



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA

TRANSFORMADA WAVELET EN HIDRÁULICA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. GERARDO RUIZ SOLORIO

TUTOR PRINCIPAL
DR. GABRIEL ECHÁVEZ ALDAPE, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. ENERO 2015

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Fuentes Mariles Oscar
Secretario: Dr. Escalante Sandoval Carlos A.
Vocal: Dr. Echávez Aldape Gabriel
1^{er.} Suplente: Dr. Silva Casarín Rodolfo
2^{d o.} Suplente: M.I. Franco Víctor

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

DR. GABRIEL ECHÁVEZ ALDAPE

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

A mis padres:

Joaquín Ruiz Cortés

María Elena Solorio López

A mis profesores:

Dr. Oscar Fuentes Mariles por su revisión exhaustiva de la tesis y de los consejos que me dio para incluirlos en la tesis; al Dr. Carlos A. Escalante Sandoval por las buenas clases de hidrología y por la aplicación que me pidió que hiciera a la tesis; al Dr. Rodolfo Silva Casarín por el conocimiento transmitido en las clases y por su ejemplo al trabajo de la investigación; al M.I. Víctor Franco por siempre preocuparse por la culminación de la tesis y paciencia y finalmente al Dr. Gabriel Echávez Aldape por sus enseñanzas en el aula y fuera de ella, que me han sido muy útiles en el quehacer de la investigación.

A mi amiga:

Adriana Ramírez Orozco por siempre preocuparse en concluir este trabajo y siempre estar en los momentos buenos y malos.

RESUMEN

Se presenta el análisis, identificación, caracterización y simulación de procesos aleatorios que utilizan a la transformada wavelet (**ondelettes**) continua y discreta. Esta transformada se usa para descomponer procesos aleatorios en funciones ortogonales base. El análisis en el tiempo y en la frecuencia hace posible que la transformada wavelet dé una visión del carácter transitorio de la señal a través de mapas de tiempo-frecuencia, a diferencia del método tradicional de la descomposición espectral donde el tiempo se pierde. En el relativo corto tiempo de vida de la transformada wavelet, se ha encontrado su utilidad en gran variedad de aplicaciones. En el presente trabajo, se discutirá el desarrollo de la transformada wavelet continua y discreta para el análisis de señales transitorias usuales en la ingeniería hidráulica, como: golpe de ariete, turbulencia, oleaje, viento, señales del nivel estático en acuíferos y en el pronóstico de escurrimientos mensuales.

ABSTRACT

The analysis, identification, characterization and simulation of random processes utilizing the continuous and discrete wavelet transform (**ondelettes**) are addressed. The transformed wavelet is used to decompose random processes into localized orthogonal basis functions. The time and frequency analysis make it possible that the wavelet transform provides a vision into the character of transient signals through time-frequency maps, contrary to the traditional method of spectral decomposition where the time information is lost. In the relatively short life of the wavelet transform it has been found its usefulness in a wide variety of applications. The present paper will discuss the development of the continuous and discrete wavelet transform applied to hydraulic engineering problems, such as transient flows, turbulence, waves, wind, signs for static level in aquifers and average flow monthly forecast.

ÍNDICE

ÍNDICE	I
LISTA DE VARIABLES	III
LISTA DE FIGURAS	VII
LISTA DE TABLAS	XI
INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO 1. TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA	
1.1 Wavelet	5
1.2 Requerimientos de la Wavelet	6
1.3 Espectro de energía Wavelet	7
1.4 Transformada Wavelet	8
1.5 Identificación de estructuras coherentes	10
1.6 Detección de bordes	12
1.7 Transformación Wavelet inversa	14
1.8 Energía de la señal: energía Wavelet base y espectro de potencia	14
1.9 Transformada Wavelet en términos de la transformada de Fourier	20
1.10 Wavelets complejas: Wavelet Morlet	22
1.11 Transformada Wavelet	24
1.12 Wavelet en dos o más dimensiones	26
CAPITULO 2. TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA	
2.1 Marcos y bases de la Wavelet ortogonal	29
2.1.1 Marcos	29
2.1.2 Escala de la malla dyadic y transformada Wavelet ortonormal	32
2.1.3 Función de escala y representación multi-solución	34
2.1.4 Wavelet Haar	37
2.1.5 Transformada Wavelet rápida (FWT)	39
2.2 Energía de la Wavelet	42
2.2.1 Índice alternativo de los coeficientes de la malla dyadic	42
2.2.2 Energía de la transformada Wavelet Haar	45
2.3 Wavelet Daubechies	49

CAPITULO 3. ANÁLISIS DE TIEMPO-FRECUENCIA EN SEÑALES	55
3.1 Métodos: análisis de señales	55
3.1.1 Análisis de Fourier	55
3.1.1.1 Series de Fourier	56
3.1.1.2 Transformada de Fourier	56
3.1.2 Transformada de Fourier de corto tiempo (STFT)	58
3.1.3 Representación Wigner-Ville (WVR)	60
3.1.4 Transformada Wavelet (WT)	62
3.1.4.1 Transformada Wavelet Discreta (DWT)	63
3.1.4.2 Transformada Wavelet Continua (CWT)	65
3.1.4.3 Selección de la Wavelet	66
3.1.4.4 Cálculo de la energía usando el análisis Wavelet	68
3.2 Ejemplos de análisis: Comparación de la FT, STFT, HHT y WT	70
3.2.1 Señal 1	70
3.2.2 Señal 2	74
3.2.3 Señal 3. Turbulenta	81
CAPITULO 4. APLICACIONES	85
4.1 Señales teóricas	85
4.2 Señales transitorias	90
4.3 Señales turbulentas	92
4.4 Señales de viento y altura de ola	94
4.4.1 Co-escalograma	97
4.5 Aplicación a señales de abatimiento de un acuífero	104
4.6 Aplicaciones en hidrología	110
4.6.1 Señal de precipitación	111
4.6.2 Pronóstico de gastos mensuales	113
CAPITULO 5. CONCLUSIONES	122
REFERENCIAS	113

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diversas wavelets. (a) Gausiana, (b) Mexican Hat, (c) Haar, (d) Morlet.	5
1.2	Dilatación y translación de una wavelet	9
1.3	Espectro de energía de Fourier de la wavelet Mexican Hat, con tres dilataciones.	10
1.4a	Dilatación y localización sobre una señal wavelet.	11
1.4b	Wavelet en cuatro distintas localizaciones sobre una señal	12
1.5	Esquema ilustrado de la wavelet en una señal discontinua	13
1.6	Densidad espectral y espectro de potencia de la wavelet.	16
1.7	Representación de la WT en el tiempo y frecuencia	21
1.8	Wavelet Morlet	23
1.9	Cajas de Heisenberg en el plano tiempo-frecuencia.	25
1.10	Wavelet Mexican Hat bidimensional.	26
2.1	Wavelet Mexican Hat ajustada al marco con $a_0 = \sqrt{2}$ y $b_0 = 0.5$	31
2.2	Aproximación suavizada de una serie, usando pulsos de bloques en una función de escala	36
2.3	Wavelets ortonormales discretas	38
2.4	Diagrama esquemático del método índice alternativo de la malla dyadic de la WT.	43
2.5	Descomposición y reconstrucción de la wavelet Haar de una señal rampa simple.	46
2.6	Wavelets Daubechies y su función de escala con su espectro de energía.	51
3.1	Esquema básico de la DWT.	65
3.2	Señal de suma de cosenos..	71
3.3	Espectro de potencia de la suma de cosenos, usando FT, WT, STFT y HHT...	72
3.4	Espectrograma tridimensional usando STFT de la señal suma de cosenos...	72
3.5	Espectrograma bidimensional usando STFT de la señal suma de cosenos...	73
3.6	Escalograma tridimensional de la señal suma de cosenos por el método de la WT....	73
3.7	Escalograma bidimensional de la señal suma de cosenos, usando la WT.	74
3.8	Señal transitoria.	74
3.9	Espectro de potencia de la señal transitoria con FT, WT, STFT y HHT.	75
3.10	Espectrograma bidimensional de la señal transitoria, usando STFT.	76
3.11	Espectrograma tridimensional de la señal transitoria, usando STFT.	76
3.12	Espectrograma bidimensional por el método HHT.	77
3.13	Espectrograma tridimensional de la señal transitoria, usando HHT	77
3.14	Escalograma bidimensional de la señal transitoria, usando WT.	78
3.15	Escalograma tridimensional de la señal transitoria, usando la WT.	78

3.16	Escalograma bidimensional usando la wavelet Haar para la señal transitoria.	79
3.17	Espectrograma tridimensional usando la wavelet Haar para la señal transitoria.	80
3.18	Espectro de potencia de la señal transitoria usando FT, WT (Haar), STFT y HHT.	80
3.19	Señal de flujo turbulento.	81
3.20	Espectro de potencia con FT, WT, STFT y HHT	82
3.21	Escalograma tridimensional, usando WT	82
3.22	Escalograma utilizando la WT.	83
4.1	Señal de suma de tres senoides	85
4.2	Espectro de frecuencia y se observa una representación discreta en cada frecuencia; en este caso 1, 2 y 6 rad/s	86
4.3	Comparación de diferentes wavelets aplicadas a la señal de tres senoides	87
4.4	Señal en diente de sierra	88
4.5	Espectro de frecuencia de la señal diente de sierra	88
4.6	Espectro de frecuencia de la señal diente de sierra y la CWT.	89
4.7	Señal transitoria del golpe de ariete	90
4.8	Escalograma utilizando la wavelet Morlet	91
4.9	Escalograma tridimensional, usando WT	91
4.10	Señal de flujo transitorio turbulento	92
4.11	Escalograma tridimensional, usando CWT	93
4.12	Escalograma utilizando la wavelet madre	93
4.13	Señal de altura de ola	94
4.14	Escalograma tridimensional del oleaje, usando CWT	95
4.15	Escalograma del oleaje utilizando la wavelet Meyer discreta	95
4.16	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, enero 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, enero 2008 y d) Coescalograma, enero 2008	98
4.17	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, febrero 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, febrero 2008 y d) Coescalograma, febrero 2008	98
4.18	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, marzo 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, marzo 2008 y d) Coescalograma, marzo 2008	99
4.19	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, abril 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, abril 2008 y d) Coescalograma, abril 2008	99
4.20	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, mayo 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, mayo 2008 y d) Coescalograma, mayo 2008	100
4.21	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, junio 2008; c) CWT a la señal de altura de	100

	ola, junio 2008 y d) Coescalograma, junio 2008	
4.22	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, julio 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, julio 2008 y d) Coescalograma, julio 2008	101
4.23	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, agosto 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, agosto 2008 y d) Coescalograma, agosto 2008	101
4.24	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, septiembre 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, septiembre 2008 y d) Coescalograma, septiembre 2008	102
4.25	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, octubre 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, octubre 2008 y d) Coescalograma, octubre 2008	102
4.26	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, noviembre 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, noviembre 2008 y d) Coescalograma, noviembre 2008	103
4.27	a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, diciembre 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, diciembre 2008 y d) Coescalograma, diciembre 2008	103
4.28	Localización de la zona de estudio, Ciudad de México, México	107
4.29	Señales de la precipitación y nivel estático del pozo No. 21 de la Ciudad de México	107
4.30	CWT Morlet, señal del nivel estático en el pozo No. 21	108
4.31	CWT Morlet, señal precipitación en el pozo No. 21	109
4.32	Coscalograma entre la relación de las señales de precipitación y nivel estático en el pozo No. 21	109
4.33	Precipitación en la estación climatológica Temascal del año 1950 al 2005.	111
4.34	Escalograma tridimensional de la precipitación usando la WT	112
4.35	Escalograma de la precipitación utilizando la wavelet Mexican Hat	112
4.36	Gastos instantáneos de la estación No. 11012	114
4.37	Módulo usando la CWT Morlet	114
4.38	Ángulo usando la CWT Morlet	115
4.39	Parte real e imaginaria de la CWT Morlet	115
4.40	Señal analizada y reconstruida usando la CWT Morlet	116
4.41	Autocorrelaciones de residuos del modelo ARIMA(1,0,0)	118
4.42	Autocorrelaciones de residuos parciales ARIMA(1,0,0)	118
4.43	Pronostico de la estación río San Pedro (01/1944 a 12/1956)	119
4.44	Pronostico de la estación río San Pedro (01/1957 a 12/1969)	119
4.45	Pronostico de la estación río San Pedro (01/1970 a 12/1972)	120
4.46	Pronostico de la estación río San Pedro (01/1973 a 12/1985)	120
4.47	Pronostico de la estación río San Pedro (01/1986 a 12/1998)	121
4.48	Pronostico de la estación río San Pedro (01/1999 a 12/2010)	121

LISTA DE TABLAS

3.1	Comparación de los diferentes métodos de análisis de señales	84
4.1	Periodo de estimación	116

LISTA DE VARIABLES

WT	Wavelet Transform; Transformada Wavelet;
STFT	Short Time Fourier; Transformada de Fourier en Corto Tiempo;
FFT	Fast Fourier Transform; Transformada Rápida de Fourier;
CWT	Continuous Wavelet Transform; Transformada Wavelet Continua;
DWT	Discrete Wavelet Transform; Transformada Wavelet Discreta;
FWT	Fast Wavelet Transform; Transformada Rápida Wavelet;
HHT	Hirbert-Huang Transform; Transformada Hilbert-Huang;
HT	Hilbert Transform; Transformada Hilbert;
EMD	Empiric Method Decomposition; Método de Descomposición Empírica;
$e(t)$	tiempo;
π	número pi;
E	energía de una función;
∞	infinito;
$\hat{\psi}(t)$	transformada de Fourier de $\psi(t)$;
$ $	modulo operador de la magnitud de $\psi(t)$;
C_g	constante de admisibilidad;
F	subíndice para indicar el espectro de Fourier;
f_p	pico del espectro de energía;
f_c	desviación estándar del espectro de energía;
a	parámetro de dilatación;
b	parámetro de translación;
$\psi(t)$	función wavelet;
ψ^*	conjugado complejo de la función wavelet;
$\Psi_{a,b}(t)$	función wavelet normalizada;
$T(a,b)$	integral de la transformada wavelet;
$E(a,b)$	función de densidad de energía de la wavelet en dos dimensiones, escalograma;
$E_F(f)$	espectro de energía de Fourier;
$E_w(f)$	espectro de energía de la wavelet;
f_0	frecuencia central de la wavelet;
f	frecuencia característica;

P	período;
$E(a)$	escala dependiente de energía;
$E(f,b)$	superficie de la densidad de energía en el plano tiempo-frecuencia;
$P_F(f)$	espectro de potencia de Fourier;
$P_W(f)$	densidad espectral wavelet;
$\sigma^2(a)$	varianza de la wavelet;
$\hat{x}(f)$	transformada de Fourier;
$\hat{\Psi}_{a,b}(f)$	transformada wavelet;
$\hat{\Psi}_{a,b}^*(f)$	transformada wavelet conjugada;
ω_0	frecuencia angular;
σ_t	desviación estándar en el tiempo;
σ_f	desviación estándar en la frecuencia;
m	dilatación para el caso de DWT;
n	translación para el caso de DWT;
a_0	parámetro fijo del paso de la dilatación mayor que 1;
b_0	parámetro de localización mayor de 0
a_0^m	escala de la wavelet;
$T_{m,n}$	valores de la transformada wavelet discontinua;
A	límite del marco de energía de los coeficientes de la wavelet;
B	límite del marco de energía de los coeficientes de la wavelet;
$x'(t)$	fórmula de reconstrucción discreta;
$\Psi_{m,n}(t)$	wavelet ortonormal;
$\phi_{0,0}(t) = \phi(t)$	función wavelet padre para DWT;
$S_{m,n}$	coeficientes de aproximación wavelet;
m_0	índice de escala arbitrario;
c_0	coeficiente de escalamiento;
$S_{m+1,n}$	coeficientes de aproximación en el índice de escala m+1
b_k	coeficientes de escalamiento;
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)c_k$	filtro lowpass;

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)b_k$	filtro highpass;
k	índice de escala;
N_k	coeficientes de escalamiento diferentes a cero;
E_m	energía de la wavelet discreta;
N	componente vectorial de la wavelet;
$W_i^{(m)}$	componentes individuales del vector transformado $W^{(m)}$;
$W^{(m)}$	vector transformado;
$\phi_{2,0}(t)$	función escala para la wavelet Haar;
$d_2(t)$	componente detallada de la señal en el índice de escala 2;
D	familia especial de la wavelet Daubechies;
$f(t)$	señal periódica;
a_0, a_k, b_k	coeficientes de Fourier;
$i = \sqrt{-1}$	número imaginario;
ω	frecuencia;
R	campo de los números reales;
$g(t)$	ventana de tiempo;
$S_f(\omega, b)$	transformada de Fourier en ventanas;
*	conjugado complejo;
C_f	auto-covarianza;
PV	valor principal de la integral de Cauchy;
$z(t)$	señal analítica;
$f(t)$	señal real;

INTRODUCCIÓN

La Transformada Wavelet (Wavelet Transform, WT) se ha encontrado particularmente útil para analizar señales que se pueden describir como aperiódicas, ruidosas, intermitentes y transitorias. Su capacidad de examinar la señal simultáneamente en el tiempo y frecuencia de manera indistinta a diferencia de la Transformada de Fourier en corto tiempo (STFT, Short Time Fourier Transform) donde se pierde la información en el tiempo, ha producido un sinfín de métodos basados en la wavelet para la manipulación e interpretación de las señales.

El análisis de la WT hasta ahora se ha aplicado a múltiples y diversos fenómenos físicos, como análisis climático, análisis de índices financieros, monitoreo del corazón, supervisión de la vibración en máquinas rotatorias, señales sísmicas con y sin perturbaciones, imágenes astronómicas, caracterización de la superficie de agrietamiento, caracterización de las estructuras coherentes en turbulencia, compresión de imágenes y videos, transferencia de información vía celular y análisis de señales de expedientes médicos.

Muchas de las ideas detrás de la WT han existido durante mucho tiempo; por ejemplo, se tienen los trabajos hechos por Alfréd Haar (11/octubre/1885 – 16/marzo/1933). Sin embargo, el análisis de la transformada wavelet como se conoce ahora, tiene su comienzo a mediados de los años ochenta donde se desarrolló para analizar señales sísmicas, y aunque sigue habiendo un gran interés en el análisis de la transformada wavelet dentro de una pequeña comunidad de matemáticos durante el resto de la década de los años ochenta, el uso de la WT en Ingeniería realmente comenzó a principios de los años 90's, con un amplio crecimiento en diversas aplicaciones y encontrando nuevas aplicaciones. Esta herramienta matemática es ahora más común e incluso se encuentran subprogramas de análisis de datos basados en diversos software como Matlab, Mathematica y Maple.

Las señales transitorias frecuentemente se encuentran en una gran variedad de campos de la Ingeniería Hidráulica (golpe de ariete, fugas, turbulencia, marítima y viento). El análisis de Fourier convencional describe adecuadamente las características del fenómeno en el campo de la frecuencia, pero pierde la información en el tiempo; esto se debe a que en los métodos basados en la Transformada Rápida de Fourier, (Fast Fourier Transform, FFT) o en la Transformada Corta de Fourier, no se obtienen rasgos transitorios localmente ya que se promedia en el tiempo de duración de la señal, por lo que no es posible tener una gran resolución simultáneamente tanto en el tiempo como en la frecuencia.

Al seleccionar una pequeña ventana se causa una mala resolución en la frecuencia y aunque una ventana mayor puede revelar el contenido de la frecuencia mucho mejor lo hace a expensas de la resolución en el tiempo; lo anterior se debe a que la porción de la señal en cualquier ventana se trata como si fuera estacionaria.

Para conservar tanto las características espectrales de un proceso como las temporales se requiere de herramientas nuevas de cálculo basadas en la gran capacidad y rapidez numérica de las computadoras modernas. Una herramienta de este tipo es la Transformada Wavelet (llamada, a veces, ondaleta del francés ondelettes) que usa funciones ortogonales locales, que cambian tanto en frecuencia como en magnitud, lo que permite ver las características del transitorio local que se encuentran en la señal.

En el Capítulo uno, se analizará la teoría básica de la Transformada Wavelet Continua (Continuous Wavelet Transform, CWT). Primero determinaremos qué constituye una wavelet, cómo se utiliza en el análisis de la señal y qué información nos da; después veremos la transformada inversa y como se reconstruye una señal, así como también la conservación de la energía de la WT y cómo se obtiene su espectro de energía.

En el Capítulo dos, consideraremos a la Transformada Wavelet Discreta (Discrete Wavelet Transform, DWT). Se discutirán las propiedades de la transformada wavelet

discreta y cómo en ciertos criterios es posible reconstruir totalmente la señal original usando sumas en los coeficientes de la wavelet discreta. Entonces, veremos cómo realizar una DWT en señales de entrada discretas de longitud finita y también consideraremos las wavelets bi-ortogonales, que vienen en pares.

En el Capítulo tres, se estudian varias herramientas disponibles para analizar señales no estacionarias y se comparan sus diferentes características. Las señales en fenómenos transitorios y de señales de turbulencia que por su naturaleza son no estacionarias, ya que a este tipo de fenómenos son muy comunes en la Ingeniería Hidráulica y en la Mecánica de Fluidos.

En el capítulo cuatro, veremos la aplicación de la WT a la Hidráulica. Como primer caso veremos dos señales una de oleaje y un diente de sierra, ambas generadas por suma de senoides y después analizaremos el caso de señales transitorias en apertura y cierre de válvula. Respecto a señales generadas por viento veremos registros tomados a diferentes alturas, analizando las diferencias entre ellas y utilizando el coescalograma para encontrar coincidencias entre ambas señales y su energía.

El objetivo de este trabajo es analizar diversas señales que se presentan en el campo de la Hidráulica y su aplicación de la WT. Para este motivo se realizó un análisis tanto de la transformada wavelet continua como discreta; se comparó con otros métodos para ver la validación de su aplicación y así encontrar una mejor forma de evaluar los parámetros que caracterizan a los fenómenos; se aplica a diversos campos de la Hidráulica y se plantean conclusiones y recomendaciones a partir de los resultados.

CAPÍTULO 1: TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA

1.1 Wavelet

La transformada Wavelet es un método para convertir una función (o señal) en otra forma con características más fáciles de estudiar que la señal original. Para aplicar una WT es necesaria una wavelet que, como su nombre lo indica, es una forma de onda localizada. Es decir, una wavelet es una función $\psi(t)$ que satisface ciertos criterios matemáticos, que son funciones manipuladas a través de un proceso de translación (movimiento a lo largo del eje de tiempo) y dilatación (extensión afuera de la wavelet) que transforma a la señal en otra forma, como el desarrollo en el tiempo y escala.

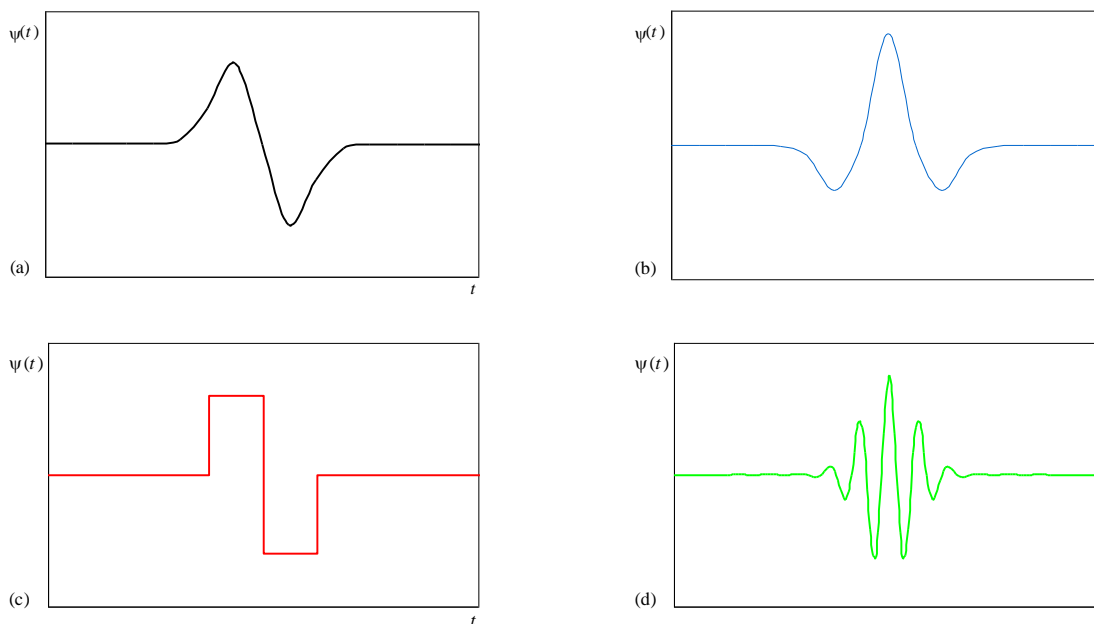


Figura 1.1. Diversas wavelets. (a) Gaussiana, (b) Mexican Hat, (c) Haar, (d) Morlet.

La selección de la wavelet depende tanto de la naturaleza de la señal como del análisis que se requiere. Empezaremos con una wavelet específica, la wavelet Mexican Hat o sombrero mexicano, que es la segunda derivada de la función distribución Gaussiana $e^{-t^2/2}$ es decir, con varianza unitaria pero sin el habitual factor de normalización $1/\sqrt{2\pi}$. Todas las derivadas de la función Gaussiana pueden ser empleadas como una wavelet. Ambas derivadas tanto la primera como la segunda de la función Gaussiana se muestran en la Figura 1.1, junto con otros tipos de wavelets. La wavelet Mexican Hat sirve para ilustrar muchas de las propiedades del análisis de la WT continua, la wavelet

mother (madre) que es la base de la wavelet Mexican Hat sin traslación y dilatación, definida por:

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2} \quad (1.1)$$

donde t , es el tiempo.

1.2 Requerimientos de la wavelet

Una función debe satisfacer ciertos criterios matemáticos para ser clasificada como una wavelet. Estos son:

1. Tener energía finita:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (1.2)$$

donde: E es la energía de una función igual a la integral del cuadrado de la magnitud y los corchetes verticales $||$ representa el modulo operador que da la magnitud de $\psi(t)$. Si $\psi(t)$ es una función compleja, la magnitud utiliza tanto la parte real como la compleja.

2. Si $\hat{\psi}(t)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$,

$$\hat{\psi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i(2\pi f)t} dt \quad (1.3)$$

entonces la siguiente condición debe ser:

$$C_g = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < \infty \quad (1.4)$$

Esto implica que la wavelet no tiene componente en la frecuencia cero, $\hat{\psi}(0) = 0$ o la wavelet $\psi(t)$ debe tener media cero. La ecuación (1.4) se conoce como la condición de admisibilidad y C_g es la constante de admisibilidad. El valor de C_g depende de la wavelet elegida y es igual a π para la wavelet Mexican Hat de la ecuación (1.1).

3. Un criterio adicional que debe valer para las wavelets complejas, es que la transformada de Fourier, si ambas son reales, es nula para frecuencias negativas.

1.3 Espectro de energía wavelet

Las wavelets que satisfacen la condición de admisibilidad, ecuación (1.4), que son los filtros bandpass. Es decir, en términos simples deja solamente las componentes de la señal dentro un rango finito de frecuencias y caracterizadas por el espectro de energía de la wavelet. Una gráfica de la magnitud al cuadrado de la transformada de Fourier contra la frecuencia para una wavelet da su espectro de energía. Por ejemplo, el espectro de energía de Fourier de la wavelet Mexican Hat esta dado por:

$$E_F(f) = |\hat{\psi}(f)|^2 = 32\pi^5 f^4 e^{-4\pi^2 f^2} \quad (1.5)$$

donde el subíndice F se usa para indicar el espectro de Fourier, tan distinto del espectro wavelet base. Cuando la wavelet Mexican Hat es una función real, su espectro de Fourier es simétrico a cero. Las wavelets complejas no tienen componentes de frecuencia negativas. El pico del espectro de energía ocurre en una frecuencia dominante igual a $f_p = \pm\sqrt{2}/2\pi$. El segundo momento f_c del área del espectro de energía es usado para definir el centro de passband del espectro de energía, de la siguiente manera:

$$f_c = \sqrt{\frac{\int_0^\infty f^2 |\hat{\psi}(f)|^2 df}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(f)|^2 df}} \quad (1.6)$$

donde f_c es la desviación estándar del espectro de energía sobre el eje vertical. Para la wavelet Mexican Hat madre, f_c es igual a $\sqrt{5/2}/2\pi$ ó 0.251 Hz. En la práctica utilizamos una frecuencia característica de la wavelet madre, como f_p, f_c . Cuando se analiza el funcionamiento de la WT es importante que la energía espectral de la wavelet sea considerada, como indica el rango y carácter de las altas frecuencias de la wavelet.

De las ecuaciones (1.1) y (1.2) vemos que la energía total de la wavelet Mexican Hat es finita y dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [(1-t^2)e^{-t^2/2}]^2 dt = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \quad (1.7)$$

La energía de una función, que es el área bajo su espectro de energía. Para esta wavelet se tiene que:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} 32\pi^5 f^4 e^{-4\pi^2 f^2} df = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \quad (1.8)$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(f)|^2 df \quad (1.9)$$

que es una función del teorema de Parseval.

A menudo, en la práctica, la función wavelet se normaliza con el propósito de hacerla de energía unitaria. Para hacerlo la ecuación (1.7) se divide entre $(3\sqrt{\pi}/4)^{1/2}$, quedando:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}} (1-t^2) e^{-t^2/2} \quad (1.10)$$

La única diferencia cuando empleamos la wavelet Mexican Hat normalizada de la ecuación (1.10) en vez de la definida por la ecuación (1.1) está en el valor de admisibilidad constante C_g , el cual debe de ser cambiado de π a $4\sqrt{\pi}/3$.

1.4 Transformada wavelet

Cuando tenemos una wavelet madre, requerimos que sea más flexible. Para poderla hacer más flexible se lleva a cabo dos manipulaciones básicas: estirla y apretarla (dilatación) o podemos cambiarla de lugar (translación). La Figura 1.2(a) indica el estiramiento de la wavelet Mexican Hat y estrechamiento respectivamente al doble y a la mitad del ancho original sobre el eje del tiempo. Esta dilatación y contracción de la wavelet se realiza por el parámetro de dilatación a , que es la distancia entre el centro de la wavelet y el cruce con el eje del tiempo, para la wavelet Mexican Hat. El movimiento de la wavelet a lo largo del eje del tiempo es el parámetro de translación b . La Figura 1.2(b) muestra el movimiento de una wavelet a lo largo del eje del tiempo de b_1 pasando a b_2 y b_3 . Podemos incluir el parámetro de dilatación a , y el parámetro de localización b , dentro de la definición de una wavelet dada por ecuación (1.1). Estas versiones de desplazamiento y dilatación de la wavelet madre están dados por $\psi[(t-b)/a]$. Por ejemplo, la wavelet Mexican Hat toma la forma siguiente:

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \left[1 - \left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] e^{-\frac{1}{2}[(t-b)/a]^2} \quad (1.11)$$

La wavelet madre original $\psi(t)$ dada por la ecuación (1.1) tiene $a=1$ y $b=0$. En la forma de la ecuación (1.11) podemos transformar una señal $x(t)$, usando un rango de a 's y b 's. La WT de una señal continua con respecto a la función wavelet es:

$$T(a,b) = w(a) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1.12)$$

donde $w(a)$ es una función. El asterisco indica que el conjugado complejo de la función wavelet se usa en la transformada, que no se considera cuando usamos la wavelet Mexican Hat como una función real. La WT es la correlación cruzada de una señal con wavelets de ancho variado. Típicamente $w(a)$ se fija en $1/\sqrt{a}$ por razones de conservación de energía; b anterior asegura que la wavelet en cada escala tenga la misma energía.

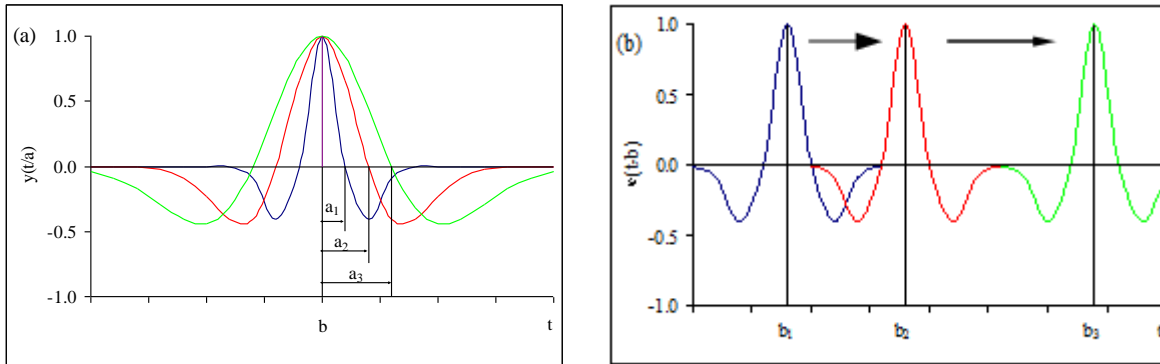


Figura 1.2. Dilatación y translación de una wavelet.

Usando $w(a) = 1/\sqrt{a}$, la WT se escribe como:

$$T(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1.13)$$

La Transformada Wavelet Continua, Continuous Wavelet Transform, CWT de sus siglas en inglés, de la ecuación 1.13 se observa que la wavelet contiene dilatación y translación de la señal $x(t)$, dónde $x(t)$ puede ser una señal transitoria o de cualquier tipo. El producto de la wavelet y la señal son integrados sobre el rango de la señal; en términos matemáticos se le conoce como convolución. La función wavelet normalizada se escribe a menudo compactamente como:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (1.14)$$

donde la normalización es en el sentido de la energía wavelet. Por lo tanto, la integral de la transformada se puede escribir como:

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (1.15)$$

Podemos expresar que la WT en la forma más compacta como un producto interno:

$$T(a,b) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle \quad (1.16)$$

La Figura 1.3 muestra los efectos de la dilatación de una wavelet Mexican Hat $\psi_{a,b}(t)$ que tiene su espectro de energía correspondiente. Cuando la wavelet se expande, su espectro de energía correspondiente se contrae. Esto es una consecuencia, cuando la expansión en el dominio de tiempo debe involucrar el alargamiento de los periodos del tiempo y una correspondiente frecuencia asociada baja. La escala a de la wavelet es inversamente proporcional a todas sus frecuencias características, incluyendo el centro de frecuencia passband, frecuencia pico y la frecuencia central (para wavelets complejas).

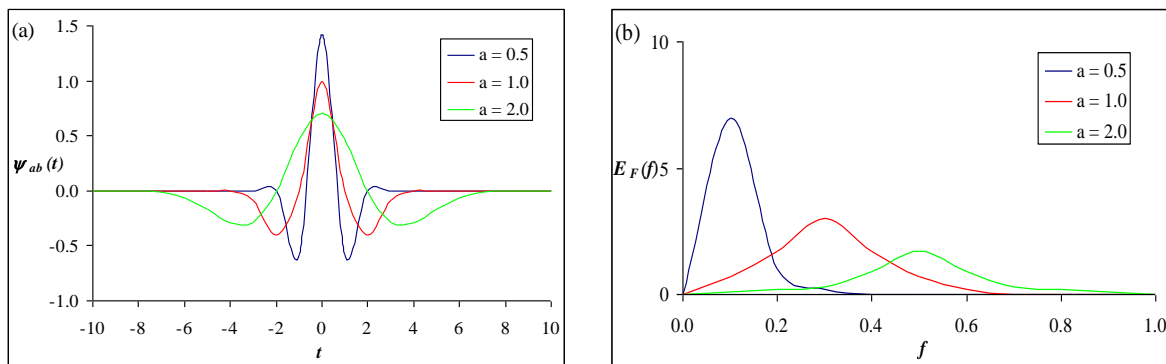


Figura 1.3. Espectro de energía de Fourier de la wavelet Mexican Hat, con tres dilataciones.

1.5 Identificación de estructuras coherentes

En la Figura 1.4a se visualiza los mecanismos de la WT dada por la ecuación (1.15); se observa una wavelet centrada de escala a localizada en b sobre el eje del tiempo superpuesta encima de una señal arbitraria. Los segmentos de tiempo donde la wavelet y la señal son ambas positivas, resulta una contribución positiva a la integral de la ecuación (1.15), por ejemplo la región A de la figura. De forma semejante, los segmentos de tiempo donde la wavelet y la señal ambos resultan negativos en una contribución positiva de la integral (región B). Las regiones donde la señal y la wavelet

son de signo opuesto resulta en las contribuciones negativas de la integral, por ejemplo las regiones C , D y E de la figura.

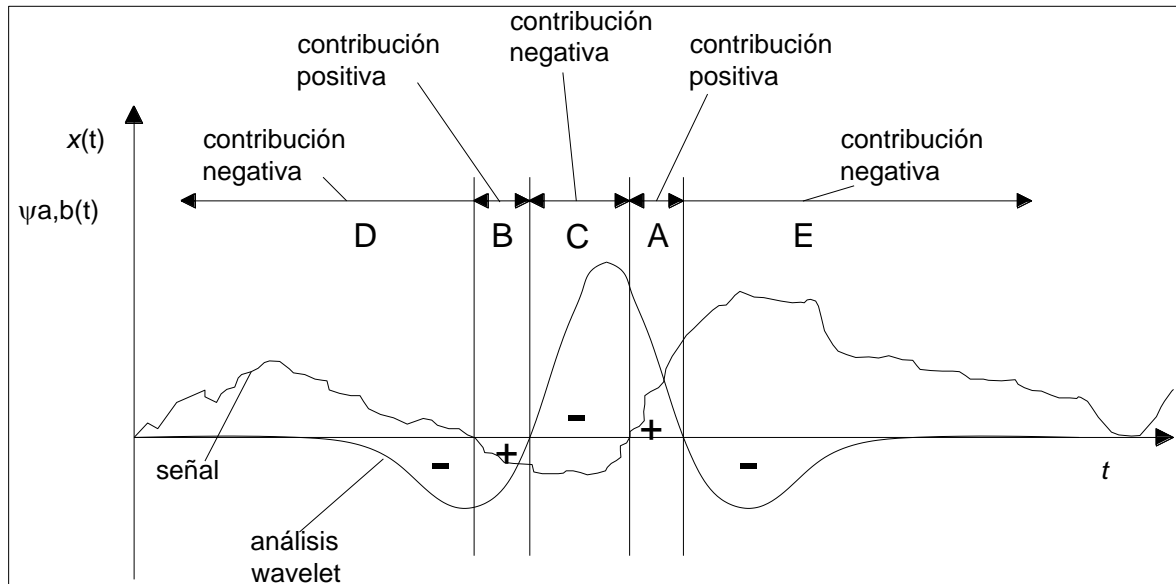


Figura 1.4a. Dilatación y localización sobre la señal de la wavelet.

La Figura 1.4b indica una wavelet con dilatación fija en cuatro localizaciones sobre una señal: en la primera ubicación (b_1), la wavelet está ubicada sobre un segmento de la señal en la que las partes positiva y negativa de la señal son razonablemente circunstanciales con la wavelet, esto resulta en valores positivos relativamente grandes de $T(a,b)$ de la ecuación (1.15); ubicación b_2 , las contribuciones positivas y negativas en la integral se cancelan entre sí, resultando un valor cercano a cero; ubicación b_3 , la señal y la wavelet están fuera de la fase que resulta de una respuesta negativa para un valor de retorno de $T(a,b)$; ubicación b_4 , la wavelet y la señal están otra vez fuera de la fase, similar a la ubicación b_3 . Esta vez, sin embargo, la porción de señal en la vecindad de la wavelet contiene una gran componente local media. Es fácil ver que la componente media aporta valores positivos y negativos iguales a $T(a,b)$. Por lo tanto, solamente la característica de la señal local es importante para la wavelet en esa ubicación y la media no es tomada en cuenta. Es a través de este proceso que la WT escoge "estructuras coherentes" en un tiempo de la señal para varias escalas. Cambiando de lugar la wavelet a lo largo de la señal (b creciendo) las estructuras coherentes se relacionan con una escala a específica en la señal siendo identificadas. Este proceso es repetido sobre un rango de escalas a en todas las estructuras

coherentes dentro de la señal, de la más grande a la más pequeña, pueden ser distinguidas.

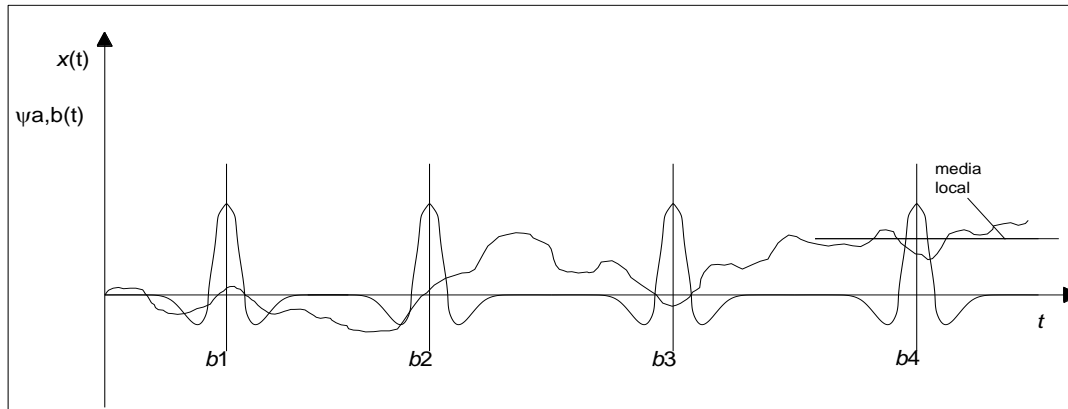


Figura 1.4b. Wavelet en cuatro distintas localizaciones sobre una señal.

1.6 Detección de bordes

Otra propiedad útil de la WT es identificar abruptas discontinuidades (bordes) en la señal. Un ejemplo simple de discontinuidad se muestra en la Figura 1.5a, donde una señal continua, $x(t)=1$, repentinamente cae a un valor negativo constante, $x(t)=-1$. Se puede ver en los picos una discontinuidad semejante a la wavelet, seguida de una wavelet arbitraria de dilatación a , a lo largo de la señal discontinua. El efecto de la ubicación de la wavelet b , sobre la transformada $T(a,b)$ se explica para cada una de las cinco ubicaciones sobre la señal, A, B, C, D y E.

Ubicación A: La combinación de la wavelet y la señal dan valores cercanos a cero de la integral $T(a,b)$. Cuando es una función localizada, la wavelet se hace aproximadamente cero en las distancias relativamente pequeñas a su centro. Por lo tanto, la WT, ecuación (1.15) se hace una convolución de la wavelet con una señal constante dando un valor de cero.

Ubicación B: En esta ubicación la wavelet sólo está empezando a atravesar la discontinuidad. El lóbulo izquierdo de la wavelet produce una contribución negativa a la integral, el lóbulo derecho de la wavelet causa una contribución positiva igual, dejando que la protuberancia central de la wavelet produzca un valor positivo de la integral en esta ubicación.

