UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – PLANEACIÓN

APLICACIÓN DEL ENFOQUE DE SISTEMAS Y DE LA METODOLOGÍA DE SISTEMAS SUAVES EN LA IDENTIFICACIÓN DE PROBLEMAS EN LA ACADEMIA DE ECONOMÍA POLÍTICA DE LA FACULTAD DE ECONOMÍA (UNAM)

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

ELENA SANDRA MARTÍNEZ AGUILAR

TUTOR PRINCIPAL
DR. JAVIER SUÁREZ ROCHA
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. OCTUBRE DE 2014

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. JOSÉ DE JESÚS ACOSTA
Secretario:	Dr. GABRIEL D. SÁNCHEZ GUERRERO
Vocal:	Dr. JAVIER SUÁREZ ROCHA
1 er. Suplente:	Dr. RICARDO ACEVES GARCÍA
2 d o. Suplente:	M.I. FRANCISCA IRENE SOLER ANGUIANO

Ciudad Universitaria, México, D.F

TUTOR DE TESIS:

Dr. Javier Suárez Rocha

FIRMA

A mi madre, por su ejemplo de vida

A mi hija Ximena porque hace más felices mis días

A Francisco, compañero de vida y de mil batallas

AGRADECIMIENTOS

Existen muchas personas a las que deseo dar las gracias, porque sin ellas este trabajo no habría sido posible.

Quiero expresar un profundo y sincero agradecimiento a mis maestros de la Maestría en Ingeniería, quienes de manera generosa me condujeron en el estudio de la teoría de sistemas y de la planeación. A pesar de la tardanza en presentar este trabajo, sus enseñanzas han permeado mi labor diaria de muchas formas. En particular quiero agradecer a mi tutor, Dr. Javier Suárez Rocha, su disposición y apoyo para que concluyera este trabajo.

Agradezco al Dr. Alejandro Álvarez Béjar, su generosidad intelectual y las enseñanzas que he tenido de él en aspectos que van más allá del plano académico.

También agradezco al Dr Gabriel Mendoza Pichardo, su invaluable ayuda al haberme permitido asistir a varias de sus clases para observar su método de exposición de algunos de los temas aquí tratados.

A mi amigo Víctor Membrillo, agradezco el haberme avisado sobre el Programa de Titulación de Alumnos Extemporáneos, lo cual fue muy importante para que yo retomara la elaboración de mi tesis.

De manera muy especial expreso mi agradecimiento a mi amigo Jorge Pablo Rivas, quien con su incondicional aliento logró encender la chispa que dio el impulso definitivo e imparable para la realización de este trabajo.

Agradezco a todos mis amigos que mostraron interés por la realización de este trabajo y que dieron consejos u opiniones que de alguna forma contribuyeron en el desarrollo del mismo.

Contenido

Lista de Cuadros

RESUMEN

La planeación es la actividad por medio de la cual un sujeto busca cómo actuar sobre un objeto para cambiarlo o conducirlo de acuerdo con ciertos propósitos; para lograrlo provee de diversos enfoques que se aplican según las características del objeto en estudio. En este trabajo se utiliza el enfoque de sistemas para estructurar un problema que por su naturaleza no lo es y a partir de ello identificar las causas y las alternativas de solución.

A partir de plantear el sistema como relación productor-producto, en lugar de la tradicional causa-efecto fue posible introducir aspectos como albedrío, elección y objetivos, de manera que los problemas no sólo se explican por lo que los provoca sino también por el efecto que se desea producir

La presente tesis busca identificar la problemática de la Academia de Economía Política, para actuar e intervenir en la mejora de su posición en el entorno en que se ubica. Para ello, el enfoque de sistemas permitió la elaboración del marco conceptual principalmente mediante los enfoques funcional y de Caja Negra. Por otra parte, la metodología de sistemas suaves de Peter Checkland permitió abordar el problema identificado cuya característica principal es su alto componente social y político, donde los actores tienen percepciones distintas acerca de qué causa el problema y por tanto de las posibles soluciones. Finalmente se presenta una propuesta para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje del tema de la formación de los precios desde la perspectiva marxista y de sus críticos, todo ello mediante el uso de modelos matemáticos que suponen conocimientos de álgebra matricial y lineal.

