



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

**FORMULACIÓN Y MODELADO NUMÉRICO
DEL PROBLEMA DE AGRIETAMIENTO EN
CONCRETOS A DIFERENTES EDADES**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ARELY MERLIN VIEYRA

TUTORES PRINCIPALES:
DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN, INSTITUTO DE INGENIERÍA
DR. JAIME RETAMA VELASCO, INSTITUTO DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. ENERO 2015

JURADO ASIGNADO:

Presidente: M.I. GARCÍA DOMÍNGUEZ OCTAVIO

Secretario: DR. JUÁREZ LUNA GELACIO

1er. Vocal: DR. AYALA MILIÁN AMADO GUSTAVO

2do. Vocal: DR. NIÑO LÁZARO MAURO POMPEYO

3er. Vocal: DR. RETAMA VELASCO JAIME

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN

FIRMA

Índice general

Agradecimientos	VII
Abstract	VIII
Resumen	x
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Antecedentes	2
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Objetivo general	4
1.3.2. Metas	4
2. Propiedades del concreto	5
2.1. Propiedades mecánicas de los concretos jóvenes y maduros	5
2.1.1. Resistencia a compresión y tensión del concreto	5
2.1.2. Módulo de elasticidad	6
2.1.3. Relación de Poisson	8
2.1.4. Energía de fractura	8
2.2. Propiedades térmicas del concreto	9
2.2.1. Conductividad térmica	9
2.2.2. Calor específico	10
2.2.3. Calor de hidratación	10
2.2.4. Coeficiente de dilatación térmica	10
3. Aproximaciones al proceso de falla	13

3.1. Mecánica de fractura	13
3.2. Mecánica de Daño	15
3.2.1. Agrietamiento discreto	15
3.2.2. Agrietamiento distribuido	18
3.2.3. Discontinuidades interiores	20
3.3. Modelos de daño continuo	22
3.3.1. Modelo de daño escalar (caso particular del modelo de daño isótropo)	22
3.3.2. Modelo de daño direccionado o daño anisótropo	23
3.3.3. Modelo de daño unilateral	24
3.3.4. Modelo de daño viscoso	26
3.3.5. Modelos de daño y plasticidad	27
4. Modelo Constitutivo de Daño Isótropo	29
4.1. Modelo de daño isótropo: Superficie de daño igual tensión y compresión . .	30
4.1.1. Ecuación constitutiva	34
4.1.2. Componentes de un modelo de daño	36
4.1.3. Variable de daño y ley de endurecimiento/ablandamiento	38
4.1.4. Condiciones de carga y descarga	41
4.1.5. Operador Constitutivo Tangente	42
4.2. Modelo de daño isótropo: Superficie de daño diferente tensión-compresión .	46
5. Ejemplos de aplicación	49
5.1. Simulación numérica de la prueba de fractura ASTM D 7313-07a	49
5.2. Modelación numérica del concreto a diferentes edades	55
6. Conclusiones	61

Índice de figuras

2.1.	Resistencias a la compresión y a la tensión en función de la edad	7
2.2.	Esquema de la obtención de la energía de fractura adaptada de [S. I.]	9
3.1.	Modos de Falla	14
3.2.	Evolución de la formación del agrietamiento, prueba a tensión.	17
3.3.	Curvas: a) ablandamiento esfuerzo-apertura de la grieta b) curva esfuerzo-desplazamiento. Bazant y Planas (1998).	18
3.4.	Grietas paralelas en el modelo de agrietamiento distribuido	19
3.5.	Modelo de discontinuidades interiores. a) discontinuidades débiles, b) discontinuidades fuertes y c) discontinuidad discreta.	21
4.1.	Representación esquemática de un sólido degradado sometido a un esfuerzo uniaxial de tensión.	31
4.2.	a) Área dañada b) Tensor de esfuerzos de Cauchy σ y tensor de esfuerzos efectivos $\bar{\sigma}$	32
4.3.	a) Degradación del módulo elástico por daño.	33
4.4.	Degradación en un modelo de daño escalar	34
4.5.	Representación de normas: a) campo de esfuerzos b) campo de deformaciones.	37
4.6.	Regla de ablandamiento/endurecimiento: a) lineal b) exponencial.	39
4.7.	Módulos constitutivos, tangente y elástico.	43
4.8.	Modelo diferente tensión-compresión. a) superficie de daño b) curva esfuerzo-deformación	46
5.1.	Dimensiones del espécimen.	50
5.2.	Modelo I Condiciones de frontera, modelo al que se le aplica un desplazamiento al nodo.	51
5.3.	Modelo II Condiciones de frontera, modelo al que se le aplica un desplazamiento al nodo central de resortes, (los resortes sólo actúan a compresión).	52

5.4. Comparación entre los modelos con diferentes condiciones de frontera. . . .	52
5.5. Mallas con elementos cuadriláteros. a) malla gruesa b) malla fina.	53
5.6. Mallas con elementos triangulares. a) malla gruesa b) malla fina.	53
5.7. Comparación del refinamiento de los tipos de mallado, triangular y rectangular.	54
5.8. Distribución de esfuerzos en la probeta.	55
5.9. Comparación de resultados experimentales y numéricos, daño distribuido y discontinuidades interiores.	56
5.10. Mallas con elementos cuadriláteros y triangulares para el modelo de daño continuo y de discontinuidades interiores, respectivamente.	57
5.11. Comparativa de las respuestas de los modelos utilizados a diferentes edades.	59
5.12. Curvas Carga-CMOD a diferentes edades del modelo de daño continuo . .	60
5.13. Curvas Carga-CMOD a diferentes edades del modelo de discontinuidades interiores	60

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al *Dr. A. Gustavo Ayala Milián* por sus enseñanzas de vida y por el conocimiento que me brindó para el desarrollo de esta tesis. Al *Dr. Jaime Retama Velasco* por todo el tiempo, paciencia y dedicación brindada para la revisión y guianza de este trabajo. A mis sinodales *M. I. Octavio Garcia*, *Dr. Gelacio Juárez* y al *Dr. Mauro Niño*, por su dedicación y brillantes comentarios.

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)*, por la beca otorgada durante de mis estudios de maestría.

Agradezco también a la *Dirección General Asuntos del Personal Académico-UNAM (DGAPA)* por el apoyo dado a esta investigación a través del proyecto “**Simulación numérica de proceso de falla en elementos de concreto reforzado considerando el efecto del calor de hidratación del cemento en las propiedades de concretos jóvenes**”, número **IN108512**.

A mis padres *Antonio Merlin Xolot* y *Noemí Vieyra Cruz* por todo el impulso que me han brindado. A *Arcángel Ortíz Sánchez* por todo su apoyo durante la realización de esta tesis.

A mi hija *Valentina Ortíz Merlin* por ser mi motor para seguir adelante.

Arely Merlin Vieyra
México, D. F.
Enero 2015

Abstract

On this thesis work the thermal and mechanical properties of the young and mature concrete in function of the hydratation degree and age, has been compiled. The porpuse of the compilation of this properties is to subsequently introduce them to the numerical model of the cracking of the concrete at different ages. A model validation of isotropic ongoing damages has been made by using numerical examples that consist of an essay of a strain test tube. The results were compared with experimental data, to an interior discontinuities model and to a fracture model. The numerical model previously described was implemented, considering the mechanical properties of concretes at different ages. This model does not include the thermal effects produced by the heat of hydratation of the concrete.

Resumen

En este trabajo de tesis se recopilieron las propiedades mecánicas y térmicas del concreto joven y maduro en función del grado de hidratación y de la edad. La recopilación de estas propiedades es con el fin de posteriormente introducirlas en un modelo numérico de agrietamiento del concreto a diferentes edades. Se validó un modelo de daño continuo isótropo por medio de ejemplos numéricos, que consisten en el ensayo de una probeta a tensión. Los resultados se compararon con datos experimentales, un modelo de fractura y un modelo de discontinuidades interiores. Se implantó el modelo numérico descrito anteriormente considerando las propiedades mecánicas de concretos a diferentes edades. Este modelo no incluye los efectos térmicos producidos por el calor de hidratación del concreto.

Capítulo 1

Introducción

En el concreto se presentan cambios, como consecuencia del calor generado durante el proceso de hidratación del cemento, pocas horas después de su colocación y hasta antes de llegar a su endurecimiento total.

En el proceso de hidratación del concreto se pueden identificar dos etapas. En la primera etapa el calor de hidratación produce cambios de volumen y de temperatura en el concreto mientras éste desarrolla una resistencia baja, por lo cual en esta fase sólo se desarrollan esfuerzos de compresión. La segunda etapa se da con el proceso de enfriamiento del concreto, cuando la resistencia del concreto es mayor a la inicial y se desarrollan esfuerzos de tensión, los cuales provocan agrietamientos en el concreto, [10]. El agrietamiento a edades tempranas en el concreto afecta la durabilidad de la estructura, pues facilita la corrosión y la carbonatación.

En el presente trabajo; primeramente se recopilaron las propiedades mecánicas y térmicas de concretos jóvenes y a diferentes edades, con el fin de poder introducir estas propiedades posteriormente a un modelo numérico de agrietamiento del concreto a diferentes edades. Se evaluó un modelo numérico de daño continuo isótropo con superficie de daño diferente tensión-compresión, desarrollado por Méndez (2012) [44]. El modelo consiste en el ensayo de una probeta de concreto a tensión y la evolución del agrietamiento hasta la fractura; este modelo numérico se evaluó comparando con los resultados experimentales y el modelo de fractura obtenidos por Wagoner *et al.* (2005) [68] y con el modelo de discontinuidades interiores, Retama (2010) [54]. Evaluado el modelo numérico, se utilizó para el implementarlo con las propiedades mecánicas de concretos a diferentes edades, estas características son las reportadas por Kim *et al.* (2003) [30].

El principal aporte es la recopilación de las características térmicas del concreto en función del grado de hidratación para su evaluación a diferentes edades y así posteriormente poder incluirlas en un modelo numérico; y la implementación de un modelo numérico considerando el agrietamiento inicial y el desarrollo del mismo hasta la fractura utilizando

propiedades mecánicas de concretos a diferentes edades.

1.1. Planteamiento del problema

El concreto como material de construcción es un material versátil, por sus propiedades de rigidez, resistencia y durabilidad. Una de las características particulares del concreto es su alta resistencia a compresión; en comparación con su resistencia a tensión. Por esta razón el concreto tiende a desarrollar grietas ante un bajo nivel de esfuerzos a tensión.

Actualmente se han desarrollado concretos de alta resistencia o que la alcanzan de forma acelerada. Es importante la evaluación del módulo elástico de estos concretos, así como de sus propiedades mecánicas a diferentes edades y de manera particular a edades tempranas, para evitar un deterioro prematuro, pues este puede presentarse antes de que las sollicitaciones para las que fueron diseñados actúen en la estructura.

La evaluación de las propiedades en los concretos jóvenes no es sencilla, ya que las mismas varían a medida que avanza el fraguado y se libera el calor de hidratación en el concreto. Uno de los problemas en los concretos jóvenes es que el calor de hidratación que se libera durante el fraguado, puede producir deformaciones importantes que inducen un agrietamiento a edades tempranas, lo cual trae como consecuencia que la estructura presente daño, antes de que ésta entre en funcionamiento.

Hoy en día se intenta evaluar el comportamiento mecánico de los concretos maduros en su evolución a la falla de forma experimental y numérica. Sin embargo, existe poca literatura en la que se haga referencia a modelos numéricos que simulen el comportamiento de concretos jóvenes considerando la no lineal del material.

1.2. Antecedentes

La teoría de daño continuo fue presentada por primera vez en el año de 1958 por Kachanov en el contexto de problemas relacionados con la fluencia, posteriormente fue aceptada como una teoría válida para simular el comportamiento de diversos materiales [29].

Los desarrollos numéricos alcanzados por diversos investigadores como son: Lubliner (1990) [34] sobre el análisis de endurecimiento y ablandamiento no-lineal para modelos constitutivos de plasticidad y daño; los efectos de tamaño y de gradiente realizados por Bazant y Planas (1997) [4], y los desarrollos computacionales sobre comportamiento inelástico de los materiales, fundamentados por Simo (1987) [60, 61] han marcado el desarrollo de los modelos constitutivos.

Para describir el proceso mediante el cual fallan los materiales en medios continuos, se han realizado estudios en los que se concluye que la falla es precedida por la aparición de una concentración de deformaciones localizadas en alguna zona del continuo, donde se genera el daño y otros efectos no lineales, Bazant y Planas (1998) [4]. Lo que ocurre en una falla a nivel microscópico primeramente es la formación de vacíos o dislocaciones de cristales; que posteriormente evolucionan a un nivel macroscópico formando discontinuidades [4].

La mecánica del daño tiene principalmente dos enfoques para obtener la respuesta a nivel macroescala de una estructura de concreto, un enfoque discreto y un enfoque continuo. El enfoque de la mecánica de daño discreto asume que el daño es un proceso discreto y estocástico, este tiene la ventaja de mantener detalles estructurales heterogéneos a nivel microescala. Mientras que la mecánica del daño continuo provee de ecuaciones constitutivas de la evolución del daño degradando la rigidez del material mediante una variable escalar conocida como *variable de daño*, [42]. La interpretación física de la variable de daño se introduce como el área de la superficie dañada, [29]. Existen dos tipos de variables de daño que pueden incluirse en los modelos: escalares (isótropos) y tensoriales (anisótropos). El uso de la variable escalar es el tratamiento más sencillo, ya que representa un estado isótropo de la degradación del concreto [41], sin embargo cabe señalar que se han introducido a la variable daño escalar nociones de daño a la tensión y a la compresión, respectivamente.

En estudios anteriores se ha encontrado la dependencia que existe entre el grado de hidratación y las propiedades mecánicas de los concretos a edades tempranas. Mientras el calor producido por la de hidratación del cemento es liberado, se desarrollan esfuerzos térmicos que provocan el agrietamiento del concreto joven. Los factores de mayor relevancia en la aparición de esfuerzos térmicos en masas de concreto durante la etapa de colado y fraguado inicial (en las que se producen grandes cantidades de calor) son: el incremento de temperatura, el comportamiento mecánico del concreto joven y el grado de restricción impuesto (por apoyos y estructuras vecinas) [2].

Yi *et al.* (2003) [70] han realizado múltiples estudios para encontrar las propiedades mecánicas del concreto a edades tempranas, así como de sus propiedades de fractura, obteniéndose buenos resultados en comparación con los experimentales y modelos numéricos de daño. Schutter y Taerwe (1997) [58] han obtenido experimentalmente la curva esfuerzo-deformación del concreto en relación con el grado de hidratación.

La manera en la que se ha abordado anteriormente el agrietamiento en el concreto a diferentes edades es el desacoplamiento del problema termomecánico, de forma que primero se lleva a cabo un análisis térmico y posteriormente se realiza el cálculo de los esfuerzos inducidos, [10].

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Modelar numéricamente el problema del agrietamiento en el concreto a diferentes edades mediante el modelo de daño continuo propuesto por Méndez (2012) [44], valindándolo por medio de resultados experimentales y con el modelo de discontinuidades interiores propuesto por Retama (2010) [54].

1.3.2. Metas

Para lograr el objetivo general se establecen las siguientes metas:

- Recopilación de las propiedades mecánicas y térmicas de concretos jóvenes y maduros que intervienen en el agrietamiento del concreto a diferentes edades hasta su endurecimiento.
- Simulación numérica de problemas de agrietamiento por medio del modelo numérico de daño continuo.
- Evaluar el modelo numérico de daño continuo isótropo con superficie de daño diferente tensión-compresión, mediante resultados experimentales y el modelo de discontinuidades interiores.
- Estudiar las diferentes propuestas de cómo involucrar el agrietamiento en concretos a diferentes edades.

Capítulo 2

Propiedades del concreto

El concreto es una mezcla de materiales, constituido por un aglomerante (principalmente cemento y agua) así como agregados finos y gruesos. Por lo tanto sus características obedecen a la propiedad que brinda el aglomerado al unir las partículas de los materiales inertes que lo componen. El concreto no es un material isótropo por que no mantiene las mismas propiedades en diferentes direcciones. A continuación se presentan las propiedades mecánicas y térmicas del concreto medidas a diferentes edades, principalmente a edades tempranas.

2.1. Propiedades mecánicas de los concretos jóvenes y maduros

Durante el proceso de endurecimiento, cuando la resistencia del concreto es baja (durante los primeros 7 días), existen cambios de volumen y de temperatura. El esfuerzo producido por la expansión volumétrica (principalmente a compresión) del concreto es moderado, sin embargo, en la fase de enfriamiento y debido a que que el concreto ha desarrollado rigidez, se producen esfuerzos de tensión, los cuales podrían agrietar el concreto antes de que éste haya sido sometido a cargas. Es importante considerar el comportamiento elástico y de flujo plástico del concreto a edades tempranas sometidos a niveles de esfuerzos elevados. Para lo cual es necesario conocer sus propiedades mecánicas y de fractura a diferentes edades, así como sus propiedades térmicas.

2.1.1. Resistencia a compresión y tensión del concreto

Se define como resistencia a la capacidad para soportar cargas y esfuerzos. Por la naturaleza de la adherencia de la pasta de cemento, el concreto tiene un mejor comportamiento a compresión que a tensión. Esta propiedad es dependiente, principalmente, de la concentración de la pasta, la cual se expresa principalmente en términos de relación agua/cemento.

Generalmente en la literatura el término concreto joven se refiere a uno cuya edad es menor a los 7 días. Aunque el proceso de hidratación se da sólo durante las primeras 4 horas, las propiedades de un concreto joven son diferentes a las de un concreto maduro, cuya resistencia se ensaya hasta los 28 días (prueba a compresión y tensión uniaxial).

Los datos experimentales reportados por Schutter y Taerwe (1996) muestran curvas del desarrollo de la relación $f_c(r)/f_c(r = 1)$ en función del grado de hidratación. De estas curvas experimentales aparece una relación casi lineal de la resistencia a compresión y el grado de hidratación r ; cuya formulación está dada por ec. 2.1, [58].

$$\frac{f_c(r)}{f_c(r = 1)} = \left(\frac{r - r_0}{1 - r_0} \right)^a \quad (2.1)$$

donde $f_c(r)$ es la resistencia a compresión para el grado de hidratación r , $f_c(r = 1)$ es la resistencia a compresión para el grado de hidratación $r = 1$, r_0 y a son parámetros obtenidos experimentalmente.

La resistencia a la tensión está dada por ec. 2.2:

$$\frac{f_{ct}(r)}{f_{ct}(r = 1)} = \left(\frac{r - r_0}{1 - r_0} \right)^c \quad (2.2)$$

con $c = a \cdot m$ donde m es un parámetro obtenido experimentalmente.

En pruebas realizadas por Jin y Li (2000) se midió la resistencia a compresión y tensión uniaxial a edades de 12, 18, 24, 48, 72 y 168 horas, con lo que se obtuvieron curvas esfuerzo deformación de un concreto joven bajo compresión y tensión uniaxial, en función de la madurez del concreto. Estas pruebas experimentales han dado como resultado que un concreto joven es muy dúctil hasta los 3 días. Estas pruebas se realizaron a una temperatura de 20 °C y con un 95 % de humedad relativa [25]. Los resultados se muestran en la fig. 2.1.

