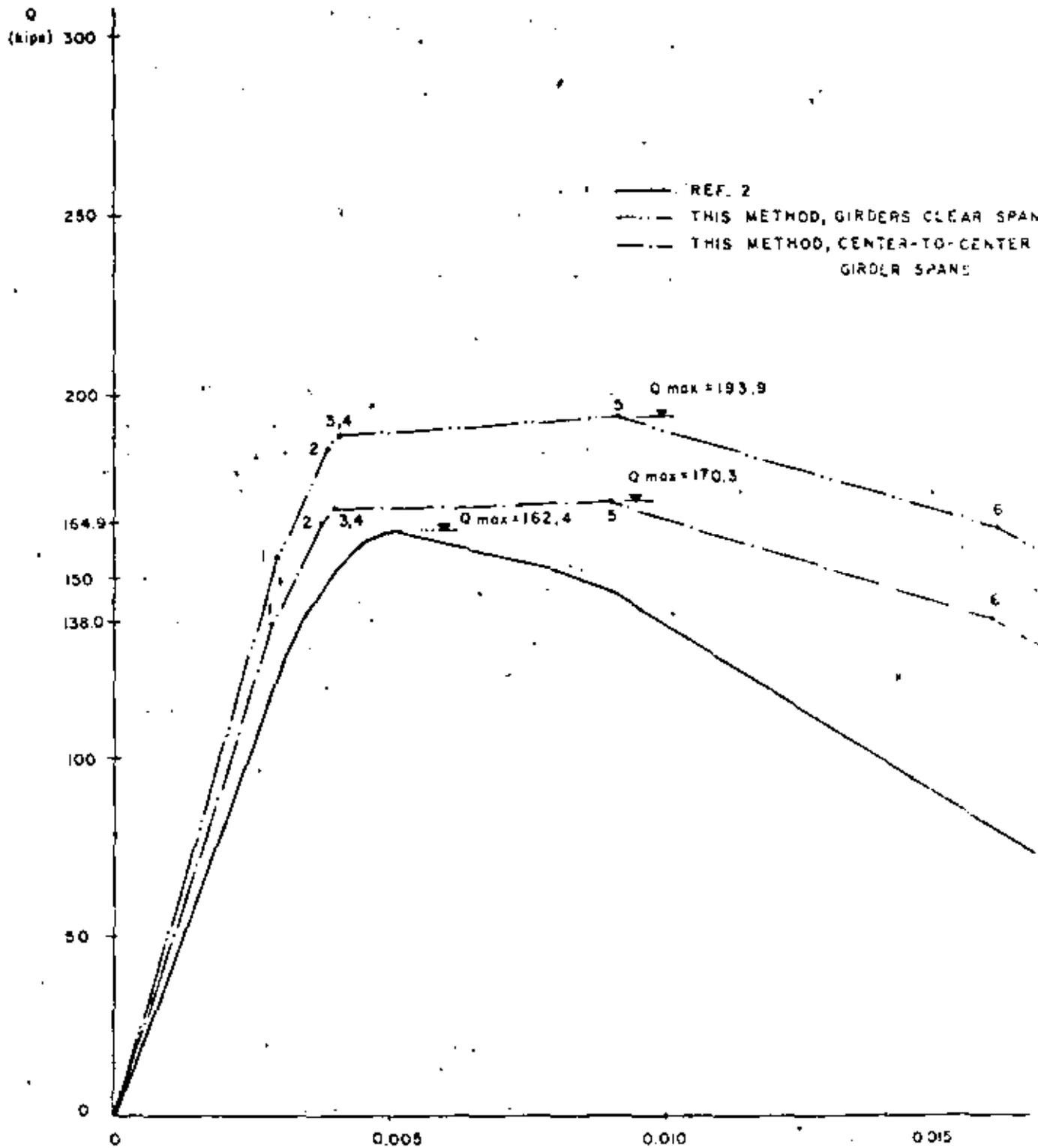
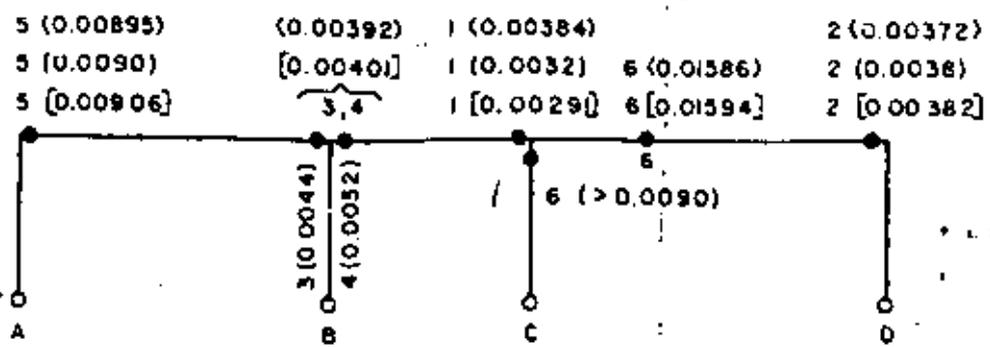


Fig. 8. Horizontal load—lateral deflection curves for illustrative example No. 2



[ ] THIS METHOD, GIRDERS CLEAR SPANS  
 ( ) THIS METHOD, CENTER-TO-CENTER SPANS  
 ( ) REF. 2

Fig. 9. Sequences of plastic hinge formation for illustrative example No. 2

ILLUSTRATIVE EXAMPLES

Example 1—Figure 5 shows a story of a multistory frame belonging to a building which was designed by the allowable stress method in the writer's office. Vertical loads are multiplied by the load factor corresponding to the combination of vertical permanent and horizontal accidental loads.

Computations are shown in Table 1, bending moment diagrams for every loading stage are depicted in Fig. 6, and the horizontal load-lateral deflection curve is shown in Fig. 7.

Example 2—The structure used as an illustrative example in Ref. 2 was analyzed in the following two ways, using the method described in this paper:

- (a) Employing the clear spans of girders, as suggested in this paper.
- (b) Computing restraining moments using center-to-center girder spans, as in Ref. 2.

Results of both analyses are shown in Figs. 8 and 9, which also contain the  $Q-\Delta$  curve and the sequence of plastic hinge formation found in Ref. 2. Agreement is fairly good. It is the writer's belief that results based on clear spans are closer to the structure's true behavior.

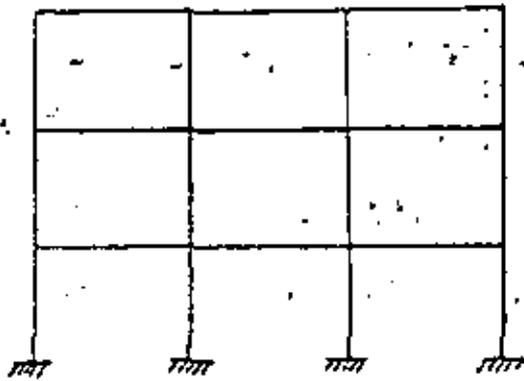
REFERENCES

1. Driscoll, G. J., Jr. et al. Plastic Design of Multi-Story Frames. *Lecture Notes and Design Aids, Report No. 273-20 and 273-21, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, 1965*.
2. Daniels, J. H. and L. W. Lu. The Subassembly Method of Designing Unbraced Multi-Story Frames. *Report No.*

- 273-37, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, March 1966.
3. Daniels, J. H. and L. W. Lu. Design Charts for the Subassembly Method of Designing Multi-Story Frames. *Report No. 273-54, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Dec. 1966*.
4. Daniels, J. H. A Plastic Method for Unbraced Frame Design. *Engineering Journal, AISC, Vol. 3, No. 2 (Oct. 1966)*.
5. Driscoll, G. C., J. O. Armacost and W. C. Hansell. Plastic Design of Multi-Story Frames by Computer. *Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 90, No. ST1, Jan. 1970*.
6. De Buen, O. Diseño plástico de marcos rígidos, no contra-venteados. *II Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Veracruz, May 1968*.
7. De Buen, O. Antiseismic Design of Multi-Story Steel Frames by Plastic Methods. *IV World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, Jan. 1969*.
8. De Buen, O. A Modification to the Subassembly Method of Designing Unbraced Multi-Story Frames. *Engineering Journal, AISC, Vol. 6, No. 2, Oct. 1969*.
9. Duque, R. O. Applied Plastic Design of Unbraced Multistory Frames. *Engineering Journal, AISC, Vol. 8, No. 2, Oct. 1971*.
10. Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings. *AISC, Feb. 1969 (including Supplements 1, 2 and 3, adopted Nov. 1970, Dec. 1971, and June 1974)*.
11. Mac Gregor, J. G. Stability of Reinforced Concrete Building Frames. *State of Art Report No. 1, Technical Committee No. 23, International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Aug. 1972*.
12. Adams, P. F. Stability of Three-Dimensional Building Frames. *State of Art Report No. 4, Technical Committee No. 16, International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Aug. 1972*.

# FACTORES DE DUCTILIDAD $Q$ DE ESTRUCTURAS TIPO 1. (REGLAMENTO DE LAS CONSTRUCCIONES PARA EL D.F., 1976)

CASO 1:  $Q = 6.0$



† LA RESISTENCIA ES SUMINISTRADA EN TODOS LOS NIVELES EXCLUSIVAMENTE POR MARCOS NO CONTRAVENTEAOS DE CONCRETO REFORZADO O DE ACERO CON ZONA DE FLUENCIA DEFINIDA.

† LAS VIGAS Y COLUMNAS DE ACERO CUMPLEN LOS REQUISITOS CORRESPONDIENTES A SECCIONES COMPACTAS (BASTA QUE ESTOS REQUISITOS SE SATISFAGAN EN LOS LUGARES EN QUE SE FORMARÍAN ROTURAS PLÁSTICAS LIGADAS AL MECANISMO DE COLAPSO; CONVIENE QUE SE FORMEN EN LAS VIGAS).

† LAS JUNTAS DE MARCOS DE ACERO DEBEN SER CAPACES DE ADMITIR ROTACIONES IMPORTANTES ANTES DE FALLAR. (O TENER DEFICIENCIA SUFICIENTE PARA QUE LAS ROTACIONES SE PRESENTEN EN LOS EXTREMOS DE LOS MIEMBROS QUE CONCURREN EN ELLAS).

† LAS COLUMNAS DE CONCRETO SON ZUNCHADAS, O POSEEN ESTACOS QUE PROPORCIONAN AL NÚCLEO UN CONFINAMIENTO EQUIVALENTE AL DEL ZUNCHO.

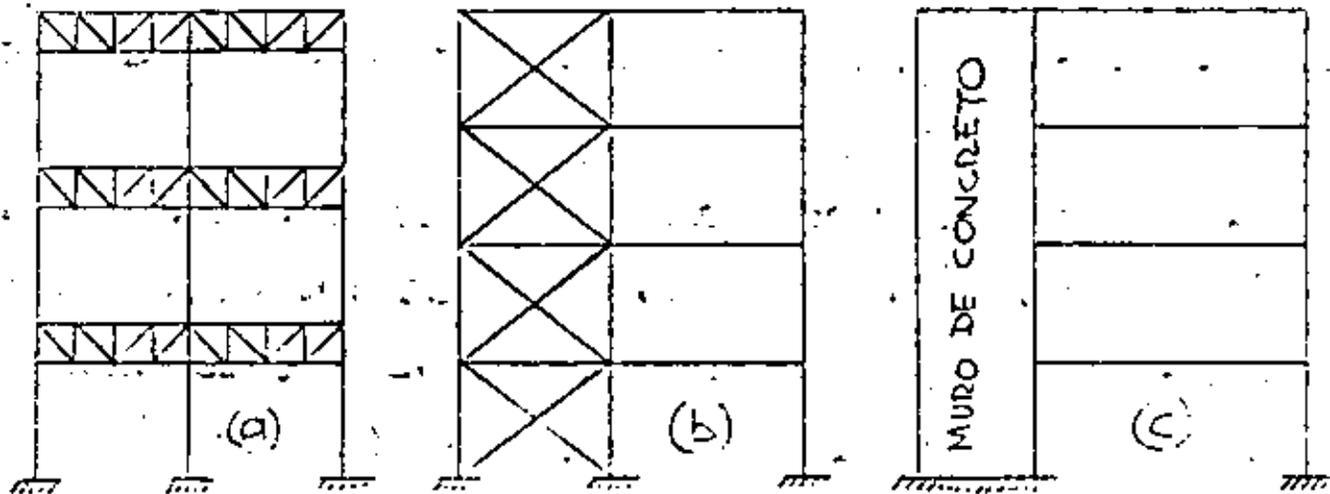
† EL FACTOR DE CARGA JUNTO A LA FALLA POR CORTANTES, TORSIÓN, PANDEO, ETC (EN GENERAL, CONTA TODAS LAS FORMAS DE FALLA NO DÚCTILES), DEBE SER  $1.4$  EN VEZ DE  $1.1$ .

† LOS EXTREMOS DE TRABES Y COLUMNAS DE CONCRETO, Y LAS ZONAS EN QUE SE FORMARÍAN LAS ARTICULACIONES

PLÁSTICAS NECESARIAS PARA QUE EN CADA ENTREPISO DE MARCO SE FORME UN MECANISMO DE COLAPSO, SI LA FUERZA LATERAL ES SUFICIENTEMENTE ELEVADA, CUMPLEN LOS REQ PARA QUE PUEDAN FORMARSE ARTICULACIONES PLÁSTICAS.

† EL MÍNIMO COCIENTE DE LA RESISTENCIA TOTAL DE CADA ENTREPISO, CALCULADA TOMANDO EN CUENTA TODOS LOS ELEMENTOS QUE CONTRIBUYEN A ELLA, DIVIDIDA ENTRE LA ACCIÓN DE DISEÑO, NO DEBE DIFERIR EN MÁS DE 20% DEL PROMEDIO DE ESOS COCIENTES PARA TODOS LOS ENTREPISOS.

CASO 2 :  $Q = 4.0'$



† LA RESISTENCIA ES SUMINISTRADA EN TODOS LOS NIVELES EXCLUSIVAMENTE POR MARCOS NO CONTRAVENTENOS DE CONCRETO, ACERO O MADERA, CON O SIN ZONA DE FLUENCIA DEFINIDA (EL ACERO ESTRUCTURAL TIENE CASI SIEMPRE UNA ZONA DE FLUENCIA DEFINIDA, PERO LOS MIEMBROS HECHOS CON ÉL PUEDEN FALLEAR. EJEMPLOS, LAS BARRAS COMPLICADAS DE ALMAJURAS Y LAS SECCIONES CON RELACIONES  $b/c$  ELEVADAS), O POR MARCOS CONTRAVENTES O CON MURDOS DE CONCRETO CUYA RESISTENCIA, SIN CONTAR

NI CONTRAVIENTOS, DEBEN SUMAR MENOS EL 20% DE LA TOTAL.

17

EL MÍNIMO COCIENTE DE LA RESISTENCIA TOTAL DE CADA ENTREPISO, DIVIDIDA ENTRE LA ACCIÓN DE DISEÑO, NO DEBE DIFERIR EN MÁS DEL 35% DEL PROMEDIO DE ESOS COCIENTES PARA TODOS LOS ENTREPISOS.

(EL VALOR DEL FACTOR DE DUCTILIDAD  $Q$  DISMINUYE PORQUE SE CONSIDERA QUE LA FALLA, EN CASO DE OCURRIR, NO SERÍA POR FORMACIÓN DE UN MECANISMO, POR LO QUE LA DUCTILIDAD Y CAPACIDAD DE ABSORCIÓN DE ENERGÍA DE LA ESTRUCTURA DECRETAN CONSIDERABLEMENTE EN RELACIÓN CON LAS DEL CASO 1).

(NO SE PROPORCIONAN VALORES DE  $Q$  PARA EL CASO 2a CUANDO SE DISEÑAN LAS ARMAZONAS DE MANERA QUE SU FALLA SEA PRECEDIDA POR DEFORMACIONES PLÁSTICAS IMPORTANTES DE LAS BARRAS EN TENSIÓN NI PARA EL CASO 2b CON DIAGONALES DE CONTRAVIENTOS EXCÉNTRICAS)

CASO 3 :  $Q = 2.0$

LA RESISTENCIA A FUERZAS LATERALES ES PROPORCIONAL POR MARCO O COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO, ACERO O ALUMINIO CONTRAVIENTADOS O NO, O POR MULLOS DE CONCRETO, QUE NO CUMPLEN EN ALGÚN ENTREPISO LOS REQUISITOS ESPECÍFICOS PARA LOS CASOS 1 Y 2, O POR MULLOS DE MAMPOLTERÍA DE PIEDRAS MACIZAS CONTINUADAS POR CASTILLOS, DALAS, COLUMNAS O TERREOS DE CONCRETO REFORZADO O DE ACERO.

CASO 4:  $Q = 10$

† LA RESISTENCIA A FUERZAS LATERALES ES SUMINISTRADA EN TODOS LOS NIVELES POR MUROS DE MAMPOSTERÍA DE PIEZAS CONTINADAS O CON REFUERZO INTERIOR, O POR COMBINACIONES DE ESOS MUROS CON ELEMENTOS COMO LOS DESCRITOS PARA LOS CASOS 1 A 3.

CASO 5:  $Q = 10$   
(PARA TIPOS DE ESTRUCTURACIÓN 1 A 4)

† ESTRUCTURAS DE CUALQUIER TIPO CUYA RESISTENCIA A FUERZAS LATERALES SEA PROPORCIONADA, AL MENOS PARCIALMENTE, POR ELEMENTOS O MATERIALES DIFERENTES DE LOS ESPECIFICADOS EN LOS CASOS 1 A 4, A MENOS QUE SE HAGA UN ESTUDIO QUE DEMUESTRE QUE SE PUEDE EMPLEAR UN VALOR MÁS ALTO.

DESDE EL PUNTO DE VISTA DE "RESISTENCIA" CONVIENEN LAS ESTRUCTURAS QUE TIENEN UN FACTOR  $Q$  ALTO; SIN EMBARGO, EN ELLAS PUEDEN TENERSE DIFICULTADES PARA CONTROLAR LAS DEFORMACIONES BAJO CARGAS DE TRABAJO.

ESTADO LÍMITE POR DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES. LAS DEFORMACIONES LATERALES DE CADA ENTREPISO DEBIDAS A FUERZA CORTANTE NO EXCEDERÁN DE 0.008 VECES LA ALTURA DEL ENTREPISO, SALVO CUANDO LOS ELEMENTOS QUE NO FORMAN PARTE INTEGRANTE DE LA ESTRUCTURA ESTÉN LIGADOS A ELLA EN TAL FORMA QUE NO SUFRAN DAÑOS POR LAS DEFORMACIONES DE LA MISMA. EN ESTE CASO, LAS DEFORMACIONES NO EXCEDERÁN DE 0.016. EN EL CÁLCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS SE TOMARÁN EN CUENTA TODOS LOS ELEMENTOS QUE CONTRIBUYAN A LA RIGIDEZ LATERAL DE LA CONSTRUCCIÓN.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE DINAMICA ESTRUCTURAL

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

AGOSTO, 1983

## 5. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE DINAMICA ESTRUCTURAL

### 5.1 *Grados de libertad*

Desde el punto de vista dinámico, los grados de libertad que interesan son aquellos en los que se consideran fuerzas generalizadas de inercia; es decir, fuerzas iguales a masa por aceleración y momentos iguales al momento de inercia de masa por aceleración angular. Por ejemplo, en la fig 5.1 se muestra un marco que, de acuerdo con la definición de grados de libertad dada en la sección 1.2.1 de este manual, tiene 10 grados de libertad si se ignoran las deformaciones axiales en las vigas; sin embargo, si las fuerzas de inercia importantes son solamente las que generan las masas  $m_1$  y  $m_2$  al moverse lateralmente, entonces en dinámica se habla de un sistema de dos grados de libertad, que son precisamente los desplazamientos laterales 1 y 2. Esto no implica que en los restantes grados de libertad los giros y desplazamientos correspondientes se anulen; además, la matriz de rigideces de la estructura, que sería de  $10 \times 10$ , se puede transformar a una de  $2 \times 2$  (expresada en función de los grados de libertad 1 y 2), denominada matriz de rigideces lateral, mediante el proceso de condensación estática descrito también en la sección 1.2.1, véase la expresión 1.19.

En lo que sigue de este capítulo al hablar de cierto número de grados de libertad se alude solo a aquellos en que existen fuerzas generalizadas de inercia.

Como el título del capítulo lo señala, aquí se tratan solo las ideas fundamentales. Existen presentaciones mucho más completas de la dinámica estructural, por ejemplo, las hechas en las ref 35 a 39.

## 5.2 *Sistemas de un grado de libertad*

### 5.2.1 Descripción y ecuación de equilibrio dinámico

Considérese el sistema mostrado en la fig 5.2, el cual está constituido por una masa concentrada que puede tener un desplazamiento horizontal  $u$ , ligada a la base (que puede tener un movimiento horizontal  $s_0$ ) mediante un elemento elástico y un amortiguador. El sistema tiene, por tanto, un solo grado de libertad.

En cierto instante en que la masa y su base están moviéndose, en la ecuación de equilibrio dinámico intervienen la fuerza de inercia, igual a la masa por su aceleración absoluta  $\ddot{x}$ , la fuerza de rigidez y la fuerza de amortiguamiento. El caso más sencillo es aquel en el cual la fuerza de rigidez y de amortiguamiento son, respectivamente, proporcionales al desplazamiento  $u$  y a la velocidad  $\dot{u}$  de la masa con respecto a su base. Sean  $k$  y  $c$  las correspondientes constantes de proporcionalidad que se supone que no cambian con el tiempo. Este conjunto constituye un sistema lineal de un grado de libertad, con amortiguamiento viscoso o lineal.

En estas circunstancias, usando el principio de D'Alembert, la ecuación de equilibrio dinámico es

$$m \ddot{x} + c \dot{u} + k u = 0$$

Considerando que  $x = s_0 + u$ , la ecuación anterior se puede escribir

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{s}_0 \quad (5.1)$$

El punto sobre una cantidad significa derivación con respecto al tiempo; dividiendo la ec 5.1 entre  $m$  y definiendo  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,  $c_{cr} = 2 \sqrt{k m}$  y  $\xi = c/c_{cr}$  se

llega a:

$$\ddot{u} + 2 \xi \omega \dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{y}_0 \quad (5.2)$$

$\omega$  se denomina frecuencia circular natural del sistema,  $c_{cr}$  se conoce como amortiguamiento crítico y  $\xi$  <sup>que c representa</sup> es la fracción del amortiguamiento crítico y se llama coeficiente o relación de amortiguamiento. El periodo de vibración natural del sistema se calcula como  $2\pi/\omega$ .

### 5.2.2 Vibraciones libres

El sistema descrito en la sección precedente tiene vibraciones libres cuando la masa  $m$  se mueve pero la base permanece inmóvil y no actúan fuerzas exteriores. En este caso el segundo miembro de la ecuación 5.2 se anula y su solución se puede escribir (ref 2)

$$u = u(t) = A e^{-\omega \xi t} \cos \omega_a (t - \alpha) \quad (5.3)$$

$$\text{donde } \omega_a = \sqrt{\omega^2 (1 - \xi^2)}. \quad (5.4)$$

$\omega_a$  es la frecuencia circular natural amortiguada del sistema.

Cuando el amortiguamiento es igual al crítico, es decir cuando  $\xi = 1$ , se tiene  $\omega_a = 0$  y, por tanto,  $u = A e^{-\xi \omega t}$ , lo cual indica que la masa se mueve sin oscilar y vuelve a su posición de equilibrio estático después de un tiempo infinito. Para amortiguamientos menores que el crítico, la ecuación 5.3 describe un movimiento periódico de la masa  $m$ , con frecuencia  $\omega_a$  y con amplitud decreciente  $A e^{-\omega \xi t}$ , como se ilustra en la fig 5.3.

Para estructuras usuales, el valor del amortiguamiento no excede de 10 por ciento del crítico ( $\xi = 0.1$ ); en cuyo caso  $\omega_a = 0.995\omega$ .

Esto muestra que en casos prácticos la influencia del amortiguamiento en la frecuencia de vibración es pequeña. El efecto más importante del amortiguamiento es disminuir la amplitud de dicha vibración conforme avanza el tiempo, según lo expresa el término  $e^{-\omega \xi t}$  de la ec 5.3 y se aprecia en la fig 5.3.

Los valores que asumen  $A$  y  $\alpha$  en la ec 5.3 se determinan a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad del sistema. Si para  $t = 0$  se tiene  $u = u_0$  y  $\dot{u} = \dot{u}_0$ , se puede demostrar que dicha ecuación se convierte en:

$$u = e^{-\xi \omega t} \left( \frac{\dot{u}_0 + \xi \omega u_0}{\omega_a} \sin \omega_a t + u_0 \cos \omega_a t \right) \quad (5.5)$$

### 5.2.3 Respuesta a movimientos de la base (temblores)

Cuando la base del sistema está en movimiento, es necesario resolver la ec 5.2, considerando no nulo el segundo término.

La solución está dada por la siguiente expresión, que proporciona el valor de  $u$  en un instante  $t$  (ref 37).

$$u(t) = \frac{1}{\omega_a} \int_0^t \ddot{s}_0(\tau) \exp\{-\xi \omega (t - \tau)\} \sin \omega_a (t - \tau) d\tau \quad (5.6)$$

La velocidad y la aceleración de la masa se pueden calcular derivando sucesivamente la expresión anterior con respecto al tiempo. Para fines de diseño interesarían los valores máximos absolutos de dichas respuestas.

De las ec 5.6 y 5.4 se desprende que para un temblor conocido (o sea para valores conocidos de  $\ddot{s}_0$  en el tiempo) los valores máximos de  $u$  y de sus derivadas dependen solamente de la frecuencia natural  $\omega$  y del amortiguamiento  $\xi$  del sistema.

Para unas aceleraciones dadas,  $\ddot{s}_0$ , es usual mantener fijo el amortiguamiento e ir calculando alguna respuesta máxima para distintos valores de  $\omega$  (o lo que es lo mismo, para distintos valores del periodo  $T = 2\pi/\omega$ ). Si estas respuestas máximas se grafican teniendo como abscisa el valor del periodo, se obtiene el espectro de la respuesta en cuestión.

En la fig 5.4 se muestra la historia de aceleraciones (es decir la variación de  $\ddot{s}_0$  con el tiempo) del temblor del 29 de noviembre de 1978, registrado en el edificio Hidalgo, Nonoalco, Distrito Federal en terreno compresible (ref 73). Se incluyen las historias de velocidades y desplazamientos que se obtuvieron

integrando sucesivamente  $\ddot{s}_0$ .

En la fig 5.5 se presentan los espectros de la aceleración absoluta ( $\ddot{s}_0 + \ddot{u}$ ) y de la velocidad relativa  $\dot{u}$  del temblor mencionado.

Es frecuente obtener el espectro de desplazamiento  $D$ , y en lugar de las velocidades y aceleraciones dibujar las cantidades  $V = \omega D$  y  $A = \omega^2 D$ , que se denominan espectros de pseudovelocidades y de pseudoaceleraciones, respectivamente. De acuerdo con su definición es posible trazar estos tres últimos espectros ( $D$ ,  $V$  y  $A$ ) en una sola gráfica, con rayado logarítmico en cuatro direcciones, según se hace en la fig 5.5. Este tipo de gráfica se debe a Newmann y ha sido empleado en muchas publicaciones (ref 40, 41 y 42). Es interesante notar que la fuerza máxima en el elemento elástico  $k$  es igual a

$$k D = \frac{k}{m} m D = m \omega^2 D = m A$$

Cualquiera de los espectros de un temblor proporciona los datos necesarios para el diseño de estructuras con un grado de libertad, con solo conocer el período natural y el amortiguamiento de la misma.

### 5.3 *Sistemas de varios grados de libertad*

#### 5.3.1 Alcance

En edificios es usualmente aceptable suponer que las masas están concentradas en los niveles de los pisos y que las fuerzas de inercia importantes son solo las laterales; por ello, lo que sigue se limita a tratar este caso, aunque los conceptos son aplicables a otros sistemas estructurales con masas concentradas cuyos apoyos tienen todos el mismo movimiento.

#### 5.3.2 Ecuaciones de equilibrio dinámico

Considérese el sistema de tres grados de libertad mostrado en la fig 5.6, cuyos apoyos tienen un movimiento  $s_0$ , y cuyas masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  tienen desplazamientos  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  a partir de la base respectivamente.

Las fuerzas de inercia en este caso son  $m_1 (\ddot{u}_1 + \ddot{\xi}_0)$ ,  $m_2 (\ddot{u}_2 + \ddot{\xi}_0)$  y  $m_3 (\ddot{u}_3 + \ddot{\xi}_0)$ .

Las fuerzas en los elementos elásticos se pueden expresar como el producto de la matriz de rigidez lateral  $\underline{K}$  por los desplazamientos laterales, es decir

$$\underline{F}_e = \underline{K} \underline{u} \quad (5.7)$$

donde, para el caso de la fig 5.6

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad k_{ij} = k_{ji} \quad (5.8)$$

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

y

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

De análoga manera las fuerzas de amortiguamiento viscoso se pueden expresar como el producto de una matriz de amortiguamiento por las velocidades, o sea como

$$\underline{F}_d = \underline{C} \dot{\underline{u}} \quad (5.11)$$

donde el punto denota derivación con respecto al tiempo. Se verá más adelante que en general no es necesario calcular  $\underline{C}$  y que el efecto del amortiguamiento se toma en cuenta en los espectros de diseño.

Para cada masa la suma de todas las fuerzas debe ser cero. Así se llega a que las ecuaciones de equilibrio dinámico se pueden escribir:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{M} \underline{1} \ddot{\xi}_0 \quad (5.12)$$

$\underline{M}$  se denomina matriz de masas y, para la estructura de la fig 5.6, es igual a:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

En la expresión 5.12 se ha definido también:

$$\underline{\ddot{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{1} \ddot{s}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{s}_0 = \begin{bmatrix} \ddot{s}_0 \\ \ddot{s}_0 \\ \ddot{s}_0 \end{bmatrix}$$

### 5.3.3 Vibraciones libres no amortiguadas

En lugar de resolver las ec 5.12, se considera primero el caso más simple en el que no existen amortiguadores (sus efectos se incluyen después en forma aproximada) y no existe movimiento del terreno, con lo cual la expresión 5.12 se convierte en

$$\underline{M} \underline{\ddot{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{0} \quad (5.13)$$

Ahora bien, toda estructura elástica como la que aquí se trata puede vibrar libremente en forma tal que el desplazamiento de cada una de sus masas con respecto a su posición de equilibrio estático es igual al producto de una función de la posición de la masa considerada por una función del tiempo, que es la misma para todas las masas. En otras palabras los desplazamientos se pueden expresar como

$$\underline{u}(t) = \underline{Z} \theta(t) \quad (5.14)$$

donde, para el caso de la fig 5.6,

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

haciendo notar que las  $z$  no dependen de  $t$ . A esta forma de vibrar se le llama modos naturales. Al conjunto de valores  $z_i$  se denomina forma del modo, y al periodo de  $\theta(t)$ , en caso de que exista, se llama periodo natural.

Derivando la ecuación 5.14 se obtiene

$$\underline{\ddot{u}}(t) = \underline{Z} \ddot{\theta}(t) \quad (5.15)$$

y sustituyendo 5.14 y 5.15 en 5.13 se llega a:

$$\underline{M} \underline{Z} \ddot{\theta} + \underline{K} \underline{Z} \theta = 0 \quad (5.16)$$

por sencillez se han omitido los  $(t)$ .

Para la masa  $i$ , el desarrollo de la expresión 5.16 da

$$m_i z_i \ddot{\theta} + \left( \sum_j k_{ij} z_j \right) \theta = 0.$$

de donde

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{\sum_j k_{ij} z_j}{m_i z_i} \quad (5.17)$$

El primer miembro de esta ecuación es función de  $t$ , mientras que el segundo no, por tanto ambos deben ser constantes para que la igualdad subsista. Si este valor constante se llama  $-\omega^2$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

cuya solución es

$$\theta = a \operatorname{sen} \omega (t - \tau) \quad (5.18)$$

De acuerdo con lo anterior, existen modos de vibración que satisfacen las condiciones de la expresión 5.15. Estos son tales que el movimiento de cada masa es armónico simple con período natural  $T = 2\pi/\omega$ ;  $\omega$  se llama frecuencia natural circular.

Derivando dos veces la ec 5.18 se tiene

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 a \operatorname{sen} \omega (t - \tau) = -\omega^2 \theta$$

sustituyendo en 5.16, y considerando que  $\theta \neq 0$ , queda

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{Z} = \underline{0} \quad (5.19)$$

que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo; para que existan valores de  $\underline{Z}$  distintos de cero es necesario que el determinante del sistema se anule, esto es, que

$$|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0 \quad (5.20)$$

#### 5.3.4 Frecuencias y modos de vibración

La expresión 5.20 representa un problema de valores característicos. Desarrollando el determinante se obtiene una ecuación algebraica de grado  $n$  cuya incógnita es  $\omega^2$ , siendo  $n$  el número de grados de libertad (tres en el caso de la fig 5.6) cuya solución conduce a  $n$  valores de  $\omega^2$ , es decir, a  $n$  frecuencias de vibración  $\omega$ , que corresponden a otros tantos períodos naturales  $2\pi/\omega$ .

Los valores de  $\omega^2$  son reales y positivos y sus raíces cuadradas son las frecuencias naturales. Se acostumbra numerar a las  $\omega$  en orden creciente es decir la primera frecuencia  $\omega_1$  (llamada frecuencia fundamental) es el menor valor y la última  $\omega_n$ , el mayor.

Si cada valor de la frecuencia  $\omega_j$  se reemplaza en 5.19, es posible obtener valores  $\underline{Z}_j$  diferentes de cero (cada uno de estos vectores se llama modo de vibra

ción). Para cada modo no se obtienen soluciones únicas, sino solamente valores, relativos entre las  $z_{ij}$ ; es decir que no están definidas las amplitudes de las vibraciones de las masas, sino las relaciones entre todas ellas.

Se demuestra que los modos de vibración tienen las siguientes propiedades:

a) Ortogonalidad con respecto a la matriz de masas,

$$\underline{z}_j^T \underline{M} \underline{z}_r = 0 \text{ si } j \neq r \quad (5.21)$$

b) Ortogonalidad con respecto a la matriz de rigideces

$$\underline{z}_j^T \underline{K} \underline{z}_r = 0 \text{ si } j \neq r \quad (5.22)$$

c) Los modos naturales constituyen un conjunto completo, lo que significa que cualquier configuración de desplazamientos  $\underline{u}$  puede expresarse como una combinación lineal de las  $\underline{z}_j$ , es decir como:

$$\underline{u} = \sum_j a_j \underline{z}_j \quad (5.23)$$

El producto  $\underline{z}_j^T \underline{M} \underline{z}_j$  es igual a una constante arbitraria cuyo valor depende de la escala a la que se tome cada modo. Si dicha constante es obligada a tomar el valor de la unidad, modificando la escala del modo, se dice que este se ha normalizado con respecto a las masas.

En todo lo que antecede se ha supuesto que el terreno sobre el que se apoya la estructura es indeformable. Tratándose de estructuras reales, los modos naturales se ven afectados por la deformabilidad del terreno y por la masa de éste que está sujeta a aceleraciones. En tales casos el problema se complica por la existencia de amortiguamiento de cierta importancia.

### 5.3.5 Ejemplo

Considérese la estructura mostrada en la fig 5.7, tomada de la ref 74. Las matrices de masas y de rigideces de esta estructura son:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

el valor de cada masa  $m_i$  es igual a  $\frac{W_i}{g}$ ;  $g$  es la aceleración de la gravedad. Esto da  $m_1 = m_2 = \frac{400}{981} = 0.407750$  ton-seg<sup>2</sup>/cm, y  $m_3 = \frac{200}{981} = 0.203875$  ton-seg<sup>2</sup>/cm. Se usan muchas cifras decimales porque los resultados se van a comparar posteriormente con los de varios métodos numéricos.

Remplazando los valores de  $k_i$  de la fig 5.7, se tiene

$$\underline{K} = 80 \begin{bmatrix} 5.0 & -2.5 & 0.0 \\ -2.5 & 3.5 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

la ec 5.20, es decir  $|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0$ , se escribe entonces como:

$$80 \begin{vmatrix} 5.0 - 0.407750 \frac{\omega^2}{80} & -2.5 & 0.0 \\ -2.5 & 3.5 - 0.40775 \frac{\omega^2}{80} & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 - 0.203875 \frac{\omega^2}{80} \end{vmatrix} = 0$$

haciendo  $y = \frac{\omega^2}{80}$ , el desarrollo de este determinante conduce a la ecuación siguiente:

$$y^3 - 25.751 y^2 + 157.885 y - 184.386 = 0$$

cuyas soluciones son:  $y_1 = 1.525$

$$y_2 = 7.030$$

$$y_3 = 17.190$$

como  $\omega^2 = 80 y$ , y recordando que  $T = 2\pi/\omega$ , se obtienen los siguientes resultados:

$$\omega_1^2 = 122.0, \quad \omega_1 = 11.05 \text{ seg}^{-1}, \quad T_1 = 0.5686 \text{ seg}$$

$$\omega_2^2 = 562.4, \quad \omega_2 = 23.71 \text{ seg}^{-1}, \quad T_2 = 0.2650 \text{ seg}$$

$$\omega_3^2 = 1375.2, \quad \omega_3 = 37.08 \text{ seg}^{-1}, \quad T_3 = 0.1694 \text{ seg}$$

Para calcular los modos de vibración, se reemplazan los valores de  $\omega^2$  en la expresión 5.19, es decir en:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{Z} = \underline{0}$$

Procediendo así con  $\omega_1^2$ , se tiene el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} (400 - 122 \times 0.40775) & -200 & 0 \\ -200 & (280 - 122 \times 0.40775) & -80 \\ 0 & -80 & (80 - 122 \times 0.233875) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En  $z_{ij}$  el índice  $i$  se refiere al nivel y el índice  $j$  identifica al modo en cuestión.

Efectuando operaciones se tiene

$$\begin{array}{rcl}
 350.2545 z_{11} & - 200 z_{21} & = 0 \\
 -200 z_{11} & + 230.2545 z_{21} & - 80 z_{31} = 0 \\
 & - 80 z_{21} & + 55.1273 z_{31} = 0
 \end{array}$$

Se puede escoger arbitrariamente el valor de alguna de las  $z_{ij}$ ; por ejemplo, si  $z_{11} = 1$ , entonces de la primera ecuación se obtiene  $z_{21} = 1.751$  y de la segunda o tercera ecuación se encuentra que  $z_{31} = 2.541$ ; es decir que

$$\underline{z}_1 = \begin{Bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.751 \\ 2.541 \end{Bmatrix}$$

Análogamente, empleando los valores de  $\omega_2^2$  y de  $\omega_3^2$ , respectivamente, se obtienen:

$$\underline{z}_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.853 \\ -1.969 \end{Bmatrix}, \quad \underline{z}_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.804 \\ 0.321 \end{Bmatrix}$$

La forma de estos tres modos de vibrar se aprecia en la fig 5.8. Recuérdese que los valores de cada modo pueden multiplicarse por cualquier constante arbitraria.

Se puede verificar la ortogonalidad de los modos con respecto a las matrices de masas y de rigideces. Por ejemplo, con el primer y tercer modos se tiene:

$$\begin{aligned}
 \underline{z}_1^T \underline{M} \underline{z}_3 &= (1.000 \quad 1.751 \quad 2.541) \begin{bmatrix} 0.40775 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.203875 \end{bmatrix} \\
 &= (0.40775 \quad 0.71397 \quad 0.51805)
 \end{aligned}$$

$$\underline{z}_1^T \underline{M} \underline{z}_3 = 1.0 \times 0.40775 - 0.804 \times 0.71397 + 0.321 \times 0.51305 = 0.00001 \approx 0$$

Análogamente con la matriz de rigideces se obtiene

$$\underline{z}_i^T \underline{k} = \begin{pmatrix} 1.000 & 1.751 & 2.541 \end{pmatrix} \begin{matrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{matrix}$$

$$\underline{z}_i^T \underline{k} \underline{z}_i = 1.00 \times 49.8 - 0.804 \times 87.0 + 0.321 \times 63.2 = 0.139$$

Los resultados no son exactamente cero por errores de redondeo.

#### 5.4 Métodos numéricos para obtener modos y frecuencias de vibrar

El procedimiento seguido en la sección precedente para obtener modos y frecuencias de vibrar es laborioso e impráctico en sistemas de más grados de libertad. Por ello se han desarrollado métodos numéricos de aproximaciones sucesivas, tres de los cuales se presentan a continuación. Los dos primeros son apropiados para emplearse con una calculadora de escritorio y el tercero es un método matricial, adecuado para hacer programas para computadora.

##### 5.4.1 Método de Newmark

Este método se propone en la ref 77 y está basado en el proceso de iteración de Stodola-Vianello (que se presenta entre otras en la ref 2). En la forma en que a continuación se describe, el método es aplicable al cálculo del modo fundamental de vibración de las estructuras llamadas sencilla o cercanamente acopladas. En estas estructuras la masa de los pisos intermedios está ligada solo a la del piso superior e inferior mediante resortes que representan las rigideces de entrepiso correspondientes (la fig 5.7 es una estructura de este tipo). En su forma más general el método se puede aplicar a cualquiera estructura lineal con acoplamiento entre las diferentes masas (ref 37).

Los pasos en que consiste el método (tabla 5.1) son los siguientes:

- a) Supóngase una forma para el modo. Esta es la que aparece en el renglón 1 de la tabla. Para comenzar, es usualmente apropiado suponer

- valores iguales al número de orden del piso (de abajo hacia arriba).
- b) Obténgase la fuerza de inercia en cada masa correspondiente a la configuración supuesta. Esta fuerza será  $MX\omega^2$ ; como se des conoce  $\omega^2$ , se calculan los productos  $M X = F/\omega^2$ , que forman el segun do renglón de la tabla.
- c) Con las fuerzas de inercia calcúlense las fuerzas cortantes en los entrepisos, también divididas entre  $\omega^2$ , es decir se calcula  $V/\omega^2$ , co mo se anota en el tercer renglón de la tabla.
- d) A partir de las fuerzas cortantes y de las rigideces de entrepiso, obténganse las deformaciones de entrepiso también divididas entre  $\omega^2$ . Esto se presenta en el renglón cuarto de la tabla como  $\Delta Y/\omega^2$ .
- e) Acumulando deformaciones de entrepiso, determínese una nueva confi guración de los desplazamientos de las masas  $Y/\omega^2$  (quinto renglón de la tabla).
- f) Obténgase  $\omega^2$  para cada masa, como los cocientes  $X/(Y/\omega^2)$ . Esto se hace en el sexto renglón de la tabla. Si la configuración  $X$  supues ta es la correcta, se obtendrá el mismo valor para todas las masas. En caso contrario es necesario repetir todos los pasos empezando con una forma de modo proporcional a  $Y/\omega^2$ , hasta que se obtengan va lores de  $\omega^2$  suficientemente parecidos en todas las masas. Así se obtiene una convergencia en general bastante rápida. En la tabla 5.1 se muestran tres iteraciones del método aplicado al edificio de la fig 5.7, con las cuales se obtuvo una aproximación suficiente. Los valores de  $X$  en cada iteración se normalizaron de manera que la masa del primer piso tuviese un desplazamiento unitario, lo cual per mite apreciar cómo se va modificando de una iteración a otra la for ma del modo.

Para calcular la frecuencia se pueden promediar los valores del últi mo ciclo o mejor aún; determinarla con el cociente de Schwartz (que es una forma particular del cociente de Rayleigh); es decir como:

$$\omega^2 = \frac{\sum (F/\omega^2)(Y/\omega^2)}{\sum M (Y/\omega^2)^2}$$

empleando para  $F$  y  $Y$  los valores del último ciclo. En el ejemplo propuesto ambos criterios conducen a  $\omega^2 = 121.9 \text{ seg}^{-2}$ , y la forma del modo es (1.000, 1.752, 2.543). Los valores difieren de los obtenidos en la sección 5.3.5 solamente en la cuarta cifra significativa.

#### 5.4.2 Método de Holzer

Cuando se trata de obtener modos superiores al primero, es conveniente emplear el procedimiento debido a Holzer (ref 44). Este método es solamente aplicable a estructuras sencillamente acopladas (véase la introducción al método de Newmark, en la sección precedente). Los pasos a dar son:

- a) Supóngase arbitrariamente un valor de  $\omega^2$  mayor que el del modo fundamental, previamente obtenido por cualquier método.
- b) Supóngase la amplitud del movimiento  $X_1$  de la primera masa a partir del apoyo (es decir el valor de  $X$  correspondiente a la primera masa). Conviene suponer un valor unitario. Esta amplitud supuesta es también igual al desplazamiento  $\Delta X_1$  del primer entrepiso.
- c) Calcúlense la fuerza cortante en el primer resorte,  $V_1 = K_1 \Delta X_1$  ( $K_1$  es la rigidez de entrepiso), y la fuerza de inercia en la primera masa, igual a  $F_1 = M_1 \omega^2 X_1$ .
- d) Satisfaciendo equilibrio, calcúlese la fuerza cortante en el segundo resorte,  $V_2 = V_1 - F_1$ .
- e) Obténgase la deformación de este último,  $\Delta_2 = F_2/K_2$ .
- f) Calcúlese la amplitud del desplazamiento de la segunda masa,  $X_2 = X_1 + \Delta X_2$  y la fuerza de inercia en la misma,  $F_2 = M_2 \omega^2 X_2$ .

- g) Repítanse los pasos (d) a (f) con el tercer resorte y la tercera masa.
- h) Continúese el proceso hasta llegar a la última masa. Si se satisface el equilibrio entre la fuerza cortante del último resorte y la fuerza de inercia de la última masa, la frecuencia escogida y las amplitudes calculadas corresponden a un modo natural de vibración. Por lo general, se obtendrá un residuo.

Representando en una gráfica los residuos obtenidos contra los distintos valores de  $\omega^2$  supuestos, se obtendrá una curva cuyos ceros corresponden a las frecuencias naturales.

Nótese que un cambio de signo en los residuos correspondientes a dos valores de  $\omega^2$  indica que hay una frecuencia comprendida entre dichos valores y se puede interpolar, por ejemplo linealmente, para obtener una mejor aproximación de la frecuencia buscada.

Cuando se está probando un valor de  $\omega^2$  suficientemente próximo al correspondiente a un modo de vibrar (cuando el residuo es pequeño), se encuentra que una aproximación más precisa de dicha frecuencia es (ref 44)

$$\bar{\omega}^2 = \omega^2 \frac{\sum V \Delta X}{\sum F X} \quad (5.24)$$

Lo anterior se aprecia en la tabla 5.2, para los cálculos hechos para el segundo modo del edificio de la fig 5.7. Nótese que las operaciones se han hecho con más precisión en el último ciclo. Los resultados,  $\omega_2^2 = 562.5/\text{seg}^2$  y  $\underline{Z}_2^T = (1.000, 0.851, -1.964)$ , difieren muy poco de los obtenidos en la sec 5.3.5.

La gráfica de los residuos versus  $\omega^2$  se muestra en la fig 5.9. En ella se incluyen también resultados obtenidos para calcular la frecuencia del tercer modo de vibrar. El valor calculado para  $\omega^2$  es  $1372/\text{seg}^2$ , que difiere del obtenido en 5.3.5 en menos de 0.3 por ciento.

### 5.4.3 Método de iteración inversa

Este procedimiento es apropiado para resolver problemas de valores característicos mediante operaciones matriciales. Se parte de que la ec 5.19 puede escribirse

$$\underline{K} \underline{Z} = \omega^2 \underline{M} \underline{Z} \quad (5.25)$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

- Supóngase un valor arbitrario  $\underline{X}$  de  $\underline{Z}$  (lo que es lo mismo que suponer un valor arbitrario de  $\omega^2 \underline{Z}$ ).
- Calcúlese el valor  $\underline{X}' = \underline{M} \underline{X}$ .
- Calcúlese el vector  $\underline{Y}$  resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente (que proviene de la expresión 5.25)

$$\underline{K} \underline{Y} = \underline{X}' \quad (5.26)$$

- Si el vector  $\underline{Y}$  es igual al vector  $\underline{X}$  multiplicado por una constante, entonces se tiene una forma modal y la constante es igual a  $1/\omega^2$ . En la práctica se busca que  $\underline{Y}$  sea aproximadamente igual a una constante por  $\underline{X}$  y se calcula  $\omega^2$  con la relación siguiente (que es una manera de escribir el cociente de Rayleigh)

$$\omega^2 = \frac{\underline{Y}^T \underline{X}'}{\underline{Y}^T \underline{M} \underline{Y}} \quad (5.27)$$

Si se considera que  $\underline{Y}$  no es lo suficientemente parecida a  $\underline{X}$ , se empieza otra vez en el paso a) con un vector  $\underline{X}$  que sea proporcional a  $\underline{Y}$ . Se demuestra (ref 45) que así el proceso converge rápidamente al primer modo.

El método sirve también para determinar modos superiores de vibración si es que los pasos anteriores se aplican empleando en vez de  $\underline{K}$  la matriz  $\underline{K}'$  con un

corrimiento de origen, es decir

$$\underline{K}' = \underline{K} - \mu \underline{M} \quad (5.28)$$

En este caso los valores de  $\underline{Y}$  convergen a la forma del modo cuyo valor de  $\omega^2$  esté más cercano a  $\mu$ ; y el cociente de Rayleigh (ec 5.27) proporciona el valor de  $(\omega^2 - \mu)$ , por lo que para calcular  $\omega^2$  se debe usar la expresión:

$$\omega^2 = \mu + \frac{\underline{Y}^T \underline{X}'}{\underline{Y}^T \underline{M} \underline{Y}} \quad (5.29)$$

Como ejemplo se aplica este método otra vez a la estructura de la fig 5.7, recordando que las matrices de masas y de rigideces son:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 0.40775 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.20388 \end{bmatrix} \quad (\text{en ton-seg}^2/\text{cm})$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{bmatrix} \quad (\text{en ton/cm})$$

Los cálculos de varias iteraciones hechas para obtener el primer modo, se presentan en la tabla 5.3. Como valores iniciales de  $\underline{x}$  conviene, como en el método de Newmark, suponer cantidades proporcionales al número de orden del grado de libertad.

En el paso c) se necesita resolver el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix}$$

La solución se puede escribir

$$y_1 = \frac{x_1' + x_2' + x_3'}{200}$$

$$y_2 = 2 y_1 - \frac{x_1'}{200}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{x_3'}{80}$$

En la tabla 5.4 se muestran los cálculos para obtener el segundo modo. Para esto se adoptó en la expresión 5.28 el valor  $\mu = 490.5$  ( $= 981/2$ ), entonces la convergencia será al valor de  $\omega^2$  más cercano a 490.5

En modos superiores al primero (y aun en este) conviene suponer que los valores iniciales de  $\underline{x}$  son todos iguales a la unidad.

La matriz  $\underline{K}'$  resulta entonces:

$$\underline{K}' = \underline{K} - \mu \underline{M} = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 80 & -80 \\ 0 & -80 & -20 \end{bmatrix}$$

Esta vez, en el paso c) se tiene que resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 80 & -80 \\ 0 & -80 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$y_1 = \frac{2 x_1' + x_2' - 4 x_3'}{200}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{x_1'}{200}$$

$$y_3 = -4 y_2 - \frac{x_3'}{20}$$

Puede notarse que el método de iteración inversa da, para el primer modo, los mismos resultados que el método de Newmark. De hecho ambos métodos son equivalentes, en este caso, al procedimiento conocido como de Stodola-Vianello, que consiste básicamente en iterar empleando la expresión siguiente (véase por ejemplo la ref 2)

$$\frac{1}{\omega^2} \underline{Z} = \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{Z} \quad (5.30)$$

que es otra forma de escribir la ec 5.19, y que equivale a resolver el sistema de ecuaciones 5.26.

Sin embargo, el método de iteración inversa se puede aplicar cualesquiera sean las matrices de masas y rigideces, y no solo a sistemas sencillamente acoplados; además, como se ha visto, empleado con corrimientos, sirve para calcular cualquier modo de vibrar.

Por tales motivos el método de iteración inversa constituye la base de varios algoritmos (como el de iteración de subespacios y el de búsqueda del determinante) apropiados para computadoras. En la ref 45, se trata con más amplitud este método y sus variantes, y se presentan los correspondientes programas para computadoras.

