



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – INGENIERÍA DE COSTAS Y RÍOS

PERTURBACIÓN DE ONDAS Y FOCALIZACIÓN DE OLEAJE  
CON PILAS FLOTANTES

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
**CARLOS ALBERTO ARMENTA AGUILAR**

**TUTOR PRINCIPAL:**  
DR. EDGAR GERARDO MENDOZA BALDWIN, INSTITUTO DE INGENIERÍA

**COMITÉ TUTOR:**  
DR. RODOLFO SILVA CASARÍN, INSTITUTO DE INGENIERÍA  
DR. MOISÉS BEREZOWSKY VERDUZCO, INSTITUTO DE INGENIERÍA  
DR. ÓSCAR POZOS ESTRADA, INSTITUTO DE INGENIERÍA  
DR. CARLOS A. ESCALANTE SANDOVAL, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. ENERO 2015



JURADO ASIGNADO:

**Presidente: DR. BEREZOWSKY VERDUZCO MOISÉS**

**Secretario: DR. ESCALANTE SANDOVAL CARLOS A.**

**Vocal: DR. MENDOZA BALDWIN EDGAR GERARDO**

**1 er. Suplente: DR. SILVA CASARÍN RODOLFO**

**2 do. Suplente: DR. POZOS ESTRADA ÓSCAR**

**Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM**

TUTOR DE TESIS:

**DR. EDGAR GERARDO MENDOZA BALDWIN**

-----  
FIRMA



---

## ÍNDICE

---

### ÍNDICE

I	AGRADECIMIENTOS.....	1
II	ÍNDICE DE FIGURAS .....	2
III	ÍNDICE DE TABLAS .....	5
IV	SIMBOLOGÍA .....	6
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>		<b>10</b>
	ESTADO DEL ARTE.....	11
	OBJETIVO .....	13
	METODOLOGÍA.....	14
	DESCRIPCIÓN Y ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO .....	14
<b>1.</b>	<b>TEORÍA LINEAL .....</b>	<b>18</b>
1.1	INTRODUCCIÓN .....	18
1.2	MARCO TEÓRICO.....	18
1.3	POTENCIAL DE VELOCIDADES.....	19
1.4	ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA FLUJO INCOMPRESIBLE.....	19
1.5	ECUACIÓN DE LAPLACE .....	20
1.6	ECUACIONES DE SAINT-VENANT .....	20
1.7	ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.....	21
1.8	ECUACIONES DE EULER .....	22
1.9	ECUACIÓN DE BERNOUILLI.....	22
<b>2.</b>	<b>INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS .....</b>	<b>26</b>
2.1	INTRODUCCIÓN .....	26
2.2	TEORÍA LINEAL SOBRE UN FONDO HORIZONTAL IMPERMEABLE CON SUPERFICIE LIBRE.....	26
2.3	CONDICIONES DE FRONTERA.....	27
2.4	SOLUCIÓN .....	28
2.5	TEORÍA LINEAL SOBRE UN FONDO HORIZONTAL IMPERMEABLE CON UNA PILA IMPERMEABLE FLOTANTE.....	33
2.6	CONDICIONES DE FRONTERA.....	33
2.7	SOLUCIÓN .....	34
2.8	CÁLCULO DE LA SUPERFICIE LIBRE Y ALTURA DE OLA.....	35
2.9	CONDICIÓN DINÁMICA EN LA SUPERFICIE LIBRE .....	35
2.10	SUPERFICIE LIBRE .....	35
2.11	ALTURA DE OLA.....	36
<b>3.</b>	<b>ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE PILA FLOTANTE E IMPERMEABLE.....</b>	<b>38</b>
3.1	INTRODUCCIÓN .....	38
3.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	38
3.3	CONDICIONES DE FRONTERA .....	38
3.4	SOLUCIÓN GENERAL.....	39
3.5	RESULTADOS .....	41
<b>4.</b>	<b>ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE MÚLTIPLES PILAS EN ARREGLO PARABÓLICO.....</b>	<b>48</b>
4.1	INTRODUCCIÓN .....	48
4.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	48
4.3	CONDICIONES DE FRONTERA .....	49
4.4	SOLUCIÓN GENERAL.....	49
4.5	RESULTADOS .....	52
<b>5.</b>	<b>MODOS EVANESCENTES EN LA SOLUCIÓN DE UNA PILA FLOTANTE E IMPERMEABLE .....</b>	<b>62</b>
5.1	INTRODUCCIÓN .....	62
5.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	62

---

## ÍNDICE

---

5.3	CONDICIONES DE FRONTERA .....	62
5.4	SOLUCIÓN GENERAL.....	63
5.5	RESULTADOS .....	65
<b>6.</b>	<b>MODOS EVANESCENTES EN LA SOLUCIÓN DE UN ARREGLO PARABÓLICO DE PILAS FLOTANTES E IMPERMEABLES .....</b>	<b>70</b>
6.1	INTRODUCCIÓN .....	70
6.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	70
6.3	CONDICIONES DE FRONTERA .....	71
6.4	SOLUCIÓN GENERAL.....	71
6.5	RESULTADOS .....	74
	<b>CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>78</b>
<b>ANEXO A.</b>	<b>RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE DISPERSIÓN.....</b>	<b>81</b>
A.1	INTRODUCCIÓN .....	81
A.2	PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN.....	81
A.3	RESULTADOS .....	83
<b>ANEXO B.</b>	<b>INTEGRALES DE FUNCIONES ORTOGONALES.....</b>	<b>86</b>
B.1	INTRODUCCIÓN .....	86
B.2	PRIMERA INTEGRAL.....	86
B.3	SEGUNDA INTEGRAL .....	87
B.4	TERCERA INTEGRAL .....	87
<b>ANEXO C.</b>	<b>OLEAJE PERTURBADO .....</b>	<b>90</b>
C.1	INTRODUCCIÓN .....	90
C.2	CONDICIONES DE FRONTERA .....	90
C.3	SOLUCIÓN.....	91
	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>94</b>

---

---

## AGRADECIMIENTOS

---

### I AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me ha otorgado durante mi trayectoria como alumno de maestría.

A mi familia, que a pesar de la distancia, siempre me ha apoyado, ha caminado a mi lado y ha sido parte de mis triunfos alcanzados.

A todos aquellos amigos que han compartido conmigo su tiempo e incondicional amistad, siendo parte fundamental de mi crecimiento personal.

A los Doctores Edgar Gerardo Mendoza Baldwin y Rodolfo Silva Casarín por haberme brindado, una vez más, la oportunidad de realizar un proyecto de investigación bajo su supervisión, así como la confianza depositada en mí, la cual ha estado presente en todo momento.

Por último, me gustaría agradecer al Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por haberme permitido estar en sus instalaciones y hacer uso de ellas, incluso antes de iniciar la Maestría. Sin lugar a dudas, lo mejor de la estancia ha sido la convivencia con todas aquellas personas de quienes he aprendido infinidad de cosas, por lo que han dejado huella en mi vida y las tendré en mi mente por siempre.

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

### II ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Esfuerzos en el volumen de control diferencial. ....	20
Figura 2. Idealización del problema en perfil (izquierda) y en planta (derecha).....	26
Figura 3. Idealización del problema en superficie libre. ....	27
Figura 4. Idealización del problema por debajo de la estructura.....	33
Figura 5. Esquematzación del problema. ....	38
Figura 6. Índice de amplificación para $hp = 1$ m.....	42
Figura 7. Índice de amplificación para $hp = 5$ m.....	42
Figura 8. Índice de amplificación para $hp = 10$ m.....	42
Figura 9. Índice de amplificación para $hp = 20$ m.....	42
Figura 10. Índice de amplificación para $hp = 30$ m.....	43
Figura 11. Índice de amplificación para $hp = 50$ m.....	43
Figura 12. Variación del índice de amplificación con respecto a $hp$ . ....	43
Figura 13. Índice de amplificación en transmisión para $L = 30$ m. ....	44
Figura 14. Índice de amplificación en reflexión para $L = 30$ m.....	44
Figura 15. Índice de amplificación en transmisión para $L = 50$ m. ....	44
Figura 16. Índice de amplificación en reflexión para $L = 50$ m.....	44
Figura 17. Índice de amplificación en transmisión para $L = 80$ m. ....	44
Figura 18. Índice de amplificación en reflexión para $L = 80$ m.....	44
Figura 19. Índice de amplificación en transmisión para $L = 100$ m. ....	45
Figura 20. Índice de amplificación en reflexión para $L = 100$ m.....	45
Figura 21. Índice de amplificación en transmisión para $L = 200$ m. ....	45
Figura 22. Índice de amplificación en reflexión para $L = 200$ m.....	45
Figura 23. Esquematzación de múltiples pilas flotantes e impermeables. ....	48
Figura 24. Índice de amplificación para $\gamma^2 = 100$ x.....	53
Figura 25. Índice de amplificación para $\gamma^2 = 200$ x.....	53
Figura 26. Índice de amplificación para $\gamma^2 = 250$ x.....	54
Figura 27. Índice de amplificación para $\gamma^2 = 300$ x.....	54
Figura 28. Índice de amplificación para $\gamma^2 = 350$ x.....	54
Figura 29. Índice de amplificación para $\gamma^2 = 400$ x.....	54
Figura 30. Índice de amplificación para $\gamma^2 = 1000$ x.....	55
Figura 31. Efecto de la variación del parámetro P de la ecuación de la parábola en zona de transmisión. ....	55
Figura 32. Efecto de la variación del parámetro P de la ecuación de la parábola en zona de reflexión.....	55
Figura 33. Índice de amplificación bajo interacción de 3 cilindros. ....	56

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 34. Índice de amplificación bajo interacción de 5 cilindros. ....	56
Figura 35. Índice de amplificación bajo interacción de 7 cilindros. ....	56
Figura 36. Índice de amplificación bajo interacción de 9 cilindros. ....	56
Figura 37. Índice de amplificación bajo interacción de 11 cilindros. ....	57
Figura 38. Índice de amplificación en transmisión bajo interacción de diferente número de cilindros. ....	57
Figura 39. Índice de amplificación en reflexión bajo interacción de diferente número de cilindros. ....	57
Figura 40. Índice de amplificación para estructuras sin separación. ....	58
Figura 41. Índice de amplificación para un oleaje de $0^\circ$ . ....	59
Figura 42. Índice de amplificación para un oleaje de $10^\circ$ . ....	59
Figura 43. Índice de amplificación para un oleaje de $15^\circ$ . ....	59
Figura 44. Índice de amplificación para un oleaje de $20^\circ$ . ....	59
Figura 45. Esquematización del problema. ....	62
Figura 46. Índice de amplificación sin modos evanescentes en la región 2. ....	65
Figura 47. Índice de amplificación con 3 modos evanescentes en la región 2. ....	65
Figura 48. Índice de amplificación con 6 modos evanescentes en la región 2. ....	65
Figura 49. Índice de amplificación con 15 modos evanescentes en la región 2. ....	65
Figura 50. Índice de amplificación en transmisión variando el número de modos evanescentes en la región 2. ....	66
Figura 51. Índice de amplificación en reflexión variando el número de modos evanescentes en la región 2. ....	66
Figura 52. Índice de amplificación en transmisión variando el número de modos evanescentes en la región 1. ....	66
Figura 53. Índice de amplificación en reflexión variando el número de modos evanescentes en la región 1. ....	66
Figura 54. Índice de amplificación en transmisión variando el número de modos evanescentes en igual magnitud en cada región. ....	67
Figura 55. Índice de amplificación en reflexión variando el número de modos evanescentes en igual magnitud en cada región. ....	67
Figura 56. Índice de amplificación en transmisión variando al doble el número de modos evanescentes en la región 2. ....	67
Figura 57. Índice de amplificación en reflexión variando al doble el número de modos evanescentes en la región 2. ....	67
Figura 58. Índice de amplificación en transmisión variando al doble el número de modos evanescentes en la región 1. ....	67
Figura 59. Índice de amplificación en reflexión variando al doble el número de modos evanescentes en la región 1. ....	67
Figura 60. Índice de amplificación cuando no existen modos evanescentes. ....	68
Figura 61. Índice de amplificación cuando se consideran 5 modos evanescentes. ....	68
Figura 62. Esquematización de múltiples pilas flotantes e impermeables con modos evanescentes. ....	70

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 63. Arreglo sin modos evanescentes.....	74
Figura 64. Arreglo con 5 modos evanescentes. ....	74
Figura 65. Arreglo con 10 modos evanescentes. ....	75
Figura 66. Índice de amplificación en transmisión con distintos modos evanescentes.....	75
Figura 67. Índice de amplificación en reflexión con distintos modos evanescentes. ....	75
Figura 68. Soluciones reales de la ecuación de dispersión. ....	82
Figura 69. Soluciones imaginarias puras de la ecuación de dispersión.....	83
Figura 70. Idealización del problema en perfil (izquierda) y en planta (derecha).....	90

---

## ÍNDICE DE TABLAS

---

### III ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Valores reales y teóricos de $hp$ para $h = 50$ m.....	46
Tabla 2. Localización de las pilas para diferentes valores de $P$ . .....	53
Tabla 3. Coordenadas de cilindros .....	58
Tabla 4. Valores de $kh$ para $T = 8$ s.....	83

---

## SIMBOLOGÍA

---

### IV SIMBOLOGÍA

$A$	Amplitud de onda.
$a_k$	Radio del cilindro k.
$a_x$	Aceleración en la dirección del eje x.
$a_y$	Aceleración en la dirección del eje y.
$a_z$	Aceleración en la dirección del eje z.
$g$	Aceleración de la gravedad.
$H$	Altura de ola.
$h$	Profundidad del fondo marino.
$hp$	Longitud sumergida de la estructura.
$hp_r$	Longitud sumergida real de la estructura.
$hp_t$	Profundidad sumergida teórica de la estructura.
$k$	Número de onda en la región exterior de la pila.
$K$	Número de onda en la región inferior de la pila.
$L$	Longitud de onda.
$M_1$	Número de modos evanescentes en la región 1.
$M_2$	Número de modos evanescentes en la región 2.
$NC$	Número de cilindros.
$P$	Parámetro característico de la ecuación de una parábola.
$\Re$	Parte real del número dado.
$R_{jk}$	Distancia del cilindro j al cilindro k.
$r_j$	Distancia del cilindro j a un punto dado.
$T$	Periodo de la onda.

## SIMBOLOGÍA

---

$u$	Velocidad en la dirección del eje x.
$\bar{V}$	Vector de velocidad.
$v$	Velocidad en la dirección del eje y.
$w$	Velocidad en la dirección del eje z.
$X$	Coordenada horizontal.
$\underline{X}$	Fuerza externa por unidad de masa actuando en la dirección X.
$Y$	Coordenada horizontal a 90°.
$\underline{Y}$	Fuerza externa por unidad de masa actuando en la dirección Y.
$\underline{Z}$	Fuerza externa por unidad de masa actuando en la dirección Z.
$\Phi$	Potencial de velocidades.
$\Phi_1$	Potencial de velocidades en la región 1.
$\Phi_2$	Potencial de velocidades en la región 2.
$\Phi^s$	Potencial de velocidades perturbado.
$\Phi^i$	Potencial de velocidades incidente.
$\theta_i$	Ángulo de incidencia del oleaje.
$\theta_{jk}$	Ángulo del cilindro j al k.
$\theta_k$	Ángulo del cilindro k a un punto determinado.
$\mu$	Viscosidad dinámica.
$\sigma$	Frecuencia angular.
$\tau_{xy}$	Esfuerzo en el plano yz en dirección y.
$\tau_{xz}$	Esfuerzo en el plano yz en dirección z.

## SIMBOLOGÍA

---

$\tau_{yz}$  Esfuerzo en el plano xz en dirección z.

$\rho$  Densidad.

$\nabla$  Operador diferencial Laplaciano.

# **INTRODUCCIÓN**

### INTRODUCCIÓN

Por encontrarse entre los dos océanos más grandes del mundo, México es un país con una enorme cantidad de recursos marítimos, tanto así que de acuerdo con la Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT), la zona económica exclusiva, junto con la del mar territorial, es mayor que su superficie, además, 17 de las 32 entidades federativas que integran el país, forman parte de los 11 122 km de costa, sin considerar lo correspondiente a las islas. De ahí la preocupación de la ingeniería mexicana por gestionar, de manera sustentable, los recursos naturales que pueden obtenerse de esta fuente renovable, la cual es priorizada en países desarrollados y cuya importancia se ve reflejada en el aumento de la población en zonas costeras. Con esta tendencia mundial, se entiende que a mayor población en el litoral existe mayor demanda de energía, siendo el mar una de las mejores opciones para extraer energía limpia.

Los mares y océanos proveen gran cantidad de energía que puede ser extraída de diferentes maneras, mediante diversos instrumentos de captación y conversión. Por ejemplo, la energía maremotriz (ocasionada por la carrera de las mareas) puede alcanzar hasta los 16 m entre bajamar y pleamar, como sucede en algunas regiones de Nueva Escocia, pero también puede ser prácticamente nula como en el mar Negro. La energía undimotriz (que proviene de las olas) es originada en su mayoría por las fuerzas que ejerce el viento sobre la superficie libre de los océanos y cuyo efecto se puede ver reflejado de manera muy organizada cerca de la costa.

Las corrientes marinas también producen energía, la cual ya se ha aprovechado en algunas partes del mundo; estas corrientes se definen como la traslación de masas de agua en océanos y mares originada por el movimiento de rotación de la Tierra, vientos planetarios y configuración de costas y continentes. El gradiente térmico producido en la columna de agua por efecto del calentamiento del Sol también provoca movimiento de masas en sentido vertical, colocando en el fondo la temperatura más baja. Este gradiente también es objeto de diseño de dispositivos para generar energía.

En la actualidad existe una gran variedad de dispositivos para aprovechar de diferentes formas la energía del mar, cada uno adaptado a las condiciones impuestas por la fuente. Uno de los métodos más usados para la captación de energía marina, a pesar de los importantes requisitos como son la demanda de energía potencial considerable y la escasez de lugares a implementar, fueron las presas de marea. Hoy en día, países como Corea del Sur, Rusia y Francia son impulsores de este tipo de captación.

Para el caso de las mareas existen, por ejemplo, sistemas de turbinas como los Lànstrøm, Seagen, Thawt y Vivace, por mencionar algunos. La mayoría de estos contemplan la implementación de granjas, que no son más que la colocación en conjunto de los dispositivos, brindando beneficios de toda una región y no únicamente de un punto en específico. De los sistemas antes referidos, el Thawt es el que trabaja con mayor eficiencia.

## INTRODUCCIÓN

---

Por otro lado, algunos sistemas de ciclo cerrado emplean fluidos con un punto de ebullición bajo, como el amoníaco, el cual es evaporado por el agua tibia de la superficie libre bombeada con ayuda de un intercambiador de calor, y cuyo vapor hace girar una turbina. Posteriormente, es condensado por agua más fría bombeada desde mayores profundidades con otro intercambiador de calor y el ciclo se repite.

La energía undimotriz, también conocida como olamotriz, es la más estudiada actualmente, por lo que se tiene mayor instrumentación ya instalada y en etapas de desarrollo en laboratorios. Existen los sistemas flotantes que siguen el movimiento de las olas y generan energía a través de sí mismos o con ayuda de algún otro dispositivo anclado al fondo; los dispositivos de rotación, que hacen uso de un anclaje o peso sumergido para mantenerse en el fondo; los colectores de olas que aprovechan directamente la energía potencial al mover unas turbinas y los dispositivos de columna oscilante, que se encuentran ubicados en la costa y captan energía al hacer funcionar una turbina con aire. Generalmente, estos dispositivos se encuentran colocados con la parte inferior abierta hacia el oleaje y en la parte superior se localiza la turbina.

En México se ha impulsado en gran medida el aprovechamiento de la energía undimotriz, sin embargo, uno de los principales problemas a lo que se enfrenta es que se sigue teniendo baja eficiencia en la mayoría de los dispositivos. Además, las condiciones naturales no permiten, en general, tener las mismas alturas de ola que las que se pueden encontrar en las costas de países ubicados más lejos del ecuador y los trópicos. Sin embargo, sí existen lugares con importante potencial energético como: Oaxaca, parte de la rivera Maya y Baja California. En virtud de lo anterior, una alternativa que permitiría aprovechar de manera más eficiente la energía de las olas disponible en las costas mexicanas es acompañar los dispositivos de conversión con estructuras capaces de focalizar las ondas y agrupar, en un menor espacio, la energía de un frente de onda más largo. Aunque este concepto no es nuevo, esta adaptación pretende brindar una alternativa para el aumento de altura de ola y, de esta forma, multiplicar los beneficios de los dispositivos para captar la energía del oleaje.

En el presente trabajo se propone la utilización de grupos de pilas cilíndricas dispuestas en forma de parábola como elemento que genera la focalización. Los fenómenos resultantes de la interacción del oleaje con el grupo de pilas, que derivan en un incremento en la altura de ola, son principalmente la reflexión y la difracción. Por ello, si se define el problema sobre un fondo plano y se aceptan las hipótesis de flujo potencial, es posible hallar una solución analítica que ofrezca el campo de oleaje perturbado y la ubicación del punto de focalización, para optimizar el arreglo de pilas y lograr una amplificación máxima de la altura de ola.

### ESTADO DEL ARTE

El concepto de focalización de ondas no se originó en el área de la hidráulica, de hecho, los primeros registros que se tienen se encuentran en el campo de la acústica y la óptica. Sin embargo, en la literatura se cuenta con una gran cantidad de datos tanto de la focalización de olas como de la interacción con estructuras de diferente

geometría. Son numerosos los investigadores que han estudiado la interacción del oleaje con diversas estructuras, a continuación se enlistan los más relevantes relacionados con este escrito.

Spring y Monkmeyer (1974) estudiaron la interacción de ondas estacionarias, planas y lineales con grupos de estructuras de radio constante, verticales y rígidas con fuerzas lineales dominantes en toda la interacción. Parte de los resultados fue obtener un potencial de velocidades en la frontera de todos los cilindros.

Smith y Sprinks (1975) examinaron de manera analítica la perturbación del oleaje bajo la interacción de una estructura con geometría cónica.

Truitt y Herbich (1986) extendieron las expresiones empíricas para calcular la transmisión en un grupo cerrado de pilas, de oleaje regular a irregular. Esto lo realizaron con pruebas de laboratorio en donde se variaron la distancia entre las estructuras y su diámetro.

Chakrabarti (1987), Sarpkaya e Isaacson (1981) publicaron aplicaciones a estructuras costa afuera de los métodos y soluciones que se tenían hasta entonces.

Dalrymple *et al.* (1988) estudiaron la dispersión de las ondas bajo la interacción de una serie de cilindros, calculando coeficientes de reflexión y transmisión para compararlos con datos experimentales de otros autores.

Linton y Evans (1989) propusieron una metodología para calcular la dispersión del oleaje por medio del potencial de velocidades con ayuda de la teoría lineal, lo cual ayudó a tener los resultados de una manera mucho más simple que la que se manejaba hasta ese momento. Este trabajo sirvió de base para futuras soluciones analíticas en la misma área.

Además de la propagación del oleaje ante un canal con transición y barrera bruscas, Roldan (1992) estudió el oleaje ante la interacción de estructuras con simetría circular.

Losada *et al.* (1994) realizaron una comparación entre el método de desarrollo en serie de autofunciones, aplicado a casos de diferentes condiciones de frontera, con datos teóricos y con datos experimentales. Además, remarcaron las ventajas, desventajas y limitaciones del método.

Darwiche *et al.* (1994) encontraron que es posible reducir el campo de oleaje y las fuerzas al interior de una estructura de radio constante y permeable bajo condiciones monocromáticas.

Silva (1995) estudió los efectos del oleaje irregular interactuando con diversos casos de estructura de protección costera, entre ellos el de un dique poroso con espaldón impermeable en su corona, encontrando la relevancia de los modos evanescentes sobre alguna de ellas en coordenadas cartesianas.

Losada *et al.* (1996) analizaron los efectos de un oleaje irregular interactuando sobre estructuras permeables y sumergidas mediante un modelo matemático, comparando los resultados teóricos con los experimentales. En los casos examinados encontraron que su modelo proporcionaba resultados bastante cercanos y que el coeficiente de reflexión era más sensible a las características de la onda incidente que el de transmisión.

Sumer y Fredsøe (1997) presentaron casos de aplicación de flujos rotacional e irrotacional sobre cilindros, calculando las fuerzas inducidas por el oleaje sobre estas estructuras.