2.1.2. Módulo de elasticidad

El concreto no es un material elástico como es posible observar al llevarlo a la falla en compresión, sin embargo su módulo elástico queda definido por la primera parte de la curva esfuerzo-deformación. El módulo de elasticidad es una propiedad característica de los concretos maduros (generalmente se evalúa cuando el concreto ha alcanzado una madurez en resistencia), sin embargo es posible obtenerla en concretos jóvenes para evaluar

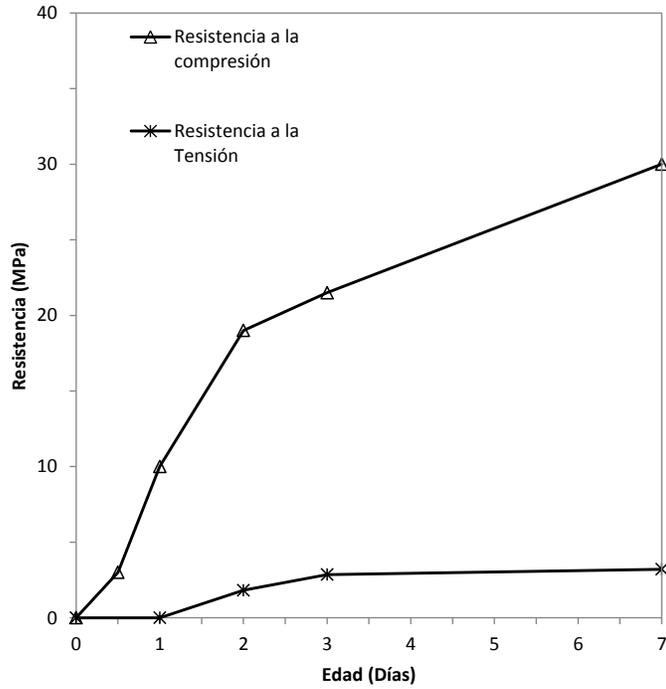


Figura 2.1: Resistencias a la compresión y a la tensión en función de la edad

su comportamiento con fines de estudio.

Los experimentos realizados por Schutter y Taerwe (1996) [58], muestran una comparación entre la resistencia desarrollada y la rigidez en función del grado de hidratación, en la cual se observó que la primera se desarrolla más rápido que la segunda. En la literatura se ha observado la relación entre la rigidez y la resistencia. Schutter y Taerwe proponen la ec. 2.3:

$$\frac{E_{co}(r)}{E_{co}(r=1)} = \left(\frac{r - r_0}{1 - r_0} \right)^{\frac{a}{3}} \quad (2.3)$$

donde $E_{co}(r=1)$ es el módulo de elasticidad en el grado de hidratación $r=1$. De manera general, y tomando en cuenta que a partir de la resistencia se puede obtener la rigidez, Schutter y Taerwe (1996) definieron la ec. 2.4:

$$\frac{E_{co}(r)}{E_{co}(r=1)} = \left(\frac{r - r_0}{1 - r_0} \right)^b \quad (2.4)$$

donde $b = a \cdot n$; n es un parámetro obtenido experimentalmente.

Cuadro 2.1: Módulo de elasticidad a tensión y a compresión

Edad (días)	1.0	2.0	3.0	7.0
Módulo elástico a compresión (GPa)	15.46	16.93	18.68	24.90
Módulo elástico a tensión (GPa)			14.79	24.60

Jin y Li (2000) realizaron pruebas experimentales para el concreto joven. Los resultados de estas pruebas se muestra en la tabla 2.1. El módulo elástico a compresión se obtuvo de la curva esfuerzo-deformación tomando como módulo elástico el módulo secante, y este último se obtuvo como la pendiente desde el origen de la curva hasta el 40% del pico de esta.

2.1.3. Relación de Poisson

Se trata de una constante elástica que proporciona una medida del estrechamiento de la sección de un prisma de material elástico lineal e isótropo cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a la dirección del estiramiento. Esta relación para concretos se encuentra entre 0.15 y 0.20.

Schutter y Taerwe (1996) hallaron mediante estudios experimentales que la relación de Poisson ν no es constante durante el endurecimiento del concreto. Aunque algunos autores no toman en cuenta este cambio o se toma como constante en el proceso de hidratación, [66, 50, 58]. A partir de los resultados experimentales y de la literatura existente Schutter y Taerwe (1996) dedujeron un nuevo modelo de la relación de Poisson basado en el grado de hidratación mostrado en la ecuación 2.5:

$$\nu(r) = 0.18 \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right) + 0.5e^{-10r} \quad (2.5)$$

donde las variables indicadas en la ecuación, ya fueron definidas anteriormente.

2.1.4. Energía de fractura

Esta es una propiedad muy importante para el estudio del daño en materiales. Uno de los métodos más utilizados para la obtención de este parámetro en concreto es un ensayo tipo RILEM, [55]. De este ensayo, resulta la energía disipada en todo el sólido W_f y de allí puede obtenerse una energía media de fractura como $G_f = \frac{W_f}{A_f}$ (ver fig. 2.2).

La energía de fractura debe ser independiente del tipo de ensayo que se realice a un material, esta debe ser la misma. Aunque de los resultados que se obtienen de diferentes

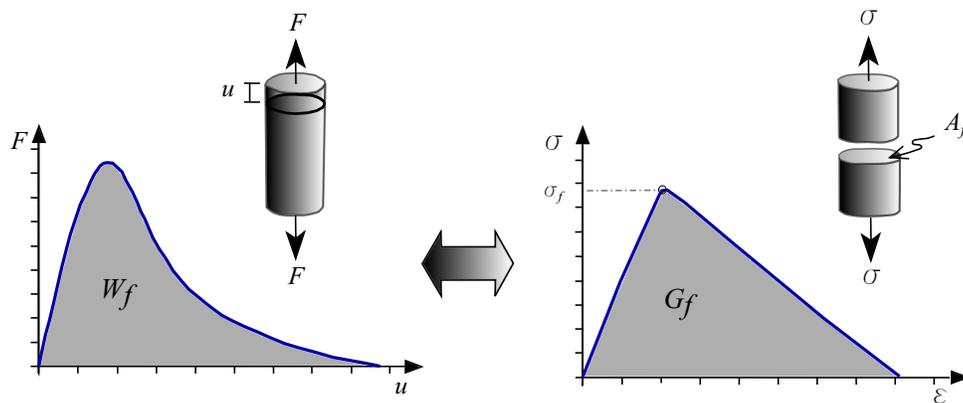


Figura 2.2: Esquema de la obtención de la energía de fractura adaptada de [S. I.].

ensayos existe una dispersión muy grande y más cuando se utilizan diferentes métodos de medición.

Existe limitada evidencia experimental en la literatura sobre las propiedades de fractura del concreto joven. Se acepta que para concretos jóvenes la energía de fractura es una función del tiempo, [23].

2.2. Propiedades térmicas del concreto

Una de las dos principales causas del agrietamiento del concreto a edad temprana son los efectos térmicos (dilatación y/o contracción debidas a la energía en forma de calor liberada) y la contracción (por la pérdida de humedad).

Un concreto típico puede primeramente experimentar altos gradientes de temperatura y expandirse debido al calor producido durante su edad temprana, producto de la hidratación del cemento. Si subsecuentemente el enfriamiento es muy rápido, el concreto puede agrietarse particularmente si está restringido, local o globalmente. Para comprender adecuadamente la contribución de los efectos térmicos que producen el agrietamiento a edad temprana, se requiere de una caracterización cuantitativa de las propiedades termofísicas del concreto, su calor de hidratación y su interacción con el medio ambiente, [7].

2.2.1. Conductividad térmica

La conductividad térmica de un material es la propiedad que mide su capacidad para conducir calor. Se define como la relación entre el flujo de calor y el gradiente térmico necesario para que exista ese flujo. Esta propiedad mide la rapidez con la que se transmite

el calor en el material, [2].

Es cierto que las características térmicas del concreto están influenciadas por las de sus componentes, la conductividad térmica es dependiente de la composición de sus agregados. En general un concreto es un mal conductor de calor, por lo que su conductividad térmica es particularmente baja. Sin embargo, en el periodo de fraguado, se encuentran temperaturas no despreciables, como sería el caso ante una exposición ambiental, [2].

La conducción térmica es una propiedad que depende del grado de saturación del concreto, por lo que a edades tempranas, cuando por lo general se encuentra saturado, es objeto de estudios de flujo de calor. Para variaciones de proporción agua-cemento, no se muestra variación considerable; sin embargo, esta variación si se muestra debido a la composición mineralógica del tipo de agregado, [2, 3]. Su valor varía de 1.2 a 2.5 $W/m^{\circ}C$. Al inicio del proceso de hidratación, alcanza valores mayores que cuando el concreto ha fraguado completamente. Sin embargo puede considerarse constante e igual al final del proceso, [3, 7].

2.2.2. Calor específico

El calor específico de un material es la cantidad de calor que hay que suministrar a una masa unitaria para elevar su temperatura en un grado. En los concretos el calor específico está en función de la densidad, la proporción agua-cemento, el grado de saturación y la temperatura de la pasta. Sin embargo, puede considerarse para esta propiedad una variación de tipo lineal, [8, 2]. En algunas investigaciones se ha considerado constante debido a que la variación es del 5% en comparación con su valor al inicio de la hidratación y al final del proceso. Se toma el calor específico al del concreto completamente endurecido, cuyo valor oscila entre 800 y 1170 $J/kg^{\circ}C$, [3].

2.2.3. Calor de hidratación

Durante el proceso de hidratación del cemento, se libera una cantidad significativa de energía en forma de calor. Este calor de hidratación se debe incluir en un modelo de edad temprana de transferencia de calor en concreto, [7].

El calor de hidratación es usualmente medido bajo condiciones adiabáticas lo cual es difícil de lograr en grandes masas de concreto y fuera de un laboratorio, [7, 2].

2.2.4. Coeficiente de dilatación térmica

Se denomina como coeficiente de dilatación térmica de un material a la relación entre las expansiones y su cambio de temperatura. En concretos su valor depende de la composición

de la mezcla, debido a que la pasta del cemento y los agregados poseen coeficientes de dilatación térmica diferentes, [2]. Esta propiedad es particularmente difícil de medir a edades tempranas debido a las variantes durante el curso de la hidratación. Los valores de $10 \times 10^{-6}[\frac{1}{K}]$ a $12 \times 10^{-6}[\frac{1}{K}]$ son comúnmente usados para el concreto, [7].

Capítulo 3

Aproximaciones al proceso de falla

Anteriormente en épocas pasadas se atribuía el proceso de falla en medios continuos a la localización de deformaciones, la cual se caracteriza por una concentración de microfisuras que llevan al material a incursionar en el rango inelástico, Bazant y Planas (1998) [4].

Generalmente los materiales empleados para la fabricación de estructuras presentan inicialmente comportamiento elástico, hasta alcanzar cierto valor en el que comienza su comportamiento no lineal. A menudo este comportamiento se idealiza como plástico o elastoplástico. El concreto al alcanzar un valor umbral, *i. e.*, esfuerzo último de fluencia, presenta un ablandamiento por deformación, por lo tanto es considerado como un material cuasi-frágil. En la literatura podemos encontrar varios modelos para tomar en cuenta la pérdida de rigidez en el concreto debido a su incursión en el rango inelástico, [36, 19, 26]

3.1. Mecánica de fractura

La Mecánica de fractura es la rama de la mecánica de sólidos deformables que se encarga del estudio de los cuerpos agrietados, principalmente en materiales frágiles, en los que busca determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones, particularmente en la punta de la grieta, donde las deformaciones son no acotadas.

La mecánica de la fractura es clasificada como Mecánica de Fractura Elástica Lineal (MFEL) que es cuando cuando los esfuerzos desarrollados durante el proceso de generación de una grieta no superan el límite elástico, no así cuando en la punta de la grieta los esfuerzos provocan un comportamiento plástico o cualquier mecanismo inelástico, tratándose en este caso de la Mecánica de Fractura no Lineal.

Las formas o modos de falla en las que una estructura puede romperse fueron introducidas por Irwin (1957) y permite estudiar la concentración de tensiones en la cabeza de una

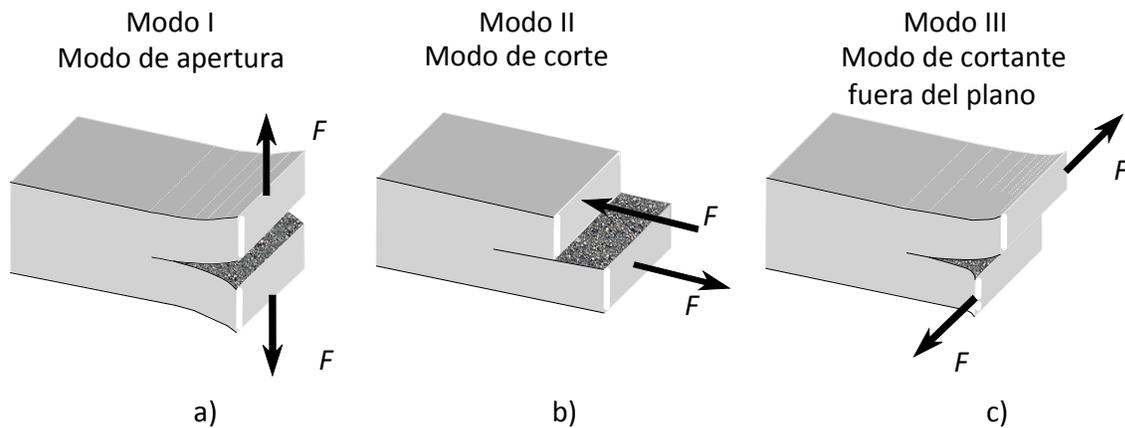


Figura 3.1: Modos de Falla

grieta, [49].

Se identifican tres modos básicos de fractura (ver figura 3.1), que muestran tres movimientos independientes:

- Modo de apertura o “Modo I”*, en el cual las caras de la grieta se separan casi paralelamente entre sí. Se supone que en este modo sólo se desarrollan tensiones de tracción, (fig. 3.1a).
- Modo de corte o “Modo II”*, en el que las caras de la fisura se deslizan una sobre la otra. Se supone que bajo este modo sólo pueden generarse tensiones tangenciales, (fig. 3.1b).
- Modo de cortante fuera del plano o “Modo III”*, donde las caras de una grieta se deslizan lateralmente una respecto a la otra. Se supone que también en este caso se desarrollan tensiones tangenciales, (fig. 3.1c).

La MFLE simula el proceso de falla en los materiales con el apoyo de los métodos numéricos, principalmente mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) y el Método de las Ecuaciones Integrales de Frontera (MEIF). La propagación de la falla, por ejemplo en el modo I, se lleva a cabo en incrementos que siguen cuatro pasos, [28]:

1. *Análisis de esfuerzos.*
2. *Cálculo del factor de intensidad de esfuerzos.*
3. *Cálculo de la dirección de propagación*

4. Determinación de un nuevo frente de grieta y remallado

La MFEL da resultados satisfactorios en materiales frágiles. Ésta, modela la presencia de grietas mediante la aproximación del MEF, para ello es necesario considerar que las discontinuidades ocurren en los bordes de los elementos usados, considerando la existencia de una grieta; esto implica que se tenga que realizar un remallado del modelo. Esta es su mayor desventaja, el costo computacional por remallado en cada paso del análisis, lo que representa una demanda computacional excesiva y la inherente necesidad de contar con una grieta para realizar el análisis.

3.2. Mecánica de Daño

La Mecánica del Daño surgió en base a una formulación que pudiera contemplar el daño experimentado por los sólidos, partiendo de los principios de la Mecánica del Medio Continuo. Ésta considera dos aproximaciones, el Modelo de Agrietamiento Distribuido y el Modelo de Agrietamiento Discreto.

La mecánica del daño es la rama de la mecánica que se encarga del estudio de los mecanismos involucrados en el deterioro de los materiales cuando se someten a fuerzas, mediante el empleo de variables mecánicas. A fin de describir el proceso físico de falla, con los modelos constitutivos de daño se puede representar el comportamiento inelástico de los materiales en los que ocurre una degradación de rigidez en cuanto se alcanza un valor límite de un material.

3.2.1. Agrietamiento discreto

Durante la aparición de microgrietas hasta la aparición de grietas como tal, se producen fuerzas de cohesión en las caras paralelas a la grieta. En el MEF, el campo de esfuerzos, perteneciente a las fuerzas de cohesión, queda determinado en función de un modelo conocido como *relación tracción-salto*, y asume su existencia entre las fronteras de los elementos sólidos que forman la malla. Esta aproximación es conocida como *Modelo de grieta discreta*. Se crean nuevos grados de libertad en la localización del nodo. Se asume que se produce una discontinuidad entre el nodo viejo y el recién creado, Ngo y Scordelis (1967), [45]. El método tiene la desventaja de que se requiere de un continuo cambio de la topología de la discretización, y que la propagación de la grieta está restringida a las líneas de la malla.

Se hicieron dos mejoras principales al modelo de agrietamiento discreto una de ellas es la posibilidad de remallado y el uso de un elemento interfaz como grieta predefinida a lo largo de los elementos. Las técnicas de remallado fueron desarrolladas por Ingraffea y Saouma (1985), [24].

Aunque el procedimiento consiste en una serie de cálculos elásticos lineales, en el enfoque de Rots (1991), [57], para utilizar elementos interfaz en un agrietamiento predefinido tiene un enfoque totalmente no lineal. Los elementos interfaz de espesor cero se insertan sobre la malla de elementos finitos en donde se espera se propague la grieta, estos lugares se eligen en base a un análisis de agrietamiento distribuido o de la evaluación de datos experimentales. Los elementos de la interfaz tienen nodos duales, que tienen las mismas coordenadas, y como en los elementos continuos los esfuerzos se muestrean en los puntos de integración entre los grupos de nodos individuales. Cuando el esfuerzo normal en un punto de integración se encuentra por debajo de la resistencia a tensión de la relación esfuerzo-deformación en la interfaz se toma como elástico-lineal, con una rigidez ficticiamente alta del orden necesario para que no exista la deformación en la interfaz. Cuando se excede la fuerza de tensión en un punto de integración, la fuerza desequilibrada puede causar desplazamientos entre los dos nodos del conjunto de nodos de la interfaz. Obteniéndose así los modos de comportamiento tipo I, apertura, y tipo II, deslizamiento a lo largo del elemento interfaz. El éxito de este enfoque depende de la estimación correcta de la trayectoria de propagación de la grieta. El enfoque es principalmente aplicable cuando existe una grieta dominante que conduce al fallo. Si estas condicionantes no se cumplen, el análisis de agrietamiento discreto puede ser poco exitoso, [9].

