Capítulo 1
Modelado de un motor de corriente directa

1.1 Obtención de las expresiones más significativas de un motor de corriente directa

El modelado, de este sistema en particular, se hace de forma lineal y con parámetros que son invariantes en el tiempo; el anterior enunciado significa que al modelado del sistema se le puede aplicar una transformación lineal, que el sistema ya transformado tiene una transformada inversa que nos devuelve el sistema original, y que esta conformado por elementos que, a pesar del paso del tiempo, se consideran constantes.

El modelado del sistema se realiza mediante el uso de leyes físicas, como el caso de la suma de tensiones eléctricas en una malla, o la suma de fuerzas que se igualan a una fuerza de excitación. Este capítulo está destinado a encontrar todas aquellas expresiones matemáticas que pueden manipularse mediante experimentos o por el uso del álgebra, estas mismas nos servirán para la obtención de los parámetros constantes de un motor de corriente directa.

El motor de corriente directa se ilustra en el siguiente diagrama:

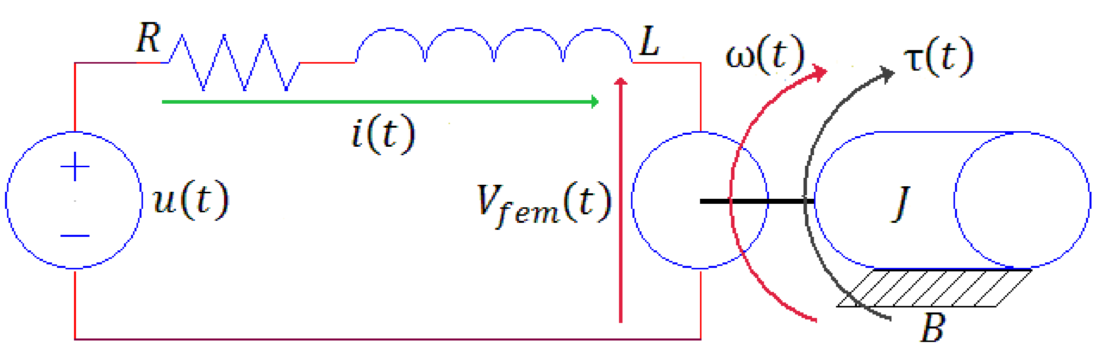

Diagrama 1.1. Esquema electro-mecánico de un motor de corriente directa

Donde:

R: Resistencia óhmica de los embobinados del rotor
L: Inductancia de los embobinados del rotor
J: Momento de inercia del rotor
B: Coeficiente de fricción viscosa entre el rotor y el estator
$u(t)$: Fuente de excitación del sistema

$\omega(t)$: Velocidad angular del rotor
$\tau(t)$: Par del rotor
$i(t)$: Corriente del sistema
$V_{fem}(t)$: Tensión eléctrica inducida

Existen otros parámetros constantes que no se vislumbran en el diagrama anterior, estas constantes son utilizadas para hacer vínculo entre la parte mecánica y la parte eléctrica del motor.

Dichos valores escalares son:

K_T: Constante mecánica, considerando un flujo magnético constante (También puede ser nombrada como “Constante de campo”)
K_E: Constante eléctrica, considerando un flujo magnético constante (También puede ser nombrada como “Constante de armadura”)

Por último, hay otro valor que es imprescindible en el modelado de un motor de corriente directa; para fines de un control especializado en posición, utilizando un motor de corriente directa como medio, este parámetro juega el papel más importante para la tarea de detener el motor en una región específica.

Par de fricción es el nombre más común que se le da a esta constante, y se denomina por el siguiente símbolo:

T_i: Par de fricción, o par inicial

Mencionado con anterioridad, el objetivo es proponer un método para encontrar los valores constantes más significativos que conforman a un motor de corriente directa; en este punto, podemos decir que ya han sido identificadas las constantes más relevantes que lo componen; la siguiente lista muestra cuales son:

R: Resistencia óhmica de los embobinados del rotor
L: Inductancia de los embobinados del rotor
J: Momento de inercia del rotor
B: Coeficiente de fricción viscosa entre el rotor y el estator
K_T: Constante mecánica, considerando un flujo magnético constante
K_E: Constante eléctrica, considerando un flujo magnético constante
T_i: Par de fricción, o par inicial

Dicho lo anterior, el modelado de la parte eléctrica del sistema se desarrolla observando la malla eléctrica de la siguiente ilustración:

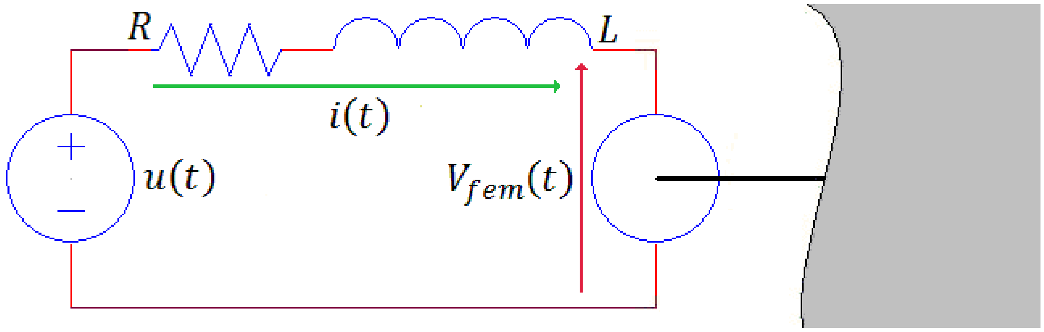

Diagrama 1.2. Esquema eléctrico de un motor de corriente directa

La suma de tensiones eléctricas en cada elemento que conforma a la malla, es igual a la tensión de la fuente de excitación, es decir:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_{fem}(t) \tag{1.1}$$

