



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

CONTROL ADAPTABLE DE ACTITUD DE UNA CONSTELACIÓN DE
SATÉLITES POR PINNING

MODALIDAD DE GRADUACIÓN: TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
HÉCTOR ORTIZ GAMINO

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Yu Tang Xu
Facultad de Ingeniería UNAM

MÉXICO, D.F. ENERO 2015

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Héctor Benítez Pérez

Secretario: Gerardo René Espinosa Pérez

1^{er} Vocal: Yu Tang Xu

2^{do} Vocal: Saúl Santillán Gutiérrez

3^{er} Vocal: José Alberto Ramírez Aguilar

Lugar o lugares donde se realizo la tesis:Facultad
Ingeniería-Ciudad Universitaria y Centro de Alta Tecnología,
Querétaro

TUTOR DE TESIS

Dr. Yu Tang

Firma

Resumen

En este trabajo se plantea una solución al problema de control de actitud de una constelación de satélites. La dinámica del satélite es modelada como un sistema Lagrangiano. Se utiliza el parámetro de Rodrigues modificado para representar la orientación del satélite. Se propone un esquema de control de actitud de la constelación empleando la técnica de control por pinning. Se utiliza teoría de Lyapunov para comprobar la estabilidad del controlador así como de la sincronización de la constelación de satélites. Se muestran resultados por simulación validando el esquema de control empleado.

Agradecimientos

*Primero agradecer a Dios, a mi madre y a mi padre
Por haberme apoyado y darme ánimos en los momentos más difíciles.
A mi tutor el Dr. Yu Tang por el apoyo para llevar acabo los objetivos
planteados. A mis compañeros, por haber compartido la riqueza de sus
conocimientos conmigo. A CONACYT por el apoyo económico brindado
para realizar los estudios de maestría.
A mi prometida por comprender la dedicación de mi trabajo.
Es gracias a ustedes y al esfuerzo de meses de trabajo.
Que es posible esta disertación.*

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Objetivo	3
1.4. Estado del Arte	4
1.4.1. Control de Actitud	4
1.4.2. Representación de Actitud	4
1.4.3. Sincronización de Sistemas	5
1.5. Contribuciones	7
1.6. Estructura de la tesis	7
2. Antecedentes	8
2.1. Actitud	8
2.2. Control Adaptable	9
2.3. Model Reference Adaptive Control	9
2.4. Rotaciones	13
2.4.1. Ángulos de Euler	14
2.4.2. Cuaternión	15
2.4.3. Parámetro de Rodrigues	17
2.4.4. Parámetro de Rodrigues modificado	18
2.5. Teoría de Grafos	19

2.5.1. Matriz Laplaciana	19
2.6. Control Cooperativo	21
2.7. Sincronización de sistemas dinámicos	22
2.7.1. Convergencia y estabilidad	22
2.7.2. Control por pinning	23
3. Modelo dinámico y control de actitud de satélite	25
3.1. Ecuaciones Cinemáticas	25
3.2. Ecuaciones Dinámicas	26
3.2.1. Dinámica de un cuerpo rígido	27
3.2.2. Formulación Lagrangiana	28
3.2.3. Propiedades del modelo dinámico	29
3.3. Modelo dinámico del satélite basado en Modelo Lagrangiano .	30
4. Control de actitud del satélite	32
4.1. Control de líder de la constelación	32
4.1.1. Resultados de Simulación	35
4.2. Control Adaptable de los satélites seguidores	41
4.2.1. Control de Constelación por Pinning	41
4.2.2. Resultados de Simulación	44
5. Conclusiones	50
A. Matriz de Inercia	52
A.1. Introducción	52
A.2. Definiciones	53
B. Modelo Lagrangiano	55

Índice de figuras

2.1. Esquema por bloques <i>MRAC</i>	10
2.2. Rotación sobre la coordenada z por un ángulo α	13
2.3. Representación de ángulos de Euler <i>ZYZ</i>	15
2.4. (a): gráfica directa, cada uno de los nodos está enlazado a otro nodo, la información fluye en una sola dirección, (b): gráfica indirecta, el intercambio de información entre los nodos es bidireccional	20
2.5. Esquema de control por pinning	24
3.1. Rotación de una nave espacial alrededor de su eje de simetría.	27
4.1. Salida deseada q_d y salida de satélite q	37
4.2. Ampliación de la salida del líder q y referencia q_d	37
4.3. Salida del error de seguimiento $\tilde{q} = q - q_d$, señal de error de seguimiento de la señal deseada q_d y la señal q , se observa que cuando hay un cambio drástico en la señal deseada la señal tiende a seguir esta trayectoria minimizando el error	38
4.4. Parámetros estimados \hat{a}_0 , en este caso los parámetros no convergen a los parámetros reales debido a que no existe el factor de excitación persistente.	39
4.5. Torque aplicado a las ruedas de inercia	40
4.6. Configuración de la constelación	41

4.7. Posición de constelación, dando seguimiento a una trayectoria de referencia, las señales de los 4 agentes convergen a la señal de referencia.	46
4.8. Ampliación de posición de constelación y del líder de la constelación, correspondiente a la Figura 4.7.	46
4.9. Error de seguimiento $\tilde{q}_i = q_i - q_0$, al realizarse una variación en la señal de referencia se observa como el error converge a cero, probando la eficacia del desempeño del controlador. . . .	47
4.10. Error de sincronización para la constelación, al ocurrir una variación en la trayectoria, el error de sincronización para cada uno de los agentes converge a cero.	48
4.11. Torque aplicado en las ruedas de inercia para cada uno de los satélites	49
A.1. Cuerpo rígido	52

Introducción

1.1. Motivación

El uso de satélites hoy en día se ha convertido en parte fundamental del desarrollo humano, los satélites son necesarios y empleados para realizar diferentes misiones, las cuales pueden ser muy variadas y exigentes. Algunas de estas tareas son observación y medición del estado del tiempo, propósitos de navegación, monitoreo de la contaminación y calentamiento global. También se ha logrado un mayor desarrollo en las telecomunicaciones las cuales ahora son ampliamente explotadas mediante comunicación satelital. Se le conoce como actitud a la posición u orientación que ocupa un cuerpo en el espacio respecto a un marco de referencia. El control de actitud de un satélite es la acción para cambiar la orientación del satélite respecto a un marco referencial a una posición deseada. El sistema de control de actitud estabiliza y orienta el satélite en un punto específico durante la misión. El control en la orientación de un cuerpo rígido tiene importantes aplicaciones en la industria aeronáutica y espacial, desde fijar, posicionar y controlar la orientación en un helicóptero o aeronave, hasta fijar la posición de un cohete espacial o un satélite. Se requiere que un satélite mantenga una posición deseada para poder llevar a cabo sus misiones con éxito y enviar los datos a las estaciones

1.1. MOTIVACIÓN

en tierra de forma exitosa. Para controlar la actitud de un satélite es necesario conocer las ecuaciones que describan la evolución de la orientación y las fuerzas relacionadas para controlar los movimientos de rotación del satélite. En la industria aeroespacial como en diferentes áreas de investigación se necesita de equipos que tengan un buen desempeño y que puedan realizar de forma eficiente tareas complejas. El propósito es reducir costos y tiempo en la elaboración, fabricación o producción de los diferentes materiales o equipos diseñados.

Una mayor capacidad en el almacenamiento y velocidad en la transmisión de datos son el resultado de nuevas y más avanzadas tecnologías. Estos avances tecnológicos también propician el desarrollo de nuevos sistemas satelitales. El desarrollo de satélites pequeños trae consigo diferentes ventajas, la principal es que el costo en su fabricación es menor ya que se ven reducidos los costes de adquisición en el equipo. Otra ventaja es el lanzamiento de una constelación de satélites, esto significa que varios satélites pueden ser lanzados de forma simultánea, además de que el lanzamiento también tendría un costo menor. El enviar en una misión una constelación de satélites puede también representar ventajas en la utilidad respecto al desempeño que tendría un satélite, como por ejemplo, en la frecuencia de observación de un fenómeno meteorológico desde diferentes tipos de ángulos o diseño de propósito específico como adquisición de imágenes [34], [35], [1].

Estos avances en la tecnología han estimulado el interés en la formación y sincronización de vehículos. El desarrollo de la computación, las capacidades en las comunicaciones y la miniaturización de la tecnología han elevado el interés en desarrollar vehículos y aeronaves con la capacidad de interactuar con otros vehículos. De esta forma se pueden mejorar la capacidad y el desempeño que puedan tener en sus tareas, mucho mas allá de lo que puede realizar un vehículo de forma individual.

1.2. Planteamiento del problema

El desempeño y control en la orientación en sistemas satelitales es muy importante para las comunicaciones e investigación científica, el mantener un constante flujo de datos con los satélites para poder llevar a cabo tareas como intercambio de información, almacenamiento de datos, requiere de sistemas que tengan un buen desempeño en su funcionamiento. La complejidad de controlar múltiples sistemas dinámicos y mejorar su desempeño aplicados a los sistemas espaciales han derivado en esta disertación. En este trabajo hemos aplicado técnicas de sincronización de formación en sistemas lagrangianos para sincronizar una constelación de satélites, al igual que algoritmos que permiten un control en la orientación de $\pm 360^\circ$ lo cual es logrado empleando el parámetro de Rodrigues modificado.

1.3. Objetivo

El objetivo general de la tesis es controlar la actitud y sincronización de una constelación de satélites de tal forma que la constelación siga una trayectoria de referencia establecida.

El objetivo principal se divide en dos objetivos específicos.

Objetivos específicos

- Control de seguimiento de una trayectoria de referencia establecida para el satélite líder de la constelación.
- Sincronización de una constelación de satélites de tal forma que sigan la trayectoria de referencia establecida por el líder.

1.4. Estado del Arte

1.4.1. Control de Actitud

El problema de control de actitud para un cuerpo rígido ha tenido atención considerable. Condiciones de controlabilidad local de un cuerpo rígido son estudiadas empleando actuadores de gas [6], se utilizan los ángulos de Euler para describir la posición angular. En [27] se propuso un enfoque de control de actitud utilizando control adaptable en el cual pueden verse involucradas grandes cargas o propiedades de masas desconocidas, fue introducido un modelo de tipo Lagrangiano para analizar el sistema y se utiliza el Gibbs vector para describir la posición angular. Debido a la singularidad presentada por esta forma de describir la posición sólo condiciones de controlabilidad local son alcanzadas. Más tarde en [9], [10] fue utilizado el concepto de pasividad para atacar el problema de control de actitud, son empleados ángulos de Euler y pasividad para probar convergencia del sistema. En [20] el problema de control de actitud es complementado utilizado el cuaternión. Se han utilizado diferentes tipos de actuadores para resolver el problema de control, entre ellos podemos encontrar ruedas inerciales [27], [11], en [13] se emplea radiación solar y un actuador magnético, en [26] se concentra en atacar el problema empleando actuadores magnéticos en enfoques basados en teoría lineal y no lineal. En [40] se emplean giroscopios con velocidad variable.

1.4.2. Representación de Actitud

Existen diversas herramientas que son utilizadas para representar la orientación en un cuerpo rígido en un espacio tridimensional. La relación entre la actitud y las ecuaciones cinemáticas que describen la orientación de un cuerpo rígido son mostradas en [24], aquí se muestran diferentes representaciones como los ángulos de Euler y cuaternión el cual es empleado en el

parámetro de Rodrigues y parámetro de Rodrigues modificado. Los ángulos de Euler y el cuaternión son las representaciones más utilizadas para describir la actitud de un cuerpo rígido, cada uno de ellos presenta sus ventajas y sus desventajas. Se puede mencionar que los ángulos de Euler poseen diferentes representaciones, por ejemplo si se quiere rotar un cuerpo 30° es necesario indicar qué convención se está utilizando x, y, z o y, x, z . Por otro lado está el cuaternión, el cual tiene ciertas ventajas respecto a los ángulos de Euler. Una de ellas es que tiene métodos de interpolación más simples y una representación más compacta. Del cuaternión se desprenden las representaciones del parámetro de Rodrigues o Gibbs vector [23] el cual es utilizado en [27], y el parámetro de Rodrigues modificado.

1.4.3. Sincronización de Sistemas

Sistemas de redes que se sincronizan han sido un ejemplo directamente tomado de la naturaleza, bandadas de aves, cardúmenes y demás ejemplos pueden ser encontrados en la naturaleza. Este tipo de comportamiento en éstos sistemas han sido motivo de inquietud por parte de los científicos para ser estudiados. La dinámica de éstas redes pueden ser modeladas mediante el comportamiento dinámico de cada agente en la red y el tipo de comunicación entre cada uno de los agentes involucrados en la red.