Durante los años 70's, Hilleborg y colaboradores extienden el concepto de grieta discreta en concreto, proponen que una grieta cohesiva se puede desarrollar en cualquier lugar de un sólido, aun cuando no exista la presencia de una macrogrieta. Ellos llamaron esta extensión del modelo de grieta cohesiva como *Modelo de grieta ficticia*, [22]. Hilleborg describe una prueba a tensión en una barra de concreto, la cual ya había sido realizada por varios investigadores en los años 60's (e. g., Hughes and Chapman, 1966; Evans and Marathe, 1968). Los estudios experimentales muestran que la formación de grietas en el concreto es un proceso evolutivo de la acumulación de deformaciones antes de que se alcance el esfuerzo máximo a tensión, así como la localización de deformaciones y la formación de una grieta visible despues de alcanzado el esfuerzo máximo a tensión f_t , [69] como se ilustra en la fig. 3.2. Por lo tanto en el modelo de fractura del concreto, a la zona de localización de deformaciones lo idealizaban como una zona con una grieta ficticia, que corresponde a una zona microagrietada con algunos ligamentos restantes para la transferencia del esfuerzo. Destacando que una grieta ficticia puede estar presente en una zona microagrietada siempre que los correspondientes desplazamientos sean pequeños. Como se muestra en la fig. 3.2, para una barra de longitud L la deformación total en la región después del punto más alto de la curva se encuentra dada por ec. 3.1.

$$\Delta L = \delta_e + \delta_{ine} + W \tag{3.1}$$

donde δ_e es la deformación elástica, δ_{ine} es la deformación inelástica, y W es el desplazamiento de la apertura de la grieta ficticia. Al alcanzar el esfuerzo a tensión último del

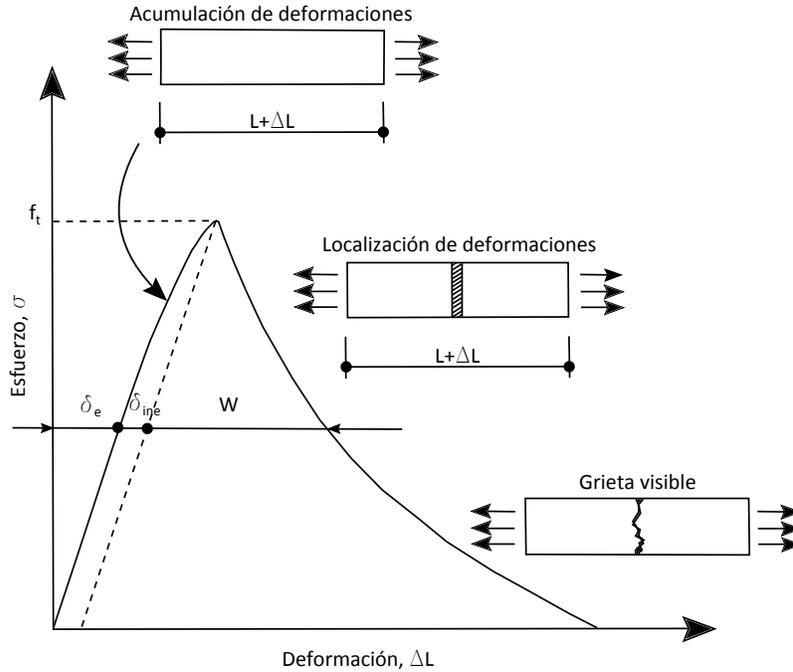


Figura 3.2: Evolución de la formación del agrietamiento, prueba a tensión.

material, aparece una grieta cohesiva, normal al eje longitudinal de la barra, con una apertura finita W , en la que aún existe transmisión de esfuerzos, al mismo tiempo, el resto del espécimen se descarga y sus deformaciones decrecen uniformemente a lo largo de la curva de ablandamiento (fig. 3.2). Lo anterior llevó a Hilleborg a suponer que la transferencia de esfuerzos a través de la grieta cohesiva es función de la apertura de la misma, [59, 28].

$$\sigma = f(W) \tag{3.2}$$

En la ecuación 3.2, $f(W)$ es una función característica del material que se determina experimentalmente, y que gráficamente está representada por la curva de ablandamiento. Se puede extraer del comportamiento global de un elemento (fig. 3.2) y graficar de forma separada como se muestra en la figura 3.3a. Esta curva de ablandamiento cumple con la propiedad de alcanzar el valor de esfuerzo a tensión último f_t , para el cual se tiene una apertura de grieta $W = 0$. El ingrediente principal del modelo de grieta cohesiva es la curva de ablandamiento, que varía para cada material.

Para simplificar los análisis, manteniendo los fundamentos del modelo, Hilleborg supuso no tomar en cuenta las deformaciones inelásticas en la curva de carga-descarga, *i.e.*, el comportamiento global del material es elástico lineal, por lo que para la curva de ablandamiento de la fig. 3.2 la elongación ΔL , se construye como se muestra en la fig. 3.3b.

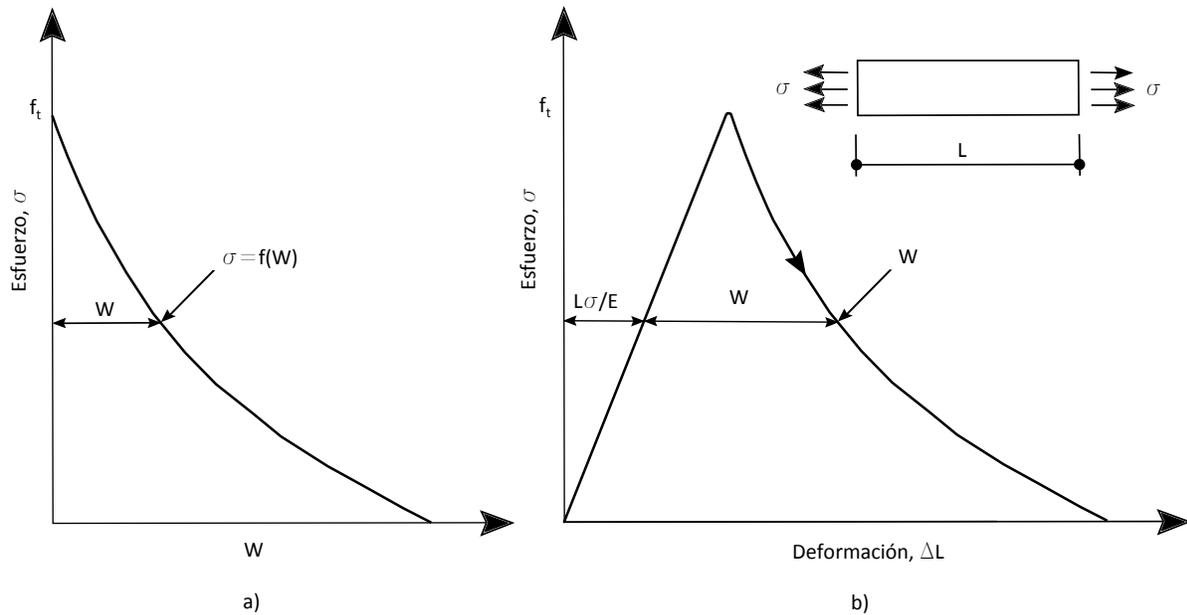


Figura 3.3: Curvas: a) ablandamiento esfuerzo-apertura de la grieta b) curva esfuerzo-desplazamiento. Bazant y Planas (1998).

3.2.2. Agrietamiento distribuido

Este modelo tiene tres enfoques: modelo de grieta fija, fija direccional y grieta giratoria. El modelo parte de la noción de que cuando se produce una grieta en un elemento, el material que en principio es isótropo continuo cambia a ortótropo, en donde los ejes de ortotropía están en función de la dirección de iniciación de la grieta. Con este procedimiento se mantiene la topología inicial de la malla de elementos finitos, puesto que no impone restricciones con respecto a la orientación de los planos de agrietamiento. La aproximación ha tenido popularidad en el análisis de estructuras de concreto, aplicando el método de los elementos finitos. Este enfoque fue introducido por Rashid (1968), [52], parte de la noción de esfuerzo y deformación y permite una caracterización del proceso de falla en función de la relación esfuerzo-deformación. El modelo hace la aproximación numérica mediante un conjunto de grietas paralelas distribuidas en un área de elemento finito (fig. 3.4) [28]; el cuerpo agrietado se considera como un medio continuo y la presencia de la grieta se incluye por medio de la modificación de las propiedades mecánicas.

Modelo de grieta fija

Cuando el esfuerzo principal mayor supera el esfuerzo de tracción, aparece una fisura en dirección perpendicular al esfuerzo principal máximo, entonces se modifica la matriz constitutiva en ejes locales, anulando la resistencia en la dirección normal a la fisura, manteniéndose la dirección de ésta, [56, 28]. El modelo considera que la transferencia del

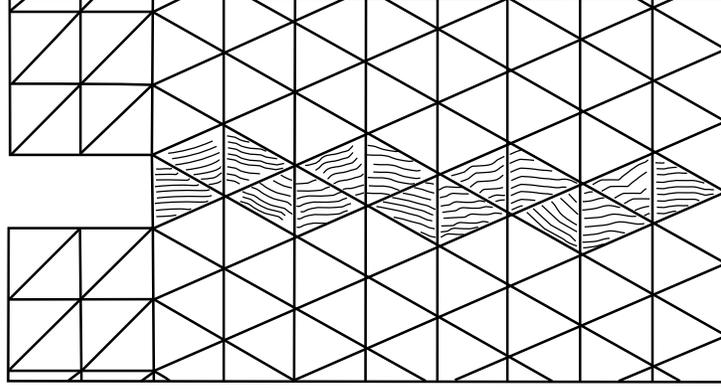


Figura 3.4: Grietas paralelas en el modelo de agrietamiento distribuido

esfuerzo normal y del esfuerzo cortante es independiente entre ellos (anisotropía inherente).

En esta aproximación la deformación se descompone $\Delta\epsilon$ en: la deformación por grieta $\Delta\epsilon^{gr}$ y la deformación del material sólido entre las grietas $\Delta\epsilon^{co}$ (generalmente concreto), es decir, [56, 44]:

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^{gr} + \Delta\epsilon^{co} \quad (3.3)$$

Este modelo tiene la principal desventaja de que es imposible combinar proporcionalmente el agrietamiento y otro fenómeno no lineal (efectos térmicos, plasticidad) cuando se adopta una relación total entre esfuerzo y deformación.

Grieta fija distribuida multidireccional

La deformación por grieta en el concreto se puede sub-descomponer las deformaciones de la grieta en turno y de la siguiente grieta. La sub-descomposición de la deformación está dada por la contribución las diversas grietas multidireccionales que simultáneamente se producen en un punto determinado, es decir:

$$\Delta\epsilon^{gr} = \Delta\epsilon_1^{gr} + \Delta\epsilon_2^{gr} + \dots \quad (3.4)$$

donde $\Delta\epsilon_1^{gr}$ es el incremento de la deformación global del primer agrietamiento, $\Delta\epsilon_2^{gr}$ es el incremento de la deformación global del segundo agrietamiento, y así sucesivamente. En este modelo la orientación individual de cada grieta permanece fija durante el análisis, [56, 44].

Grieta distribuida giratoria

Este modelo fue propuesto por Cope *et al.* (1980) [16]; a diferencia de los modelos de grieta fija admiten que la dirección normal a la grieta puede girar siguiendo la dirección del esfuerzo principal mayor durante todo el proceso de agrietamiento.

El modelo tiene la suposición de que la dirección del esfuerzo principal y el vector de deformación coincide durante todo el proceso de fractura, es decir son coaxiales; debido a ello, este modelo no establece explícitamente el tratamiento del cortante por deslizamiento y cortante por transferencia a causa de la unión mecánica de los agregados, [9].

La principal ventaja del modelo de agrietamiento distribuido es que no necesita remallado, sin embargo presenta problemas cuando hay ablandamiento de deformaciones en el análisis, las cuales son: [28]

- *Objetividad de la malla.* Los resultados son afectados por el tamaño y la orientación de los elementos, problema que puede reducirse al utilizar mallas refinadas.
- *Modos cinemáticos falsos.* Producidos por la falta de convergencia en el análisis y,
- *Atoramiento de esfuerzos.* Este fenómeno ocurre como consecuencia de la compatibilidad de desplazamientos entre elementos y de que la grieta no está alineada con el borde del elemento finito que la contiene. En consecuencia, el elemento interior en la banda de ablandamiento impone deformaciones a los elementos que lo rodean; si estos elementos limitan dichas deformaciones, entonces se produce un atoramiento de esfuerzos en el interior y no se descarga la banda por el ablandamiento.

3.2.3. Discontinuidades interiores

Esta aproximación surge de la necesidad de encontrar un modelo que tenga las ventajas de los modelos de grieta discreta y grieta distribuida; es decir, un modelo que localice el daño sin requerir remallado, sin que presente las dificultades de los modelos ya mencionados. La aproximación permite introducir discontinuidades sin necesidad de modificar la malla; además no existe la necesidad de definir con anterioridad las zonas potenciales de falla, debido a que las discontinuidades pueden ser introducidas en cualquier momento en el análisis.

El modelo de discontinuidades interiores, para el seguimiento de las discontinuidades, recurre a un criterio de falla para determinar el momento en el que se produce una discontinuidad, y de un criterio de propagación para definir la ubicación geométrica de la discontinuidad en el sólido durante el análisis.

Los aspectos fundamentales que considera el modelo de discontinuidades interiores son la cinemática de desplazamientos y de deformaciones, y el equilibrio de la discontinuidad. En

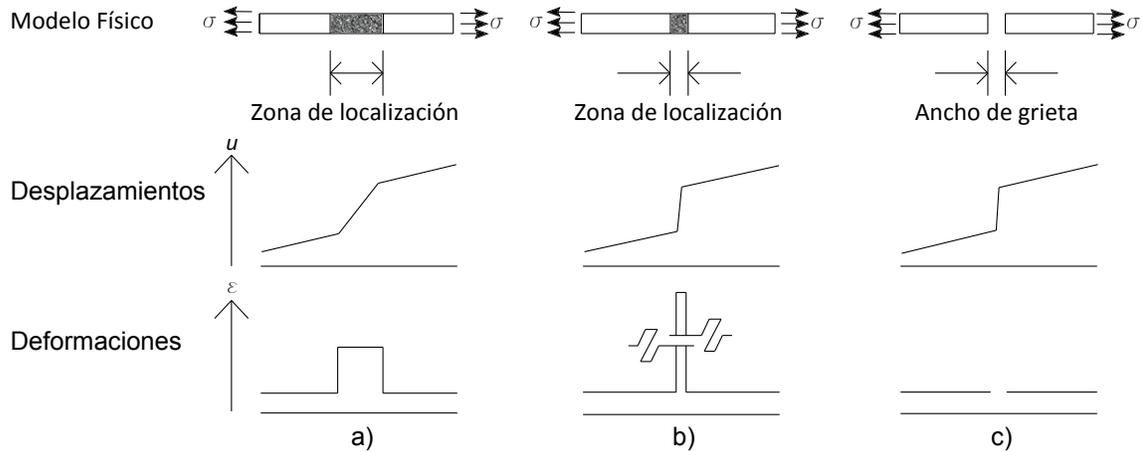


Figura 3.5: Modelo de discontinuidades interiores. a) discontinuidades débiles, b) discontinuidades fuertes y c) discontinuidad discreta.

este modelo debe satisfacerse el equilibrio interno, entre las tracciones en el interior de la discontinuidad y las tracciones que se encuentran en el material vecino a ésta.

En los elementos finitos con discontinuidades interiores se tienen dos tipos de enriquecimiento, el local y el nodal. El enriquecimiento nodal se apoya en el criterio de la partición de la unidad, Melenk y Babuska (1996) [43], en el que se representa al salto a través de la suma de grados de libertad en los nodos existentes. El enriquecimiento local utiliza un nodo interno que captura los saltos de la discontinuidad.

Se establece que el modelo de discontinuidades interiores se puede clasificar de acuerdo al tipo de discontinuidad y a las relaciones constitutivas, considerando una barra sujeta a tensión (fig. 3.5), hasta que alcanza su resistencia máxima, el proceso de falla se realiza introduciendo una discontinuidad en el campo de desplazamientos y con la relación constitutiva, de las que se tienen las siguientes aproximaciones: [19]

1. *Aproximación continua.* Esta aproximación considera al sólido como continuo en todos los puntos que lo componen, empleando relaciones constitutivas estándares (esfuerzo-deformación) en todo el dominio. Al presentarse la falla del material aparece la concentración de deformaciones debido al deterioro.

- *Discontinuidades Débiles.* Consideran al campo de desplazamientos continuo, sin embargo consideran al campo de deformaciones como discontinuo debido a que se presenta un salto en el campo de deformaciones a través de los bordes de la zona de localización, Belytschko *et al.* (1988) ,[6], y Berrends y Sluys (1998), [64].
- *Discontinuidades Fuertes.* En esta aproximación el campo de desplazamientos es discontinuo y el campo de deformaciones es no acotado, es decir que no se encuentra definido en la discontinuidad. Esto es posible haciendo que la zona

de localización tienda a cero; Regueiro y Borja (1999) [53]; Simo *et al.* (1993) [63] y Oliver (1996), [47].

2. *Aproximación discreta.* La aproximación considera al sólido discontinuo, por lo que se forma una grieta, empleando una relación de *tracción-salto* en la discontinuidad y en el resto del sólido se emplean relaciones constitutivas estándares; Lofti y Shing (1995) [33]; Klisinski *et al.* (1991)[31] y Dvorkin y Assaneli (1990) [17].

3.3. Modelos de daño continuo

El daño de los materiales es el proceso físico progresivo por el cual se rompen los mismos. La mecánica del daño continuo es una herramienta importante para describir el deterioro de las propiedades de los materiales antes de la aparición de macrogrietas, [37]. En la actualidad, estos modelos se han empleado para describir el comportamiento constitutivo de materiales considerados frágiles. Uno de los materiales más interesantes debido a su anisotropía inicial y a que sus propiedades elásticas cambian con el daño es el concreto.

Es importante mencionar que la funcionalidad de los modelos de daño dependen de la elección de la variable de daño más adecuada (escalar, vector o tensor de segundo o cuarto orden). Las variables de daño escalar han sido las más utilizadas para los modelos de daño isótropo, el cual es el modelo de daño utilizado en este trabajo.

En la literatura existen diversos modelos de daño, de los cuales se describen los más comunes a continuación.

3.3.1. Modelo de daño escalar (caso particular del modelo de daño isótropo)

Los modelos de daño escalar utilizan una única variable de daño. Son muy atractivos por su simplicidad, aunque tienen ciertas limitaciones. La variable de daño escalar fue definida por primera vez por Kachanov (1958) [29], ésta conduce a la conservación del coeficiente de Poisson y es incapaz de representar daño direccionado. En los modelos se emplea una variable de daño escalar que afecta por igual a todas las componentes del tensor de rigidez elástico. Casi todos los modelos de daño escalar encontrados en la literatura se basan en que el daño está íntimamente relacionado con el proceso de deformaciones.

La forma que utilizan estos modelos para interpretar el daño consiste en la definición de un espacio ficticio que es obtenido del espacio de esfuerzos y deformaciones reales por medio de una transformación. El esfuerzo en el espacio ficticio no dañado se denomina esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$. El esfuerzo real σ se puede representar mediante:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - d)} \quad (3.5)$$

donde d es la variable de daño escalar, cuyo dominio es $[0, 1]$, cero para el material sin daño y uno para el material completamente dañado. Considerando un bloque sometido a un esfuerzo de tensión que se incrementa desde cero hasta la ruptura del mismo; se dice que se parte desde que d es igual a cero mientras que no se supere el límite elástico del material; y d se irá incrementando hasta que llegue a la unidad lo cual indica que el material ha fallado (el bloque representativo se ha separado en dos partes).

Aunque la variable de daño escalar es apropiada para representar materiales que tienen similares resistencias a tensión y a compresión, no son apropiadas para representar materiales cuya resistencia a tensión es diferente a su resistencia a compresión, como es el caso del concreto. Simo y Ju (1987) [62] y Mazars (1982) [40], desarrollaron unas funciones de daño que son apropiadas para materiales que tienen una resistencia similar tanto en tensión como en compresión. En la literatura encontramos funciones que presentan el umbral de daño diferenciando las propiedades de daño en tensión y compresión: Lubliner *et al.* (1989) [35], Oliver *et al.* (1990) [48], Luccioni (1993) [38], Barbat *et al.* (1997) y Hanganu *et al.* (2002) [21].

3.3.2. Modelo de daño direccionado o daño anisótropo

Todos los materiales bajo condiciones de carga especiales, y la mayoría de los materiales frágiles, desarrollan lo denominado *daño direccionado* o *daño anisótropo*, lo cual significa que los defectos se orientan siguiendo la historia de tensiones y no es posible trabajarlo con una variable de daño escalar, [36]. A continuación se presentan las ideas básicas que originan a los distintos modelos de daño direccionado, Lemaitre (1996) [32].

Vectores de daño

Concibe que una forma simple de modelar el daño direccionado es considerar que éste sólo ocurre en el plano normal a los esfuerzos principales máximos. Entonces el daño puede ser determinarse por su intensidad D y por el vector unitario que le da la orientación del esfuerzo principal máximo \vec{n} , [36].