Linton y McIver (1996) trabajaron con estructuras circulares dentro de un canal, obteniendo resultados experimentales y analíticos derivados del potencial de velocidades con sus respectivas condiciones de frontera, lo que proporcionó aproximaciones de las fuerzas sobre la estructura. Las limitaciones de los experimentos impulsaron a otros investigadores como Evans y Porter.

Govaere *et al.* (1999) laboraron con estructuras cilíndricas con protección permeable. Govaere y Silva (2000-a) dieron mayor importancia al hecho de tener oleaje irregular al interactuar con las estructuras. Para (2000-b), Govaere y Silva experimentarían con estructuras permeables, mientras que Govaere y Silva (2000-c) se enfocaron en obtener los parámetros más importantes del diseño de las mismas.

Williams y Li (2000) desarrollaron una expresión analítica para calcular el oleaje en la parte exterior e interior de un arreglo de estructuras cilíndricas porosas, encontrando que la porosidad afecta directamente la magnitud de las fuerzas hidrodinámicas.

Govaere (2002) desarrolló una serie de casos particulares para estructuras disipativas de simetría radial, con y sin protección en su periferia. También trabajó con un conjunto de estas estructuras para el estudio del oleaje a partir del potencial de velocidades.

Armenta *et al.* (2014) presentaron la solución analítica para un conjunto de estructuras de simetría radial, flotantes e impermeables sin considerar modos evanescentes.

### OBJETIVO

Obtener una solución analítica de la interacción entre el oleaje y el arreglo de pilas para facilitar el estudio del comportamiento del sistema completo, así como encontrar las expresiones analíticas que permitan estimar, de manera precisa, los efectos de la interacción entre un estado de mar determinado y estructuras de simetría radial.

El estudio de la transformación del oleaje abarca los siguientes casos:

## INTRODUCCIÓN

---

- Estructura cilíndrica flotante e impermeable.
- Estructura cilíndrica flotante e impermeable considerando modos evanescentes.
- Arreglo de estructuras cilíndricas flotantes e impermeables.
- Arreglo de estructuras cilíndricas flotantes e impermeables considerando modos evanescentes.

También se pretende conocer el arreglo parabólico de estructuras que maximiza la focalización de ondas. Además, se busca encontrar la influencia de los modos evanescentes en la interacción del oleaje y las estructuras circulares.

## METODOLOGÍA

Como primer paso, se ha aceptado la hipótesis de que el estado del mar se puede representar como un oleaje regular viajando en una dirección determinada sobre un fondo horizontal constante e impermeable.

Considerando un flujo irrotacional e incompresible se puede hacer uso de la ecuación de Laplace; existe entonces un potencial de velocidades dependiente del espacio y el tiempo.

El sistema de ecuaciones se construye a partir de las condiciones de frontera y es simplificado con la aplicación del método de separación de variables a la función del potencial de velocidades en coordenadas cilíndricas.

Se resuelven casos con diferentes grados de libertad como son el diámetro, la longitud de onda para el caso de una pila y la ecuación de parábola, la dirección del oleaje, el número de cilindros y la separación de los mismos para el caso de un arreglo de pilas.

Con el potencial de velocidades calculado se obtiene la altura de ola y la superficie libre máximas instantáneas para todo el dominio.

## DESCRIPCIÓN Y ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

El presente estudio se encuentra organizado de la siguiente manera:

### **Capítulo 1**

Se proporcionan las bases de la teoría lineal partiendo de las ecuaciones básicas de Laplace; asimismo, se define la función potencial que será la base para el resto de los capítulos y se presentan las ecuaciones de gobierno para los casos de estudio de todo el trabajo.

### **Capítulo 2**

Se aplican las condiciones de frontera en el caso de un oleaje que se propaga sobre un fondo horizontal e impermeable con superficie libre y otro con una estructura de radio constante en la parte superior, de esta forma se obtiene la expresión general de cada potencial de velocidades en coordenadas cilíndricas. Al mismo tiempo, se presenta el desarrollo de la ecuación de dispersión.

### **Capítulo 3**

Se plantean las condiciones y se resuelven las ecuaciones para obtener el potencial de velocidades resultado de la interacción entre el oleaje monocromático, horizontal e impermeable con una estructura de radio constante flotante e impermeable. Se muestran los principales resultados obtenidos.

### **Capítulo 4**

Se presenta la solución analítica del potencial de velocidades resultado de la interacción entre un oleaje monocromático y un arreglo de estructuras flotantes, impermeables en forma parabólica, ilustrando los casos más representativos en el comportamiento de la altura de ola.

### **Capítulo 5**

Se presenta el comportamiento de la altura de ola obtenida con la solución analítica que incluye modos evanescentes para el estudio de una estructura aislada, con el fin de analizar la importancia de los mismos en cada región del dominio.

### **Capítulo 6**

Se expone la solución analítica para el caso más general de una estructura flotante e impermeable; esto incluye el caso de la interacción de un arreglo de pilas considerando modos evanescentes, analizando el comportamiento de la altura de ola local, de acuerdo con las condiciones iniciales dadas para el estado de mar.

### **Conclusiones y futuras líneas de investigación**

Se recopilan las conclusiones y quedan planteadas las líneas de investigación surgidas a partir del desarrollo de este trabajo.



**CAPÍTULO 1**  
**TEORÍA LINEAL**

## 1. TEORÍA LINEAL

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Por tratarse de una teoría bastante estudiada, en este capítulo únicamente se presentan las ecuaciones necesarias para la comprensión y estudio objetivo de esta Tesis, así como las propiedades ingenieriles. Todas ellas se presentan en coordenadas cartesianas por ser el sistema de referencia más común, y más adelante se adapta la ecuación general al caso cilíndrico. En todos se trabaja con un flujo incompresible e irrotacional.

### 1.2 MARCO TEÓRICO

La Teoría Lineal es la más utilizada en los problemas ingenieriles debido a la facilidad con que aborda el estudio de ondas. También es conocida como Teoría de Airy, Teoría de ondas de pequeña amplitud o Stokes de primer orden, esto último a causa de las simplificaciones realizadas durante el desarrollo matemático, con lo que se deja en claro que resulta práctica para abarcar el estudio de las ondas transmitidas en la interfaz aire-agua en los océanos.

De acuerdo con diversos autores, cuando se habla de oleaje se hace referencia a un proceso no lineal; sin embargo, para aplicar la Teoría de Airy se pueden hacer algunas suposiciones, tales como:

- La fuerza de gravedad y las fuerzas producidas por las diferencias de presión atmosférica son las principales causas del movimiento ondulatorio de las ondas. Se desprecia, entonces, el efecto de Coriolis y la pérdida de energía por rotura.
- Las fuerzas tangenciales son despreciables al considerar una capa límite diferencial en los contornos; es decir, se considera un fluido no viscoso.
- El movimiento oscilatorio posee rotacional nulo (flujo irrotacional).
- El flujo es incompresible  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial (x, y, z, t)} = 0\right)$ .
- El problema tridimensional puede ser tratado como uno bidimensional con componentes vertical y horizontal.
- Presión uniforme y constante en la interfaz atmósfera-océano.
- Fondo plano e impermeable.
- El oleaje es el único movimiento marino.
- Ola periódica y regular, lo que implica un período y altura de ola constantes.
- Las ondas se propagan a una profundidad mucho mayor que su amplitud.

Es importante que el lector tenga claras estas hipótesis pues es ahí donde se encuentra la limitante de las soluciones que aquí se presentan.

### 1.3 POTENCIAL DE VELOCIDADES

Una línea de corriente es el lugar geométrico de los puntos tangentes al vector velocidad  $\bar{V}$  de las partículas de un flujo en un instante determinado. De esta forma, las líneas de corriente describen la dirección y el movimiento del flujo.

Si se cumple con la condición de irrotacionalidad, se puede definir:

$$\Phi = \int_o^p \bar{V} dx \quad (1.1)$$

ecuación que representa el potencial de velocidades  $\Phi$  definido en un punto  $P$  ubicado sobre alguna de las líneas de corriente, mientras que  $O$  es un punto fijo cualquiera que trata de definir el comportamiento cinemático del flujo. Los puntos que tienen el mismo potencial de velocidades forman las llamadas líneas equipotenciales y son ortogonales a las líneas de corriente.

Las componentes del vector velocidad están relacionadas con el potencial de velocidades por las siguientes ecuaciones:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.2)$$

Tal y como lo menciona Streeter (1972), considerar el concepto de potencial de velocidades necesariamente implica la hipótesis de un flujo irrotacional. Un ejemplo de este tipo de flujo es el de una persona que se encuentra en la rueda de la fortuna, debido a que siempre conservará la cabeza apuntando hacia arriba sin importar en qué parte de la trayectoria de la rueda se encuentre.

Cuando se unen los puntos con el mismo valor de potencial de velocidades se obtienen las llamadas líneas equipotenciales, las cuales tienen la característica de ser ortogonales a las líneas de flujo, por lo que se pueden relacionar matemáticamente entre ellas. Ambas son dependientes del tiempo y el espacio.

### 1.4 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA FLUJO INCOMPRESIBLE

Haciendo uso del principio de conservación de la masa se puede obtener la expresión general para la ecuación de continuidad. Aceptando que la densidad no cambia a lo largo del tiempo (flujo incompresible), dicha expresión se puede reducir a:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

1.5 ECUACIÓN DE LAPLACE

Sustituyendo las ecuaciones (1.2), que relacionan el potencial con las velocidades, en la ecuación (1.3) se obtiene la llamada ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

1.6 ECUACIONES DE SAINT-VENANT

Estas ecuaciones parten de la Segunda Ley de Newton, de donde se puede evaluar la variación total de la cantidad de movimiento por partes: la primera es la cantidad de movimiento entrante y saliente de un volumen de control en un instante dado y la segunda, la variación en el tiempo en el mismo volumen.

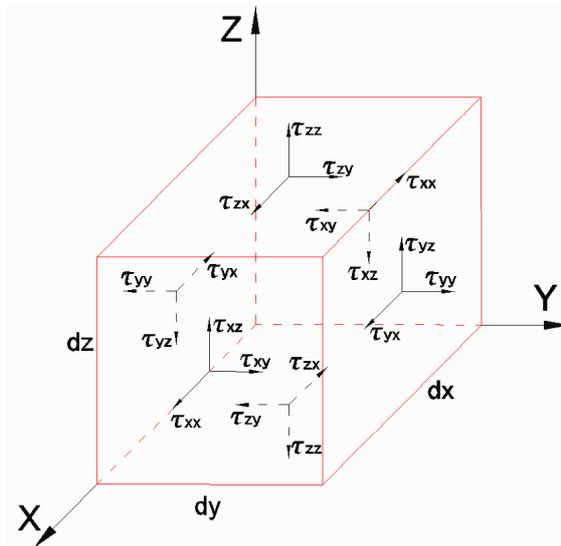


Figura 1. Esfuerzos en el volumen de control diferencial.

Así, considerando un volumen de control diferencial como el de la figura 1, incluyendo los efectos de la presión en las tensiones normales del cubo diferencial, desarrollando y simplificando, se llega a:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \underline{X} \quad (1.5)$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \underline{Y} \quad (1.6)$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \underline{Z} \quad (1.7)$$

las cuales son conocidas como ecuaciones de Saint-Venant. En donde  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  y  $\underline{z}$  representan la fuerza externa por unidad de masa actuando en la dirección correspondiente.

### 1.7 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

A las ecuaciones de Saint-Venant se les pueden incluir las deformaciones con ayuda del concepto de viscosidad dinámica  $\mu$  (relación esfuerzo-deformación).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.8)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.9)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.10)$$

en donde, por analogía de los esfuerzos:

$$\tau_{xx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.11)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.12)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.13)$$

Sustituyendo las ecuaciones de (1.11) a (1.13) en las ecuaciones de (1.5) a (1.7), considerando  $\mu$  constante en todo el dominio y expresando el resultado en su forma vectorial se tiene:

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{\rho} \nabla(\text{div} \mathbf{V}) + \bar{X} \quad (1.14)$$

Cuando se utiliza la relación  $\nu = \mu/\rho$  (flujo newtoniano), la ecuación de continuidad para flujos compresibles, simplificando y operando se llega a:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \bar{X} \quad (1.15)$$

cuyas ecuaciones expresadas en forma desarrollada se conocen como ecuaciones de Navier-Stokes.

### 1.8 ECUACIONES DE EULER

Si se aceptan tensiones tangenciales iguales a cero (esfuerzos de fricción relativamente pequeños), flujo no viscoso, la gravedad como única fuerza en dirección z por unidad de masa y despreciando todas las fuerzas en otras direcciones, se llega a las ecuaciones de Euler:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.16)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.17)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.18)$$

### 1.9 ECUACIÓN DE BERNOUILLI

Una forma integrada de las ecuaciones de movimiento o de Euler es la ecuación de Bernoulli, la cual, proporciona una relación entre el campo de presiones con el cinemático. Suponiendo flujo incompresible, las ecuaciones (1.16) a (1.18) se pueden expresar como:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.19)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.20)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.21)$$

Considerando condiciones de flujo irrotacional:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (1.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.22) a (1.24) en las ecuaciones (1.19) a (1.21) y empleando el concepto de potencial de velocidades expuesto en (1.2) se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = -g \right] \quad (1.27)$$

realizando las integrales, operando y simplificando:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = C(y, z, t) \quad (1.28)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = C_1(x, z, t) \quad (1.29)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = -gz + C_2(x, y, t) \quad (1.30)$$

en donde cada C representa la constante de integración correspondiente.

Las primeras dos ecuaciones tienen los mismos términos del lado izquierdo, lo que significa que comparten la misma constante, la cual debe ser independiente de x (por la primera ecuación) y de y (por la segunda ecuación); es decir, se debe tener  $C = C(z, t)$ .

Ahora, comparando las primeras dos ecuaciones con la tercera se llega a:

$$C(z, t) = C_1(z, t) = -gz + C_2(x, y, t) \quad (1.31)$$

Como C y  $C_1$  son independientes de z, al igual que  $C_2$  lo es de x e y, se consigue un valor dependiente únicamente del tiempo, el cual se puede sustituir en las ecuaciones (1.28) a (1.30), obteniendo:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (1.32)$$

La que es la forma más general de la ecuación de Bernoulli. En términos del potencial de velocidades se tiene la ecuación de Bernoulli en su forma más general:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (1.33)$$



## **CAPÍTULO 2**

# **INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS**

## 2. INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se expone la Teoría Lineal de una onda que se desplaza sobre un fondo horizontal e impermeable y que incide en una estructura cilíndrica. El problema queda idealizado como se indica en la figura 2:

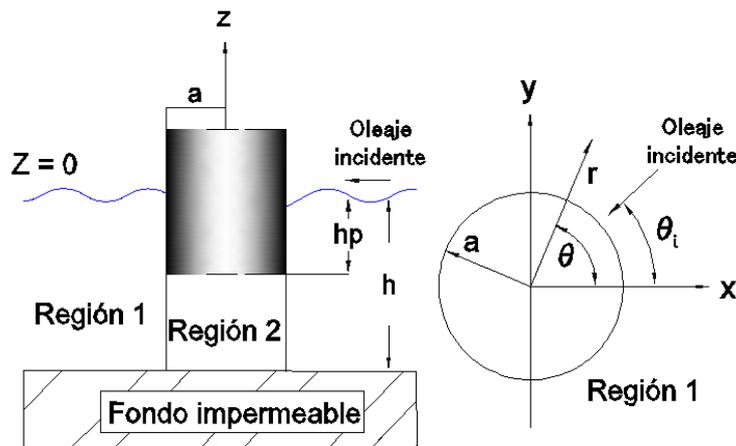


Figura 2. Idealización del problema en perfil (izquierda) y en planta (derecha).

en donde se muestra la dirección del oleaje incidente  $\theta_i$  que interactúa con una estructura impermeable, flotante, de radio  $a$  y longitud sumergida  $hp$ . Se observa que el dominio se ha dividido en dos regiones; la primera corresponde a la sección que se encuentra afuera de la pila mientras que la segunda, a la parte inferior a ella. Esto es con la intención de obtener una ecuación general del potencial de velocidades para cada caso.

En primer lugar, se estudia la región 1 con su ecuación de gobierno, la condición cinemática en el fondo y la de superficie libre, obteniendo así la forma general de la función de profundidad y del potencial de velocidades en la región exterior a la estructura, además, se presenta la forma general para el cálculo de la altura de ola y superficie libre. Posteriormente, en la región 2 se aplican la condición cinemática en el fondo y la de contorno en la base de la columna para obtener la función de profundidad en ella y su potencial de velocidades. Por facilidad en las condiciones de frontera, conviene manejar coordenadas cilíndricas, como se ha planteado en la figura anterior.

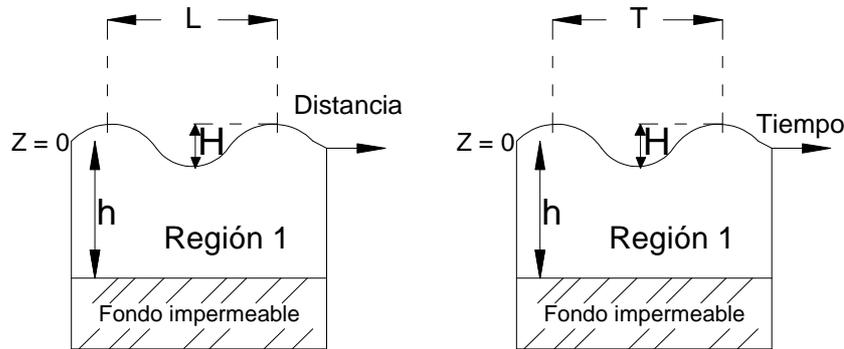
### 2.2 TEORÍA LINEAL SOBRE UN FONDO HORIZONTAL IMPERMEABLE CON SUPERFICIE LIBRE

Existe una relación que se debe cumplir entre el diámetro de una estructura y la longitud de onda para que esta última sufra cambios en su superficie libre y altura de ola. Dicha relación debe ser mayor a 0.1 ( $D/L > 0.1$ ), de lo contrario se dice que se trata

INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN  
COORDENADAS CILÍNDRICAS

de cilindros pequeños incapaces de perturbar el oleaje, tal y como se menciona en el anexo 1 del capítulo 13 del Manual de Obras Civiles de la Comisión Federal de Electricidad (CFE).

Se ha llamado “oleaje perturbado” al resultado de los efectos sobre la onda producidos por algún tipo de medio sólido, es decir, los fenómenos de difracción, reflexión y transmisión de la onda. Éste es producido por la estructura de la figura 2. Cuando no se tiene perturbación, se habla de un oleaje que se propaga en un dominio infinito, periódico en el espacio y en el tiempo y al que se le ha llamado “oleaje incidente”, de tal manera que la región 1 se puede idealizar como se muestra en la figura 3.



**Figura 3.** Idealización del problema en superficie libre.

### 2.3 CONDICIONES DE FRONTERA

Para el caso del oleaje incidente se sabe que debe cumplir con:

La ecuación de gobierno:

$$\nabla^2 \Phi^i = \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

Condición cinemática en el fondo:

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (2.2)$$

Condición de contorno mixta en la superficie libre:

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \Phi^i = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.3)$$

Condiciones radiales de contorno:

$$\Phi^i(r \cos(\theta_i), z, t) = \Phi^i(r \cos(\theta_i) + L, z, t) \quad (2.4)$$

$$\Phi^i(r \cos(\theta_i), z, t) = \Phi^i(r \cos(\theta_i), z, t + T) \quad (2.5)$$

INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN  
COORDENADAS CILÍNDRICAS

---

en donde  $\Phi^i$  indica el potencial incidente en la región 1 y  $\sigma$  es la frecuencia angular ( $1/T$ ).

## 2.4 SOLUCIÓN

La forma en que se ha planteado el problema otorga la ventaja de poder utilizar el método de separación de variables, por lo que el potencial de velocidades queda como:

$$\Phi^i(r, \theta, z, t) = R(r)\Omega(\theta)I(z)\Upsilon(t) \quad (2.6)$$

La función  $\Upsilon(t)$  debe ser periódica en el tiempo, lo que puede representarse de diversas formas, sin embargo, se ha optado por la más general:

$$\Upsilon(t) = e^{-i\sigma t} \quad (2.7)$$

Por simplificación en el álgebra, se omitirá el exponencial de  $t$  por tratarse de una constante para las operaciones en las condiciones de contorno y en la de gobierno. Asimismo, se omitirán las variables explícitas y el superíndice  $i$  del potencial al sobrentenderse que las operaciones siguientes se refieren al caso de la de la región uno de la figura 2. Por tanto, el potencial queda:

$$\Phi = R(r)\Omega(\theta)I(z) \quad (2.8)$$

Sustituyendo a la ecuación (2.8) en la ecuación de gobierno (2.1), se obtiene:

$$\Omega(\theta)I(z)R(r)_{rr} + \frac{R(r)I(z)}{r^2}\Omega(\theta)_{\theta\theta} + \frac{\Omega(\theta)I(z)}{r}R(r)_r + R(r)\Omega(\theta)I(z)_{zz} = 0 \quad (2.9)$$

Los subíndices  $rr$ ,  $\theta\theta$  y  $zz$  representan la doble derivada de las funciones, mientras que  $r$ , la derivada simple.

Se puede dividir toda la ecuación (2.9) entre  $R(r)\Omega(\theta)I(z)$ :

$$\frac{1}{R(r)}R(r)_{rr} + \frac{1}{r^2\Omega(\theta)}\Omega(\theta)_{\theta\theta} + \frac{1}{rR(r)}R(r)_r + \frac{1}{I(z)}I(z)_{zz} = 0 \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) se puede reagrupar como:

$$\frac{1}{R(r)}R(r)_{rr} + \frac{1}{rR(r)}R(r)_r + \frac{1}{r^2\Omega(\theta)}\Omega(\theta)_{\theta\theta} = -\frac{1}{I(z)}I(z)_{zz} = -k^2 \quad (2.11)$$

La dependencia del término izquierdo es de  $r$  y  $\theta$ , mientras que la del derecho únicamente de  $z$ . Esto significa que para que la igualdad se cumpla, ambos deben tener un resultado independiente de  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ , es decir, una constante. Por conveniencia se ha propuesto  $-k^2$ .

Multiplicando la ecuación (2.11) por  $r^2$  y simplificando:

$$\frac{r^2}{R(r)} R(r)_{rr} + \frac{r}{R(r)} R(r)_r + \frac{1}{\Omega(\theta)} \Omega(\theta)_{\theta\theta} + r^2 k^2 = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{I(z)} I(z)_{zz} - k^2 = 0 \quad (2.13)$$

Bajo el mismo razonamiento de la dependencia de miembros de una ecuación en función de variables diferentes, se puede expresar la ecuación (2.12) como se muestra a continuación, llamando ahora  $\alpha^2$  a esa constante cualquiera:

$$\frac{r^2}{R(r)} R(r)_{rr} + \frac{r}{R(r)} R(r)_r + r^2 k^2 = -\frac{1}{\Omega(\theta)} \Omega(\theta)_{\theta\theta} = \alpha^2 \quad (2.14)$$

A la ecuación (2.14) se le puede aplicar un procedimiento análogo al utilizado en la (2.11), obteniendo:

$$\frac{r^2}{R(r)} R(r)_{rr} + \frac{r}{R(r)} R(r)_r + r^2 k^2 = \alpha^2 \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{\Omega(\theta)} \Omega(\theta)_{\theta\theta} = -\alpha^2 \quad (2.16)$$

Omitiendo la solución trivial, es decir  $\alpha^2 = 0$ , la solución para la ecuación (2.16) resulta ser:

$$\Omega(\theta) = C \cos(\alpha\theta) + D \sin(\alpha\theta) \quad (2.17)$$

donde  $C$  y  $D$  son constantes cualquiera de la solución general.

Reagrupando la ecuación (2.15):

$$r^2 R(r)_{rr} + r R(r)_r + (r^2 k^2 - \alpha^2) R(r) = 0 \quad (2.18)$$

Dicha expresión tiene la forma de problemas cuya solución son las llamadas funciones de Bessel de primer tipo (especie o clase)  $J_{\pm\alpha}(z)$ , de segundo tipo o funciones de Weber  $Y_{\alpha}(z)$  y las de tercer tipo o funciones de Hankel  $H_{\alpha}^{(1)}(z)$  y  $H_{\alpha}^{(2)}(z)$ .