Ubicación C: Cuando la discontinuidad de la señal coincide con el centro de la wavelet b , la mitad derecha e izquierda de la wavelet colaboran a un valor cero de la integral. Cuando la wavelet tiene media cero por definición, podemos ver que las cuatro regiones de la wavelet en la Figura 1.5 todas tienen la misma área.

Ubicación D: Es similar a lo ubicación B. Cuando la wavelet atraviesa la discontinuidad más lejos, el lóbulo izquierdo de la señal produce una contribución negativa a la integral, la parte derecha de la wavelet causa una contribución positiva igual, como en la ubicación B. Esta vez, sin embargo, la parte central de la wavelet coincide con la señal continua negativa y por lo tanto la integral produce un valor negativo importante en esta ubicación.

Ubicación E: En ubicaciones más lejos que C, la wavelet y la señal se combinan para dar valores cercanos a cero de la integral.

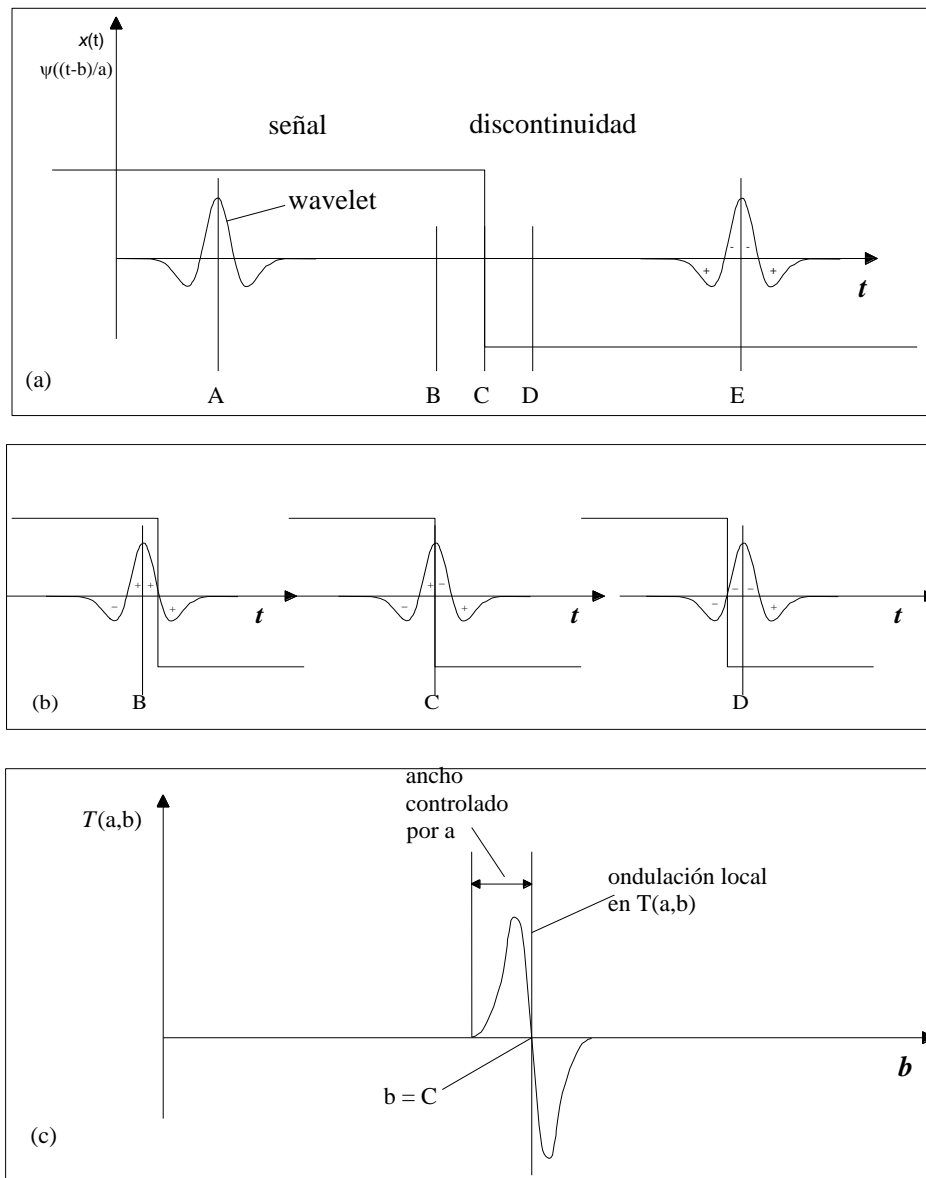


Figura 1.5. Esquema ilustrado de la wavelet en una señal discontinua.

Por lo tanto, como la wavelet atraviesa la discontinuidad hay primero valores positivos y luego valores negativos al regreso por la integral transformada. Estos valores son

localizados en la vecindad de la discontinuidad. Esto se ilustra en la Figura 1.5c, en la cual podemos ver una ondulación $T(a,b)$ centrada en la discontinuidad de la señal. El ancho de esta onda en $T(a,b)$ es controlada por el ancho de la wavelet a , es decir, directamente proporcional a ella. En una wavelet asimétrica, pasando al otro lado del borde como la mostrada en la Figura 1.5, se puede ver que $T(a,b)$ vs b tiene la forma de una protuberancia con un ancho proporcional a la escala a de la wavelet. Si estuviéramos usando la primera derivada de la función Gaussiana como una wavelet, la protuberancia sería en forma Gaussiana.

1.7 Transformada wavelet inversa

La transformada inversa wavelet se define por:

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (1.17)$$

Esto permite a una señal original ser recuperada de la WT, integrando sobre todas las escalas y ubicaciones, a y b . Para la transformada inversa, la función original wavelet se utiliza en vez de su conjugada. Si limitamos la integración sobre un rango de escalas a en vez de todas las escalas a , podemos llevar a cabo un filtrado de la señal original. La transformada compuesta de la señal muestra las componentes de las formas de onda de las escalas a_1 y a_2 :

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a^*}^{\infty} T(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (1.18)$$

La reducción en el ruido de las componentes de alta frecuencia en la señal reconstruida es evidente el aumento de valor de la escala a . Este método de reducción de ruido simple es conocido como escala–umbral dependiente.

1.8 Energía de la señal: energía wavelet base y espectro de potencia

El contenido total de energía de una señal $x(t)$, se define como la integral de la magnitud al cuadrado:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2 \quad (1.19)$$

Esta ecuación contiene energía finita que puede ser útil. Ya hemos encontrado esta expresión que es la ecuación (1.7), donde encontramos la energía de la función Mexican Hat (sustituyendo $x(t)$ por $\psi(t)$). La contribución relativa de la energía contenida en la señal en una escala específica a y localización b , esta dada por la función de densidad de energía de la wavelet en dos dimensiones:

$$E(a,b) = |T(a,b)|^2 \quad (1.20)$$

Una gráfica de $E(a,b)$ se conoce como un escalograma (análogo al espectrograma, de la superficie densidad de energía en la transformada de Fourier). En la práctica, todas las funciones que son diferentes de $|T(a,b)|^2$ sólo por un factor constante de multiplicación, también son llamadas escalogramas, por ejemplo $|T(a,b)|^2 / C_g$, $|T(a,b)|^2 / C_g f_c$, etc. El escalograma puede estar integrado a través de a y b para recuperar la energía total en la señal, usando una constante de admisibilidad C_g , de la siguiente manera:

$$E = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |T(a,b)|^2 \frac{da}{a^2} db \quad (1.21)$$

La Figura 1.6(a)-(c) muestra una señal experimental $x(t)$, con la WT asociada, $T(a,b)$ y escalograma $E(a,b)$, donde se usa la wavelet Mexican Hat en la transformación de la señal. El escalograma, Figura 1.6c es muy similar en forma a la gráfica de la WT. Al usar una wavelet real como el escalograma que es sólo la magnitud al cuadrada de los valores de la WT. Para las wavelets complejas podemos ver el modulo, la fase y separar la parte real de la compleja. De la superficie del escalograma sobresale la ubicación y escala de las características de energía dominante dentro de la señal.

La contribución relativa al contenido total de la energía dentro de la señal en una escala específica a , que es la escala dependiente de la distribución de energía:

$$E(a) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} |T(a,b)|^2 db \quad (1.22)$$

El máximo en $E(a)$ se alcanza dentro de las escalas de energía dominantes dentro de la señal. En la Figura 1.6d se grafica $E(a)$ contra a por segmentos de la señal de la Figura 1.6a. La gráfica muestra las dos escalas dominantes dentro de la señal, que se conectan con el régimen dominante oscilatorio de la señal experimental original.

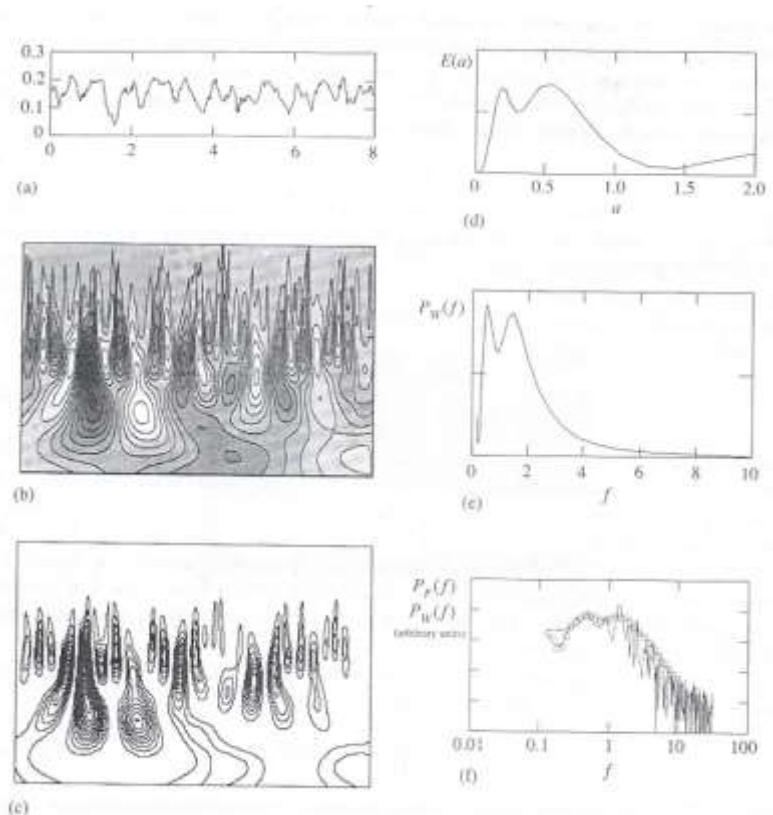


Figura 1.6. Densidad espectral y espectro de potencia de la wavelet.

Podemos transformar la escala dependiente del espectro de energía de la señal $E(a)$, a una frecuencia dependiente del espectro de energía de la wavelet $E_w(f)$ en orden de comparación directamente con el espectro de energía de Fourier de la señal $E_F(f)$. Para hacer esto, debemos transformar la escala a de la wavelet (que puede ser interpretados como un período temporal o espacial representativo para los datos físicos) a una frecuencia característica de la wavelet. Una frecuencia característica más usada en la práctica es el centro de passband del espectro de la wavelet. También se puede usar otra frecuencia representativa de la wavelet madre como la frecuencia pico

máxima espectral f_p , o la frecuencia central f_0 , siendo válidas. Observando la Figura 1.3, las componentes espectrales son inversamente proporcionales a la dilatación $f \propto 1/a$, la frecuencia característica asociada con una wavelet en una escala arbitraria es:

$$f = \frac{f_c}{a} \quad (1.23)$$

donde el centro del filtro passband de la wavelet madre, f_c es una escala constante y f es la frecuencia representativa o característica para la wavelet de escala a .

Por lo tanto, para esta wavelet tenemos $f = 0.251/a$ esto es porque los picos en el dibujo de la transformada de la sinusoidal en la Figura 1.7 ocurrió alrededor de 0.25 de ese periodo $p(=1/f)$. Usando la ecuación (1.23), podemos asociar la escala dependiente de energía $E(a)$, en la frecuencia passband de la wavelet. También podemos ver las ecuaciones (1.21) y (1.22) el total de energía en la señal dada por:

$$E = \int_0^{\infty} E(a) \frac{da}{a^2} \quad (1.24)$$

Podemos poner esta ecuación en términos de la frecuencia passband haciendo el cambio de variable $f = f_c/a$. La relación entre las derivadas es $da/a^2 = -df/f_c$ y después de modificada intercambiamos los límites con signo negativo, quedando:

$$E = \int_0^{\infty} E_w(f) df \quad (1.25)$$

donde definimos $E_w(f) = E(a)/f_c$ para $f = f_c/a$, y los correspondientes subíndices de las diferencias de la wavelet de su homóloga de Fourier. La gráfica de la energía de la wavelet, $E_w(f)$ contra f (el espectro de energía wavelet) igual a la energía de la señal total y se puede comparar directamente con el espectro de energía de Fourier $E_F(f)$ de la señal. Recordar que $E_F(f)$ es el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier de la señal.

De la ecuación (1.22), vemos que la energía total en la señal está dada por:

$$E = \frac{1}{C_g f_c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |T(f, b)|^2 df db \quad (1.26)$$

donde $T(f,b)=T(a,b)$ para $f = f_c/a$. Podemos ver también que la superficie de la densidad de energía en el plano de tiempo-frecuencia, definido por $E(f,b)=|T(f,b)|^2 / C_g f_c$, contiene un volumen igual al total de la energía de la señal:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} E(f,b) df db \quad (1.27)$$

Esta superficie de la densidad de energía puede ser comparada directamente con la superficie de la transformada de Fourier (espectrograma). La representación de la escala de tiempo del escalograma $E(a,b)$ y la escala de la distribución de energía $E(a)$, no se acercan a la energía de la señal y son proporcionales a la energía de la señal, mientras que su contraparte en el tiempo-frecuencia, $E(f,b)$ y $E_w(f)$ si se acercan. Sin embargo, los picos en $E(a,b)$ y $E(a)$ corresponden a la parte con más energía de la señal, que hacen los máximos picos en $E(f,b)$ y $E(f)$. Podemos usar tanto el escalograma y la escala dependiente de la distribución de energía para determinar la distribución relativa de la escala de la wavelet. Los escalogramas son normalmente graficados en una escala a logarítmica en el eje. Como $f = f_c/a$ y $\log(f) = \log(f_c) - \log(a)$, la gráfica de $|T(f,b)|^2$ usa una escala logarítmica en la frecuencia. En la Figura 1.6c contiene $|T(a,b)|^2$ con escala a logarítmica decreciendo hacia la parte de arriba de la gráfica, también puede ser interpretada como la gráfica de $|T(f,b)|^2$ con frecuencias logarítmicamente crecientes hacia la parte de arriba de la gráfica. En la literatura ambas representaciones son válidas.

Si la señal de la Figura 1.6a fuera infinitamente larga, podemos ver que su energía será infinitamente grande. Sin embargo, en la práctica las señales experimentales son generalmente de longitud finita suficiente para un análisis de la estadística de la señal. Por lo tanto, en la práctica los espectros de potencia son más usados para caracterizar señales experimentales de longitud finita. El espectro de potencia es simplemente la energía del espectro dividida entre el periodo de tiempo de la señal en estudio. Por lo tanto, el área bajo el espectro de potencia da la energía media por unidad de tiempo de la señal. Por ejemplo, para una señal de longitud τ , el espectro de potencia de Fourier y wavelet son respectivamente:

$$P_F(f) = \frac{1}{\tau} E_F(f) \quad (1.28)$$

$$P_W(f) = \frac{1}{\tau} E_W(f) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |T(f, b)|^2 db \quad (1.29)$$

La Figura 1.6e muestra la densidad espectral wavelet $P_W(f)$, para la señal experimental de la Figura 1.6a. La gráfica de la densidad espectral de potencia de la wavelet contiene los mismos picos máximos en la escala de la distribución de la gráfica de la Figura 1.6d, pero en orden contrario como el eje horizontal de la frecuencia es el inverso reescalado de la escala del eje. La zona debajo de la gráfica $P_W(f)$ es igual a la potencia de la señal. La Figura 1.6f contiene el espectro de potencia de la wavelet; esta vez se usan ejes logarítmicos y el correspondiente espectro de potencia de Fourier esta también graficado para su comprobación. La gráfica logarítmica de la potencia espectral es comúnmente usada (ejemplo; el espectro de la turbulencia en fluidos) donde, por ejemplo, la forma de la ley de potencia escalada es la esperada o cuando los componentes espectrales abarcan muy diferentes órdenes de magnitud.

Debido a la distribución de frecuencia dentro de cada wavelet, resulta el espectro de potencia de la wavelet encimado con el espectro de Fourier. Sin embargo, el espectro de la wavelet es más que sólo una versión encimada del espectro de Fourier, cuando la misma forma de la wavelet es un parámetro importante en el análisis de la señal. Algunas wavelets tendrán una mejor correlación con señales de características específicas que otras, así que se acentuarán estas características en el resultado del espectro. También se usa el centro de passband de la wavelet como la frecuencia representativa, si se usa otra frecuencia característica de la wavelet entonces afectara el resultado del espectro de potencia de la wavelet de la señal, cualquier estrechamiento o alargamiento mientras conservamos la misma forma en conjunto y la misma potencia respectivamente, la energía).

Finalmente, la varianza de la wavelet, definida por la WT continua como:

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |T(a, b)|^2 db \quad (1.30)$$

es usada en la práctica para determinar las escalas dominantes en la señal. Otra vez asumimos que τ es de una longitud suficiente para obtener un cálculo aproximado razonable de $\sigma^2(a)$. Podemos ver que esta expresión es muy similar a la escala dependiente de la distribución de energía de la ecuación (1.22) y la función de densidad

espectral de potencia de la ecuación (1.29), siendo diferentes ambas ecuaciones únicamente por los factores de multiplicación constantes.

1.9 Transformada wavelet en términos de la transformada de Fourier

Como vimos en la ecuación (1.15), la WT es la convolución de la señal con la función wavelet. Por lo tanto, podemos emplear el teorema de la convolución expresado en términos de la WT, como productos de la transformada de Fourier de la señal $\hat{x}(f)$, y la wavelet $\hat{\psi}_{a,b}(f)$, de la siguiente manera:

$$T(a,b) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}_{a,b}^*(f) df \quad (1.31)$$

La transformada de Fourier de la dilatación y translación de la wavelet es:

$$\hat{\psi}_{a,b}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-i(2\pi f)t} dt \quad (1.32a)$$

Haciendo la substitución $t' = (t-b)/a$ (por lo tanto $dt = a dt'$) obtenemos:

$$\hat{\psi}_{a,b}(f) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t') e^{-i(2\pi f)(at'+b)} a dt' \quad (1.32b)$$

Separando la parte constante de la función exponencial y usando los números primos de t' conseguimos:

$$\hat{\psi}_{a,b}(f) = \sqrt{a} e^{-i(2\pi f)(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i(2\pi a f)(t)} dt \quad (1.32c)$$

La expresión de la integral en la ecuación anterior, es simplemente la transformada de Fourier de la wavelet en frecuencia re-escalada. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (1.32b) como:

$$\hat{\psi}_{a,b}(f) = \sqrt{a} \hat{\psi}(af) e^{-i(2\pi f)(b)} \quad (1.33)$$

La transformada de Fourier en función de la wavelet conjugada es entonces simplemente:

$$\hat{\psi}_{a,b}^*(f) = \sqrt{a} \hat{\psi}^*(af) e^{i(2\pi f)b} \quad (1.34)$$

Por lo tanto la ecuación (1.30) puede ser escrita en forma ampliada como:

$$T(a,b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(af) e^{i(2\pi f)b} df \quad (1.35)$$

podemos ver la forma inversa de la transformada de Fourier. Esto es un resultado particularmente útil cuando usamos aproximaciones discretas de la transformada continua wavelet con datos de señales largas, como la transformada rápida de Fourier (FFT) el algoritmo se emplea para facilitar el cálculo rápido de la WT y su inversa. La transformada de Fourier de la función wavelet $\hat{\psi}_{a,b}(f)$, es usualmente conocida en forma analítica y por lo tanto no necesita ser calculada usando una FFT. Solamente se requiere una FFT de la señal original $\hat{x}(f)$. Entonces, hacer $T(a,b)$, la inversa de FFT del producto de la señal de la transformada de Fourier y la WT para cada escala a requerida y multiplicando el resultado por \sqrt{a} . La equivalencia entre el tiempo de convolución y las integrales de Fourier para determinar $T(a,b)$ se representa en la Figura 1.7.

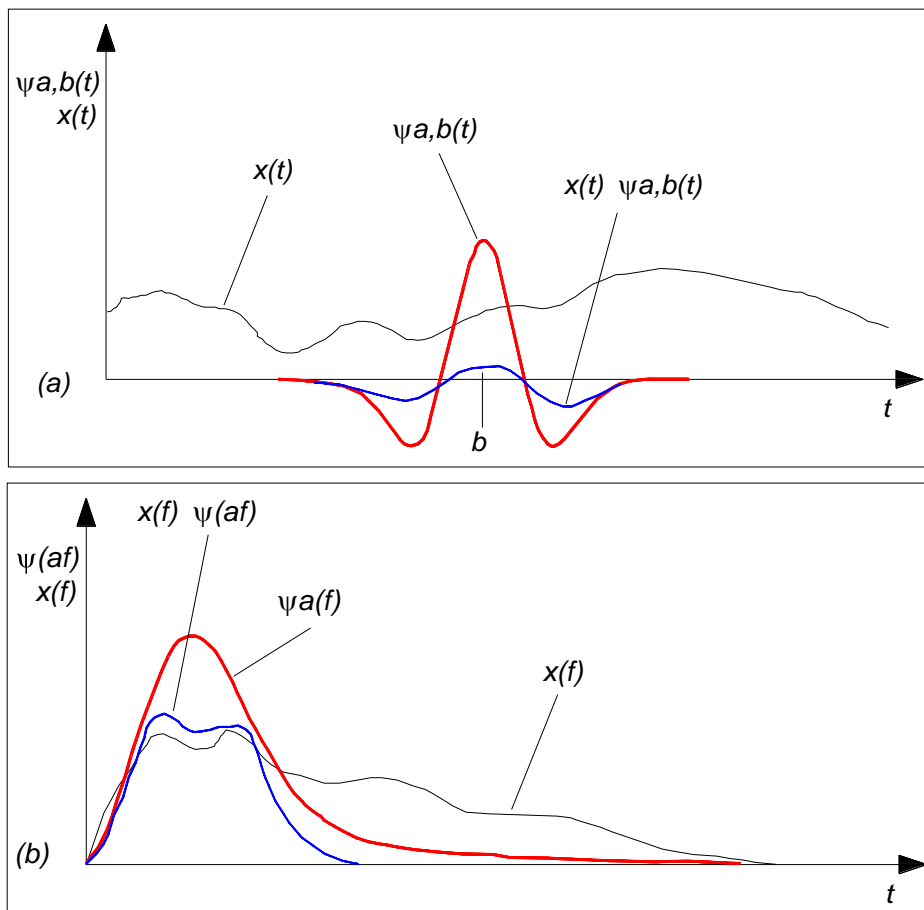


Figura 1.7. Representación de la WT en el tiempo y frecuencia.

La naturaleza de bandpass de la wavelet se ve en la Figura 1.7b. La transformación inversa ecuación (1.17), puede ser escrita de forma similar en términos de una función inversa de Fourier.

1.10 Wavelets complejas: Wavelet Morlet

Hasta ahora hemos usado la wavelet Mexican Hat para ilustrar muchas de las características de la WT. Consideraremos las wavelets que tienen ambas partes tanto real como imaginaria. Las wavelets complejas o analíticas tienen transformada de Fourier cuando son cero para frecuencias negativas. Podemos separar las componentes de fase y amplitud dentro de la señal. Podemos hacer una versión compleja de la wavelet Mexican Hat tomando su transformada de Fourier, fijando las componentes de frecuencia negativa a cero en el dominio de Fourier y luego llevamos una transformada inversa de Fourier para conseguir la wavelet compleja. Sin embargo, la wavelet Morlet es:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} \left(e^{i2\pi f_0 t} - e^{-(2\pi f_0)^2/2} \right) e^{-t^2/2} \quad (1.36)$$

donde f_0 es la frecuencia central de la wavelet madre. El segundo término en los corchetes se conoce como el término de corrección, la senoide compleja del primer término corrige la media diferente a cero. En la práctica se hace insignificante para valores de $f_0 \gg 0$ y pueden ser ignorados, en tal caso, la wavelet Morlet puede ser escrita en una forma más simple:

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{i2\pi f_0 t} e^{-t^2/2} \quad (1.37)$$

Factor de
normalización

Senoide
compleja

Función campana
de Gauss

Esta wavelet es sólo una onda compleja de la envolvente Gaussiana. Observando la ecuación (1.37) junto con la Figura 1.20(a). La forma de onda compleja sinusoidal en términos de $e^{i2\pi f_0 t} (= \cos(2\pi f_0 t) + i \text{sen}(2\pi f_0 t))$. La envolvente de Gauss $e^{-t^2/2}$ tiene desviación estándar unitaria y confina la forma de onda senoide compleja. La Figura 3.8a muestra la parte real e imaginaria de la wavelet Morlet junto con su envolvente Gaussiana. Podemos ver que la senoide real e imaginaria difiere en la fase por un cuarto del período. El término $\pi^{1/4}$ es un factor de normalización que asegura que la wavelet tenga energía unitaria. Observar que la función de la ecuación (1.37) no es

realmente una wavelet cuando tiene una media diferente de cero, por ejemplo el término frecuencia cero corresponde al espectro de energía diferente de cero. Sin embargo, puede ser usada en la práctica $f_0 \gg 0$ con error mínimo.

La transformada de Fourier de la wavelet Morlet es:

$$\hat{\psi}(f) = \pi^{1/4} \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}(2\pi f - 2\pi f_0)^2} \quad (1.38)$$

que tiene la forma de una función Gaussiana desplazada a lo largo del eje de la frecuencia por f_0 . La frecuencia central del espectro Gaussiano es elegida para que sea la frecuencia característica de la wavelet Morlet analítica en vez de la frecuencia passband en general, que usamos antes para la wavelet Mexican Hat.

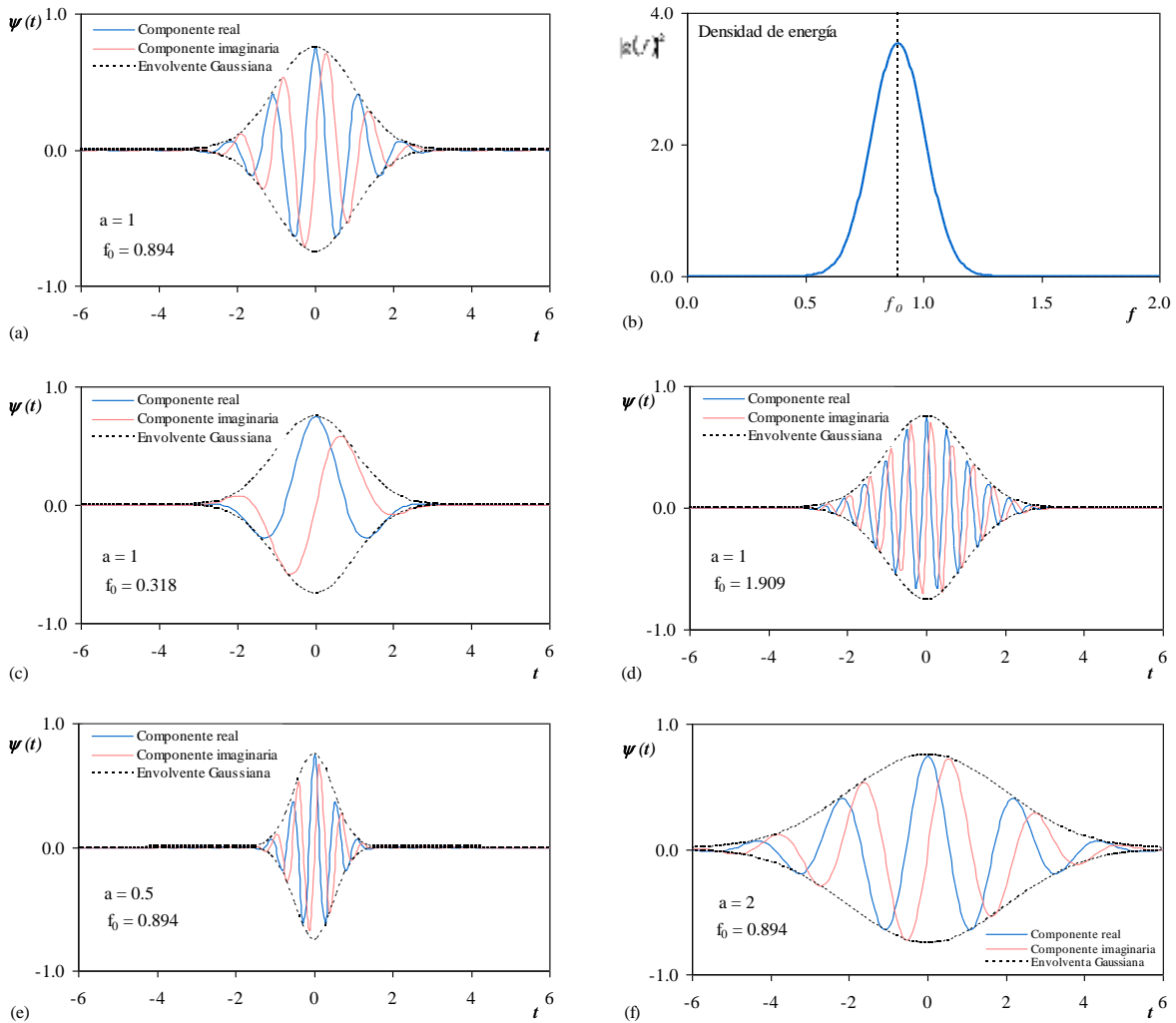


Figura 1.8. Wavelet Morlet.

El espectro de energía (el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier) dado por:

$$|\hat{\psi}(f)|^2 = 2\pi^{1/2} e^{-(2\pi f - 2\pi f_0)^2} \quad (1.39)$$

La integral de ésta da la energía de la wavelet Morlet, que es igual a la unidad de acuerdo con la ecuación (1.37). El espectro de energía de la wavelet Morlet se muestra en la Figura 1.8b. La frecuencia central f_0 es la frecuencia de la senoide compleja y su valor determina el número de “efectividad” o “significado” contenida en la forma de onda senoidal con la envolvente, ejemplo aquel que no está muy cerca de la amplitud cero. La frecuencia angular es $\omega_0 = 2\pi f_0$. Para valores de ω_0 menores de 5 ($f_0 < 8$) en la ecuación de la wavelet Morlet (1.36) debe ser usada cuando la función wavelet simplificada (1.37), que contiene una media diferente a cero. La Figura 1.8c y d se muestra a la wavelet Morlet con f_0 igual a 0.318 y 1.909 respectivamente, y se muestra que el numero efectivo de oscilaciones contenidas dentro de la ventana Gaussiana aumentan con f_0 .

Aplicando la dilatación y traslado en la wavelet Morlet, se reemplaza t por $(t-b)/a$ como se hizo para la wavelet Mexican Hat con la ecuación (1.11). Su forma es entonces:

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{i2\pi f_0[(t-b)/a]} e^{-\frac{1}{2}[(t-b)/a]^2} \quad (1.40)$$

En la Figura 1.8e y f se muestran las wavelets Morlet con escalas a de 0.5 y 2, respectivamente. Podemos ver directamente de la ecuación (1.40) que la desviación estándar de la envolvente de Gauss sobre el eje del tiempo es, un factor, simplemente igual a a . Las Figuras 1.8e y f muestran el estiramiento y reducción de la wavelet con la escala a .

1.11 Transformada wavelet, transformada de Fourier en corto tiempo y cajas de Heisenberg

En esta sección miraremos brevemente las características tiempo-frecuencia de la WT comparada con la transformada de Fourier en corto tiempo (Short Time Fourier Transform, STFT). Consideraremos casos específicos de la WT Morlet y Gabor, en ambas se emplea una ventana Gaussiana.

La wavelet Morlet tiene una forma muy similar a la función usada para la STFT dentro de una ventana Gaussiana. La diferencia importante es que, para la WT Morlet, adaptamos la escala de la ventana y cerramos la senoide juntas, mientras que para la STFT

mantenemos constante la longitud de la ventana y la escala solamente en la senoide cerrada. La wavelet puede localizarse en tiempo para una duración breve, ejemplo, alta frecuencia, fluctuaciones, etcétera. Sin embargo, hay una extensión asociada de la distribución asociada a la frecuencia con wavelets de corta duración. A la inversa, hay una extensión en la solución temporal en frecuencias bajas; esto se ilustra en la Figura 1.9, en medio de la figura contiene un esquema de una wavelet Morlet (parte real solamente) en las tres escalas.

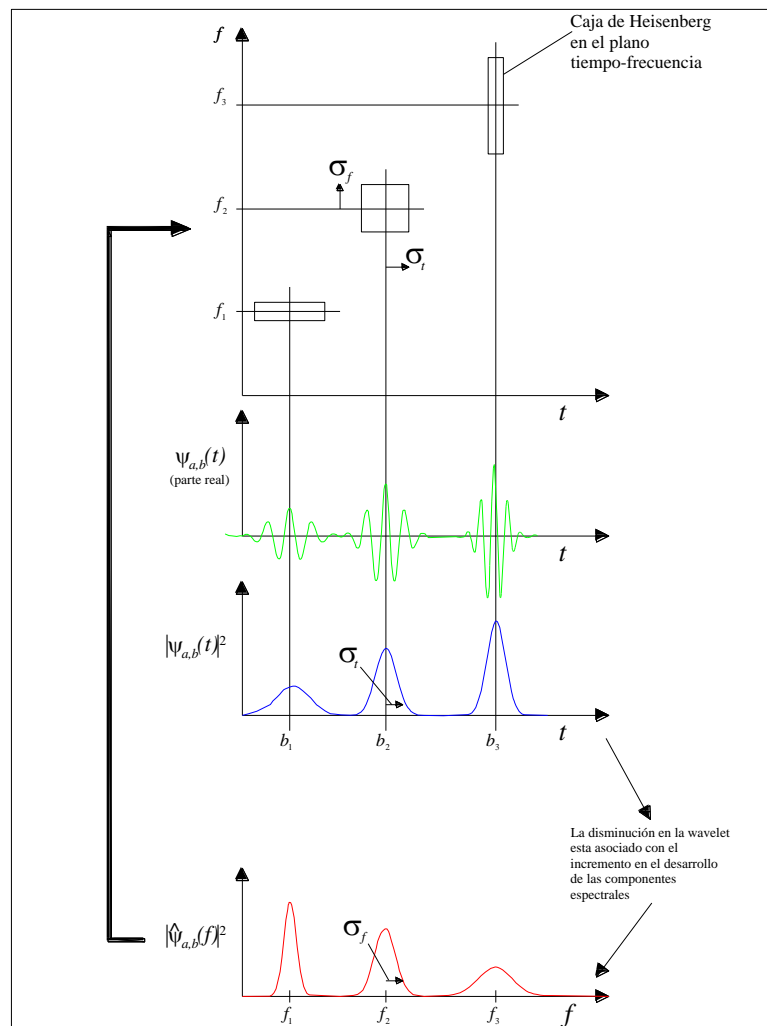


Figura 1.9. Cajas de Heisenberg en el plano tiempo-frecuencia.

La densidad de energía de las wavelets son graficadas bajo el dominio del tiempo y frecuencia, respectivamente $|\Psi_{a,b}(t)|^2$ y $|\hat{\Psi}_{a,b}(f)|^2$. Podemos ver en la figura que, cuando la wavelet se contrae en el tiempo, llega a componerse de altas frecuencias con una extensión más amplia. La extensión de $|\Psi_{a,b}(t)|^2$ y $|\hat{\Psi}_{a,b}(f)|^2$ pueden cuantificarse usando

σ_t y σ_f respectivamente de la desviación estándar alrededor de sus medias respectivamente. Podemos representar la extensión de las wavelets en el plano tiempo-frecuencia dibujando cajas en el lado largo de $2\sigma_t$ a $2\sigma_f$. Esto se muestra en la parte de arriba de la Figura 1.9.

Estas cajas son conocidas como cajas de Heisenberg, del principio de incertidumbre de Heisenberg, que nos dice: el mínimo de área que estas cajas pueden tener. Específicamente, el producto $\sigma_t\sigma_f$ debe ser más grande o igual que $1/4\pi$, por lo tanto, una caja de Heisenberg es $1/\pi$. Es decir, para la función ventana Guassiana usada en la transformada Morlet y la STFT considerada, $\sigma_t\sigma_f$ es exactamente igual a $1/4\pi$ como la distribución Gaussiana es la forma de ventana óptima.

1.12 Wavelets en dos o más dimensiones

Las dos dimensiones de la wavelet Mexican Hat en un plano coordenado t_1, t_2 esta dado por:

$$\psi(t) = (2 - |t|^2) e^{-|t|^2/2} \tag{1.58}$$

donde t es la coordenada del vector (t_1, t_2) y $|t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$. La Figura 1.10 muestra un par de wavelets Mexican Hat bidimensionales sobre el plano. La transformada wavelet bidimensional es:

$$T(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) x(t) dt \tag{1.59}$$

donde b es la coordenada vectorial (b_1, b_2) . Notar que al añadir la función $w(a)$ para hacer $1/a$ requiere conservar su energía a lo largo de las escalas para las wavelets bidimensionales.

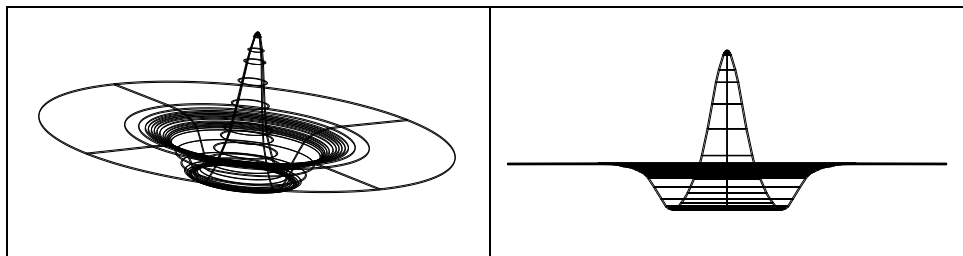


Figura 1.10. Wavelet Mexican Hat bidimensional.

También la coordenada vectorial $t = (t_1, t_2)$, es posible especificar dos espacios (en vez de temporal) coordenados en la práctica, donde la función $x(t)$ puede ser por ejemplo superficies.

La transformada wavelet inversa correspondiente es:

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{a} g\left(\frac{t-b}{a}\right) T(a,b) \frac{da}{a^3} db \quad (1.60)$$

La WT en más dimensiones D , son también posibles sólo con extender la longitud de los vectores t y b para componentes D . Para preservar la energía en la transformación D-dimensional, la función añadida es $1/a^{D/2}$. Por lo tanto, D-dimensional de la wavelet es definida por:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{a^{D/2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1.61)$$

La transformada en D-dimensiones se hace:

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}^*(t) x(t) dt \quad (1.62)$$

inversa

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \psi_{a,b}(t) T(a,b) \frac{da}{a^{D+1}} db \quad (1.63)$$

y la energía de la señal puede ser encontrada como:

$$E = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |T(a,b)|^2 \frac{da}{a^{D+1}} db \quad (1.64)$$

CAPÍTULO 2: TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

En este capítulo, se trata la transformada wavelet discreta –Discrete Wavelet Transform (DWT)-, que bajo ciertos criterios permite reconstruir una señal original usando sumatorias infinitas de los coeficientes de la wavelet discreta en vez de integrales continuas (como se requiere en la CWT). Esto conduce a una transformada wavelet rápida para su cálculo así como para su inversa. Se verá cómo llevar a cabo una transformada wavelet discreta sobre señales de entrada discontinuas de duración finita: que son la clase de señales que se presentan en la práctica. También se consideran las wavelets bi-ortogonales de poco tiempo, que vienen en pares, y en el espacio se usa la transformada wavelet discreta bidimensional.

1.13 Marcos y bases de la wavelet ortogonal

1.13.1 Marcos

En la wavelet continua la función fue definida con escala a y localización b como:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.1)$$

En esta sección la transformada wavelet de una señal de tiempo continuo $x(t)$, se considera que los parámetros son valores discontinuos en la dilatación y translación, a y b .

Una manera natural de probar los parámetros a y b es usar una discretización logarítmica de la escala a y vincularlo con el tamaño de los pasos tomados entre las ubicaciones b , haciendo que b se mueva a a en los pasos discontinuos para cada ubicación b , que es proporcional a la escala a . Esta clase de discretización de la wavelet tiene la forma:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (2.2)$$

donde los m y n controlan la dilatación y translación de la wavelet respectivamente; a_0 es un parámetro fijo específico del paso de la dilatación teniendo un valor mayor que 1, y b_0 es el parámetro de localización que debe ser mayor que cero. Los parámetros de control m y n son enteros, tanto positivos como negativos. Puede verse que el tamaño

de la ecuación de translación de pasos $\Delta b = b_0 a_0^m$, es directamente proporcional a la escala de la wavelet a_0^m .