Tensores de daño de segundo orden

Es utilizado para un tipo de anisotropía más compleja o para un caso de carga no proporcional. Esta idea se basa en la extensión del caso unidimensional de la correlación de espacios real o dañado y ficticio o no dañado al caso tridimensional, [36].

Tensor de daño de cuarto orden

Otra forma de definir la variable de daño es utilizar el concepto de esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$ y el principio de equivalencia de deformaciones para elasticidad lineal, considerando el caso general de anisotropía, esto es lo que lleva a un tensor de cuarto orden D_{ijkl} , [44].

Variable de daño doble escalar

Se utiliza para materiales, en donde los mecanismos de daño pueden ser distintos en tensión y en compresión. En este enfoque se emplean dos variables escalares que son independientes y que caracterizan el daño que influye en la energía elástica de corte y en la energía elástica hidrostática:

- D_s actúa en las tensiones desviadoras.
- D_n actúa sobre las presiones hidrostáticas.

Si un determinado material no está propenso a sufrir daño en determinadas direcciones, el daño puede considerarse del tipo isótropo o anisótropo.

Formulación de la degradación elástica anisótropa

El modelo usa una formulación de degradación elástica y daño en pequeñas deformaciones similar a la de la elastoplasticidad clásica. De manera similar al umbral de fluencia, en esta formulación se hace uso de una función que depende de un grupo de variables internas con las que se define una superficie elástica que, una vez alcanzada, comienza el proceso de degradación debido al daño. En este modelo se emplea un tensor de segundo orden para interpretar el daño de manera consistente y la suposición de equivalencia de energía. Una de las ventajas de este modelo a comparación de otros modelos de daño direccionado es que se pueden obtener soluciones cerradas para algunos casos cuya carga es simple, como la tensión uniaxial, [12] [11].

3.3.3. Modelo de daño unilateral

La naturaleza unilateral del daño está relacionada con el hecho de que si bien el daño es irreversible, puede estar activo o no dependiendo de las condiciones de carga. En diversos materiales, la reducción de la rigidez en tensión puede deberse al desarrollo de microfisuras. Se ha confirmado experimentalmente que con la reversión de la carga las fisuras pueden cerrarse, consiguiéndose la recuperación de rigidez, [36].

En los trabajos hechos por Chaboche en 1992 y 1993 se revisó la capacidad de varias teorías basadas en escalares, vectores, tensores de segundo y cuarto orden para la modelación de la anisotropía y de la recuperación de la rigidez en materiales frágiles inicialmente

isótopos (*i. e.* concreto). Se llegó a la conclusión de que la mayoría de estos modelos eran incapaces de describir simultáneamente el carácter anisótropo de daño (relacionado con la direccionalidad de la historia de carga pasada) y el carácter unilateral de daño que corresponde al cerrado de grietas bajo cargas de compresión, [13, 14].

Un modelo de daño unilateral para concreto debe ser capaz de diferenciar el daño debido a cargas a tensión y a compresión, el cambio producido en la rigidez cuando las deformaciones o los esfuerzos principales cambian de signo (unilateralidad), la matriz de flexibilidades debe de ser simétrica, y la respuesta debe de ser continua aun en condiciones de daño unilateral, [36].

Algunos de los modelos de daño unilateral existentes en la literatura son los siguientes: modelo de daño unilateral con variables escalares Mazars *et al.* (1989) [42], modelo de daño anisótropo con enfoque de unilateralidad por descomposición espectral del tensor de deformaciones Ju (1989) [27], modelo de daño isótropo y unilateral Chaboche (1995) [15] y modelo de daño escalar unilateral Martín (2001) [39].

El modelo de daño unilateral con variables escalares, hace la suposición de que el material es elástico y frágil. Usa dos variables de daño, una para los esfuerzos a tensión D_t y otra para los de compresión D_c . Para considerar la unilateralidad, el tensor de esfuerzos se compone de la suma de una parte positiva y otra negativa. Este modelo no puede describir la anisotropía que se induce por el daño, [42].

En el modelo de daño anisótropo con un enfoque de unilateralidad por descomposición espectral del tensor de deformaciones, se utiliza un tensor de cuarto orden como variable interna. Para considerar el concepto de unilateralidad dentro del modelo se hace una descomposición espectral del tensor de deformaciones con los que se tienen que definir operadores de proyección espectral [27].

En el modelo de daño anisótropo y unilateral se propone la combinación de la condición unilateral para la apertura y cerrado de grietas con la ecuación que describe la evolución del daño anisótropo, creando una herramienta importante para predecir la anisotropía inducida por el daño en materiales que en un principio son isótopos sometidos a cargas variables complejas, [15].

El modelo de daño escalar unilateral nace al generalizar el modelo de daño escalar explícito, incorporando además la condición de unilateralidad considerada por Chaboche (1995), [15], pero extendida para tomar en cuenta el daño en compresión. Emplea dos variables internas de daño, d^+ y d^- para el daño en tensión y daño en compresión respectivamente, y cuyos valores varían como se ha mencionado desde cero a uno.

3.3.4. Modelo de daño viscoso

Para el análisis dinámico transitorio de estructuras con altas velocidades de deformación (*i. e.* impacto o explosiones), es importante que las ecuaciones constitutivas sean dependientes del tiempo. Lo que motivó la formulación de modelos dependientes del tiempo, [36].

Debido a que en estudios experimentales concluyen que la resistencia y el ablandamiento de diversos materiales como el concreto se ve afectada cuando se someten a velocidades de deformación que rebasan el valor de $0.1/s$. A mayor velocidad de deformación, los materiales presentan mayor resistencia tanto en tensión como en compresión; a diferencia del módulo de ablandamiento el cual tiende a disminuir, este efecto no puede predecirse en relaciones constitutivas que son independientes del tiempo.

Si se realizan análisis con modelos constitutivos independientes del tiempo, una vez que aparece el ablandamiento, las ecuaciones que rigen la condición del tensor de rigidez tangente positivo se pierde, presentándose un problema de ablandamiento mal condicionado. Por ejemplo en problemas dinámicos, las ecuaciones son inicialmente hiperbólicas y pueden transformarse en parabólicas o elípticas en presencia de ablandamiento. El problema de valores iniciales se vuelve mal condicionado y la velocidad de onda se hace imaginaria.

Si se considera adecuadamente en los modelos constitutivos la dependencia de la velocidad de deformación, se puede eliminar el mal condicionamiento del problema debido al ablandamiento, esto hace que las ecuaciones de movimiento permanezcan hiperbólicas durante el ablandamiento. A la localización de deformaciones en problemas dinámicos se les denomina “regularización viscosa”. En algunos modelos formulados con ayuda de la teoría de plasticidad, se ha considerado la velocidad de deformación lo que origina los modelos llamados visco-plásticos.

En los trabajos hechos por Simo y Ju (1987) y por Ju (1989) [62, 27] se propone un modelo de daño escalar explícito dependiente del tiempo. A partir de la regularización viscosa de las ecuaciones de daño independientes del tiempo puede caracterizar la dependencia de la velocidad de deformación observada experimentalmente en muchos materiales. Esta regularización es similar a la regularización viscoplástica de Perzyna, [51]. Este modelo solo requiere un parámetro adicional, el coeficiente de fluidez de daño μ . Si el coeficiente μ tiende a infinito, se trata del modelo de daño escalar explícito independiente del tiempo.

Luege (2002) propone un modelo de daño escalar implícito dependiente del tiempo para concreto, este modelo es una extensión del daño independiente del tiempo por medio de una regla de evolución similar a la deformación viscoplástica de Perzyna, [51]. Esta formulación es específica para simular problemas dinámicos transitorios de elementos de concreto debido a que se realiza la correcta predicción de la sobre resistencia y la modificación en la forma de la curva endurecimiento/ablandamiento que presenta el concreto bajo altas tasas de deformación, [36].

3.3.5. Modelos de daño y plasticidad

Las deformaciones permanentes y el daño se encuentran ligados. Sin embargo, los mecanismos de interacción entre las deformaciones permanentes y el daño son de deformaciones complicadas y no pueden simularse mediante sólo un modelo fenomenológico, [36].

El daño está relacionado con alguna deformación irreversible. Todos los mecanismos de daño crean microdeformaciones plásticas. El daño influye en las deformaciones plásticas, ya que el área elemental de resistencia disminuye a medida que decrece el número de ligaduras. El daño no influye directamente en el mecanismo de deslizamiento que causan las deformaciones permanentes. Lo que quiere decir que hay un desacoplamiento de estado.

Las formulaciones de daño antes descritas se refieren al comportamiento elástico. La teoría sin acoplamiento, la hipótesis de elasticidad desacoplada y el acoplamiento entre endurecimiento plástico y daño son las opciones que se tienen para que al momento de formular un modelo, éste considere tanto el comportamiento elástico como el endurecimiento plástico. En el caso de las leyes de evolución existen también distintas posibilidades, de acuerdo a si se considera que los mecanismos de plasticidad y daño son idénticos o no. Para esto existen tres enfoques: El primer enfoque consiste en considerar un único mecanismo, gobernado por la plasticidad, es decir, que no habrá daño si no hay plasticidad y viceversa. El segundo enfoque consiste en considerar un único mecanismo disipativo dividido en dos partes. El tercer enfoque y el más usado en la formulación de modelos de daño es considerar por separado los dos mecanismos por lo que habrá dos potenciales de disipación.

Modelo de daño escalar implícito acoplado con plasticidad

Este modelo emplea una ecuación que corresponde al acoplamiento entre el endurecimiento plástico y daño para considerar la plasticidad y el daño de manera simultánea. Para el caso de definir las leyes de evolución de la plasticidad y daño, este modelo usa la opción de considerar por separado los dos mecanismos. Para resolver el modelo se utiliza de un procedimiento matemático del tipo de retorno mapeado, el problema se resuelve de manera separada, es decir, primero se resuelve el problema de daño y luego el problema plástico, [60, 61].

Modelo de daño escalar acoplado con plasticidad

Este modelo resuelve la parte de degradación de la rigidez al igual que la parte plástica simultáneamente. Para considerar el comportamiento elástico y de endurecimiento plástico el modelo hace uso de la hipótesis de la elasticidad desacoplada. Para representar el proceso plástico el modelo se basa en la teoría de la plasticidad. Este modelo puede escribirse como un modelo de múltiple disipación, es decir, con varios mecanismos disipativos que pueden escribirse en forma idéntica a los modelos elastoplásticos clásicos, [37].

Modelo de daño escalar viscoso unilateral y plasticidad

Este modelo fue desarrollado basicamente para el análisis sísmico de presas de gravedad. El modelo tiene en cuenta el comportamiento diferenciado en tensión y compresión, la recuperación de la rigidez en la descarga, la dependencia de la velocidad de deformación y la presencia de deformaciones permanentes cuando se superan ciertos umbrales de esfuerzo, [18].

Modelo de daño anisótropo y plasticidad acoplado

Este es un modelo incremental de plasticidad y daño acoplados independiente y dependiente de la velocidad de deformación. En su formulación se establece una variable interna definida por un tensor de daño simétrico de segundo orden que caracteriza el fenómeno anisótropo de distribución de fisuras en el material y puede ser interpretado como una reducción del área efectiva causada por las microfisuras y cavidades debido al daño. El modelo se basa en la hipótesis de la elasticidad desacoplada y en la de considerar un mecanismo de disipación compuesto por dos partes, [67].

Capítulo 4

Modelo Constitutivo de Daño Isótropo

Se han desarrollado diversas formulaciones matemáticas que describen el comportamiento físico macroscópico de sólidos ideales, que resultan de aplicar hipótesis simplificadas al problema real, es decir “*Modelos constitutivos*”, cuya aplicación depende de las hipótesis usadas para simplificar el problema.

Los modelos constitutivos intentan representar el comportamiento de los materiales usados en la ingeniería, el cual a menudo es de comportamiento no lineal. La mecánica del daño cuenta con formulaciones que permiten estudiar la evolución del daño en un medio continuo; ésta utiliza variables continuas relacionadas con la densidad de los defectos a fin de describir el deterioro del material antes de la iniciación de macrofisuras.

Las ecuaciones constitutivas para un material con daño se pueden obtener a partir del concepto empleado, micromecánico y/o fenomenológico. Al utilizar el concepto micromecánico se refiere a la formulación del comportamiento a nivel de mesoescala basándose en los mecanismos de la microescala, sin embargo se obtienen ecuaciones muy complejas. Las ecuaciones constitutivas derivadas de un concepto fenomenológico no consideran los detalles a nivel microescala, es decir, se modela el daño de una manera indirecta al introducir variables internas basándose en asegurar que se cumplan los principios de la termodinámica, [32]. Los modelos desarrollados con un enfoque fenomenológico de daño hacen uso de la termodinámica de los procesos irreversibles.

El daño puede verse desde tres perspectivas diferentes:

microescala, mesoescala y macroescala

- *Microescala*. El daño se debe a la acumulación de microesfuerzos en la vecindad de las imperfecciones y a la rotura de ligaduras, dañando ambos mecanismos al material.
- *Mesoescala*. Este nivel de daño se debe al crecimiento y coalescencia de fisuras mi-

croscópicas y microporos que, en conjunto, inician una fisura.

- *Macroescala.* Es evidenciado el crecimiento de dicha fisura.

La mecánica del daño fue introducida por primera vez por Kachanov (1958)[29], quien propuso el empleo de la variable de daño escalar cuyo valor varía entre cero y uno (daño isótropo).

4.1. Modelo de daño isótropo: Superficie de daño igual tensión y compresión

El modelo de daño isótropo se basa en la hipótesis de que una vez alcanzado el límite elástico, se presentan fisuras en el material, lo que con lleva a la disminución de la capacidad de las propiedades mecánicas. La forma en que el modelo interpreta el daño es mediante una variable de daño escalar. La variable caracterizará el nivel del deterioro del material.

El modelo de daño isótropo ha sido utilizado para representar el comportamiento de la alteración de las propiedades mecánicas durante la aplicación de cargas como consecuencia de una disminución del área efectiva resistente, cuya causa es el crecimiento microfisuras. Este proceso puede simularse, en el contexto de la mecánica de medios continuos, introduciendo una variable interna de daño representada cuya magnitud puede estar representada por un escalar o un tensorial, [36].

El daño puede interpretarse como la transformación cinemática de dos espacios, uno real y uno ficticio sin daño que es obtenido del real si se remueve el daño. La variable de daño caracteriza el nivel del deterioro del material y transforma el tensor de esfuerzos real σ a otro tensor de esfuerzos efectivos $\bar{\sigma}$.

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (4.1)$$

Para comprender mejor la idea principal de un modelo de daño, se presenta un esquema en la fig. 4.1; donde el esfuerzo efectivo está definido por:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_i \quad (4.2)$$

El área dañada A^d y el área efectiva de la sección transversal \bar{A} quedan definidas por:

$$A^d = \sum_{i=1}^n A_i^d \geq 0 \quad (4.3)$$

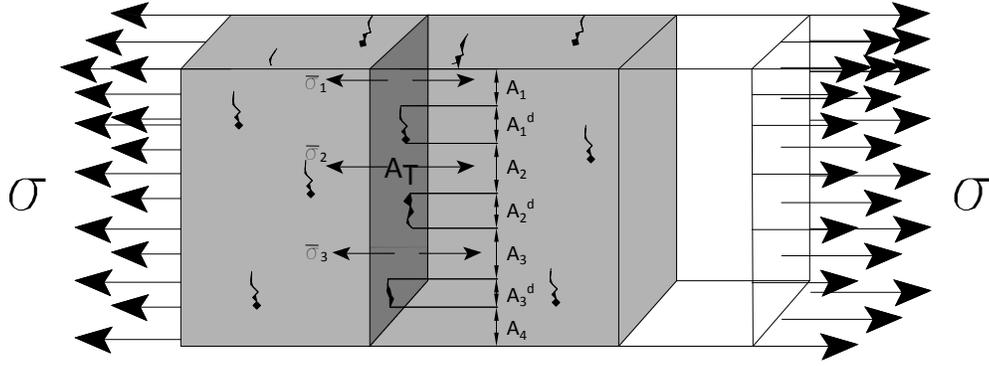


Figura 4.1: Representación esquemática de un sólido degradado sometido a un esfuerzo uniaxial de tensión.

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^n A_j^d \leq A \quad (4.4)$$

Por lo que A se define como:

$$A = A^d + \bar{A} \quad (4.5)$$

Para entender el efecto del daño es necesario conocer el concepto de esfuerzo efectivo. La relación de equilibrio entre el tensor de esfuerzos de Cauchy σ y el tensor de esfuerzos efectivos $\bar{\sigma}$ en el caso de la probeta dañada de la fig. 4.2 es:

$$\sigma \cdot A = \bar{\sigma} \cdot \bar{A} \quad (4.6)$$

de donde despejando se obtienen las ec. 4.7 y 4.8

$$\bar{\sigma} = \frac{A}{\bar{A}} \cdot \sigma \quad (4.7)$$

$$\sigma = \frac{\bar{A}}{A} \cdot \bar{\sigma} \quad (4.8)$$

Para el caso unidimensional y con base a la ley de Hooke, se puede expresar que para el esfuerzo efectivo:

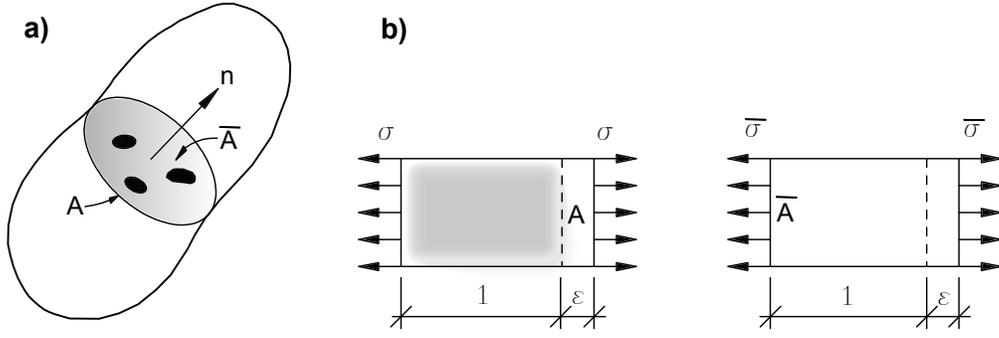


Figura 4.2: a) Área dañada b) Tensor de esfuerzos de Cauchy σ y tensor de esfuerzos efectivos $\bar{\sigma}$

$$\bar{\sigma} = E \cdot \epsilon \quad (4.9)$$

El problema principal es encontrar la relación existente entre el tensor de esfuerzos aparentes y las deformaciones. Usando la ec. 4.6 se obtiene:

$$\sigma = \frac{\bar{A}}{A} \cdot \bar{\sigma} = \frac{\bar{A}}{A} E \cdot \epsilon \quad (4.10)$$

Para relacionar el área dañada con el área total de la sección transversal se emplea la variable d , la cual es la variable de daño escalar que propuso Kachanov (1958) [29]. La variable d se puede expresar matemáticamente como una función del área.

$$d = \frac{A^d}{A_T}; \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (4.11)$$

Puede verse que el daño d es igual a cero cuando el área dañada $A^d = 0$, y que el daño d es igual a uno cuando el área dañada $A^d = A$. Haciendo algunas operaciones algebraicas se encuentra que la relación entre los esfuerzos aparentes y las deformaciones se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\bar{A}}{A} = \frac{A - A^d}{A} = 1 - \frac{A^d}{A} = 1 - d \quad (4.12)$$

Despejando \bar{A} de la ecuación 4.5 y sustituyendo en la ecuación 4.10 se obtiene la relación fundamental empleada en los modelos de daño isótropo:

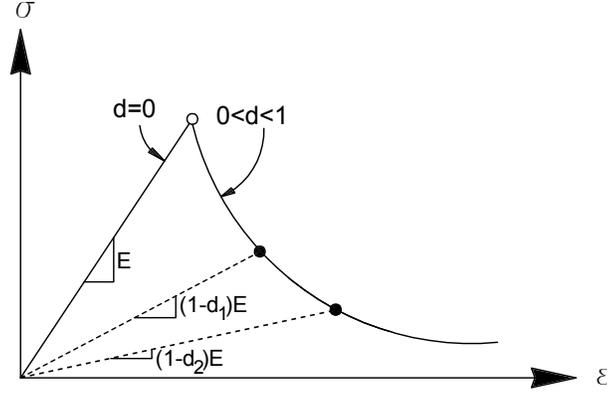


Figura 4.3: a) Degradación del módulo elástico por daño.

$$\sigma = E\epsilon\left(1 - \frac{A^d}{A_T}\right) = E\epsilon(1 - d) = \bar{\sigma}(1 - d) \quad (4.13)$$

La ecuación 4.13 muestra la relación entre el esfuerzo y el esfuerzo efectivo a través de d . Es posible hacer dos comentarios en base a los siguientes puntos de vista [46]:

1. **Microscópico** El esfuerzo efectivo debido al efecto observado solamente desde un punto de vista microscópico está relacionado con el esfuerzo aparente o a nivel macroscópico a través de la variable de daño, que a su vez depende de las deformaciones, $\sigma = (1 - d) \cdot \bar{\sigma}$; $\bar{\sigma} = E\epsilon$.
2. **Macroscópico** El esfuerzo aparente está relacionado con las deformaciones por medio de un módulo no-lineal que es dependiente de la variable de daño d , $\sigma = E^d \cdot \epsilon$; $E^d = (1 - d) \cdot E$

La degradación del material a nivel macroscópico se muestra en la figura 4.3.