Utilizando las funciones de Bessel de primer orden se puede expresar de manera general a la expresión dependiente de  $r$ .

$$R(r) = A J_{\alpha}(kr) + B J_{-\alpha}(kr) \quad (2.19)$$

INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN  
COORDENADAS CILÍNDRICAS

---

Otra forma es consultar soluciones tabuladas, suponiendo un oleaje unidireccional (dirección x, por ejemplo) para la cual existen diferentes expresiones de representación. En este trabajo se ha optado por:

$$e^{ikx} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} i^{\alpha} J_{\alpha}(kr) e^{i\alpha \theta} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} i^{\alpha} J_{\alpha}(kr) \cos(\alpha \theta) = R(r) \Omega(\theta) \quad (2.20)$$

En algunas ocasiones conviene expresar el oleaje incidente con las funciones de Bessel de primer tipo, mientras que al oleaje perturbado con Bessel de tercer tipo.

Aplicando la condición de contorno espacial, ecuación (2.4), a la (2.20) se tiene:

$$e^{ikr \cos(\theta_i)} = e^{ik(r \cos(\theta_i) + L)} \quad (2.21)$$

lo que significa que:

$$e^{ikL} = \cos(kL) + i \sin(kL) = 1 \quad (2.22)$$

lo mismo que considerar únicamente la parte real de la expresión, es decir, que para que la ecuación (2.22) sea cierta, se debe de cumplir con:

$$kL = n\pi \quad \text{con } n = 0, 2, 4, \dots \quad (2.23)$$

Para conservar el resultado dentro de la primera repetición del movimiento periódico y eliminar la solución trivial, se tiene:

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.24)$$

Resta encontrar la función dependiente de la profundidad. De la ecuación (2.13) se sabe que las soluciones pueden ser imaginarias puras y una real, pero todas se pueden incluir en la forma más general:

$$I(z) = C_2 e^{kz} + D_2 e^{-kz} \quad (2.25)$$

Aplicando la condición cinemática en el fondo, ecuación (2.2), en la ecuación (2.25) con la intención de obtener una constante en función de la otra:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = k \cdot C_2 \cdot e^{-kz} + k \cdot D_2 \cdot e^{kz} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (2.26)$$

Sustituyendo, simplificando y despejando a D:

$$C_2 e^{-kh} + D_2 e^{kh} = 0 \quad \therefore \quad C_2 = D_2 e^{2kh} \quad (2.27)$$

por lo tanto, la expresión dependiente de la profundidad resulta:

$$I(z) = D_2 e^{2kh} e^{kz} + D_2 e^{-kz} = D_2 e^{k(2h+z)} + D_2 e^{-kz} \quad (2.28)$$

$$I(z) = D_2 e^{kh} \left( e^{k(h+z)} + e^{-kz-kh} \right) = 2 \cdot D_2 e^{kh} \frac{\left( e^{k(h+z)} + e^{-k(z+h)} \right)}{2} \quad (2.29)$$

$$I(z) = 2D_2 e^{kh} \cosh[k(h+z)] \quad (2.30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.30) y (2.7) en la (2.6):

$$\Phi = R(r)\Omega(\theta)2D_2 e^{kh} \cosh[k(h+z)]e^{-i\sigma t} \quad (2.31)$$

La función potencial debe cumplir con la condición de contorno en la superficie libre, ecuación (2.3). Derivando y sustituyendo:

$$2R(r)\Omega(\theta)D_2 e^{kh} k \sinh[k(h+z)] - \frac{\sigma^2}{g} 2R(r)\Omega(\theta)D_2 e^{kh} \cosh[k(h+z)] = 0 \quad (2.32)$$

Dividiendo entre  $2R(r)\Omega(\theta)D_2 e^{kh}$  y despejando a  $\sigma^2$ :

$$\sinh[k(h+z)] - \frac{\sigma^2}{g} \cosh[k(h+z)] = 0 \quad (2.33)$$

$$\sigma^2 = gk \frac{\sinh[k(h+z)]}{\cosh[k(h+z)]} \quad (2.34)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh[k(h+z)] \quad (2.35)$$

A esta relación entre el periodo de onda  $T$ , la profundidad  $h$  y el número de onda  $k$ , se le llama ecuación de dispersión, pues al no depender de la amplitud, la velocidad de propagación depende únicamente del periodo. Se concluye que las ondas de mayor periodo se separan de las de menor periodo, por lo que suele decirse que las ondas lineales son dispersivas en frecuencia. El valor del número de onda  $k$  es el que cumpla con la ecuación de la dispersión; es decir, existe una solución real e infinitas raíces imaginarias puras, como se demuestra en el anexo A.

El potencial debe cumplir con la condición dinámica de superficie libre:

$$\eta = \Re \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (2.36)$$

$$\eta = \Re \left[ \frac{2R(r)\Omega(\theta)D_2 e^{kh} \cosh(kh)(-i\sigma) e^{-i\sigma t}}{g} \right] \quad (2.37)$$

INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN  
COORDENADAS CILÍNDRICAS

---

y sabiendo que se busca una solución periódica que represente una onda progresiva escalada a la amplitud  $A$ :

$$\eta = \Re \left[ A \cdot e^{i(k_1 r \cos(\theta) - \sigma t)} \right] \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (2.38)$$

o lo que es lo mismo:

$$\eta = \Re \left[ A \cdot R(r) \cdot \Omega(\theta) \cdot e^{-i\sigma t} \right] \quad (2.39)$$

en donde  $\Re$  indica que se debe considerar únicamente la parte real. Igualando la ecuación (2.37) y la (2.39) y simplificando:

$$A = \frac{2D_2 e^{kh} \cosh(kh)(-i\sigma)}{g} \quad (2.40)$$

de donde se despeja  $D_2$ :

$$D_2 = \frac{Ag}{2e^{kh} \cosh(kh)(-i\sigma)} \quad (2.41)$$

Sustituyendo la ecuación (2.41) en la ecuación (2.30) y simplificando:

$$I(z) = A \frac{ig}{\sigma} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \quad (2.42)$$

Se cuenta ahora con las ecuaciones necesarias para expresar el potencial de velocidades para el caso de una onda viajando en un fondo plano en coordenadas cilíndricas. La solución de una onda que llega, como el oleaje incidente, es representada por las funciones de Bessel de primer tipo; en tanto que una onda que sale e incluye los efectos de dispersión y reflexión, como el oleaje perturbado, es normalmente indicada por las funciones de Bessel de tercer tipo, tal y como se muestra en el anexo c. De esta forma, para el oleaje incidente en la región uno  $\Phi_1^i$  y el perturbado  $\Phi_1^s$  se tiene:

$$\Phi_1^i(r, \theta, z, t) = A \frac{ig}{\sigma} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} i^\alpha J_\alpha(kr) \cos(\alpha\theta) e^{-i\sigma t} \quad (2.43)$$

$$\Phi_1^s(r, \theta, z, t) = A \frac{ig}{\sigma} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} i^\alpha H_\alpha(kr) \cos(\alpha\theta) e^{-i\sigma t} \quad (2.44)$$

En este trabajo se ha optado por utilizar la función  $H_\alpha^{(1)}(z)$  para expresar el oleaje perturbado, por lo que, de ahora en adelante, únicamente se expresará como  $H_\alpha(z)$ , que es lo mismo que:

$$H_\alpha^{(1)}(z) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x) \quad (2.45)$$

INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN  
COORDENADAS CILÍNDRICAS

---

bajo esta misma función también se encuentran expresados los llamados modos evanescentes, cuya necesidad se expresa en capítulos posteriores.

2.5 TEORÍA LINEAL SOBRE UN FONDO HORIZONTAL IMPERMEABLE CON  
UNA PILA IMPERMEABLE FLOTANTE

La representación esquemática de este caso queda plasmada en la figura 4 para la región 2:

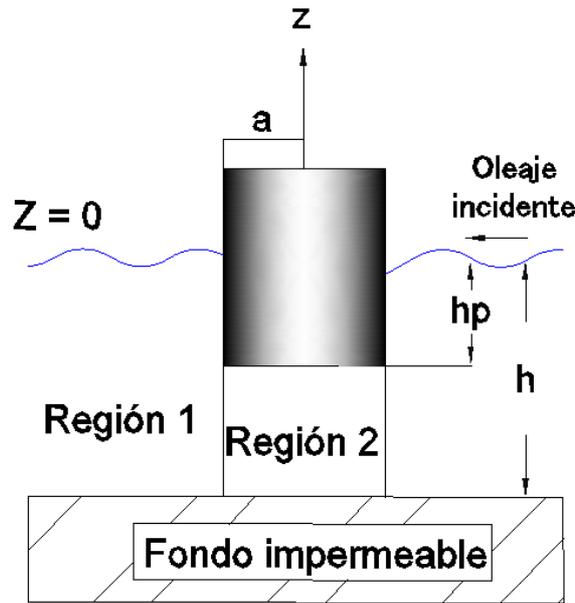


Figura 4. Idealización del problema por debajo de la estructura.

2.6 CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera son, en su mayoría, iguales que en el caso de superficie libre, tal y como se indica a continuación. La ecuación de gobierno es:

$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = 0 \quad (2.46)$$

Condición cinemática en el fondo:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \quad (2.47)$$

Condición de contorno en la base de la columna:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -hp \quad (2.48)$$

## 2.7 SOLUCIÓN

La forma más general del potencial de velocidades se expresa de tal forma que se pueda utilizar el método de separación de variables, de modo que resulta:

$$\Phi_2(r, \theta, z, t) = R_2(r) \Omega_2(\theta) P(z) Y_2(t) \quad (2.49)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al caso de la Teoría Lineal sobre un fondo horizontal impermeable con superficie libre, se pueden calcular las funciones dependientes  $r$ ,  $\theta$  y  $t$ . De esta manera se tiene:

$$Y(t) = e^{-i\sigma t} \quad (2.50)$$

$$R(r) \Omega(\theta) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} i^\alpha J_\alpha(Kr) \cos(\alpha\theta) \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{P(z)} P(z)_{zz} - K^2 = 0 \quad (2.52)$$

La función  $P(z)$  es la que resuelva la ecuación diferencial (2.52), la cual conviene expresar en su forma más general. Más adelante se verá que los valores de  $K$  corresponden únicamente a valores reales, por lo que:

$$P(z) = C \sin(Kz) + D \cos(Kz) \quad (2.53)$$

Sustituyendo la ecuación (2.53) en la ecuación de impermeabilidad en el fondo (2.47) y simplificando:

$$C = -D \tan(Kz) \quad (2.54)$$

Utilizando (2.54) en (2.53) se tiene la expresión general para la función de profundidad debajo de la estructura:

$$P(z) = D \tan(Kz) \sin(Kz) + D \cos(Kz) \quad (2.55)$$

Desarrollando y ordenando:

$$P(z) = \frac{D}{\cos(Kz)} \cos[K(h+z)] \quad (2.56)$$

Sustituyendo la ecuación (2.56) en la condición de impermeabilidad de la columna en su base (2.48):

$$\sin[K(h-hp)] = 0 \quad (2.57)$$

Con lo que se observa que para que esta ecuación se cumpla es necesario:

$$K_n = \frac{n\pi}{h-hp} \quad (2.58)$$

INTERACCIÓN DE UN TREN LINEAL DE ONDAS CON UNA PILA FLOTANTE EN  
COORDENADAS CILÍNDRICAS

---

Para quitar la solución trivial del valor de  $K$ , la ecuación (2.58) se considerará válida para  $n \geq 1$  y entero.

Sin perder la generalidad del problema, se ha propuesto la función dependiente de la profundidad como:

$$P(z) = \cos[K(h+z)] \quad (2.59)$$

De esta forma se puede expresar el potencial de velocidades bajo una estructura circular e impermeable en coordenadas cilíndricas:

$$\Phi_2(r, \theta, z, t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} i^\alpha J_\alpha(Kr) \cos(\alpha\theta) \cos[K(h+z)] e^{-i\sigma t} \quad (2.60)$$

## 2.8 CÁLCULO DE LA SUPERFICIE LIBRE Y ALTURA DE OLA

Para caracterizar el oleaje es indispensable contar con el potencial de velocidades porque de él se parte para obtener datos como velocidad, presión, altura de ola y superficie libre. En este trabajo, se muestran como resultados los últimos dos, por lo que en el presente subcapítulo se expone la forma de calcularlos.

## 2.9 CONDICIÓN DINÁMICA EN LA SUPERFICIE LIBRE

Por ser la superficie libre la región de interés, se parte de la ecuación general de Bernoulli, ecuación (1.33), evaluada en  $z = \eta(x, y)$ .

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p\eta}{\rho} + g\eta(x, y) = C(t) \quad (2.61)$$

## 2.10 SUPERFICIE LIBRE

El cálculo de la superficie libre se realiza con el potencial de la región correspondiente. La constante  $C(t)$  generalmente se supone igual a cero por un razonamiento análogo a la presión, la cual se refiere a la manométrica, es decir, que en la superficie libre es igual a cero. Además, al utilizar la Teoría Lineal y simplificando se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta = \Re \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_1(r, \theta, z, t)}{\partial t} \right] \quad \text{en } z = 0 \quad (2.62)$$

La ecuación (2.62) también se puede expresar por la ecuación (2.63) al evaluarla en  $z = 0$  y realizar la derivada del potencial respecto al tiempo.

$$\eta = \Re \left[ A \Phi_1(r, \theta) e^{-i\sigma t} \right] \quad (2.63)$$

### 2.11 ALTURA DE OLA

A diferencia de la superficie libre y por la definición del potencial de velocidades, la altura de ola se puede calcular como el módulo del potencial de velocidades:

$$H = |\Phi_1(r, \theta, t)| \quad (2.64)$$

Conviene hacer notar que no hay dependencia de la profundidad.

## **CAPÍTULO 3**

# **ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE PILA FLOTANTE E IMPERMEABLE**

### 3. ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE PILA FLOTANTE E IMPERMEABLE

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se aborda la solución analítica de una sola pila impermeable y flotante bajo la interacción de un oleaje monocromático y regular, considerando fondo constante en una región finita del dominio.

La organización de este apartado consiste en el planteamiento del problema, la identificación de las condiciones de frontera, la solución analítica y la presentación de los resultados bajo diferentes profundidades relativas de una pila aislada.

#### 3.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las condiciones del problema quedan representadas en el siguiente diagrama:

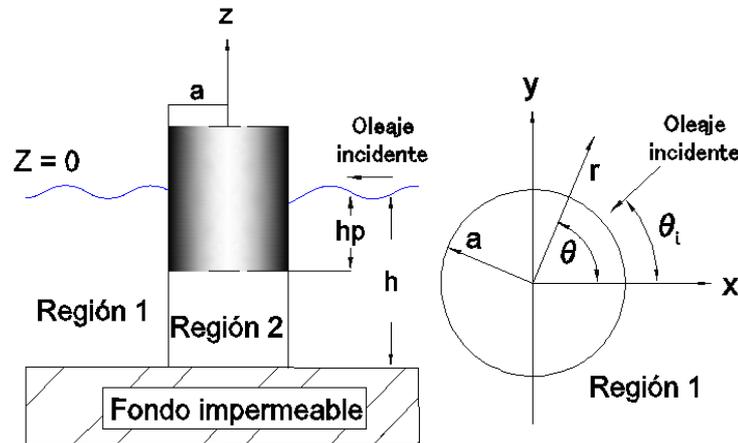


Figura 5. Esquematización del problema.

#### 3.3 CONDICIONES DE FRONTERA

La ecuación de gobierno en la región  $i$  resulta:

$$\nabla^2 \Phi_i = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en} \begin{cases} i=1 & -h \leq z \leq 0 \\ i=2 & -h \leq z \leq -hp \end{cases} \quad (3.1)$$

Condición cinemática en el fondo:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad \text{en} \quad i=1 \text{ y } 2 \quad (3.2)$$

Condición de contorno en la superficie libre:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \Phi_1 = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (3.3)$$

Condición de contorno en la base de la columna:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -hp \quad (3.4)$$

En la interface entre ambas regiones, cuando  $r = a$ , se debe cumplir con la continuidad de velocidad y de presiones.

Condiciones de contorno laterales en  $r = a$

Impermeabilidad de la columna:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad -hp \leq z \leq 0 \quad (3.5)$$

Continuidad de velocidad:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \quad \text{en} \quad -h \leq z \leq -hp \quad (3.6)$$

Continuidad de presión:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{en} \quad -h \leq z \leq -hp \quad (3.7)$$

en donde el subíndice en cada ecuación representa la región a la que se hace referencia de acuerdo con la figura 5.

### 3.4 SOLUCIÓN GENERAL

En la región 1 se requiere del potencial de una onda incidente y otro que incluya el fenómeno de difracción y reflexión entre el oleaje y la estructura. Tal y como se ha indicado anteriormente, este potencial puede quedar representado por:

$$\Phi_1(r, \theta, z, t) = I(z) e^{-i\sigma t} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \left( J_{\alpha}(kr) e^{i\alpha(\theta-\theta_i)} + R_{\alpha} Z_{\alpha} H_{\alpha}(kr) e^{i\alpha\theta} \right) \quad (3.8)$$

Mientras que en la región dos:

$$\Phi_2(r, \theta, z, t) = P(z) e^{-i\sigma t} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} T_{\beta} J_{\beta}(Kr) e^{i\beta\theta} \quad (3.9)$$

En donde  $\theta_i$  expresa el ángulo del oleaje incidente; los coeficientes  $R_{\alpha}$  y  $T_{\beta}$  indican la amplitud de las ondas en cada región y son obtenidos a partir de las ecuaciones de condiciones laterales, ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7); mientras que las funciones dependientes de la profundidad  $I(z)$  y  $P(z)$ , de las condiciones de contorno verticales.

El lector debe saber que existe otra forma de representación de los potenciales, común para otros autores. Una modificación es expresar la onda dependiente del ángulo directamente como el coseno de éste, sin embargo, se recurre a la expresión general (la exponencial) por facilidad en la integración del ángulo de incidencia.

Así mismo, se puede hacer uso de los llamados símbolos de Jacobi para la representación de la sumatoria con inicio en cero, cumpliendo con las propiedades de las funciones de Bessel. Se ha realizado un cambio en la forma de expresar el oleaje incidente con la intención de facilitar la integral del ángulo de incidencia y hacer coincidir los resultados tanto en el oleaje perturbado como para el incidente. Los coeficientes  $k$ ,  $K$  y las funciones de profundidad vienen dados por las siguientes expresiones:

$$I(z) = -A \frac{g}{i\sigma} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \quad (3.10)$$

$$P(z) = \cos(K(h+z)) \quad (3.11)$$

$$\sigma^2 = g \cdot k \cdot \tanh(k(h+z)) \quad (3.12)$$

$$K = \frac{\pi}{h-hp} \quad (3.13)$$

$$Z_\alpha = \frac{J'_\alpha(kr)}{H'_\alpha(kr)} \quad (3.14)$$

Para abarcar todas las posibles variantes del ángulo de incidencia sobre la estructura, se realiza una integral definida de la función de  $\theta$ . Ahora, sumando las ecuaciones (3.5) y (3.6) y reagrupando:

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} dz = \int_{-h}^{-hp} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} dz \quad (3.15)$$

en donde se sustituyen las ecuaciones (3.8) y (3.9) para, posteriormente, despejar a  $T_\alpha$ :

$$T_\alpha = C_1(1+R_\alpha) e^{i\alpha(\pi/2-\theta_i)} \quad (3.16)$$

De manera similar, para la condición de continuidad de presión, ecuación (3.7), se llega a:

$$T_\alpha = C_2(1+R_\alpha C_3) e^{i\alpha(\pi/2-\theta_i)} \quad (3.17)$$

Operando las ecuaciones (3.16) y (3.17) se logra la solución del sistema:

$$R_\alpha = \frac{C_2 - C_1}{C_1 - C_2 C_3} e^{i\alpha(\pi/2-\theta_i)} \quad (3.18)$$

$$T_\alpha = C_2 C_1 \frac{1 - C_3}{C_1 - C_2 C_3} e^{i\alpha(\pi/2-\theta_i)} \quad (3.19)$$

En donde:

$$C_1 = \frac{XJ'_\alpha(kr)}{\Gamma J'_\alpha(Kr)} \quad (3.20)$$

$$C_2 = \frac{\Gamma J_\alpha(kr)}{YJ_\alpha(Kr)} \quad (3.21)$$

$$C_3 = Z_\alpha \frac{H_\alpha(kr)}{J_\alpha(kr)} \quad (3.22)$$

$$X = \int_{-h}^0 I(z)^2 dz \quad (3.23)$$

$$Y = \int_{-h}^{-hp} P(z)^2 dz \quad (3.24)$$

$$\Gamma = \int_{-h}^{-hp} I(z)P(z)dz \quad (3.25)$$

### 3.5 RESULTADOS

Una vez que se resuelve el sistema, se cuenta con todo lo necesario para poder definir los potenciales de velocidad y con ello, la altura de ola. Siguiendo la ecuación (2.64) se calcula la altura de ola que incluye los fenómenos de reflexión, difracción y al oleaje incidente. Resta plantear diversos casos en los que se pueda observar su comportamiento.

A continuación se observa el índice de amplificación, definido como la altura de ola inicial dividida entre la altura de ola local. Esta última resulta de la interacción entre el oleaje incidente que viaja hacia la izquierda sobre un fondo impermeable a 50 m, formando un ángulo de cero grados respecto al eje x, con una longitud de onda L de 100 m y una pila con 40 m de diámetro, cuya profundidad relativa es de 1 (figura 6), 5 (figura 7), 10 (figura 8), 20 (figura 9) 30 (figura 10) y 50 metros (figura 11).

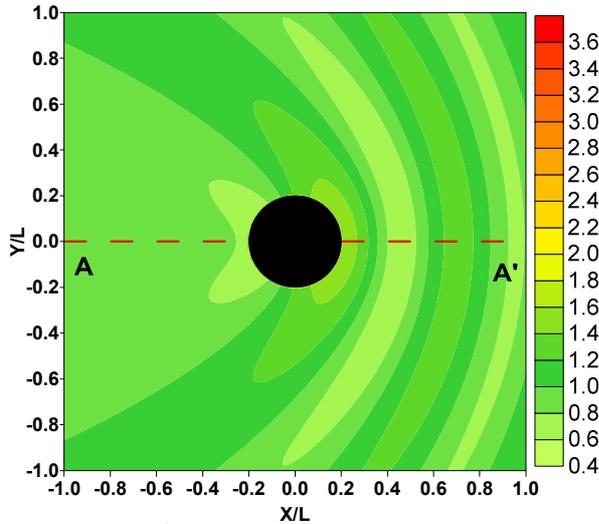


Figura 6. Índice de amplificación para  $hp = 1$  m.

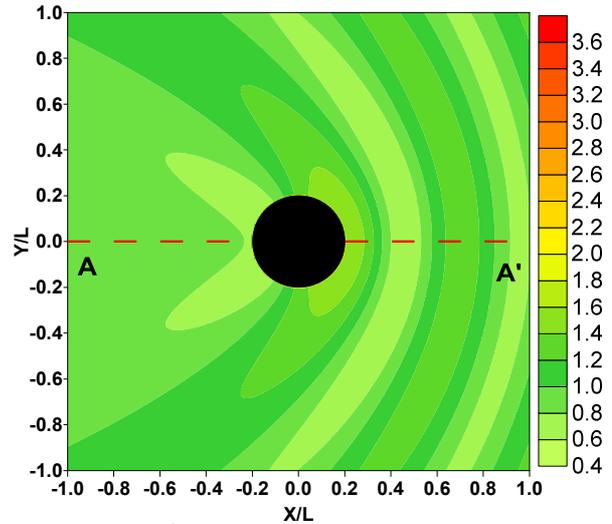


Figura 7. Índice de amplificación para  $hp = 5$  m

De acuerdo con las figuras 6 y 7, la variación del índice de amplificación tiene mayor importancia en la zona de transmisión cercana a la estructura, con tan sólo 4 metros de diferencia entre cada caso.

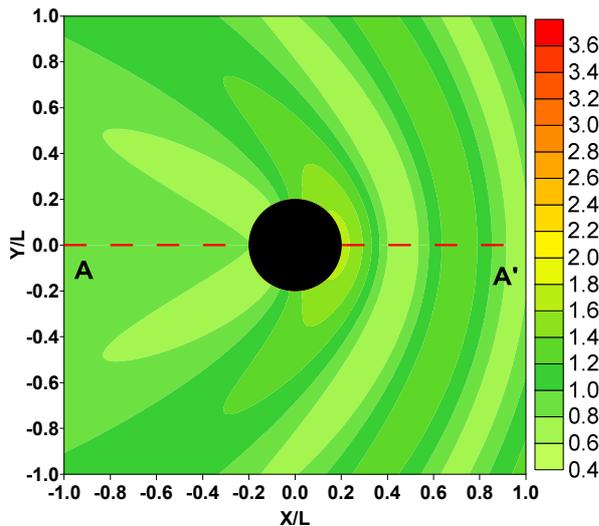


Figura 8. Índice de amplificación para  $hp = 10$  m.

