



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E  
INDUSTRIAL

## ANÁLISIS DINÁMICO Y EVALUACIÓN DE UN MECANISMO PARALELO 3PRRR

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**INGENIERO MECATRÓNICO**

PRESENTA:

**EDUARDO HIDALGO CABALLERO**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. LEOPOLDO RUÍZ HUERTA**



## **Agradecimientos**

A mis padres por su amor que han depositado en mí, por su apoyo incondicional para terminar mis estudios, por sus enseñanzas y consejos que me han forjado.

A mi hermano con quien he crecido y vivido durante mi niñez y adolescencia, etapas importantes con quien he compartido momentos de competencia y triunfo tanto académicas como deportivas que me han llevado a seguir adelante en momentos de adversidad. Es mi inspiración y le dedico este trabajo, que sin él mi nivel de competencia sería menor.

A mis amigos que forman parte del GMM con quienes he convivido durante mis labores del servicio social y mis actividades para la realización de la TESIS y este informe, por los gratos momentos que viví con ustedes, por sus consejos.

A mis amigos de la FI, de quienes he aprendido a lo largo de la carrera, con quienes he formado equipos para destacar en los proyectos, con quienes he crecido para formarnos como ingenieros, por sus consejos y sabiduría, por su amistad que nos ha marcado de por vida y por todos aquellos momentos de alegría.

Al Dr. Ricardo Yañez Valdez con quien estuve trabajando para el desarrollo de esta Tesis, por su apoyo y dedicación y por permitirme ser partícipe de un subtema de su Tesis de Doctorado.

Al Dr. Leopoldo Ruíz Huerta por su apoyo, confianza y paciencia para lograr terminar tanto la Tesis como este informe. Por permitirme formar parte de este gran equipo de trabajo y conocer el camino de la Investigación y Tecnología. Por su amistad y por compartir sus conocimientos en bicicletas y autos.

Al Dr. Alberto Caballero Ruíz por su apoyo, confianza y consejos en diversos temas. Por su amistad, por su alegría y paciencia. Por los agradables momentos en tiempos de convivencia fuera del laboratorio.

A mis sinodales por las correcciones, aportaciones y comentarios, con los cuáles este trabajo ha sido mejorado para su entrega final.

A la Universidad Nacional Autónoma de México quien me aceptó para formar parte la comunidad universitaria y de sus instalaciones para concluir mis estudios a pesar de mi indecisión inicial que por poco me llevan a perder un año de estudios. Estoy completamente orgulloso de ser puma y decir que estuve en la mejor Universidad de México y de Latinoamérica. Gracias por ofrecerme la oportunidad de estudiar en esta gran casa y cambiar mi filosofía en la manera de ver al mundo y mi país.

A la Facultad de Ingeniería y a todos mis profesores quienes me han donado su sabiduría, conocimientos y experiencias para formarme como ingeniero.

A todos aquellos que no he mencionado que han contribuido en cierto modo a mi desarrollo o me han encaminado a lograr mi meta.

# ÍNDICE

<b>I. Introducción .....</b>	<b>6</b>
<b>II. Antecedentes .....</b>	<b>8</b>
<b>1. Mecanismos paralelos, una vista al pasado, presente y futuro .....</b>	<b>8</b>
1.1 Historia .....	8
1.2 Aplicaciones de los mecanismos paralelos .....	13
1.3 Mecanismos paralelos en la manufactura .....	14
<b>2. Clasificación de los mecanismos con base en su geometría y su comparación.....</b>	<b>17</b>
2.1 Arquitectura serial.....	17
2.2 Arquitectura paralela.....	17
2.3 Comparación entre ambas configuraciones.....	18
<b>III. Marco teórico.....</b>	<b>19</b>
<b>3. Análisis de mecanismos paralelos .....</b>	<b>19</b>
3.1 Características y propiedades .....	19
3.2 Representación de mecanismos paralelos.....	20
3.3 Métodos para resolver el problema cinemático de posición de los mecanismos paralelos .....	23
3.4 Estudio del método de Denavit-Hartenberg para el análisis cinemático de posición .....	24
3.5 Métodos para resolver el problema dinámico de los mecanismos paralelos.....	31
3.6 Estudio del método de Newton-Euler para el análisis dinámico .....	32
<b>4. Mecanismo con configuración paralela 3-PRRR .....</b>	<b>39</b>
4.1 Descripción del mecanismo paralelo 3-PRRR.....	39
4.2 Modos de trabajo .....	40
4.3 Especificaciones del mecanismo paralelo 3-PRRR .....	41
<b>5. Planteamiento del problema.....</b>	<b>42</b>
5.1 Objetivos .....	43
<b>IV. Análisis del mecanismo. ....</b>	<b>44</b>
<b>6. Análisis de posición. ....</b>	<b>44</b>
<b>7. Análisis cinemático.....</b>	<b>53</b>
7.1 Problema cinemático directo de velocidad.....	53

7.2 Problema cinemático directo de aceleración.....	61
<b>8. Análisis estático.....</b>	<b>65</b>
8.1 Descripción del método .....	65
8.2 Análisis del mecanismo paralelo 3-PRRR .....	68
<b>9. Análisis dinámico.....</b>	<b>75</b>
9.1 Análisis cadena Z .....	75
9.2 Análisis cadena Y .....	81
9.3 Análisis cadena X .....	85
9.4 Solución global .....	90
<b>V. Pruebas y resultados .....</b>	<b>97</b>
<b>VI. Conclusiones .....</b>	<b>99</b>
<b>Tabla de ilustraciones.....</b>	<b>102</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>104</b>



## **I. Introducción**

En la última década se ha presenciado la miniaturización de componentes electrónicos y mecánicos con el fin de hacer sistemas más precisos y rápidos. Pero para la fabricación de estos componentes, ha surgido la necesidad de disponer de las máquinas-herramienta adecuadas.

Hasta la fecha, la mayoría de las máquinas de manufactura y ensamble son mucho más grandes que las piezas a manipular o que el espacio de trabajo, lo cual implica un mayor consumo de energía.

Para resolver esta situación, se ha trabajado en el tema de micromáquinas-herramienta para micromanufactura. Pero, ha sido necesario probar y evaluar diferentes sistemas mecánicos, tanto de estructura serial como paralela, para determinar cuál es el apropiado para la aplicación en cuanto a costo, simplicidad y precisión. En muchos casos se han implementado sistemas híbridos.

Dado el desarrollo de máquinas-herramienta es una de las líneas de investigación del Grupo de Micromecánica y Mecatrónica en el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), este trabajo se centra en realizar el análisis dinámico de un mecanismo paralelo 3-PRRR.

Este mecanismo surgió como propuesta de una tesis doctoral, a fin de obtener las fuerzas que actúan en los elementos del mecanismo y en las juntas, que permitirá diseñar y seleccionar las partes del mecanismo como lo son los vínculos o eslabones, motores, rodamientos, ejes, etc. y, de esta manera, llevar a cabo la construcción del mecanismo.

La tesis se encuentra estructurada en 6 capítulos.

Antes de profundizar en el tema de investigación se inicia con los "Antecedentes" que al tratarse de mecanismos paralelos resulta interesante conocer cómo es que se han ido desarrollando a través de la

historia, el impacto que han tenido en diversas aplicaciones y la comparación con respecto a los mecanismos con arquitectura serial.

En el capítulo 3, el "Marco Teórico", se aborda acerca de los métodos que se llevan a cabo en esta tesis para realizar los análisis correspondientes del mecanismo paralelo 3-PRRR. También se justifica la elección del tema y se describe el mecanismo con configuración paralela 3-PRRR, el modo de trabajo que se utilizará y sus especificaciones tanto cualitativas como cuantitativas. Además se describe el objetivo y las metas de este proyecto.

En seguida, en el capítulo 4, se lleva a cabo el análisis de posición, cinemático, estático y dinámico, en los cuáles se obtienen resultados cuantitativos del comportamiento del mecanismo para una trayectoria dada.

Para finalizar, en los últimos capítulos se mencionan las pruebas realizadas, los resultados obtenidos, las conclusiones del proyecto y las propuestas de lo que debe continuar para aterrizar este proyecto y/o mejorarlo.



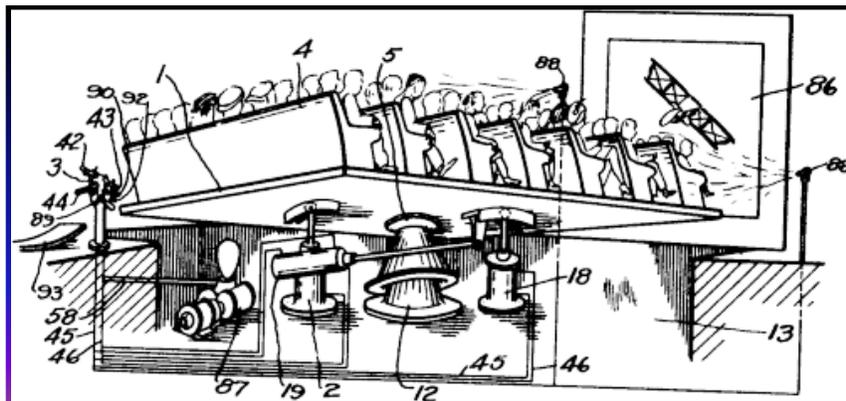
## II. Antecedentes

### 1. Mecanismos paralelos, una vista al pasado, presente y futuro

Los mecanismos paralelos han sido de gran interés principalmente por las ventajas que ofrece en cuanto a rendimiento dinámico y rigidez estructural.

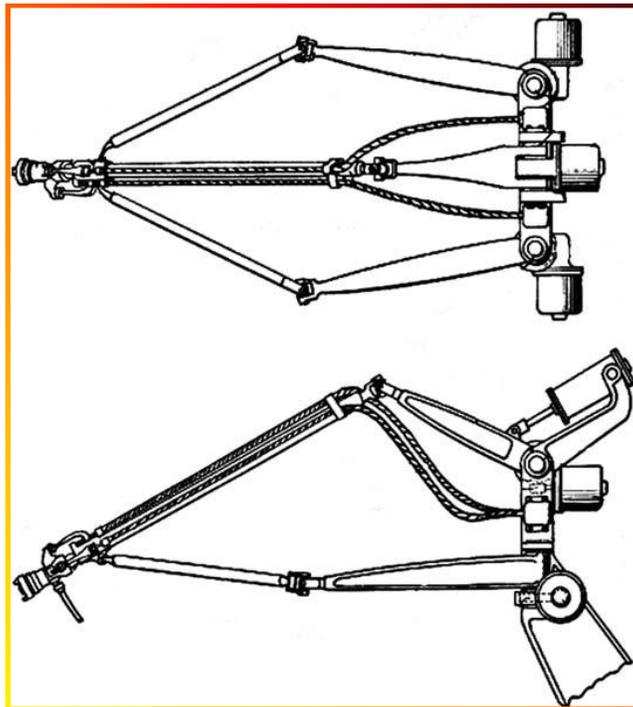
#### 1.1 Historia

Los primeros trabajos sobre articulaciones octaédricas datan de 1897, pero la primera verdadera invención de un robot paralelo de la que se tiene conocimiento fue realizada por J. E. Gwinnett. Gwinnett, quien diseñó una plataforma de movimiento para la industria del entretenimiento. En ella estaban colocados los asientos de un teatro y las variantes inclinaciones, realizados por un mecanismo paralelo con juntas esféricas, pretendían dar a los espectadores una apariencia más real del espectáculo. Esta plataforma se patentó en 1931 pero no llegó a construirse, tal vez porque la industria no estaba lista para la complejidad de la invención.



Imágen1 Mecanismo espacial paralelo, 1931. (Bonev, 2000)

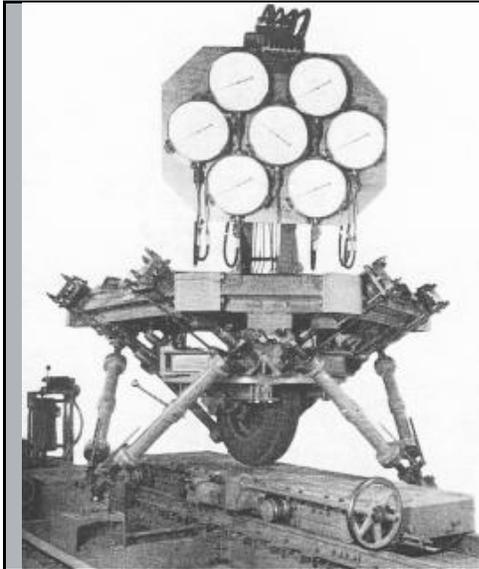
Años después de la aparición del término robot, Willard L. V. Pollard diseñó un robot paralelo dedicado para la pintura por spray. Este robot de 5 grados de libertad, estaba constituido por 3 cadenas cinemáticas: los brazos se unían a la base por actuadores giratorios y la unión entre los dos eslabones de una cadena cinemática era por medio de juntas universales. Los tres motores determinaban la posición de la herramienta, mientras que otros dos motores controlaban la orientación vía cables flexibles. A pesar de la excelente idea, el robot no llegó a construirse y solo se patentó en 1942 con el diseño realizado por su hijo Willard L. V. Pollard considerándolo como el primer robot paralelo industrial.



Imágen2 Primer robot paralelo espacial industrial patentado en 1942. (Zabalza, y otros, 2007)

En 1947 el Dr. Eric Gough, ingeniero automotriz distinguido en DunlopRubber Co., Birmingham, Inglaterra, construyó el primer hexápodo octaédrico como máquina universal para realizar pruebas dinámicas en los neumáticos bajo cargas combinadas y así responder a los problemas en los aterrizajes de aviones. Este mecanismo paralelo contaba con una base móvil octaédrica, 6 patas de longitud variable, las cuales en uno de sus extremos están unidas a tierra mediante juntas universales o esféricas mientras que en el otro se conectaban a la base móvil por juntas esféricas. Antes de este invento ya eran conocidas unas mesas (MAST, Multi-Axis SimulationTable) accionadas por seis actuadores lineales, tres verticales y tres horizontales.

La máquina de Gough entró en operación en 1954.



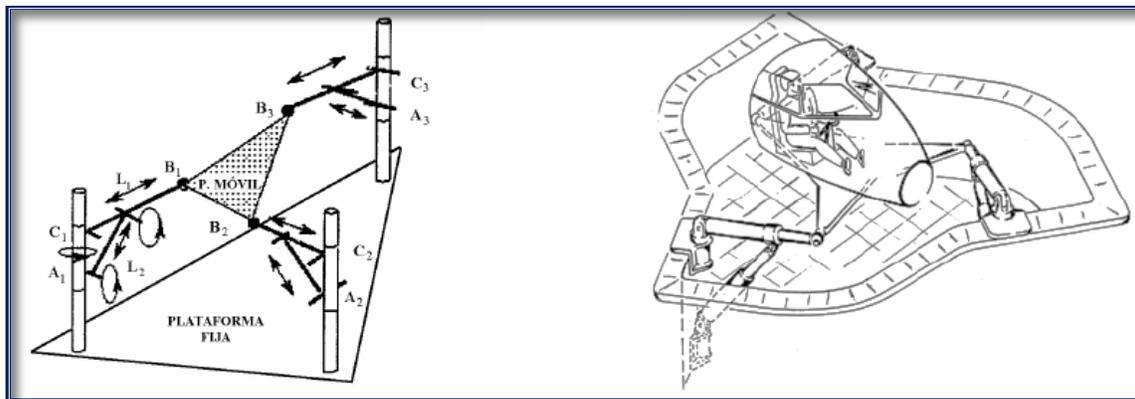
Imágen3 Plataforma móvil de Gough 1947. (Zabalza, y otros, 2007)



Imágen4 Mesa MAST. (A. Bonev)

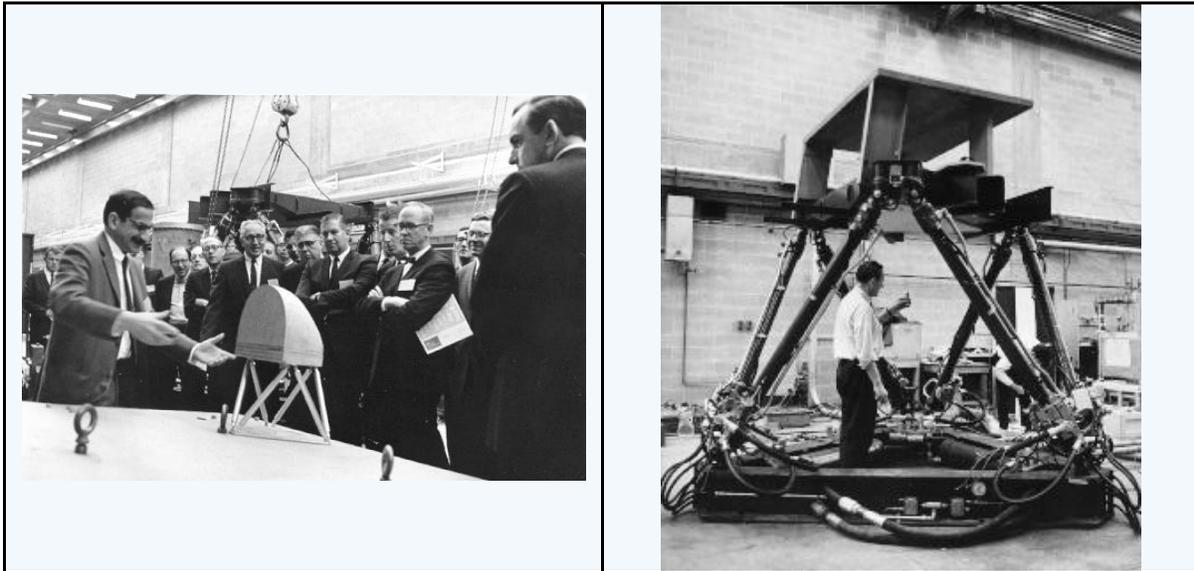
En 1965, en el Instituto de Ingenieros Mecánicos de la Gran Bretaña, Stewart da un reporte técnico de una plataforma de movimiento de 6 grados de libertad diseñada como simulador de vuelo. Sin embargo, este mecanismo levanto controversias debido a su semejanza con el diseñado por Gough.

El trabajo de Stewart tuvo un gran impacto en el futuro desarrollo de mecanismos paralelos y hubo muchas propuestas para el uso del robot paralelo hexápodo a futuro, muchas de las cuales acertaron. Y aunque Stewart no fue el pionero de la industria de simuladores de vuelo, los hexápodos octaédricos son nombrados como plataformas de Stewart debido al impacto de su publicación.



Imágen5 Plataforma de Stewart 1965. (Zabalza, y otros, 2007)

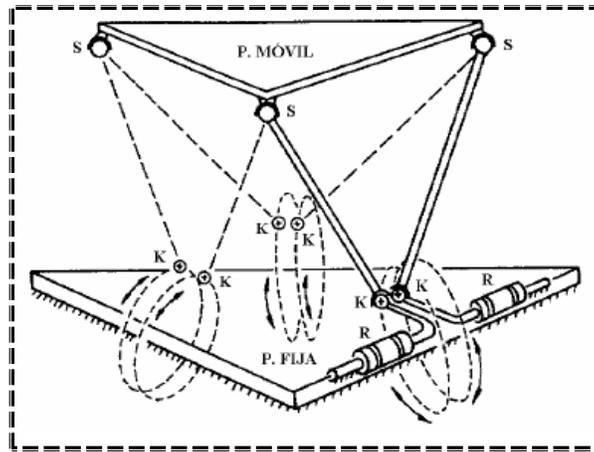
En 1962, Klaus Cappel, en respuesta a una demanda de su trabajo en los Laboratorios de Investigación del Instituto Franklin para mejorar la rigidez de una mesa de simulación multi-ejes con 7 cilindros, conociendo el trabajo de Gough y buscando eliminar redundancias, creó el hexápodo octaédrico. En 1967, Cappel patenta su invención para ser utilizada como simulador de vuelo e inmediatamente la industria adopta su configuración y es por ello que se considera el pionero en esta área al llegar a la industria y el tercer precursor de la historia que le dieron un nuevo rumbo a la robótica paralela para futuras invenciones y aplicaciones.



Imágen6 Primer simulador de vuelo construido basado en un hexápodo octaédrico. (Bonev, 2000)

Desde 1970's los simuladores de vuelo basados en mecanismos paralelos fueron puestos en práctica y distintas compañías entraron al mercado respetando la patente de Cappel. En ese periodo, en el Instituto de Franklin se construyeron otros dos simuladores de vuelo. El primero fue un simulador de helicóptero y el otro un simulador de manejo.

Pasaron 15 años para que en 1983 Kenneth Hunt publicara un artículo que propone distintas arquitecturas paralelas utilizadas hoy en la industria. Inmediatamente, muchas compañías se lanzaron a la producción de robots paralelos. Una arquitectura que propuso fue un robot paralelo de 6 grados de libertad que consistía en 6 cadenas con uniones revoluta-universal-esférica.



Imágen7 Mecanismo paralelo 6-RUS por Hunt 1983. (Zabalza, y otros, 2007)

Actualmente, los mecanismos paralelos son aplicados en simuladores de vuelo, micro robots, aparatos médicos, y más recientemente en el desarrollo de máquinas herramientas de alta precisión por diversas compañías como Giddings & Lewis, Ingersoll, Hexel, Geodetic y Toyoda, entre otras.

La siguiente tabla muestra un resumen general de las aportaciones relevantes para la introducción de las arquitecturas paralelas a la industria.

Tabla 1 Historia breve de la robótica paralela

Fecha	Autor	Aportacion
1931	James E. Gwinnett	Patente: plataforma de movimiento destinada al entretenimiento basado en un mecanismo paralelo esférico.
1942	Willard L.G. Pollard Jr.	Patente: robot paralelo industrial como máquina de pintar.
1950's	Eric Gough	Primer hexápodo octaédrico construido en 1954 para prueba de neumáticos.
1965	Stewart	Documento en donde se describe una plataforma móvil de 6 gdl para su uso como simulador de vuelo
1960's	Klaus Cappel	Patente: Primer simulador de vuelo basado en un hexápodo octaédrico
1978	Hunt	Sugirió estudiar a los mecanismos paralelos para aplicaciones robóticas como manipuladores.
1979	McCallion y Pham	Proponen utilizar la plataforma de Stewart como manipulador paralelo para una célula de ensamblaje.

## 1.2 Aplicaciones de los mecanismos paralelos

En los últimos años se han utilizado los mecanismos paralelos para aplicaciones médicas con el fin de orientar microscopios o para cirugía tele operada. En la industria se han aplicado como máquinas-herramienta y como manipuladores para ensamblaje de componentes o para posicionamiento de piezas y utillajes. También se tienen simuladores de vuelo y de conducción de vehículos. Otras utilidades son para orientar antenas, telescopios, cámaras, etc.

A continuación se muestran los robots paralelos que han resaltado en la industria o en otras áreas:

		
<p><b>Robot Tricept(Millennium, 2009)</b></p>	<p>Robot hexapodo(Millennium, 2009)</p>	<p>Robot Delta(Millennium, 2009)</p>
		
<p><b>Plataforma Stewart-Gough</b></p>	<p>Nano manipulador(Kong, y otros, 2007)</p>	<p>Tripteron(A. Bonev)</p>
		

Quattro (tecnología ADEPT)	Falcon- robot delta (Joystick) (A. Bonev)	Arquitectura paralela 5gdl (para interfaz háptica) (A. Bonev)
		
<p><b>Manipulador planar 5R</b></p>	<p>Robot médico (Kong, y otros, 2007)</p>	<p>Centro de maquinado</p>

La aplicación que se ha dado a las distintas configuraciones de robots paralelos ha sido acorde a una selección en cuanto a características específicas como precisión, capacidad de carga y velocidad.

### 1.3 Mecanismos paralelos en la manufactura

Siendo una característica del proceso de maquinado actual, el manejo de velocidades altas, se ha incrementado la búsqueda del desarrollo de máquinas con alto rendimiento dinámico, mejoramiento en la rigidez y reducción de la masa móvil. Como se ha visto que los mecanismos paralelos ofrecen las ventajas anteriores, se ha optado trabajar con ellos. (Zhang., 2009)

Las máquinas que han adquirido esta tecnología se les ha denominado máquinas cinemáticas paralelas (PKM-parallelkinematic machines).

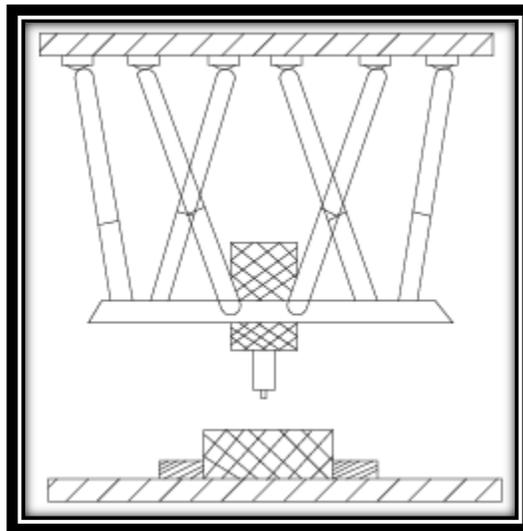
Las máquinas herramientas modernas basadas en cinemática paralela ya comienzan a clasificarse de modo independiente y uno de los objetivos es mejorar los procesos de fabricación de diversos sectores industriales. (2004)

La primera PKM que se desarrolló fue el Tricept por Karl Erik Neumann en 1994 que al entrar en la industria mejoró el trabajo.



Imágen8 Robot Tricept. (Millennium, 2009)

La máquina herramienta hexápodo es una de las tantas que han sido ampliamente estudiadas. Este mecanismo ofrece alta rigidez, reducida masa móvil, alta aceleración y precisión y simplicidad mecánica relativa a las existentes máquinas herramientas convencionales. (Zhang., 2009)



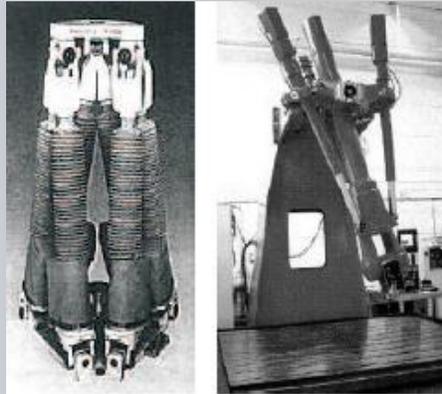
Imágen9 Centro de maquinado, Hexápodo. (Zhang., 2009)

Gracias a su versatilidad en el posicionamiento de herramientas, los mecanismos paralelos han sido de gran interés en los centros de mecanizado, tal es el caso del robot Tornado de Hexel.



Imágen10 Centro de mecanizado Tornado de la compañíaHexel (Aracil, 2006)

Para la manipulación de grandes cargas está el robot paralelo desarrollado por Fanuc o ABB.



Imágen11 Robots Fanuc F100i y ABB 940(Aracil, 2006)

Para el ensamble de precisión de pequeños componentes se ha usado mecanismos paralelos como los que se muestran a continuación

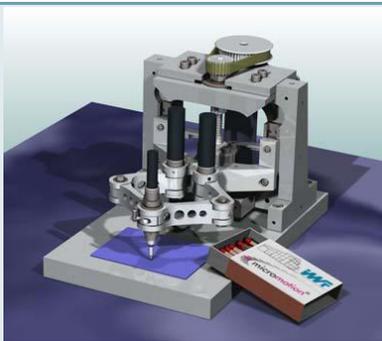


Ilustración 12 Micro scara híbrido. (Arne Burisch)

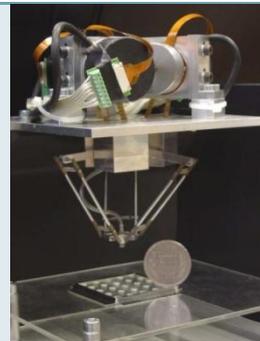


Ilustración 13 Micro robot Delta para manipulación. (Arne Burisch)

## 2. Clasificación de los mecanismos con base en su geometría y su comparación.

Los mecanismos se clasifican en cuanto a su topología estructural en seriales, paralelos e híbridos. (Tsai, 1999), (Zhang., 2009)

### 2.1 Arquitectura serial.

Se hace llamar mecanismo serial si su estructura cinemática forma una cadena de lazo abierto.

En general, un mecanismo serial de  $n$  grados de libertad consiste de un eslabón base y  $n$  eslabones móviles conectados en serie por  $n$  juntas sin formar un lazo cerrado. El movimiento relativo asociado con cada junta puede ser controlado por un actuador tal que el efector final pueda ser posicionado en cualquier punto de su espacio de trabajo.



Imágen14Robot serial tipo Scara

### 2.2 Arquitectura paralela.

Un mecanismo es paralelo si está constituido por una o más cadenas de lazo cerrado. Esto significa que el efector final está conectado por al menos dos cadenas cinemáticas independientes a la base, donde una junta en la cadena está actuada mientras que las otras son pasivas.

Típicamente el número de miembros o cadenas cinemáticas corresponde al número de grados de libertad.

La estructura cinemática paralela permite al mecanismo ser controlado por actuadores en o cerca de la base. Entonces, dado que el mecanismo no requiere cargar los actuadores, a diferencia de los mecanismos seriales, es posible diseñar los eslabones más ligeros.