A este punto se pueden hacer las siguientes observaciones:

- a) Una vez que el material ha sufrido daño, este no puede recuperarse; por lo que el área degradada permanecerá degradada, sin embargo puede degradarse más, hasta llegar a la ruptura local $d = 1$.

$$\text{Si } d = \frac{A^d}{A_T} \rightarrow \dot{d} = \frac{\dot{A}^d}{A_T} \geq 0 \quad \therefore d \text{ siempre crece.}$$

$$\text{Si } E^d = (1 - d)E \rightarrow \dot{E}^d = -\dot{d}E \leq 0 \quad \therefore E \text{ siempre se degrada.}$$

- b) Sólo puede existir daño si se sobrepasa un umbral de deformación o de esfuerzo, esto es:

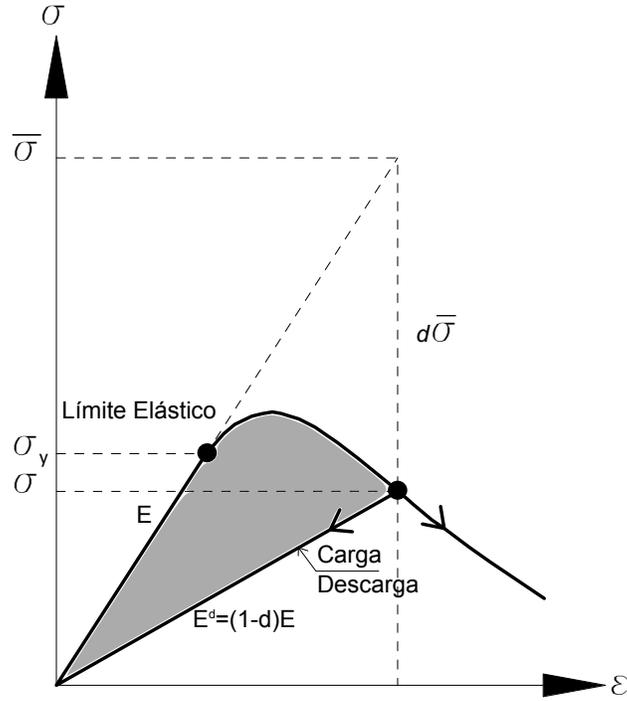


Figura 4.4: Degradación en un modelo de daño escalar

$$d = 0 \quad \text{si} \quad \sigma < \sigma_0$$

$$d = 0 \quad \text{si} \quad \epsilon < \epsilon_0$$

c) En caso de que las deformaciones se reduzcan:

$$\dot{\epsilon} < 0 \quad \rightarrow \quad \dot{A}^d = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{d} = 0$$

Por lo que al derivar la ecuación 4.13 con respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\sigma} = (1 - d)E\dot{\epsilon} - \dot{d}E\epsilon = (1 - d)E\dot{\epsilon} = E^d\dot{\epsilon} \quad (4.14)$$

En la figura 4.4 se representa lo descrito anteriormente.

4.1.1. Ecuación constitutiva

La densidad de energía libre de Helmholtz (energía del sistema) por unidad de volumen para un proceso de daño isotrópico y para el caso uniaxial viene dada por la ecuación 4.15.

$$\Psi = \Psi(d, \epsilon) = (1 - d)\Psi^e \quad (4.15)$$

donde:

Ψ^e Es la energía libre de Helmholtz inicial del material no dañado (elástico), la cual está en función del campo de deformaciones (ϵ). Se encuentra definida por la ecuación 4.16

$$\Psi^e = \frac{1}{2} \epsilon : \mathbb{C} : \epsilon = \frac{1}{2} \mathbb{C} : \epsilon^2 = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \epsilon \quad (4.16)$$

Sustituyendo la ecuación 4.16 en la ecuación 4.15

$$\Psi(d, \epsilon) = (1 - d) \frac{1}{2} \mathbb{C} : \epsilon^2 \quad (4.17)$$

El esfuerzo se puede expresar en función de la energía libre de Helmholtz de la forma siguiente:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\epsilon, d)}{\partial \epsilon} = (1 - d) \mathbb{C} : \epsilon = (1 - d) \bar{\sigma} \quad (4.18)$$

La ecuación 4.18 también es conocida como ecuación constitutiva secante del modelo de daño.

Para problemas térmicamente estables es válida la siguiente forma de desigualdad de Clausius-Planck, conocida también como potencial de disipación.

$$\Xi = \left(\sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \right) : \dot{\epsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (4.19)$$

La ecuación 4.19 permite hacer las siguientes consideraciones, [44]:

- a) La desigualdad de la ecuación 4.19 debe cumplirse para cualquier variación temporal de las deformaciones (ϵ), y $\dot{\epsilon}$ debe de ser nulo. Esta condición proporciona la ley constitutiva para el problema de daño escalar.

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\Psi^e \rightarrow -\Psi^e \text{ conjugada de } d \quad (4.20)$$

- b) Considerando la ley constitutiva, el valor de la discipación del modelo de degradación resulta.

$$\Xi = \Psi^e \dot{d} \geq 0 \quad (4.21)$$

De la ecuación 4.21 se obtiene la siguiente forma de la ecuación constitutiva.

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = (1 - d) \frac{\partial \Psi^e}{\partial \epsilon} = (1 - d) \mathbb{C} : \epsilon = (1 - d) \bar{\sigma} \quad (4.22)$$

4.1.2. Componentes de un modelo de daño

El modelo constitutivo de daño queda totalmente determinado si se conoce el parámetro de daño d para cada instante del proceso de carga; para lo que definimos los siguientes parámetros de la ecuación constitutiva, [46]:

- La norma de esfuerzos de tensor de esfuerzos o de deformaciones.
- Criterio de daño. La superficie de daño o criterio de daño define el límite elástico, es decir, establece cuando el material está en un proceso de daño o en un proceso elástico.
- Un conjunto de leyes de evolución para las variables internas.

Para poder definir una función de daño se requiere una norma en el espacio de esfuerzos (ec. 4.23) o de deformaciones (ec.4.24).

$$\tau_\sigma = \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{e-1}} = \sqrt{\sigma : \mathbb{C}^{e-1} : \sigma} \quad (4.23)$$

$$\tau_\epsilon = \|\epsilon\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon} = \sqrt{2\Psi^e} \quad (4.24)$$

Las normas de espacio de esfuerzos y de deformaciones pueden relacionarse entre si mediante la ec. 4.25

$$\tau_\sigma = \sqrt{\sigma : \mathbb{C}^{e-1} : \sigma} = \sqrt{(1 - d)\bar{\sigma} : \mathbb{C}^{e-1} : (1 - d)\bar{\sigma}} = (1 - d)\tau_\epsilon \quad (4.25)$$

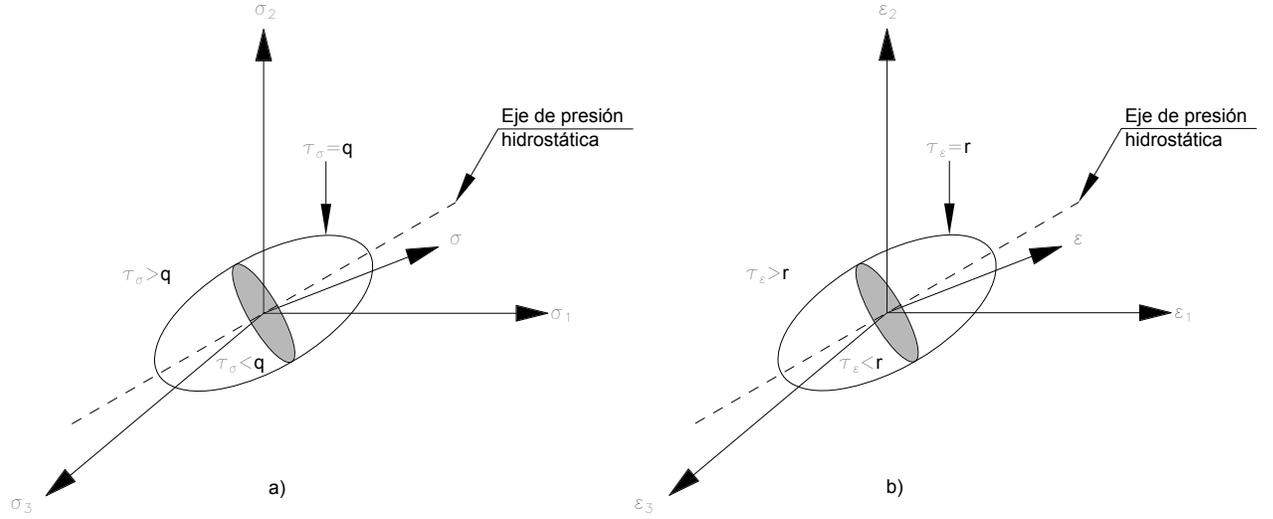


Figura 4.5: Representación de normas: a) campo de esfuerzos b) campo de deformaciones.

Es posible especificar una zona elástica en el espacio de esfuerzos (ec. 4.26) y una zona elástica en el espacio de deformaciones (ec. 4.27), [44].

$$\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma | f(\tau_\sigma, q) < 0\} \quad (4.26)$$

$$\mathbb{E}_\epsilon = \{\epsilon | f(\tau_\epsilon, r) < 0\} \quad (4.27)$$

donde:

q = Es una función que determina el ablandamiento y/o endurecimiento y regula el tamaño del espacio de esfuerzos.

r = Es la variable interna, su valor determina el límite elástico.

Las siguientes funciones de daño, en el espacio de esfuerzos (fig. 4.5a) y de deformaciones (fig. 4.5b) definen el límite elástico del comportamiento del material y son definidas por medio de las ecuaciones 4.28 y 4.29 respectivamente, [44].

$$f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q \quad (4.28)$$

$$g(\tau_\epsilon, r) = \tau_\epsilon - r \quad (4.29)$$

4.1.3. Variable de daño y ley de endurecimiento/ablandamiento

En la sección anterior se menciona la variable q , variable de endurecimiento; la cual es función de la variable interna r y de la variable de daño d . La variable de endurecimiento regula el tamaño del espacio de esfuerzos, y se define como, [46]:

$$q(r) = (1 - d)r \rightarrow d = 1 - \frac{q(r)}{r} \rightarrow d = (r - q(r))r^{-1} \quad (4.30)$$

Para poder determinar la razón de cambio respecto al tiempo de la variable de daño (d), es necesario aplicar la regla de la cadena a la ecuación 4.30 de la siguiente manera (ec. 4.31):

$$\frac{d(d)}{dt} = \dot{d} = \left[\frac{q(r) - (q'(r))r}{r^2} \right] \dot{r} = d'(r)\dot{r} \ ; \ q'(r) = \frac{dq(r)}{dr} \quad (4.31)$$

En base a las ecuaciones 4.1 y 4.30 se obtiene una expresión para el esfuerzo en función de la variable de endurecimiento/ablandamiento (ec. 4.32):

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}q(r)}{r} \quad (4.32)$$

De la ecuación 4.30 que define la ley de endurecimiento y retomando que la variable de daño tiene como límite los valores $d = [0, 1]$, es posible observar que cuando la variable de daño (d) es igual a cero, la variable interna (r) toma el valor de r_0 , y cuando el daño es igual a uno, r vale ∞ . Es decir que para el caso en el cual r vale ∞ el valor de $q(r)$ tiene su valor máximo.

La ecuación 4.29, que representa la función de daño en el campo de deformaciones, puede igualarse en un punto ubicado sobre el umbral que delimita la superficie (ec. 4.33).

$$\tau_\epsilon = r \ , \ \tau_\epsilon = \sqrt{\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon} = r \quad r = [r_0, \infty) \quad (4.33)$$

Para el caso unidimensional la ecuación 4.33 toma la siguiente forma (ec. 4.34):

$$r_0 = \sqrt{\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (4.34)$$

donde:

r_0 = Es el valor umbral inicial

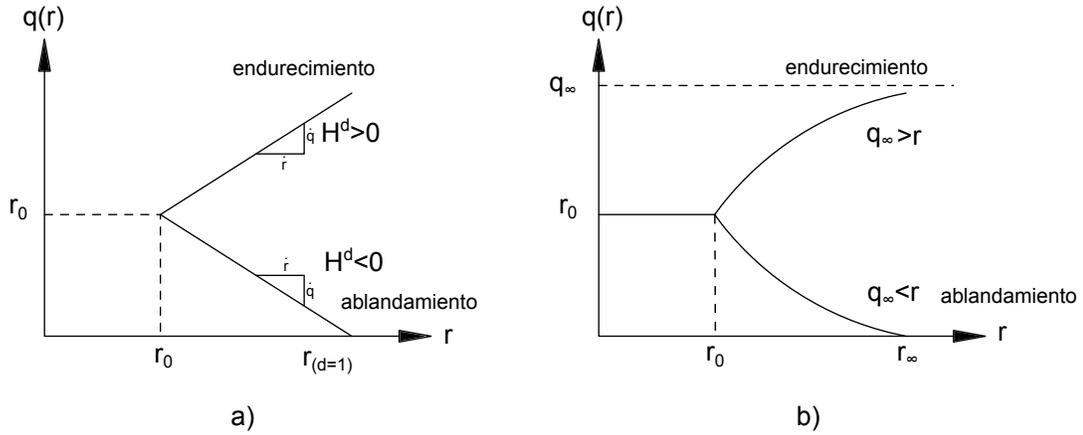


Figura 4.6: Regla de ablandamiento/endurecimiento: a) lineal b) exponencial.

σ_u = Es el esfuerzo último que delimita el comportamiento elástico.

La regla de endurecimiento se define mediante la ecuación 4.35 la cual se muestra a través de la figura 4.6, [44].

$$\dot{d} = H^d(r)\dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \quad q \in [0, \sigma_u]q_0 = r_0 \quad (4.35)$$

donde:

H^d = Es el módulo de endurecimiento y/o ablandamiento continuo.

En la literatura existente se presentan dos tipos mas comunes de endurecimiento/ablandamiento, los cuales son de tipo lineal y de tipo exponencial.

La regla de endurecimiento/ablandamiento lineal se define mediante la ecuación 4.36:

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 + H^d(r - r_0) & r > r_0 \end{cases} \quad (4.36)$$

En la que la variable de daño (d) se define, para el caso lineal, como (ec. 4.37):

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} - H^d\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) & r > r_0 \end{cases} \quad (4.37)$$

La regla de endurecimiento/ablandamiento exponencial está descrito mediante la ecuación 4.38.

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 e^{-H^d(1-\frac{r_0}{r})} & r > r_0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Y la variable de daño (d) para el caso exponencial se define como sigue (ec. 4.39):

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} e^{-H^d(1-\frac{r_0}{r})} & r > r_0 \end{cases} \quad (4.39)$$

De las ecuaciones 4.36 a 4.39 y de la figura 4.6 se puede analizar lo siguiente, [46]:

1. Cuando $H^d > 0$ existe un endurecimiento y por lo tanto la variable de endurecimiento/ablandamiento (q) crece, es decir, mientras más deformación sufra el material, resiste más esfuerzo.
2. Cuando $H^d < 0$ existe un ablandamiento, por lo que la variable q decrece, es decir que mientras más deformación sufre el material, resiste menos esfuerzo; agregando que para que exista un ablandamiento, el material debe empezar a fallar.
3. Si $H^d = 0$, q no crece ni decrece sino que se mantiene constante, lo cual es conocido como daño perfecto.

Las siguientes ecuaciones (ec. 4.40 y 4.41) representa la ley de evolución de la variable interna y de la variable de daño:

$$\dot{r} = \gamma \quad (4.40)$$

$$\dot{d} = \gamma \frac{\partial f(\tau_\sigma, q)}{\partial r} \quad (4.41)$$

donde:

γ = Es un escalar llamado parámetro de consistencia de daño.

En base a lo anterior se concluye lo siguiente:

El rango de la variable interna es de $[0, \infty]$, y los límites de la variable de daño son $d = [0, 1]$.

Cuando la variable de daño es cero, la variable interna (r) toma el valor de r_0 , y cuando el daño es igual a la unidad $r = r_\infty$.

4.1.4. Condiciones de carga y descarga

Desde el punto de vista matemático, estas condiciones son conocidas como las condiciones de Kuhn-Tucker. Estas condiciones permiten obtener el valor del multiplicador de daño γ haciendo las siguientes observaciones

$$\gamma \geq 0; \quad g(\tau_\epsilon, r) \leq 0 \quad (4.42)$$

Si el valor de la deformación ϵ es menor que el límite de deformación, entonces la variable de daño no cambia y la variación del daño con respecto del tiempo es igual a cero $\dot{d} = 0$. Por lo tanto, la función de daño $g(\tau_\epsilon, r) < 0$. Este resultado implica que la variable interna \dot{r} no evoluciona, encontrando que $\gamma = 0$. Por el contrario, la función de daño $g(\tau_\epsilon, r) = 0$ y en consecuencia el multiplicador de daño toma el valor $\gamma \geq 0$. Lo que implica que, [46]:

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\tau_\epsilon, r) < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ g(\tau_\epsilon, r) = 0 \Rightarrow \gamma \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4.43)$$

Requiriéndose la siguiente condición:

$$\gamma \cdot g(\tau_\epsilon, r) = 0$$

Esta condición se conoce como la condición de carga/descarga.

Para determinar el valor para $\gamma \geq 0$, se hace uso de la condición de persistencia o consistencia, [46].

$$\gamma \dot{g}(\tau_\epsilon, r) = 0 \quad (4.44)$$

A partir de la ecuación 4.44 se establecen las condiciones de carga y de descarga (ec. 4.45 y 4.46).

$$g < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad \dot{d} = 0 \quad (\text{No hay una evolución del daño, condición elástica}) \quad (4.45)$$

$$g = 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{g} < 0 \Rightarrow \gamma < 0 \quad \dot{d} = 0 \quad (\text{descarga}) \\ \dot{g} < 0 \quad y \quad \gamma = 0 \quad \dot{d} = 0 \quad (\text{carga neutra}) \\ \dot{g} < 0 \quad y \quad \gamma > 0 \quad \dot{d} > 0 \quad (\text{cargando}) \end{array} \right. \quad (4.46)$$

El criterio de daño se satisface sí $g(\tau_\epsilon, r) < 0$.