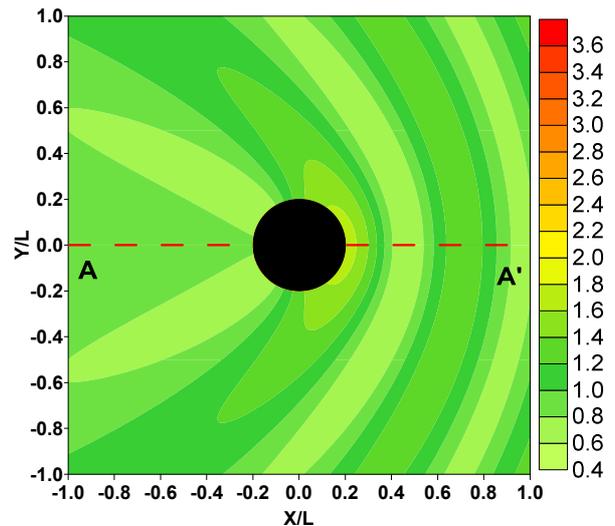


Figura 9. Índice de amplificación para  $hp = 20$  m.

Mientras la longitud sumergida de la estructura comienza a aumentar, la zona de reflexión comienza a converger, tal y como se observa en la figura 8 y en la figura 9.

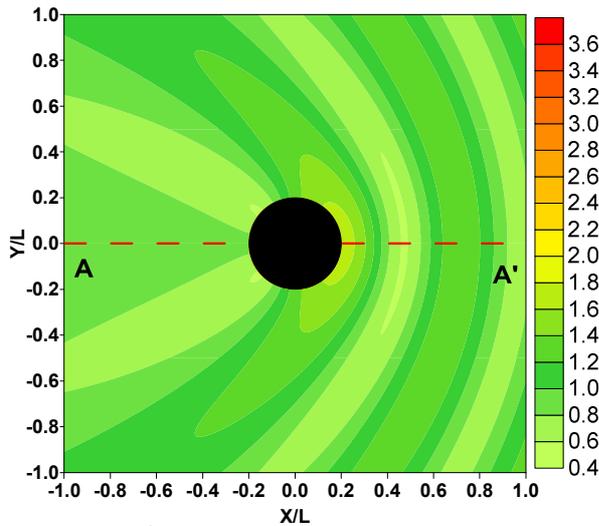


Figura 10. Índice de amplificación para  $hp = 30$  m.

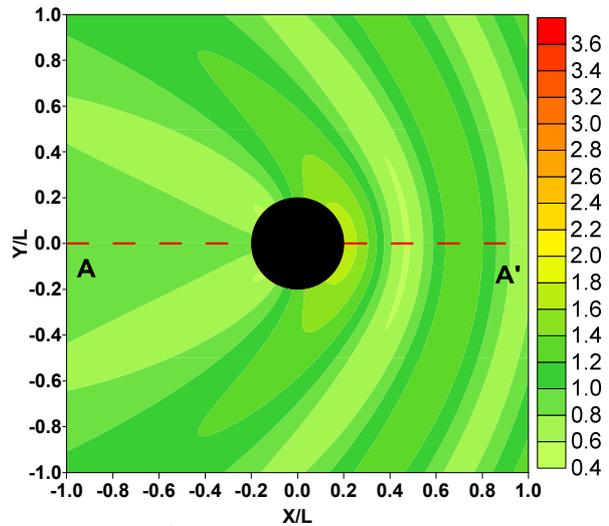


Figura 11. Índice de amplificación para  $hp = 50$  m.

Bajo estas condiciones particulares de oleaje-fondo marino, la convergencia en reflexión y transmisión se alcanza para valores de  $hp$  entre 20 y 30 m.

En la figura 12 se exponen los cortes A-A' de todos los casos anteriores, tanto en trasmisión como en reflexión. También se aprecia que para los casos en cuestión, sí se alcanza una convergencia en ambos lados de la pila, la cual depende de la longitud que se encuentre sumergida,  $hp$ .

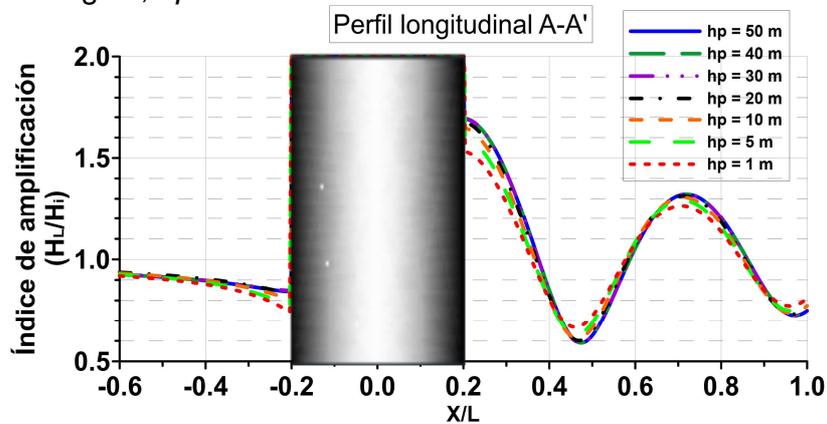


Figura 12. Variación del índice de amplificación con respecto a  $hp$ .

Se espera que haya un momento en el que la influencia de la pila flotante sea la misma que la de una estructura apoyada en el fondo marino; para ello, se muestran variaciones del índice de amplificación con diferentes longitudes sumergidas para cuando el radio es de 20 m con centro en el origen, la altura de ola unitaria y profundidad del fondo constante de 50 m. Al igual que los casos anteriores, se trata de un oleaje monocromático que viaja hacia la izquierda. A continuación se muestran los perfiles análogos a los casos anteriores.

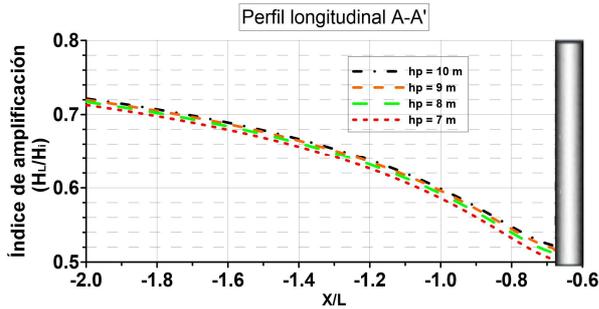


Figura 13. Índice de amplificación en transmisión para  $L = 30$  m.

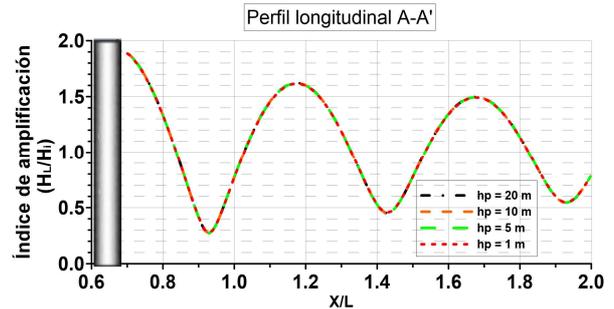


Figura 14. Índice de amplificación en reflexión para  $L = 30$  m.

Llega un momento en el que se alcanza una estabilidad tanto en la zona de reflexión como en la de transmisión. En el caso de  $L = 30$  m, dicho estado se alcanza aproximadamente cuando  $hp = 9$  m. Es decir, cuando  $hp$  es mayor a 9 metros, ya no existe variación en el índice de incidencia, como podemos observar en la figura 13.

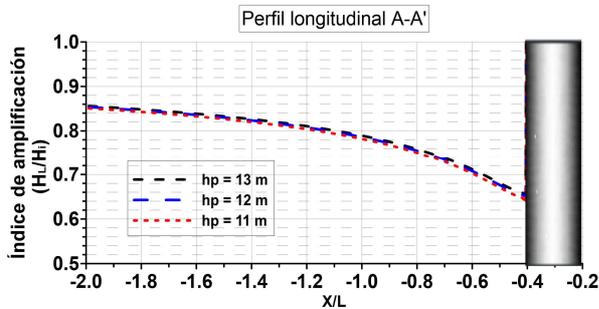


Figura 15. Índice de amplificación en transmisión para  $L = 50$  m.

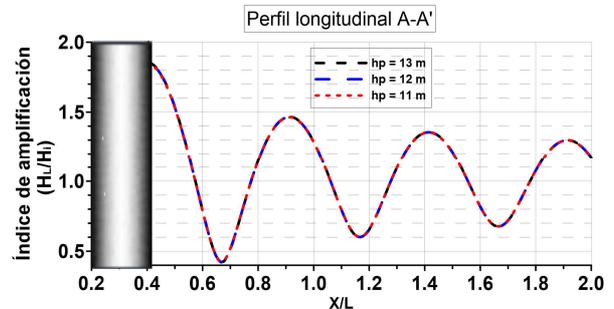


Figura 16. Índice de amplificación en reflexión para  $L = 50$  m.

En la figura 15 se observa que existe muy poca discrepancia en los valores del índice de amplificación, por lo que se puede considerar que para valores de  $hp$  mayores de 12 m, ya no existe diferencia entre hacer la estructura flotante o completamente anclada.

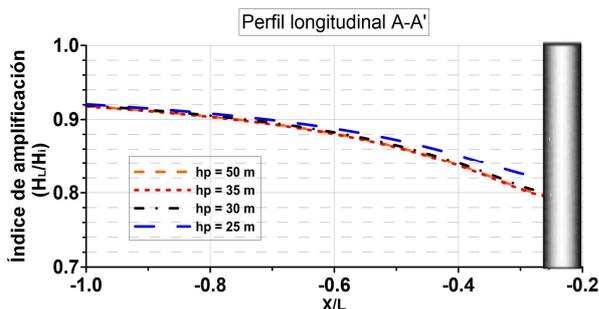


Figura 17. Índice de amplificación en transmisión para  $L = 80$  m.

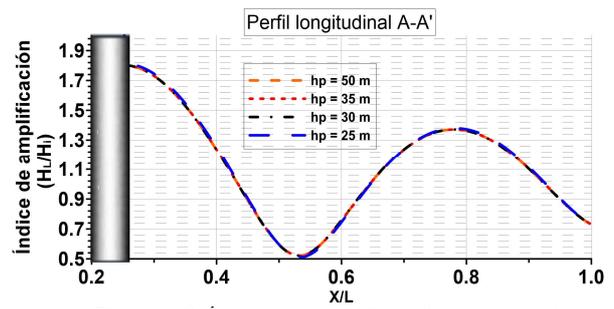


Figura 18. Índice de amplificación en reflexión para  $L = 80$  m.

En la figura 17 se observa que cuando  $hp$  alcanza valores superiores a 30 m, ya no existe variación en el índice de amplificación para la transmisión, mientras que en la

figura 18, se observa que cuando la longitud de onda es igual a 80 m, el índice de amplificación en reflexión no varía para ningún valor de  $hp$  especificado.

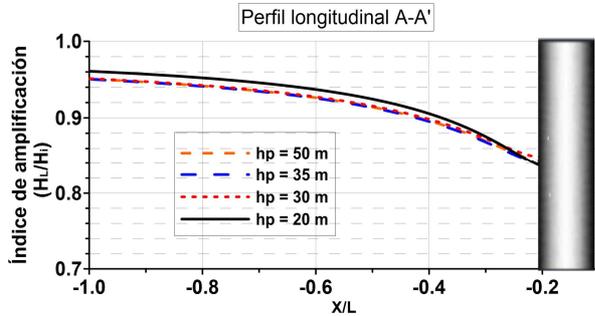


Figura 19. Índice de amplificación en transmisión para  $L = 100$  m.

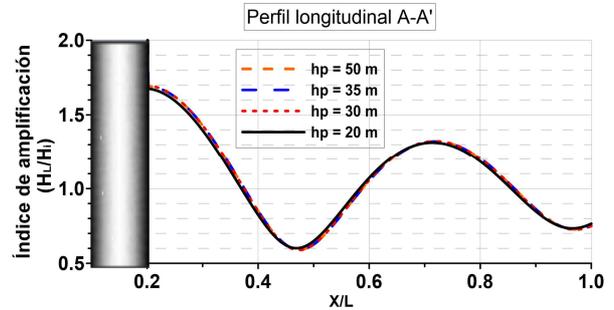


Figura 20. Índice de amplificación en reflexión para  $L = 100$  m.

Cuando la longitud de onda es de 100 m, ya no existe variación en la parte de sotavento de la estructura para  $hp$  igual a 35 metros.

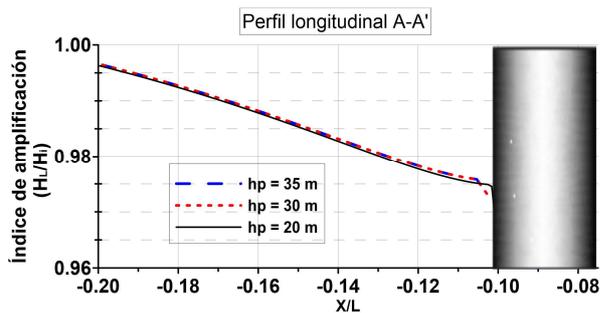


Figura 21. Índice de amplificación en transmisión para  $L = 200$  m.

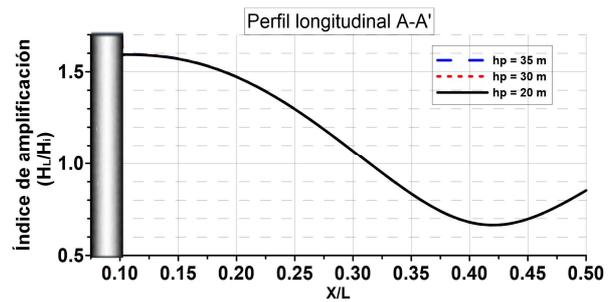


Figura 22. Índice de amplificación en reflexión para  $L = 200$  m.

El lector debe tomar en cuenta que aun cambiando la escala para el índice de amplificación, prácticamente no existe variación a partir de que se tiene una longitud de estructura sumergida con  $hp$  igual a 35 m.

Se ha encontrado que cuando la velocidad vertical máxima es menor a 0.2 m/s, la influencia de la estructura flotante en el oleaje es la misma que en el caso de una completa, lo que quiere decir que, el comportamiento de la altura de ola es idéntico. Esa relación queda determinada para cuando  $hp$  cumple con la ecuación (3.26):

$$w \leq \sigma \frac{\sinh[k(h - hp_i)]}{\sinh(kh)} \leq 0.2 \frac{m}{s} \quad (3.26)$$

De esta forma, para las condiciones antes mostradas se tiene:

Tabla 1. Valores reales y teóricos de  $hp$  para  $h = 50$  m.

T [s]	L [m]	$hp_r$ [m]	$hp_t$ [m]	70% de $hp_t$
4.380	30	9	12.717	8.902
5.659	50	12	19.153	13.407
7.161	80	30	27.293	19.105
8.018	100	35	31.248	21.853
11.820	200	35	36.619	25.634
15.688	300	35	35.337	24.736

siendo  $hp_t$  la longitud sumergida de la estructura que cumple con la ecuación (3.26) y  $hp_r$  la longitud a la que ya no existe variación en la altura de ola al sumergir más la estructura. Esta  $hp_r$  se ha obtenido al definir un estado de mar, fondo marino y radio de la columna; posteriormente, se ha ido variando la longitud sumergida desde el fondo hasta el momento en que la altura de ola presenta variación.

Se puede ver que algunos valores presentan una discrepancia importante, no obstante, sigue siendo una primera aproximación bastante aceptable. Además, se puede observar que la longitud de onda está relacionada con la longitud a la cual debe estar sumergida la estructura.

Sabiendo que existe un momento en donde no se tiene mucha diferencia entre los resultados de reflexión y transmisión de una estructura completa con los de una flotante, se puede llegar a plantear la alternativa del ahorro de material en profundidades considerables. A partir de ese punto, conviene utilizar las ecuaciones de la estructura anclada como las que presenta Govaere G. (2002), por ser considerablemente más sencillas.

## **CAPÍTULO 4**

# **ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE MÚLTIPLES PILAS EN ARREGLO PARABÓLICO**

## 4. ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE MÚLTIPLES PILAS EN ARREGLO PARABÓLICO

### 4.1 INTRODUCCIÓN

Se presenta el planteamiento y solución analítica para la caracterización de un oleaje monocromático unidireccional, bajo la interacción de múltiples pilas flotantes e impermeables con profundidad relativa  $hp$  variable para cada estructura y sobre una región finita de profundidad constante.

El capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: en primer lugar, está el planteamiento del problema, seguido por la identificación de condiciones de frontera; a continuación, se presenta la solución analítica y por último se muestran los resultados variando el arreglo de pilas y en sus principales propiedades.

### 4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

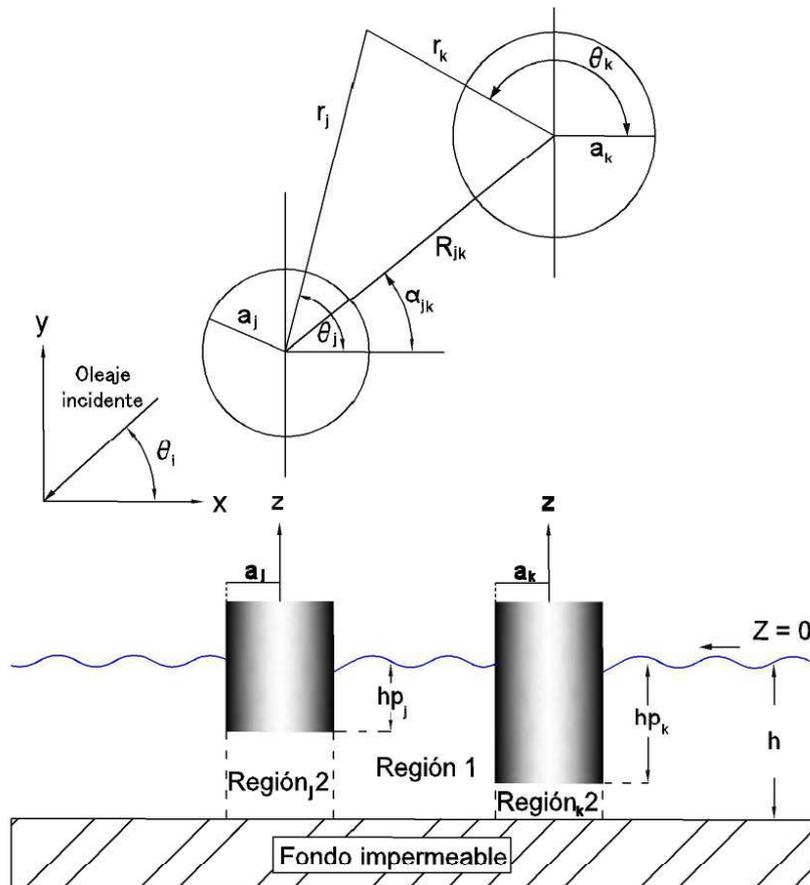


Figura 23. Esquematización de múltiples pilas flotantes e impermeables.

La figura 23 ilustra el problema a resolver en el caso de múltiples estructuras. También, da a conocer la nomenclatura a utilizar, en donde los subíndices  $j$  y  $k$  representan diferentes cilindros referidos con la intención de generar un cambio de coordenadas tantas veces como cilindros se tengan y de esta forma generar un sistema de ecuaciones finito y con solución.

### 4.3 CONDICIONES DE FRONTERA

En este caso, las condiciones de frontera se conservan para cada cilindro como si se tratara de una estructura aislada, lo que significa que para cada pila se deben cumplir con continuidad de velocidad y presión; conservando la condición de gobierno y las condiciones verticales, ecuaciones de (3.1) a (3.4). Para esto, se hace uso de ejes locales de referencia en coordenadas cilíndricas (tal y como se ha manejado hasta el momento), por lo que las condiciones de contorno quedan expresadas como:

#### Condiciones de contorno laterales en $n r = a_k$

Impermeabilidad de la columna:

$$\frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad -hp_k \leq z \leq 0 \quad (4.1)$$

Continuidad de velocidad:

$$\frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial r} \quad \text{en} \quad -h \leq z \leq -hp_k \quad (4.2)$$

Continuidad de presión:

$$\Phi_{1k} = \Phi_{2k} \quad \text{en} \quad -h \leq z \leq -hp_k \quad (4.3)$$

### 4.4 SOLUCIÓN GENERAL

El potencial en la primera región es el resultado de la suma del oleaje incidente y el de cada uno del oleaje perturbado provocado por cada pila.

$$\Phi_1(r, \theta, z, t) = \Phi_i(r, \theta, z, t) + \sum_{j=0}^{NC} \Phi_s^j(r_j, \theta_j, z, t) \quad (4.4)$$

$$\Phi_2(r, \theta, z, t) = P^k(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} T_{\alpha}^k J_{\alpha}(K_k r_k) e^{i\alpha\theta_k} \quad (4.5)$$

en donde NC indica el número de cilindros e:

$$I(z) = -A \frac{g}{i\sigma} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(k \cdot h)} \quad (4.6)$$

$$P^k(z) = \cos(K_k(h+z)) \quad (4.7)$$

Por conveniencia, se introduce un factor de fase  $I_j = e^{ik(x_j \cos(\theta_i) + y_j \sin(\theta_i))}$ , el cual ayuda a desplazar el oleaje incidente de acuerdo al cilindro y al sistema de referencia. A partir de ahora la nomenclatura de los potenciales se supondrá dependiente de  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ , a menos que se indique lo contrario.

$$\Phi_i^j = I(z) e^{ikr \cos(\theta - \theta_i)} = I(z) I_j e^{ik(x_j \cos(\theta_i) + y_j \sin(\theta_i))} = I(z) I_j e^{ikr_j \cos(\theta_j - \theta_i)} \quad (4.8)$$

mientras que el oleaje perturbado se puede expresar como:

$$\Phi_s^j = I(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_\alpha^j Z_\alpha^j H_\alpha^j(kr_j) e^{i\alpha\theta_j} \quad (4.9)$$

Para el cambio de coordenadas de cada cilindro se ha utilizado el Teorema de Graf para la adición de funciones de Bessel, aplicado a la función de Hankel del oleaje perturbado del cilindro  $j$  al cilindro  $k$ .

$$H_\alpha^j(kr_j) e^{i\alpha\theta_j} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{\alpha+p}(kR_{jk}) J_p(kr_k) e^{ip(\pi - \theta_k + \theta_{jk})} e^{i\alpha\theta_{jk}} \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) es el Teorema de Graf (Abramowitz & Stegun, 1964), válida para los valores en donde  $R_{jk} > r_k$  y de donde se despeja la función de Hankel en el cilindro  $j$  y se sustituye en la ecuación (4.9). Posteriormente se simplifica sustituyendo  $-p$  por  $p$ , con la intención de utilizar la relación de las funciones de Bessel para orden negativo y simplificar con el exponencial de  $\pi$ ; entonces, el oleaje perturbado se puede expresar como:

$$\Phi_s^k = I(z) \left[ \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_\alpha^k Z_\alpha^k H_\alpha^k(kr_k) e^{i\alpha\theta_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_\alpha^j Z_\alpha^j \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{\alpha-p}(kR_{jk}) J_p(kr_k) e^{i\theta_{jk}(\alpha-p)} \right] \quad (4.11)$$

El primer término representa el oleaje perturbado del cilindro  $k$ ; mientras que la sumatoria de  $j$ , el perturbado de cada uno de los NC-1 cilindros restantes. Tanto para  $\alpha$  como para  $p$  se maneja una sumatoria infinita, la cual se puede expresar con la misma exactitud, esto significa que el oleaje en la región 1 y la pila  $k$  queda expresado de la siguiente forma:

$$\Phi_{1\alpha}^k = I(z) \left[ I_k J_\alpha(kr_k) e^{i\alpha(\theta_k - \theta_i)} + R_\alpha^k Z_\alpha^k H_\alpha^k(kr_k) e^{i\alpha\theta_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_p^j Z_p^j H_{p-\alpha}(kR_{jk}) J_\alpha(kr_k) e^{i\theta_{jk}(p-\alpha)} \right] \quad (4.12)$$

Como ya se ha comentado, el primer término del miembro de la derecha representa el oleaje incidente; el segundo, el oleaje perturbado por el cilindro  $k$  y el tercero, todos los oleajes perturbados del resto de las pilas.