En [4] se ofrece un amplio panorama de cómo es que funcionan diferentes tipos de redes en sistemas dinámicos químicos, biológicos, redes neuronales y sociales, diferentes tipos de estructuras y dinámicas de redes complejas son descritas aquí. En [3] se mencionan diferentes topologías de redes empleadas en la sincronización de sistemas dinámicos. En [38] se ataca el fenómeno de sincronización de redes con parámetros desconocidos, se emplea adaptación en algunos elementos de la red conservando la sincronización global. En [37] además de estudiar el problema de sincronización de redes con parámetros

1.4. ESTADO DEL ARTE

desconocidos, se estudia la sincronización con diferentes tipos de agentes líderes. La técnica de pasividad y semi-pasividad es descrita en [32] en la sincronización de diferentes redes neuronales. En [33] y [36] se aborda el problema de sincronización en redes con retardos de tiempo. Diferentes técnicas aplicadas a la sincronización de redes como teoría de contracción son descritas en los trabajos [17], [29] y [39]. Más recientemente utilizada en la sincronización de redes es la técnica de pinning control. En [30], en [14] esta técnica es aplicada a redes aleatorias, condiciones de estabilidad local y global son estudiadas también.

1.5. Contribuciones

La principal contribución de este trabajo es

- Se emplea el algoritmo de parámetro de Rodrigues modificado para evitar singularidades en la orientación del satélite.
- Se desarrolla una ley de control de sincronización basada en la técnica de control por pinning y su validación mediante simulaciones.

1.6. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en 5 capítulos. En el capítulo 2 se encuentran las herramientas matemáticas necesarias para describir los diferentes tipos de representaciones de actitud de un cuerpo rígido y de como actúa el control adaptable. El capítulo 3 plantea el modelo dinámico del satélite, ecuaciones dinámicas y cinemáticas son desarrolladas en este capítulo. El capítulo 4 se refiere al desarrollo del controlador empleando control adaptable, se muestran los resultados mediante simulaciones comprobando el desempeño del controlador. Así como la sincronización de sistemas de redes, se emplea la técnica de control por pinning y se propone una ley de control para resolver el problema de sincronización en la constelación de satélites, así como resultados de simulación. Las conclusiones de esta disertación son expuestas en el capítulo 5.

Capítulo 2

Antecedentes

Este capítulo sirve como una introducción general a la dinámica de cuerpos rígidos en el espacio. Se exhiben las diferentes herramientas que definen la orientación de un cuerpo en el espacio. Las coordenadas de actitud (algunas veces llamados parámetros de actitud) son un conjunto de coordenadas $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ que describen la orientación de un cuerpo rígido relacionado a un marco de referencia de coordenadas. Se muestran algunas herramientas de cómo es que ocurre un cambio en la orientación de un cuerpo rígido en un marco de referencia. Así como una introducción a la teoría de grafos, el control cooperativo y la sincronización de sistemas dinámicos.

2.1. Actitud

Se le conoce como actitud de un cuerpo rígido, a la posición y orientación que ocupa ese cuerpo en el espacio respecto a un marco de referencia. El control de actitud de un satélite es la acción que se ejerce para cambiar la orientación del satélite respecto a un marco de referencia. El sistema de control de actitud estabiliza y orienta el satélite en un punto específico durante la misión.

2.2. Control Adaptable

El control adaptable se emplea como una alternativa cuando un sistema dinámico a ser controlado tiene parámetros desconocidos. La idea de utilizar un control adaptable es estimar los parámetros de la planta basándose en las medidas de la señal de salida de la planta y utilizar los parámetros estimados en la entrada de control de la misma. En este capítulo se plantea una descripción sintetizada de la técnica de control adaptable.

2.3. Model Reference Adaptive Control

El Control Adaptable por Modelo de Referencia (*MRAC*) tiene una representación por bloques como el de la Figura 2.1. El modelo de referencia es utilizado para generar la trayectoria de referencia x_m que se desea que siga la planta x_p , una ley de control que contiene los parámetros ajustables $\hat{\theta}$, el error de seguimiento $e = x_p - x_m$ el cual representa la diferencia de la salida de la planta de la trayectoria deseada y el mecanismo de ajuste que genera los parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el controlador. El esquema *MRAC* puede ser caracterizado como directo o indirecto. El esquema *MRAC* directo, el vector de parámetro θ del controlador es actualizado directamente por una ley de adaptación, mientras que en el caso indirecto θ es calculado en cada instante de tiempo resolviendo ciertas ecuaciones algebraicas, para saber más consultar [16].

Esquema MRAC

Ejemplo: Consideremos una planta de orden n -th

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathcal{R}^n$, y $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times q}$ son matrices con constantes desconocidas, el par (A, B) es controlable. El objetivo es escoger una entrada

2.3. MODEL REFERENCE ADAPTIVE CONTROL

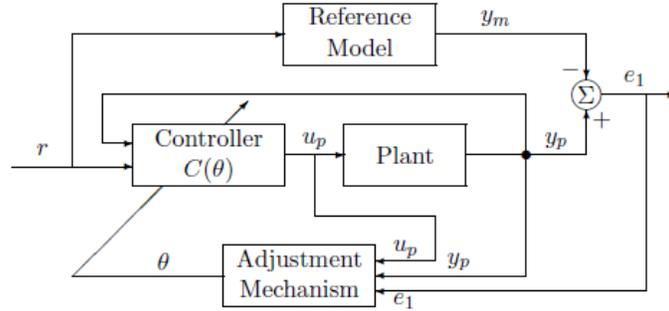


Figura 2.1: Esquema por bloques *MRAC*

de control $u \in \mathcal{R}^q$ tal que todas las señales de la planta en lazo cerrado y el estado de la planta x siga el estado x_m de un modelo de referencia especificado por la Ec.(2.2)

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \quad (2.2)$$

El modelo de referencia y la entrada r son escogidos tal que x_m represente la trayectoria deseada a seguir por el estado x de la planta.

Si las matrices A, B son desconocidas y se aplica la siguiente ley de control

$$u = -K^* x + L^* r \quad (2.3)$$

y se aplica a la Ec.(2.1) se obtiene la planta en lazo cerrado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(-K^* x + L^* r) \\ &= Ax - BK^* x + BL^* r \\ &= (A - BK^*)x + BL^* r \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si K^* y L^* son escogidos tal que se satisfagan las ecuaciones algebraicas

$$A - BK^* = A_m, \quad BL^* = B_m \quad (2.5)$$

entonces la matriz de transferencia en lazo cerrado es la misma que el modelo de referencia y $x \rightarrow x_m$ para cualquier señal de referencia de entrada acotada r . Asumimos que K^* y L^* existen, entonces proponemos la ley de control

$$u = -Kx + Lr \quad (2.6)$$

donde K y L son los estimados de K^* y L^* respectivamente para ser generados por la ley de adaptación.

Ley de Adaptación

Teniendo en cuenta que seguimos un modelo de referencia x_m , tenemos que la señal de error de seguimiento es $e = x - x_m$ y que la dinámica del error está dada por la Ec.(2.7), también hacemos notar que el error de parámetros \tilde{K}, \tilde{L} está dado por la diferencia de los parámetros estimados menos los parámetros reales $\tilde{K} = K - K^*$ y $\tilde{L} = L - L^*$.

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m \quad (2.7)$$

sustituyendo los valores de \dot{x} y \dot{x}_m de las Ecuaciones (2.1) y (2.2) sumando y restando el término $A_m x$ se obtiene la Ec.(2.8)

$$\dot{e} = A_m e + B(-\tilde{K}x + \tilde{L}r) \quad (2.8)$$

La Ec. (2.8) depende del valor de B . De la Ec. (2.5) asumimos que L^* puede tener un valor positivo o negativo definido pero que no conocemos, y $\Gamma^{-1} = L^* \text{sgn}(l)$. Entonces $B = B_m L^{*-1}$ y la Ec. (2.8) se convierte en

$$\dot{e} = A_m e + B_m L^{*-1}(-\tilde{K}x + \tilde{L}r) \quad (2.9)$$

completada la ecuación de la dinámica del error, se propone una función de Lyapunov

$$V = e^T P e + \text{tr}[\tilde{K}^T \Gamma \tilde{K} + \tilde{L}^T \Gamma \tilde{L}] \quad (2.10)$$

2.3. MODEL REFERENCE ADAPTIVE CONTROL

se deriva V y se obtiene

$$\dot{V} = e^T P \dot{e} + \dot{e}^T P e + 2tr[\tilde{K}^T \Gamma \dot{\tilde{K}} + \tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}] \quad (2.11)$$

se sustituyen los valores de la dinámica del error de la Ec. (2.9) en la Ec. (2.11) y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} = e^T P [A_m e + B_m L^{*-1} (-\tilde{K}x + \tilde{L}r)] \\ + [A_m e + B_m L^{*-1} (-\tilde{K}x + \tilde{L}r)]^T P e + 2tr[\tilde{K}^T \Gamma \dot{\tilde{K}} + \tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

ordenamos términos y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} = e^T (P A_m + A_m^T P) e \\ + 2e^T P B_m L^{*-1} (-\tilde{K}x + \tilde{L}r) + 2tr[\tilde{K}^T \Gamma \dot{\tilde{K}} + \tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}] \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $P = P^T > 0$ y satisface la ecuación de Liapunov $P A_m + A_m^T P = -Q$ para alguna $Q = Q^T > 0$. Entonces se tiene de la Ec. (2.13)

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2e^T P B_m L^{*-1} (-\tilde{K}x + \tilde{L}r) + 2tr[\tilde{K}^T \Gamma \dot{\tilde{K}} + \tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}] \quad (2.14)$$

siendo

$$e^T P B_m L^{*-1} \tilde{K}x = tr[\tilde{K}^T \Gamma \dot{\tilde{K}}] \quad (2.15)$$

y

$$-e^T P B_m L^{*-1} \tilde{L}r = tr[\tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}] \quad (2.16)$$

obtenemos los valores

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{K}} = \tilde{K} = B_m^T P e x^T sig(l) \\ \dot{\tilde{L}} = \tilde{L} = -B_m^T P e r^T sig(l) \end{aligned} \quad (2.17)$$

teniendo finalmente \dot{V} como

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0 \quad (2.18)$$

\dot{V} es semidefinida negativa y que $e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Empleamos lemma de Barbalat para establecer estabilidad asintótica [28].

2.4. Rotaciones

Un cuerpo rígido en el espacio puede ser representado por su posición y orientación con respecto a un marco de referencia. En esta sección se hace una descripción de cómo representar la orientación de un marco de referencia respecto a otro.

La Figura 2.2 muestra una rotación en tres dimensiones, el marco $0_0, x_0, y_0, z_0$ ha sido rotado sobre la coordenada z y se ha obtenido una rotación con un nuevo marco en las coordenadas $0_1, x_1, y_1, z_1$. Ésta es una rotación simple en tres dimensiones, la rotación de un cuerpo rígido puede ser descrita matemáticamente de diferentes maneras.

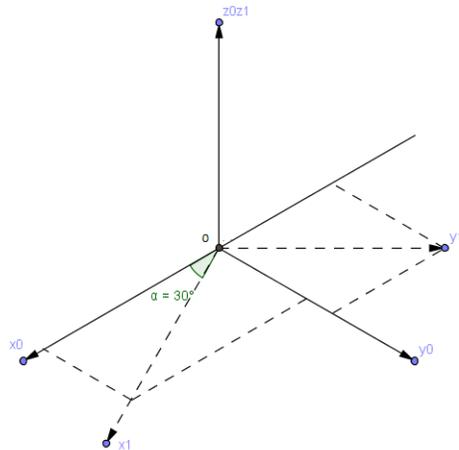


Figura 2.2: Rotación sobre la coordenada z por un ángulo α

La forma más común de representar la actitud de un cuerpo rígido son los ángulos de Euler. Algunos de ellos son ampliamente utilizados y reciben un nombre común como *roll*, *pitch* y *yaw* en el área de la aeronáutica. Otra forma

2.4. ROTACIONES

de representar la actitud de un cuerpo rígido es utilizando cuaterniones. En este capítulo se aborda cada una de las representaciones.

2.4.1. Ángulos de Euler

Un método común de determinar la rotación de un cuerpo es en términos de tres cantidades independientes llamados, ángulos de Euler. Éstos tres parámetros son suficientes para describir la orientación de un cuerpo rígido en el espacio. Una representación puede ser obtenida por un conjunto de tres ángulos $\alpha = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ tal como se muestra en la Figura 2.3 donde se realizan tres rotaciones sucesivas, una por cada ángulo, ésta rotación se conoce como *ZYZ* y es obtenida de la siguiente forma

- El marco de referencia se rota por un ángulo ϕ sobre el eje z , esta rotación es descrita por la matriz $R_{z,\phi}$.
- Se hace otra rotación ahora sobre el eje y' por un ángulo θ y es descrito por la matriz $R_{y',\theta}$.
- Por último se hace otra rotación sobre el eje z'' por un ángulo ψ el cual es descrito por la matriz $R_{z'',\psi}$.