Para que se cumplan las condiciones de Kuhn-Tucker es indispensable que $\gamma = 0$, y para que el material no presente daño, la variación temporal de daño debe ser nula ($\dot{d} = 0$).

4.1.5. Operador Constitutivo Tangente

Apartir de la relación existente entre la evolución de los esfuerzos aparentes y de la evolución de las deformaciones es posible obtener el operador constitutivo tangente, [46].

$$\dot{\sigma} = \mathbb{C}^T : \dot{\epsilon} \quad (4.47)$$

donde:

\mathbb{C}^T = Es el módulo constitutivo tangente. Este operador es diferente al tensor de las constitutivo elástico \mathbb{C} aunque en el rango elástico el módulo constitutivo tangente es idéntico al tensor constitutivo elástico \mathbb{C} (fig. 4.7).

De la ec. 4.47 se puede deducir:

$$\mathbb{C}^T = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \quad (4.48)$$

El módulo constitutivo tangente se define partiendo de la ecuación 4.49.

$$\sigma = (1 - d)\mathbb{C} : \epsilon \quad (4.49)$$

Entonces derivando la ecuación 4.49 con respecto al tiempo se obtiene (ec. 4.50):

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \dot{\epsilon} - \dot{d}\mathbb{C} : \epsilon \quad (4.50)$$

Sustituyendo la relación $\bar{\sigma} = \mathbb{C} : \epsilon$ en la ecuación 4.50 se obtiene (ec. 4.51):

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \dot{\epsilon} - \dot{d}\bar{\sigma} \quad (4.51)$$

Apartir de la ecuación 4.51 se pueden hacer las siguientes observaciones:

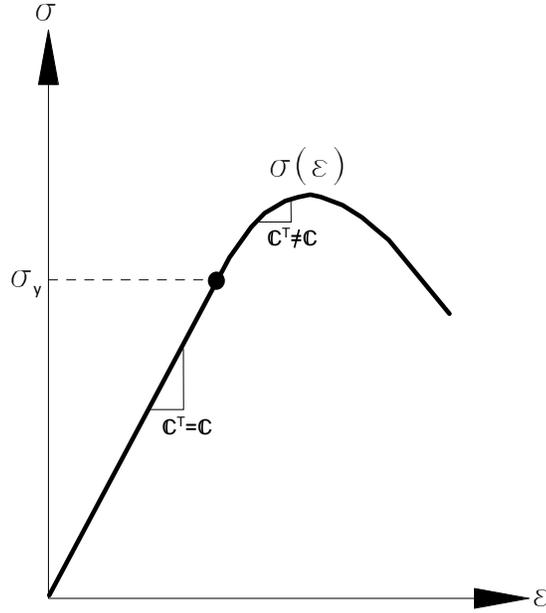


Figura 4.7: Módulos constitutivos, tangente y elástico.

- Considerando que el material no presenta incrementos de carga ($\dot{r} = 0$ la variable interna no evoluciona), es decir, se encuentra en el caso elástico, inelástico en descarga o inelástico en carga neutra, por lo tanto $\dot{d} = 0$, se obtiene la ecuación 4.52.

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \dot{\epsilon} \Rightarrow \mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C} \quad (4.52)$$

Por lo cual para este caso particular, el operador constitutivo tangente es el mismo que el módulo elástico degradado, es decir $\mathbb{C}^T = \mathbb{C}^d$.

- En el caso de que se presenten incrementos de carga ($\dot{r} > 0$, la variable interna evoluciona), entonces se trata del caso inelástico en carga, por lo que se procede de la siguiente manera. De la ecuación 4.31 se sabe que $\dot{d} = d'(r)(\dot{r})$ y de la ecuación 4.35 se tiene que $H^d = q'(r)$, por lo cual sustituyendo 4.35 en 4.31 se obtiene (ec. 4.53):

$$\dot{d} = d'(r)\dot{r} = \frac{q(r) - (q'(r))r}{r^2}\dot{r} = \frac{q(r) - H^d}{r^2}\dot{r} \quad (4.53)$$

Al estar en la condición de carga se sabe que $\dot{r} = \dot{\tau}_\epsilon$ ya que $\dot{\tau}_\epsilon - \dot{r} = 0$, y tomando que la norma de deformaciones está representada por la ecuación 4.24. Derivando con respecto al tiempo la ecuación 4.24 se obtiene:

$$\dot{r} = \dot{\tau}_\epsilon = \frac{1}{\tau_\epsilon} \bar{\sigma} : \mathbb{C}^{e-1} : \mathbb{C} : \dot{\epsilon} = \frac{1}{\tau_\epsilon} \bar{\sigma} : I : \dot{\epsilon} \quad (4.54)$$

Donde:

$$I = \mathbb{C}^{e-1} : \mathbb{C}$$

Si a partir de la ec. 4.51 tenemos:

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \dot{\epsilon} - \dot{d}\bar{\sigma}$$

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \dot{\epsilon} - \bar{\sigma} \otimes d'(r) \cdot \frac{1}{\tau_\epsilon} \bar{\sigma} : I : \dot{\epsilon}$$

Agrupando obtenemos:

$$\dot{\sigma} = \underbrace{(1 - d)\mathbb{C} - \frac{d'(r)}{\tau_\epsilon} [\bar{\sigma} \otimes (\bar{\sigma} : I)]}_{\mathbb{C}^T} : \dot{\epsilon} \quad (4.55)$$

De donde el operador constitutivo tangente se define para este caso como:

$$\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C} - \frac{d'(r)}{\tau_\epsilon} [\bar{\sigma} \otimes (\bar{\sigma} : I)] \quad (4.56)$$

Es importante hacer la observación de que este operador es no simétrico. En el caso particular de que el tensor \mathbb{C}^{-1} , entonces el valor del tensor $I = 1$ y el operador constitutivo tangente se reduce a:

$$\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C} - \frac{d'(r)}{\tau_\epsilon} [\bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma}] \quad (4.57)$$

Donde ahora el operador constitutivo tangente es simétrico. Ahora bien recordando que el valor de $d'(r) = \frac{q-H^d}{r^2}$ se oobtiene el valor:

$$\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C} - \left[\frac{q(r) - H^d r}{\tau_\epsilon r^2} \right] \underbrace{[\mathbb{C} : \epsilon]}_{\bar{\sigma}} \otimes \underbrace{[\epsilon : \mathbb{C}]}_{\bar{\sigma}} \quad (4.58)$$

El operador constitutivo tangente C^T es empleado para determinar la tangente a la curva esfuerzo deformación, lo cual permite en un programa de elementos finitos aproximarse a la solución cuadrática a través del método de Newton-Raphson para determinar el resultado del sistema de ecuaciones no lineales, [46].

Lo visto anteriormente en este subcapítulo, el modelo de daño isotrópico con una superficie de fluencia igual en tensión y compresión se resume de la siguiente manera, [44]:

a) Energía libre de Helmholtz

$$\Psi(\epsilon, d) = (1 - d)\Psi^e$$

b) Variable de daño

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r}; \quad q \in [r_0, 0]; \quad d \in [0, 1]$$

c) Ecuación constitutiva

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = (1 - d)\mathbb{C} : \epsilon$$

d) Ley de evolución del daño

$$\dot{r} = \gamma \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

e) Criterio de daño

$$g(\tau_\epsilon, r) = \tau_\epsilon - r = \sqrt{\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon} - r; \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r \end{cases}$$

f) Regla de endurecimiento/ablandamiento

$$\dot{q} = H^d \dot{r}; \quad H^d = q'(r) \leq 0$$

g) Condiciones de carga y descarga

$$\tau_\epsilon - r < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma g(\tau_\epsilon, r) = 0$$

h) Condición de persistencia

$$\gamma \dot{g}(\tau_\epsilon, r) = 0 \quad \text{si} \quad g(\tau_\epsilon, r) = 0$$

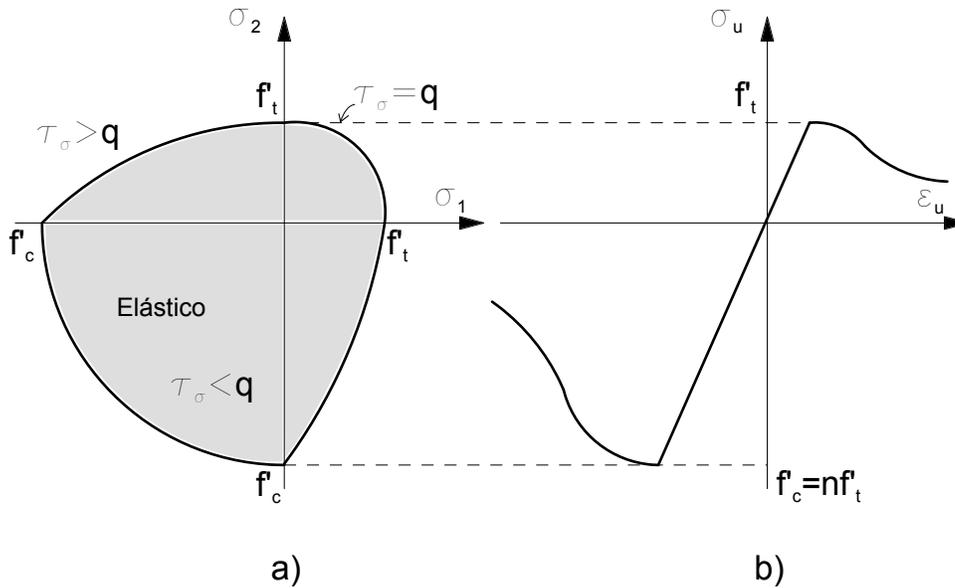


Figura 4.8: Modelo diferente tensión-compresión. a) superficie de daño b) curva esfuerzo-deformación

4.2. Modelo de daño isótropo: Superficie de daño diferente tensión-compresión

Las funciones umbrales de daño mostradas anteriormente son apropiadas para materiales, como por ejemplo, metales, que tienen comportamientos similares en tensión y en compresión. Sin embargo en el caso de los geomateriales, concreto por ejemplo, se presentan umbrales de daño muy distintos en esfuerzos de tensión y de compresión. En el caso del concreto, el umbral de daño en compresión es de alrededor de diez a veinte veces mayor que el umbral de daño en tensión, (ver fig. 4.8).

Oliver *et al.* (1990) [48] proponen una función umbral de daño que diferencia los estados de tensión y compresión, donde aparece una relación n entre los umbrales de daño en tensión y compresión uniaxial. En la literatura se encuentran diferentes alternativas para presentar esta superficie de daño como las utilizadas por Barbat *et al.* (1997) [5] y Hanganu *et al.* (2002), [21].

Para la formulación de este modelo de daño, se parte del modelo de daño explicado en el subcapítulo anterior. Haciendo diferencia entre ambos modelos de daño en la definición de la norma de esfuerzo y/o deformación, siendo afectado por un parámetro propuesto por Lubliner *et al.* (1989), [35].

Para tener una superficie con estas propiedades, la norma de esfuerzo (ec. 4.23) o de deformación (ec. 4.24), son modificadas por el parámetro \mathcal{M} de la siguiente manera (ec. 4.59):

$$g(\tau_\epsilon, r) = \tau_\epsilon - r = \mathcal{M}\sqrt{\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon - r}; \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r \end{cases} \quad (4.59)$$

El operador constitutivo tangente \mathbb{C}^T para el rango de carga no lineal, definido en la ecuación 4.58, queda modificado como sigue:

$$\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C} - \mathcal{M}^2 \left[\frac{q(r)}{r^3} - \frac{H^d}{r^2} \right] [\underbrace{\mathbb{C} : \epsilon}_{\bar{\sigma}} \otimes \underbrace{\epsilon : \mathbb{C}}_{\bar{\sigma}}] \quad (4.60)$$

El parámetro \mathcal{M} queda definido de la siguiente manera (ec. 4.61):

$$\mathcal{M} = \theta + \left(\frac{1 - \theta}{n} \right) \quad (4.61)$$

donde:

n = es la relación entre los umbrales de daño en compresión y tensión uniaxial respectivamente.

θ = es un factor de peso dependiente del estado de esfuerzos principales, se expresa como:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (4.62)$$

En la que σ_i corresponde a los esfuerzos principales, en el numerador de la ecuación 4.62 ($\langle \sigma_i \rangle$) se indica que sólo se consideran los esfuerzos principales positivos, y el denominador corresponde a la suma del valor absoluto de cada uno de los esfuerzos principales ($|\sigma|$). Los valores extremos que puede tomar el factor θ son $[0, 1]$, cero para el caso de compresión triaxial ($0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) y uno para el caso de tensión triaxial ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$). Los valores extremos para el parámetro \mathcal{M} son $[1, \frac{1}{n}]$, uno para el caso de tensión triaxial y $\frac{1}{n}$ para el caso de compresión triaxial.

La función del parámetro \mathcal{M} es escalar los esfuerzos a compresión en $\frac{1}{n}$ veces para que estos sean comparados con el valor umbral de daño, el cual está en función del esfuerzo último a tensión del material, y así poder determinar de esta manera si existe falla en compresión del material, [44].

La figura 4.8 muestra la representación gráfica de la superficie de daño correspondiente a $\tau_\epsilon - r$ en el plano de esfuerzos $\sigma_1 - \sigma_2$, así como la curva esfuerzo-deformación uniaxial para el modelo propuesto.

El modelo de daño isotrópico son superficie de fluencia diferente en tensión y compresión es resumido mediante las siguiente ecuaciones, [44]:

a) Energía libre de Helmholtz

$$\Psi(\epsilon, d) = (1 - d)\Psi^e$$

b) Variable de daño

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r}; \quad q \in [r_0, 0]; \quad d \in [0, 1]$$

c) Ecuación constitutiva

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = (1 - d)\mathbb{C} : \epsilon$$

d) Ley de evolución del daño

$$\dot{r} = \gamma \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

e) Criterio de daño

$$g(\tau_\epsilon, r) = \tau_\epsilon - r = \mathcal{M}\sqrt{\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon} - r; \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r \end{cases}$$

f) Regla de endurecimiento/ablandamiento

$$\dot{q} = H^d \dot{r}; \quad H^d = q'(r) \leq 0$$

g) Condiciones de carga y descarga

$$\tau_\epsilon - r < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma g(\tau_\epsilon, r) = 0$$

h) Condición de persistencia

$$\gamma \dot{g}(\tau_\epsilon, r) = 0 \quad \text{si} \quad g(\tau_\epsilon, r) = 0$$

Capítulo 5

Ejemplos de aplicación

Con el propósito de validar la eficiencia de los modelos de daño mostrados en este trabajo se presenta el siguiente ejemplo de aplicación para la simulación del comportamiento del material sujeto a carga monótona por medio de desplazamientos. Para su simulación se utilizó un modelo de daño continuo con diferente superficie de fluencia a tensión-compresión y el de agrietamiento discreto. Los resultados aquí obtenidos se compararon con resultados de pruebas experimentales reportados en la literatura.

La metodología seguida para la realización de estos ejemplos es la siguiente:

1. *Preproceso*: Generación del mallado a utilizar.
2. *Cuerpo del proceso*: Elaboración del archivo de entrada (caracterización del modelo) para su ejecución en el programa de elementos finitos FEAP (Taylor, 2008), [65].
3. *Postproceso*: Visualización e interpretación de resultados.

En todos los análisis se utiliza una ley de ablandamiento de tipo exponencial.

5.1. Simulación numérica de la prueba de fractura ASTM D 7313-07a

Este ejemplo numérico corresponde a una prueba estándar para la obtención de la energía de fractura en un estado de deformación plana a una probeta de concreto ya sea hidráulico o asfáltico, [1]. Este ejemplo es de tipo bidimensional y la forma en que se presenta la carga es para producir un modo de falla tipo I.

Este ejemplo numérico ha sido realizado anteriormente por Wagoner *et al.* [68] para mostrar el efecto que tiene la temperatura en la propiedad de fractura del material.

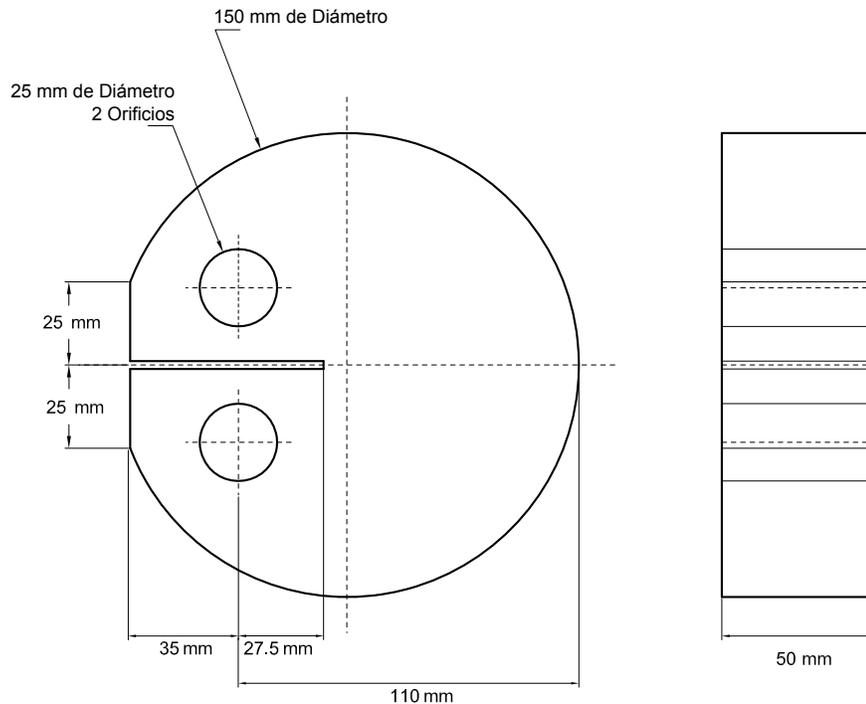


Figura 5.1: Dimensiones del espécimen.

Esta prueba consiste en la apertura de la muesca de la probeta a partir del desplazamiento de uno de los pasadores que se encuentran en los orificios de la probeta, mientras el otro permanece fijo; tomándose medida desde la apertura cero hasta llevar la probeta a la falla.

Geometría de las probetas estudiadas

A continuación se presentan las dimensiones de las probetas utilizadas, haciendo mención de que esta geometría es la más óptima para el tipo de prueba realizada. (fig. 5.1).

Una de las observaciones a la geometría de las probetas es que la longitud inicial que va desde la muesca hasta el otro extremo de la probeta debe ser lo más grande como sea posible para producir una propiedad de fractura y una prueba de fractura fiable, [68]. Las dimensiones fueron tomadas de la norma ASTM E399. Después de varias iteraciones en base a la geometría de la probeta, se encontraron las dimensiones adecuadas para tener la mayor longitud donde se desarrolle la grieta sin que sea vea afectado por la falla de los orificios donde se aplica el desplazamiento durante el ensaye.

La razón por la cual el espesor de la probeta es relativamente delgado es para evitar una propagación de las grietas en otras direcciones (hacia arriba o hacia abajo) y orientarlas sólo en el plano del pavimento, por lo cual la simulación realizada es compatible.