Imágen15Robot paralelo planar 3RRR (3dof)()

### **2.3 Comparación entre ambas configuraciones**

Los mecanismo seriales, al ser de lazo abierto, requieren de alta rigidez en su estructura para garantizar una determinada precisión de posicionamiento, mientras que la ventaja fundamental de los mecanismos con configuración paralela es la presencia de la alta rigidez en su estructura, lo que conlleva a que exista la posibilidad de manejar altas velocidades de operación, pero con la desventaja de su reducido espacio de trabajo. (Siliciano, y otros, 2009)

Este hecho se debe a que, en el caso serial, cada uno de los miembros tiene que soportar el peso de los siguientes elementos incluyendo la carga. Por lo tanto, ellos están sujetos a grandes torques de flexión lo que implica que deben ser rígidos y, entonces, se vuelven más pesados. (Merlet, 2006)

Algunos parámetros que influyen en la precisión de la posición son las deformaciones ocasionadas por flexión y de los errores provenientes de los sensores del mecanismo serial. Un pequeño error en el primer miembro se ve magnificado en el efector final.

Otra desventaja de los mecanismos seriales sucede cuando se requiere trabajar a altas velocidades donde, debido a la considerable masa de sus partes móviles, el mecanismo experimentará momentos de inercia, fuerzas centrífugas y de Coriolis lo que hará más complejo el control del robot.



## III. Marco teórico

### 3. Análisis de mecanismos paralelos

#### 3.1 Características y propiedades

**Espacio de trabajo:** Representa el volumen encerrado por las superficies que determinan los puntos a los que puede acceder el mecanismo con su estructura totalmente extendida. (W. Spong)

**Accesibilidad:** Facilidad o dificultad que tiene el mecanismo para llevar el órgano terminal a un determinado punto específico del área de trabajo con una orientación requerida. (W. Spong)

**Estabilidad:** Ausencia de oscilación en el movimiento de la herramienta. (W. Spong)

**Resolución espacial:** Especifica el más pequeño incremento de movimiento en el cual el sistema puede dividir el espacio de trabajo. (W. Spong)

**Precisión:** Capacidad del sistema para regresar la punta de la herramienta a un punto predeterminado en el espacio. (W. Spong)

**Repetibilidad:** Capacidad del mecanismo para situarse de nuevo sobre el mismo punto que había sido indicado previamente. (W. Spong)

### 3.2 Representación de mecanismos paralelos.

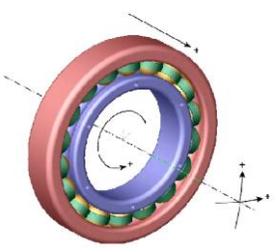
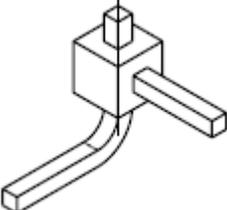
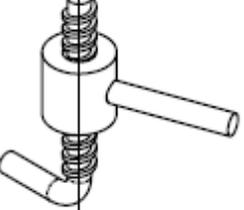
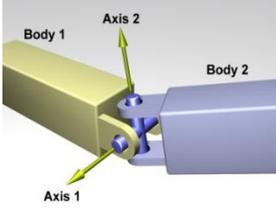
Un mecanismo paralelo (PM) usualmente necesita satisfacer ciertas condiciones geométricas dentro del mismo miembro o entre los diferentes miembros. En un PM los miembros que deben satisfacer ciertas condiciones geométricas pueden ser divididos dentro de uno o más grupos miembro. Un grupo miembro es definido como el conjunto máximo de miembros en los cuales todos los miembros deben satisfacer ciertas condiciones geométricas ambas dentro del mismo miembro y entre todos los miembros dentro del mismo conjunto. (Kong, y otros, 2007)

#### **Representación de uniones**

Las uniones cinemáticas usadas en un mecanismo paralelo incluyen (Kong, et al., 2007):

- a) Uniones revolutas (R).
- b) Uniones prismáticas (P).
- c) Uniones helicoidales (H).
- d) Uniones universales (U).
- e) Uniones cilíndricas (C).
- f) Uniones esféricas (S).
- g) Uniones planares (E).

Como la unión universal puede tomarse como una combinación de dos juntas revolutas con ejes ortogonales e intersecados, y la junta esférica resulta de una combinación de tres juntas revoluta con ejes concurrentes, en la síntesis de los tipos de mecanismos paralelos, se consideran principalmente los PMs que están compuestos de articulaciones R y P.

			
<b>Junta revoluta (R)</b>	Junta prismática (P)	Junta helicoidal (H)	Junta Universal (U)

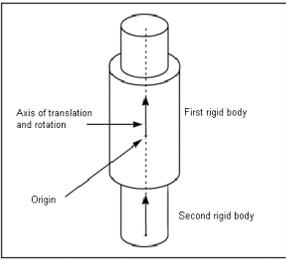
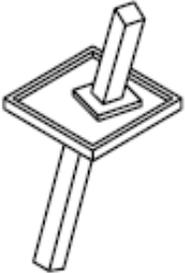
			
<p><b>Junta cilíndrica (C)</b></p>	<p>Junta esférica (S)</p>	<p>Junta Planar (E)</p>	

Tabla 2 Representación de uniones. (Kong, y otros, 2007)

C	Unión cilíndrica
H	Unión helicoidal
P	Unión prismática
R	Unión revoluta
$\acute{R}$	Junta revoluta con ejes paralelos dentro de un grupo de vínculos.
$\grave{R}$	Junta revoluta con ejes paralelos dentro de un grupo de vínculos.
$\hat{R}$	Junta revoluta con ejes concurrentes dentro de un grupo de vínculos.
$\hat{\hat{R}}$	Junta revoluta con ejes concurrentes dentro de un grupo de vínculos.
S	Unión esférica
U	Unión universal

### **Representación de miembros**

Un miembro de PM se representa por un conjunto de caracteres que simboliza los tipos de articulaciones que inician van desde la base a la plataforma móvil. Por ejemplo la cadena cinemática 'RRRRR' está compuesta por 5 uniones de tipo revoluta, donde los ejes de las dos primeras uniones son paralelos entre sí y los ejes de las últimas 3 articulaciones son también paralelos entre sí. En la figura anexa se muestra lo anterior. En el inciso b la primera junta está actuada. (Kong, et al., 2007)

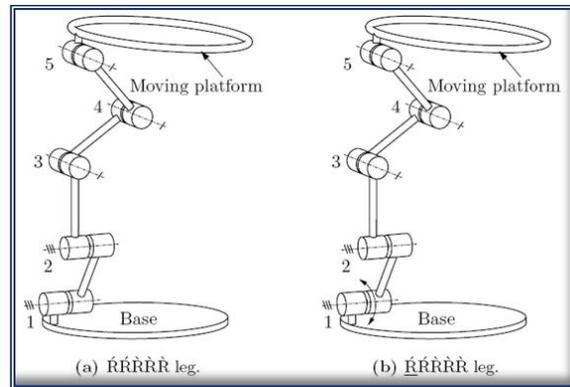


Imagen16 Representación de una cadena cinemática. (Kong, y otros, 2007)

### Representación de un mecanismo paralelo

Una cadena paralela cinemática (PKC) o mecanismo paralelo (PM) es representado por los tipos de sus vínculos conectados por “-” o “\_”. Los tipos de vínculos dentro del mismo grupo son normalmente conectados entre sí por “-” y por el contrario los de diferente grupo son conectados entre sí por “\_”. Los vínculos que no están sujetos a una restricción geométrica son también conectados a algún otro por “-”. Cuando  $n$  vínculos son del mismo tipo, los  $n$  vínculos son representados por el tipo de vínculos precedidos de “n-”. (Kong, et al., 2007)

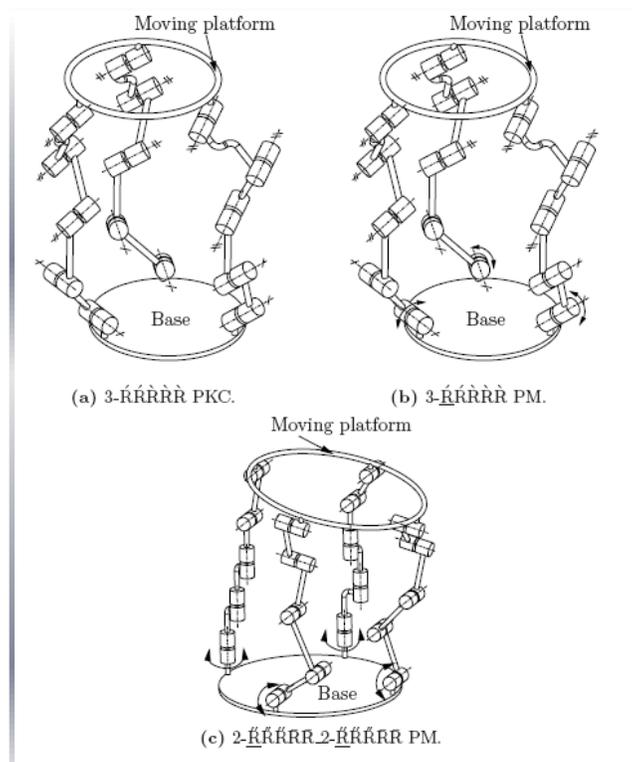


Imagen17 Representación de mecanismos paralelos. (Kong, y otros, 2007)

### **3.3 Métodos para resolver el problema cinemático de posición de los mecanismos paralelos**

Para determinar la posición y orientación del mecanismo se tienen básicamente dos caminos:

#### **Solución analítica**

Si se considera al mecanismo paralelo como un conjunto de cadenas de lazo cerrado que van desde la base hasta la plataforma móvil, se puede plantear un sistema de ecuaciones en función del análisis de posición y orientación de cada una de las cadenas y resolverlas simultáneamente con aproximaciones numéricas. Sin embargo este método solo es aplicable si las cadenas no comparten una variable de la junta actuada. (Merlet, 2006)

Lo interesante de este método es que la solución se puede automatizar y que además se obtiene la descripción de todas las juntas incluyendo las pasivas.

Para resolver la posición y orientación del mecanismo existen 3 básicos y sistemáticos métodos. El primero y más popular es el método matricial de Denavit-Hartenberg. La matriz  $4 \times 4$  o la transformación homogénea es utilizada para representar las transformaciones espaciales de vectores puntuales, en robótica se usa para describir un sistema coordinado con respecto a otro.

Pero existen métodos alternativos para representar las transformaciones del cuerpo rígido basados sobre conceptos introducidos por los matemáticos y físicos tales como la teoría tornillo (screwtheory), algebra de Lie y algebra de Epsilon. La transformación de un marco de referencia con respecto a otro puede ser representada por un desplazamiento del tornillo, la cual es una traslación alrededor de un eje con un ángulo de rotación sobre el mismo eje.

La ventaja de usar la notación de Denavit-Hartenberg es la universalidad de su algoritmo en la obtención de la ecuación cinemática de un enlace del mecanismo.

#### **Método Geométrico**

El análisis se obtiene a partir de relaciones geométricas y trigonométricas del mecanismo por lo que se requiere amplio conocimiento de su configuración. La idea es plantear una ecuación vectorial del lazo para

cada miembro eliminando las variables de las juntas pasivas dentro de estas ecuaciones.

Este método es el más apropiado para el análisis de varios mecanismos paralelos debido a su directa interpretación y simplicidad con respecto a otros métodos.

### **3.4 Estudio del método de Denavit-Hartenberg para el análisis cinemático de posición**

En general un mecanismo serial está formado por una base fija y por  $n$  vínculos conectados en serie por  $n$  juntas sin formar un lazo cerrado.

Para describir la geometría de los vínculos, iniciando desde la base, se enumeran los vínculos desde 0 a  $n$  y las juntas de 1 a  $n$ . El segmento 1 está conectado a la base por la junta 1, el segmento 2 está conectado al vínculo 1 por la junta 2 y así sucesivamente. Por lo tanto, todos los eslabones tienen 2 juntas a excepción de la base inmóvil y el órgano terminal. (Tsai, 1999)

#### **3.4.1 Convención de DenavitHartenberg:**

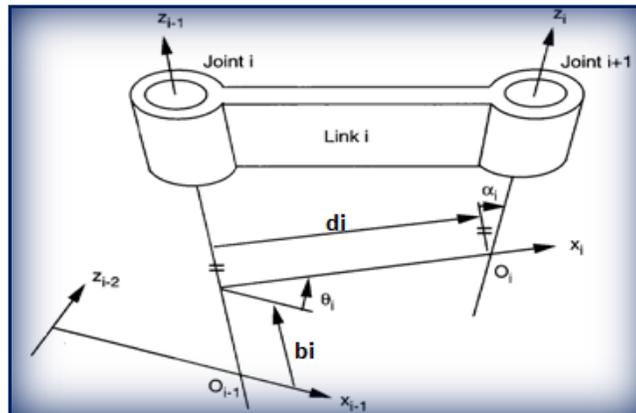
Para relacionar la cinemática de los componentes del mecanismo, se adjunta un sistema coordenado local  $S_i$  a cada vínculo  $i$  en la junta  $i+1$ . A excepción de la base fija y el efector final, el sistema coordenado cartesiano  $S_i$  se adjunta de acuerdo a las siguientes reglas (Tsai, 1999):

- ◆ Para  $i=0$  a  $n-1$ , alinear el eje  $z$  sobre el eje de la junta  $(i+1)$ . La dirección positiva de rotación o traslación puede ser elegida arbitrariamente.
- ◆ Situar el origen del sistema de la base  $\{S_0\}$  en cualquier punto del eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$   $y_0$  se sitúan de modo que formen un sistema dextrógiro con  $z_0$ .
- ◆ Para  $i=1$  a  $n-1$ , posicionar el sistema  $\{S_i\}$ .
- ◆ El eje  $x_i$  es la común perpendicular a los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , apuntando desde el eje  $z_{i-1}$  hacia el eje  $z_i$ . En el caso de que los ejes se intersecten, se asigna el eje  $x_i$  perpendicular al plano formado por los dos ejes  $z$  en la dirección de  $z_{i-1} \times z_i$ .
- ◆ El eje  $y_i$  es determinado por la regla de la mano derecha,  $y_i = z_i \times x_i$ .

- ◆ Situar el sistema  $\{S_n\}$  en el extremo del robot de modo que  $z_n$  coincida con la dirección de  $z_{n-1}$  y  $x_n$  sea normal a  $z_{n-1}$  y  $z_n$ .

Finalmente, los parámetros que describen la geometría del mecanismo son:

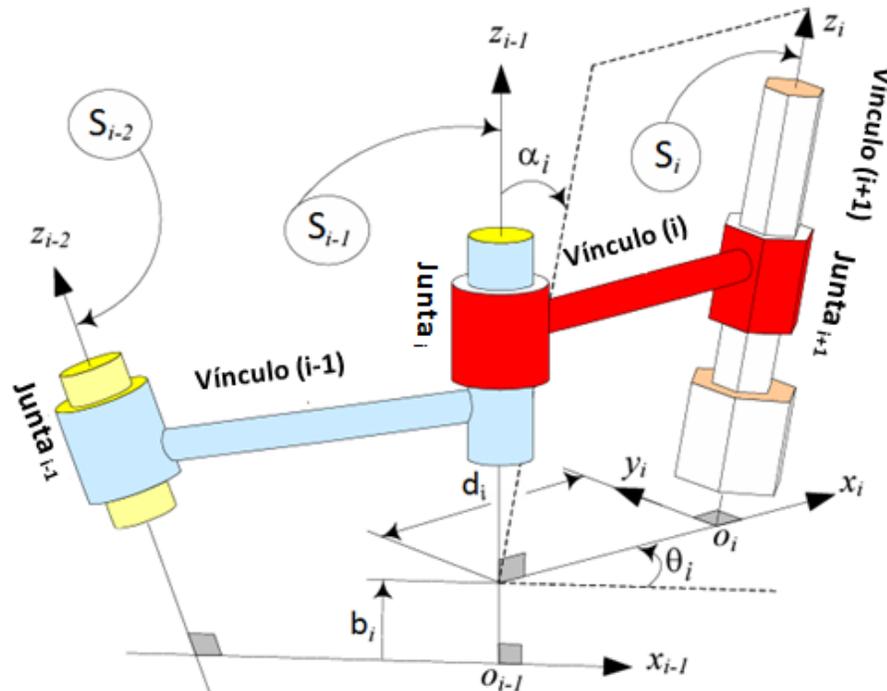
- **Longitud del vínculo,  $d_i$ :** distancia a lo largo del eje  $x_i$  que va desde la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$  hasta el origen del sistema  $i$ -ésimo para articulaciones giratorias. Para articulaciones prismáticas,  $d_i$  representa la distancia más corta entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .
- **Distancia de articulación,  $b_i$ :** distancia entre los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$  a lo largo del eje  $z_{i-1}$ . Va desde el origen del sistema  $(i-1)$ -ésimo hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$ . En articulaciones prismáticas representa un parámetro variable.
- **Torsión del vínculo,  $\alpha_i$ :** ángulo que se requiere rotar el eje  $z_{i-1}$  sobre el eje positivo  $x_i$  para alinearlo con el eje  $z_i$ , en acorde a la regla de la mano derecha.
- **Ángulo de articulación,  $\theta_i$ :** ángulo de giro que se requiere para alinear al eje  $x_{i-1}$  con el eje  $x_i$  con respecto al eje positivo  $z_{i-1}$  en acorde con la regla de la mano derecha. En articulaciones revolutas se trata de un parámetro variable.



Imágen18 Eslabón aislado donde se muestran los parámetros D-H. (Tsai, 1999)

Los parámetros  $\theta_i$  y  $b_i$  son nombrados parámetros de la junta dado que definen la posición relativa de dos vínculos adjuntos conectados en la junta  $i$ . Y dependiendo de si la articulación es revoluta o prismática una será variable mientras la otra es constante.

Los parámetros  $\alpha_i$  y  $d_i$  son llamados parámetros del vínculo dado que definen las posiciones relativas de las juntas  $i$  e  $i+1$  en los dos extremos del vínculo  $i$ . (N. Jazar, 2010)



Imágen19 Parámetros DH (N. Jazar, 2010)

### 3.4.2 Análisis cinemático directo de posición

Para el análisis cinemático directo se emplean las matrices de transformación homogénea de Denavit-Hartenberg.

Utilizando las transformaciones homogéneas, es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos eslabones que componen el robot. La matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos vínculos consecutivos del robot se denomina matriz  ${}^{i-1}T_i$ . Así, por ejemplo:  ${}^0T_1$  representa la posición y orientación del sistema local asociado al primer vínculo con respecto al sistema coordenado asociado a la base. A su vez una matriz de la forma  ${}^0T_n$  (se le suele denominar  $T$ ), que resulta del producto matricial:  $\prod_{i=1}^n {}^{i-1}T_i$ , representa de forma total o parcial la cadena cinemática que forma el mecanismo. (Barrientos, y otros, 2007)

De acuerdo a la representación de D-H, escogiendo adecuadamente los sistemas coordenados asociados a cada vínculo, será posible pasar de uno al siguiente mediante 4 transformaciones básicas (Tsai, 1999):

1) Rotación alrededor de  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ :

$$R(z_{i-1}, \theta_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Traslación a lo largo de  $z_{i-1}$  una distancia  $b_i$ :

$$P(z_{i-1}, b_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Traslación a lo largo de  $x_{i-1}$  una distancia  $d_i$ :

$$P(x_{i-1}, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Rotación alrededor de  $x_{i-1}$  un ángulo  $\alpha_i$ :

$$R(x_{i-1}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, la matriz  ${}^{i-1}T_i$  sólo es válida si las transformaciones se realizan en el siguiente orden:

$${}^{i-1}T_i = P(z, d_i)R(z, \theta_i)P(x, d_i)R(x, \alpha_i) \quad (III-1)$$

Resultando:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & d_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & d_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-2})$$

Esta matriz proporciona la siguiente información:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} R_{3x3} & P_{3x3} \\ f_{1x3} & W_{1x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

En donde se ha considerado la perspectiva como nula y el escalado global unitario al no ser aplicables en el análisis del mecanismo.

Las matrices de gran interés son:

$$\text{Rotación: } {}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} \quad (\text{III-3})$$

$$\text{Traslación: } {}^{i-1}P_i = \begin{bmatrix} d_i c\theta_i \\ d_i s\theta_i \\ b_i \end{bmatrix} \quad (\text{III-4})$$

${}^{i-1}R_i$  define la orientación del sistema  $i$  con respecto al sistema  $i-1$ .

${}^{i-1}P_i$  es el vector de translación que une los orígenes de los sistemas  $i-1$  e  $i$ .

En términos generales, una matriz de transformación homogénea  $T$  sirve para expresar la orientación y posición de un sistema de referencia  $O'UVW$  con respecto a otro fijo  $OXYZ$  ó para transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema  $O'UVW$  a su expresión en coordenadas del sistema  $OXYZ$  de la siguiente forma (Barrientos, y otros, 2007):

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-5})$$

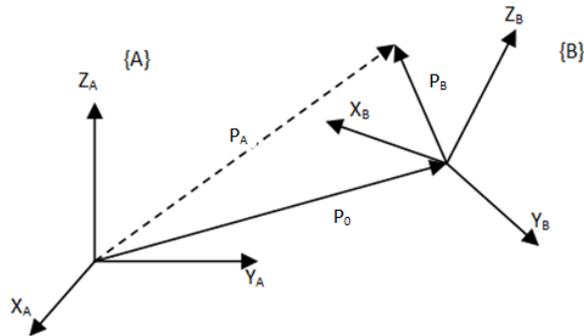
Entonces si se desea conocer la posición del origen del sistema O'XYZ ubicado en la junta i con respecto del sistema OXYZ de la junta i-1, bastará con aplicar la matriz de transformación  ${}^{i-1}A_i$  a un vector  $r'_{XYZ}=[0, 0, 0, 1]^T$ .

$$\begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & d_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & d_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i c\theta_i \\ d_i s\theta_i \\ b_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Consideraciones computacionales

El método de la matriz de transformación homogénea es muy cómodo de manejar puesto que sólo es necesario realizar las multiplicaciones de las transformaciones en el orden adecuado, sin embargo su principal desventaja radica en el tiempo que se pierde al multiplicar unos y ceros. Una forma conveniente para evitar realizar operaciones innecesarias es utilizar solamente las matrices de rotación y traslación para representar el vector de posición.

Así, si se conoce un vector respecto de cierta trama B (la cual está rotada y trasladada respecto de la trama A), pero se requiere describir en términos de la trama A, primero se rota la trama B para que tenga la misma orientación que la trama A y luego se traslada al origen de A, esto es:



$$P_A = {}^A R_B P_B + P_0 \quad (\text{III-6})$$

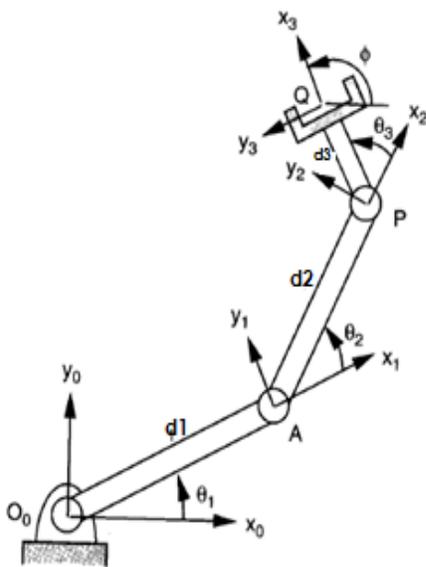
Si se generaliza este método para la representación del vector de posición del órgano terminal en función del marco de referencia queda:

$$U = {}^0P_1 + {}^0R_1 {}^1P_2 + {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2P_3 + \dots + {}^0R_1 \dots {}^{n-2}R_{n-1} {}^{n-1}P_n \quad (III-7)$$

Haciendo una simplificación se obtiene:

$$U = {}^0P_1 + \sum_{i=2}^n [(\prod_{j=1}^{i-1} {}^jR_{j+1}) {}^{i-1}P_i] \quad (III-8)$$

**Ejemplo:** Manipulador planar de 3 grados de libertad.



Eslabones (n)= 3.

Juntas = 3.

☞ Parámetros D-H del manipulador 3-DOF

Junta i	$\alpha_i$	$d_i$	$b_i$	$\theta_i$
1	0	$d_1$	0	$\theta_1$
2	0	$d_2$	0	$\theta_2$
3	0	$d_3$	0	$\theta_3$

☞ Vector de posición del efector final:

$$U = {}^0P_1 + {}^0R_1 {}^1P_2 + {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2P_3 \quad (III-9)$$

Donde:

${}^0P_1 = \begin{bmatrix} d_1 c\theta_1 \\ d_1 s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	${}^1P_2 = \begin{bmatrix} d_2 c\theta_2 \\ d_2 s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$	${}^2P_3 = \begin{bmatrix} d_3 c\theta_3 \\ d_3 s\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$
${}^0R_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	${}^1R_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

El vector U describe completamente la posición del órgano terminal siempre y cuando se conozcan los valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .

### **3.5 Métodos para resolver el problema dinámico de los mecanismos paralelos**

#### ***Formulación de Newton-Euler***

Este método requiere que las ecuaciones de movimiento sean planteadas para cada uno de los cuerpos del mecanismo por lo que resulta en una pobre eficiencia computacional. Pero resulta altamente aplicable por que calcula las fuerzas de reacción en todas las juntas las cuales son necesarias para el dimensionamiento de los eslabones y rodamientos durante la fase de diseño.(Tsai, 1999)

#### ***Principio de trabajo virtual***

Es el método más eficiente, pero un paso crítico es el desarrollo de las matrices jacobianas del eslabón que relaciona las velocidades de los elementos de la cadena con la velocidad de la plataforma móvil.(Tsai, 1999)

#### ***Formulación de Lagrange***

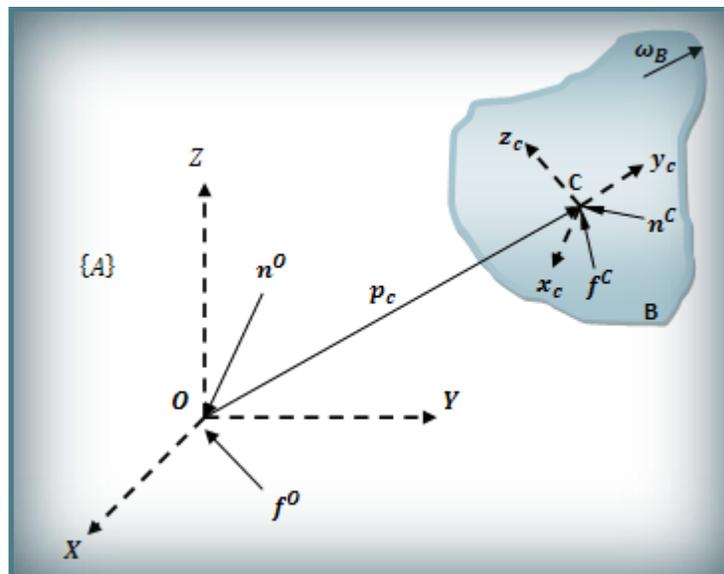
La formulación de Lagrange elimina todas las fuerzas y momentos de reacción innecesarios para el cálculo.(Tsai, 1999)

### 3.6 Estudio del método de Newton-Euler para el análisis dinámico

Sea  $A(x, y, z)$  el marco inercial con respecto al cual se pueden aplicar las leyes de Newton-Euler,  $I^O$  el momentum lineal del cuerpo rígido  $B$  sobre el origen  $O$  y expresado en  $A$ , y  $h^O$  el momentum angular correspondiente, entonces las dos ecuaciones dinámicas fundamentales de movimiento son:

$$f^O = \frac{dI^O}{dt} \quad (\text{III-10})$$

$$n^O = \frac{dh^O}{dt} \quad (\text{III-11})$$



Imágen20 Resultante de fuerzas y momentos actuando sobre un cuerpo rígido

#### Centro de masa como punto de referencia

Al elegir el centro de masa como punto de referencia, el movimiento del cuerpo rígido puede ser separado en dos partes: un movimiento lineal y un movimiento rotacional, ambos respecto al centro de masa.

De la Imágen 39, si  $C$  es el centro de masa del cuerpo rígido  $B$ , y sustituyendo ec. 74 en la ec. 90, se tiene:

$$f^O = \frac{d(mv_C)}{dt} \quad (\text{III-12})$$

Y para un cuerpo de masa constante:

$$f^O = m \frac{dv_C}{dt} \quad (\text{III-13})$$

La ecuación anterior es la ecuación de movimiento de Newton para el centro de masa.