El marco resultante de esta orientación es obtenido multiplicando cada una de las matrices de rotación $R_{z,\phi}, R_{y',\theta}, R_{z'',\psi}$.

$$\begin{aligned}
 R_{zyz} &= R_{z,\phi} R_{y',\theta} R_{z'',\psi} \\
 &= \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi C_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix} \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

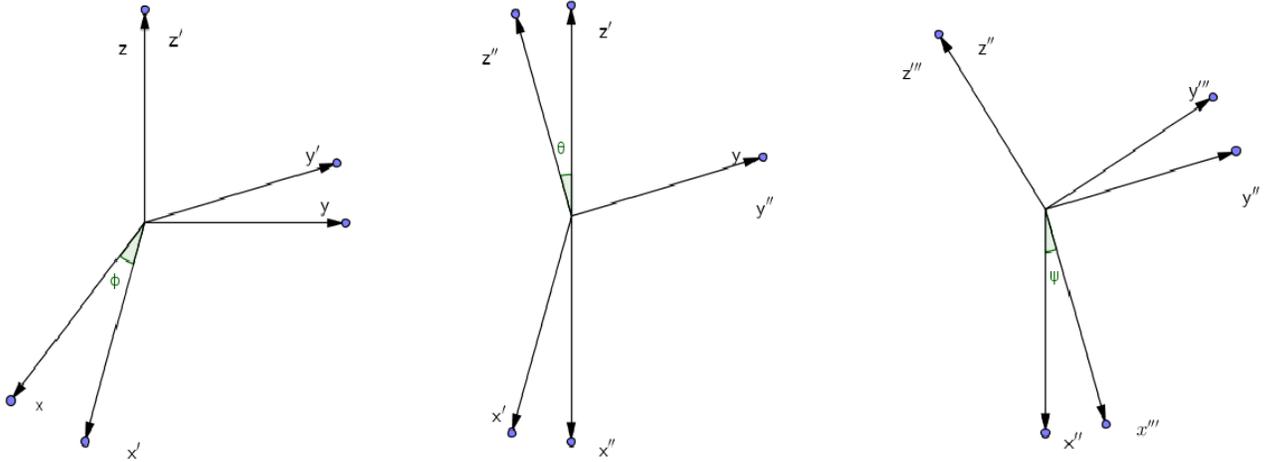


Figura 2.3: Representación de ángulos de Euler ZYZ

Existen diferentes representaciones para los ángulos de Euler [8]. La principal ventaja de utilizar los ángulos de Euler es que tienen una representación homogénea, útil para presentar diferentes transformaciones básicas pero también tienen varias desventajas como por ejemplo, el inconveniente de perder un grado de libertad en la rotación conocido como bloqueo de eje [7].

2.4.2. Cuaternión

Otra forma de representar la orientación de un cuerpo rígido es el cuaternión. La palabra cuaternión fue utilizada por primera vez por el matemático William Rowan Hamilton, él empleó los cuaterniones como una extensión para los números complejos [25]. El cuaternión es otra forma popular de representar la actitud de un cuerpo rígido ya que pueden describir rotaciones

2.4. ROTACIONES

largas. Los cuaterniones consisten en cuatro elementos los cuales están definidos en términos del ángulo de Euler correspondiente a un eje de rotación.

$$\beta_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta_1 = e_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad \beta_2 = e_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad \beta_3 = e_3 \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.20)$$

Donde $e_i = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ y β_i satisface la restricción Ec. (2.21), esta restricción geométrica describe una esfera unitaria de 4 dimensiones

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \quad (2.21)$$

Existen dos conjuntos de parámetros que describen la misma orientación, cambiando de conjunto (e, θ) y $(-e, -\theta)$ lo cual describe la misma rotación que β , utilizando $\theta' = \theta - 2\pi$ uno puede obtener la equivalencia de $\beta = -\beta$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) = \cos \left(\frac{\theta}{2} - \pi \right) = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = -\beta_0 \\ \beta_i &= e_i \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) = e_i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \pi \right) = e_i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = -\beta_i \end{aligned}$$

Por lo tanto el vector $-\beta$ describe la misma orientación que el vector β [22]. El cuaternión puede ser escrito como un vector de cuatro elementos

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

y está relacionado con la matriz de rotación por la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned} R(\bar{q}) &= (\beta_0^2 - |\beta_i|)I + 2\beta_i\beta_i^T + 2\beta_0\beta_i^\times \\ &= \begin{bmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2 + \beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3 - \beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3) & \beta_0^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3 + \beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3 + \beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3 - \beta_0\beta_1) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\beta_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{tr}(R)} \quad (2.24)$$

$$\beta_i = \frac{1}{4\beta_0} \begin{bmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Debido a que el cuaternión representa la actitud como una rotación de un ángulo alrededor de un eje, es una forma más natural de percibir una rotación a diferencia de los ángulos de Euler con la matriz de rotación. Entre otros beneficios, el cuaternión tiene una representación más compacta, ésta y otras ventajas pueden ser consultadas [7].

2.4.3. Parámetro de Rodrigues

El parámetro de Rodrigues es otra forma de poder representar la orientación de un cuerpo rígido en el espacio. El origen del vector q del parámetro de Rodrigues clásico (o Gibbs vector) es el aporte realizado por el matemático francés O. M. Rodrigues. Este conjunto de coordenadas para representar la actitud de un cuerpo rígido se reduce a un conjunto de tres parámetros mediante la transformación

$$q_i = \frac{\beta_i}{\beta_0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.26)$$

Empleando la Ec. (2.20), el parámetro de Rodrigues también puede ser definido utilizando el ángulo y los componentes de los ejes de rotación principales como

$$q_i = e_i \tan \frac{\phi}{2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.27)$$

A diferencia de los ángulos de Euler el parámetro de Rodrigues tiene una sola representación q_i , y se define únicamente para un ángulo de $-180^\circ, +180^\circ$ [21].

2.4. ROTACIONES

El parámetro de Rodrigues puede escribirse en forma vectorial como

$$\begin{aligned} Z(q) &= \frac{1}{2}[I_{3 \times 3} + qq^T + S(q)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 + q_1^2 & q_1q_2 - q_3 & q_1q_3 + q_2 \\ q_2q_1 + q_3 & 1 + q_2^2 & q_2q_3 - q_1 \\ q_3q_1 - q_2 & q_3q_2 + q_1 & 1 + q_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde $S(q)$ representa una matriz antisimétrica $q \in \mathbb{R}^3$ y está definida como

$$S(q) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Como se puede observar la representación de la orientación de un cuerpo rígido empleando el parámetro de Rodrigues es más sencilla que utilizando la matriz de rotación con los ángulos de Euler.

2.4.4. Parámetro de Rodrigues modificado

El parámetro de Rodrigues modificado σ [21] tiene una proyección sobre el plano $\beta_0 = 0$. Esta proyección resulta en un conjunto de parámetros los cuales no encuentran una singularidad hasta el eje principal de rotación en el ángulo $\phi = \pm 360^\circ$ a diferencia del parámetro de Rodrigues en el cual sólo se puede definir cualquier rotación hasta un ángulo de 180° . Por lo tanto, el parámetro de Rodrigues modificado puede describir cualquier rotación. La transformación entre el parámetro de Rodrigues modificado y el cuaternión es

$$\sigma_i = \frac{\beta_i}{1 + \beta_0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

Utilizando la ecuación (2.20) en la ecuación (2.30) el parámetro de Rodrigues modificado puede ser escrito por el ángulo principal como

$$\sigma_i = e_i \tan \frac{\phi}{2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.31)$$

En forma vectorial el parámetro de Rodrigues modificado puede escribirse como

$$\begin{aligned} Z(\sigma) &= \frac{1}{2} \left[I_{3 \times 3} \left(\frac{1 - \sigma^T \sigma}{2} \right) + \sigma \sigma^T + S(\sigma) \right] \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 & 2(\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3) & 2(\sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2) \\ 2(\sigma_2 \sigma_1 + \sigma_3) & 1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2 & 2(\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1) \\ 2(\sigma_3 \sigma_1 - \sigma_2) & 2(\sigma_3 \sigma_2 + \sigma_1) & 1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mientras que el parámetro de Rodrigues presenta una singularidad en $\beta_0 = 0$ ($\phi = \pm 180^\circ$) el parámetro de Rodrigues modificado mueve esa singularidad hasta el punto $\beta_0 = -1$ ($\pm 360^\circ$) lo cual es mas que suficiente para describir cualquier rotación de un cuerpo rígido [23].

2.5. Teoría de Grafos

Una gráfica \mathcal{G} es un par ordenado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ que consiste de un conjunto de \mathcal{V} nodos y un conjunto $\mathcal{E} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ de enlaces.

Una gráfica \mathcal{G} se dice que es indirecta si el enlace (i, j) e (j, i) pertenecen a \mathcal{E} , se utiliza una flecha bidireccional para representar este enlace, para una gráfica indirecta, si el nodo j es vecino del nodo i entonces el nodo i es vecino del nodo j . De otro modo la gráfica se dice que es directa, ver [2].

2.5.1. Matriz Laplaciana

La matriz Laplaciana $L(G) = [l_{i,j}]_{n \times n}$ es una representación matricial de una gráfica, y es independiente de la orientación de la gráfica. La matriz Laplaciana $L(G)$ es el resultado de la matriz de grado $D(G)$ y la matriz adyacente $A(G)$ que describe una gráfica, $L(G) = D(G) - A(G)$ [15].

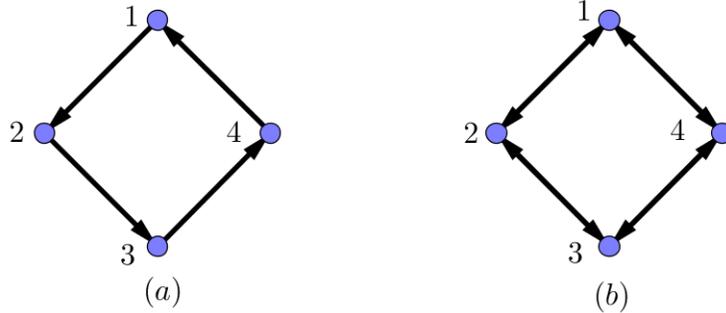


Figura 2.4: (a): gráfica directa, cada uno de los nodos está enlazado a otro nodo, la información fluye en una sola dirección, (b): gráfica indirecta, el intercambio de información entre los nodos es bidireccional

Componentes

$$[l_{i,j}]_{n \times n} = \begin{cases} deg_i & i = j \\ -1 & \text{si } n_i \text{ adyacente } n_j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.33)$$

Propiedades

- $L(G)$ es simétrica.
- $L(G)$ es semidefinida positiva $\forall i$ y con eigenvalores ≥ 0 .
- $L(G)$ es una M-matriz [18].
- El segundo eigenvalor λ_2 es el valor de la conectividad algebraica [38].

Otra forma de escribir la Matriz Laplaciana es por medio de su forma cuadrática

$$xL(G)x^T = \sum_{(i,j) \in E} (x_i - x_j)^2 \quad (2.34)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

2.6. Control Cooperativo

Un sistema cooperativo consiste de un grupo de agentes o sistemas autónomos con capacidades de comunicación entre ellos, el objetivo es lograr comportamientos grupales en todos los agentes de la red intercambiando información a través de la comunicación entre ellos. Un sistema cooperativo está integrado por los siguientes elementos: objetivo del grupo, agentes que lo conforman, algoritmos de control que se encargan del movimiento de cada uno de los agentes.

Algunos ejemplos de aplicación del control cooperativo aplicado a diferentes sistemas dinámicos son:

- **Control de formación:** Aplicado en aeronaves donde es importante mantener la estabilidad, el objetivo es mantener la distancia/posición entre un grupo de agentes respecto a los valores deseados. Por ejemplo, en interferometría espacial donde múltiples satélites pueden ser utilizados para generar un patrón de interferometría hacia un punto dado, esto implica lograr mantener la posición de cada uno de ellos.
- **Sincronización:** El objetivo es que un grupo de agentes converjan a una variable de interés, por ejemplo una fase de oscilación entre ellos, lo cual puede ser aplicado a sistemas biológicos o sistemas distribuidos.
- **Sensado Óptimo:** El objetivo es encontrar una posición óptima del grupo de agentes para maximizar su desempeño en el sensado de ciertas variables.