TABLA 5.1 METODO DE NEWMARK

REGLON	K (ton/cm)  M ( $\frac{\text{ton-seg}^2}{\text{cm}}$ )	200		200		80	
			0.408		0.408		0.204
1	X		1.000		2.000		3.000
2	F/ $\omega^2$		0.408		0.816		0.612
3	V/ $\omega^2$	1.836		1.428		0.612	
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00918		0.00714		0.00765	
5	Y/ $\omega^2$		0.00918		0.01532		0.02397
6	$\omega^2$		109		123		125
1	X		1.000		1.780		2.610
2	F/ $\omega^2$		0.408		0.726		0.532
3	V/ $\omega^2$	1.664		1.258		0.532	
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00837		0.00629		0.00665	
5	Y/ $\omega^2$		0.00837		0.01466		0.2131
6	$\omega^2$		119		121		122
1	X		1.000		1.750		2.550
2	F/ $\omega^2$		0.408		0.714		0.520
3	V/ $\omega^2$	1.642		1.234		0.520	
4	$\Delta Y/\omega^2$	0.00821		0.00617		0.0065	
5	Y/ $\omega^2$		0.00821		0.01438		0.02088
6	$\omega^2$		121.8		121.7		122.1
			1.000		1.752		2.543

$$\omega^2 = \frac{\sum (F/\omega^2) (Y/\omega^2)}{\sum M(Y/\omega^2)} = \frac{0.024475}{0.000201} = 121.9 \text{ seg}^{-2}$$

$$T = 2\pi/\omega = 0.5686 \text{ seg}$$

TABLA 5.2 METODO DE HOLZER

$\omega^2$ SUPUESTA	K (ton/cm)	200		200		80		RESIDUO
								
	M ( $\frac{\text{ton-sec}^2}{\text{cm}}$ )		0.408		0.408		0.204	
500	X		1.0000		0.98		-1.570	-44
	$\Delta X$	1.000		-0.020		-2.550		
	V	200.0		-4.00		-204.0		
	F		204.0		200.0		-160	
600	X		1.000		0.780		-2.170	30
	$\Delta X$	1.000		-0.220		-2.950		
	V	200.0		-45.00		-236.0		
	F		245.0		191.0		-266.0	
560	X		1.000		0.860		-1.950	-2.0
	$\Delta X$	1.000		-0.140		-2.810		
	V	200.0		-28.50		-225		
	F		228.5		195.5		-223	
563	X		1.000		0.851		-1.964	0.4
	$\Delta X$	1.000		-0.149		-2.815		
	V	200.0		-29.70		-225.2		
	F		229.7		195.5		-225.6	

$$(500 \times 30 + 600 \times 44) / 74 = 560 \text{ (interpolación lineal)}$$

$$\bar{\omega}^2 = 560 \times \frac{200 \times 1 + 28.5 \times 0.140 + 225.0 \times 2.810}{228.5 \times 1 + 195.5 \times 0.860 + 223.0 \times 1.950} = 563.0 \text{ (ec 5.24)}$$

$$\bar{\omega}^2 = 563 \times \frac{200 \times 1 + 29.7 \times 0.149 + 225.2 \times 2.815}{229.7 \times 1 + 195.5 \times 0.851 + 225.6 \times 1.964} = 562.5 \text{ (ec 5.24)}$$

TABLA 5.3 METODO DE ITERACION INVERSA  
(PRIMER MODO)

GRADO DE LIBERTAD	1	2	3
$\underline{X}$	1.000	2.000	3.000
$\underline{X}'$	0.40775	0.81550	0.61163
$\underline{Y}$	0.009174	0.01631	0.02396
$\underline{X}$	1.000	1.778	2.612
$\underline{X}'$	0.40775	0.72498	0.53253
$\underline{Y}$	0.008326	0.01461	0.02127
$\underline{X}$	1.000	1.775	2.555
$\underline{X}'$	0.40775	0.71560	0.52091
$\underline{Y}$	0.008221	0.01440	0.02092
$\underline{X}$	1.000	1.752	2.545

NOTAS:

Los valores de  $\underline{X}$ , salvo para la primera iteración, son proporcionales a los de  $\underline{Y}$  de la iteración anterior

$$\underline{X}' = \underline{M} \underline{X}$$

$$\underline{Y} = \underline{K}^{-1} \underline{X}'$$

$$\omega^2 = \frac{\underline{Y}^T \underline{X}'}{\underline{Y}^T \underline{M} \underline{Y}} \quad (\text{ec 5.27})$$

$$\omega^2 = \frac{0.008221 \times 0.40775 + 0.0144 \times 0.7156 + 0.02092 \times 0.52091}{0.008221^2 \times 0.40775 + 0.0144^2 \times 0.40775 + 0.02092^2 \times 0.20388}$$

$$\omega^2 = 122 \text{ seg}^{-2}$$

TABLA 5.4 METODO DE ITERACION INVERSA CON CORRIMIENTO  
( $\mu = 490.5$ , CONVERGE AL SEGUNDO MODO)

GRADO DE LIBERTAD	1	2	3
$\underline{X}$	1.000	1.000	1.000
$\underline{X}'$	0.40775	0.40775	0.20388
$\underline{Y}$	0.01198	0.009939	0.02574
$\underline{X}$	1.000	0.830	- 2.149
$\underline{X}'$	0.40775	0.33843	- 0.43813
$\underline{Y}$	0.01453	0.01249	- 0.02805
$\underline{X}$	1.000	0.860	- 1.931
$\underline{X}'$	0.40775	0.35067	- 0.39368
$\underline{Y}$	0.01370	0.01167	- 0.02698
$\underline{X}$	1.000	0.851	- 1.969

NOTA:

Los valores de  $\underline{X}$ , salvo para la primera iteración, son proporcionales a los de  $\underline{Y}$  de la iteración anterior

$$\underline{X}' = \underline{M} \underline{X}$$

$$\underline{Y} = \underline{K}'^{-1} \underline{X}'$$

$$\rho = \frac{\underline{Y}^T \underline{X}'}{\underline{Y}^T \underline{M} \underline{Y}}, \quad \omega^2 = \rho + \mu \quad (\text{ec 5.29})$$

$$\rho = \frac{0.01370 \times 0.40775 + 0.01167 \times 0.35067 + 0.02698 \times 0.39368}{0.01370^2 \times 0.40775 + 0.01167^2 \times 0.40775 + 0.02698^2 \times 0.20388}$$

$$\rho = 72.4, \quad \omega^2 = 490.5 + 72.4 = 562.9 \text{ seg}^{-2}$$

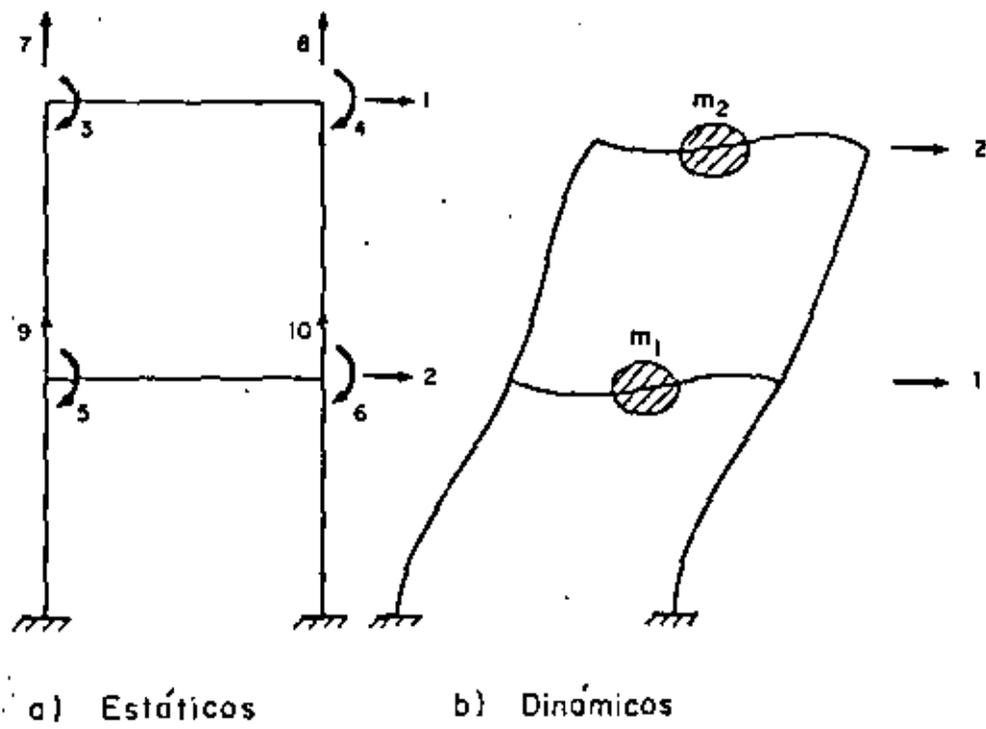


Fig 5.1 Grados de libertad estáticos y dinámicos

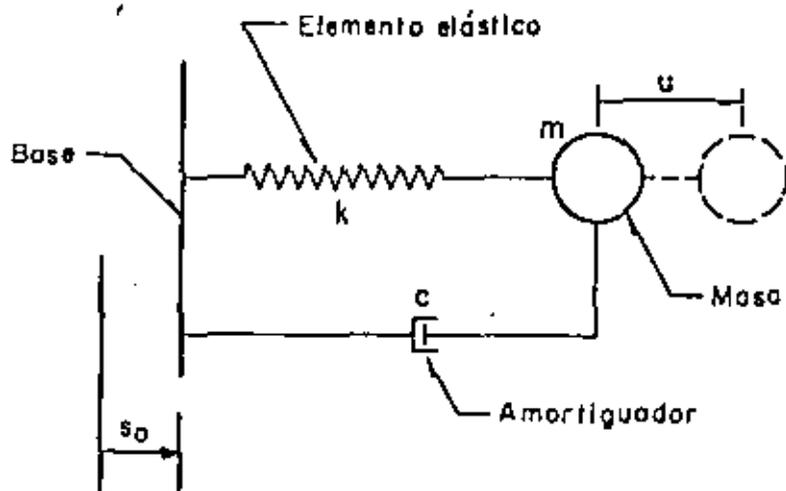


Fig 5.2 Sistema simple con amortiguamiento viscoso

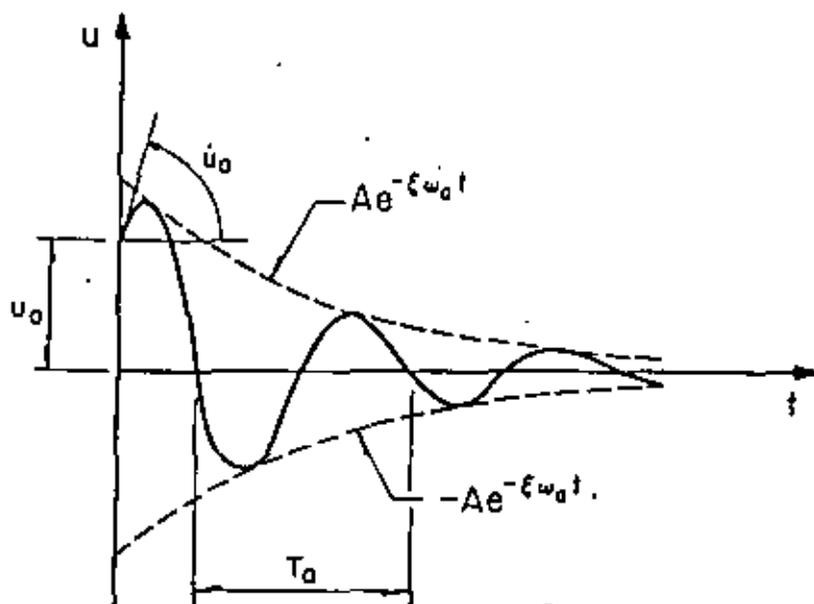


Fig 5.3 Vibraciones libres de un sistema como el de la fig 5.2

29NOV78/

/ A/

/M. HIDALGO PATIO A Y B /COMP N90K

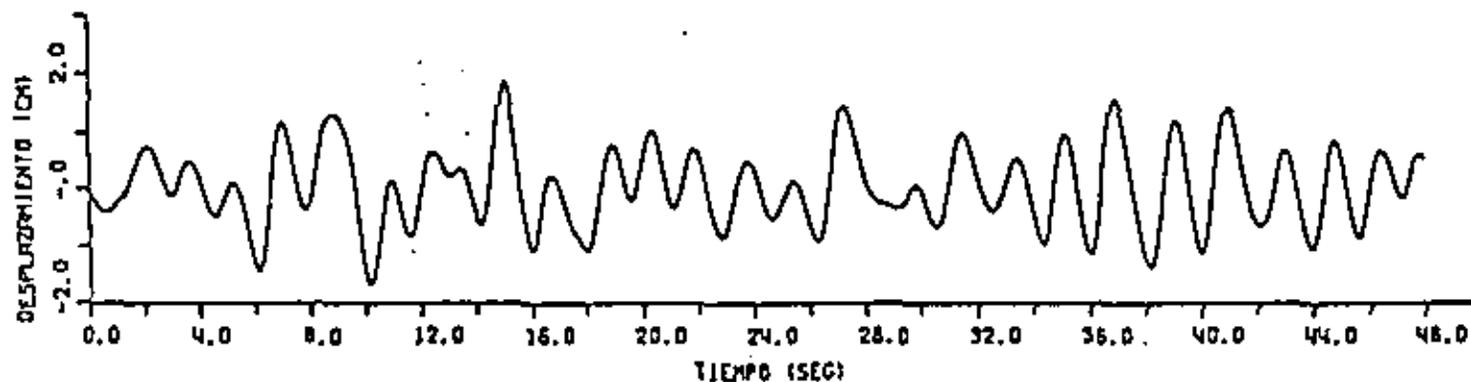
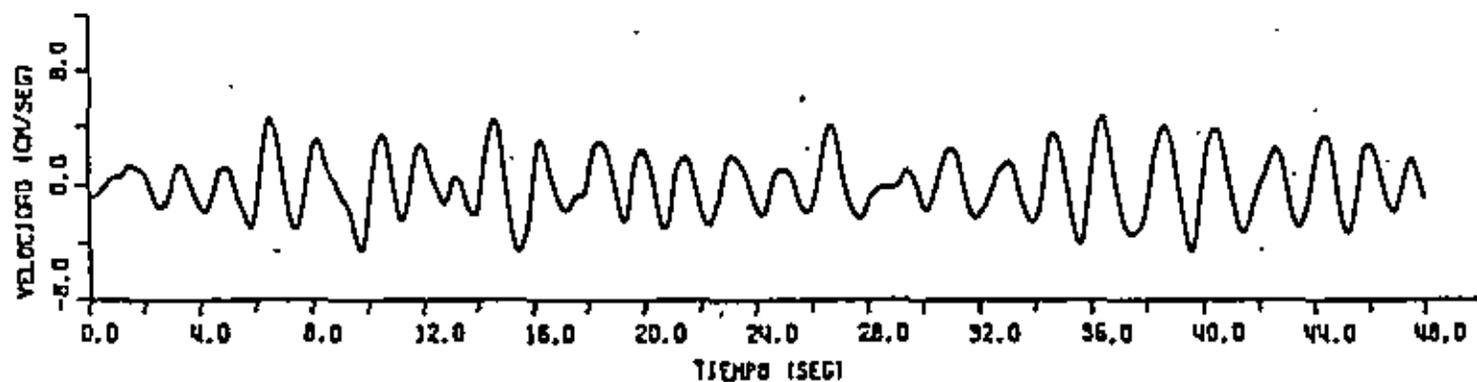
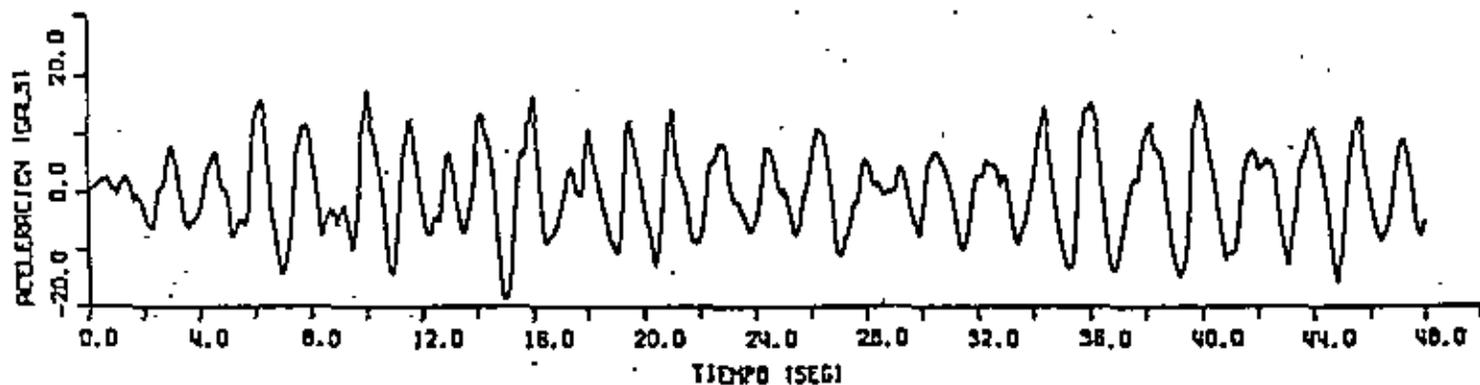


FIG. 5.4 ACCELERACIONES, VELOCIDADES Y DESPLAZAMIENTOS DE UN TENBLOR REGISTRADO EN LA ZONA III.

\* 29NOV78/

/ A/

/M. HIDALGO PATIO A Y B

/COMP N90H

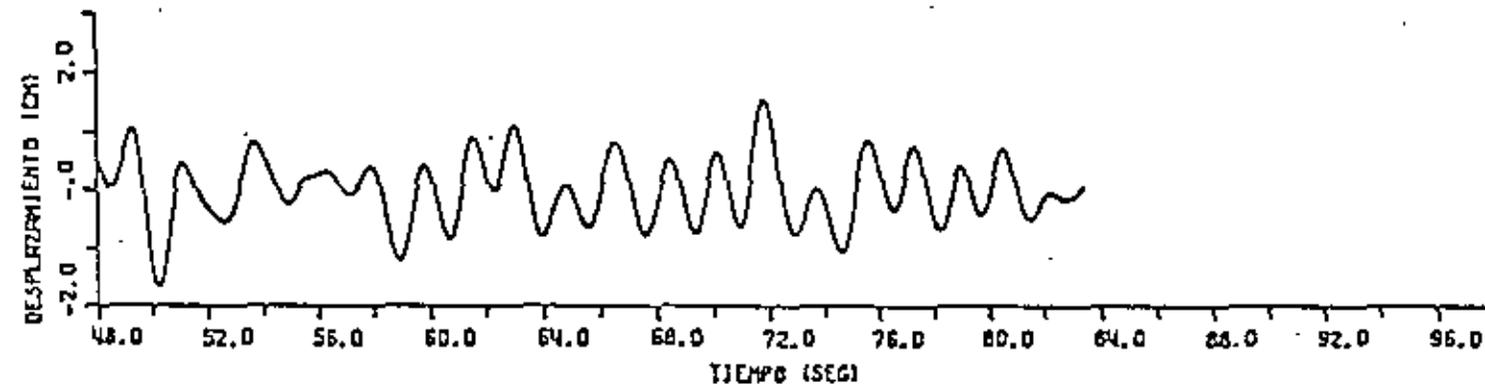
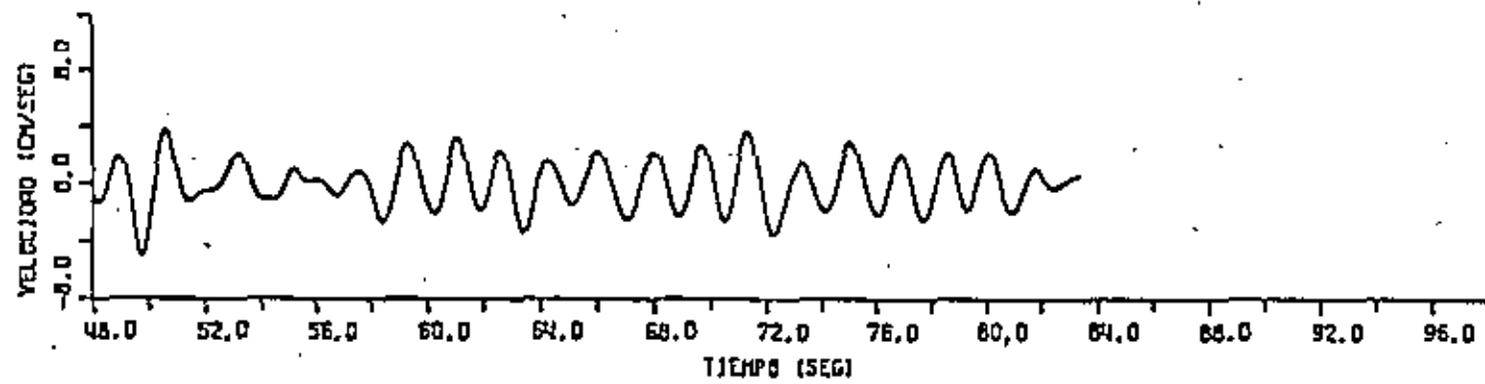
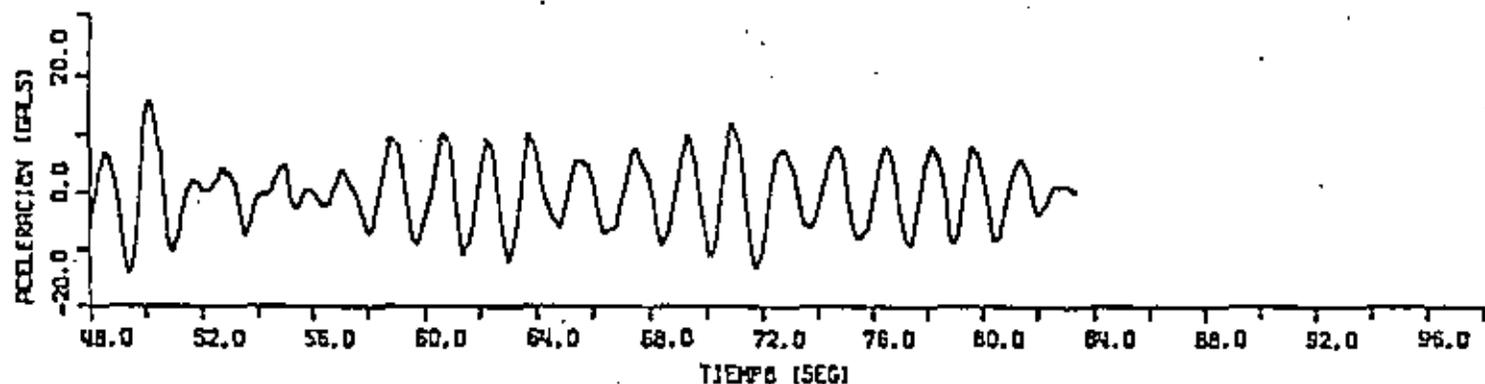


FIG. 5.4

CONTINUACION

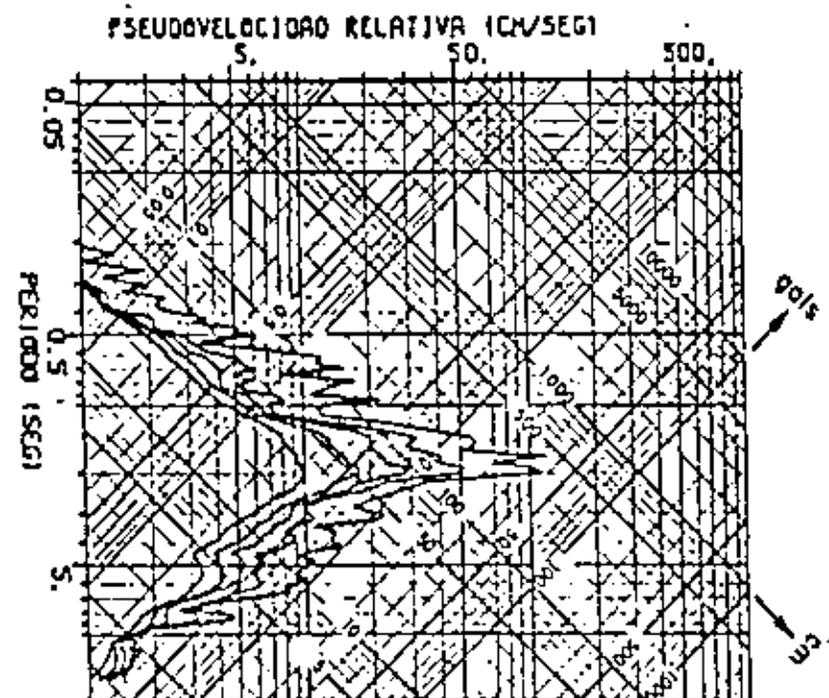
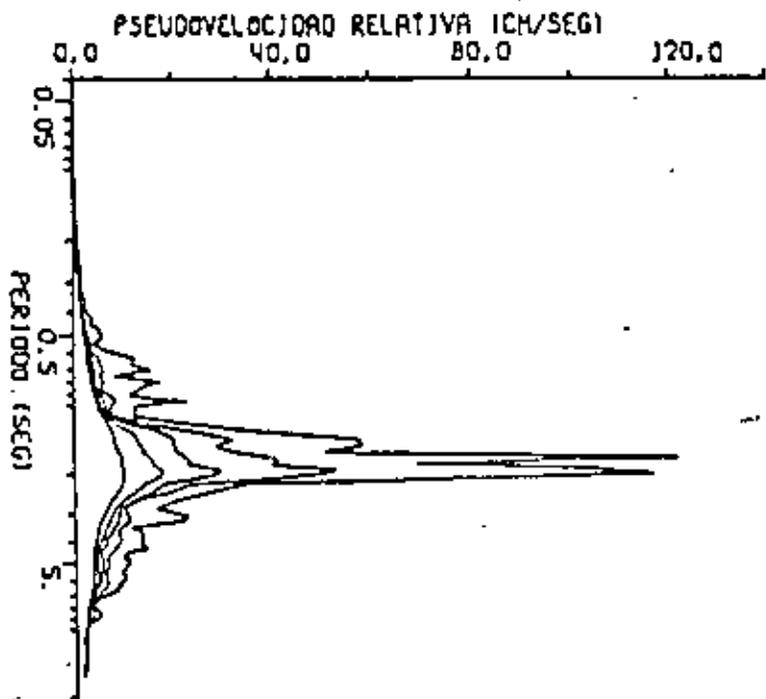
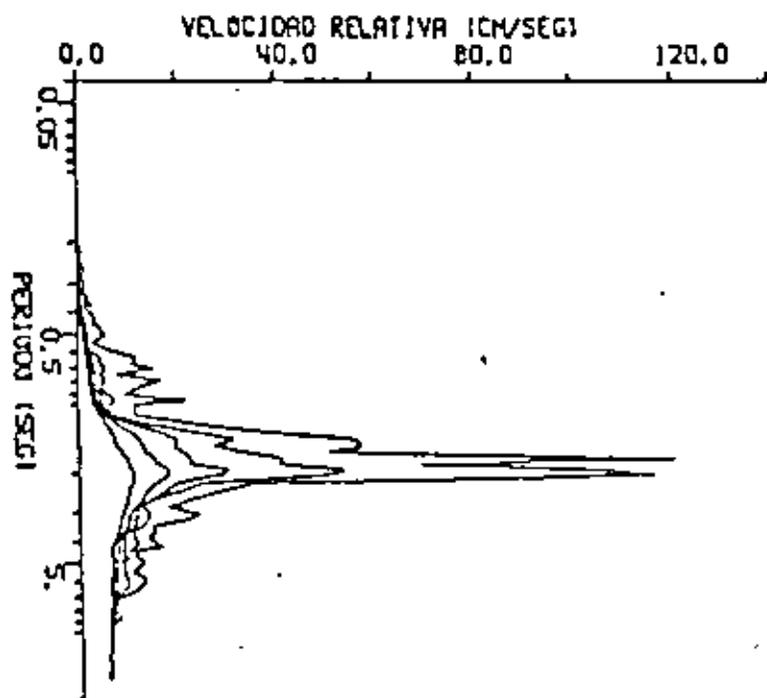
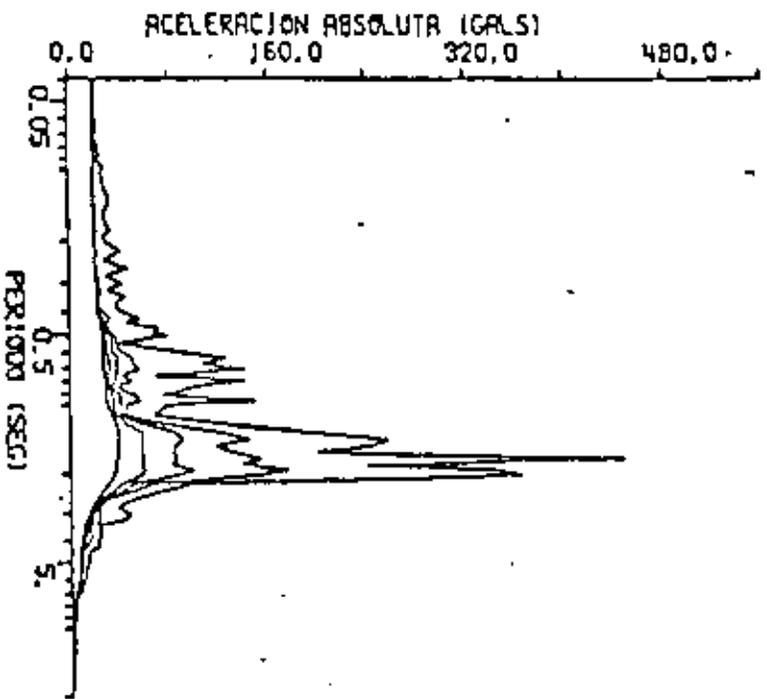


FIG 5.5 DISTINTOS ESPECTROS DE RESPUESTA DEL TEMBLOR DE LA  
 FIG 5.4 (AMORTIGUAMIENTOS 0, 2, 5, 10 Y 20  
 POR CIENTO DEL CRITICO).

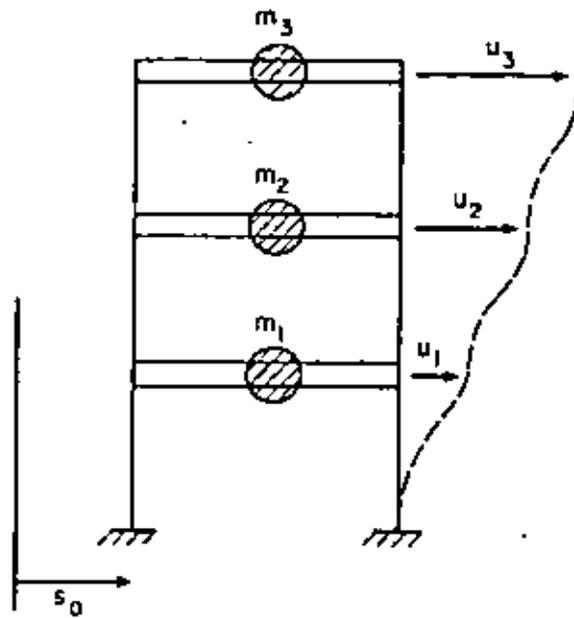


Fig 5.6 Sistema de varios grados de libertad

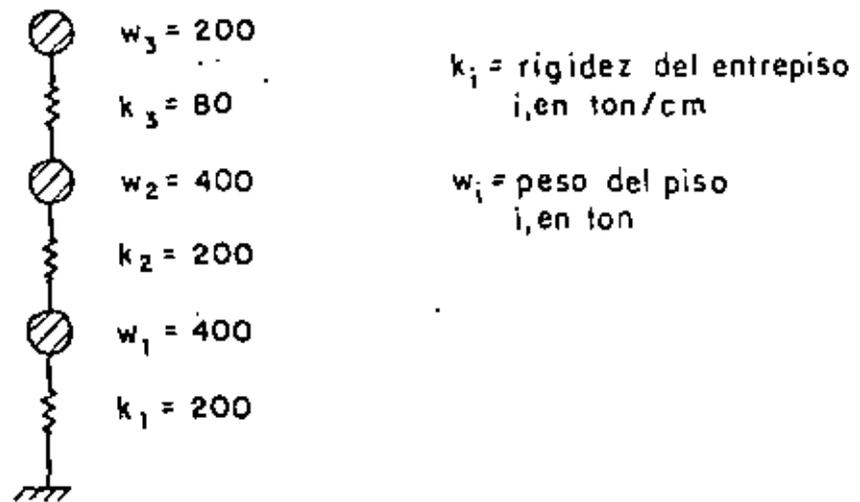


Fig 5.7 Estructura con tres grados de libertad

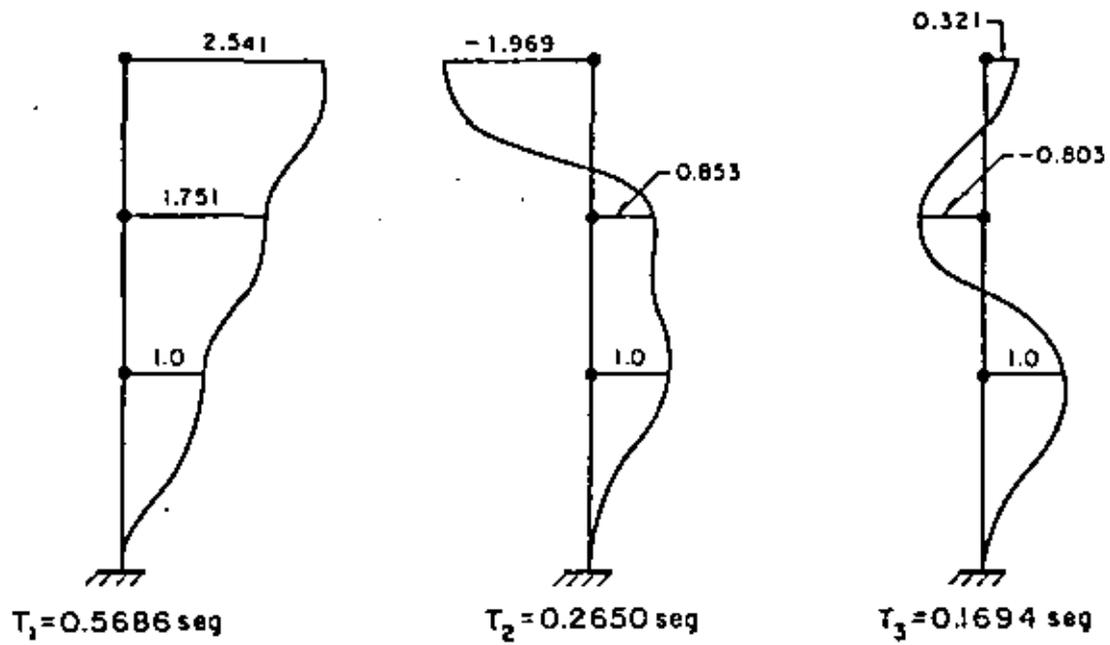


Fig 5.8 Modos de vibrar de la estructura de la fig 5.7,

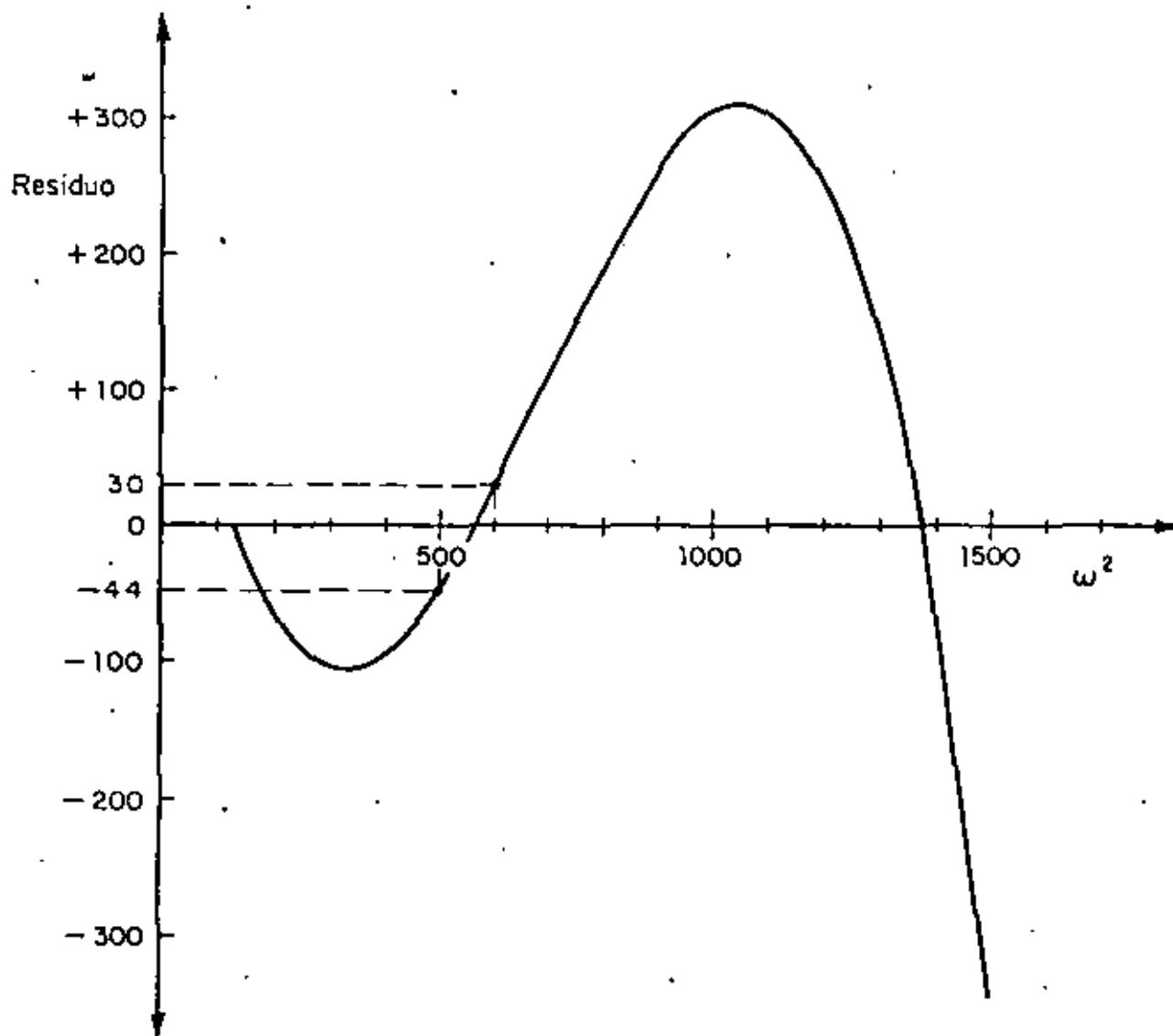


Fig 5.9 Método de Holzer



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

**ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS IRREGULARES EN ELEVACION  
CON ESPECTROS REDUCIDOS POR DUCTILIDAD**

**G.R. ARANDA H.**

**O.A. RASCON CH.**

**O.J. DIAZ L.**

**AGOSTO, 1983**

ABSTRACT

In a previous work the authors developed a method for elastic seismic analysis of structures; it was named quasidynamic method. In this paper such method is generalized to include elastoplastic behavior in terms of ductility factors, which are used to reduce the design spectra.

It is found that this new method leads to better results than those obtained with the seismic static criterium established in the Mexico City Seismic Code, when they are compared with the corresponding ones computed with the dynamic modal spectral procedure given in the same code.

The proposed method is simple and can be applied to both regular and irregular buildings and, therefore, is useful for practicing engineers related with aseismic design.

RESUMEN

En una investigación previa efectuada por los autores se estudió, en forma paramétrica, la respuesta sísmica de edificios irregulares en elevación con comportamiento elástico. Con el fin de generalizar el método de análisis ahí propuesto, en este trabajo se estudia la influencia del comportamiento elastoplástico definido en términos de los espectros de diseño reducidos por ductilidad.

Se muestra que el procedimiento conduce a mejores resultados que los del método estático establecido en el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal tomando como base de comparación los resultados del método dinámico del mismo Reglamento.

El método ha sido denominado *cuasidinámico* y se puede emplear para analizar edificios regulares e irregulares; es de aplicación sencilla y útil para ingenieros de la práctica profesional que se dedican al diseño sísmico de edificios.

②

## 1. INTRODUCCION

El método de análisis sísmico estático del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (ref 1), se puede aplicar indistintamente para edificios regulares o irregulares en elevación. Sin embargo, se considera que si la distribución de fuerzas sísmicas laterales se hiciera tomando en cuenta la variación de masas y rigideces con la altura, como lo hace el método dinámico, el análisis sería más adecuado.

En la ref 2 se tiene un criterio normativo que toma en cuenta la distribución irregular de masas y rigideces mediante un método iterativo, en el que las fuerzas estáticas laterales dependen de la configuración deformada del sistema. El criterio establece que si al aplicar dicho método la respuesta difiere en más de treinta por ciento en dos ciclos consecutivos, debe hacerse un análisis sísmico dinámico modal.

En investigaciones anteriores (refs 3 a 5) se ha estudiado el comportamiento de edificios irregulares en elevación, cuando están sometidos

a solicitaciones sísmicas. Ha sido común encontrar que la respuesta dinámica modal espectral es menor que la obtenida con los métodos sísmicos estáticos, excepto en algunos casos de estructuras con reducciones bruscas de rigidez y masa.

El método que se presenta en esta investigación se formuló inicialmente en la ref 4 para estudiar la respuesta elástica de modelos estructurales de cortante y de flexión; su bondad se verificó con diferentes estructuraciones con o sin irregularidades en elevación. En este trabajo se generaliza el método para incluir el efecto inelástico, para lo cual se emplean los espectros de diseño del Reglamento (ref 1), reduciéndolos con factores de ductilidad iguales a 2, 4 y 6. Para estudiar la aproximación del método se toma como base de comparación la respuesta dinámica espectral con la participación de todos los modos.

En el cap 2 de este informe se presenta y verifica el método y se discuten los ajustes requeridos para lograr generalidad en su aplicación

con fines de diseño sísmico. Por sus características, se ha denominado método cuasidinámico de análisis sísmico de edificios.

En el cap 3 se presentan las conclusiones más relevantes que se obtuvieron, así como la recomendación para que el método cuasidinámico se incluya en el Reglamento del D F como procedimiento alternativo para análisis sísmico.

## 2. METODO CUASIDINAMICO PARA ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS

El método que aquí se propone para calcular la respuesta sísmica de estructuras parte del análisis sísmico estático convencional, el cual se modifica para lograr una distribución de fuerzas cortantes más acorde con las que se obtendrían con un análisis dinámico. Esa modificación se basa parcialmente en los resultados de estudios paramétricos de marcos rígidos (sistemas de cortante) y muros de cortante acoplados (sistemas de flexión).

### 2.1 Descripción del método

El método cuasidinámico consiste en lo siguiente:

a. Considerar que los edificios están empotrados en su base y calcular las fuerzas sísmicas horizontales, mediante el método estático convencional (ref 1):

(2)

$$P_i = \frac{W_i h_i}{\sum_{i=1}^n W_i h_i} Q C_1 N_T$$

donde

- $P_i$  fuerza sísmica horizontal que actúa estáticamente en la masa  $i$
- $Q$  factor de ductilidad
- $W_i$  peso de la masa  $i$
- $W_T$  carga gravitacional total de la estructura
- $c$  coeficiente sísmico
- $h_i$  altura de la masa  $i$  respecto a la base del edificio
- $n$  número total de niveles donde están concentradas las masas

b. Obtener los desplazamientos  $x_i$  que producen las fuerzas  $P_i$  en cada nivel, y con ellos determinar la aceleración de cada masa  $i$  mediante la ecuación

$$\ddot{x}_i = A(T_1, Q) \cdot C_1 x_i$$

con

$$C_1 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2}$$

donde

- $A(T_1, Q)$  aceleración espectral de diseño para modo fundamental
- $C_1$  factor de participación aproximado de modo fundamental

4

$T_1$  periodo fundamental  
 $m_i$  masa concentrada en el nivel  $i$

Calcular la aceleración de la manera antes indicada, implica que la configuración dada por los desplazamientos  $x_i$  se tome como una aproximación de la forma característica del primer modo.

El periodo fundamental se puede calcular empleando cualquier procedimiento. Uno que da resultados satisfactorios (ref 4), es el que se basa en el cociente de Schwartz (ref 1) dado por:

$$T_1 = 2\pi \left( \frac{1}{g} \frac{\sum_{i=1}^n W_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n P_i x_i} \right)^{1/2}$$

siendo  $g$  la aceleración de la gravedad.

c. Calcular la fuerza sísmica lateral que actúa en cada masa, provocada por la aceleración  $\ddot{x}_1$ :

$$F_i = m_i \ddot{x}_1$$

A partir de éstas se obtienen las fuerzas cortantes para cada entrepiso  $r$ :

$$V_r = \sum_{i=r}^n P_i$$

donde el subíndice  $r$  indica que el nivel  $r$  está inmediatamente arriba del entrepiso  $r$ , siendo la base el nivel 0.

Las fuerzas cortantes  $V_r$  se aproximan a las cortantes con que contribuye el modo fundamental en

un análisis dinámico ( $V_{d1}$ ). Para obtener una cortante basal que se asemeje a la que se obtendría con la contribución de todos los modos ( $V_{d0}$ ), debe hacerse la corrección que a continuación se indica.

d. Multiplicar la cortante basal,  $V_0$ , por un factor correctivo,  $\alpha$ , para obtener una cortante basal corregida,  $V_0^*$ , que se aproxime a la cortante  $V_{d0}$

$$V_0^* = \alpha V_0$$

Se ha encontrado (ref 4) que el factor correctivo  $\alpha$  depende de la relación de cortantes basales  $V_0^*/V_{e0}$  ( $V_{e0}$  es la cortante basal obtenida con las fuerzas  $P_i$ ), y del espectro de diseño asociado con el sitio y tipo de suelo donde se desplante la estructura. En esta investigación se encontró que  $\alpha$  también depende del factor de ductilidad que se asigne a la estructura.

En el subcap 2.2 de este trabajo se determinan las ecuaciones para calcular  $\alpha$ , correspondientes a los espectros de diseño del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal.

e. Calcular las nuevas fuerzas laterales corregidas,  $F_i^*$ , que actúan en cada masa. Esto se hará de acuerdo con lo que se establece en el subcap 2.3.

f. Obtener las fuerzas cortantes de entrepiso,  $V_F^*$ , utilizando las fuerzas  $F_1^*$ , y los momentos de volteo correspondientes. Estas fuerzas cortantes se denominan cortantes sísmicas cuasid<sub>i</sub>námicas de entrepiso.

2.2. Determinación de los factores correctivos,  $\alpha$ , para los espectros de diseño del Distrito Federal.

El factor correctivo  $\alpha$  se define como el cociente de la fuerza cortante basal que se obtiene en un análisis dinámico modal espectral, incorporando el efecto de todos los modos,  $V_{d0}$ , entre la fuerza cortante basal correspondiente al primer modo,  $V_{d10}$ , es decir

$$\alpha = V_{d0} / V_{d10}$$

En la ref 4 se obtuvo este factor utilizando los espectros elásticos de diseño ( $Q = 1$ ) del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (ref 1). En ese trabajo se verificó también que al aplicar el método a las estructuras reales de la ref 3 los resultados fueron satisfactorios.

En la presente investigación el factor  $\alpha$  se calcula para las estructuras obtenidas con las combinaciones posibles de masa y rigidez indicadas en las figs 1 y 2 (la masa  $M_c = 1$  sólo se combina con la rigidez  $K_c = 3$ ), considerando que pudieran estar desplantadas en suelo firme, de transición o compresible del D F. A cada

modelo estructural se le asignan factores de ductilidad de 1, 2, 4 y 6.

Después de analizar varias funciones envolventes de los puntos mostrados en las figs 3 a 14, se decidió proponer la siguiente ecuación general para definir  $\alpha$ :

$$\alpha = 1 + \beta_1 \exp(\beta_2 (V_0/V_{e0} - \beta_3)^{\beta_4}), \quad (1)$$

para  $\beta_3 \leq V_0/V_{e0} \leq 1$

donde  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  y  $\beta_4$  son constantes que dependen del tipo de suelo y del factor de ductilidad. En la tabla 1 se dan los valores que se obtuvieron de estas constantes para los distintos factores de ductilidad y zonas geotécnicas del Distrito Federal, al ajustar la ec 1 a los resultados de cada una de las figs 3 a 14.

Al notar la similitud entre algunas curvas se decidió reducir el número de ellas, a fin de simplificar la aplicación del método. De esta manera, se optó por emplear las siguientes:

a) Terreno firme

Para todos los modelos de las figs 1 y 2 con  $Q = 1$ , y con  $Q = 2, 4$  y  $6$ , excepto el  $K_F = 3$ :

$$\alpha = 1 + 1.5 \exp(-4.9 (V_0/V_{e0} - 0.108)^{0.75}) \quad (2)$$

Con factores de ductilidad 2, 4 y 6, para el modelo  $K_F = 3$ :

$$\alpha = 1 + 1.7 \exp \{-4.95(V_0/V_{e0} - 0.108)\} \quad (3)$$

### b) Terrenos de transición y compresible

1. Para cualquier factor de ductilidad y para todos los modelos de las figs 1 y 2, se empleará la ec 3.

1)

En la fig 15 se muestran las curvas de  $\alpha$ , para fines de diseño, dadas por las ecs 2 y 3. Si se hace un análisis de estas curvas, podrá observarse que son envolventes de las presentadas en las figs 3 a 14.

### 2.3 Obtención de constantes de entrepisos cuasidínamicas

En investigaciones recientes realizadas por los autores (refs 4 y 5), las fuerzas sísmicas cuasidínamicas en edificios irregulares en elevación se obtuvieron distribuyendo el cortante basal,  $V_0^*$ , en función de factores de ponderación que dependían del peso y el desplazamiento,  $x_i$ , de cada masa, como a continuación se indica.

$$F_i^* = \frac{W_i x_i}{\sum_{i=1}^n W_i x_i} V_0^* \quad (4)$$

A fin de comprobar si esta distribución de fuerzas era adecuada al emplear espectros reducidos por ductilidad, se analizaron paramétricamente los modelos estructurales de las figs 1 y 2. Para los muros de cortante acoplados se em-

6

plearon dos relaciones de esbeltez, 1.2 y 3.6; la primera con 30 m de altura y 10 niveles, y la segunda con 90 m de altura y 30 niveles.

Los marcos rígidos se analizaron con relaciones de esbeltez de 2 y 4; la primera con 30 m de altura y 10 niveles, y la segunda con 60 m de altura y 20 niveles. Para todos los casos se usaron factores de ductilidad iguales a 1, 2, 4 y 6.

La respuesta estructural se calculó con el método cuasidínámico y con los métodos estático y dinámico espectral del Reglamento (ref 1). Al comparar los resultados, tomando como base de referencia a la respuesta dinámica, se encontró que el cuasidínámico da casi siempre mejores resultados que el estático, aunque para determinadas estructuras subestima con más frecuencia la respuesta en los entrepisos superiores; pero aún en estas estructuras el estático sobrestimó la respuesta en la mayoría de los niveles restantes, en mayor grado que el cuasidínámico.

Así, por ejemplo, en la fig 16 se presenta la comparación de respuestas para el modelo ( $K_c = 2$ ,  $M_c = 2$ ) con  $H/B = 1.2$  y  $Q = 1$ , cuando se analizó con el espectro de diseño para terreno compresible; se aprecia que la sobrestimación de cortantes del estático es hasta 3.4 veces las del dinámico, en tanto que la del cuasidínámico es 1.6.

En la fig 17 se muestra la comparación de respuestas para el modelo ( $K_c = 2$ ,  $M_c = 3$ ) con  $H/B = 4$  y  $Q = 5$ , cuando se analizó para la zona

de terreno compresible del D F. La sobrestimación de cortantes con el estático llega hasta cinco veces el dinámico, en tanto que la del cuasidinámico llega sólo a dos.

En ambas figuras se nota también que el cuasidinámico sobrestima de manera más uniforme con la altura que el estático, lo cual conduce a diseños con factor de seguridad sensiblemente igual para cada entrepiso.

En las tablas 2 a 7 se presenta el número de casos con error (entendido como aquellos en que el cortante cuasidinámico es menor que el dinámico), obtenidos al calcular las fuerzas cortantes cuasidinámicas con la ec 4; las comparaciones se hicieron para cada entrepiso.

En las tablas 2 a 4 puede notarse que para muros acoplados la frecuencia de subestimación a que conduce la ec 4 aumenta cuando se incrementa la relación de aspecto, y se tienen mayores porcentajes de error al crecer el factor de ductilidad hasta  $Q = 4$ . Se advierte también que para la zona de terreno firme existe mayor número de errores y éstos son más grandes que en el de transición y el compresible.

En marcos rígidos se nota que la frecuencia de error varía poco para terrenos firme y compresible (tablas 5 y 7) cuando cambia la relación de aspecto, y varía mucho en terreno de transición (tabla 6). Para factores de ductilidad de

1, 2 y 4, independientemente de la relación de aspecto, el número de casos con error se mantiene casi constante y disminuye para  $Q = 6$ . Para terreno firme se tiene que el error no pasa del 20 por ciento, en tanto que para los de transición y compresible no pasa del 10 por ciento.

Al comparar los errores consignados en las tablas 2 a 4 con los respectivos de las tablas 5 a 7, se nota que las estructuras con marcos rígidos presentan mucho menos errores y que éstos son menores que para las estructuras con muros de cortante acoplados.

Por lo antes discutido se puede inferir que la aproximación de la respuesta cuasidinámica está influida directamente por el tipo de suelo, estructuración, relación de aspecto y factor de ductilidad.

En la tabla 8 se presenta el caso en que se tuvo mayor subestimación de la respuesta con el método cuasidinámico. Las fuerzas cortantes y momentos de volteo calculados con los tres métodos corresponden al modelo con rigidez  $K_F = 2$ , masa  $M_F = 2$ , relación  $H/B = 3.6$  y  $Q = 4$ , desplazado en terreno firme. La subestimación del cuasidinámico alcanzó hasta un 52 por ciento en el entrepiso superior, en tanto que la del estático fue de 16 por ciento.

Después de realizar el examen detallado de la respuesta cuasidinámica de todos los modelos,

se decidió proponer otra distribución de fuerzas más efectiva.

La idea de partida consistió en buscar una distribución de aceleraciones cuasidínamicas que fuera función de los desplazamientos  $x_i$  y que incrementara la magnitud de las fuerzas sísmicas en la parte superior del edificio. Se encontró que eso se logra si cada  $x_i$  se modifica multiplicándola por el factor  $A_i$  definido como

$$A_i = \left(1 - \frac{x_{i-1}}{x_i} \frac{h_{i-1}}{H}\right)^\lambda = \left(1 - \frac{x_{i-1}}{x_i} \frac{h_i}{H}\right)^\lambda$$

donde

$H$  altura total del edificio

$\lambda$  exponente para ajuste de aceleraciones

De esta manera, las fuerzas sísmicas se obtienen con la ecuación

$$F_i^* = \frac{W_i A_i x_i}{\sum_{i=1}^n W_i A_i x_i} V_0^* \quad (6)$$

A fin de asignar valores al parámetro  $\lambda$ , se hizo un estudio minucioso para las estructuras en las que se obtuvo las subestimaciones mayores al emplear la ec 4. Se aplicó para ellas, la ec 6 con valores de  $\lambda$  comprendidos entre 0.25 y 1.0.

En la tabla 9 se presentan los valores de las cortantes de entrepiso obtenidos con la ec 6,

(8)

para la estructura  $K_F = 2$ ,  $M_F = 2$  y distintos valores de  $\lambda$ . Se puede apreciar que con  $\lambda = 0.66$  la respuesta cuasidínámica sólo presenta un caso de subestimación del orden de 0.6 por ciento en el piso superior. Se observa, además, que el valor de  $\lambda = 0.75$  proporciona resultados bastante aceptables con subestimación sólo en la parte superior de 1.06 contra 1.25 ton.

En la tabla 10 se presenta la comparación de cortantes de entrepiso y momentos de volteo, calculados con los tres métodos mencionados, empleando la ec 4 para obtener fuerzas cuasidínamicas. Los resultados son para el modelo ( $K_F = 4$ ,  $M_F = 2$ ) con  $H/B = 3.6$ ,  $Q = 4$  y terreno firme. Se observa que la subestimación alcanzó un valor hasta del 40 por ciento en el entrepiso superior. En la tabla 11 se muestran los cortantes de entrepiso obtenidos con diferentes valores de  $\lambda$ ; se puede ver que para  $\lambda = 0.75$  los resultados son satisfactorios.

A fin de conocer la sobrestimación que se introduce al emplear la ec 6, se estudiaron aquellos casos en los que la ec 4 conducía a mayor exceso en la respuesta. El peor caso correspondió al modelo ( $K_F = 3$ ,  $M_F = 3$ ) con  $H/B = 3.6$ ,  $Q = 6$  y espectro de terreno firme; la sobrestimación alcanzó 171.8 por ciento y ocurrió en el entrepiso 22 (tabla 12). Para este modelo se puede ver que el valor adecuado para  $\lambda$  debería ser mayor que 1 (tabla 13), ya que con  $\lambda = 1$  se tienen cortantes cuasidínamicas mayores que las dinámicas.

Con fines ilustrativos se presentan también los resultados del modelo ( $K_c = 2, M_c = 3$ ), con  $H/B = 4.0, Q = 1$  y terreno firme. En este caso el método cuasidínámico con la ec 4 da respuestas con error en los dos entrepisos superiores (tabla 14). En la tabla 15 se muestran las constantes correspondientes a distintos valores de  $\lambda$ ; se nota que con  $\lambda = 0.9$  se evitan las subestimaciones (lo mismo se concluyó para  $Q = 2, 4$  y  $6$ ). Si con este modelo se usara  $\lambda = 1.0$  se tendrían errores de 10 a 13 por ciento en el entrepiso superior solamente.

Al hacer este tipo de análisis para los modelos con marcos rígidos, se encontró que la mayoría de los casos quedaban cubiertos con  $\lambda = 1.0$ . Las excepciones (aparte de las del párrafo anterior) requirieron que  $\lambda$  fuera igual a 0.9, aunque con  $\lambda = 1.0$  los errores en el entrepiso superior para el caso más desfavorable, eran tan sólo de 3 por ciento-modelos ( $K_c = 2, M_c = 2$ ) y ( $K_c = 3, M_c = 3$ ).

Finalmente, un análisis exhaustivo de todos los casos condujo a proponer los siguientes valores de  $\lambda$ , con los cuales se eliminaron prácticamente todas las subestimaciones y las pocas que quedaron fueron insignificantes:

- a. Para marcos rígidos, desplantados en cualquier tipo de terreno:  $\lambda = 1.0$
- b. Para muros de cortante acoplados, excepto los modelos que tienen a  $K_F = 3$ , se en-

pleará un valor de  $\lambda$  de acuerdo con lo siguiente:

- En terreno firme:  $\lambda = 0.75$
- En terrenos de transición y compresible:  $\lambda = 0.9$
- c. Para muros de cortante acoplados modelados con  $K_F = 3$  y todo tipo de terreno:  $\lambda = 0.9$

Vale la pena señalar que la ec 5 está inspirada en una del código chileno que tiene la forma (ref 6)

$$A_f = \left(1 - \frac{h_f - 1}{H}\right)^\lambda - \left(1 - \frac{h_f}{H}\right)^\lambda \tag{7}$$

con  $\lambda = 0.5$ . En los análisis que se hicieron en este trabajo se intentó al principio usar la ec 7 ajustando el valor de  $\lambda$ , ya que con  $\lambda = 0.5$  se sobrestimó excesivamente la respuesta. Sin embargo, al interpretar los resultados se intentó la modificación que condujo a la ec 5, la cual resultó mejor que la ec 7.

2.4 Resultados

A fin de mostrar la eficacia del método cuasidínámico con los valores de  $\lambda$  propuestos, se presentan sólo los resultados de los modelos ( $K_F = 2, M_F = 2$ ), ( $K_F = 3, M_F = 3$ ) y ( $K_c = 3, M_c = 1$ ), en suelo firme y compresible, con factores de ductilidad 1 y 6, relaciones de aspecto 1.2 y 3.6 en muros de cortante acoplados, 2 y 4 en marcos rígidos (figs 18 a 29). Las

respuestas (fuerzas cortantes y momentos de volteo) del método dinámico se obtuvieron con el criterio de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de la respuesta de cada modo de vibrar.

En el estudio se incorporó también la modificación a las fuerzas cortantes del método estático que permite el Reglamento del D F, cuando se toma en cuenta el período fundamental de la estructura. Las figuras mostradas se escogieron de manera que incluyeran los casos en que dicha modificación lo mejoró sustancialmente.

Las letras y símbolos que se utilizan en las figuras se refieren a lo siguiente:

- V fuerzas cortantes de entrepiso
- M momentos de volteo
- r número de entrepiso
- e estático
- d dinámico
- \* cuasidinámico

La tilde sobre V o M significa que son valores reducidos.

Se aprecia en esas figuras que en general los resultados del método cuasidinámico se apegan más a los del dinámico que los del estático, modificado o no; esta concordancia fue aún mejor en casi todos los demás casos estudiados. Conviene destacar que la modificación de fuerzas cortantes del estático conduce, en algunos casos, a una respuesta mejor que la cuasidinámica en los

entrepisos superiores, pero de todas maneras sobre estima en exceso para los demás entrepisos. Asimismo, es importante señalar que en ciertos casos la modificación del método estático puede ocasionar subestimación (figs 19, 20 y 23).

En las figs 18 a 29 se muestran también los momentos de volteo obtenidos con los métodos estático y cuasidinámico, reducidos de acuerdo con el Reglamento del D F; esta reducción se basa en el hecho de que los momentos calculados integrando el diagrama de fuerzas cortantes resultan mayores que los dinámicos. En el caso del método estático esta reducción se aplicó a las fuerzas cortantes reducidas.

Se aprecia en dichas figuras que los valores así obtenidos resultan mejores que los originales, y que la reducción es mayor en los niveles inferiores. Solo en dos casos del cuasidinámico se obtuvieron valores en la base ligeramente menores que los dinámicos (menos del uno por ciento).

Se nota también que en los modelos de marcos rígidos la reducción condujo a una distribución más uniforme de la relación de momentos de volteo, con la altura, lo cual permite mantener un factor de seguridad casi constante.

Con base en las observaciones hechas en este estudio puede afirmarse que el método cuasidinámico es apropiado para estudiar la respuesta

sísmica de los edificios desplantados en cualquiera de las zonas sísmicas del D.F., con distintas relaciones de esbeltez y factor de ductilidad menor que 6.

### 3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 3.1 Conclusiones

Se ha presentado la extensión del método cuasi dinámico para calcular la respuesta sísmica de edificios irregulares en elevación, empleando los espectros reducidos por ductilidad del Reglamento de Construcciones del D.F.

El ajuste del factor correctivo  $\alpha$  se hizo para cada zona geotécnica del Distrito Federal y cuatro factores de ductilidad ( $Q = 1, 2, 4$  y  $6$ ). Sin embargo, por la similitud encontrada entre algunas de las curvas elaboradas para tal fin, se decidió emplear curvas comunes que cubrieran los puntos correspondientes a varias de ellas, lo que permitió tener dos en total (fig 15). Así, para edificios desplantados en terreno firme, se calculará  $\alpha$  con las ecs 2 o 3) según sea la estructuración, y para los de transición y compresible, con la ec 3.

Con las ecuaciones propuestas en este trabajo para calcular  $\alpha$ , se ha incrementado el intervalo de aplicación del método cuasidínámico, ya que en la investigación precedente (ref 4) se requería que  $V_0/V_{e_0}$  fuera mayor o igual a 0.2

y actualmente esa cota inferior se ha disminuído. Tal es el caso por ejemplo, de la zona de terreno firme donde el intervalo de aplicación es

$$B_3 = 0.108 \leq V_0/V_{e_0} \leq 1.0$$

Para los terrenos de transición y compresible los valores de  $B_3$  pueden obtenerse de la tabla:

Otras conclusiones de interés acerca del método cuasidínámico son:

- a. Casi siempre da resultados bastante mejores que el estático.
- b. Es aplicable a estructuras regulares o irregulares en elevación hasta de 30 pisos con  $H/B \leq 3.6$ , para edificios de muros de cortante acoplados, y hasta de 20 pisos con  $H/B \leq 4$ , para edificios de marcos rígidos.
- c. Es práctico y de sencilla utilización en los despachos de cálculo; lo más complicado es obtener la configuración de desplazamientos estáticos  $x_j$ , lo cual no deber ser difícil en la actualidad para los ingenieros calculistas.
- d. En algunos casos en que fue aplicable, la reducción que permite el Reglamento del D.F. a las fuerzas cortantes calculadas con el método estático condujo a subestimaciones en los entrepisos superiores, tal como sucedió en el modelo ( $K_F = 2, M_F = 2$ ).
- e. El criterio de reducción de momentos de volteo es aplicable al método cuasidínámico.

(12)

f. Para aplicar el método cuasidínámico en otras ciudades, es necesario obtener las ecuaciones para calcular  $\alpha$ , correspondientes a los espectros de diseño que se tengan en los reglamentos respectivos, mediante un trabajo de investigación semejante al que se presentó en este informe.

### 3.2 Recomendación

Como resultado de todo lo discutido en este trabajo, se recomienda estudiar la conveniencia de incluir el método cuasidínámico en el Reglamento del D.F. como procedimiento opcional para el análisis sísmico de edificios. En tal caso será necesario simplificar aún más el método y hacer ajustes de curvas para  $\alpha$  que den valores medios en vez de envolventes, con el fin de no errar sistemáticamente y en exceso del lado de la seguridad.

### 4. RECONOCIMIENTO

Los autores expresan su agradecimiento a Joel García y Raúl Paredes por la ayuda prestada en organizar la información que se empleó en esta investigación.

### 5. REFERENCIAS

1. "Manual de diseño por sismo, según el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Instituto de Ingeniería, UNAM, 406.