Teniendo las expresiones generales para los potenciales en el cilindro  $k$ , resta aplicar las condiciones de frontera para cada pila. Por practicidad, en la integral en  $\theta$ , y de manera análoga a los procedimientos encontrados en la literatura, se cambia la expresión general del oleaje incidente por la ecuación (4.13). Al mismo tiempo, se vuelven a aprovechar las propiedades de ortogonalidad de funciones y se expresa la integral definida de  $\theta$  para todos los ángulos (de 0 a  $\pi$ ). De esta forma, aplicando las condiciones de contorno, ecuaciones (3.5) y (3.6), resulta:

$$\Phi_i^k = I_k J_\alpha(kr_k) e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_k + \theta_i)} \quad (4.13)$$

$$T_\alpha^k = C_1 \left[ I_k e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_i)} + R_\alpha^k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_p^j Z_p^j H_{p-\alpha}(kR_{jk}) e^{i\theta_{jk}(p-\alpha)} \right] \quad (4.14)$$

De la ecuación (3.7), continuidad de presión y simplificando se llega a:

$$T_\alpha^k = C_2 \left[ I_k e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_i)} + R_\alpha^k C_3 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_p^j Z_p^j H_{p-\alpha}(kR_{jk}) e^{i\theta_{jk}(p-\alpha)} \right] \quad (4.15)$$

en donde:

$$C_1 = \frac{X J'_\alpha(kr_k)}{\Gamma^k J'_\alpha(K_k r_k)} \quad (4.16)$$

$$C_2 = \frac{\Gamma J_\alpha(kr_k)}{Y^k J_\alpha(K_k r_k)} \quad (4.17)$$

$$C_3 = Z_\alpha^k \frac{H_\alpha(kr_k)}{J_\alpha(kr_k)} \quad (4.18)$$

$$X = \int_{-h}^0 I(z)^2 dz \quad (4.19)$$

$$Y = \int_{-h}^{-hp} P(z)^2 dz \quad (4.20)$$

$$\Gamma = \int_{-h}^{-hp} I(z)P(z) dz \quad (4.21)$$

$$Z_\alpha^k = \frac{J'_\alpha(kr_k)}{H'_\alpha(kr_k)} \quad (4.22)$$

Ahora se cuenta con las ecuaciones (4.14) y (4.15), de las que operando se obtiene:

$$R_{\alpha}^k \frac{C_1 - C_2 C_3}{C_1 - C_2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_p^j Z_p^j H_{p-\alpha} (kR_{jk}) e^{i\theta_{jk}(p-\alpha)} = -I_k e^{i\alpha(\pi/2-\theta_i)} \quad (4.23)$$

$$T_{\alpha}^k = R_{\alpha}^k C_1 C_2 \frac{C_3 - 1}{C_1 - C_2} \quad (4.24)$$

En este punto ya se puede plantear un sistema de ecuaciones cuyo número de incógnitas es proporcional al número de pilas en el sistema, de donde se pueden encontrar los coeficientes  $R_k^i$  para ser sustituidos en la ecuación (4.9) del oleaje perturbado y posteriormente en la ecuación general del potencial. Es importante recordar que todas las derivadas que aquí se plantean están referidas al radio de la estructura correspondiente. Si se propone el uso de una pila única, las ecuaciones (4.23) y (4.24), quedan respectivamente como:

$$R_{\alpha}^k = \frac{C_2 - C_1}{C_1 - C_2 C_3} e^{i\alpha(\pi/2-\theta_i)} \quad (4.25)$$

$$T_{\alpha}^k = C_1 C_2 \frac{1 - C_3}{C_1 - C_2 C_3} e^{i\alpha(\pi/2-\theta_i)} \quad (4.26)$$

que son las mismas ecuaciones (3.17) y (3.18), resultantes del análisis hidrodinámico de una sola pila flotante e impermeable, desarrollada anteriormente.

#### 4.5 RESULTADOS

El diseño del arreglo depende del número de estructuras, de la cercanía que tengan entre sí y, sobre todo, de la posición en que se encuentren (ecuación de la parábola). Es por ello que se presentan los resultados enfocados a encontrar la influencia de cada parámetro.

Se tomará como base un fondo horizontal constante a 100 m sobre el que se encuentran estructuras de radio constante a de 20 m y longitud sumergida  $hp$  también de 20 m, colocada en un arreglo parabólico que abre hacia la derecha, con vértice en el origen y con el que interactúa un oleaje con altura de ola incidente  $H_i$  unitaria, con una longitud de onda  $L$  de 100 m y que viaja hacia la izquierda con un ángulo de cero grados con respecto a la horizontal.

El primer parámetro a estudiar ha sido la ubicación de cinco estructuras base como las descritas en el párrafo anterior, para lo cual se ha variado el parámetro  $P$  que caracteriza la ecuación de una parábola, ecuación (4.27):

$$y^2 = 2Px \quad (4.27)$$

La separación de las pilas se ha mantenido constante respecto a las ordenadas, como lo indica la tabla 2, de tal manera que las coordenadas de cada estructura están determinadas por la ecuación (4.27), para cuando  $P = 50, 100, 125, 150, 175, 200$  y  $500$  m, considerando que el origen del sistema de referencia se encuentra en la pila central.

Tabla 2. Localización de las pilas para diferentes valores de P.

Y/L \ P	X/L						
	50	100	125	150	175	200	500
-1.2	1.44	0.72	0.58	0.48	0.41	0.36	0.14
-0.6	0.36	0.18	0.14	0.12	0.10	0.09	0.04
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.36	0.18	0.14	0.12	0.10	0.09	0.04
1.2	1.44	0.72	0.58	0.48	0.41	0.36	0.14

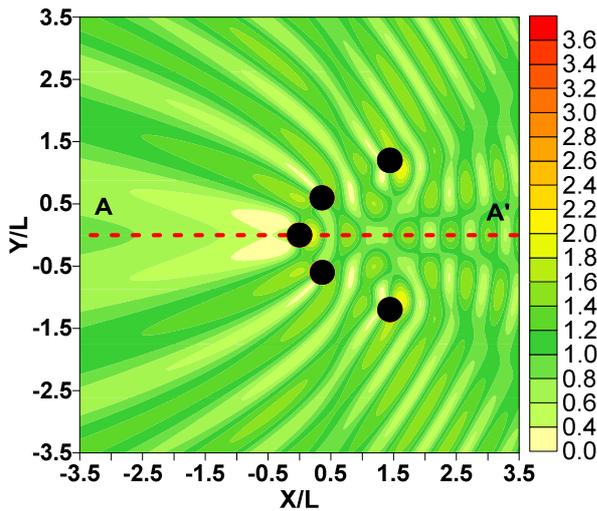


Figura 24. Índice de amplificación para  $y^2=100$  x.

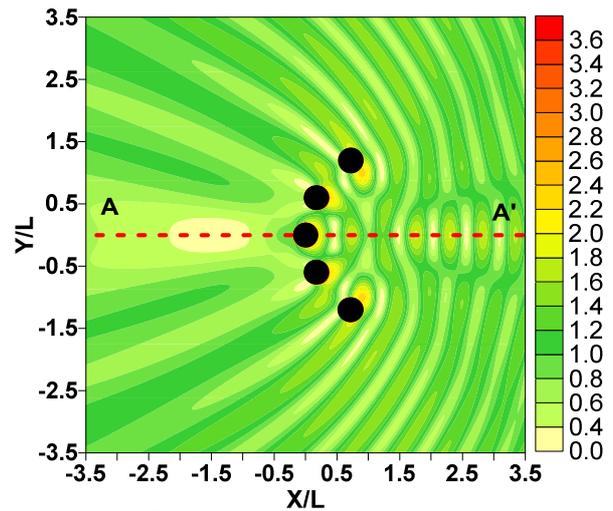


Figura 25. Índice de amplificación para  $y^2=200$  x.

En la figura 24 se observa el arreglo con la parábola más cerrada que se ha propuesto y que, al parecer, no permite una buena focalización de las ondas en lo que sería el área interna, pues el foco no se aprecia de manera definida. En la figura 25, este foco ya comienza a definirse.

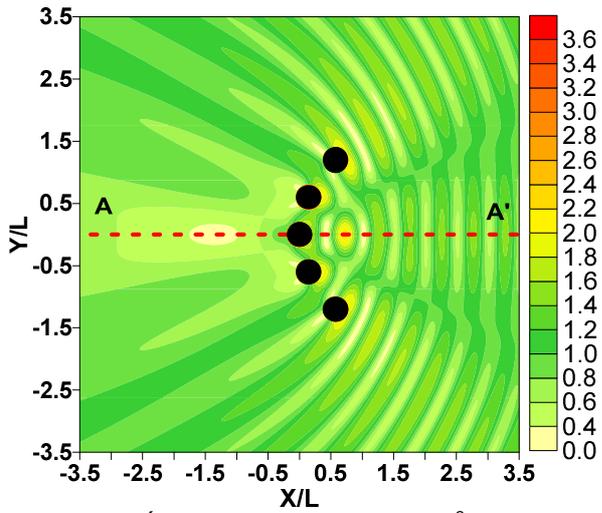


Figura 26. Índice de amplificación para  $y^2=250x$ .

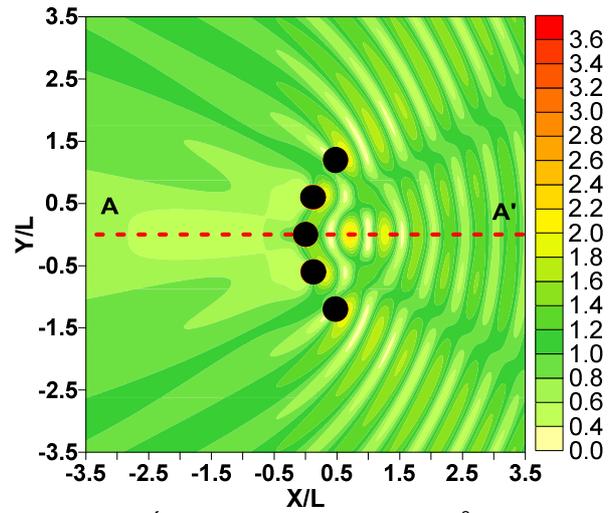


Figura 27. Índice de amplificación para  $y^2=300x$ .

Tanto en la figura 26 como en la figura 27 se observa un punto de focalización definido por las ondas que claramente logran amplificarse. Además, la zona de transmisión comienza a tener un comportamiento más uniforme que en la figura 25.

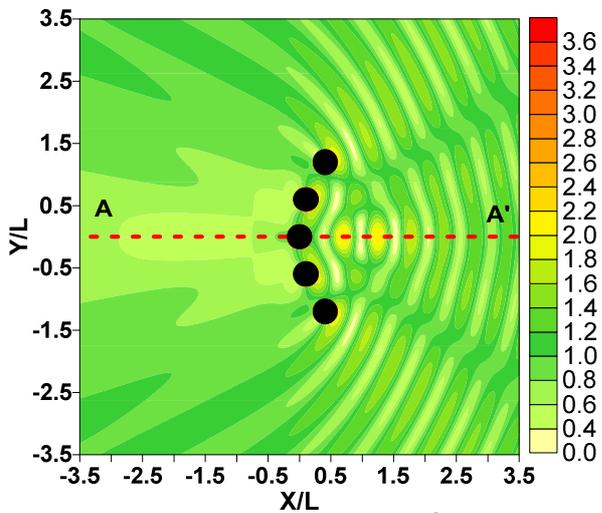


Figura 28. Índice de amplificación para  $y^2=350x$ .

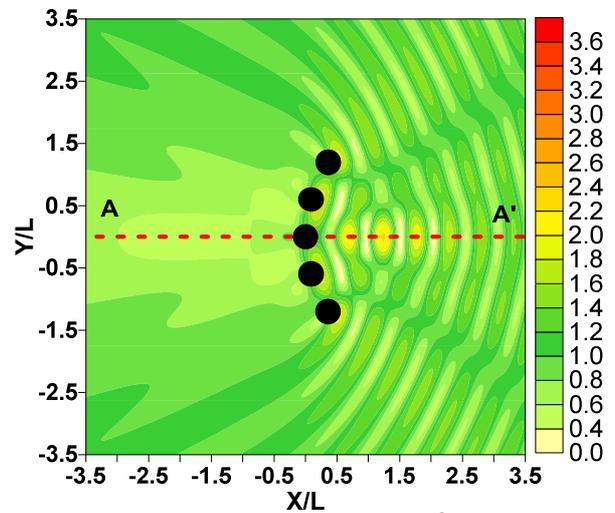


Figura 29. Índice de amplificación para  $y^2=400x$ .

Si la parábola tiende más a una recta, la zona de transmisión comienza a perder el punto definido de focalización; sin embargo, la zona de transmisión no obtiene una gran variación.

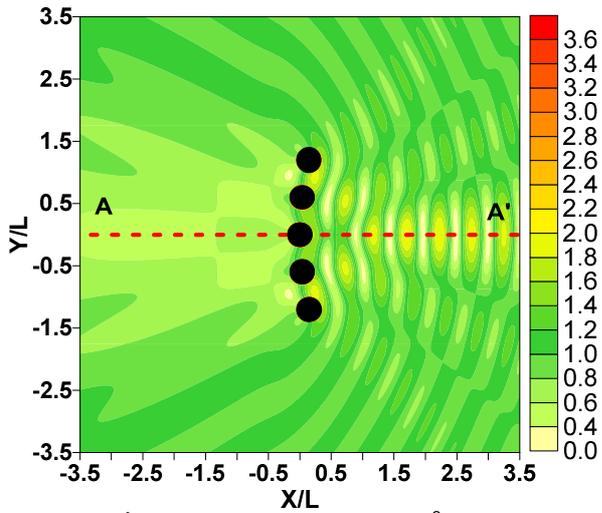


Figura 30. Índice de amplificación para  $y^2 = 1000x$ .

En la figura 30 ya no se observa el foco como un punto definido y la amplificación de las ondas se presenta en un área mucho más amplia al frente de las estructuras.

También se advierte que la zona protegida aumenta su cobertura conforme aumenta el parámetro P, que define la ecuación de la parábola.

A continuación se presentan todos los perfiles A-A' para todos los casos mostrados de la figura 24 a la figura 30 en la zona de transmisión.

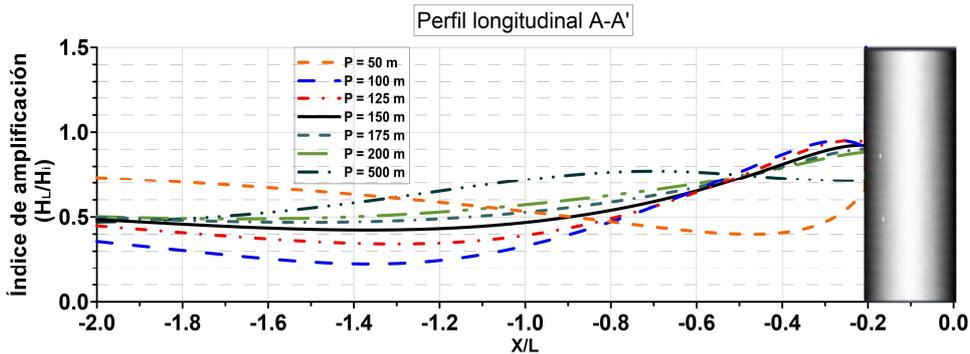


Figura 31. Efecto de la variación del parámetro P de la ecuación de la parábola en zona de transmisión.

En la figura 31 se aprecia de qué manera influye la colocación de las estructuras sobre el índice de amplificación en la zona de transmisión.

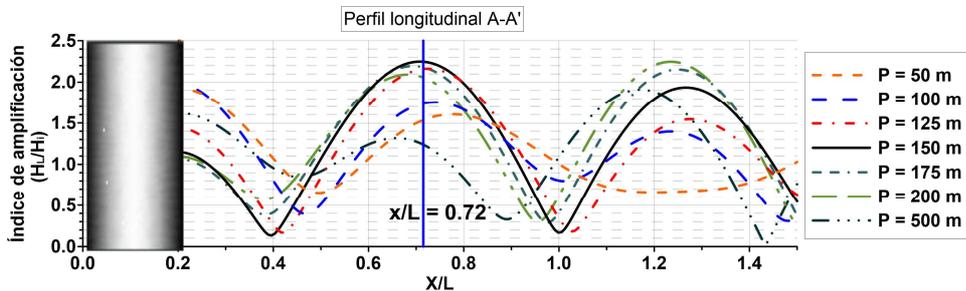


Figura 32. Efecto de la variación del parámetro P de la ecuación de la parábola en zona de reflexión.

En la figura 32 se puede observar el comportamiento del índice de influencia con diferentes arreglos variando el parámetro P en la ecuación de la parábola, encontrando que para cuando  $P = 150$  m se obtiene una mayor amplificación. Además, se logra

identificar un punto aproximado de focalización que, para este caso, se encuentra dado por la recta con ecuación  $X/L = 0.72$ .

Ahora, sabiendo cuál sería la ecuación de la parábola óptima, se estudia el efecto que tiene el número de cilindros sobre el índice de amplificación.

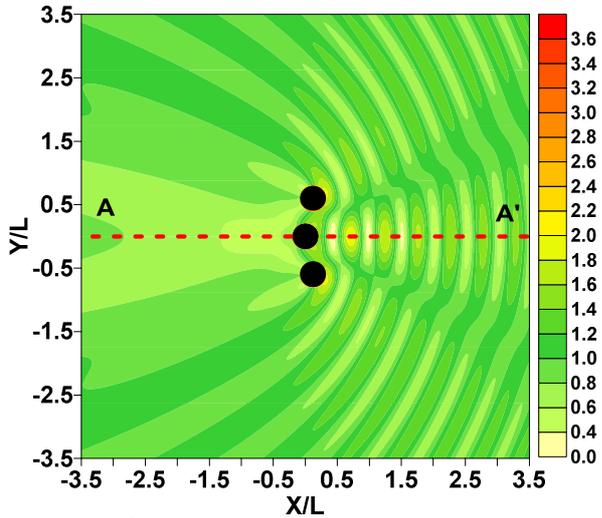


Figura 33. Índice de amplificación bajo interacción de 3 cilindros.

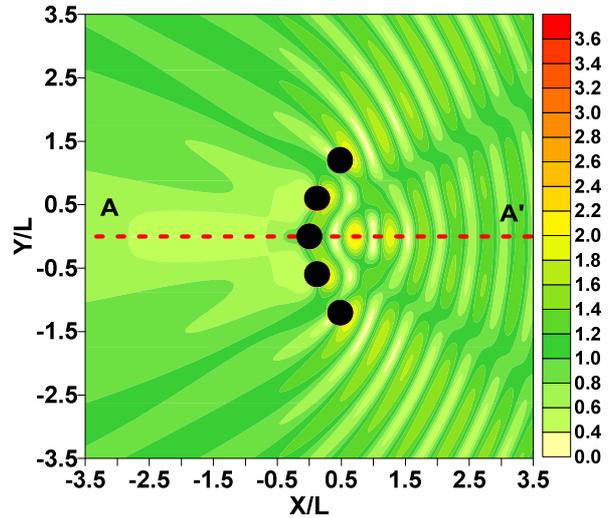


Figura 34. Índice de amplificación bajo interacción de 5 cilindros.

Se puede observar cómo con dos estructuras extra la zona de transmisión aumenta considerablemente, igual que el índice de amplificación en la zona de reflexión.

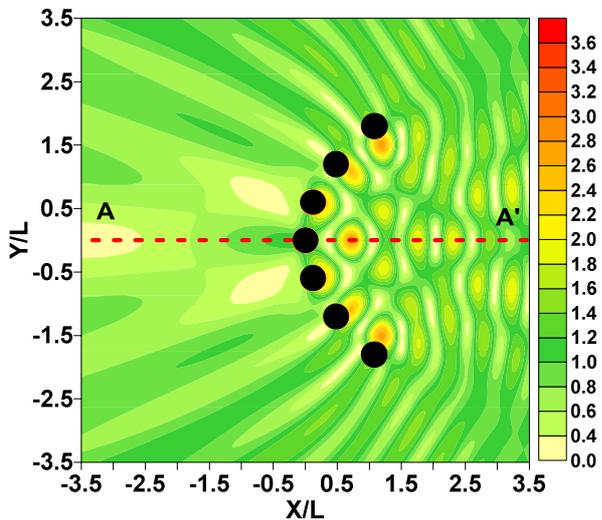


Figura 35. Índice de amplificación bajo interacción de 7 cilindros.

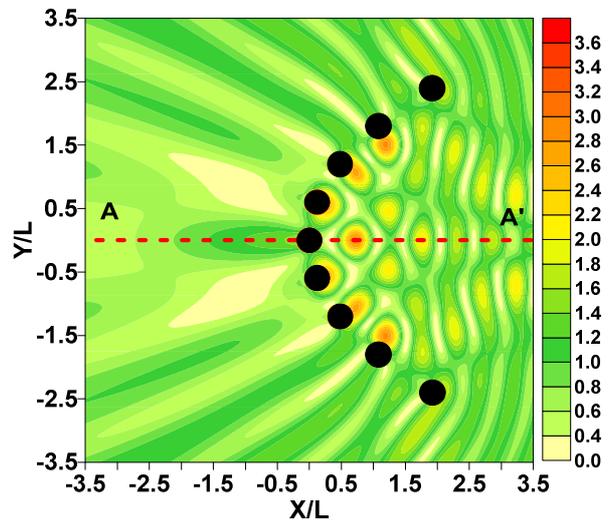


Figura 36. Índice de amplificación bajo interacción de 9 cilindros.

En la figura 36 se aprecia que el comportamiento del índice de amplificación en la zona de reflexión es muy similar al de la figura 35, teniendo una zona que podría ser caótica en las cercanías de algunas estructuras.

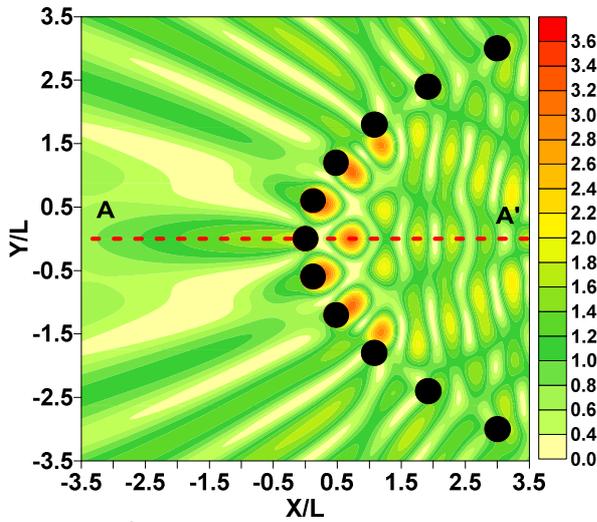


Figura 37. Índice de amplificación bajo interacción de 11 cilindros.

Con la figura 37 se confirma que cuando se trabaja con una ecuación determinada, la posición del foco y, en general, el comportamiento del índice de amplificación, se conservan. De esta forma, aunque se coloquen más estructuras el foco no cambiará de posición.

Es necesario estudiar la amplificación del índice sobre el eje central A-A' señalado en todas las figuras anteriores.

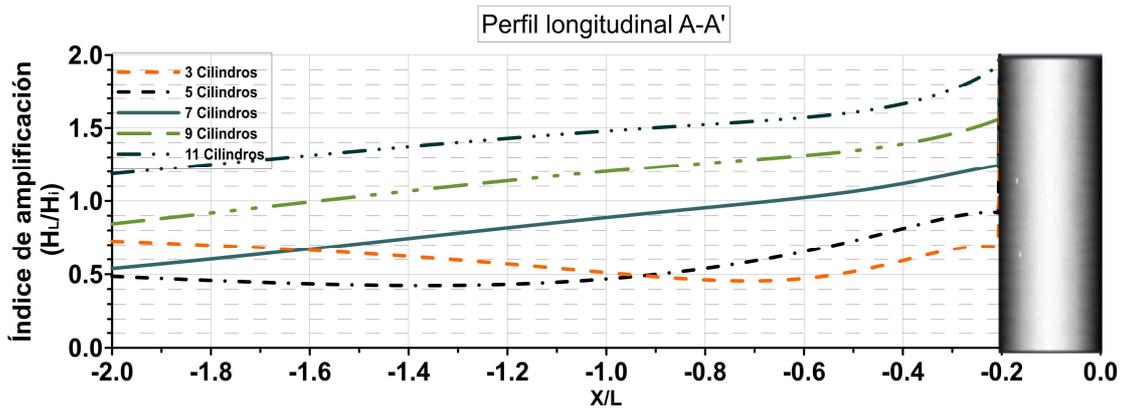


Figura 38. Índice de amplificación en transmisión bajo interacción de diferente número de cilindros.