Palabras clave: planeación, sistemas, sistemas suaves, problemática, problema, modelo conceptual, álgebra matricial, álgebra lineal, transformación de valores en precios, Marx, Bortkiewicz, Shaikh, Sraffa, Perron-Frobenius.

SUMMARY

Planning is an activity for an individual to act over an object, in order to change it or make it to behave on pourpose. To get it, planning provides different approaches to be applied depending on the study object´s characteristics. Here, we focus on Systems to structure a problem that is not define as such by nature, for identify its causes and alternative solutions.

Instead of using the traditional approach of cause-effect, considering the relation product-producer as a System, we could deal with aspects such as free will, choice and objetives, so the problems can be explained not only by the cause that provoques them, but also by the effect we want to produce on them.

These thesis tries to identify problematic aspects of the Political Economy Academy, in order to act and intervene for improving its position in the surrounding.

Systems aproach worked as a conceptual framework mainly through the functional and the Black Box focusing. On the other hand, Peter Checkland´s soft- systems methodology, allowed us to to bring up the identified problem, with a socio-political component as its main characteristic and where the actors have different perceptions of the problem´s causes and possible solutions.

Finally, we make a proposal for improving the learning-teaching process in the specific study of the Price Formation theme, from a Marxist perspective and considering its critics, using mathematical models that require for the students matrix and linear algebraical knowledge.

Key words: Planning, Systems. Soft-systems, Problematic, Problem, Conceptual Model, Matrix algebra, Linear algebra, Transformation of values into prices, Marx, Bortkiewicz, Shaikh, Sraffa, Perron-Frobenius.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación surgió de la necesidad de contar con un sistema que permitiera organizar los esfuerzos de varios de los integrantes de la Academia de Economía Política de la Facultad de Economía (UNAM). El objetivo: encontrar la forma de que la Academia de Economía Política (AEP) cumpla su misión de contribuir en la formación de científicos sociales críticos, con un profundo compromiso con la sociedad.

La hipótesis que guía esta investigación plantea que el enfoque de sistemas nos permitiría estructurar un problema que por naturaleza no lo es, de tal forma que podremos identificar las funciones de nuestro sistema estudiado (la Academia de Economía Política), tanto hacia afuera, en relación con otros sistemas, como hacia adentro, en el funcionamiento de los elementos que la componen. Cabe señalar, que durante el desarrollo de la investigación también se utilizó la metodología de sistemas suaves de Peter Checkland, debido a que el sistema tiene un alto componente político que hace difícil definir cuál es el mejor medio para satisfacer determinado objetivo.

La tesis está estructurada en cinco capítulos, dos apartados y un apéndice:

Capítulo 1. Determinación del problema de investigación: aquí se define la problemática generada por la falta de un sistema de planeación, se explicita la hipótesis de trabajo y los objetivos. Al final se presentan las conclusiones del capítulo.

Capítulo 2. Marco teórico de referencia, donde se aborda el enfoque de sistemas: la importancia del modelo conceptual en la solución de problemas y la metodología para elaborar dicho modelo. También se hace una presentación de la metodología de sistemas suaves, para usarlo en la identificación del problema.

Capítulo 3. Estrategia de solución, aquí se aplica lo planteado en el marco teórico de referencia a nuestro objeto de estudio.

Capítulos 4 y 5, se presenta una propuesta didáctica para mejorar el desempeño en el salón de clase. La intención es mostrar que los temas que aborda la Economía Política no son ajenos a la formalización matemática, y que la academia de matemáticas puede incluir en sus programas de estudios aplicaciones como las que aquí se presentan.

Posteriormente, se encuentra un apartado con las conclusiones generales de la investigación, tanto en lo que corresponde a la hipótesis de trabajo, como a la propuesta de mejora para la AEP. Por último, se anotan las líneas de investigación que se sugiere desarrollar para profundizar esta propuesta de mejora de la Academia de Economía Política y se proporciona en un Apéndice todos los temas del álgebra matricial y lineal utilizados en este trabajo.