La transformada wavelet de una señal continua $x(t)$, usa wavelets discontinuas de la forma de ecuación (2.2)

$$T_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{a_0^{m/2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0) dt \quad (2.3a)$$

también puede ser expresada como el producto interno

$$T_{m,n} = \langle x, \psi_{m,n} \rangle \quad (2.3b)$$

donde $T_{m,n}$ son los valores de la transformada wavelet discontinua sobre una cuadrícula de localización y escala índice m,n . Para la transformada wavelet discontinua, los valores $T_{m,n}$ son conocidos como los coeficientes de la wavelet o coeficientes de detalle. Para determinar como “buena” la representación de la señal en el espacio de la wavelet que usa esta descomposición, se puede recurrir a la teoría de los marcos de la wavelet, que utiliza un marco general para estudiar las propiedades de las wavelets discontinuas. Los marcos de la wavelet son construidos por parámetros discretamente de una muestra de tiempo y escala de una transformada wavelet continua como se vio anteriormente. La familia de funciones de la wavelet que constituyen un marco, es de forma que la energía de los coeficientes de la wavelet está dentro de cierta extensión limitada de la energía de la señal original.

$$AE \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |T_{m,n}|^2 \leq BE \quad (2.4)$$

donde $T_{m,n}$ son los coeficientes de la wavelet discontinua, A y B son los límites del marco, y E es la energía de la señal original dada por la ecuación (1.19):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2, \text{ donde la señal } x(t), \text{ es de energía finita. Los valores de los límites}$$

del marco A y B dependen de ambos parámetros a_0 y b_0 elegidos para el análisis y la función de la wavelet usada. Para más detalles para determinar A y B ver Daubechies (1992). Si $A=B$, el marco es “ajustado”. Tales marcos tienen una fórmula de reconstrucción simple de una serie infinita

$$x(t) = \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.5)$$

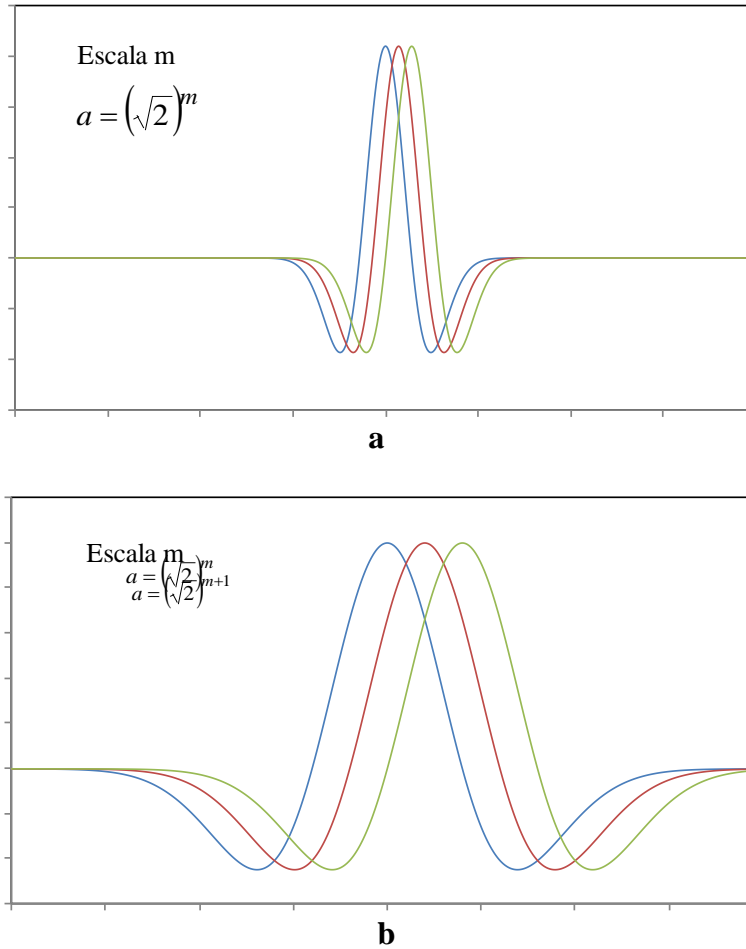


Figura 2.1. Wavelet Mexican Hat ajustada al marco con $a_0 = \sqrt{2}$ y $b_0 = 0.5$

Un marco ajustado con $(A=B) > 1$ es redundante, con A como una medida de la redundancia. Sin embargo, cuándo $A=B=1$ la familia de la wavelet definida por el marco, constituye una base ortonormal. Si A es diferente de B , la fórmula de reconstrucción puede ser escrita como:

$$x'(t) = \frac{2}{A+B} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.6)$$

donde $x'(t)$ es la reconstrucción que difiere de la señal original $x(t)$, por un error que depende de los valores de los límites del marco. El error es pequeño para fines

prácticos, cuando la proporción B/A está al borde de la unidad. Para el caso de la wavelet Mexican hat, usando $a_0 = 2^{1/\nu}$; dónde $\nu \geq 2$ y $b_0 \leq 0.5$, el marco es ajustado. Por ejemplo, el marco $a_0 = 2^{1/2}$ y $b_0 = 0.5$ de la Mexican hat $A=13.639$ y $B=13.673$, proporción de B/A igual a 1.002. Encerrando esta proporción a la unidad, el marco es más ajustad. Por lo tanto, la discretización de una wavelet Mexican hat se transforma usando esta escala y parámetros de localización, que dan como resultado una representación muy obsoleta de la señal, pero con muy poca diferencia entre $x(t)$ y $x'(t)$. El marco semi-ajustado de la wavelet Mexican hat con los parámetros $a_0 = 2^{1/2}$ y $b_0 = 0.5$ se presentan en la Figura 2.1 para dos escalas consecutivas m y $m+1$, en tres ubicaciones consecutivas, $n = 0,1$ y 2 .

1.13.2 Escala de la malla dyadic y transformada wavelet ortonormal

Los parámetros comúnmente usados en la wavelet discontinua de a_0 y b_0 son 2 y 1 respectivamente. El arreglo de la malla dyadic es una potencia de dos escalas logarítmicas tanto en la dilatación y translación. La malla dyadic es la discretización más simple y más eficiente para propósitos prácticos y lleva entre si la construcción de una base ortonormal de la wavelet. Al sustituir $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$ en la ecuación (2.2), la malla de dyadic de la wavelet puede escribirse como:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t - n2^m}{2^m}\right) \quad (2.7a)$$

más compactamente, como:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n) \quad (2.7b)$$

Teniendo la misma notación que la wavelet general discontinua de la ecuación (2.2). Usaremos $\psi_{m,n}(t)$ para expresar únicamente a la malla dyadic escalada con $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$.

Las mallas discretas de la wavelet son comúnmente ortonormales a otras y normalizadas, para tener energía unitaria. Esto se expresa como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \psi_{m',n'}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = m' \text{ y } n = n' \\ 0 & \text{para los demás} \end{cases} \quad (2.8)$$

En otras palabras, el producto de cada wavelet con otros sistemas dyadic son cero. Estas medias que guardan la información en un coeficiente de la wavelet $T_{m,n}$ no se repiten en otro lugar y permite la regeneración completa de la señal original sin la redundancia. De la ecuación (2.8), cuando $m = m'$ y $n = n'$, la integral de la energía de la función wavelet es igual a la unidad. Las wavelets ortonormales tienen marcos limitados $A = B = 1$ y la correspondiente familia de la wavelet es una base ortonormal. Una base es un arreglo de vectores, de la cual puede definirse la señal completamente $x(t)$. Una base ortonormal tiene componentes vectoriales que, además de ser capaz de definir la señal totalmente, son perpendiculares entre sí.

Usando la wavelet de la malla dyadic de la ecuación (2.7a), la transformada wavelet discreta (DWT) puede ser escrita como:

$$T_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{m,n}(t) dt \quad (2.9)$$

Escogiendo una base de la wavelet ortonormal $\psi_{m,n}(t)$, podemos reconstruir la señal original en términos de los coeficientes de la wavelet $T_{m,n}$, usando la transformada wavelet discreta inversa de la siguiente manera:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.10a)$$

En realidad es la ecuación (2.5), con $A=1$ debido a la ortonormalidad de la wavelet elegida. La ecuación (2.10a) se puede escribir en términos del producto interno:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (2.10b)$$

donde la descomposición combinada y los procesos de reconstrucción son: ir de, $x(t)$ a $T_{m,n}$ vía producto interno $\langle x, \psi_{m,n} \rangle$ y regresando a $x(t)$ vía sumatoria infinita. En la adición, como $A = B$ y $A = 1$, podemos ver que en la ecuación (2.4), la energía de la señal puede ser expresada como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |T_{m,n}|^2 \quad (2.11)$$

Es importante hacer la aclaración que la diferencia entre la DWT y las aproximaciones discretizadas de la CWT para su aplicación práctica, involucra una aproximación discreta de la integral transformada, calculada sobre una malla discreta de escala a y localización b . La transformada wavelet inversa continua también se calcula como una aproximación discreta. Como se acerca a una aproximación de la señal original, se recupera dependiendo de la solución de la discretización usada principalmente. Por otro lado, para la DWT, definida en la ecuación (2.9), la transformada integral esencial continua puede ser determinada únicamente sobre una malla de escala a y localización b . Se pueden sumar los coeficientes de la DWT (2.10a) para conseguir exactamente la señal original.

1.13.3 Función de escala y representación multi-solución

Las wavelets discretas ortonormales dyadic son asociadas con las funciones de escala y sus ecuaciones de dilatación. La función de escala se relaciona con la señal suavizada y tiene la misma forma que la wavelet, dada por:

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n) \quad (2.12)$$

Con la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,0}(t) dt = 1 \quad (2.13)$$

donde $\phi_{0,0}(t) = \phi(t)$ es a veces la función de escala padre o wavelet father.

Hay que recordar que la integral de la función wavelet es cero. La función de escala es ortogonal para las translaciones, pero no para las dilataciones, puede ser convolucionada con la señal y producir coeficientes de aproximación de la siguiente manera:

$$S_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_{m,n}(t) dt \quad (2.14)$$

De las últimas tres ecuaciones, podemos ver que los coeficientes de aproximación son los promedios simples ponderados de la señal continua factorizada por $2^{m/2}$. Los coeficientes de aproximación en una escala específica m son conocidos como la aproximación discreta de la señal en esa escala. Una aproximación continua de la señal en la escala m , puede ser generada sumando una secuencia de escalas de las funciones en esta escala, factorizada por una aproximación de coeficientes de la siguiente manera:

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m,n} \phi_{m,n}(t) \quad (2.15)$$

donde $x_m(t)$ es suave, versión de la señal $x(t)$ en el índice de escala m , en escalas pequeñas $m \rightarrow -\infty$.

La Figura 2.2(a) muestra una función de escala simple, un bloque de impulso, en la escala índice 0 y localización 0: $\phi_{0,0}(t) = \phi(t)$ -función padre- junto con dos dilataciones correspondientes en esa localización. Se ve que la convolución del bloque de impulso con una señal ecuación (2.14) resulta un promedio local añadido de la señal sobre la parte diferente a cero del impulso. La Figura 2.2(b) muestra un período de una onda senoidal $x(t)$ contenido dentro de una ventana. La Figura 2.2(c) muestra varias aproximaciones de la onda senoidal generada, usando las ecuaciones (2.14) y (2.15) con la función escalada arreglada en un rango de anchos, 2^0 a 2^7 . Las líneas verticales y las flechas en cada grafico muestran los anchos. La ecuación (2.14) calcula los coeficientes de aproximación $S_{m,n}$, mencionado anteriormente para un bloque simple de la función de escala, de ancho medio de la señal sobre el ancho de pulso. Los coeficientes de aproximación se usan en la ecuación (2.15) producen una aproximación de la señal que es sólo una secuencia de funciones de escala, sobre puesta cada factorización con su correspondiente coeficiente. Esto es obvio para el bloque natural de las aproximaciones de la señal. La aproximación en la escala de la ventana ($= 2^7$) es simplemente el promedio sobre toda la onda senoidal igual a cero. Cuando la escala disminuye, la aproximación se ve acercarse a la forma de onda original. Esta simple función de escala del bloque de impulso usada en este ejemplo se relaciona con la wavelet Haar.

Podemos representar una señal $x(t)$ usando una combinación de la serie de expansión, tanto de los coeficientes de aproximación como los coeficientes de la wavelet de la siguiente manera:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m_0,n} \phi_{m_0,n}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.16)$$

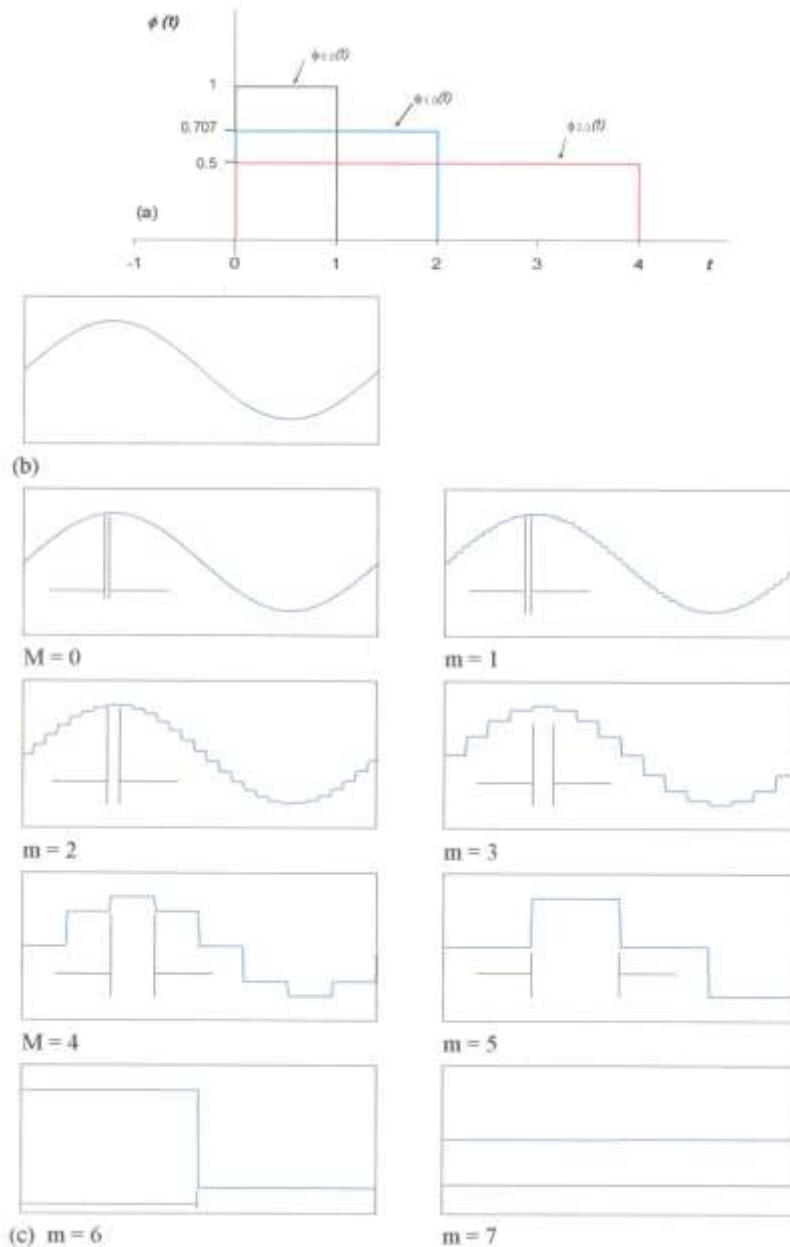


Figura 2.2. Aproximación suavizada de una senoide usando pulsos de bloques de una función de escala.

Podemos ver en esta ecuación que la señal continua original es expresada como una combinación de aproximación de sí misma, en el índice de escala arbitrario m_0 , añadiendo una sucesión de los detalles de la señal para escalas m_0 por debajo del infinito negativo. La señal en la escala m es:

$$d_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.17)$$

por lo tanto podemos escribir la ecuación (2.16) como:

$$x(t) = x_{m_0}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} d_m(t) \quad (2.18)$$

donde se puede mostrar que:

$$x_{m-1}(t) = x_m(t) + d_m(t) \quad (2.19)$$

nos dice lo siguiente: si añadimos el detalle de la señal a la aproximación en una escala arbitraria (índice m) a la aproximación, conseguimos la señal aproximada en un incremento de la solución (por ejemplo, en una escala pequeña, índice $m-1$). A esto se le llama una representación de multi-soluciones.

1.13.4 Wavelet Haar

La wavelet Haar es el ejemplo más simple de una wavelet ortonormal. La ecuación de escalamiento contiene solamente dos coeficientes de escalamiento diferentes de cero y se define por:

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) \quad (2.20)$$

es decir, sus coeficientes de escalamiento son $c_0 = c_1 = 1$. Los valores de los coeficientes, se obtienen resolviendo las ecuaciones (2.21) y (2.22) simultáneamente. La solución de la ecuación de escalamiento Haar es un bloque simple de pulso mostrado en la Figura 2.3(a) y definido como:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases} \quad (2.21)$$

Reordenando la secuencia de los coeficientes de acuerdo a la ecuación (2.25) podemos ver que corresponde a la ecuación de la wavelet Haar que es:

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1) \quad (2.22)$$

La wavelet Haar se presenta en la Figura 2.3(b) y se define como

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases} \quad (2.23)$$

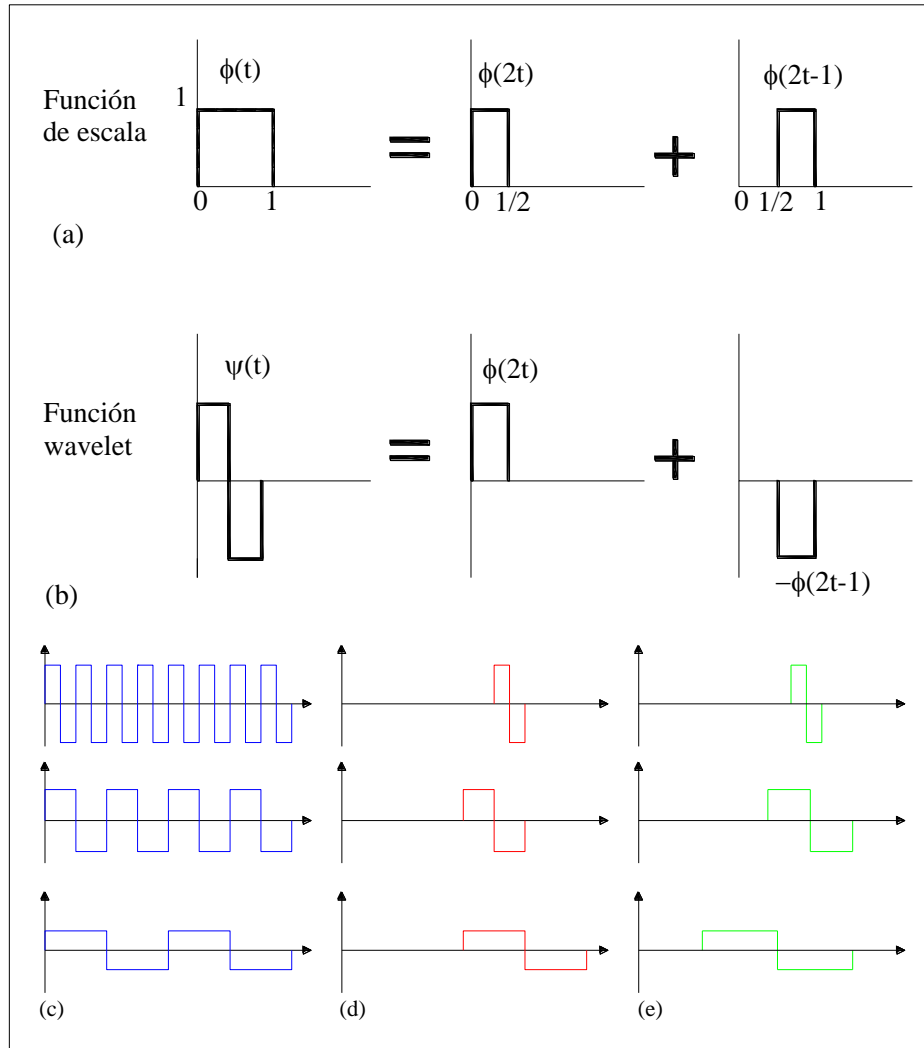


Figura 2.3. Wavelets ortonormales discretas.

La wavelet madre para el sistema de wavelet Haar $\psi(t) = \psi_{0,0}(t)$, formada por dos dilataciones unidas por bloques de pulso puestos entre sí sobre el eje del tiempo, con uno de ellos invertido. De la wavelet madre podemos formular el sistema de las wavelets Haar sobre una malla dyadic $\psi_{m,n}(t)$. Esto se ilustra en la Figura 2.3(e) para tres escalas consecutivas. La naturaleza ortogonal de la familia de las wavelets Haar en un sistema de malla dyadic se ve en la Figura 2.3(d), donde se puede ver que la parte positiva y negativa de la wavelet Haar en cualquier escala coinciden con una parte constante

(positiva o negativa) de la wavelet Haar en la escala mayor más próxima (y todas las subsecuentes escalas mayores). Además, las wavelets Haar con el mismo índice de escala m sobre una malla dyadic no se traslapan. Por lo tanto, la convolución de la wavelet Haar en la misma malla dyadic es cero. La Figura 2.3(e) muestra tres wavelets Haar que no están sobre una malla dyadic. Además, si estas wavelets se traslapan a lo largo de cada escala destruye la ortogonalidad.

Definitivamente, la wavelet Haar es de ancho finito sobre el eje del tiempo; es decir tiene un soporte compacto. Las wavelets, que tienen soporte compacto tienen un número finito de coeficientes de escala. No todas las wavelets ortonormales tienen soporte compacto. La Figura 2.3(f), muestra una wavelet Meyer que es ortonormal al soporte infinito, aunque, como con todas las wavelets, se localiza un decaimiento rápido de su pico central.

1.13.5 Transformada wavelet rápida (Fast Wavelet Transform, FWT)

De la ecuación (2.14), podemos ver que los coeficientes de aproximación en el índice de escala $m+1$ esta dado por:

$$S_{m+1,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi_{m+1,n}(t)dt \quad (2.24)$$

Usando la ecuación (2.27b) de la forma:

$$S_{m+1,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \phi_{m,2n+k}(t) \right] dt \quad (2.25)$$

re-escribiéndola como:

$$S_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi_{m,2n+k}(t)dt \right] \quad (2.26)$$

De la integral en corchetes se obtiene la aproximación de los coeficientes $S_{m,2n+k}$ para cada k . Podemos escribir esta ecuación como:

$$S_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k S_{m,2n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_{k-2n} S_{m,k} \quad (2.27)$$

Por lo tanto, al usar esta ecuación, generamos la aproximación de los coeficientes

en el índice de escala $m+1$ usando los coeficientes de escalamiento en la escala previa.

De forma semejante, los coeficientes de la wavelet pueden ser encontrados los coeficientes de aproximación en la escala previa, que usa los coeficientes de escalamiento b_k de la siguiente manera:

$$T_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_k S_{m,2n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{k-2n} S_{m,k} \quad (2.28)$$

Podemos ver que, sabiendo la aproximación de los coeficientes $S_{m_0,n}$ en una escala específica m_0 entonces, a través de repetir la aplicación de las ecuaciones (2.27) y (2.28), podemos generar la aproximación de los coeficientes y detalles de la wavelet en todas las escalas mayores de m_0 . Al hacer esto, no necesitamos saber exactamente qué hace la señal continua subyacente $x(t)$, solamente $S_{m_0,n}$. Las ecuaciones (2.27) y (2.28) representan la multi-solución del algoritmo de descomposición. El algoritmo de descomposición es la primera mitad de la transformada wavelet rápida que permite calcular los coeficientes de la wavelet por este camino, en vez de calcular las laboriosas ecuaciones para la convolución (2.9). Iterando las ecuaciones (2.27) y (2.28) se lleva a cabo respectivamente un filtrado highpass y lowpass de la salida, consiguiendo las entradas $S_{m+1,n}$ y $T_{m+1,n}$. Los vectores contenidos en las secuencias $(1/\sqrt{2})c_k$ y $(1/\sqrt{2})b_k$ representan los filtros: $(1/\sqrt{2})c_k$ es el filtro lowpass, dejando completamente bajas frecuencias y por lo tanto una versión suavizada de la señal; $(1/\sqrt{2})b_k$ es el filtro highpass, dejando completamente altas frecuencias que corresponde a los detalles de la señal.

Se puede ir en dirección contraria y reconstruir $S_{m,n}$ de $S_{m+1,n}$ y $T_{m+1,n}$. Ya que sabemos de la ecuación (2.17) que $x_{m-1}(t) = x_m(t) + d_m(t)$; podemos expandirlo como:

$$x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m,n} \phi_{m,n}(t) + \sum_n T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.29)$$

Usando las ecuaciones (2.27b) y (2.28) que pueden expandirse en términos de la función de escalamiento en escalas previas de la siguiente manera:

$$x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \phi_{m-1,2n+k}(t) + \sum_n T_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_k \phi_{m-1,2n+k}(t) \quad (2.30)$$

Cambiando los índices de la sumatoria, conseguimos:

$$x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_{k-2n} \phi_{m-1,k}(t) + \sum_n T_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{k-2n} \phi_{m-1,k}(t) \quad (2.31)$$

También sabemos que podemos expandir $x_{m-1}(t)$ en términos de los coeficientes de aproximación en la escala $m-1$:

$$x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m-1,n} \phi_{m-1,n}(t) \quad (2.32)$$

Comparando los coeficientes de la ecuación (2.32) con la ecuación (2.31) notamos que el índice k en el índice de escala m se relacionan con el índice de localización n en el índice de escala $m-1$. Además, el índice de localización n en la ecuación (2.31) no es equivalente al índice de localización n en la ecuación (2.32), como aquél corresponde al índice de escala m , con la asociada localización discreta espaciada 2^m , y el último índice de escala $m-1$ con la localización discreta espaciada 2^{m-1} . Por lo tanto, el índice n está dos veces en la última expresión. El camino más simple para seguirlo, antes de comparar las dos expresiones, es intercambiar los índices k y n en la ecuación (2.31), después de un poco de álgebra, se obtiene el algoritmo de reconstrucción:

$$S_{m-1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_{n-2k} S_{m,k} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{n-2k} T_{m,k} \quad (2.33)$$

donde hemos rehusado k como el índice de localización de los coeficientes de la transformada en el índice de escala m para diferenciarlo de n , del índice de localización en la escala $m-1$. Por lo tanto, en la escala más pequeña $m-1$, los coeficientes de aproximación pueden encontrarse con una combinación de los coeficientes de aproximación y los coeficientes de detalle en la próxima escala m . Si hay solamente un número finito de los coeficientes de escalamiento diferentes a cero ($= N_k$) entonces c_{n-2k} tiene valores diferentes a cero, solamente en el rango de 0 a $N_k - 1$. La reconstrucción del algoritmo es la segunda mitad de la transformada wavelet rápida (FWT). En la literatura la transformada wavelet rápida, transformada wavelet discreta, algoritmos de descomposición/reconstrucción, transformada rápida de la wavelet ortogonal, algoritmos de multi-solución, algoritmo pirámide, algoritmo de árbol, etcétera, son usados para representar lo mismo. Se hace aún más confuso cuando otras discretizaciones de la transformada wavelet continua se refieren a la transformada wavelet discreta. Hay que tener cuidado en no confundirlas.

1.14 Energía de la wavelet

La energía contenida en los coeficientes en cada escala es:

$$E_m = \sum_{n=0}^{2^{M-m}-1} (T_{m,n})^2 \quad (2.34)$$

Una wavelet basada en el espectro de potencia de la señal puede ser encontrada al usar las escalas dependientes de energía. Para hacerlo, requerimos una medición de la frecuencia, que es recíproco de la dilatación de la wavelet, por ejemplo el centro passband del espectro de potencia de la wavelet. Un espectro de potencia de la wavelet de la señal es directamente comparable con sus contrapartes de Fourier, y la wavelet continua.

Energía total de la señal de entrada discreta esta dado por:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} (S_{0,n})^2 \quad (2.35)$$

es igual a la suma de los cuadrados de los coeficientes de detalle elevado sobre todas las escalas, más el cuadrado de los coeficientes de aproximación $S_{M,0}$ de la siguiente manera:

$$E = (S_{M,0})^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{2^{M-m}-1} (T_{m,n})^2 \quad (2.36)$$

La energía contenida dentro del vector transformado en todas las etapas de la multi-solución de la descomposición es constante. Podemos, por lo tanto, escribir la conservación de la energía en forma general como:

$$E = \sum_{i=0}^{N-1} (W_i^{(m)})^2 \quad (2.37)$$

donde $W_i^{(m)}$ son las componentes individuales del vector transformado $W^{(m)}$. Cuando $m=0$, esta ecuación corresponde a la sumatoria de los componentes de energía de la señal de entrada (2.35) y cuando $m=M$ corresponde a la sumatoria de la energías dentro de los componentes de descomposición (2.36).

1.14.1 Índice alternativo de los coeficientes de la malla dyadic

Hay tres métodos principales usados en la práctica para encontrar el índice de los coeficientes de la transformada wavelet discreta. Utilizando una señal de entrada con 32 componentes tenemos lo siguiente.

Índice de escala: el sistema de índice de escala (m, n) corresponde a una señal de entrada con longitud $N=2^M$, que se presenta esquemáticamente sobre una malla dyadic en la Figura 2.4(b), y la señal discreta en la Figura 2.4(a). La escala más pequeña sobre la malla $m=1$ corresponde a un espaciado de $2^1=2$ sobre los datos. La señal de entrada discreta se encuentra en el índice de escala $m=0$. En la Figura 2.4(c) se muestra el resultado de la transformada en la malla. Tales gráficas dan una buena indicación visual, cubriendo el plano tiempo-escala por las wavelets y su respectiva importancia en la señal.

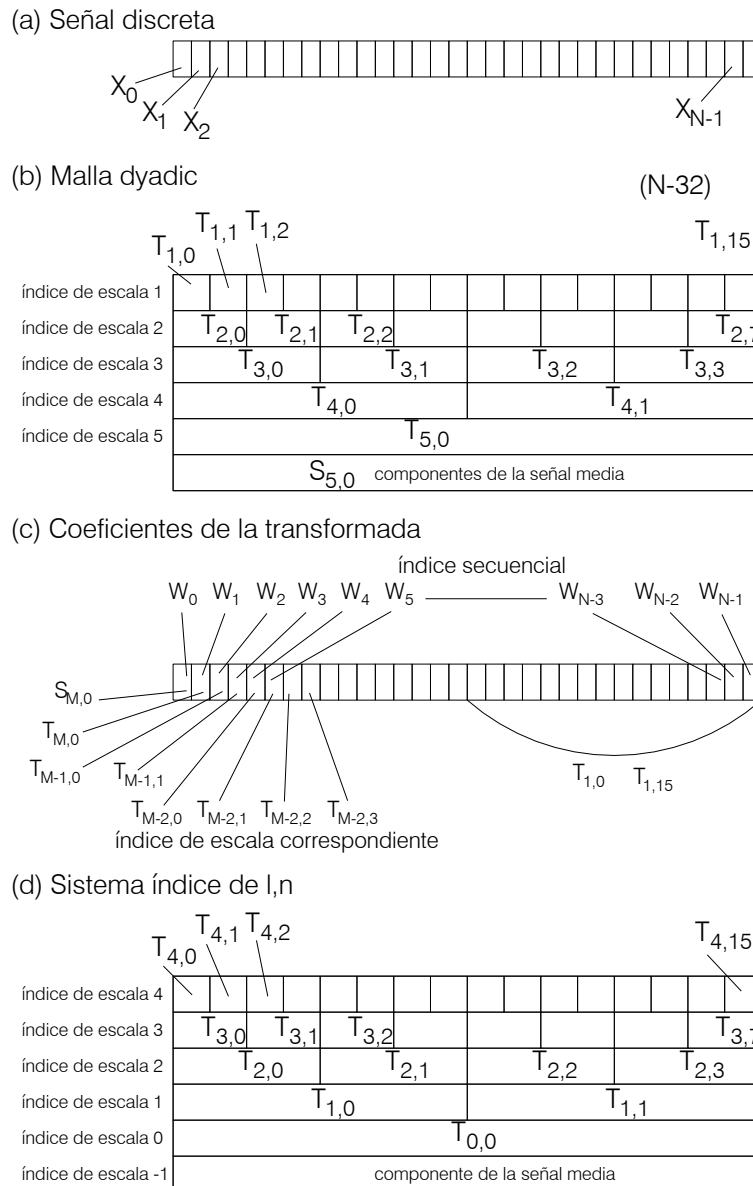


Figura 2.4. Diagrama esquemático del método de índice alternativo de la malla dyadic de WT.

Índice secuencial: Sabemos que una señal de N muestras, produce N componentes vectoriales de la wavelet. La Figura 2.4(c) contiene un esquema de los coeficientes de la transformada en formato secuencial. Tiene sentido, por lo tanto, encontrar un orden de estos coeficientes para ajustarse a un vector de longitud N . La serie de tiempo discreta $S_{0,n}, n=0,1,2,\dots,N-1$, puede ser descompuesta en $N-1$ coeficientes de detalle más un coeficiente de aproximación, donde N es entero de potencia 2: $N=2^M$. Después de hacer la descomposición de los coeficientes completa de la transformada, se pueden reordenar en arreglos dyadic en dos dimensiones $T_{m,n}$ para la transformada del vector $W^{(M)}$, donde los componentes $W_i^{(M)}$ tienen el mismo rango que la señal original ($i=0,1,2,\dots,N-1$). La componente del vector índice i se encuentra para los índices de la malla de dyadic m y n a través de la relación $i=2^{M-m}+n$. Además, el superíndice M entre paréntesis significa una descomposición completa de la señal desde las escalas M . Las componentes de la transformada del vector $W_i^{(M)}$, se grafican en la Figura 2.4(c). La última mitad de la serie en la figura representa los coeficientes correspondientes a la escala más pequeña de la wavelet (índice $m=1$). El siguiente cuarto, de atrás para adelante, representa los coeficientes correspondientes al índice de escala $m=2$, el siguiente octavo para los coeficientes $m=3$ y así sucesivamente, regresando a $W_i^{(M)}$, que es un coeficiente simple para el índice de escala $m=M$. La componente $W_0^{(M)}$ es un coeficiente sencillo de aproximación ($S_{M,0}$). Si interrumpimos el algoritmo de descomposición en la escala m_0 (antes de la descomposición completa) resulta una transformada del vector intermedia $W^{(m_0)}$, que contiene un número de coeficientes de aproximación $S_{m_0,n}$ en su origen.

Nivel del índice: El índice de nivel l es simplemente igual a $M-m$, que es usado a menudo en lugar de índices de escala m . En este caso, el número de wavelets usadas cubren la señal en cada nivel específico que es 2^l , por ejemplo el nivel $l=0$ corresponde a una wavelet sencilla y la escala que le corresponde es en toda la serie de tiempo, al nivel $l=1$ le corresponde dos wavelets, y la escala a la mitad de la serie de tiempo, y así sucesivamente. Además, es usual en esta nomenclatura estándar, que el coeficiente de aproximación que da en el nivel $l=-1$, quedando el arreglo de la wavelet en $T_{l,n}$. La Figura 2.4(d) muestra el sistema índice de l,n . El nivel índice se usa cuando la señal especifica la unidad del intervalo y el análisis es puesto en términos de la solución en vez de la escala. Por ejemplo, a más baja resolución $l=0$, corresponde a la longitud de la señal, mientras que la más pequeña $m=0$ corresponde a la distancia

entre cada punto de la señal.

1.14.2 Ejemplo de la transformada wavelet Haar

Ilustrando los métodos descritos usando una wavelet Haar en la descomposición de una señal de entrada discreta $S_{0,n} : n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Empleamos primero el algoritmo de descomposición usando las ecuaciones (2.27) y (2.28).

La wavelet Haar tiene dos coeficientes de escala, $c_0 = 1$ y $c_1 = 1$. Sustituyendo éstos en la ecuación (2.27), podemos obtener los coeficientes de aproximación en la próxima escala a través de la relación:

$$S_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [S_{m,2n} + S_{m,2n+1}] \quad (2.38)$$

De forma semejante, a través de la ecuación (2.28) podemos obtener los coeficientes de detalle en las escalas subsecuentes usando:

$$T_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [T_{m,2n} - T_{m,2n+1}] \quad (2.39)$$

Llevando a cabo la descomposición de la wavelet Haar de una señal simple discreta, (1, 2, 3, 4). Cuando la señal contiene solamente cuatro puntos de datos, podemos llevar a cabo dos iteraciones del algoritmo de descomposición Haar por las ecuaciones (2.38) y (2.39) solamente. Después de que dos iteraciones se obtiene cuatro coeficientes transformados: tres coeficientes de la wavelet $T_{m,n}$; dos en el índice de escala $m=1$, $(T_{1,0}, T_{1,1})$; uno en el índice de escala $m=2$, $(T_{2,0})$; más un coeficiente de la señal media en el índice de escala $m=2$, $S_{2,0}$. Esto se ilustra a través de un esquema de los coeficientes en la Figura 2.5.

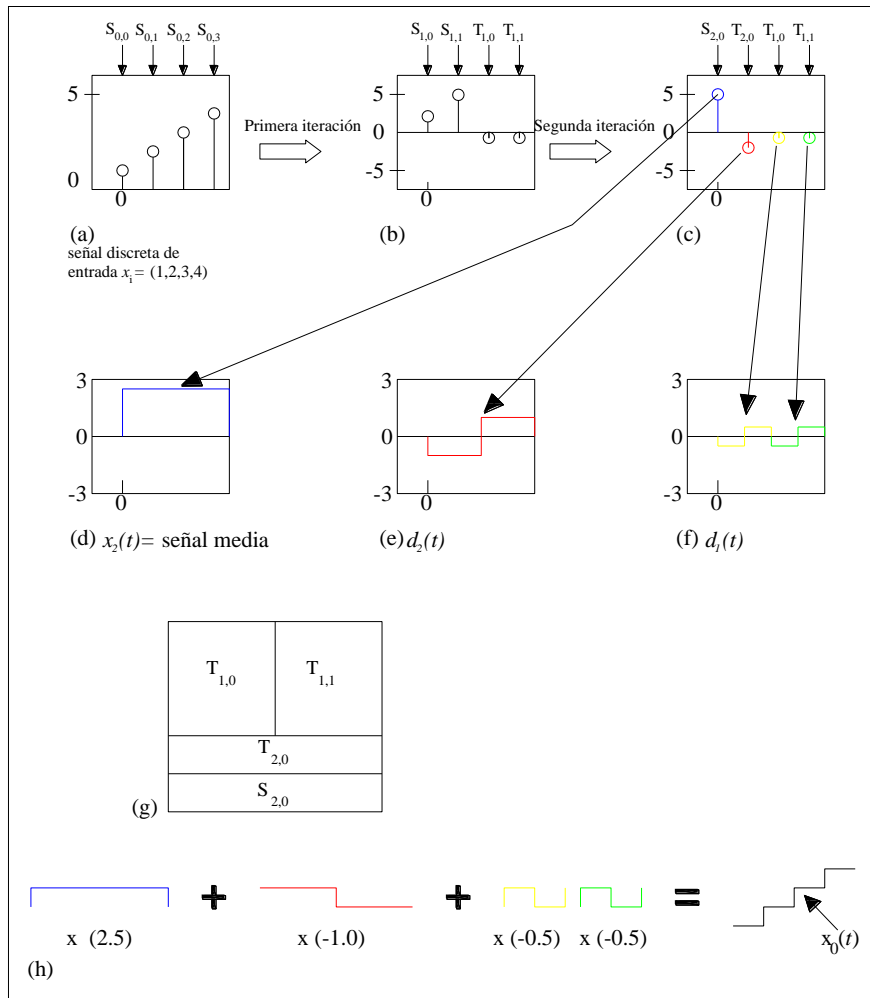


Figura 2.5. Descomposición y reconstrucción de la wavelet Haar de una señal rampa simple.

La primera iteración de la descomposición del algoritmo da:

$$T_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 - 2] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad T_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [3 - 4] = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 + 3] = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad S_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [3 + 4] = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

El coeficiente de la transformada del vector, después de esta primera iteración, es entonces:

$$W^{(1)} = (S_{1,0}, S_{1,1}, T_{1,0}, T_{1,1}) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

La segunda iteración (solamente involucra los coeficientes restantes de aproximación $S_{1,0}$ y $S_{1,1}$):

$$T_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{2}} \right] = -2 \quad \text{y} \quad S_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{2}} \right] = 5$$

El coeficiente de la transformada del vector después de esta segunda iteración es:

$$W_i^{(2)} = (S_{2,0}, T_{2,0}, T_{1,0}, T_{1,1}) = \left(5, -2, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

La señal media se encuentra en el coeficiente de aproximación, por ejemplo $S_{2,0}/(\sqrt{2})^2 = 2.5$. También podemos ver que la energía de la señal discreta original ($1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$) es igual a la energía del coeficiente de la transformada del vector después de la primera iteración:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 30$$

y la segunda iteración, dando la descomposición completa:

$$5^2 + (-2)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 30$$

que es el resultado esperado para la condición de conservación de energía expresada en las ecuaciones (2.34) a (2.37).

La transformada inversa Haar puede escribirse simplemente (incluso en ubicaciones pares $2n$) como:

$$S_{m,2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [S_{m+1,n} + T_{m+1,n}] \quad (2.40)$$

y en localizaciones impares $2n+1$:

$$S_{m,2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [S_{m+1,n} - T_{m+1,n}] \quad (2.41)$$

Para la transformada wavelet Haar, se puede derivar esta reconstrucción de ecuaciones directamente de las ecuaciones (2.38) y (2.39). Por otra parte, podemos derivar el algoritmo de reconstrucción de la ecuación (2.33).

Llevando a cabo la reconstrucción sobre la transformada del vector que acabamos de calcular:

$$W^{(2)} = (S_{2,0}, T_{2,0}, T_{1,0}, T_{1,1}) = \left(5, -2, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

En la primera iteración se usa la reconstrucción par ecuaciones (2.40) y (2.41) :

$$S_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{2,0} + T_{2,0}) = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad S_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{2,0} - T_{2,0}) = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

la cual resulta:

$$(S_{1,0}, S_{1,1}, T_{1,0}, T_{1,1}) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

iterando otra vez da:

$$\begin{aligned} S_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[S_{1,0} + T_{1,0}] = 1 & S_{0,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[S_{1,0} - T_{1,0}] = 2 \\ S_{0,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[S_{1,1} + T_{1,1}] = 3 & S_{0,3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[S_{1,1} - T_{1,1}] = 4 \end{aligned}$$

por lo tanto conseguimos la señal original $(S_{0,0}, S_{0,1}, S_{0,2}, S_{0,3}) = (1, 2, 3, 4)$.

La Figura 2.5 intenta mostrar visualmente la descomposición de la señal dentro de los componentes de la wavelet Haar: Figura 2.5(a) contiene la señal original; Figura 2.5(b) gráfica los coeficientes después de la primera iteración del algoritmo de descomposición y Figura 2.5(c) gráfica los coeficientes después de la segunda iteración del algoritmo. Los coeficientes contenidos en la Figura 2.5(c) corresponden a una función sencilla escalada del índice de escala $m = 2$, una wavelet en el índice de escala $m = 2$ y dos wavelets en el índice de escala $m = 1$. Estas se muestran respectivamente en las Figuras 2.5(d)-(f). La gráfica de la transformada de los coeficientes para esa señal es equitativamente simplista, consiste de cuatro valores de coeficientes divididos, como se muestra en la Figura 2.5(g).