En la figura 38 se puede apreciar que en la zona de sombra cercana a la estructura central del arreglo (sobre el eje A-A'), la transmisión aumenta al hacerlo el número de cilindros. Este fenómeno ocurre únicamente en las cercanías del corte A-A'.

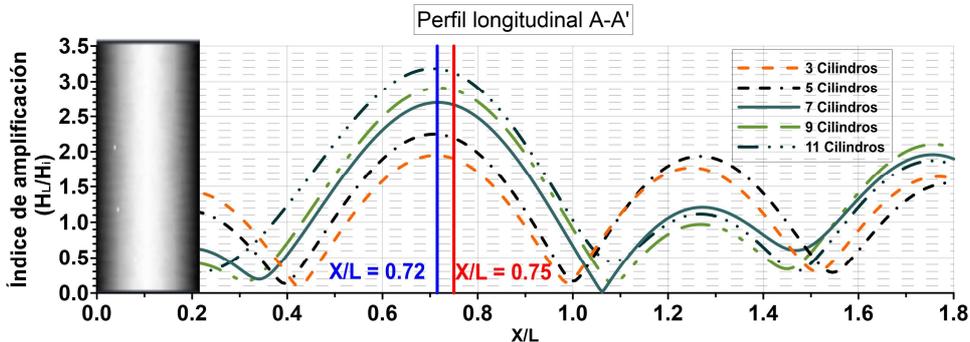


Figura 39. Índice de amplificación en reflexión bajo interacción de diferente número de cilindros.

En la figura 39 se puede observar que a medida que aumenta el número de cilindros también sucede lo mismo con el índice de amplificación cercano al foco de la

parábola; empero, llega un momento en donde el aumento ya no es tan significativo con respecto al área abarcada y al número de estructuras utilizadas, siendo 2.7 el valor del índice utilizando 7 cilindros. Al superar las siete estructuras, el aumento del índice ya no es tan significativo. Al mismo tiempo, se confirma que cuando el arreglo parabólico tiene como parámetro  $P = 150$  m las ondas tienen su máxima amplificación cuando  $X/L = 0.72$ , sin embargo, en el foco geométrico de la parábola ( $X/L = 0.75$ ) también existe buena amplificación.

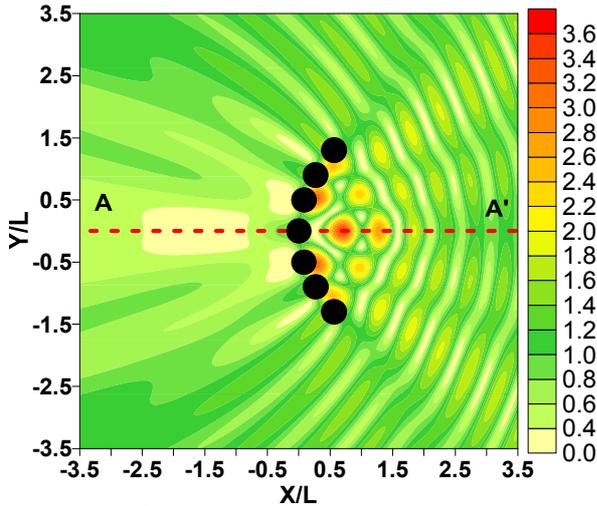


Figura 40. Índice de amplificación para estructuras sin separación.

Tabla 3. Coordenadas de cilindros

X/L	Y/L
0.563	-1.3
0.270	-0.9
0.083	-0.5
0.000	0.0
0.083	0.5
0.270	0.9
0.563	1.3

La cercanía de las estructuras es un factor relevante, tal como lo muestra la figura 40, en donde se puede distinguir un aumento considerable del índice de amplificación con respecto a la separación utilizada anteriormente para el mismo tipo de estructuras.

Además, es necesario considerar que el área abarcada disminuye; sin embargo, la parte de transmisión también se ve afectada presentando poca separación entre las estructuras.

El ángulo de incidencia también tiene un efecto directo sobre el comportamiento del índice de amplificación. Para demostrarlo se plasman los resultados de la interacción del oleaje sobre un arreglo de siete estructuras sumergidas 20 m, con un radio de igual magnitud; colocadas a una distancia entre sí de 0.6 Y/L (en el eje de las abscisas), formando una parábola en la que  $P = 150$  m y sobre un fondo horizontal e impermeable a 100 metros de profundidad, en el que viajan ondas de 100 metros de longitud con altura de ola unitaria a diferentes ángulos de incidencia.

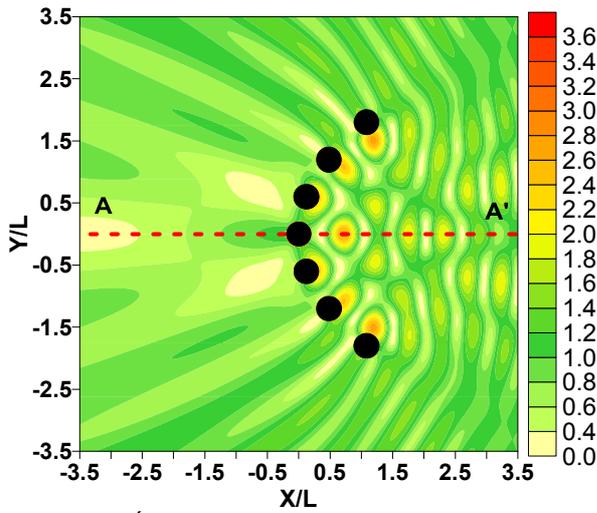


Figura 41. Índice de amplificación para un oleaje de  $0^\circ$ .

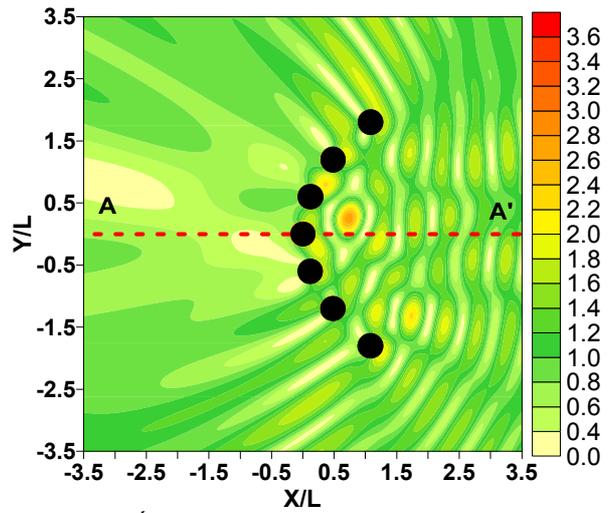


Figura 42. Índice de amplificación para un oleaje de  $10^\circ$ .

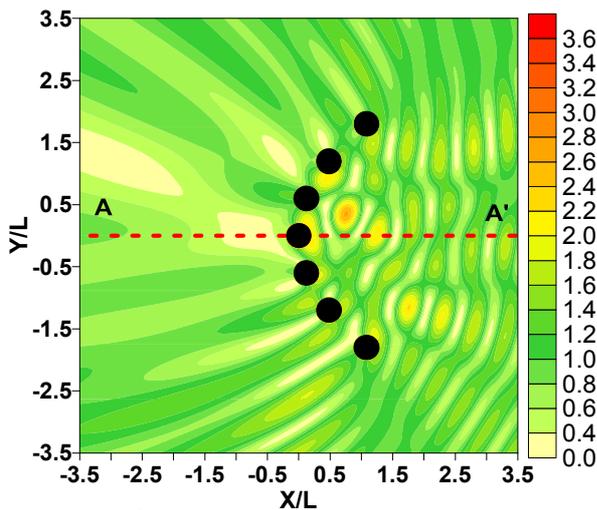


Figura 43. Índice de amplificación para un oleaje de  $15^\circ$ .

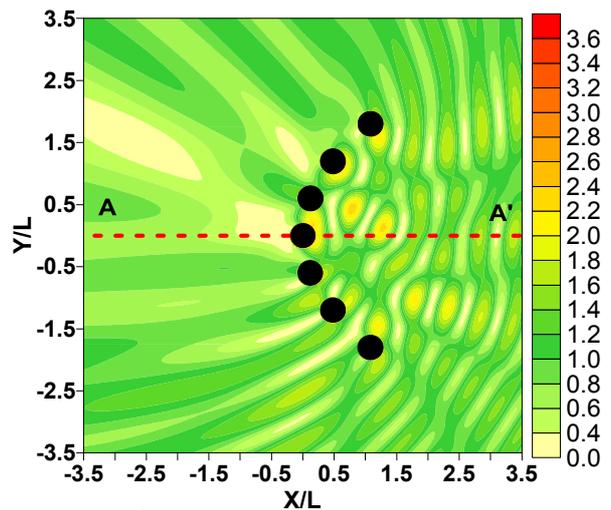


Figura 44. Índice de amplificación para un oleaje de  $20^\circ$ .

En las figuras anteriores se observa que la localización del foco tiene una correspondencia directa con la dirección del oleaje y que al llegar a un ángulo de incidencia mayor a  $20^\circ$  ya no existe un punto definido para la focalización. No obstante, aun con la variación en la dirección, la zona de sombra sigue estando protegida. Además, se observa que el punto de focalización se desplaza, aproximadamente los mismos grados, siguiendo la tendencia y dirección del oleaje al pasar por el foco de la parábola. Es importante señalar que el punto en el que se encontraba el foco antes de desplazarse, sigue amplificando las ondas; lo que implica que se puede aceptar variación en el ángulo de incidencia del oleaje.

Debe notarse que rebasados los  $20^\circ$  ya no es recomendable el arreglo parabólico como medio de amplificación de las ondas, debido a que no se tiene un punto claramente establecido para ello.



## **CAPÍTULO 5**

# **MODOS EVANESCENTES EN LA SOLUCIÓN DE UNA PILA FLOTANTE E IMPERMEABLE**

## 5. MODOS EVANESCENTES EN LA SOLUCIÓN DE UNA PILA FLOTANTE E IMPERMEABLE

### 5.1 INTRODUCCIÓN

A la solución analítica presentada en el apartado anterior se le ha añadido la consideración de los llamados modos evanescentes para las mismas condiciones manejadas hasta el momento: oleaje monocromático y regular, fondo constante en una región finita bajo la interacción con una pila impermeable flotante con longitud sumergida variable.

Se presentan las condiciones laterales de continuidad de velocidad y presión, así como la impermeabilidad de la columna. Las condiciones laterales y ecuación general se han omitido para obtener exactamente el mismo resultado que en el caso de una pila impermeable sin modos evanescentes.

### 5.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Todas las condiciones del problema quedan representadas en el siguiente diagrama:

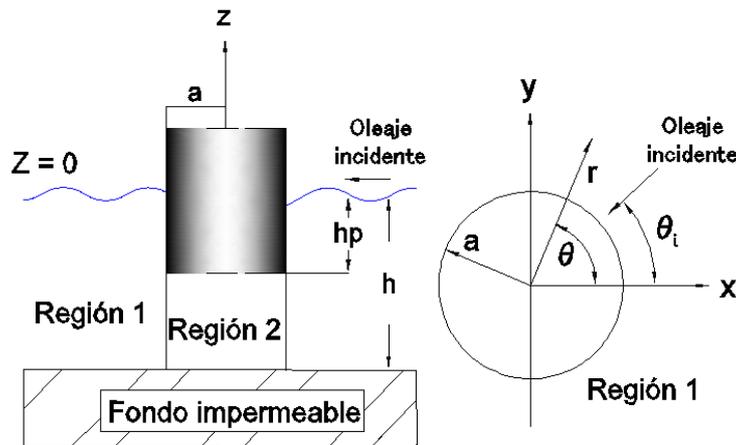


Figura 45. Esquematización del problema.

### 5.3 CONDICIONES DE FRONTERA

#### Condiciones de contorno laterales en $r = a$

Impermeabilidad de la columna:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad -hp \leq z \leq 0 \quad (5.1)$$

Continuidad de velocidad:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \quad \text{en} \quad -h \leq z \leq -hp \quad (5.2)$$

Continuidad de presión:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{en} \quad -h \leq z \leq -hp \quad (5.3)$$

en donde el subíndice de cada ecuación representa la región a la que se hace referencia de acuerdo con la figura 45.

#### 5.4 SOLUCIÓN GENERAL

Los potenciales considerados únicamente serán funciones de  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ , a menos que se indique lo contrario.

El potencial que caracteriza a la región 1 está dado por:

$$\Phi_1 = I_0(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \left( J_{\alpha}(k_0 r) e^{i\alpha(\theta-\theta_0)} + R_{\alpha 0} Z_{\alpha 0} H_{\alpha 0}(k_0 r) e^{i\alpha\theta} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} I_m(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_{\alpha m} Z_{\alpha m} H_{\alpha m}(k_m r) e^{i\alpha\theta} \quad (5.4)$$

en donde:

$$I_m(z) = -A \frac{g}{i\sigma} \frac{\cosh(k_m(h+z))}{\cosh(k_m h)} \quad (5.5)$$

El último término del miembro de la derecha representa a los modos evanescentes, el subíndice  $m$  indica el modo evanescente en la región 1 y los valores de  $k_m$  corresponden a las raíces de la llamada ecuación de dispersión que se han calculado en el anexo a.

En la región 2 se tiene:

$$\Phi_2 = P_0(z) \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} T_{\beta 0} J_{\beta 0}(K_0 r) e^{i\beta\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} T_{\beta n} J_{\beta n}(K_n r) e^{i\beta\theta} \quad (5.6)$$

en donde:

$$P_n(z) = \cos(K_n(h+z)) \quad (5.7)$$

$$K_n = \frac{(n+1)\pi}{h-hp} \quad (5.8)$$

El subíndice  $n$  indica el modo evanescente en la región 2; el primer término del miembro de la derecha, el potencial a causa del modo progresivo y el último término, a la familia de modos evanescentes.

Se ha cambiado la forma de expresar el oleaje incidente para facilitar la integral de  $\theta$  para cualquier ángulo de incidencia, tal y como plantean Linton y Evans (1989) o Govaere (2002). Aplicando las condiciones de frontera de las ecuaciones (5.1) y (5.2), junto con las propiedades de funciones ortogonales y simplificando, se llega a:

$$\sum_{m=0}^{\infty} X_{mm} R_{\alpha m} C_{1,m} - \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{nn} T_{\alpha n} C_{2,n} = -X_{m0} e^{i\alpha(\pi/2-\theta)} \quad (5.9)$$

Mientras que para la ecuación de continuidad de presión resulta:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_{mm} R_{\alpha m} C_{3,m} - \sum_{n=0}^{\infty} Y_{nn} T_{\alpha n} C_{4,n} = -\Gamma_{0n} e^{i\alpha(\pi/2-\theta)} \quad (5.10)$$

en donde:

$$C_{1,m} = \frac{Z_{\alpha m} H'_{\alpha m}(k_m r)}{J'_{\alpha 0}(k_0 r)} \quad (5.11)$$

$$C_{2,n} = \frac{J'_{\alpha n}(K_n r)}{J'_{\alpha 0}(k_0 r)} \quad (5.12)$$

$$C_{3,m} = \frac{Z_{\alpha m} H_{\alpha m}(k_m r)}{J_{\alpha 0}(k_0 r)} \quad (5.13)$$

$$C_{4,n} = \frac{J_{\alpha n}(K_n \cdot r)}{J_{\alpha 0}(k_0 r)} \quad (5.14)$$

$$X_{mm} = \int_{-h}^0 I_m(z) I_n(z) dz \quad (5.15)$$

$$Y_{mn} = \int_{-h}^0 P_m(z) P_n(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \frac{h-hp}{2} & \text{para } m = n \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\Gamma_{mn} = \int_{-h}^0 I_m(z) P_n(z) dz = \frac{Aig}{\sigma \cosh(k_m h)} \frac{k_m (-1)^n \sinh[k_m (h-hp)]}{(k_m^2 + K_n^2)} \quad (5.17)$$

$$Z_{\alpha m} = \frac{J'_{\alpha}(k_m r)}{H'_{\alpha}(k_m r)} \quad (5.18)$$

Con las ecuaciones (5.9) y (5.10) se tiene un sistema de  $2(n+1) + 2(m+1)$ , ecuaciones con igual número de incógnitas. Resta, entonces, dar valores finitos al número de modos evanescentes en cada región. Es importante aclarar que las

simplificaciones hechas para  $Y_{mn}$  y  $\Gamma_{mn}$  son particulares de este caso para los valores de  $K$  y  $k$ . Además, se le recuerda al lector que las derivadas de las funciones de Bessel y Hankel son cuando  $r = a$ .

### 5.5 RESULTADOS

En las siguientes figuras se presentan los casos del índice de amplificación resultado de la interacción de una estructura de radio constante de 20 m, con una longitud sumergida de igual magnitud, con un oleaje de altura de ola unitaria, longitud de onda de 100 m y viajando sobre un fondo horizontal impermeable a 100 m de profundidad.

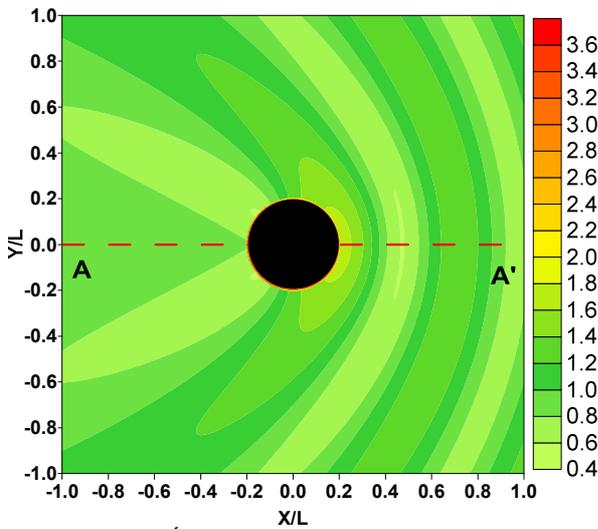


Figura 46. Índice de amplificación sin modos evanescentes en la región 2.

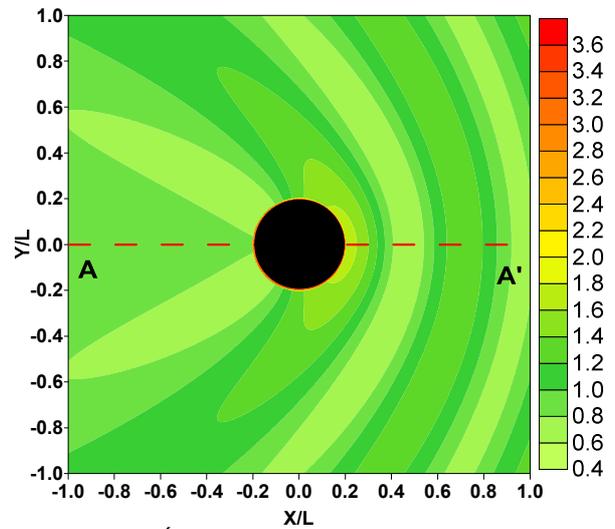


Figura 47. Índice de amplificación con 3 modos evanescentes en la región 2.

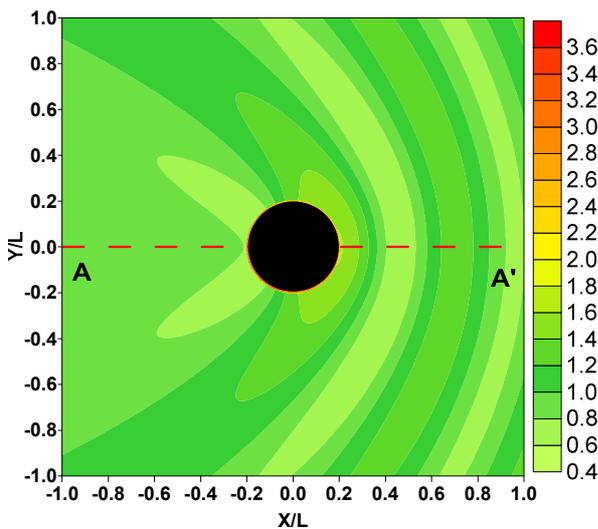


Figura 48. Índice de amplificación con 6 modos evanescentes en la región 2.

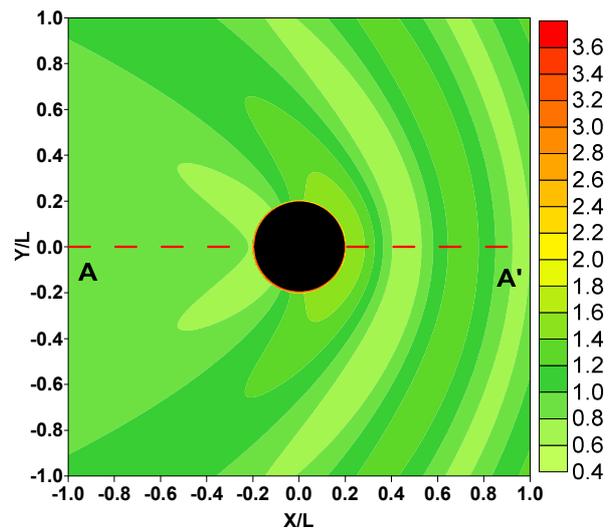
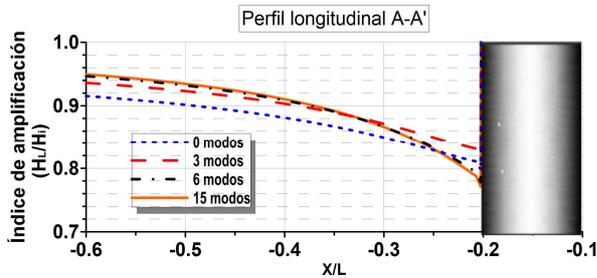
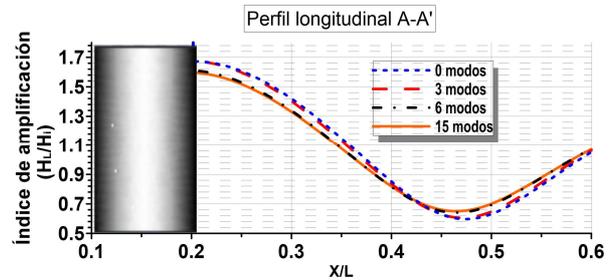


Figura 49. Índice de amplificación con 15 modos evanescentes en la región 2.

Se aprecia que de la figura 46 a la figura 49 se alcanza una estabilidad, tanto en reflexión como en transmisión, con el aumento de modos evanescentes en la región 2 (la que se encuentra debajo de la estructura).

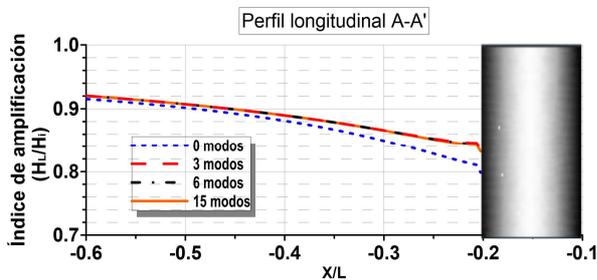


**Figura 50.** Índice de amplificación en transmisión variando el número de modos evanescentes en la región 2.

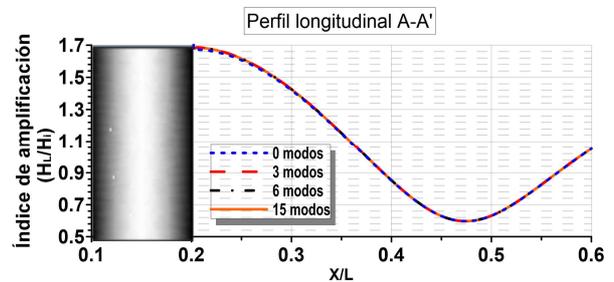


**Figura 51.** Índice de amplificación en reflexión variando el número de modos evanescentes en la región 2.

Cuando se aplican los modos evanescentes únicamente en la región 2, llega un momento en que se alcanza cierta convergencia en el comportamiento del índice de amplificación, como lo muestran las figuras 50 y 51. Dicha convergencia parece ser la misma, tanto en transmisión como en reflexión, al manejarse seis modos en la región que se encuentra debajo de la pila.