Para el modelado de la parte mecánica se tiene que observar el diagrama de cuerpo libre que se muestra a continuación:

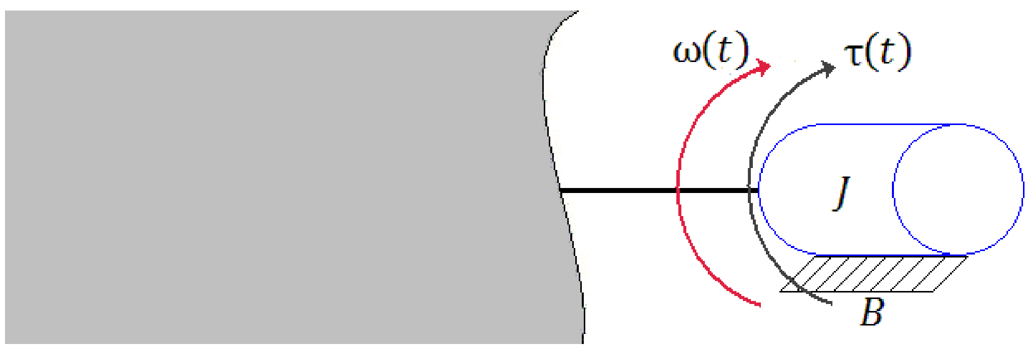

Diagrama 1.3. Esquema mecánico de un motor de corriente directa

La suma de fuerzas que hacen girar al rotor respecto al eje simétrico, es igual a la suma de momentos que se oponen al movimiento del mismo, en otras palabras:

$$\tau(t) = B\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} + T_i \tag{1.2}$$

Como se mencionó, existen ciertas ecuaciones matemáticas que vinculan directamente la parte mecánica del sistema con la parte eléctrica del mismo; a continuación se muestran dichas expresiones:

$$\tau(t) = K_T i(t) \tag{1.3}$$

$$V_{fem}(t) = K_E \omega(t) \tag{1.4}$$

Son estas cuatro expresiones las más significativas para el modelado de un motor de corriente directa; con la mezcla de estas expresiones se pueden generar otras ecuaciones, que en capítulos posteriores, serán de gran utilidad para el alcance del objetivo principal.

1.2 Obtención de la señal de corriente eléctrica instantánea, debida a una señal escalón de amplitud arbitraria

Una vez obtenidas las cuatro expresiones más importantes del modelo del motor a caracterizar, es necesario especificar los términos de la generación de una señal de corriente eléctrica instantánea. En un primer acercamiento, se pretende que esta señal cumpla con los siguientes puntos:

1. Que sea producto de la excitación del motor por efecto de una señal escalón de amplitud arbitraria.
2. Debe estar situada en el dominio del tiempo.
3. Dicha expresión matemática se debe encontrar en términos de los parámetros constantes que conforman al sistema.
4. De ningún modo puede ser función de otras variables, como el caso de la velocidad angular instantánea del rotor.

El desarrollo de esta expresión, a pesar de que se requiere en el dominio del tiempo, necesita de herramientas que transporten nuestras ecuaciones fundamentales al dominio de la frecuencia; dichas herramientas son la “Transformada de Laplace” y la “Transformada inversa de Laplace”. El uso de estas se debe a que se considera desde un principio al sistema lineal y con parámetros invariantes en el tiempo, por lo tanto, tiene una transformación al dominio de la frecuencia y existe una solución única para la transformada inversa del mismo.

Desarrollo:

Sustituir la ecuación (1.4) en la ecuación (1.1):

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_E\omega(t) \tag{1.5}$$

Considerar que $u_{(t)} = V[u_{-1}(t)]$, es decir, un escalón de amplitud "V"; aplicar "Transformada de Laplace" a la ecuación (1.5):

$$\mathfrak{L}\{V[u_{-1}(t)]\} = \mathfrak{L}\left\{Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_E\omega(t)\right\}$$

$$\frac{V}{s} = RI(s) + (sL)I(s) + K_E\Omega(s) \tag{1.6}$$

Despejando $\Omega(s)$ de la ecuación (1.6):

$$\frac{V}{s} - (R + sL)I(s) = K_E\Omega(s)$$

$$\frac{V - (Rs + s^2L)I(s)}{s} = K_E\Omega(s)$$

$$\frac{V - (Rs + s^2L)I(s)}{K_E s} = \Omega(s) \tag{1.7}$$

Sustituir la ecuación (1.3) en la ecuación (1.2):

$$K_T i(t) = B\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} + T_i \tag{1.8}$$

Aplicar "Transformada de Laplace" a la ecuación (1.8):

$$\mathfrak{L}\{K_T i(t)\} = \mathfrak{L}\left\{B\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} + T_i\right\}$$

$$K_T I(s) = B\Omega(s) + Js\Omega(s) + \frac{T_i}{s}$$

$$K_T I(s) = (B + Js)\Omega(s) + \frac{T_i}{s} \tag{1.9}$$

Sustituir la ecuación (1.7) en la ecuación (1.9):

$$K_T I(s) = (B + Js)\left(\frac{V - (Rs + s^2L)I(s)}{K_E s}\right) + \frac{T_i}{s}$$

$$K_T I(s) = (B + Js)\left(\frac{V - (Rs + s^2L)I(s)}{K_E s}\right) + \frac{K_E T_i}{K_E s}$$

$$K_T I(s) = \left(\frac{V(B + Js) - (Rs + s^2L)(B + Js)I(s) + K_E T_i}{K_E s}\right)$$