Ahora sustituyendo la ec. 78 en la ec. 91, se obtiene:

$$n^O = \frac{dh^C}{dt} + m \left( p_C \times \frac{dv_C}{dt} \right) = n^C + p_C \times f^C \quad (\text{III-14})$$

Y si  $f^C$  y  $n^C$  son las resultantes de las fuerzas y momentos ejercidos en el centro de masa C, se demuestra que:

$$f^O = f^C \quad (\text{III-15})$$

$$n^O = n^C + p_C \times f^C \quad (\text{III-16})$$

Donde:

$$n^C = \frac{dh^C}{dt} = \frac{d(I_B^C \omega_B^C)}{dt} = I_B^C \dot{\omega}_B^C + \omega_B^C \times (I_B^C \omega_B^C) \quad (\text{III-17})$$

A esta ecuación se le conoce con el nombre de ecuación de movimiento de Euler para el centro de masa del marco coordinado. Esta ecuación también puede ser reescrita en el marco fijo A al multiplicar ambos lado de la ec. 96 por  $R_C^A$  y utilizando las relaciones  $\dot{\omega}_B^C = R_C^{AT} \dot{\omega}_B^A$  y  $\omega_B^C = R_C^{AT} \omega_B^A$ , quedando:

$$n^A = I_B^A \dot{\omega}_B^A + \omega_B^A \times (I_B^A \omega_B^A) \quad (\text{III-18})$$

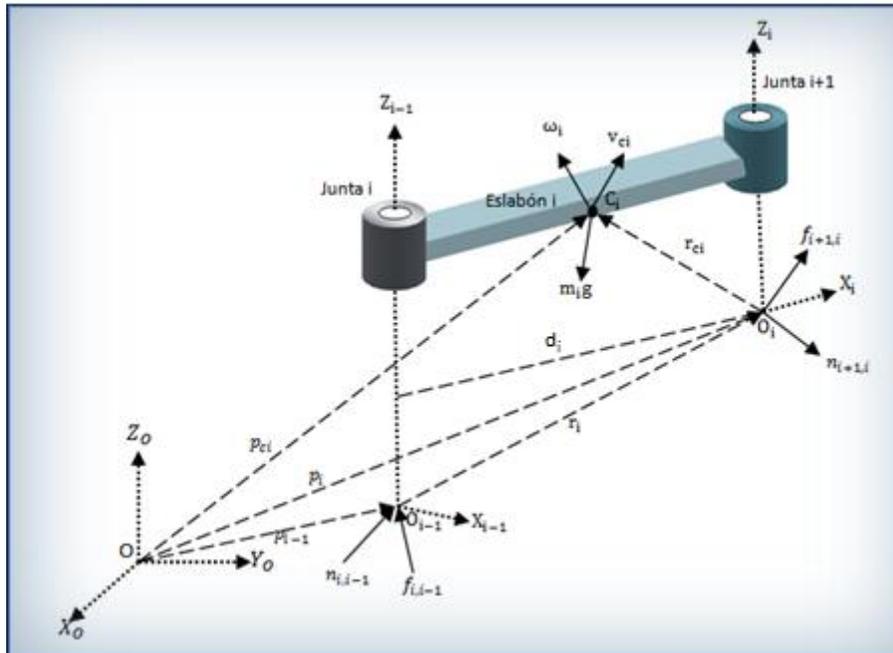
El resultado anterior, es la ecuación de movimiento de Euler para un marco coordinado que está localizado instantáneamente en el centro de masa con sus ejes paralelos a aquellos del marco inercial A.

### **Método recursivo Newton-Euler**

Este método incorpora todas las fuerzas que actúan individualmente en los eslabones del mecanismo. Entonces, las ecuaciones resultantes dinámicas incluyen todas las fuerzas de las restricciones entre dos eslabones adjuntos. Estas fuerzas son altamente usadas para el dimensionamiento de los eslabones y rodamientos en la etapa de diseño. Este método consiste de:

- Cálculo hacia delante de las velocidades y aceleraciones de cada miembro.
- Cálculo hacia atrás de fuerzas y momentos en cada una de las juntas.

Las fuerzas y momentos que actúan en un eslabón típico de un mecanismo se muestran en la imagen inferior.



Imágen21 Fuerzas y momentos ejercidos sobre el eslabón i

Para el análisis se emplea la siguiente notación:

$f_{i,i-1}$ : Fuerza resultante ejercida sobre el eslabón i por el eslabón i-1 en el punto  $O_{i-1}$ .

$f_i^*$ : Fuerza inercial ejercida en el centro de masa del eslabón i.

$I_i^i$ : Matriz inercial del eslabón i sobre su centro de masa y expresada en el marco del eslabón i<sup>th</sup>.

$n_{i,i-1}$ : Momento resultante ejercido sobre el eslabón i por el eslabón i-1 en el punto  $O_{i-1}$ .

$n_i^*$ : Momento inercial ejercido en el centro de masa del eslabón i.

$p_i$ : Vector de posición del origen del marco del eslabón  $i_{th}$  con respecto a la base (marco inercial).  $p_i = \overline{0_0 0_i}$ .

$p_{ci}$ : Vector de posición del centro de masa del eslabón  $i_{th}$  con respecto a la base.  $p_{ci} = \overline{0_0 C_i}$ .

$r_i$ : Vector de posición del origen del marco del eslabón  $i_{th}$  con respecto al marco del eslabón  $(i-1)_{th}$ ,  $r_i = \overline{0_{i-1} 0_i}$ .

$r_{ci}$ : Vector de posición del del centro de masa del eslabón  $i_{th}$  con respecto al marco del eslabón  $i_{th}$ ,  $r_{ci} = \overline{0_i C_i}$ .

$v_i$ : Velocidad lineal absoluta del origen  $0_i$ .

$v_{ci}$ : Velocidad lineal absoluta del centro de masa del eslabón  $i$ .

$\dot{v}_i$ : Aceleración lineal absoluta del origen  $0_i$ .

$\dot{v}_{ci}$ : Aceleración lineal absoluta del centro de masa del eslabón  $i$ .

$z_i$ : Vector unitario que apunta en la dirección del eje  $z_i$ .

$\omega_i$ : Velocidad angular absoluta del eslabón  $i$ .

$\dot{\omega}_i$ : Aceleración angular absoluta del eslabón  $i$ .

### **Cálculo hacia adelante**

Objetivo: Obtener velocidades y aceleraciones tanto lineales como angulares de cada eslabón en términos del eslabón anterior.

Condiciones iniciales para la base:  $v_0 = \dot{v}_0 = \omega_0 = \dot{\omega}_0 = 0$

a) Propagación de la velocidad angular.

La velocidad angular del eslabón  $i$  es:

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1} \dot{\theta}_i, & \text{para junta revoluta} \\ \omega_{i-1}, & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-19})$$

Expresando la ecuación anterior en el marco del eslabón  $i_{th}$ , se obtiene:

$$\omega_i^i = \begin{cases} R_{i-1}^i (\omega_{i-1}^{i-1} + z_{i-1}^{i-1} \dot{\theta}_i), & \text{para junta revoluta} \\ R_{i-1}^i \omega_{i-1}^{i-1}, & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-20})$$

Donde:

$$R_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 \\ -c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

Y:  $z_{i-1}^{i-1} = [0 \ 0 \ 1]^T$  es un vector unitario que apunta a lo largo del eje de la junta  $i_{th}$  y está expresado en el sistema coordenado del eslabón  $(i-1)_{th}$ .

b) Propagación de la aceleración angular.

Diferenciando la ecuación 99 se obtiene la aceleración angular, esto da:

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1}^{i-1} \ddot{\theta}_i + \omega_{i-1} \times z_{i-1}^{i-1} \dot{\theta}_i, & \text{para junta revoluta} \\ \dot{\omega}_{i-1}, & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-22})$$

Expresando la ecuación anterior en el marco del eslabón  $i_{th}$ , se obtiene:

$$\alpha_i^i = \begin{cases} R_{i-1}^i (\dot{\omega}_{i-1}^{i-1} + z_{i-1}^{i-1} \ddot{\theta}_i + \omega_{i-1}^{i-1} \times z_{i-1}^{i-1} \dot{\theta}_i), & \text{para junta revoluta} \\ R_{i-1}^i \dot{\omega}_{i-1}^{i-1}, & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-23})$$

Esta última ecuación permite calcular la aceleración angular del eslabón  $i$  en términos del eslabón  $i-1$ .

c) Propagación de la velocidad lineal.

La velocidad de  $O_i$  en términos de  $O_{i-1}$  se calcula con:

$$v_i = \begin{cases} v_{i-1} + \omega_i \times r_i, & \text{para junta revoluta} \\ v_{i-1} + \omega_i \times r_i + z_{i-1}^{i-1} \dot{d}_i, & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-24})$$

Donde  $\dot{d}_i$  es la velocidad traslacional a lo largo del eje de la junta  $i_{th}$ .

Reescribiendo la ecuación anterior en el marco del eslabón  $i_{th}$ , se obtiene:

$$v_i^i = \begin{cases} R_{i-1}^i(v_{i-1}^{i-1} + \omega_i^i \times r_i^i), & \text{para junta revoluta} \\ R_{i-1}^i(v_{i-1}^{i-1} + z_{i-1}^{i-1}\dot{d}_i) + \omega_i^i \times r_i^i, & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

Donde:

$$r_i^i = \begin{bmatrix} d_i \\ b_i s \alpha_i \\ b_i c \alpha_i \end{bmatrix} \quad (\text{III-26})$$

Es un vector constante para la junta revoluta y una variable para la junta prismática.

d) Propagación de la aceleración lineal.

Derivando la ecuación 104 se obtiene la aceleración de  $O_i$ :

$$\dot{v}_i^i = \begin{cases} v_{i-1}^i + \dot{\omega}_i^i \times r_i^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_i^i), & \text{para junta revoluta} \\ v_{i-1}^i + \dot{\omega}_i^i \times r_i^i + z_{i-1}^{i-1}\ddot{d}_i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_i^i) + 2\omega_i^i \times (z_{i-1}^{i-1}\dot{d}_i), & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-27})$$

Expresando la ecuación anterior en el marco del eslabón  $i_{th}$ , se obtiene:

$$\dot{v}_i^i = \begin{cases} R_{i-1}^i \dot{v}_{i-1}^{i-1} + \dot{\omega}_i^i \times r_i^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_i^i), & \text{para junta revoluta} \\ R_{i-1}^i (\dot{v}_{i-1}^{i-1} + z_{i-1}^{i-1}\ddot{d}_i) + \dot{\omega}_i^i \times r_i^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_i^i) + 2\omega_i^i \times (R_{i-1}^i z_{i-1}^{i-1}\dot{d}_i), & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-28})$$

e) Aceleración lineal del centro de masa.

Ésta se calcula con:

$$\dot{v}_{ci}^i = \dot{v}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{ci}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{ci}^i) \quad (\text{III-29})$$

f) Aceleración de la gravedad.

Para transformar la aceleración de la gravedad del marco del eslabón (i-1) al marco del eslabón  $i_{th}$  se realiza:

$$g^i = R_{i-1}^i g^{i-1} \quad (\text{III-30})$$

**Cálculo hacia atrás**

Objetivo: Calcular las fuerzas en las juntas de un eslabón a la vez iniciando en el efector final y finalizando en la base.

Se emplean las ecuaciones 93 y 97 para calcular la fuerza inercial y momento inercial ejercido en el centro de masa del eslabón  $i$ .

$${}^i f_i^* = -m_i \dot{v}_{ci}^i \quad (\text{III-31})$$

$${}^i n_i^* = -I_i^i \dot{\omega}_i^i - \omega_i^i \times (I_i^i \omega_i^i) \quad (\text{III-32})$$

Luego, se plantean las ecuaciones recursivas de equilibrio de fuerzas y momentos alrededor del centro de masa del eslabón  $i$ :

$$f_{i,i-1}^i = f_{i+1,i}^i - m_i g^i - {}^i f_i^* \quad (\text{III-33})$$

$$n_{i,i-1}^i = n_{i+1,i}^i + (r_i^i + r_{ci}^i) \times f_{i,i-1}^i - r_{ci}^i \times f_{i+1,i}^i - {}^i n_i^* \quad (\text{III-34})$$

Una vez calculas las fuerzas y momentos en el marco del eslabón  $i^{\text{th}}$ , se calculan para el marco del eslabón  $(i-1)^{\text{th}}$  por medio de:

$$f_{i,i-1}^{i-1} = R_i^{i-1} f_{i,i-1}^i \quad (\text{III-35})$$

$$n_{i,i-1}^{i-1} = R_i^{i-1} n_{i,i-1}^i \quad (\text{III-36})$$

Estas últimas 4 ecuaciones se usan recursivamente iniciando en el efector final, donde el momento y la fuerza de salida del efector final ( $f_{n+1,n}^n$  y  $n_{n+1,n}^n$ ) se consideran conocidos.

Los torques o fuerzas requeridos se calculan con la siguiente expresión:

$$\tau_i = \begin{cases} n_{i,i-1}^{i-1 T} z_{i-1}^{i-1}, & \text{para junta revoluta} \\ f_{i,i-1}^{i-1 T} z_{i-1}^{i-1}, & \text{para junta prismática} \end{cases} \quad (\text{III-37})$$

## 4. Mecanismo con configuración paralela 3-PRRR

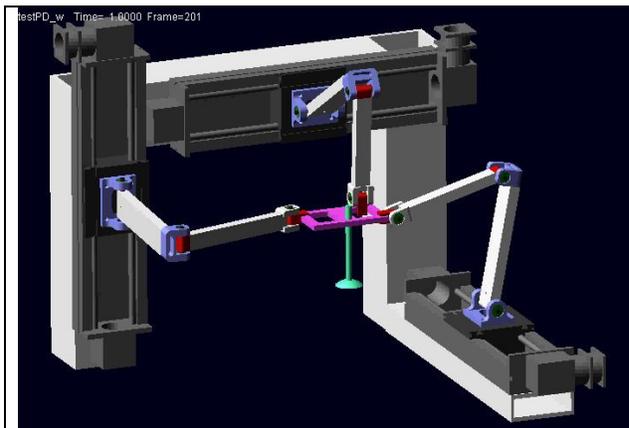
### 4.1 Descripción del mecanismo paralelo 3-PRRR

El mecanismo paralelo 3-PRRR o conocido de una manera más general como mecanismo cartesiano paralelo, es una clase especial de las máquinas cinemáticas paralelas. La plataforma final está sostenida por tres piernas o cadenas cinemáticas y cada una de ellas representa un mecanismo serial planar de 3 grados de libertad en su plano correspondiente, dos de traslación y uno de rotación. Un actuador lineal traslada la cadena cinemática con respecto al marco de referencia en dirección perpendicular a su plano.

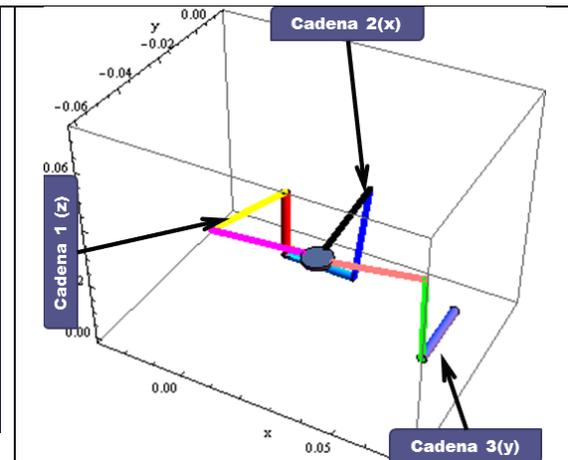
Las tres cadenas cinemáticas están posicionadas ortogonalmente, por lo tanto, todas las rotaciones en la plataforma final están restringidas, y sus tres traslaciones son conducidas por los actuadores lineales correspondientes.

De lo anterior se concluye que la cinemática del mecanismo paralelo 3-PRRR es lineal y desacoplada.

Diferentes mecanismos paralelos cartesianos pueden ser obtenidos, conectando la plataforma final a los actuadores lineales por diferentes cadenas cinemáticas. Para nuestro análisis el mecanismo está constituido por cadenas cinemáticas cuyas juntas son revolutas con ejes paralelos en serie con la junta prismática.



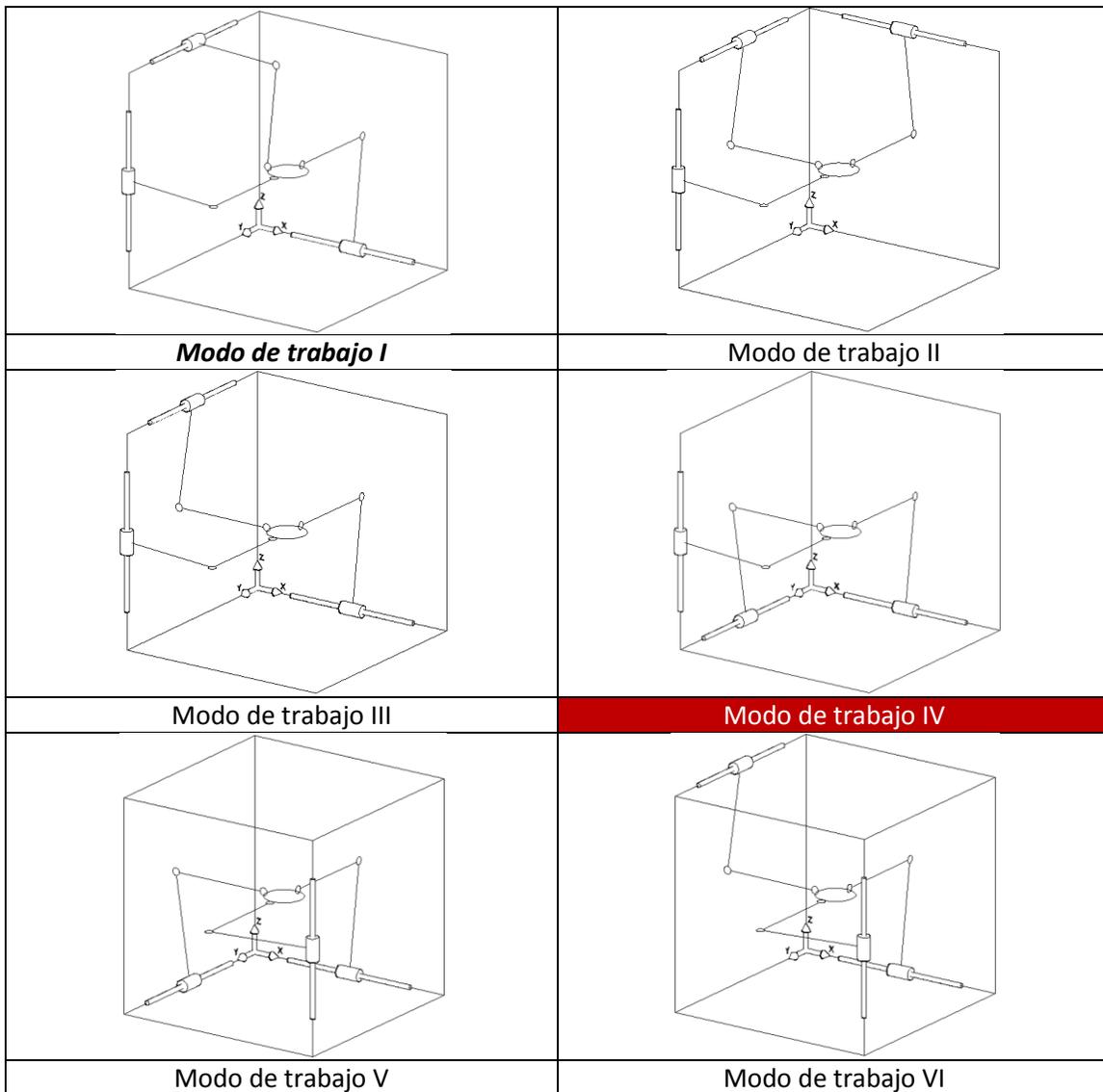
Imágenes22 Mecanismo paralelo 3-PRRR

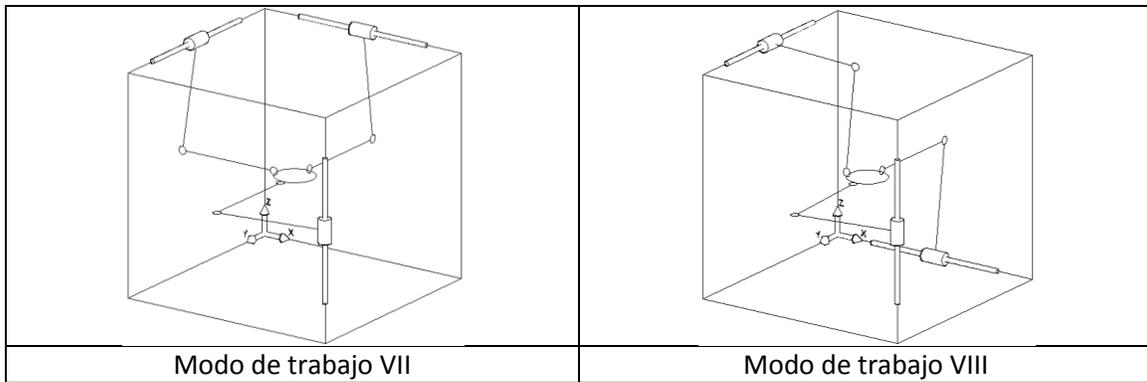


Imágenes23 Representación del mecanismo paralelo 3-PRRR en mathematica

## 4.2 Modos de trabajo

Dependiendo de la posición de los vínculos de cada cadena cinemática se pueden obtener hasta 8 configuraciones del mismo mecanismo paralelo 3-PRRR las cuales se muestran a continuación:





En este proyecto se trabaja con el modo de trabajo IV.

### 4.3 Especificaciones del mecanismo paralelo 3-PRRR

Los parámetros del mecanismo paralelo a considerar son los siguientes:

- La distancia entre centros por donde atraviesan los ejes de las juntas debe ser igual a 20 mm.
- Se debe adaptar el diseño para utilizar guías lineales IKO con longitud de 60 mm.
- El mecanismo debe ser capaz de orientarse en un espacio de trabajo equivalente a un cubo de longitud igual a 15 mm.

Para el desarrollo del mecanismo paralelo se debe considerar lo siguiente:

- Realizar el diseño de tal manera que las partes se modelen con geometría sencilla con el fin de reducir tiempos de manufactura y a su vez el costo.
- Tomar en cuenta la sencillez, estética, confiabilidad y robustez del prototipo.
- Búsqueda de un ensamble sencillo.
- Tomar en cuenta la selección de materiales que cumplan con los parámetros mecánicos requeridos y que además sean económicos y fáciles de manufacturar.

## **5. Planteamiento del problema**

El estudio y desarrollo de micromáquinas-herramienta es la línea de investigación del Grupo de Micromecánica y Mecatrónica en el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), y constantemente se buscan nuevas soluciones para mejorar las características de las mismas o su rendimiento a la hora de ejecutar las tareas.

En el GMM, se ha trabajado con el desarrollo de máquinas-herramienta cuyos mecanismos en general son de configuración serial. Un problema que presenta este tipo de configuración, al disminuir su tamaño, son las leyes de escala, las cuales no son favorables con los motores. En consecuencia, se tienen estructuras mecánicas más robustas o grandes en comparación con la estructura mecánica del micromecanismo.

Una solución a la miniaturización ha sido el uso de mecanismos paralelos, dado que al colocar los actuadores en la base, es posible miniaturizar los vínculos de la cadena que conectan la base a la plataforma móvil del mecanismo paralelo. (Bruzzone, y otros, 2006)

Es por ello que para una tesis doctoral se ha propuesto el mecanismo paralelo de configuración 3-PRRR como una nueva solución al desarrollo de micro máquinas con la posibilidad de su escalamiento a menores dimensiones.

Dentro de sus ventajas destaca un fácil análisis dinámico dado que el mecanismo está constituido por simples cadenas cinemáticas de 3 grados de libertad las cuales pueden ser analizadas independientemente sin afectar el resultado final; además, su mecánica es simple porque posee juntas de un grado de libertad; y también es posible el escalamiento de los vínculos de la cadenas cinemáticas dado que los actuadores están posicionados en la base.

Pero, para evaluar su rendimiento en la ejecución de la tarea de maquinado, es necesario llevar a cabo su desarrollo partiendo desde el análisis dinámico para obtener datos que permitan el dimensionamiento de los vínculos.

## **5.1 Objetivos**

### **Objetivo general:**

- ☞ Determinar el comportamiento dinámico de un mecanismo paralelo 3-PRRR y hacer una comparación entre los resultados teóricos y los experimentales.

### **Objetivos específicos:**

- ☞ Realizar el análisis de posición del mecanismo y simular el movimiento en una trayectoria.
- ☞ Resolver la cinemática directa del mecanismo y analizar las gráficas obtenidas.
- ☞ Determinar las fuerzas y torques que actúan en las juntas y en los vínculos del mecanismo para una posición de reposo.
- ☞ Calcular las fuerzas y torques que actúan tanto en las juntas del mecanismo como en sus vínculos durante el movimiento en una trayectoria.



## **IV. Análisis del mecanismo.**

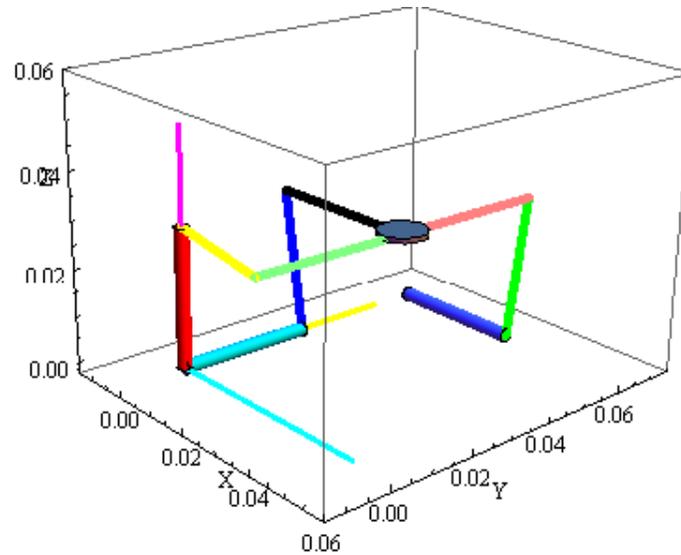
En este capítulo se resuelve la cinemática y dinámica del mecanismo haciendo uso de la representación de Denavit-Hartenberg y del método de Newton-Euler. Los resultados obtenidos en el análisis sirven como parámetros para el análisis estructural.

En un principio se parte con un bosquejo del mecanismo acorde a las especificaciones establecidas. Pero una vez que cada uno de los vínculos del mecanismo ha sido dimensionado acorde al análisis estructural, se plantea el diseño de detalle.

### **6. Análisis de posición.**

Dado que el mecanismo paralelo puede ser visto como el conjunto de tres cadenas seriales independientes entre sí, el análisis se reduce a aplicar la representación de Denavit-Hartenberg a cada una de ellas y después se plantea un sistema de ecuaciones para obtener la posición de la plataforma móvil en función de sus juntas actuadas.

Una cadena singular del mecanismo se caracteriza por tener 3 juntas revolutas y una prismática. El mecanismo posee una cadena en cada uno de sus ejes y para plantear su representación D-H, se fija el marco de referencia global tal y como es muestra en la siguiente imagen:



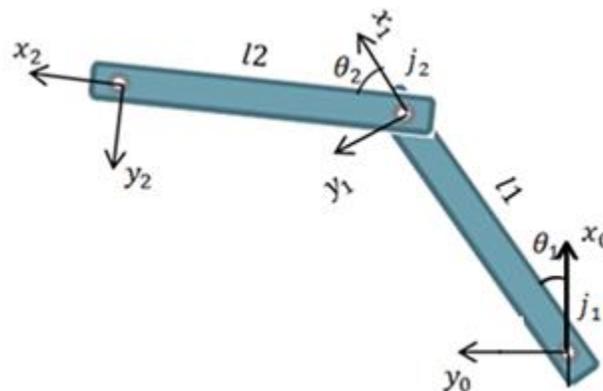
Imágen24 Sistema coordinado global para el mecanismo paralelo 3-PRRR

Una vez obtenido el diagrama del sistema en función de los parámetros del método de D-H, se procede a aplicar las matrices de transformación, una de rotación y otra de traslación, las cuales son:

$${}^{i-1}R_i(\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} \quad {}^{i-1}T_i(\mathbf{d}_i, \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} d_i c\theta_i \\ d_i s\theta_i \\ b_i \end{bmatrix}$$

a) Cadena Z

A continuación se hará el análisis para la cadena perteneciente al eje z, cuya representación D-H se muestra en la figura inferior:



Imágen25 Representación D-H de la cadena Z

La primer junta esta compuesta por una junta revoluta y una prismática mientras que las junta 2 es puramente revoluta.

$l_1$  y  $l_2$  representan la distancia existente entre los ejes de las juntas. Para este proyecto,  $l_1 = l_2 = l$ .

Aunque en el diagrama anterior no se muestra la variable de distancia, la distancia que recorre la junta prismática sobre el eje z se representa con la variable  $b_1$ .

☞ Parámetros D-H de la cadena z:

Junta i	$\alpha_i$	$d_i$	$b_i$	$\theta_i$
1	0	$l$	$b_1$	$\theta_1$
2	0	$l$	0	$\theta_2$

☞ Vector de posición en la junta 3:

$$U = {}^0P_1 + {}^0R_1 {}^1P_2 = T_1 + Q_1 T_2$$

Cuyas matrices correspondientes son:

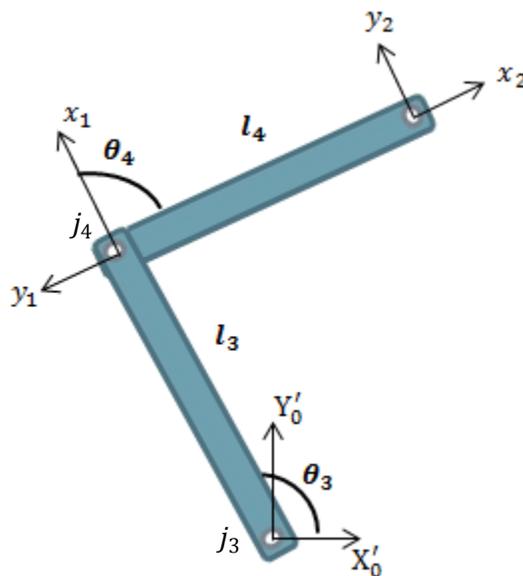
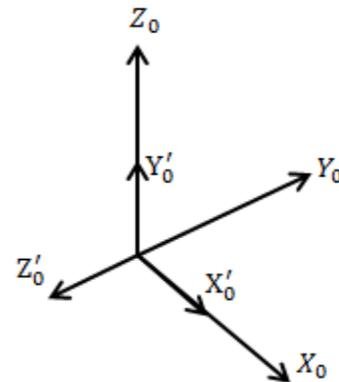
$T_1 = \begin{bmatrix} l * c\theta_1 \\ l * s\theta_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$	$T_2 = \begin{bmatrix} l * c\theta_2 \\ l * s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$Q_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 - s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
---	---	---

Efectuando las operaciones matriciales, se obtiene:

$$U_z = \begin{bmatrix} l * c\theta_1 + l * c(\theta_1 + \theta_2) \\ l * s\theta_1 + l * s(\theta_1 + \theta_2) \\ b_1 \end{bmatrix}^T$$

## b) Cadena Y

Como regla general del método de D-H es que el eje z de los sistemas coordenados locales se ubique en el eje de la junta correspondiente. Por lo tanto, para obtener la representación de esta cadena se realiza el análisis a partir del marco de referencia  $\{X'_0, Y'_0, Z'_0\}$ . Este paso también puede ser representado con una transformación de rotación ( $\alpha$ ) para ubicar el sistema  $\{S_0\}$  en  $\{S'_0\}$ .