México, Julio, 1977

2. "Tentative provisions for the development of seismic regulations for buildings" Applied Technology Council, ATC3-06, California, USA, junio, 1978
3. "Bustamante, JI. "Seismic shears and overturning moments in buildings", *Procs of the Third World Conference on Earthquake Engineering*, Vol III, pp 144-160, Nueva Zelanda, 1965
4. Aranda, GR, Rascón, OA, y Díaz, OJ, "Método cuasidínámico para el análisis sísmico de edificios irregulares en elevación", *Informe de Investigación, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, julio, 1981*
5. Aranda, GR, Rascón, OA, y Díaz, OJ, "Seismic analysis of irregular buildings", *Procs of the Seventh European Conference on Earthquake Engineering*, Atenas, Grecia, septiembre, 1982
6. "Earthquake resistant regulations. A world List", *International Association for Earthquake Engineering*, Tokio, Japón, agosto, 1980

### NOTACION

$A(T_1, Q)$  aceleración espectral de diseño para

	el modo fundamental	$V_{e0}$	cortante sísmica estática basal
$A_i$	coeficientes para distribución de aceleraciones	$V_{er}$	cortante sísmica estática en el entrepiso $r$
$B$	dimensión en planta del edificio, en la dirección analizada	$V_0$	cortante sísmica basal no corregida
$C_1$	factor de participación aproximado del modo fundamental	$V_0^*$	cortante sísmica basal cuasidinámica
$F_i$	fuerza sísmica que actúa en la masa $i$	$V_r$	cortante sísmica de entrepiso no corregida
$F_i^*$	fuerza sísmica cuasidinámica aplicada en la masa $i$	$V_r^*$	cortante sísmica cuasidinámica en el entrepiso $r$
$H$	altura total de la estructura	$W_i$	peso de la masa $i$
$M_{d0}$	momento sísmico de volteo dinámico, en la base de la estructura, calculado considerando todos los modos de vibrar	$W_T$	carga gravitacional total de la estructura
$M_{dr}$	momento sísmico de volteo dinámico, en el nivel $r$ , calculado considerando todos los modos de vibrar	$c$	coeficiente sísmico
$M_{er}$	momento sísmico estático de volteo en el nivel $r$	$g$	aceleración de la gravedad
$M_r^*$	momento de volteo cuasidinámico en el nivel $r$	$h_i$	altura de la masa $i$ respecto a la base del edificio
$P_i$	fuerza sísmica horizontal que actúa estáticamente en la masa $i$	$m_i$	masa concentrada en el nivel $i$
$Q$	factor de ductilidad	$n$	número total de niveles donde están concentradas las masas
$T_1$	periodo fundamental	$r$	índice para identificar entrepisos
$V_{d0}$	cortante sísmica dinámica basal, calculada considerando todos los modos de vibrar	$x_i$	desplazamiento de la masa $i$ causado por la fuerza $P_i$
$V_{dr}$	cortante sísmica dinámica en el entrepiso $r$ , calculada considerando todos los modos de vibrar	$\ddot{x}_i$	aceleración de la masa $i$ (excitación dinámica)
$V_{dl0}$	igual que $V_{d0}$ pero empleando sólo el modo fundamental	$\alpha$	factor correctivo para cortante basal
		$\beta_i$	parámetros para definir al factor correctivo $\alpha$
		$\lambda$	exponente para ajuste de aceleraciones

TABLA 1. CONSTANTES  $B_1$  PARA CALCULAR EL FACTOR CORRECTIVO  $q$  EN DISTINTAS ZONAS DEL D F

ZONA D F	$B_1$	Q=1	Q=2	Q=4	Q=5
FIRME I	$B_1$	1.500	1.700	1.800	1.700
	$B_2$	-4.900	-6.000	-5.430	-5.800
	$B_3$	0.103	0.103	0.108	0.103
	$B_4$	0.750	1.000	1.000	1.000
TRANSICION II	$B_1$	1.100	1.150	1.500	1.700
	$B_2$	-5.300	-5.360	-5.920	-7.400
	$B_3$	0.160	0.160	0.160	0.116
	$B_4$	0.750	0.750	1.000	1.000
COMPRESIBLE III	$B_1$	1.050	1.100	1.700	1.670
	$B_2$	-5.320	-5.400	-6.260	-7.400
	$B_3$	0.175	0.175	0.160	0.116
	$B_4$	0.750	0.750	1.000	1.000

TABLA 2. NUMERO DE CASOS CON ERROR AL CALCULAR LAS FUERZAS CORTANTES CUASIDINAMICAS (EC 4) Y COMPARARLAS, EN CADA NIVEL, CON LAS DINAMICAS, MUROS DE CORTANTE ACOPLADOS

ERROR %	TERRENO FIRME							
	$H/B = 1.2$				$H/B = 3.6$			
	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6	Q=1	Q=2	Q=4	Q=5
0 - 2		5	3	4	6	5	5	
2 - 4	1	5	3	4	1	3	3	5
4 - 6			6	2	3		1	3
6 - 8	1	1	1	1	3	5	3	
8 - 10			2	2	7	3	4	1
10 - 15			4	4	6	8	4	6
15 - 20		1	1	1	9	6	7	6
20 - 25				1	2	3	6	3
25 - 30			1	1	3	5	5	4
30 - 40					5	4	3	4
> 40					1	1	3	1
TOTAL	2	12	21	20	48	43	64	35
TOTAL DE COMPARACIONES	220	220	220	220	360	360	360	360

TABLA 3. NUMERO DE CASOS CON ERROR AL CALCULAR LAS FUERZAS CORTANTES CUASIDINAMICAS (EC 4) Y COMPARARLAS, EN CADA NIVEL, CON LAS DINAMICAS, MUROS DE CORTANTE ACOPLADOS

ERROR %	TERRENO TRANSICION							
	$H/B = 1.2$				$H/B = 3.6$			
	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6
0 - 2			3	1	5	7	2	3
2 - 4			3		4	4	5	1
4 - 6			2	1	2	4	2	
6 - 8		1	1	1	1	2	3	2
8 - 10					2	3	4	2
10 - 15			3	2	5	6	4	1
15 - 20			3	3	1	3	3	1
20 - 25			1			1	3	
25 - 30					1		1	1
30 - 40						1	1	
TOTAL		1	16	8	22	29	28	11
TOTAL DE COMPARACIONES	220	220	220	220	360	360	360	360

TABLA 4. NUMERO DE CASOS CON ERROR AL CALCULAR LAS FUERZAS CORTANTES CUASIDINAMICAS (EC 4) Y COMPARARLAS, EN CADA NIVEL, CON LAS DINAMICAS, MUROS DE CORTANTE ACOPLADOS

ERROR %	TERRENO COMPRESIBLE							
	$H/B = 1.2$				$H/B = 3.6$			
	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6
0 - 2			3	1	6	6	5	1
2 - 4		1	2		4	5	4	
4 - 6			3	1	1	6	5	2
6 - 8			3	1	3	2	3	1
8 - 10					2	1	2	4
10 - 15			2	2	2	5	5	2
15 - 20			4	1	1	2	3	
20 - 25			1				3	1
25 - 30						1	1	
30 - 40							1	
TOTAL		1	18	8	10	29	34	7
TOTAL DE COMPARACIONES	220	220	220	220	360	360	360	360

TABLA 5. NÚMERO DE CASOS CON ERROR AL CALCULAR LAS FUERZAS CORTANTES CUASIDINÁMICAS Y COMPARARLAS, EN CADA NIVEL, CON LAS DINÁMICAS, MARCOS RÍGIDOS

ERROR %	TERRENO FIRME							
	H/B = 2				H/B = 4			
	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6
0 - 2	4	4	5		1	2	2	3
2 - 4	1	1	1		1	1	1	2
4 - 6	1	1	1	2	1	1	1	1
6 - 8	1	1		4	4	4	4	
8 - 10			1		1	1	1	1
10 - 15	6	5	5	2	2	2	2	1
15 - 20		1	1		1	1	1	
TOTAL	13	13	14	8	11	12	12	8
TOTAL DE COMPARACIONES	130	130	130	130	260	260	260	260

TABLA 6. NÚMERO DE CASOS CON ERROR AL CALCULAR LAS FUERZAS CORTANTES CUASIDINÁMICAS Y COMPARARLAS, EN CADA NIVEL, CON LAS DINÁMICAS, MARCOS RÍGIDOS

ERROR %	TERRENO DE TRANSICIÓN							
	H/B = 2				H/B = 4			
	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6
0 - 2	7	8	10		1	1	3	
2 - 4	1	2	2		2	2	2	
4 - 6	2	1	1		1	1	1	
6 - 8	1	2	1		1			
8 - 10			1			1	1	
TOTAL	11	13	15		5	5	7	
TOTAL DE COMPARACIONES	130	130	130	130	260	260	260	260

TABLA 7. NÚMERO DE CASOS CON ERROR AL CALCULAR LAS FUERZAS CORTANTES CUASIDINÁMICAS Y COMPARARLAS, EN CADA NIVEL, CON LAS DINÁMICAS, MARCOS RÍGIDOS

ERROR %	TERRENO COMPRESIBLE							
	H/B = 2				H/B = 4			
	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6	Q=1	Q=2	Q=4	Q=6
0 - 2	4	7	10		9	7	8	
2 - 4	3	3	2		4	4	5	
4 - 6		2	4		2	4	3	
6 - 8	1	1	1		1		1	
8 - 10			1			1	1	
TOTAL	8	13	18		16	16	18	
TOTAL DE COMPARACIONES	130	130	130	130	260	260	260	260





TABLA 12. COMPARACION DE LA RESPUESTA PARA EL MODELO ( $K_p=3, K_f=3$ ), CON  $N/B=3.5$ ,  $Q=6$ , EN TERRENO FIRME

EXTRINSECO	CONSTANTE, MM			MOMENTO, MM-K			ERROR DEL FACTOR DISEÑO (CANTIDAD)				ERROR DEL FACTOR ESTADISTICO	
	$V_f$	$M_f$	$M_{f2}$	$M_1$	$M_2$	$M_{f3}$	POR NIVEL		RESPECTO AL PARAM.		POR NIVEL	
							V	M	V	M	V	M
Distancia entre pilas en el momento de la construcción	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

El error negativo indica que existe subestimación con respecto a la respuesta dinámica

TABLA 13. COMPARACION DE CORTANTES DE ENTREPISO, EN TONELADAS, PARA DIFERENTES VALORES DEL PARAMETRO  $\lambda$ . MODELO ( $K_p=3, K_f=3$ ), CON  $N/B=3.6$ , EN TERRENO FIRME Y  $Q=6$

EXTRINSECO	$V_f$	$M_f$	$\lambda$							10	Seleccionado	
			0.11	0.21	0.50	0.66	0.75	0.80	0.90**			
Distancia entre pilas en el momento de la construcción	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

\*\* Valor seleccionado

TABLA 14. COMPARACION DE LA RESPUESTA PARA EL MODELO  $(K_c-2, M_c-3)$ , CON  $N/S=4$ ,  $Q=1$ , EN TERRENO FIRME

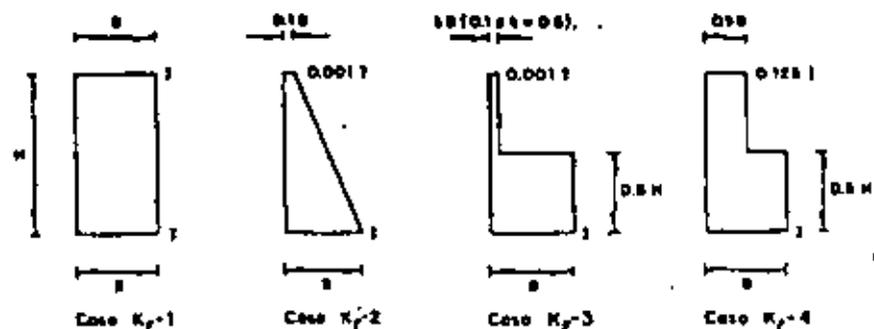
ENTREPISO	CORTANTE, mm			MOMENTO, mm-k			ERROR (%)				ERROR ESTADISTICO	
	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	MÉTODO CURSOS DÍNICOS		RESPECTO AL BASAL		POR NIVEL	
							V	M	V	M	V	M
1	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000

El error negativo indica que existe subestimación con respecto a la respuesta dinámica

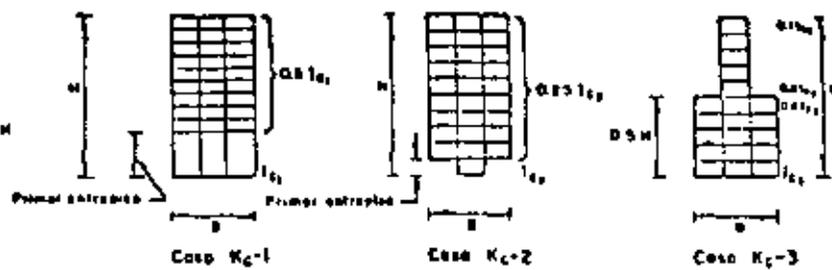
TABLA 15. COMPARACION DE CORTANTES DE ENTREPISO, EN TONELADAS, PARA DIFERENTES VALORES DEL PARAMETRO  $\lambda$ . MODELO  $(K_c-2, M_c-3)$ , CON  $N/S=4$ , EN TERRENO FIRME Y  $Q=1$

ENTREPISO	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	$\lambda$									
			0.25	0.33	0.50	0.66	0.75	0.80	0.90	10**		
1	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000

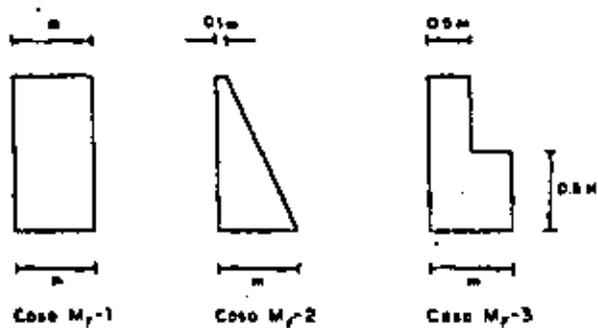
\*\* Valor seleccionado



a) Rigideces, con  $J = 12.5 \text{ m}^4$

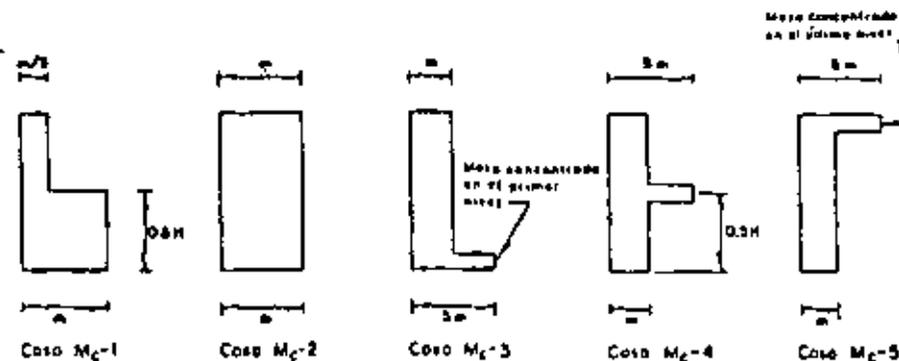


a) Rigideces con  $J_{c1} = 0.02 \text{ m}^4$ ,  $J_{c2} = 0.034 \text{ m}^4$



b) Masas, con  $m = 10 \text{ T} \cdot \text{seg}^2/\text{m}$

Para  $H/B = 12$ ,  $n = 10$   
 Para  $H/B = 3.6$ ,  $n = 30$   
 $n = \text{número de pisos}$



b) Masas, con  $m = 10.0 \text{ T} \cdot \text{seg}^2/\text{m}$

Para  $H/B = 2$ ,  $n = 10$   
 Para  $H/B = 4$ ,  $n = 20$   
 $n = \text{número de pisos}$

Fig 1 Variación de parámetros en los modelos de muros de cortante acoplados

Fig 2 Variación de parámetros en los modelos de marcos

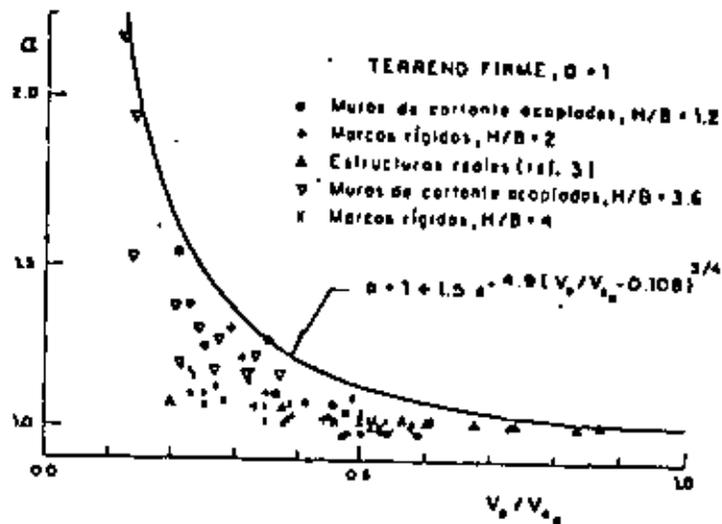


Fig 3 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno firme en el D.F.

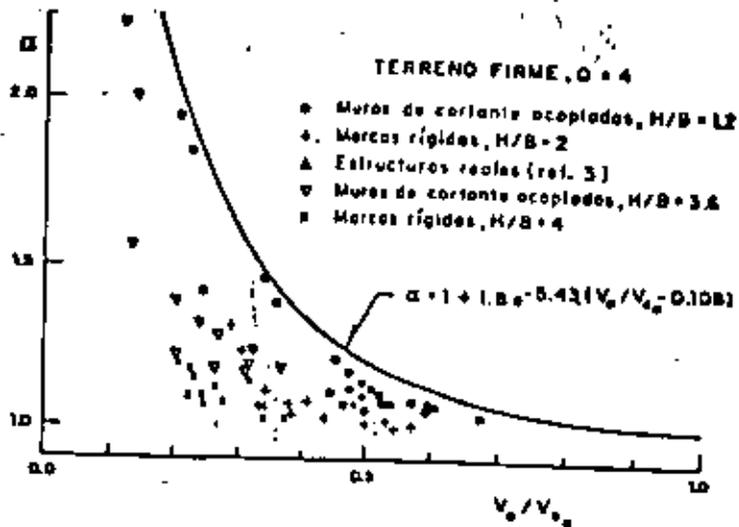


Fig 5 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno firme en el D.F.

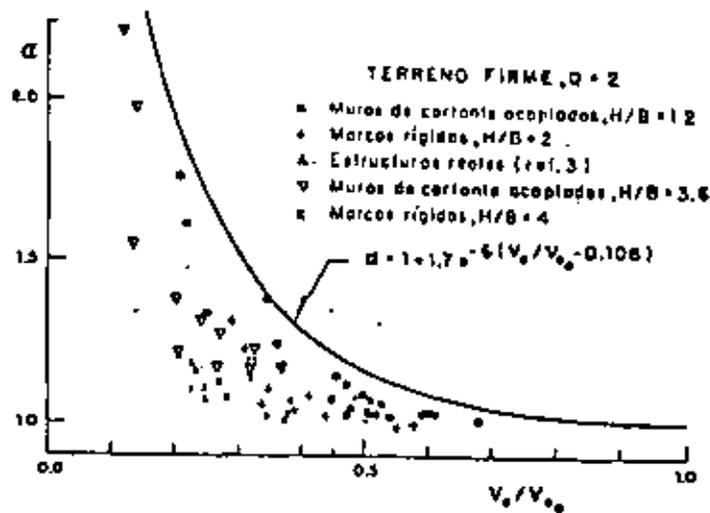


Fig 4 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno firme en el D.F.

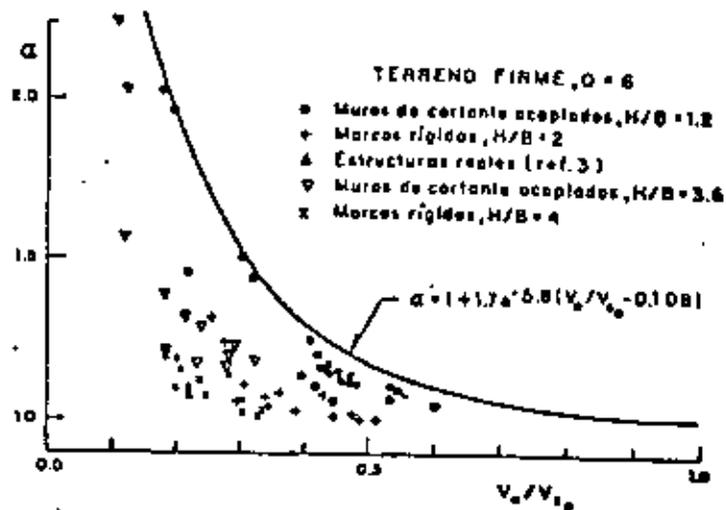


Fig 6 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno firme en el D.F.

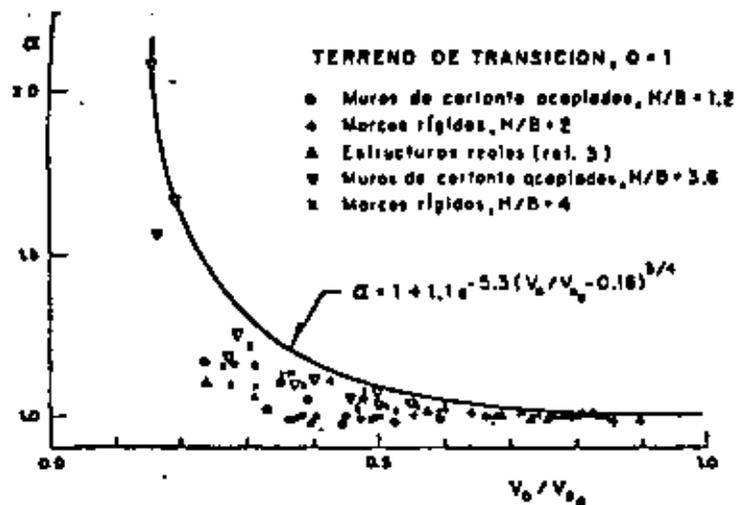


Fig 7 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno de transición en el D.F.

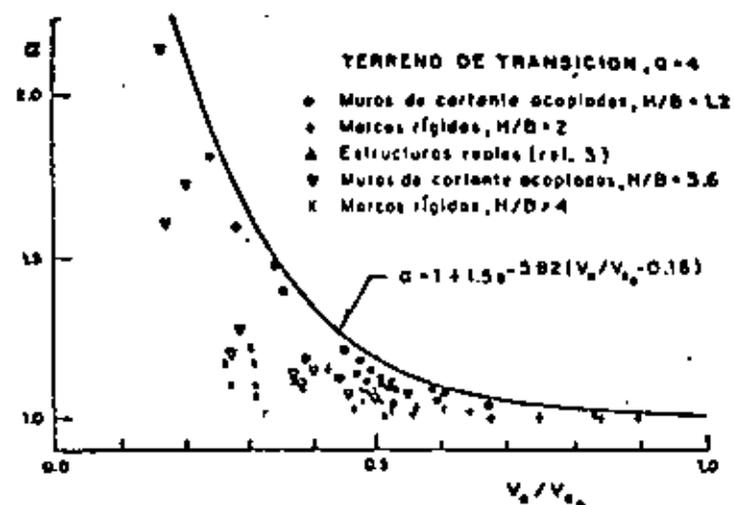


Fig 9 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno de transición en el D.F.

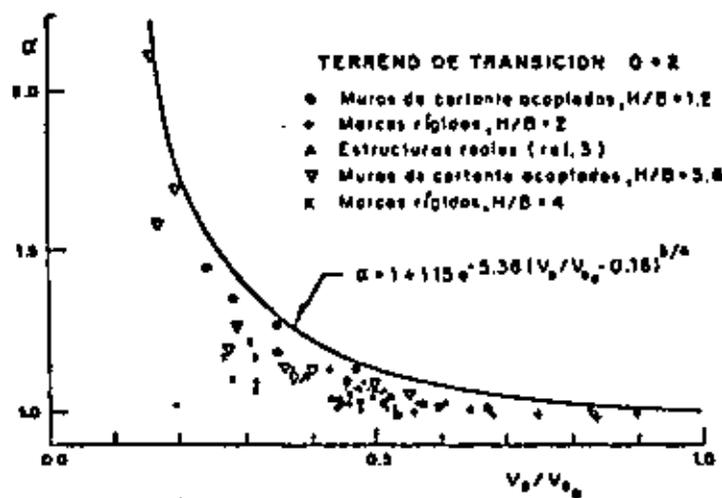


Fig 8 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno de transición en el D.F.

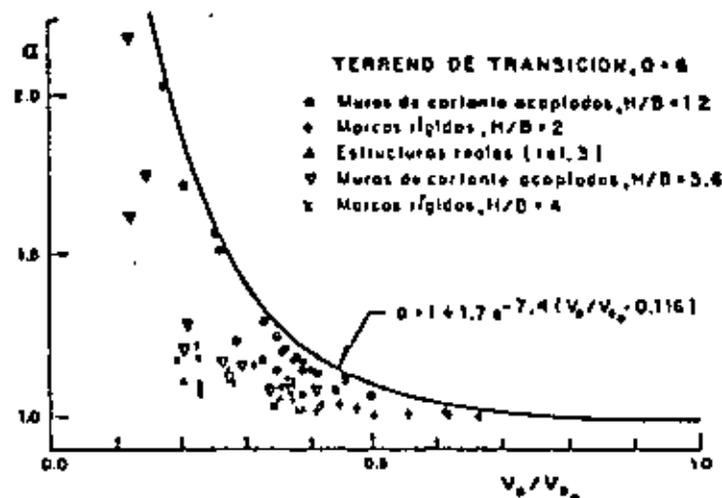
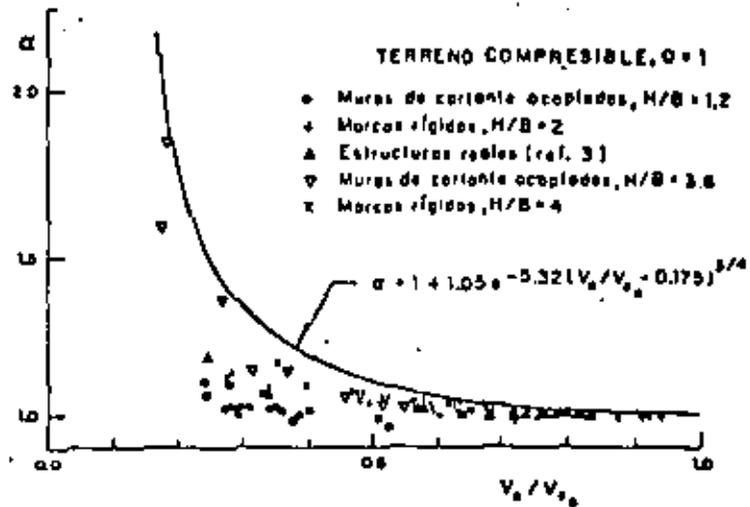
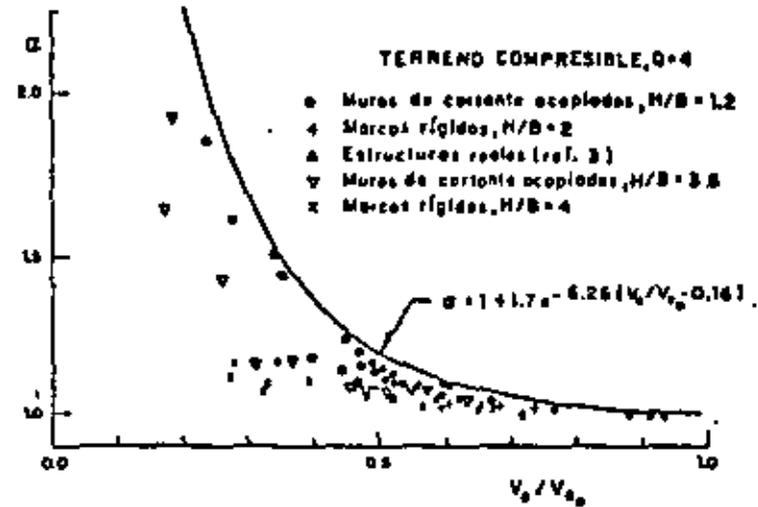
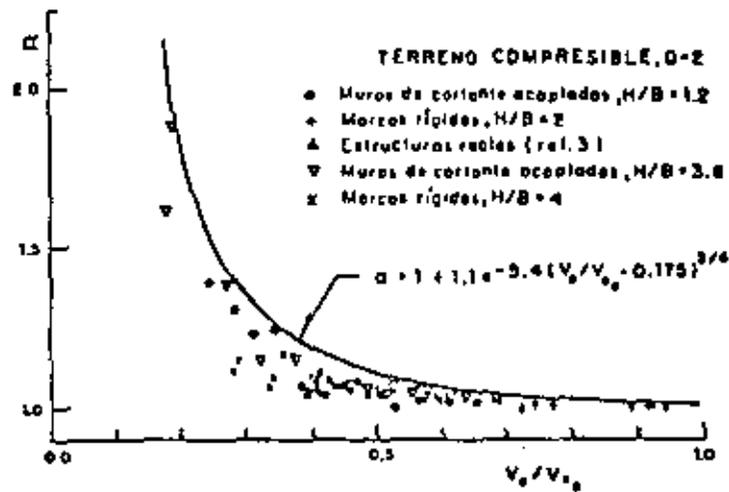
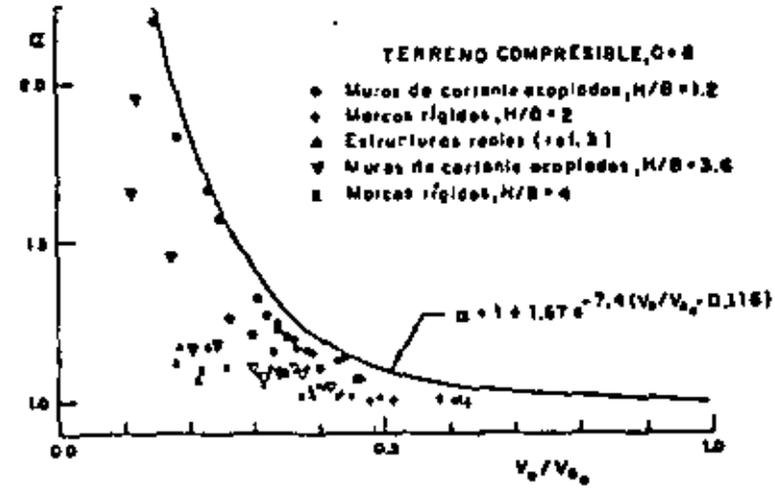


Fig 10 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno de transición en el D.F.

Fig 11 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno compresible en el D.F.Fig 13 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno compresible en el D.F.Fig 12 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno compresible en el D.F.Fig 14 Factor correctivo  $\alpha$  para terreno compresible en el D.F.

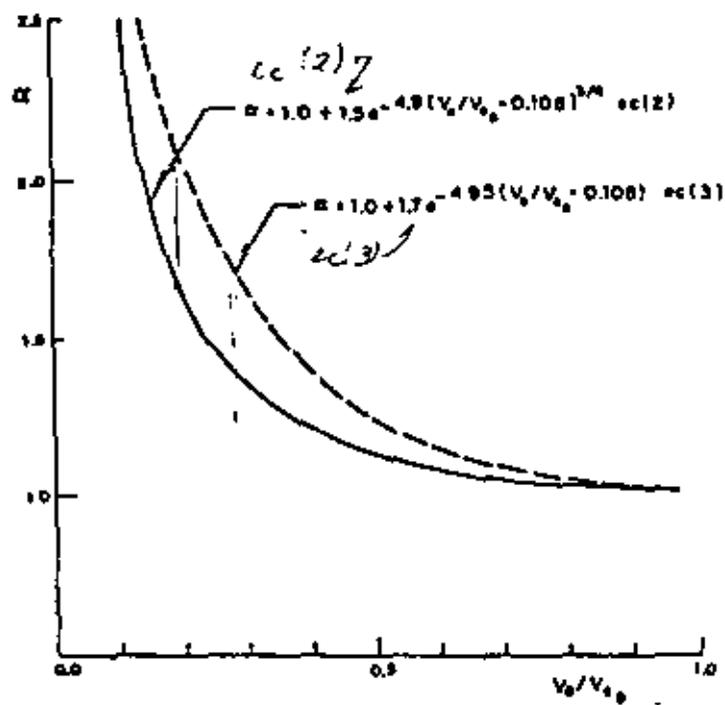


Fig 15 Envolventas de diseño para factor correctivo  $\alpha$

Espectro de diseño para terreno comprensible del DF, con  $Q=1$

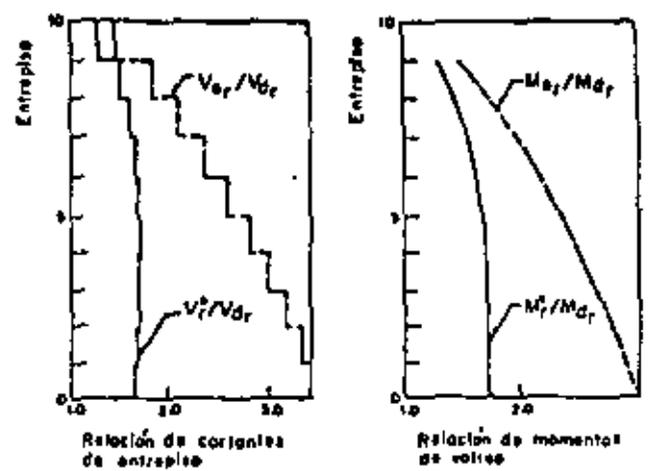


Fig 16 Comparación de resultados para el modelo ( $K_F=2$ ,  $M_F=2$ ) con espectro de terreno comprensible, factor de ductilidad de  $Q=1$  y relación de aspecto  $H/B=1.2$

Espectro de diseño para terreno comprensible del DF, con  $Q=6$

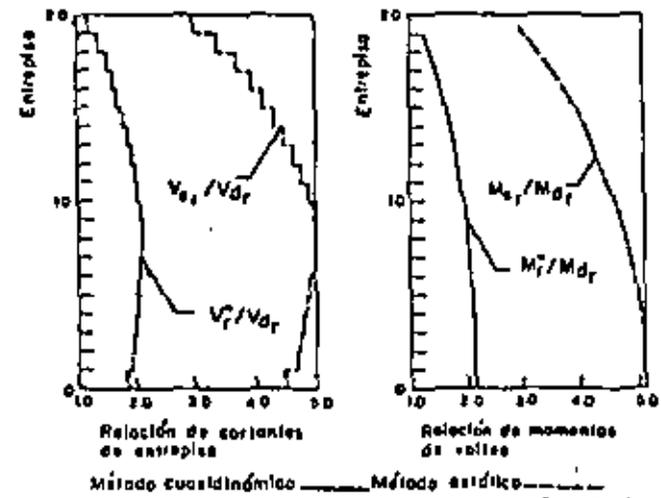


Fig 17 Comparación de resultados para el modelo ( $K_c=2$ ,  $M_c=3$ ), con espectro de terreno comprensible, factor de ductilidad de  $Q=6$  y relación de aspecto  $H/B=4$

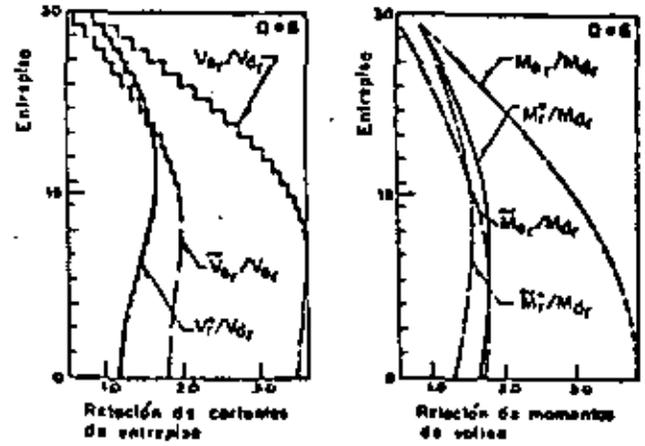
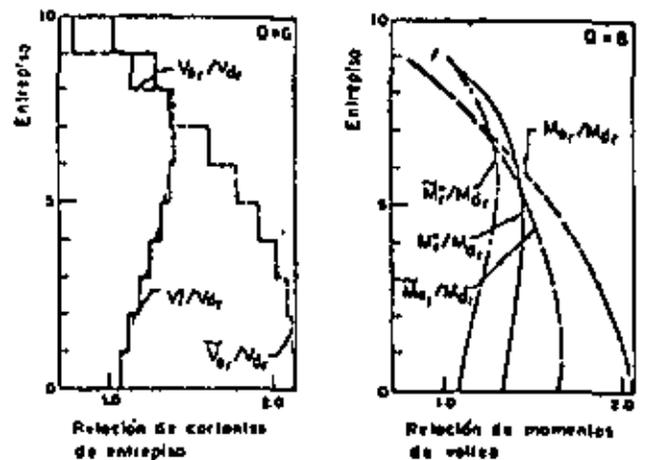
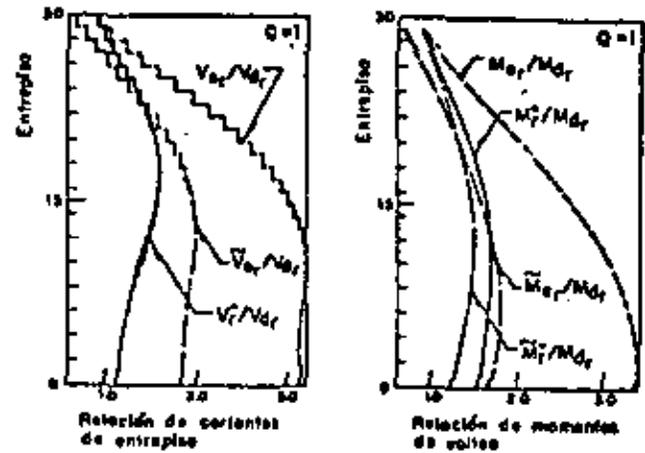
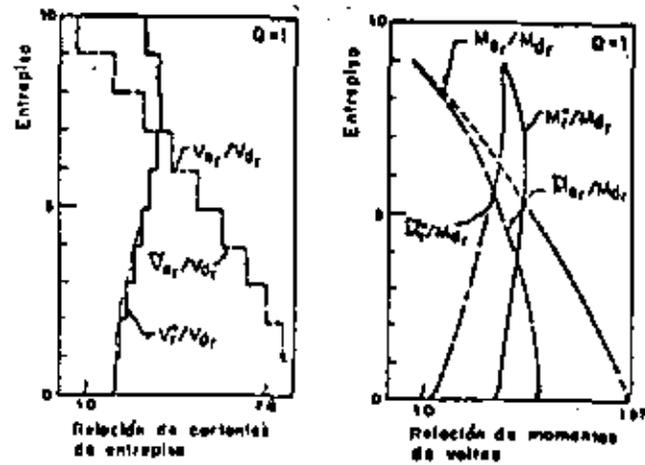


Fig 18 Comparaciones para el modelo ( $K_F=2, M_F=2$ ) con relación de aspecto  $H/B=1.2$  en terreno firme

Fig 19 Comparaciones para el modelo ( $K_F=2, M_F=2$ ) con relación de aspecto  $H/B=3.6$  en terreno firme

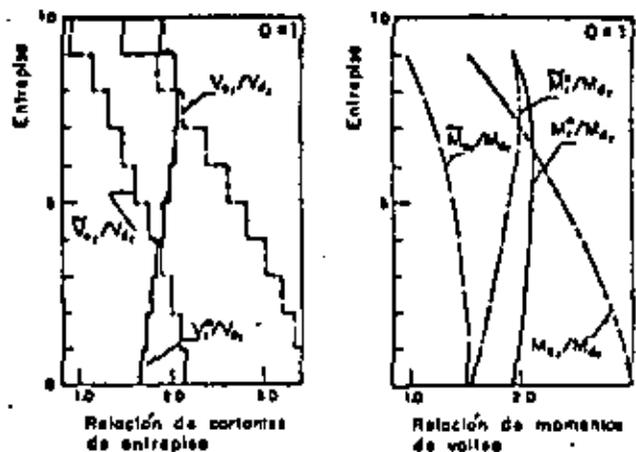


Fig 20 Comparaciones para el modelo  $(K_F-2, M_F-2)$  con relación de aspecto  $H/B=1.2$  en terreno compresible

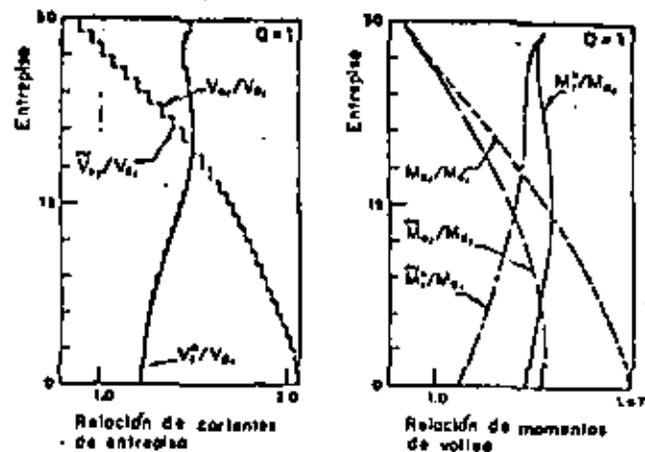
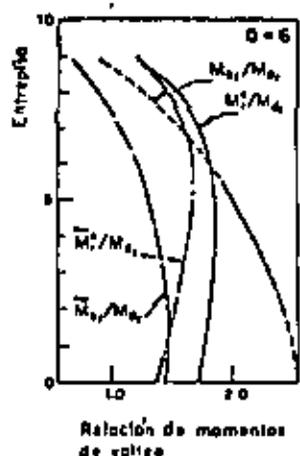
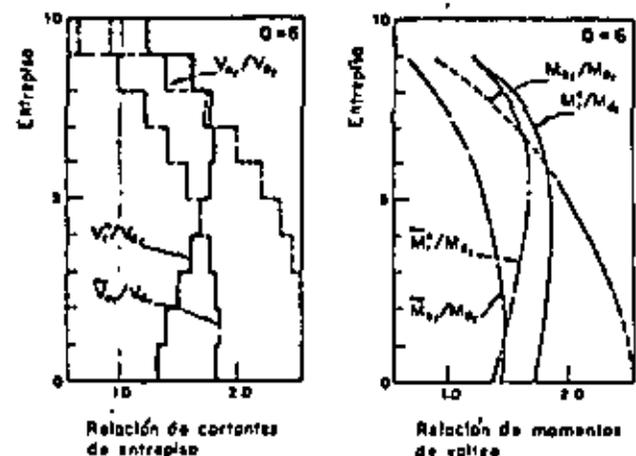
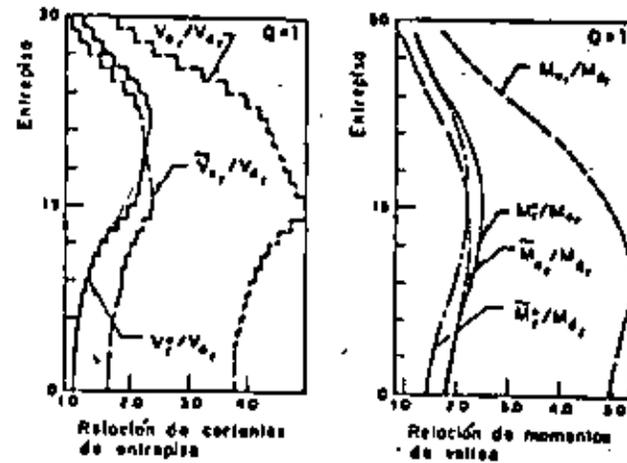
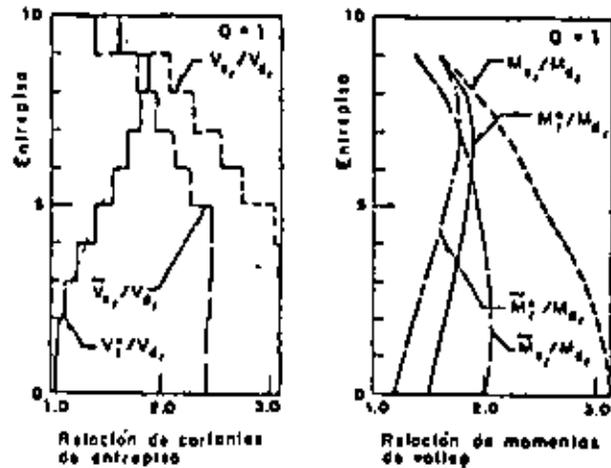


Fig 21 Comparaciones para el modelo  $(K_F-2, M_F-2)$  con relación de aspecto  $H/B=3.6$  en terreno compresible





13

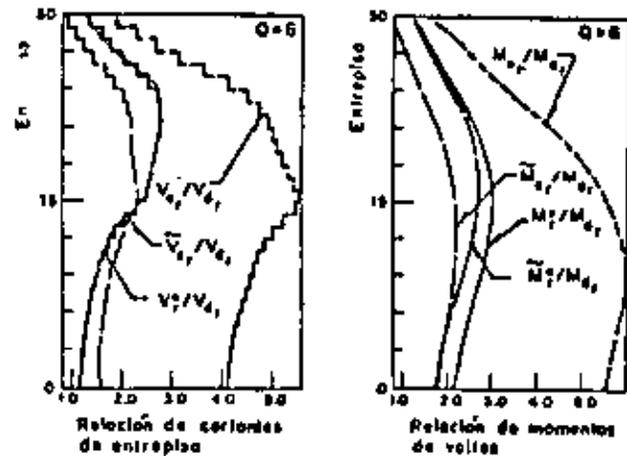
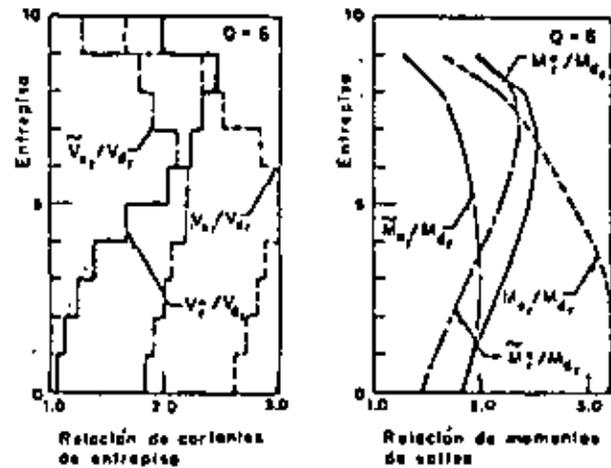


Fig 22 Comparaciones para el modelo (K<sub>F</sub>-3, M<sub>F</sub>-3) con relación de aspecto H/B=1.2 en terreno firme

Fig 23 Comparaciones para el modelo (K<sub>F</sub>-3, M<sub>F</sub>-3) con relación de aspecto H/B=3.6 en terreno firme

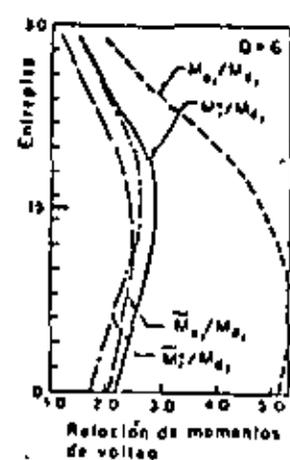
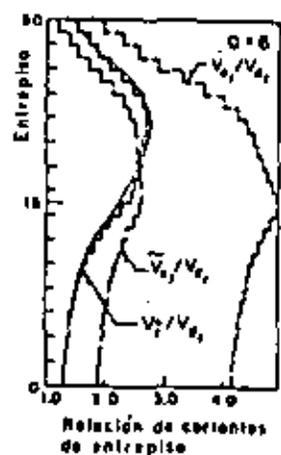
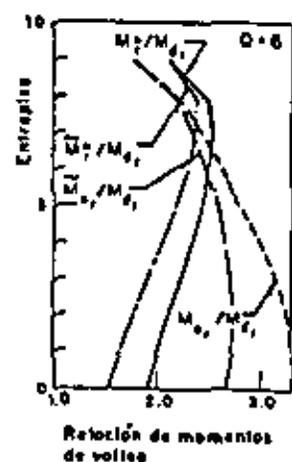
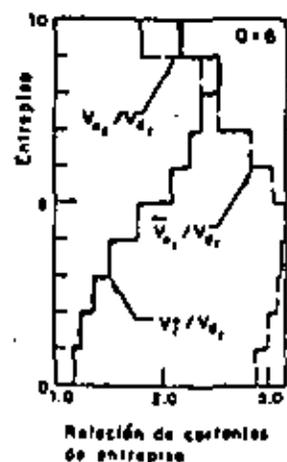
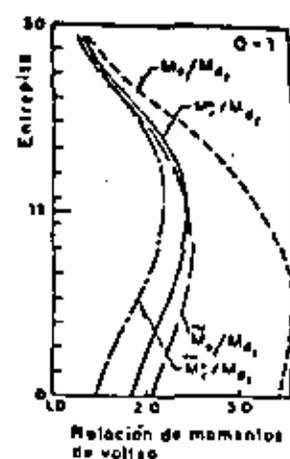
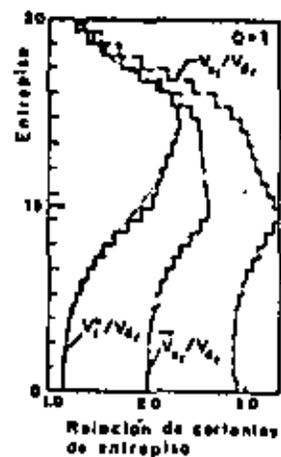
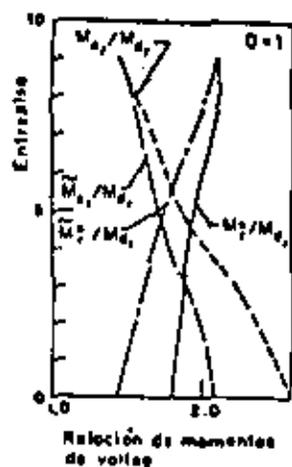
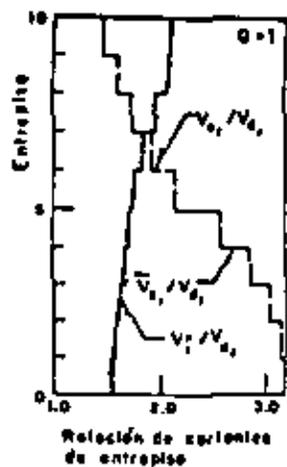


Fig 24 Comparaciones para el modelo  $(K_F-3, M_F-3)$  con relación de aspecto  $H/B=1.2$  en terreno compresible

Fig 25 Comparaciones para el modelo  $(K_F-3, M_F-3)$  con relación de aspecto  $H/B=3.6$  en terreno compresible

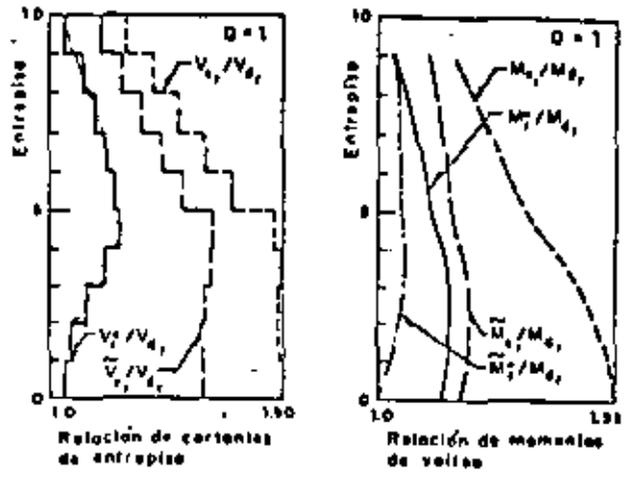


Fig. 26 Comparaciones para el modelo  $(K_C-3, M_C-1)$  con relación de aspecto  $H/B = 2$  en terreno firme

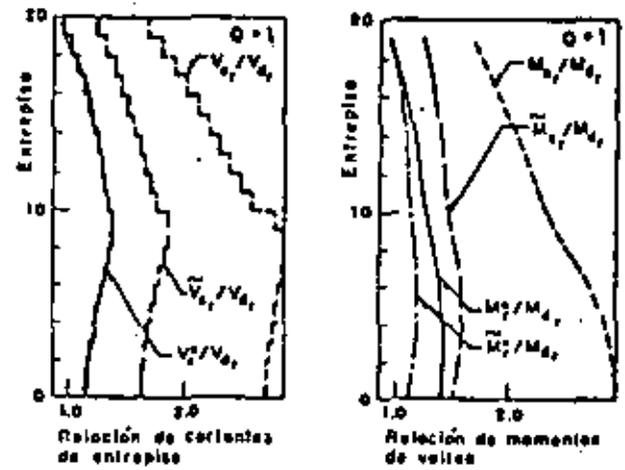
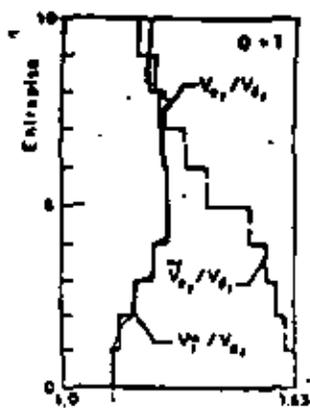
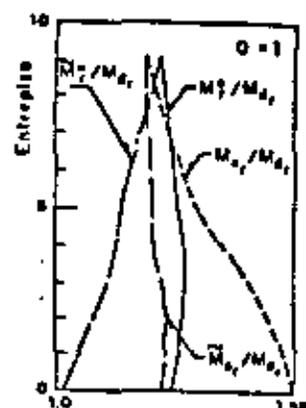


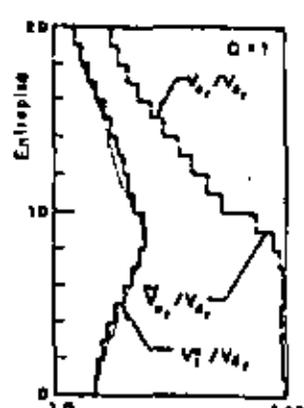
Fig. 27 Comparaciones para el modelo  $(K_C-3, M_C-1)$  con relación de aspecto  $H/B = 4$  en terreno firme



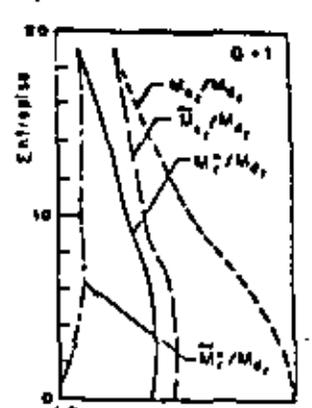
Relación de corrientes de entropía



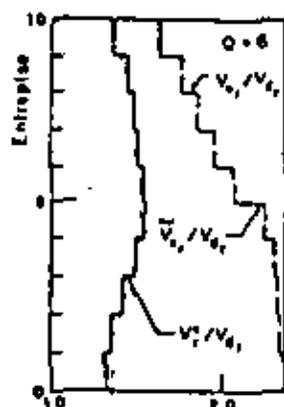
Relación de momentos de vórtices



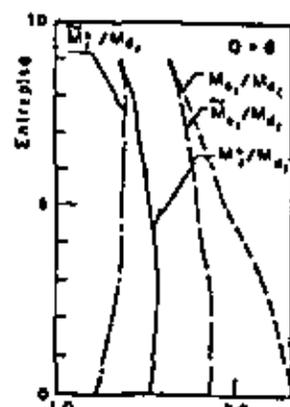
Relación de corrientes de entropía



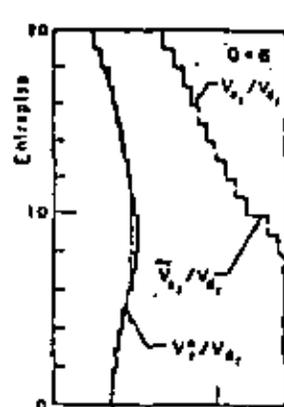
Relación de momentos de vórtices



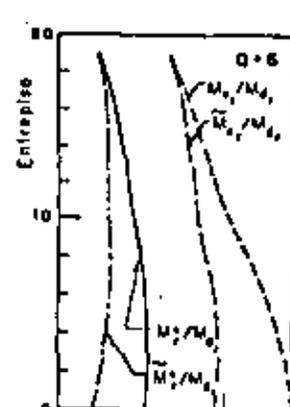
Relación de corrientes de entropía



Relación de momentos de vórtices



Relación de corrientes de entropía



Relación de momentos de vórtices

Fig 28 Comparaciones para el modelo ( $K_C - 3, M_C - 1$ ) con relación de aspecto  $H/B = 2$  en terreno compresible

Fig 29 Comparaciones para el modelo ( $K_C - 3, M_C - 1$ ) con relación de aspecto  $H/B = 4$  en terreno compresible



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

**ANALISIS CUASIDINAMICO DE EDIFICIOS**

G. RAFAEL ARANDA H.  
OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ  
ORLANDO J. DIAZ L.

AGOSTO, 1983

## ANALISIS CUASIDINAMICO DE EDIFICIOS

①

G. Rafael Aranda H. <sup>I</sup>  
Octavio A. Rascón Ch. <sup>I</sup>  
Orlando J. Díaz L. <sup>II</sup>

### RESUMEN

Se estudia en forma paramétrica la respuesta sísmica de edificios regulares e irregulares en elevación, simétricos en planta y solicitados en una sola dirección principal, con comportamiento elástico. Se emplean distintas distribuciones de rigideces y masas con respecto a la altura, para dos grupos de modelos estructurales: uno es representativo de estructuras con comportamiento en flexión (muros de cortante acoplados) y el otro en cortante (marcos rígidos).

Se propone un método para calcular la respuesta sísmica de edificios, cuya formulación se basa en suponer que la configuración del primer modo es igual a la de los desplazamientos causados por un conjunto de fuerzas sísmicas estáticas horizontales. Las aceleraciones de las masas se calculan a partir de esos desplazamientos y con el valor del período fundamental; que por conveniencia se calcula en forma aproximada con el cociente de Schwartz. Las fuerzas resultantes deben corregirse por un factor correctivo, distinto para cada espectro de diseño que se emplee, y distribuirse a lo alto del edificio tomando factores de ponderación que dependen del peso y el desplazamiento de cada masa.

En este trabajo se optó por definir la excitación sísmica con dos espectros de diseño diferentes (Fig 1). Uno es hiperbólico, en el que se exagera la influencia de modos superiores, ya que la parte descendente empieza en un décimo del período fundamental de la estructura analizada. El otro es plano, con aceleración espectral constante para cualquier período.

El método ha sido denominado Método Cuasidinámico; es de aplicación sencilla y útil a las personas involucradas en el diseño sísmico de edificios. De la comparación de resultados puede apreciarse que el método propuesto conduce a una respuesta más apegada a la dinámica modal, que la que se obtiene con el método sísmico estático.

### INTRODUCCION

Es una práctica común construir edificios irregulares en elevación en zonas sísmicas. Es importante, por tanto, estudiar el comportamiento de esas estructuras cuando están sometidas a movimientos telúricos.

(I) Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM

(II) Ayudante de Investigador; Instituto de Ingeniería, UNAM

Se sabe que el comportamiento dinámico de edificios está determinado fundamentalmente por la distribución, con respecto a la altura, de masas y rigideces. Sin embargo, la mayoría de reglamentos sísmicos en el mundo no especifica en sus métodos de análisis, estáticos o equivalentes, cómo tomar en cuenta este tipo de irregularidades.

En la literatura se encuentra una propuesta de normas de diseño sísmico de edificios (1) donde la influencia de la distribución irregular de masas y rigideces se toma en cuenta mediante métodos iterativos aproximados, que hacen depender las fuerzas laterales de diseño de la configuración deformada del sistema, cuando dichas fuerzas actúan estáticamente; el resultado es una aproximación a un análisis dinámico elástico basado en el modo fundamental y se acepta mientras el cortante calculado con el segundo ciclo no difiera en más del treinta por ciento del obtenido con el primero; de lo contrario deberá hacerse un análisis sísmico modal.

Conviene aclarar que en el actual Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (3) no se hace diferencia de criterios para análisis sísmico estático de edificios regulares o irregulares en elevación.

En 1965, Bustamante (2) comparó la respuesta sísmica de cuarenta y siete edificios, obtenida de acuerdo con el reglamento de la SEAOC\* y con las normas sísmicas vigentes en ese entonces (1965) para el Distrito Federal; las estructuras analizadas fueron exclusivamente de cortante e irregulares tanto en masa como rigidez. La conclusión más importante de ese trabajo es en el sentido de que el análisis dinámico modal conduce a una respuesta menor que la obtenida con los criterios estáticos de cada una de esas normas, excepto para los edificios que tienen partes con reducciones bruscas de masa y rigidez.

En el presente trabajo, se desarrolla un método de análisis sísmico de edificios irregulares en elevación, con comportamiento elástico. La excitación dinámica se define con dos diferentes espectros de diseño (Fig 1); uno es plano, constante en todo el rango de periodos naturales, y el otro hiperbólico, con el que se exagera la influencia de los modos superiores de vibrar, pues el descenso de la hipérbola comienza cuando el periodo es igual a un décimo del periodo fundamental de cada estructura.