CAPITULO 1. DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En esta parte del trabajo se presentan las circunstancias que dieron origen a la investigación, así como la hipótesis planteada y los objetivos.

El capítulo se divide en cinco subcapítulos:

1.1. Antecedentes del surgimiento de la tesis, donde se menciona qué motivó la realización de esta investigación.
1.2. Problemática, identificada y vivida por la autora en la Facultad de Economía de la UNAM. La información que se había recabado mediante entrevistas directas, se enriqueció con la vertida por otros actores en los Foros de Transformación del Plan de Estudios organizados por la administración de la Facultad.
1.3. Determinación del problema que causa la problemática
1.4. Hipótesis de la investigación y sus objetivos. La hipótesis se formuló con base en la necesidad de proponer una solución a la problemática detectada, en tanto que los objetivos constituyen las líneas de acción y configuran las actividades concretas que constituirán parte de un proyecto integral para llegar al estado deseado.
1.5. Conclusiones, de este capítulo, que destacan la importancia de atender la problemática identificada debido a la insuficiente atención que ha recibido y por los efectos que puede generar a futuro.
1.6.

1.1. Antecedentes del surgimiento de la tesis

Como tema de tesis muchas veces se eligen temas ajenos a nuestra labor diaria, abstractos, y que en poco o nada modifican al objeto estudiado. De hecho así fueron los primeros temas que intenté desarrollar como tesis. Sin embargo, en mi propia actividad había problemáticas que atender y en las que sí podía incidir por lo que opté por desarrollar el tema de esta tesis, el cual sistematiza el trabajo realizado por la autora en las dos áreas académicas en las que imparte clases así como el trabajo de varios profesores interesados en mejorar tanto la posición de la AEP como la labor docente de sus profesores. Así mismo, intentará proporcionar herramientas de tipo pedagógico, que muestren que puede hacerse más eficiente la conducción del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Antes de exponer la problemática identificada mencionaré la estructura académica de la facultad de economía, en su modalidad escolarizada, en la cual se ubica la academia de economía política, centro de la preocupación de este trabajo.

En la Presentación del plan de estudios, aprobado el 28 de septiembre de 1994, se dice:

> *El nuevo plan de estudios de la Licenciatura en Economía tiene como objetivo general formar economistas capaces de entender los problemas de la producción, la distribución y el consumo de los bienes y servicios que satisfacen las necesidades del hombre y la sociedad.*
>
> *Por tal razón la Facultad de Economía presenta un plan de estudios en el cual el alumno asimilará la cultura económica y la formación esencial -con eficiencia y rigor científico- para solucionar los problemas que tendrá en el desempeño de la profesión. El estudio de la economía requiere plena libertad del conocimiento científico, con el rigor y la exigencia académica que reclama el cumplimiento de la responsabilidad social de ejercer una profesión eminentemente humana, por los problemas que afronta y trata de resolver.*
>
> *El plan de estudios brinda recursos para formar un economista capaz de que pueda incorporarse al desempeño de la profesión en diversos campos, con una cultura y formación teórica que le permitan conocer en toda su amplitud el desarrollo de la ciencia económica, su estado actual y los recursos técnicos e instrumentales, para atender los retos económicos de la sociedad.*
>
> *El plan de estudios tiene dos núcleos: el básico y el terminal. El primero se orienta a dar los conocimientos esenciales que requiere la formación del*

economista, y el segundo busca profundizar la formación teórica e iniciar su práctica profesional en un área determinada. [1]

Es decir, se presumía que el nuevo plan de estudios permitiría a los estudiantes recibir una formación multidimensional:

Teórica

Histórica

Instrumental

Metodológica

Aplicada

En el Cuadro 1.1 se presenta la estructura curricular del plan de estudios de la carrera de Licenciado en Economía. El supuesto de dicha estructura es que debería de existir una integración horizontal (entre materias de un mismo semestre) y vertical (en cada materia en sus diversos semestres). Sin embargo, esto no ha ocurrido en la aplicación de dicha estructura curricular, y uno de sus efectos más perjudiciales se ha manifestado en el área de Economía Política, que es la que se analiza en el punto siguiente.