Podemos encontrar la aproximación correspondiente y los detalles de la señal tomando la transformada inversa de los coeficientes en cada escala. Primero, el coeficiente de aproximación se usa para determinar la señal de aproximación de la escala mayor:

$$x_2(t) = S_{2,0}\phi_{2,0}(t) \tag{2.42}$$

donde $\phi_{2,0}(t)$ es la función escalada para la wavelet Haar, es simplemente un bloque de pulso de longitud 4 y amplitud $1/2$, comenzando en $t = 0$. Por lo tanto, $x_2(t)$ es sólo un

pulso de bloque de longitud 4 y magnitud $S_{2,0} \times 1/2 = 2.5$, que es la señal media. Una gráfica de $x_2(t)$ se muestra en la Figura 2.5(d). De forma similar, podemos obtener la componente detallada de la señal en el índice de escala 2, de la siguiente manera:

$$d_2(t) = T_{2,0} \psi_{2,0}(t) \quad (2.43)$$

Esta componente de detalle, mostrada en la Figura 2.5(e), es una simple wavelet Haar, abarcando los datos con valor de coeficiente $T_{2,0} = -2$, por lo tanto la magnitud es -1 . Después, la componente de la señal de detalle en el índice de escala 1 se encuentra para:

$$d_1(t) = \sum_{n=0}^1 T_{1,n} \psi_{1,n}(t) T_{2,0} \psi_{2,0}(t) \quad (2.44)$$

que es simplemente dos wavelets Haar de índice de escala 1, de lado a lado, con amplitudes $T_{1,0}/(\sqrt{2}) = (-1/\sqrt{2})/(\sqrt{2}) = -0.5$ y $T_{1,1}/(\sqrt{2}) = (-1/\sqrt{2})/(\sqrt{2}) = -0.5$. La componente de detalle $d_1(t)$ se grafica en la Figura 2.5(f). Sabemos que de la ecuación (2.45) la aproximación de la señal en el índice de escala 0 se puede encontrar añadiendo junto a todas las componentes de detalle la aproximación de la señal en el índice de escala M , i.e.

$$x_0(t) = x_M(t) + \sum_{m=1}^M d_m(t) \quad (2.45a)$$

Para el caso Haar consideramos que $M = 2$, por lo tanto

$$x_0(t) = x_2(t) + d_2(t) + d_1(t) \quad (2.45b)$$

Esto es sólo la suma de las componentes de aproximación y detalle mostradas en las Figuras 2.5 (d)-(f), que se muestra esquemáticamente en la Figura 2.5(h).

1.15 Wavelets Daubechies

Como vimos con la transformada wavelet Haar anteriormente en la sección 2.1.4, los coeficientes son ordenados en dos secuencias distintas: uno actúa cuando un filtro suavizado para los datos, lo demás extrae el detalle de la señal en cada escala. La wavelet Haar es sumamente simple en lo que respecta, tiene solamente dos

coeficientes de escala y ambas son igual a la unidad. En esta sección, tomaremos a una familia de wavelets discretas de la cual la wavelet Haar es la más simple de las wavelets Daubechies. Además de satisfacer estos criterios, Daubechies requirieren que sus wavelets tengan soportes compactos (i.e. un número finito, N_k , de coeficientes de escala) y son suaves hasta cierto grado. La suavidad de la wavelet es asociada con una condición de momento como se puede expresar en términos de los coeficientes de escala como:

$$\sum_{k=0}^{N_k-1} (-1)^k c_k k^m = 0 \quad (2.46)$$

para números enteros $m = 0, 1, 2, \dots, N_k/2 - 1$. Estas wavelets tienen $N_k/2$ momentos de desvanecimiento, con medias que podemos suprimir sus partes de la señal que son polinomios arriba del grado $N_k/2 - 1$. Las wavelets Daubechies son muy buenas para representar el comportamiento del polinomio dentro de la señal. Algunos ejemplos de las wavelets Daubechies, sus funciones de escalamiento y el espectro de energía asociados se muestran en la Figura 2.6.

El soporte de longitudes de las wavelets Daubechies es $N_k - 1$, por ejemplo la wavelet D2 (Haar), tiene un soporte de longitud 1, la wavelet D4 tiene soporte de longitud 3, la D6 un soporte de longitud 5, etcétera. Podemos ver de la Figura 2.6 que la función de escalamiento deja las frecuencias más bajas y actúa como un filtro lowpass, y la wavelet asociada deja frecuencias más altas y actúa como un filtro highpass. Además, podemos ver que los espectros son oscilatorios en la naturaleza, con protuberancias decrecientes en la amplitud para las frecuencias más altas. Las magnitudes de las protuberancias secundarias en los espectros se reducen como el número de coeficientes de escalamiento, y por lo tanto el número de los momentos desvanecidos de la wavelet, aumentan.

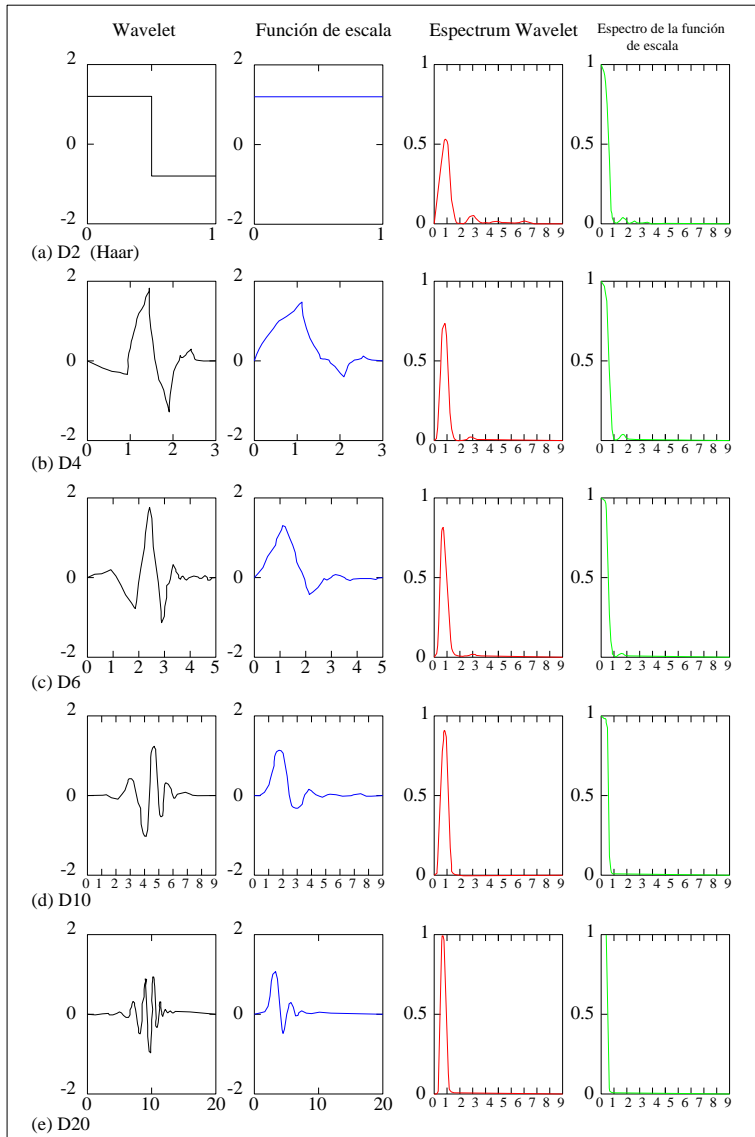


Figura 2.6. Wavelets Daubechies y su función de escala con su espectro de energía.

La wavelet Daubechies tiene cuatro coeficientes de escalamiento, la D4. La "D" representa esta familia especial de la wavelet de Daubechies y el "4" representa el número de coeficientes de escalamiento diferentes a cero, N_k . Las wavelets Daubechies también se definen a menudo por el número de los momentos cero que tienen, iguales a $N_k/2$, en qué caso la secuencia corre D1, D2, D3, D4, ..., etcétera.

Sabemos que la ecuación de escalamiento para cuatro coeficientes de una wavelet es:

$$\phi(t) = c_0\phi(2t) + c_1\phi(2t-1) + c_2\phi(2t-2) + c_3\phi(2t-3) \quad (2.47)$$

y la función wavelet correspondiente es:

$$\psi(t) = c_3\phi(2t) - c_2\phi(2t-1) + c_1\phi(2t-2) - c_0\phi(2t-3) \quad (2.48)$$

Encontrar los valores de los coeficientes de escalamiento para la wavelet D4 usamos la ecuación (2.46) y con conseguimos:

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 2 \quad (2.49)$$

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2 \quad (2.50)$$

y de la ecuación (2.46) con $m=0$ conseguimos:

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 0 \quad (2.51)$$

usando la ecuación (2.74) , ajustando el tiempo en $m=1$, conseguimos:

$$-1c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0 \quad (2.52)$$

Cuatro coeficientes de escalamiento que satisfacen las 4 ecuaciones anteriores son:

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \quad c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4} \quad c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

y

$$c_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \quad c_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \quad c_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4} \quad c_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Las primeras resultan de $\phi(t)$ y las siguientes de $\phi(-t)$. Adoptaremos las primeras propuesta, que son, $c_0 = 0.6830127$, $c_1 = 1.1830127$, $c_2 = 0.3169873$ y $c_3 = -0.1830127$ respectivamente. Los coeficientes de escalamiento para el sistema wavelet Daubechies para los números más grandes de los coeficientes se encuentran por cálculo numérico.

Podemos calcular la función de escalamiento de los coeficientes D4 usando la ecuación (2.47). Al hacer esto debemos re-escribirlo como:

$$\phi_j(t) = c_0\phi_{j-1}(2t) + c_1\phi_{j-1}(2t-1) + c_2\phi_{j-1}(2t-2) + c_3\phi_{j-1}(2t-3) \quad (2.53)$$

donde los subíndices j es el número de iteración. Eligiendo una forma inicial arbitraria para la función de escalamiento $\phi_0(t)$ encontramos $\phi_1(t)$, luego usamos $\phi_1(t)$ y encontramos $\phi_2(t)$, hasta que $\phi_j(t) = \phi_{j-1}(t)$ o por lo menos hasta que $\phi_j(t)$ se acerque lo suficientemente a $\phi_{j-1}(t)$.

Una vez que tenemos una aproximación para $\phi(t)$ podemos definir la wavelet

directamente de la ecuación (2.48). Sin embargo, la función transformada wavelet D4 de una señal discreta en la práctica no requiere el cálculo de la wavelet o funciones de escalamiento directamente; sólo emplea algo de los coeficientes de escalamiento dentro del algoritmo de multi-solución (ecuaciones (2.27) y (2.28)) de la misma manera que la wavelet Haar. En este caso, la aproximación de los coeficientes son calculados usando:

$$\begin{aligned}
 S_{m+1,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N_k-1} c_k S_{m,2n+k} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_0 S_{m,2n} + c_1 S_{m,2n+1} + c_2 S_{m,2n+2} + c_3 S_{m,2n+3}] \\
 &= 0.483 S_{m,2n} + 0.837 S_{m,2n+1} + 0.224 S_{m,2n+2} - 0.129 S_{m,2n+3}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE TIEMPO-FRECUENCIA EN SEÑALES

En este capítulo, se presentan varias herramientas disponibles para analizar señales no estacionarias y se comparan sus diferentes características. Las señales en fenómenos transitorios y en la turbulencia, que son muy comunes en la Ingeniería Hidráulica y en la Mecánica de Fluidos por su naturaleza son no estacionarias.

2.1 Métodos: Análisis de señales

Para estudiar las series de tiempo, se han desarrollado varios métodos. Frecuentemente, el más usado es la Transformada de Fourier (Fourier Transform, FT), Transformada de Fourier de Corto Tiempo (Short-Time Fourier Transform, STFT) y la representación Wigner-Ville. La Transformada Wavelet (Wavelet Transform, WT) es un método recientemente propuesto para estudiar las señales no estacionarias y con características de no linealidad, así como para encontrar discontinuidades. Cada método tiene sus propias ventajas y desventajas dependiendo de dónde sean usados y se verán a continuación.

2.1.1 Análisis de Fourier

El método más comúnmente usado ha sido el análisis de Fourier, que revela el contenido de frecuencia de cualquier señal descomponiéndola en senoidales de diferentes frecuencias. La serie de Fourier es usada para señales periódicas, mientras que para señales no periódicas se usa la transformada de Fourier.

2.1.1.1 Series de Fourier

En 1822, Fourier publicó *Theorie Analytique de la Chaleur*, "Teoría analítica del calor" donde menciona que para cualquier señal periódica $f(t)$ de periodo T o sea $f(t) = f(t + T)$, puede expresarse como:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (3.1)$$

donde $\frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular fundamental en radianes por segundo y los coeficientes de los términos de coseno y seno (coeficientes de Fourier) se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (3.2)$$

2.1.1.2 Transformada de Fourier

Si f es el cuadrado de la función integrable ($f \in L^2(\mathbb{R})$), su transformada de Fourier se define como:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, ω es la frecuencia en radianes por segundo, y R es el campo de los números reales. Cuando f es el valor real $\hat{f}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$. Debido a que $f(t)$ no existe de menos infinito a más infinito, prácticamente la transformada de Fourier de una señal de energía finita f puede escribirse como:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad n > 0 \quad (3.4)$$

donde n es un número suficientemente grande, generalmente a una potencia de 2. Puede recuperarse $f(t)$ por medio de la siguiente ecuación:

$$f(t) = \int_{-n}^n \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (3.5)$$

Al analizar señales por medio de la transformada Fourier, llamado análisis espectral, es una técnica usual de obtener información sobre una señal periódica. Sin embargo, las señales analizadas no son continuas en el tiempo debido a los procedimientos de medición de una señal física de entrada. Para arreglársela con esta clase de señales, la transformada discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform, DFT) puede ser utilizada en lugar de la series de Fourier (Oonincx, 2000). DFT puede ser calculada de una manera rápida usando el algoritmo de “mariposa” (Cooley y Tukey, 1965). Este algoritmo organiza los coeficientes de Fourier de cierta manera para su cálculo en sentido recursivo. El cálculo de la Transforma Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT). En MATLAB, este algoritmo esta codificado dentro de la función “FFT” y el resultado de la FT presentados en este trabajo se obtienen usando esa función. El resultado de la FFT es un arreglo de valores complejos, por lo tanto para eliminar las partes imaginarias, se hace el cuadrado del módulo de las amplitudes de la FT que se grafican obteniéndose el espectro de la amplitud de Fourier (Fourier Amplitude Spectrum, FS).

Mientras la FT da información valiosa sobre las frecuencias en una señal, no es

posible tener alguna información sobre la ubicación temporal de esas frecuencias. Por lo tanto, es apropiado solamente para señales estacionarias. Superar este problema de corto tiempo o de corto plazo es utilizar la transformada de Fourier de corto tiempo (STFT).

2.1.2 Transformada de Fourier de corto tiempo (STFT)

La idea en STFT es cortar la señal original en segmentos de duración más pequeños y aplicando la FT se obtiene las componentes de frecuencia en cada segmento. Las funciones obtenidas por este crudo recorte son en general no periódicas y la FT interpretará los saltos en las fronteras como discontinuidades o variaciones abruptas de la señal e introducirá armónicos de mayor orden para quedar en la forma de la onda. Para evitar esto, se introduce el concepto de ventanas. En lugar de localizar por medio de funciones rectangulares, se usa una función suave ventana, que está cerca del origen y se descompone hacia el cero en los bordes. Por esta razón la STFT se le conoce como la transformada de Fourier de ventanas. Cualquier función cuadrada integrable puede ser usada como una ventana, pero ciertos criterios deben ser cubiertos. La principal propiedad de una buena ventana es su buena localización en el dominio tanto en el tiempo como en la frecuencia. Algunas ventanas son favorables como Hamming, Hanning, Bartlett, Blackman, Kaiser y Gaussian (Carmona et al, 1998). La razón por la cual se usan estas ventanas es que tienen diferentes formas funcionales y su FT se concentra alrededor de $\omega = 0$. La ventana en el dominio del tiempo se llama *ventana de tiempo*, su transformada de Fourier es la *ventana espectral*. Las formas funcionales de algunas ventanas están dadas a continuación (Carmona et al., 1998).

Rectangular:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otros} \end{cases}$$

Barlett (triangular):

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2(1-t), & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otros} \end{cases}$$

Hanning:

$$g(t) = \begin{cases} (1 - \cos(2\pi t))/2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otros} \end{cases}$$

Hamming:

$$g(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otros} \end{cases}$$

Blackman:

$$g(t) = \begin{cases} 0.42 - 5 \cos(2\pi t) + 0.8 \cos(4\pi t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otros} \end{cases}$$

Gaussian:

$$g(t) = \pi^{-1/4} e^{-t^2/2}$$

La señal se multiplica por una de estas funciones ventanas $(g(t - b))$, donde $g(t)$ es diferente a cero únicamente en una región finita alrededor del tiempo b . Entonces se toma la transformada de Fourier de $f(t)g(t - b)$, y la ventana se mueve a diferentes ubicación para hacer la misma operación. Este método también se le conoce *transformada de Fourier de ventanas* y su definición es:

$$Sf(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - b)e^{-i\omega t} dt \quad (3.6)$$

La STFT es una presentación de la conservación de energía dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = 1 \quad (3.7)$$

Usando la igualdad de Parseval se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Sf(\omega, t)|^2 d\omega dt \quad (3.8)$$

La señal puede ser reconstruida de su transformada por medio de la formula,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Sf(\omega, t)(t - b)e^{i\omega t} d\omega dt \quad (3.9)$$

El problema fundamental con la STFT es que no es posible tener alta resolución simultáneamente tanto en el tiempo como en la frecuencia. Seleccionar una pequeña ventana causa una mala resolución en la frecuencia y una gran ventana puede revelar el contenido de la frecuencia mucho mejor a expensas de la resolución del tiempo. Esto se debe a que la porción de la señal en cualquier ventana se trata como una señal estacionaria.

2.1.3 Representación Wigner - Ville (WVR)

La representación Wigner-Ville es una señal f expresada de la siguiente forma:

$$W_f(b, \omega) = \int f\left(b + \frac{t}{2}\right) f^*\left(b - \frac{t}{2}\right) e^{-i\omega t} dt \quad (3.10)$$

donde b es una variable del tiempo, ω es una variable de la frecuencia, y $*$ significa el conjugado complejo.

Este proceso es la correlación de la señal con ella misma. Se puede interpretar esta ecuación como el cálculo de una función de autocorrelación “local” en cada instante del tiempo, b , seguido de la evaluación de la transformada de Fourier. Resultando un una

densidad espectral de potencia “local” para cada instante de tiempo, t . En la práctica, sólo una realización de ambos lados del proceso está disponible y esto nos obliga a que ignoremos la expectación del operador. Si se toman las expectativas de ambos lados de la ecuación anterior:

$$E\{W_f(b, \omega)\} = \int C_f\left(b + \frac{t}{2}, b - \frac{t}{2}\right) e^{-i\omega t} dt \quad (3.11)$$

Donde C_f es la función de auto-covarianza del proceso. En el caso estacionario, C_f no es función del parámetro tiempo b y por lo tanto es constante. El lado izquierdo de esta ecuación se le llama función de densidad espectral instantánea y se puede expresar como $S_f(b, \omega)$. En otras palabras, es una función de densidad de energía. En teoría, de $S_f(b, \omega)$ es una medida de la distribución del tiempo-frecuencia de un proceso aleatorio $f(t)$ en el tiempo b (Newland, 1993). La transformada Wigner-Ville se localiza en el dominio del tiempo para señales de Dirac, y en el dominio de la frecuencia para ruidos lineales. Cuando se integra $W_f(b, \omega)$ sobre todas las frecuencias se obtiene el cuadrado del modulo de la señal, también se le conoce como frecuencia marginal. Es lo mismo que la energía instantánea, que se obtiene eliminando la integración sobre todas las frecuencias.

$$\int W_f(b, \omega) d\omega = |f(b)|^2 \quad (3.12)$$

La energía total se obtiene:

$$\iint W_f(b, \omega) d\omega db = \int |f(b)|^2 db \quad (3.13)$$

El espectro de potencia se obtiene cuando la representación de Wigner-Ville se integra en el tiempo. Se le conoce como el tiempo marginal.

$$\int W_f(b, \omega) db = |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (3.14)$$

La distribución Wigner-Ville es un procedimiento de mantener energía por satisface con las condiciones de frecuencia y de tiempo marginal. Sus dificultades son, $S_f(b, \omega)$ puede localizarse en un tiempo b , pero cubre un rango infinito de t , por lo tanto es muy dependiente de $f(t)$ fuera del tiempo local. Mientras los espectros de Fourier son periódicos con igual periodo en el mismo rango, $W_f(b, \omega)$ es periódico en la frecuencia con periodo igual a la mitad en el mismo rango. Esto podría causar aliasing, que se puede quitarse en cada prueba, o usando su correspondiente señal analítica. Una señal analítica es la distribución de efectos negativos por importantes términos cruzados, que limitan su uso práctico. Los términos cruzados pueden reducirse por una distribución suavizada sobre el tiempo, pero eso también reduce la resolución en el tiempo y frecuencia.

2.1.4 Transformada Wavelet (WT)

La transformada wavelet ha aparecido como una con mucho potencial al analizar una señal y en estudios recientes indican un uso eficiente de la wavelet en la solución de problemas tanto lineales como no lineales (Grossman y Morlet, 1984). Una wavelet es una pequeña onda con energía finita, tiene su energía concentrada en el tiempo o en el espacio que sirve como una función básica para el análisis de transitorios, no estacionarios, o fenómenos donde varia el tiempo. La transformada de Fourier se concentra alrededor de una frecuencia específica. Por lo tanto, la wavelet tiene características de una onda libre oscilando, pero también la habilidad de admitir simultáneamente análisis en el tiempo y la frecuencia.

Las wavelets son usadas para analizar señales de una manera similar a expansiones complejas (función seno y coseno) típicas del análisis de Fourier. La diferencia es que las señales están descompuestas dentro de unas series de funciones

básicas locales. Cada wavelet se localiza en una diferente posición en el eje del tiempo y es local cerca al cero cuando está fuera de su centro. El término “wavelet” fue introducido, en el contexto de una transformación matemática, en 1984 por (Grossmann y Morlet, 1984). La transformada wavelet es una expansión de dos parámetros de una señal en términos de función base particular wavelet o de la wavelet madre. El análisis temporal se lleva a cabo con una concentración de alta frecuencia de la wavelet prototipo. El análisis wavelet accede a información inmediata que en otros métodos de tiempo y frecuencia es oscura como en el análisis de Fourier. Se puede clasificar el análisis wavelet en Transformada continua wavelet (Continuous Wavelet Transform, CWT) y en Transformada discreta wavelet (Discrete Wavelet Transform, DWT).

2.1.4.1 Transformada Wavelet Discreta (DWT)

La versión de la wavelet discreta involucra algunos términos de procesamiento de señales como el filtrado, pruebas de entrada y de salida. Los detalles del análisis se describen en Strang y Nguyen (1995). El proceso de Multiresolución divide las frecuencias en octavos de banda, de ω a 2ω , en lugar de bandas uniformes de $+\omega + \Delta\omega$. Usando la DWT, a una función $a_0(t)$ se resuelven algunas funciones de diferentes niveles como:

$$a_j(t) = a_{j+1}(t) + d_{j+1}(t) \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j = 0 \dots n \quad (3.26)$$

donde, j es el número de nivel que representa un rango particular de frecuencia y está relacionado con la escala a en CWT por la relación:

$$a = 2^j \text{ o } j = \log(a) / \log(2) \quad (3.27)$$

La idea de hacer la descomposición y reconstrucción (multiresolución) se ve representada en la Figura 3.1 donde a 's son los valores locales medios de un nivel particular y la d 's son las diferencias locales o detalles. Cada detalle o función de nivel

tienen un rango en particular de frecuencias con intensidad cero.

El rango exclusivo de frecuencias esta dado por $\omega_j = [\omega_{1j}, \omega_{2j}]$ con:

$$\omega_{1j} = \frac{1}{2^{j+1} \Delta t} \text{ y } \omega_{2j} = \frac{1}{2^j \Delta t} \quad (3.28)$$

donde, Δt es paso de tiempo de los datos discretizados $a_0(t)$, $a_{j+1}(t)$ es la aproximación o la parte suave de la señal original del nivel 1, donde $d_{j+1}(t)$ es el detalle en el mismo nivel.

La descomposición es la reducción a un nivel donde no hay información apreciable en la aproximación. La wavelet madre debe analizar la señal con menos forma de onda. La selección del árbol de descomposición wavelet se puede hacer acorde al criterio de examinación de entropías de los coeficientes de la wavelet de cada nivel de descomposición. La entropía se define como una medida numérica de la incertidumbre de resultado. Por lo tanto, la mejor base es aquella que de la mínima entropía. Si truncamos una serie en el nivel $j = n$, la señal original puede ser reconstruida de los detalles:

$$a_0(t) = \sum_{j=1}^n d_j(t) \quad (3.29)$$

Los detalles o funciones nivel $d_j(t)$ son expresadas como (Daubechies, 1992):

$$d_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \Psi_{j,k} \quad (3.30)$$

con

$$\Psi_{j,k} = 2^{j/k} \Psi(2^j t - k) \quad (3.31)$$

Donde, k representa un índice en la escala del tiempo, $\Psi_{j,k}$ son las funciones base wavelet y $C_{j,k}$ son los coeficientes wavelet correspondientes. El tiempo va de cero a t_e ($t = [0, t_e]$), finalmente:

$$a_0(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{t_g} c_{j,k} \Psi_{j,k} \quad (3.32)$$

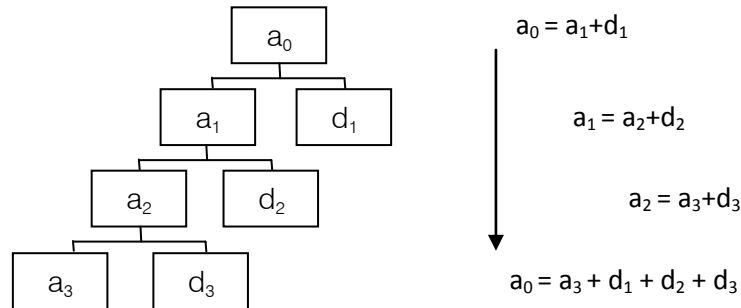


Figura 3.1. Esquema básico de la DWT.

2.1.4.2 Transformada Wavelet Continua (CWT)

En cualquier procesamiento de señales de datos reales es una señal discreta. La wavelet continua también es un proceso discreto, pero es continua en las escalas y posiciones de los operadores. A diferencia de la transformada wavelet discreta, la CWT lo hace en cada escala. La CWT es también continua en términos del desplazamiento: durante el cálculo, el análisis de la wavelet hace un desplazamiento suave sobre el dominio de la función analizada. Si las escalas y posiciones se seleccionan en potencias de 2 (como en la DWT), esta es la escala y posición de dyadic, el análisis será mucho más eficiente en relación con el cálculo.

El análisis continuo se usa en este estudio porque es posible usar un fango de frecuencias flexible y fácil de interpretar los datos. En cambio, la DWT usa frecuencias únicamente en octavos de banda. Aunque el último método es más costoso computacionalmente, no da un resultado preciso de interpretar, y se usa principalmente en la compresión de señales.

El análisis wavelet se llama a menudo análisis tiempo-escala en vez de un análisis tiempo-frecuencia por que el análisis de la función $\Psi(t)$ (o de la wavelet madre), es

escalado por a . Estas wavelets son ortogonales, biortogonales, y sistemas armónicos wavelet. Las wavelets ortogonales descomponen la señal en espacios de señales ortogonales. En 1988, Daubechies introduce una clase de soportes compactos de wavelets ortogonales con soportes suaves. Mallat (1989) y Meyer (1992) presentaron la teoría del análisis de multiresolución.

Excepto para la wavelet Haar, los soportes compactos de la wavelet ortogonal no es simétrico alrededor con la media cero, una condición que se requiere en ciertas aplicaciones como en el procesamiento de imágenes donde simétricamente corresponde a una fase lineal. Para obtener la simetría y conservar la propiedad de la reconstrucción perfecta, la condición ortogonal se reemplazo por la biortogonalidad y la teoría de la biortogonalidad fue establecida por (Chui y Wang, 1992, Cohen et al., 1992). Las wavelets biortogonales con más complicadas y se definen sobre una la base de un par de escalas y funciones de la wavelet.

2.1.4.3 Selección de la wavelet

No hay una única representación de la wavelet de una señal cuando hay diferentes wavelets y no todas las wavelets trabajan en una señal específica. Algunas pueden trabajar muy bien con una señal específica y no trabajar bien con las demás señales. Así que, el problema es, ¿Cómo encontrar la mejor wavelet para nuestra señal?

En la mayoría de las aplicaciones de la transformada wavelet, se requiere que la señal original sea sintetizada por los coeficientes de la wavelet. Esta condición se refiere a una reconstrucción perfecta. En algunos casos, sin embargo, de la misma manera que en las aplicaciones de reconocimiento de dibujos, se requiere una señal relajada. En el caso de una perfecta reconstrucción, las wavelets deben cumplir con la condición de ortogonalidad. Eligiendo dos diferentes wavelets, una para analizar y la otra para sintetizar, las dos deben satisfacer la condición de biortogonalidad para conseguir una reconstrucción perfecta. En general, el objetivo de investigación una wavelet más moderna es la de crear una función wavelet madre que de información, eficiencia y una descripción útil de la señal de interés. No es fácil diseñar un procedimiento uniforme

para desarrollar la mejor wavelet o transformada wavelet para una cierta clase de señales. Sin embargo, sobre la base de algunas características generales de las funciones wavelets, es posible determinar que wavelet es más apropiada para determinada aplicación en particular.

La transformada con wavelets ortogonales se basa en la conservación de energía. Esto implica que el error medio cuadrático (Mean Square Error, MSE) se introduce durante la cuantificación de los coeficientes de la WT es igual al MSE de la reconstrucción de la señal. Para bancos de filtros ortogonales, los filtros sintéticos se traslapan con los filtros del análisis. Sin embargo, en el caso de wavelets biortogonales, las funciones base son no ortogonales y por lo tanto, no conservan energía. En este caso la igualdad de Parseval entre $\int |f(t)|^2 dt$ y $\sum \sum |W_{\psi} f_{a,b}|^2$ no es válida. Se requiere de ortogonalidad.

El teorema de Parseval dice que el total de potencia o energía en una señal se obtiene por la integración sobre todo el tiempo y sobre las frecuencias, y en ambos dominios está relacionado con el cuadrado de la amplitud. Para una señal estacionaria con potencia finita, el espectro de frecuencia contendrá componentes de frecuencias discretas (cuando la amplitud de estas componentes son cuadradas, se obtiene la potencia de cada frecuencia), o para señales aleatorias el espectro cuadrado de las amplitudes en una distribución continua sobre la frecuencia y se representa por la Densidad Espectral de Potencia (Power Spectral Density, PSD) que se integra sobre un ancho de banda finito. En ambos casos, el equivalente “potencia” en el dominio del tiempo es el valor cuadrático medio, obtenido de la integración del valor cuadrático instantáneo (potencia instantánea) sobre un tiempo suficientemente largo y dividida por ese tiempo. Para señales transitorias con energía finita (integral de la potencia sobre el tiempo), la amplitud cuadrática de las señales de la FT se representa por la densidad de energía espectral (Energy spectral Density, ESD). Cuando ESD se integra sobre la frecuencia, la energía total que se obtiene es la misma al total de la energía cuando la potencia instantánea de la señal se integra sobre el tiempo (Randall, 2000). Para una señal con unidades U (donde U representa m, m/s, m/s², g, N, etc.) la potencia tiene

unidades U^2 , energía tiene unidades $U^2 s$, PSD tiene unidades U^2/Hz ($U^2 s$), ESD tiene unidades de $U^2 s/Hz$ ($U^2 s^2$).

Entre otras wavelets, una versión modificada Littlewood-Paley (LP) una base armónica por Newland (1993) son más apropiadas para analizar señales transitorias donde el tiempo y frecuencia son las principales incertidumbres, por tienen una mejor resolución en la frecuencia-tiempo que otras bases wavelet (Basu y Gupta 1999). La base LP se caracteriza por una decaimiento temporal razonablemente rápida (por lo tanto, ayudar a captar las características temporales locales) y muy buena en la localización de frecuencia (debido a que la transformada de Fourier en esta base se define sobre un intervalo finito). La expresión analítica para esta wavelet es:

$$\Psi = \frac{1}{\pi(\sqrt{\sigma - 1})} \frac{\sin(\sigma\pi t) - \sin(\pi t)}{t} \quad (3.33)$$

donde:

$$t = \frac{(t-b)}{a}$$

Ψ , wavelet madre

t, tiempo

b, parámetro de localización

σ , constante usada en la discretización de a. Cuando $\sigma = 2$ es la base LP.

2.1.4.4 Cálculo de la energía usando el análisis wavelet

El total de energía, E, de una señal es la suma del cuadrado de sus valores y se escribe como:

$$E = \int_0^t f^2(t) dt \quad (3.34)$$

donde t es el tiempo.

La transformada wavelet descompone una señal simultáneamente en tiempo y

frecuencia. De la misma manera, la energía contenida en una señal se puede evaluar en el dominio del tiempo y frecuencia. Hasta aquí, la energía no representa la energía física del sistema, pero, es proporcional a esta. La preocupación principal es la variación en la contribución de los componentes temporales en diferentes frecuencias del total de energía. De acuerdo con la ecuación de descomposición, la unidad $W_{\Psi} f_{a,b}$ es longitud entre el tiempo, la escala a de la wavelet toma el orden del contenido de la frecuencia local, y b localiza la función base wavelet en $t = b$ y en la vecindad. La energía total de $f(t)$ en términos de diferentes escalas (frecuencias) se obtiene usando los coeficientes de la wavelet:

$$E = \int \int_{a,b} W_{\Psi}^2 f_{a,b} dt \quad (3.35)$$

Aunque se use la CWT, los datos se manejan en forma discreta, por lo tanto; el nivel de energía de una señal en particular se obtiene con el cuadrado del módulo de los coeficientes de la wavelet (Farge, 1992), y la "energía wavelet instantánea", o "densidad de energía wavelet", se define como:

$$dE_{a,b} f(t) = W_{\Psi}^2 f_{a,b} \quad (3.36)$$

La energía acumulada contenida en la escala a^{th} se puede escribir como:

$$E_{a,b} = dt \sum_b dE_{a,b} f(t) = \sum_b W_{\Psi}^2 f_{a,b} \quad (3.37)$$

donde: dt es el período de muestreo.

La WT se define como un análisis en la escala de tiempo rara vez en el tiempo frecuencia, hay una frecuencia central media (f en Hz) asociada con cada escala de energía, que puede representarse en el dominio de las pseudo frecuencias cuando las escalas se rempazan por frecuencias centrales. El espectro wavelet marginal (Marginal Wavelet Spectrum, MWS) se obtiene cuando las energías se acumulan sobre el tiempo y se grafican contra las frecuencias centrales.

La energía acumulada contenida en las frecuencias f^{th} para cualquier tiempo t puede escribirse como:

$$E_{f,t} = \Delta t \sum_{t=0}^t dE_{f,t} \quad (3.38)$$

2.2 Ejemplos de análisis: Usando FT, STFT, HHT, y WT

2.2.1 Señal 1

En la señal $s = \begin{cases} \cos(60\pi) & 0 \leq t \leq 2.5 \\ \cos(40\pi) & 2.5 < t \leq 5 \\ \cos(20\pi) & 5 < t \leq 7.5 \\ \cos(10\pi) & 7.5 < t \leq 10 \end{cases}$ que se muestra en la Figura 3.2, hay cuatro

frecuencias (30, 20, 10, y 5 Hz) en diferentes intervalos de tiempo. En este ejemplo, la señal se estudiará usando FT, STFT, HHT y WT.

El espectro de potencia de estos métodos se muestra en la Figura 3.3. Todos los métodos indican en donde están los picos de frecuencia y no son exactamente los mismos. Normalmente, en altas frecuencias la wavelet es muy amplia en el espacio de la frecuencia; por lo tanto, se ven los picos de alta frecuencia en el espectro, al menos que su energía es muy grande, se desvanecen. En grandes escalas de la wavelet, la wavelet se angosta en la frecuencia, por lo tanto los picos son más afilados y tienen una gran amplitud (Torrence y Compo, 1998). Las frecuencias bajas y altas en una señal son igualmente importantes, entonces los coeficientes de la wavelet se elevan al cuadrado de las escalas usadas en el análisis. Pero, en situaciones donde las componentes de baja frecuencia son de más interés y las altas frecuencias son ruido, los coeficientes cuadrados de la wavelet original dan los resultados en el rango de frecuencias bajas. Se uso una ventana Guassiana de 500 puntos y una longitud de 250 puntos se selecciono en el análisis de la STFT.

En la Figure 3.4 se muestra el espectograma tridimensional que relaciona el tiempo-frecuencia y amplitud. Para esta figura, todas las frecuencias tienen la misma amplitud como en el análisis regular FT. La Figura 3.5 muestra el escalograma bidimensional de STFT de la señal. El escalograma es la vista bidimensional de la representación tridimensional del tiempo-frecuencia-amplitud, sobre el plano tiempo-frecuencia. Los intervalos de frecuencia y tiempo cuando existe frecuencia se pueden observar en la figura. El método STFT toma las frecuencias máximas y dibuja una envolvente de FAS. Sin embargo, en los límites de la frecuencia se observa valores de frecuencia espurias, que no es un efecto deseable.

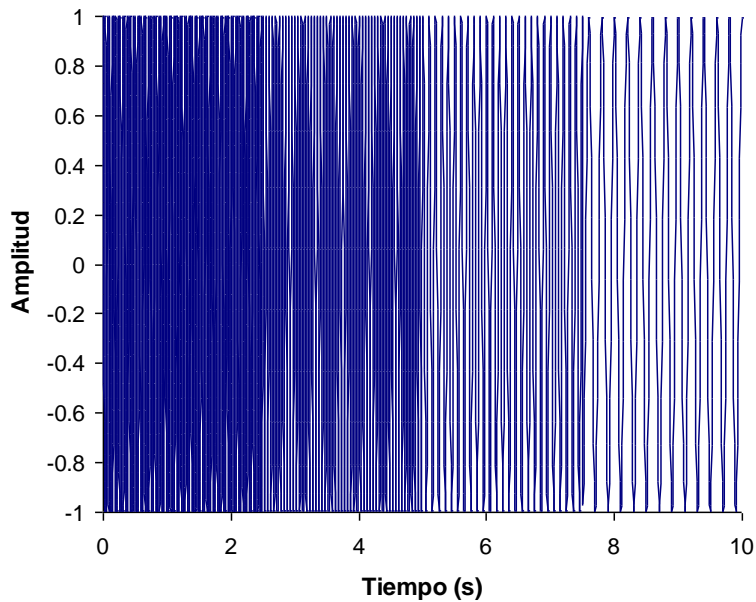


Figura 3.2. Señal de suma de cosenos.

La HHT también muestra frecuencias máximas correctamente. Cuando la señal no es periódica, y no simple como esta señal hipotética, la selección de la parte de la señal que debe ser repetida llega a ser difícil.

La gráfica de tiempo-frecuencia-amplitud con la WT y el escalograma bidimensional correspondiente se ve en la Figura 3.6 y 3.7 respectivamente. El escalograma wavelet bidimensional se llama también mapa wavelet. Durante toda esta tesis, se usará escalograma. Se observa que la WT da una solución de altas y bajas frecuencias.

Aunque la solución de la WT es muy pobre conforme aumentan la frecuencia, es capaz de tomar incluso la frecuencia más grande (30Hz) de la señal con excelente tiempo de localización que es muy aceptable. Entre los métodos usados en este ejemplo, la WT es el óptimo porque es fácil de aplicar y los resultados son aceptables.

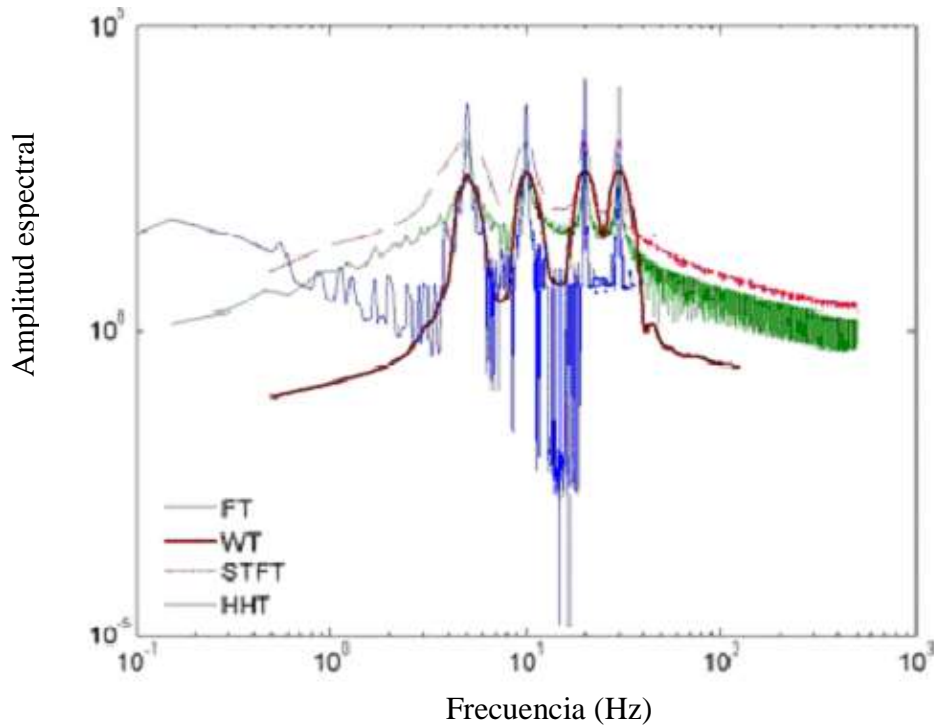


Figura 3.3. Espectro de potencia de la suma de cosenos, usando FT, WT, STFT y HHT.

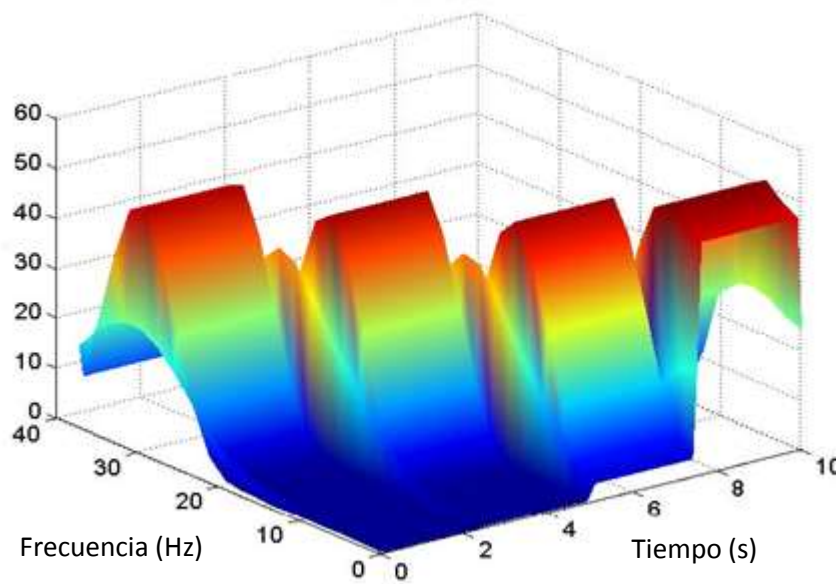


Figura 3.4. Espectrograma tridimensional usando STFT de la señal suma de cosenos.