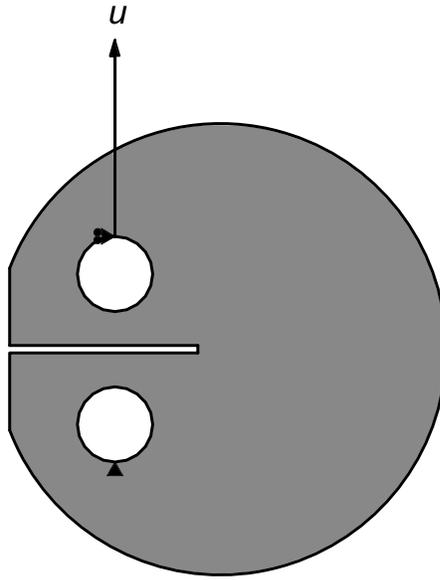


Figura 5.2: **Modelo I** Condiciones de frontera, modelo al que se le aplica un desplazamiento al nodo.

Condiciones de frontera

Para la modelación se utilizaron dos tipos de apoyos.

Modelo I Este modelo consiste en considerar un hueco en la zona donde se ubicarían los pasadores y articular de manera que se implida el desplazamiento en un nodo en el hueco inferior y a su vez se provoca un desplazamiento en uno de los nodos superiores, (fig. 5.2). De esta manera se permite la libre rotación a medida que se propaga la grieta.

Modelo II Este modelo corresponde a considerar que en la zona de huecos sea modelada con resortes elásticos con una alta resistencia en compresión y nula resitencia a tensión. Este modelo ha sido usado anteriormente por Geers (1997) [20]. Usando este modelo se soluciona el problema de contacto y se evitan zonas con concentración de esfuerzos, pues se distribuye el desplazamiento. Este modelo asegura que no exista rotación por la apertura de grieta y se evita la tensión en los puntos de contacto. El desplazamiento se aplica al centro del conjunto de resortes superior (fig. 5.3).

La comparación de los dos modelos se muestra en la figura 5.4. Se puede observar la similitud de los resultados a pesar de las diferencias en las condiciones de frontera.

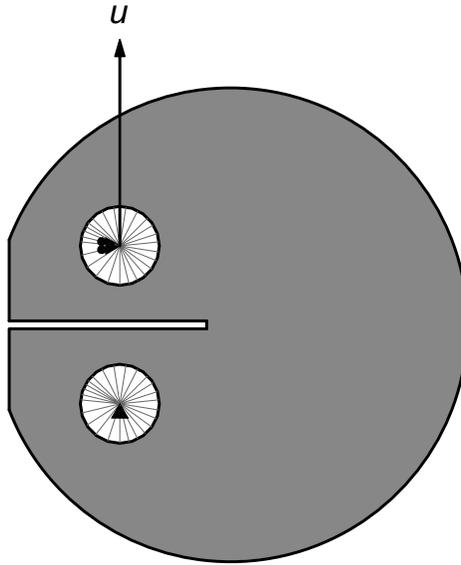


Figura 5.3: **Modelo II** Condiciones de frontera, modelo al que se le aplica un desplazamiento al nodo central de resortes, (los resortes sólo actúan a compresión).

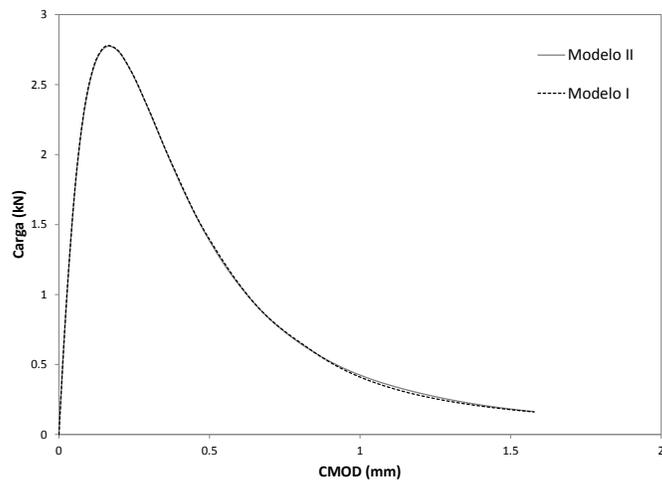


Figura 5.4: Comparación entre los modelos con diferentes condiciones de frontera.

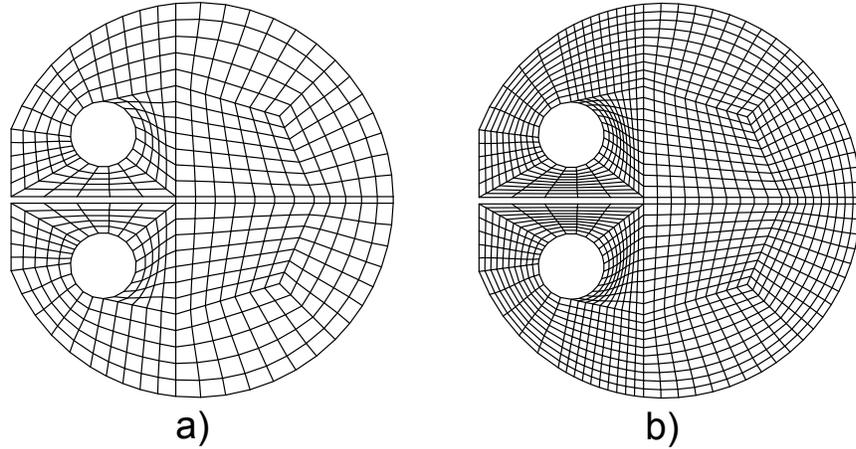


Figura 5.5: Mallas con elementos cuadriláteros. a) malla gruesa b) malla fina.

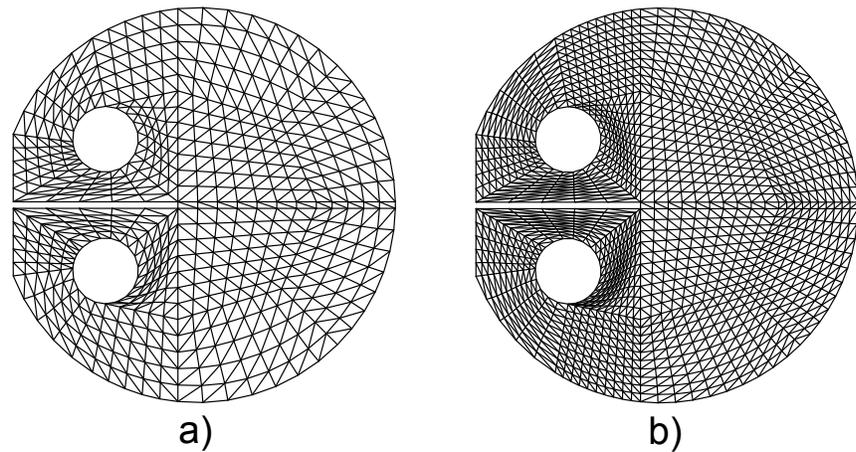


Figura 5.6: Mallas con elementos triangulares. a) malla gruesa b) malla fina.

Mallas usadas en el modelo

Para la idealización del modelo se utilizaron 2 tipos de mallado. Una malla con elementos cuadriláteros que se muestran en la figura 5.5, otra malla triangular, figura 5.6. Así como una serie de mallas derivadas de las mismas haciéndolas más finas.

La razón por la cual se utilizaron los dos tipos de mallas se debe a que para la formulación del modelo de daño continuo es recomendable el uso de elementos estructurados para poder distribuir el daño en un ancho del elemento, por lo que se eligió una malla cuadrilateral; sin embargo para el caso del modelo de daño discreto es necesario utilizar elementos triangulares, debido a su formulación. Otra de las razones es para evaluar la objetividad de la malla y eso es debido a la flexibilidad que se puede ganar al hacerla más fina. Las comparaciones al utilizar los diferentes tipos de mallados se muestran en la figura 5.7.

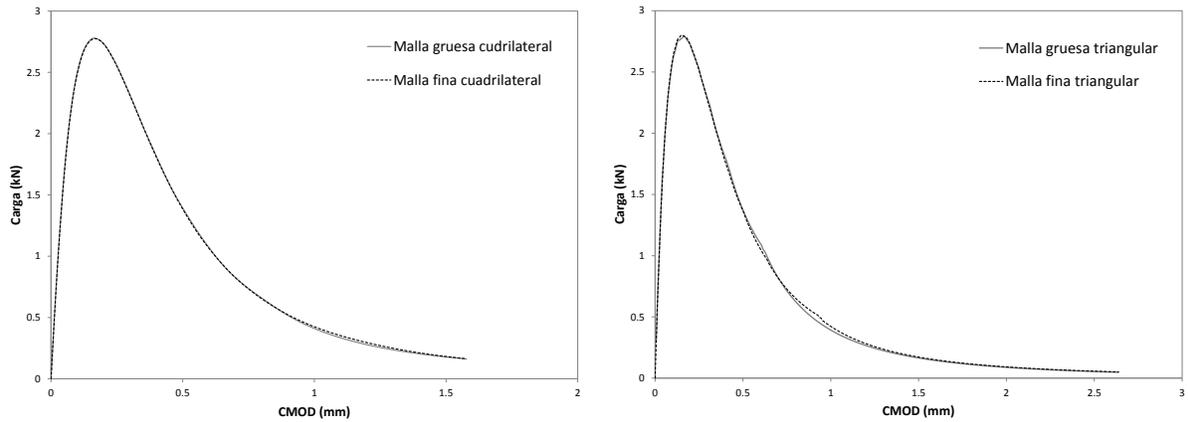


Figura 5.7: Comparación del refinamiento de los tipos de mallado, triangular y rectangular.

Propiedades de los materiales reportados

Las propiedades mecánicas del material, utilizadas para este ejemplo son, las reportadas por Wagoner *et al.* (2005) [68]

Módulo Elástico $E = 14.20 \text{ GPa}$

Relación de Poisson $\mu = 0.35$

Para la utilización de los modelos de daño se reportan las siguientes propiedades:

La densidad de energía de fractura $G_f = 328 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ y,
 el esfuerzo máximo a tensión del concreto $\sigma_u = 3.56 \text{ MPa}$.

Interpretación de los resultados

Para que los ensayos a la probeta proporcionen una propiedad de fractura útil, la variabilidad de la energía de fractura debe encontrarse en un rango aceptable. La repetición de la prueba influye en gran medida a encontrar una energía de fractura fiable.

La comprensión de las curvas (carga vs CMOD^1) da una idea del proceso de fractura. En la primera parte de las curvas la rigidez inicial y el pico de las cargas debe ser muy similares

¹Crack Mouth Opening Displacement

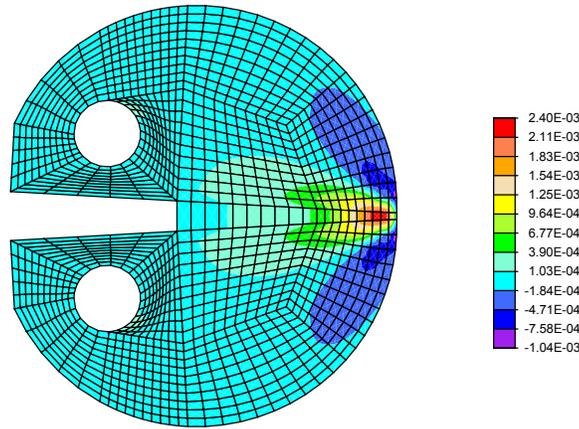


Figura 5.8: Distribución de esfuerzos en la probeta.

en las curvas. El ablandamiento o las respuestas post-pico pueden variar en la forma y en la longitud de la cola de la curva debido a la estructura del agregado del material y la interfaz del aglutinante; dado que la estructura del aglutinante y del agregado de cada repetición de la prueba es diferente, la respuesta ante el ablandamiento también lo es. Por la razón antes mencionada es de esperarse cierta dispersión entre las repeticiones de los ensayos después de la carga máxima; esto no debe afectar de forma significativa la carga requerida para la iniciación de la grieta.

Es posible observar en el modelo empleado que el daño se inicia en la vecindad de la muesca (fig. 5.8). Los resultados se presentan en la figura 5.9 y son comparados contra las pruebas experimentales obtenidas por Wagoner *et al.* (2005) [68] para la validación de resultados.² ³

Es posible apreciar que los modelos de daño empleados tienen una buena aproximación con los resultados experimentales obtenidos por Wagoner *et al.* (2005) [68].

5.2. Modelación numérica del concreto a diferentes edades

En este modelo se utilizan las características físicas y de fractura en concretos a diferentes edades hasta los 28.5 días. Estas características fueron tomadas del trabajo realizado por Kim *et al.* (2004), [30]. Para la modelación numérica se usaron 2 modelos, uno de daño continuo y otro de discontinuidades interiores [44, 54].

²Para la obtención de la gráfica del modelo de daño continuo se utilizó el coeficiente de $0.83 \sigma_u$.

³Para la obtención de la gráfica del modelo de agrietamiento discreto se utilizó el coeficiente de $0.83 \sigma_u$.

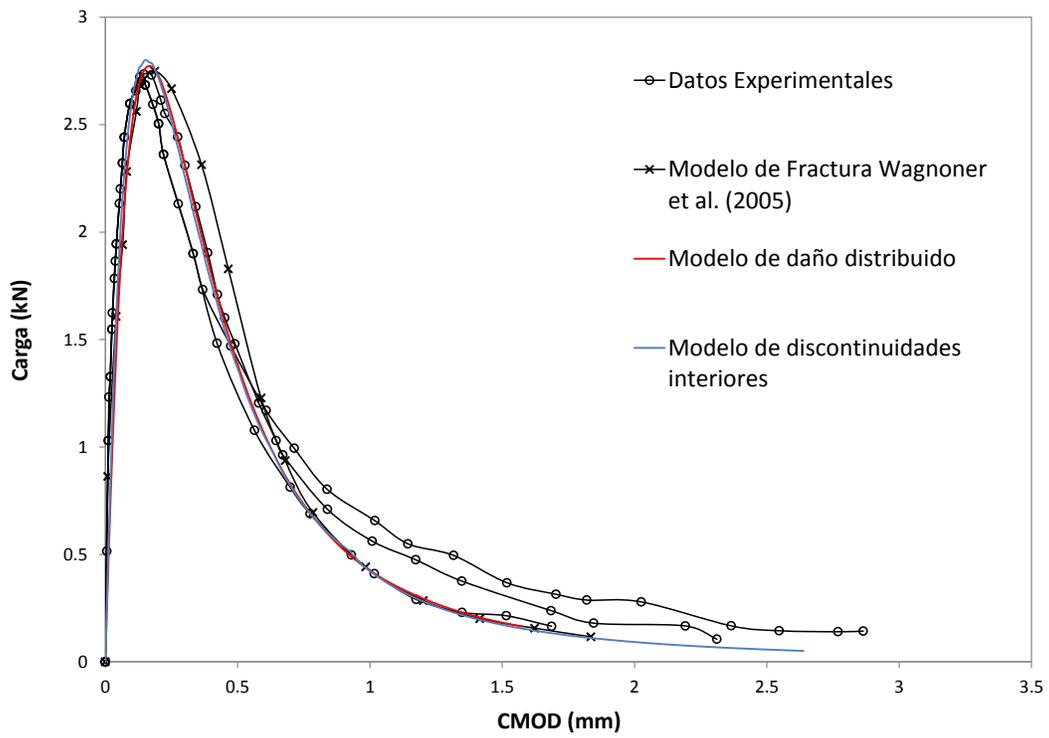


Figura 5.9: Comparación de resultados experimentales y numéricos, daño distribuido y discontinuidades interiores.

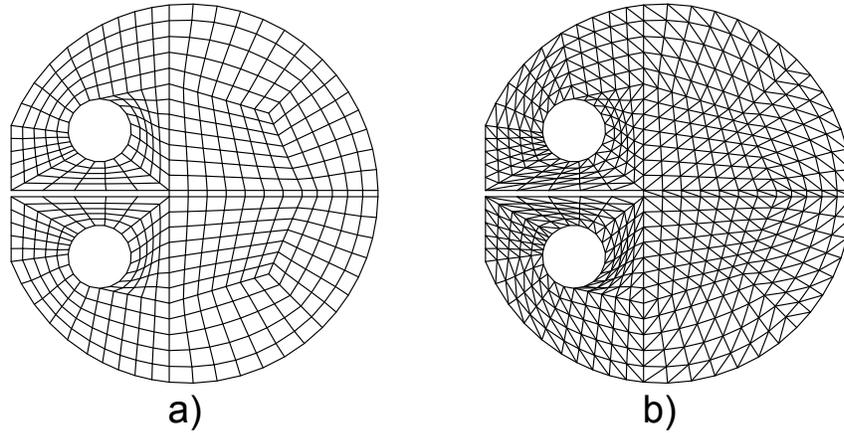


Figura 5.10: Mallas con elementos cuadriláteros y triangulares para el modelo de daño continuo y de discontinuidades interiores, respectivamente.

Geometría

La geometría usada para esta simulación es la mostrada anteriormente en la fig. 5.1. Esta geometría se encuentra estandarizada por la ASTM [1], ya que en la geometría usada por Kim *et al.* no se utilizaron las propiedades geométricas normalizadas por RILEM.

Condiciones de frontera

Se utilizó el modelo mostrado en la figura 5.3 pues este modelo soluciona el problema de contacto, evita la concentración de esfuerzos y permite la libre rotación por la apertura de la grieta.

Mallas usadas en el modelo

Se usaron dos mallas finas en el modelo una con cuadriláteros y otra con triángulos para usar los dos modelos de daño, daño continuo y discontinuidades interiores. Las mallas usadas se muestran en las fig. 5.10.

Propiedades del material a diferentes edades

Las propiedades utilizadas son las reportadas por Kim (2004) [30] para un concreto de resistencia media de 33.24 MPa a los 28.5 días. Las propiedades reportadas se enlistan en la tabla 5.1 de acuerdo a la edad de los concretos.

Cuadro 5.1: Propiedades físicas y de fractura de un concreto de resistencia media a diferentes edades.

Edad (días)	Resistencia f'_c (MPa)	Esfuerzo último σ_u (MPa)	Módulo Elástico E_c (MPa)	Energía de Fractura G_f (N/m)
1.5	5.49	1.56	12,945	83.93
3.5	16.48	2.23	22,948	142.38
7.75	22.36	3.27	26,184	106.80
14.75	26.58	3.70	26,870	104.65
28.5	33.24	3.92	28,832	127.74

Interpretación de resultados

Es posible observar en la fig. 5.11 que el inicio de las curvas presentan una rigidez inicial similar, sin embargo el pico de las mismas no. También puede observarse que la respuesta en la rama descendente no es similar aunque se hallan utilizado las mismas propiedades.

No es posible hacer una comparativa con los resultados experimentales obtenidos por Kim *et al.* pues no se utilizó la misma geometría, esto es debido a que la geometría utilizada por Kim *et al.* fue impuesta por el mecanismo que ellos usaron para hacer la prueba, por lo cual no siguieron una geometría estandarizada.

En las fig. 5.12 y 5.13 se observa el comportamiento del material a diferentes edades, la variación de la rigidez, del esfuerzo último y el desplazamiento al que se encuentra éste, así como la energía de fractura.