Imágen26Representación D-H de la cadena Y

De la Imágen superior  $l_3$  y  $l_4$  representan la longitud de los eslabones correspondientes, cuyo valor es igual a  $l$ , mientras que  $\theta_3$  y  $\theta_4$  representan los ángulos entre el eslabón actual y el eje x del marco local.

La variable que representa la distancia que recorre la cadena y sobre el eje  $z'$  es  $b_2$ .

☞ Parámetros D-H de la cadena Y:

Junta i	$\alpha_i$	$d_i$	$b_i$	$\theta_i$
<b>a</b>	90	0	0	0
<b>3</b>	0	$l$	$-b_2$	$\theta_3$
<b>4</b>	0	$l$	0	$\theta_4$

☞ Vector de posición en la junta 6:

$$U = {}^0P_a + {}^0R_a {}^aP_3 + {}^0R_a {}^aR_3 {}^3P_4 = 0 + Q_a T_3 + Q_a Q_3 T_4$$

Cuyas matrices correspondientes son:

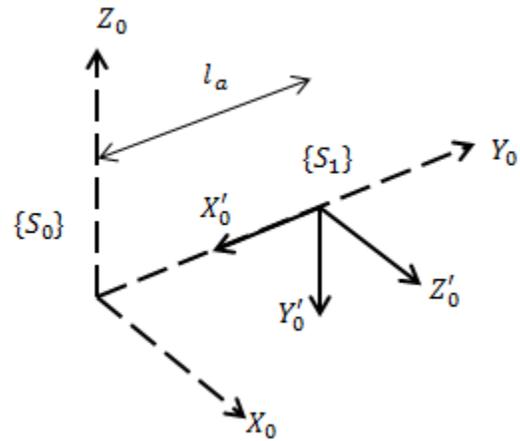
$T_3 = \begin{bmatrix} l * c\theta_3 \\ l * s\theta_3 \\ -b_2 \end{bmatrix}$	$T_4 = \begin{bmatrix} l * c\theta_4 \\ l * s\theta_4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$Q_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$Q_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 - s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
--	---	--	---

Efectuando las operaciones matriciales, se obtiene:

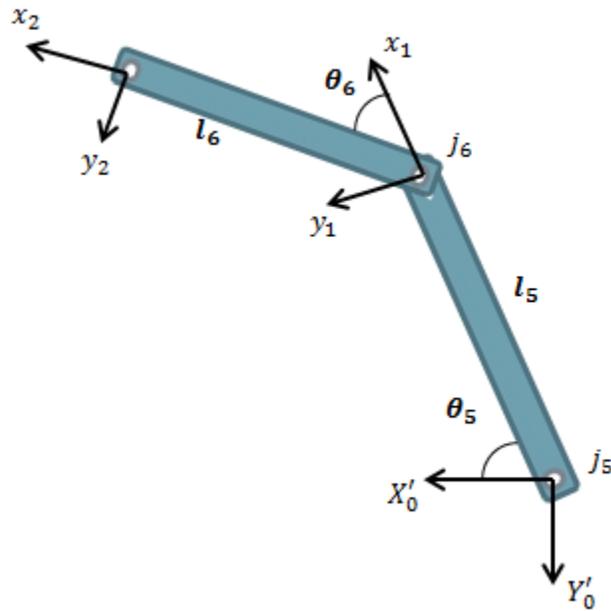
$$U_y = \begin{bmatrix} l * c\theta_3 + l * c(\theta_3 + \theta_4) \\ b_2 \\ l * s\theta_3 + l * s(\theta_3 + \theta_4) \end{bmatrix}^T$$

c) Cadena X

Esta cadena se ubica a una determinada distancia respecto al origen del marco de referencia fijo. Para su describir su geometría se parte del sistema coordinado  $\{S'_0\}$  y se aplica el método de D-H, posteriormente, para representar el vector de posición en el marco fijo  $\{S_0\}$  se le suma el vector de traslación y se aplica la matriz de rotación correspondiente. Los sistemas  $\{S_0\}$  y  $\{S'_0\}$  se muestran en la Imágen inferior:



La representación de la cadena X en base a S1 es la siguiente:



Donde:

$l_5 = l_6 = l$  : longitud del vínculo

$\theta_5, \theta_6$  : ángulo de rotación del vínculo correspondiente.

$b_3$ : distancia del primer vínculo sobre el eje  $Z'_0$ .

☞ Parámetros D-H de la cadena X:

Junta i	$\alpha_i$	$d_i$	$b_i$	$\theta_i$
<b>b</b>	-90	0	0	-90
<b>5a</b>	0	$-l_a$	0	0
<b>5</b>	0	$l$	$b_3$	$\theta_5$
<b>6</b>	0	$l$	0	$\theta_6$

☞ Vector de posición en la junta 6:

$$U = {}^0P_b + {}^0R_b {}^bP_{5a} + {}^0R_b {}^bR_{5a} {}^{5a}P_5 + {}^0R_b {}^bR_{5a} {}^{5a}R_5 {}^5P_6$$

Pero:

$$\begin{aligned} {}^0P_b &= \mathbf{0} \\ {}^bR_{5a} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$U = {}^0R_b {}^bP_{5a} + {}^0R_b {}^{5a}P_5 + {}^0R_b {}^{5a}R_5 {}^5P_6 = Q_b T_{5a} + Q_b T_5 + Q_b Q_5 T_6$$

Cuyas matrices correspondientes son:

$T_{5a} = \begin{bmatrix} -l_a \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$T_5 = \begin{bmatrix} l * c\theta_5 \\ l * s\theta_5 \\ b_3 \end{bmatrix}$	$T_6 = \begin{bmatrix} l * c\theta_6 \\ l * s\theta_6 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
$Q_b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{10} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$Q_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 - s\theta_5 & \mathbf{0} \\ s\theta_5 & c\theta_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	

Efectuando las operaciones matriciales, se obtiene:

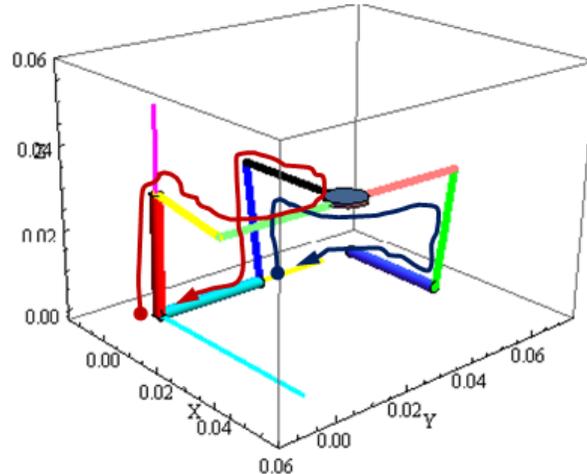
$$U_x = \begin{bmatrix} b_3 \\ l_a - l * c\theta_5 - l * c(\theta_5 + \theta_6) \\ -l * s\theta_5 - l * s(\theta_5 + \theta_6) \end{bmatrix}^T$$

Finalmente para obtener la posición del órgano terminal en función de sus juntas actuadas, se plantean tantas ecuaciones de lazo cerrado como el

mecanismo posea y se resuelven simultáneamente. Para el caso de este mecanismo, se plantean 2 ecuaciones de lazo cerrado, las cuales son:

$$E_1: U_z - U_y$$

$$E_2: U_y - U_z$$

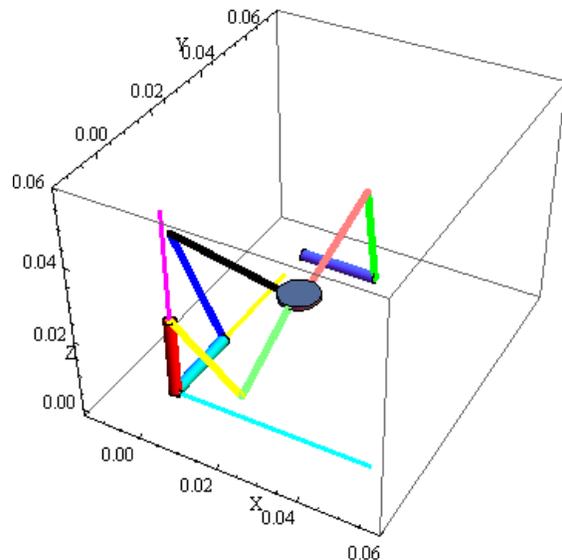


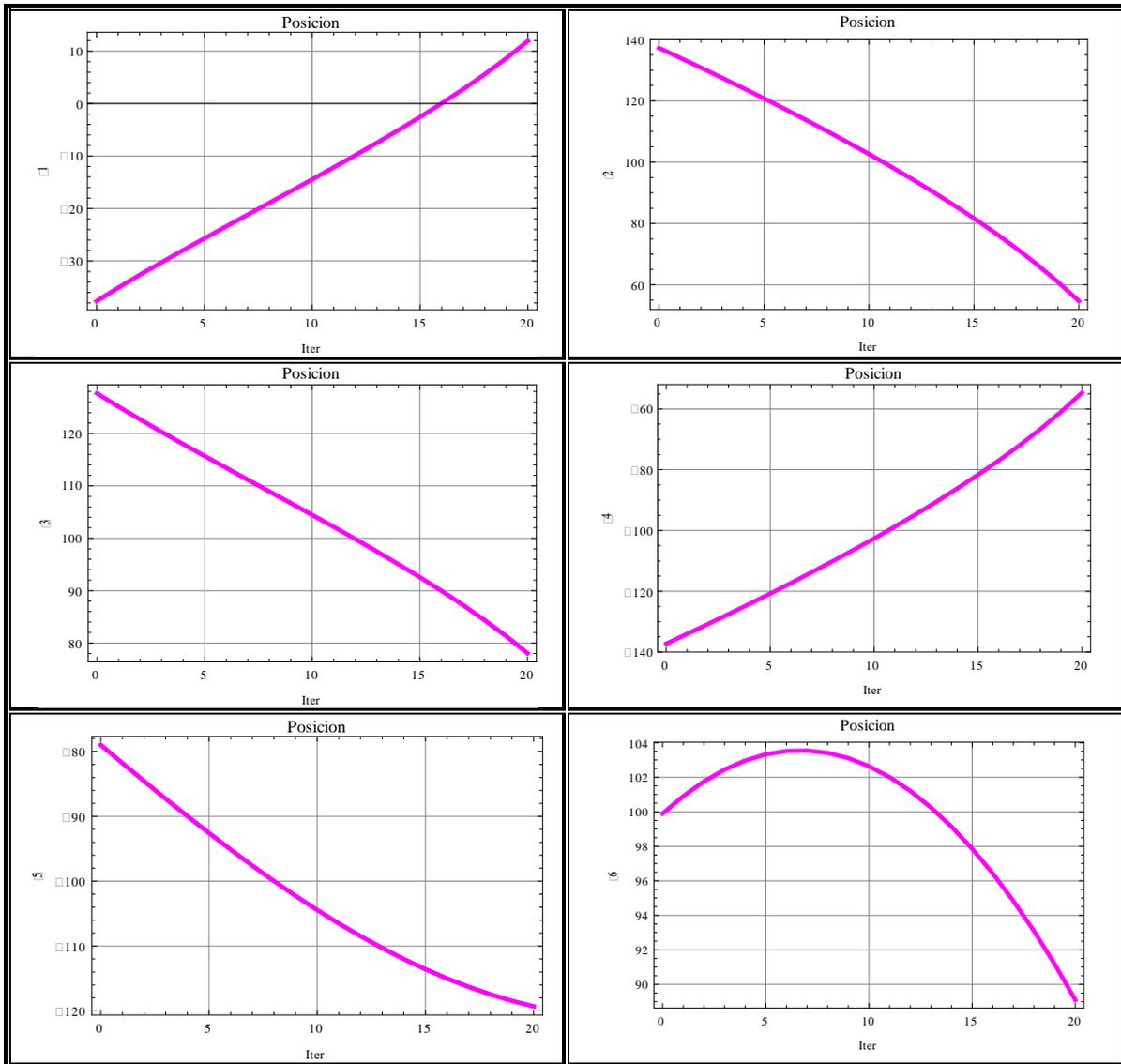
Imágen27 Trayectorias de los lazos cerrados

Dado que las ecuaciones E1 y E2 son ecuaciones no lineales, su solución se obtiene por métodos numéricos para una determinada posición o trayectoria propuesta de las juntas actuadas.

Para recorrer el espacio de trabajo se ha elegido una trayectoria que parta de un extremo y que finalice en el otro extremo. Y como el espacio de trabajo del mecanismo es representado con un cubo, la trayectoria resulta ser su diagonal.

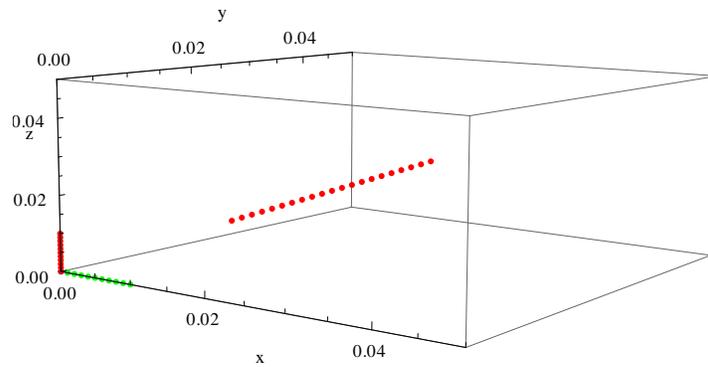
Para una trayectoria cuyo extremo inicial se ubica en  $\{12.5, 12.5, 12.5\}$  [mm] y finaliza en  $\{27.5, 27.5, 27.5\}$  [mm] y una distancia entre los ejes de las uniones igual a la especificada (20[mm]), los resultados obtenidos se muestran en las siguientes gráficas:





Imágen28 Gráficas de la posición de las juntas

Trayectoria Pos U



Imágen29 Trayectoria de posición

## 7. Análisis cinemático.

El análisis cinemático se divide básicamente en dos tipos: el directo e inverso. Para el objetivo se llevará a cabo la cinemática directa donde se obtendrá la velocidad y aceleración del órgano terminal así como de sus juntas no actuadas a partir de las velocidades y aceleraciones de las juntas actuadas.

### 7.1 Problema cinemático directo de velocidad

#### 7.1.1 Análisis teórico

Este análisis nos llevará a una relación de las velocidades de las juntas,  $\dot{q}$ , y las velocidades del efector final  $\dot{X}$ . Para un mecanismo de n gdl:

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_{n-1} \dots \dot{q}_n]^T \quad (\text{IV-1})$$

Y para un caso general, el vector de velocidad  $\dot{X}$  del órgano terminal, es un vector de 6x1 compuesto por la velocidad del vector de posición ( $v_x, v_y, v_z$ ) y la velocidad del vector de orientación ( $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ ):

$$\dot{X} = [\dot{X} \dot{Y} \dot{Z} \omega_x \omega_y \omega_z] = \begin{bmatrix} {}^0 \dot{d}_n \\ {}^0 \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0 v_n \\ {}^0 \omega_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV-2})$$

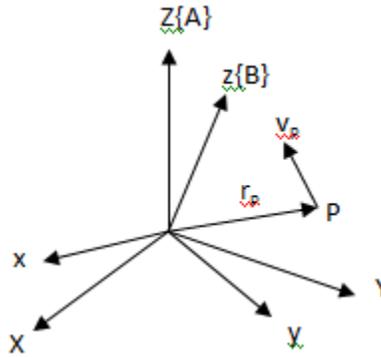
Finalmente se tiene que los elementos del vector de velocidad  $\dot{X}$  del órgano terminal son linealmente proporcionales al vector de velocidades de las juntas  $\dot{q}$ :

$$\dot{X} = J \dot{q} \quad (\text{IV-3})$$

Donde, la matriz de proporcionalidad  $J(\mathbf{q})$  de 6 x n, es nombrada matriz Jacobiana del robot.

#### Velocidad Angular

Si se considera que el origen de un sistema coordenado B coincide con el del sistema de referencia A y que además la orientación de B cambia con respecto a A, el movimiento del cuerpo puede ser expresado a través de la matriz de transformación de rotación variante en el tiempo la cual mapea las coordenadas instantáneas de un punto fijo en B a coordenadas globales en A. Esto es:



$$\mathbf{r}_A(t) = {}^A\mathbf{R}_B(t) {}^B\mathbf{r} \quad (\text{IV-4})$$

La velocidad de un punto del cuerpo en el marco global {A} es:

$$\dot{\mathbf{r}}_A(t) = \mathbf{v}_A(t) = {}^A\dot{\mathbf{R}}_B(t) {}^B\mathbf{r} \quad (\text{IV-5})$$

Al despejar  ${}^B\mathbf{r}$  de la ecuación 4 para utilizarlo en la ecuación 5, da:

$$\mathbf{v}_A(t) = {}^A\dot{\mathbf{R}}_B(t) {}^A\mathbf{R}_B(t)^{-1} \mathbf{r}_A(t) = {}^A\dot{\mathbf{R}}_B(t) {}^A\mathbf{R}_B(t)^T \mathbf{r}_A(t) \quad (\text{IV-6})$$

Por notación:

$${}^A\dot{\mathbf{R}}_B(t) {}^A\mathbf{R}_B(t)^T = \widetilde{{}^A\Omega_B} \quad (\text{IV-7})$$

Donde  $\widetilde{{}^A\Omega_B}$  es una matriz anti simétrica, esto es:

$$\widetilde{{}^A\Omega_B}^T = -\widetilde{{}^A\Omega_B} \quad (\text{IV-8})$$

Y:

$$\widetilde{{}^A\Omega_B} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-9})$$

Rescribiendo,

$$\mathbf{v}_A(t) = \widetilde{{}^A\Omega_B} {}^B\mathbf{r} = {}^A\Omega_B \times {}^B\mathbf{r}$$

Donde  ${}^A\Omega_B$  es el vector de velocidad angular asociado con la matriz anti simétrica. Éste es igual a una rotación con razón angular  $\dot{\varphi}$  sobre un eje instantáneo de rotación  $\hat{u}$ .

$${}^A\Omega_B = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \dot{\varphi} \hat{u} \quad (\text{IV-10})$$

### Velocidad de un cuerpo rígido

Para representar la velocidad de un cuerpo rígido representado en una trama B, el cual se mueve libremente dentro de una trama A, se parte del vector de posición:

$$\mathbf{r}_A(t) = {}^A\mathbf{R}_B(t) {}^B\mathbf{r} + {}^A\mathbf{b}_B \quad (\text{IV-11})$$

Al derivar la expresión anterior se obtiene la velocidad:

$$\mathbf{v}_A(t) = \dot{{}^A\mathbf{R}_B(t)} {}^B\mathbf{r} + \dot{{}^A\mathbf{b}_B} \quad (\text{IV-12})$$

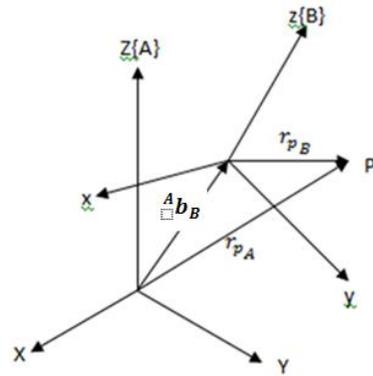
Resolviendo ambas ecuaciones y utilizando la notación de la matriz anti simétrica se llega a la siguiente expresión:

$$\mathbf{v}_A(t) = \widetilde{{}^A\Omega_B} [\mathbf{r}_A(t) - {}^A\mathbf{b}_B] + \dot{{}^A\mathbf{b}_B} \quad (\text{IV-13})$$

Utilizando un vector de posición relativo, se obtiene:

$$\mathbf{v}_A(t) = {}^A\Omega_B \times \mathbf{r}_B + \dot{{}^A\mathbf{b}_B} \quad (\text{IV-14})$$

Este vector de velocidad representa la suma vectorial de las velocidades de rotación y traslación, ambas expresadas en la misma trama global.



### 7.1.2 Análisis del mecanismo paralelo 3-PRRR

#### A) Cadena correspondiente al eje Z

Del análisis de posición se obtuvo la siguiente expresión:

$$U = {}^0P_1 + {}^0R_1 {}^1P_2$$

Derivando la expresión anterior y utilizando la notación de la matriz anti simétrica se obtiene:

$$V_z = {}^0\dot{P}_1 + {}^0R_1 {}^1\dot{P}_2 + \widetilde{{}^0\Omega_1} {}^0R_1 {}^1P_2$$

Rescribiendo la ecuación de velocidad utilizando el vector asociado a la matriz anti simétrica, se obtiene

$$V_z = {}^0\dot{P}_1 + {}^0R_1 {}^1\dot{P}_2 + {}^0\Omega_1 \times {}^0P_2 \quad (IV-15)$$

Donde  ${}^1\dot{P}_2$  se puede expresar de la siguiente manera:

$${}^1\dot{P}_2 = \frac{d}{dt} {}^1P_2(\theta_2) = {}^1\omega_2 \times {}^1P_2 = {}^1\Omega_2 \times {}^1P_2 \quad (IV-16)$$

Y dado que  ${}^0\dot{P}_1$  es función de dos variables se tiene que:

$${}^0\dot{P}_1 = \frac{\partial}{\partial t} {}^0P_1(b_1, \theta_1) = \frac{\partial}{\partial b_1} {}^0P_1(b_1, \theta_1) * \dot{b}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta_1} {}^0P_1(b_1, \theta_1) * \dot{\theta}_1$$

El primer término de la ecuación anterior representa la velocidad lineal de la junta prismática asociada, mientras que el segundo término es la velocidad angular asociada a la junta revoluta.

Dado que  $\frac{\partial}{\partial b_1} {}^0P_1(b_1, \theta_1) = \hat{z}$  y expresando la ecuación anterior en términos del eje de la junta y del vector angular, se obtiene:

$${}^0\dot{P}_1 = \dot{b}_1 \hat{z} + {}^0\Omega_1 \times {}^0P_1 \quad (IV-17)$$

Sustituyendo 17 y 16 en la ecuación 15 se obtiene:

$$V_z = \dot{b}_1 \hat{z} + {}^0\Omega_1 \times {}^0P_1 + {}^0R_1 ({}^1\Omega_2 \times {}^1P_2) + {}^0\Omega_1 \times {}^0P_2$$

Donde:

$${}^0\Omega_1 = \dot{\theta}_1 \hat{z}$$

$${}^1\Omega_2 = \dot{\theta}_2 \hat{z}$$

Que al sustituir lo anterior se llega a:

$$V_z = \dot{b}_1 \hat{z} + \dot{\theta}_1 \hat{z} \times ({}^0P_1 + {}^0R_1 {}^1P_2) + {}^0R_1 (\dot{\theta}_2 \hat{z} \times {}^1P_2) \quad (\text{IV-18})$$

Rescribiendo en términos de la matriz jacobiana y el vector de velocidad:

$$V_z = \begin{bmatrix} \hat{z} & \hat{z} \times ({}^0P_1 + {}^0R_1 {}^1P_2) & {}^0R_1 (\hat{z} \times {}^1P_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-19})$$

## B) Cadena correspondiente al eje Y

La ecuación de posición para la cadena Y obtenida anteriormente es:

$$U_y = {}^0P_a + {}^0R_a {}^aP_3 + {}^0R_a {}^aR_3 {}^3P_4$$

Al derivarla se obtiene la expresión para la velocidad:

$$V_y = {}^0R_a \dot{a}P_3 + {}^0R_a ({}^aR_3 \dot{3}P_4 + {}^a\dot{R}_3 {}^3P_4)$$

Donde:

$${}^a\dot{P}_3 = \dot{b}_2 \hat{z} + {}^a\omega_3 \times {}^aP_3 = \dot{b}_2 \hat{z} + {}^a\Omega_3 \times {}^aP_3 = \dot{b}_2 \hat{z} + \dot{\theta}_3 \hat{z} \times {}^aP_3$$

$${}^3\dot{P}_4 = {}^3\Omega_4 \times {}^3P_4 = \dot{\theta}_4 \hat{z} \times {}^3P_4$$

$${}^a\dot{R}_3 {}^3P_4 = {}^a\Omega_3 \times {}^aR_3 {}^3P_4 = \dot{\theta}_3 \hat{z} \times {}^aR_3 {}^3P_4$$

Que al sustituir en la expresión de velocidad se obtiene:

$$V_y = {}^0R_a \left( \dot{b}_2 \hat{z} + \dot{\theta}_3 \hat{z} \times ({}^aP_3 + {}^aR_3 {}^3P_4) + {}^aR_3 (\dot{\theta}_4 \hat{z} \times {}^3P_4) \right) \quad (\text{IV-20})$$

Rescribiendo en términos de la matriz jacobiana y el vector de velocidad:

$$V_y = \begin{bmatrix} {}^0R_a \hat{z} & {}^0R_a (\hat{z} \times ({}^aP_3 + {}^aR_3 {}^3P_4)) & {}^0R_a {}^aR_3 (\hat{z} \times {}^3P_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{b}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-21})$$

### C) Cadena correspondiente al eje X

La ecuación de posición para el extremo de esta cadena es:

$$U_x = {}^0R_b {}^bP_{5a} + {}^0R_b {}^{5a}P_5 + {}^0R_b {}^{5a}R_5 {}^5P_6$$

Al derivar la ecuación previa, se obtiene la expresión de velocidad:

$$V_x = {}^0R_b {}^{5a}\dot{P}_5 + {}^0R_b ({}^{5a}R_5 {}^5\dot{P}_6 + {}^{5a}\dot{R}_5 {}^5P_6)$$

Donde:

$${}^{5a}\dot{P}_5 = \dot{b}_3 \hat{z} + {}^{5a}\omega_5 \times {}^{5a}P_5 = \dot{b}_2 \hat{z} + {}^{5a}\Omega_5 \times {}^{5a}P_5 = \dot{b}_3 \hat{z} + \dot{\theta}_5 \hat{z} \times {}^{5a}P_5$$

$${}^5\dot{P}_6 = {}^5\Omega_6 \times {}^5P_6 = \dot{\theta}_6 \hat{z} \times {}^5P_6$$

$${}^{5a}\dot{R}_5 {}^5P_6 = {}^{5a}\Omega_5 \times {}^{5a}R_5 {}^5P_6 = \dot{\theta}_5 \hat{z} \times {}^{5a}R_5 {}^5P_6$$

Que al sustituir en la expresión de velocidad se obtiene:

$$V_x = {}^0R_b (\dot{b}_3 \hat{z} + \dot{\theta}_5 \hat{z} \times ({}^{5a}P_5 + {}^{5a}R_5 {}^5P_6) + {}^{5a}R_5 (\dot{\theta}_6 \hat{z} \times {}^5P_6)) \quad (\text{IV-22})$$

Rescribiendo en términos de la matriz jacobiana y el vector de velocidad:

$$V_x = \begin{bmatrix} {}^0R_b \hat{z} & {}^0R_b (\hat{z} \times ({}^{5a}P_5 + {}^{5a}R_5 {}^5P_6)) & {}^0R_b {}^{5a}R_5 (\hat{z} \times {}^5P_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{b}_3 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-23})$$

### D) Solución general

Dado que la cinemática del mecanismo paralelo 3-PRRR es lineal y desacoplada, la velocidad de su plataforma final en los 3 ejes ortogonales depende directamente de la velocidad de sus juntas actuadas. Por lo tanto, si se igualan los componentes entre sí de los vectores de velocidad de las 3 cadenas cinemáticas, se obtiene la velocidad angular de las juntas pasivas al resolver el sistema de ecuaciones numéricamente.