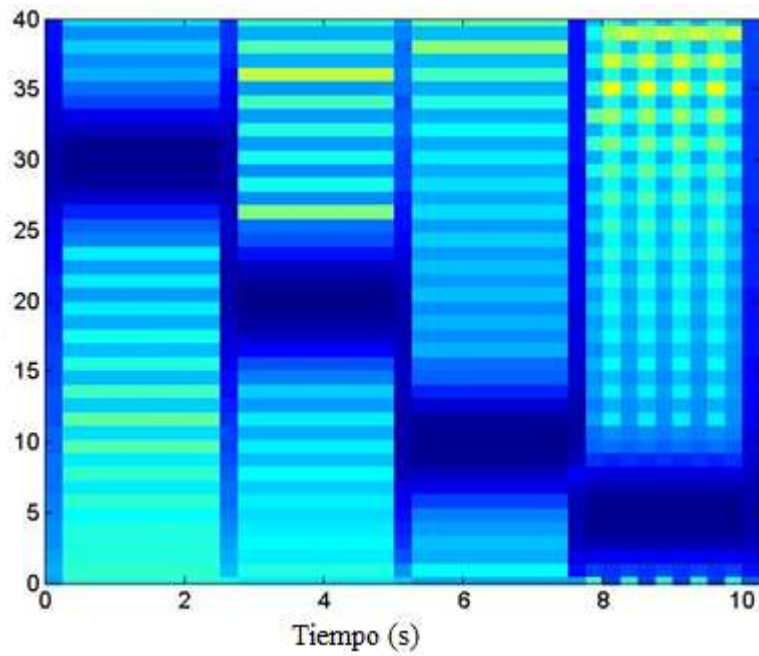


Figura 3.5. Espectrograma bidimensional usando STFT de la señal suma de cosenos.

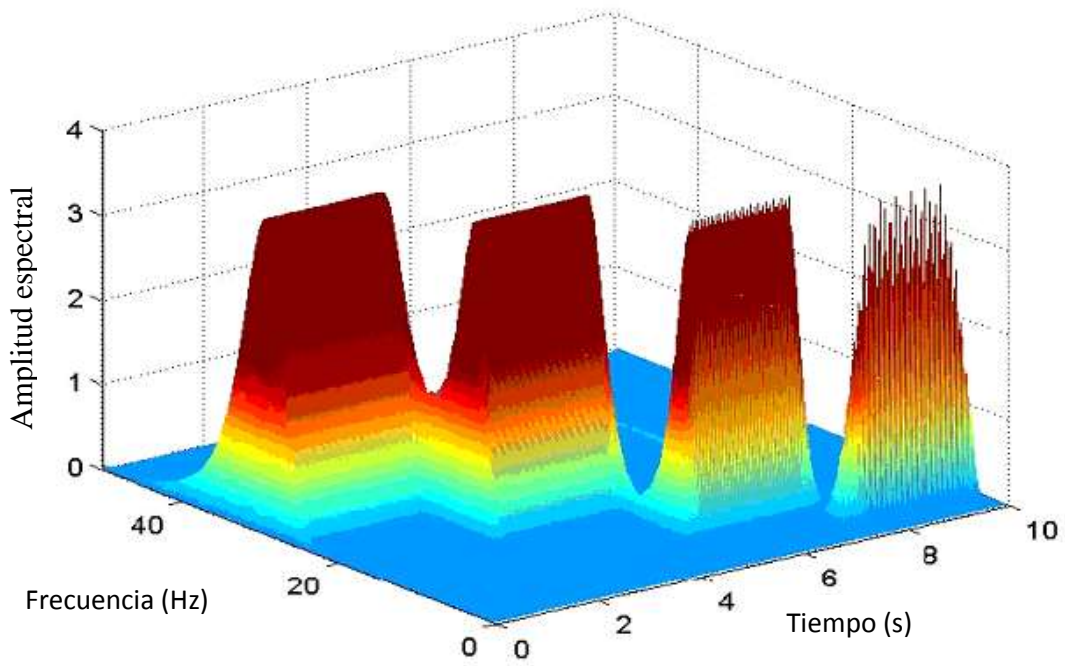


Figura 3.6. Escalograma tridimensional de la señal suma de cosenos por el método de la WT.

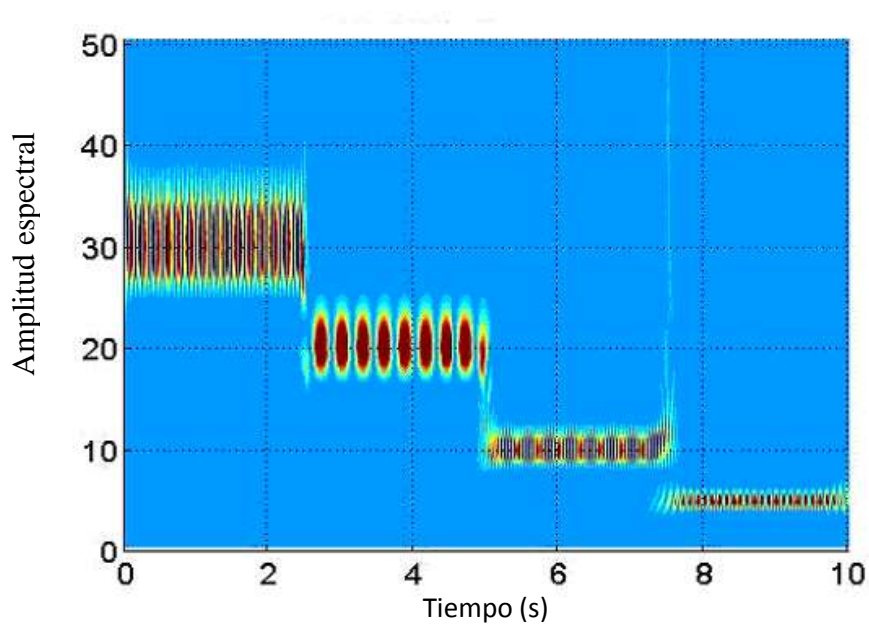


Figura 3.7. Escalograma bidimensional de la señal suma de cosenos usando la WT.

2.2.2 Señal 2

Una señal transitoria $s = \cos(2\pi t + 0.5 \sin(2\pi t)) e^{-0.2t} + 0.05 \sin(30\pi t)$ se muestra en la Figura 3.8.

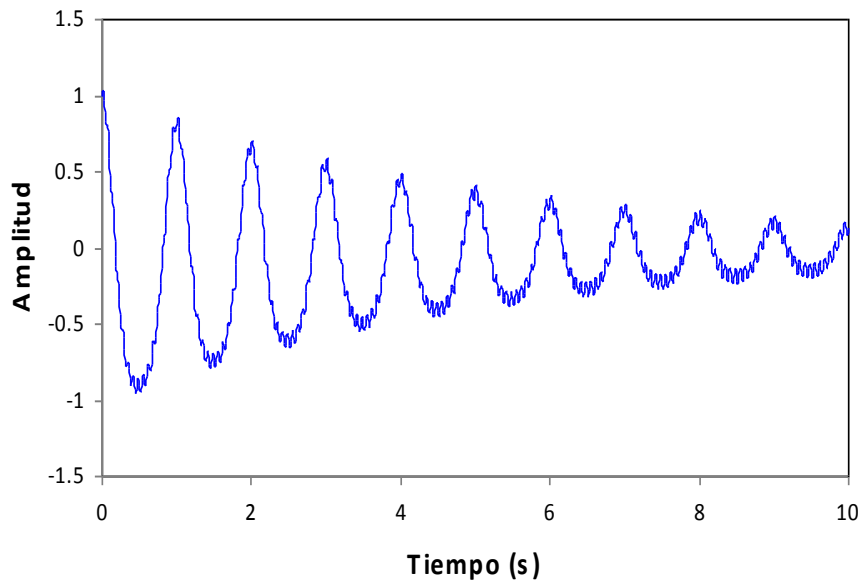


Figura 3.8. Señal transitoria.

El resultado de las distribuciones espectrales de potencia de la FT, STFT, HHT y WT se presenta en conjunto con la Figura 3.9. Los métodos de la FT y STFT dan altas frecuencias irreales, mientras que la HHT y WT no lo hacen.

El espectrograma tridimensional de STFT se presenta en la Figura 3.10. Se muestra que las frecuencias bajas cambian entre 0 Hz y 2.5 Hz, mientras que la fluctuación de frecuencia verdadera debe haber tenido lugar alrededor de 1 Hz. La ineficiencia del método puede ser vista en la Figura 3.11, donde el espectrograma bidimensional se presenta. Las amplitudes más altas se representan con los colores más oscuros.

En la Figura 3.12 se muestra en forma tridimensional por el método HHT y en forma bidimensional en se muestra el espectrograma en la Figura 3.13. Se muestra el cambio en la frecuencia con el tiempo en los primeros modos. Sin embargo, no se ve el cambio de la amplitud en el tiempo donde varía la frecuencia.

La relación entre el tiempo-frecuencia y amplitud espectral resultado de la WT se muestra en la Figura 3.14. Aunque la resolución de la frecuencia no es del todo adecuada en 15 Hz y la frecuencia de la señal fluctúa alrededor de 1 Hz. La WT da una muy buena solución para frecuencias bajas, 15 Hz es relativamente una frecuencia alta, por lo tanto la WT puede ser usada como una herramienta en la estimación del contenido de tiempo-frecuencia-energía de una señal.

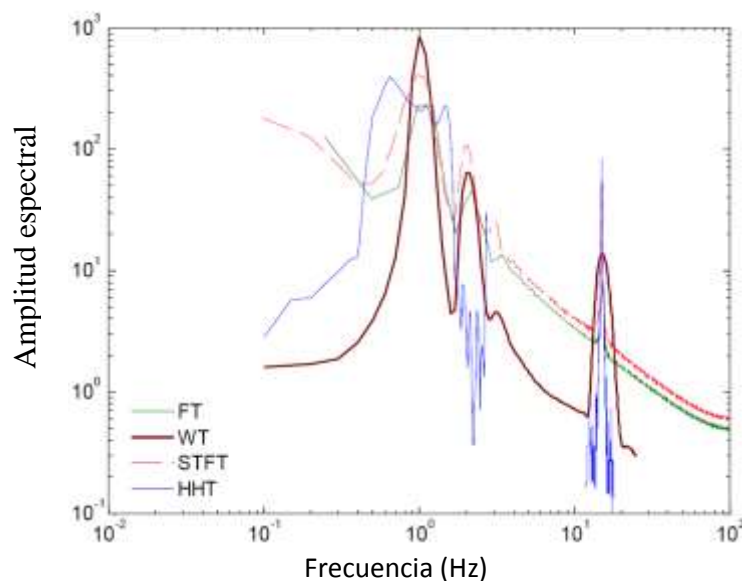


Figura 3.9. Espectro de potencia de la señal transitoria con FT, WT, STFT y HHT.

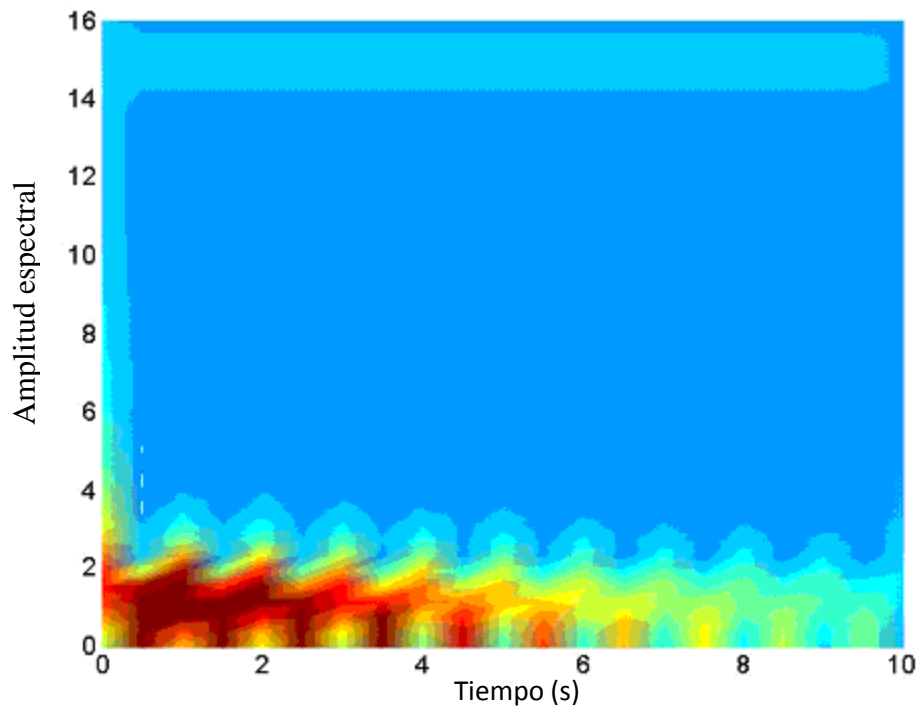


Figure 3.10. Espectrograma bidimensional de la señal transitoria, usando STFT.

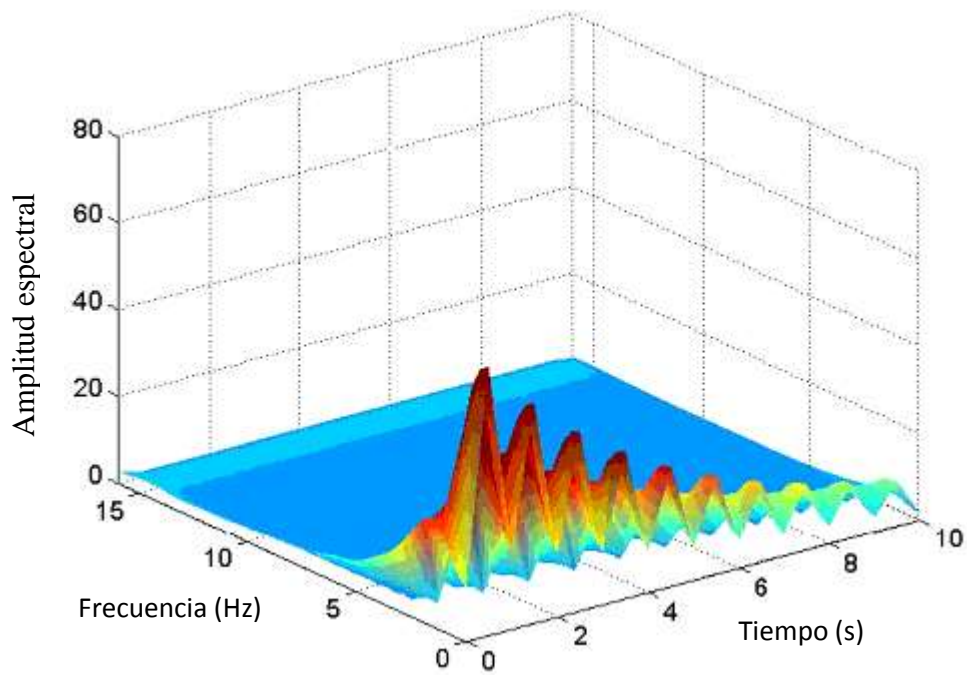


Figura 3.11. Espectrograma tridimensional de la señal transitoria por el método STFT.

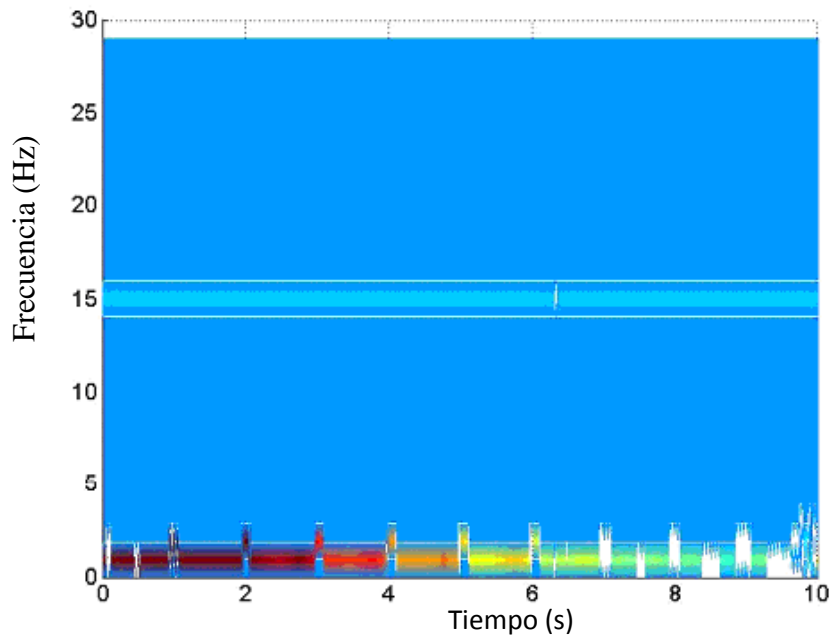


Figura 3.12. Espectrograma bidimensional por el método HHT.

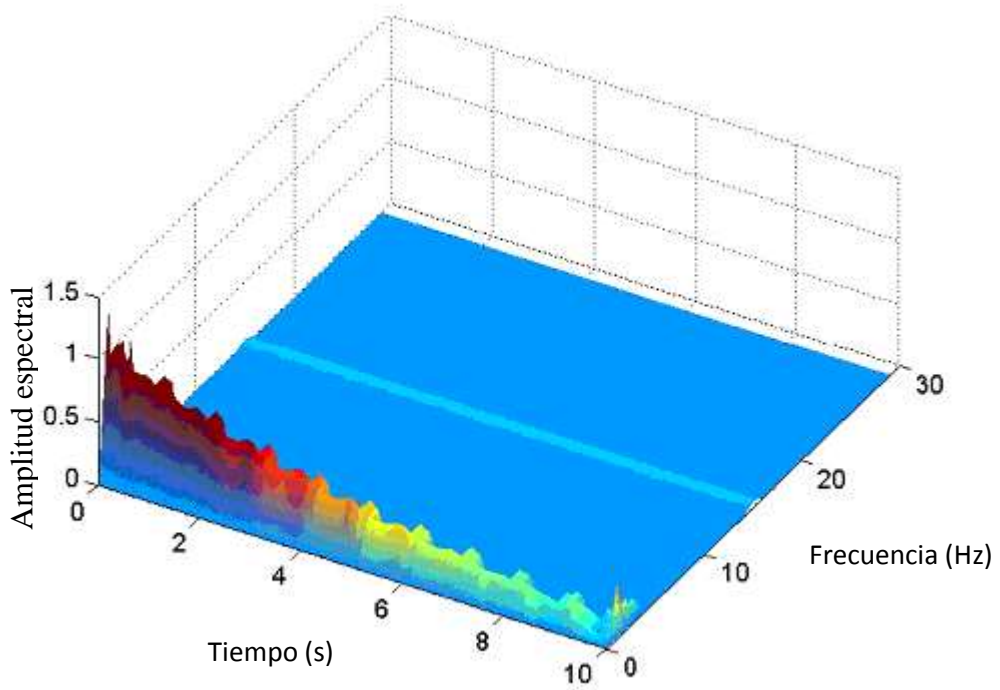


Figure 3.13. Espectrograma tridimensional de la señal transitoria, usando HHT.

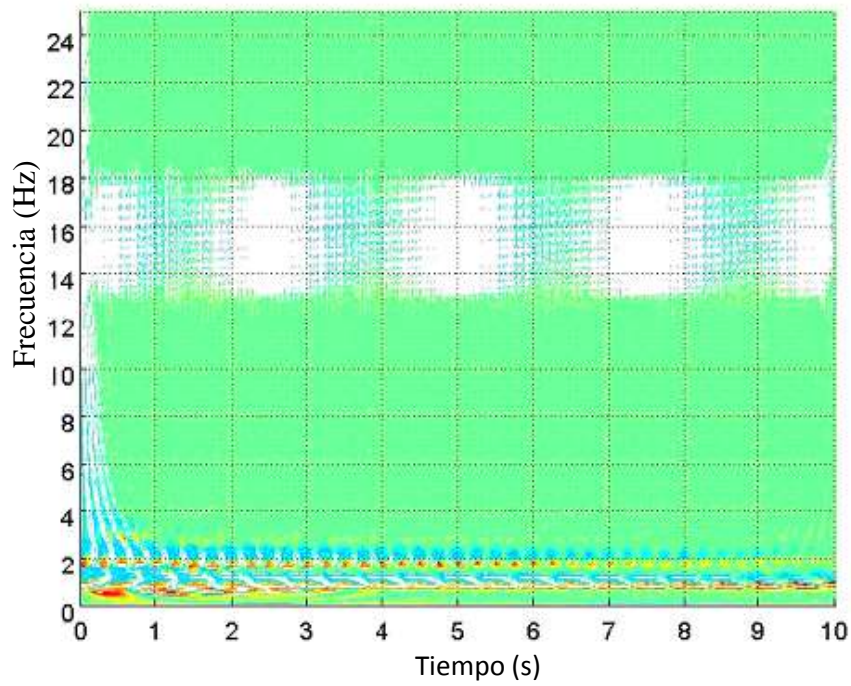


Figura 3.14. Escalograma bidimensional de la señal transitoria, usando la WT.

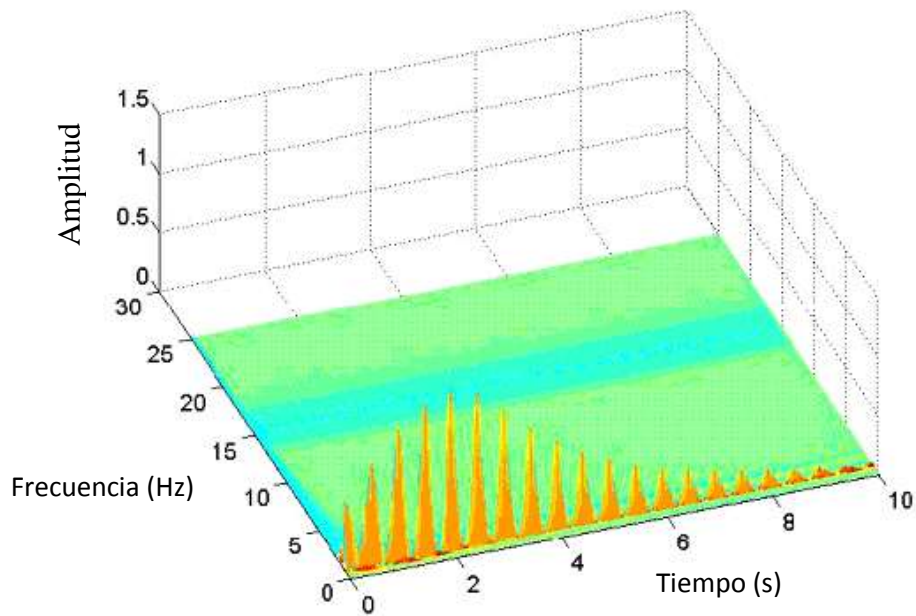


Figura 3.15. Escalograma tridimensional de la señal transitoria, usando la WT.

Finalmente, se muestra la importancia de la selección de una adecuada wavelet madre específica para la aplicación, el espectro de amplitud marginal wavelet, el escalograma tridimensional y bidimensional obtenidos usando la wavelet madre Haar se muestran en la Figura 3.16, Figura 3.17 y Figura 3.18, respectivamente. El contenido en alta frecuencia no se obtiene por medio de la wavelet Haar. Si la wavelet madre se selecciona adecuadamente, no hay razón para no usar el Método de Análisis Wavelet en determinar las características no lineales y no estacionarias de las señales.

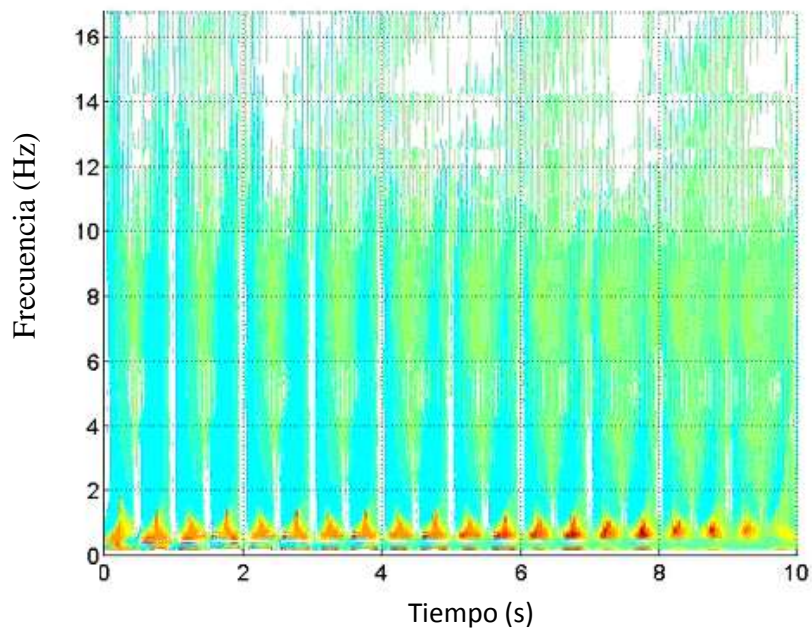


Figura 3.16. Escalograma bidimensional usando la wavelet Haar para la señal transitoria.

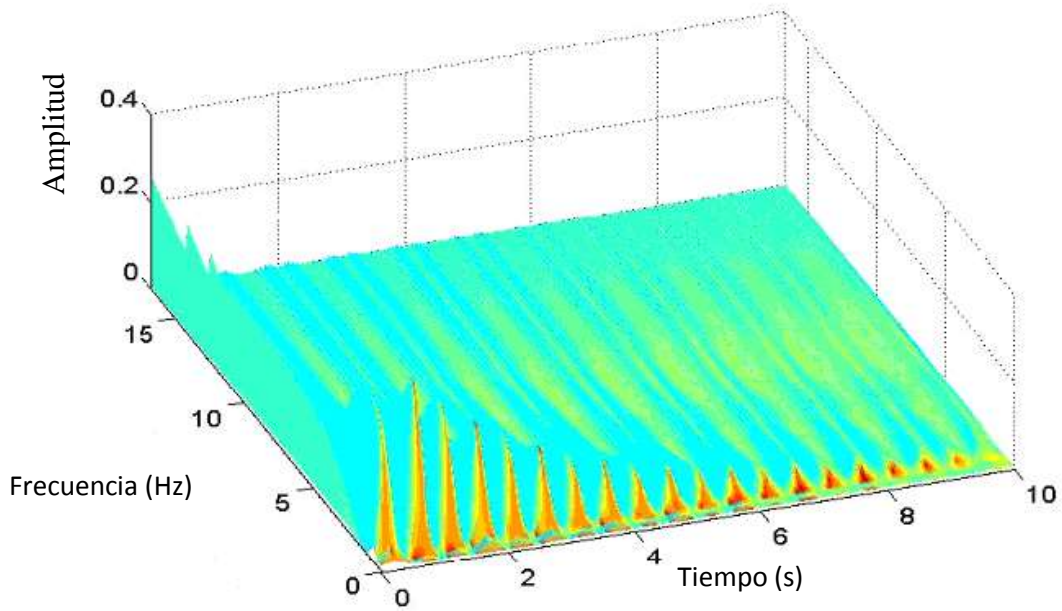


Figura 3.17. Escalograma tridimensional usando la wavelet Haar para la señal transitoria.

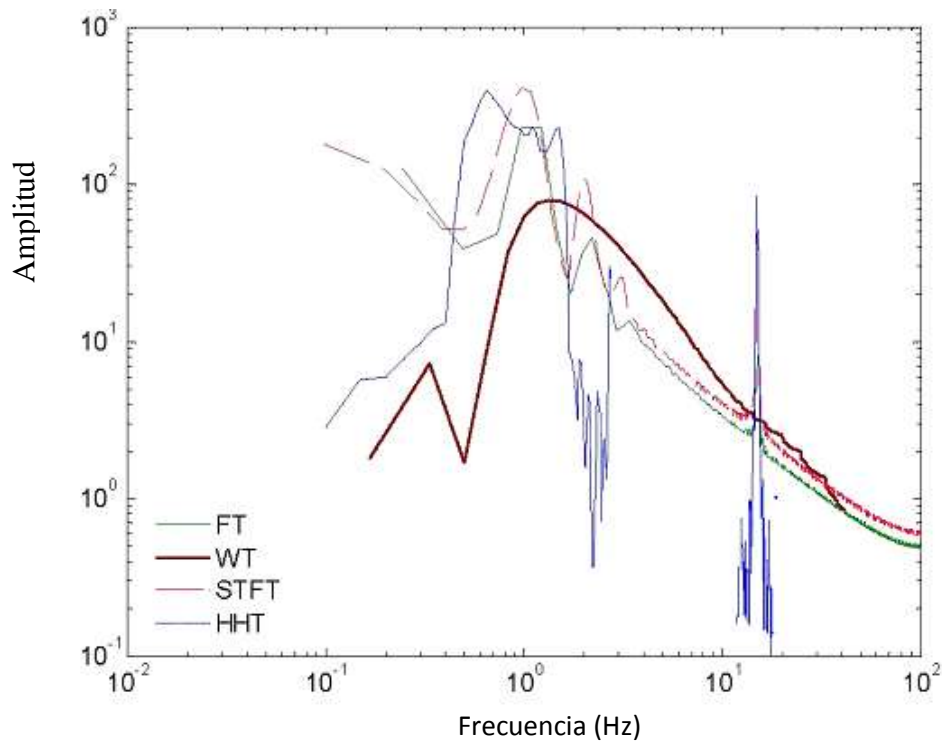


Figura 3.17. Espectro de potencia de la señal transitoria usando FT, WT(Haar), STFT y

HHT.

2.2.3 Señal 3, Turbulenta.

En el siguiente ejemplo, un registro de una señal transitoria en un flujo turbulento, se estudia por los métodos anteriores. La historia de tiempo del registro se ve en la Figura 3.19. Las distribuciones espectrales de potencia de la señal de cada método se presentan en la Figura 3.20. Solamente HHT da un espectro diferente, muestra un pico máximo en las frecuencias de 0.15 y 20 Hz. La WT da varios picos en 0.2Hz, 1.5Hz, 2Hz, 4Hz, y 15Hz. El espectro de STFT es algo plano, dando casi las mismas amplitudes para las frecuencias alrededor de 5Hz.

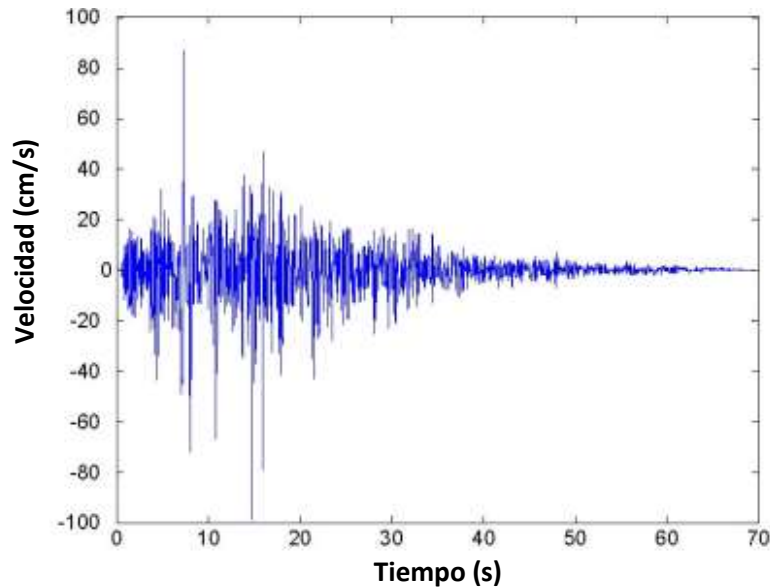


Figura 3.19. Señal de flujo turbulento.

La representación de HHT del tiempo - frecuencia - energía del mismo registro es diferente de la representación de STFT. En la Figura 3.21 se ve que hay un alto contenido de energía irreal en las frecuencias bajas en los bordes del eje del tiempo (origen y final de la señal).

La distribución en forma tridimensional tiempo-frecuencia-energía aplicando la transformada wavelet se muestra en la Figura 3.21.

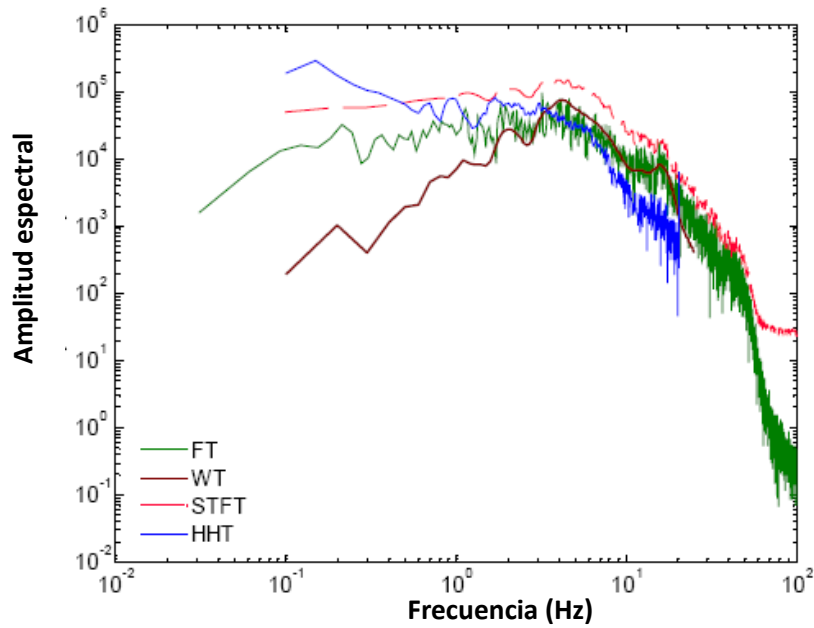


Figura 3.20. Espectro de potencia con FT, WT, STFT y HHT.

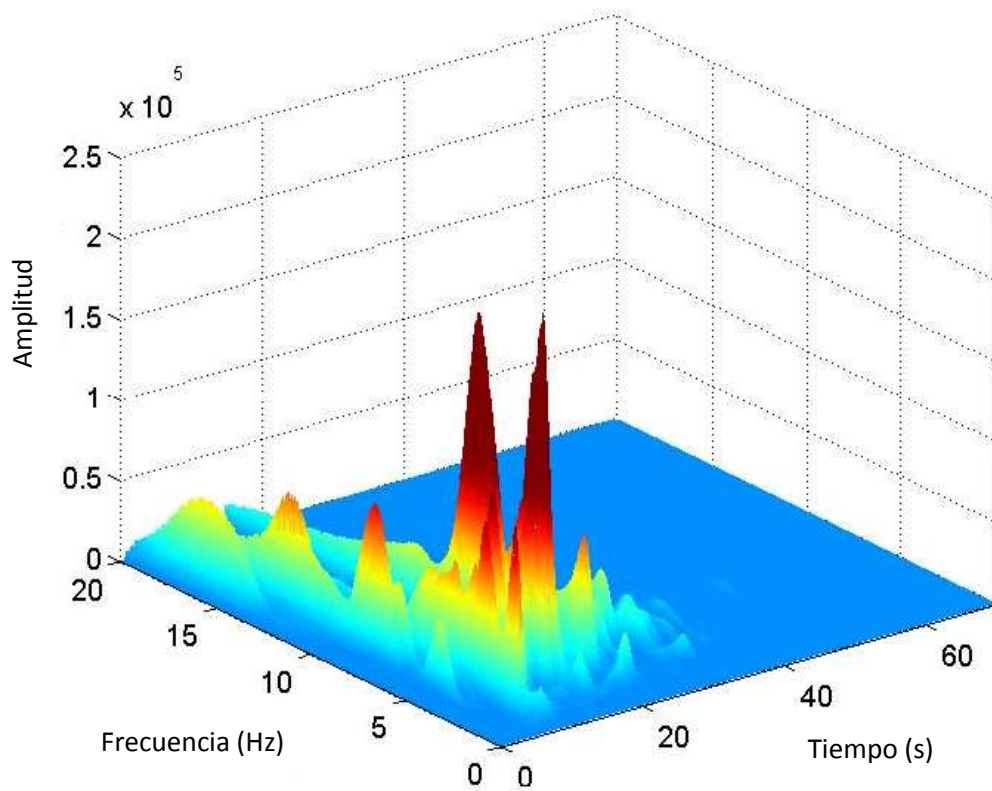


Figura 3.21. Escalograma tridimensional, usando WT.

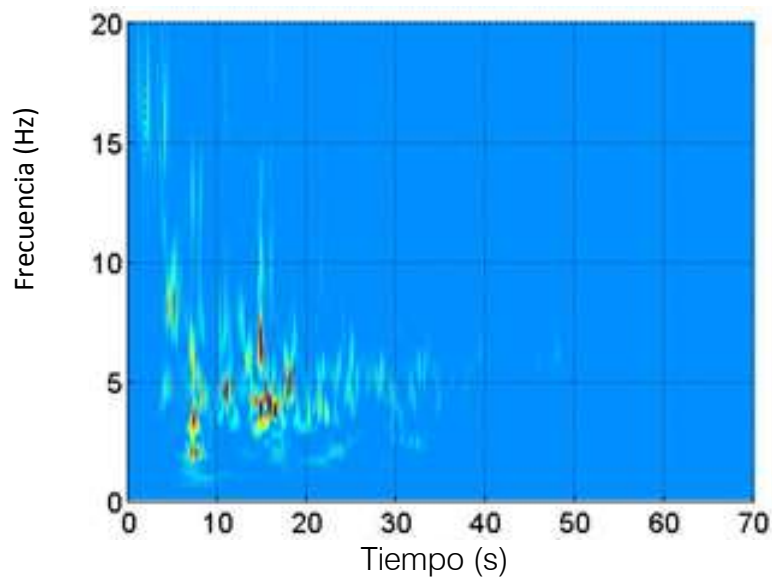


Figura 3.22. Escalograma utilizando la WT.

La distribución tridimensional de tiempo – frecuencia – energía con WT se muestra en la Figura 3.21. El espectro bidimensional frecuencia – tiempo se muestra en la Figura 3.22. En ambas figuras se muestran los resultados en diferente forma de presentación, donde se puede ver que no se pierde la información en el tiempo lo cual es una gran propiedad del método de la Transformada Wavelet. Así, como se puede ver en las dos figuras, para este caso, a los 5 s la energía se ve en la frecuencia de 8 Hz, a los 7 s domina la de 4 Hz, entre los 10 s y 20 s la frecuencia central se encuentra en el rango de 4 a 7 Hz y, finalmente, entre los 20 s y 30 s hay energía en una frecuencia de 5 Hz.

En este capítulo, se utilizaron varios métodos para el análisis de señales transitorias (no estacionarias) se estudiaron y se realiza un comparación. La primera señal con diferentes frecuencias estacionarias a lo largo del tiempo. La segunda señal tiene una frecuencia baja variando en baja frecuencia y una constante alta frecuencia. Por último la tercera señal que es transitoria y que no se puede decir que tiene una determinada frecuencia, el método de la transformada wavelet se encontró más apropiada para analizar las características transitorias.

En resumen se presenta las ventajas y desventajas principales de los métodos comparados en la Tabla 3.1.

Método de análisis	Ventajas	Desventajas
FT	<ol style="list-style-type: none"> 1) Buena información de la frecuencia. 2) Muy apropiada para señales estacionarias. 	<ol style="list-style-type: none"> 1) La información del tiempo se pierde. 2) Las funciones base son senoidales. 3) Altas frecuencias falsas.
STFT	<ol style="list-style-type: none"> 1) Poca información de la frecuencia temporal esta disponible. 	<ol style="list-style-type: none"> 1) La solución del tiempo y frecuencia dependen del ancho de la función ventana. 2) Se debe seleccionar la ventana y su longitud.
HHT	<ol style="list-style-type: none"> 1) Se dispone de información de tiempo-frecuencia. 2) No se necesitan funciones base. 	<ol style="list-style-type: none"> 1) Bajas frecuencias falsas dependiendo de la señal. 2) La implementación es muy dependiente de la señal y subjetiva. 3) Llega a ser muy inestable para un conjunto de muchos datos.
WT	<ol style="list-style-type: none"> 1) Información disponible de tiempo-frecuencia. 2) No existen frecuencias falsas. 3) Descripción analítica. 	<ol style="list-style-type: none"> 1) Selección de la wavelet madre es importante. 2) Solución de bajas frecuencias para altas y solución del tiempo para bajas frecuencias.

Tabla 3.1. Comparación de los diferentes métodos de análisis de señales.

CAPÍTULO 4: APLICACIONES

En este capítulo se ven aplicaciones de la WT a la hidráulica. Como primer acercamiento se tratan dos señales una de oleaje y un diente de sierra, ambas generadas por suma de senoides. Se analiza el caso de una señal transitoria medida en laboratorio y dos señales de apertura de válvula y cierre. Respecto a señales generadas por viento veremos 12 registros tomados a diferentes alturas, analizando las diferencias entre ellos. También se hará el análisis a registros de abatimiento y precipitación del acuífero de la Ciudad de México y registros para la detección de fugas en tuberías.

5.1 Señales teóricas

Se hace un análisis de las señales presentadas en (Echávez, 1996) haciendo la comparación con el método FFT. La primera señal es una suma de tres senoides, cuya función es:

$$f(t) = 0.8 \text{ sen}(t + 1) + 0.4 \text{ sen}(2t - 0.5) + 0.2 \text{ sen}(6t + 1.4) \quad (4.1)$$

que se aproxima a un oleaje. En la Figura 4.1 se muestra la señal y en la Figura 4.2 su espectro de Fourier.

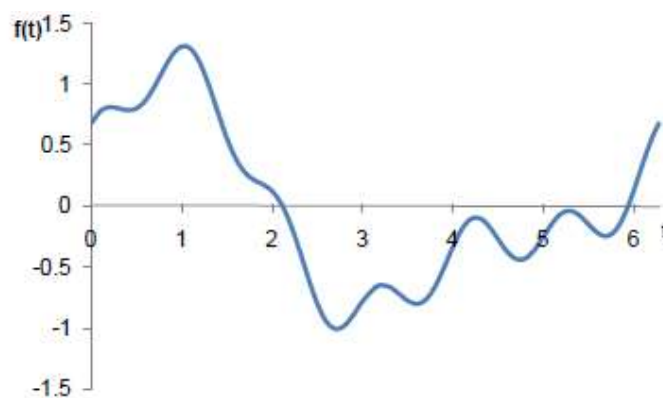


Figura 4.1. Señal de suma de tres senoides.