El método también se ha aplicado utilizando los espectros de diseño de la Cd. de México, en edificios con diversas relaciones de aspecto  $H/B$  (con  $H$  = altura y  $B$  = dimensión en planta en la dirección analizada). Los resultados obtenidos han sido satisfactorios (4). Actualmente se está realizando un estudio para tomar en cuenta el comportamiento elasto-plástico de las estructuras (5).

#### METODO CUASIDINAMICO

El método está basado en el Principio de Conservación de la Energía, y por conveniencia se parte de un análisis sísmico estático convencional,

\* Structural Engineers Association of California

el cual se modifica para asignar una distribución de aceleraciones más acorde con las que se obtendrían de un análisis dinámico. Esa modificación se basa parcialmente en el análisis de resultados de estudios paramétricos de marcos rígidos y muros de cortante acoplados.

Para aplicar el método se procede como sigue:

- a) Determinar las fuerzas laterales sísmicas,  $P_i$ , que actúan en cada nivel,  $i$ , calculadas con el método estático convencional (3).

$$P_i = \frac{W_i h_i}{\sum_{i=1}^n W_i h_i} cW_T$$

donde  $W_i$  = peso de la masa  $i$ ;  $W_T$  = peso total de la estructura;  $c$  = coeficiente sísmico;  $h_i$  = altura de la masa  $i$ , y  $n$  = número de niveles

- b) Obtener los desplazamientos estáticos  $x_i$  en cada nivel producidos por las fuerzas  $P_i$
- c) Estimar el periodo fundamental de vibración,  $T_1$ , de la estructura, usando el cociente de Schwartz (6)

$$T_1 = 2\pi \left( \frac{1}{g} \frac{\sum_{i=1}^n W_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n P_i x_i} \right)^{1/2}$$

donde  $g$  = aceleración debida a la gravedad

- d) Determinar la aceleración espectral,  $A(T_1)$ , correspondiente al periodo  $T_1$  y evaluar la aceleración de cada nivel,  $\ddot{x}_i$ , suponiendo que los desplazamientos,  $x_i$ , son las componentes del vector modal fundamental, esto es

$$\ddot{x}_i = A(T_1) C_1 x_i$$

donde  $C_1$  es el coeficiente de participación del modo fundamental, que se calcula como

$$C_1 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2}$$

- e) Calcular un nuevo conjunto de fuerzas sísmicas laterales,  $F_i$ , como

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

La fuerza cortante sísmica en cualquier entrepiso,  $V_r$ , podrá determinarse como la suma de las fuerzas  $F_i$  que se encuentren encima del nivel r. Esto es

$$V_r = \sum_{i=r}^n F_i \tag{1}$$

- f) Corregir la fuerza cortante basal  $V_0$ , obtenida con la ec 1, multiplicándola por un factor correctivo,  $\alpha$

$$V_0^* = \alpha V_0$$

donde  $V_0^*$  = fuerza cortante basal cuasidinámica.

En general, el factor  $\alpha$  depende del tipo de suelo donde se desplante la estructura y de la relación  $V_0/V_{e0}$ , siendo  $V_0$  igual a la fuerza cortante basal calculada con las fuerzas  $F_i^{e0}$

En la siguiente sección se discute el ajuste del factor correctivo  $\alpha$  para cada espectro de diseño en particular.

- g) Evaluar las fuerzas sísmicas finales cuasidinámicas,  $F_i^*$ , como

$$F_i^* = \frac{W_i x_i}{\sum_{i=1}^n W_i x_i} V_0^*$$

- h) Las fuerzas cortantes en cada entrepiso,  $V_i^*$ , se obtienen a partir de las fuerzas  $F_i^*$ , y con ellas se calculan los momentos de volteo.

### DETERMINACION DEL FACTOR CORRECTIVO $\alpha$

Sea un factor  $\alpha$  definido como.

$$\alpha = V_{d0} / V_{d10} \tag{2}$$

donde  $V_{d0}$  = fuerza cortante basal obtenida con el método dinámico modal utilizando la contribución de todos los modos, y  $V_{d10}$  = fuerza cortante basal dinámica incluyendo solamente la contribución del modo fundamental.

De la ec 2 se observa que si se conociera el valor de  $\alpha$  y  $V_{d10}$  podría obtenerse  $V_{d0}$  como

$$V_{d0} = \alpha V_{d10} \tag{3}$$

Se ha demostrado (4) que es conservador sustituir a  $V_{d1_0}$  por  $V_0$  en la ec 3, lo que conduce a tener que

$$V_{d_0} < \alpha V_0$$

y a su vez que

$$V_{d_0} < V_0^*$$

Esto indica que al conocer  $V_0^*$  se tendría un valor aproximado del constante basal dinámico.

Para determinar el factor correctivo  $\alpha$  con fines de diseño sísmico, se han estudiado diferentes estructuras irregulares en elevación, como las mostradas en las Figs 2 y 3.

En las Figs 4 y 5 se grafican los valores del cociente  $V_{d_0}/V_0$ , en función de  $V_0/V_{e_0}$  obtenidos para cada uno de los espectros indicados en la Fig 1. También se incluyen los valores de  $\alpha$  calculados para varias estructuras reales, cuyas características se dan en la ref 2.

Con los anteriores resultados se ajustó para cada espectro una curva que fuera envolvente de todos los puntos encontrados. Las curvas envolventes que se encontraron son:

$$\alpha = 1+25 \exp \{-28(V_0/V_{e_0} - 0.02)^{0.75}\}, \text{ para espectro hiperbólico} \quad (5)$$

$$\alpha = 0.9+0.1(V_0/V_{e_0})^{-1.6}, \text{ para espectro plano} \quad (6)$$

En virtud de que con estas ecuaciones quedan cubiertos los casos reales y los modelos de estructuras irregulares, puede pensarse que son útiles para propósitos de diseño.

### APLICACIONES

El Método Cuasidinámico se ha empleado para calcular la respuesta sísmica de edificios, con todas las combinaciones posibles de irregularidades que se muestran en las Figs 2 y 3, para las relaciones de aspecto indicadas.

En las Figs 6 a 9 se presentan los resultados de dos edificios ( $K_F-4$ ,  $M_F-3$  y  $K_C-1$ ,  $M_C-3$ ) para distintas relaciones de aspecto. La respuesta cuasidinámica, constantes de entrepiso y momentos de volteo, se normaliza a los valores dinámicos correspondientes ( $V_r^*/V_{d_r}$  y  $M_r^*/M_{d_r}$ ). Con fines comparativos se muestran los resultados obtenidos con el método estático ( $V_e/V_{d_r}$  y  $M_e/M_{d_r}$ ), normalizadas también al dinámico.

### CONCLUSIONES

Las conclusiones más relevantes de este trabajo son: El Método Cua-

sidinámico conduce a valores mayores de la respuesta que los obtenidos con el método dinámico modal; únicamente para pocas estructuras, y en los pisos superiores, no ocurrió eso. Puede considerarse que el método propuesto da mejores resultados que los obtenidos con el estático del Reglamento de Construcciones del D.F.

El método presentado es útil y de fácil aplicación por parte de los ingenieros que en la práctica profesional se ven involucrados en el análisis sísmico de edificios. Lo más complicado es la obtención de los desplazamientos causados por las cargas estáticas lo cual, desde un punto de vista realista, no debe representar mayores inconvenientes.

En virtud de que el factor correctivo  $\alpha$  depende, entre otras cosas, del tipo de terreno donde las estructuras van a estar construidas, es necesario investigar qué tipo de curva es la adecuada para cada espectro de diseño que se emplee.

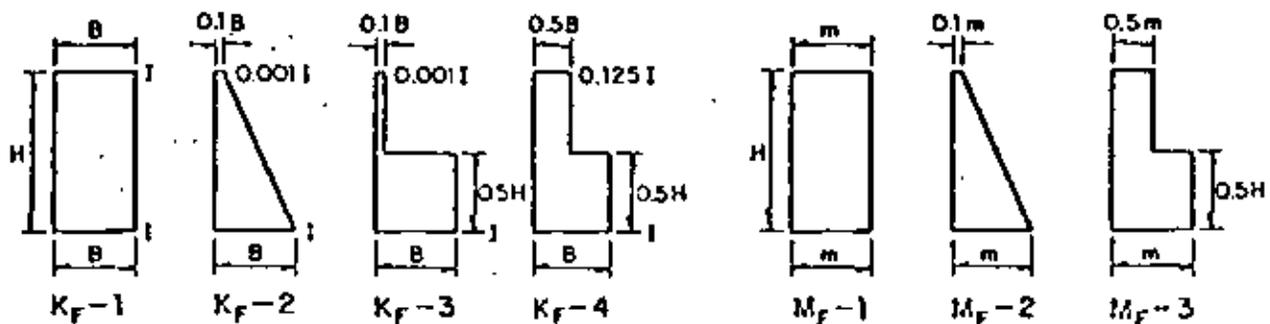
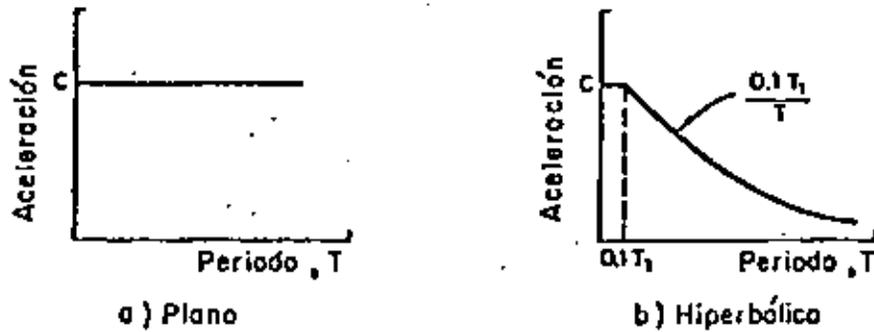
### RECONOCIMIENTO

Esta investigación fue realizada con el patrocinio de la Dirección de Operación y Construcción Hidráulica del Departamento del Distrito Federal.

Los autores desean agradecer por este medio los comentarios y sugerencias hechas por A. Arias, E. Bazán, L. Esteva y R. Villaverde.

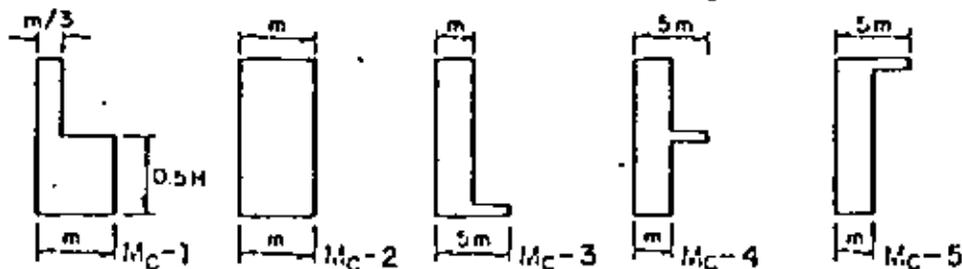
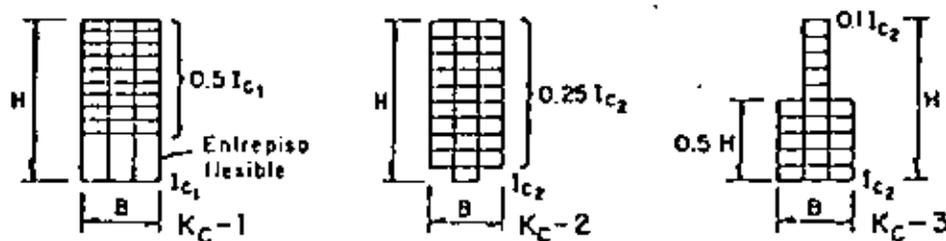
### REFERENCIAS

1. "Tentative provisions for the development of seismic regulations for buildings", Applied Technology Council, ATC3-06, Cal., USA, junio 1978.
2. Bustamante, J I, "Seismic shears and overturning moments in buildings", Proc. of the Third World Conference on Earthquake Engineering, Vol III, pp 144-160, Nueva Zelanda, 1965
3. "Manual de diseño por sismo, según el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Instituto de Ingeniería, UNAM, 406, México, julio, 1977.
4. Aranda, G R, Rascón, O A, y Díaz, O J, "Método cuasidinámico para el análisis sísmico de edificios con comportamiento elástico", a publicarse en las series del Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1982.
5. Aranda, G R, Rascón, O A y, Díaz, O J, "Análisis sísmico de edificios irregulares en elevación con espectros reducidos por ductilidad", investigación en curso, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1982
6. Newmark, N M, y Rosenblueth, E. Fundamentals of Earthquake Engineering, Prentice-Hall Inc., Nueva Jersey, 1971



$n = 10$  pisos para  $H/B = 1.2$  y  $n = 30$  para  $H/B = 3.6$

Fig 2. Parámetros para muros de cortante acoplados



$n = 10$  pisos para  $H/B = 2$  y  $n = 30$  para  $H/B = 4$

Fig 3. Parámetros para marcos rígidos

8

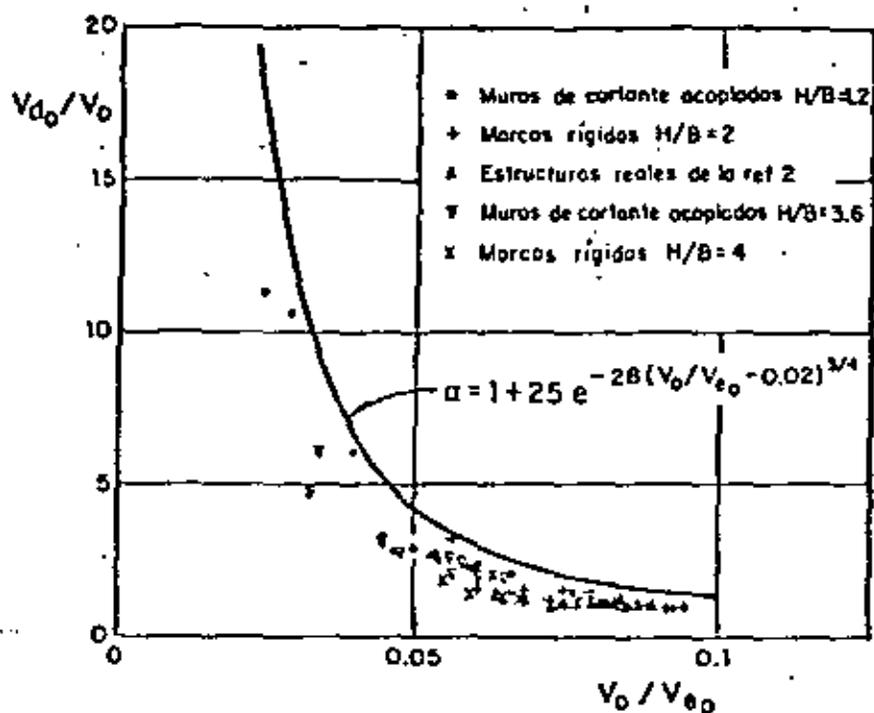


Fig 4. Factor correctivo  $\alpha$  para espectro hiperbólico

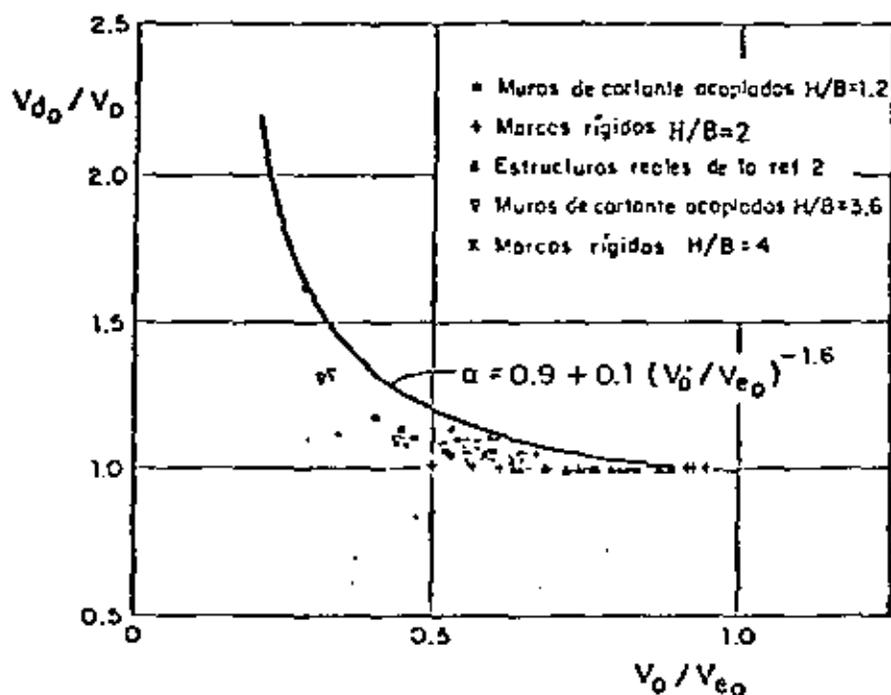
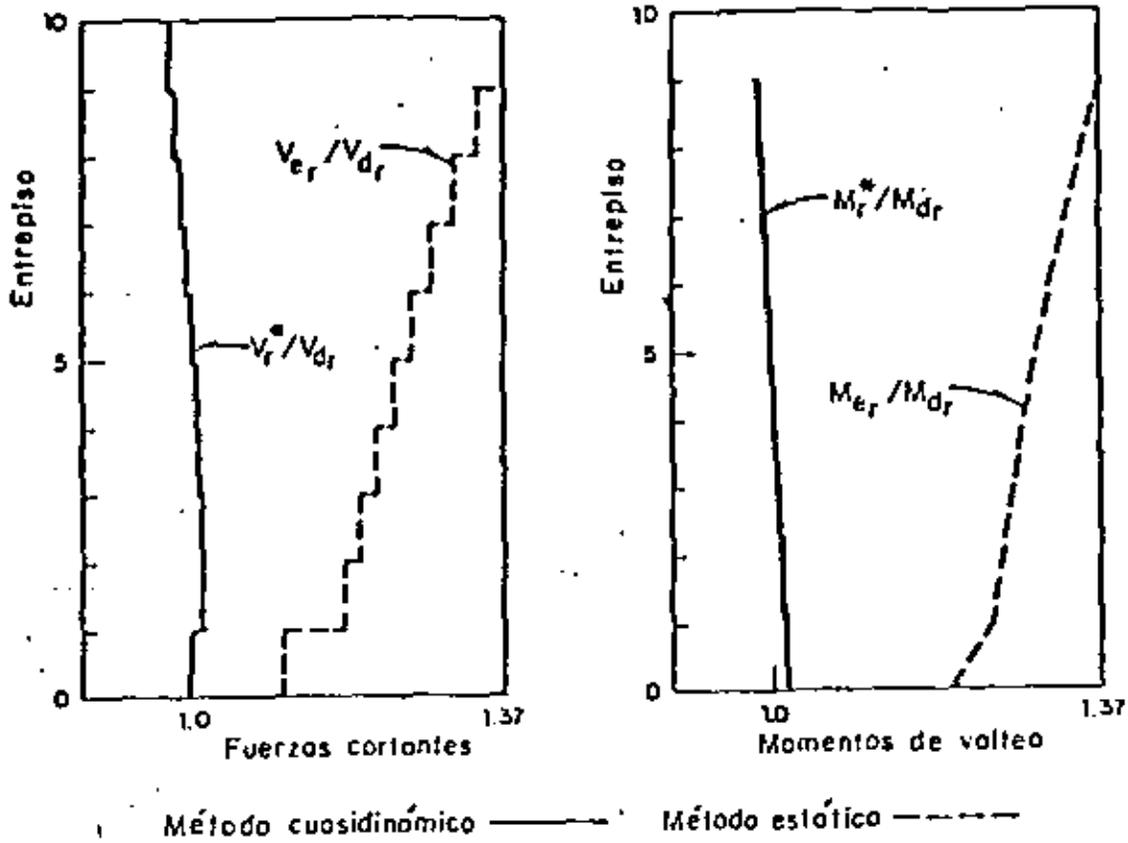


Fig 5 Factor correctivo  $\alpha$  para espectro plano

Espectro plano



Espectro hiperbólico

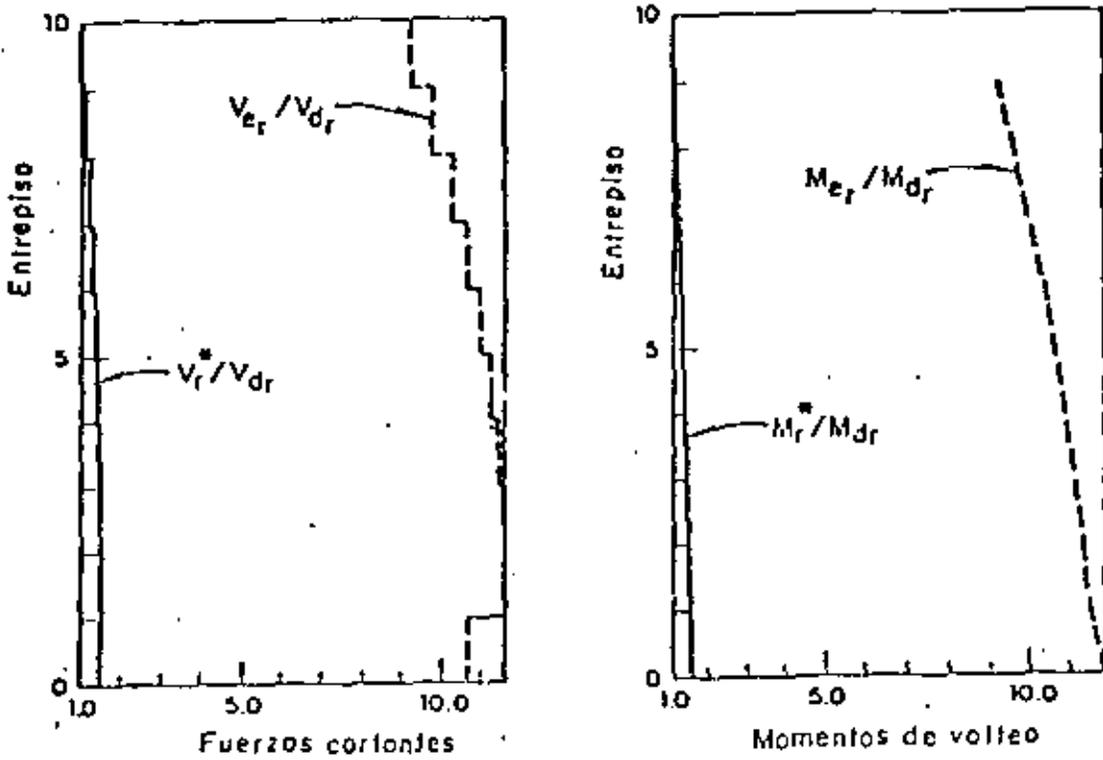


Fig 6. Comparación de resultados para el modelo ( $K_c=1, M_c=3$ ) con relación de aspecto  $H/B=2$

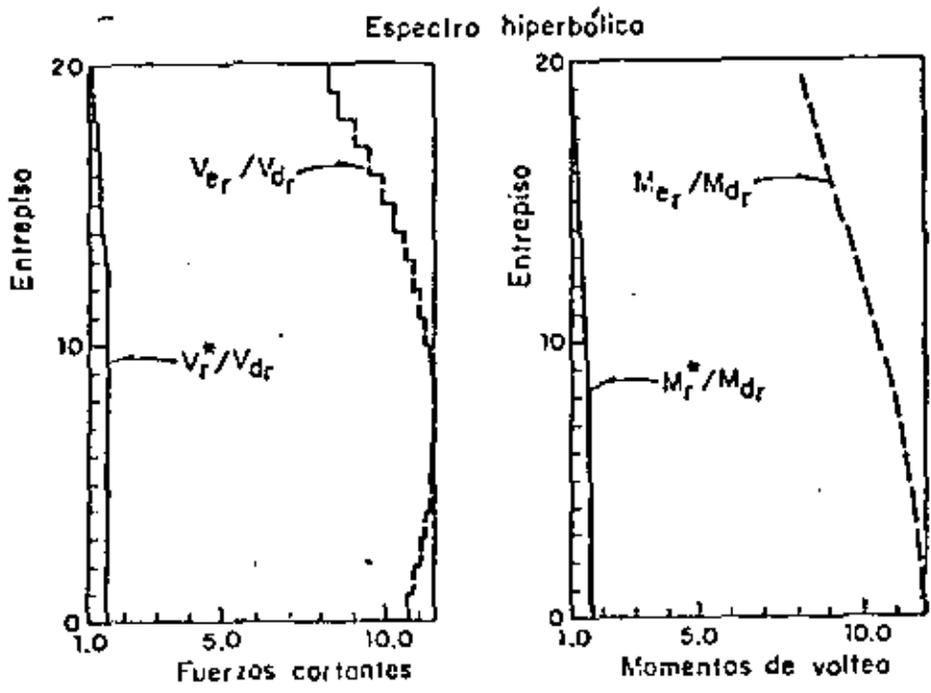
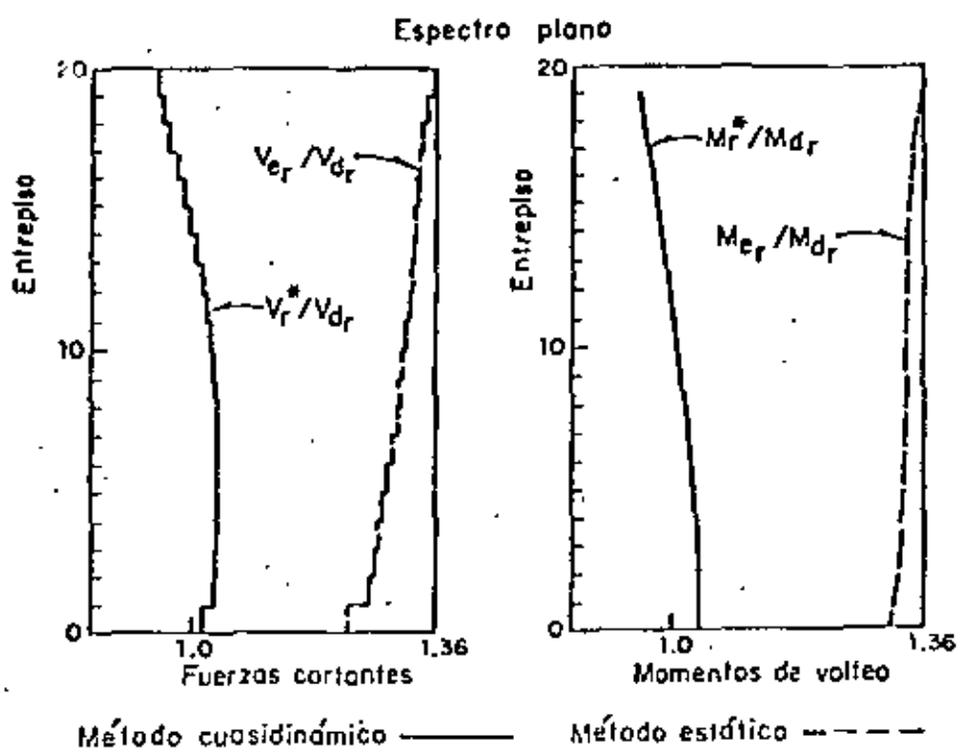
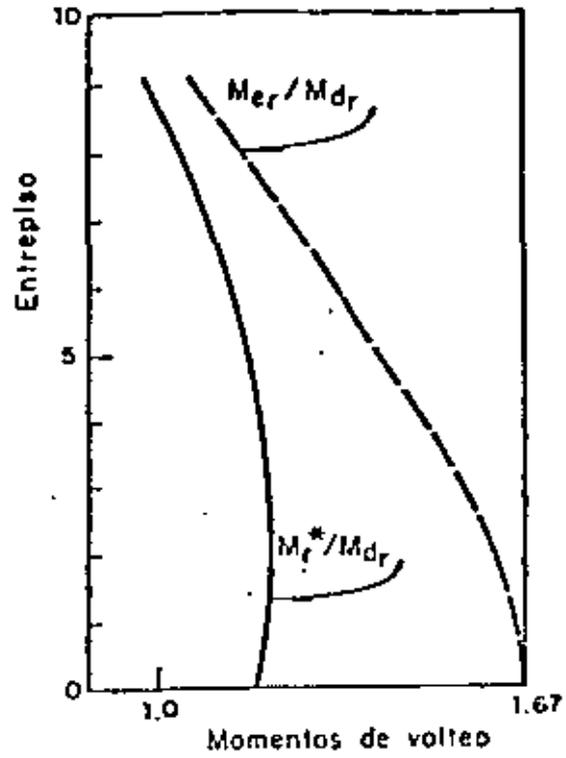
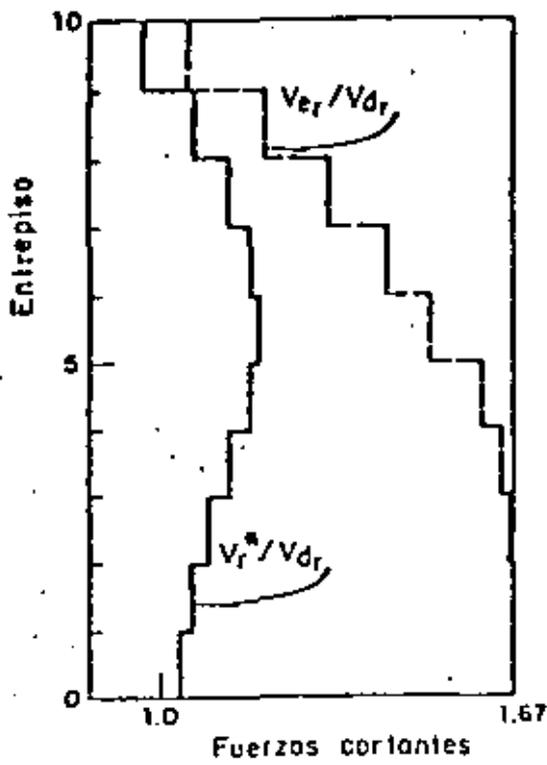


Fig 7. Comparación de resultados para el modelo ( $K_c-1, M_c-3$ ) con relación de aspecto  $H/B = 4$

Espectro plano

(11)



Método cuasidínámico ———

Método estático - - - - -

Espectro hiperbólico

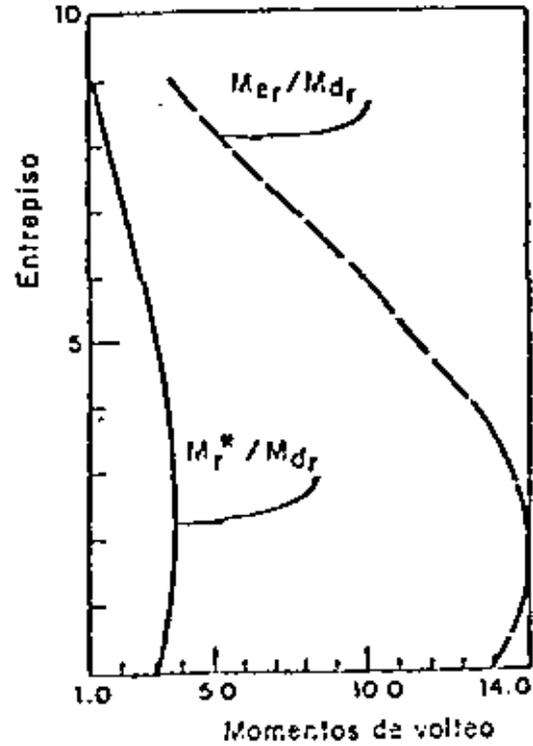
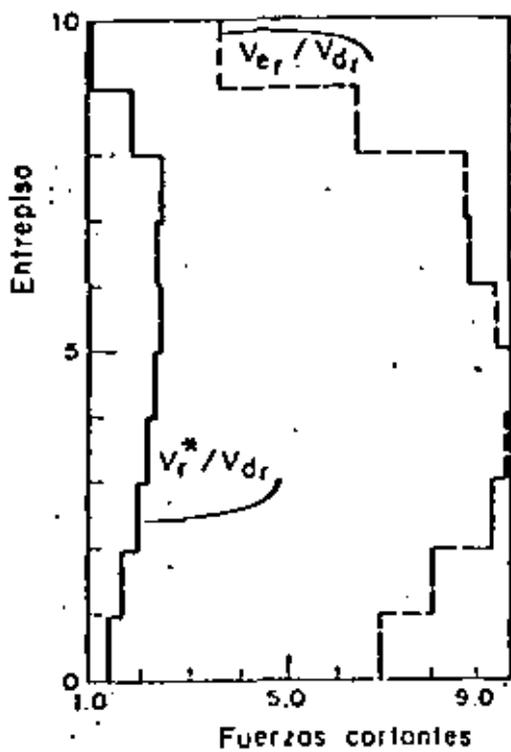


Fig 8. Comparación de resultados para el modelo ( $K_F=4, M_F=3$ ) con relación de aspecto  $H/B = 1.2$

(12)

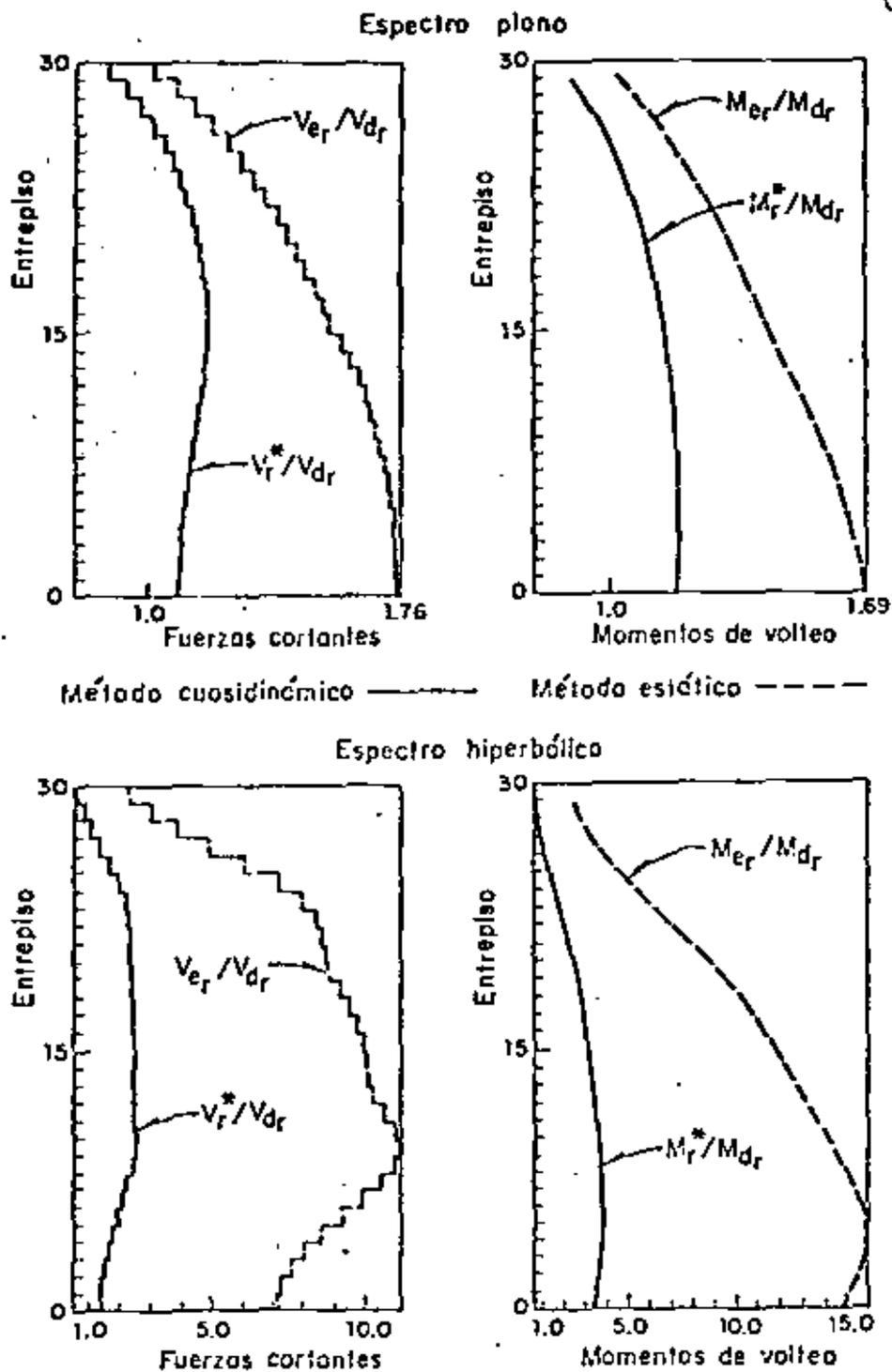


Fig 9 Comparación de resultados para el modelo ( $K_F-4, M_F-3$ ) con relación de aspecto  $H/B = 3.6$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

**TRANSMISION DE FUERZA CORTANTE A TRAVES  
DE LAS LOSAS DE ENTREPISO**

**M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON**

**AGOSTO, 1983**

TRANSMISION DE FUERZA CORTANTE A TRAVES  
DE LAS LOSAS DE ENTREPISO

Enrique del Valle C.

En cualquier nivel de un edificio aparecerán, bajo el efecto de un sismo, fuerzas de inercia de las distintas masas concentradas en él, que serán equilibradas por fuerzas internas en los elementos resistentes a fuerza lateral, muros o marcos en general.

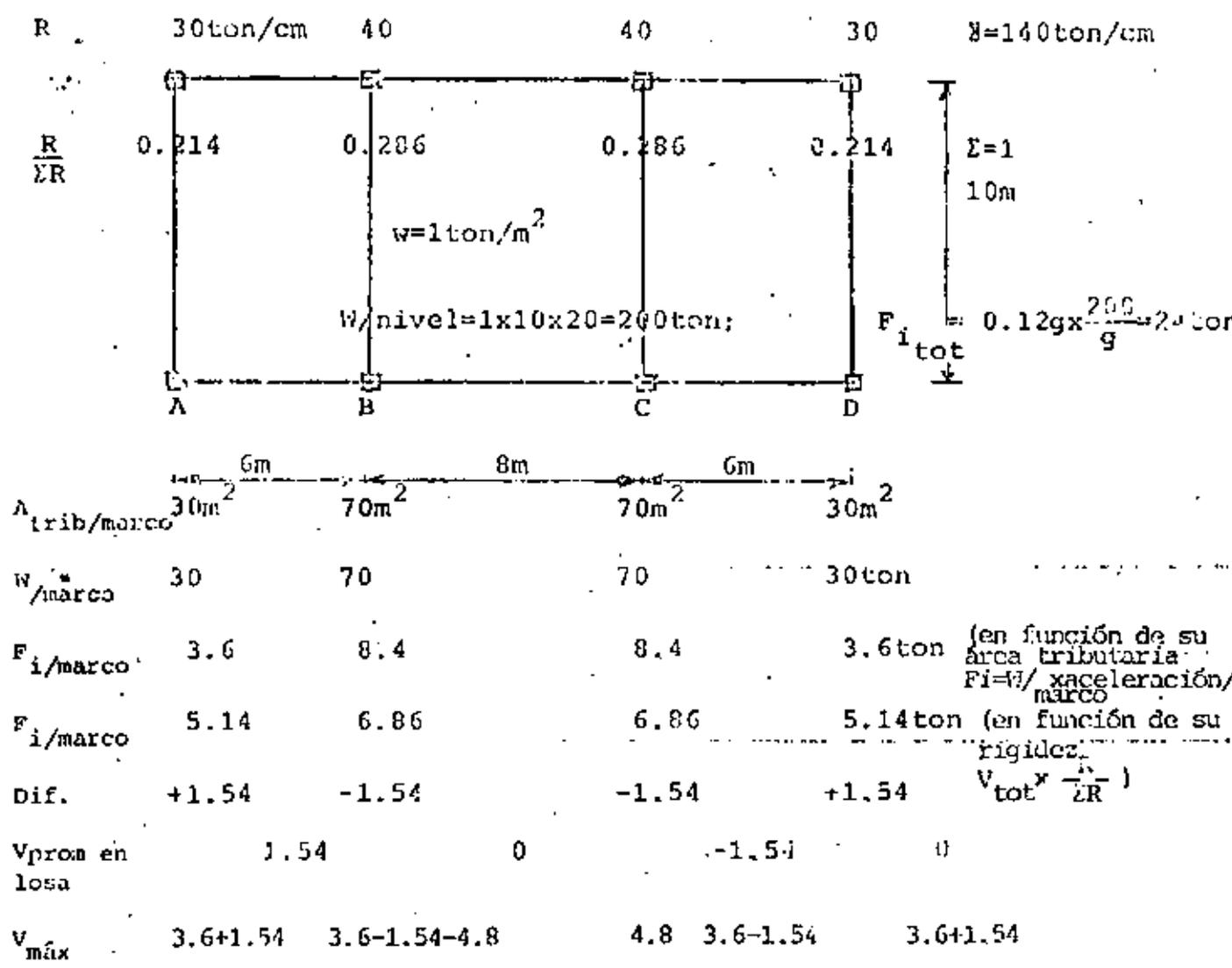
Las fuerzas de inercia serán transmitidas a los elementos resistentes a través de las losas, lo que generará esfuerzos cortantes en éstas, que pueden ser suficientemente altos para hacerlas fallar si no tienen la capacidad suficiente.

La repartición de la fuerza cortante total en cada entrepiso se hace en función de la rigidez (o pseudo-rigidez) de los distintos elementos resistentes.

Por otro lado, asociada a cada uno de estos elementos resistentes habrá un área tributaria que dará lugar a una cierta fuerza de inercia, que no necesariamente será igual a la fuerza que está absorbiendo ese elemento resistente en función de su rigidez. La diferencia entre esas fuerzas de inercia y las fuerzas que toman los elementos resistentes en función de su rigidez son, entonces, las que deben transmitir las losas.

En consecuencia, entre más uniformemente repartida esté la rigidez, en relación con las masas, menor será la fuerza que debe pasar a través de las losas, y entre más concentrada esté la rigidez en unos cuantos elementos, mayor será la fuerza que debe pasar a través de ellas. Esto es más común cuando la estructura está constituida por muros o por marcos y muros.

Para fijar ideas, supóngase un cierto nivel de un edificio en que la masa está repartida uniformemente y los marcos tienen las rigideces indicadas. Supóngase también que en ese nivel en particular, la aceleración es de  $0.12g^*$ ; por lo que las fuerzas de inercia, totales y por cada marco en función de su área tributaria son las indicadas en la figura siguiente:



\* (Calculada de acuerdo con el Reglamento, en la misma forma que para apéndices).

Obsérvese que en este caso los marcos de orilla, A y D tienen una rigidez tal que ayudan a los marcos centrales B y C puesto que toman fuerzas mayores a las que les corresponden por su área tributaria mientras que los centrales, por su rigidez, toman fuerzas menores que las correspondientes a su área tributaria.

Si en vez de marcos se tuvieran muros en los ejes A y D, la rigidez de estos ejes, en comparación con la de los marcos anteriores sería mayor, seguramente, por lo que tendría que transmitirse una fuerza mayor a través de la losa.

Si los marcos interiores no tuvieran rigidez (por estar articuladas las trabes en sus extremos, por ejemplo) la fuerza que debía transmitirse a través de la losa sería de 8.4ton, correspondiente a la fuerza de inercia de esos marcos centrales que no tienen capacidad para tomarla y que se deben transmitir a los ejes extremos donde hay elementos resistentes, sumada a la fuerza de 3.6 ton, correspondiente a la inercia de la losa situada a la derecha o izquierda de los elementos resistentes correspondientes, esto es, la losa funcionaría entonces como una viga horizontal apoyada en sus extremos, sujeta a una fuerza de inercia uniformemente repartida de 1.2ton/m y la cortante en el contacto de la losa con el muro sería de 12 ton, que multiplicada por un factor de carga de 1.1 daría  $V_{\text{diseño}} = 1.1 \times 12 = 13.2 \text{ ton}$ .

Si la losa es de 10cm de espesor, el área sería de  $0.1 \times 10 = 1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$ ; la capacidad del concreto podría calcularse con la expresión  $V_R = 0.85 F_R \sqrt{f'_c}$  A; que es la que se emplea para calcular la capacidad a fuerza cortante de muros sometidos a fuerza horizontal.

Suponiendo  $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f'_s = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2$  y tomando  $P_R = 0.80$ :

$$V_R = 0.80 \times 0.85 \sqrt{160} \times 10,000 = 86013 \text{ kg} = 86 \text{ ton} \gg 13.2 \text{ ton}$$

$\therefore$  no se requiere refuerzo adicional.

Si la losa fuera aligerada con capa de compresión muy delgada, podría haber problemas de capacidad de carga lateral.

En ocasiones no se dispone del ancho total pues puede haber aberturas para escaleras, elevadores, etc., y el área disponible se reduce considerablemente, lo que obliga, en ocasiones a reforzar la losa con varillas diagonales para tomar más eficientemente las fuerzas cortantes, siendo necesario en otras, aumentar el espesor de la losa para poder alojar el refuerzo necesario y reducir su cuantía.

También puede ocurrir que por cambios en la rigidez de los elementos resistentes al pasar de uno a otro entrepiso, la losa tenga que absorber parte de la fuerza cortante de los niveles superiores que haya que pasar, de un marco a otro al cambiar de nivel.

Supongamos, por ejemplo, que en el caso anterior, la rigidez de los marcos extremos al llegar a planta baja decreciera considerablemente y los marcos interiores tuvieran que tomar casi la totalidad de la fuerza cortante. Entonces, la cortante que tomaban los marcos extremos hasta el primer entrepiso, debería pasar, a través de la losa, a los marcos centrales. Esto sería una condición bastante crítica, y probablemente la capacidad de 86 ton calculada anteriormente no fuera suficiente por lo que habría que reforzar la losa.

Journal of the  
STRUCTURAL DIVISION

Proceedings of the American Society of Civil Engineers

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF MULTISTORY BUILDINGS<sup>1</sup>

By John A. Blume,<sup>2</sup> F. ASCE

INTRODUCTION

*With many combinations of joints*

The reliable prediction of the response of a building to ground motion caused by an earthquake or by an underground nuclear explosion requires knowledge about the dynamic characteristics of the building as well as knowledge about the probable ground motion at the building site as a function of time. With the system defined and with the known or estimated excitation function, response follows from proper application of theory. However, computed or measured response amplitude does not reveal how much of the motion is a result of various types of freedom such as story shear, joint rotation, over-all flexure and base rocking. Without this information, local distortions cannot be fully identified and therefore stress analysis to relate motion to damage levels of the various members and elements cannot properly be undertaken. It is thus not only important to know the natural periods of vibration, stiffnesses, mode shapes, and participation factors of multistory buildings, but also to know what type of freedom contribute to these values, and in what degree.

An idealized model of a building can be analyzed and its dynamic properties can be obtained according to established theory. Digital computers are of great aid in this; in fact, their use is essential where there are several stories and more freedom is considered than rigid-floor story shear. However, it may be difficult in many cases, if not impracticable, to develop a realistic idealized model from the drawings of a real building. The effective stiffness participation of floor systems, walls, and stairwells may be difficult to determine from the drawings; and the effective dynamic moduli of elasticity may not be known. Another problem is that base movement in the soil is hard

<sup>1</sup>Note.—Discussion open until July 1, 1968. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 94, No. ST2, February, 1968. Manuscript was submitted for review for possible publication on June 27, 1967.

<sup>2</sup>Presented in brief form as part of the Technical Seminar on "Buildings in Earthquake and Wind—Design and Analysis of Their Lateral Resistance," ASCE National Meeting on Structural Engineering, Seattle, Wash., May 8-12, 1967.

<sup>3</sup>Pres., John A. Blume & Assoc., Res. Tech. Div., San Francisco, Calif.

to model. Moreover, at times there may not be the ready availability of adequate computer capacity to analyze tall multistory buildings with joint rotation, over-all flexure and base rocking as well as shear distortion. The amount of time and labor required to develop member data and to prepare computer data cards for building members when all these stiffness characteristics are considered may be excessive.

An alternate method to that of rigorous analysis of an idealized model developed from a study of the building details is to vibrate a building and to measure its actual periods and mode shapes, to calculate the masses, and then to solve for the stiffnesses using basic dynamic theory. However, there are shortcomings in this method, including the obvious problem that a building not yet constructed, or one that for one reason or another cannot be vibrated and measured, cannot be so analyzed. Another problem is that such testing is costly and slow as an adjunct to an analysis procedure and it is often impossible to excite enough modes to analyze a building with significant joint rotation. In addition, the stiffnesses obtained are not readily identified with story shear, joint rotation, over-all flexure, or base motion, and therefore the measured motion cannot be directly associated with damage thresholds.

Most of the work in the literature has been based upon the rigid-floor shear system generally under the tacit assumption that this single type of freedom effectively models real buildings. Although some buildings, especially the traditional type with short spans and rigid concrete floor systems, may be close to this simple condition, it has been shown (1, 2, 3, 4, 5, 6)<sup>3</sup> that joint rotation may be important. Few investigators have been concerned with axial deformation resulting from over-all flexure (1, 7, 8, 9, 10). It is evident, however, that buildings do tend to bend as a whole in actual earthquakes (11, 12). Several authors have considered ground-structure interaction (1, 7, 13, 8, 14, 15, 16) in one or more of its various phases. Very little has been done, however, with the effect of local base motion in the soil (not to be confused with the vibratory motion of the soil caused by the disturbance) on periods and mode shapes.

Apparently, no prior work has been done where the four types of freedom—story shear, joint rotation, over-all flexure, and base motion—have been considered simultaneously for several buildings and with assigned parameters for each freedom to assess the relative importance of these freedoms under various conditions. The purpose of the study reported partially herein was to explore the possibilities of developing relatively simple methods of determining periods, stiffnesses, and mode shapes of multistory buildings with these various freedom characteristics. The methods developed provide useful estimates of the relative contributions of story shear, joint rotation, over-all flexure and base rocking. This work is limited to elastic state vibrations of buildings having symmetry of mass and stiffness in each story about the main horizontal axes; thus torsional coupling with translational modes is not included. The three lowest horizontal modes are considered. The multistory building types assumed herein are those wherein each floor generally extends over most of the building plan and lumped-mass modeling is appropriate. Rigid diaphragms in the plane of the floors and roof are assumed. Only a portion of the comprehensive effort (17) can be covered in this brief paper. Building models and real buildings were analyzed rigorously to explore the effects of parameter variations. Over 100 building models and real buildings

<sup>3</sup>Numerals in parentheses refer to corresponding items in Appendix I.—References

were utilized together with eight computer programs. New "period synthesis" and "pseudo-stiffness procedures" are proposed to permit the dynamic characteristics of buildings to be obtained using simple rigid-floor, shear analysis while providing for joint rotation, over-all flexure, and base motion in the soil.

TERMS AND PROCEDURE

Tall buildings can generally be modeled by analogy to a mechanical system. The mass of each floor is lumped at a discrete level, usually the floor level. The weight of the walls, partitions, stairways, etc., is also lumped into the same rigid mass according to tributary areas or the manner in which the reactions would occur under assumed lateral forces. This is indeed the most popular concept for high-rise buildings whether the analysis be done by digital computer, electric analog, or by hand calculation. There are some buildings with stiff walls, however, that may be represented as vertical cantilevers with distributed mass (7, 17).

There has been some confusion in the literature regarding the term "shear building." Definitions are provided for the four types of freedom considered in this study:

**Shear Deformation.**—Shear deformation is that deformation parallel to the horizontal or *x*-axis which results from an external force applied to a story while the adjoining stories are prevented from moving, and under the assumptions that the floors are rigid and the joints do not rotate, and that the vertical story members are infinitely rigid insofar as vertical deformations are concerned. The shear deformation is determined according to relative rigidities of all elements and with consideration of both shear deformation and column or pier bending, using shear areas and moments of inertia of the individual vertical elements. This system is termed "closed-coupled."

**Joint Rotation Deformation.**—Joint rotation deformation is that deformation parallel to the *x*-axis obtained in a frame-type building by relaxing the joints; i.e., by removing the rigid-floor restriction under "Shear Deformation" above. In effect, this is assigning real stiffnesses to the girders and effective floor systems rather than assuming them as infinitely rigid. This system is termed "far-coupled." The total *x*-axis frame deformation less that deformation obtained by the rigid floor assumption is the joint rotation contribution.

**Over-all Flexure Deformation.**—Over-all flexure deformation is that deformation parallel to the *x*-axis obtained by relaxing the vertical elements axially; i.e., by removing the restriction under "Shear Deformation," above, that there is no axial deformation in the vertical elements. The actual areas and moduli of elasticity of the vertical members are used. Each element is subjected to axial deformation in accordance with its participation with the other elements in resisting over-all flexure of the building as a vertical cantilever.

**Base Deformation.**—Base deformation is that deformation parallel to the *x*-axis at any story level caused by rocking of the building (assumed to be rigid) about the *z*-axis (the other horizontal axis) through the base of the founda-

tion. The soils is assumed to have elastic properties. Translation in the soil may also be included.

Four freedom conditions or cases will be considered. Subscripts *a*, *b*, *c*, and *d* will be used to identify stiffnesses, deformations, periods, etc., as follows: Case *a*—only shear deformation as defined above is assumed to exist in the building or the system; Case *b*—both shear deformation and joint rotation deformation are assumed to exist; Case *c*—shear deformation, joint rotation deformation, and over-all flexure deformation are assumed to exist; and Case *d*—shear deformation, joint rotation, over-all flexure, and base deformation are assumed to exist.

There is one degree of freedom to be considered parallel to each horizontal axis, *x* and *z*, for each story. There is therefore one natural mode of vibration in each direction for each story, or lumped mass. This is true under Cases *a*, *b*, *c*, or *d*. The lower modes of vibration are the most important in response to ground motion. In this study, only the fundamental, the second, and the third natural modes of vibration in each direction will be considered.

The theory of the vibration of single mass systems is treated extensively in the literature; several authors have considered multimass systems, and some have analyzed multistory buildings per se (1, 7, 8, 13, 19, 2, 20, 21, 22). Some of the basic equations used in this study will be presented. It is assumed herein that the resistance of the structure to deformation is linear and stable and also that the motion is so small as to retain these assumed linear and stable characteristics without yield, deterioration, or failure. Rotatory inertia is ignored as negligible except for base rocking. Units are in kips, inches, and seconds, unless otherwise noted.

By Newton's second law and the balance of forces of the system vibrating freely without external force,

$$[M_{jk}] \{\ddot{D}_j\} + [C_{jk}] \{\dot{D}_k\} + [S_{jk}] \{D_k\} = \{0\} \dots \dots \dots (1)$$

in which *D* = the displacement parallel to the *x*-axis; *M* = the story mass; *S<sub>jk</sub>* = the stiffness-influence coefficient defined as the external force on the *j*th mass when the *k*th mass has a unit displacement and all other masses have zero displacement; *j* and *k* are subscripts referring to the story or lumped mass; and *C* = the damping coefficient defined as the force on the *j*th mass exerted by the damping dashpots when the *k*th mass has a unit velocity and all other masses have zero velocity.

It can be shown that in a principal mode of vibration, *i*, for the case where there is no damping (damping has a negligible effect on period for the damping values typical of buildings in the elastic range),

$$([S_{jk}] - \rho_i^2 [M_{jk}]) \{D_{M_k}\}_i = \{0\} \dots \dots \dots (2)$$

and, for nonzero displacements, from Cramer's rule,

$$[S_{jk}] - \rho_i^2 [M_{jk}] = 0 \dots \dots \dots (3)$$

in which  $\rho_i$  = the natural angular frequency of the *i*th mode in radians per sec;  $\rho_i^2$  = the eigenvalue of the *i*th mode; and *D<sub>M</sub>* = the modal displacement or mode shape displacement. Another form of Eq. 3 is

$$\begin{bmatrix} (S_{11} - \rho_1^2 M_1) & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & (S_{22} - \rho_1^2 M_2) & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & (S_{33} - \rho_1^2 M_3) & \dots & S_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3} & \dots & (S_{nn} - \rho_1^2 M_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

The expansion of the determinant in Eq. 4 to obtain a polynomial in powers of the eigenvalues  $\rho_1^2$ , and the solution of the polynomial can be obtained directly or by iteration. The mode shapes  $(D_{ij})_1$  can be found for each  $\rho_1^2$  value by using Eq. 2. The natural period of vibration,  $T_1$ , in seconds, is simply

$$T_1 = \frac{2\pi}{\rho_1} \quad (5)$$

The stiffness matrix and the damping coefficient matrix for a close-coupled, or rigid-floor shear system, Case a, is tri-diagonal and symmetrical, and there are relationships between the elements as may be seen in Fig. 1. Thus the stiffness matrix may be written directly from known story stiffnesses. The Case a system is by far the simplest with which to work since there are only as many unknowns as there are stories. On the other hand, a far-coupled system, or one that includes joint rotation has a full matrix as shown in Fig. 2. In this case there are  $(n^2 + n)/2$  different elements, or unknowns, in which  $n$  is the number of stories. The far-coupled matrix is full, and thus general. It is applicable to Case c and Case d problems as well as those under Case b.

Various computer programs were developed and employed in the ALCOL language and in FORTRAN II with Burroughs 5500 and IBM 7090 equipment, respectively, at the Stanford University Computation Center. The programs solved the above and other equations with various terms alternately known or unknown. For example, some programs accepted stiffnesses or member properties and also masses, and the output would be natural periods and mode shapes. Others accepted periods, masses and mode shapes to produce stiffness coefficients. Different programs were used for Case a and for the general situation with the full matrix. In solving for stiffnesses or damping coefficients for any case but Case a, it was necessary to use more than one mode shape in order to have sufficient data to obtain solutions. For example, the far-coupled case of Fig. 2 would require at least  $(n + 1)/2$  known modes. This is obviously a serious handicap where there are several stories. A 14- or 15-story building would require eight or more known periods and mode shapes to solve directly for the stiffnesses. The problem of surplus or redundant data in the general programs was handled by taking best least squares solutions.

Many of the models used in this study were selected from the literature so that certain results could be compared to those from entirely independent sources and programs. In all comparisons, output was the same or else the (minor) differences were found not to be the fault of the programs used in this investigation. All programs were carefully verified for their intended purpose and limitations. Some of these limitations were, in themselves, tools in the research effort. The basic procedure was to obtain data for actual and hypothetical building frames and also for complete buildings and to subject these data to analysis in the various programs. By means of cross feeding of ma-

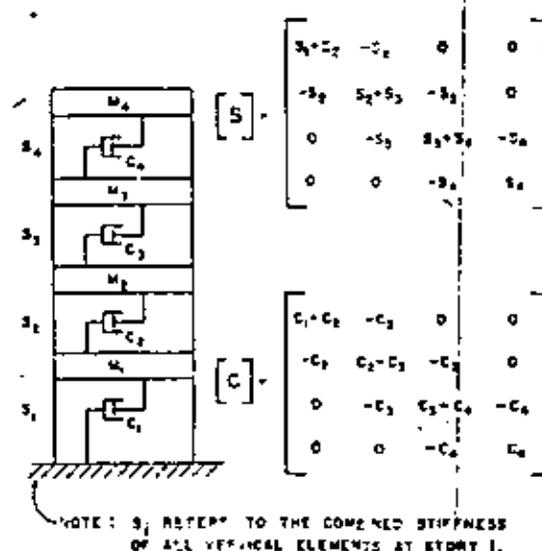


FIG. 1.—A CLOSE-COUPLED SHEAR SYSTEM

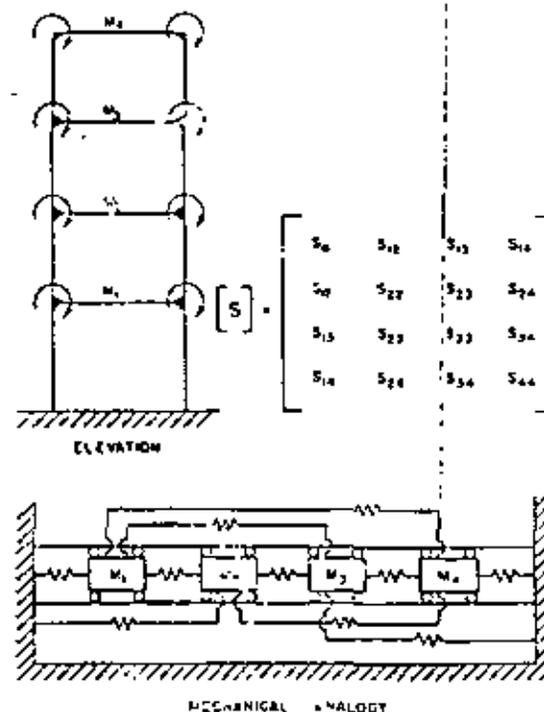


FIG. 2.—A FAR-COUPLED SYSTEM

terial from one type of program to another, a great deal was learned about important parameters that affect periods, mode shapes, stiffnesses, and damping coefficients.