Es pertinente destacar que con respecto al Plan de Estudios de 1974, en el de 1994 el área académica de Economía Política sufrió una reducción en el número de asignaturas que la integraban en el ciclo básico, además de que quedó sin área terminal propia, pues quedó configurada junto con materias del área de Historia. Así que, de estar integrada por siete asignaturas en el Plan del 74, quedó sólo con cinco en el de 1994. El área terminal o de pre-especialización perdió sus seminarios de profundización teórica y de investigación.

[1] Consultado en: http://www.economia.unam.mx/etsprof/planes/Docnew/PresentacionPlanEst1994.pdf (Fecha de consulta: 28/04/2014)

Ciencia Económica				Talleres	Instrumentales y Análisis Económico		
Áreas	Historia Económica	Economía Política	Teoría Económica	Talleres	Métodos Cuantitativos	Instru-mentales	INAE
Sem.	3 hrs.	3 hrs.	3 hrs.	2 hrs	4 hrs.	3 hrs.	3 hrs.
I	Historia Económica General I	Economía Política I	Introducción a la Teoría Económica	Taller de Economía Cuantitativa I	Introducción a los Métodos Cuantitativos	Contabilidad General y de Costos	Investigación y Análisis Económico I (Agregados Macroeconómicos y Población)
II	Historia Económica General II	Economía Política II	Teoría Micro-económica I	Taller de Economía Cuantitativa II	Matemáticas I	Contabilidad Social	Investigación y Análisis Económico II (Sector Agrícola e Industrial)
III	Historia del Pensamiento Económico	Economía Política III	Teoría Micro-económica II	Taller de Economía Cuantitativa III	Matemáticas II	Análisis e Interpretación de Estados Financieros	Investigación y Análisis Económico III (Sector Terciario y Financiero)
IV	Historia Económica de México I	Economía Política IV	Teoría Macro-económica I	Taller de Economía Cuantitativa IV	Estadística	Formulación y Evaluación de Proyectos	Investigación y Análisis Económico IV (Sector Público y Externo)
V	Historia Económica de México II	Economía Política V	Teoría Macro-económica II	Taller de Economía Cuantitativa V	Introducción a la Econometría	Economía Industrial o Economía Agrícola	Investigación y Análisis Económico V (Recursos Naturales y Regionalización)
VI	Economía Mexicana I	Estructura Económica Mundial Actual	Economía Internacional	Taller de Economía Cuantitativa VI	Teoría Monetaria y Política Financiera	Finanzas Públicas	Desarrollo Económico
VII	Economía Mexicana II	Materia Clave I	Materia Clave II	Optativa Libre I			
VIII	Materia Clave III	Optativa Libre II	Optativa Libre III	Optativa Tutorial I		Trabajo para Examen Profesional I	
IX	Materia Clave IV	Optativa Libre IV	Optativa Tutorial II	Optativa Tutorial III		Trabajo para Examen Profesional II	
X	Optativa Libre V	Optativa Libre VI	Optativa Tutorial IV			Trabajo para Examen Profesional III	

.

Cuadro 1.1. Estructura curricular del Plan de Estudios de 1994 (vigente)

1.2. Problemática.

Si bien desde la administración del Dr. Roberto Escalante Semerena, director de la Facultad de Economía durante el periodo 2002-2010, existía la inquietud por llevar a cabo un proceso de transformación del plan de estudios de la facultad de economía, no pudo llevarse a cabo por diversas circunstancias.