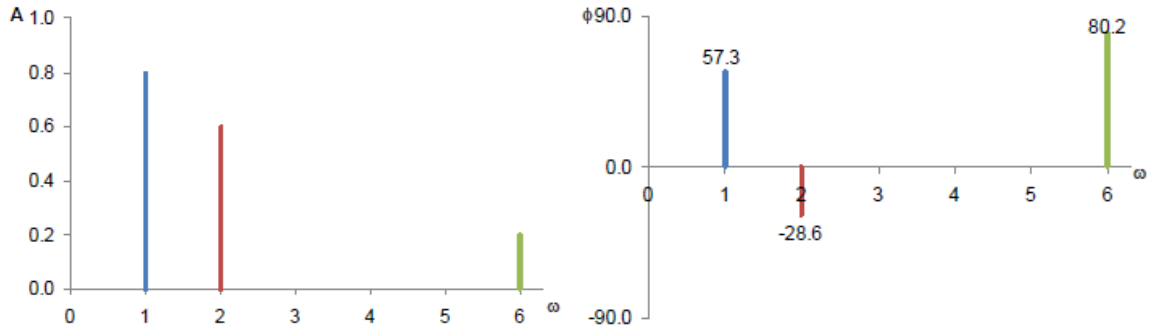
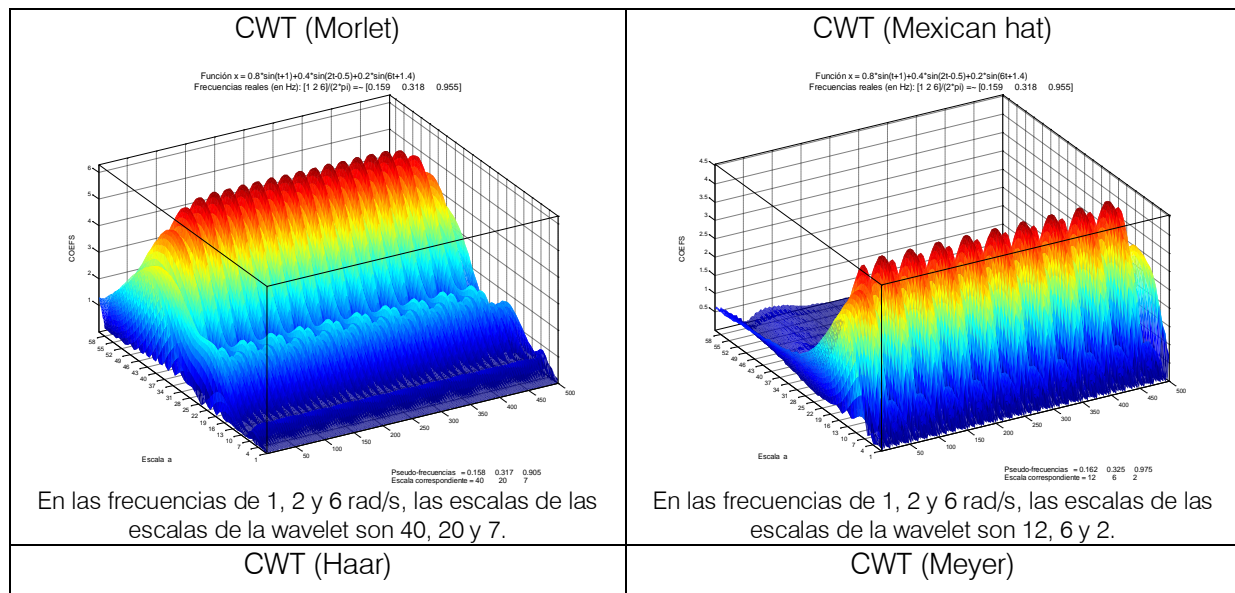
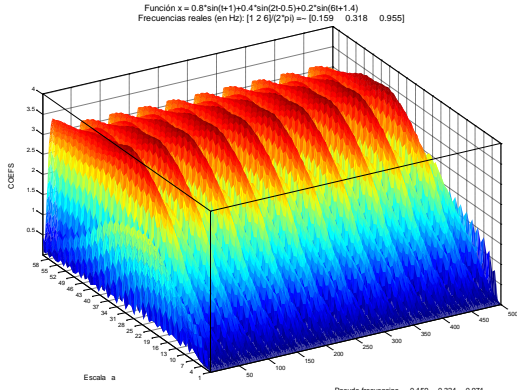


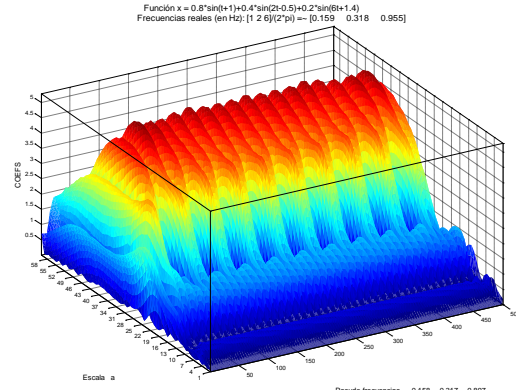
Figura 4.2. Espectro de frecuencia y se observa una representación discreta en cada frecuencia; en este caso 1, 2 y 6 rad/s.

Al aplicar diferentes CWT a la señal de tres senoides, que se muestra en la figura 4.3, se pudo observar que para las cinco wavelets (Morlet, Mexican hat, Haar, Meyer y Meyer discreta) se presentan las frecuencias que se observan en el análisis de Fourier y la información que nos da la wavelet es en que escala se presentan estas frecuencias, en los cinco casos son distintas éstas escalas, pero entre ellas siguen las mismas relaciones de las frecuencias de 1, 2 y 6 rad/s.



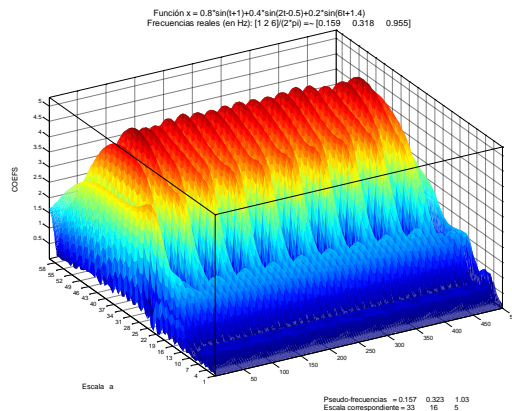


En las frecuencias de 1, 2 y 6 rad/s, las escalas de las wavelet son 49, 24 y 8.



En las frecuencias de 1, 2 y 6 rad/s, las escalas de las wavelet son 34, 17 y 6.

CWT (Meyer Discreta)



En las frecuencias de 1, 2 y 6 rad/s, las escalas de las wavelet son 33, 16 y 5.

Figura 4.3. Comparación de diferentes wavelets aplicadas a la señal de tres senoides.

Ahora se analiza una señal en diente de sierra (una combinación entre rampas y escalones) de la función:

$$f(t) = \text{sen}(t) - 0.5 \text{sen}(2t) + 0.33 \text{sen}(3t) - 0.25 \text{sen}(4t) \quad (4.1)$$

En la Figura 4.4 se muestra la señal y en la Figura 4.5 su espectro de Fourier.

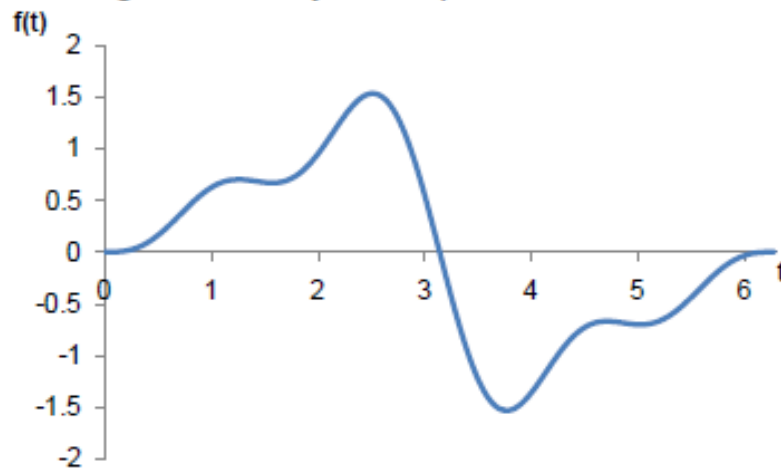


Figura 4.4. Señal en diente de sierra.

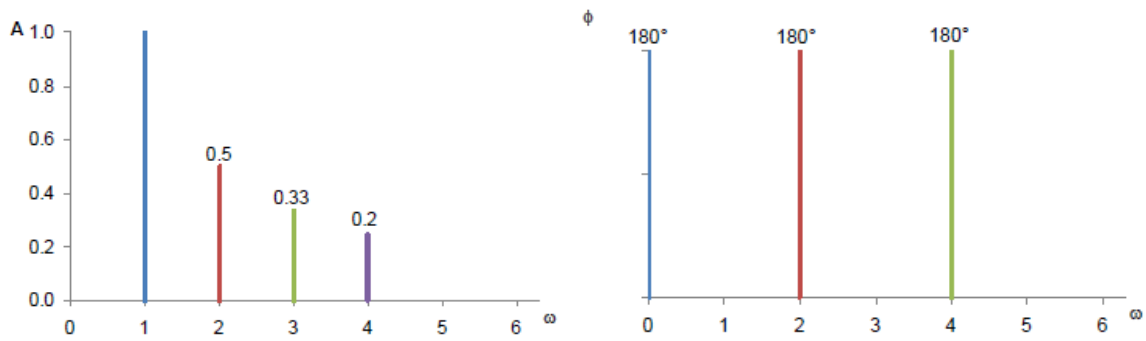


Figura 4.5. Espectro de frecuencia de la señal diente de sierra.

Al aplicar diferentes CWT a la señal de diente de sierra, que se muestra en la figura 4.4, se pudo observar que al aplicarle más términos de la suma de senoides, no cambia la energía total y el espectro es igual para todos los casos, ya que toma en cuenta las frecuencias del número de senoides que se tomarán en cuenta, como se muestra en la Figura 4.6.

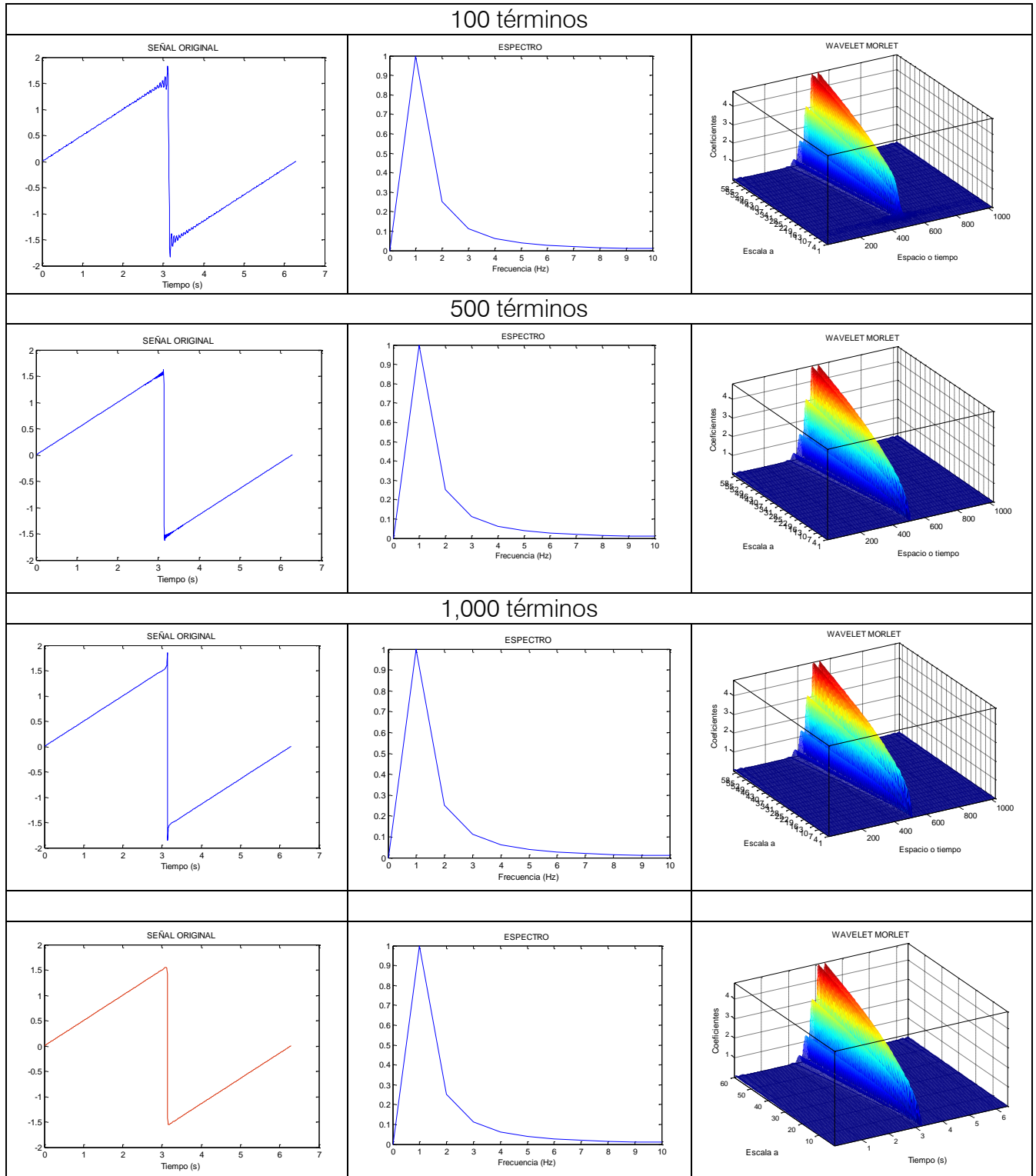


Figura 4.6. Espectro de frecuencia de la señal diente de sierra.

5.2 Señales Transitorias

Los transitorios generalmente se caracterizan por una corta duración, como se observa en la Figura 4.7, medida en el modelo de la Presa Chicoasén, Chis., México, que tiene una duración total aproximada de 0.5 s.

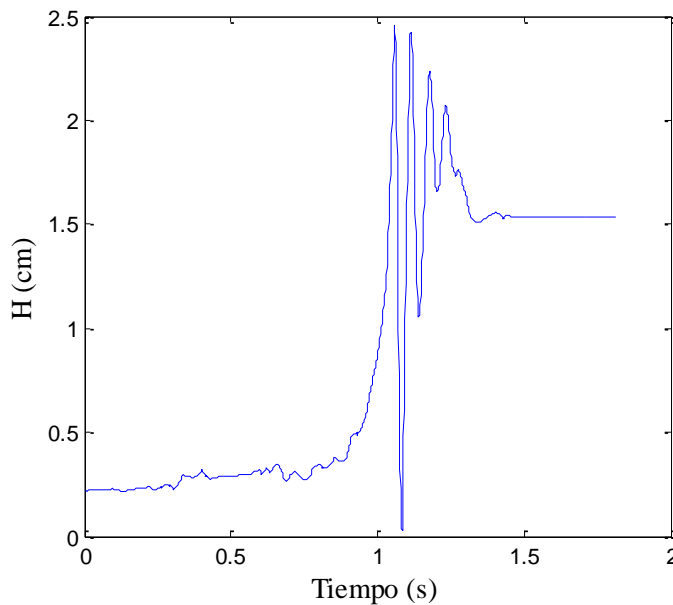


Figura 4.7. Señal transitoria del golpe de ariete.

La utilización de la Transformada Wavelet Continua para su análisis sirve para encontrar e identificar el transitorio, que por lo regular no se puede analizar mediante otras técnicas, ya sea por su baja frecuencia y su poca duración. Al realizar el análisis por medio de la Wavelet Morlet podemos observar que se concentra en frecuencias bajas en un rango que oscila entre 7 a 9 Hz en un corto tiempo, que se muestra en la Figura 4.8.

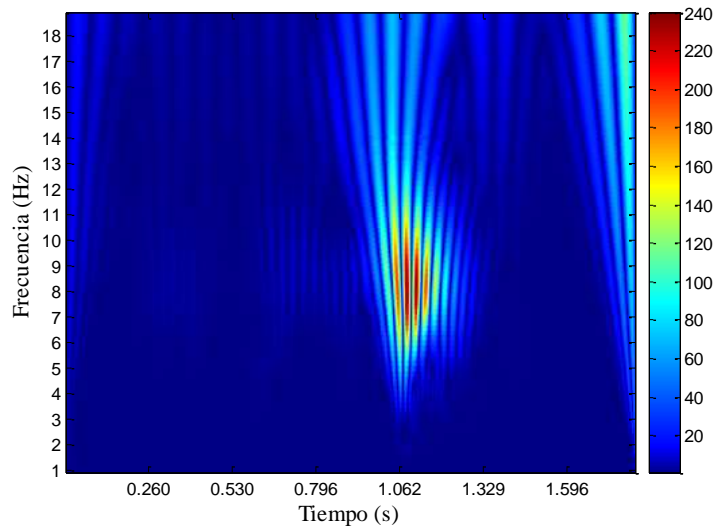


Figura 4.8. Escalograma utilizando la wavelet Morlet.

La distribución en forma tridimensional, tiempo-frecuencia-energía, aplicando la transformada wavelet se muestra en la Figura 4.9, en la cual se muestra un pico en el cual se concentra la mayor parte de la energía del transitorio.

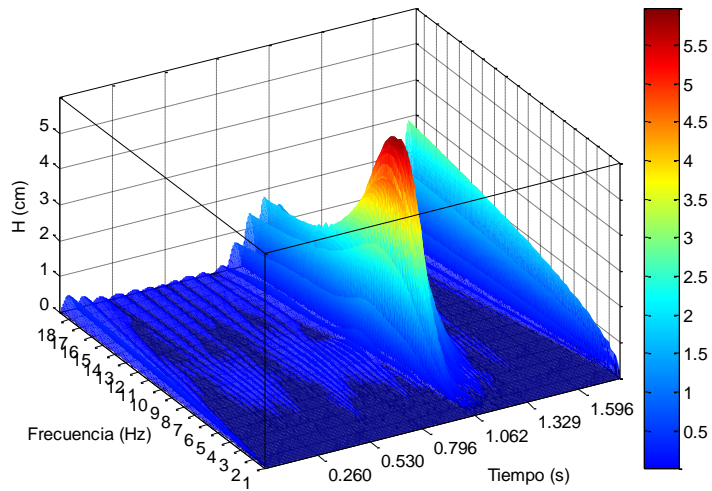


Figura 4.9. Escalograma tridimensional, usando WT.

5.3 Señal Turbulenta

Se tiene una señal transitoria en un flujo turbulento, que se muestra en la Figura 4.10. Utilizando el análisis wavelet nos ayuda a encontrar y visualizar estructuras coherentes de flujos turbulentos, identificando los esfuerzos turbulentos y la vorticidad, como se ve en los trabajos recientes de Keylock (2007).

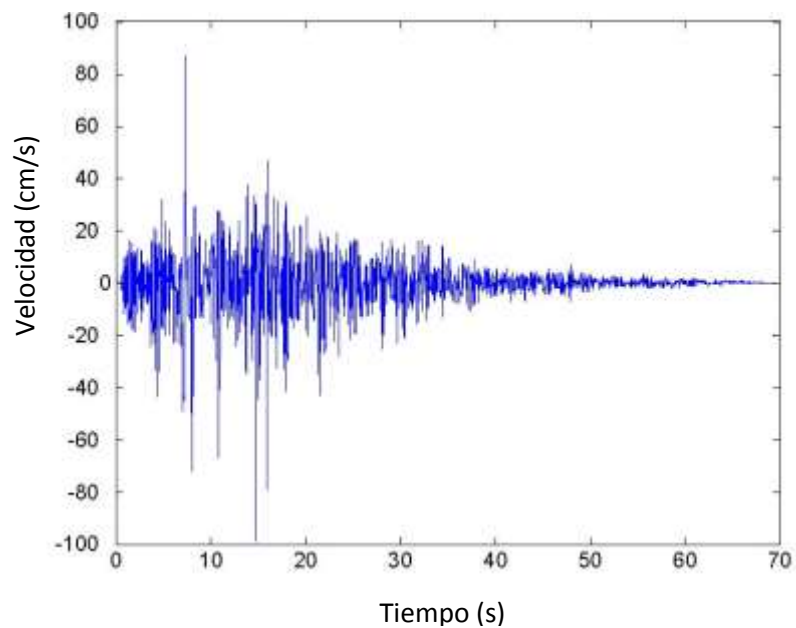


Figura 4.10. Señal de flujo transitorio turbulento.

La distribución en forma tridimensional tiempo-frecuencia-energía aplicando la transformada wavelet se muestra en la Figura 4.11, y en forma bidimensional en la Figura 4.12 conocida como escalograma.

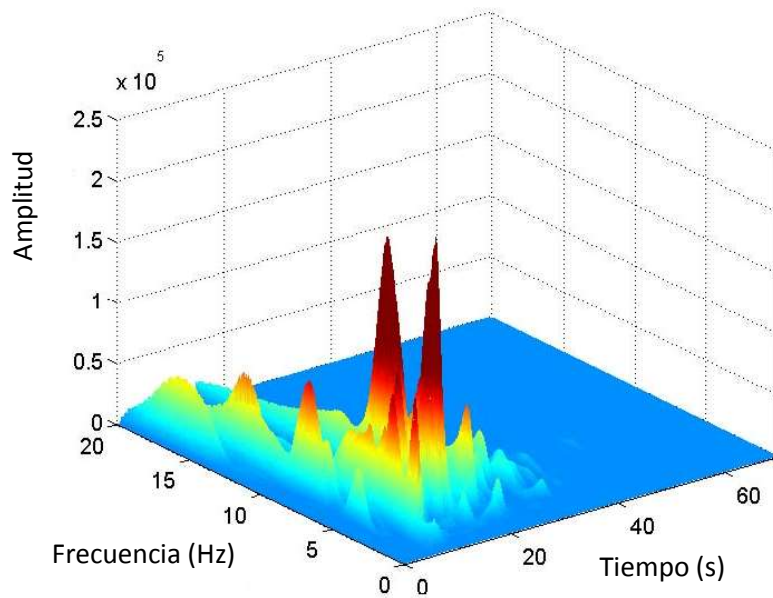


Figura 4.11. Escalograma tridimensional, usando CWT.

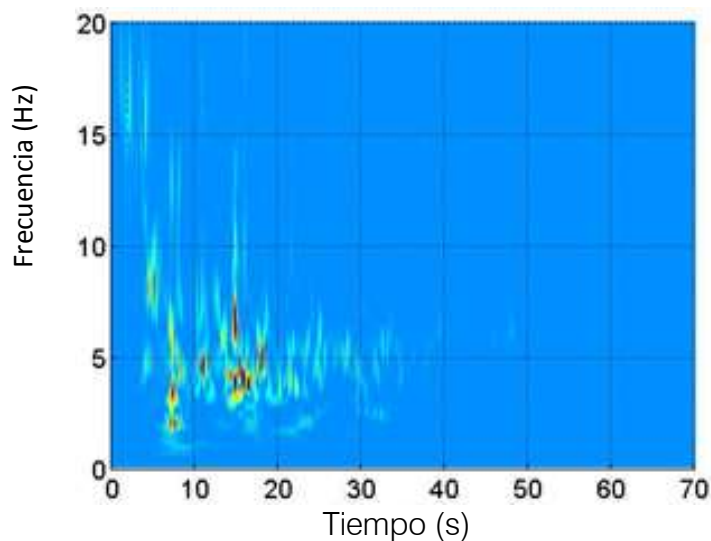


Figura 4.12. Escalograma utilizando la wavelet madre.

En ambas figuras se muestran los resultados en diferente forma de presentación, donde se puede ver que no se pierde la información en el tiempo lo cual es una gran propiedad del método de la Transformada Wavelet. Así, como se puede ver en las dos figuras, para este caso, a los 5 s la energía se ve en la frecuencia de 8 Hz, a los 7 s domina la de 4 Hz, entre los 10 s y 20 s la frecuencia central se encuentra en el rango de 4 a 7 Hz y, finalmente, entre los 20 s y 30 s hay energía en una frecuencia de 5 Hz.

5.4 Señal de viento y altura de ola

En el análisis de series de tiempo podemos mencionar como antecedente el trabajo realizado por Massel (2001), en el cual se hace referencia a la obtención de la energía y cómo se puede reconstruir una señal por medio de la transformada inversa. En el presente ejemplo se ve la importancia de contar con un mejor espectro de onda, con valores más reales, los cuales nos dan un diseño más cercano al óptimo. En la Figura 4.13 se muestra un ejemplo con una serie de datos de oleaje.

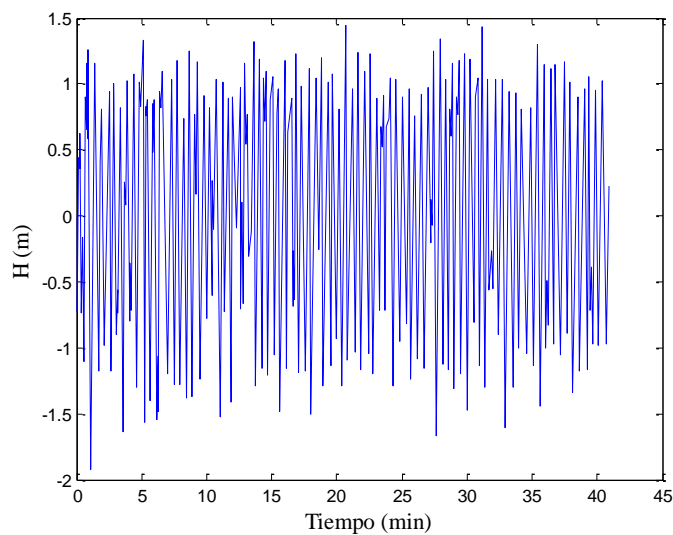


Figura 4.13. Señal de altura de ola.

En la Figura 4.14 se muestra el escalograma tridimensional correspondiente, aplicando la Wavelet Discreta Meyer, la cual se adapta mejor a los datos por analizar. Se ven dos picos de alta frecuencia con gran energía.

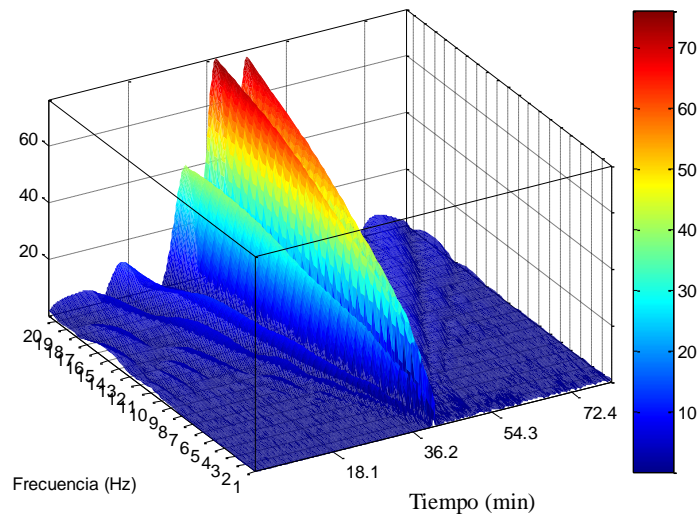


Figura 4.14. Escalograma tridimensional del oleaje, usando CWT.

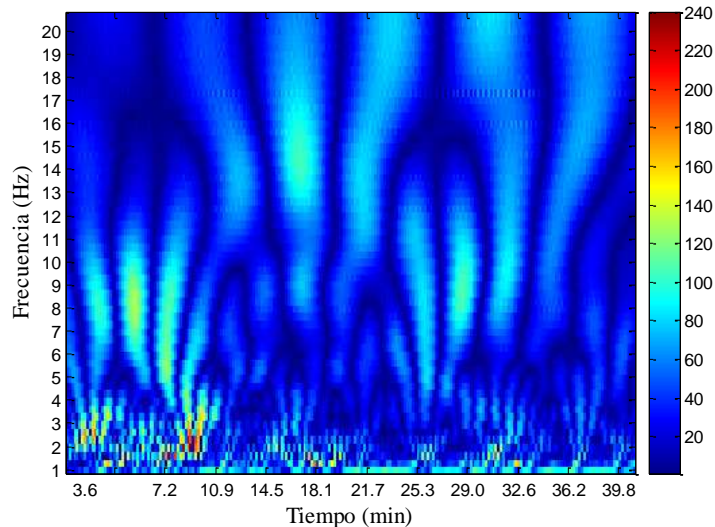


Figura 4.15. Escalograma del oleaje utilizando la wavelet Meyer discreta.

En la Figura 4.15 se muestra el escalograma bidimensional en el cual se observa que en bajas frecuencias sucede algo muy particular, que es la concentración de muy poca energía a lo largo de toda la serie de datos, como se observa en el rango de 1 a 10 minutos, con una frecuencia que oscila entre 2 y 3 Hz.

El uso y la explotación racional, costo-efectivo y sustentable de los recursos marítimos de un país requiere de una apropiada caracterización del clima marítimo. El desarrollo del viento, oleaje, mareas y corrientes presentes en una zona es esencial

para el desarrollo de actividades tales como diseño, construcción y mantenimiento de la infraestructura marítima y portuaria; operación de puertos y marinas; determinación de rutas de navegación; planeación de actividades costa fuera y protección civil entre otras.

La caracterización es apropiada y requiere de dos actividades fundamentales: mediciones en campo de las variables meteorológicas y oceanográficas, y el desarrollo de modelos numéricos que validen adecuadamente las predicciones antes dichas, ver Holthuijsen (2007) y Massel (2001).

En ingeniería marítima, la modelación del oleaje ha sido una de las principales líneas de investigación; mucho de los esfuerzos se han dirigido al desarrollo de modelos numéricos para reproducir la generación de oleaje por la acción del viento y su interacción con la costa.

La instrumentación disponible en la costa Mexicana sigue siendo baja; existe una importante red de mareógrafos operados por la Secretaría de Marina, Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México y del Centro de Investigación Científica y Posgrado de Ensenada. En este artículo se usó información de la estación número 42002 en posesión del National Data Buoy Center localizada en el Golfo de México en las coordenadas $25^{\circ}47'24''$ N, $93^{\circ}39'58''$ W, analizando la interacción del oleaje y viento para el mes de abril del 2008 ver Figura 3 y septiembre del 2008 ver Figura 7.

Una base de datos completa del campo de viento de acceso libre se encuentra el sitio Web www.cdc.noaa.gov que es el programa del National Center for Environmental Prediction/National Center for Atmospheric Research (NCEP/NCAR). El objetivo de este escrito es hacer un análisis de la velocidad de viento en campo, usando datos históricos medidos por las boyas, ver Kalnay (1996).

5.4.1 Co-escalograma

El escalograma proporciona la evolución de energía en el tiempo en un simple proceso del cuadrado de los coeficientes de la wavelet. Si los valores ajustados de los coeficientes se sustituyen por el producto de los coeficientes de la wavelet de dos diferentes procesos, el resultado es una vista de la correlación entre los procesos, ha esto se le conoce como co-escalograma, análogo al co-espectro en el análisis espectral. Como el escalograma, tiene la ventaja de revelar varios paquetes de alta y baja correlación en diferentes bandas de frecuencia. Ver Li y Nozaki (1997) y Li (1998).

La función de correlación cruzada wavelet entre dos señales x y y se define por la Transformada Wavelet Continua como:

$$C_{xy}(a, \tau') = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T_x(a, b)^* T_y(a, b + \tau') db \quad (4)$$

donde $T_x(a, b)^*$ y $T_y(a, b)$ son respectivamente la transformada wavelet de la señal x y y ; y el asterisco denota la conjugación compleja; τ es el periodo de tiempo de la señal y τ' es el retraso entre las dos señales. $C_{xy}(a, \tau')$ es la correlación cruzada entre los coeficientes de la wavelet de cada señal sobre el retraso τ en la escala a .

Las señales se dividieron en periodos mensuales y se le aplicó la CWT a las señales de velocidad de viento y altura de ola, después se le aplicó el coescalograma en la combinación de ambas señales como se muestra en las Figuras 4.16 a la 4.28.

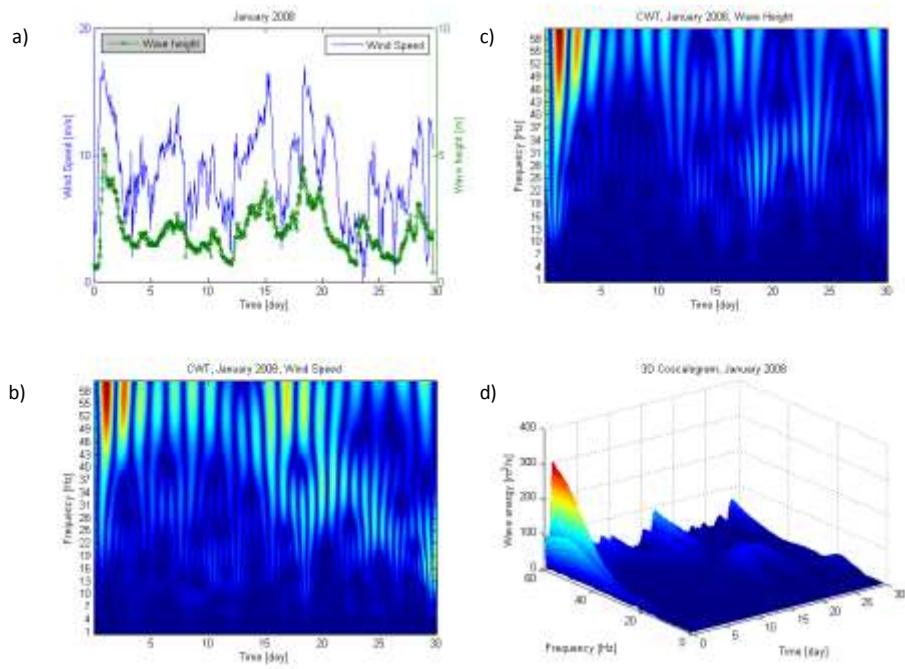


Figure 4.16. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, enero 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, enero 2008 y d) Coescalograma, enero 2008.

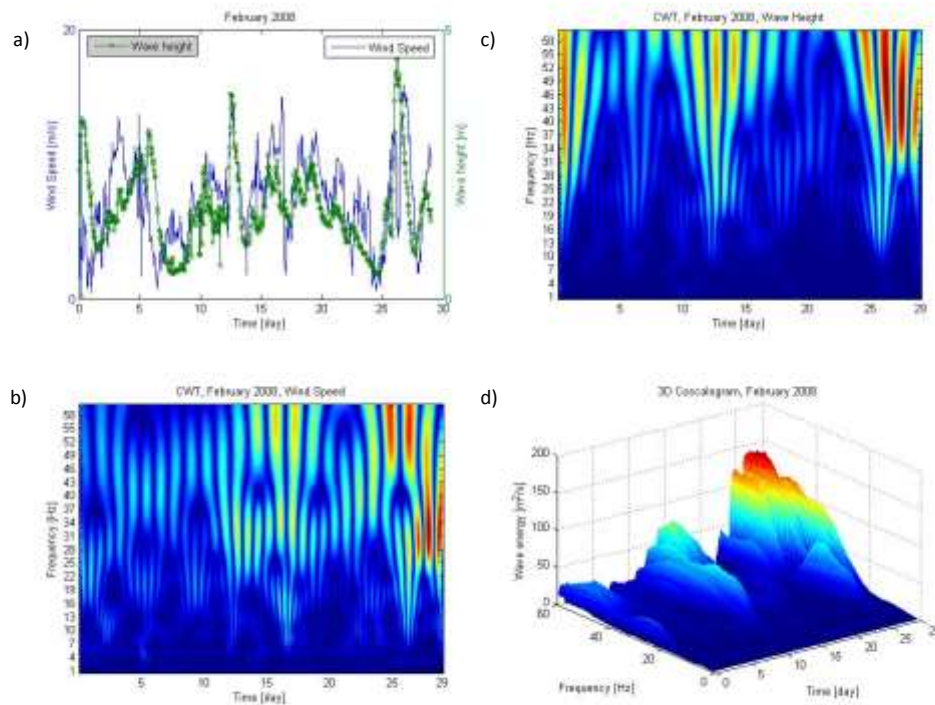


Figure 4.17. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, febrero 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, febrero 2008 y d) Coescalograma, febrero 2008.

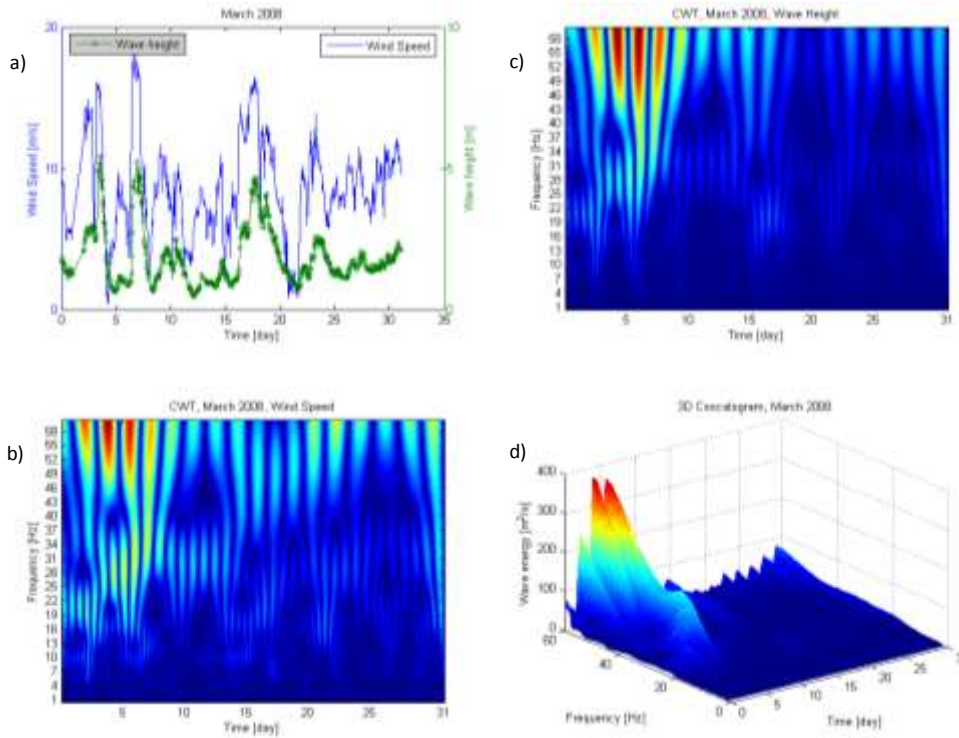


Figure 4.18. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, marzo 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, marzo 2008 y d) Coespectrograma, marzo 2008.

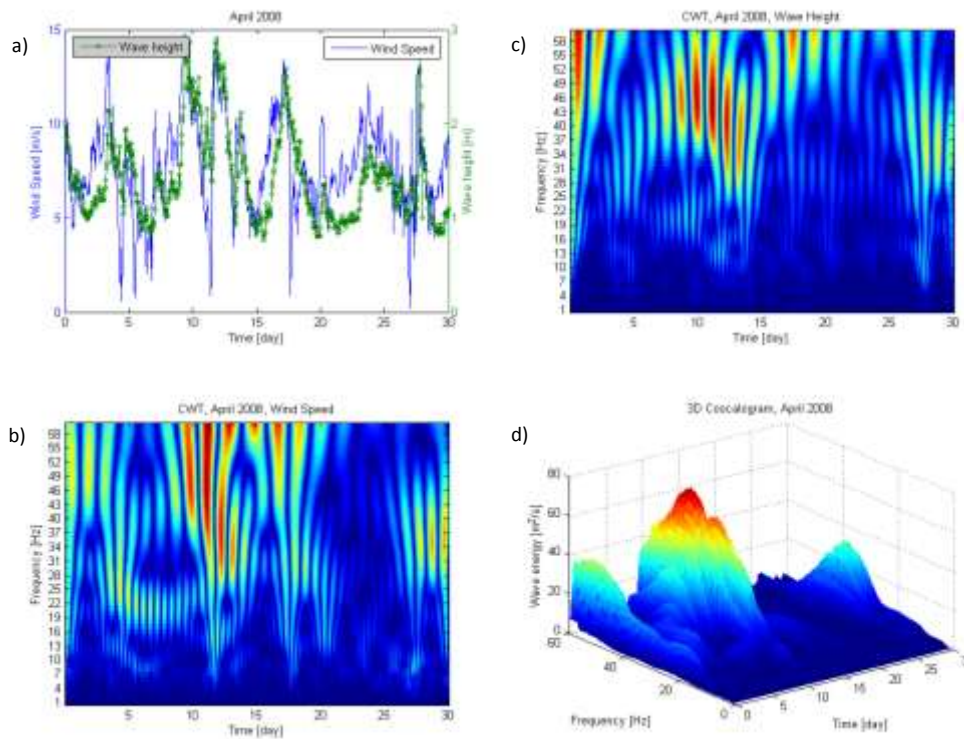


Figure 4.19. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, abril 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, abril 2008 y d) Coespectrograma, abril 2008.

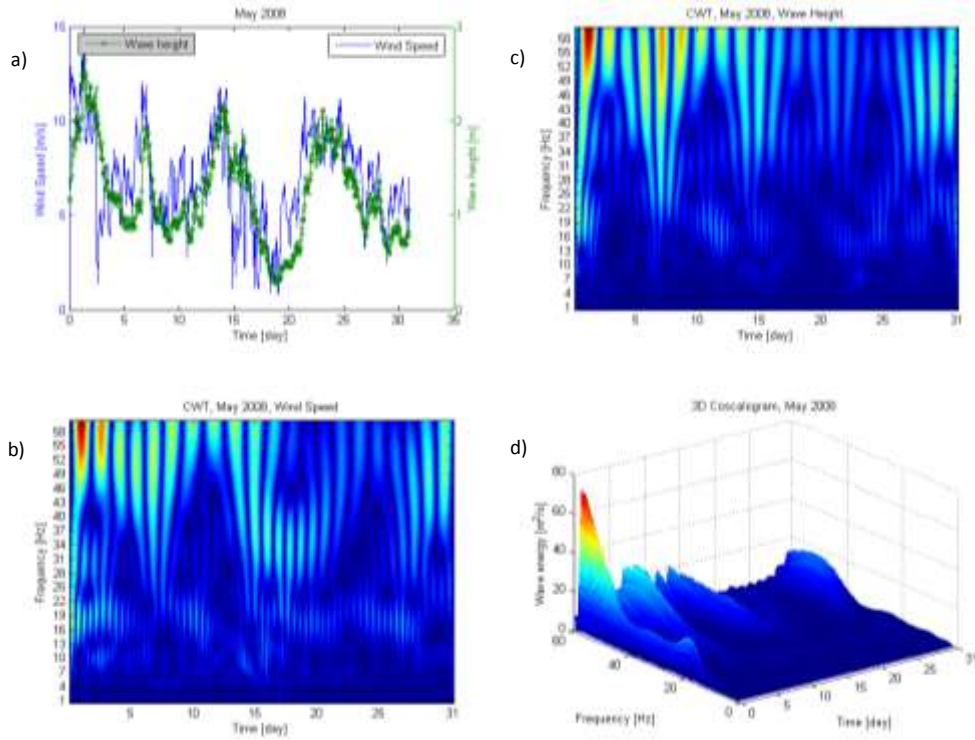


Figure 4.20. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, mayo 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, mayo 2008 y d) Coescalograma, mayo 2008.