### PERIODS WITH VARIOUS STIFFNESS CHARACTERISTICS

The variations in natural periods of vibration under Case a, Case b, and Case c were explored. A total of 11 Case a models, 26 Case b models, and 26 Case c models were used for this purpose. All the Case a model girders were assigned infinite moment of inertia and their columns infinite gross area for axial loads. However, the columns were allowed to deform laterally in story shear under both flexure and shear in accordance with their actual properties. Case b models were assigned actual stiffness values for all members except that the infinite column areas were retained. Case c models had actual stiffness values for all members. Four of the basic models in this ratio study were assigned various values of the girder moments of inertia to create more models. These are designated by the basic structure number, SN, followed by the average value of the midheight girder moment of inertia, designated  $I_G$ , (inches<sup>4</sup>) shown in parenthesis. For example, basic model SN 11, with  $I_G = 579$  in.<sup>4</sup>, under the three freedom cases, Cases a, b, and c, respectively, would be designated: 11 a; 11 (579) b; 11 (579) c. If  $I_G$  was not varied, no parenthesis designation was used.

The SN 5 series was based on a three-story steel frame used by Schenker (4). It was necessary to assign values for column gross area (for axial resistance) and column shear area,  $A_v$ , for shear resistance. This was done by reference to a handbook of steel rolled shapes. In addition to the basic  $I_G$  value of 1675 in.<sup>4</sup>, other models were created with  $I_G$  values of 503, 838 in.<sup>4</sup>, 1,117 in.<sup>4</sup>, and 1,340 in.<sup>4</sup>, as well as infinity for the Case a condition.

The SN 9 series was based on a four-story steel frame used by Berg (5). The basic frame was SN 9 (200). Other models were created with  $I_G = 217$ , 352 and 434 in.<sup>4</sup>, and infinity. All girders had their moments of inertia changed proportionately to the  $I_G$  values.

The SN 11 series was based on a three-bay, eight-story model used by Berg (5). In this series, alternate models were made with  $I_G = 290$ , 579, 869, and 1,158 in.<sup>4</sup>, and infinity for Case a. All girders had their moments of inertia changed proportionately to the  $I_G$  values.

Fig. 3 shows four models, SN 14, 15, 16, and 17, used by Housner and Brady (6). These structures were assumed in this investigation to represent narrow, one-bay wide buildings rather than units of wider buildings. Thus over-all flexure was of considerable importance with the tall models. Only two sets of  $I_G$  values were used—those shown in Fig. 3, and infinity for Case a. Column gross areas and effective shear areas that were reasonably consistent with the column moments of inertia provided by Housner and Brady (6) were used. Complete agreement was not needed, however, since all the models used in this period ratio study are consistent within themselves and not dependent upon any values or data from outside sources.

SN 18 is an 18-story steel building frame as reported by Rubinstein, (3, 9). The author provides data on the frame centerline dimensions, moments of inertia, and column areas, but not the stiffnesses *per se*. It was necessary to estimate column widths and effective shear areas for this study.

The models, SN 51 and 52, represent the two vertical planes of a four-story reinforced concrete test structure at the Atomic Energy Commission's Nevada Test Site (3). The building is 12 ft by 20 ft in plan, and each story is 9 ft, floor to floor. There are four rectangular columns and the floor system is beam and slab. The effective modulus of the concrete was assumed to be 3,000 kips per sq in. The calculated periods agree well with the periods measured under vibration. There are no walls, partitions, or stairways in the building. SN 61 is for the plane parallel to the 20-ft dimension and SN 62 is for the other plane. Only one  $I_G$  value, besides infinity for Case a, was used with SN 61. However, SN 62 was subjected to a variation of hypothetical  $I_G$ . In addition to the calculated 4,350 in.<sup>4</sup> value and infinity for Case a, arbitrary

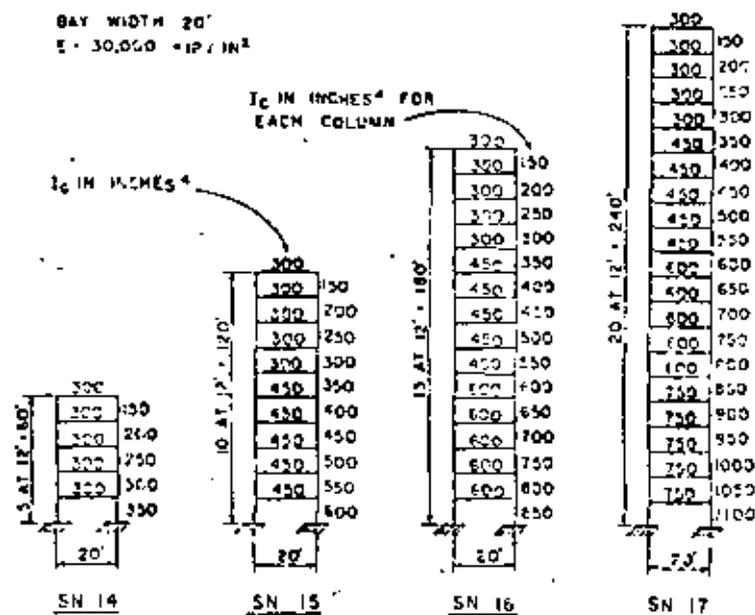


FIG. 3.—FRAMES FOR SN 14, 15, 16 & 17

values of 1,000, 2,000, 8,000, 10,000 and 24,000 in.<sup>4</sup> were used for this portion of the study.

Model SN 62 was developed by analysis of an actual 10-story reinforced concrete building. The building, which is privately owned, is 220 ft long in the direction under consideration. The height of 124 ft is composed of a 16-ft lower story and 9 stories of 12 ft. The modulus of elasticity of the concrete was taken as 2710 kips per sq in. The floor systems of concrete beam and slab were considered fully effective in the moment of inertia computations;  $I_G = 122,000$  in.<sup>4</sup>

Table 1 is a tabulation of the calculated natural periods of vibration for the lowest three modes. All  $I_G$  values are the average, midheight values as defined. Case a is actually a special condition of Case b, with infinite girder rigidity. The relative periods between Cases a and b are striking. There can

be no doubt that joint rotation is important. The effect of joint rotation on period is generally less for the second mode than for the fundamental, and less for the third mode than for the second. Over-all flexure has less effect on period than joint rotation. SN 16 is the only model for which a comparison of

TABLE 1.—MODELS, CONDITIONS, AND NATURAL PERIODS

SN	Number of Stories	Width, in feet	I <sub>G</sub> , in inches <sup>4</sup>	Computed Periods of First Three Modes, in seconds		
				Case a or Case b, as shown		Case c
5	3	60	503	(b) 1.06, 0.33, 0.23	1.06, 0.33, 0.23	
			878	(b) 0.96, 0.30, 0.22	0.96, 0.33, 0.22	
			1177	(b) 0.92, 0.32, 0.22	0.92, 0.32, 0.22	
			1370	(b) 0.90, 0.31, 0.22	0.90, 0.31, 0.22	
			1675	(b) 0.87, 0.31, 0.22	0.86, 0.31, 0.22	
9	4	60	217	(a) 0.75, 0.28, 0.21		
			250	(b) 2.12, 0.76, 0.46	2.12, 0.76, 0.46	
			362	(b) 2.00, 0.73, 0.45	2.00, 0.73, 0.45	
			474	(b) 1.92, 0.71, 0.44	1.92, 0.71, 0.44	
			474	(b) 1.85, 0.70, 0.43	1.86, 0.70, 0.43	
11	6	60	200	(a) 1.51, 0.62, 0.40		
			379	(b) 2.85, 1.08, 0.63	2.85, 1.08, 0.63	
			569	(b) 2.37, 0.91, 0.57	2.10, 0.85, 0.57	
			715	(b) 2.15, 0.80, 0.54	2.21, 0.80, 0.54	
			715	(b) 2.08, 0.86, 0.52	2.11, 0.87, 0.52	
14	5	20	300	(a) 1.72, 0.77, 0.46		
			300	(b) 1.53, 0.59, 0.28	1.54, 0.51, 0.28	
15	10	20	300	(a) 0.91, 0.35, 0.22		
			300	(b) 2.57, 0.92, 0.53	2.66, 0.84, 0.53	
16	15	20	450	(a) 1.40, 0.51, 0.31		
			450	(b) 3.43, 1.27, 0.79	3.77, 1.32, 0.76	
17	20	20	325	(a) 1.79, 0.70, 0.43		
			325	(b) 4.14, 1.55, 0.91	4.21, 1.66, 0.93	
18	18	20	12,400	(a) 2.12, 0.81, 0.52		
			12,400	(b) 3.28, 1.22, 0.73	3.61, 1.28, 0.74	
61	4	20	2000	(a) 1.76, 0.71, 0.42		
			2000	(b) 0.35, 0.31, 0.064	0.36, 0.31, 0.064	
62	3	12	1000	(a) 0.31, 0.28, 0.051		
			1000	(b) 0.55, 0.15, 0.071	0.56, 0.15, 0.071	
			2000	(b) 0.41, 0.13, 0.066	0.45, 0.13, 0.067	
			1000	(b) 0.35, 0.11, 0.061	0.36, 0.11, 0.061	
			1000	(b) 0.30, 0.10, 0.057	0.31, 0.10, 0.057	
68	16	229	16900	(a) 0.26, 0.088, 0.051		
			21000	(b) 0.25, 0.081, 0.053	0.28, 0.091, 0.054	
68	16	229	12,200	(a) 0.21, 0.075, 0.050		
			12,200	(b) 0.57, 0.32, 0.19	0.59, 0.32, 0.19	
68	16	229	12,200	(a) 0.57, 0.32, 0.19		
			12,200	(b) 0.58, 0.29, 0.12		

over-all flexure effects is possible. Rubinstein (9) obtained an increase in the fundamental period, with column axial freedom, of 10%. The same percentage increase is shown by the period values of T<sub>1A</sub> = 3.28 sec and T<sub>1C</sub> = 3.61 sec in Table 1. The actual period values are slightly different from Rubinstein's, no doubt because of the assumptions made about column width, effective spans

and effective column shear areas; i.e., the models are not quite the same in the two studies. The Southwell-Flachsbach approximation (7, 24) may be used as a basis to isolate the fundamental periods that would exist in pure over-all flexure or in other hypothetical types of isolated freedom. As an example, SN 16 would have the following isolated periods, in seconds, if its freedom parameters could exist alone:

$$T_{1j} = \sqrt{T_{1b}^2 - T_{1a}^2} = \sqrt{3.28^2 - 3.00^2} = 2.77$$

$$T_{1f} = \sqrt{T_{1c}^2 - T_{1b}^2} = \sqrt{3.61^2 - 3.28^2} = 1.51$$

in which *j*r refers to joint rotation and *f* to over-all flexure. Over-all flexure is almost as important in the fundamental mode period as Case a shear for this unusual structure.

*Joint Rotation Index, ρ, for Case b Condition.*—The stiffness of a frame member in flexure is related to its *EI/L* ratio, in which *L* = the member span. The relative flexural stiffness of girders and columns largely determines the importance of Case b versus Case a. The stiffness of a frame can be calculated by any one of many structural procedures. However, what is wanted here is not stiffness *per se*, but a reasonable and readily obtained index not only for a bare frame but also for later use with entire building assemblies. Let *I<sub>G</sub>* = the effective moment of inertia of a girder and its connected floor system, and let *I<sub>C</sub>* = the effective moment of inertia of a column together with any connected materials. Assume that the girder and the column are connected so as to remain the right angle between them under the imposed loading. A joint rotation index, *ρ*, may then be introduced which is defined as follows:

$$\rho = \frac{\sum \frac{I_G}{L_G}}{\sum \frac{I_C}{L_C}} \quad \dots \dots \dots (c)$$

in which the summations for all girders and columns are to be taken across one story of the building for the story columns (and floor system) closest to the midheight of the building. If the girders or columns change at the mid-height story, values of the two adjacent stories should be averaged. If different materials are involved, transformed areas with consistent *E*-units must be used. The *I*- and *L*-values must be in consistent units.

The concept of *I<sub>C</sub>* is then extended to include the contribution of all horizontal members and elements that would resist rotation of the floor system—girders, beams, spandrels, floor or spandrel trusses, joists, slabs, decking, etc. Unless there is reason to expect otherwise, all the members are assumed to contribute to *I<sub>C</sub>*, and to act as composite elements with a common neutral axis. Likewise the summation of *I<sub>C</sub>/L<sub>C</sub>* is to include all vertical elements to the story—columns, walls, piers, pilasters, core units (defined as hollow vertical members created by the walls of elevator, stair, and/or utility shafts), etc. The vertical elements may occur at any location of the floor plan so long as there is reasonable symmetry. If the floor system should be very flexible as compared to the vertical or column system, very low *ρ*-values will result and distributed mass modeling may be preferable to lumped-mass



is not intended to provide for solid wall structures or for walls with small openings that could be ignored. If openings are only of nominal size and there are short spans of wall spandrels or piers, a modified  $\rho$  should be employed which introduces shear as well as flexural freedom. Combinations of walls and frames often result in small  $\rho$ -values (17).

**Over-all Flexure Index,  $\Omega'$ , for Case c Conditions.**—It is desirable to have an index to measure the importance of over-all flexural freedom that would

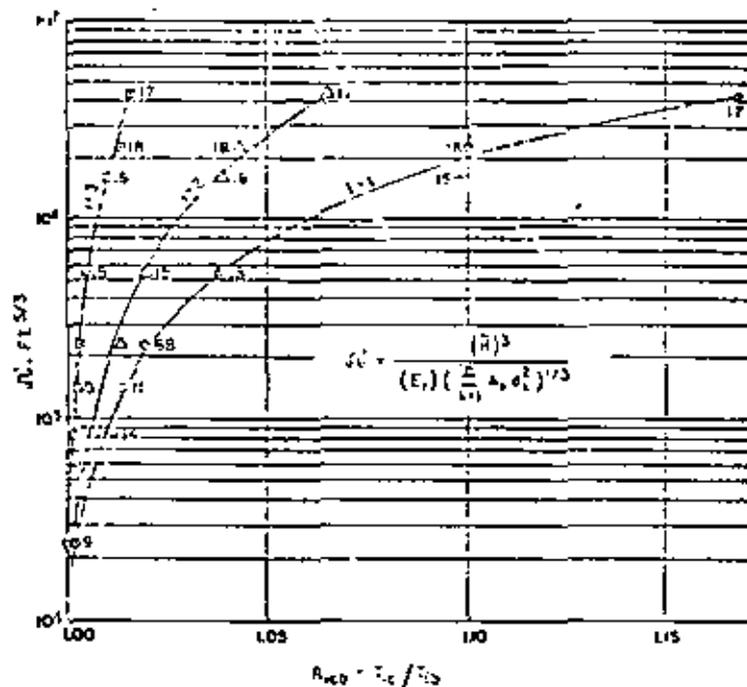


FIG. 5.—OVER-ALL FLEXURE INDEX AND  $R_{1c/b}$

be reasonably simple to calculate for actual buildings. A comprehensive study of  $R_{1c/b}$  versus various trial relationships led to

$$\Omega' = \frac{\overline{H}^3}{E_c \left( \sum_{k=1}^{n-1} A_k d_k^2 \right)} \quad (7)$$

in which  $\Omega'$  is in units of feet<sup>3</sup>;  $\overline{H}$  = the height of the building from the base to the roof line, in feet;  $A_k$  = the gross area of a continuous vertical element or member  $k$  (such as columns, piers, pilasters, and walls) at the story closest to the midheight of the building, in square feet (if columns change at the midheight story, the average value of  $A$  from the adjacent stories are used);  $d_k$  = the normal distance in the direction of motion from the center of member  $k$  to the centerline of the floor plan, in feet;  $E_c$  = ratio of the modulus of

elasticity divided by 30,000 kips per sq in., dimensionless. (Example: If material is concrete with  $E_c = 3,000$  kips per sq in.,  $E_c = 3,000/30,000 = 0.1$ .) The value of  $\Omega'$  is to be calculated for only one story, that closest to the midheight of the building, as for the joint rotation index,  $\rho$ .

Fig. 5 shows  $\Omega'$  plotted against rigorously computed values of  $T_{1c/b}$  for the lowest three modes of several building models. There is excellent correlation, with minor exceptions. The smooth curves represent mean values. The over-all flexure contribution to the fundamental period is not great, except for tall, slender models such as SN 16, 15, and 18 with height to depth ratios of 9, 12, and 6.2, respectively. The higher mode periods are affected less, as shown. For the low sensitivity of  $\Omega'$ , Fig. 6 provides satisfactory approximations for the increase in period caused by over-all flexure. It is not intended for use when  $\rho$  is small and girder shear is negligible; then  $R_{1c/b}$  would approach unity.

PERIOD SYNTHESIS

Although theory with the aid of digital computers is capable of solving complex problems in multistory building dynamics, there are reasons that indicate less rigorous procedures in many cases. Not the least of these is to avoid the preparation of hundreds or thousands of data cards for large buildings, often under uncertainty as to real member stiffnesses. Two new concepts will be presented—"period synthesis" (PS) for developing periods from building drawings, and "pseudo-stiffness procedures" (PSP) for determining other structural-dynamic characteristics from the design drawings or from measured data. PS and PSP complement and reinforce each other in many situations. This section covers period synthesis and the section following covers PSP. The purpose of period synthesis is to compute or to estimate natural periods of vibration under Case b, Case c, or Case d freedom with the simple procedures associated with rigid-floor, Case a freedom.

**Operations in Period Synthesis.**—The stiffnesses for  $T_{1a}$  and the periods per sq are relatively easy to calculate by hand methods or by computer. The close-coupled system with rigid floors provides the easiest form of structural deformation analysis, and computer operations, if used, require minimum storage time, and data card preparation. In order to retain these advantages and to obtain a reasonable and useful approximation of actual period ratios are employed together with geometric parameters and semi-theoretical, semiempirical data. The following steps are involved in period synthesis under freedom cases, Cases a, b, and c. Calculate the story weights, the joint rotation index,  $\rho$ , and the over-all flexure index  $\Omega'$ . Calculate the story stiffnesses under the assumption that all floors and the roof system are infinitely rigid. The shear and flexural stiffnesses of all columns, walls, piers, pilasters and other vertical elements are to be included. Calculate the shear system periods  $T_{1a}$ . This may be done by hand if only a few stories are involved, or by computer using simple Case a programs. An iterative method based on rigid-floor conditions—the Holzer-Blume building procedure (25)—is suitable for desk methods. The mode shapes under Case a conditions would be a by-product of these computations. If only the fundamental mode is of interest, the Rayleigh method may be used (25). Obtain  $R_{1c/b}$  and  $R_{1d/b}$  ratios from Figs. 5 and 6, respectively. Calculate the values of  $T_{1b}$  and  $T_{1c}$  using

$$T_{ib} = T_{io} \times R_{tbo} \dots \dots \dots (8)$$

$$T_{ic} = T_{io} \times R_{tbc} \times R_{icb} = T_{ib} \times R_{icb} \dots \dots \dots (9)$$

These equations are true by definition. If there are reliably measured data available, such as the fundamental mode period, advantage should be taken of the known data. In the event of redundant or surplus information, the measured items are retained. It must be assumed in the absence of other data that the known periods are for the general freedom case, Case d, or Case c if the base conditions are obviously quite rigid.

**Example of Period Synthesis.**—The 8-story building model (5), SN 11 (579), will be used as an example of period synthesis. The ground is assumed to be rigid. Pertinent data are,  $\bar{H} = 102.5$  ft,  $L_c = 150$  in. The midheight story has 2 girders of  $I_g = 579$  in.<sup>4</sup> and  $I_G = 240$  in.

TABLE 2.—COMPARISON OF VALUES OBTAINED BY PERIOD SYNTHESIS AND BY EXACT CALCULATION

Parameter	By Period Synthesis	By Exact Calculation
$T_{io}$	1.72, 0.767, 0.461	1.72, 0.767, 0.461
$T_{ib}$	2.34, 0.943, 0.530	2.37, 0.943, 0.573
$T_{ic}$	2.38, 0.952, 0.530	2.40, 0.949, 0.573

since they change section. There are 2-10 W 72 and 2-10 W 85 below, and 2-8 W 48 and 2-12 W 58 above the midheight level. Therefore

$$\sum \frac{I_G}{L_G} = \frac{2 \times 579}{240} = 7.23$$

$$\sum \frac{I_C}{L_C} = \frac{2}{150} \left( \frac{183.7 + 420.7}{2} + \frac{476.1 + 723.3}{2} \right) = 11.3$$

From Eq. 6,  $\rho = 7.23/11.3 = 0.638$ . Exterior column average area =  $(21.18 + 14.11)/2 = 17.75$  sq in.; interior column average area =  $(24.98 + 17.06)/2 = 21.02$  sq in. Substituting in Eq. 7,

$$\bar{H}^3 = \frac{(102.5)^3}{(1) \left( 2 \times \frac{17.65}{144} + 35^2 + 2 \times \frac{21.02}{144} \times 10^4 \right)^{1/3}} = 172,000 \text{ ft}^3$$

Case a story stiffnesses,  $S_{xj}$ , based upon equal element heights,  $h_j$ , and rigid but sliding floor systems, may be obtained by

$$S_{xj} = \frac{12E_j}{h_j} \sum_{k=1}^{\text{all}} \frac{1}{\phi_k} \dots \dots \dots (10)$$

$$\text{in which } \phi_k = \frac{h_j^3}{I_k} + \frac{30}{A_{vk}} \dots \dots \dots (11)$$

in which  $I_k$  = the moment of inertia of vertical element  $k$ , and  $A_{vk}$  = its effective shear area. Units are kips and inches.

Story stiffness values computed for SN 11 (579) are 188, 310, 211, 211, 125,

125, 44.2, 44.2 kips per in. from the first story to the top story. The story weights and rigid-floor stiffnesses were used to compute  $(T_{1a}) = 1.720$  sec, 0.767 sec, 0.461 sec. From Fig. 5, using  $\rho = 0.638$ , obtain  $R_{tbo} = 1.36, 1.23, 1.15$ . From Fig. 6, using  $\bar{H}^3 = 172,000 \text{ ft}^3$  obtain  $R_{icb} = 1.02, 1.01, 1.00$ .

By Eqs. 8 and 9 and with  $T_{io}$  from above,  $T_{ib} = (1.720)(1.36) = 2.34$  sec;  $T_{ib} = (0.767)(1.23) = 0.943$  sec;  $T_{ib} = (0.461)(1.15) = 0.530$  sec =  $T_{ic}$ ;  $T_{ic} = (2.34)(1.02) = 2.39$  sec; and  $T_{ic} = (0.943)(1.01) = 0.952$  sec. Comparisons of the values of  $T_{io}$ ,  $T_{ib}$ , and  $T_{ic}$  obtained by period synthesis and by exact calculation are shown in Table 2. Many real buildings of known periods were subjected to period synthesis with similar comparisons. The accuracy is less, of course, with small  $\rho$ -values.

### THE PSEUDO-STIFFNESS CONCEPT AND PROCEDURES

There is only one true vector of story stiffnesses for the Case a rigid-floor, shear system; this applies, of course, to any and all modes. But it has been shown that joint rotation and over-all flexure affect the natural periods of lumped-mass building models, and also that the effect varies from mode to

TABLE 3.—STORY PSEUDO-STIFFNESSES FOR SN 62 (4350)c

Story	Mode 1, in kips per inch	Mode 2, in kips per inch	Mode 3, in kips per inch	Mode 4, in kips per inch
4	148.7	229.3	363.7	511.2
3	179.3	215.7	412.0	565.1
2	198.4	247.1	389.4	519.8
1	315.0	420.7	607.8	803.2
Average	211.3	312.2	541.2	699.6

mode. If a building with more freedom than the Case a condition should be analyzed as though it were a Case a problem, the results would be erroneous. If the analysis input was mass and shear stiffness, the output periods and mode shapes would not represent those for the real structure. If the input should be true masses, periods, and mode shapes, the output story stiffnesses would be false. However, it is desirable—in seeking a simplified method of determining periods, mode shapes, stiffnesses, and the relative distortion conditions of shear, joint rotation, over-all flexure, and base motion—to retain the many advantages of Case a analysis which is a minor effort compared to formal analysis for Case b, c, or d. The pseudo-stiffness concept that follows will use false, or pseudo, story stiffnesses under Case a computations, but will determine how false the stiffnesses are and will apply necessary corrections.

To provide a simple example of false, or pseudo, stiffnesses, SN 62 (4350)c was analyzed as though it had Case a rigid floors. True periods, masses and mode shapes were used as input to obtain the pseudo-stiffnesses listed in Table 3. The stiffnesses increase with mode number because the effects of joint rotation and over-all flexure decrease with the higher modes. The modal data could be pooled in a least squares best solution and this has been done in this work and by Nielsen (26). However, the stiffnesses produced would be by

beid values, not identified with the actual freedom conditions and thus not suitable for distortion and stress analysis.

Several buildings and building models with more degrees of freedom than Case a were analyzed, all with similar results—the pseudo-stiffnesses vary with the mode and become greater as the mode becomes higher.

*Development of Pseudo-Stiffness Procedures.*—The pseudo-stiffness concept is proposed to relate the periods and pseudo-stiffnesses of buildings of any type of freedom to the periods and stiffnesses of close-coupled rigid-floor shear systems in consideration of: (1) Modal data if available in sufficient degree; (2) building parameters as set forth under "Period Synthesis," above; or (3) combinations of items 1 and 2. All period and stiffness computations are conducted under simple Case a rigid-floor, shear system conditions regardless of the actual coupling or the type and degrees of freedom in the building. Mode shapes are produced as well as real stiffnesses and periods.

Let  $S_p$  denote pseudo-stiffness. Thus,  $S_{pb}$  refers to a pseudo-stiffness for the first mode;  $S_{pbc}$  the pseudo-stiffness for combined shear, joint rotation, and over-all flexure for the second mode; etc. For a one-mass system, stiffness varies as the inverse of period squared. Given a period,  $T_a$ , for locked joints, and  $r$  longer period,  $T_b$ , when the joints are allowed to rotate,

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{pb}}{S_a} &= \frac{T_a^2}{T_b^2} = \frac{1}{R_{ba}^2} \\ S_{pb} &= \frac{S_a}{R_{ba}^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Likewise,  $S_{pbc} = \frac{S_c}{(R_{ca})^2} = \frac{S_c}{(R_{cb} \times R_{ba})^2} \dots \dots \dots (13)$

and  $S_{pbd} = \frac{S_d}{(R_{da})^2} = \frac{S_d}{(R_{dc} \times R_{cb} \times R_{ba})^2} \dots \dots \dots (14)$

Let  $\{S_{ipr}\}_{av} = \frac{\{S_a\}_{xy}}{(U_{i,ra})^2} \dots \dots \dots (15)$

in which  $\{S_{ipr}\}$  = the pseudo-stiffness vector for the  $i^{\text{th}}$  mode and for the degree of freedom,  $r$ , which may be Case b, c, or d;  $R_{i,ra}$  = the ratio  $T_{ir}/T_{ra}$  for the  $i^{\text{th}}$  mode and freedom index,  $r$ ; and  $\{ \ }_{av}$  represents the average value of all the elements in the vector.

In order to test the relationship postulated, the building frames and buildings previously used were utilized in the following manner: The Case c values for period and mode shape, calculated rigorously were used, together with the story weights, as input to a close-coupled program. The output of such runs are pseudo-stiffness vectors that are compatible with the correct periods and mode shapes for the actual freedom in the systems. The Case a stiffness vectors were also computed. Then the averages of the elements in the vectors were computed and Eq. 15 was used to solve for  $R_{i,ra}$  for each of the first three modes. Independent values of  $R_{i,ra}$  were obtained from the rigorous calculations by simply taking the ratios of Case c periods over Case a periods, or  $R_{i,ra}$ . The values computed by Eq. 15 are close to the actual in many cases and the worst case, SN 16, has only about 10% error. Since this is an unusual structure with 45-ft spans and a high first story (3), it was decided not to modify the equation by regression analysis or other means.

There are several ways of developing or obtaining story pseudo-stiffnesses. Where measured mode shapes and periods are available, stiffnesses can be obtained by direct computation using a Case a type program. The input period, masses, and mode shapes will be compatible with the output stiffnesses and with the definition—"the false stiffnesses necessary to produce correct dynamic properties using a close-coupled, rigid-floor assumption in calculation." If, for example,  $T_{1st}$  is known,  $\{S_{1st}\}$  will be obtained. Where period values are known or can be estimated, the average pseudo-stiffness can be computed from Eq. 15. With this value, the specific story values can simply be estimated by reference to the building geometry or by reference to the rigid-floor shear values,  $\{S_a\}$ , or by both. A direct and generally satisfactory method is to use the assumption that the story pseudo-stiffnesses are proportional to the average pseudo-stiffnesses, as follows:

$$\frac{\{S_{ipr}\}_{ax}}{\{S_{ipr}\}_{av}} = \frac{\{S_a\}_{ax}}{\{S_a\}_{av}} \dots \dots \dots (16)$$

but by equating equal terms from Eq. 15,

$$\{S_{ipr}\}_i = (R_{i,ra})^2 \{S_a\}_i \dots \dots \dots (17)$$

Another method of obtaining pseudo-stiffness vectors has application to the fundamental mode. If the deformation of the building is known or can be calculated under assumed static lateral forces or displacements, stiffnesses compatible with the conditions can be computed under the close-coupled assumption. This approximation is especially useful in considering base translation or rocking in the soil.

$$\text{story pseudo-stiffness} = \frac{\text{story shear}}{\text{net story deflection, } \Delta} \times V \dots \dots \dots (18)$$

*Pseudo-Stiffness Procedure Zero (PSP-0).*—This procedure is for the situation where no field measurements are available on periods or mode shapes. It could apply to calculations for a building not yet constructed, or to one for which it is not feasible to obtain actual vibration data. The design drawings are available and it is desired to estimate the periods and mode shapes for the first three natural modes of a building that is far-coupled and may also have significant over-all flexure. Base rocking will be assumed as insignificant here. The procedure combines period synthesis operations and PSP.

The story weights, the joint rotation parameter,  $\rho$ , and the over-all flexure parameter,  $R$ , are calculated. Eq. 6 is used for  $\rho$ , and Eq. 7 for  $R$ . Values of  $R_{i,ra}$  are obtained from Fig. 5 and values of  $R_{i,rb}$  from Fig. 6. The story stiffnesses,  $S_a$ , are then calculated under the assumption that all floors and the roof of the building are infinitely rigid. The shear system periods,  $T_{1st}$ , are obtained with a Case a computer program, or by an iterative procedure such as the Holzer-Blume building procedure (25). The rigid-floor mode shapes are also obtained in this step. The  $T_{1b}$  and  $T_{1c}$  periods are calculated with Eqs. 8 and 9;  $(U_{i,ra})^2$  is then calculated for each mode and freedom case of interest, and the story pseudo-stiffnesses are obtained from Eq. 17. The story pseudo-stiffnesses are entered into a rigid-floor program, or else calculations may be conducted by iteration, to obtain periods and mode shapes for each mode of interest. The periods should essentially agree with those developed previously by period synthesis. If they do not, the work should be reviewed.

Although the above operations seem long and involved, as for any step-by-step explanation, they really are not, considering the sparse initial data and the fact that a far-coupled system with over-all flexure is analyzed as a simple shear system with close-coupling. If the mode shapes are not required for the Case b and Case c conditions, it is not necessary to proceed beyond the use of Eq. 8 and 9.

*Example of PSP-0 with SN 11 (579)c.*—SN 11 ( $U_G = 579$ ) was used previously as an example of period synthesis. These steps constitute the period determination phase of PSP-0. The  $(R_{1ca})^2$  values are calculated as follows:

$$(R_{1ab})^2 = \frac{1}{(1.36)^2} = 0.540$$

$$(R_{2ab})^2 = \frac{1}{(1.23)^2} = 0.660$$

$$(R_{3ab})^2 = \frac{1}{(1.15)^2} = 0.758 = (U_{11c})^2$$

$$(R_{1ac})^2 = \frac{1}{(1.36 \times 1.02)^2} = 0.520$$

$$(R_{2ac})^2 = \frac{1}{(1.23 \times 1.01)^2} = 0.649$$

The story pseudo-stiffnesses are obtained by Eq. 17; they are listed in Table 4. The pseudo-stiffnesses are used to calculate the mode shapes as-

TABLE 4.—SN 11 (579) PSEUDO-STIFFNESSES

Story	$S_{1pb}$ , in kips per inch	$S_{2pb}$ , in kips per inch	$S_{3pb}$ , in kips per inch	$S_{1pc}$ , in kips per inch	$S_{2pc}$ , in kips per inch
8	23.8	29.1	33.1	22.9	28.6
7	23.8	29.1	33.4	22.9	28.6
6	68.0	83.2	95.3	65.5	81.5
5	68.0	83.2	95.5	65.5	81.8
4	121	140	161	110	136
3	114	140	161	110	136
2	105	200	236	162	202
1	102	125	143	98.3	123
Average	83.2	104	120	82.1	103

suming a rigid-floor condition. The data shown in Table 4 were used, in this case, in a computer program to obtain periods and mode shapes. The mode shapes of the Case c condition are essentially the same as for the Case b condition, as might be inferred from the low values of  $R_{1cb}$ . The mode shapes obtained by PSP-0 are plotted in Fig. 7 alongside the exact mode shapes. The agreement is good. The periods obtained under PSP-0 are shown in Table 5 with the actual periods. The first and second mode periods are in close agreement, and the third mode values are acceptable for practical purposes.

*Pseudo-Stiffness Procedure One (PSP-1).*—Pseudo-stiffness procedure one (PSP-1) is for the situation where the fundamental mode period and mode shapes are known from reliable field measurements. The building drawings

are also available. It is desired to obtain the periods and mode shapes for the second and third modes and also the shear stiffness vector  $\{S_n\}$  and the story pseudo-stiffnesses for various freedom cases and modes. The basic procedure is similar to PSP-0 except that use is made of known data and the stiffnesses are derived from the mode shape. In cases of surplus data, the measured data are employed.

The story weights, the joint rotation index,  $\rho$ , and the over-all flexure index,  $\Omega$ , are calculated. The  $S_{1pc}$  pseudo-stiffnesses are computed from the known mode shape, period, and the story weights. A Case a program is used for this purpose. The degree of freedom is assumed to be Case c if the ground is known to be rigid, otherwise it is Case d. Values of  $R_{1ca}$  are obtained from Figs. 5 and 6 with the values of  $\rho$  and  $\Omega$ . The factor  $(R_{1ca})^2$  is computed, and

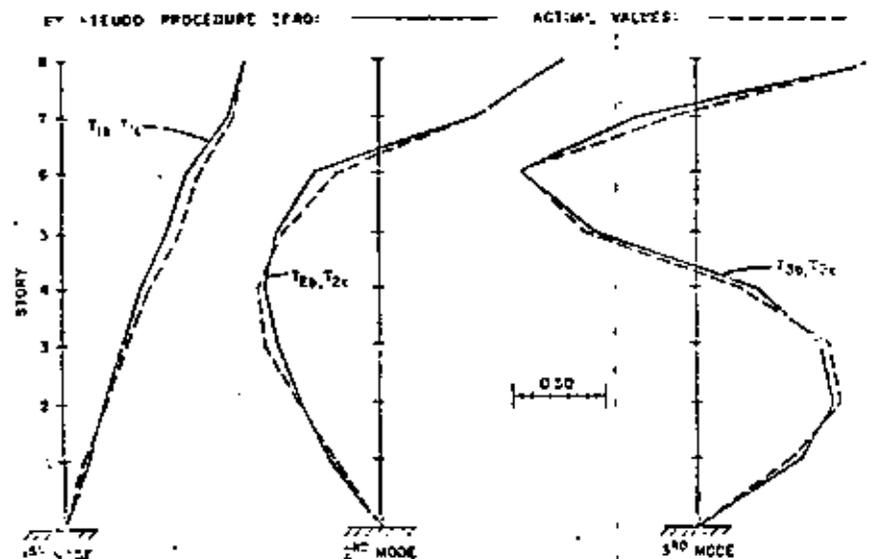


FIG. 7.—SN 11 ( $U_G = 579$ ) NORMALIZED MODE SHAPES

then the  $\{S_n\}$  vector using Eq. 17 with  $(R_{1ca})^2$  and  $\{S_{1pc}\}$ . Using the  $\{S_n\}$  vector as above, story pseudo-stiffnesses are developed for all other desired mode-freedom cases; Eq. 17 is used. By definition,  $R_{1ca} = T_{1c}/T_{1a}$ ; therefore  $T_{1c} = T_{1a}/R_{1ca}$  or

$$T_{1c} = (T_{1a}) (R_{1ca}) \dots \dots \dots (19)$$

Other fundamental mode periods (Cases a and b) are obtained by Eq. 19.  $\{S_n\}$  and the pseudo-stiffnesses from above are used to obtain periods for the second and third modes, Cases a and b, and mode shapes. As a comparison and check, the  $T_{2a}$  and  $T_{3a}$  periods may be used with the  $R_{1ca}$  ratios to obtain other periods, as in PSP-0. It is to be noted that the mode shapes for  $T_{1a}$  and  $T_{1b}$  would be the same as the measured shape of  $T_{1c}$  since all pseudo-stiffnesses have been changed proportionately in this procedure. This is an approxima-

tion of course, but of minor importance unless  $R_{1bc}$  and  $R_{1dc}$  are exceptionally large.

**PSP-2 and PSP-3.**—PSP-2 applies where the first and second modes are known from field vibration measurements. The operations are similar to PSP-1 except that advantage is taken of the known data from two modes instead of one. If the field data are equally reliable for the two modes,  $\{S_n\}$  can be derived from each and then averaged, story by story, to obtain best values.

PSP-3 applies where the first, second, and third modes are measured. If the  $\alpha$  and  $\beta$  parameters indicate very little participation of joint rotation and over-all flexure, respectively, in the third mode, this mode may produce better  $\{S_n\}$  values. Generally, however, it would be desirable to obtain a comparison from all three modes and either average directly or use weighted averages to obtain the best  $S_n$  vector. Possible ill-conditioned modal data may also be a factor in selection of the best values. The mode requiring minor or

TABLE 5.—SN 11 (579), COMPARISON OF PERIODS FROM PSP-6 TO ACTUAL PERIODS

Method	$T_{1a}$ , in Seconds	$T_{1b}$ , in Seconds	$T_{1c}$ , in Seconds	$T_{2c}$ , in Seconds	$T_{3c}$ , in Seconds
By Eqs. 8 and 9	2.34	0.943	0.530	2.39	0.952
By PSP-6	2.34	0.944	0.530	2.39	0.952
Actual	2.37	0.944	0.573	2.40	0.949

no ill-conditioned data adjustments would be preferred, at least for the stories where the ill-conditioned data exist.

GROUND COMPLIANCE

Case d freedom includes motion of the building base in an assumed elastic material. The motion may be due to translation and to rocking. The latter is considered more significant for most buildings. Since the motion of tall buildings due to soil compliance is a small part of the total motion, little error is introduced in considering the superstructure to have uniform mass and stiffness for the purpose of developing  $R_{1dc}$  (7, 16, 17). Let

$$T_{1dc} = \frac{T_{1c}}{T_{1e}} = \frac{\sqrt{\Delta_p + \Delta_r}}{\sqrt{\Delta_r}} \dots \dots \dots (20)$$

in which  $\Delta_p$  is the static deformation under Case c of the top of the building under given lateral forces, preferably the weight of the structure, in inches; and  $\Delta_r$  is the deformation at the same top level due solely to the compliance of the foundation materials under the same lateral forces, in inches.

It is beyond the scope of this paper to provide detailed data for  $\Delta_p$ . Subgrade moduli of the soil are utilized together with the geometric properties of the foundations. Generally it can be assumed that the superstructure so connects the separate foundations as to develop their over-all, or gross, moment of inertia to resist rocking. By definition,

$$T_{1d} = T_{1a} \times R_{1bc} \times R_{1cb} \times R_{1dc} = T_{1c} \times R_{1dc} \dots \dots \dots (21)$$

Rocking may generally be ignored for other than the fundamental mode and it is not very significant for that because poor soil under tall buildings is compensated by lower unit bearing pressures (or perhaps with piles or caissons) and therefore greater base areas (13, 17).

A  $\Delta_p$ -value of 1 in. is arbitrarily assumed for SN 11 (579) as compared to another arbitrary value of 5.84 in. for  $\Delta_r$ . Such deflection would be caused by the same lateral force. Then

$$R_{1dc} = \frac{\sqrt{5.84 + 1.00}}{\sqrt{5.84}} = 1.08$$

Thus the real period,  $T_{1d}$ , would be 8% longer than the period  $T_{1c}$  for assumed rigid soil.

The pseudo-stiffness procedure is readily applicable to the problem of how ground compliance affects dynamic characteristics. Other applications include the determination of actual floor system stiffnesses when measured periods and mode shapes are available, and the analysis of story distortion, which enables meaningful stress analysis and the prediction of possible damage.

STORY DISTORTION AND DAMAGE PREDICTION

There is reason to believe, especially for multistory buildings located a considerable distance from the source of seismic energy, that a great deal of the greatest response motion is essentially harmonic vibration in a low natural period (23). If the building mode shapes are known and if the response is measured or can be estimated in terms of period and relative motion at one or more levels, then the relative motion at all levels can be determined from the mode shape involved. Moreover, if the structure parameters  $\{S_n\}$ ,  $\rho$ ,  $\Omega$ , and the soil and foundation data are known, the motion can be broken down into types a, b, c, and d. The following expressions are useful:

$$V_j / \rho_j = \frac{V_j}{\Delta_{jix}} \dots \dots \dots (22)$$

in which  $V_j$  = the shear in story  $j$ , and  $\Delta_{jix}$  = the relative story  $j$  deformation in mode  $i$  for freedom case (x). It can be shown with Eqs. 17 and 22 that

$$V_j / \rho_j = \frac{V_j}{U_{jix}^2 (S_{nj})} = \Delta_{jix} (U_{jix})^2 \dots \dots \dots (23)$$

As an example, the relative story deformation of a building has been measured or estimated to be 0.50 in. in Case d, fundamental mode. The value of  $S_n$  for the story = 8,000 kips per in., and  $R_{1dc} = R_{1bc} \times R_{1cb} \times R_{1dc} = 1.17 \times 1.04 \times 1.04 = 1.32$ . From Eq. 23,  $V = 2,550$  kips and  $\Delta_p = 0.700$  in.,  $\Delta_r = 0.400$  in.,  $\Delta_c = 0.432$  in., and  $\Delta_j = 0.504$  in. The net story distortions for shear, joint rotation, over-all flexure and base rocking are therefore: 0.293 in., 0.110 in., 0.332 in., and 0.072 in., respectively. From these values, unit stresses of interest can be determined and damage, if any, can be predicted. Obviously, erroneous results would be obtained unless the various freedoms are considered. The often used assumption that all story distortion is due to shear would—in this example—lead to story shear unit stresses 72% greater

that the actual values and would neglect other important considerations such as column axial loading.

#### APPLICATION TO REAL BUILDINGS

A simple model has been used for the example problems in this paper, and it is one that was used in deriving the relationships for  $\rho$  and  $\Omega$ . This has been done only because of space limitations. Real buildings of known (measured) periods and mode shapes were analyzed so that computed data could be compared to the actual. In 22 various period determinations by PS and by PSP methods, the ratios of computed to actual values ranged from 0.90 to 1.18, with a mean of 1.021 and a coefficient of variation of 0.078. Mode shapes compared well, with only minor exceptions. None of the structures had been used in  $\rho$  and  $\Omega$  evaluations. It is to be recognized that in a completely rigorous analysis of a building, necessary assumptions as to floor stiffness, effective moduli of elasticity, and of the interaction of walls, stairwells and frames may lead to wide variations from the real conditions and values regardless of the scope or the formality of the analysis.

As  $\rho$  decreases below 0.25 there will tend to be less accuracy in PS and PSP results and a rigorous analysis may be desirable. However, very small values of  $\rho$  indicate that distributed mass models may also be used (7, 17).

#### SUMMARY AND CONCLUSIONS

In order to evaluate unit stresses or to estimate possible damage in multi-story buildings from lateral motion it is essential to determine how much of the dynamic response at any story level is due to shear deformation between floors, joint rotation, over-all flexure and ground compliance. Any of these freedoms may be important, especially in contemporary structures, although ground compliance is generally of least significance in the structural-dynamic properties of high-rise buildings.

Simple indices and procedures have been introduced with which the contributions of joint rotation, over-all flexure, and ground compliance in the three lowest modes of vibration may be estimated. Numerical data are provided on the effects of joint rotation and overall flexure in the three lowest modes relative to shear-building freedom over a wide range of building characteristics.

A period synthesis concept and pseudo-stiffness procedures have been proposed to enable the approximate determination of natural periods of vibration, mode shapes and stiffnesses of multi-story buildings with consideration of joint rotation, over-all flexure and ground compliance while performing only simple time-saving analyses for assumed rigid-floor shear buildings. The use of the procedures on several real buildings has provided good correlation with measured characteristics.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The material presented is a portion of a doctoral dissertation at Stanford University. The writer appreciates the many helpful suggestions of D. H.

Young throughout the work. Walter C. Hurty provided data for one of the building models. The Atomic Energy Commission, Nevada Operations Office, gave data available on several of the real buildings employed in the analysis.

#### APPENDIX I—REFERENCES

- Blume, John A., and Hoeselmeier, Harry L., "The Reconciliation of the Computed and Observed Periods of Vibration of a Fifteen-Story Building," thesis presented to Stanford University, at Stanford, Calif., in 1934, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.
- Goldberg, Bogdanoff, and Moh, "Forced Vibration and Natural Frequencies of Tall Building Frames," *Bulletin, Seismological Society of America*, Vol. 49, 1959.
- Rubinstein, Moshe P., and Hurty, Walter C., "Effect of Joint Rotation on Dynamics of Structures," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 87, No. EM6, Proc. Paper 3025, Dec., 1961, pp. 133-157.
- Schenker, L., "The Dynamic Response of Tall Structures to Lateral Loads," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 82, No. EM2, Proc. Paper 944, Apr., 1956, pp. 944-1-944-13.
- Derg, Glen V., "Response of Multi-Story Structures to Earthquake," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 87, No. EM6, Proc. Paper 2199, Apr., 1961, pp. 1-16.
- Housner, G. W., and Brady, A. G., "Natural Periods of Vibration of Buildings," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 89, No. EM6, Proc. Paper 3613, Apr., 1963, pp. 31-7.
- Jacobsen, L. S., "Natural Periods of Uniform Cantilever Beams," *Transactions, ASCE*, Vol. 104, 1939.
- Blume, John A., "Period Determinations and Other Earthquake Studies of a Fifteen-Story Building," *Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering, Earthquake Engineering Research Institute, held at Berkeley, Calif., June, 1956*.
- Rubinstein, Moshe P., "Effect of Axial Deformation on the Periods of a Tall Building," *Bulletin, Seismological Society of America*, Vol. 54, No. 1, Feb., 1964.
- Jough, Ray W., King, Ian P., and Wilson, Edward L., "Structural Analysis of Multistory Buildings," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 90, No. ST3, Proc. Paper 1925, June, 1964, pp. 19-34.
- Steinbrugge, Carl L., and Flores, Rodrigo A., "The Chilean Earthquakes of May 1960: A Structural Engineering Viewpoint," *Bulletin, Seismological Society of America*, Vol. 53, No. 2, Feb., 1963.
- Blume, John A., "A Structural-Dynamic Analysis of an Earthquake Damaged Fourteen-Story Building," *The Prince William Sound, Alaska, Earthquake of 1964 and Aftermath*, Vol. 2, Part A, Publication 10-3, Environmental Science Services Administration, U.S. Department of Commerce, 1967.
- Merrill, R. G., and Housner, G. W., "Effect of Foundation Compliance on Earthquake Stresses in Multistory Buildings," *Bulletin, Seismological Society of America*, Vol. 44, No. 4, Oct., 1954.
- Jacobsen, L. S., "Vibrational Transfer from Shear Buildings to Ground," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 90, No. EM3, Proc. Paper 3924, June, 1964, pp. 1-35.
- Blume, John A., discussion of "Vibrational Transfer from Shear Buildings to Ground," by Lydik S. Jacobsen, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 91, No. EM1, Proc. Paper 4212, Feb., 1965, p. 166.
- Jacobsen, L. S., and Ayre, Robert S., *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1955.
- Blume, John A., "The Dynamic Behavior of Multistory Buildings with Various Stiffness Characteristics," dissertation presented to Stanford University, at Stan-

- Jord, Calif., in 1966, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
18. Blume, John A., "Structural Dynamics in Earthquake-Resistant Design," Transactions, ASCE, Vol. 125, 1960, pp. 1076-1139.
  19. Tung, T. H., and Newmark, N. M., "Numerical Analysis of Earthquake Response of a Tall Building," Bulletin, Seismological Society of America, Vol. 45, No. 4, Oct., 1955.
  20. Rogers, Clower L., "Dynamics of Framed Structures," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.
  21. Blume, John A., Newmark, N. M., and Corning, Leo R., "Design of Multi-Story Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions," Portland Cement Association, 1961.
  22. Hurly, Walter C., and Robinson, Myke E., "Dynamics of Structures," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1951.
  23. "Progress Report Through Event Corroboration on Structural Response Investigations," Report NY 1-28-69, prepared by John A. Blume and Associates Research Division under Contract AT(29-1)-99 with Atomic Energy Commission, 1966.
  24. Timoshenko, S., and Young, D. H., Vibration Problems in Engineering, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1955.
  25. Blume, John A., discussion of "Earthquake Stresses in Shear Buildings," by M. G. Salvadori, Transactions, ASCE, Vol. 119, 1954, pp. 194-201.
  26. Nielsen, N. Arvey, "Dynamic Response of Multistory Buildings," thesis presented to the California Institute of Technology, at Pasadena, Calif., in 1964, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

## APPENDIX II.—NOTATION

The following symbols are used in this paper:

- $A_k$  = gross area of a continuous vertical element or member,  $k$ , (such as columns, piers, pilasters, and walls) at the story closest to the midheight of the building, in square feet;
- $A_{v,k}$  = effective shear area of member  $k$ , in square inches;
- $a, b, c, d$  = subscripts indicating degrees of freedom as defined in text;
- $C$  = damping coefficient;
- $c_{jk}$  = damping coefficient, defined as the force on the  $j$ th mass exerted by the damping dashpots when the  $k$ th mass has a unit velocity and all other masses have zero velocity, in kip seconds per inch;
- $D$  = displacement parallel to the  $x$ -axis, in inches;
- $D_{x,i}$  = modal displacements in the  $i$ th mode; eigenvector;
- $\bar{a}_k$  = normal distance in the direction of motion from center of member  $k$  to centerline of floor plan, in feet;
- $E$  = modulus of elasticity, in kips per square inch;
- $E_r$  = ratio of modulus of elasticity to 30,000 kips per square in., dimensionless;
- $f$  = subscript indicating flexure;
- $g$  = subscript indicating ground compliance;
- $H$  = height of building from base to the roof line, in feet;
- $I_c$  = moment of inertia of column or pier, in inches<sup>4</sup>; unless otherwise shown,  $I_c$  would be the average effective value at the midheight story level,  $I_k$  refers to  $I$  of member  $k$ ;

- $I_G$  = moment of inertia of girder, spandrel, or of floor system, in inches<sup>4</sup>; unless otherwise shown,  $I_G$  would represent the effective value (at midheight story level) of the girder and its connected floor system;
- $i$  = subscript indicating mode number;
- $j, k$  = lumped-mass or degree of freedom subscripts; in a matrix,  $j$  refers to row number and  $k$  to column number; also,  $k$  is used as a subscript denoting member or element;
- $jr$  = subscript indicating joint rotation;
- $L$  = length of member, in inches;
- $M$  = mass of a story, in kip-seconds<sup>2</sup> per inch;
- $n$  = number of stories or lumped masses;
- $f_i$  = angular frequency of the  $i$ th mode, in radians per second;
- $\beta_i^2$  = characteristic value, or eigenvalue of the  $i$ th mode, in radians<sup>2</sup> per second<sup>2</sup>;
- $R_{ixd}$  = the period ratio  $T_{ix}/T_{id}$ , for the  $i$ th mode and freedom index  $x$ , which may be Case a, b, c, or d;
- $S_{jk}$  = stiffness influence coefficient, defined as the external force on the  $j$ th mass of the model when the  $k$ th mass has a unit displacement and all other masses have zero displacement, in kips per inch;
- $S_a$  = Case a story stiffnesses, in kips per inch;
- $S_{jipx}$  = the pseudo-stiffness of story,  $j$ , in mode  $i$  under freedom case  $x$ , in kips per inch;  $x$  may be Case a, b, c, or d;
- $SX$  = structure number, or model number;
- $s$  = a story spring factor; or subscript, indicates shear;
- $T_i$  = natural period of the  $i$ th mode, in seconds;
- $V$  = story shear, in kips;
- $W$  = weight, in kips;
- $\{X\}_{av}$  = average value of quantity  $X$  (or of any other value in the vector bracket);
- $x$  = horizontal axis parallel to motion; also, a variable designation for Case a, b, c, or d;
- $\Delta$  = net story distortion, in inches;
- $\rho$  = joint rotation index;
- $\phi_k = h_k^2/l_k + 30/A_k$  in inches<sup>-2</sup>;
- $\Omega'$  = over-all flexure index.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

COMPORTAMIENTO Y DISEÑO DE ELEMENTOS DE MAMPOSTERIA

Oscar Hernández B.

AGOSTO, 1983.



## COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS DE MAMPOSTERÍA

Oscar Hernández Basilio\*

### 1. INTRODUCCIÓN

La mampostería es uno de los materiales de construcción más antiguos utilizados por el hombre, la noticia más remota que se tiene de su empleo se puede leer en la Biblia, donde en el capítulo del Génesis 11-3,4 dice.....

<sup>3</sup>Un día dijeron unos a otros "Vamos a hacer ladrillos y a cocerlos en el fuego". Así, usaron ladrillos en lugar de piedra y asfalto natural en lugar de mezcla.<sup>4</sup> Después dijeron "Vengan vamos a construir una ciudad y una torre que llegue hasta el cielo. De este modo nos haremos famosos y no tendremos que dispersarnos por la tierra ----- así dice el relato donde aparentemente se comienza a emplear las mamposterías como elementos estructurales.

Grandes obras de mampostería han perdurado en el tiempo como símbolo de la grandeza de los pueblos, muestra de ello son la pirámides en Egipto, México, etc; o más recientemente las viviendas que tienen 500 o más años de antigüedad. Sin embargo, probablemente es por esta razón, que la mampostería en México se asocia generalmente a procedimientos artesanales tanto en la fabricación de las piezas como en los procesos constructivos. Sin embargo, si bien todavía se utilizan ampliamente mamposterías de piedra y adobe de barro o de concreto de baja resistencia, también desde hace muchos años se fabrican piezas de alta resistencia y buen control de calidad, con las cuales se han realizado obras de mampostería cada vez más atrevidas.

\* Profesor, Facultad de Ingeniería, UNAM



Se fabrican comercialmente en México bloques de barro extruido con re-

sistencia de  $400 \text{ kg/cm}^2$  o superior y bloques de concreto en los que pueden lograrse resistencias sobre área bruta superiores a los  $200 \text{ kg/cm}^2$ .

Con materiales semejantes en zonas de bajo riesgo sísmico como Suiza, Inglaterra y los países Escandinavos, se han construido muchos edificios de entre 15 y 20 pisos a base de muros de carga sin ningún refuerzo. En zonas de mayor riesgo sísmico como el Suroeste de los EEUU, se han construido edificios del orden de 15 pisos con mampostería de bloque de concreto con abundante refuerzo.

En México las construcciones a base de muros de carga de mampostería han sido muy populares en edificios de pocos pisos, principalmente con la modalidad de reforzar los muros con dadas y castillos. El límite usual en edificios ha sido de 5 o 6 pisos.

La ventaja principal del empleo de muros de carga es que el mismo elemento que sirve para subdividir los espacios y para dar aislamiento, tiene función estructural. Otras ventajas son que el sistema constructivo no requiere de equipo elaborado y costoso y es intensivo en uso de mano de obra no muy especializada. Por estas ventajas, la construcción a base de muros de carga de mampostería resulta conveniente cuando el espacio arquitectónico está muy subdividido y la distribución de áreas y elementos de separación es regular tanto en planta como en elevación.

Las desventajas del empleo de muros de carga son la falta de flexibilidad en la subdivisión de los espacios que resulta de la imposibilidad de remover las paredes divisorias; la dificultad de ejercer un control de calidad estricto tanto en el material como en la construcción, y la baja resisten-



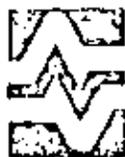
tencia en tensión y la fragilidad ante deformaciones en su plano que obligan al empleo de refuerzo y limitan su aplicación en zonas sísmicas.

Las recomendaciones para el diseño estructural de la mampostería han sido tradicionalmente muy someras, basadas en especificaciones de tipo geométrico, en procedimientos muy burdos de revisión de esfuerzos y en el empleo de factores de seguridad muy altos.

En años recientes se han realizado estudios bastante extensos acerca de las propiedades mecánicas y el comportamiento estructural de la mampostería, la cual ha permitido la elaboración de normas de diseño más racionales. Un ejemplo de ello son las normas para mampostería del reglamento de construcciones para el Distrito Federal.

La mayor parte de los daños materiales y pérdidas de vidas humanas a raíz de temblores importantes se han debido al colapso de construcciones de viviendas de uno a cinco niveles. Las razones principales de estos colapsos han sido: el empleo de materiales de baja resistencia, o cuya resistencia se deteriora rápidamente con el tiempo, el uso de procedimientos constructivos que no permiten una liga adecuada de los muros entre sí y la adopción de soluciones a base de muros muy altos con pocas separaciones interiores y con techos muy pesados o poco rígidos.

En muchos casos la adopción de estas formas constructivas se debe a la falta de recursos económicos que hace que se puedan emplear solo materiales que se pueden obtener prácticamente sin costo en el lugar, como el lodo, la piedra, la madera rolliza etc, y solo permite adoptar procedimientos constructivos que puedan ser realizados directamente por los habitantes. No resulta muy difícil encontrar modificaciones a estos sistemas



de manera que, sin que se requiera un costo adicional significativo y sin cambiar radicalmente las características de las viviendas, se obtenga una seguridad adecuada con el efecto de sismos.

Cuando se trata de viviendas en las que se pueda invertir en materiales comerciales, como el ladrillo, el cemento y el acero, puede obtenerse seguridad adecuada contra sismos, y a la vez condiciones de habitabilidad favorables, mediante el empleo de muros de mampostería, de piezas de barro o de bloque de concreto, reforzados en distintas formas para proporcionar una mayor resistencia y continuidad al conjunto. En años recientes se ha incrementado notablemente el conocimiento del comportamiento sísmico de estos elementos estructurales, lo cual ha permitido la elaboración de recomendaciones específicas para el diseño y construcción de muros de mampostería en zonas sísmicas.

En este trabajo se tratará de resumir los principios del diseño sísmico de las construcciones de mampostería, partiendo del comportamiento sísmico observado y de resultados de ensayos de laboratorio; se recomendarán las formas de estructuración que se consideran más eficientes, se señalarán los defectos que más comúnmente dan lugar a fallas y se darán recomendaciones específicas de diseño. Se incluyen materiales y procedimientos constructivos muy distintos como las construcciones de adobe, las de ladrillo no reforzado, las reforzadas con dalas y castillos y las que tienen refuerzo en el interior de piezas huecas. Se analizarán también algunos nuevos procedimientos de refuerzo que pueden resultar convenientes en algunos casos y se harán algunos comentarios acerca de las formas de reparar las construcciones dañadas.