$$\frac{K_E K_T s I(s)}{K_E s} = \frac{V(B + Js) - (Rs + s^2L)(B + Js)I(s) + K_E T_i}{K_E s}$$

$$K_E K_T s I(s) = V(B + Js) - (Rs + s^2L)(B + Js)I(s) + K_E T_i$$

$$[K_E K_T s + (Rs + s^2L)(B + Js)]I(s) = V(B + Js) + K_E T_i$$

$$[K_E K_T s + RBs + RJs^2 + BLs^2 + JLs^3]I(s) = V(B + Js) + K_E T_i$$

$$[K_E K_T + RB + RJs + BLs + JLs^2]sI(s) = V(B + Js) + K_E T_i$$

$$I(s) = \frac{V(B + Js) + K_E T_i}{[K_E K_T + RB + RJs + BLs + JLs^2]s}$$

$$I(s) = \frac{\frac{1}{JL}}{\frac{1}{JL}}\left(\frac{V(B + Js) + K_E T_i}{[K_E K_T + RB + RJs + BLs + JLs^2]s}\right)$$

$$I(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{V(B + Js) + K_E T_i}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]s}\right) \tag{1.10}$$

En este punto del desarrollo, es esencial encontrar los polos del sistema; los polos dan indicio del comportamiento en el dominio del tiempo de la señal de corriente eléctrica que estamos tratando de obtener, para ello se requiere generar una función de transferencia a partir de la expresión matemática obtenida recientemente, ecuación (1.10).

En otras palabras, debemos generar una función de transferencia en donde la salida sea la corriente eléctrica del sistema, mientras que la entrada sea el escalón de tensión eléctrica que excita al mismo.

$$I(s) = H(s)\frac{V}{s}; \tag{1.11}$$

$$\frac{V}{s} = U(s); \tag{1.12}$$

$$\frac{I(s)}{U(s)} = H(s); \tag{1.13}$$

Con las expresiones anteriores se genera un problema; en el numerador de la ecuación (1.10), existe un producto de términos que no se encuentra multiplicado por la amplitud del escalón, la problemática se soluciona de una forma simple si se considera el siguiente criterio:

1. El producto "$K_E T_i$" es un producto que siempre es constante.
2. En la duración de cualquier prueba, el valor de la amplitud de la señal escalón es constante.

Las aseveraciones anteriores permiten generar una expresión matemática que relaciona directamente la amplitud del escalón, "V", con el producto de las constantes "$K_E T_i$"; dicha relación es la siguiente:

$$nV = K_E T_i \tag{1.14}$$

La ecuación (1.14) tiene validez, ya que, si tomamos como ciertos los enunciados de las cuales partió su creación, el valor de "n" siempre es constante a lo largo de una prueba, es decir, siempre que "V" tome un valor arbitrario.

Al sustituir la ecuación (1.14) en la ecuación (1.10) se obtiene lo siguiente:

$$I(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{V\,(B + Js) + nV}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]s}\right)$$

$$I(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{Js + B + n}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]}\right)\frac{V}{s}$$

Si sustituimos la ecuación (1.12) en la expresión anterior, podemos obtener un modelo de función de transferencia, donde la salida es la corriente eléctrica del sistema, y la entrada, necesariamente, es un escalón de amplitud arbitraria.

$$\frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{JL}\left(\frac{Js + B + n}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]}\right) \tag{1.15}$$

Se observa que el sistema es de segundo orden, sin embargo, identificar el tipo de polos que posee, no se puede vislumbrar a simple apreciación. Tomando el denominador de la ecuación (1.15), y arreglándolo algebraicamente para obtener las raíces del mismo, es la forma en la cual se sabrá con certeza la naturaleza de los polos.

$$P_1 = -\left(\frac{RJ + BL}{2JL}\right) + \sqrt{\left(\frac{RJ + BL}{2JL}\right)^2 - \left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right)} \tag{1.16}$$

$$P_2 = -\left(\frac{RJ + BL}{2JL}\right) - \sqrt{\left(\frac{RJ + BL}{2JL}\right)^2 - \left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right)} \tag{1.17}$$

La condición del radical nos indica que pueden existir dos posibilidades, que los polos sean números reales, o que los polos sean complejos conjugados. Al existir estas posibilidades, es necesario plantear dos modelos de corriente eléctrica instantánea, uno para cada tipo de polos que se pueden obtener.

Muchos autores han asignado una serie de parámetros para formalizar, y estandarizar, el estudio de los sistemas de segundo orden; las ecuaciones siguientes, y posteriores, se trabajarán usando dichos parámetros. Tomemos en cuenta las siguientes consideraciones a partir del denominador de un sistema, cualquiera, de segundo orden:

$$G(s) = s^2 + 2\xi\omega_n + {\omega_n}^2 \tag{1.18}$$

Donde:

$G(s)$: Denominador de un sistema, cualquiera, de segundo orden
ξ: Factor de amortiguamiento relativo
ω_n: Frecuencia natural no amortiguada

El mismo desarrollo de la teoría, con base en los sistemas de segundo orden, nos sugiere la existencia de otros parámetros que tienen relación con los recién mencionados, de tal forma que:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \tag{1.19}$$

$$\alpha = \xi\omega_n \tag{1.20}$$

Donde:

α: Factor de amortiguamiento real
ω_d: Frecuencia natural no amortiguada

1.2.1 Obtención de la señal de corriente eléctrica instantánea, con polos complejos conjugados, debida a una señal escalón de amplitud arbitraria

El cambio sutil en el desarrollo con un tipo específico de polos, para la obtención de una señal en el dominio del tiempo, radica en la agrupación del denominador para la separación por fracciones parciales de la señal de corriente en el dominio de la frecuencia. Posteriormente, a cada fracción se le aplicara la "Transformada inversa de Laplace". El desarrollo del párrafo anterior se expresa a continuación:

Agrupación considerando que los polos son complejos conjugados:

$$I(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{V\,(B + Js) + K_E T_i}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]s}\right)$$

$$I(s) = \frac{V}{JL}\left(\frac{Js + B + n}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]s}\right) \tag{1.21}$$

En éste caso, facilita el trabajo algebraico el uso de los parámetros descritos en las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20), mismas que serán sustituidas en la ecuación (1.21) a lo largo de éste desarrollo:

$$B' = B + n \tag{1.22}$$

$$\alpha = \frac{RJ + BL}{2JL} \tag{1.23}$$

$$\omega_d^{\,2} = \frac{K_E K_T + RB}{JL} - \left(\frac{RJ + BL}{2JL}\right)^2 \tag{1.24}$$

Expansión por fracciones parciales:

$$I(s) = \frac{V}{JL}\left(\frac{Js + B'}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^{\,2}]s}\right) = \frac{V}{JL}\left(\frac{A}{s} + \frac{Ds + C}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^{\,2}}\right)$$

$$\frac{V}{JL}\left(\frac{A}{s}+\frac{Ds+C}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right)=\frac{V}{JL}\left(\frac{A[(s^2+2\alpha s+\alpha^2)+\omega_d{}^2]+Ds^2+Cs}{[(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2]s}\right)$$

$$\frac{V}{JL}\left(\frac{A[(s^2+2\alpha s+\alpha^2)+\omega_d{}^2]+Ds^2+Cs}{[(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2]s}\right)=\frac{V}{JL}\left(\frac{(A+D)s^2+(2A\alpha+C)s+A(\alpha^2+\omega_d{}^2)}{[(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2]s}\right)$$

$$\frac{V}{JL}\left(\frac{(A+D)s^2+(2A\alpha+C)s+A(\alpha^2+\omega_d{}^2)}{[(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2]s}\right)=I(s)=\frac{V}{JL}\left(\frac{Js+B'}{[(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2]s}\right)$$

Igualando términos:

$$(A+D)=0;$$

$$(2A\alpha+C)=J;$$

$$A(\alpha^2+\omega_d{}^2)=B';$$

Despejando:

$$A=\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)};$$

$$D=-\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)};$$

$$C=J-\frac{2B'\alpha}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)};$$

$$\frac{V}{JL}\left(\frac{A}{s}+\frac{Ds+C}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right)=\frac{V}{JL}\left(\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s}-\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]+\left[J-\frac{2B'\alpha}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$I(s)=\frac{V}{JL}\left(\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s}-\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s+\alpha-\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]+\left[J-\frac{2B'\alpha}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$I(s)=\frac{V}{JL}\left(\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s}-\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]+\left[J-\frac{2B'\alpha}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}+\frac{B'\alpha}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$I(s)=\frac{V}{JL}\left(\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s}-\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]+\left[J-\frac{B'\alpha}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$I(s)=\frac{V}{JL}\left(\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s}-\left[\frac{B'}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]+\left[\frac{J(\alpha^2+\omega_d{}^2)-B'\alpha}{(\alpha^2+\omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$I(s) = \frac{V}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\left([B']\frac{1}{s} - [B']\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + [J(\alpha^2 + \omega_d{}^2) - B'\alpha]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$I(s) = \frac{V}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\left([B']\frac{1}{s} - [B']\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + B'\left[\frac{J(\alpha^2 + n^2) - B'\alpha}{B'}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$I(s) = \frac{VB'}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\left(\frac{1}{s} - \left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + \left[\frac{J(\alpha^2 + \omega_d{}^2) - B'\alpha}{B'}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$I(s) = \frac{VB'}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\left(\frac{1}{s} - \left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + \left[\frac{J(\alpha^2 + \omega_d{}^2) - B'\alpha}{B'\omega_d}\right]\left[\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right);$$

$$\frac{VB'}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)} = \frac{V(n+B)}{JL\left(\frac{K_TK_E + RB}{JL}\right)} = \frac{V\left(\frac{K_TK_E}{V} + B\right)}{JL\left(\frac{K_TK_E + RB}{JL}\right)}$$

$$\frac{V\left(\frac{K_TK_E}{V} + B\right)}{JL\left(\frac{K_TK_E + RB}{JL}\right)} = \frac{V\left(\frac{K_ET_i + VB}{V}\right)}{JL\left(\frac{K_TK_E + RB}{JL}\right)} = \frac{K_ET_i + VB}{K_TK_E + RB};$$

$$I(s) = \left(\frac{K_ET_i + VB}{K_TK_E + RB}\right)\left(\frac{1}{s} - \left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + \left[\frac{J(\alpha^2 + \omega_d{}^2) - B'\alpha}{B'\omega_d}\right]\left[\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

Aplicando la “Transformada inversa de Laplace”:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\left(\frac{K_ET_i + VB}{K_TK_E + RB}\right)\left(\frac{1}{s} - \left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + \left[\frac{J(\alpha^2 + \omega_d{}^2) - B'\alpha}{B'\omega_d}\right]\left[\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)\right\}$$

$$i(t) = \left(\frac{K_ET_i + VB}{K_TK_E + RB}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + \left[\frac{J(\alpha^2 + \omega_d{}^2) - B'\alpha}{B'\omega_d}\right]e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t\right)\Bigg\| \; t \geq 0 \qquad (1.25)$$

Donde la ecuación (1.25), representa la corriente eléctrica instantánea del sistema, considerando polos complejos conjugados, debida a un escalón de amplitud arbitraria.