El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$Evel1: V_z(1) - V_x(1) = 0$$

$$Evel2: V_y(1) - V_x(1) = 0$$

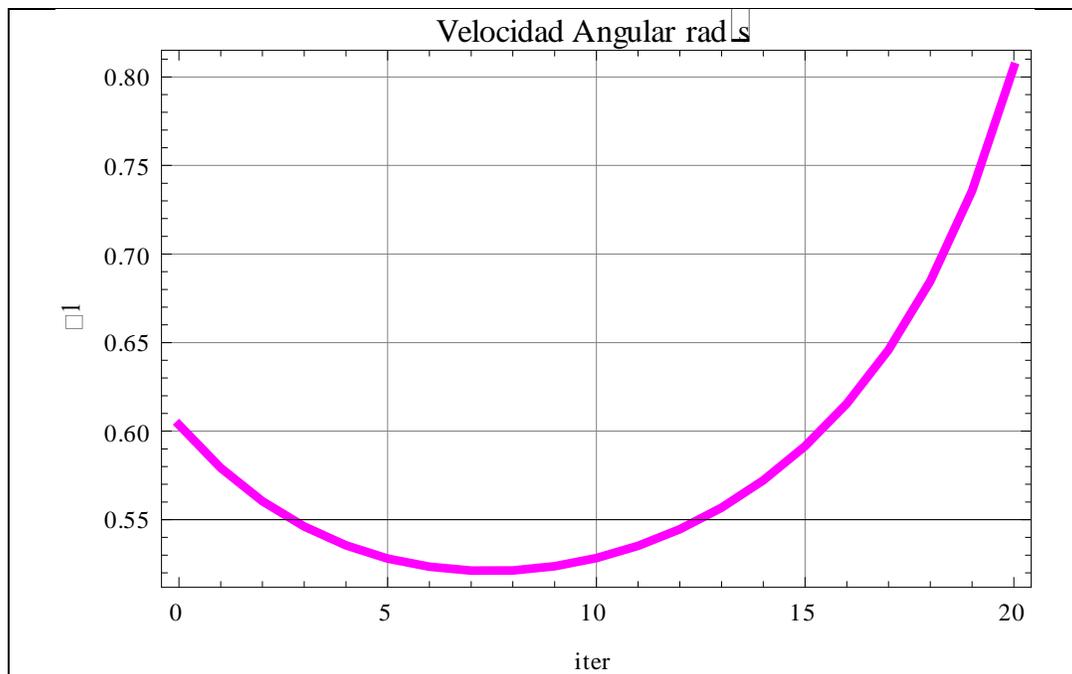
$$Evel3: V_z(2) - V_y(2) = 0$$

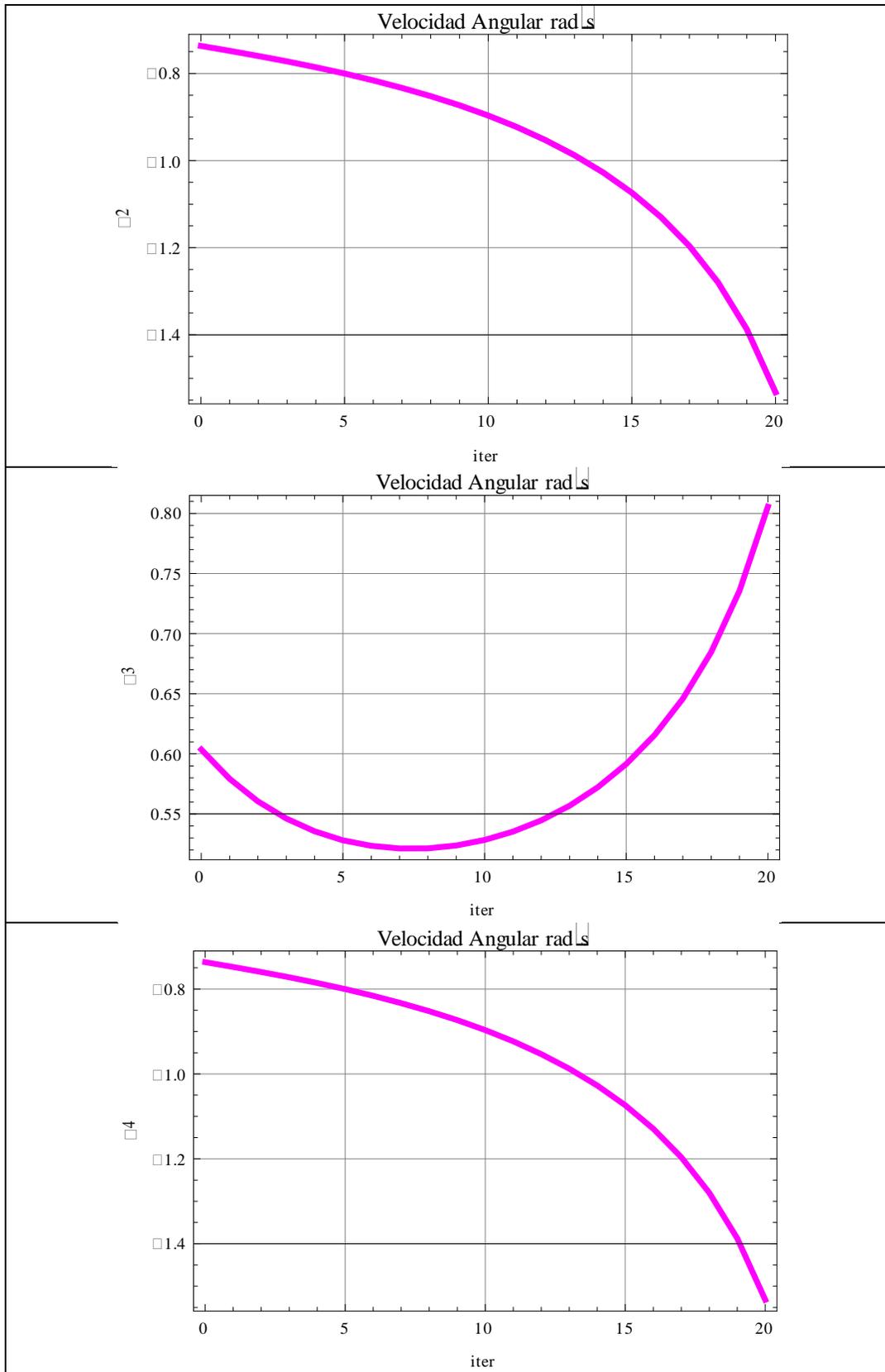
$$Evel4: V_x(2) - V_y(2) = 0$$

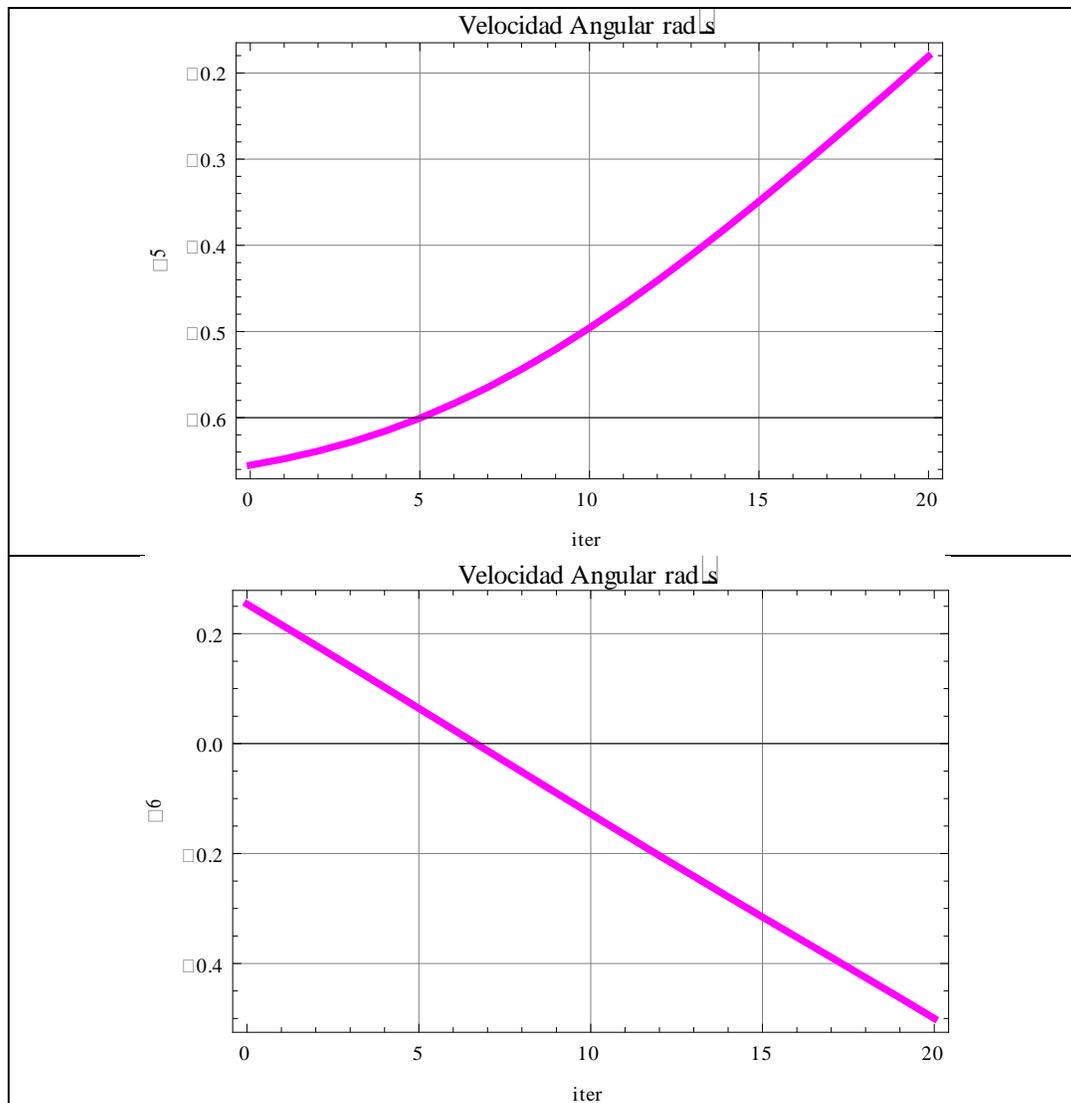
$$Evel5: V_y(3) - V_z(3) = 0$$

$$Evel6: V_x(3) - V_z(3) = 0$$

Este sistema se resolvió para una velocidad de las juntas prismáticas igual a 10 [mm/s] y los resultados se muestran en las siguientes gráficas.







Imágen30 Gráficas de las velocidades angulares para las juntas no actuadas del mecanismo paralelo 3-PRRR

## 7.2 Problema cinemático directo de aceleración

Una vez realizada la cinemática directa de posición y velocidad se procede a determinar la aceleración del órgano terminal y de las juntas no actuadas en función de las juntas actuadas del mecanismo.

Derivando la ecuación IV-3, se obtiene la ecuación de la aceleración:

$$\frac{d\dot{\mathbf{X}}}{dt} = \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} \quad (\text{IV-24})$$

Por lo tanto, para obtener la aceleración de las juntas del mecanismo paralelo 3-PRRR, primero se deriva la matriz jacobiana correspondiente a  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_z$ , esto es:

$$\begin{aligned} a_z &= \dot{J}_z \dot{q}_z + J_z \ddot{q}_z \\ a_y &= \dot{J}_y \dot{q}_y + J_y \ddot{q}_y \\ a_x &= \dot{J}_x \dot{q}_x + J_x \ddot{q}_x \end{aligned}$$

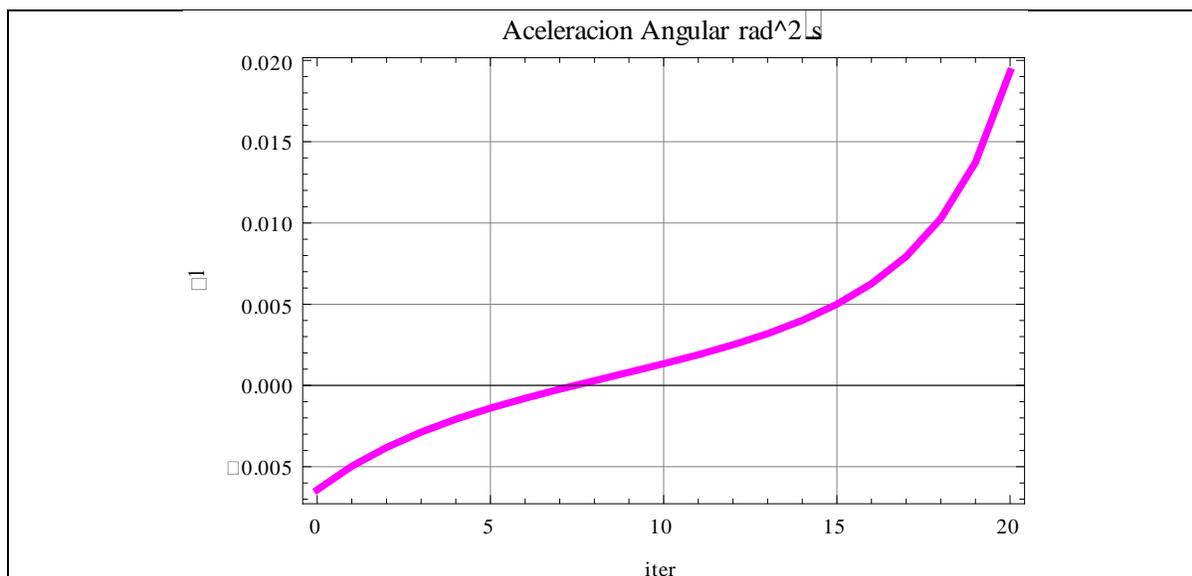
Donde la derivada de las matrices jacobianas son derivadas parciales, esto es:

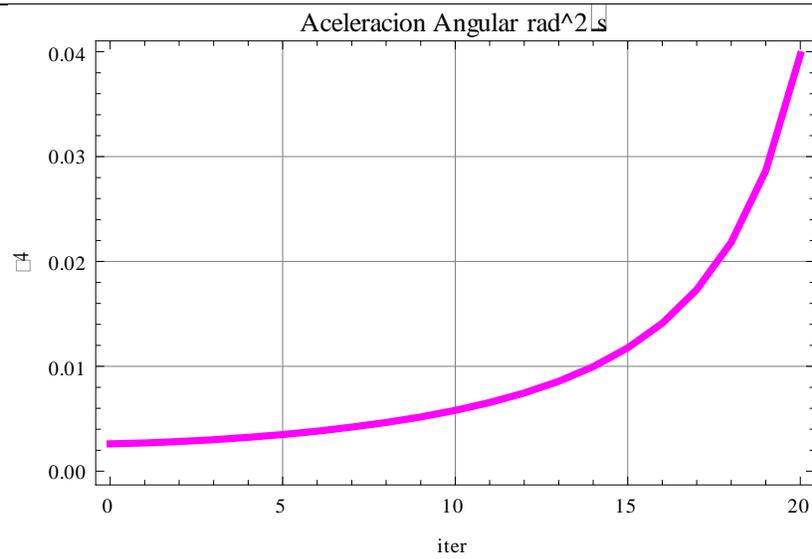
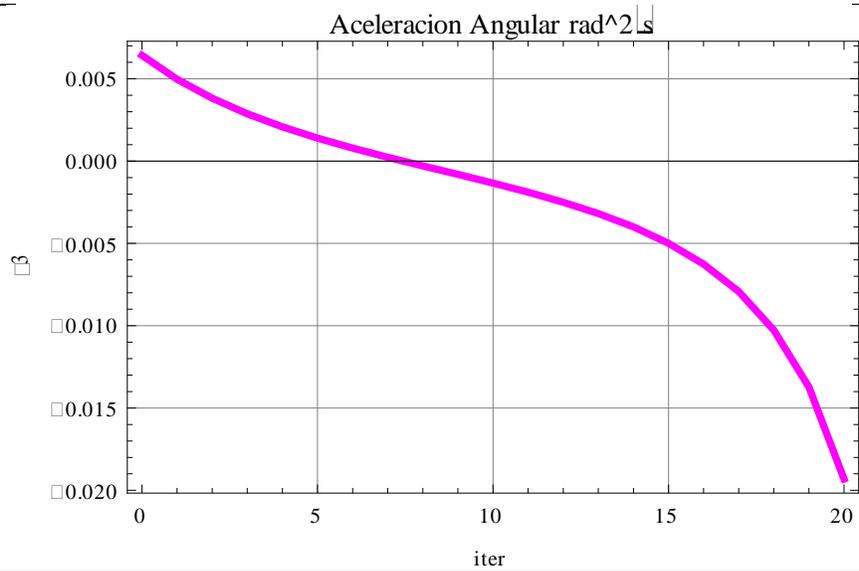
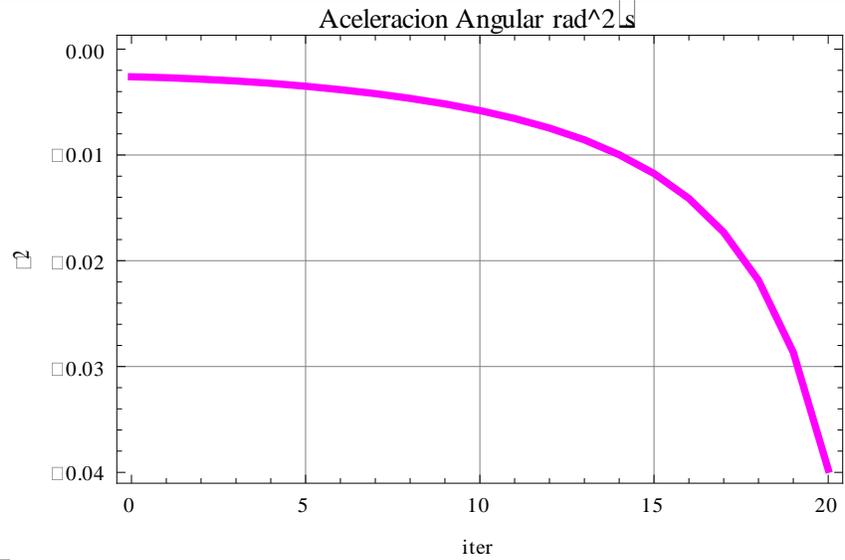
$$\begin{aligned} \text{DerJacobo1} &= D[\text{Jacobo1}, b1] * dv11 + D[\text{Jacobo1}, \theta_1] * \omega11 + D[\text{Jacobo1}, \theta_2] * \omega22 \\ \text{DerJacobo2} &= D[\text{Jacobo2}, b2] * dv22 + D[\text{Jacobo2}, \theta_3] * \omega33 + D[\text{Jacobo2}, \theta_4] * \omega44 \\ \text{DerJacobo3} &= D[\text{Jacobo3}, b3] * dv33 + D[\text{Jacobo3}, \theta_5] * \omega55 + D[\text{Jacobo3}, \theta_6] * \omega66 \end{aligned}$$

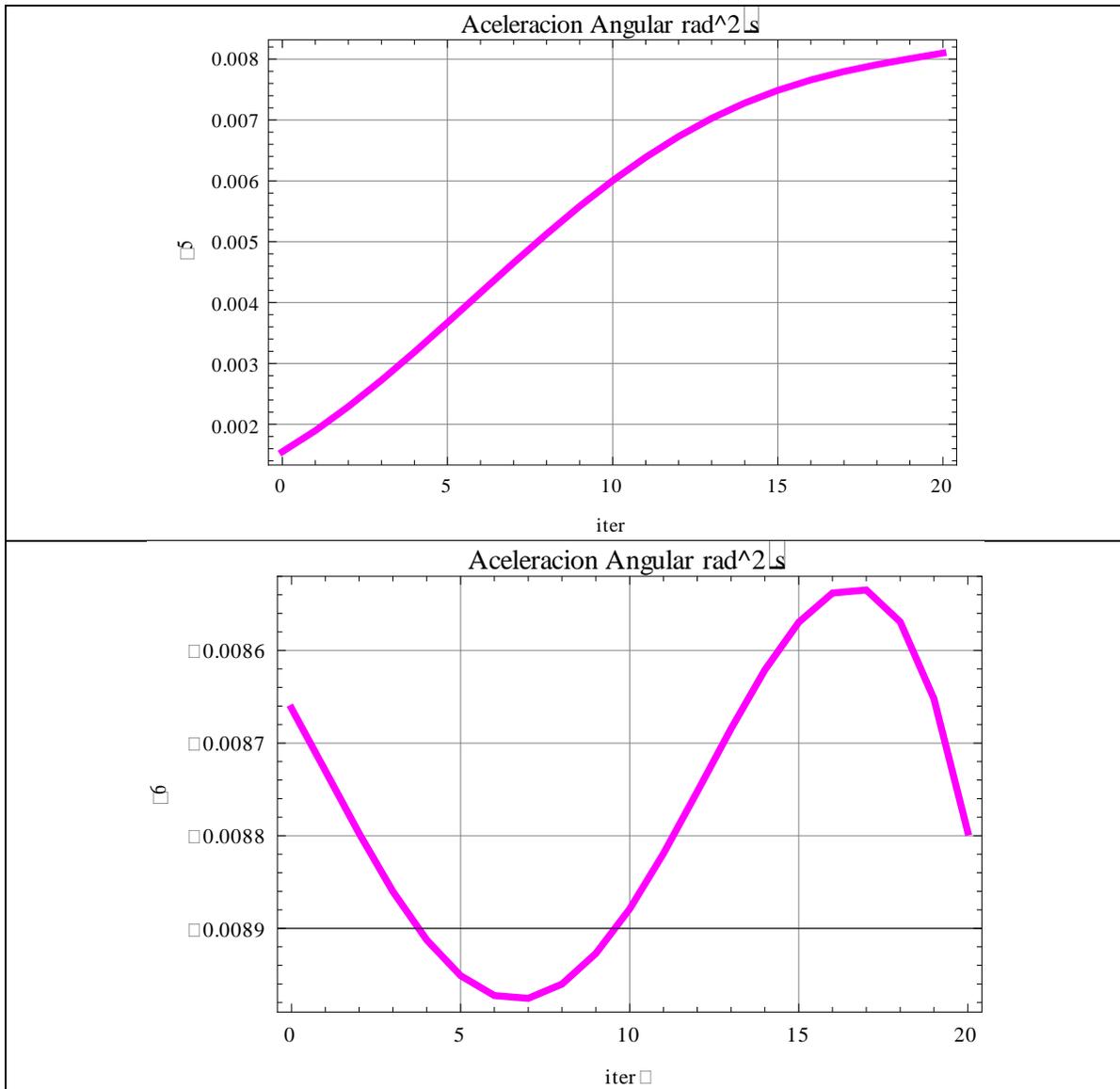
El sistema de ecuaciones a resolver numéricamente es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Eacel1: } a_z(1) - a_x(1) &= 0 \\ \text{Eacel2: } a_y(1) - a_x(1) &= 0 \\ \text{Eacel3: } a_z(2) - a_y(2) &= 0 \\ \text{Eacel4: } a_x(2) - a_y(2) &= 0 \\ \text{Eacel5: } a_y(3) - a_z(3) &= 0 \\ \text{Eacel6: } a_x(3) - a_z(3) &= 0 \end{aligned}$$

Para una aceleración igual a 0 de los actuadores en las juntas prismáticas del mecanismo se obtienen las siguientes gráficas:







Imágen31 Aceleración angular de las juntas no actuadas

## 8. Análisis estático

En general, para el control del movimiento del mecanismo así como el dimensionamiento de sus partes que lo componen y la elección de los actuadores, se deben considerar cuidadosamente las fuerzas que influyen en el mecanismo provenientes de otras fuentes tales como: la fuerza de gravedad, las fuerzas de las cargas aplicadas, las fuerzas inerciales, etc.

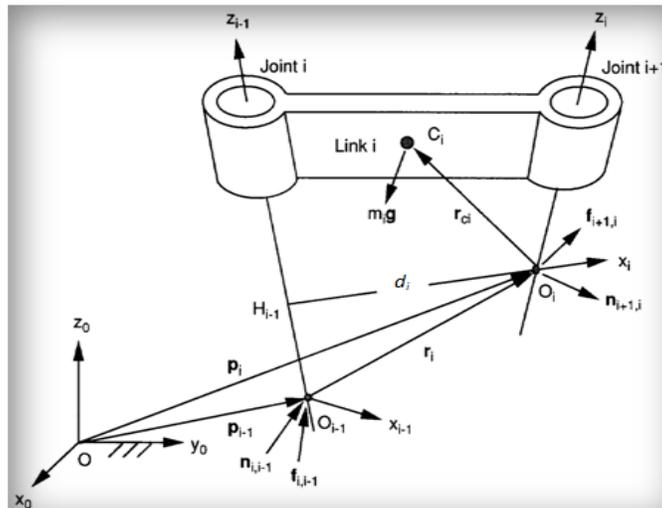
El análisis estático excluye las fuerzas inerciales pero resulta importante para determinar las fuerzas que requieren aplicar los actuadores para sostener una determinada posición y orientación del mecanismo y balancear las cargas externas aplicadas.

Para un mecanismo paralelo estas fuerzas se distribuyen a través de sus diferentes cadenas de lazo cerrado.

### 8.1 Descripción del método

#### 8.1.1 Fuerzas y momentos de equilibrio de un mecanismo

La figura anexa representa las fuerzas y momentos que actúan en un vínculo  $i$  que está conectado al vínculo  $i-1$  por la junta  $i$ , y al vínculo  $i+1$  por la junta  $i+1$ .



Imágen32 Fuerzas y momentos actuando sobre el vínculo  $i$ . (Tsai, 1999)

$f_{i+1,i}$ : fuerza resultante ejercida sobre el eslabón  $i+1$  por el vínculo  $i$  en  $O_i$ ,  
 $f_{i,i+1} = -f_{i+1,i}$ .

$g$ : aceleración de la gravedad.

$m_i$ : masa del vínculo  $i$ .

$n_{i+1,i}$ : momento resultante ejercido sobre el vínculo  $i+1$  por el eslabón  $i$ , sobre el punto  $O_i$ ,  $n_{i,i+1} = -n_{i+1,i}$ .

$r_{ci}$ : vector de posición del centro de masa del vínculo  $i$  relativo a la trama del vínculo  $i_{th}$ .

$r_i$ : vector de posición de  $O_i$  con respecto a la trama del vínculo  $(i-1)_{th}$ .  
 $r_i = \overline{O_{i-1}O_i}$ .

Por lo tanto las ecuaciones de balance son:

$$f_{i,i-1} - f_{i+1,i} + m_i g = 0 \quad (IV-25)$$

$$n_{i,i-1} - n_{i+1,i} - r_i \times f_{i,i-1} + r_{ci} \times m_i g = 0 \quad (IV-26)$$

$f_{i+1,i}$  y  $n_{i+1,i}$  es la fuerza y momento de reacción entre el vínculo  $i$  y el vínculo  $i+1$ . Para  $i=0$ ,  $f_{1,0}$  y  $n_{1,0}$  representan la fuerza y momento ejercidos sobre el primer eslabón móvil por el vínculo base. Para  $i=n$ ,  $f_{n+1,n}$  y  $n_{n+1,n}$  representan la fuerza y momento ejercidos al exterior por el efector final.

### 8.1.2 Método recursivo

El método recursivo resuelve las fuerzas de reacción y momentos en las juntas de un vínculo a la vez si necesidad de resolver un vector de  $2n$  ecuaciones simultáneamente.

La forma recursiva de las ecuaciones 48 y 49 es:

$$f_{i,i-1} = f_{i+1,i} - m_i g \quad (IV-27)$$

$$n_{i,i-1} = n_{i+1,i} + r_i \times f_{i,i-1} - r_{ci} \times m_i g \quad (IV-28)$$

Las ecuaciones anteriores están expresados en el marco fijo a excepción del vector de posición del centro de masa y el vector de posición del origen de  $O_{i+1}$  que están especificados en la trama del vínculo  $i_{th}$ . Utilizando los términos de los parámetros de DH, en la trama del eslabón  $i_{th}$  se tiene:

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} d_i \\ b_i s \alpha_i \\ b_i c \alpha_i \end{bmatrix} \quad (IV-29)$$

Y en el marco fijo:

$$r_{ci} = R_i^0 {}^i r_{ci} \quad (IV-30)$$

$$r_i = R_i^0 {}^i r_i \quad (IV-31)$$

Una forma alternativa, es calcular las fuerzas de reacción en las juntas y sus momentos en cada trama del eslabón individual. Reescribiendo las ecs. 25 y 26 se tiene:

$${}^i f_{i,i-1} = {}^i f_{i+1,i} - m_i {}^i g \quad (IV-32)$$

$${}^i n_{i,i-1} = {}^i n_{i+1,i} + {}^i r_i \times {}^i f_{i,i-1} - {}^i r_{ci} \times m_i {}^i g \quad (IV-33)$$

Donde para  $i=1$  hasta  $n$ :

$${}^i g = R_{i-1}^i g \quad (IV-34)$$

Y para encontrar los valores en la trama del vínculo  $(i-1)_{th}$ , se realizan las siguientes transformaciones:

$${}^{i-1} f_{i,i-1} = R_i^{i-1} {}^i f_{i,i-1} \quad (IV-35)$$

$${}^{i-1} n_{i,i-1} = R_i^{i-1} {}^i n_{i,i-1} \quad (IV-36)$$

Por lo tanto si las fuerzas y momentos se salida en el efector final son especificadas en el marco fijo, en la trama del efector final queda:

$${}^n f_{n+1,n} = R_0^n {}^0 f_{n+1,n}$$

$${}^n n_{n+1,n} = R_0^n {}^0 n_{n+1,n}$$

### 8.1.3 Pares equivalentes en las juntas

Para una junta prismática, la fuerza del actuador es ejercido a lo largo del eje de la junta  $i_{th}$ . Y si se omite la consideración de la fuerza de fricción, la fuerza del actuador,  $\tau_i$ , esta dado por:

$$\tau_i = z_{i-1}^T f_{i,i-1} \quad (IV-37)$$

Donde  $z_{i-1}^T$  es un vector unitario apuntando a lo largo del eje positivo de la junta  $i$ th.