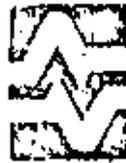
INSTITUTO DE  
INVESTIGACIONES  
ELECTRICAS

DEPARTAMENTO  
DE  
INGENIERIA CIVIL

(5)

## 2. COMPORTAMIENTO SISMICO OBSERVADO DE CONSTRUCCIONES DE MAMPOSTERIA

Construcciones de adobe. La experiencia con este material es definitivamente negativa. La escasa resistencia en tensión del adobe y la poca adherencia que se logra en las juntas con los morteros de lodo son solo algunos de los inconvenientes. Aún con adobes de buena calidad no puede lograrse una buena liga entre los muros transversales; esto aunado al gran peso de los muros, y generalmente de los techos, hace que estos muros fallen generalmente por el efecto de fuerzas normales a su plano, ya sea por volteamiento o por fallas locales por los empujes de los elementos de techo. En muchas ocasiones las fallas de estas construcciones han sido agravadas porque el adobe se encontraba muy debilitado por efecto del intemperismo.



Como recomendaciones generales para mejorar el comportamiento sísmico de estas construcciones se pueden mencionar la selección cuidadosa de los suelos con que se fabrica el adobe, su mejoramiento con fibras o con aditivos estabilizadores, la reducción de la altura de los muros al mínimo admisible para la habitabilidad de la vivienda, la subdivisión de la misma en espacios pequeños por medio de muros ligados entre sí con el mejor cuatrapeo de las piezas posible, el evitar techos muy pesados y el estructurar estos techos para que tengan rigidez en su plano.

Sin embargo, una mejora sustancial en el comportamiento sísmico solo puede obtenerse por medio de algún refuerzo en el adobe que produzca una liga adecuada entre los elementos y proporcione cierto confinamiento y ductilidad a los muros. Algunos de estos procedimientos de refuerzo se describen en la ref 1.

Construcciones de mampostería no reforzada. Las construcciones de tabique o bloque de concreto sin refuerzo han tenido también un comportamiento sísmico muy deficiente ya que adolecen esencialmente de los mismos defectos que las de adobe: liga pobre y falla muy frágil. Una fuente muy frecuente de daños y colapsos es la presencia de huecos de puertas y ventanas no reforzadas, en los que la concentración de esfuerzos que se presenta en las esquinas provoca la iniciación de grietas diagonales que llevan a la falla a todo el muro. Este tipo de construcción debe evitarse en zonas sísmicas exceptuando quizás construcciones que encierran espacios pequeños y con techos ligeros.

Construcciones de mampostería confinada. Se denomina así a los muros que están rodeados en su perímetro por castillos y dadas que forman un marco que



encierra tableros relativamente pequeños, proporcionándoles una capacidad de deformación mucho mayor que la del muro no reforzado y una liga muy efectiva con los elementos adyacentes. El comportamiento observado de construcciones de este tipo hasta de varios pisos ha sido definitivamente mejor que el de la mampostería no reforzada; se cuentan con criterios para fijar la distribución de los elementos resistentes y de su refuerzo y con procedimientos para el diseño de la mampostería así reforzada. Hay que hacer notar sin embargo, que si con este sistema se reduce mucho la probabilidad de un colapso de la construcción y de daños mayores, no se evita la posibilidad de agrietamientos diagonales en los muros, ya que la resistencia en tensión diagonal de la mampostería no se incrementa apreciablemente por la presencia de las dalas y castillos.

Construcciones de mampostería con refuerzo interior. En años recientes se ha popularizado en diversos países un sistema constructivo que consiste en reforzar los muros de piezas huecas con barras verticales en los huecos de las piezas y horizontales en las juntas o en piezas especiales. La experiencia sobre el comportamiento sísmico de estas construcciones es más o menos amplia, hay evidencia de que con cantidades altas de refuerzo se obtiene un incremento en la resistencia con respecto a la mampostería no reforzada y un comportamiento bastante dúctil. Hay que recalcar que las cantidades de refuerzo necesarias para lograr un comportamiento adecuado son muy altas y que se requieren separaciones pequeñas tanto vertical como horizontalmente. El procedimiento tiene distintas modalidades que llegan en muros de edificios altos hasta el relleno total de los huecos de las piezas con concreto y el colado de muros delgados de concreto entre dos paños de muros de mampostería (cavity wall). La fig 1 muestra las características de algunos procedimientos de refuerzo típicos. En México, el refuerzo interior no es muy popular



debido a la dificultad de supervisión y, cuando se usa, se emplean cantidades de refuerzo mucho menores que las mínimas especificadas en otras partes, con lo cual se ha demostrado, tanto en laboratorio como en estructuras reales, que se tiene un comportamiento sísmico muy defectuoso debido a que la resistencia se deteriora rápidamente por la repetición de cargas alternadas.

Este procedimiento de refuerzo tiene la ventaja, sobre el de confinar con dalas y castillos, de que el refuerzo interior poco espaciado incrementa la resistencia y limita el agrietamiento a espesores pequeños, y de que el muro puede quedar aparente. Tiene sin embargo la desventaja de que las piezas huecas tienden a tener fallas locales por desprendimiento de sus paredes, que la liga que se obtiene entre los distintos elementos es menos efectiva y que la cantidad de refuerzo necesaria para asegurar un buen comportamiento es mayor.

En Estados Unidos y Nueva Zelanda la mampostería con refuerzo interior es bastante popular como sistema constructivo; sin embargo es usual que se llenen completamente los huecos de las piezas con un mortero muy fluido y con abundante refuerzo vertical y horizontal. Con este sistema, en mampostería de bloques de concreto, se obtiene prácticamente un muro monolítico, ya que el concreto colado en los huecos se adhiere perfectamente al bloque; en piezas de barro la eficiencia del procedimiento es menor porque el concreto del colado, al contraerse por fraguado, se separa del tabique; el empleo de aditivos estabilizadores puede evitar este problema.

### 3. EVIDENCIAS EXPERIMENTALES DEL COMPORTAMIENTO DE LA MAMPOSTERIA

El diseño de estructuras de mampostería había estado, hasta hace poco tiempo, basado en consideraciones empíricas sin aplicarle en forma racional los prin



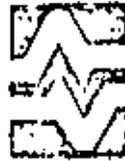
clipsos ingenieriles. Ultimamente se han efectuado análisis racionales para predecir la resistencia de mamposterías bajo diferentes sollicitaciones de carga como son flexocompresión, cargas verticales, cargas laterales, etc. Simultáneamente se han llevado a cabo multitud de ensayos para comprobar la validez de dichos análisis.

Para determinar las propiedades básicas de la mampostería, se efectúan diversos ensayos. La prueba de compresión en pilas, fig 2, se emplea para indicar la resistencia axial de compresión ( $f'_m$ ) debiéndose tomar en cuenta los efectos de esbeltez cuando esta resistencia índice se extrapole a muros. El ensayo en muretes, fig 3, se emplea para determinar el esfuerzo cortante resistente en esta prueba se aplica al espécimen una carga diagonal que le induce la falla, encontrándose una buena correlación entre los resultados de esta prueba y muros con características afines. En la parte correspondiente a Diseño de Estructuras de Mampostería se describe con cierto detalle la realización de dichos ensayos.

### 3.1 Comportamiento bajo distintas sollicitaciones

3.1.1 Flexocompresión En la fig 4 se muestra la distribución de esfuerzos supuesta para la mampostería en el caso de flexocompresión, para diferentes valores de excentricidad de la carga vertical aplicada al muro.

Se han presentado diversas teorías para calcular la resistencia en flexocompresión de muros tomando en cuenta efectos de esbeltez, la más acertada es aquella en la que se procede en la misma forma que para columnas de concreto, determinándose teóricamente diagramas de interacción carga axial-momento flexionante que como se observa en la fig 5, existe buena correlación entre teoría y resultados de laboratorio.



### 3:1.2 Flexión y cortante

En estructuras situadas en zonas sísmicas es ventajoso emplear muros para resistir fuerzas laterales por la gran rigidez que tienen estos elementos para cargas en su plano, sin embargo es necesario verificar que su resistencia sea compatible con dicha rigidez. Son tres las formas principales de estructurar a base de muros:

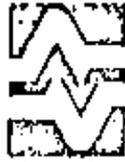
1. De carga, para soportar fuerzas verticales y horizontales, fig 6a
2. Como diafragma, estando confinados en marcos de acero o concreto que le transmiten la fuerza lateral, fig 6b
3. Muro de cortante

El primer tipo de muro es eficiente debido a la presencia de carga vertical que hace que el muro sea más resistente a las fuerzas cortantes y a los momentos de volteo producidos por el sismo.

La principal función de los muros diafragma es tomar la fuerza horizontal que le trasmite el sistema de marcos, que toman las cargas verticales; el muro funciona entonces como un puntal de compresión.

Los muros de cortante, aislados de la estructura de marcos, se construyen de concreto reforzado debido a que la baja carga vertical los hace relativamente críticos, raramente se hacen de mampostería.

Para el diseño sísmico no solo interesa la resistencia de la estructura ante carga lateral sino que también es necesario conocer la capacidad de la misma para absorber la energía introducida por el sismo y amortiguar el movimiento inducido; así como también la alteración de estas propiedades con la periodicidad de la fuerza horizontal.



Las propiedades de rigidez y resistencia pueden calcularse en muros ensayados en carga estática y en ciertos casos en especímenes más pequeños, para tener una idea de la capacidad de amortiguamiento y deterioro de la mampostería, es necesario efectuar pruebas dinámicas cíclicas.

Por lo general en la mampostería se presentan dos tipos de falla: flexión y cortante. La falla por flexión se alcanza cuando fluye el refuerzo vertical con el que se refuerza el muro; la resistencia ante esta sollicitación puede calcularse fácilmente suponiendo un bloque equivalente en compresión en un extremo y que el acero de refuerzo en el otro extremo del muro está fluyendo.

Para alcanzar la falla por cortante es necesario que primeramente no se alcance la de flexión; es decir, solo se obtiene aquella cuando existe abundante refuerzo vertical y/o mucha carga axial o se trata de muros de gran longitud.

Hasta 1965 la mayoría de los ensayos que se realizaban para determinar las características de las mamposterías eran estáticos; de lo observado en los últimos sismos, ha sido evidente que los resultados de esos ensayos monotónicos son de valor limitado para diseño sísmico, por lo que actualmente los procedimientos de diseño que proponen los diversos reglamentos están basados en resultados obtenidos de pruebas ante cargas laterales alternadas, aún cuando no de carácter dinámico. Esto último no parece ser una limitante porque se ha observado que los resultados de ensayos dinámicos proporcionan valores más grandes a los obtenidos bajo cargas laterales alternadas pseudoestáticas, lo que se explica porque las mamposterías son muy rígidas y su velocidad de respuesta ante las excitaciones es baja.



La experiencia a mostrado que las principales variables que influyen en el comportamiento de las mamposterías son: tipo de pieza y mortero; confinamiento; cuantía y disposición del refuerzo; relación altura a longitud; la carga vertical sobre el muro y en ciertos caso el aplanado que se coloca en una o en ambas caras del mismo.

Se puede alcanzar gran capacidad de deformación para valores altos de la relación altura a longitud, bajas cargas axiales y poca cantidad de refuerzo vertical en los extremos del muro. Reduciendo la relación de aspecto del muro, aumentando la carga axial y el acero de refuerzo en los extremos se alcanzan fallas de tipo frágil por cortante a través de grietas diagonales que pueden correr por la juntas de mortero o atravesar las piezas y juntas (tensión diagonal); este último tipo de falla por cortante es indicativo de la máxima capacidad de la mampostería, porque el primero solo indica que se tiene un mortero de baja calidad.

Tanto para flexión como por cortante, el comportamiento observado ante alternaciones de carga puede resumirse en la siguiente forma; para niveles bajos de carga el comportamiento es prácticamente lineal, una vez que se agrieta el muro, tanto para flexión como para cortante, se observa que para un mismo nivel de deformación se tiene un decremento en la resistencia ante alternaciones de carga, siendo mayor para el casos de cortante; también se diferencia la forma de los ciclos histeréticos, ya que para cuando predomina la flexión estos encierran un área mucho mayor que para el caso de cortante. Al incrementar la carga, nuevamente se presenta el fenómeno antes mencionado, hasta que finalmente se llega al colapso para deformaciones pequeñas en el caso de cortante o grandes en el caso de flexión; en las figs 9a y 9b se muestra esquemáticamente el comportamiento antes descrito.



A pesar de ser la falla por cortante la menos deseada porque desarrolla menor capacidad de disipación de energía, es la que más comúnmente se tiene presente en la realidad durante un sismo.

En ambos tipos de fallas, flexión o cortante, se presentan aplastamientos y desprendimientos locales en los extremos de los muros para etapas cercanas a la falla, dichos aplastamientos son debidos a la gran expansión lateral que tiene el mortero para altos niveles de esfuerzo, lo que produce

tensiones en las piezas. En diversos países se evita lo anterior colocando placas de acero perforadas en los extremos de los muros en las dos o tres hileras inferiores y superiores, ref 2, esto resultaría impráctico en nuestro medio, una solución no tan eficiente pero que ha dado muy buenos resultados, aún en mamposterías de piezas huecas, es colocar varilla corrugada de pequeño diámetro (5/32") en las juntas de mortero, este refuerzo también ha probado ser efectivo para resistir fuerza cortante una vez que el muro se agrieta.

En una serie de ensayos estáticos y dinámicos realizados por William y Scrivener, ref 3, en las cuales aplicaron ciclos a diversos niveles de carga y frecuencias, encontraron que en aquellos muros probados estáticamente y que fallaban por cortante, presentaban la misma degradación de carga que aquellos ensayados bajo condiciones dinámicas; sin embargo, en aquellos que fallaron por flexión, los ensayos dinámicamente se comportaron menos satisfactoriamente que los estáticos equivalentes. Esto último es debido por el movimiento violento en el caso dinámico se pierde más rápidamente el material que confina el acero, permitiendo el pandeo y reduciendo la capacidad del muro a flexión; no es el caso de cortante donde la resistencia está básicamente proporcionada por la mampostería.



También se ha observado que es más eficiente para soportar fuerzas cortantes el refuerzo horizontal colocado en las juntas y distribuido en forma uniforme en la altura del muro, que el vertical colocado en los extremos o en el interior de las piezas huecas.

Cuando la mampostería se coloca en el interior de un marco robusto de acero o concreto, se pueden seguir dos caminos:

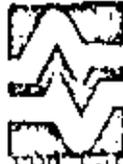
1. Aislar la mampostería del marco para que aquella no soporte cargas
2. Hacer que trabaje la mampostería al colocarla con contacto con el marco perimetral.

El primer aspecto es muy difícil de realizar además de costoso; en el segundo caso se tiene un gran incremento de la rigidez lateral del sistema y de su resistencia. Ensayes realizados demuestran que es posible tener comportamiento dúctil cuando las columnas tienen refuerzo suficiente por cortante para permitir que desarrollen su momento de fluencia. El refuerzo horizontal colocado entre las juntas de mortero ayuda a repartir mejor la fuerza cortante en toda la altura del muro evitando que se concentre en sus extremos superior e inferior.

### 3.2 Evidencia experimental realizada en México

En la ref 4 se compila la información experimental que se tenía en México hasta 1972 aproximadamente.

Para carga lateral estática se efectúan dos tipos de pruebas; el denominado en voladizo, fig 7a, donde se presentan momentos flexionantes que pueden llegar a ser críticos; y el ensaye de compresión diagonal, fig 7b donde sólo se inducen deformaciones por cortante. El efecto de pisos superiores se



representa con carga vertical.

INSTITUTO DE  
INVESTIGACIONES  
ELÉCTRICAS

DEPARTAMENTO  
DE  
INGENIERÍA CIVIL

(15)

La primera forma de ensaye trata de ser representativa de los muros de carga; mientras que para cuando se tiene un marco confinante, el ensaye de compresión diagonal intenta reproducir a un muro diafragma.

Para cargas laterales dinámicas y alternadas también se efectúan las mismas formas de ensaye.

En las figs 8 y 9 se muestran diversas curvas cargas-deformación angular para diferentes formas de ensaye y en la fig 10 la forma típica de falla.

Se tienen en general tres formas de agrietamiento: la debida a flexión se caracteriza porque es una grieta sobre una junta del mortero cerca de la base del muro; la falla por cortante corre alternadamente por las juntas verticales y horizontales y la falla por tensión diagonal atraviesa indistintamente piezas y mortero.

La presencia de alguno de estos tipos depende principalmente de las características de la mampostería así como también de la sollicitación de carga.

En el muro en voladizo la falla se inicia por agrietamiento en la base, presentándose después una falla por agrietamiento diagonal al aumentar las deformaciones. El tener carga vertical aumenta apreciablemente la carga de primer agrietamiento y tiende a llevar a un tipo de falla por tensión diagonal, disminuyendo la ductilidad del muro. El agrietamiento por flexión se reduce también al aumentar el acero de refuerzo en los extremos del muro. El refuerzo interior puede aumentar la resistencia máxima pero no sustancialmente la de agrietamiento.

Para muros en compresión diagonal se presentan fallas de cortante o de ten-



sión diagonal y esto depende de las características de la mampostería; aquí también la carga vertical incrementa la resistencia al agrietamiento y la máxima, pero también la deformabilidad del muro; el acero interior aumenta ligeramente la carga resistente al agrietamiento pero disminuye la deformación correspondiente, aumentando la carga máxima y la deformabilidad post-agrietamiento. El aplanado del muro contribuye en forma importante a la resistencia del mismo. Se ha visto que el confinamiento exterior del muro no influye apreciablemente en la resistencia al agrietamiento, pero sí en la resistencia y ductilidad a la falla.

La presencia de agrietamiento no implica necesariamente la falla del muro sino que ésta depende del confinamiento, refuerzo exterior e interior, que este tenga y que puede hacer que el muro resista cargas mayores a la de agrietamiento.

Desde el punto de vista práctico si se refuerza convenientemente los extremos del muro, el problema de flexión desaparece y puede considerarse que la principal sollicitación es una carga diagonal de compresión equivalente, a la que se añade la carga vertical proveniente de pisos superiores.

Los estudios bajo cargas dinámicas y alternadas son bastante complejos; en la fig 11 se muestran las características de respuesta que más nos interesan del muro siendo estas: la capacidad de energía, capacidad de disipación de energía, el factor de ductilidad y el deterioro del muro, el cual se define como la pérdida de rigidez y resistencia debida a la alternación de carga, fig 12.

Para cargas alternadas el deterioro del muro es pequeño cuando se tienen deformaciones angulares menores a la del agrietamiento y después de éste el deterioro depende de la resistencia del marco confinante. El material hue



co es más sensible al deterioro que una maciza, y es diferente la intensidad del deterioro si la falla es por flexión (dúctil) a que si es por cortante o por tensión diagonal (frágil) siendo mayor en los últimos casos. La carga vertical reduce apreciablemente el deterioro. El deterioro mayor se tiene al pasar al segundo ciclo de carga después del cual permanece casi inalterado. (17)

En la ref 3 se estudió el comportamiento de muros bajo cargas cíclicas dinámicas observándose que el mismo comportamiento que un muro tiene para cargas alternadas se presenta para cargas dinámicas con excepción de la prueba en voladizo sin carga vertical (la de más flexibilidad), en la cual la prueba dinámica muestra gran deterioro del muro, pero este caso tiene poca importancia desde el punto de vista práctico para una mampostería.

Se realizó recientemente un estudio para tratar de obtener procedimientos económicos para mejorar el comportamiento sísmico de la mampostería de piezas huecas con refuerzo interior (ref 5).

Se estudiaron diversas distribuciones de refuerzo (fig 13) que permitiesen mantener la capacidad de carga del muro después del agrietamiento sin que se viese disminuida por repeticiones de cargas alternadas.

Se encontró que la adición de barras de refuerzo de pequeño diámetro (4mm) y de alta resistencia ( $6\ 000\ \text{kg/cm}^2$ ) en las juntas horizontales, aumenta ligeramente la resistencia, restringe la propagación del agrietamiento del muro y reduce el deterioro ante la repetición de cargas. Este refuerzo puede colocarse también en muros de piezas macizas con castillos, produciendo una distribución más uniforme de los esfuerzos cortantes en toda la longitud del muro y evitando las altas concentraciones de esfuerzos que se producen en los castillos cuando el muro se agrieta diagonalmente. Cuando no se coloca este



refuerzo en las juntas, resulta muy conveniente que los castillos cuenten con refuerzo especial en sus extremos para evitar su falla por cortante después de que el muro se agrieta diagonalmente.

#### 4. REGLAMENTACION SOBRE ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA

Desde tiempo Inmemorial se ha tratado de implantar reglamentos de diseño que aseguren buen comportamiento estructural. Del primer reglamento que se tiene evidencia es el que se contempla dentro del Código de Hamurabi, decretado por el Rey de Babilonia, Hamurabi, en el siglo 20 A.C.. En ese código se contemplan diversos tipos de leyes: civiles, penales, técnicas, etc. Dentro de lo relacionado con el aspecto construcción, el código mencionado establece que ..... si por causa adjudicable al constructor se daña la propiedad, aquel tendrá que pagar la reparación del inmueble; si un esclavo muere por la falla de la construcción, el constructor deberá sustituir el esclavo al dueño de la vivienda; si muere un hijo del propietario por la misma razón se tendrá que matar a un hijo del constructor.....; si muere el propietario, se debe dar muerte al constructor-----, con normas como las anteriores seguramente en nuestro tiempo serían muy pocos los que se dedicarían al diseño y construcción de estructuras.

Afortunadamente los avances de la tecnología han hecho que ahora los reglamentos equilibren los principales aspectos de una construcción: seguridad y economía .

El Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, ref 6, incluye un capítulo sobre diseño y construcción de estructuras de mampostería, el cual ha sido modificado sustancialmente con respecto a la versión anterior y trata en detalle los requisitos para diseño sísmico.

Uno de los problemas que se enfrentan al elaborar recomendaciones de diseño



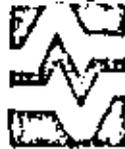
para mampostería es la gran variedad de materiales de distintas formas y propiedades que se tiene que cubrir. Si se establecen requisitos generales, hay que fijar criterios comunes para determinar los esfuerzos básicos resistentes de la mampostería (principalmente resistencia en compresión y en cortantes). Con este fin en el reglamento se establecen procedimientos de ensaye relativamente simples para determinar dichas propiedades cuando no se tenga información previa acerca de los materiales en cuestión y se proporcionan, además, valores específicos para los materiales de empleo más común para los cuales se cuenta con un número suficiente de determinaciones; los esfuerzos propuestos representan valores característicos, o mínimos probables, del esfuerzo de falla, determinados con el criterio de que la probabilidad de que no sean alcanzados por los materiales empleados en la estructura sea muy pequeña. Dichos esfuerzos corresponden a la resistencia de la mampostería sin refuerzo. Se considera que la presencia de castillos y dadas incrementa solo ligeramente la resistencia a compresión y a cortantes. El refuerzo interior sí proporciona un aumento apreciable de la resistencia con respecto a la mampostería no reforzada; dicho incremento solo puede determinarse en forma confiable mediante ensayes a escala natural de muros con la misma disposición de refuerzo que se va a emplear en la construcción. En forma conservadora el reglamento permite que los esfuerzos resistentes para la mampostería no reforzada se incrementen en 50% cuando se emplee las cuantías y distribuciones de refuerzo interior especificadas por el reglamento que se describirán más adelante.

Las normas para mampostería del nuevo reglamento especifican dos modalidades para el refuerzo de la mampostería; la que se denomina mampostería confinada es la usual con castillos y dadas para los cuales se fijan separaciones y re-



quisitos de refuerzo similares a los del reglamento anterior. En el otro procedimiento, denominado mampostería con refuerzo interior, se coloca refuerzo vertical en el interior de los huecos de las piezas y refuerzo horizontal en piezas que permitan colocar varillas en las juntas y proporcionarles el recubrimiento necesario para que puedan transmitirse los esfuerzos de adherencia. Las normas admiten también construcciones de mampostería sin refuerzo; sin embargo, exigen que se diseñen con factores de seguridad muy altos, lo cual hace que solo para construcciones de un nivel con alta densidad de muros y techos ligeros, resulte económicamente factible construir muros sin refuerzo.

El reglamento incluye dos procedimientos de diseño con distinto nivel de refinamiento. El método simplificado es aplicable a la mayoría de construcciones para vivienda que cumplen con requisitos no muy estrictos en cuanto a densidad de muros, altura máxima de muros y ausencia de grandes excentricidades de las cargas. El método detallado de diseño es aplicable cuando no se cumplen las condiciones impuestas para el empleo del método simplificado o cuando se quiera obtener un diseño más refinado. Ambos procedimientos están planteados en un formato de diseño por resistencia que es el adoptado en general por el reglamento (hay que revisar que el efecto de las cargas de trabajo multiplicado por un factor de carga,  $F_C$ , no exceda de la resistencia calculada multiplicada por un factor de reducción de resistencia,  $F_R$ ). La conversión a un formato de esfuerzos admisibles es casi inmediata si se agrupan los factores parciales de seguridad en uno solo que afecta al esfuerzo resistente.



La carga vertical resistente se calcula con  $P_R = F_R F_C f_m^* A_T$ , en que  $A_T$  es el área transversal bruta del muro,  $f_m^*$  el esfuerzo resistente en compresión y  $F_C$  un factor correctivo por la esbeltez del muro y por la excentricidad de la carga para el cual se dan valores fijos en el método simplificado y un procedimiento para su determinación en el método general en función de la esbeltez y excentricidad calculadas. El factor de reducción  $F_R$  vale 0.6 para muros reforzados y 0.3 para no reforzados.

El cálculo de la resistencia a cargas laterales está ligada a los métodos de diseño sísmico especificados por el reglamento. Para la mayoría de las construcciones de mampostería es aplicable un método simplificado de diseño sísmico que permite encontrar en forma muy directa las fuerzas laterales para las que hay que diseñar los muros. Se especifican en este método simplificado fuerzas actuantes mayores para muros de piezas huecas que para muros de piezas macizas debido a la diferente ductilidad y deterioro que se tiene en los dos casos. Los requisitos que, según el reglamento, debe cumplir la mampostería confinada en lo que respecta a ubicación de los castillos y datos y a la cantidad de refuerzo longitudinal y transversal en ellos, se presentan en el manual sobre Diseño de Estructuras de Mampostería. Los requisitos para la mampostería con refuerzo interior, fijan la cantidad total de refuerzo en 0.002 veces el área del muro y su separación máxima en 90 cm.

Para la determinación de fuerza cortante que resiste el muro se especifica en el método simplificado

$$V_R = 0.7 F_R v^* A_T$$

en que  $v^*$  es el esfuerzo resistente en cortante y  $F_R$  el factor de reducción que debe tomarse como 0.6 para muros confinados o con refuerzo interior y



y D.3 para muros no reforzados o cuyo refuerzo no cumple con los requisitos mínimos especificados. En el método detallado se especifica una expresión más refinada que toma en cuenta el efecto de la carga axial, en la resistencia al cortante. (2)

Además de la resistencia a fuerza cortante es necesario revisar la resistencia a momento flexionante debido a las cargas laterales, para lo cual puede llegar a necesitarse refuerzo especial en los extremos del muro; en este caso la resistencia se puede calcular con los procedimientos que se emplean para concreto reforzado.

Todo lo anterior se puede ver con más detalle en el manual sobre diseño de estructuras de mampostería. <sup>(6)</sup>

## 5. OTROS TOPICOS SOBRE MAMPOSTERIA

### 5.1 Recomendaciones generales sobre la estructuración de construcciones de mampostería

Las recomendaciones siguientes se refieren a la estructuración de las construcciones, a los materiales y el refuerzo, a los detalles y procedimientos constructivos.

Debe proporcionarse un sistema resistente en dos direcciones ortogonales, este requisito obvio no siempre se cumple; especialmente en casas habitación es frecuente que los elementos resistentes estén alineados en una dirección y que en la normal a ella exista un número muy reducido de muros con grandes aberturas para puertas y ventanas. En cada dirección deberá proveerse una densidad adecuada de elementos para resistir las fuerzas sísmicas.

La distribución de elementos resistentes debe ser aproximadamente simétrica

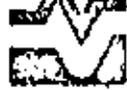


para evitar problemas de torsiones en planta que aumenten las fuerzas laterales en los muros; esto debe cuidarse especialmente en las construcciones de varios niveles.

Los sistemas de techo y entrepiso deben ser capaces de transmitir las fuerzas laterales a los elementos que tengan resistencia en la dirección de la acción sísmica. Esta condición no se cumple en techos de vigas o armaduras no contraventadas en su plano, las cuales empujan directamente sobre los muros transversales y provocan fuerzas importantes perpendiculares a los planos de dichos muros, causando frecuentemente su falla por volteamiento. El contraventeo del techo, la colocación de una dala de remate perimetral, la liga entre muros transversales y el anclaje de los muros en su cimentación son factores que eliminan este problema.

La falla por efecto del sismo actuando sobre la masa misma del muro en dirección normal en su plano ocurre con frecuencia en bardas y muros pesados no restringidos en su extremo superior. Es importantes por lo tanto proporcionar un anclaje apropiado a la cimentación y elementos verticales resistentes. En muros apoyados en sus cuatro extremos, la falla por empuje normal al plano es poco frecuente, pero puede presentarse si se emplean morteros muy pobres (por ejemplo, los morteros a base de lodo para pegar adobes) o si se llenan solo parcialmente las juntas (como es usual en algunos lugares para bloques de concreto).

La presencia de aberturas en los muros provoca concentraciones de esfuerzos que favorecen la formación de las grietas diagonales. Es conveniente que exista un refuerzo continuo en la periferia de los huecos.



Debe evitarse el empleo de piezas con altos porcentajes de huecos y paredes delgadas porque esto propicia fallas frágiles y deterioros graves y muy rápidos.

## 5.2 Nuevas formas constructivas para la mampostería

Se han desarrollado recientemente, o están en la etapa de desarrollo, nuevas técnicas para la construcción y refuerzo de los muros que presentan algunas ventajas sobre las tradicionales. En algunos casos se trata de sistemas radicalmente diferentes a los usuales, en otros, de pequeñas modificaciones que pretenden mejorar el comportamiento estructural de los muros. Algunas de las alternativas más interesantes se describen a continuación.

Refuerzos especiales en la mampostería convencional. Con el fin de mejorar la ductilidad de los muros y reducir el deterioro de su rigidez y resistencia ante el efecto de cargas alternadas se están estudiando detalles de refuerzo aplicables ya sea a muros confinados con castillos o a muros con refuerzo interior o a ambos.

La adición de barras de refuerzo de pequeño diámetro ( $\phi = 4\text{mm}$ ) y de alta resistencia en las juntas horizontales aumenta ligeramente la resistencia, restringe la propagación del agrietamiento del muro y reduce el deterioro ante la repetición de cargas. Este refuerzo puede colocarse también en muros de piezas macizas con castillos, produciendo una distribución más uniforme de los esfuerzos cortantes en toda la longitud del muro y evitando las altas concentraciones de esfuerzos que se producen en los extremos de los castillos cuando el muro se agrieta diagonalmente. Cuando no se coloque este refuerzo en las juntas, resulta muy conveniente que los castillos tengan refuerzo especial en sus extremos para evitar su falla por cortantes después de que el muro se

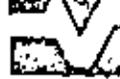


agrieta diagonalmente. La fig 13 muestra una forma en que puede proporcionarse este refuerzo. (25)

En muros con refuerzo interior también resulta muy conveniente confinar el refuerzo vertical en los extremos de los muros, ligando por medio de estribos, placas o mallas, como se muestra también en la fig 13.

Mampostería con junta seca y con refuerzo en las caras exteriores. La mampostería con junta seca consiste en colocar las piezas sin mortero en las juntas, formando el muro por la simple sobreposición de las piezas. La liga estructural del muro puede lograrse mediante el empleo de piezas machihembradas en las que se produzca un anclaje mecánico de las piezas, o mediante un aplanado en las dos caras del muro que proporcione continuidad al conjunto. La principal ventaja que se aduce para estos procedimientos es la rapidez de la construcción.

En lo que respecta al comportamiento sísmico para la mampostería de piezas machihembradas no se cuenta con información experimental. Para asegurar que se desarrolle la trabazón mecánica parece necesario que los muros estén confinados por dadas y castillos, lo cual elimina en parte las ventajas de la rapidez de construcción. En este procedimiento se requiere que las piezas tengan dimensiones muy uniformes para poder construir el muro a plomo y a nivel sin la ayuda de las juntas de mortero que absorben las diferencias geométricas. Se requiere además que las piezas tengan buena estabilidad volumétrica. Se han empleado para este procedimiento piezas de suelo-cemento, de concreto ligero y de barro macizas o huecas. En la fig 14 se muestran algunas de las formas propuestas. Las piezas huecas machihembradas permiten la colocación de refuerzo en los huecos verticales, lo cual aunado a la trabazón mecánica de las piezas posiblemente dé lugar a un sistema constructivo conve-



niente en zonas sísmicas. Se requiere, sin embargo, estudios adicionales para encontrar las formas, materiales y procedimientos constructivos convenientes para las piezas y para comprobar experimentalmente el comportamiento sísmico. Desde el punto de vista del comportamiento sísmico parece conveniente, y amerita estudio, el empleo de piezas machihembradas con junta de mortero, con lo cual al anclaje mecánico de las piezas se suma a la adherencia del mortero para mejorar la resistencia al cortante.

Recientemente se ha introducido comercialmente un mortero a base de cemento, aditivos que proporcionan alta adhesividad y fibra de vidrio, el cual colocado como aplanado en muros con junta seca, les proporciona una alta resistencia en tensión. Se han realizado diversos ensayos (ref 7) para estudiar el comportamiento estructural de este material, aplicado principalmente a muros de bloque de concreto. Se ha observado que, con respecto a la de un muro del mismo material junteado con mortero, la resistencia a carga axial de los muros así contruidos es ligeramente menor, la resistencia a cargas normales al plano del muro es varias veces superior, la resistencia a fuerza cortante es ligeramente mayor y la ductilidad es mayor para las mismas condiciones de confinamiento. Si se coloca algún refuerzo interior en los huecos extremos para proporcionar liga entre los muros y para mejorar la ductilidad, se considera que este procedimiento da lugar a una seguridad aceptable contra sismo en construcciones de uno a dos niveles. El costo del producto, patentado, para el aplanado es relativamente alto; sin embargo, se requieren espesores muy pequeños para los aplanados (3mm). Se afirma que el costo total es competitivo con el de un muro convencional con aplanado de yeso en ambas caras.

Parece prometedor el estudio del empleo de otros materiales para proporcionar al muro continuidad y resistencia en tensión por medio de un aplanado, aplicado ya sea a las piezas colocadas con mortero o con junta seca. El uso de fibras minerales o vegetales (henequén, bambú, etc) más económicas que las de



vidrio y la sustitución del cemento por el azufre son alternativas que se han sugerido pero que no han sido suficientemente estudiadas.

Un procedimiento de este tipo que ha sido ampliamente usado y que resulta muy eficiente es el de reforzar los muros con una malla de acero (electrosoldada o tela de gallinero) anclada perfectamente al muro y recubierta por un aplanado de mortero de cemento. Este procedimiento se ha empleado esencialmente para refuerzo de muros agrietados.

Mampostería con morteros de alta adherencia. Cuando se emplean piezas de buena calidad (tabiques extruidos y bloque de concreto tipo pesado) la resistencia al cortante del muro está regida por la adherencia entre el mortero y las piezas en las juntas; si se mejora dicha adherencia se puede alcanzar la máxima resistencia del muro que está regida por la falla en tensión de las piezas.

Se han estudiado diversos aditivos para el mortero a base principalmente de resinas epóxicas y se han obtenido incrementos muy sustanciales en la adherencia. En algunos países estos morteros de alta adherencia se producen comercialmente, pero su empleo aumenta radicalmente el costo de los muros.

Mampostería postensada. La capacidad de carga de muros de mampostería está limitada por su baja resistencia a esfuerzos de tensión producidos por flexión o fuerzas cortantes. La resistencia a estos efectos puede mejorarse sustancialmente si se introducen en los muros esfuerzos de compresión mediante técnicas de postensado. Aunque el postensado reduce la capacidad útil de los muros a carga axial, esta rara vez es crítica en zonas sísmicas y normalmente son mucho más importante las ventajas que el presfuerzo proporciona,



que son las siguientes: se evita el agrietamiento por flexión en muros, se incrementa la resistencia a fuerza cortante porque se reducen los esfuerzos de tensión diagonal y se logra una distribución de carga más uniforme en la cimentación. El postensado ha sido poco usado hasta la fecha principalmente por el desconocimiento de las pérdidas de presfuerzo que se pueden tener y por las dificultades del procedimiento.

Algunos ensayos realizados en el Instituto de Ingenieria, ref 8, han demostrado que las pérdidas de presfuerzo son del mismo orden de las que se obtienen en estructuras de concreto (entre 10 y 20%) y son menores en piezas de barro que en bloques de concreto, que deben evitarse los sistemas de anclaje a base de cuñas y que resulta conveniente el empleo de un sistema de postensado como el mostrado en la fig 15 en el que los cables pueden tensarse en etapas de acuerdo con el proceso constructivo, reduciendo así, o eliminando, las pérdidas de presfuerzo.

### 5.3 Reparación y refuerzo de la mampostería

Cuando una construcción ha sufrido daño por efecto de un sismo no es suficiente normalmente con repararla (reintegrar su resistencia original) sino que es necesario reforzarla, o sea incrementar su resistencia con respecto a la que tenía antes de la ocurrencia del daño, para que este no ocurra nuevamente si se presenta la misma sollicitación.

Los procedimientos de refuerzo implican casi siempre una restructuración de la construcción mediante la adición de nuevos elementos resistentes, o la rigidización, el confinamiento, el anclaje y el refuerzo de los elementos existentes. En general hay que hacer que la estructura cumpla con los requisitos descritos en los capítulos anteriores. El refuerzo de construcciones de mampostería implica operaciones bastante laboriosas como el colado de dalas y cas



tillos y su anclaje con la cimentación y con los sistemas de techo y de piso.

Aquí se tratarán únicamente los procedimientos para reparar o reforzar los muros de mampostería.

La forma más común de reparar un muro grietado diagonalmente es abriendo una franja en correspondencia con la grieta y rellenándola con mortero. Si se emplea un mortero de cemento, los ensayos demuestran que este procedimiento no permite recuperar la resistencia y rigidez originales, fig 16a. Si se emplea un mortero con un aditivo que produzca alta adherencia y estabilización de volumen, se logra restaurar prácticamente la resistencia original, como se demuestra en el ensayo mostrado en fig 16b. Para la reparación de castillos y dadas dañados se deben emplear los procedimientos usuales para estructuras de concreto: inyección de grietas si estas son pequeñas o remoción del concreto en la zona dañada y colado con un aditivo estabilizador de volumen.

Si se quiere incrementar la resistencia del muro, la forma más conveniente es la colocación de una malla de refuerzo en ambas caras cubierta con un aplanado y reparar la grieta con mortero común o con aditivo. Una estimación del costo de este tipo de reparación indica que este es del orden de una tercera parte del costo que implicaría reconstruir el muro original. El mortero de fibra de vidrio descrito anteriormente también puede emplearse para reparar y reforzar muros agrietados; su eficiencia se aprecia en la fig 16c.

## 6. RESUMEN

Como resumen en lo expuesto con anterioridad se puede decir que el estar



do actual de conocimientos acerca del diseño de mampostería ante diversas sollicitaciones de carga ha avanzado notablemente.

Para el caso de flexocompresión se pueden elaborar diagramas de interacción que se ha visto experimentalmente dan valores acertados del comportamiento de la mampostería.

Las estructuras rígidas, como las mamposterías, son más sensibles a los efectos producidos por un sismo; sin embargo, el criterio elástico que se ha estado empleando y que consiste en diseñar la mampostería para que resista un sismo intenso sin que esta sufra daño es irracional. La tendencia actual del diseño sísmico de mamposterías debe ser el diseñar la estructura para soportar sin sufrir daño en sismo moderado y resistir sin llegar al colapso para un movimiento intenso aprovechando así el comportamiento inelástico de la mampostería reforzada.

Para este criterio de diseño las estructuras dúctiles son las más adecuadas; se puede diseñar una mampostería suficientemente dúctil después de agrietamiento suponiendo al muro como un voladizo y diseñado como viga mediante una teoría de resistencia última similar a la del concreto reforzado, asegurando al mismo tiempo que no se exceda de la resistencia al corte o tensión diagonal de la mampostería. Es implícito que se tendría que limitar la cantidad de acero de refuerzo para evitar una falla frágil al igual que en flexión en concreto.

Una vez reforzado convenientemente por flexión, un muro debe ser capaz de resistir la fuerza cortante con muy poco daño siendo ahora representativo el estado de compresión diagonal. Por este estado de carga se pretende que de la prueba en muretes se obtenga el índice de resistencia de la mampostería que forma al muro hasta el agrietamiento; asimismo se puede valorar el

efecto de la carga vertical del refuerzo interior, y en forma indirecta la contribución del aplanado en el muro.

Es conveniente que los reglamentos de construcción contemplen la idea de que la mampostería convenientemente reforzada tiene comportamiento inelástico, con la finalidad de aumentar el factor de reducción por ductilidad de este tipo de estructuras; esto porque el actual Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal es más estricto que el anterior en cuanto a los requisitos de diseño sísmico para construcciones de mampostería. Las fuerzas sísmicas de diseño se hacen depender de la ductilidad de los sistemas estructurales y, como los distintos sistemas a base de muros de mampostería tradicionales son poco dúctiles, deben diseñarse para fuerzas mucho mayores que las que corresponden, por ejemplo, a una estructura a base de marcos de concreto. Las fuerzas de diseño que se especifican en la nueva versión son en algunos casos hasta dos veces mayores que los que se empleaban con el reglamento anterior. Por otra parte, los esfuerzos resistentes de diseño que se han deducido de la información experimental, son más bajos para algunos materiales que los que se emplean usualmente.

Lo anterior va a hacer más crítica la construcción de edificios de varios niveles a base de muros de mampostería, obligando a proyectos con una mayor densidad de muros, al empleo de materiales de resistencia mayor y más controlada y a procedimientos de refuerzo que proporcionen mayor resistencia y ductilidad. Con estas precauciones se considera que es posible seguir construyendo, en forma segura y económica, edificios de habitación a base de muros de carga de mampostería ya sea confinada o reforzada interiormente.

Un problema de la construcción en mampostería muy distinto a los tratados hasta aquí es el de la vivienda rural. La mayor parte de daños materiales y pérdi-



INSTITUTO DE  
INVESTIGACIONES  
ELÉCTRICAS

DEPARTAMENTO  
DE  
INGENIERIA CIVIL

(27)

das de vidas a raíz de temblores se debe al colapso de construcciones de vivienda de bajo costo. En estas construcciones se emplean materiales de baja resistencia o que se deterioran rápidamente con el tiempo. Se usan además -- procedimientos constructivos que no permiten una buena liga de los muros entre sí y con el techo. Afortunadamente, también a este problema se le ha encontrado solución favorable (ver ref 1).



REFERENCIAS

33

1. Hernández, O. et.al. "Refuerzo de vivienda rural en zonas sísmicas. Estudios experimentales", Instituto de Ingeniería, UNAM, en prensa (1981)
2. Priestley, M., Bridgeman, D.O. "Seismic resistance of brick masonry walls", Bulletin New Zealand Society for Earthquake Engineering, Vol 7, No 4 (dic 1974)
3. William, D., Scrivener, J., "Response of reinforced masonry shear walls to static and dynamic cyclic loading", Proc. SWCEE, Roma (jun 1973).
4. Meli, R., "Comportamiento sísmico de muros de mampostería", Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe No 352 (abril 1975)
5. Hernández, O. y Meli, R., "Modalidades de refuerzo para mejorar el comportamiento sísmico de muros de mampostería", Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe 382 (dic 1976)
6. "Diseño y construcción de estructuras de mampostería, normas técnicas complementarias del Reglamento de construcciones para el Distrito Federal". Instituto de Ingeniería UNAM, Informe 403 (jul 1977)
7. Hernández, O., "Mampostería de bloque unida con mortero a base de fibra de vidrio. Comportamiento y diseño", Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe 394 (jun 1977)
8. Hernández, O. y Aguilar, H., "Deformaciones diferidas en mamposterías postensadas. Recomendaciones preliminares de diseño", Instituto de Ingeniería, UNAM, en prensa (1981)

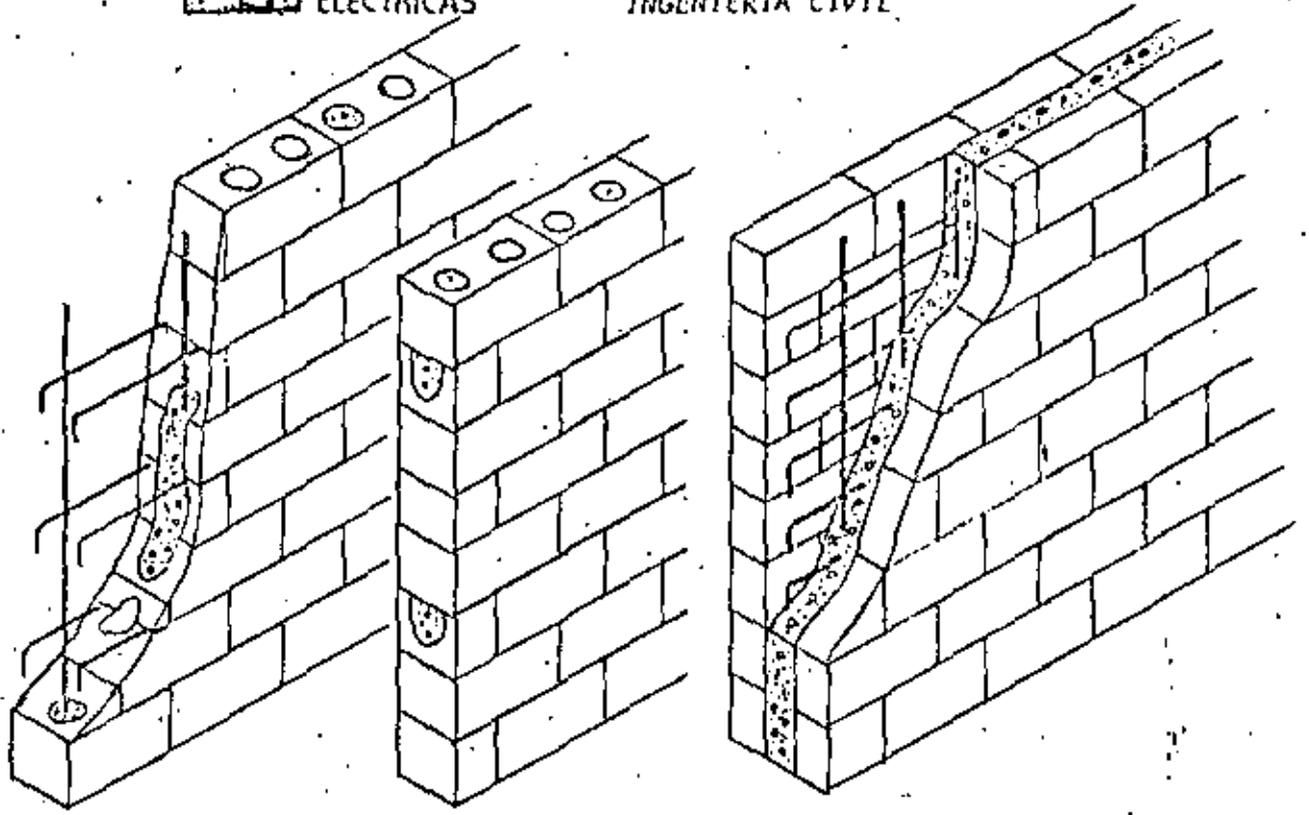
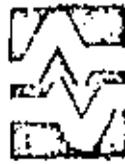


Fig1 Diferentes formas de colocar refuerzo interior



Fig 2 Ensayo de compresión en pila

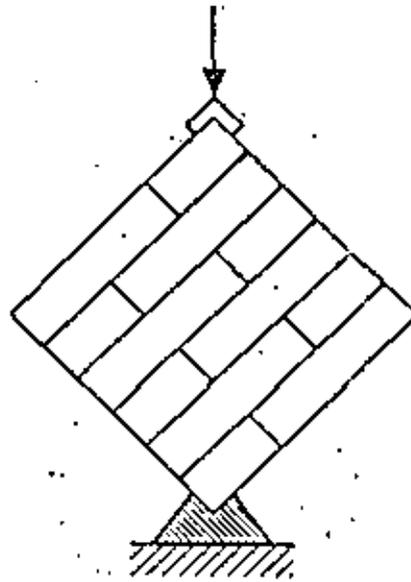


Fig 3 Ensayo de compresión diagonal

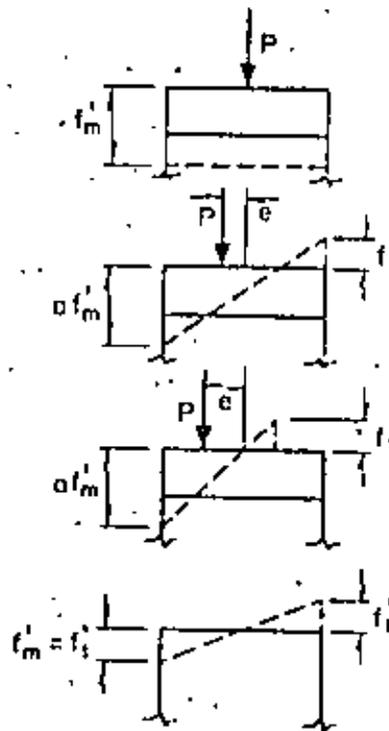


Fig 4 Distintas distribuciones de esfuerzos para carga axial y flexión

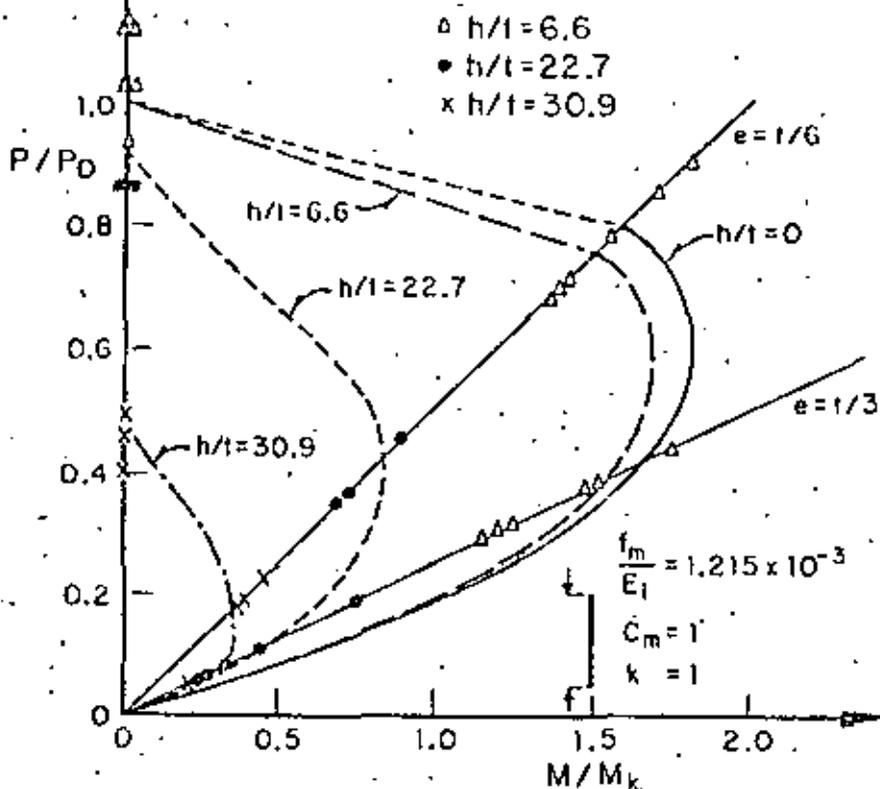
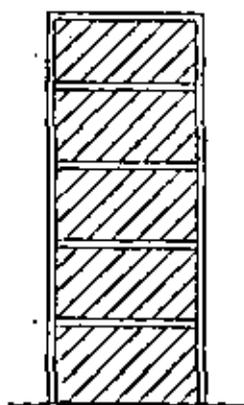
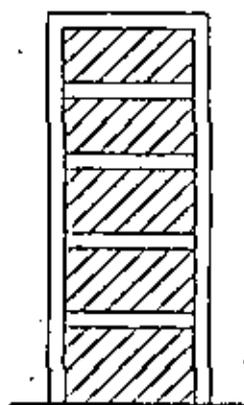


Fig 5 Diagrama de interacción en flexocompresión. Efecto de la relación de esbeltez

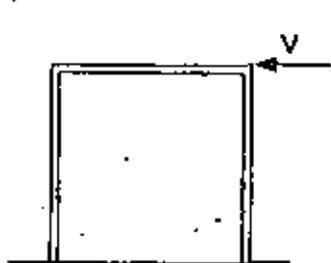


a) de carga

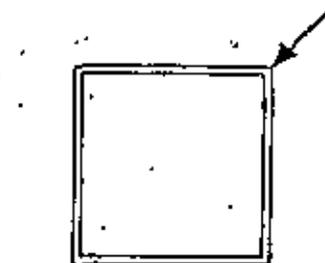


b) diafragma

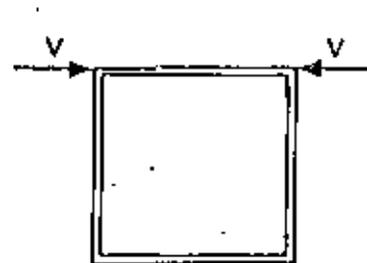
Fig 6 Estructuración a base de muros



a) en voladizo



b) compresión diagonal



c) cargas alternadas

Fig 7 Diversas formas de ensayos de muros.