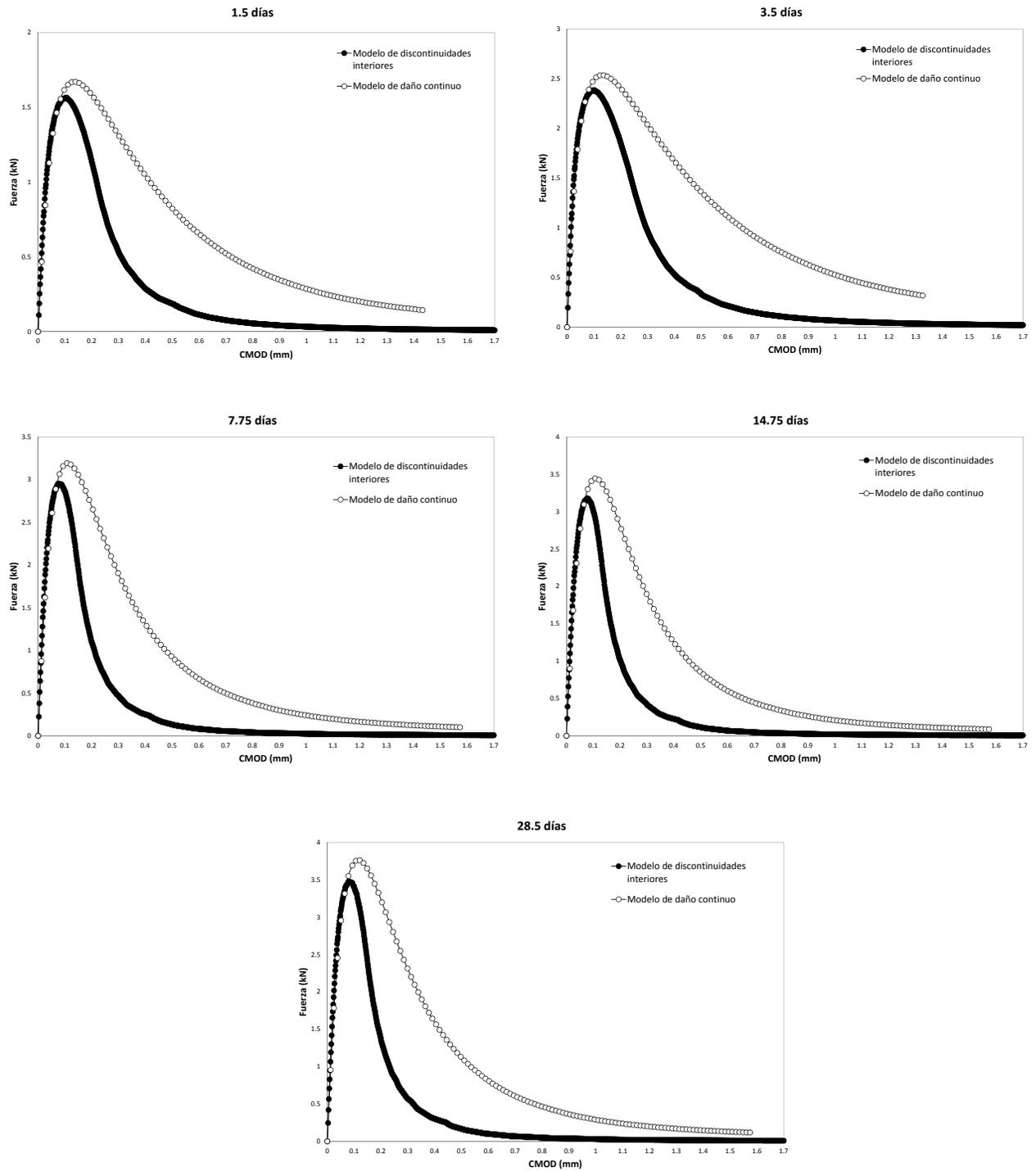


Figura 5.11: Comparativa de las respuestas de los modelos utilizados a diferentes edades.

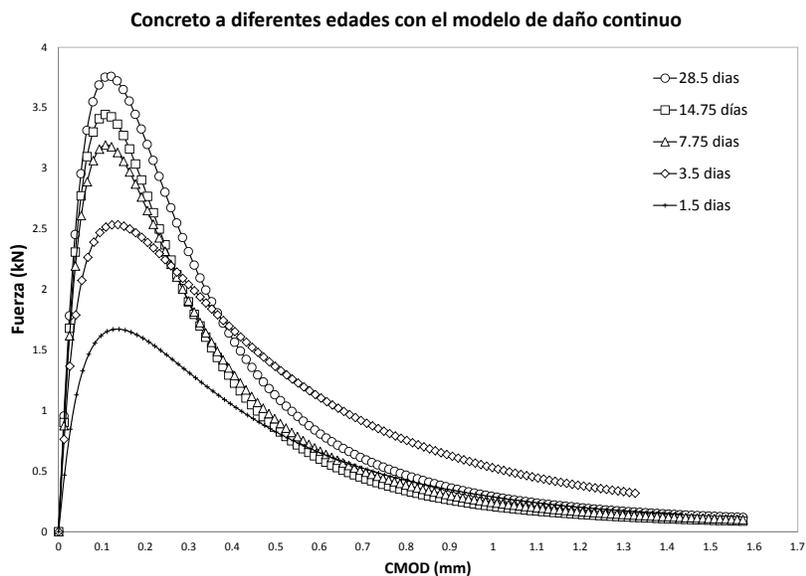


Figura 5.12: Curvas Carga-CMOD a diferentes edades del modelo de daño continuo

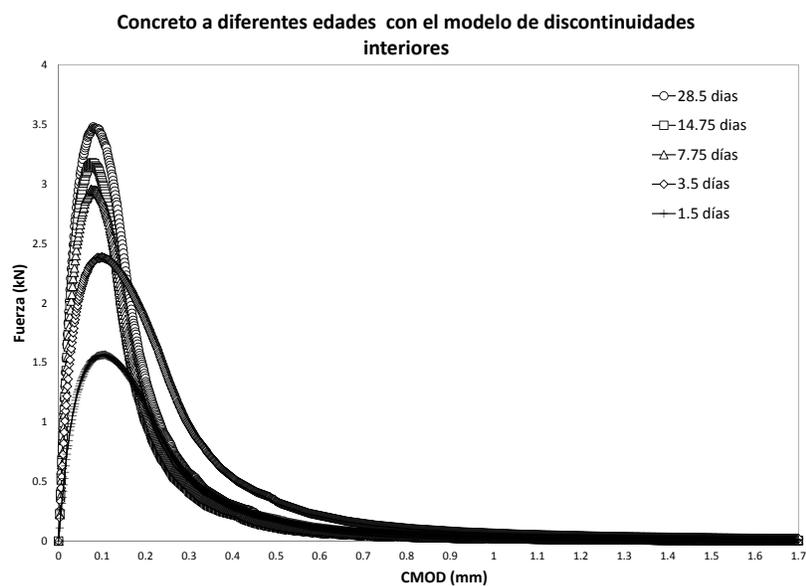


Figura 5.13: Curvas Carga-CMOD a diferentes edades del modelo de discontinuidades interiores

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis, se implementó el modelo numérico de daño continuo con una superficie de fluencia diferente tensión-compresión, Méndez (2012) [44] y se cotejó con los resultados calculados por el modelo numérico de discontinuidades interiores propuesto por Retama (2010) [54]. En el primer ejemplo se compararon estos modelos con el modelo numérico de fractura y los resultados experimentales obtenidos por Wagoner *et al.* (2005) [68]. En el segundo ejemplo de aplicación se implementaron los dos modelos, el de daño y el de discontinuidades interiores mencionados anteriormente usando las propiedades de Kim *et al.* (2004) [30].

Se demuestra que el modelo de daño continuo con superficies de daño diferente tensión-compresión y el de discontinuidades interiores representa adecuadamente el fenómeno de agrietamiento en concreto.

Con base a los resultados obtenidos se hacen las siguientes observaciones del primer ejemplo y se concluye con lo siguiente:

- Se recomienda el uso de una malla estructurada para el uso del modelo de daño continuo ya que la longitud donde se distribuirá el daño en el elemento es una variable que afecta abruptamente los resultados.
- Se observa que en modelo de daño continuo no existe gran variación de los resultados al utilizar una malla más fina, no así con el modelo de discontinuidades interiores, donde se gana una mejor aproximación y se observa mayor suavidad en la curva de ablandamiento al utilizar una malla más fina.
- Se recomienda el uso de las condiciones de frontera propuestas en el modelo II, ya que distribuye mejor los desplazamientos impuestos, evitando la concentración de deformaciones en los orificios de los especímenes.
- En los resultados reportados por Wagoner *et al.* (2005) [68] para sus resultados numéricos usando un modelo de fractura reduce el σ_u a un 74 % y en los modelos

usados en este trabajo se redujo a un 83 %, esto puede deberse a la forma de obtención de este parámetro experimentalmente.

- Existe una variación entre los resultados experimentales y los modelos numéricos en la curva de ablandamiento, esto puede deberse a que en las pruebas experimentales el aglomerante y el agregado puede hacer variar la trayectoria del agrietamiento, y en los modelos puede deberse a la distribución de deformaciones en los elementos y al modelo constitutivo usado.
- Se observa que la regla de ablandamiento exponencial usada en los modelos tiene una buena aproximación con los resultados experimentales.
- En el modelo de daño continuo aunque no necesita un remallado para obtener resultados, una desventaja que presenta es que se debe tener idea de la ubicación donde se presentará la falla para poder establecer la banda de agrietamiento distribuido, lo cual puede presentar complicaciones si no se sabe con exactitud donde comenzará el agrietamiento, por ejemplo en estructuras irregulares en geometrías o cargas. Esta desventaja no se presenta con el modelo de discontinuidades interiores.

De las respuestas obtenidas del segundo ejemplo puede concluirse lo siguiente:

- No es posible comparar el comportamiento de la curva Carga-CMOD obtenidas con respecto a los experimentales obtenidos por Kim *et al.* (2004), pues aunque la energía de fractura es una propiedad del material, para este caso interviene en gran manera la geometría debido a que ésta en la prueba experimental realizada no está estandarizada por lo que las características se ven influidas por este factor.
- Es posible observar la variación de la energía de fractura y el módulo elástico de menor a mayor con forme aumenta la edad del concreto así como el desplazamiento en el que se presenta el pico en cada curva que muestra un material muy dúctil a temprana edad haciéndose cuasi-frágil conforme avanza la edad del concreto.
- Es posible observar una diferencia en el ablandamiento del concreto por los diferentes modelos de daño usados, esto puede deberse a que la ley de ablandamiento de cada modelo de daño es diferente.

Bibliografía

- [1] AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS D 7313-07A. Standard test method for determining fracture energy of asphalt-aggregate mixtures using the disk-shaped compact tension geometry. ASTM Standards, USA.
- [2] AYALA, A. G., RAMÍREZ, O., Y GARCÍA, O. Análisis y evaluación estructural de la cortina del proyecto hidroeléctrico de Zimapán. Reporte Técnico 4554, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F., 1994.
- [3] AZENHA, M., FARIA, R., Y FIGUEIRAS, J. *Measuring, Monitoring and Modeling Concrete Properties*. Springer Netherlands, Portugal, 2006, ch. Thermo-Mechanical Analysis of Young Concrete, pp. 91–97.
- [4] BAŽANT, Z. P., Y PLANAS, J. *Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials*. CRC Press, Boca Raton, 1998.
- [5] BARBAT, A. H., OLLER, S., OÑATE, E., Y HANGANU, A. D. Viscous damage model for Timoshenko beam structures. *International Journal of Solids and Structures* 34, 30 (1997), 3953–3976.
- [6] BELYTSCHKO, T., FISH, J., Y ENGELMANN, B. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 70 (1988), 59–89.
- [7] BENTZ, D. P. A review of early-age properties of cement-based materials. *Cement and Concrete Research* 38 (2008), 196–204.
- [8] BERTAGNOLI, G., MANCINI, G., Y TONDOLO, F. Numerical modelling of early-age concrete hardening. *Magazine of Concrete Research* 60 (2008), 01–09.
- [9] BORST, R., Y SLUYS, L. J. *Computational methods in non-linear solid mechanics*. Delft University of Technology, 1999.
- [10] BORST, R., Y VAN DEN BOOGAARD, A. H. Finite element modeling of deformation and cracking in early-age concrete. *Journal of Engineering Mechanics* 120 (1994), 2519–2534.

- [11] CAROL, I., RIZZI, E., Y WILLAM, K. On the formulation of anisotropic degradation, part II: Generalized pseudo rankine model for tensile damage. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), 519–543.
- [12] CAROL, I., RIZZI, E., Y WILLAM, K. On the formulation of anisotropic elastic degradation, part I: Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. *International Journal of Solids and Structures* 38(4) (2001), 491–518.
- [13] CHABOCHE, J. L. Damage induced anisotropy: On the difficulties associated with active/passive unilateral condition. *International Journal of Damage Mechanics* 1, 2 (1992), 148–171.
- [14] CHABOCHE, J. L. Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *International Journal of Damage Mechanics* 2 (1993), 311–329.
- [15] CHABOCHE, J. L. A continuum damage theory with anisotropic and unilateral damage. *La Recherche Aérospatiale* 2 (1995), 139–147.
- [16] COPE, R. J., RAO, P. V., L.A.CLARK, Y NORRIS, P. Modelling of reinforced concrete behavior for finite element analysis of bridge slabs. *Numerical Methods for Nonlinear problems 1. Taylor C et al. (Eds.)* (1980), 457–470.
- [17] DVORKIN, E. N. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30 (1990), 541–564.
- [18] FARIA, R., OLIVER, J., Y CERVERA, M. A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), 1533–1558.
- [19] FERNÁNDEZ, L. *Modelado Numérico de la Fractura en el Concreto*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico, 2002.
- [20] GEERS, M. G. D. *Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture*. Tesis de Doctorado, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Holanda, 1997.
- [21] HANGANU, A. D., OÑATE, E., Y BARBAT, A. H. A finite element methodology for local/global damage evaluation in civil engineering structures. *Computers and Structures* 80 (2002), 1667–1687.
- [22] HILLERBORG, A., MODEER, M., Y PETERSSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research* (1976), 773–782.
- [23] HILSDORF, W. B. . H. K. Development of strength and deformability of very young concrete. SEM/RILEM International Conference on Fracture of Concrete and Rock. Houston, Texas, June 1987.

- [24] INGRAFFEA, A., Y SAOUMA, V. Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. In *Engineering Application of Fracture Mechanics*, G. C. Sih y A. DiTommaso, Eds. Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- [25] JIN, X., Y LI, Z. Investigation on mechanical properties of young concrete. *Materials and Structures* 33 (2000), 627–633.
- [26] JIRÁZEK, M., Y BAŽANT, Z. P. *Inelastic Analysis of Structures*. John Wiley, Chichester, 2002.
- [27] JU, J. W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* 25 (1989), 803–833.
- [28] JUÁREZ, G. *Modelado Numérico de Problemas de Fractura en Sólidos Mediante Discontinuidades Interiores*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico, 2006.
- [29] KACHANOV, L. M. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tehk. Nauk* 8 (1958), 26–31.
- [30] KIM, J.-K., LEE, Y., Y YI, S.-T. Fracture characteristics of concrete at early ages. *Cement and Concrete Research* 34 (2004).
- [31] KLISINSKI, M., RUNNESSON, K., Y STURE, S. Finite element with inner softening band. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* (1991), 575–587.
- [32] LEMAITRE, J. *A Course on Damage Mechanics*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [33] LOTFI, H. R., Y SHING, P. B. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), 1307–1325.
- [34] LUBLINER, J. *Plasticity Theory*. Macmillan, New York, 1990.
- [35] LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S., Y OÑATE, E. A plastic-damage model for concretes. *International Journal of Solids and Structures* 25 (1989), 299–326.
- [36] LUCCIONI, B. Apuntes de la asignatura de daño continuo. Tucumán, Argentina, 2003.
- [37] LUCCIONI, B., OLLER, S., Y DANESI, R. Coupled plastic–damaged model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129 (1996), 81–89.
- [38] LUCCIONI, B. M. *Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, 1993.

- [39] MARTÍN, O. *Modelo de Daño Anisótropo*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, 2001.
- [40] MAZARS, J. Mechanical damage and fracture of concrete structures. *Advances in Fracture research (Fracture 81) 4* (1982), 1499–1506.
- [41] MAZARS, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et a la rupture du béton de structure*. Tesis de Doctorado, Université Paris, Paris, Francia, 1984.
- [42] MAZARS, J., Y CABOT, G. P. Continuum damage theory-application to concrete. *ASCE Journal of Engineering Mechanics 115* (1989), 354–365.
- [43] MELENK, J. M., Y BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 4* (1996), 289–314.
- [44] MÉNDEZ, H. Implantación de modelos de daño para la simulación de elementos de concreto reforzado en su evolución al colapso. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Metropolitana, Mexico, D. F., 2012.
- [45] NGO, D., Y SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Mat. J. 64* (1967), 152–163.
- [46] OLIVELLA, X. O. Métodos numéricos en la mecánica de sólidos no lineales. Barcelona, 2002.
- [47] OLIVER, J. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 39*, 21 (1996), 3575–3600.
- [48] OLIVER, J., CERVERA, M., OLLER, S., Y LUBLINIER, J. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures 2* (1990), 945–958.
- [49] OLLER, S. *Fractura mecánica. Un enfoque global*. Ediciones UPC, Barcelona, España, 2001.
- [50] OLUOKUN, F. A., BURDETTE, E. G., Y DEATHERAGE, J. H. Elastic moduli, poisson's ratio and compressive strength relationships at early ages. *ACI Mat. J. 88* (1991), 3–10.
- [51] PERZYNA, P. Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics 9* (1966), 244–368.
- [52] RASHID, Y. R. Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design 7* (1968), 334–344.

- [53] REGUEIRO, R. A., Y BORJA, R. I. A finite element model of localized deformation in fractional materials taking a strong discontinuity approach. *Finite Element in Analysis and Design* 33 (1999), 283–315.
- [54] RETAMA, J. *Formulation and Aproximation to Problems in Solids by Embedded Discontinuity Models*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico, 2010.
- [55] RILEM, T. Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of tree-point bend test on notched beams. *Materials and Structures (RILEM)* 18 (1985), 285–290.
- [56] ROTS, J. G. *Computational Modeling of Concrete Fracture*. Tesis de Doctorado, Delft University of Technology, Delft, Países Bajos, 1988.
- [57] ROTS, J. G. Smearred and discrete representations of localized fracture. *International Journal of Fracture* 51 (1991), 45–59.
- [58] SCHUTTER, G. D., Y TARWE, L. Degree of hydration-based description of mechanical properties of early age concrete. *Materials and Structures* 29 (1996), 335–344.
- [59] SHI, Z. *Crack Analysis in Structural Concrete: Theory and Applications*. Butterworth-Heinemann LTD, 2009.
- [60] SIMO, C., Y JU, J. Stress and strain based continuum damage models: I. formulation. *International Journal of Solids and Structures* 23 (1987), 821–840.
- [61] SIMO, C., Y JU, J. Stress and strain based continuum damage models: II. computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* 23 (1987), 841–869.
- [62] SIMO, C., Y JU, J. Stress and strain based continuum damage models part I and II. *International Journal of Solids and Structures* 23 (1987), 821–840.
- [63] SIMO, J. C., Y RIFAI, M. S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29, 8 (1990), 1595–1638.
- [64] SLUYS, L. J., Y BERRENDTS, A. H. Discontinuos failure analysis for mode I and mode II localizations problems. *International Journal of Solids and Structures* 31-32 (1998), 4257–4274.
- [65] TAYLOR, R. L. FEAP: A Finite Element Analysis Program. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2008.
- [66] TRUMAN, K. Z., PETRUSKA, A. D. J., Y NORMAN, C. D. Creep, shrinkage and thermal effects on mass concrete structures. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 117 (1991), 1274–1288.

- [67] VOYIADJIS, G. Z., Y DELIKTAS, B. A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 183 (2000), 159–199.
- [68] WAGONER, M. P., BUTTLAR, W. G., Y PAULINO., G. H. Disk-shaped compact tension test for asphalt concrete fracture. *Society for Experimental Mechanics* 45 (2005), 270–277.
- [69] WELLS, G. N. *Discontinuous Modelling of Strain Localization and Failure*. Tesis de Doctorado, Delft University of Technology, Delft, Holanda, 2001.
- [70] YI, S.-T., KIM, J.-K., Y OH, T.-K. Effect of strength and age on the stress-strain curves of concrete specimens. *Cement and Concrete Research* 33 (2003), 1235–1244.