Similarmente, para una junta revoluta, la fuerza del actuador ejerce un torque sobre el eje de la junta  $i$ th. Por lo tanto el torque del actuador es:

$$\tau_i = z_{i-1}^T n_{i,i-1} \quad (\text{IV-38})$$

## 8.2 Análisis del mecanismo paralelo 3-PRRR

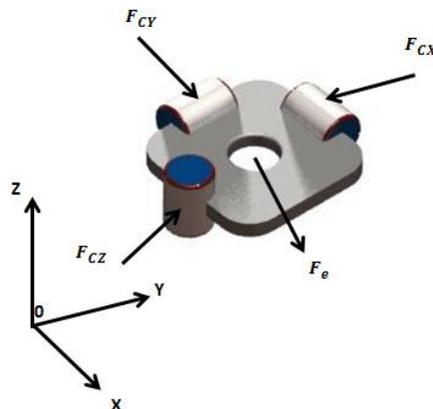
Los tipos de fuerza que actúan en cualquiera de los elementos del mecanismo paralelo pueden ser de carácter interno o externo tales como el propio peso de los elementos. Tales fuerzas pueden generar momentos de torsión o de flexión que implican la deformación del cuerpo creando esfuerzos que implican la vida útil del cuerpo. Estas fuerzas y momentos también demandarán a los actuadores del sistema un determinado torque o fuerza para mantener en equilibrio al mecanismo.

Para solucionar el sistema se aplica a cada cadena cinemática el análisis recursivo anteriormente visto así como la aplicación de la 2da y 3ra ley de Newton, esto es:

$$\sum F = 0 \text{ y } \sum M = 0$$

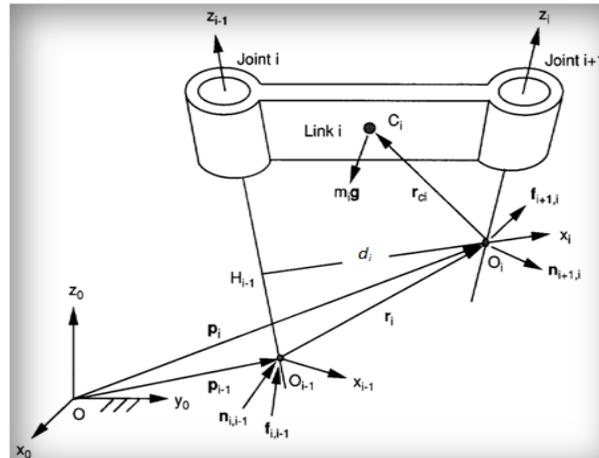
La  $\sum F = 0$  se aplica en el efector final y  $\sum M = 0$  se aplica en las juntas revolutas de cada cadena cinemática.

El análisis parte del diagrama de equilibrio del efector final:



Imágen33 Diagrama de cuerpo libre del efector final

Posteriormente se aplica el método recursivo a cada vínculo.



Imágen34 Diagrama de cuerpo libre del vínculo i

Datos:

$$g = \{0, 0, -9.8\};$$

$$F_{CZ} = \{f_{x1}, f_{y1}, f_{z1}\}[\text{N}]; \text{ (Fuerza ejercida por la cadena z)}$$

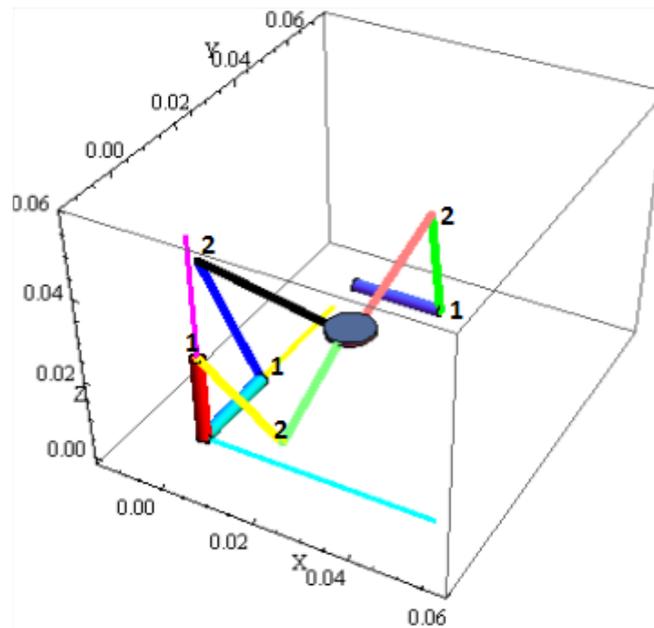
$$F_{CY} = \{f_{x2}, f_{y2}, f_{z2}\}[\text{N}]; \text{ (Fuerza ejercida por la cadena y)}$$

$$F_{CX} = \{f_{x3}, f_{y3}, f_{z3}\}[\text{N}]; \text{ (Fuerza ejercida por la cadena x)}$$

$$F_e = \{0.2, -0.2, 0.2\} [\text{N}]; \text{ (Fuerza externa)}$$

$$n_e = \{0, 0, 0\}; \text{ (Momento externo)}$$

$$m = 0.025 [\text{Kg}]; \text{ (masa de los vínculos)}$$



Imágen35 Enumeración de las juntas revolutas no actuadas para cada cadena cinemática del mecanismo paralelo

Ecuaciones primera cadena (eje X):

$$\begin{aligned} f_{21} &= F_{CZ} - m_2 g \\ n_{21} &= 0 + r_{02} \times f_{21} - r_{c02} \times m_2 g \\ f_{10} &= f_{21} - m_1 g \\ n_{10} &= n_{21} + r_{01} \times f_{10} - r_{c01} \times m_1 g \end{aligned}$$

Ecuaciones segunda cadena (eje Y):

$$\begin{aligned} f_{21b} &= F_{CY} - m_4 g \\ n_{21b} &= 0 + r_{04} \times f_{21b} - r_{c04} \times m_4 g \\ f_{10b} &= f_{21b} - m_3 g \\ n_{10b} &= n_{21b} + r_{03} \times f_{10b} - r_{c03} \times m_3 g \end{aligned}$$

Ecuaciones tercera cadena (eje X):

$$\begin{aligned} f_{21c} &= F_{CZ} - m_6 g \\ n_{21c} &= 0 + r_{06} \times f_{21c} - r_{c06} \times m_6 g \\ f_{10c} &= f_{21c} - m_5 g \\ n_{10c} &= n_{21c} + r_{05} \times f_{10c} - r_{c05} \times m_5 g \end{aligned}$$

Solución:

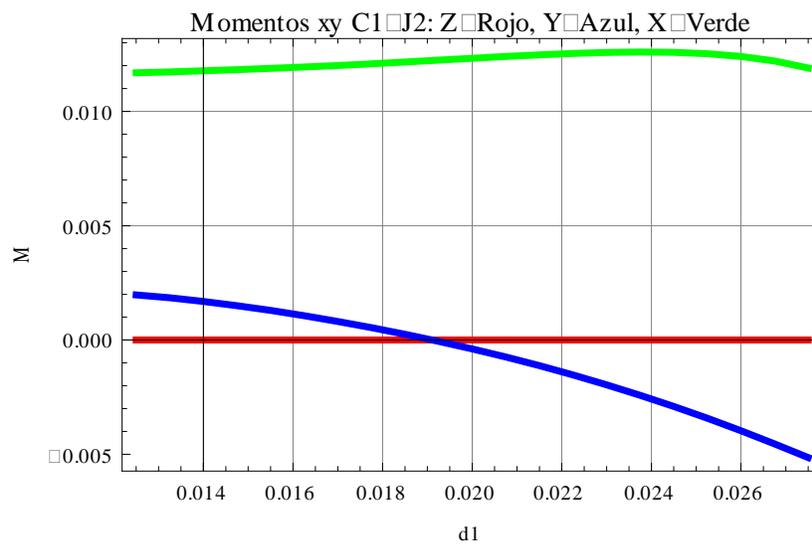
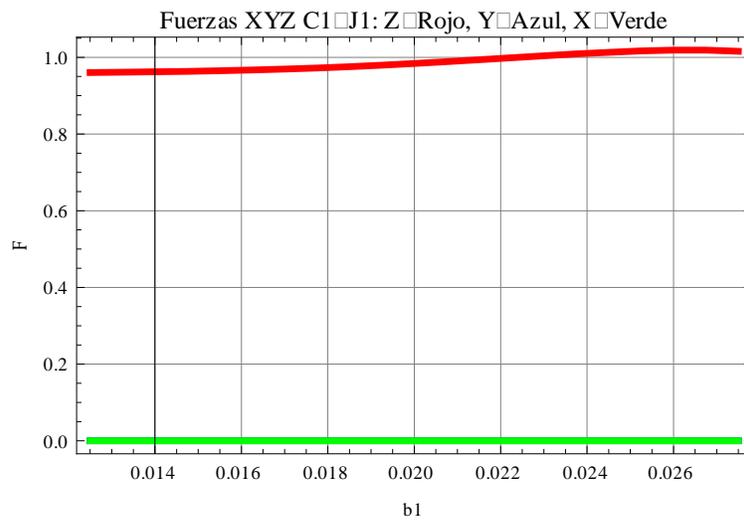
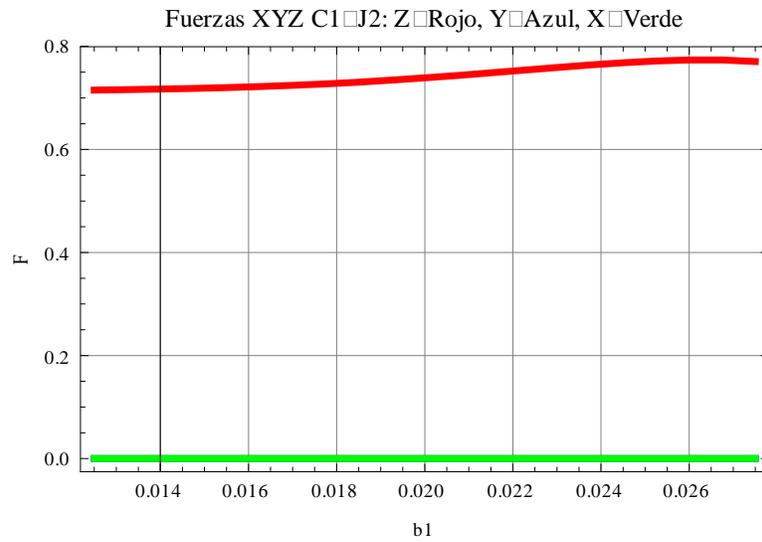
$$\sum F: F_{CX} + F_{CY} + F_{CZ} - F_e + m_p * g = 0$$

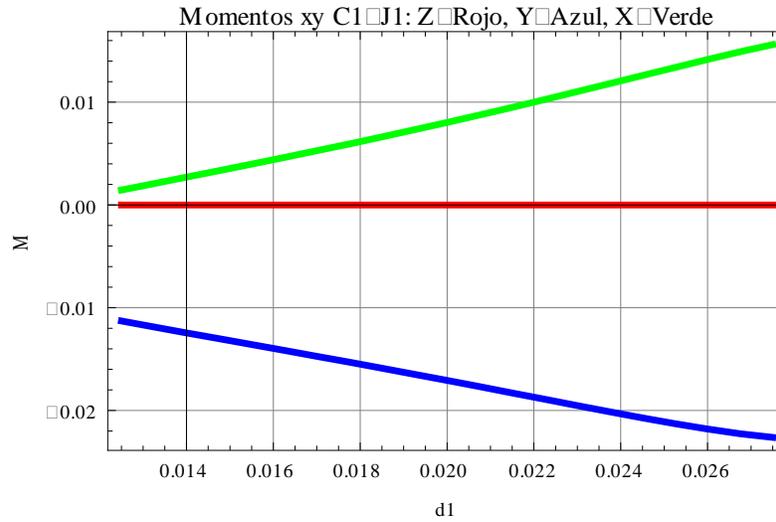
Y los momentos en el eje de las juntas revolutas no actuadas deben ser igual a 0, esto es:

$$\begin{aligned} n_{21}[3] &= 0 \\ n_{10}[3] &= 0 \\ n_{21b}[2] &= 0 \\ n_{10b}[2] &= 0 \\ n_{21c}[1] &= 0 \\ n_{10c}[1] &= 0 \end{aligned}$$

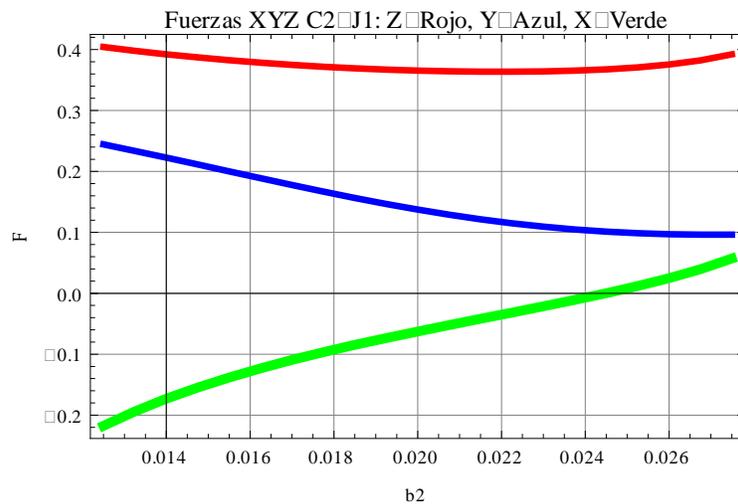
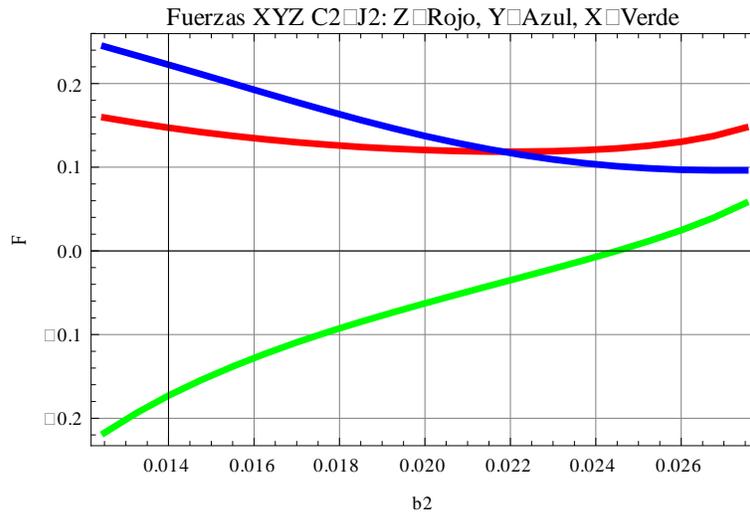
Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes gráficas:

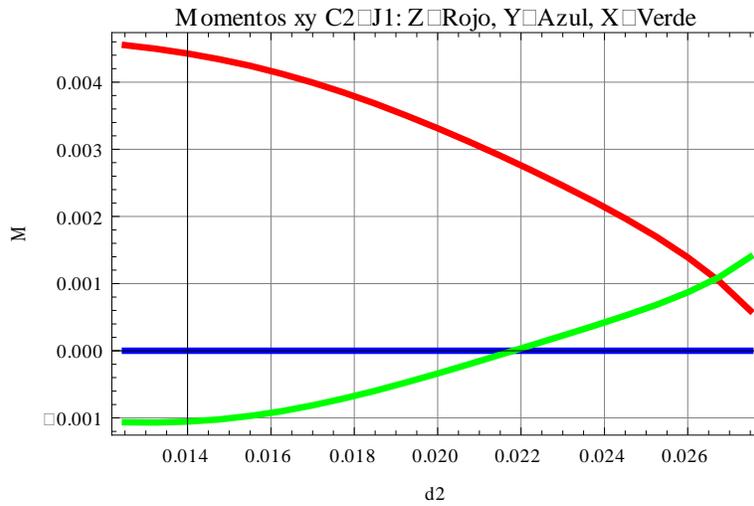
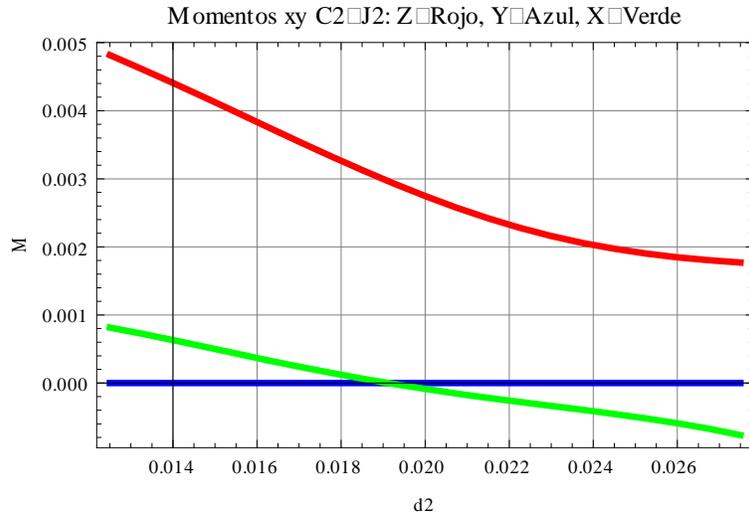
a. Fuerzas y momentos en las juntas de la cadena cinemática del eje Z:



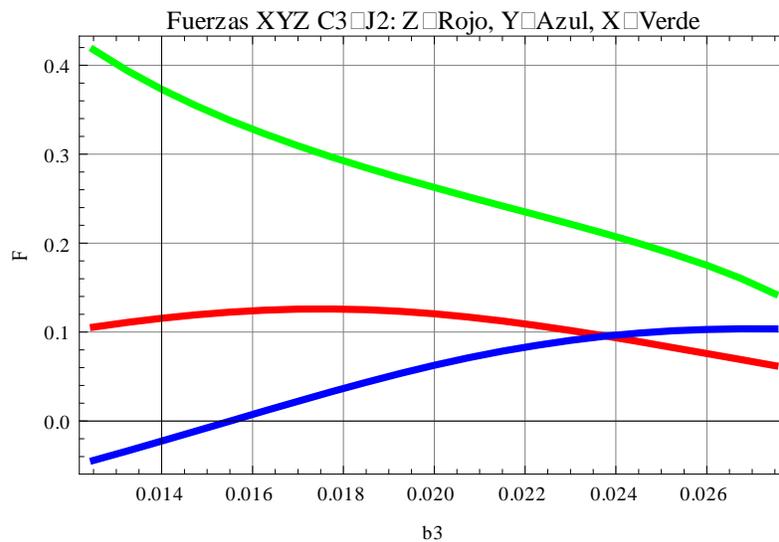


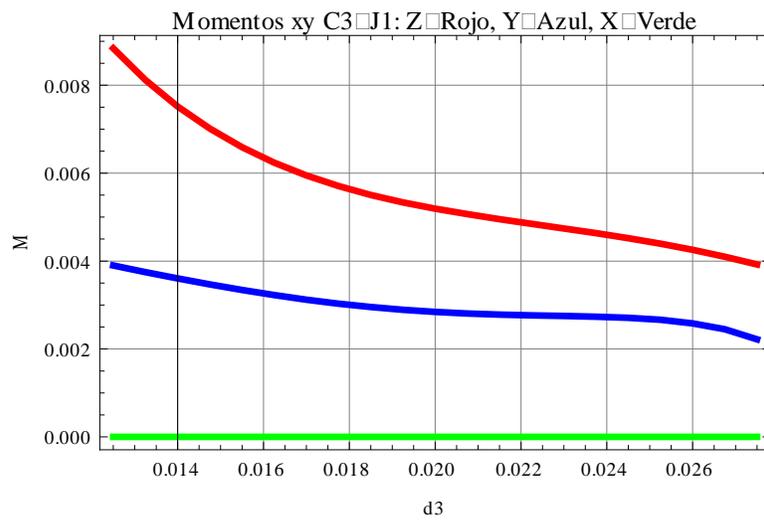
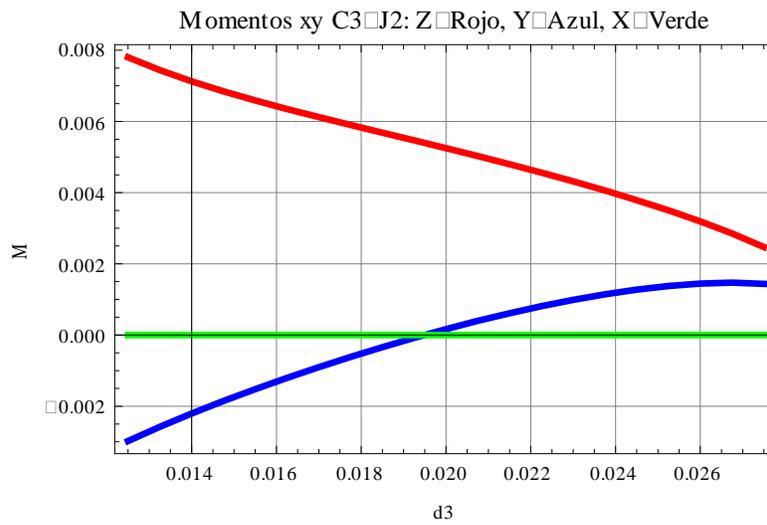
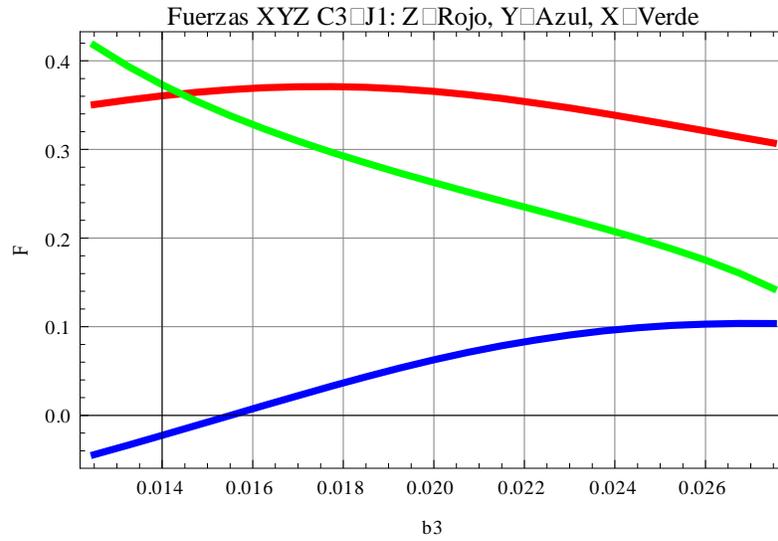
b. Fuerzas y momentos en las juntas de la cadena cinemática del eje Y:





c. Fuerzas y momentos en las juntas de la cadena cinemática del eje X:





## 9. Análisis dinámico

La dinámica es la ciencia del movimiento que describe cómo y por qué un movimiento ocurre cuando fuerzas y momentos son aplicados sobre los cuerpos.

En el caso de la Robótica, las ecuaciones dinámicas de movimiento de los mecanismos son imprescindibles para determinar las ecuaciones fundamentales de control.

Para el análisis dinámico, los vínculos del mecanismo son modelados como cuerpos rígidos y sus ecuaciones de movimiento traslacional o rotacional deben ser expresados en los marcos de referencia locales o con respecto al marco de referencia global.

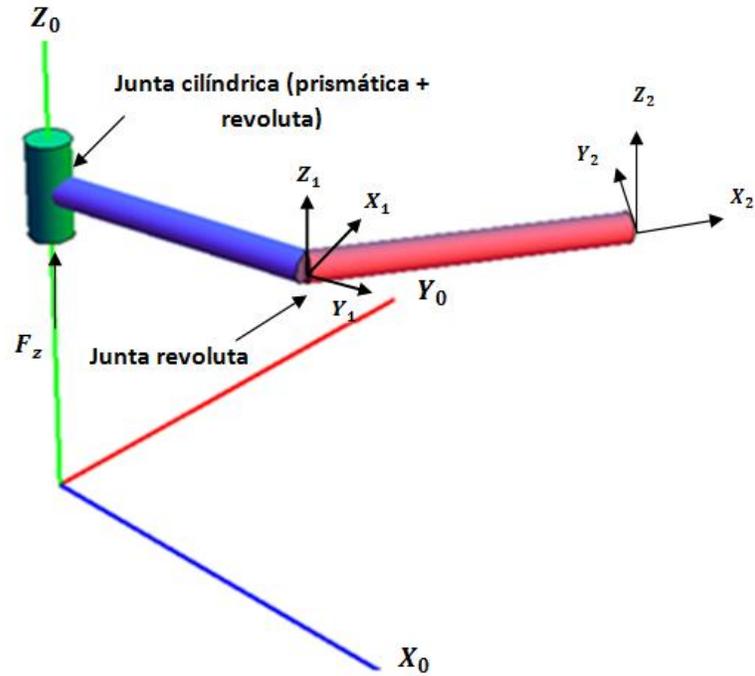
Para cumplir con el objetivo del proyecto, el análisis que se llevó a cabo fue el denominado: análisis dinámico directo.

Los pasos que se llevaron a cabo fueron:

- ☞ Aplicación el método recursivo de Newton-Euler a cada una de las cadenas.
- ☞ Solución del sistema de ecuaciones obtenidas junto con la ecuación que relaciona las 3 cadenas.

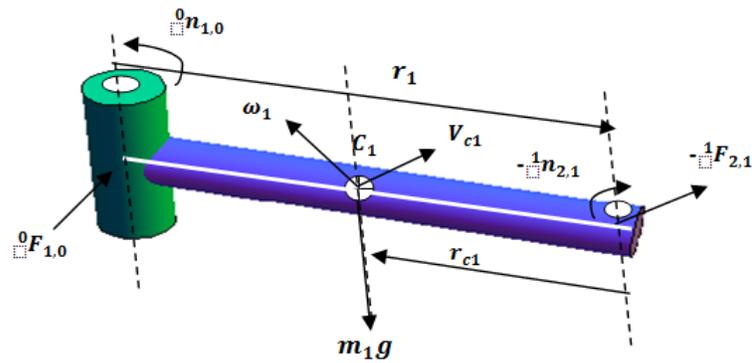
### 9.1 Análisis cadena Z

Las juntas revolutas poseen libertad de giro alrededor del eje Z y la junta prismática está actuada linealmente. La fuerza, que aplica el actuador lineal, está representada por  $F_z$ .

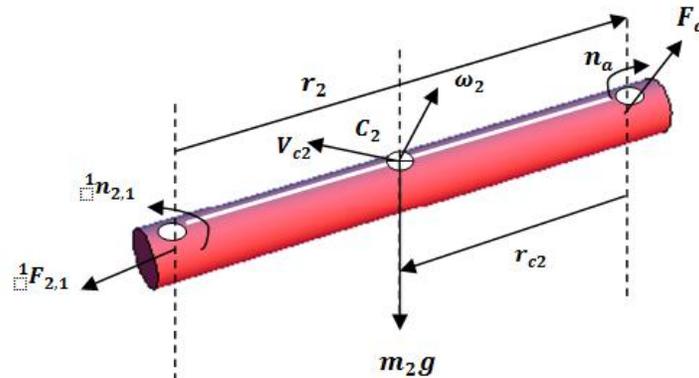


Imágen36 Representación de los sistemas locales en la cadena Z

A continuación se muestran los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los vínculos de la cadena Z.



Imágen37 Diagrama de cuerpo libre vínculo 1 (cadena z)

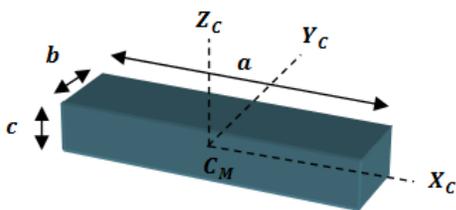


Imágen38 Diagrama de cuerpo libre vínculo 2 (cadena z)

Asumiendo que los eslabones son homogéneos de longitud  $l$ , entonces los vectores  $r_1, r_2, r_{c1}$  y  $r_{c2}$  están dados por:

$$r_1 = r_2 \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{c1} = r_{c2} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y si, además, los dos eslabones son modelados como barras rectangulares, entonces su centro de gravedad se encuentra ubicado justamente en el centro geométrico, lo cual facilita el cálculo de la matriz de:



$$I = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & & \\ & c^2 + a^2 & \\ & & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

Para este proyecto, el espesor ( $c$ ) del eslabón no es considerado en el cálculo de la matriz de inercia por ser despreciable en comparación de su longitud y el ancho ( $b$ ) es tomado en cuenta como al menos la cuarta parte de la longitud total del eslabón, por lo que se tiene:

$$I_i = \frac{m_i}{12} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} l^2 & & \\ & l^2 & \\ & & \frac{17}{16} l^2 \end{bmatrix}$$

## a) Cálculo hacia adelante

Para el cálculo de la velocidad y aceleración angular así como de la velocidad y aceleración lineal de cada vínculo en términos de su precedente vínculo se consideran las siguientes condiciones iniciales:

$${}^0\omega_0 = 0, \quad {}^0\alpha_0 = 0, \quad {}^0v_0 = 0, \quad {}^0\dot{v}_0 = 0$$

Siendo el vector de aceleración de la gravedad el siguiente:

$${}^0g = [0 \quad 0 \quad -g_c]^T$$

Donde,  $g_c = 9.8 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$

Al aplicar las ecuaciones del cálculo hacia adelante del método recursivo de Newton-euler se obtiene para el vínculo 1 el siguiente resultado:

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_1 = l \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\dot{v}_{c1} = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La aceleración de la gravedad expresada en el sistema de referencia local del primer vínculo no se ve afectada, esto es:

$${}^1g = {}^1R_0 {}^0g = [0 \quad 0 \quad -g_c]^T$$

Luego al calcular las aceleraciones y velocidades del vínculo 2 se obtiene:

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_2 = l \begin{bmatrix} (\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 c\theta_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ (\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2) + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_{c2} = l \begin{bmatrix} (\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 c\theta_2) - \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ (\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2) + \frac{1}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La aceleración de la gravedad expresada en el marco de referencia local del segundo vínculo es:

$${}^2g = {}^2R_1 {}^1g = [0 \quad 0 \quad -g_c]^T$$

b) Cálculo hacia atrás

Con los datos anteriores se procede a calcular las fuerzas de las juntas de cada vínculo. Para ello se aplican las ecuaciones recursivas de balance de fuerza y momento inercial.