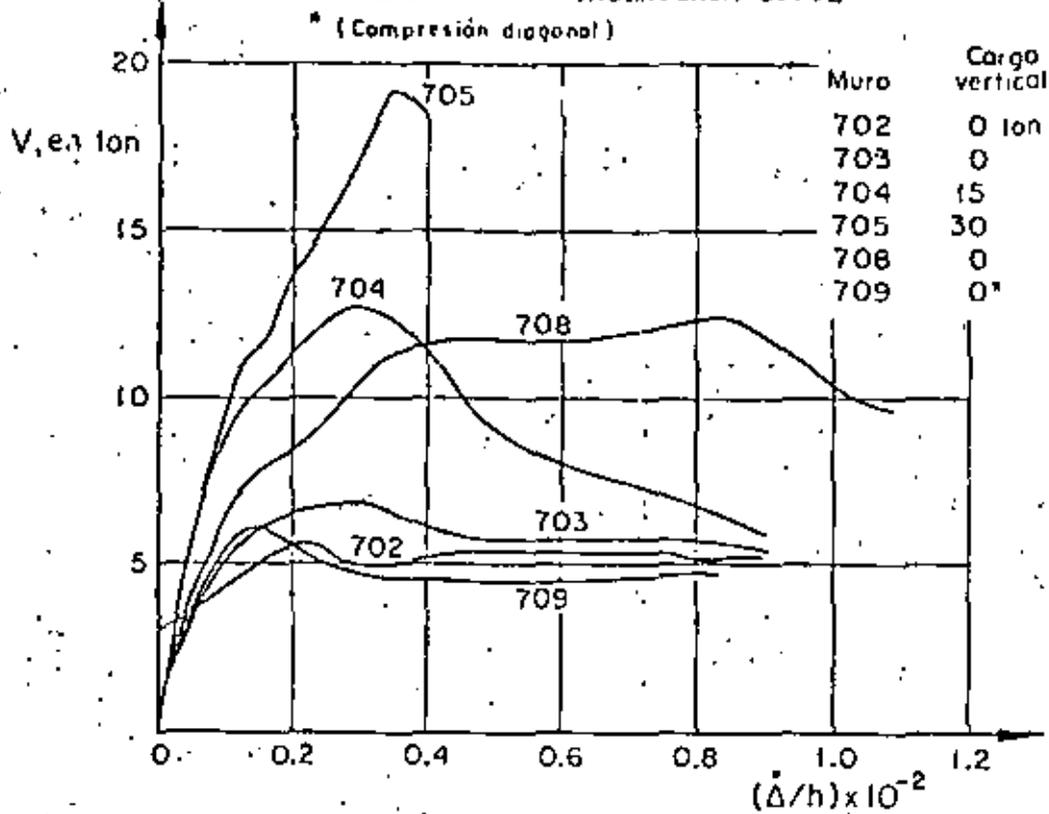
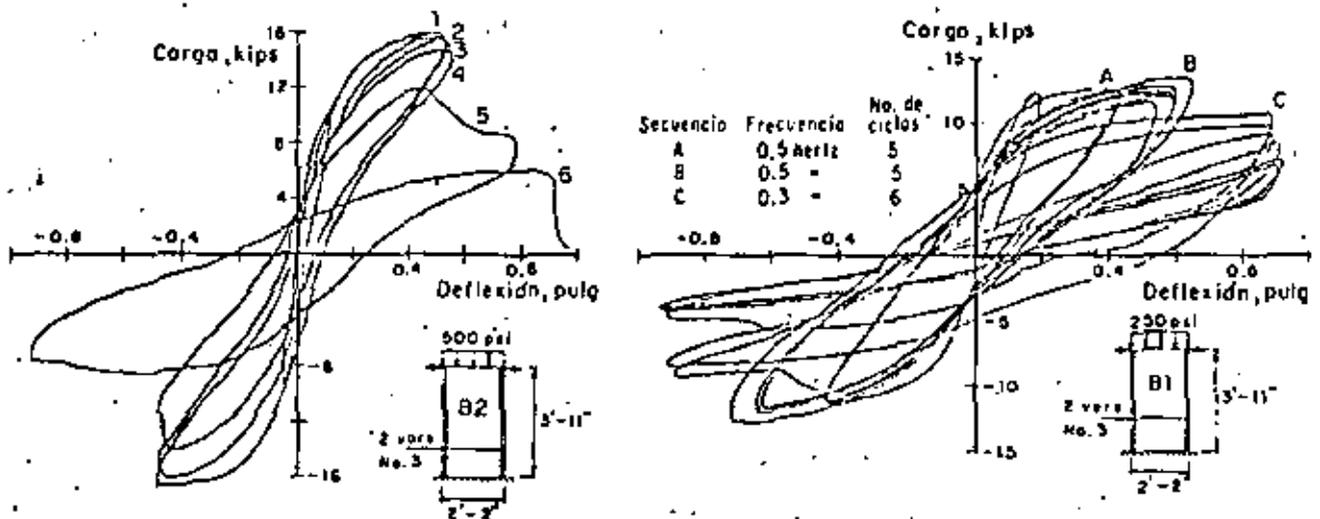


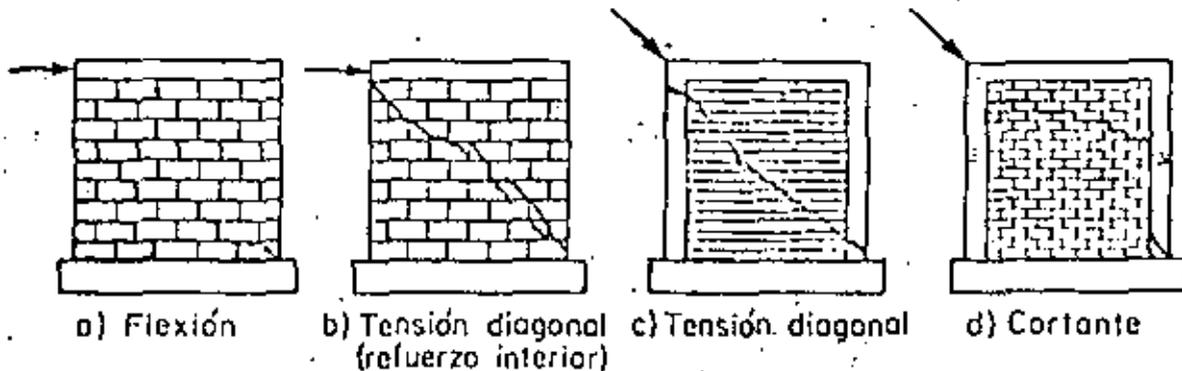
Fig 8 Ensayes a carga estática



a) Cargas alternadas.

b) Cargas dinámicas

Fig 9 Curvas carga deformación



a) Flexión

b) Tensión diagonal (refuerzo interior)

c) Tensión diagonal

d) Cortante

Fig 10 Fallas típicas de muros

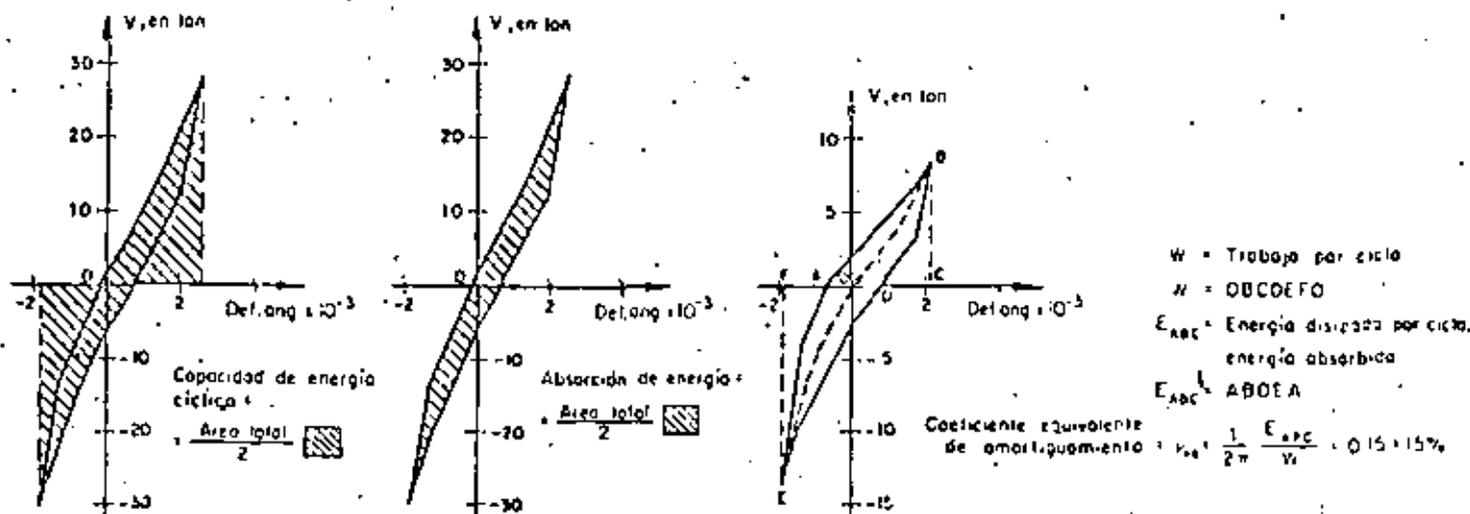


Fig. 11 Propiedades de muros de mampostería ante alternación de cargas

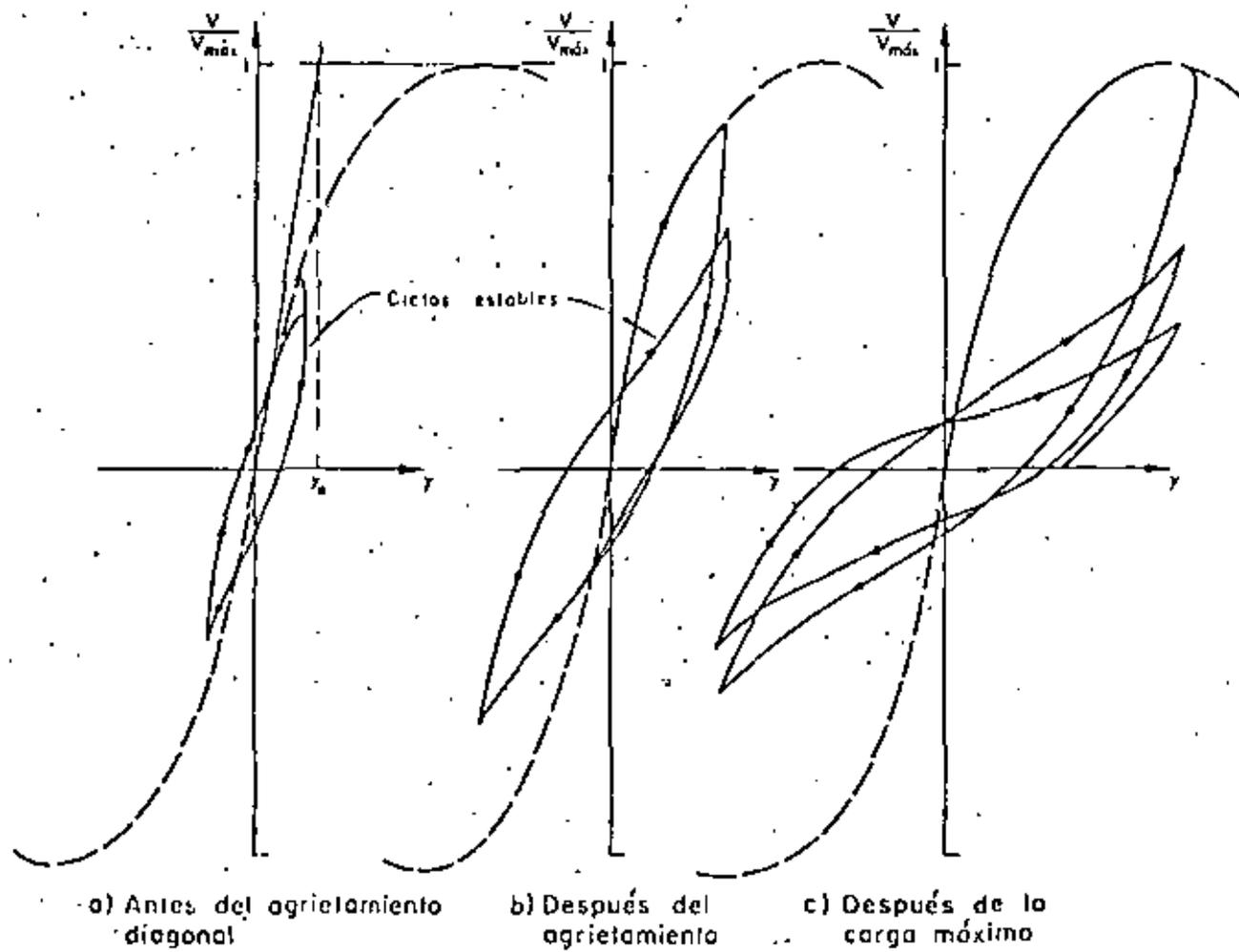
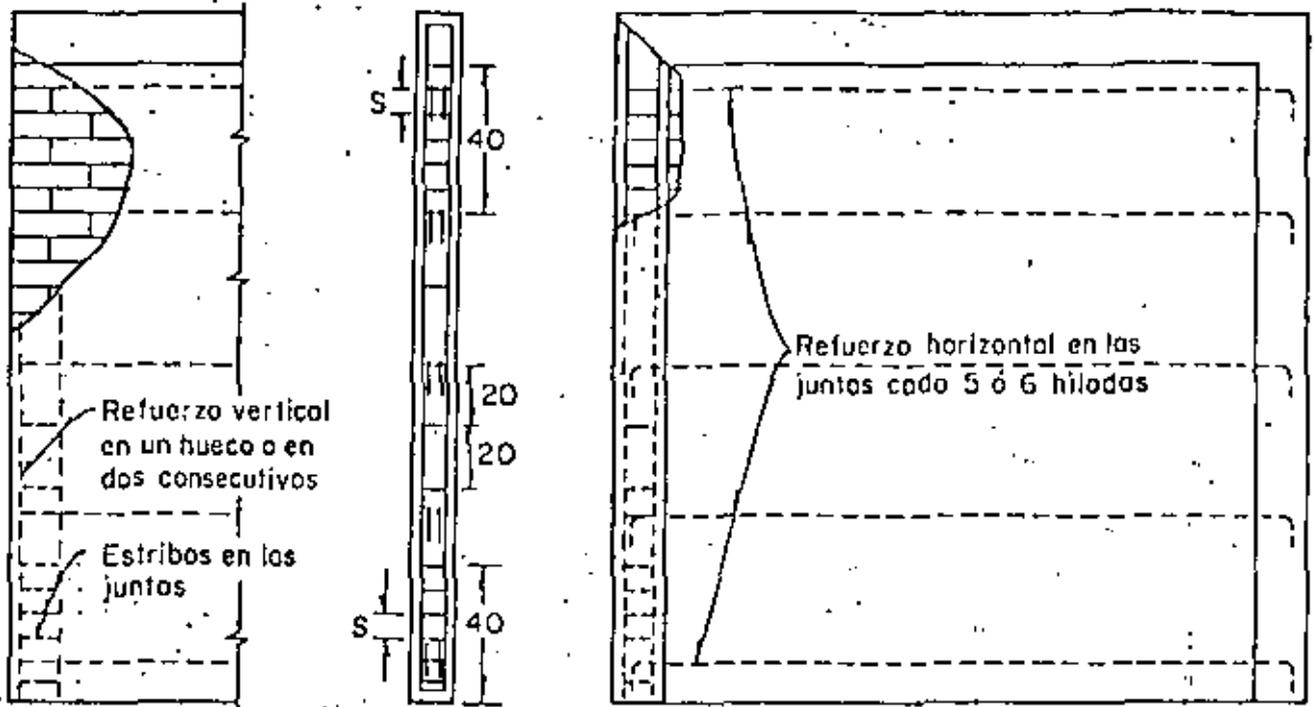


Fig 12 Deterioro del muro

Dimensiones en cm



Con refuerzo interior

Confinado con dadas y castillos

Muros de tabique extruido

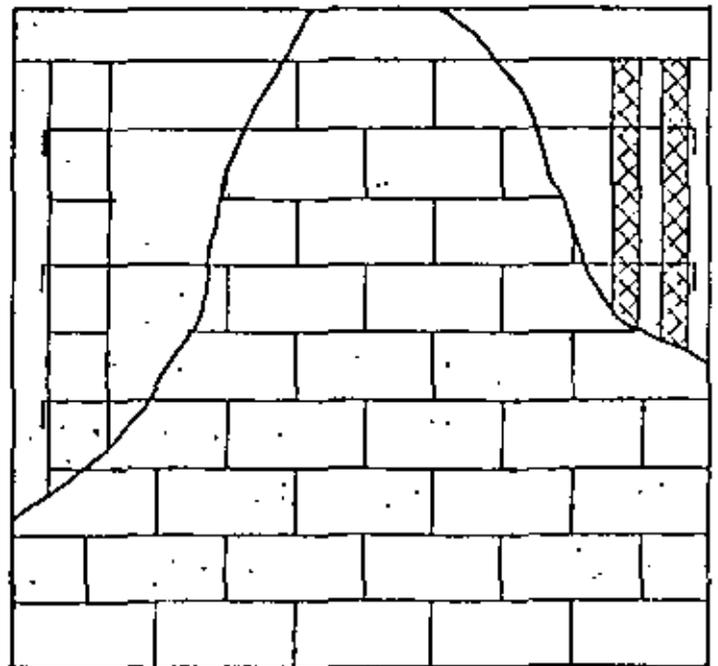
Variantes:

Con refuerzo horizontal cada 2 hiladas o sin el

Refuerso vertical en un hueco o en dos consecutivos con estribos o cada hilada

Dos huecos consecutivos confinados con malla de metal desplegado

Castillo Integral



Muros de bloques de concreto

Fig 13. Detalles generales de refuerzo

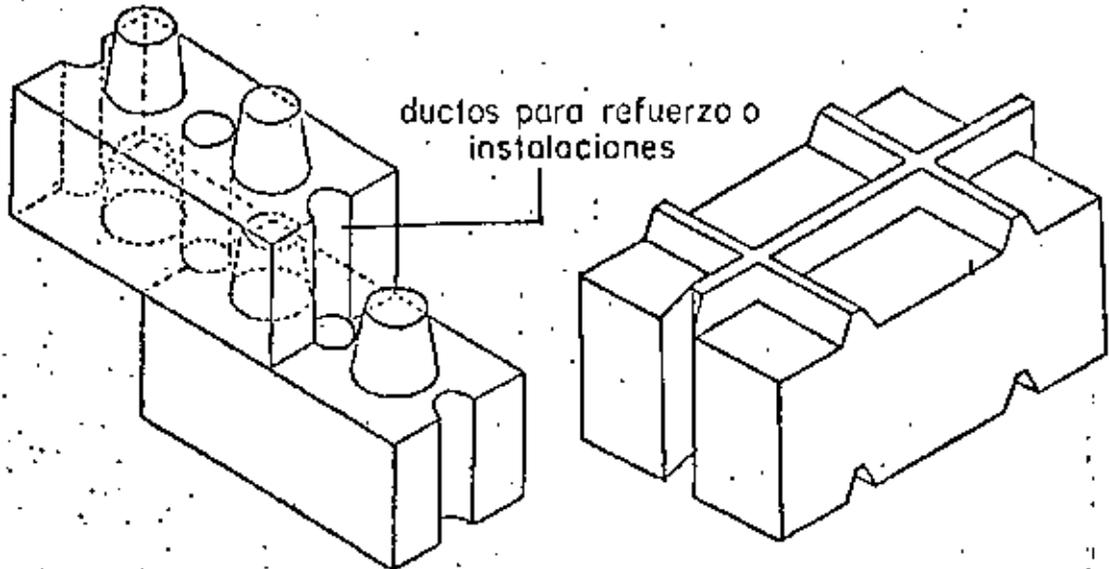


Fig 14 Piezas machiembradas

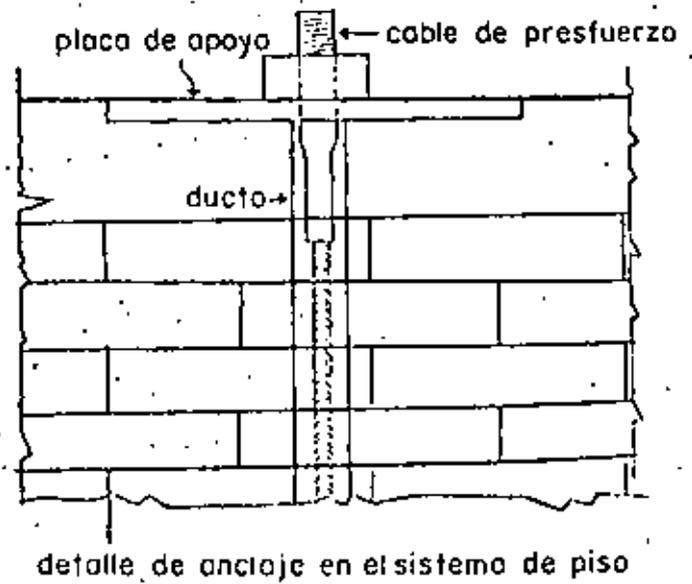
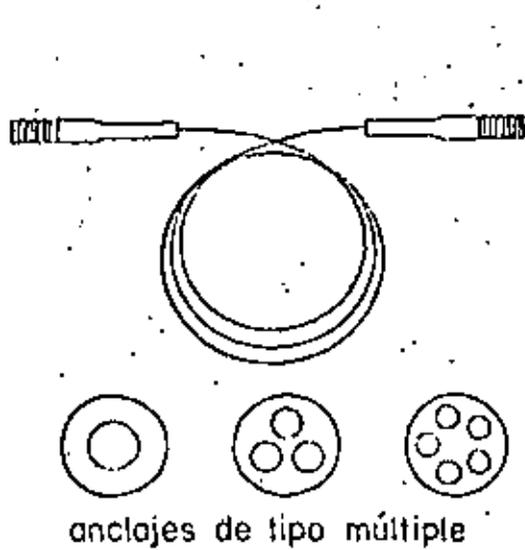


Fig.15 Aplicación del sistema de postensado RAMSA en mampostería.

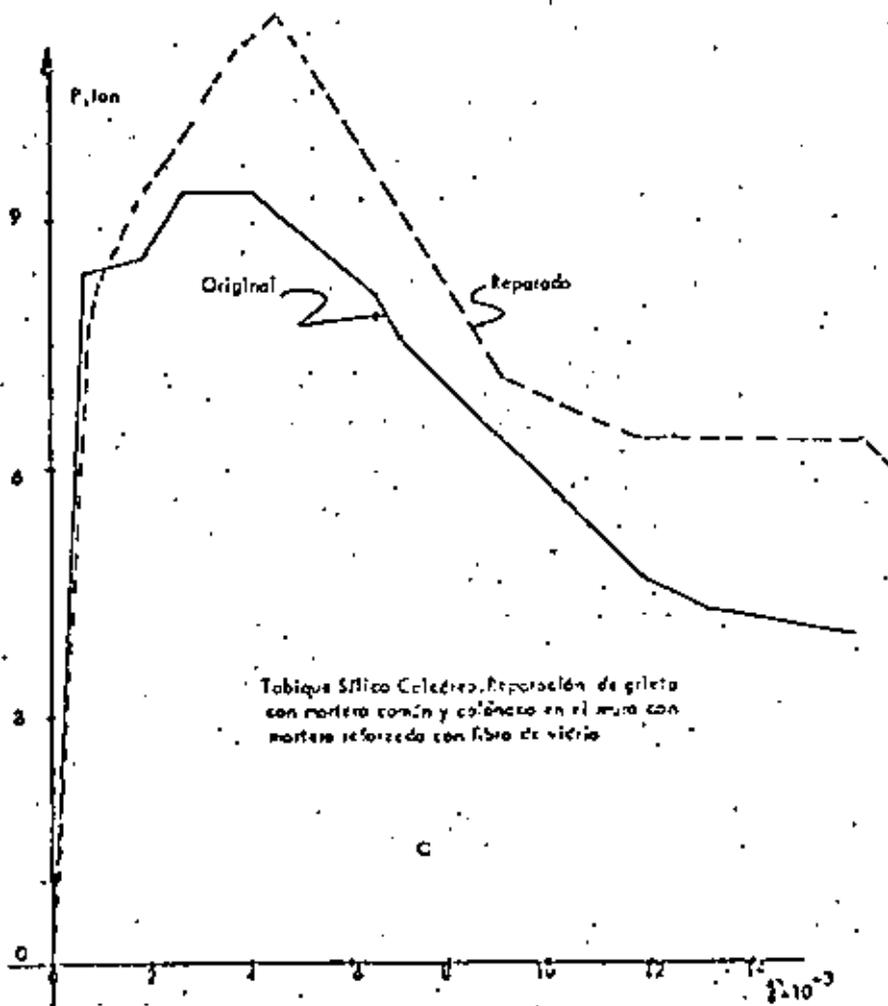
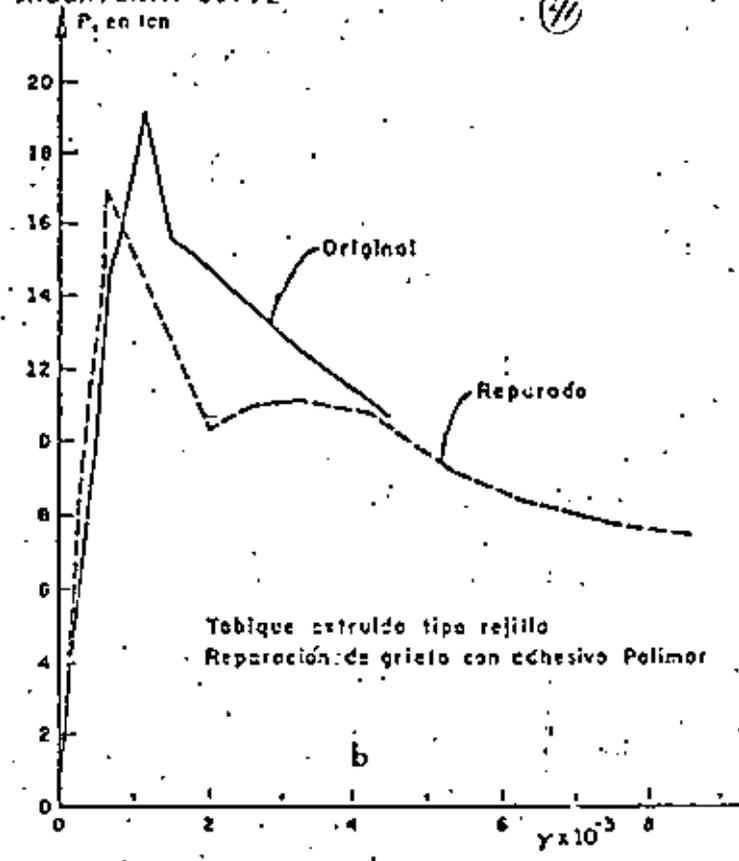
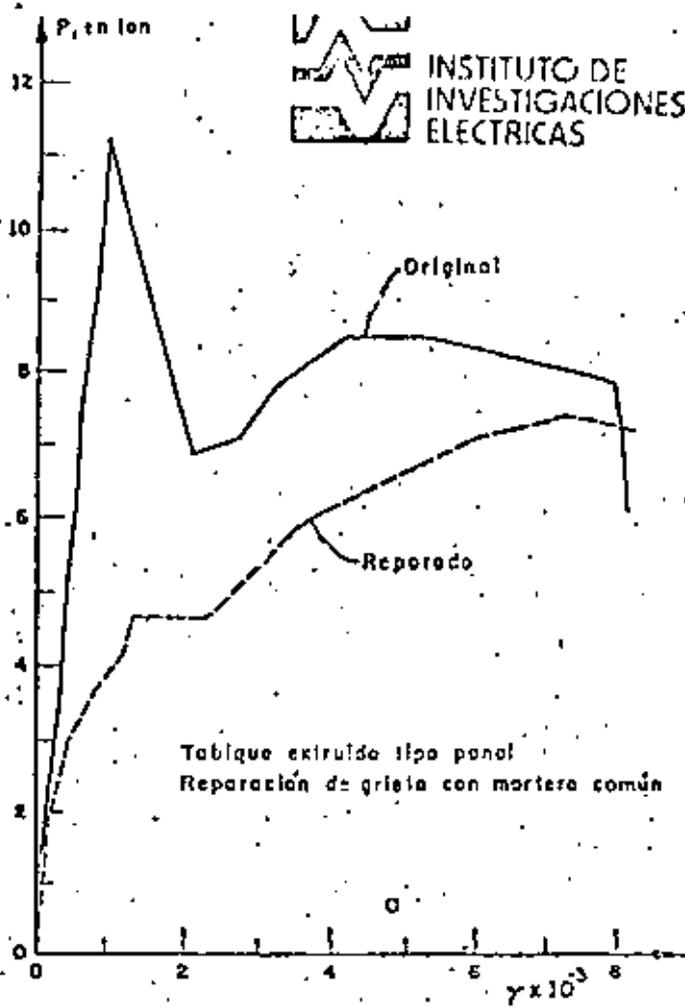


Fig 16 Eficiencia de diferentes formas de reparación de muros

No se ha incluido en ningún reglamento un procedimiento para calcular explícitamente la contribución del refuerzo a la resistencia por considerar que éste solo actúa cuando la mampostería se ha agrietado. Después del agrietamiento, el refuerzo deberá ser capaz de resistir la fuerza cortante total en el tablero; un procedimiento que se ha observado proporciona buena aproximación para calcular la capacidad del muro después de agrietado es el que a continuación se menciona.

Para calcular la resistencia del muro después de agrietado se harán las siguientes suposiciones:

- 1) El refuerzo del muro funciona una vez que éste se agrieta.
- 2) La grieta es única.
- 3) La resistencia a fuerzas cortantes va a ser proporcionada por el acero horizontal,  $V_h$ , los estribos en los castillos,  $V_{cast}$ , y la fricción desarrollada en la grieta,  $V_f$ .

Con las suposiciones anteriores, la resistencia del muro después de agrietado estará dada por la siguiente expresión

$$V_R = V_h + V_{cast} + V_f$$

sin embargo, debido a que no es posible que se llegue a desarrollar totalmente la capacidad del acero de refuerzo por el deterioro progresivo que sufre el muro ante las alternaciones de esfuerzos, y a que se introducen esfuerzos por flexión en las barras de refuerzo en adición a las de tensión, la fórmula anterior puede escribirse en la siguiente forma:

$$V_R = K (V_h + V_{cast}) + v_f A_T$$

donde

- $v_f$  es el refuerzo promedio que puede desarrollarse por fricción y
- $A_T$  el área transversal bruta del muro
- $K$  la constante toma en cuenta lo expresado en el párrafo anterior.

La contribución de la fricción en la resistencia se supondrá independiente del tipo de material, mortero y refuerzo que forman el muro.



La constante  $K$  y el esfuerzo debido a la fricción  $V_f$  se determinaron a partir de los datos experimentales, resultando

$$V_R = 0.34 (V_h + V_{\text{cast}}) + A_T \quad (1)$$

donde

$V_h = (A_{sh}/st) f_y A_T$   $A_{sh}$  es el área de acero horizontal colocado a una separación  $s$  en el espesor  $t$  del muro;  $f_y$  es el esfuerzo de fluencia y  $A_T$  el área bruta de la sección transversal del muro.

$V_{\text{cast}}$

Capacidad del castillo, interior o exterior, para resistir cortante; es igual a la suma de lo que resiste el concreto más la contribución del refuerzo transversal (estribos). La capacidad del concreto es igual a  $A_c f'_c$ , donde  $A_c$  es el área del castillo y  $f'_c$  la resistencia a compresión del concreto. La contribución de los estribos se calcula en igual forma que para vigas. Hay que tomar en consideración a todos los castillos que confinan al muro y que entran en una longitud menor que la altura del muro.

se observa que la fricción contribuye a la resistencia con un esfuerzo promedio de  $1 \text{ kg/cm}^2$ , aproximadamente. El coeficiente de variación de la relación de valores calculadas con la expresión anterior, a valores experimentales resultó del 10 por ciento.

La anterior expresión permite diseñar el refuerzo de un muro para que sea capaz de soportar la fuerza cortante de diseño.

A manera de ejemplo se calculará el refuerzo necesario, horizontal y en los castillos, para que bajo alternaciones de esfuerzos un muro sea capaz de resistir una fuerza cortante igual a la que indujo el agrietamiento; suponiendo que este esfuerzo de agrietamiento sea de  $2.3 \text{ kg/cm}^2$ , y el muro tenga un área de  $2290 \text{ cm}^2$ , la fuerza cortante actuante que lo produjo es

$$V = 2.3 \times 2290 = 5270 \text{ kg}$$



Esta fuerza es la que tiene que resistir el refuerzo del muro. Se tienen tres alternativas de refuerzo: usar solo refuerzo en los castillos, usar solo refuerzo horizontal, o emplear una combinación de ambos refuerzos. Se resolverán a continuación las tres alternativas, en ellas se considera que las dimensiones de los castillos son  $12 \times 14$  cm; se utilizará para los estribos alambraón No. 2 con  $f_y = 2500$  kg/cm<sup>2</sup> y se despreciará la contribución del concreto a esfuerzos cortantes; como refuerzo horizontal se supondrá que se emplean varillas de 5/32 pulg de diámetro y  $f_y = 6000$  kg/cm<sup>2</sup>.

a) Solo refuerzo en los castillos; de la expresión 1

$$V_R = 5270 = 0.34 (V_{\text{cast}}) + A$$

$$V_{\text{cast}} = 8760 \text{ kg}$$

Cada extremo del castillo deberá ser diseñado para resistir una fuerza cortante de

$$V'_{\text{cast}} = 8760/2 = 4380 \text{ kg}$$

la separación de los estribos es

$$S = \frac{2 \times 0.32 \times 2500 \times 12}{4382} = 4.4 \text{ cm}$$

$$S = 10 \text{ cm si } f_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$$

Estos estribos se colocarán en las partes extremas de los castillos en una longitud de 40 cm a partir del vértice interior. En los castillos que confinan al muro puede aceptarse una separación de los estribos mayor que  $d/2$  pero menor que  $d$ ; esto debido al tipo y trayectoria de las grietas que se presentan en los castillos.

b) Solo refuerzo horizontal

$$V_h = 8760 \text{ kg} = \frac{A_{sh}}{st} f_y A_T$$



$$A_{sh} = 8760 \frac{st}{f_y A_t}$$

suponiendo una separación de 30 cm (a cada 5 hiladas) y  $t = 12$  cm

$$A_s = 0.23 \text{ cm}^2;$$

$$2 \text{ varillas } 5/32 \text{ pulg} = 0.24 \text{ cm}^2$$

el muro se reforzaría con 2 varillas 5/32 cada 5 hiladas

c) Combinando refuerzo en los castillos con horizontal

Aplicando la expresión 1 resulta

$$V_h + V_{\text{cast}} = 8760 \text{ kg}$$

suponiendo que cada uno de los refuerzos deba resistir la mitad de la carga se determina, siguiendo pasos similares a los incisos a y b, los estribos No. 2 deberán ir espaciados a cada 8.5 cm y el refuerzo horizontal consistirá en 2 varillas de 5/32 pulg cada 9 hiladas (o una varilla cada 4 hiladas).

En el caso de un muro de tabique rojo de 4 m de longitud, el refuerzo necesario para sostener la fuerza cortante resistente a un esfuerzo  $v^* = 3 \text{ kg/cm}^2$  consistiría en estribos de alambroón No. 2 espaciados a cada 2.5 cm, 7 cm en caso de usar alambroón con  $f_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$ ; otra opción es reforzar el muro con estribos en los castillos a cada 7 cm y añadir 2 varillas 5/32 pulg (alta resistencia) cada 8 hiladas.

Si las piezas que forman el muro son huecas, se pide en diversos reglamentos colocar una cierta cantidad mínima de refuerzo interior. Generalmente se establece (probablemente sin una base sólida, sino más bien -- por extrapolación de resultados en muros de concreto) que la cuantía de refuerzo vertical y horizontal del muro no será menor de 0.2 por ciento, debiendo colocar una tercera parte de esta en cualquier dirección. Esta última cantidad, colocada como refuerzo horizontal representa una cuantía 25 por ciento mayor a la que necesitaría el muro analizado en el pá



rafo anterior, suponiendo que está formado de piezas huecas y reforzado solo con acero horizontal. En general, se observa que dicha cantidad mínima de refuerzo horizontal está en exceso de la necesaria para desarrollar la capacidad del muro; sería necesario que la mampostería de un muro de las mismas características anteriores tuviera un esfuerzo nominal de diseño,  $v^*$ , igual a  $3.4 \text{ kg/cm}^2$ , para que con solo el refuerzo horizontal fuera capaz de sostener la fuerza cortante resistente una vez que el muro se agrieta. Con lo discutido anteriormente se quiere hacer ver que la especificación sobre cuantía mínima de refuerzo para mampostería de piezas huecas está en exceso para la mayoría de los materiales a los que hacen mención los reglamentos mencionados; sin embargo, a falta de mayor información y estudio sobre el particular se sugiere respetar dicha disposición.

### 5.2.3 Resistencia a flexocompresión en el plano del muro

Es importante recordar que las cargas laterales producen no solo fuerzas cortantes en los muros, sino también momentos flexionantes que frecuentemente requieren de refuerzo especial por flexión en los extremos del muro.

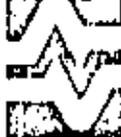
La resistencia a flexión y a flexocompresión en el plano del muro se calculará, para muros sin refuerzo, según la teoría de resistencia de materiales suponiendo una distribución lineal de los esfuerzos en la mampostería. Se considerará que la mampostería no resiste tensiones y que la falla ocurre cuando aparece en la sección crítica un esfuerzo de compresión igual a  $f_m^*$ .

La capacidad a flexión o a flexocompresión en el plano de un muro con refuerzo interior o exterior se calculará con un método de diseño basado en las hipótesis vistas para el caso de carga vertical excéntrica.

Para muros reforzados con barras colocadas simétricamente en sus extremos, las fórmulas simplificadas siguientes dan valores suficientemente aproximados y conservadores del momento resistente de diseño.

Para flexión simple, el momento resistente se calculará como

$$M_o = F_R A_s f_y d'$$



donde

$A_s$  es el área de acero colocada en los extremos del muro  
 $d'$  la distancia entre los centroides del acero colocado en ambos extremos del muro

Cuando exista carga axial sobre el muro, el momento de la sección se modificará de acuerdo con la ecuación.

$$M_R = M_0 + 0.30 P_u d \quad ; \quad \text{si } P_u \leq \frac{P_R}{3}$$

$$M_R = (1.5 M_0 + 0.15 P_R d) \left(1 - \frac{P_u}{P_R}\right) ; \quad \text{si } P_u > \frac{P_R}{3}$$

donde

$P_u$  es la carga axial de diseño total sobre el muro, que se considerará positiva si es de compresión.

$d$  el peralte efectivo del refuerzo de tensión

$P_R$  la resistencia a compresión axial

$F_R$  en este caso igual a 0.6

Estas fórmulas simplificadas se deducen al considerar que el diagrama de interacción en flexocompresión (representación gráfica de las combinaciones de carga axial y momento flexionante que ocasiona la falla del elemento) está formado por dos tramos rectos.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

IX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

REFERENCIAS

AGOSTO, 1983.

## REFERENCIAS

1. "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal"; *Diario Oficial de la Federación*, México, D F (dic 1976).
2. Rosenblueth, E y Esteva, L, "Diseño sísmico de edificios", Folleto complementario al Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, México, D F (1962)
3. Subcomité No 31 de la División de Estudios de la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles, Informe final, "Wind bracing in steel buildings", *Trans, ASCE*, Vol 105 (1940)
4. Sutherland, H y Bowman, H L, *Structural theory*, John Wiley & sons, Nueva York (1958)
5. Wilbur, J B y Norris, C H, *Elementary structural analysis*, Mc Graw-Hill Book Co, Inc, Nueva York (1948)
6. Grinter, L E y Tsao, C H, "Joint translation by cantilever moment distribution", *Procs, ASCE*, Vol 79, No 298 (sep 1953)
7. Loera, P S, "Contribución a un manual para diseño de losas de concreto reforzado", Tesis Profesional, *Facultad de Ingeniería, UNAM*, (1964)
8. Ghali, A y Neville, A M, *Structural analysis. A unified classical and matrix approach*, Intext Educational Publishers (1972). También Chapman and Hall, Londres (1978)

9. Kardestuncer, H, *Introducción al análisis estructural con matrices*, McGraw-Hill Book Co, Inc, Nueva York (1975)
10. Meek, J L, *Matrix structural analysis*, McGraw-Hill-Kogakusha, Nueva York-Tokio (1971)
11. Blume, J A, "Dynamic characteristics of multistory buildings", *Journal of the Structural Division, Procs, ASCE*, 94, ST2 (1968)
12. Comité ACI 442, "Response of buildings to lateral forces", *ACI Journal*, Vol 68 (feb 1971)
13. MacLeod, I A, *Interacción estructural en marcos y muros de cortante*, Lima y Portland Cement Association, México, DF
14. Rosenblueth, E y Holtz, I, "Elastic analysis of shear walls in tall buildings", *Procs, ACI*, Vol 56 (jun 1960)
15. Khan, F R y Sbarounis, J A, "Interaction of shear walls and frames", *Journal of the Structural Division, ASCE*, 90 ST3 (jun 1964)
16. Przemieniecki, J S, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill Book Co, Inc, Nueva York (1968)
17. Cook, R D, *Concepts and applications of finite element analysis*, Wiley, Nueva York (1974)
18. Zienkiewicz, O C, *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, 3a ed. Nueva York (1977)
19. Bathe, K J, Wilson, E L y Peterson, F E, "SAP IV: A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems", Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, EERC, 73-11 Berkeley (1973)
20. MacLeod, I A, "Lateral stiffness of shear walls with openings", publicado en *Tall Buildings*, (Eds. A. Coull y B. Stafford Smith), Pergamon Press, Ltd, Londres (1967)
21. MacLeod, I A, "Analysis of shear wall buildings by the frame method", *Procs, ICE, Parte 2, Vol 55* (sep 1973), 593-603
22. Wilson, E L y Dovey, H H, "Three dimensional analysis of building systems - TABS", Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, EERC 72-8, Berkeley (dic 1972)
23. Wilson, E, Hollings, J P y Dovey, H H, "Three dimensional analysis of building systems (extended version) - ETABS", Earthquake Research Center, Universidad de California, EERC, 75-13, Berkeley (1975)
24. Mell, R, "Comportamiento sísmico de muros de mampostería", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, 352 México, DF (abr 1975)

25. Klingner, R E y Bertero, V V, "Infilled frames in earthquake-resistant construction", Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, EERC 76-32, Berkeley (1976)
26. Bazán, E, "Muros de mampostería ante cargas laterales. Estudios analíticos", Tesis Doctoral, Facultad de Ingeniería, UNAM México, DF (1980)
27. Esteva, L, "Behavior under alternating loads of masonry diaphragms framed by reinforced concrete members", Symposium on the Effects of Repeated Loading in Materials and Structural Elements, RILEM, México, D F (sep 1966)
28. Tani, S, "Study on arrangements of aseismatic element", II Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Tokio (1960)
29. Bazán, E, "Análisis sísmico de edificios con muros rigidizantes", IACV, 41, 91, México (mar-abr 1978)
30. IBM 1130, "Structural Engineering System Solver, STRESS", Massachusetts Institute of Technology, IBM Cambridge (1967)
31. "Diseño y construcción de estructuras de mampostería. Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Instituto de Ingeniería, UNAM, 403 México, DF (jul 1977)
32. "Diseño y construcción de estructuras de concreto. Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Instituto de Ingeniería, UNAM, 401 México, DF (jul 1977)
33. "Diseño y construcción de estructuras metálicas. Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Instituto de Ingeniería, UNAM, 402 México, DF (jul 1977)
34. "Manual de diseño por sismo. Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Instituto de Ingeniería, UNAM, 406 México, DF (jul 1977)
35. Hurty, W C y Rubinstein, M F, *Dynamics of structures*, Prentice-Hall, Inc, Nueva Jersey (1964)
36. Clough, R W y Penzien, J, *Dynamics of structures*, McGraw-Hill Book, Inc, Nueva York (1975)
37. Newmark, N M y Rosenblueth, E, *Fundamentos de ingeniería sísmica*, Diana, México, D F (1976)
38. Meirovitch, L, *Elements of vibration analysis*, McGraw-Hill Book Co, Inc, Nueva York, (1975)
39. Timoshenko, S P, *Vibration problems in engineering*, D. Van Nostrand Company, Inc, 3a ed, Princeton, Nueva Jersey, (1955)
40. Newmann, F, "A broad formula for estimating earthquake forces on oscillators", II Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Tokio (1960)

41. Blume, J A, Newmark, N M y Corning, L H, *Design of multistory reinforced concrete buildings for earthquake motions*, Portland Cement Association, Chicago (1961)
42. Rascón, O, Chávez, M, Alonso, L y Palencia, V, "Registros y espectros de temblores en las ciudades de México y Acapulco, 1961-1968", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, 385 México, DF (1977)
43. Newmark, N M, "A Method of computation for structural dynamics", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol 85 (jun 1959)
44. Crandall, S H y Strong, W G, "An improvement of the Holzer table based on a suggestion of Rayleigh's", *Journal of Applied Mechanics*, Vol 24, No. 2 (jun 1957)
45. Bathe, K J y Wilson, E L, *Numerical methods in finite element analysis* Prentice-Hall, Inc., Nueva Jersey (1976)
46. Esteva, L, "Design: General", Cap 3 en *Design of earthquake resistant structures*, Ed E Rosenblueth, John Wiley & Sons, Nueva York-Toronto (1980)
47. Rosenblueth, E, "Seismic design requirements in a mexican 1976 code", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 7 (1979)
48. Villaverde, R y Newmark, N M, "Seismic response of light attachments to buildings", *Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 469, Universidad de Illinois, Urbana, Illinois* (feb 1980)
49. Der Kiureghian, A, "A response spectrum method for random vibrations", *Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, UCB/EERRC-80/15, Berkeley*, (jun 1980)
50. Wilson, E L, Der Kiureghian, A y Bayo, E P, "A replacement for the SRRS method in seismic analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 9 (1981)
51. Whitman, R V y Bielak, J, "Foundations", Cap 7 en *Design of earthquake resistant structures*, Ed E Rosenblueth, John Wiley & Sons, Nueva York-Toronto (1980)
52. Roesset, J M, "Efectos del suelo en la respuesta sísmica de estructuras", *Ingeniería Sísmica*, No. 25, (dic 1981)
53. "Tentative provisions for the development of seismic regulations for buildings", *Applied Technology Council, ATC 3-06, Estados Unidos de Norteamérica* (jun 1978)
54. Rosenblueth, E, "Characteristics of earthquakes", Cap 1 en *Design of earthquake resistant structures*, (Ed E Rosenblueth), John Wiley & Sons, Nueva York-Toronto (1980)

55. Bolt, B A, *Earthquakes a primer*, W H Freeman and Company, San Francisco (1978)
56. Esteva, L, "Seismicity", Cap 6 en *Seismic risk and engineering decisions* (Eds C Lomnitz y E Rosenblueth), Elsevier, Amsterdam (1976)
57. Bazán, E y Rosenblueth, E, "Seismic response of one story X-braced frames", Technical note, *Journal Structural Division, Procs ASCE*, 100; ST2 (feb 1974)
58. Anagnostopoulos, S A, "Non-linear dynamic response and ductility requirements of building structures subjected to earthquakes", Tesis Doctoral, *Departamento de Ingeniería Civil, Instituto Tecnológico de Massachusetts, Cambridge*(1972)
59. Aranda, R y Díaz, O, "Análisis sísmico estático de edificios irregulares en elevación", *III Congreso Venezolano de Sismología e Ingeniería Sísmica*, Caracas (mar 1981)
60. Arias, A y Husid, R, "Influencia del amortiguamiento sobre la respuesta de estructuras sometidas a temblor", *Rev IDIEM, Vol 1, No. 3*, Santiago (1962)
61. Park, R y Paulay, T., *Reinforced concrete structures*, John Wiley & Sons, Nueva York (1975)
62. Meli, R y Reyes, A, "Propiedades mecánicas de la mampostería", *Ingeniería*, Vol 41, No. 3, México, D.F (jul 1971)
63. Base, B G y Read, J B, "Effectiveness of helical binding in the compression zone of concrete beams", *Journal ACI*, Vol 62, No. 7 (jul 1965).
64. Bertero, V V y Popov, E P, "Hysteretic behavior of ductile moment-resistant concrete frame components", Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, EERC 75-16, Berkeley, (1975)
65. Pfrang, E O, Siess, E P y Sozen, M A, "Load-moment curvature characteristics of reinforced concrete cross sections", *Journal ACI*, Vol 61, No. 7 (jul 1964)
66. Park, R, "Práctica del diseño sísmico de estructuras de concreto en Nueva Zelanda", *Ingeniería Sísmica*, No. 22, México, D F (dic 1980)
67. De Buen, O "Steel Structures", Cap 4 en *Design of earthquake resistant structures*, (Ed E Rosenblueth), John Wiley & Sons, Nueva York-Toronto (1980)
68. Popov, E P, Bertero, V V y Chandramouli, S, "Hysteretic behavior of steel columns", Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, EERC 75-11, Berkeley, (1975).
69. Cárdenas, A E y Magura, D D, "Strength of high-rise shear walls-rectangular cross sections", *Publicación especial ACI No. 36, Response of multistory concrete structures to lateral forces*, (1973)

70. Paulay, T, "Capacity design of reinforced concrete ductile frames", *Proc of a workshop on earthquake-resistant reinforced concrete building construction*, Berkeley (jul 1977)
71. Bertero, V V, "Comportamiento sísmico de estructuras de concreto reforzado", *Ingeniería Sísmica*, No. 24, México, D F (ago 1981)
72. Dowrick, D J, *Earthquake resistant design, a manual for engineers and architects*, John Wiley & Sons, Nueva York (1977)
73. Sección de Ingeniería Sísmica, Instituto de Ingeniería, UNAM, Información interna.
74. Rascón, O A , Notas de la materia Diseño Sísmico de Edificios, Curso Internacional de Ingeniería Sísmica, División de Educación Continua, Facultad de Ingeniería, UNAM.
75. Rascón, O A y Villarreal, A, "Estudio estadístico de los criterios para estimar la respuesta sísmica de sistemas lineales con dos grados de libertad", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, 323 (oct 1974).
76. Guendelman, R y Powell, G H , "DRAIN-TABS: a computer program for inelastic earthquake response of three dimensional buildings," *Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, UCB/EERC-77/08, Berkeley (1977)*.
77. Newmark, N M , "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads", *Trans ASCE*, Vol 108 (1943).
78. Rascón, O A y Muñoz, C , "Recomendaciones para el diseño sísmico de tuberías enterradas con juntas lock-joint y continuas", Informe a la Dirección de Construcción y Operación Hidráulica del departamento del Distrito Federal, *Instituto de Ingeniería, UNAM* (abr 1982).
79. De Buen, O , "Nociones de metalurgia de la soldadura", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, D2 (ene 1969).
80. Timoshenko, S P y Goodier, J N, "*Theory of Elasticity*", Mc Graw Hill, Nueva York, 1970.
81. Aranda G R, Rascón Ch O y Dfaz L O, "Análisis sísmico de edificios irregulares en elevación con espectros reducidos por ductilidad" *Ingeniería Sísmica*, No. 28, México, D.F. (dic 1982).



Universidad Nacional  
Autónoma de México

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

MÉTODOS DE DISEÑO SISMICO

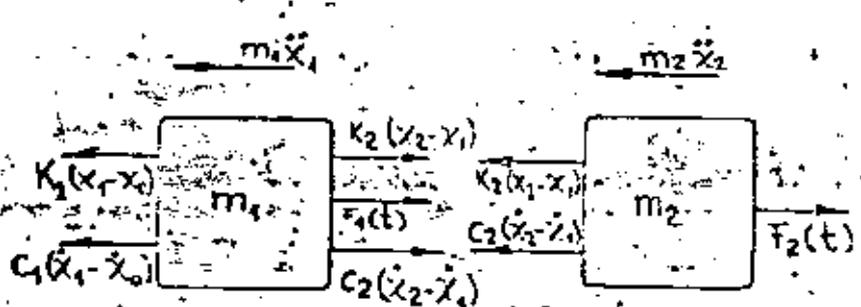
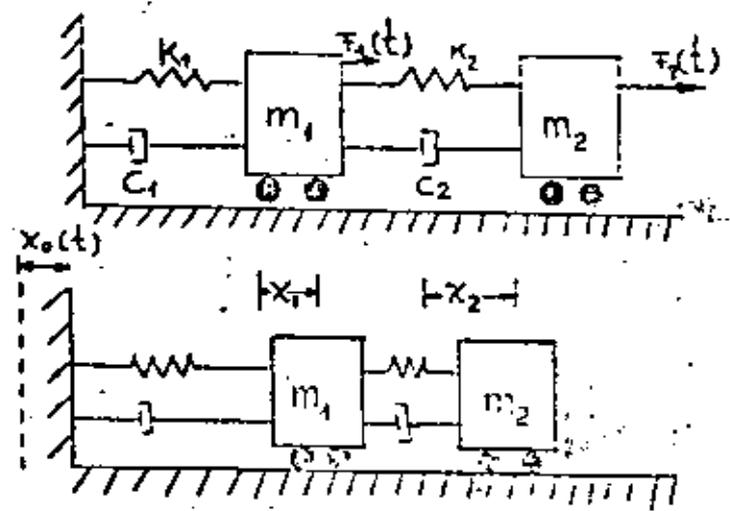
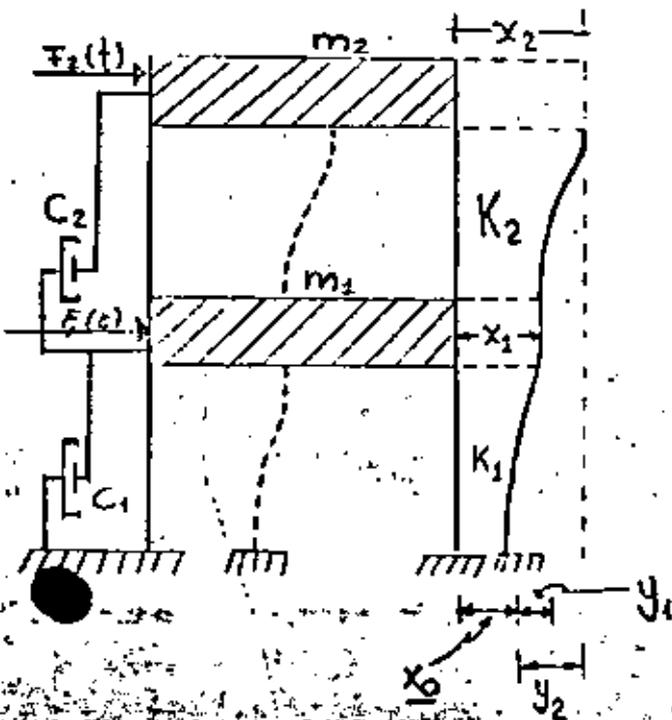
DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

12/III/83

SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Por Dr. Octavio H. Rasón Ch.

CONSIDEREMOS PRIMERO EL CASO DE UN SISTEMA CON DOS GRADOS DE LIBERTAD:



$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 (x_1 - x_0) + C_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) - k_2 (x_2 - x_1) - C_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - F_1(t) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + C_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - F_2(t) = 0$$

HACIENDO

$$y_1 = x_1 - x_0 \quad y_2 = x_2 - x_0 \quad \ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 + \ddot{x}_0 \quad x_2 - x_1 = y_2 - y_1$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + (C_1 + C_2) \dot{y}_1 - C_2 \dot{y}_2 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = -m_1 \ddot{x}_0 + F_1(t)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - c_2 \dot{y}_1 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - k_2 y_1 = -m_2 \ddot{x}_0 + F_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\underline{y}} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \dot{\underline{y}} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 \ddot{x}_0 \\ m_2 \ddot{x}_0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} \ddot{\underline{y}} + \underline{C} \dot{\underline{y}} + \underline{K} \underline{y} = \underline{P} - \underline{M} \ddot{\underline{x}}_0$$

SI NO HAY EXCITACION, EL SISTEMA VIBRARA LIBREMENTE GOBERNADO POR LA ECUACION DIFERENCIAL

$$\underline{M} \ddot{\underline{y}} + \underline{C} \dot{\underline{y}} + \underline{K} \underline{y} = \underline{0}$$

EN EL CASO DE AMORTIGUAMIENTO NULO ESTA ECUACION SE REDUCE A

$$\underline{M} \ddot{\underline{y}} + \underline{K} \underline{y} = \underline{0} ; (\underline{y} = \underline{x}) \quad (1)$$

PARA RESOLVER ESTA ECUACION DIFERENCIAL SUPONDREMOS, POR ANALOGIA CON LOS SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\left. \begin{aligned} \underline{y} &= \underline{z}_n \text{sen} \omega_n (t - t_n) \\ \underline{y} &= -\omega_n \underline{z}_n \text{sen} \omega_n (t - t_n) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO ECS. (2) EN (1):

$$\begin{aligned} -\omega_n \underline{M} \underline{z}_n \text{sen} \omega_n (t - t_n) + \underline{K} \underline{z}_n \text{sen} \omega_n (t - t_n) &= 0 \\ (\underline{K} - \omega_n^2 \underline{M}) \underline{z}_n &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

LA ECUACION MATRICIAL (3) REPRESENTA UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES HOMOGENEO; PARA QUE SE TENGA UNA SOLUCION DISTINTA

DE LA TRIVIAL, SE REQUIERE QUE

$$\det (\underline{K} - \omega_n^2 \underline{M}) = 0 \quad (4)$$

AL DESARROLLAR EL DETERMINANTE DE LA EC. (4) SE OBTENDRA UNA ECUACION DE GRADO N EN  $\omega_n^2$ ; AL RESOLVER ESTA SE OBTIENEN LOS N VALORES DE  $\omega_n^2$ , DONDE N ES EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA, CADA UNO DE LOS CUALES, AL SACARLE RAIZ CUADRADA, DARA LUGAR A LOS N VALORES DE  $\omega_n$ , LOS CUALES SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES DE VIBRACION DEL SISTEMA. AL SUSTITUIR CADA UNO DE ELLOS EN LA EC. (3) SE OBTENDRAN N VECTORES  $Z_n$ ; CADA UNO DE ELLOS CONSTITUYE LA CONFIGURACION MODAL, DEL MODO CORRESPONDIENTE.

EJEMPLO



$$w_2 = 1962 \text{ ton}$$

$$k_2 = 40 \text{ ton/cm}$$

$$w_1 = 3924 \text{ ton}$$

$$k_1 = 60 \text{ ton/cm}$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3924}{981} & 0 \\ 0 & \frac{1962}{981} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -40 \\ -40 & 40 \end{bmatrix} \text{ ton/cm}$$

$$\det (\underline{k} - \omega_n^2 \underline{M}) = \begin{bmatrix} 100 - 4\omega_n^2 & -40 \\ -40 & 40 - 2\omega_n^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$8\omega_n^4 - 360\omega_n^2 + 4000 - 1600 = 0$$

$$\therefore (\omega_n^2)^2 - 45 \omega_n^2 + 300 = 0$$

$$\omega_n^2 = 22.5 \mp \sqrt{506.25 - 300} = 22.5 \mp 14.3615$$

$$= \begin{cases} 8.1385 \text{ (rad/seg)} \\ 36.8615 \end{cases}$$

$$\circ \quad \omega_1 = 2.66 \text{ rad/seg} \rightarrow T_1 = 2\pi / \omega_1 = 2.20 \text{ seg}$$

$$Y \quad \omega_2 = 6.08 \text{ rad/seg} \rightarrow T_2 = 2\pi / \omega_2 = 1.03 \text{ seg}$$

Sustituyendo  $\omega_1^2$  en la ec. (3):

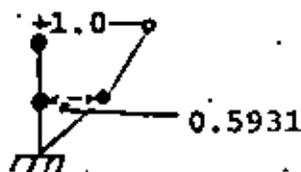
$$\begin{bmatrix} 100 - 4 \times 8.1385 & -4.0 \\ -40 & 4.0 - 2 \times 8.1385 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix} = 0$$

$$\circ \quad 67.446 z_{11} - 40 z_{21} = 0$$

$$Y \quad -40 z_{11} + 23.723 z_{21} = 0$$

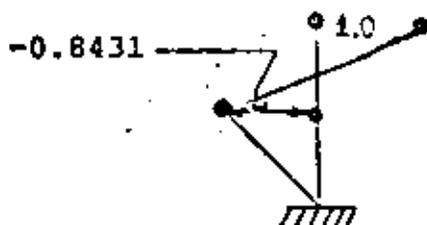
Si  $z_{21} = 1 \text{ cm}$ , entonces  $z_{11} = 0.5931 \text{ cm}$  en ambas ecuaciones, es decir,

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} 0.5931 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$



Sustituyendo a  $\omega_2^2$  en la ec. (3) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} -47.446 z_{12} - 40 z_{22} &= 0 \\ -40 z_{12} - 33.723 z_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{z}_2 = \begin{bmatrix} -0.8431 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$



RESPUESTA SISMICA DE SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

$$y_r(t) = - \sum_n \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{\sum_{i=1}^N M_i z_{in}}{\sum_{i=1}^N M_i z_{in}^2} z_{rn} \right) \int_0^t x_0(\tau) \text{sen} \omega_n (t-\tau) d\tau$$

COEFICIENTE DE PARTICIPACION =  $a_n = \frac{\sum_{i=1}^N M_i z_{in}}{\sum_{i=1}^N M_i z_{in}^2} z_{rn}$

$$y_r(t) = - \sum_n \frac{1}{\omega_n} A_n z_{rn} \dot{y}(t, \omega_n)$$

$$= - \sum_n A_n z_{rn} y(t, \omega_n)$$

$$= - \sum_n \frac{1}{\omega_n^2} z_{rn} \ddot{y}(t, \omega_n)$$

PARA  $\omega_n$  FIJO:

$$\text{MAX } y_r(t) = \sum_n \frac{1}{\omega_n^2} z_{rn} \text{MAX} |\ddot{y}(t, \omega_n)| = \sum_n \frac{1}{\omega_n^2} z_{rn} A_n$$

DONDE  $A_n$  ES LA ORDENADA DEL ESPECTRO DE ACELERACIONES ASOCIADA A  $\omega_n$

## EJEMPLO DE ANALISIS DINAMICO

Por Dr. Octavio A. Rascón

Calcular las fuerzas cortantes de diseño sísmico según el Reglamento del DDF, de una estructura de dos grados de libertad, con  $m_1 = 4$  y  $m_2 = 2$  ton  $\text{seg}^2/\text{cm}$ , y  $k_1 = 60$  y  $k_2 = 40$  ton/cm.

La estructura será, tipo B y se construirá en la zona II.

Utilizar el método de análisis dinámico.

### Solución

Las frecuencias se obtienen resolviendo el determinante:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 = (100 - 4\omega^2)(40 - 2\omega^2) - 40^2 = 0$$

$$\text{donde } [K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -40 \\ -40 & 40 \end{bmatrix}; \text{ y } [M] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = 8.139, \quad \omega_1 = 2.853; \quad T_1 = 2.203 \text{ seg}$$

$$\omega_2^2 = 36.861, \quad \omega_2 = 6.071; \quad T_2 = 1.035 \text{ seg}$$

Los vectores modales se obtuvieron resolviendo los sistemas de ecuaciones

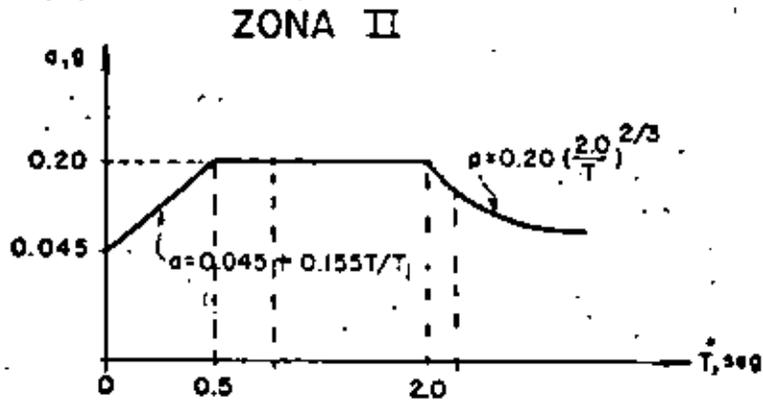
$$\begin{bmatrix} 100 - 4(\omega_1^2) & -40 \\ -40 & 40 - 2(\omega_1^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$z_1^T = [0.5931, 1]; \quad z_2^T = [-0.8431, 1]$$

Consideremos que se trata de una estructura tipo B que se construirá en la zona II.