1.2.2 Obtención de la señal de corriente eléctrica instantánea, con polos reales, debida a una señal escalón de amplitud arbitraria

Antes de comenzar el desarrollo, es de notar que la expansión por fracciones parciales se puede realizar directamente con los polos del sistema. A pesar de lo mencionado, conviene mostrar una relación de los polos con los parámetros de las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20); otra consideración que haré al respecto, se debe a usar el negativo de los polos que se expresan en las ecuaciones (1.16) y (1.17), esto último facilita el trabajo algebraico.

$$p_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_n{}^2} = -P_1 \tag{1.26}$$

$$p_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_n{}^2} = -P_2 \tag{1.27}$$

Se parte de ecuación (1.15) para la expansión por fracciones parciales, en conjunción con las expresiones (1.26) y (1.27):

$$I(s) = \frac{V}{JL}\left(\frac{Js + B + n}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]s}\right)$$

$$I(s) = \frac{V}{JL}\left(\frac{Js + B'}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]s}\right) = \frac{V}{JL}\left(\frac{Js + B'}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right)$$

$$\frac{V}{JL}\left(\frac{Js + B'}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right) = \frac{V}{JL}\left[\frac{E}{s} + \frac{F}{(s + p_1)} + \frac{G}{(s + p_2)}\right]$$

$$\frac{V}{JL}\left[\frac{E}{s} + \frac{F}{(s + p_1)} + \frac{G}{(s + p_2)}\right] = \frac{V}{JL}\left[\frac{E(s + p_1)(s + p_2) + Fs(s + p_2) + Gs(s + p_1)}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right]$$

$$\frac{V}{JL}\left[\frac{E(s + p_1)(s + p_2) + Fs(s + p_2) + Gs(s + p_1)}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right] = \frac{V}{JL}\left[\frac{E(s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1p_2) + Fs^2 + Fp_2s + Gs^2 + Gp_1s}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right]$$

$$\frac{V}{JL}\left[\frac{E(s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1p_2) + Fs^2 + Fp_2s + Gs^2 + Gp_1s}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right] = \frac{V}{JL}\left[\frac{(E + F + G)s^2 + (E(p_1 + p_2) + Fp_2 + Gp_1)s + Ep_1p_2}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right]$$

$$\frac{V}{JL}\left[\frac{(E + F + G)s^2 + (E(p_1 + p_2) + Fp_2 + Gp_1)s + Ep_1p_2}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right] = \frac{V}{JL}\left(\frac{Js + B'}{[(s + p_1)(s + p_2)]s}\right);$$

$$E + F + G = 0$$

$$E(p_1 + p_2) + Fp_2 + Gp_1 = J$$

$$Ep_1p_2 = B';$$

Despejando:

$$E = \frac{B'}{p_1 p_2}$$

$$F = -G - E = -G - \frac{B'}{p_1 p_2}$$

$$E(p_1 + p_2) + Fp_2 + Gp_1 = \frac{B'}{p_1 p_2}(p_1 + p_2) + \left(-G - \frac{B'}{p_1 p_2}\right)p_2 + Gp_1 = J$$

$$\frac{B'}{p_1 p_2}(p_1 + p_2) - Gp_2 - \frac{B'p_2}{p_1 p_2} + Gp_1 = J$$

$$\frac{B'(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} - Gp_2 - \frac{B'p_2}{p_1 p_2} + Gp_1 = \frac{B'(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} + G(p_1 - p_2) - \frac{B'p_2}{p_1 p_2} = J;$$

$$G(p_1 - p_2) = J + \frac{B'p_2}{p_1 p_2} - \frac{B'(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} = J + \frac{B'p_2}{p_1 p_2} - \frac{B'}{p_2} - \frac{B'p_2}{p_1 p_2}$$

$$G(p_1 - p_2) = J - \frac{B'}{p_2}$$

$$G(p_1 - p_2) = \frac{Jp_2 - B'}{p_2}$$

$$G = \frac{Jp_2 - B'}{p_2(p_1 - p_2)}$$

$$G = -F - E = -F - \frac{B'}{p_1 p_2}$$

$$E(p_1 + p_2) + Fp_2 + Gp_1 = \frac{B'}{p_1 p_2}(p_1 + p_2) + \left(-F - \frac{B'}{p_1 p_2}\right)p_1 + Fp_2 = J$$

$$\frac{B'}{p_1 p_2}(p_1 + p_2) - Fp_1 - \frac{B'p_1}{p_1 p_2} + Fp_2 = J$$

$$\frac{B'(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} - Fp_1 - \frac{B'p_1}{p_1 p_2} + Fp_2 = \frac{B'(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} + F(p_2 - p_1) - \frac{B'p_1}{p_1 p_2} = J;$$

$$F(p_2 - p_1) = J + \frac{B'p_1}{p_1 p_2} - \frac{B'(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} = J + \frac{B'p_1}{p_1 p_2} - \frac{B'}{p_1} - \frac{B'p_1}{p_1 p_2}$$

$$F(p_2 - p_1) = J - \frac{B'}{p_1}$$

$$F(p_2 - p_1) = \frac{Jp_1 - B'}{p_1}$$

$$F = \frac{Jp_1 - B'}{p_1(p_2 - p_1)}$$

Sustituyendo:

$$I(s) = \frac{V}{JL}\left[\frac{E}{s} + \frac{F}{(s+p_1)} + \frac{G}{(s+p_2)}\right] = \frac{V}{JL}\left[\left(\frac{B'}{p_1p_2}\right)\frac{1}{s} + \left(\frac{Jp_1 - B'}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\frac{1}{(s+p_1)} + \left(\frac{Jp_2 - B'}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\frac{1}{(s+p_2)}\right]$$

$$I(s) = \frac{V}{JL}\left[\left(\frac{B'}{p_1p_2}\right)\frac{1}{s} + \left(\frac{Jp_1 - B'}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\frac{1}{(s+p_1)} + \left(\frac{Jp_2 - B'}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\frac{1}{(s+p_2)}\right]$$