Vínculo 2:

Primero se obtienen la fuerza y momento inercial ejercidos en el centro de masa del vínculo 2, esto es:

$${}^2f_2^* = -m_2 {}^2\dot{v}_{c2}$$

$${}^2n_2^* = -{}^2I_2 {}^2\alpha_2 - {}^2\omega_2 \times ({}^2I_2 {}^2\omega_2)$$

Posteriormente se obtienen la fuerza y momento de la junta del vínculo 2 expresados en el marco del vínculo 2:

$${}^2f_{2,1} = {}^2f_{3,2} - m_2 {}^2g - {}^2f_2^*$$

$${}^2n_{2,1} = {}^2n_{3,2} + ({}^2r_2 + {}^2r_{c2}) \times {}^2f_{2,1} - {}^2r_{c2} \times {}^2f_{3,2} - {}^2n_2^*$$

Siendo:

$$\begin{aligned} {}^2f_{3,2} &= f_a \\ {}^2n_{3,2} &= n_a = 0 \end{aligned}$$

Finalmente la fuerza y momento obtenido se expresan en el marco de referencia local del vínculo 1, esto es:

$$\begin{aligned} {}^1f_{2,1} &= {}^1R_2 {}^2f_{2,1} \\ {}^1n_{2,1} &= {}^1R_2 {}^2n_{2,1} \end{aligned}$$

Vínculo 1:

La fuerza y momento inercial ejercidos en el centro de masa del vínculo 1, son:

$$\begin{aligned} {}^1f_1^* &= -m_1 {}^1\dot{v}_{c1} \\ {}^1n_1^* &= -{}^1I_1 {}^1\alpha_1 - {}^1\omega_1 \times ({}^1I_1 {}^1\omega_1) \end{aligned}$$

La fuerza y momento del vínculo 1 expresados en el marco del vínculo 1 son:

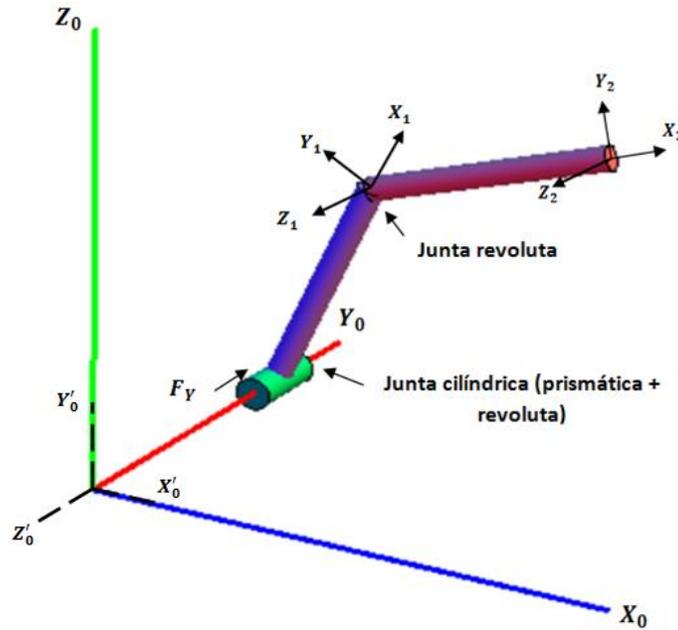
$$\begin{aligned} {}^1f_{1,0} &= {}^1f_{2,1} - m_1 {}^1g - {}^1f_1^* \\ {}^1n_{1,0} &= {}^1n_{2,1} + ({}^1r_1 + {}^1r_{c1}) \times {}^1f_{1,0} - {}^1r_{c1} \times {}^1f_{2,1} - {}^1n_1^* \end{aligned}$$

Finalmente la fuerza y momento obtenido se expresan en el marco global, esto es:

$$\begin{aligned} {}^0f_{1,0} &= {}^0R_1 {}^1f_{1,0} \\ {}^0n_{1,0} &= {}^0R_1 {}^1n_{1,0} \end{aligned}$$

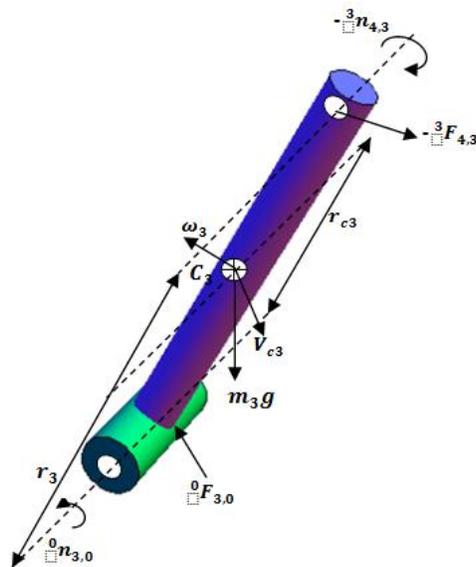
## 9.2 Análisis cadena Y

Tal y como se muestra en la imagen inferior, se ha establecido un marco de referencia global auxiliar cuyo eje  $Z'_0$  es paralelo al eje de las juntas. Este sistema global auxiliar facilita su análisis dinámico.

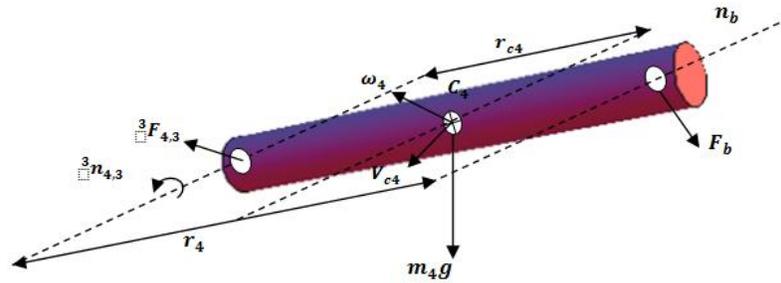


Imágen39 Representación de los sistemas locales en la cadena Y

Los diagramas de cuerpo libre útiles para el análisis son:



Imágen40 Diagrama de cuerpo libre del vínculo 1 (cadena Y)



Imágen41Diagrama de cuerpo libre del vínculo 2 (cadena Y)

Para llevar un orden numérico de los vínculos del mecanismo completo, al vínculo 1 y 2 de la cadena Y se le ha nombrado vínculo 3 y vínculo 4, por lo cual los vectores del diagrama de cuerpo libre están numerados en acorde a esta consideración.

Los vectores  $r_3$ ,  $r_4$ ,  $r_{c3}$  y  $r_{c4}$  están dados por:

$$r_3 = r_4 \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{c3} = r_{c4} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de inercia con respecto a su centro de masa se calcula igual que en el caso anterior, resultando:

$$I_i = \frac{m_i}{12} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} l^2 & & \\ & l^2 & \\ & & \frac{17}{16} l^2 \end{bmatrix}$$

a) Cálculo hacia adelante

Como condiciones iniciales se tiene que:

$${}^0\omega_0 = 0, \quad {}^0\alpha_0 = 0, \quad {}^0v_0 = 0, \quad {}^0\dot{v}_0 = 0$$

El vector de aceleración de la gravedad es:

$${}^0g = [0 \quad 0 \quad -g_c]^T$$

Donde,  $g_c = 9.8 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$

Al aplicar las ecuaciones del cálculo hacia adelante del método recursivo de Newton-Euler se obtiene para el vínculo 3 el siguiente resultado:

$${}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad {}^3\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^3\dot{v}_3 = l \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3^2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\dot{v}_{c3} = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3^2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo el vector de aceleración de gravedad, representado en el sistema coordenado local del vínculo 3, el siguiente:

$${}^3g = {}^3R_a {}^aR_0 {}^0g = [-g_c s\theta_3 \quad -g_c c\theta_3 \quad 0]^T$$

Donde  ${}^aR_0$  es la transformación de rotación para pasar del sistema de referencia global al sistema de referencia auxiliar global.

Luego al calcular las aceleraciones y velocidades del vínculo 4 se obtiene:

$${}^4\omega_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$${}^4\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$${}^4\dot{v}_4 = l \begin{bmatrix} (\ddot{\theta}_3 s\theta_4 - \dot{\theta}_3^2 c\theta_4) - (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 \\ (\ddot{\theta}_3 c\theta_4 + \dot{\theta}_3^2 s\theta_4) + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4\dot{v}_{c4} = l \begin{bmatrix} (\ddot{\theta}_3 s\theta_4 - \dot{\theta}_3^2 c\theta_4) - \frac{1}{2}(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 \\ (\ddot{\theta}_3 c\theta_4 + \dot{\theta}_3^2 s\theta_4) + \frac{1}{2}(\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La aceleración de la gravedad expresada en el marco de referencia local del segundo vínculo es:

$${}^4g = {}^4R_3 {}^3g = [-g_c s(\theta_3 + \theta_4) \quad -g_c c(\theta_3 + \theta_4) \quad 0]^T$$

## b) Cálculo hacia atrás

Con la consideración anterior de que el vínculo 1 de la cadena 'Y' es nombrado vínculo 3 y el vínculo 2 de la misma cadena se renombra como vínculo 4, se obtienen las ecuaciones correspondientes a las fuerzas de las juntas de cada vínculo al aplicar las ecuaciones recursivas de balance de fuerza y momento inercial.

Vínculo 4:

Primero se obtienen la fuerza y momento inercial ejercidos en el centro de masa del vínculo 4, esto es:

$${}^4f_4^* = -m_4 {}^4\dot{v}_{c4}$$

$${}^4n_4^* = -{}^4I_4 {}^4\alpha_4 - {}^4\omega_4 \times ({}^4I_4 {}^4\omega_4)$$

Posteriormente se obtienen la fuerza y momento de la junta revoluta del vínculo 4 expresados en el marco del vínculo 4:

$${}^4f_{4,3} = {}^4f_{5,4} - m_4 g - {}^4f_4^*$$

$${}^4n_{4,3} = {}^4n_{5,4} + ({}^4r_4 + {}^4r_{c4}) \times {}^4f_{4,3} - {}^4r_{c3} \times {}^4f_{5,4} - {}^4n_4^*$$

Siendo:

$${}^4f_{5,4} = f_b$$

$${}^4n_{5,4} = n_b = 0$$

Finalmente la fuerza y momento obtenido se expresan en el marco de referencia local del vínculo 3, esto es:

$${}^3f_{4,3} = {}^3R_4 {}^4f_{4,3}$$

$${}^3n_{4,3} = {}^3R_4 {}^4n_{4,3}$$

Vínculo 3:

La fuerza y momento inercial ejercidos en el centro de masa del vínculo 3, son:

$${}^3f_3^* = -m_3 {}^3\dot{v}_{c3}$$

$${}^3n_3^* = -{}^3I_3 {}^3\alpha_3 - {}^3\omega_3 \times ({}^3I_3 {}^3\omega_3)$$

La fuerza y momento del vínculo 3 expresados en el marco del vínculo 3 son:

$${}^3f_{3,0} = {}^3f_{4,3} - m_3 {}^3g - {}^3f_3^*$$

$${}^3n_{3,0} = {}^3n_{4,3} + ({}^3r_3 + {}^3r_{c3}) \times {}^3f_{3,0} - {}^3r_{c3} \times {}^3f_{4,3} - {}^3n_3^*$$

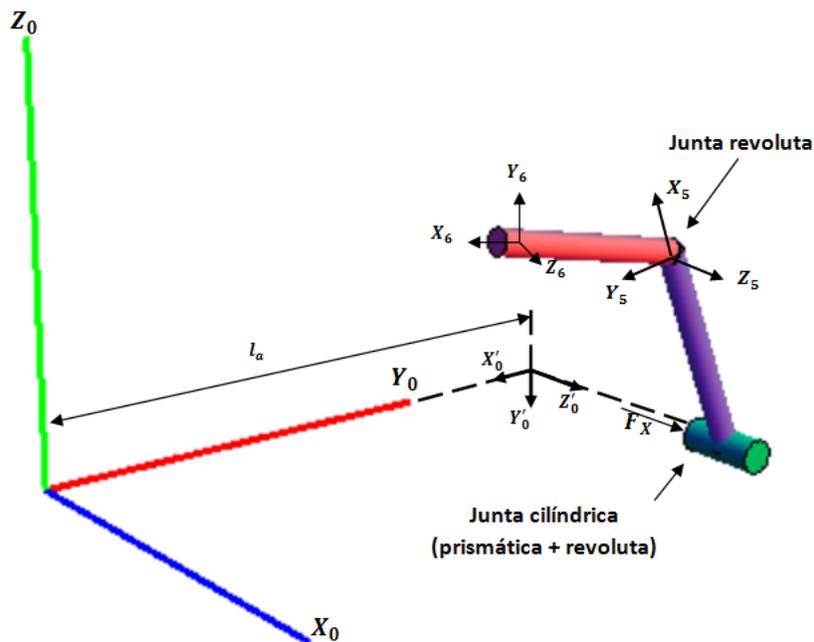
Finalmente la fuerza y momento obtenido se expresan en el marco global, esto es:

$${}^0f_{3,0} = {}^0R_3 {}^3f_{3,0}$$

$${}^0n_{3,0} = {}^0R_3 {}^3n_{3,0}$$

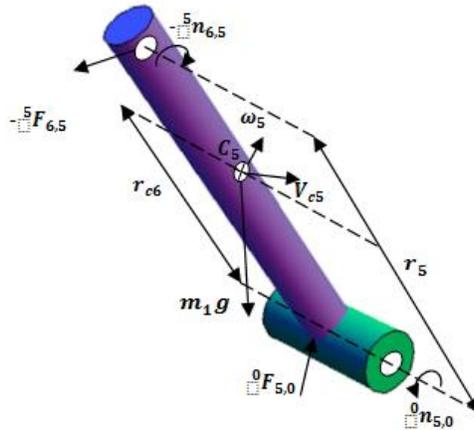
### 9.3 Análisis cadena X

Para aplicar el método recursivo de Newton-Euler en esta cadena, nuevamente se realiza el análisis en base al sistema de referencia global auxiliar  $(X'_0, Y'_0, Z'_0)$  el cuál ha sido resultado de aplicar una transformación de rotación y traslación al sistema de referencia global.

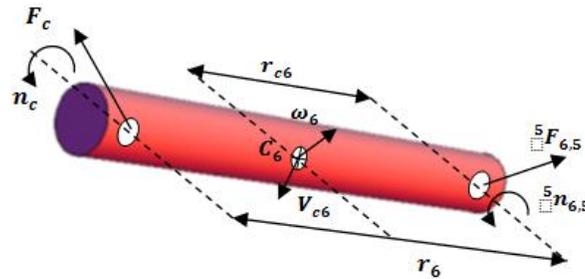


Imágen42Representación de los sistemas locales en la cadena X

Los diagramas de cuerpo libre de los vínculos de la cadena son:



Imágen43 Diagrama de cuerpo libre del vínculo 1 (cadena X)



Imágen44 Diagrama de cuerpo libre del vínculo 2 (cadena X)

Los vínculos de esta cadena se enumeran como vínculo 5 y 6.

Los vectores  $r_5, r_6, r_{c5}$  y  $r_{c6}$  están dados por:

$$r_5 = r_6 = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{c5} = r_{c6} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de inercia con respecto a su centro de masa de cada uno de los vínculos se calcula con:

$$I_i = \frac{m_i}{12} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} l^2 & & \\ & l^2 & \\ & & \frac{17}{16} l^2 \end{bmatrix}$$

a) Cálculo hacia adelante

Como condiciones iniciales se tiene que:

$${}^0\omega_0 = 0, \quad {}^0\alpha_0 = 0, \quad {}^0v_0 = 0, \quad {}^0\dot{v}_0 = 0$$

El vector de aceleración de la gravedad es:

$${}^0g = [0 \quad 0 \quad -g_c]^T$$

Donde,  $g_c = 9.8 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$

Al aplicar las ecuaciones del cálculo hacia adelante del método recursivo de Newton-Euler se obtiene para el vínculo 5 el siguiente resultado:

$${}^5\omega_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}, \quad {}^5\alpha_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix}$$

$${}^5\dot{v}_5 = l \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_5^2 \\ \ddot{\theta}_5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\dot{v}_{c5} = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_5^2 \\ \ddot{\theta}_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo el vector de aceleración de gravedad, representado en el sistema coordenado local del vínculo 5, el siguiente:

$${}^5g = {}^5R_b {}^bR_0 {}^0g = [g_c s\theta_5 \quad g_c c\theta_5 \quad 0]^T$$

Donde  ${}^bR_0$  es la transformación de rotación para pasar del sistema de referencia global al sistema de referencia auxiliar global.

Luego al calcular las aceleraciones y velocidades del vínculo 6 se obtiene:

$${}^6\omega_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

$${}^6\alpha_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

$${}^6\dot{v}_6 = l \begin{bmatrix} (\ddot{\theta}_5 s\theta_6 - \dot{\theta}_5^2 c\theta_6) - (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 \\ (\ddot{\theta}_5 c\theta_6 + \dot{\theta}_5^2 s\theta_6) + (\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^6\dot{v}_{c6} = l \begin{bmatrix} (\ddot{\theta}_5 s\theta_6 - \dot{\theta}_5^2 c\theta_6) - \frac{1}{2}(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 \\ (\ddot{\theta}_5 c\theta_6 + \dot{\theta}_5^2 s\theta_6) + \frac{1}{2}(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La aceleración de la gravedad expresada en el marco de referencia local del segundo vínculo es:

$${}^6g = {}^6R_5 {}^5g = [g_c s(\theta_5 + \theta_6) \quad g_c c(\theta_5 + \theta_6) \quad 0]^T$$

b) Cálculo hacia atrás

Se obtienen las ecuaciones correspondientes a las fuerzas de las juntas de cada vínculo al aplicar las ecuaciones recursivas de balance de fuerza y momento inercial.

Vínculo 6:

Primero se obtienen la fuerza y momento inercial ejercidos en el centro de masa del vínculo 6, esto es:

$${}^6f_6^* = -m_6 {}^6\dot{v}_{c6}$$

$${}^6n_6^* = -{}^6I_6 {}^6\alpha_6 - {}^6\omega_6 \times ({}^6I_6 {}^6\omega_6)$$

Posteriormente se obtienen la fuerza y momento de la junta revolvente del vínculo 6 expresados en el marco del vínculo 6:

$${}^6f_{6,5} = {}^6f_{7,6} - m_6 {}^6g - {}^6f_6^*$$

$${}^6n_{6,5} = {}^6n_{7,6} + ({}^6r_6 + {}^6r_{c6}) \times {}^6f_{6,5} - {}^6r_{c5} \times {}^6f_{7,6} - {}^6n_6^*$$

Siendo:

$${}^6f_{7,6} = f_c$$

$${}^6n_{7,6} = n_c = 0$$

Finalmente la fuerza y momento obtenido se expresan en el marco de referencia local del vínculo 5, esto es:

$${}^5f_{6,5} = {}^5R_6 {}^6f_{6,5}$$

$${}^5n_{6,5} = {}^5R_6 {}^6n_{6,5}$$

Vínculo 5:

La fuerza y momento inercial ejercidos en el centro de masa del vínculo 5, son:

$${}^5f_5^* = -m_5 {}^5\dot{v}_{c5}$$

$${}^5n_5^* = -{}^5I_5 {}^5\alpha_5 - {}^5\omega_5 \times ({}^5I_5 {}^5\omega_5)$$

La fuerza y momento del vínculo 5 expresados en el marco del vínculo 5 son:

$${}^5f_{5,0} = {}^5f_{6,5} - m_5 {}^5g - {}^5f_5^*$$

$${}^5n_{5,0} = {}^5n_{6,5} + ({}^5r_5 + {}^5r_{c5}) \times {}^5f_{5,0} - {}^5r_{c5} \times {}^5f_{6,5} - {}^5n_5^*$$

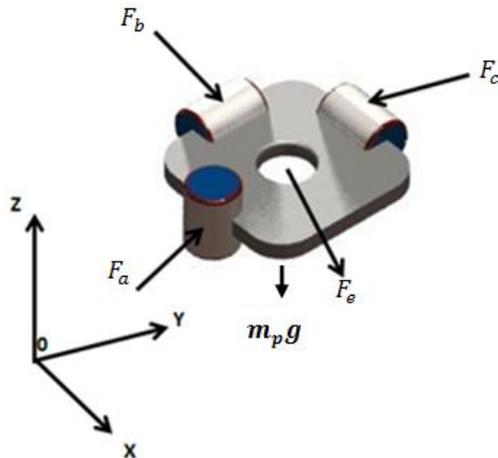
Finalmente la fuerza y momento obtenido se expresan en el marco global, esto es:

$${}^0f_{5,0} = {}^0R_5 {}^5f_{5,0}$$

$${}^0n_{5,0} = {}^0R_5 {}^5n_{5,0}$$

### 9.4 Solución global

Para relacionar las fuerzas  $F_a$ ,  $F_b$  y  $F_c$  que ejercen cada una de las cadenas correspondientes, se plantea el diagrama de cuerpo libre del órgano terminal. En el órgano terminal actúan las fuerzas ejercidas por las cadenas, las fuerzas de corte y su peso.



Imágen45Diagrama de cuerpo libre del efector final

La ecuación de balance de fuerzas sobre el eslabón final es:

$$\sum F_{efectorfinal} := F_a + F_b + F_c + m_p * g - F_{externa}$$

Y puesto que el momento ejercido alrededor del eje de las juntas en los vínculos de cada cadena debe ser cero, entonces se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

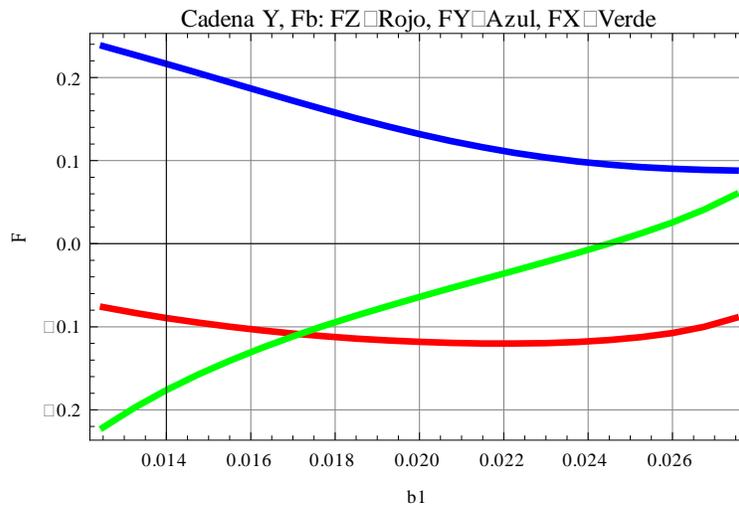
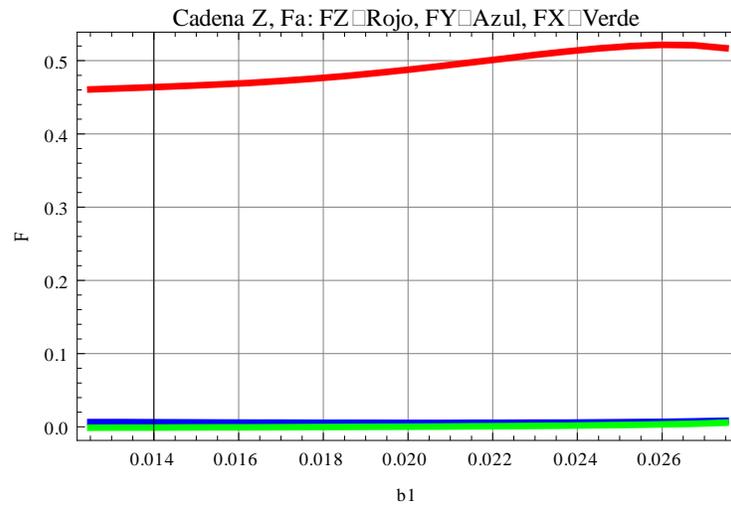
$$\begin{aligned} \sum F_{efectorfinal} &= 0 \\ {}^0n_{1,0}[3] &= 0 \\ {}^0n_{2,1}[3] &= 0 \\ {}^0n_{3,0}[2] &= 0 \\ {}^0n_{4,3}[2] &= 0 \\ {}^0n_{5,0}[1] &= 0 \\ {}^0n_{6,5}[1] &= 0 \end{aligned}$$

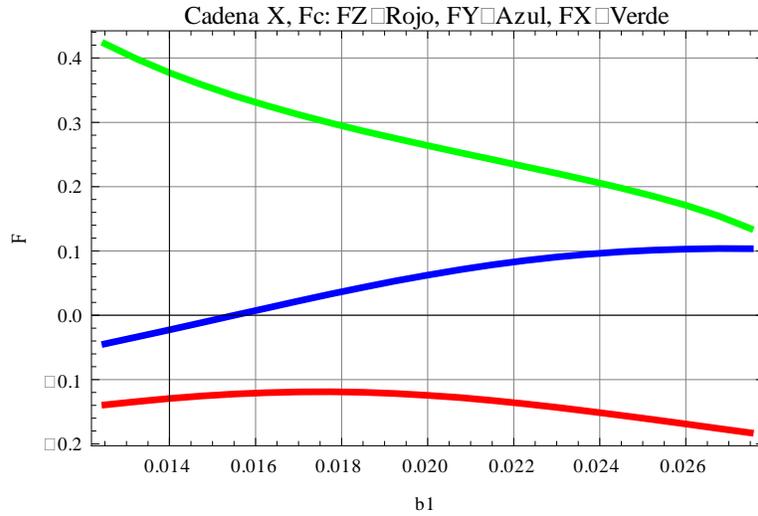
Donde las ecuaciones de momento están expresadas en el sistema coordinado global, esto es:

$$\begin{aligned} {}^0n_{1,0} &= {}^0R_1 {}^1n_{1,0} \\ {}^0n_{2,1} &= {}^0R_1 {}^1n_{2,1} \\ {}^0n_{3,0} &= {}^0R_3 {}^3n_{3,0} \\ {}^0n_{4,3} &= {}^0R_3 {}^3n_{4,3} \\ {}^0n_{5,0} &= {}^0R_5 {}^5n_{5,0} \\ {}^0n_{6,5} &= {}^0R_5 {}^5n_{6,5} \end{aligned}$$

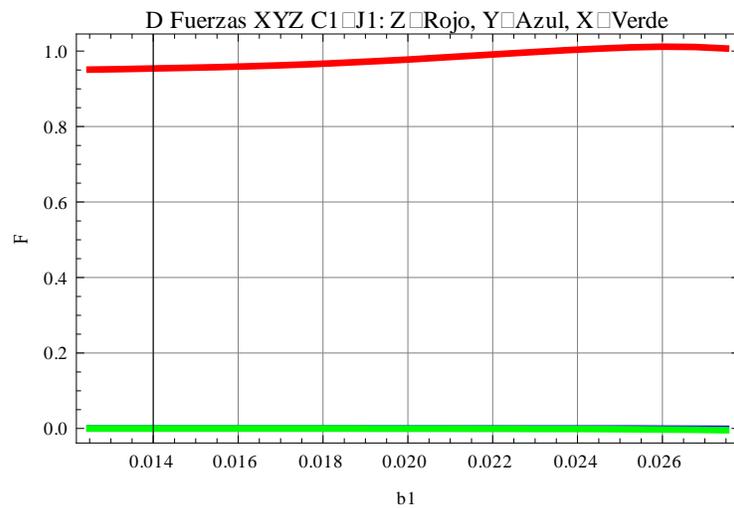
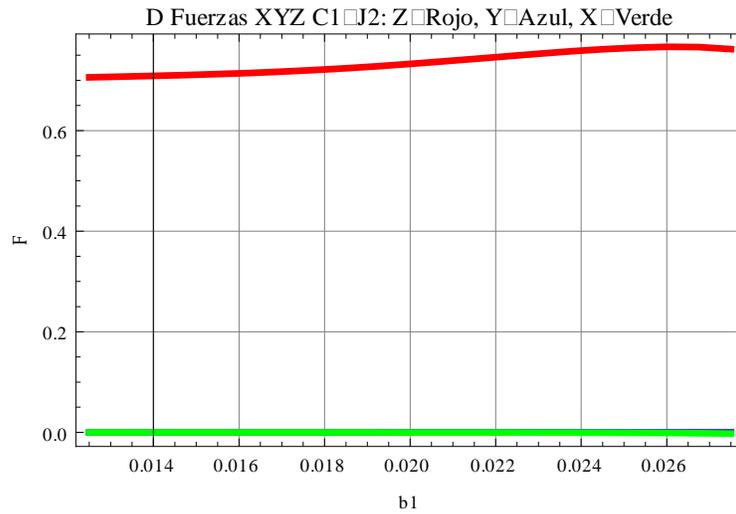
El sistema de ecuaciones está formado por nueve ecuaciones y nueve incógnitas que, al resolverlo, arroja el siguiente resultado:

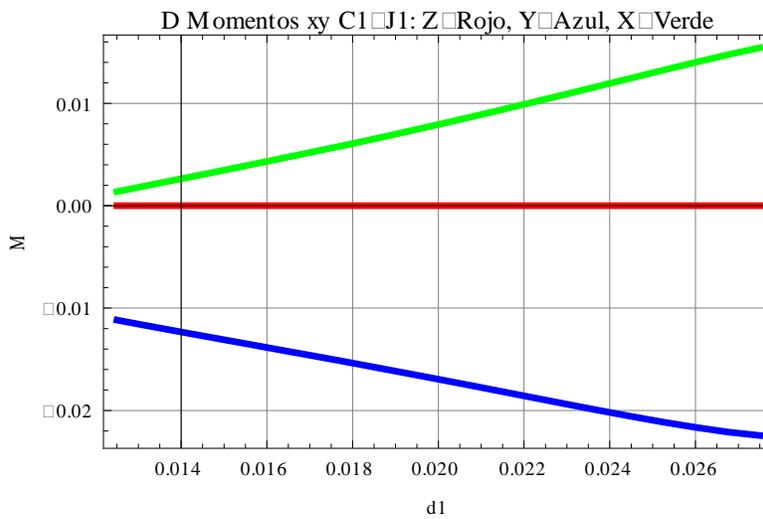
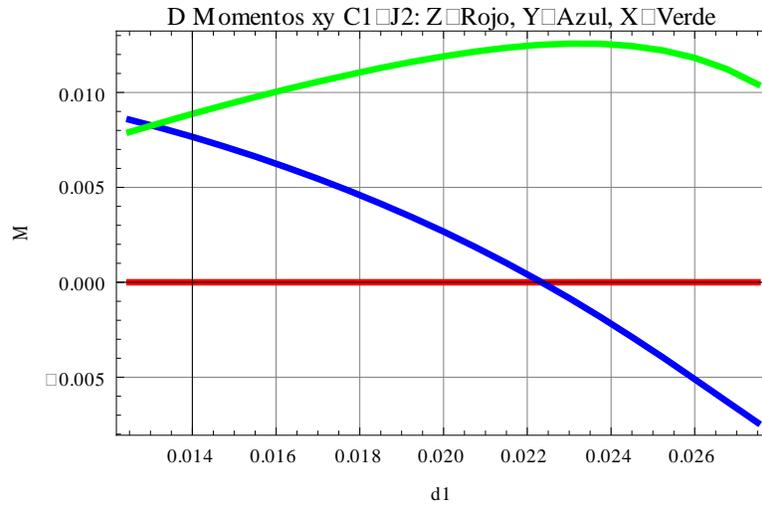
a. Fuerzas ejercidas por cada una de las cadenas.