En tal caso:  $C = 0.20$ ,  $a_0 = 0.045$ ,  $T_1 = 0.5$ ,  $T_2 = 2.0$  y  $r = 2/3$

Considérese  $Q = 2$ . El espectro elástico será entonces:



Para  $T = 2.20$  seg,  $a = 0.2 \left(\frac{2.0}{2.2}\right)^{2/3} = 0.188g$

Para  $T = 1.03$  seg,  $a = 0.20g$

Las ordenadas espectrales reducidas serán:

$$A_1 = 0.188g/2 = 0.094g; \quad A_2 = 0.20g/2 = 0.10g$$

Coefficientes de participación:

$$a_1 = \frac{Z_1^T \underline{M} \underline{z}_1}{Z_1^T \underline{M} Z_1} = \frac{\sum m_i z_{i1}}{\sum m_i z_{i1}^2} = \frac{4.37}{3.41} = 1.28$$

$$\underline{M} \underline{z}_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}; \quad Z_1^T \underline{M} \underline{z}_1 = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = z_{11} m_1 + z_{21} m_2$$

$$= 0.5931 \times 4 + 1 \times 2 = 4.37$$

$$\underline{M} Z_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 z_{11} \\ m_2 z_{21} \end{bmatrix}; \quad Z_1^T \underline{M} Z_1 = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 z_{11} \\ m_2 z_{21} \end{bmatrix} = m_1 z_{11}^2 + m_2 z_{21}^2$$

$$= (0.5931)^2 \times 4 + 1^2 \times 2 = 3.41$$

Análogamente

$$a_2 = \frac{z_{12} m_1 + z_{22} m_2}{z_{12}^2 m_1 + z_{22}^2 m_2} = \frac{-0.8431 \times 4 + 1 \times 2}{(-0.8431)^2 \times 4 + 1^2 \times 2} = \frac{-1.37}{4.84} = -0.28$$

$$Y_1 = \frac{a_1}{\omega_1^2} A_1 Z_1 = \frac{0.094 \times 981 \times 1.28}{8.139} \quad \begin{bmatrix} 0.5931 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.60 \\ 14.50 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

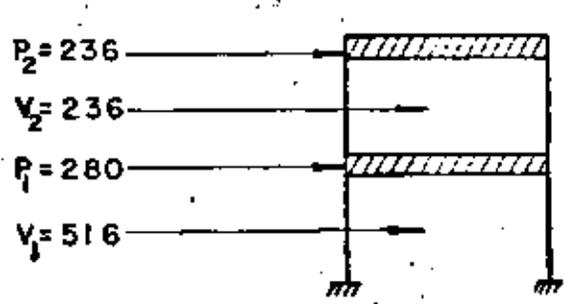
$$Y_2 = \frac{a_1}{\omega_2^2} A_2 Z_2 = \frac{-0.28 \times 0.1 \times 981}{36.861} \quad \begin{bmatrix} -0.8431 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ -0.75 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Desplazamientos Relativos:

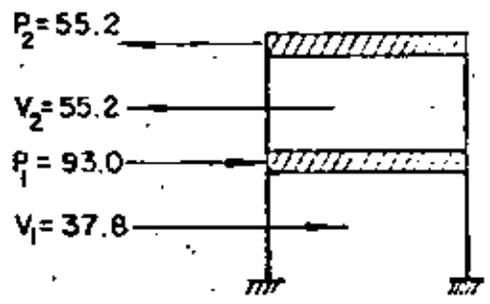
$$\Delta y_1 = \begin{bmatrix} 8.60 \\ 5.90 \end{bmatrix} \text{ cm} ; \quad \Delta y_2 = \begin{bmatrix} 0.63 \\ -1.38 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Fuerzas Cortantes

M O D O	ENTRE PISO	$\Delta y$	K	CORTANTE
1	1	8.60	60	516 ton.
	2	5.90	40	236 ton.
2	1	0.63	60	37.8 ton.
	2	-1.38	40	-55.2 ton.



Modo 1



Modo 2

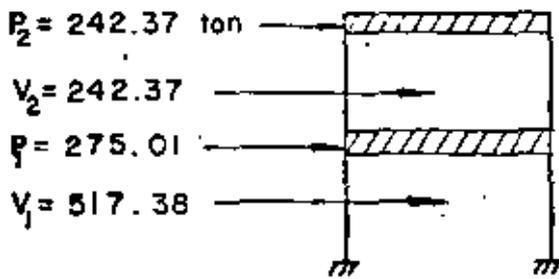
Fuerzas Totales

$$V_1 \leq 516 + 37.8 = 553.8 \text{ ton.} ; V_2 \leq 236 + 55.2 = 291.2 \text{ ton.}$$

Según Reglamento:

$$V_1 = \sqrt{516^2 + 37.8^2} = \sqrt{267684} = \underline{517.38 \text{ ton}}$$

$$V_2 = \sqrt{236^2 + 55.2^2} = \sqrt{58743} = \underline{242.37 \text{ ton}}$$



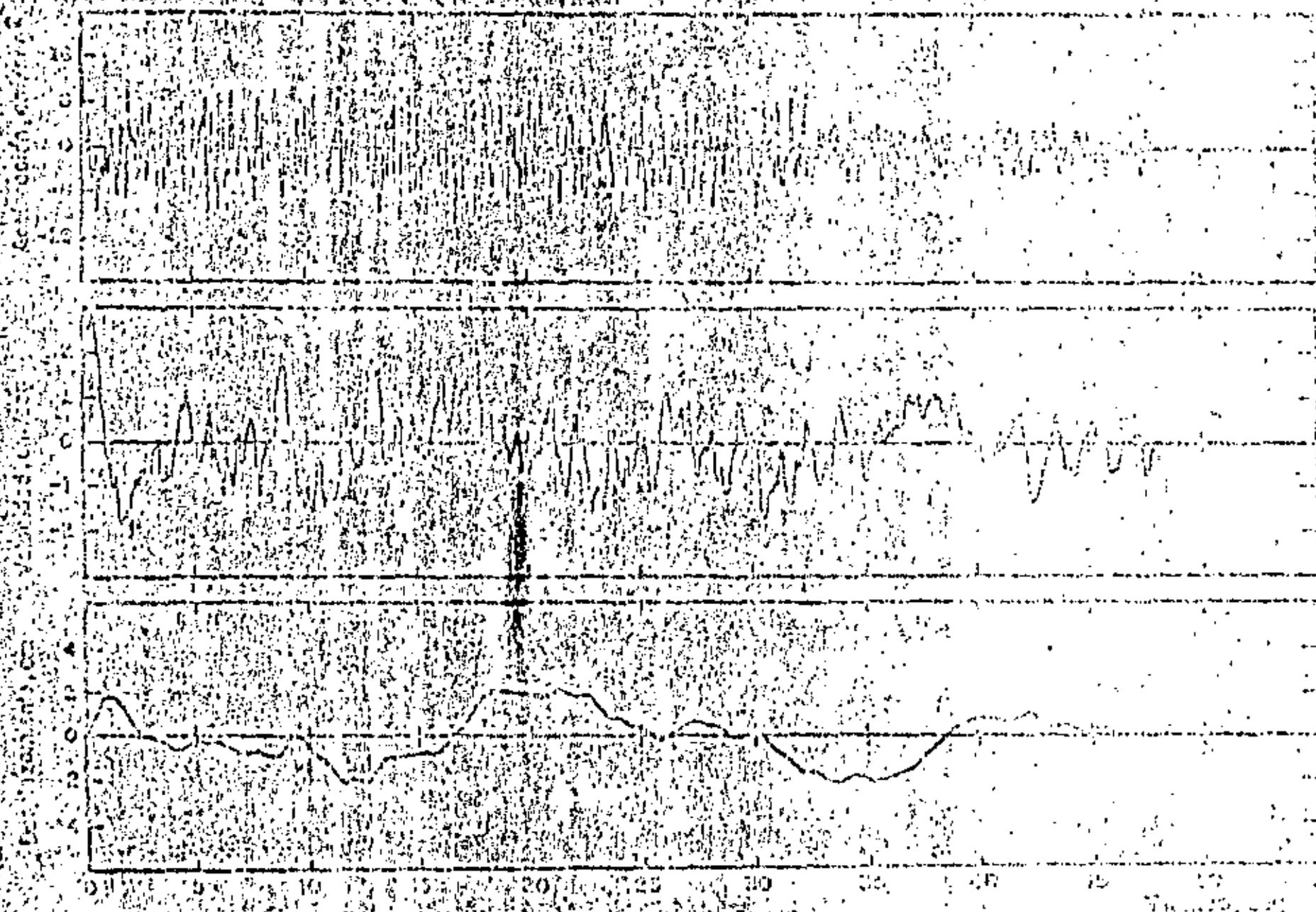
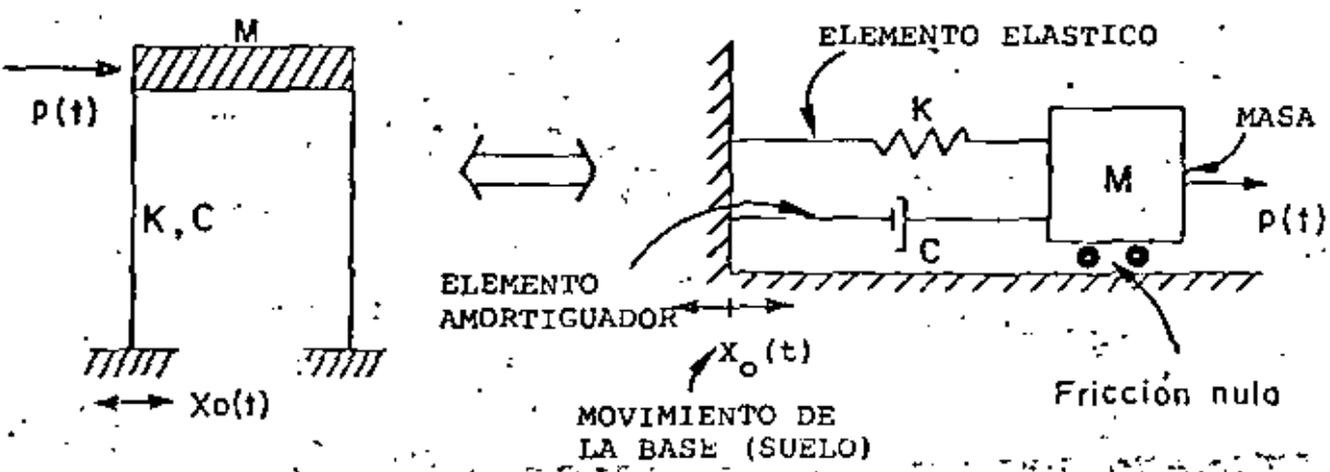


Fig. 42. Movimiento del terreno. Ciudad Universitaria, 6 de julio de 1960.

RESPUESTA DINAMICA DE SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD  
CON AMORTIGUAMIENTO VISCOZO



- $t$  = TIEMPO
- $M$  = MASA
- $K$  = RIGIDEZ
- $C$  = AMORTIGUAMIENTO
- $f(t)$  = FUERZA EXTERNA
- $X_0(t)$  = DESPLAZAMIENTO DEL SUELO

ECUACION DE EQUILIBRIO

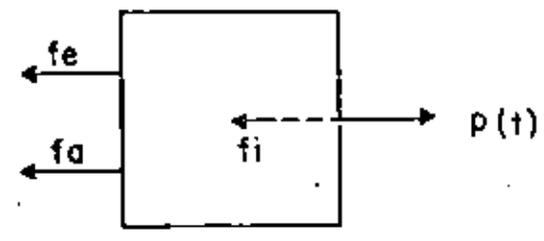
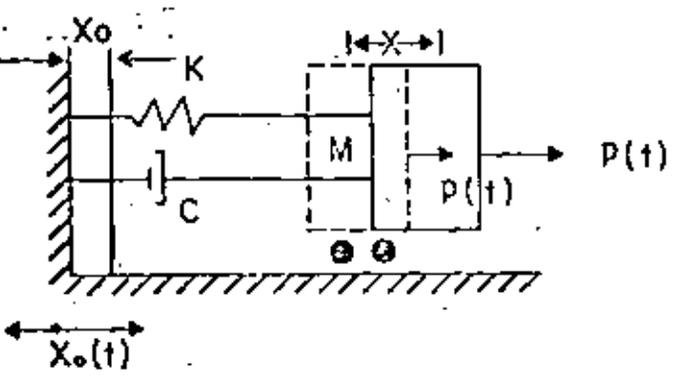


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

$x = \text{DESPLAZAMIENTO} = \text{ABSOLUTO}$   
 $y = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO} = x - x_0 \rightarrow$

$\dot{y} = \dot{x} - \dot{x}_0$   
 $\ddot{y} = \ddot{x} - \ddot{x}_0 \quad \therefore$   
 $\ddot{x} = \ddot{y} + \ddot{x}_0$

EQUILIBRIO:  $f_e + f_a + f_i = p(t)$  (1)

PARA UN SISTEMA ELASTICO:  $f_e = K(x - x_0) = ky$

PARA AMORTIGUAMIENTO VISCOSO:  $f_a = c(\dot{x} - \dot{x}_0) = c\dot{y}$  (2)

POR EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT:  $f_i = m\ddot{x} = m(\ddot{y} + \ddot{x}_0)$

$m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) + c\dot{y} + ky = p(t)$

$M\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = p(t) - M\ddot{x}_0$  (3)

$\ddot{y} + \frac{C}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0$

SI  $\frac{C}{M} = 2h$ , y  $\frac{K}{M} = \omega^2$  DONDE  $\omega = \text{FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, EN RAD/SEG}$

$\omega = \sqrt{K/m}$ ,  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  EN CPS

PERIODO NATURAL:  $T = 2\pi/\omega = 1/f$  EN SEG

$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2 y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0$

## VIBRACIONES LIBRES

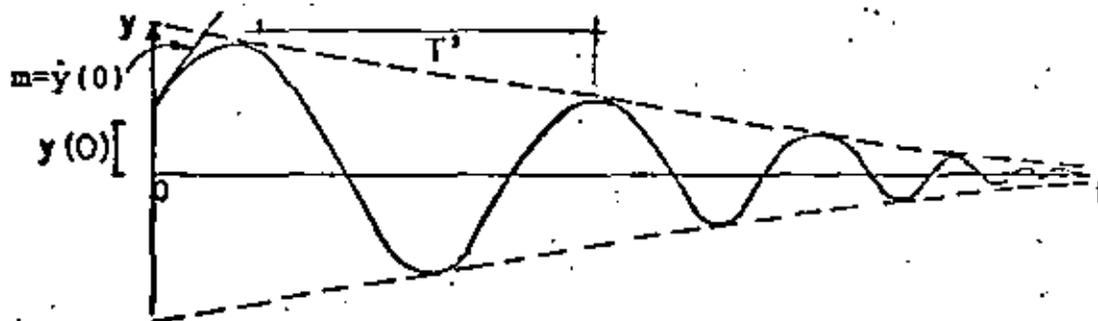
EN ESTE CASO  $x=y$  Y LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\ddot{y} + 2h \dot{y} + \omega^2 y = 0$$

CUYA SOLUCION ES

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega' t - \theta) \quad (7)$$

LA GRAFICA DE LA EC (7) ES

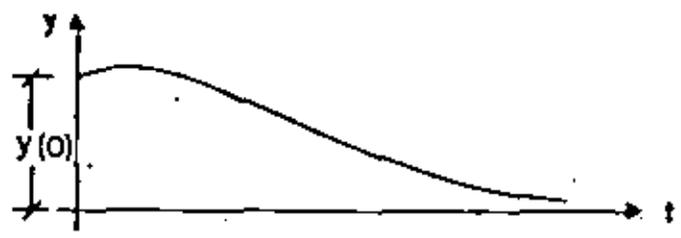


$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \text{PERIODO NATURAL AMORTIGUADO, SEG}$$

$$f' = \frac{1}{T'} = \text{FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA, cps}$$

SI  $h = \omega$  ENTONCES  $C = C_{cr} = 2\sqrt{KM}$ ,  $h = \zeta\omega$

Y LA GRAFICA DE ESTA ECUACION ES,



POR LO QUE  $\omega' = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$  (9)

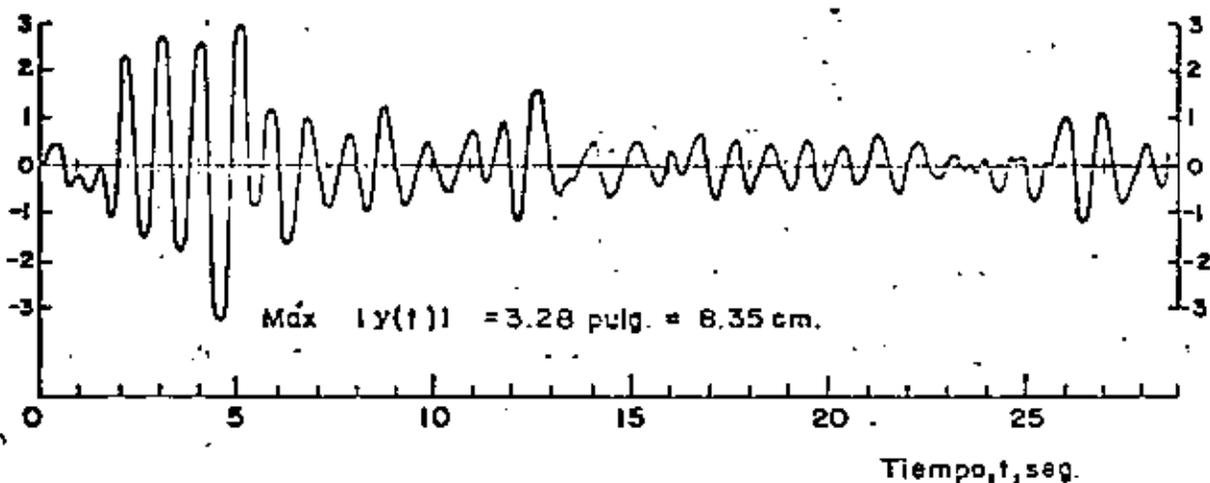
EL CASO EN QUE  $\zeta = 0.1$

$$\omega' = \omega\sqrt{1-0.01} = 0.995\omega \approx \omega$$

SOLUCION PARA EXCITACION SISMICA

$$y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen} \omega'(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

Desplazamiento relativo,  
y(t), pulg.



Respuesta de un sistema amortiguado simple  
con  $T_1 = 1.0$  seg y  $\zeta = 0.10$ , al sismo de  
El Centro, Cal., 1940, componente N-S

### ESPECTROS DE RESPUESTA ESTRUCTURAL

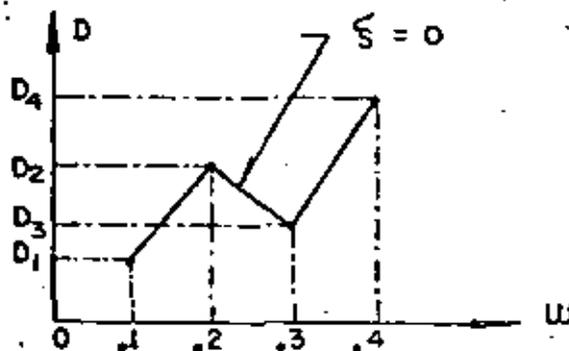
$$y(t) = f(t, \omega, \zeta)$$

FIJEMOS UN VALOR DE  $\zeta$ , POR EJEMPLO  $\zeta=0$ , Y LUEGO ASIGNEMOS VALORES A  $\omega$ , POR EJEMPLO 0.1, 0.2, 0.3, ETC, HASTA CUBRIR UN INTERVALO DE INTERES, Y PARA CADA CASO CALCULEMOS LA FUNCION RESULTANTE DE APLICAR LA ECUACION ANTERIOR USANDO UNA EXCITACION DADA. CON ESTA OBTENEMOS

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= f_1(t, 0.1, 0) = f_1(t) \\ y_2(t) &= f_2(t, 0.2, 0) = f_2(t) \\ y_3(t) &= f_3(t, 0.3, 0) = f_3(t) \\ \text{ETC.} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{PARA} \\ \zeta = 0 \end{array}$$

SEAN  $D_1 = \text{MAX}|y_1(t)| = D_1(\omega_1, \zeta) = D(T_1, \zeta)$   
 $D_2 = \text{MAX}|y_2(t)| = D_2(\omega_2, \zeta) = D(T_2, \zeta)$   
 $D_3 = \text{MAX}|y_3(t)| = D_3(\omega_3, \zeta) = D(T_3, \zeta)$   
 ETC.

EN TAL CASO, LA GRAFICA



NOTA: EN EL EJE HORIZONTAL PUEDEN USARSE T o f EN VEZ DE ω

DE MANERA ANALOGA SE PUEDEN OBTENER LOS ESPECTROS PARA OTROS TIPOS DE RESPUESTA, TALES COMO VELOCIDAD RELATIVA, ACELERACION ASSOLUTA, ETC, QUE SON, RESPECTIVAMENTE

$$V = \text{MAX}[\dot{y}(t)]|_{\zeta, \omega} ; A = \text{MAX}[\ddot{x}(t)]|_{\zeta, \omega}$$

### PSEUDO - ESPECTROS

ESTADISTICAMENTE SE HA ENCONTRADO QUE

$$S_V = \omega D \doteq V ; D = V/\omega = V/(2\pi/T) = \frac{VT}{2\pi} \quad (30)$$

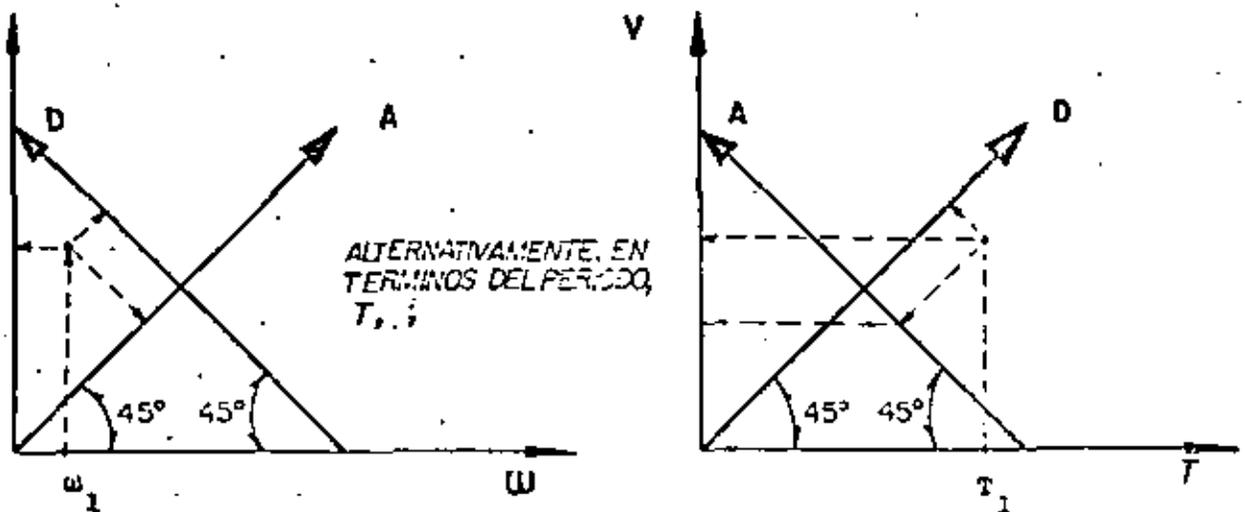
$$S_A = \omega^2 D \doteq A \doteq \omega V = \frac{2\pi V}{T} \quad (31)$$

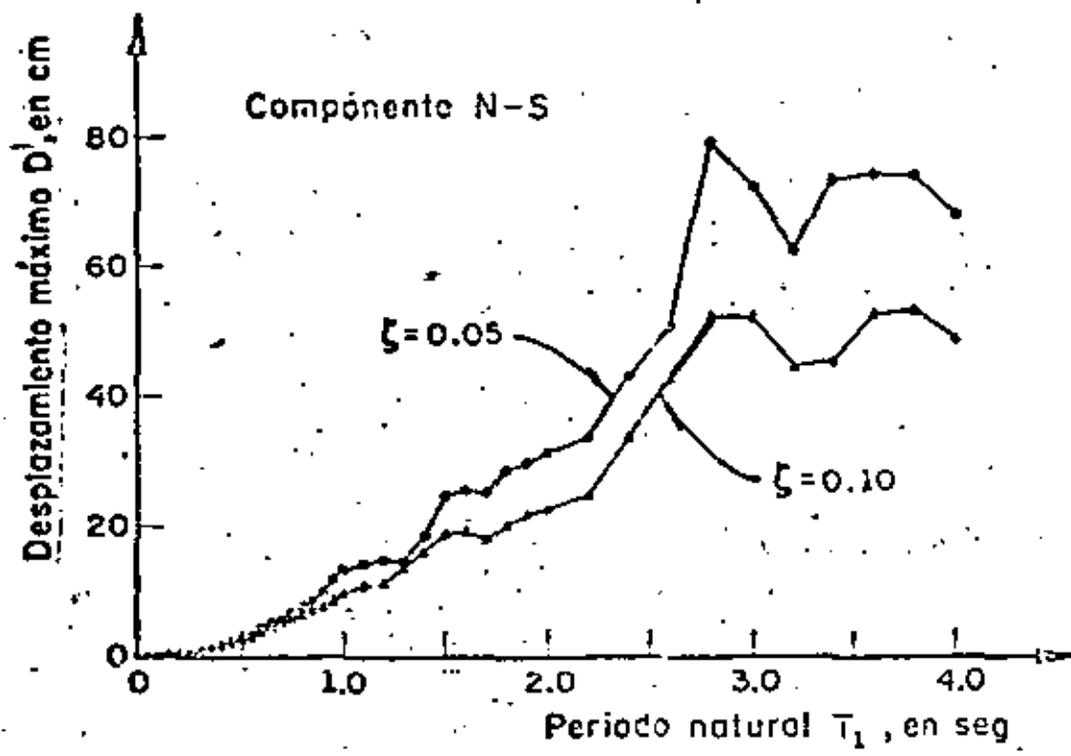
A  $S_V$  Y  $S_A$  SE LES LLAMA PSEUDOESPECTROS.  $y = mx + b$

DE LA EC. (30):  $\log D = \log V - \log \omega = \log V + \log T - \log 2\pi$

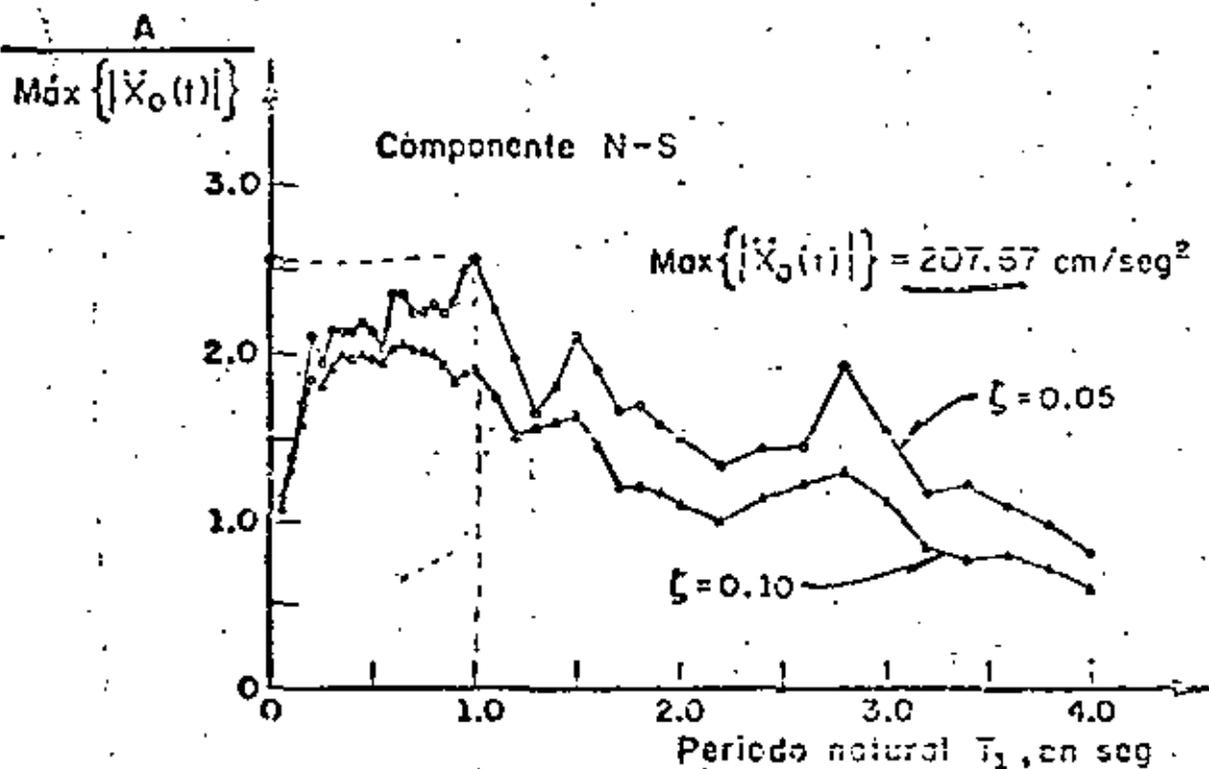
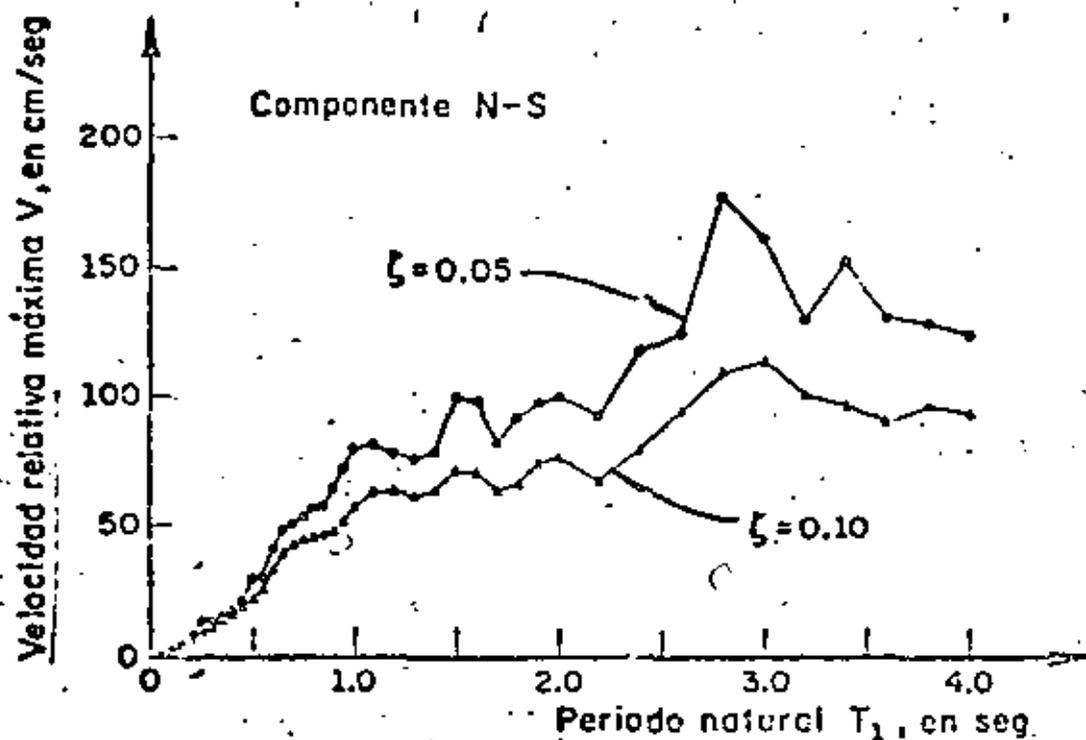
DE LA EC. (31):  $\log A = \log V + \log \omega = \log V - \log T + \log 2\pi$

ESTAS ECUACIONES CORRESPONDEN A LINEAS RECTAS EN PAPEL LOGARITMICO LA PRIMERA CON PENDIENTE - 1 Y LA SEGUNDA CON PENDIENTE +1, SI SE USA  $\omega$  COMO VARIABLE INDEPENDIENTE; SI SE USA T, LA PRIMERA TENDRA PENDIENTE +1, Y LA SEGUNDA -1.



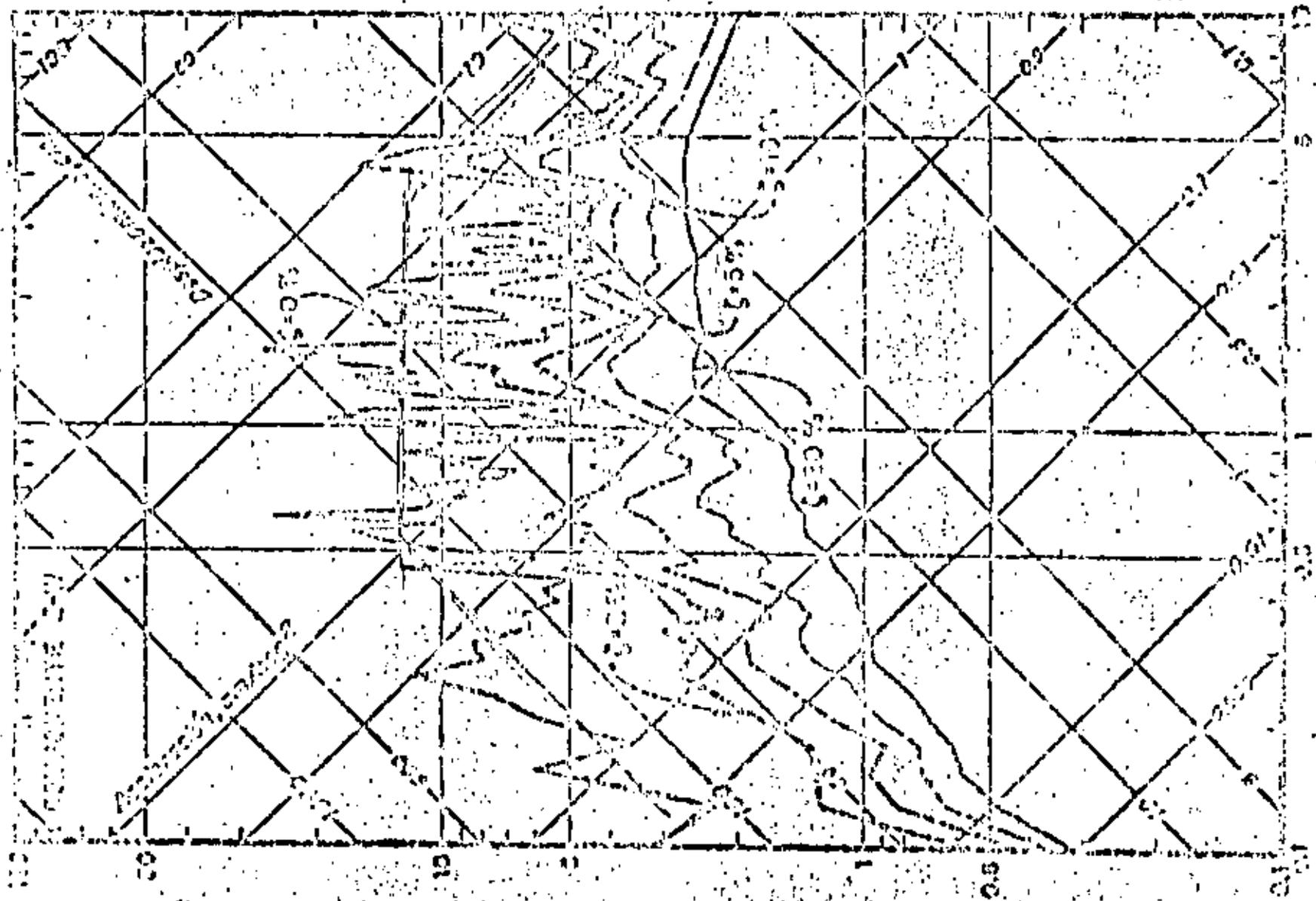


Espectro de desplazamientos. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4



Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokai-Iki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Suito, ref 4

22



Vertical, 1/2 inch

Scale 1/2 inch = 1 foot

Vertical, 1/2 inch

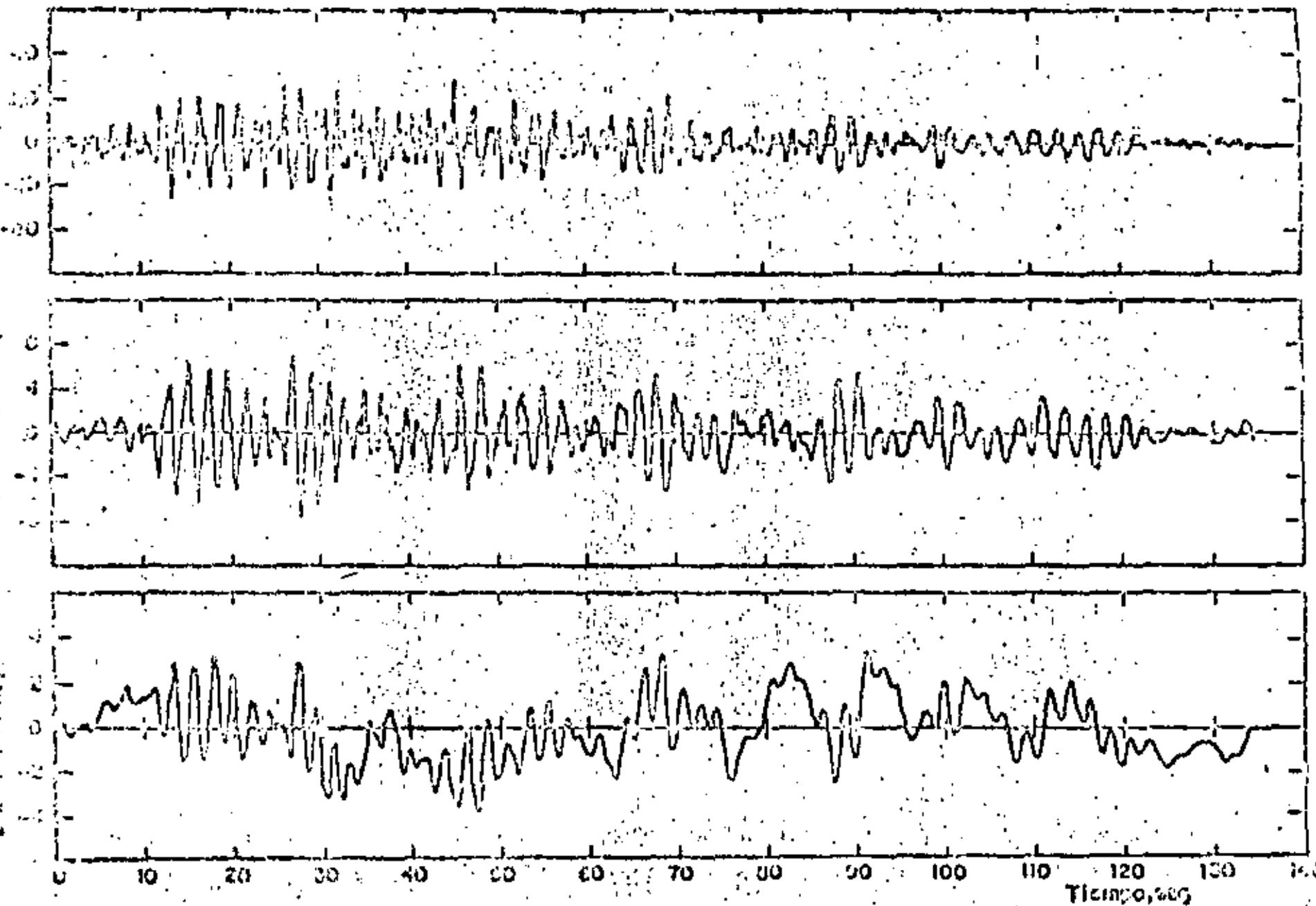
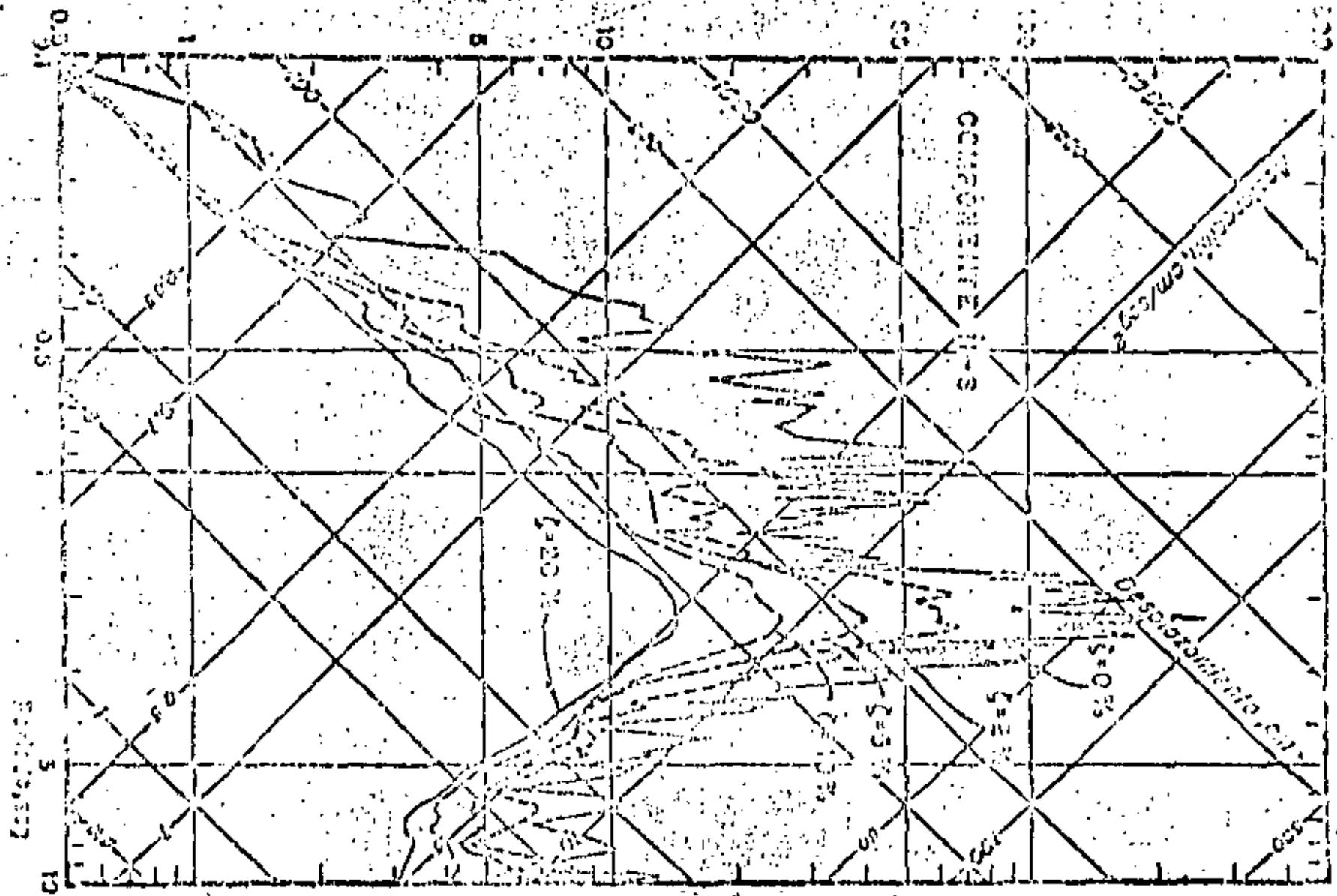


Fig 16 Movimiento del terreno. Edificio Manuel González, 6 de Julio de 1964

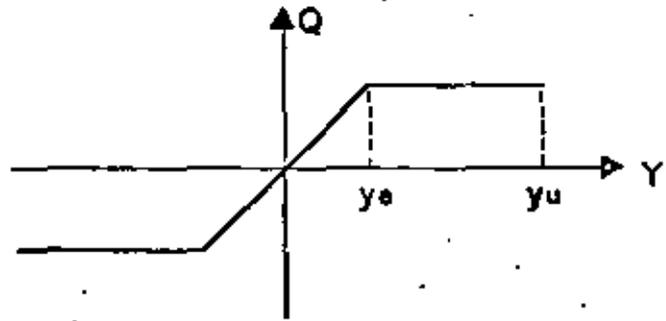
22

Velocidad, cm/seg



1952-53 (1952-53) 20-1000

SISTEMA ELASTO-PLASTICO

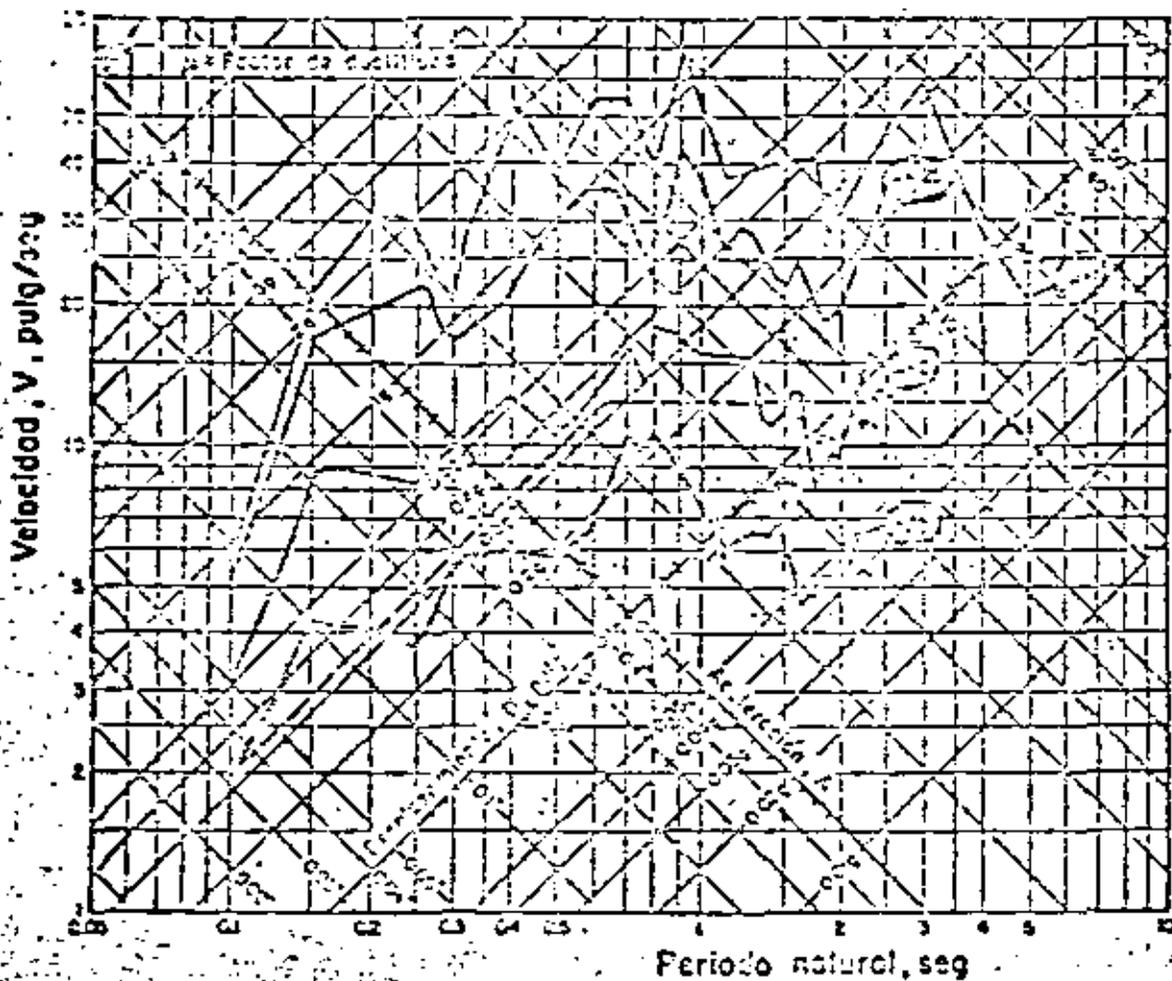


$$\bar{Q} = Q_1(y) + c\dot{y}$$

SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

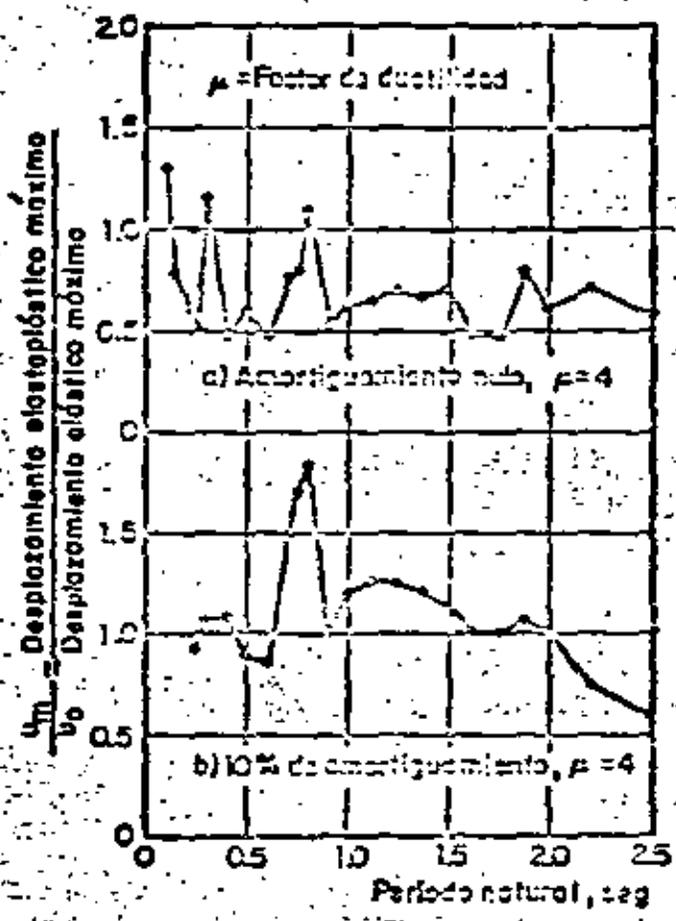
FACTOR DE DUCTILIDAD =  $\mu = y_u/y_e$

$y_u$  = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE OSPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.



Espectro de respuesta de un sistema elástico-plástico con amortiguamiento nulo. Sismo de El Centro, Cal. (1940). Según Blume, Newmark y Corning

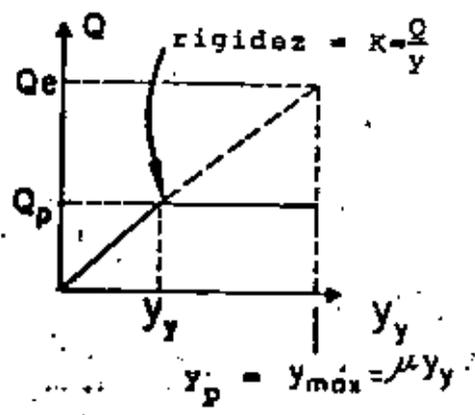
(parte elástica)



Comperación de la respuesta máxima de un sistema elastoplástico y uno elástico. Sismo de El Centro, Cal. (1940). Según Blume, Newmark y Corning

RELACION ENTRE LOS ESPECTROS ELASTICO Y ELASTOPLASTICO.

~~CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO~~  
Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:



$\mu = y_p / y_y ; Q = Ky$

$\mu = \frac{y_{MAX}}{y_y}$

$Q_p = Ky_y = \frac{Ky_{MAX}}{\mu} = \frac{Q_e}{\mu}$

$y_{MAX} = D_e = \mu y_y = \mu D_p$

$D_p = \frac{D_e}{\mu}$

Directorio de Profesores del curso: DISEÑO SISMICO DE

EDIFICIOS 1 9 8 3.

1. José Guadalupe Acosta  
ICA  
Div. de Empresas de Ingeniería  
"METRO"
2. Javier Alonso García  
P.Martín Mendalde 1755 P.B.  
García Jarque Ingenieros, S.C.  
Del Valle  
03100 México, D.F.  
524 50 17  
Sur 67 No.3144  
V.Piedad  
Iztacalco  
08200 México, D.F.  
530 09 10
3. Jaime Álvarez Escobar  
CRA, Asesoría y Diseño, S.A.  
Oso 127-307  
Del Valle  
B.Juárez  
México, D.F.  
524 76 78  
Av.Chapultepec 564-3  
Roma  
Cuauhtémoc  
06700 México, D.F.  
286 17 05
4. Carlos Alvarez Guillén  
Secretaría de Comunicaciones y Transportes  
Av. Universidad y Xola  
Centro SCOP  
Narvarte  
B.Juárez  
México, D.F.  
519 65 93  
Insurgentes Sur 4031-502  
Edif. VANC  
Tlalpán  
14000 México, D.F.
5. Marcelino Arellano González  
Secretaría de Comunicaciones y Transportes  
Xola y Ave. Universidad  
V.Narvarte  
B.Juárez  
530 30 00 Ext.382  
Niños Héroes No. 42  
Tepepan, Xochimilco  
676 33 80
6. Vicente Aquino Ramos  
Ingeniería al Servicio de la Industria  
Palenque No. 403  
Vértiz Narvarte  
México, D.F.  
543 40 21  
Nilo 224  
Clavería  
Azcapotzalco  
396 26 98
7. Jaime Castillo Vázquez  
Cía. de Luz  
Emiliano Zapata 102  
Centro  
V.Carranza  
México,DF.  
576 83 72  
Pais 81  
Sta. Ma. Ticomán  
G.A.Madero  
México, D.F.
8. Jesús Cerezo Martínez  
División de Empresas de Ingeniería

9. Marcos L. Chávez Mineros  
Empresa Nal. de Energía Eléctrica.  
Edif. Principal  
Antiguo Pte. Malloj  
Tegucigalpa Honduras, CA  
225510 Ext.225
- Barrio Abajo  
Ave.Jerez  
Casa 236  
Tegucigalpa DC, Honduras CA  
220580
10. Roberto DAM Lau  
Universidad Nal. de Panama  
Fac. de Arquitectura  
Universidad Nal. de Panama
- Urb. Las mercedes,Casa 110  
9000 Zona G  
Panama, Panamá  
60 79 57
11. Bartolome de la Cruz Reyes  
Calle Monedita de Oro 154
12. Carlos A. Fernández Córdoba  
Instituto Tecnológico de CR  
Municipalidad de Cartago  
Cartago, Costa Rica  
5100 58
- Cartago,Cantón Central  
Apdo.Postal 318  
Cartago CR  
51 46 75
13. Humberto García Díaz  
Universidad del Cauca  
Profeador de la Facultad de  
Ingeniería Civil  
Popayan, Colombia  
3023
- Kra. 10 # 17 N-87  
Popayan, Colombia  
3864
14. Humberto Alejandro Girón Vargas  
Diseño de Sistemas Estructurales, S.A.  
Calle Huichapan 10  
Condesa  
México,D.F.  
553 12 72
- I.Boleares 98  
Ampliación Cosmopolita  
Atzacapotzalco  
02920 México,D.F.  
355 14 08
15. Armando González Pereda  
Instituto Mexicano del Petróleo  
Av.Eje Central Lázaro Cárdenas No. 152  
Nva. Vallejo  
G.A.Madero  
México,D.F.
- Oxo 23  
Industrial  
G.A.Madero  
07800 México,D.F.  
577 61 91
16. Pedro Goyos Domínguez  
Sevilla 719  
Portales  
B.Juárez  
México,D.F.  
539 29 02
17. Jesús Gutiérrez Silva  
C. F. E.  
Thiers No. 215-3° Piso  
Nva. Anzures  
México, D.F.  
11590 México,D.F.  
531 92 50
- Aquiles Serdán 421 - 101  
Barrio Nextengo Azcapotzalco  
02070 México,DF.  
561 63 68

18. Benjamín Hernández Gallardo  
S.C.T.  
Av.Fernando 247  
Narvarte  
B.Juárez  
03028 México,D.F.  
590 89 86
- Ote 4 Mz.24 Lote 35  
Cuchilla del Tesoro  
G.A.Madero
19. Antonio Irigoyen Reyes  
S.C.T.
20. Antonio M. Islas Azpeitia  
PEMEX  
Sullivan 133-2° Piso  
San Rafael  
México,D.F.  
546 19 75 Ext.154
- Calle 1810 No.25  
Col. del Parque  
V.Carranza  
México,D.F.  
552 65 25
21. Raúl Jean Perrilliat  
Piedra 121  
Jardines del Pedregal  
México,D.F.  
568 14 30
22. José Pablo Lozano González  
S C T  
Xola y Universidad  
Narvarte  
B.Juárez  
México,D.F.
- Montealvan 21  
Narvarte  
B.Juárez  
03020 México, D.F.  
519 42 43
23. Roberto Magaña López  
PEMEX  
Ingeniero B  
Sullivan 133-2° Piso  
San Rafael  
México, D.F.  
546 42 41
- Calz. Méx. Tacuba 411-7  
Popotla  
México,D.F.
24. Rafael Maldonado Sánchez  
SCT  
Xola y Universidad  
Narvarte  
México, D.F.  
519 65 93
- Juárez 177  
Tlalpán  
14000 México,D.F.  
573 65 29
25. Wilson M. Medina Pazmiño  
Universidad Téc. de Ambato  
Av.Colombia-Ingahuarco-Ambazo Ecuador  
824205
- Las Acacias Ficoa  
Calle los Cumbie y las Ubillas  
Ambazo Ecuador  
82 61 59
- 7 José Marfa Méndez Santos  
S. C. T.  
Xola y Av. Universidad  
Narvarte  
México,D.F.  
519 65 93
- Conv. Churubusco 45  
Sta. Mónica  
Tlalnepantla, Edo. de Méx.  
398 18 77

26. Jesús E. Navarro Vázquez
27. Alberto Nolla Ortega  
Alta Resistencia, S.A. de C.V.  
Ri6 Sena 63 B  
Cuauhtémoc  
México, D.F.  
525 16 45
28. Arturo Nñez Gutiérrez  
Director  
Dirección y Proyecto, S.A.  
Palenque No. 403  
V.Narvarte  
B.Juárez  
03020 México, D.F.  
523 84 66
- Petén 402  
V.Narvarte  
B.Juárez  
03020 México, D.F.  
687 33 25
29. Gian Franco Ottazzi Basino  
Pontificia Universidad Católica del Perú  
Final Av.Bolívar s/n  
Fondo Rando Pueblo  
Libre  
Lima Perú  
622540-259
30. Juan Pérez Márquez  
IMP  
Av. Lázaro Cárdenas 152  
Atzacapotzalco  
G.A.Madero  
México,D.F.
- Av. del Riego 145  
Villa Coapa  
Tlalpán  
México,D.F.
31. Miguel Pozas Estrada  
Facultad de Ingeniería  
UNAM
32. Angel Pujalte Piñeiro  
Piomonte 22  
Acoxpa Miramontes  
Coyoacán  
14300 México, D.F.  
684 55 47
33. Antonio J. Ramírez Guzmán  
Sistemas Matemáticos de  
Ingeniería y Administración, S.C.  
Av.Reforma 400-603  
Juárez  
Cuauhtémoc  
06600 México,D.F.  
514 90 08
- Pto. Topolobampo 17  
El Olivo  
G.A.Madero  
07920 México, D.F.  
577 58 83
34. José R. Rosado Lorenzo  
J.R.Estudios , Proyectos y Construcciones  
B.Juárez 101  
Fracc. Los Robles  
Coyoacán  
04870 México,D.F.  
684 44 61

35. Rigoberto Rivera Constantino  
Facultad de Ingeniería  
UNAM
36. Francisco G. Sánchez Aldana  
Estructuras Avanzadas, S.A.  
Cantó 9-102  
Anzures  
M. Hgo.  
México, D.F.  
545 27 22
37. Federico Sigales González  
IMP
38. Fernando Spinel Gómez  
Universidad Nal. de Colombia  
Lab. de Ensayo de Materiales  
Cda. Universitaria  
Fac. de Ing.  
Bogotá, Colombia  
268 57 91
39. Mario R. Valdeavellano Muñoz  
Universidad de San Carlos de Guatemala  
Depto. de Estructuras  
Cda. Universitaria  
Guatemala, Guatemala  
760790
40. Gabriel P. Valdés Rodríguez  
S. C.T.  
Xola y Universidad  
Centro SCOP  
Narvarte  
B. Juárez  
México, D.F.  
519 92 21
41. Alfredo Vázquez Capilla  
17 de Mayo 198  
Lindavista  
G.A. Madero  
México, D.F.  
586 08 21
42. Jorge Vega Jamaica  
S.C.T.  
Xola y Universidad  
Narvarte  
B. Juárez  
México, D.F.  
519 65 93
43. Mario Zermeño de León  
Facultad de Ingeniería  
UNAM
- Joaquín García Icazbalceta 27  
San Rafael  
Cuauhtémoc  
México, D.F.  
535 23 89
- Conera 35 A # 57-91  
Bogotá, Colombia  
2110560
- 6a. Ave. "A" 13-25  
Guatemala, C.A.  
61286
- Zempoala 108-11  
Narvarte  
B. Juárez  
03020 México, D.F.  
519 96 63
- Victoria 315-31  
Centro  
Cuauhtémoc  
06050 México, D.F.  
518 52 66