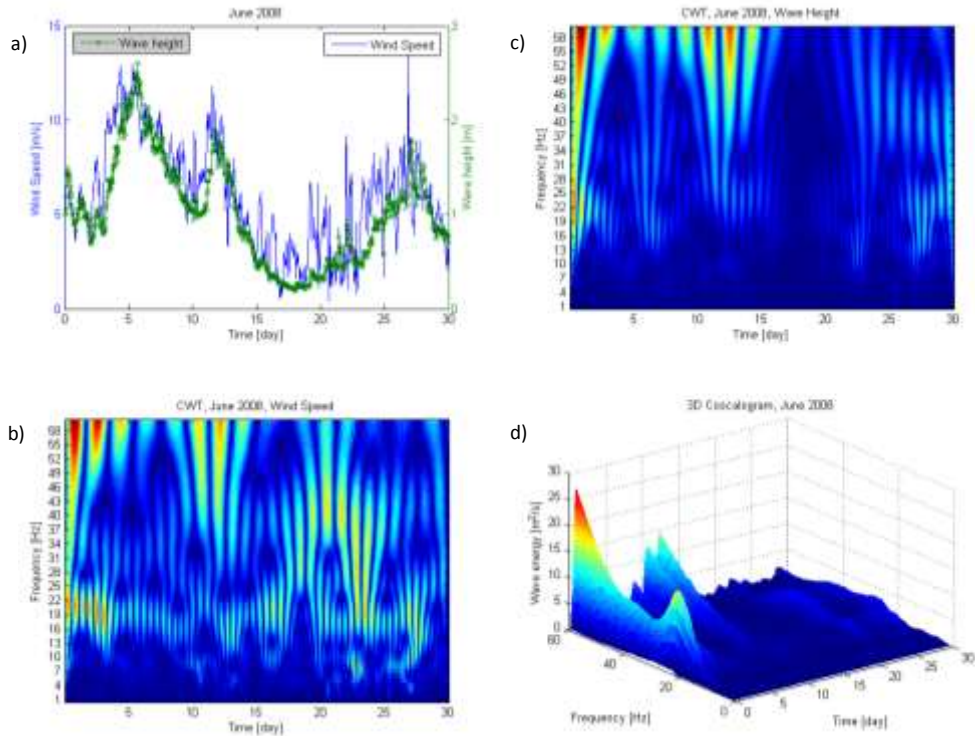


Figure 4.21. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, junio 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, junio 2008 y d) Coescalograma, junio 2008.

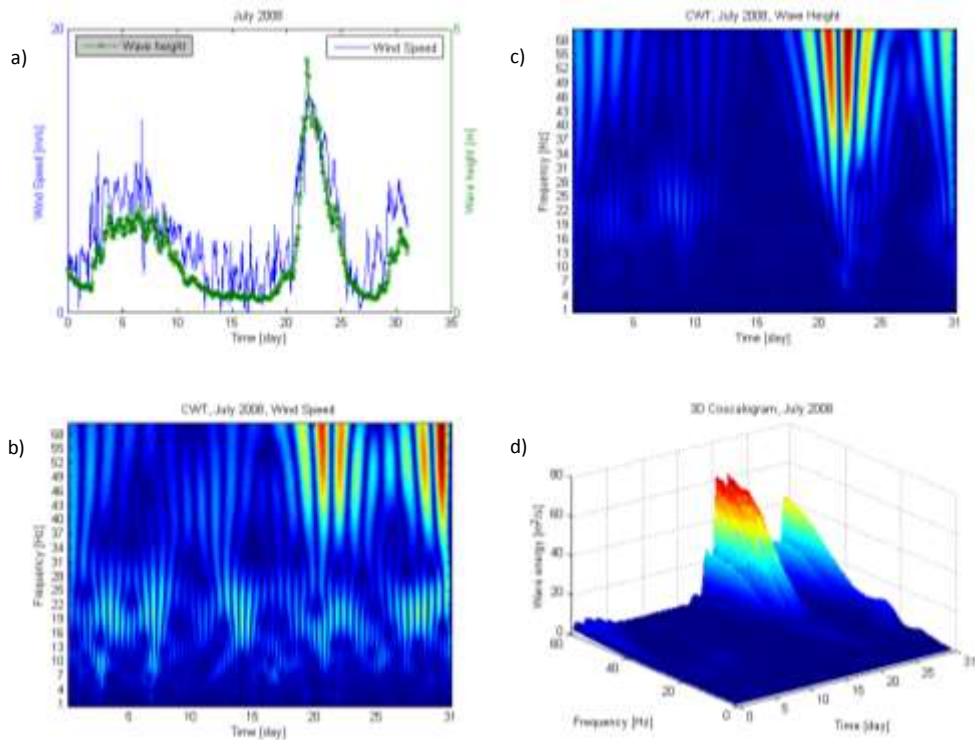


Figure 4.22. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, julio 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, julio 2008 y d) Coescalograma, julio 2008.

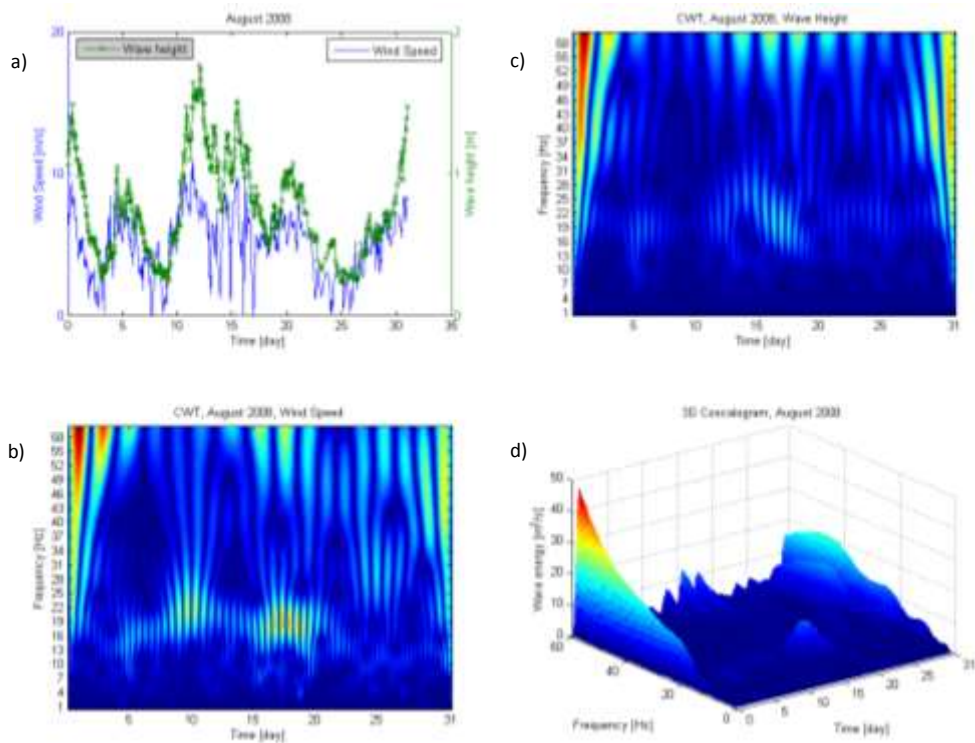


Figure 4.23. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, agosto 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, agosto 2008 y d) Coescalograma, agosto 2008.

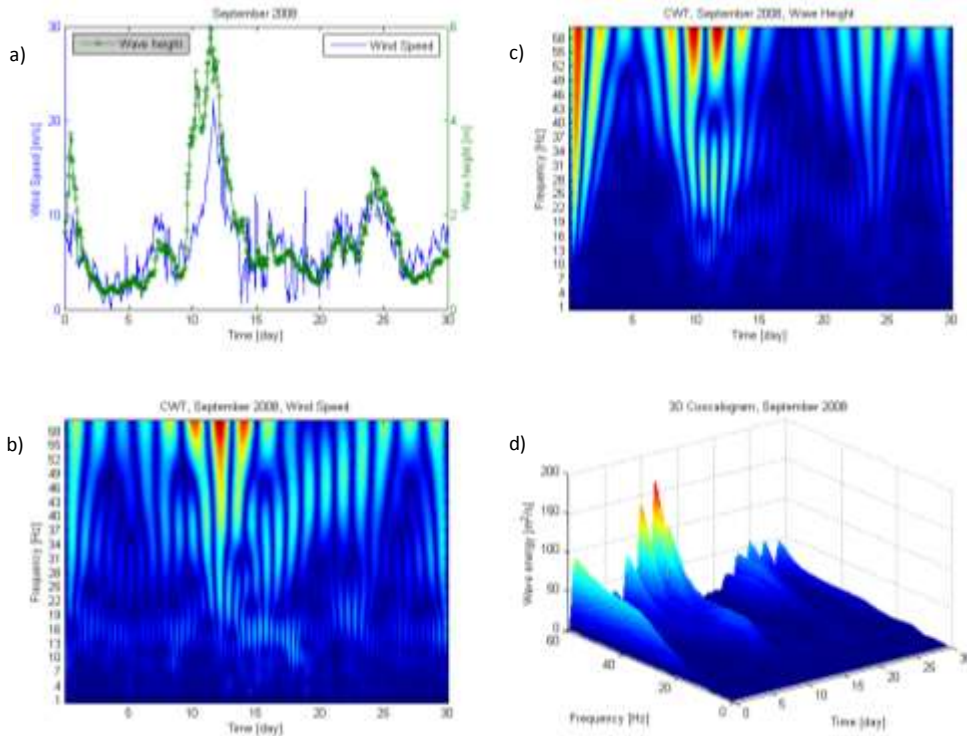


Figure 4.24. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, septiembre 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, septiembre 2008 y d) Coescalograma, septiembre 2008.

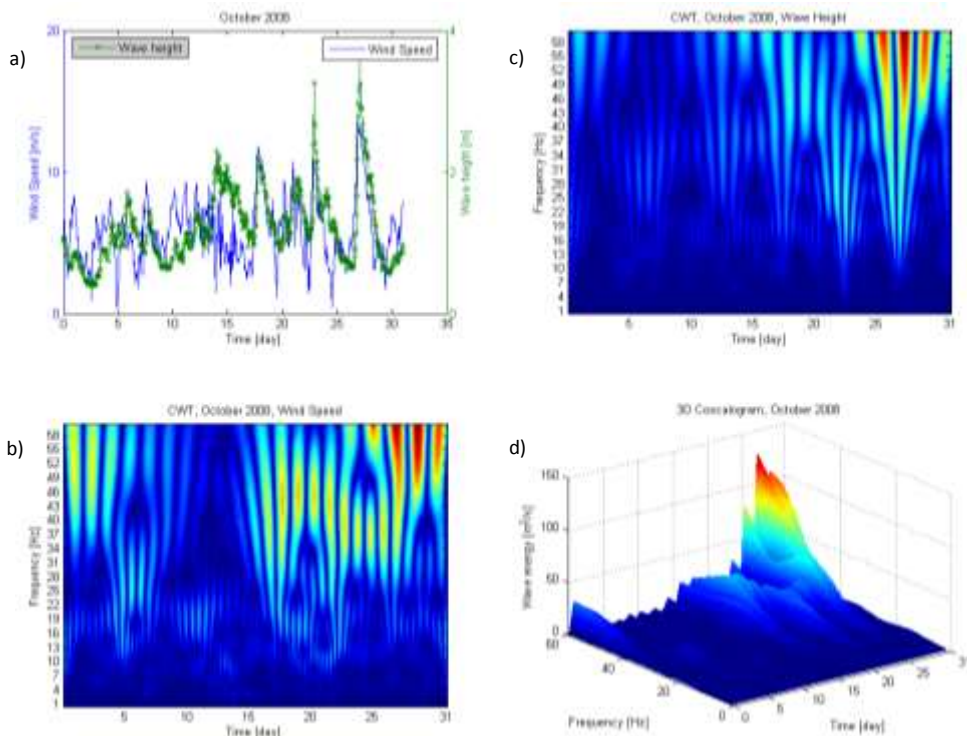


Figure 4.25. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, octubre 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, octubre 2008 y d) Coescalograma, octubre 2008.

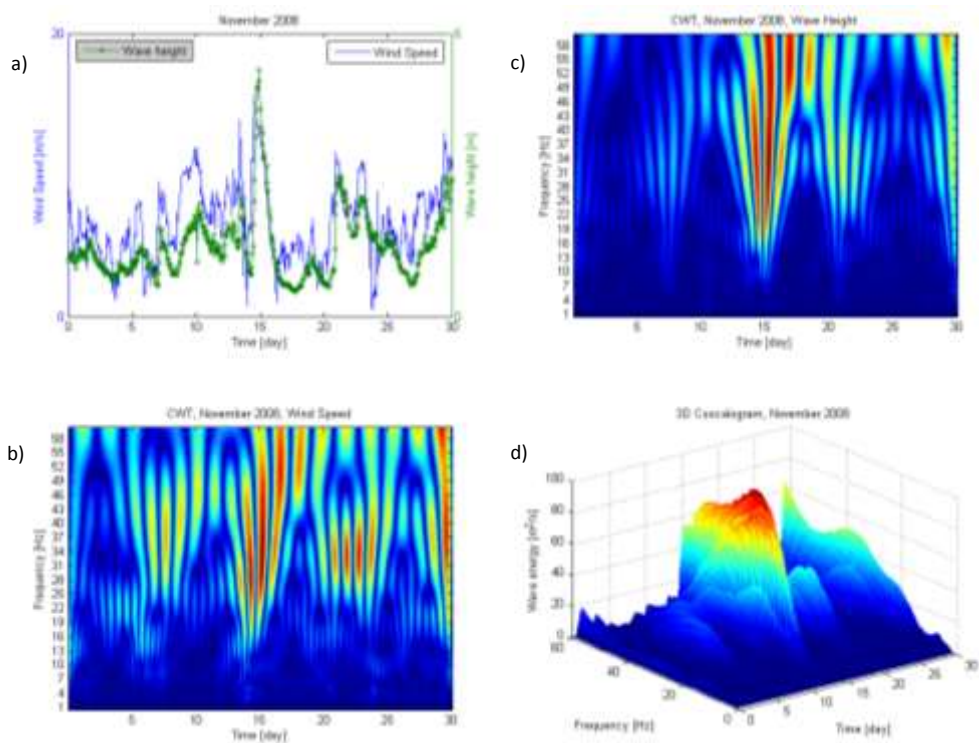


Figure 4.26. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, noviembre 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, noviembre 2008 y d) Coescalograma, noviembre 2008.

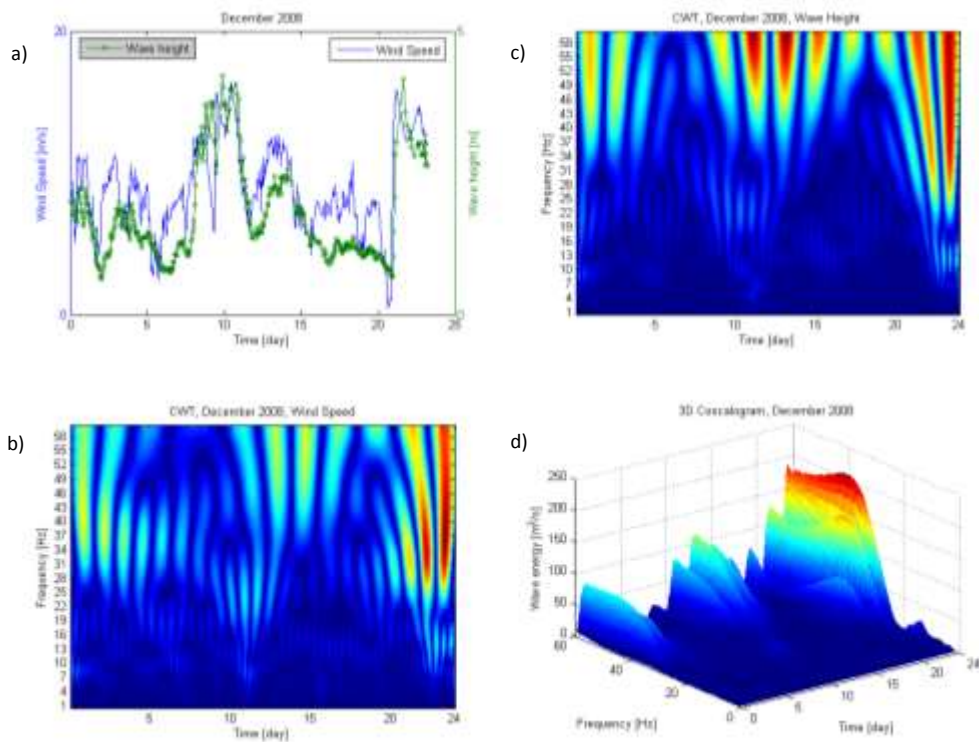


Figure 4.27. a) Señales de velocidad del viento y altura de ola; b) CWT a la señal de velocidad del viento, diciembre 2008; c) CWT a la señal de altura de ola, diciembre 2008 y d) Coescalograma, diciembre 2008.

5.5 *Aplicación a señales de abatimiento de un acuífero*

Los acuíferos son la principal fuente de abastecimiento de agua en la Zona Metropolitana de la Ciudad de México (ZMCM); el suelo de esta zona es de tipo volcánico formando mantos acuíferos. La lluvia desempeña un papel importante en la recarga del acuífero, debido al escurrimiento por la superficie del suelo se infiltra directamente en el subsuelo hasta llegar a los acuíferos, Walton (2007).

Actualmente el volumen de agua que extraemos de los acuíferos es mayor que la que se recupera naturalmente por la lluvia, del subsuelo se extraen 45 m³/s y sólo se reponen 25 m³/s. En consecuencia se compacta el suelo y propicia el hundimiento, de 0.10 m por año, aunque en ciertos lugares como Xochimilco, Tláhuac, Ecatepec, Netzahualcóyotl y Chalco el suelo se ha compactado hasta 0.40 m en tan solo un año; por ello el agua que se extrae contiene cada vez mayor cantidad de minerales, que la hacen de menor calidad. Registros estadísticos muestran hundimientos anuales de 0.15 a 0.25 m alrededor del Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México.

En el Distrito Federal se distribuye por medio de tuberías que se forman por una red principal y una secundaria. La red principal de tuberías está formada por 690 km de longitud con tubos que miden de 0.5 m y 1.73 m de diámetro. La red secundaria de más de 10,000 km de tubería, con diámetro inferior 0.5 m y cuenta con 243 tanques de almacenamiento con una capacidad de 1'500,000 m³ con 227 plantas de bombeo que aumentan la presión en la red, para así poder dotar de agua a los habitantes de las zonas altas, como el Ajusco, Contreras o la Sierra de Santa Catarina.

Dentro del Distrito Federal el agua se transporta por medio de 514 km de acueductos y líneas de conducción hacia 297 tanques de almacenamiento, los cuales llegan a las tomas de los usuarios, por medio de 910 km de red primaria y 11,900 km de redes de distribución.

Se suministran a los habitantes de esta ciudad los 35 m³/s de agua potable en promedio, además existen 27 plantas potabilizadoras y 377 dispositivos de cloración, que es monitoreada por el Laboratorio Central de la Calidad del Agua, para garantizar su potabilidad. En la ZMCM, se dan básicamente tres usos al agua: el 67% se destina al

sector doméstico, el 17% se utiliza en las industrias y el 16% se utiliza en escuelas, hospitales y oficinas.

El consumo mínimo de agua en la Ciudad de México, por clases sociales se dan de la siguiente manera: en algunos asentamientos ilegales; es alrededor de 28 l/hab/día. Mientras que la estimación de consumo promedio en las zonas de sectores medios es entre 275 a 410 l/hab/día y en los sectores de máximos ingresos entre 800 y 1000 l/hab/día.

La necesidad de traer agua desde cuencas fuera del Valle de México obedeció en gran parte al hundimiento de la ciudad de México, ocasionado por los primeros impactos de la extracción de agua del subsuelo. El intenso crecimiento de la población a partir de los años cincuenta hizo evidente que las fuentes subterráneas no serían suficientes para abastecer la demanda de miles de nuevos habitantes metropolitanos.

Para disminuir la problemática del abastecimiento del agua en la Ciudad de México es recomendable incrementar el uso del agua residual tratada en aplicaciones que no ameriten el grado de potabilidad como son: riego de áreas verdes, reposición de niveles de canales y lagos recreativos, así como el enfriamiento industrial.

El crecimiento de la población en la Ciudad de México, demanda mayor cantidad de agua día con día, en la actualidad para poder suministrar el vital líquido, se recurre a la explotación de fuentes, tanto internas como externas, el acuífero de la Ciudad de México provee casi 16 m³/s y las fuentes externas, la Cuenca del Alto Lerma y Cutzamala inyectan 15 m³/s adicionales a la red.

La dependencia del agua subterránea extraída por medio de pozos hace necesario revisar las condiciones del acuífero, con el fin de establecer las condiciones evolutivas en los mantos acuíferos; estas revisiones se hacen a partir de las mediciones de las profundidades del agua subterránea; de los valores obtenidos se puede inferir el efecto que trae consigo la explotación de esta fuente y al mismo tiempo se pueden implementar acciones que permitan su recuperación.

Con la finalidad de establecer políticas de extracción que garanticen la parte proporcional del agua subterránea proveniente de sus mismos acuíferos que abastecen a los habitantes de la Ciudad de México, sabiendo que cualquier medida adoptada

servirá para cuidar al mismo tiempo el entorno ecológico. Por esto, se propone el presente estudio para realizar las mediciones de niveles del agua subterránea para el año 2009, lo que se seleccionó 225 pozos para este fin, y de esta manera conocer la evolución de los niveles del agua subterránea en la región ocupada por el acuífero de la Ciudad de México.

Zona de estudio

La composición del acuífero de la Ciudad de México es de un único sistema. Regionalmente el subsuelo del Valle de México lo constituye una secuencia de productos aluviales y volcánicos que son permeables, que permiten la infiltración y la circulación del agua. El acuífero es confinado por arcillas lacustres en la parte Este del valle, y en la porción Oeste trabaja como un acuífero libre, en la Figura 4.28, se muestra la localización de la zona de estudio.

En cuanto a la recarga del acuífero su principal aporte proviene de la infiltración del agua que se precipita sobre las sierras que lo circundan, en especial en la porción Sur, debida a la alta permeabilidad de las rocas que en esa zona existen. El agua infiltrada circula en forma radial de los costados de las sierras hacia el centro del valle, Bloetscher (2005) y Rushton (2003).

En cuanto a la descarga principal del acuífero se lleva a cabo mediante el bombeo de los pozos perforados en el valle y no se manifiesta una descarga hacia otras cuencas, debido a que la del Valle de México es una cuenca endorreica y por lo tanto, sin salidas naturales del agua superficial como subterránea.



Figura 4.28. Localización de la zona de estudio, Ciudad de México, México

Las principales características que se encuentra con la aplicación de la WT es averiguar como se relacionan ambos fenómenos, tales como es que influye la precipitación en la recarga del acuífero si se toman únicamente las señales medidas de la precipitación en el sitio del pozo y la respuesta del abatimiento o recarga en el sitio.

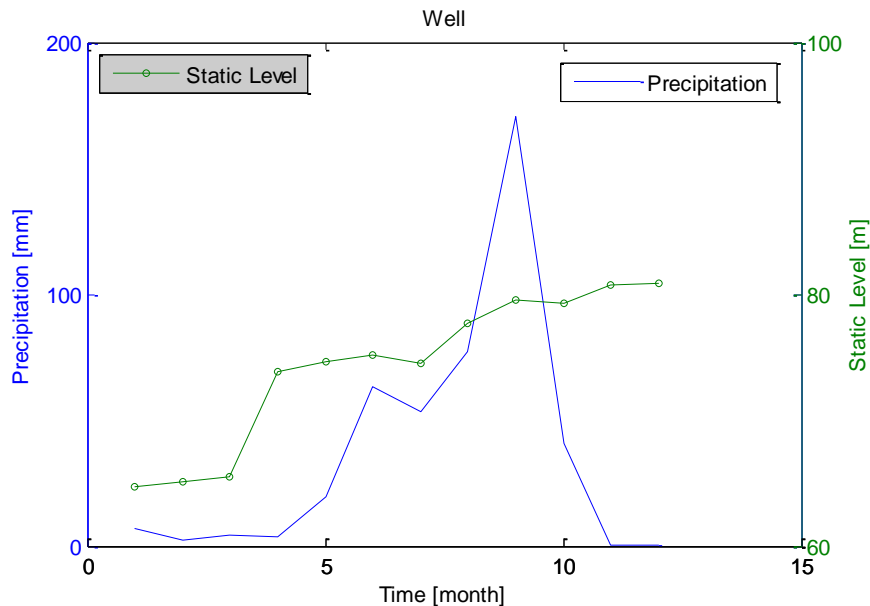


Figura 4.29. Señales de la precipitación y nivel estático del pozo No. 21 de la Ciudad de México.

Aplicando la transformada wavelet al nivel estático y señales de la precipitación máxima anual en el año de estudio (2009), ver Figura 4.29, en el pozo número 21, que

se encuentra en la zona céntrica de la ciudad de México, en esta zona se tiene la particularidad de que el suelo es de formación arcillosa, que se hace difícil una recarga, así como es una zona completamente urbanizada con muy poca área natural y artificial para un recuperación sustancial del nivel estático en esta área y, en particular en ese pozo. En la Figura 4.30 se aplica el tipo de CWT Morlet a los datos del nivel estático, que es la wavelet que mejor se adaptó a este tipo de señal, ya que utiliza una ventana gaussiana como envolvente, como puede verse hay gran frecuencia durante los meses de abril a octubre, que es cuando se puede tener un nivel más alto en la recarga del pozo.

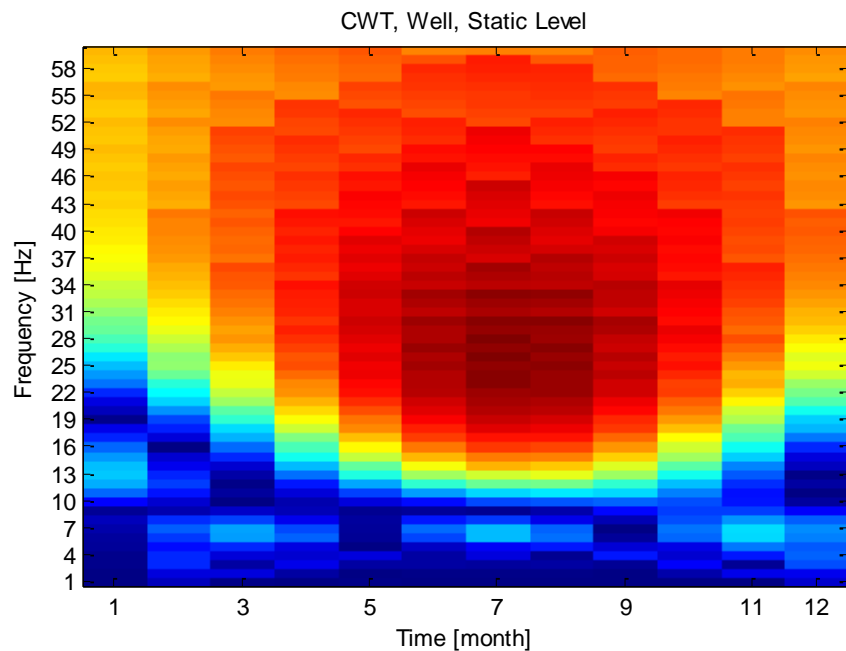


Figura 4.30. CWT Morlet, señal del nivel estático en el pozo No. 21.

In the same way apply you data of precipitation that is shown in Figure 4, there is that in the months of August and September corresponds to the peak seen in Figure 2, which has excess rain which infiltrates not to evacuate in the center of the Mexico Valley area, which sometimes causes large floods.

De la misma manera se le aplico la WT a los datos de precipitación que se muestran en la Figura 4.31, es que en los meses de agosto y septiembre se

corresponde con el pico que se ve en la Figura 4.32, que tiene excesiva lluvia que no se infiltra en el acuífero y provoca inundaciones.

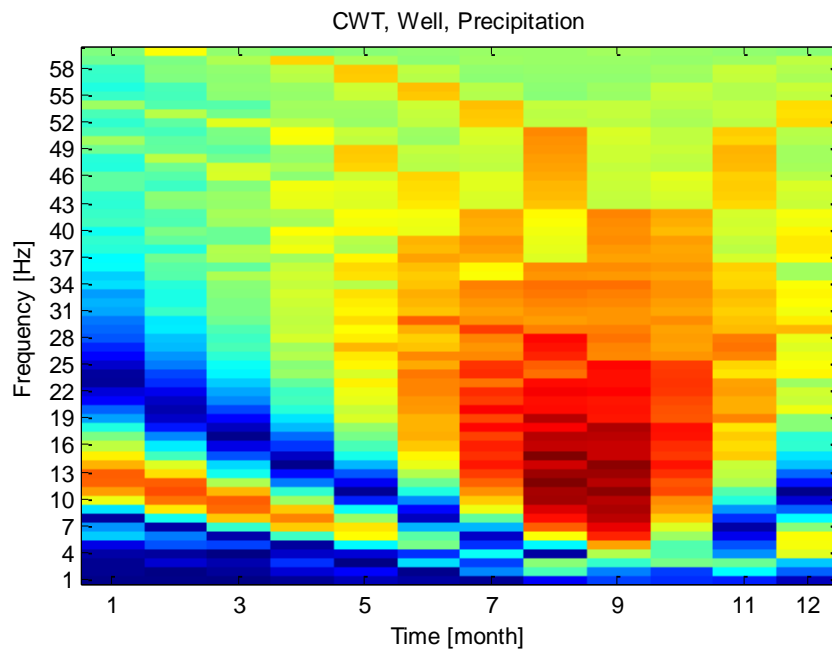


Figura 4.31. CWT Morlet, señal precipitación en el pozo No. 21.

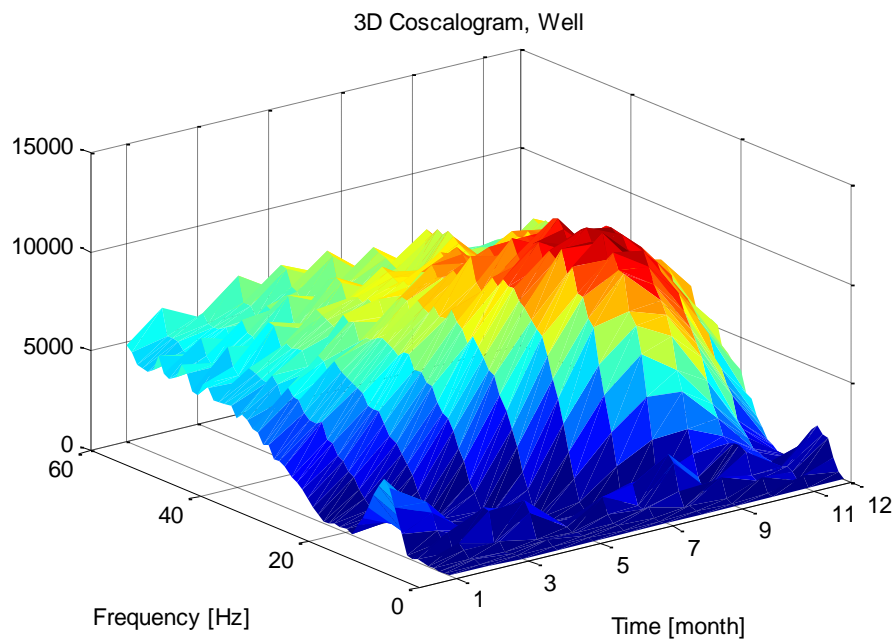


Figura 4.32. Coscograma entre la relación de las señales de precipitación y nivel estático en el pozo No. 21.

4.6 APLICACIONES EN HIDROLOGÍA

En el campo de la hidrología el análisis wavelet cada vez se utiliza más como una herramienta que sustituye al análisis de Fourier clásico. Al realizar un análisis de multiresolución de la wavelet permite mejorar la determinación de la estructura de la escala temporal de una determinada señal, por ejemplo, altura de precipitación, gastos mínimos y máximos en un río.

La transformada de Fourier ampliamente utilizado está diseñada para señales estacionarias que consiste en una superposición lineal de periodicidades lineales, independientes y no en evolución. La repetición infinita de funciones seno y coseno, que constituye la base clásica de Fourier, es ideal para el tratamiento de los datos que involucran procesos estacionarios periódicos.

Las fluctuaciones de las señales en la hidrología son altamente no estacionarias y procesos físicos a menudo se rifen por una amplia gama de escalas que van desde un días hasta varias décadas para las tasas de precipitación (Tessier, 1996 y de Lima, 1999).

Se ha desarrollado el análisis wavelet para proporcionar una herramienta para analizar un mejor rendimiento en este tipo de señales. Es posible obtener información en el tiempo y escala gracias a que se puede extraer información local de la señal por analizar.

Otro aspecto importante es la generación de datos sintéticos, sin un paso importante, ya que se toma la base de datos para la realización de estudios de diseño, operación y diagnóstico de obras hidráulicas. Las características básicas de la serie de tiempo hidrológica pueden ser descritas en términos de, 1) una distribución de probabilidad; 2) constantes variaciones en la amplitud en un tiempo irregular y dependencia en las variaciones de la frecuencia; 3) dependencia no lineal; y 4) dinámica no lineal y caótica (Whitcher, 2002).

La generación sintética de series de tiempo hidrológicas, por ejemplo las lluvias y el gasto, pueden lograrse por medio de los siguientes modelos: modelo corto de ruido,

modelo de fragmentos, redes neuronales, modelos estocásticos, modelos de cadenas de Markov y wavelets, éste último es el que se usó en la reconstrucción de datos.

4.6.1 Señal de precipitación

Como antecedente al análisis de este tipo de señales tenemos a Labat (2005) y a Kang (2007) que analizan señales de datos de precipitación y de gastos en ríos. Al utilizar la técnica wavelet ayuda a saber cómo la precipitación se comporta a lo largo del tiempo, es decir, con qué frecuencia se presenta, dependiendo del periodo de estudio. En la Figura 4.33 se muestra una señal de la estación climatológica del Temascal en Tabasco, México.

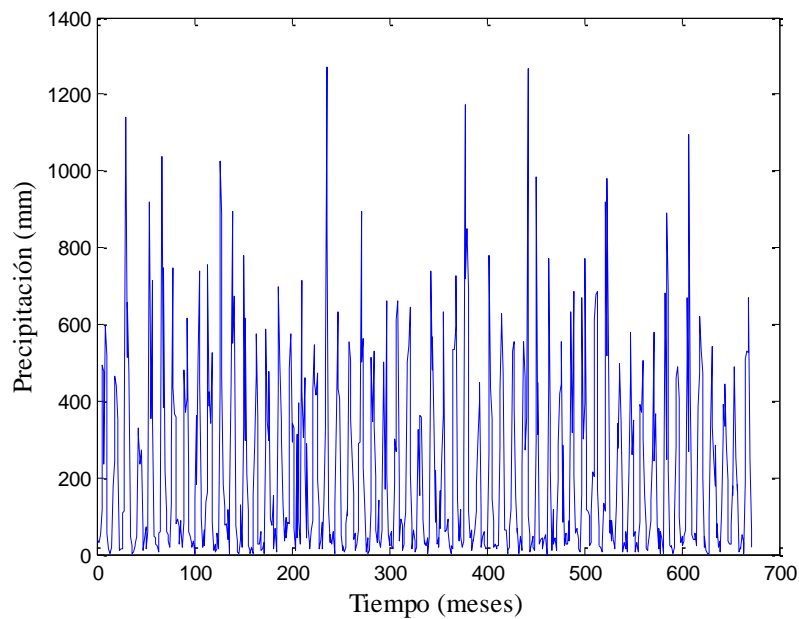


Figura 4.33. Precipitación en la estación climatológica Temascal del año 1950 al 2005.

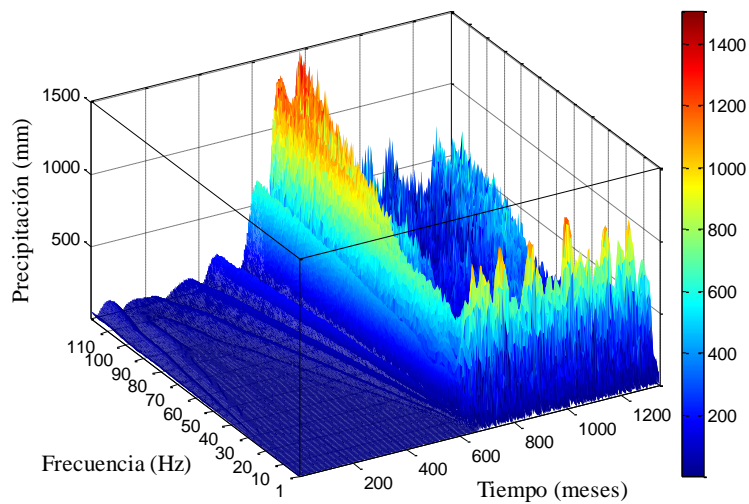


Figura 4.34. Escalograma tridimensional de la precipitación usando la WT

En las figuras 4.34 y 4.35 se usó la Wavelet Mexican Hat, que debe su nombre a que la wavelet tiene la forma de un sombrero mexicano, de charro; con esta wavelet se puede observar la frecuencia con que se presenta la precipitación. En la representación bidimensional es claro que a lo largo del periodo estudiado se tiene una frecuencia de entre 8 a 12 meses, es decir, se tiene una repetición cada 12 meses de similares características. En una frecuencia de 60 meses se repite unas 8 veces, es decir cada 60 meses se repite determinado tipo de precipitación y si se observa la frecuencia de 100 meses, se observa que se presentó 3 veces en el periodo analizado.

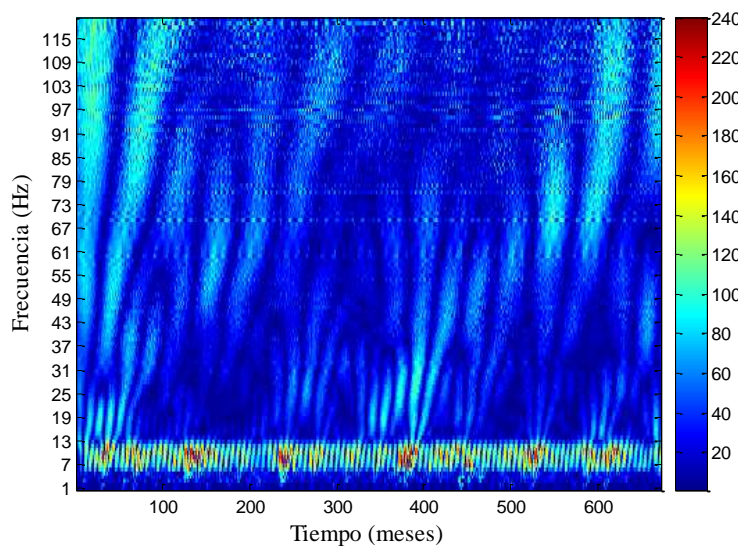


Figura 4.35. Escalograma de la precipitación utilizando la wavelet Mexican Hat

4.6.2 Pronóstico de gastos mensuales

La serie de tiempo se puede reconstruir por medio de los coeficientes wavelet en todas las escalas como lo uso (Torrence y Compo, 1998):

$$x_t = \frac{\delta_j \delta t^{1/2}}{C_\delta \psi_0(0)} \sum_{j=0}^J \frac{\Re\{W(t, s_j)\}}{s_j^{1/2}}$$

donde:

- δ_j espacio entre las escalas wavelet
- δt incremento de tiempo de la señal
- C_δ factor de reconstrucción de la wavelet
- $\psi_0(0)$ función base normalizada evaluada en el tiempo cero
- J número de escalas de la wavelet menor a 1
- $\Re\{W(t, s_j)\}$ parte real de la transformada wavelet
- s_j parámetro de escala ($s_0 2^{j \delta_j}$ donde s_0 es la escala wavelet mas pequeña utilizada)
- x_t señal reconstruida.

Al aplicar la reconstrucción de una señal de gastos instantáneos, se tomó los datos de la estación No. 11012 del río San Pedro en Nayarit, México. Al aplicar la transformada continua wavelet Morlet, esta wavelet tiene un factor de reconstrucción de $C_\delta = 0.776$ y $\psi_0(0) = \pi^{1/4}$. Como primer paso es necesario calcular el ángulo y módulo de la CWT de la señal que se muestra en la Figura 4.36.

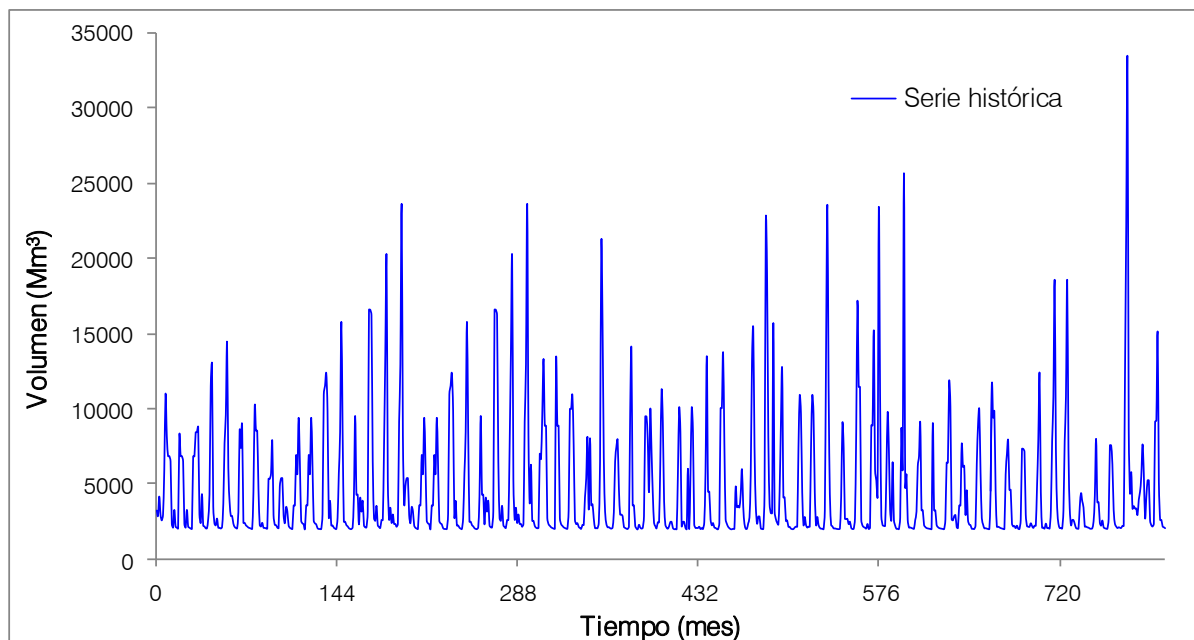


Figura 4.36. Gastos instantáneos de la estación No. 11012.

En las Figuras 4.37 y 4.38 se muestran el ángulo y módulo obtenidos al aplicar la CWT para usarlos en la reconstrucción de la señal.