**Figura 52.** Índice de amplificación en transmisión variando el número de modos evanescentes en la región 1.



**Figura 53.** Índice de amplificación en reflexión variando el número de modos evanescentes en la región 1.

Por el contrario, cuando sólo se aumenta el número de modos evanescentes en la región exterior a la estructura, la estabilidad se alcanza mucho más rápido, como se plasma en la figura 52. Además, la zona de reflexión es menos sensible a dichos modos, como se muestra en la figura 53.

Se puede apreciar, entonces, que los modos evanescentes en la región por debajo de la estructura (región 2) tienen mayor influencia en el comportamiento del índice de amplificación. Sin embargo, es necesario notar que únicamente se tiene efecto debido a los modos en la parte cercana a la estructura, disipándose mientras más lejos se encuentre el punto de interés.

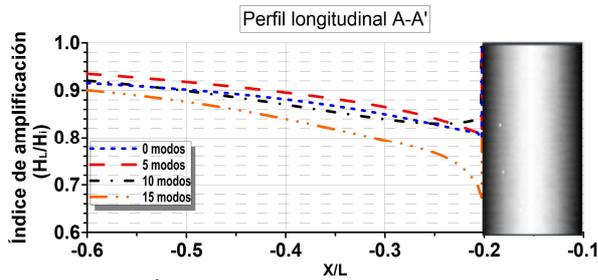


Figura 54. Índice de amplificación en transmisión variando el número de modos evanescentes en igual magnitud en cada región.

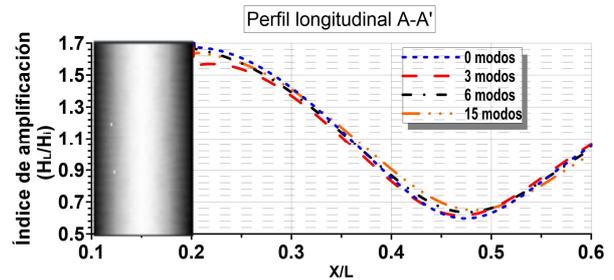


Figura 55. Índice de amplificación en reflexión variando el número de modos evanescentes en igual magnitud en cada región.

Cuando se incrementan de manera uniforme los modos evanescentes en ambas regiones, se tiene efecto en la zona de sombra de la estructura, pero la influencia es cada vez menor al alejarse de ella o al aumentar el número de modos evanescentes sobre todo en la zona de reflexión.

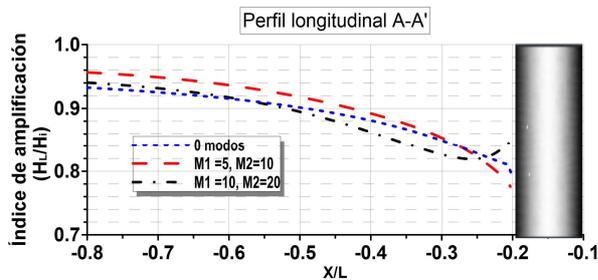


Figura 56. Índice de amplificación en transmisión variando al doble el número de modos evanescentes en la región 2.

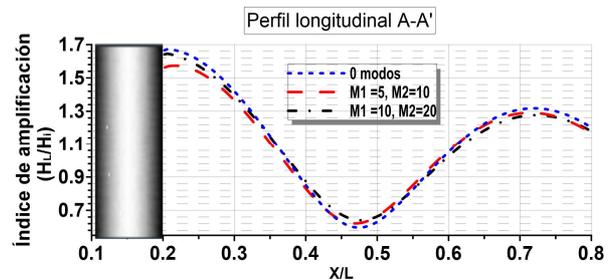


Figura 57. Índice de amplificación en reflexión variando al doble el número de modos evanescentes en la región 2.

Al duplicarse el número de modos M2 en la región por debajo de las estructuras, con respecto a los de la región exterior M1, se sigue la misma tendencia que cuando únicamente se aumentan en igual magnitud. Tal como se observa al comparar la figura 54 y la figura 56. Esto indica que los modos en la región inferior a la estructura tienen poca influencia para el comportamiento del índice de amplificación.

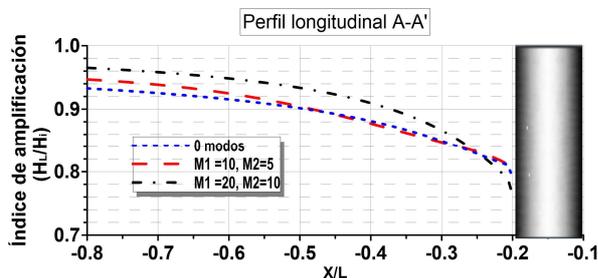


Figura 58. Índice de amplificación en transmisión variando al doble el número de modos evanescentes en la región 1.

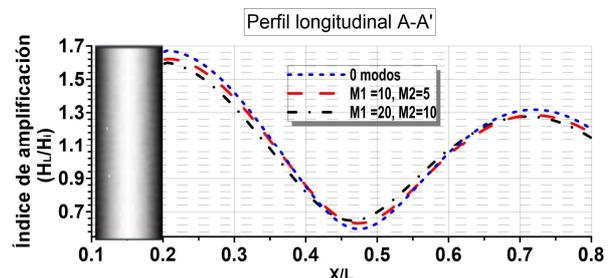


Figura 59. Índice de amplificación en reflexión variando al doble el número de modos evanescentes en la región 1.

El peso de los modos evanescentes en la región exterior de la estructura se observa al comparar la figura 54 con la 58, en donde se aprecia un cambio considerable en el índice de amplificación.

En la figura 60 y en la 61 se presenta una comparación del índice de amplificación visto en planta, en donde se han aumentado en igual medida los modos en ambas regiones.

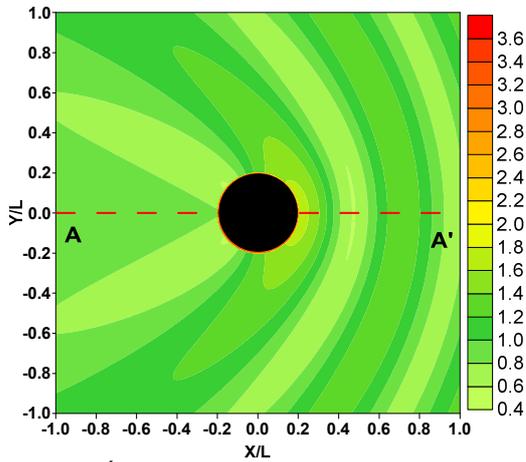


Figura 60. Índice de amplificación cuando no existen modos evanescentes.

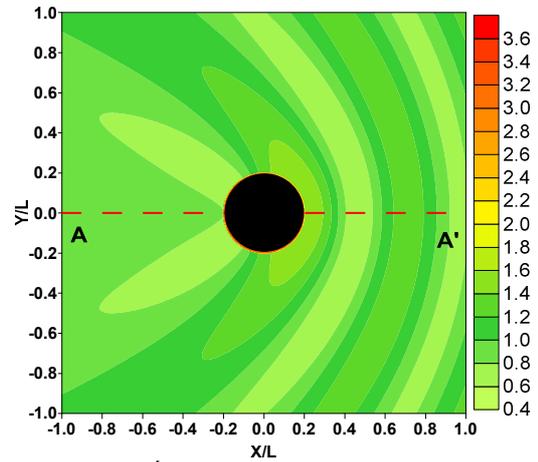


Figura 61. Índice de amplificación cuando se consideran 5 modos evanescentes.

## **CAPÍTULO 6**

# **MODOS EVANESCENTES EN LA SOLUCIÓN DE UN ARREGLO PARABÓLICO DE PILAS FLOTANTES E IMPERMEABLES**

## 6. MODOS EVANESCENTES EN LA SOLUCIÓN DE UN ARREGLO PARABÓLICO DE PILAS FLOTANTES E IMPERMEABLES

### 6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta la solución analítica de un arreglo de pilas flotantes e impermeables considerando modos evanescentes y que interactúa bajo la acción del oleaje monocromático regular sobre un fondo horizontal impermeable. De igual manera, se muestran resultados de la variación del índice de amplificación para diferente número de modos evanescentes.

### 6.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

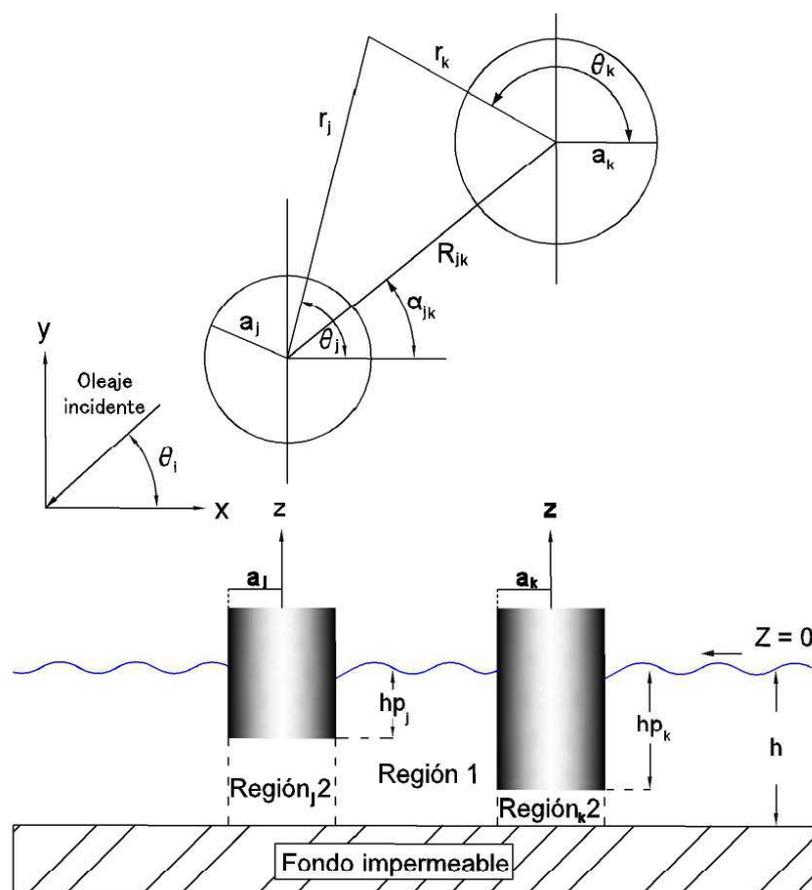


Figura 62. Esquematación de múltiples pilas flotantes e impermeables con modos evanescentes.

El planteamiento del problema es prácticamente el mismo que para el caso en donde no se tienen modos evanescentes, de modo que la figura 62 idealiza de buena manera el caso de estudio.

### 6.3 CONDICIONES DE FRONTERA

Análoga a cuando no se utilizan los modos evanescentes, se debe tener:

Condiciones de contorno laterales. En  $r = a_k$ .

Impermeabilidad de la columna:

$$\frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad -hp_k \leq z \leq 0 \quad (6.1)$$

Continuidad de velocidad:

$$\frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial r} \quad \text{en} \quad -h \leq z \leq -hp_k \quad (6.2)$$

Continuidad de presión:

$$\Phi_{1k} = \Phi_{2k} \quad \text{en} \quad -h \leq z \leq -hp_k \quad (6.3)$$

en donde el subíndice  $k$  indica que se trata de datos en el cilindro así nombrado.

### 6.4 SOLUCIÓN GENERAL

En la región uno, el potencial de velocidades queda expresado como:

$$\Phi_1(r, \theta, z, t) = \Phi_i(r, \theta, z, t) + \sum_{j=0}^{NC} \left[ \Phi_s^j(r_j, \theta_j, z, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{sm}^j(r_j, \theta_j, z, t) \right] \quad (6.4)$$

en donde el último término representa el potencial perturbado por una familia de modos evanescentes en cada cilindro.

Por otro lado, en la región 2, el potencial resulta ser:

$$\Phi_2(r, \theta, z, t) = P_0^k(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} T_{\alpha}^k J_{\alpha}(K_k r_k) e^{i\alpha\theta_k} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^k(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} T_{\alpha,n}^k J_{\alpha,n}(K_{k,n} r_k) e^{i\alpha\theta_k} \quad (6.5)$$

en donde:

$$P_n^k(z) = \cos(K_n^k(h+z)) \quad (6.6)$$

y el segundo término de la derecha representa el potencial producido por los modos evanescentes en la región.

Simplificando y reagrupando:

$$\Phi_2(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^k(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} T_{\alpha,n}^k J_{\alpha,n}(K_{k,n} r_k) e^{i\alpha\theta_k} \quad (6.7)$$

De ahora en adelante, se ha supuesto que los potenciales son función de  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ , cambiando su nomenclatura, a menos que se indique lo contrario.

Por facilidad, conviene cambiar la forma de expresar el oleaje inicial; además, se introduce un factor de fase  $I_j = e^{ik(x_j \cos(\theta_j) + y_j \sin(\theta_j))}$  asociado con cada cilindro  $j$ , por lo que el potencial inicial queda como:

$$\Phi_i = I_0(z) e^{ik_0 r \cos(\theta - \theta_i)} = I_0(z) e^{ik_0(x \cos(\theta_i) + y \sin(\theta_i))} = I_0(z) e^{ik_0 r \cos(\theta - \theta_i)} \quad (6.8)$$

$$\Phi_i^j = I_0(z) I_j \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} J_{\alpha 0}^j(k_0 r_j) e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_j + \theta_i)} \quad (6.9)$$

para cuando:

$$I_m(z) = -A \frac{g}{i\sigma} \frac{\cosh(k_m(h+z))}{\cosh(k_m h)} \quad (6.10)$$

Por otro lado, el oleaje perturbado queda expresado de la siguiente manera:

$$\Phi_s^j = I_0(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_{\alpha 0}^j Z_{\alpha 0}^j H_{\alpha 0}^j(k_0 r_j) e^{i\alpha\theta_j} + \sum_{m=1}^{\infty} I_m(z) \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_{\alpha m}^j Z_{\alpha m}^j H_{\alpha, m}^j(k_m r_j) e^{i\alpha\theta_j} \quad (6.11)$$

en donde el segundo término de la derecha representa la familia de modos evanescentes en el cilindro  $j$ . El lector puede notar que ambos términos se pueden agrupar en la misma sumatoria para dar lugar a una simplificación en la expresión. Procediendo de manera análoga a cuando no se tienen modos evanescentes, se aplica el teorema de Graf (Abramowitz & Stegun, 1964) para la adición de funciones de Bessel:

$$H_{\alpha m}^j(k_m r_j) e^{i\alpha\theta_j} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{\alpha+p, m}(k_m R_{jk}) J_{p, m}(k_m r_k) e^{ip(\pi - \theta_k + \theta_{jk})} e^{i\alpha\theta_{jk}} \quad (6.12)$$

La ecuación (6.12) es válida para  $R_{jk} > r_k$  y se sustituye en la (6.11). Posteriormente, se reemplaza  $p$  por  $-p$  y se utiliza la relación de las funciones de Bessel para orden negativo con el fin de simplificar la ecuación:

$$\Phi_s^k = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(z) \left[ \begin{aligned} & \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_{\alpha m}^k Z_{\alpha m}^k H_{\alpha m}^k(k_m r_k) e^{i\alpha\theta_k} + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} R_{\alpha m}^j Z_{\alpha m}^j \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{\alpha-p, m}(k_m R_{jk}) J_{p, m}^k(k_m r_k) e^{i\theta_{jk}(\alpha-p)} e^{ip\theta_k} \end{aligned} \right] \quad (6.13)$$

El primer término dentro del miembro derecho representa el oleaje perturbado del cilindro  $k$ ; en tanto que el segundo, el perturbado de cada uno de los demás cilindros  $j$ , todos ellos incluyendo a los modos evanescentes en la sumatoria de  $m$ . De esta forma, la expresión general para el potencial en la región exterior a la estructura queda definido como:

MODOS EVANESCENTES EN LA SOLUCIÓN DE UN ARREGLO PARABÓLICO DE PILAS FLOTANTES E IMPERMEABLES

$$\Phi_{1\alpha}^k = I_0 I_k J_{\alpha 0}^k(k_0 r_k) e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_k + \theta_i)} + \sum_{m=0}^{\infty} I_m \left[ R_{\alpha m}^k Z_{\alpha m}^k H_{\alpha m}(k_m r_k) e^{i\alpha\theta_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} R_{\alpha m}^j Z_{\alpha m}^j \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{\alpha-p,m}(k_m R_{jk}) J_{p,m}^k(k_m r_k) e^{i\theta_{jk}(\alpha-p)} e^{i\alpha\theta_k} \right] \quad (6.14)$$

El lector debe notar que, por facilidad de la integral en  $\theta$ , se ha cambiado la forma de expresar el oleaje incidente tal y como se recomienda en la literatura.

Aplicando las condiciones de frontera, aprovechando las propiedades de ortogonalidad, integrando para todo  $\theta$  y simplificando, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ C_{1\alpha m}^k R_{\alpha m}^k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} C_{2\alpha m}^j \Psi_{pm}^{j} R_{\alpha m}^j \right] - \sum_{n=0}^{\infty} C_{3\alpha mn}^K T_{\alpha,n}^k = -C_{7\alpha m}^k I_k e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_i)} \quad (6.15)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ C_{4\alpha m}^k R_{\alpha m}^k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} C_{5\alpha m}^j \Psi_{pm}^j R_{\alpha m}^j \right] - \sum_{n=0}^{\infty} C_{6\alpha mn}^K T_{\alpha,n}^k = -C_{8\alpha m}^k I_k e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_i)} \quad (6.16)$$

en donde:

$$\Psi_{pm}^j = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{\alpha-p,m}(k_m R_{jk}) J_{p,m}^k(k_m r_k) e^{i\theta_{jk}(\alpha-p)} \quad (6.17)$$

$$I_k = e^{ik_0(x_k \cos(\theta_i) + y_k \sin(\theta_i))} \quad (6.18)$$

$$C_{1\alpha m}^k = X_{mm} J'_{\alpha}(k_m r_k) \quad (6.19) \quad C_{4\alpha m}^k = \Gamma_{mm}^k Z_{\alpha m}^k H_{\alpha,m}^k(k_m r_k) \quad (6.23)$$

$$C_{2\alpha m}^j = X_{nm} Z_{\alpha m}^j \quad (6.20) \quad C_{5\alpha m}^k = \Gamma_{nm}^k Z_{\alpha m}^j \quad (6.24)$$

$$C_{3\alpha mn}^K = \Gamma_{mn}^k J'_{\alpha,n}(K_{k,n} r_k) \quad (6.21) \quad C_{6\alpha mn}^K = Y_{nm}^k J_{\alpha,n}(K_{k,n} r_k) \quad (6.25)$$

$$C_{7\alpha m}^k = X_{m0} J'_{\alpha,0}(k_0 r_k) \quad (6.22) \quad C_{8\alpha m}^k = \Gamma_{0n} J_{\alpha,0}(k_0 r_k) \quad (6.26)$$

$$Z_{\alpha m}^j = \frac{J'_{\alpha}(k_m r_j)}{H'_{\alpha}(k_m r_j)} \quad (6.27)$$

$$X_{mn} = \int_{-h}^0 I_m(z) I_n(z) dz \quad (6.28)$$

$$Y_{mn}^k = \int_{-h}^0 P_m^k(z) P_n^k(z) dz \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \frac{h-hp}{2} & \text{para } m = n \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\Gamma_{mn}^k = \int_{-h}^0 I_m(z) P_n^k(z) dz = \frac{Aig}{\sigma \cosh(k_m h)} \frac{k_m (-1)^n \sinh[k_m (h-hp_k)]}{(k_m^2 + \{K_n^k\}^2)} \quad (6.30)$$

Cuando no se consideran los modos evanescentes, el sistema de ecuaciones planteado resulta ser el mismo que el de las ecuaciones (4.14) y (4.15)

$$\sum_{m=0}^{\infty} I_m J'_{\alpha m}(k_m r_k) \left[ R_{\alpha m}^k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} R_{pm}^j \Psi_{pm}^j \right] - \sum_{n=0}^{\infty} P_n^k(z) T_{\alpha, n}^k J'_{\alpha, n}(K_{k, n} r_k) = -I_0(z) I_k J'_{\alpha, 0}(k_0 r_k) e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_i)} \quad (6.31)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} I_m J_{\alpha m}(k_m r_k) \left[ R_{\alpha m}^k C_{4\alpha m}^k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NC} R_{pm}^j \Psi_{pm}^j \right] - \sum_{n=0}^{\infty} P_n^k(z) T_{\alpha, n}^k J_{\alpha, n}(K_{k, n} r_k) = -I_0(z) I_k J_{\alpha, 0}(k_0 r_k) e^{i\alpha(\pi/2 - \theta_i)} \quad (6.32)$$

las cuales deben cumplirse en  $r_k = a_k$

## 6.5 RESULTADOS

Al trabajar con arreglo de estructuras de radio constante se ha encontrado que con siete de ellas se obtiene un índice de amplificación óptimo bajo un oleaje de altura de ola unitaria, longitud de onda de 100 m, periodo de 8 s que viaja sobre un fondo horizontal plano e impermeable a 100 m de profundidad y en el que las estructuras cuentan con 20 m de longitud sumergida al igual que el radio.

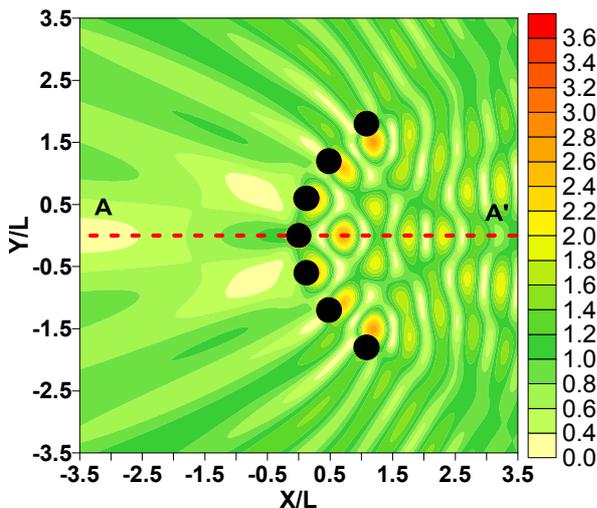


Figura 63. Arreglo sin modos evanescentes.

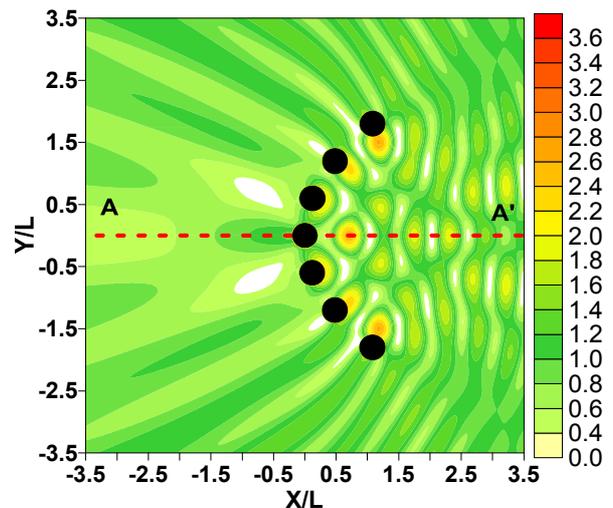


Figura 64. Arreglo con 5 modos evanescentes.

MODOS EVANESCENTES EN LA SOLUCIÓN DE UN ARREGLO PARABÓLICO DE PILAS FLOTANTES E IMPERMEABLES

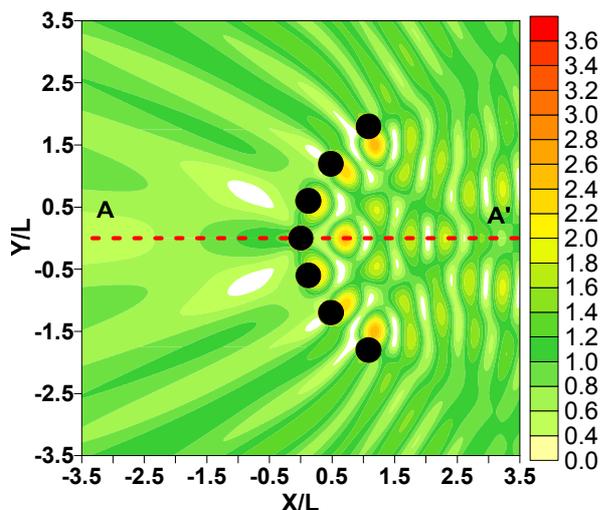


Figura 65. Arreglo con 10 modos evanescentes.