El actual director, Dr. Leonardo Lomelí, (2010-2018) está llevando a cabo un proceso de transformación del plan de estudios, el cual ha sido cuestionado por una parte importante de los profesores de la Academia de Economía Política (AEP) y por profesores de otras áreas, críticas que se resumen en los siguientes puntos:[2]

1. **Definición del perfil del economista** que se quiere formar. El punto de partida de la reforma curricular debe ser una discusión sobre cuál es la especificidad de la realidad económica actual, porque esa será la brújula que apuntará a lo que un economista egresado de la Universidad Nacional Autónoma de México deberá enfrentar, lo que permitiría discutir los contenidos curriculares que permitirían la formación de un tipo específico de economista, y así evitar que cada una de las áreas académicas se asuman como la principal en la formación de los economistas. Esto no se hizo desde un principio del proceso lo que ha derivado en que cada área se autodefina como fundamental, y en los Foros de discusión que se han realizado concluyen en que necesitan más materias para su área académica.
2. **Diagnóstico de la realidad económica**. Existe un consenso, entre la mayoría de los profesores de la AEP, y de otros sectores de la sociedad, en que la realidad económica actual está determinada por una crisis multidimensional. Hemos observado estrategias generadas desde los principales centros económicos para reactivar su economía, basados en los fundamentos teóricos del pensamiento dominante, que han profundizado la miseria de la población trabajadora, por ejemplo el incremento de la tasa de explotación de la fuerza de trabajo, la ampliación e intensificación del comercio exterior, las concentraciones y centralizaciones de capital, el incremento del gasto público y el gasto militar, por mencionar algunas. Esto tampoco se hizo, por lo que cada área académica propone contenidos basados en una apreciación parcial de lo que ocurre en la realidad.

[2] La mayor parte de las ideas que se exponen en esta parte fueron resultado de las discusiones que se llevaron a cabo entre los integrantes de la AEP y que se plasmaron en el documento "Diagnóstico de la Academia de Economía Política 2012", presentado por la Mtra. Patricia Pozos Rivera, Coordinadora de la AEP en el Foro de Diagnóstico para la transformación del Plan de Estudios en febrero de 2013.

3. Lo anterior, ha tenido como resultado la necesidad de superar la tendencia al estancamiento, además de aportar más elementos para agudizar las contradicciones capitalistas, ya que mientras por un lado frenaban la caída de la tasa de ganancia, por el otro se castigaban los salarios y se desplazaba a una gran cantidad de trabajadores, con el proceso de reestructuración productiva mundial, afectando la esfera del consumo. Actualmente se deben valorar nuevos elementos y tendencias mundiales que modificarán el curso de la economía mundial y para lo cual los economistas deben tener elementos teórico metodológico que les permita dar explicación de los diversos fenómenos que se les presenten.
4. Derivado de esta visión se desprende el perfil que debería tener un economista egresado de la FE-UNAM: El economista es un científico social profesional con espíritu crítico, capacidad de análisis y síntesis teóricos y con una sólida formación técnica y metodológica que le permiten comprender la realidad nacional e internacionales, comprometido con una perspectiva ética del desarrollo social y con capacidad para actuar interdisciplinariamente.
5. El economista que requiere el país en las circunstancias actuales debe contar en su formación con: una sólida formación ética, que le permita encontrar un equilibrio entre su interés personal y el de la sociedad. Un profundo conocimiento de las principales corrientes teóricas de la ciencia económica. Una perspectiva interdisciplinaria, que rompa con la parcelación e hiperespecialización, para que sea capaz de comprender, recuperar y aprovechar los conceptos de otras ciencias; ningún problema puede ser comprendido sin recurrir a la multidisciplina. Una visión integral del desarrollo, el economista debe tener la preparación suficiente para proponer, teórica y técnicamente, alternativas de solución a los problemas nacionales. Debe contar con una sólida formación técnica por lo que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las herramientas, modelos y métodos cuantitativos debe ser significativo para el estudiante, es decir, que pueda descubrir en ellos, de manera inmediata, su conexión con la realidad cotidiana y social que lo rodea.

Debe cultivar la curiosidad intelectual, que permitirá al egresado ser capaz de ampliar y renovar su conocimiento y su cultura por medio de la investigación.