Aplicación de la "Transformada inversa de Laplace":

$$\mathfrak{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{V}{JL}\left[\left(\frac{B'}{p_1p_2}\right)\frac{1}{s} + \left(\frac{Jp_1 - B'}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\frac{1}{(s+p_1)} + \left(\frac{Jp_2 - B'}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\frac{1}{(s+p_2)}\right]\right\}$$

$$i(t) = \frac{V}{JL}\left[\left(\frac{B'}{p_1p_2}\right) + \left(\frac{Jp_1 - B'}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\mathrm{e}^{-p_1 t} + \left(\frac{Jp_2 - B'}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\mathrm{e}^{-p_2 t}\right]\Bigg| \; t \geq 0 \qquad (1.28)$$

Donde la ecuación (1.28), representa la corriente eléctrica instantánea del sistema, considerando polos reales, debida a un escalón de amplitud arbitraria.

1.3 Obtención de la señal de velocidad angular instantánea del rotor, debida a una señal escalón de amplitud arbitraria

En los capítulos posteriores, el conocimiento y demostración de una señal de velocidad angular es imprescindible, dicha expresión permitirá una mejor comprensión sobre el desarrollo de este método que se propone.

Desarrollo:

Se realiza un arreglo algebraico de la ecuación (1.6), tal que:

$$\frac{V}{s} = RI(s) + (sL)I(s) + K_E\Omega(s)$$

$$\frac{V}{s} = (R + sL)I(s) + K_E\Omega(s)$$

$$\frac{V}{s} - K_E\Omega(s) = \frac{V - K_E s\Omega(s)}{s} = (R + sL)I(s)$$

$$\frac{V - K_E s\Omega(s)}{s(R + sL)} = I(s) \qquad (1.29)$$

Arreglo algebraico de la ecuación (1.9):

$$K_T I(s) = (B + Js)\Omega(s) + \frac{T_i}{s}$$

$$K_T I(s) = \frac{(B + Js)s\Omega(s) + T_i}{s}$$

$$I(s) = \frac{(B + Js)s\Omega(s) + T_i}{K_T s} \qquad (1.30)$$

Igualando la ecuación (1.29) y la ecuación (1.30):

$$\frac{V - K_E s\Omega(s)}{s(R + sL)} = \frac{(B + Js)s\Omega(s) + T_i}{K_T s}$$

$$(V - K_E s\Omega(s))K_T s = s(R + sL)\big((B + Js)s\Omega(s) + T_i\big)$$

$$VK_T - K_E K_T s\Omega(s) = (R + sL)(B + Js)s\Omega(s) + T_i(R + sL)$$

$$VK_T - T_i(R + sL) = (R + sL)(B + Js)s\Omega(s) + K_E K_T s\Omega(s)$$

$$VK_T - T_i(R + sL) = [K_E K_T + RB + RJs + BLs + JLs^2]s\Omega(s)$$

$$\frac{VK_T - T_i R - T_i sL}{[K_E K_T + RB + RJs + BLs + JLs^2]s} = \Omega(s)$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{VK_T - T_iR - T_isL}{\left[\left(\frac{K_EK_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]s}\right) \tag{1.31}$$

Análogamente a la obtención de una señal de corriente, al expresar la velocidad angular en el dominio de la frecuencia, donde la excitación también se debe a un escalón de amplitud arbitraria, se observa que los polos pueden ser complejos conjugados o reales.

La metodología a seguir no dista mucho de la usada con anterioridad para la señal de corriente eléctrica instantánea, misma metodología que demuestra en esta parte que, la señal de velocidad angular instantánea del rotor tiene los mismos polos que la señal de corriente eléctrica instantánea; esto mismo produce la necesidad de plantear un modelo con polos complejos conjugados, y otro con polos reales; el desarrollo comienza con la demostración de que ambos tipos de señales (Corriente instantánea y velocidad angular del rotor) tienen el mismo denominador.

1.3.1 Obtención de la señal de velocidad angular instantánea del rotor, con polos complejos conjugados, debida a una señal escalón de amplitud arbitraria

Sustitución de las ecuaciones (1.23) y (1.24), en la ecuación (1.31):

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{VK_T - T_iR - T_isL}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]s}\right) = \frac{1}{JL}\left(\frac{M}{s} + \frac{Ns + P}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2}\right)$$

$$\frac{1}{JL}\left(\frac{M}{s} + \frac{Ns + P}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2}\right) = \frac{1}{JL}\left(\frac{M[(s^2 + 2\alpha s + \alpha^2) + \omega_d^2] + Ns^2 + Ps}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]s}\right)$$

$$\frac{1}{JL}\left(\frac{M[(s^2 + 2\alpha s + \alpha^2) + \omega_d^2] + Ns^2 + Ps}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]s}\right) = \frac{1}{JL}\left(\frac{(M+N)s^2 + (2M\alpha + P)s + M(\alpha^2 + \omega_d^2)}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]s}\right)$$

$$\frac{1}{JL}\left(\frac{(M+N)s^2 + (2M\alpha + P)s + M(\alpha^2 + \omega_d^2)}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]s}\right) = \Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{VK_T - T_iR - T_isL}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]s}\right);$$

$$VK_T - T_iR = \beta;$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{\beta - T_isL}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]s}\right);$$

$$M + N = 0;$$

$$M(\alpha^2 + \omega_d{}^2) = \beta;$$

$$2M\alpha + P = -T_i L;$$

Despejando:

$$M = \frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)};$$

$$N = -\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)};$$

$$P = -T_i L - 2M\alpha = -T_i L - \frac{2\beta\alpha}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{VK_T - T_i R - T_i sL}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2]s}\right) = \frac{1}{JL}\left(\frac{M}{s} + \frac{Ns + P}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right)$$

$$\frac{1}{JL}\left(\frac{M}{s} + \frac{Ns + P}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right) = \frac{1}{JL}\left(\left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s} - \left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + \left[-T_i L - \frac{2\beta\alpha}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s} - \left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s + \alpha - \alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + \left[-T_i L - \frac{2\beta\alpha}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s} - \left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s + \alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + \left[-T_i L - \frac{2\beta\alpha}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)} + \frac{\beta\alpha}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\frac{1}{s} - \left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{s + \alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] + \left[-T_i L - \frac{\beta\alpha}{(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\left([\beta]\frac{1}{s} - [\beta]\left[\frac{s + \alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] - [T_i L(\alpha^2 + \omega_d{}^2) + \beta\alpha]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\left([\beta]\frac{1}{s} - [\beta]\left[\frac{s + \alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] - \beta\left[\frac{T_i L(\alpha^2 + \omega_d{}^2) + \beta\alpha}{\beta}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$\Omega(s) = \frac{\beta}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\left(\frac{1}{s} - \left[\frac{s + \alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] - \left[\frac{T_i L(\alpha^2 + \omega_d{}^2) + \beta\alpha}{\beta}\right]\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

$$\Omega(s) = \frac{\beta}{JL(\alpha^2 + \omega_d{}^2)}\left(\frac{1}{s} - \left[\frac{s + \alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right] - \left[\frac{T_i L(\alpha^2 + \omega_d{}^2) + \beta\alpha}{\beta\omega_d}\right]\left[\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d{}^2}\right]\right)$$

Aplicando “Transformada inversa de Laplace”:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{\Omega(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{JL(\alpha^2 + {\omega_d}^2)}\left(\frac{1}{s} - \left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + {\omega_d}^2}\right] - \left[\frac{T_i L(\alpha^2 + {\omega_d}^2) + \beta\alpha}{\beta\omega_d}\right]\left[\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + {\omega_d}^2}\right]\right)\right\}$$

$$\omega(t) = \frac{\beta}{JL(\alpha^2 + {\omega_d}^2)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_d t - \left[\frac{T_i L(\alpha^2 + {\omega_d}^2) + \beta\alpha}{\beta\omega_d}\right]\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{sen}\,\omega_d t\right)$$

$$\omega(t) = \frac{VK_T - T_i R}{JL(\alpha^2 + {\omega_d}^2)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_d t - \left[\frac{T_i L(\alpha^2 + {\omega_d}^2) + (VK_T - T_i R)\alpha}{(VK_T - T_i R)\omega_d}\right]\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{sen}\,\omega_d t\right)$$

$$\omega(t) = \frac{VK_T - T_i R}{JL(\alpha^2 + {\omega_d}^2)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_d t - \left[\frac{T_i L(\alpha^2 + {\omega_d}^2) + VK_T\alpha - T_i R\alpha}{VK_T\omega_d - T_i R\omega_d}\right]\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{sen}\,\omega_d t\right)\Bigg\| \; t \geq 0 \qquad (1.32)$$

La ecuación (1.32), representa la velocidad angular instantánea del rotor, considerando polos complejos conjugados, debida a un escalón de amplitud arbitraria.

1.3.2 Obtención de la señal de velocidad angular instantánea del rotor, con polos reales, debida a una señal escalón de amplitud arbitraria

Se sustituyen las expresiones (1.26) y (1.27) en la ecuación (1.31) para la expansión por fracciones parciales:

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{VK_T - T_i R - T_i sL}{\left[\left(\frac{K_E K_T + RB}{JL}\right) + \left(\frac{RJ + BL}{JL}\right)s + s^2\right]s}\right); \; VK_T - T_i R = \beta;$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{\beta - T_i sL}{[(s+p_1)(s+p_2)]s}\right) = \frac{1}{JL}\left[\frac{Q}{s} + \frac{W}{(s+p_1)} + \frac{Z}{(s+p_2)}\right]$$

$$\frac{1}{JL}\left[\frac{Q}{s} + \frac{W}{(s+p_1)} + \frac{Z}{(s+p_2)}\right] = \frac{1}{JL}\left[\frac{Q(s+p_1)(s+p_2) + Ws(s+p_2) + Zs(s+p_1)}{[(s+p_1)(s+p_2)]s}\right]$$

$$\frac{1}{JL}\left[\frac{Q(s+p_1)(s+p_2) + Ws(s+p_2) + Zs(s+p_1)}{[(s+p_1)(s+p_2)]s}\right] = \frac{1}{JL}\left[\frac{Q(s^2 + (p_1+p_2)s + p_1p_2) + Ws^2 + Wp_2 s + Zs^2 + Zp_1 s}{[(s+p_1)(s+p_2)]s}\right]$$

$$\frac{1}{JL}\left[\frac{Q(s^2 + (p_1+p_2)s + p_1p_2) + Ws^2 + Wp_2 s + Zs^2 + Zp_1 s}{[(s+p_1)(s+p_2)]s}\right] = \frac{1}{JL}\left[\frac{(Q+W+Z)s^2 + (Q(p_1+p_2) + Wp_2 + Zp_1)s + Qp_1p_2}{[(s+p_1)(s+p_2)]s}\right]$$