Los problemas de control cooperativo conciernen al intercambio de información entre los agentes en diferentes escenarios. Para lograr un objetivo de grupo, cada agente necesita información de otro agente. Si el agente i tiene acceso a la información del agente j , significa que la información del agente

j fluye al agente i es decir el agente j es un agente vecino del agente i . En un grupo de agentes la estructura de la información de flujo es representada como una gráfica, donde cada agente es un nodo y la información de flujo entre ellos es representada como enlaces.

2.7. Sincronización de sistemas dinámicos

Un modelo de red puede ser visto como una gráfica generalizada la cual está conformada por un conjunto de nodos, estos nodos son caracterizados como un sistema dinámico y están enlazados a través de los estados con los otros nodos de la red.

Una red dinámica de n nodos puede ser descrita por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la siguiente forma

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=i}^N l_{ij} h(x_j) \quad (2.35)$$

Donde $f(\cdot) \in \mathcal{R}^n$ es la dinámica del i -ésimo nodo, σ es la constante de la fuerza de acoplamiento, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ es la función de salida a través de la cual los nodos de la red son acoplados, y $\mathbb{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de acoplamiento definida por la matriz Laplaciana.

2.7.1. Convergencia y estabilidad

El sistema dinámico caracterizado por la Ec. (2.35) logra la sincronización asintótica si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i - x_j) = 0 \quad (2.36)$$

la sincronización de la red depende de la dinámica individual de los nodos y la estructura de las interconexiones entre ellos.

Considere el sistema definido por la Ec. (2.35) y suponga que existe una función V definida positiva para la cual la derivada a lo largo de las trayectorias \dot{V} es negativa definida o semidefinida negativa y el término $\sigma \sum_{j=i}^N l_{ij} h(x_j)$ es acotado para todo $t > 0$. Si l_{ij} es una M-matriz entonces el origen es asintóticamente estable, si todas las condiciones se mantiene y V es radialmente no acotada entonces el origen será global y asintóticamente estable [12].

2.7.2. Control por pinning

En ocasiones la sincronización no es el único objetivo que se quiere lograr. En control de formación, por ejemplo, el objetivo no es sólo lograr que una red determinada de sincronice, también se desea que toda la dinámica de la red siga una trayectoria de referencia deseada.

El esquema de control por pinning, es una estrategia de control por retroalimentación para sincronización de una red dinámica compleja. Específicamente un pin (líder) es sumado a la red, este pin define una trayectoria deseada. El pin (líder) controla sólo una fracción de los nodos de la red ejerciendo una acción de control sobre el resto de los nodos los cuáles serán llamados seguidores [5], [30], [19].

Un sistema de red de control por pinning de N nodos puede ser modelado como se muestra en la Ec. (2.37)

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=i}^N l_{ij} h(x_j) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.37)$$

donde u_i es la entrada de control definida como

$$u_i = \delta_i q_i (x_i - x_s) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.38)$$

2.7. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

x_s determina la función de control del nodo i , δ_i es 1 si el nodo i es un pin líder, y 0 si no lo es.

$$\dot{x}_s = f(x_s) \quad (2.39)$$

denota la trayectoria deseada de la red (también llamada trayectoria de pin).

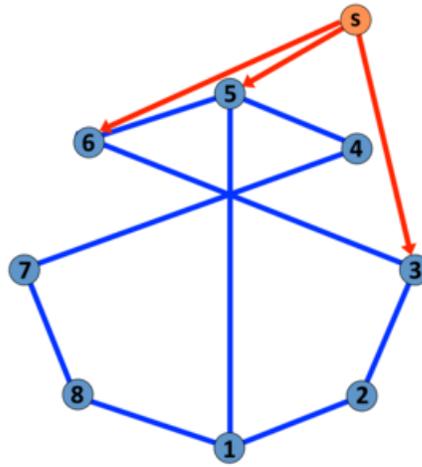


Figura 2.5: Esquema de control por pinning

En la Figura 2.5 se muestra un esquema ilustrativo del control por pinning. El pin (nodo rojo) controla directamente sólo un subconjunto de nodos de la red (nodos azules). El agente S define la trayectoria a seguir, la acción de control se propaga hacia el resto de los nodos de la red por medio de las interconexiones (líneas en azul) a lo largo de los nodos de la red.

El objetivo del control por pinning es hacer que la trayectoria de cada nodo converja a la trayectoria deseada x_s descrita por el pin líder.

Modelo dinámico y control de actitud de satélite

En esta sección se aborda el diseño del modelo dinámico del satélite, ecuaciones dinámicas y cinemáticas involucradas en el diseño y características del modelo que funcionan para el desarrollo del controlador. El diseño del controlador hace que el satélite siga una trayectoria de referencia dada, los parámetros de la matriz de inercia son estimados por una ley de adaptación. Se emplea el parámetro de Rodrigues modificado para describir la orientación del satélite.

3.1. Ecuaciones Cinemáticas

La cinemática es la rama de la dinámica que estudia los movimientos de una partícula considerando las masas y las fuerzas de ésta. Se debe elegir un sistema de coordenadas para definir la posición específica de un cuerpo rígido en el espacio. Un sistema de coordenadas está definido por dos cosas. Uno, un sistema de coordenadas origen que especifica la posición en el espacio. Dos, la orientación dada por el sistema de coordenadas elegidas.

3.2. ECUACIONES DINÁMICAS

Las ecuaciones cinemáticas relacionan la velocidad angular ω con la posición del satélite q , empleando el cuaternión junto con el parámetro de Rodrigues modificado, la ecuación que describe la relación cinemática del satélite puede escribirse como

$$\dot{q} = Z(q)\omega \quad (3.1)$$

donde $Z(q) = \frac{1}{2} \left[I_{3 \times 3} \left(\frac{1-q^T q}{2} \right) + qq^T + S(q) \right]$ es el parámetro de Rodrigues modificado. $\omega \in \mathbb{R}^3$, $q \in \mathbb{R}^3$ y $S(q)$ representa una matriz antisimétrica que está definida como

$$S(q) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3.2. Ecuaciones Dinámicas

Las ecuaciones dinámicas describen la evolución de la velocidad angular del satélite. Aquí se aborda la dinámica de los cuerpos rígidos ofreciendo una descripción del modelo que describe la dinámica del satélite desde un enfoque Lagrangiano.

Para definir el problema de control de actitud de un satélite y basándose en la Figura 4.2 primero se define un marco de referencia arbitrario a lo largo de los ejes del satélite x, y, z , también se define un marco de referencia llamado marco inercial X_G, Y_G, Z_G el cual determinará la posición en que debe orientarse el satélite. Por último se asume que se aplica una fuerza o torque a través de cada uno de los ejes del satélite para realizar el control de posición deseado en el satélite.

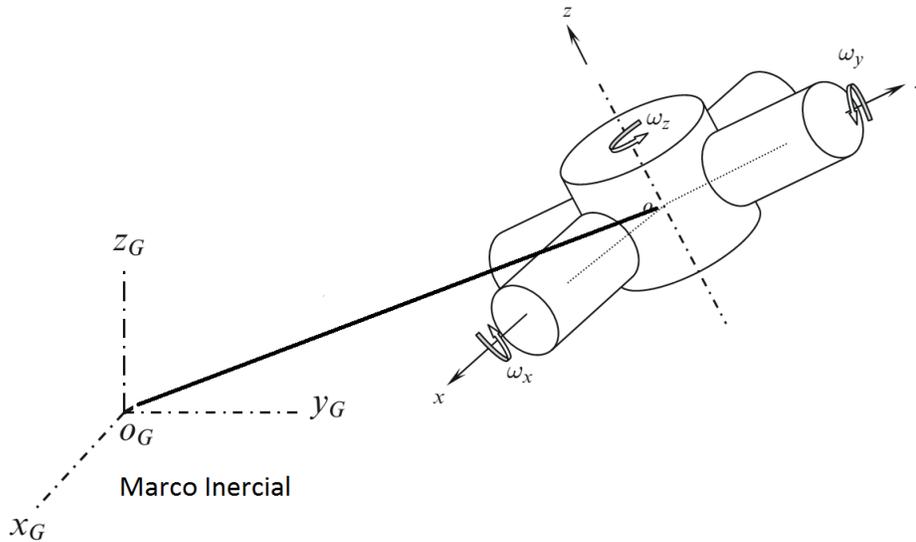


Figura 3.1: Rotación de una nave espacial alrededor de su eje de simetría.

3.2.1. Dinámica de un cuerpo rígido

Considerando las ecuaciones de Euler que especifican la relación entre la matriz de inercia H , la velocidad angular ω y el torque τ , la dinámica de un cuerpo rígido puede expresarse con la Ec. (3.3)

$$H\dot{\omega} = S(\omega)H\omega + \tau \quad (3.3)$$

la matriz de inercia es tomada como una constante, donde $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. La matriz $S(\cdot)$ denota una matriz antisimétrica de 3×3 , $\tau \in \mathbb{R}^3$

3.2.2. Formulación Lagrangiana

Las ecuaciones Euler-Lagrange describen la evolución de un sistema sujeto a restricciones holonómicas. El Lagrangiano del sistema es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial. Con la formulación Lagrangiana las ecuaciones de movimiento pueden ser derivadas de forma sistemática, independientemente del marco de referencia de coordenadas, donde un conjunto de coordenadas q_i con $i = 1, 2, \dots, n$. Donde q_i son llamadas coordenadas generalizadas. Por lo tanto, el Lagrangiano \mathcal{L} del sistema puede ser definido en función de las coordenadas generalizadas

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (3.4)$$

donde \mathcal{T} denota la *energía cinética* y \mathcal{U} la *energía potencial* del sistema.

La ecuación de Lagrange puede ser expresada como indica Ec. (3.5)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

donde τ_i es la *fuerza generalizada* asociada a las coordenadas generalizadas q_i .

En general la Ec.(3.5) se puede expresar como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.6)$$

En la ecuación anterior se tienen tres tipos de términos, el primero involucra la segunda derivada de las coordenadas generalizadas q , donde $M(q)$ es la matriz de inercia. El segundo, son términos cuadráticos de la primer derivada de q , donde $C(q, \dot{q})$ es la llamada matriz de coriolis y sus elementos k, j -th de la matriz $C(q, \dot{q})$ están definidos como

$$\begin{aligned} c_{kj} &= \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q)\dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_j} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

y $g(q)$ representa las fuerzas gravitacionales y τ el torque ejercido.

3.2.3. Propiedades del modelo dinámico

Existen dos propiedades notables del sistema dinámico (3.6) que son realmente útiles en el diseño de controladores e identificación de parámetros. La primera es la propiedad de la conservación de la energía y la segunda es linealidad en los parámetros. A continuación se mencionan cada una de ellas formalmente.

Propiedad Antisimétrica

La propiedad antisimétrica se refiere a una importante relación entre la matriz de inercia $M(q)$ y la matriz de $C(q, \dot{q})$, esto es, la matriz

$$N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \quad (3.8)$$

es antisimétrica, la cual es vista como una expresión de la conservación de la energía [31].

Linealidad en los parámetros

La Ec. (3.6) que describe la dinámica del sistema que tiene parámetros lineales, esto es, existe una función $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$, la cual se puede asumir que es completamente conocida y un vector θ tal que la Ec. (3.6) puede re-escribirse como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = \tau \quad (3.9)$$

la función $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es llamada regresor y θ es el vector de parámetros. Ambas propiedades juegan un papel decisivo en el diseño del controlador.

3.3. Modelo dinámico del satélite basado en Modelo Lagrangiano

Mencionando anteriormente las ecuaciones que describen la cinemática y dinámica del satélite descritas con las Ec. (3.10) y (3.11) se tiene

$$\dot{q}_i = Z_i(q_i)\omega_i \quad (3.10)$$

$$H_i\dot{\omega}_i = S_i(w_i)H_i\omega_i + \tau_i \quad (3.11)$$

Eligiendo como coordenadas en el espacio de estados los componentes de los vectores q_i y \dot{q}_i . Las ecuaciones que describen la actitud del satélite pueden reescribirse como un modelo Lagrangiano¹.

$$H_i^*(q_i)\ddot{q}_i + C_i^*(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i = F_i \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_i &= Z_i^T F_i \\ H_i^*(q_i) &= Z_i^{-T} H_i Z_i^{-1} \\ C_i(q_i, \dot{q}_i) &= -Z_i^{-T} H_i Z_i^{-1} \dot{Z}_i Z_i^{-1} - Z_i^{-T} S(\omega) H_i Z_i^{-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $i = 0, 1, \dots, p$ es el número de satélites en la constelación, $i = 0$ denota el líder de la constelación e $i = 1, 2, \dots, p$ los seguidores.