6. Marginalidad de la AEP. Los profesores de la AEP han llegado a la conclusión de que esta academia ha sufrido un creciente proceso de marginación por parte de las últimas cuatro administraciones, incluyendo la última. Algunos elementos que han llevado a esa consideración son:
   6.1. La AEP es la única que cuenta con una Coordinación Académica surgida del voto directo, secreto y paritario de profesores y estudiantes del área, que es reconocida por la administración de la Facultad, pero que realiza sus funciones sin ningún tipo de pago económico.
   6.2. No se abren nuevas plazas de tiempo completo a concurso en el área. La AEP es el área académica con el menor número de profesores de tiempo completo.
   6.3. Falta de tiempo para abordar los contenidos temáticos. La mayoría de los profesores del área consideran que la Crítica de la Economía Política de Marx es uno de los ejes de formación teórica de los economistas, pero también consideran que es necesario abordar el debate contemporáneo. Sin embargo, se ha visto que el tiempo disponible no es suficiente.
   6.4. No formalidad del núcleo terminal de la AEP. La AEP sí tiene un núcleo terminal, pero aparece en el área de Historia y Desarrollo. Las materias del área terminal de la AEP han permitido a los estudiantes aplicar su formación teórica desde la Crítica de la Economía Política durante el núcleo básico, en el análisis de la realidad y elaborar sus tesis de grado.
   6.5. Falta de integración con otras academias. Aunque requerimos que nuestros estudiantes tengan una sólida formación histórica y de matemáticas y que sepan investigar, tenemos poca articulación con las áreas académicas respectivas.
   6.6. Desigualdad de las prácticas docentes. Que si bien no es un problema exclusivo de la AEP, nos afecta porque se suma a los ya enumerados. Requerimos una revisión a fondo de nuestra práctica docente, no compartimos las visiones que consideran que sólo los profesores que usan

las nuevas tecnologías informáticas o los pizarrones electrónicos son los que se están actualizando. Tampoco creemos que los catedráticos universitarios por el hecho de ser licenciados, maestros o doctores ya saben ser docentes, se requiere de un estudio y formación pedagógica, y sobre todo de una pedagogía crítica. Este aspecto, que puede ser el más particular e individual, debe ser trabajado desde una perspectiva colectiva, hasta lograr socializar las experiencias que todos tenemos en el aula, hasta que socialicemos experiencias exitosas de enseñanza de cada uno de nosotros.

Esta es a grandes rasgos la problemática que se vive en la AEP y que hizo reflexionar a la autora sobre qué podría proponer para contribuir a mejorar la situación de nuestra academia.

1.3. Determinación del problema que causa la problemática

Desde la perspectiva de la teoría de sistemas, la problemática se considera como un conjunto de las manifestaciones observables del problema.

De la problemática descrita brevemente en el apartado anterior destacamos la que se refiere a la marginación de la AEP, derivada de su poca vinculación con otras áreas académicas de la institución. Aquí detectamos que formalmente el área de matemáticas debiera proporcionar la herramienta necesaria para realizar análisis económico en cualquiera de sus vertientes teóricas, pero que en los hechos se aboca solo a manejar elementos de la teoría neoclásica, dejando fuera a la teoría marxista. Por otra parte, el área de Teoría Económica tampoco tiene interrelación con nuestra área. Es necesario construir puentes con las dos áreas, y probablemente con otras que aquí no se han mencionado. Pero la AEP no puede esperar a que el interés y la solución provengan de las otras áreas, nosotros somos los que hemos sido marginados y tenemos que ser propositivos.