$$\frac{1}{JL}\left[\frac{(Q+W+Z)s^2 + (Q(p_1+p_2) + Wp_2 + Zp_1)s + Qp_1p_2}{[(s+p_1)(s+p_2)]s}\right] = \Omega(s) = \frac{1}{JL}\left(\frac{\beta - T_i sL}{[(s+p_1)(s+p_2)]s}\right);$$

$$Q + W + Z = 0;$$

$$Q(p_1 + p_2) + Wp_2 + Zp_1 = -T_iL;$$

$$Qp_1p_2 = \beta;$$

Despejando:

$$Q = \frac{\beta}{p_1p_2};$$

$$W = -Z - Q = -Z - \frac{\beta}{p_1p_2};$$

$$Q(p_1 + p_2) + Wp_2 + Zp_1 = \frac{\beta}{p_1p_2}(p_1 + p_2) + \left(-Z - \frac{\beta}{p_1p_2}\right)p_2 + Zp_1 = -T_iL$$

$$\frac{\beta}{p_1p_2}(p_1 + p_2) - Zp_2 - \frac{\beta p_2}{p_1p_2} + Zp_1 = -T_iL$$

$$\frac{\beta}{p_1p_2}(p_1 + p_2) - Zp_2 - \frac{\beta p_2}{p_1p_2} + Zp_1 = \frac{\beta(p_1 + p_2)}{p_1p_2} + Z(p_1 - p_2) - \frac{\beta p_2}{p_1p_2} = -T_iL$$

$$Z(p_1 - p_2) = -T_iL + \frac{\beta p_2}{p_1p_2} - \frac{\beta(p_1 + p_2)}{p_1p_2} = -T_iL + \frac{\beta p_2}{p_1p_2} - \frac{\beta}{p_2} - \frac{\beta p_2}{p_1p_2}$$

$$Z(p_1 - p_2) = -T_iL - \frac{\beta}{p_2}$$

$$Z = -\frac{T_iLp_2 + \beta}{p_2(p_1 - p_2)};$$

$$Z = -W - Q = -W - \frac{\beta}{p_1p_2};$$

$$Q(p_1 + p_2) + Wp_2 + Zp_1 = \frac{\beta}{p_1p_2}(p_1 + p_2) + Wp_2 + \left(-W - \frac{\beta}{p_1p_2}\right)p_1 = -T_iL$$

$$\frac{\beta}{p_1p_2}(p_1 + p_2) + Wp_2 - \frac{\beta p_1}{p_1p_2} - Wp_1 = -T_iL$$

$$\frac{\beta}{p_1p_2}(p_1 + p_2) + Wp_2 - \frac{\beta p_1}{p_1p_2} - Wp_1 = \frac{\beta(p_1 + p_2)}{p_1p_2} + W(p_2 - p_1) - \frac{\beta p_1}{p_1p_2} = -T_iL$$

$$W(p_2 - p_1) = -T_iL + \frac{\beta p_1}{p_1p_2} - \frac{\beta(p_1 + p_2)}{p_1p_2} = -T_iL + \frac{\beta p_1}{p_1p_2} - \frac{\beta}{p_1} - \frac{\beta p_1}{p_1p_2}$$

$$W(p_2 - p_1) = -T_i L - \frac{\beta}{p_1}$$

$$W = -\frac{T_i L p_1 + \beta}{p_1(p_2 - p_1)};$$

Sustituyendo:

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left[\frac{1}{JL}\left[\frac{Q}{s} + \frac{W}{(s+p_1)} + \frac{Z}{(s+p_2)}\right]\right] = \frac{1}{JL}\left[\left(\frac{\beta}{p_1 p_2}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{T_i L p_1 + \beta}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\frac{1}{(s+p_1)} - \left(\frac{T_i L p_2 + \beta}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\frac{1}{(s+p_2)}\right]$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{JL}\left[\left(\frac{\beta}{p_1 p_2}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{T_i L p_1 + \beta}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\frac{1}{(s+p_1)} - \left(\frac{T_i L p_2 + \beta}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\frac{1}{(s+p_2)}\right]$$

Aplicación de la “Transformada inversa de Laplace”:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{\Omega(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{JL}\left[\left(\frac{\beta}{p_1 p_2}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{T_i L p_1 + \beta}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\frac{1}{(s+p_1)} - \left(\frac{T_i L p_2 + \beta}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\frac{1}{(s+p_2)}\right]\right\};$$

$$\omega(t) = \frac{1}{JL}\left[\left(\frac{\beta}{p_1 p_2}\right) - \left(\frac{T_i L p_1 + \beta}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\mathrm{e}^{-p_1 t} - \left(\frac{T_i L p_2 + \beta}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\mathrm{e}^{-p_2 t}\right]$$

$$\omega(t) = \frac{1}{JL}\left[\left(\frac{VK_T - T_i R}{p_1 p_2}\right) - \left(\frac{T_i L p_1 + VK_T - T_i R}{p_1(p_2 - p_1)}\right)\mathrm{e}^{-p_1 t} - \left(\frac{T_i L p_2 + VK_T - T_i R}{p_2(p_1 - p_2)}\right)\mathrm{e}^{-p_2 t}\right] \quad t \geq 0 \tag{1.33}$$

La ecuación (1.33) representa la velocidad angular instantánea del rotor, considerando polos reales, debida a un escalón de amplitud arbitraria.

Son (1.25), (1.28), (1.32) y (1.33) las ecuaciones que serán determinantes para la obtención de los parámetros de cualquier motor de corriente directa (Tómense en cuenta las limitaciones y otras consideraciones antes expuestas). Su veracidad será comprobada en capítulos posteriores, en donde ciertos análisis en estado estacionario y transitorio, podrán comprobar que funcionan para propósitos del objetivo principal del método.