Como se mencionó anteriormente la Ec. (3.12) describe la actitud de modelo del satélite basado en un modelo Lagrangiano. De esta manera se aprovechan las características ofrecidas por el modelo para realizar el desarrollo del controlador, estas propiedades son la de **conservación de la energía** con la matriz $\dot{H}^* - 2C^*$ y la de la **linealidad en los parámetros**.

¹apéndice B

3.3. MODELO DINÁMICO DEL SATÉLITE BASADO EN MODELO LAGRANGIANO

Utilizando las expresiones $H^*(q)$ y $C(q, \dot{q})$, la matriz $\dot{H}^* - 2C^*$ es igual a

$$\dot{H}^* - 2C^* = \frac{d}{dt}(Z^{-T})HZ^{-1} - Z^T H \frac{d}{dt}(Z^{-1}) + 2Z^{-T}S(\omega)Z^{-1} \quad (3.14)$$

Además de tener la propiedad de que la matriz $\dot{H}^* - 2C^*$ es antisimétrica, los parámetros de la matriz de inercia H son lineales. Utilizando ambas propiedades se realiza una parametrización del modelo de satélite.

Control de actitud del satélite

4.1. Control de líder de la constelación

Empleando el modelo Lagrangiano obtenido para el satélite Ec.4.1, caracterizando q_0 al líder de la constelación

$$H_0^*(q_0)\ddot{q}_0 + C_0^*(q_0, \dot{q}_0)\dot{q}_0 = F_0 \quad (4.1)$$

Se obtiene una ley de control ideal

$$F_0 = H_0^*(q_r)\ddot{q}_r + C_0^*(q_r, \dot{q}_r)\dot{q}_r - k_d s \quad (4.2)$$

donde $H_0^* \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $C_0^* \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0 \in \mathbb{R}^3$, $F_0 \in \mathbb{R}^3$.

Suponemos que las salidas del sistema, la posición y la velocidad para el líder son medibles y que la señal deseada y sus derivadas son acotadas $q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d$.

Sea \hat{a}_0 el vector de parámetros estimado y \tilde{a}_0 el error de estimación de parámetros

$$\tilde{a}_0 = \hat{a}_0 - a_0 \quad (4.3)$$

4.1. CONTROL DE LÍDER DE LA CONSTELACIÓN

la diferencia de la salida deseada q_0 menos la señal deseada q_d el error de seguimiento \tilde{q}_0 ,

$$\tilde{q}_0 = q_0 - q_d \quad (4.4)$$

se define un vector s_0 como una medida del error de seguimiento

$$s_0 = \dot{\tilde{q}}_0 - \lambda \tilde{q}_0 \quad (4.5)$$

donde λ es una constante positiva. La Ec. (4.5) se puede reescribir como

$$s_0 = \dot{q}_0 - \dot{q}_r \quad (4.6)$$

donde \dot{q}_r es la diferencia de la derivada de la posición deseada menos el error de seguimiento

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \lambda \tilde{q}_0 \quad (4.7)$$

tomando como función de Lyapunov la siguiente ecuación

$$V = \frac{1}{2}[s_0^T H_0^* s_0 + \tilde{a}_0^T \Gamma_0 \tilde{a}_0] \quad (4.8)$$

diferenciando V tenemos

$$\dot{V} = \frac{1}{2}s_0^T \dot{H}_0^* s_0 + s_0^T H_0^* \dot{s}_0 + \tilde{a}_0^T \Gamma_0 \dot{\tilde{a}}_0 \quad (4.9)$$

se tiene que $\dot{s}_0 = \dot{\tilde{q}}_0 - \dot{\tilde{q}}_r$ por lo que $H_0^* \dot{s}_0$ es igual a

$$H_0^* \dot{s}_0 = H_0^*(\dot{\tilde{q}}_0 - \dot{\tilde{q}}_r) \quad (4.10)$$

se sustituye la Ec. (4.10) en la Ec. (4.9)

$$\dot{V} = \frac{1}{2}s_0^T \dot{H}_0^* s_0 + s_0^T (H_0^* \dot{\tilde{q}}_0 - H_0^* \dot{\tilde{q}}_r) + \tilde{a}_0^T \Gamma_0 \dot{\tilde{a}}_0 \quad (4.11)$$

de la Ec. (4.1) tenemos

$$\begin{aligned} H_0^* \dot{\tilde{q}}_0 &= F_0 - C_0^* \dot{q}_0 \\ &= F_0 - C_0^*(s_0 + \dot{q}_r) \\ &= F_0 - C_0^* s_0 - C_0^* \dot{q}_r \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.1. CONTROL DE LÍDER DE LA CONSTELACIÓN

se sustituye el valor de $H_0^* \ddot{q}_0$ de la Ec. (4.12) en la Ec. (4.11)

$$\dot{V} = \frac{1}{2} s_0^T \dot{H}_0^* s_0 + s_0^T (F_0 - H_0^* \ddot{q}_r - C_0^* s_0 - C_0^* \dot{q}_r) + \tilde{a}_0^T \Gamma_0 \dot{\tilde{a}}_0 \quad (4.13)$$

utilizando la propiedad de la matriz antisimétrica ($H_0^* - 2C_0^*$) se tiene

$$\dot{V} = s_0^T (F_0 - H_0^* \ddot{q}_r - C_0^* \dot{q}_r) + \tilde{a}_0^T \Gamma_0 \dot{\tilde{a}}_0 \quad (4.14)$$

tomando como ley de control

$$F_0 = \hat{H}_0^* \ddot{q}_r + \hat{C}_0^* \dot{q}_r - k_d s_0 \quad (4.15)$$

donde \hat{H}_0^* y \hat{C}_0^* son los estimados de H_0^* y C_0^* , siendo k_d una matriz simétrica positiva definida se tiene

$$\dot{V} = s_0^T (\tilde{H}_0^* \ddot{q}_r + \tilde{C}_0^* \dot{q}_r - k_d s_0) + \tilde{a}_0^T \Gamma_0 \dot{\tilde{a}}_0 \quad (4.16)$$

donde \tilde{H}_0^* y \tilde{C}_0^* son

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0^* &= \hat{H}_0^* - H_0^* \\ \tilde{C}_0^* &= \hat{C}_0^* - C_0^* \end{aligned} \quad (4.17)$$

la parametrización que ofrece el modelo permite definir una matriz $Y_0^*(q_0, \dot{q}_0, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$ tal que

$$\tilde{H}_0^* \ddot{q}_r + \tilde{C}_0^* \dot{q}_r = Y_0^*(q_0, \dot{q}_0, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \tilde{a}_0 \quad (4.18)$$

donde \tilde{a} define el error de estimación de parámetros. Y la entrada de control Ec. (4.15) se convierte en

$$F_0 = Y_0^*(q_0, \dot{q}_0, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \tilde{a}_0 - k_d s_0 \quad (4.19)$$

siguiendo con la evaluación de \dot{V} tenemos

$$\dot{V} = s_0^T [Y_0^*(q_0, \dot{q}_0, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \tilde{a}_0 - k_d s_0] + \tilde{a}_0^T \Gamma_0 \dot{\tilde{a}}_0 \quad (4.20)$$

ordenando cada uno de los términos tenemos \dot{V} igual a

$$\dot{V} = -s_0^T k_d s_0 + \tilde{a}_0^T [\Gamma_0 \dot{\tilde{a}}_0 + Y_0^{*T} s_0] \quad (4.21)$$

4.1. CONTROL DE LÍDER DE LA CONSTELACIÓN

ahora se puede definir la ley de adaptación $\dot{\tilde{a}}_0$ como

$$\dot{\tilde{a}}_0 = -\Gamma_0^{-1} Y_0^{*T} s_0 \quad (4.22)$$

obteniendo finalmente \dot{V} como

$$\dot{V} = -s_0^T k_d s_0 \leq 0 \quad (4.23)$$

Esto muestra que \dot{V} es semidefinida negativa, para probar estabilidad asintótica nos apoyamos del lema de Barbalat [28]. Esto muestra que $\dot{V} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ lo cual implica que el error $s_0 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ mostrando que $\tilde{q} \rightarrow 0$ y $\dot{\tilde{q}}_0 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La ley de control queda expresada como

$$\begin{aligned} \tau_0 &= Z_0^T (\tilde{H}_0^* \ddot{q}_r + \tilde{C}_0^* \dot{q}_r - k_d s_0) \\ &= Z_0^T (Y_0^* \tilde{a}_0 - k_d s_0) \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.1.1. Resultados de Simulación

Son llevadas a cabo simulaciones numéricas para comprobar la eficacia de la ley de control propuesta para el sistema.

La matriz de inercia H_0^* del satélite tiene los siguientes valores

$$H_0^* = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 20 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Las ganancias de control k_d y Γ_0^{-1} son elegidas en base el mejor desempeño obtenido en las simulaciones, comprobando que no es necesaria una ganancia alta para un buen desempeño del controlador.

$$\begin{aligned} k_d &= 30I \\ \Gamma_0^{-1} &= 20I \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.1. CONTROL DE LÍDER DE LA CONSTELACIÓN

Las condiciones iniciales para la posición y actitud son $q_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ y $\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$. La ley de adaptación se encarga de estimar los parámetros de la matriz de inercia para ser empleados en la ley de control. El objetivo es que el satélite siga una trayectoria de referencia deseada q_d .

La Figura 4.2 muestra la trayectoria seguida por el satélite líder q_0 y la señal de referencia deseada q_d .

En la Figura 4.4 se muestra los seis parámetros estimados por la ley de adaptación, en este caso los parámetros no convergen a los parámetros reales debido a que no existe el factor de excitación persistente [16].