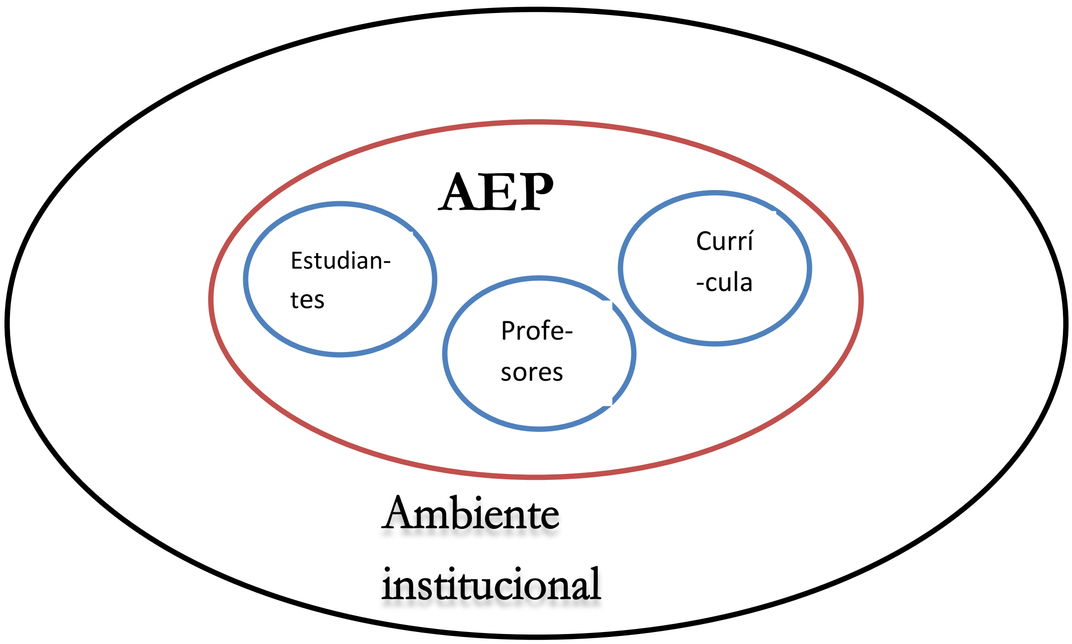


Figura 1.1 Identificación del objeto de estudio

1.4. Hipótesis de la investigación y objetivos

Con base en los elementos que se desprenden de la problemática detectada y del problema formulado planteamos el siguiente supuesto de investigación:

La AEP se encuentra en una situación de marginación principalmente porque se considera que su objeto de estudio (la Crítica de la Economía Política a partir de lo escrito por Marx) es obsoleto y por tanto no explica problemas actuales. El marxismo es visto más como postura ideológica que como un método científico social que debe conocer un economista porque permite explicar, también, la realidad económica. Sin embargo, la teoría marxista no es ajena a la formalización matemática y algunos desarrollos contemporáneos como la formación de los precios o el problema del crecimiento económico de este paradigma son capaces de explicar los fenómenos del debate económico actual, como la creciente pobreza y su antítesis, la mayor concentración del ingreso en la mayoría de los países del mundo, por ejemplo.

Con base en esta hipótesis, se definieron el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación:

Objetivo general:

Mostrar que la teoría marxista se ha desarrollado después de Marx, y que los desarrollos contemporáneos de esta perspectiva teórica, como el de la formación de los precios, el del crecimiento económico o el de la crisis por la caída de la tasa de ganancia, entre otros, explican muchos de los fenómenos que están en el debate económico actual, por lo cual los estudiantes deben conocerla y usarla en su análisis de la realidad.

Objetivos específicos:

- Mostrar a los estudiantes que la teoría marxista no es ajena al lenguaje matemático.
- Que el material que resulte sirva de apoyo en la impartición de los temas que se desarrollan.
- Facilitar la exposición de los profesores del tema *La transformación de valores en precios*
- Fortalecerá los conocimientos adquiridos por los estudiantes al hacer accesible no sólo la comprensión de este tema sino de otros donde se aplique el álgebra lineal
- Los resultados de la parte teórica e histórica aportarán una sistematización del debate sobre el llamado problema de la transformación
- Mostrar porqué los modelos económicos, apoyados en teoremas matemáticos, son claros y precisos en el marco de los supuestos e hipótesis de tipo económico que les dan origen
- Propiciar la generación de otros trabajos que mejoren el desempeño docente del área de Economía Política

- Generar una propuesta acerca de cómo sistematizar las experiencias en el aula que contribuyan a elevar la calidad de la enseñanza

1.5. Conclusiones

La AEP enfrenta una problemática derivada principalmente de la forma de presentar el paradigma teórico marxista; principalmente ante los estudiantes debe buscarse una manera de mostrar la potencia de este paradigma como un método científico social para explicar los fenómenos económicos actuales. La falta de relación con otras academias no debe ser un obstáculo, nosotros debemos mostrar que el marxismo contemporáneo utiliza diversas herramientas, como la formalización matemática, para modelar muchos de sus planteamientos.