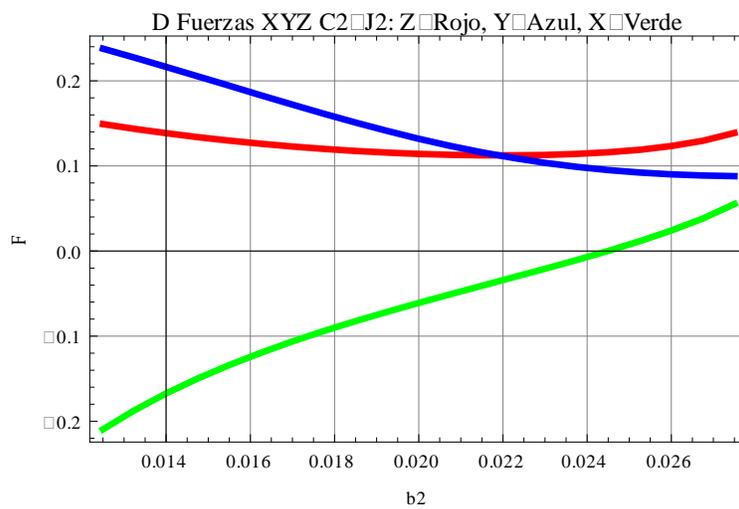


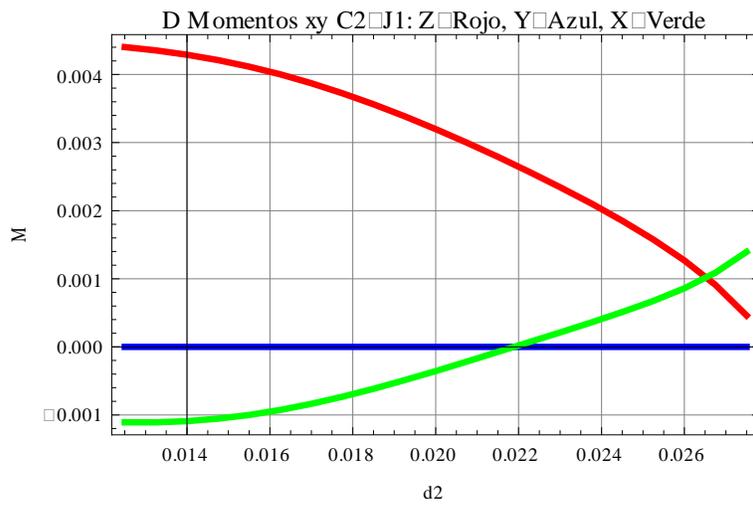
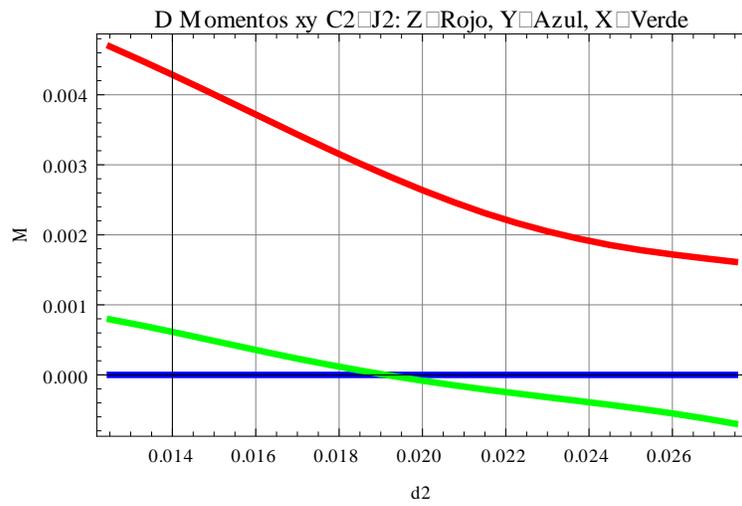
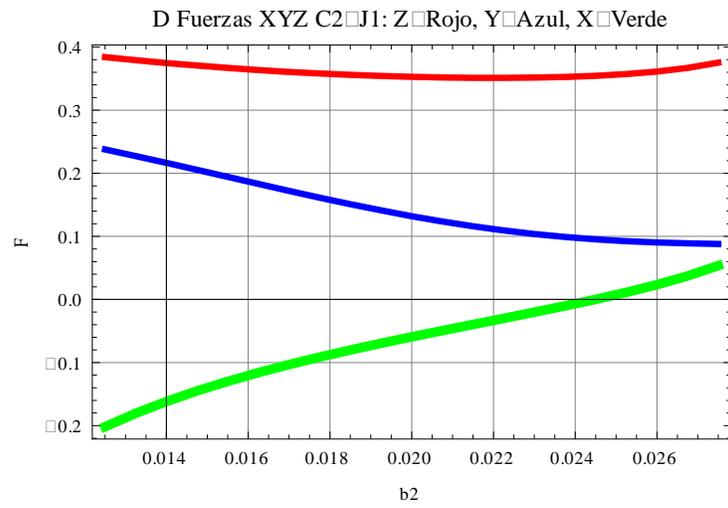
b. Fuerzas y momentos en las juntas de la cadena cinemática del eje Z:



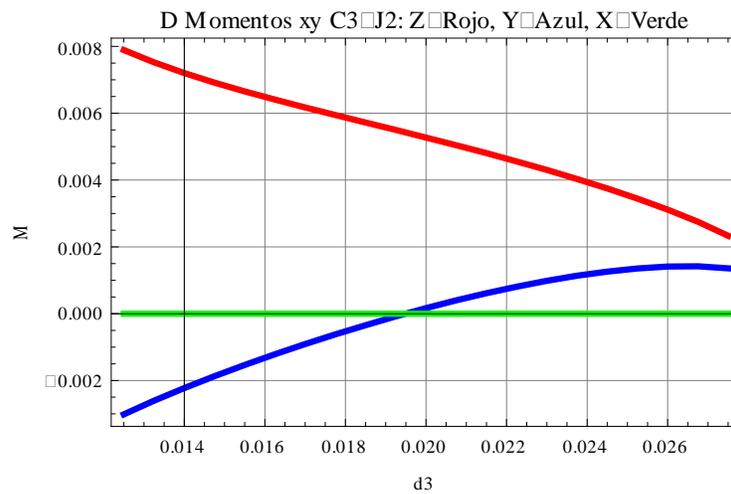
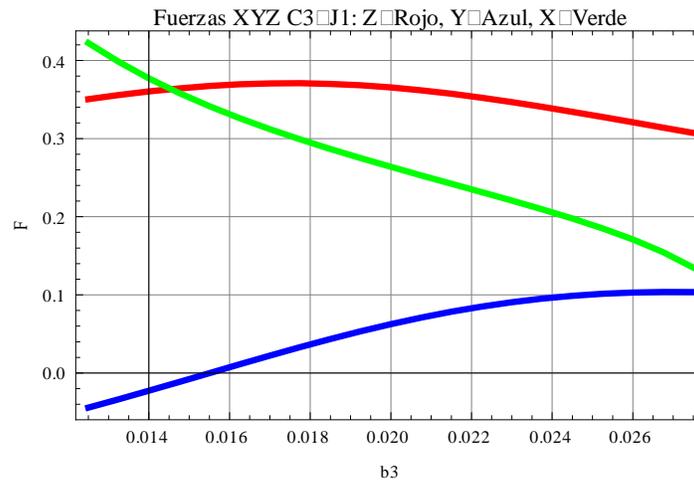
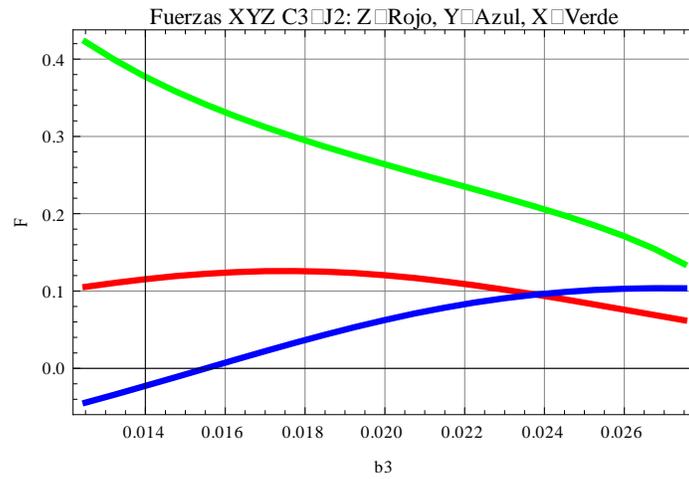


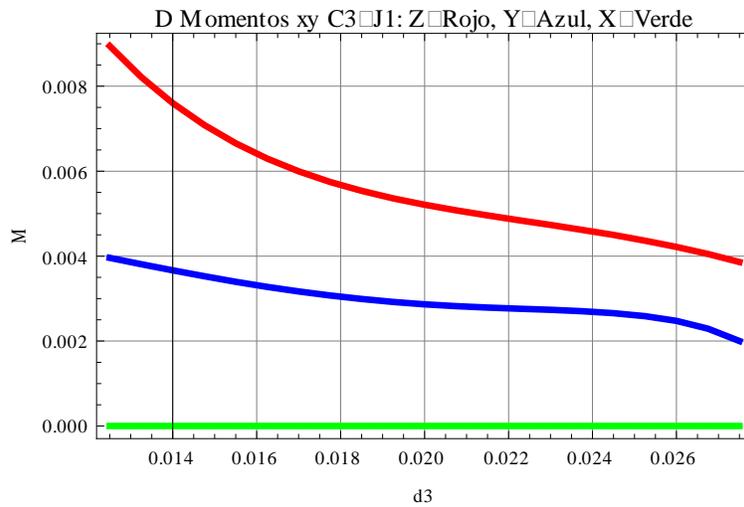
c. Fuerzas y momentos en las juntas de la cadena cinemática del eje Y:





d. Fuerzas y momentos en las juntas de la cadena cinemática del eje X:





Resumen análisis dinámico:

	Vínculos	Órgano términal
Masa [Kg]	0.025	0.025
Momentos de inercia [Kg.m <sup>2</sup> ]	$8.33 \times 10^{-7}$	$8.33 \times 10^{-7}$

Dirección	Fuerza de corte [N]	Fuerza máx. dinámica [N]
Z	0.2	1.01
Y	0.2	0.24
X	0.2	0.42

Cabe aclarar que en estos resultados no se consideró las fuerzas ocasionadas por fricción.



## V. Pruebas y resultados

Los resultados de los análisis (de posición, cinemático, estático, dinámico y estructural) del mecanismo realizados se muestran en los temas correspondientes y, a continuación, solo se hace una comparación de los datos obtenidos experimentalmente contra los teóricos.

### a. Datos obtenidos experimentalmente

Para determinar la fuerza que el motor debe suministrar se utilizó un sistema de poleas y se procedió a colocar masas graduadas en cada una de las cadenas. A su vez, la carga se fue incrementando hasta vencer el equilibrio estático de la cadena correspondiente y en este punto se tomó el valor. Los resultados se muestran en la tabla inferior.

Prueba	Torque apriete tuercas.	Masa para vencer equilibrio	F(considerando fricción y fuerzas de corte)
	[Nm]	[Kg]	[N]
1	0.027	0.13	1.27
2	0.033	0.14	1.37
3	0.038	0.14	1.37
4	0.043	0.15	1.52
5	0.047	0.17	1.66

En esta prueba realizada, los parámetros que influyeron fueron el torque de apriete de las tuercas y las tolerancias de las uniones (rodamientos).

### b. Resultados del análisis dinámico

En los resultados obtenidos analíticamente no se consideró la fricción ocasionada por el apriete de las tuercas, pero si las fuerzas de corte.

Fuerza a transmitir por el motor para mover la cadena cinemática asociada:

Dirección	Fuerza de corte [N]	Fuerza máx. dinámica [N]
Z	0.2	1.01
Y	0.2	0.24
X	0.2	0.42

Tal y como se observa en la tabla, la cadena Z demanda mayor fuerza, dado que tiene que sostener el peso de las otras cadenas y ser capaz de suministrar la fuerza de corte en la dirección correspondiente.

Fuerzas en las juntas:

Cadena	Fuerza 1 máx. normal al eje [N]	Fuerza 2 máx. normal al eje [N]	Fuerza axial máx. [N]
Z	0 (Fx)	0 (Fy)	1.01
X	0.38 (Fz)	0.1 (Fy)	0.24
Y	0.38 (Fz)	0.2 (Fx)	0.42

Para el caso del eje Z, las fuerzas normales a la junta son prácticamente nulas dado que las fuerzas que actúan en las direcciones de X y Y están controladas por las cadenas de X y Y, equilibrando el sistema.



## VI. Conclusiones

### ☞ Conclusiones:

Para el desarrollo de esta tesis se trabajó con un mecanismo paralelo 3-PRRR de tres grados de libertad que cuenta con tres cadenas cinemáticas unidas a la base y a la plataforma móvil. Cada cadena posee 3 juntas pasivas revolutas y una unión activa prismática. La distancia entre los ejes de las uniones es de 20 [mm] y el rango de movilidad que puede alcanzar en cada uno de los ejes es de 15 [mm].

Para la solución del análisis cinemático existen diversos métodos como el geométrico, D-H, teoría de tornillos, etc. Pero se eligió el método D-H por su universalidad para la obtención de una ecuación cinemática.

En el análisis de posición se emplea la notación de Denavit-Hartenberg para obtener los vectores de posición de cada una de las cadenas cinemáticas. Con las 3 ecuaciones obtenidas se plantea 2 ecuaciones de lazo cerrado que se resuelve simultáneamente mediante métodos numéricos.

Para evaluar el recorrido de las tres cadenas cinemáticas en su intervalo de movilidad se elige una trayectoria que va desde la posición inicial de las 3 cadenas  $\{x_0 + 0, y_0 + 0, z_0 + 0\}$  [mm] hasta la posición final de las 3 cadenas  $\{x_0 + 15, y_0 + 15, z_0 + 15\}$ [mm].

Se comprueba la solución de las 2 ecuaciones de lazo cerrado para cada punto de la trayectoria mediante una simulación realizada en wolframmathematica.

Se obtienen los vectores de velocidad de cada una de las cadenas cinemáticas a partir de la derivación de las ecuaciones de posición obtenidas con anterioridad.

Se plantean 6 ecuaciones al igualar los componentes de los vectores de velocidad de las 3 cadenas cinemáticas y se resuelve el sistema considerando una velocidad lineal de 10 [mm/s] de las juntas prismáticas. Las gráficas obtenidas muestran la velocidad angular de las 6 juntas pasivas en toda la trayectoria.

En el análisis cinemático de aceleración, los vectores de aceleración resultan de derivar la matriz jacobiana de los vectores de velocidad. Con estos vectores de aceleración se plantean 6 ecuaciones que resultan de igualar los componentes entre sí y se resuelven numéricamente considerando una aceleración lineal de las juntas actuadas de 0 [mm/s<sup>2</sup>].

En el análisis estático se concluye que para un punto determinado de la trayectoria existe una fuerza máxima que debe aplicar el actuador de la junta activa para mantener al sistema en equilibrio de acuerdo a la siguiente tabla:

FZ máx. [N]	FY máx. [N]	FX máx. [N]
1.1	0.4	0.4

Para el análisis dinámico existen diversos métodos como el de trabajo virtual, el de Lagrange y el de Newton-Euler. Este último fue elegido por que calcula las fuerzas de reacción en cada uno de los miembros de las cadenas cinemáticas, las cuales fueron necesarias para una mejor interpretación del mecanismo y para el dimensionamiento de los eslabones y rodamientos durante una fase de diseño.

En el análisis dinámico, al considerar los vínculos con una masa de 25 gramos, al incluir las fuerzas de corte de 0.2 [N] en cada uno de los ejes (X,Y,Z) y al tomar en cuenta los análisis previos, se obtuvieron los siguientes resultados:

FZ máx. [N]	FY máx. [N]	FX máx. [N]
1.01	0.24	0.42

Estos resultados muestran que la cadena con mayor carga es la correspondiente al eje Z debido a que es la que aporta equilibrio al sistema en la misma dirección en que la gravedad influye.

De los resultados experimentales, para un torque de apriete de las tuercas de 0.027 [Nm], se obtiene la fuerza máxima que se requiere para vencer el equilibrio estático es de 1.27 [N].

La fuerza estática máxima obtenida en la prueba experimental es de mayor magnitud que la obtenida en el análisis teórico. Esto se debe a que no se consideraron fuerzas de fricción como las ocasionadas por la rigidez de las uniones al apretar las tuercas.

☞ Trabajo a futuro:

Utilizar otro métodos para la solución cinemática (geométrico, teoría de tornillos, etc.) y para la solución dinámica (Lagrange, trabajo virtual) con la finalidad de obtener una mejor interpretación del mecanismo y/o para corroborar los resultados obtenidos.

Incluir todas las fuerzas de fricción en el análisis estático-dinámico.

Recrear experimentalmente el movimiento del mecanismo a lo largo de la misma trayectoria y con la misma velocidad (10 [mm/s]) para graficar la fuerza que aplica el actuador en cada punto de la trayectoria.

Desarrollar un sistema básico de control para los actuadores elegidos de cada una de las cadenas cinemáticas.

Corroborar los resultados con algún software que solucione la dinámica y simule las partes en movimiento para obtener la distribución de las fuerzas a través del sistema mecánico.

## Tabla de ilustraciones

Imágen 1 Mecanismo espacial paralelo, 1931. (Bonev, 2000).....	8
Imágen 2 Primer robot paralelo espacial industrial patentado en 1942. (Zabalza, y otros, 2007).....	9
Imágen 3 Plataforma móvil de Gough 1947. (Zabalza, y otros, 2007) .....	10
Imágen 4 Mesa MAST. (A. Bonev).....	10
Imágen 5 Plataforma de Stewart 1965. (Zabalza, y otros, 2007) .....	10
Imágen 6 Primer simulador de vuelo construido basado en un hexápodo octaédrico. (Bonev, 2000) .....	11
Imágen 7 Mecanismo paralelo 6-RUS por Hunt 1983. (Zabalza, y otros, 2007) .....	12
Imágen 8 Robot Tricept. (Millennium, 2009) .....	15
Imágen 9 Centro de maquinado, Hexápodo. (Zhang., 2009) .....	15
Imágen 10 Centro de mecanizado Tornado de la compañía Hexel (Aracil, 2006) .....	16
Imágen 11 Robots Fanuc F100i y ABB 940 (Aracil, 2006).....	16
Ilustración 12 Micro scara híbrido. (Arne Burisch).....	16
Ilustración 13 Micro robot Delta para manipulación. (Arne Burisch) .....	16
Imágen 14 Robot serial tipo Scara .....	17
Imágen 15 Robot paralelo planar 3RRR (3dof) ( ) .....	18
Imágen 16 Representación de una cadena cinemática. (Kong, y otros, 2007) .....	22
Imágen 17 Representación de mecanismos paralelos. (Kong, y otros, 2007) .....	22
Imágen 18 Eslabón aislado donde se muestran los parámetros D-H. (Tsai, 1999) .....	25
Imágen 19 Parámetros DH (N. Jazar, 2010) .....	26
Imágen 20 Resultante de fuerzas y momentos actuando sobre un cuerpo rígido .....	32
Imágen 21 Fuerzas y momentos ejercidos sobre el eslabón i.....	34
Imágen 22 Mecanismo paralelo 3-PRRR .....	39
Imágen 23 Representación del mecanismo paralelo 3-PRRR en mathematica .....	39
Imágen 24 Sistema coordenado global para el mecanismo paralelo 3-PRRR.....	45
Imágen 25 Representación D-H de la cadena Z .....	45
Imágen 26 Representación D-H de la cadena Y .....	47
Imágen 27 Trayectorias de los lazos cerrados .....	51
Imágen 28 Gráficas de la posición de las juntas.....	52
Imágen 29 Trayectoria de posición .....	52
Imágen 30 Gráficas de las velocidades angulares para las juntas no actuadas del mecanismo paralelo 3-PRRR.....	61
Imágen 31 Aceleración angular de las juntas no actuadas .....	64
Imágen 32 Fuerzas y momentos actuando sobre el vínculo i. (Tsai, 1999) .....	65
Imágen 33 Diagrama de cuerpo libre del efector final .....	68
Imágen 34 Diagrama de cuerpo libre del vínculo i.....	69
Imágen 35 Enumeración de las juntas revolutas no actuadas para cada cadena cinemática del mecanismo paralelo .....	69

Imágen 36 Representación de los sistemas locales en la cadena Z .....	76
Imágen 37 Diagrama de cuerpo libre vínculo 1 (cadena z) .....	76
Imágen 38 Diagrama de cuerpo libre vínculo 2 (cadena z) .....	77
Imágen 39 Representación de los sistemas locales en la cadena Y .....	81
Imágen 40 Diagrama de cuerpo libre del vínculo 1 (cadena Y) .....	81
Imágen 41 Diagrama de cuerpo libre del vínculo 2 (cadena Y) .....	82
Imágen 42 Representación de los sistemas locales en la cadena X .....	85
Imágen 43 Diagrama de cuerpo libre del vínculo 1 (cadena X) .....	86
Imágen 44 Diagrama de cuerpo libre del vínculo 2 (cadena X) .....	86
Imágen 45 Diagrama de cuerpo libre del efector final .....	90

## Bibliografía

**A. Bonev, Ilian.** *Les robots parallèles : de la recherche vers les applications.* Département de génie de la production automatisée, École de technologie supérieure. Montréal, Canada : s.n.

Advanced Manufacturing Research Institute. *Ingenious Micro-Manufacturing Systems Group.* [En línea] <http://unit.aist.go.jp/amri/group/finemfg/English/research/m-factory-e.htm>.

**Aracil, Rafael. 2006.** *Robots paralelos: máquinas con un pasado para una robótica del futuro.* Universidad Politécnica de Madrid. Madrid, España : RIAI, 2006.

**Arne Burisch, Sven Soetebier, Jan Wrege.** *Design of a parallel hybrid micro-scara robot for high precision assembly.* Braunschweig, GERMANY. Institute of Machine Tools and Production Technology (IWF). : s.n.

**Barrientos, Antonio, Felipe Peñín, Luis y Balaguer, Carlos. 2007.** *Fundamentos de Robótica.* Segunda edición. s.l. : Mc Graw Hil, 2007.

**Bonev, Ilian. 2000.** The True Origins of Parallel Robots. *The Parallel Mechanisms Information Center.* [En línea] 2000. <http://www.parallemic.org>.

**Bruzzone, Luca y M. Molfino, Rezia. 2006.** *A novel parallel robot for current microassembly.* Genova, Italy : Emerald, 2006.

**C. Hibbeler, Russell. 2009.** *Engineering Mechanics Dynamics.* Doceava edición. s.l. : Pretince Hall, 2009.

**Caballero-Ruiz, Alberto.** *First generation micro-machine tool characterization.* Laboratory of Mechatronics, Instrumentation Center, National Autonomous University of Mexico.

**Craig., John J. 2006.** *Robótica.* . s.l. : Prentice Hall. 3ra edición, 2006.

**E. Honegger, Andrew.** *DEVELOPMENT OF AN AUTOMATED MICROFACTORY: PART 1 – MICROFACTORY ARCHITECTURE AND SUB-SYSTEMS DEVELOPMENT.* Departamento de Ingeniería Mecánica e Industrial, Universidad de Illinois . Urbana-Champaign , USA : s.n.

**EPFL. 2011.** Laboratoire de systems robotiques (LSRO). [En línea] 2011. [Citado el: 28 de Enero de 2011.] <http://lsro.epfl.ch/page66051.html>.

**2004.** Interempresas.net. [En línea] 15 de Marzo de 2004. <http://www.interempresas.net/MetalMecanica/Articulos/7663-La-cinematica-paralela-preparada-para-triunfar-en-el-mercado-de-maquina-herramienta.html>.

**Kong, Xianwen y Gosselin, Clément. 2007.** *Type Synthesis of Parallel Mechanisms.* Québec, Canada : Springer, 2007.

**Lathrop Meriam, James. 2002.***Engineering Mechanics Statics*. Quinta edición. New York, USA : Wiley, 2002.

**LI, Hongtao, LAI, Xinmin y al., et. 2008.***Development of meso-scale milling machine tool and its performance analysis*. 2008.

**Liu, Xin-Jun, Wang, Jinsong y Zheng, Hao-Jun. 2005.***Optimum design of the 5R symmetrical parallel manipulator with a surrounded and good-condition workspace*. Institute of Manufacturing Engineering, Department of Precision Instruments, Tsinghua University. Beijing, China : Elsevier, 2005.

**Maekawa, Hitoshi y Komoriya, Kiyoshi. 2001.***Development of a Micro Transfer Arm for a Microfactory*. National Institute of Advanced Industrial Science and Technology. Japan : s.n., 2001.

**2009.** Manufacture-CH. [En línea] 2009. <http://www.manufuture.ch/en/home/focus-topics/microfactory/>.

**Merlet, J. P. 2006.***Parallel robots*. Netherlands : Springer, 2006.

**Millennium, Adroit. 2009.** robotmatrix.org. [En línea] 06 de Abril de 2009. <http://www.robotmatrix.org/ParallelRobotic.htm>.

Modular Robotics & Robot Locomotion. *Parallel Robot Design*. [En línea] [Citado el: 10 de Abril de 2010.] <http://155.69.254.10/users/risc/www/para-intro.html>.

**N. Jazar, Reza. 2010.***Theory of applied robotics*. Segunda edición. New York, USA : Springer, 2010.

**Norton., Robert L. 2006.***Design of Machinery*. s.l. : Mc. Graw-Hill. 3ra edición, 2006.

**Siliciano, Bruno y Sciavicco, Lorenzo. 2009.***Robotics. Modeling, Planing and Control*. London : Springer, 2009.

**Steven C., Chapra y Raymund P., Canale. 2003.***Métodos Numéricos para Ingenieros*. México. : Mc. Graw- Hill. , 2003.

**Taddei, Mario.***Los robots de Leonardo da Vinci*. Madrid : Tikal.

**Trimmer, W. S. N. 1988.***Microrobots and micromechanical systems*. AT&T Bell Laboratories. Holmdel, USA : Sensors and actuators, 1988.

**Tsai, Lung-Wen. 1999.***Robot Analysis*. s.l. : John Wiley, 1999.

**Viscarra, Ariel. 2008.** Robots manipuladores mecánicos. [En línea] 9 de Diciembre de 2008. [Citado el: 10 de Abril de 2010.] <http://ariel-a-viscarra.blogspot.com>.

**W. Spong, Mark.***Robot Modeling and Control*. New York : John Wiley and Sons.

**Xiaoyu Wang, Luc Baron. 2008.** *Topology and Geometry of serial and parallel Manipulators.* Polytechnique of Montreal, Canada. : Elsevier, 2008.

**Zabalza, Isidro y Ros, Javier. 2007.** *Aplicaciones actuales de los robots paralelos.* Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Pública de Navarra. Navarra, España : s.n., 2007.

**Zhang., Dan. 2009.** *Parallel Robotic Machine Tools.* s.l. : Springer., 2009.