4.1. CONTROL DE LÍDER DE LA CONSTELACIÓN

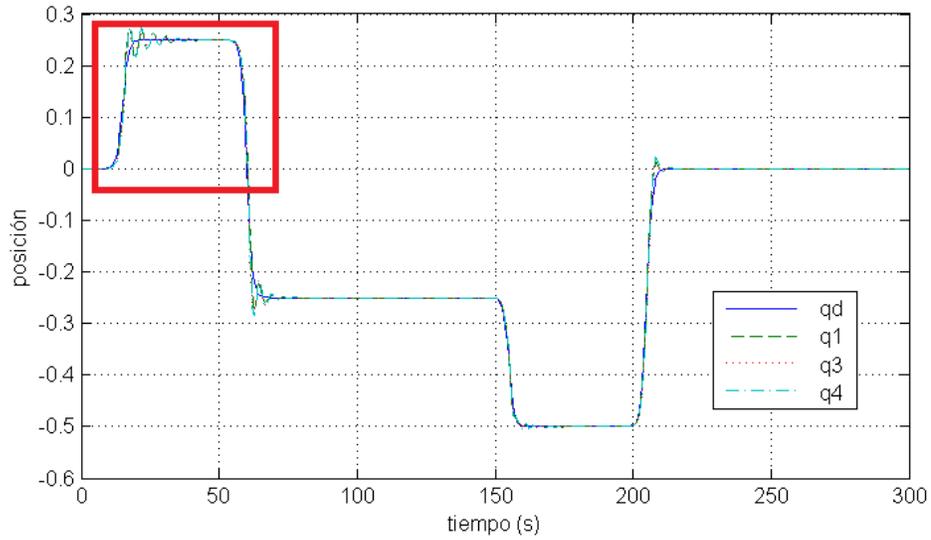


Figura 4.1: Salida deseada q_d y salida de satélite q

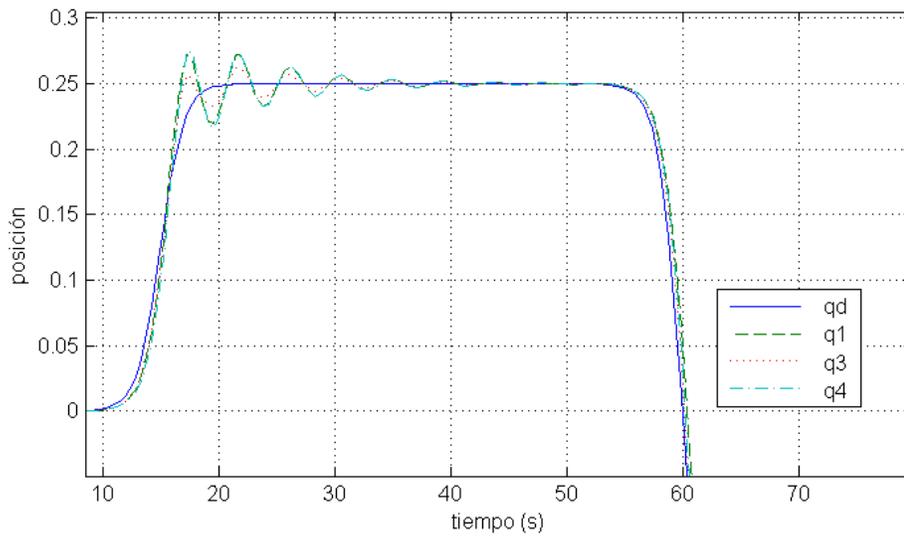


Figura 4.2: Ampliación de la salida del líder q y referencia q_d

4.1. CONTROL DE LÍDER DE LA CONSTELACIÓN

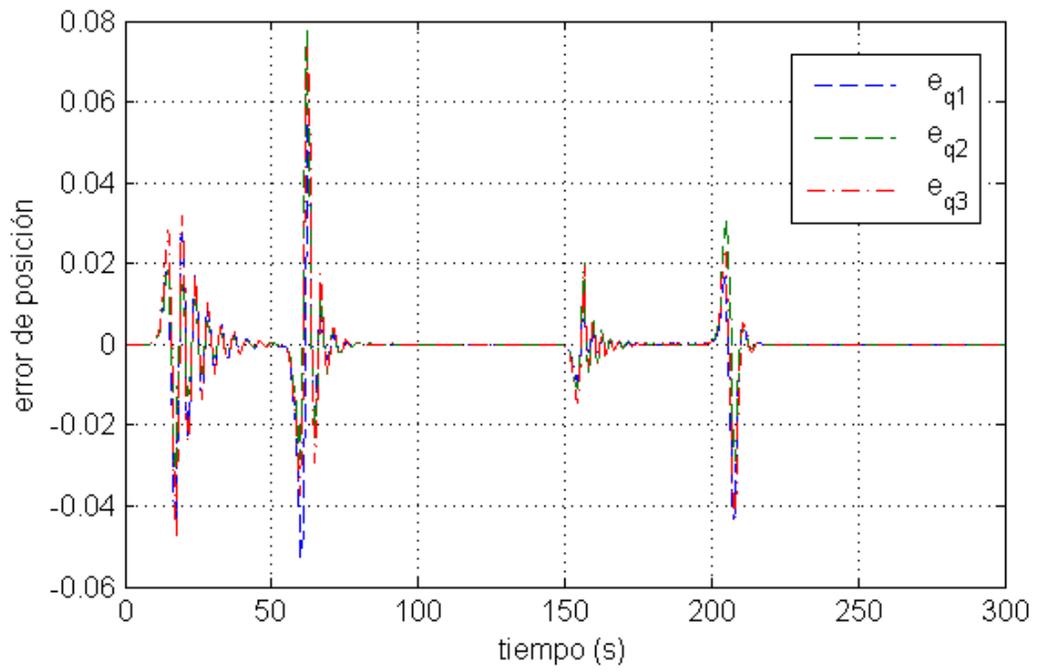


Figura 4.3: Salida del error de seguimiento $\tilde{q} = q - q_d$, señal de error de seguimiento de la señal deseada q_d y la señal q , se observa que cuando hay un cambio drástico en la señal deseada la señal tiende a seguir esta trayectoria minimizando el error

4.1. CONTROL DE LÍDER DE LA CONSTELACIÓN

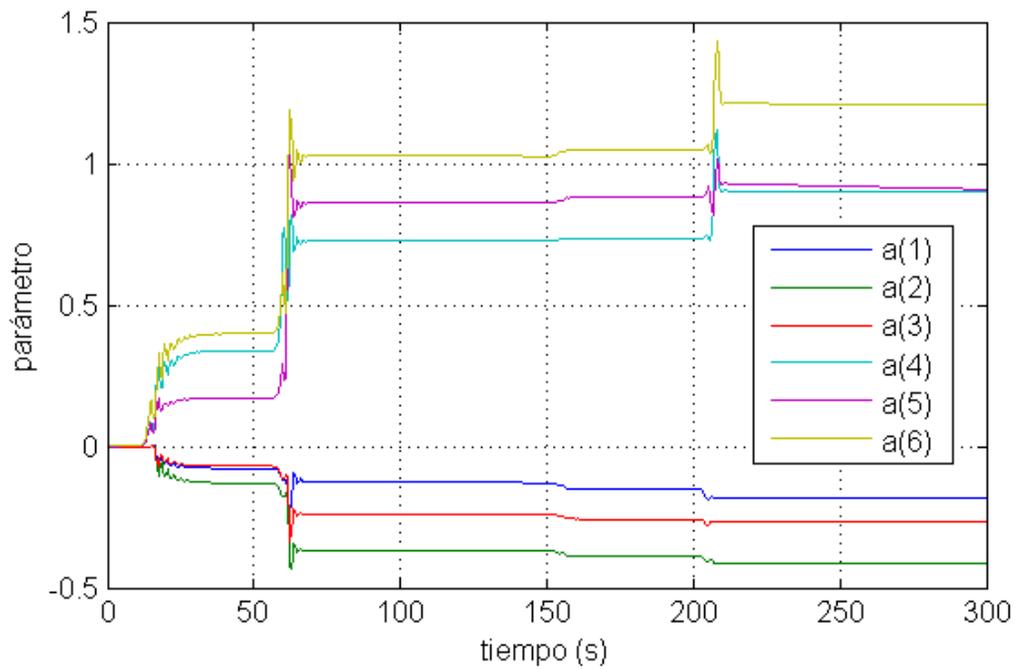


Figura 4.4: Parámetros estimados \hat{a}_0 , en este caso los parámetros no convergen a los parámetros reales debido a que no existe el factor de excitación persistente.

4.1. CONTROL DE LÍDER DE LA CONSTELACIÓN

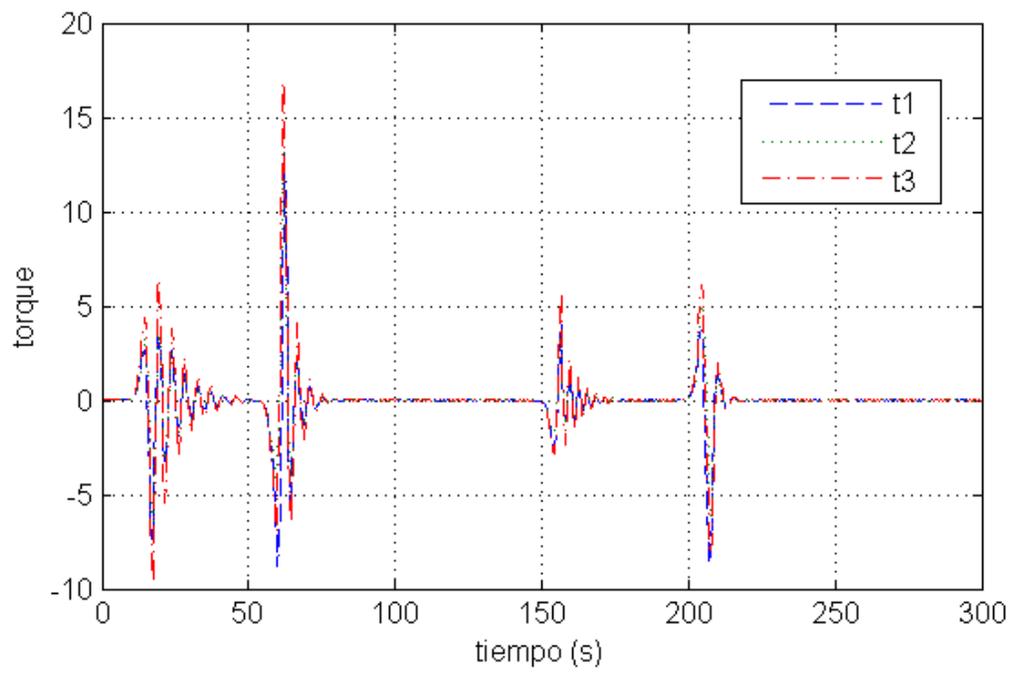


Figura 4.5: Torque aplicado a las ruedas de inercia

4.2. Control Adaptable de los satélites seguidores

En esta sección se propone el diseño del controlador y la estrategia de sincronización para la constelación, los factores que influyen en la sincronización de sistemas son, el intercambio de información entre cada uno de los agentes que conforman la red, así como las condiciones de convergencia y estabilidad en la sincronización. En la última sección se muestran los resultados obtenidos empleando la ley de control propuesta para la sincronización de la constelación, las pruebas por simulación validan los resultados obtenidos.

4.2.1. Control de Constelación por Pinning

La constelación esta conformada por cuatro satélites con una configuración en anillo como la que se muestra en la Figura 4.6.

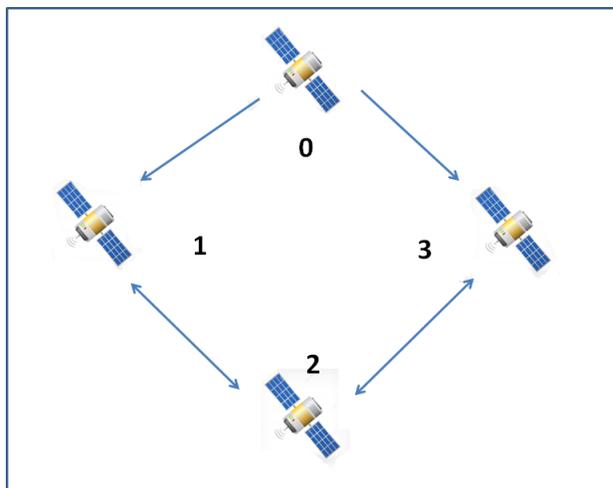


Figura 4.6: Configuración de la constelación

4.2. CONTROL ADAPTABLE DE LOS SATÉLITES SEGUIDORES

Se define el modelo para los p satélites que forman la constelación

$$H_i^*(q_i)\ddot{q}_i + C_i^*(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i = F_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.27)$$

donde $i = 0, 1, \dots, p$ con $i = 0$ denota al líder e $i = 1, 2, \dots, p$ los seguidores.

Se emplea la siguiente ley de control para la sincronización de la constelación

$$F_i = H_i^*(q_i)\ddot{q}_{i,r} + C_i^*(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{i,r} - k_1 s_i + k_2 s_{i-1} + k_2 s_{i+1} \quad (4.28)$$

donde $k_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una ganancia positiva definida en retroalimentación para el i -th satélite y $k_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia de acoplamiento entre los miembros adyacentes $(i - 1)$ e $(i + 1)$ de la red. Se define el error de posición como

$$\tilde{q}_i = q_i - q_r \quad (4.29)$$

y se define un vector s_i como un como una medida del error de seguimiento y de sincronización.

$$\begin{aligned} s_i &= \dot{q}_i - \dot{q}_{i,r} \\ s_{i-1} &= \dot{q}_{i-1} - \dot{q}_{i-1,r} \\ s_{i+1} &= \dot{q}_{i+1} - \dot{q}_{i+1,r} \end{aligned} \quad (4.30)$$

La trayectoria a seguir por la constelación esta dada por el satélite líder q_0 , el término de acoplamiento está en la ley de control para que cada uno de los satélites seguidores en la constelación se sincronicen con la posición del líder. Continuando con el diseño, se tiene que la trayectoria es denotada por q_r , el vector de velocidad de referencia $\dot{q}_{i,r}$ esta dado por la velocidad común deseada \dot{q}_r y el error de posición.

$$\dot{q}_{i,r} = \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q}_i = \dot{q}_d - \Lambda(q_i - q_d) \quad (4.31)$$

Empleando teoría de gráficas se puede definir la forma de interconexión de la red, haciendo abuso de la notación se reescribe el término de acoplamiento Ec. (4.32)

4.2. CONTROL ADAPTABLE DE LOS SATÉLITES SEGUIDORES

$$k_2 s_{i-1} + k_2 s_{i+1} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} k_{ji} (s_j - s_i) = k_c s_i \quad (4.32)$$

definiendo la ley de control como

$$F_i = H_i^*(q_i) \ddot{q}_{i,r} + C_i^*(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_{i,r} - k_1 s_i + k_c s_i \quad (4.33)$$

empleando la función de Lyapunov

$$V = \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{1}{2} [s_i^T H_i^* s_i + \tilde{a}_i^T \Gamma_i \tilde{a}_i] \right\} \quad (4.34)$$

diferenciando V y utilizando la propiedad de la matriz $H_0^* - 2C_0^*$ se tiene

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^p s_i^T (F_i - H_i^* \ddot{q}_{i,r} - C_i^* \dot{q}_{i,r}) + \tilde{a}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{a}}_i \quad (4.35)$$

de la Ec. (4.33) se emplea como ley de control

$$F_i = \hat{H}_i^*(q_i) \ddot{q}_{i,r} + \hat{C}_i^*(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_{i,r} - k_1 s_i + k_c s_i \quad (4.36)$$

y se sustituye la Ec. (4.36) en la Ec. (4.35)

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^p s_i^T [(\hat{H}_i^* \ddot{q}_{i,r} + \hat{C}_i^* \dot{q}_{i,r}) - k_1 s_i + k_c s_i] + \tilde{a}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{a}}_i \quad (4.37)$$

siendo un modelo Lagrangiano se puede crear una parametrización para el sistema como la que se muestra en la Ec. (4.38)

$$\tilde{H}_i^* \ddot{q}_{i,r} + \tilde{C}_i^* \dot{q}_{i,r} = Y_i^*(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_{i,r}, \ddot{q}_{i,r}) \tilde{a}_i \quad (4.38)$$

empleando la parametrización del sistema como se muestra en la Ec. (4.38) se define la Ec. (4.37) de la siguiente forma

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^p s_i^T [Y_i^*(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_{i,r}, \ddot{q}_{i,r}) \tilde{a}_i - k_1 s_i + k_c s_i] + \tilde{a}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{a}}_i \quad (4.39)$$

4.2. CONTROL ADAPTABLE DE LOS SATÉLITES SEGUIDORES

obteniendo la ley de adaptación definida en la Ec (4.40), donde $\Gamma \in \mathcal{R}^{n \times n}$

$$\dot{\hat{a}}_i = -\Gamma_i (Y_i^*)^T s_i \quad (4.40)$$

por lo que finalmente se obtiene \dot{V} como

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^p s_i^T (k_1 + k_c) s_i \leq 0 \quad (4.41)$$

k_1 debe ser mayor que k_c , por lo que debe satisfacer la condición $k_1 > 2k_c$.