Se tiene, entonces, arreglos de estructuras separadas entre sí por una relación constante de 0.6  $Y/L$  en el eje de las abscisas, tal y como se mencionó en la tabla 2 y cuyo parámetro de la parábola es  $P=150$ .

Se observa en la figura 64 y en la figura 65 que el efecto más visible por los modos evanescentes se presenta en la zona de sombras; empero, resta analizar el efecto sobre la amplificación de la onda cerca del foco.

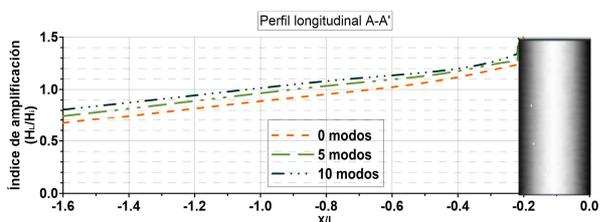


Figura 66. Índice de amplificación en transmisión con distintos modos evanescentes.

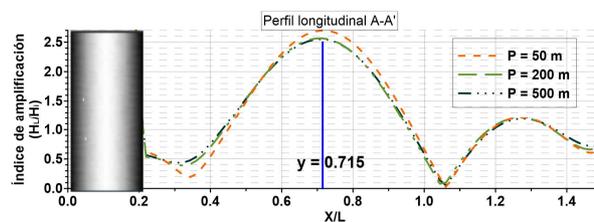


Figura 67. Índice de amplificación en reflexión con distintos modos evanescentes.

El índice de amplificación en reflexión recibe influencia de los modos evanescentes únicamente en la zona cercana a la estructura y para cantidades pequeñas de estos, como se puede observar en la figura 67; mientras que en la figura 66, se aprecia que los modos influyen en el índice de amplificación en una distancia mayor que en reflexión. Esto puede deberse a que el espacio entre los cilindros es relativamente pequeño y, por ello, es ahí donde se acumula la influencia de los modos de cada cilindro, lo que hace que la zona de sombras el efecto se amplifique, pues no ocurre lo mismo cuando se trabaja con modos con una sola estructura.



## **CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN**

## CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

El que la estructura sea flotante influye directamente en el comportamiento del índice de amplificación. Sin embargo, existe un momento en el que su longitud sumergida es de tal dimensión que ya no hay diferencia en el índice de amplificación entre una estructura flotante y una cimentada en el fondo marino y que llega hasta el nivel medio del mar. Este punto de unión del comportamiento es dependiente de la magnitud de la velocidad máxima vertical. Se ha establecido que cuando la magnitud de ésta es de 0.2 m/s, no hay influencia relevante en la superficie libre a causa de la flotabilidad en la pila. A su vez, dicha velocidad es dependiente de la profundidad del fondo, del punto de interés y del periodo. Al alcanzarse esta condición, se recomienda utilizar las ecuaciones existentes en la literatura para una estructura anclada al fondo marino y que llega hasta la superficie, por ser más sencillas de resolver.

Con el desarrollo del presente trabajo se ha logrado ejemplificar que es posible focalizar las ondas de un oleaje monocromático al interactuar con un arreglo de estructuras de radio constante en forma parabólica. El punto de amplificación de las ondas resulta estar ubicado muy cerca del foco de la figura geométrica.

La magnitud de la onda amplificada está relacionada con la ubicación de las estructuras, es decir, con la ecuación de la parábola. En esta Tesis se ha demostrado que cuando la ecuación parabólica tiene el parámetro  $P = 150$ , se obtiene una amplificación óptima para un oleaje monocromático sin ángulo de incidencia. Además, mientras más cercanas se encuentren las estructuras, se puede generar una onda amplificada hasta 220% mayor a la incidente. No obstante, es necesario considerar que el tener un ángulo de incidencia reduce la eficiencia y desplaza el punto de focalización siguiendo la tendencia en la dirección y sentido del oleaje. Si la ecuación se encuentra caracterizada por  $P=150$ , el ángulo máximo para tener un punto claramente definido de amplificación de las ondas es de  $20^\circ$ .

El empleo de los modos evanescentes en la solución analítica de estructuras flotantes, impermeables y de radio constante, únicamente es recomendable si se requiere un estudio de mucha precisión en la periferia de las pilas; debido a que es el único lugar en donde se tienen relevancia a causa de estos. Por otra parte, cuando se consideran dichos modos se han obtenido mayores variaciones en el índice de amplificación en la zona de transmisión, únicamente para cuando se trabaja con un arreglo de estructuras y no con una de ellas estudiada de manera aislada.

Con lo expuesto anteriormente, se cuenta con una alternativa viable para aumentar las condiciones iniciales de la instrumentación utilizada para el aprovechamiento de la energía del oleaje.

Queda demostrado que el empleo de este tipo de estructuras puede inclinarse a la protección de la zona de sombra para cuando en ésta se demanden condiciones de calma para ciertas condiciones de servicio.

## CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

---

Como futura línea de investigación se plantea la ampliación del estudio a casos con oleaje irregular. Además, se requiere de una comparación de los datos obtenidos con datos experimentales y algunos modelos que podrían aplicarse a este tipo de análisis, con el fin de observar la discrepancia y tener un mejor criterio al momento de la elección de las condiciones de diseño de las estructuras.

**ANEXO A**

**RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE DISPERSIÓN**

## ANEXO A. RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE DISPERSIÓN

### A.1 INTRODUCCIÓN

Por ser un tema ya desarrollado en la literatura, en este capítulo se presenta, sin profundizar, la solución de la ecuación de dispersión empleando el método de punto fijo y mostrando los primeros 20 resultados. Asimismo, se facilita al lector una manera gráfica de observarlos, lo cual también ayuda en la interpretación de los modos evanescente.

### A.2 PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN

Si se recuerda la llamada ecuación de dispersión:

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (\text{A.1})$$

se cuenta con una relación entre el periodo, la profundidad y la longitud de onda, en donde se observa que, al no intervenir la amplitud, la velocidad de una onda (celeridad) en una profundidad dada, depende exclusivamente del periodo. Esto último da a las ondas de mayor periodo la propiedad de separarse de las de menor y por ello se dice que las ondas lineales son dispersivas en frecuencia.

La ecuación cuenta con dos soluciones reales e infinitas imaginarias. Conviene, entonces, reagrupar la ecuación de dispersión como:

$$\frac{\sigma^2 h}{gkh} = \tanh(kh) \quad (\text{A.2})$$

Si se define  $x = kh$  se tiene:

$$y_1 = \frac{\sigma^2 h}{gx} \quad (\text{A.3})$$

$$y_2 = \tanh(x) \quad (\text{A.4})$$

En la figura 68 se plasma el comportamiento de las ecuaciones (A.3) y (A.4) para el caso particular de  $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1$ , lo que ayuda a elegir el método para resolver la ecuación de dispersión.

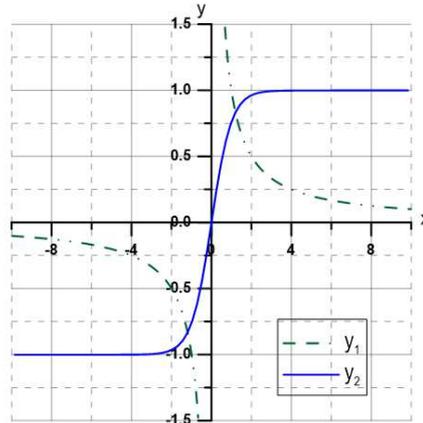


Figura 68. Soluciones reales de la ecuación de dispersión.

Haciendo uso de la forma exponencial de la función tangente hiperbólica se tiene:

$$\tanh[k(h+z)] = \frac{e^{k(h+z)} - e^{-k(h+z)}}{e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}} \quad (\text{A.5})$$

Si se propone:

$$k = k^* i \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo la ecuación (A.6) en (A.5):

$$\tanh[k^* i(h+z)] = \frac{e^{k^*(h+z)i} - e^{-k^*(h+z)i}}{e^{k^*(h+z)i} + e^{-k^*(h+z)i}} \quad (\text{A.7})$$

Simplificando:

$$\tan[k^*(h+z)] = -i \frac{e^{k^*(h+z)i} - e^{-k^*(h+z)i}}{e^{k^*(h+z)i} + e^{-k^*(h+z)i}} \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo la ecuación (A.8) en la (2.35) y simplificando:

$$\sigma^2 = -gk^* \tan[k^*(h+z)] \quad (\text{A.9})$$

Por facilidad se han reagrupado y completado los términos para poder graficar  $kh$  en el eje de las abscisas. Además, se considera  $z=0$ :

$$-\frac{\sigma^2 h}{gk^* h} = \tan[k^* h] \quad (\text{A.10})$$

Con la ecuación (A.10) se pueden graficar las funciones, tal y como lo indica la figura 69, en donde la ecuación 1 y 2 corresponden al miembro izquierdo y derecho, respectivamente.

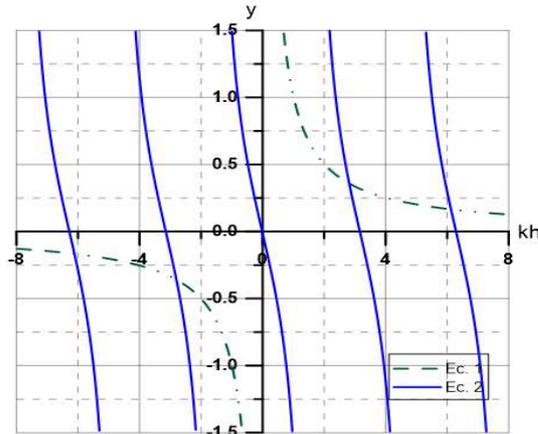


Figura 69. Soluciones imaginarias puras de la ecuación de dispersión.

### A.3 RESULTADOS

Para todas las soluciones existe un inverso aditivo, por lo que se debe elegir con qué valor se ha de trabajar. En la literatura, diversos autores manejan como condición:

$$\Re\{k\} \geq 0 \quad e \quad \Im\{k\} \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

en donde  $\Re$  y  $\Im$  indican que habrá de considerarse la parte real e imaginaria, respectivamente.

De esta forma, para un caso con periodo de 8 s, se tiene:

Tabla 4. Valores de  $kh$  para  $T = 8$ s.

$n$	$kh_n$
0	3.1554
1	2.1762 i
2	5.7854 i
3	9.0918 i
4	12.3164 i
5	15.5079 i
6	18.6828 i
7	21.8482 i
8	25.0077 i
9	28.1631 i
10	31.3159 i

en donde se confirma que los valores de los imaginarios puros se encuentran en los intervalos:

$$\pi/2 < k_1 h < \pi, 3\pi/2 < k_2 h < 2\pi \dots (n-1/2) < n\pi \quad (\text{A.12})$$

En algunas ocasiones conviene cambiar de signo a los modos evanescentes, esto es equivalente a un cambio de dirección en la onda; por tanto, dicho procedimiento depende del sentido de orientación de las ondas periódicas que se han propuesto anteriormente.

**ANEXO B**

**INTEGRALES DE FUNCIONES ORTOGONALES**

## ANEXO B. INTEGRALES DE FUNCIONES ORTOGONALES

### B.1 INTRODUCCIÓN

En este anexo se presenta el desarrollo matemático de las integrales para las funciones de ortogonalidad que se han utilizado para la simplificación de los modos evanescentes.

### B.2 PRIMERA INTEGRAL

Se define:

$$I(z)_m = -a \frac{g}{i\sigma} \frac{\cosh(k_m(h+z))}{\cosh(k_m \cdot h)} = B_m \cosh(k_m(h+z)) \quad (\text{B.1})$$

De tal forma que ahora se puede sustituir en la ecuación (4.19) y queda de la siguiente manera:

$$X_{mn} = B_m B_n \int_{-h}^0 \cosh(k_m(h+z)) \cosh(k_n(h+z)) dz \quad (\text{B.2})$$

Plasmando el coseno hiperbólico en su forma exponencial, desarrollando, integrando y simplificando se llega a:

$$X_{mn} = \frac{B_m B_n}{4} \left[ \frac{(k_m - k_n) \left( e^{(k_m+k_n)(h+z)} - e^{-(k_m+k_n)(h+z)} \right) + (k_m + k_n) \left( -e^{-(k_m-k_n)(h+z)} + e^{(k_m-k_n)(h+z)} \right)}{k_m^2 - k_n^2} \right]_{-h}^0 \quad (\text{B.3})$$

Reagrupando los términos para expresarlos en su forma hiperbólica:

$$X_{mn} = \frac{B_m B_n}{2(k_m^2 - k_n^2)} \left[ (k_m - k_n) \sinh((k_m + k_n)(h+z)) + (k_m + k_n) \sinh((k_m - k_n)(h+z)) \right]_{-h}^0 \quad (\text{B.4})$$

Integrando en z en el intervalo  $-h < z < 0$ , aplicando las integrales trigonométricas del seno de la suma de ángulos diferentes, desarrollando y simplificando:

$$X_{mn} = B_m B_n \frac{k_m \sinh(hk_m) \cosh(hk_n) - k_n \sinh(hk_n) \cosh(hk_m)}{k_m^2 - k_n^2} \quad (\text{B.5})$$

Expresión válida para m y n diferentes, sin embargo, para cuando son iguales y siguiendo un procedimiento análogo se llega a:

$$X_{mn} = B_n^2 \frac{\sinh(2k_n h) + 2k_n h}{4k_n} \quad (\text{B.6})$$

## B.3 SEGUNDA INTEGRAL

La ecuación (6.29) se puede volver a expresar como:

$$Y_{mn} = \int_{-h}^{-hp} P(z)_m P(z)_n dz \quad (\text{B.7})$$

a la que se le puede aplicar la identidad trigonométrica de multiplicación de dos ángulos, simplificando e integrando se llega a:

$$Y_{mn} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin[(K_m + K_n)(h - hp)]}{K_m + K_n} + \frac{\sin[(K_m - K_n)(h - hp)]}{K_m - K_n} \right] dz \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo la ecuación (2.58) en (B.8) se tiene:

$$Y_{mn} = 0 \quad (\text{B.9})$$

Por la naturaleza de los valores  $K$  que poseen el mismo signo, la única condición de cuidado es la indeterminación que se puede llegar a presentar en (B.8), para lo que se procede a desarrollar la integral para  $m = n$ .

$$Y_{nn} = \int_{-h}^{-hp} \cos^2(K_n(h + z)) dz \quad (\text{B.10})$$

Integrando por partes, utilizando una identidad trigonométrica y simplificando:

$$Y_{nn} = \frac{\cos(K_n(h - hp))\sin(K_n(h - hp)) + K_n(h - hp)}{2K_n} \quad (\text{B.11})$$

Sustituyendo la ecuación (2.58) y simplificando:

$$Y_{nn} = \frac{h - hp}{2} \quad \text{para} \quad n \geq 1 \quad (\text{B.12})$$

## B.4 TERCERA INTEGRAL

Si se plantea:

$$Z_{mn} = \int_{-h}^{-hp} I(z)_m P(z)_n dz \quad (\text{B.13})$$

Procediendo de manera análoga a la primera integral al redefinir  $I(z)$ , expresando a la ecuación resultante en su forma exponencial, desarrollando, realizando la integral por partes dos veces, reagrupando y simplificando se tiene:

$$Z_{mn} = B_m \frac{K_n \sin[K_n(h-lp)] \cosh[k_m(h-lp)] + k_m \cos[K_n(h-lp)] \sinh[k_m(h-lp)]}{(k_m^2 + K_n^2)} \quad (\text{B.14})$$

Sustituyendo el valor de  $K_n$  de la ecuación (2.58) en la (B.14) y simplificando:

$$Z_{mn} = B_m \frac{k_m (-1)^n \sinh[k_m(h-lp)]}{(k_m^2 + K_n^2)} \quad (\text{B.15})$$

**ANEXO C**

**OLEAJE PERTURBADO**

## ANEXO C. OLEAJE PERTURBADO

### C.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se expone el procedimiento para la obtención del oleaje perturbado en coordenadas cilíndricas a partir de la ecuación de gobierno y sus condiciones de frontera.

### C.2 CONDICIONES DE FRONTERA

El problema puede quedar idealizado como se plantea en la figura 70:

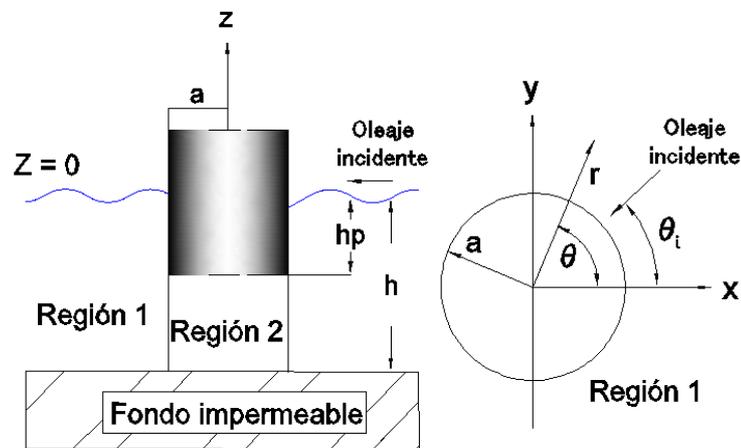


Figura 70. Idealización del problema en perfil (izquierda) y en planta (derecha).

El oleaje perturbado debe cumplir con:

La ecuación de gobierno:

$$\nabla^2 \Phi_1^s = \frac{\partial^2 \Phi_1^s}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1^s}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1^s}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_1^s}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Condición cinemática en el fondo:

$$\frac{\partial \Phi_1^s}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (\text{C.2})$$

Condición de radiación al infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{kr} \left[ \frac{\partial \Phi_1^s}{\partial r} - ik \Phi_1^s \right] = 0 \quad (\text{C.3})$$

siendo  $\Phi^s$  el oleaje perturbado, el cual incluye los efectos de reflexión, difracción y transmisión.

## C.3 SOLUCIÓN

Se ha mencionado que el potencial es dependiente de la profundidad, del tiempo y del espacio, lo que lleva a su expresión general:

$$\Phi_1^s(r, \theta, z, t) = R(r)\Omega(\theta)I(z)\Upsilon(t) \quad (C.4)$$

Al ser  $\Phi^s(r, \theta, z, t)$  periódico en el tiempo, se opta por la forma exponencial de escribir el potencial:

$$\Upsilon(t) = e^{-i\sigma t} \quad (C.5)$$

La dependencia de la profundidad se obtiene a partir de la condición cinemática en el fondo, ecuación (C.2), por lo que la función  $I(z)$  se conserva tanto para el oleaje incidente como para el perturbado.

$$I(z) = A \frac{ig \cosh[k(h+z)]}{\sigma \cosh(kh)} \quad (C.6)$$

Sustituyendo la ecuación (C.5) en (C.1) y siguiendo el procedimiento utilizado por Govaere (2002), se llega a las ecuaciones que definen la dependencia en  $r$  y  $\theta$ .

$$\frac{1}{\Omega(\theta)} \Omega(\theta)_{\theta\theta} = -\alpha^2 \quad (C.7)$$

$$r^2 R(r)_{rr} + rR(r)_r + (r^2 k^2 - \alpha^2) R(r) = 0 \quad (C.8)$$

Al omitir la solución trivial de la ecuación (C.7) se concluye que:

$$\Omega(\theta) = C \cos(\alpha\theta) + D \sin(\alpha\theta) \quad (C.9)$$

mientras que para la ecuación (C.8) se puede elegir entre las funciones de primer tipo, especie o clase  $J_{\pm\alpha}(z)$ , de segundo tipo o funciones de Weber  $Y_\alpha(z)$  y las de tercer tipo o funciones de Hankel  $H_\alpha^{(1)}(z)$  y  $H_\alpha^{(2)}(z)$ . Sin embargo, son estas últimas las que cumplen con la condición de radiación al infinito, ecuación (C.3). Físicamente, esta ecuación indica que mientras más lejos se encuentre de la pila, menor será la influencia que se tenga debido a ella. Es por esto que el oleaje perturbado queda representado como:

$$\Phi_1^s(r, \theta, z, t) = A \frac{ig \cosh[k(h+z)]}{\sigma \cosh(kh)} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} i^\alpha H_\alpha(kr) \cos(\alpha\theta) e^{-i\sigma t} \quad (C.10)$$



## **BIBLIOGRAFÍA**

---

**BIBLIOGRAFÍA**

- Abramowitz, M., & Stegun, A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Washington: Government Printing Office Washington.
- Armenta Aguilar, C. A., Mendoza Baldwin, E. G., & Silva Casarín, R. (2014). Análisis del comportamiento del oleaje bajo la interacción de pilas flotantes e impermeables. *XXV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Santiago de Chile, Chile*.
- Chakrabarti, S. K. (1987). *Hydrodynamics of Offshore Structures*. Southampton: Computational Mechanics.
- Dalrymple, R., Seo, S., & Martin, P. (1988). Water Wave Scattering by Rows of Circular Cylinders. *COASTAL ENGINEERING*, pp. 22216-22228.
- Darwiche, Williams, & Wang. (1994). Wave interaction with semiporous cylindrical breakwater. *Journal of Waterways, Vol. 120*, pp. 382-403.
- Goavaere, G., Silva, R., & Maza, J. (1999). Wave kinematics around a protected cylindrical impermeable pile. *COASTAL STRUCTURES*.
- Govaere, G. (2002). Tesis Doctoral Acción del oleaje sobre estructuras disipativas de simetría radial. *Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F.*
- Govaere, G., & Silva, R. (2000-a). Transformación del oleaje espectral o irregular debido a la presencia de una estructura cilíndrica permeable. *Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Córdoba, Argentina*.
- Govaere, G., & Silva, R. (2000-b). Transformación del oleaje debido a la presencia de una estructura cilíndrica permeable. *XVI Congreso Nacional de Hidráulica, Morelia, Michoacán*.
- Govaere, G., & Silva, R. (2000-c). Factores a considerar para el diseño de estructuras cilíndricas. *XII Congreso Nacional de Oceanografía, Huatulco, México*.
- Linton, C. M., & Evans, D. V. (1989). The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders. *Journal Fluid Mechanics*, pp. 549-569.
- Linton, C. M., & McIver, P. (1996). The scattering of water waves by an array of circular cylinders in a channel. *Journal of Engineering Mathematics*, pp. 661-682.
- Losada, I. J., Losada, M. A., & Roldán, A. J. (1994). Aplicación del Método de Desarrollo en Serie de Autofunciones (MDSA) en la Ingeniería Oceanográfica. *REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS*, pp. 19-29.
- Losada, I. J., Silva, R., & Losada, M. A. (1996). Interaction of non-breaking directional random waves with submerged breakwaters. *COASTAL ENGINEERING*, 249-266.
- Manual de Diseño de Obras Civiles de la CFE*. (s.f.). CFE.
- Roldan, A. J. (1992). *Tesis Doctoral "Sobre la transformación de un tren de ondas lineal, no lineal y modulado por un medio discontinuo"*. Santander, España: Universidad de Cantabria.
- Ronald Smith, & Sprinks T. (1975). "Scattering of surface waves by conical island". *Journal of Fluid Mechanics, vol 72, part 2*, pp. 373-384.
- Sarpkaya, T., & Isaacson, M. (1981). *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*. Van Nostrand Reinhold Company.
- Silva Casarín, R. (1995). *Tesis Doctoral Transformación del oleaje debido a obras de defensa del litoral*. Santander, España: Universidad de Cantabria.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Spring, B. H., & Monkmeyer, P. L. (1974). Interaction of Plane Waves With Vertical Cylinders. *COASTAL ENGINEERING*, pp. 1828-1847.
- Streeter, V. L. (1972). *Mecánica de los fluidos*. México, D. F.: LITO EDICIONES OLIMPIA, S. A.
- Sumer, B. M., & Fredsoe, J. (1997). *Hydrodynamics around Cylindrical Structures*. World Scientific Pub Co Inc.
- Truitt, C., & Herbich, J. (1986). "Transmission of Random Waves Through Pile Breakwaters". *COASTAL ENGINEERING*, PP. 2303-2313.
- Williams, A., & Li, W. (2000). Water wave interaction with an array of bottom-mounted surface-piercing porous cylinders. *OCEAN ENGINEERING*, 841-866.