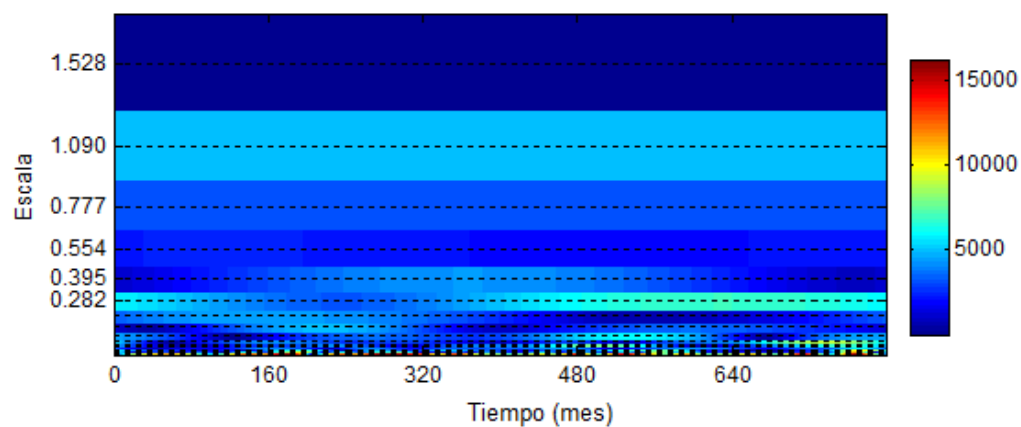


Figura 4.37. Módulo usando la CWT Morlet.

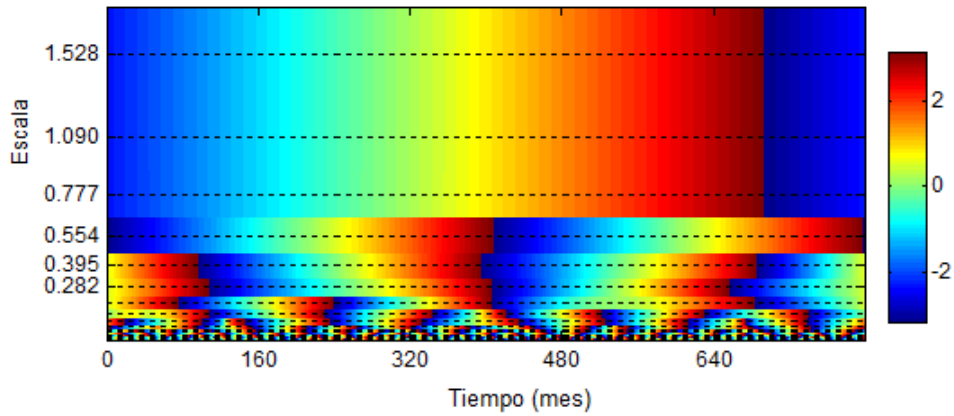


Figura 4.38. Ángulo usando la CWT Morlet.

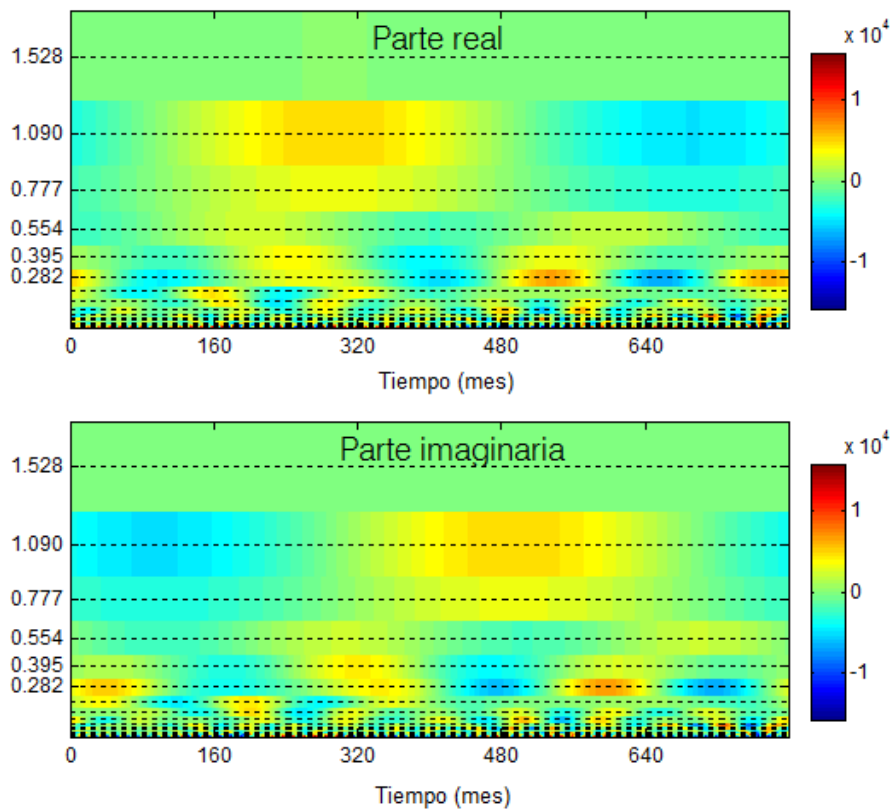


Figura 4.39. Parte real e imaginaria de la CWT Morlet.

Al aplicar la transformada wavelet continua morlet y usando la ecuación 1 se reconstruye la señal, que se muestra en la Figura 4.39, con un error del 2.22 %.

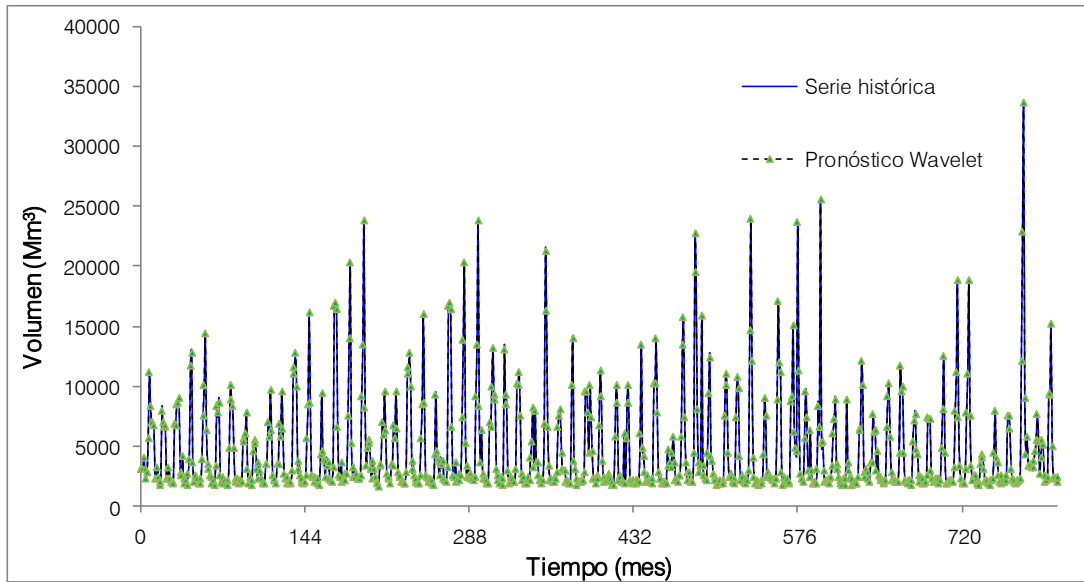


Figura 4.40. Señal analizada y reconstruida usando la CWT Morlet.

A continuación se compara el pronóstico por el método de la Transformada Continua Wavelet con el modelo estocástico Autorregresivo de Promedios Móviles Integrado (ARIMA), se utilizaron los Modelos ARIMA también utilizados por autores como Box and Jenkins (1970), Salas (1980) y Escalante (2012) que son:

1. ARIMA (1,0,0)
2. ARIMA (2,0,0)
3. ARIMA (1,0,1)
4. ARIMA (2,0,2)
5. ARIMA (1,0,2)

En la Tabla 4.1 se muestran los parámetros calculados de cada modelo.

Tabla 4.1. Periodo de Estimación

Modelo	RMSE	MAE	AIC (Akaike)	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEDIA	VAR
(A)	3579.73	2069.1	16.3686	3579.73	***	**	***	OK	**
(B)	3576.4	2077.64	16.3692	3576.4	OK	OK	***	OK	**
(C)	3576.42	2076.18	16.3692	3576.42	OK	OK	***	OK	**
(D)	3572.95	2094.28	16.3722	3572.95	OK	OK	***	OK	**
(E)	3578.26	2102.82	16.3727	3578.26	*	OK	***	OK	**

donde:

RMSE = Root Mean Squared Error (Raíz del Cuadrado Medio del Error)

RUNS = Prueba corridas excesivas arriba y abajo

RUNM = Prueba corridas excesivas arriba y abajo de la mediana

AUTO = Prueba de Box-Pierce para autocorrelación excesiva

MEDIA = Prueba para diferencia en medias entre la 1ª mitad y la 2ª mitad

VAR = Prueba para diferencia en varianza entre la 1ª mitad y la 2ª mitad

OK = no significativo ($p \geq 0.05$)

* = marginalmente significativo ($0.01 < p \leq 0.05$)

** = significativo ($0.001 < p \leq 0.01$)

*** = altamente significativo ($p \leq 0.001$)

En la tabla 1 se comparan los resultados de ajustar diferentes modelos a los datos. El modelo con el menor valor del Criterio de información de Akaike (AIC) es el modelo A, el cual se ha utilizado para generar los pronósticos. También se resumen los resultados de cinco pruebas para determinar si cada modelo es adecuado para los datos. Un OK significa que el modelo pasa la prueba. Un * significa que no pasa la prueba al nivel de confianza del 95%. Dos *'s significa que no pasa la prueba al nivel de confianza del 99%. Tres *'s significa que no pasa la prueba al nivel de confianza del 99.9%. Note que el modelo actualmente seleccionado, el modelo A, solo pasa una prueba. Puesto que una o más pruebas son estadísticamente significativas al 95% de confianza o más, debería considerar seriamente seleccionar otro modelo. En la figura 4.41 se presenta las autocorrelaciones de residuos del modelo ARIMA(1,0,0) y en la figura 4.42 las autocorrelaciones de residuos parciales ARIMA(1,0,0).

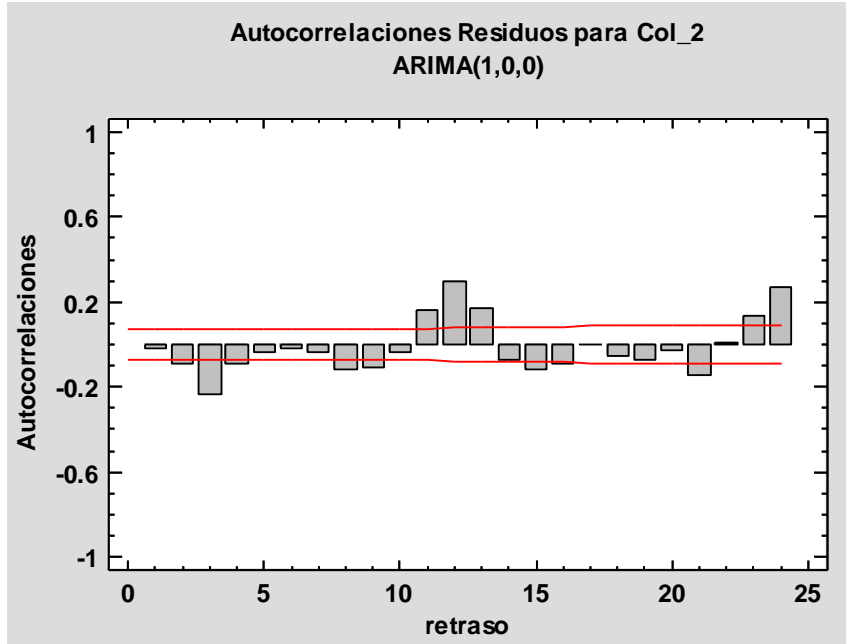


Figura 4.41. Autocorrelaciones de residuos del modelo ARIMA(1,0,0).

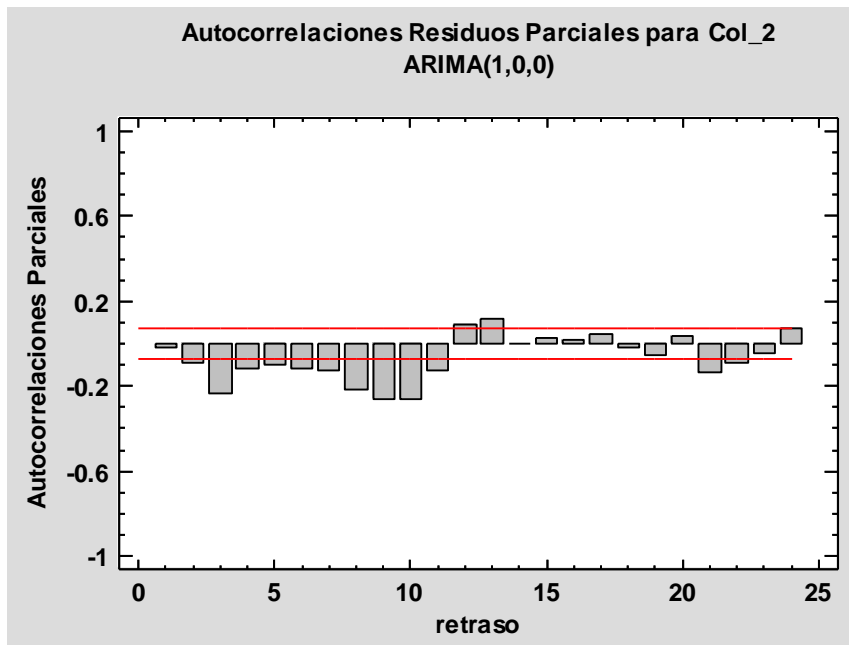


Figura 4.42. Autocorrelaciones de residuos parciales ARIMA(1,0,0).

En las figuras 4.43 a 4.48 se comparan los valores pronosticados por el modelo ARIMA, Wavelet Morlet y los valores medidos en la estación No. 11012 del río San Pedro en Nayarit, México.

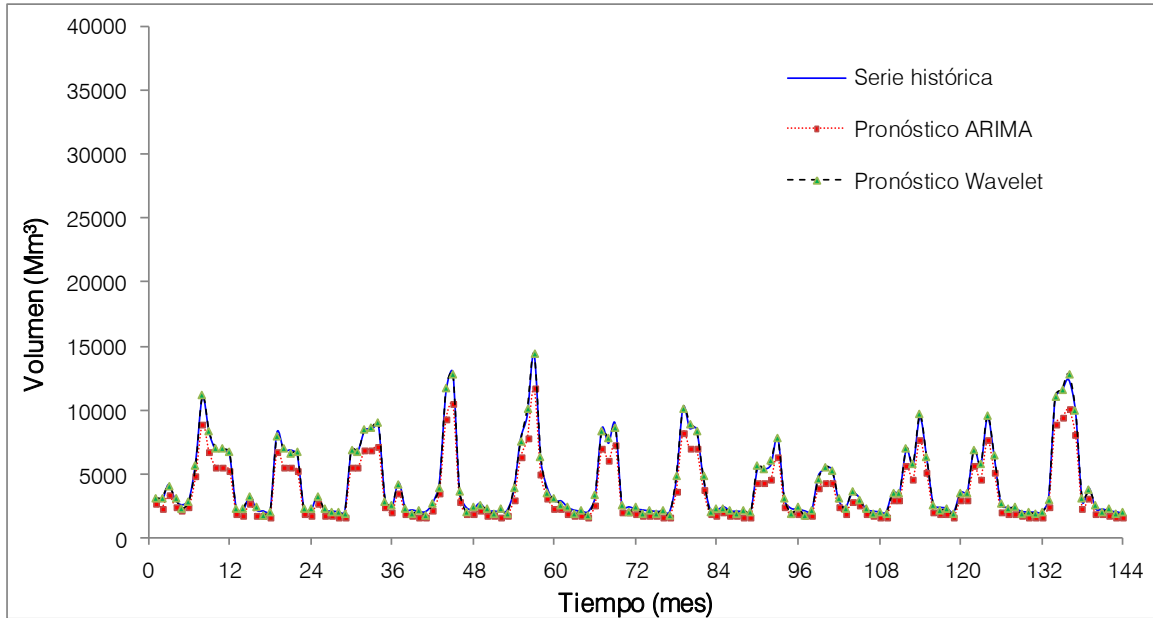


Figura 4.43. Pronostico de la estación río San Pedro (01/1944 a 12/1956).

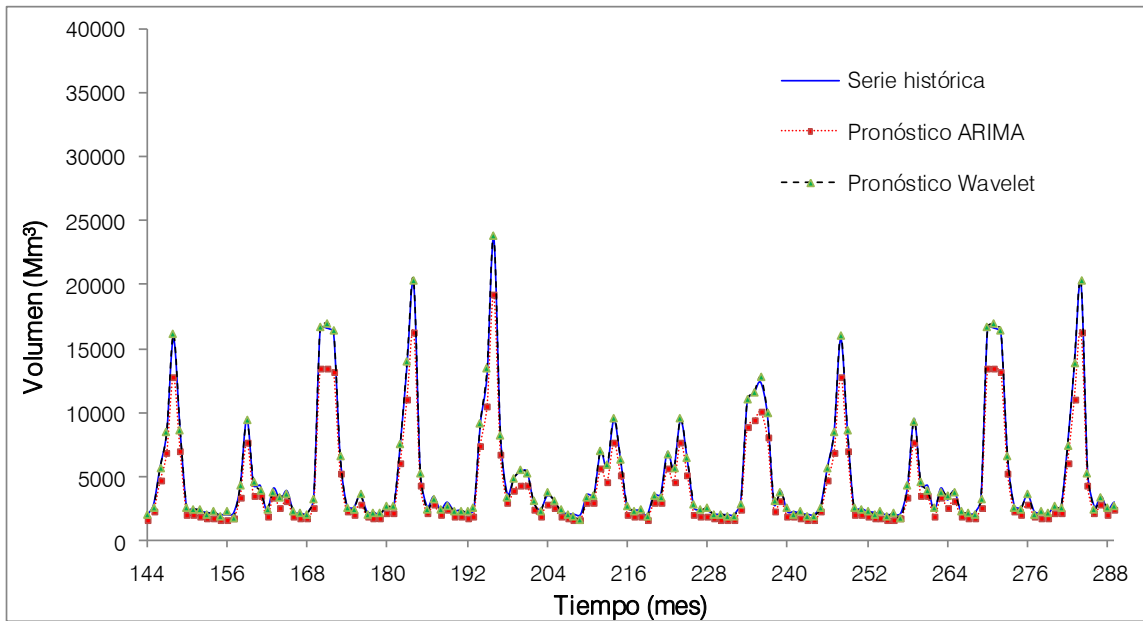


Figura 4.44. Pronostico de la estación río San Pedro (01/1957 a 12/1969).

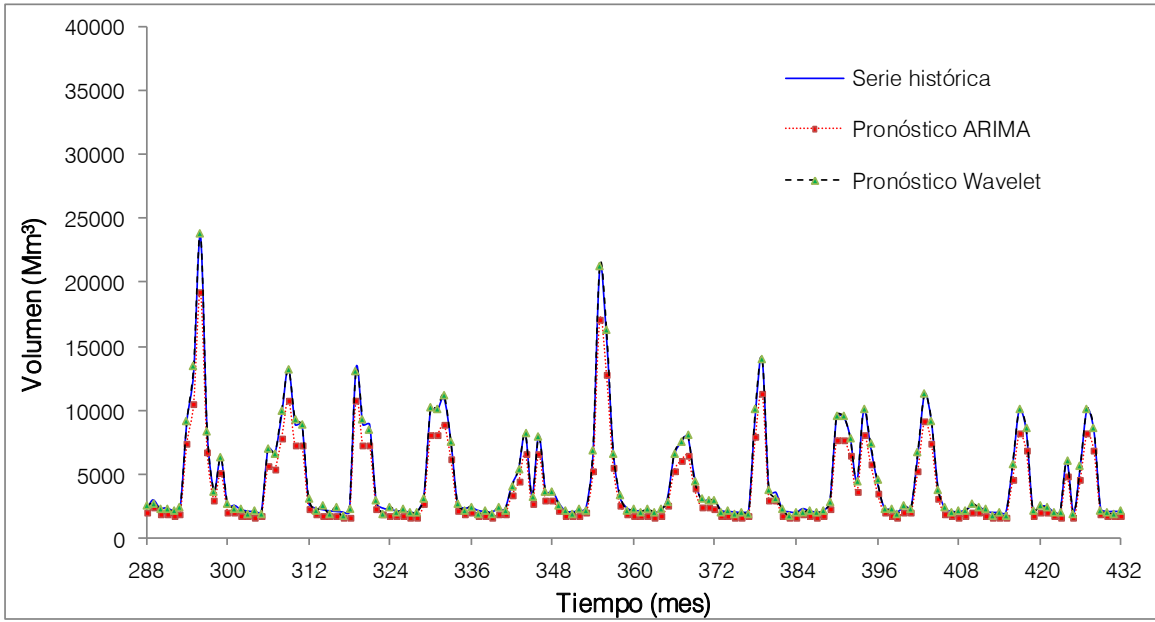


Figura 4.45. Pronostico de la estación río San Pedro (01/1970 a 12/1972).

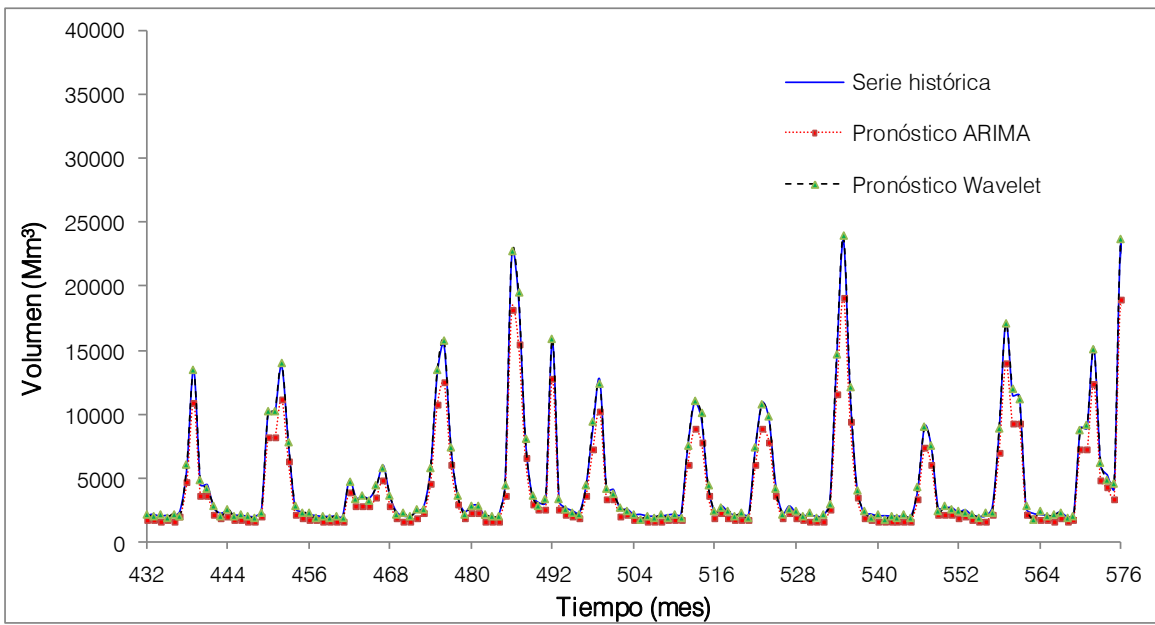


Figura 4.46. Pronostico de la estación río San Pedro (01/1973 a 12/1985).

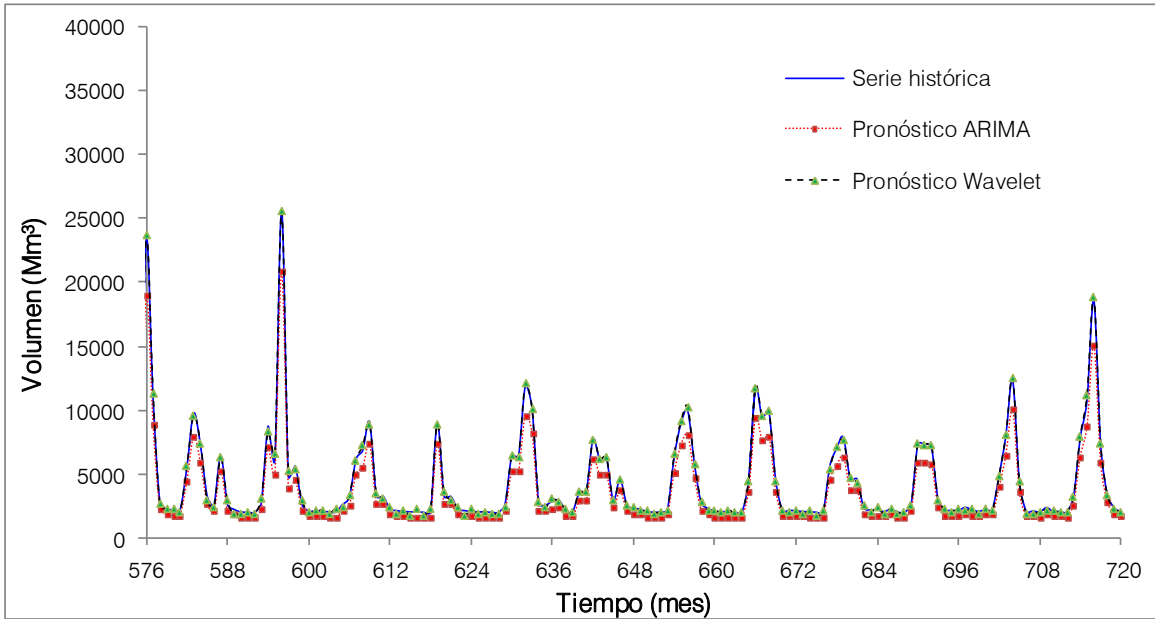


Figura 4.47. Pronostico de la estación río San Pedro (01/1986 a 12/1998).

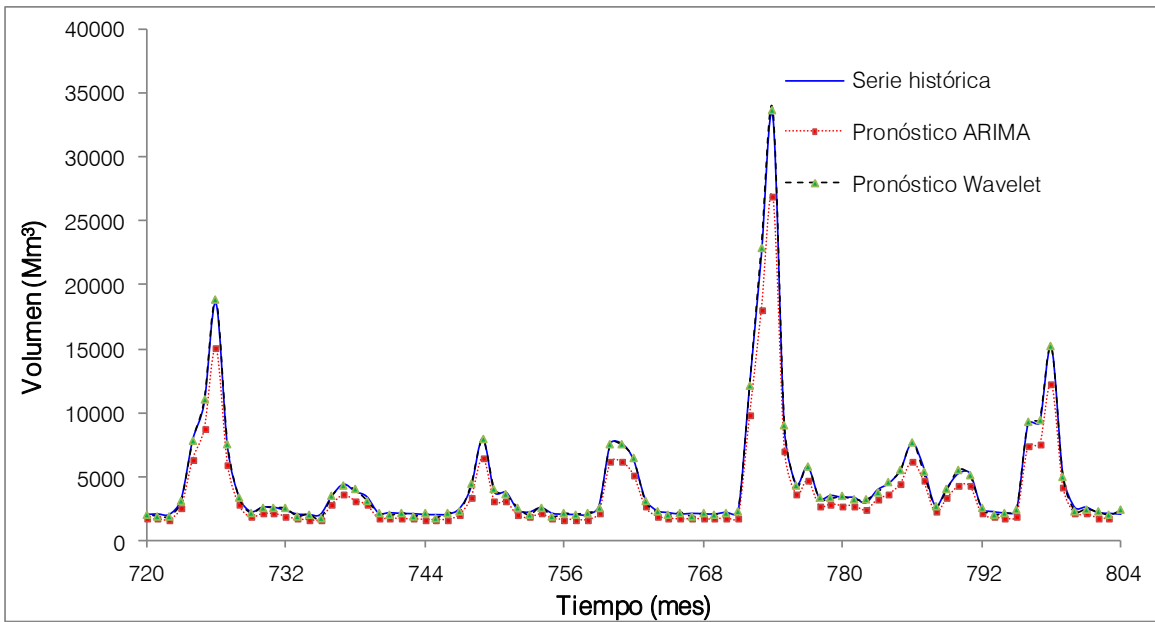


Figura 4.48. Pronostico de la estación río San Pedro (01/1999 a 12/2010).

El modelo de la Transformada Wavelet Continua demostró ser una útil y con buenos resultados para el pronóstico de escurrimientos, por lo tanto se recomienda su uso.

CONCLUSIONES

El análisis de fenómenos inestables utilizando la transformada wavelet discreta y continua es una técnica relativamente nueva que tiene un gran potencial en la ingeniería hidráulica ya que proporciona una visión más detallada de no estacionarias y transitorias señales, a través de mapas de escala de tiempo o frecuencia de tiempo, al contrario el tradicional método de descomposición espectral donde el componente de tiempo se pierde.

El coscalogram detecta fase de acoplamiento entre dos diferentes fenómenos relacionados, por ejemplo: altura de onda y velocidad del viento. En este papel dos aplicaciones-altura-Mostrar el análisis de una señal transitoria generada por el cierre repentino de una válvula de una tubería y el estudio de dos registros simultáneos de la onda y velocidad del viento la mejora que tiene este tipo de análisis sobre la transformación de Fourier los métodos tradicionalmente utilizados, fueron demostrados. Finalmente, se presentaron las ventajas y desventajas de varios métodos para analizar las señales, y sugirió un problema práctico que puede ser abordado con el peso.

Con el método de la Transformada Wavelet (WT) se encuentra información de la distribución de energía, o amplitud, simultáneamente en el tiempo y en la frecuencia. Es una herramienta que ayuda a saber más sobre el fenómeno en estudio y, en el caso muy especial de las señales transitorias, evalúa mejor sus parámetros para poder caracterizar el fenómeno con mayor detalle.

Como permite simplificar fenómenos complicados dividiéndolo en pequeñas componentes que se pueden analizar por partes, es una herramienta que tiene un gran potencial de aplicación en varios campos de la hidráulica moderna.

En la aplicación de la hidrología al aplicarlo a métodos de pronósticos de gastos mensuales, dieron muy buenos resultados al compararlos con los métodos tradicionales, por lo cual se recomienda la aplicación de la Transformada Wavelet a la generación sintética de gastos mensuales.

REFERENCIAS

- Abry, P. (2006). "Scaling phenomena and wavelets: A review", *CNRS, UMR, Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon*, 1-16.
- Addison, S. Paul, Murray, B.K. and Watson, N.J. (2001). "Wavelet transform of open channel wake flows", *Journal of Engineering Mechanics*, 127(1), 58-69.
- Aimable, R. y Zech, Y. (2003). "Experimental results on transient and intermittent flows in a sewer pipe model", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece, Theme B*, 377-384.
- Angrisani, L., Daponte, P. y Apuzzo, M.D. (1999). "A method for the automatic detection and measurement of transients. Part 1: the measurement method", *Measurement*, 25, 19-30.
- Angrisani, L., Daponte, P. y Apuzzo, M.D. (1999). "A method for the automatic detection and measurement of transients. Part II: applications", *Measurement*, 25, 31-40.
- Basu, B. y Gupta, V.K. (1999). "Wavelet-based non-stationary response of a slipping foundation", *Journal of Sound and Vibration*, 222 (4), 547-563.
- Bendat, J.S. y Piersol, A.G. (2010). "Random data: analysis and measurement procedures", 4 edición, New Jersey, Wiley.
- Boccatti, P. (2004). "A method to obtain the directional wave spectrum", *Ocean Engineering*, 31, 539-545.
- Bonnet, J., Delville, J., Glauser, M., Antonia, R., Bisset, D., Cole, D., Fiedler, H., Garena, J., Hilberg, D, Jeang, J., Keulahan, N., Ukeiley, L. y Vincedeau, E. (1998). "Collaborative testing of eddy structure identification methods in free turbulent shear flows", *Experiments in Fluids*, 25, 197-225.
- Boogaard, V., Uittenbogaard, R. y Mynett, A. (2003). "Construction of time series with prescribed statistical properties for applications in hydraulic engineering", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece, Theme D*, 107-114.
- Breuer, K., Cohen, J. y Haritonidis, J. (1997). "The late stages of transition induced by a low-amplitude wave packet in a laminar boundary layer", *Journal of Fluid Mechanics*, 340, 395-411.
- Brunone, B., Golia, U. y Greco, M. (1995). "Effects of two dimensionality on pipe transients modeling", *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(12), 906-912.

- Camussi, R. y Guj, G. (1997). "Orthonormal wavelet decomposition of turbulent flows: intermittency and coherent structures", *Journal of Fluid Mechanics*, 348, 177-199.
- Camussi, R. y Guj, G. (1999). "Experimental analysis of intermittent coherent structures in the near field of a high Re turbulent jet flow", *Physics of Fluids*, 11(2), 423-431.
- Cannizzaro, D. y Pezzinga, G. (2003). "2D numerical model for transient vaporous cavitation", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece, Theme D*, 751-758.
- Carmona, H., Hwang, W.L. y Torresani, B. (1998). "Practical time frequency analysis", *Gabor and Wavelet Transforms with an implementation in S*, Academic Press.
- Chui, C.K. y Wang, J.Z. (1992). "A general framework of compactly supported splines and wavelets", *Journal of Approximation Theory*, 71, 263-304.
- Cohen, L. (1995). "Time frequency analysis", Englewood Cliffs, Prentice Hall.
- Daubechies, I. (1992). "Ten lectures on wavelets", *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Philadelphia: SIAM*.
- Earle, M., Steele, K. y Wang, D. (1999). "Use of advanced directional wave spectra analysis methods", *Ocean Engineering*, 26, 1421-1434.
- Elsayed, Mohamed A.K. (2006). "Wavelet bicoherence analysis of wind-wave interaction", *Ocean Engineering*, 33, 458-470.
- Escalante, C. y López, A. (2012). "Pronóstico de escurrimientos mensuales en la cuenca del río Papagayo", XXI Congreso Nacional de Hidráulica, Acapulco, Guerrero, México, 7 al 9 de Noviembre.
- Farge, M. (1992). "Wavelet transform and their applications to turbulence", *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 24, 395-457.
- Farge, M., Schneider, K. y Abry, P. (2002). "Analyzing and compressing turbulent fields with wavelets", *Institut Pierre Simon Laplace des Sciences de l'Environnement Global, Notes des Activités Instrumentales.*, Note No. 20, 1-53.
- Farge, M., Shneider, K. y Keulahan, N. (1999). "Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptative orthogonal wavelet basis", *Physics in Fluids*, 11(8), 2187-2201.
- Gordeyev, S.V., Thomas, F.O. (1985). "Temporal subharmonic amplitude and phase behavior in a jet shear layer: wavelet analysis and Hamiltonian formulation", *Journal of Fluid Mechanics*, 394, 205-240.

- Grossman, A. y Morlet, J. (1984). "Decomposition of hardy function into square integrable wavelets of constant shape", *SIAM Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 15, 723-736.
- Guedes, C. y Cherneva, Z. (2005). "Spectrogram analysis of the time-frequency characteristics of ocean wind waves", *Ocean Engineering*, 32, 1643-1663.
- Gurley, K. y Kareem, A. (1999). "Applications of wavelet transforms in earthquake, wind and ocean engineering", *Engineering Structures*, 21, 149-167.
- Haase, M. y Widjajakusuma, J. (2003). "Damage identification based on ridges and maxima lines of the wavelet transform", *International Journal of Engineering Science*, 41, 1423-1443.
- Higuchi, H., Lewalle, J. y Crane, P. (1994). "On the structure of a two-dimensional wake behind a pair of flat plates", *Physics in Fluids*, 6(1), 297-305.
- Hoffman, J. (2001). "Dynamic computational subgrid modeling in turbulent reactive flow problems", *First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Cambridge, MA, June 12-15, 1241-1243.
- Huang, M.C. (2004). "Wave parameters and functions in wavelet analysis with filtering", *Ocean Engineering*, 31, 813-831.
- Huang, N., Shen, Z. y Long, S. (1999). "A new view of nonlinear water waves: The Hilbert Spectrum", *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31, 417-457.
- Kailas, S. y Narasimha, R. (1999). "The eduction of structures from flow imagery using wavelets. Part I. The mixing layer", *Experiments in Fluids*, 27, 167-174.
- Kapelan, Z., Covas, D., Savic, D., Walters, G., Graham, N. y Maksimovic, D. (2003). "Inverse transient analysis in pipe networks for leakage detection, quantification and roughness calibration", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece*, Theme B, 393-400.
- Katul, G. y Parlange, B.M. (1995). "Analysis of land surface heat fluxes using the orthonormal wavelet approach", *Water Resources Research*, 31(11), 2743-2749.
- Katul, G., Parlange, M. y Chu, Ch. (1994). "Intermittency, local isotropy and non-Gaussian statistics in atmospheric surface layer turbulence", *Physics in Fluids*, 6(7), 2480-2492.

- Katul, G., Schieldge, J., Hsieh, C. y Vidakovic, B. (1998). "Skin temperature perturbations induced by surface layer turbulence above a grass surface", *Water Resources Research*, 34(5), 1265-1274.
- Kim, S. y Choudhury, D. (2001). "Numerical investigation of laminar natural convection flow inside a tall cavity using a finite volume based Navier-Stokes solver", *First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Cambridge, MA, June 12-15, 1490-1492.
- Koutandos, E.V., Primos, P.E. y Gironella, X. (2003). "Floating breakwaters interaction with waves- a large-scale experimental study", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece*, Theme A, 385-392.
- Kwon, S., Lee, H. y Kim, C. (2005). "Wavelet transform based coherence analysis of freak wave and its impact", *Ocean Engineering*, 32, 1572-1589.
- Lee, H.S. y Kwon, S.H. (2003). "Wave profile measurement by wavelet transform", *Ocean Engineering*, 30, 2313-2328.
- Liu, P. (2000). "Is the wind wave frequency spectrum outdated", *Ocean Engineering*, 27, 577-588.
- Liu, P.C. (2000). "Wave grouping characteristics in near shore Great Lakes", *Ocean Engineering*, 27, 1221-1230.
- Mallat, S.G. (1989). "Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L_2(\mathbb{R})$ ", *Transactions of the American Mathematical Society*, 315, 69-87.
- Marshall, B.J., Marwood, R., Belcher, R.E. y Wood, C.J. (1999). "Laser Doppler anemometry and conditional sampling", *Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*, 79, 209-231.
- Massel, S.R. (2001). "Wavelet analysis for processing of ocean surface wave records", *Ocean Engineering*, 28, 957-987.
- McInnis, D. y Karney, B. (1995). "Transients in distribution networks: field tests and demand models", *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(3), 218-231.
- Meyer, Y. (1992). "Wavelets and Operators", *Cambridge University Press*, Cambridge, UK.
- Mouri, H., Kubotani, H., Fujitani, T. Niino, H. y Takaoka, M. (1999). "Wavelet analyses of velocities in laboratory isotropic turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, 389, 229-254.

- Newland, D.E. (1993). "Random vibrations, spectral and wavelet analysis", *Longman*.
- Nezu, I. y Yoshida, K. (2003). "Fundamental study on air-water interfacial coherent structures in wind-induced water waves flows by PIV measurement", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece, Theme C*, 235-242.
- Orme, M., Willis, K. y Nguyen, T. (1993). "Droplet patterns from capillary stream breakup", *Physics in Fluids*, 5(1), 80-90.
- Oonincs, P.J. (2000). "Mathematical signal analysis: Wavelets, Wigner distribution and a seismic application", *Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam*.
- Palacz, M. y Krawczuk, M. (2002). "Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method", *Computers & Structures*, 80, 1809-1816.
- Papadopoulos, G. (2003). "A piv-based educational facility for hydraulic research", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece, Theme E*, 201-208.
- Pinton, J., Chillá, S., Fauve, S. y Labbé, R. (1999). "Intermittency in the closed flow between coaxial disks", *Trends in Mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel Switzerland.
- Poggie, J. y Smits, A. (1997). "Wavelet analysis of wall-pressure fluctuations in a supersonic blunt-fin flow", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 35(10), 1597-1603.
- Prodanovic, D., Pavlovic, D. y Jacimovic, N. (2003). "The role of diagnostic measurements in poorly maintained and documented water supply systems", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece, Theme B*, 313-320.
- Rinoshika, A. y Zhou, Y. (2005). "Orthogonal wavelet multi-resolution analysis of a turbulent cylinder wake", *Journal of Fluid Mechanics*, 524, 229-248.
- Rujian, M. y Guixi, L. (2002). "Spectral analysis of Stokes waves", *Ocean Engineering*, 29, 593-604.
- Ruiz, G. (2012). "Wavelet Transform Analysis for Mexican City Aquifer", Tenth International Conference on Hydroscience and Engineering, Orlando, Florida, USA, 4-7 November.
- Schellart, A., Clemens, F., Veldkamp, R. y Tait, S. (2003). "A procedure for evaluating shear stress measurements in an annular flume using frequency domain filters", *XXX IAHR Congress, Thessaloniki, Greece, Theme B*, 425-432.

- Schneider, K., Farge, M., Pellegrino, G. y Rogers, M. (2005). "Coherent vortex simulation of three-dimensional turbulent mixing layer using orthogonal wavelet", *Journal of Fluid Mechanics*, 534, 39-66.
- Sedláček, M. y Titera, M. (1998). "Interpolations in frequency and time domains used in FFT spectrum analysis", *Measurement*, 23, 185-193.
- Shaikh, F.N. (1997). "Investigation of transition to turbulence using white-noise excitation and local analysis techniques", *Journal of Fluid Mechanics*, 348, 29-83.
- Spanos, P. y Failla, G. (2004). "Evolutionary spectra estimation using wavelets", *Journal of Engineering Mechanics*, 130(8), 952-960.
- Strang, G. y Nguyen, T. (1995). "Wavelets and Filter Banks", *Wellesley-Cambridge Press*, Wellesley, MA.
- Sullivan, P., Ancimer, R. y Wallace, J. (1999). "Turbulence averaging within spark ignition engines", *Experiments in Fluids*, 27, 92-101.
- Torrence, C. y Compo, G.P. (1998). "A practical guide to wavelet analysis", *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1), 61-78.
- Thomas, F. y Chu, H. (1993). "Nonlinear wave coupling and subharmonic resonance in planar jet shear layer transition", *Physics in Fluids*, 5(3), 630-646.
- Vlachogiannis, M. y Bontozoglou, V. (2001). "Observations of solitary wave dynamics of film flows", *Journal of Fluid Mechanics*, 435, 191-215.
- Walker, S.H., Gordeyev, S.V. y Thomas, F.O. (1997). "A wavelet transform analysis applied to unsteady aspects of supersonic jet screech resonance", *Experiments in Fluids*, 22, 229-238.
- Wang, X., Lambert, M., Simpson, A., Liggett, J. y Vikousky, J. (2002). "Leak detection in pipelines using the damping of fluid transients", *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(7), 697-711.
- Xiu, D., Lucor, D., y Karniadakis, G.E. (2001). "Modeling uncertainty in flow-structure interactions", *First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Cambridge, MA, June 12-15, 1420-1423.
- Yu, Y., Ajit, S.R., Zhu, H. y Xia, L. (2005). "Using wavelet transforms to analyze nonlinear ship rolling and heave-roll coupling", *Ocean Engineering*, XX, 1-15.