Para un sistema de la forma (4.28) si $k_1 > 2k_c$, el controlador (4.36) junto con la ley de adaptación (4.40) garantizan la convergencia asintótica del origen del sistema.

4.2.2. Resultados de Simulación

Los resultados de la ley de control propuesta son empleados en una constelación de 4 satélites, un satélite es empleado como agente líder de la red mientras los tres satélites restantes son los agentes seguidores.

Los valores de los parámetros para la matriz de inercia de cada uno de los satélites son los proporcionados en el Cuadro 4.1, los valores S_1 , S_2 , S_3 son los valores correspondientes de la matriz de inercia H_i para cada uno de los seguidores.

4.2. CONTROL ADAPTABLE DE LOS SATÉLITES SEGUIDORES

Cuadro 4.1: Parámetros Matriz de Inercia

Agente	h1	h2	h3	h4	h5	h6
Líder	7	5	5	15	10	20
S1	5	5	6	10	12	17
S2	6	7	6	11	10	12
S3	5	4	7	9	13	10

Las ganancias para el líder fueron de $K_D = 15I$, $\Gamma_0^{-1} = 20I$. Y las ganancias para cada uno de los seguidores son de $k_1 = 20I$, $k_2 = 2I$ y la ganancia de adaptación $\Gamma_i^{-1} = 20I$.

4.2. CONTROL ADAPTABLE DE LOS SATÉLITES SEGUIDORES

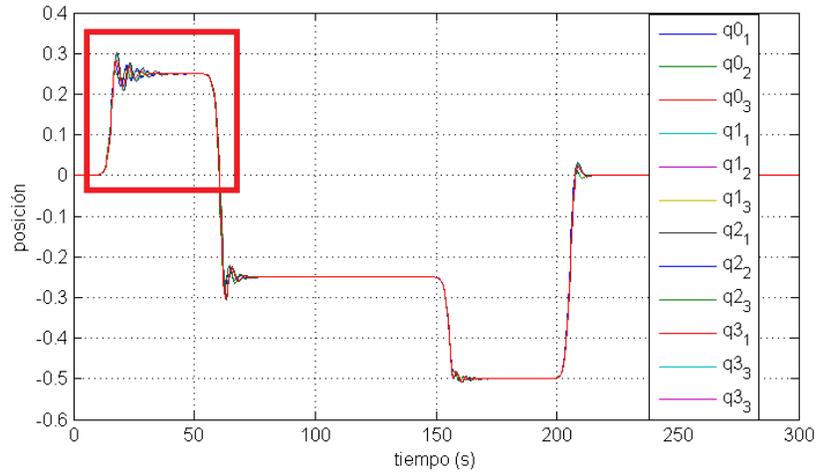


Figura 4.7: Posición de constelación, dando seguimiento a una trayectoria de referencia, las señales de los 4 agentes convergen a la señal de referencia.

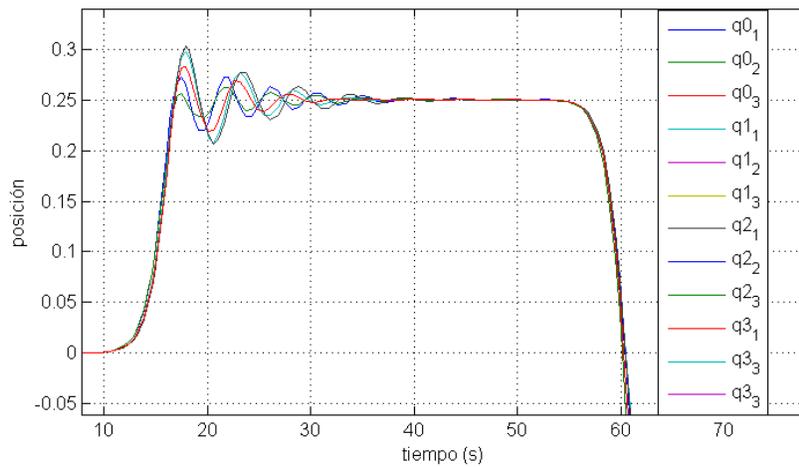


Figura 4.8: Ampliación de posición de constelación y del líder de la constelación, correspondiente a la Figura 4.7.

4.2. CONTROL ADAPTABLE DE LOS SATÉLITES SEGUIDORES

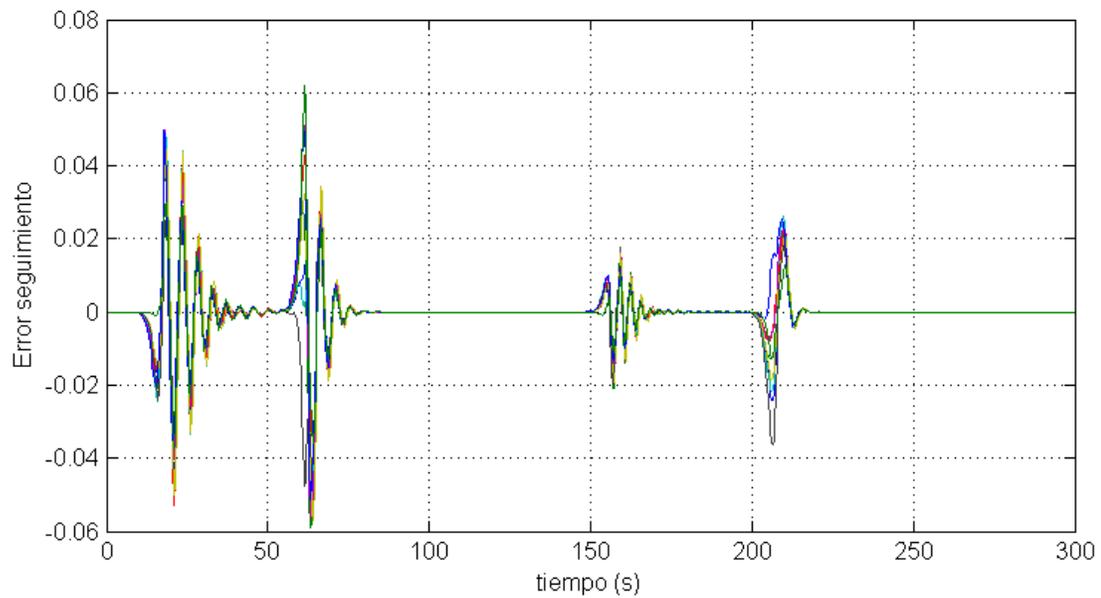


Figura 4.9: Error de seguimiento $\tilde{q}_i = q_i - q_0$, al realizarse una variación en la señal de referencia se observa como el error converge a cero, probando la eficacia del desempeño del controlador.

4.2. CONTROL ADAPTABLE DE LOS SATÉLITES SEGUIDORES

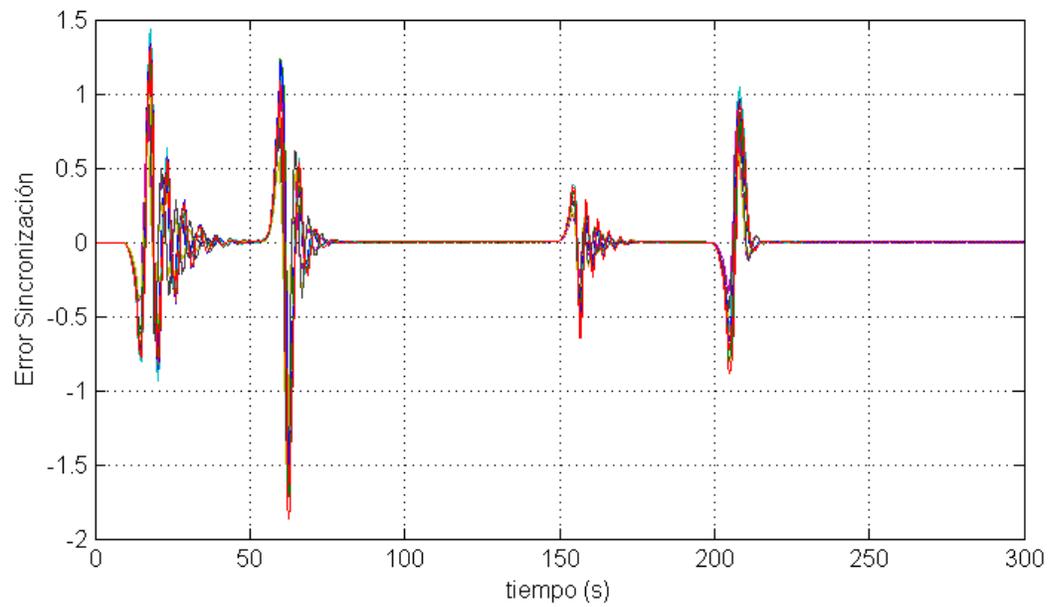


Figura 4.10: Error de sincronización para la constelación, al ocurrir una variación en la trayectoria, el error de sincronización para cada uno de los agentes converge a cero.

4.2. CONTROL ADAPTABLE DE LOS SATÉLITES SEGUIDORES

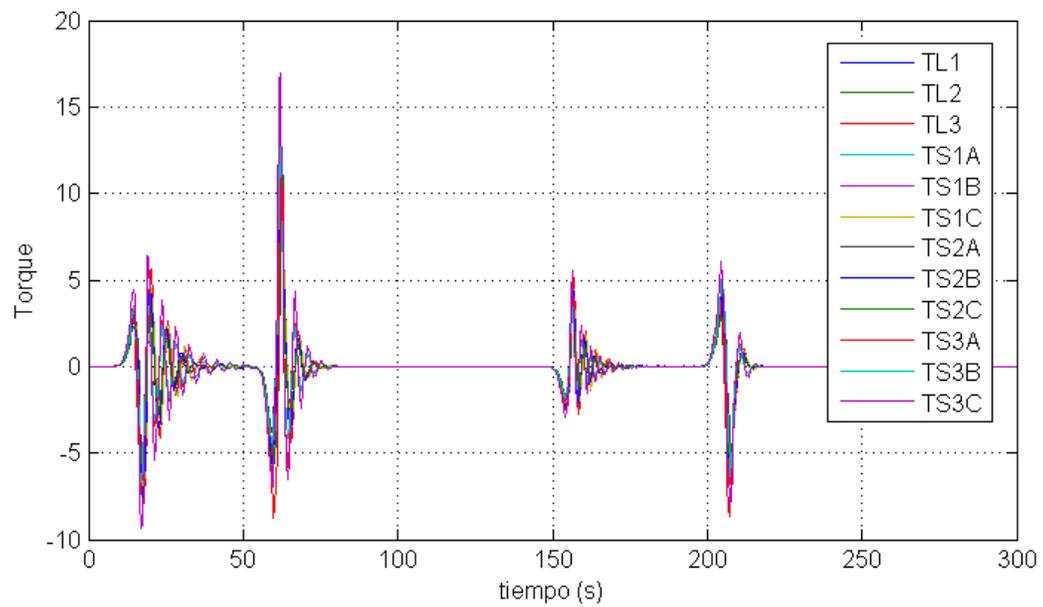


Figura 4.11: Torque aplicado en las ruedas de inercia para cada uno de los satélites

Conclusiones

Como se puso de manifiesto en los objetivos de esta disertación uno de ellos era que el satélite siguiera una trayectoria de referencia deseada, mientras se diseñaba el controlador se necesitaba también emplear algún método eficaz que permitiera una rotación para el sistema $\pm 360^\circ$ que fuera eficiente, empleando el cuaternión y el parámetro de Rodrigues modificado se logró el objetivo planteado.

Por otra parte también se tenía como objetivo sincronizar una constelación de satélites. Empleando en conjunto leyes de robótica aplicados al sistema de satélite y basado en un modelo de tipo Lagrangiano se logro diseñar una ley de controla para sincronizar la constelación.

Se demostró mediante las simulaciones el desempeño del controlador propuesto y se puso de manifiesto que es viable emplear control adaptable cuando los parámetros son desconocidos gracias a la parametrización del modelo.

Las simulaciones demuestran que los algoritmos empleados funcionan, sin embargo creo que se cuenta con el potencial y las capacidades técnicas para desarrollar y llevar a cabo este tipo de proyectos, los cuáles mejorarían y

potencializarían el desarrollo de proyectos e investigación experimental también.

Matriz de Inercia

A.1. Introducción

La matriz de inercia \mathcal{I} es una matriz simétrica de 3×3 referida a un punto O , y es una propiedad de la distribución de la masa m sobre O . Sus elementos dependen de las direcciones de un conjunto ortogonal de ejes x, y, z a través de O , en particular contiene los productos y momentos de inercia asociado con estos ejes.

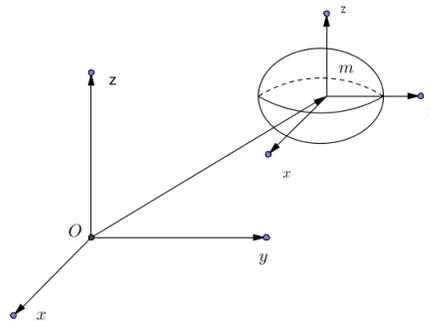


Figura A.1: Cuerpo rígido

Aquí se definen algunos conceptos importantes referentes a la matriz de

inercia.

A.2. Definiciones

Momentos de Inercia I_{xx} , I_{yy} , I_{zz}

Un momento de inercia es el segundo momento de masa alrededor de un eje. Sea la densidad de masa $\rho(x, y, z)$ de un objeto representado como una función de la posición. Por ejemplo, el momento de inercia alrededor del eje x es

$$I_{xx} = \int \int \int (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{A.1})$$

El momento de inercia para el eje y y z es

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int \int \int (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{zz} &= \int \int \int (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Productos de Inercia I_{xy} , I_{yz} , I_{zx}

Los productos de inercia son medidas de la falta de simetría en la distribución de la masa. El producto de inercia asociado con el eje x es

$$I_{xy} = I_{yx} = \int \int \int xy \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{A.3})$$

El producto de inercia para los ejes y y z son

$$\begin{aligned} I_{xz} &= I_{zx} = \int \int \int xz \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int \int \int yz \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Si la distribución de la masa es simétrica con respecto al marco de referencia fijo, entonces el producto de inercia es cero.

La matriz de inercia referida a una I_O respecto al punto $O(x, y, z)$ se define como

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Apéndice B

Modelo Lagrangiano

Las ecuaciones que describen la actitud del sistema de satélite son

$$\begin{aligned} H\dot{\omega} &= S(\omega)H\omega + \tau \\ \dot{q} &= Z(q)w \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde:

$S(\cdot)$ denota una matriz antisimétrica
 $Z(q)$ es la representación cinemática de Parámetro de Rodrigues Modificado.

Eligiendo como variables de estado q y \dot{q} derivamos de la Ec. (B.1) \dot{q} obteniendo

$$\ddot{q} = \dot{Z}\omega + Z\dot{w} \tag{B.2}$$

De (B.2) tenemos

$$Z\omega = \ddot{q} - \dot{Z}\omega \tag{B.3}$$

$$\dot{w} = Z^{-1}[\ddot{q} - \dot{Z}\omega] \tag{B.4}$$

De la Ec. (B.1) tenemos que \dot{w} es igual

$$\dot{w} = H^{-1}[S(\omega)H\omega + \tau] \tag{B.5}$$

Igualemos las ecuaciones (B.4) y (B.5) y obtenemos

$$H^{-1}[S(\omega)H\omega + \tau] = Z^{-1}[\ddot{q} - \dot{Z}\omega]$$

$$\begin{aligned}
H[H^{-1}[S(\omega)H\omega + \tau] &= Z^{-1}[\ddot{q} - \dot{Z}\omega]] \\
S(\omega)H\omega + \tau &= HZ^{-1}[\ddot{q} - \dot{Z}\omega]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

De la Ec. (B.1) tenemos que $\dot{q} = Z^{-1}\dot{q}$, sustituimos ω en Ec. (B.6)

$$\begin{aligned}
S(\omega)HZ^{-1}\dot{q} + \tau &= HZ^{-1}[\ddot{q} - \dot{Z}Z^{-1}\dot{q}] \\
Z^{-T}[HZ^{-1}[\ddot{q} - \dot{Z}Z^{-1}\dot{q}] &= S(\omega)HZ^{-1}\dot{q} + \tau] \\
Z^{-T}HZ^{-1}\ddot{q} - Z^{-T}HZ^{-1}\dot{Z}Z^{-1}\dot{q} &= Z^{-T}S(\omega)HZ^{-1}\dot{q} + Z^{-T}\tau \\
Z^{-T}HZ^{-1}\ddot{q} - Z^{-T}HZ^{-1}\dot{Z}Z^{-1}\dot{q} - Z^{-T}S(\omega)HZ^{-1}\dot{q} &= Z^{-T}\tau
\end{aligned} \tag{B.7}$$

De la Ec. (B.7) tenemos el modelo de satélite descrito como un modelo dinámico Lagrangiano

$$H^*(q)\ddot{q} + C^*(q, \dot{q})\dot{q} = F \tag{B.8}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\tau &= Z^T F \\
H^*(q) &= Z^{-T}HZ^{-1}\ddot{q} \\
C^*(q, \dot{q}) &= -Z^{-T}HZ^{-1}\dot{Z}Z^{-1}\dot{q} - Z^{-T}S(\omega)HZ^{-1}\dot{q}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Bibliografía

- [1] Nanosats are go!, 2014. 2
- [2] He Bai, Murat Arcak, and John Wen. *Cooperative control design: a systematic, passivity-based approach*, volume 89. Springer, 2011. 19
- [3] Igor Belykh, Martin Hasler, Menno Lauret, and Henk Nijmeijer. Synchronization and graph topology. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(11):3423–3433, 2005. 5
- [4] Stefano Boccaletti, Vito Latora, Yamir Moreno, Martin Chavez, and D-U Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, 424(4):175–308, 2006. 5
- [5] Tianping Chen, Xiwei Liu, and Wenlian Lu. Pinning complex networks by a single controller. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 54(6):1317–1326, 2007. 23
- [6] Peter E Crouch. Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 29(4):321–331, 1984. 4
- [7] Erik B Dam, Martin Koch, and Martin Lillholm. *Quaternions, interpolation and animation*. Datalogisk Institut, Københavns Universitet, 1998. 15, 17

-
- [8] James Diebel. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. *Matrix*, 58:15–16, 2006. 15
- [9] O Egeland and J-M Godhavn. Passivity-based adaptive attitude control of a rigid spacecraft. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(4):842–846, 1994. 4
- [10] Yuji Igarashi, Takeshi Hatanaka, Masayuki Fujita, and Mark W Spong. Passivity-based attitude synchronization in. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 17(5):1119–1134, 2009. 4
- [11] Jaehyun Jin, Sangho Ko, and Chang-Kyung Ryoo. Fault tolerant control for satellites with four reaction wheels. *Control Engineering Practice*, 16(10):1250–1258, 2008. 4
- [12] Hassan K Khalil and JW Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, 2002. 23
- [13] KD Kumar, MJ Tahk, and HC Bang. Satellite attitude stabilization using solar radiation pressure and magnetotorquer. *Control Engineering Practice*, 17(2):267–279, 2009. 4
- [14] Xiang Li, Xiaofan Wang, and Guanrong Chen. Pinning a complex dynamical network to its equilibrium. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 51(10):2074–2087, 2004. 6
- [15] Russell Merris. Laplacian matrices of graphs: a survey. *Linear algebra and its applications*, 197:143–176, 1994. 19
- [16] Ioannou Petros. and Jing. Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc, 1996. 9, 36
- [17] Quang-Cuong Pham and Jean-Jacques Slotine. Stable concurrent synchronization in dynamic system networks. *Neural Networks*, 20(1):62–77, 2007. 6

-
- [18] Robert J Plemmons. M - matrix characterizations. nonsingular m - matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 18(2):175–188, 1977. 20
- [19] Maurizio Porfiri and Mario Di Bernardo. Criteria for global pinning-controllability of complex networks. *Automatica*, 44(12):3100–3106, 2008. 23
- [20] Maruthi R Akella. Rigid body attitude tracking without angular velocity feedback. *Systems & Control Letters*, 42(4):321–326, 2001. 4
- [21] Hanspeter Schaub and John L Junkins. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the rodrigues parameters. *Journal of the Astronautical Sciences*, 44(1):1–19, 1996. 17, 18
- [22] Hanspeter Schaub and John L Junkins. *Analytical mechanics of space systems*, volume 1. Aiaa, 2003. 16
- [23] Hanspeter Schaub, Panagiotis Tsiotras, and John L Junkins. Principal rotation representations of proper $n \times n$ orthogonal matrices. *International Journal of Engineering Science*, 33(15):2277–2295, 1995. 5, 19
- [24] Malcolm D Shuster. A survey of attitude representations. *Navigation*, 8(9), 1993. 4
- [25] Malcolm D Shuster. The nature of the quaternion. *The journal of the astronautical sciences*, 56(3):359–373, 2008. 15
- [26] Enrico Silani and Marco Lovera. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results. *Control Engineering Practice*, 13(3):357–371, 2005. 4
- [27] JE Slotine and MD Di Benedetto. Hamiltonian adaptive control of spacecraft. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 35(7):848–852, 1990. 4, 5

-
- [28] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. 12, 35
- [29] Jean-Jacques E Slotine and Wei Wang. A study of synchronization and group cooperation using partial contraction theory. In *Cooperative Control*, pages 207–228. Springer, 2005. 6
- [30] Francesco Sorrentino, Mario di Bernardo, Franco Garofalo, and Guanrong Chen. Controllability of complex networks via pinning. *PHYSICAL REVIEW-SERIES E-*, 75(4):046103, 2007. 6, 23
- [31] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons New York, 2006. 29
- [32] Erik Steur, Ivan Tyukin, and Henk Nijmeijer. Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D: Non-linear Phenomena*, 238(21):2119–2128, 2009. 6
- [33] Weigang Sun, Jingyuan Zhang, and Changpin Li. Synchronization analysis of two coupled complex networks with time delays. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2011, 2011. 6
- [34] Marius Trusculescu, Mugurel Balan, Claudiu Dragasanu, Alexandru Pandele, and Marius-Ioan Piso. Nanosatellites: The tool for earth observation and near earth environment monitoring. *Earth Observation, ISBN*, pages 978–953. 2
- [35] C Underwood, G Richardson, and J Savignol. Snap-1: A low cost modular cots-based nano-satellite–design, construction, launch and early operations phase. 2001. 2
- [36] Lei Wang, Hua-ping Dai, Hui Dong, Ye-hu Shen, and You-xian Sun. Adaptive synchronization of weighted complex dynamical networks with coupling time-varying delays. *Physics Letters A*, 372(20):3632–3639, 2008. 6

-
- [37] Wei Wang and J-JE Slotine. A theoretical study of different leader roles in networks. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(7):1156–1161, 2006. 5
- [38] Wei Wang and Jean-Jacques E Slotine. Adaptive synchronization in coupled dynamic networks. *arXiv preprint nlin/0403030*, 2004. 5, 20
- [39] Wei Wang and Jean-Jacques E Slotine. On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators. *Biological cybernetics*, 92(1):38–53, 2005. 6
- [40] Hyungjoo Yoon and Panagiotis Tsiotras. Spacecraft adaptive attitude and power tracking with variable speed control moment gyroscopes. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(6):1081–1090, 2002. 4