Se ha discutido mucho acerca de la problemática que enfrenta la AEP, llegando casi siempre a la conclusión de que es el ambiente externo a la AEP, lo que propicia su situación. Se han hecho intentos de autocrítica pero en realidad poco se ha logrado como conjunto para romper las inercias que nos afectan.

Capítulo 2 MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

El propósito de este capítulo es presentar el marco teórico que sirvió de base para llevar a cabo la investigación. Los apartados que integran este capítulo son los siguientes:

- **2.1.** El enfoque de sistemas
- **2.2.** La metodología de sistemas suaves.
- **2.3.** La planeación contingente
- **2.4.** Conclusiones

2.1 El enfoque de sistemas

Cuando se pretende resolver un problema, surge la necesidad de establecer lo que es relevante para definirlo y poder plantear propuestas. Ello conduce muchas veces a tratar de aprehender el objeto a través del levantamiento de volúmenes excesivos de información y al desperdicio de recursos.

El enfoque de sistemas se plantea como un medio para coordinar y clarificar las metas totales del sistema y para reconocer las partes, variables y relaciones que determinan su comportamiento, de tal manera que la toma de decisiones ocurra de manera lógica y coherente, y que no se presente ninguna de las falacias comunes en razonamientos más estrechos.[3]

El enfoque de sistemas en la solución de problemas, surgió en primer lugar por el hecho de que cada vez nos enfrentamos con problemas cada vez más complejos, lo que es consecuencia de que sus partes están íntimamente interrelacionadas y a que el objeto de estudio mismo interactúa en el medio ambiente (que lo afecta) con otros objetos (que también tienen un efecto).

---

[3] Fuentes Zenón, Arturo, *El enfoque de sistemas en la solución de problemas, la elaboración del modelo conceptual*, Cuadernos de planeación y sistemas n°. 4, México: FI-DEP, UNAM, 1991

Así, de manera casi natural, se acepta la necesidad del enfoque de sistemas, porque la idea misma de sistema (conjunto de elementos interconexos) intenta capturar o hacer frente a esta clase de dificultades.

El pensamiento sistémico parte de que un sistema es un conjunto de dos o más elementos que exhibe las siguientes características:

- las propiedades o el comportamiento de cada elemento del conjunto tienen un efecto en las propiedades o comportamientos del todo;
- las propiedades o el comportamiento de cada elemento y la formas en que afectan al todo dependen de las propiedades y comportamiento de al menos otro elemento del conjunto;
- cada subgrupo posible exhibe las dos propiedades anteriores.

Entonces, si bien un sistema (universidad, facultades, plan de estudios, etc.) es divisible desde un punto de vista estructural (o formal), resulta indivisible desde una perspectiva funcional. Por ejemplo, si se quiere "producir" un economista como un científico social que tenga capacidad crítica para resolver problemas de la sociedad, deben plantearse las materias que en conjunto den ese resultado.

Por tanto, el pensamiento sistémico tiende a ver los sistemas como parte de sistemas mayores y en relación con otros sistemas. Es decir, el todo que se quiere entender es conceptualizado como parte de un todo mayor, por lo que se busca conocer el comportamiento y las características del todo mayor y, el todo se explica por su papel e influencia en el todo más amplio.

El enfoque sistémico adopta una relación productor-producto, en lugar de la tradicional causa-efecto. Con este tipo de relación se pueden introducir aspectos como albedrío, elección y objetivos, de manera que los fenómenos no sólo se explican por lo que los provoca sino también por el efecto que se desea producir.

2.1.1 El papel de los modelos conceptuales

La figura 2.1 presenta el conocido Modelo del Diamante, un modelo cualitativo del proceso de solución de problemas, que a pesar de su apariencia simple será de mucha utilidad para comentar, desde una perspectiva general, el papel y los límites de los modelos conceptuales.

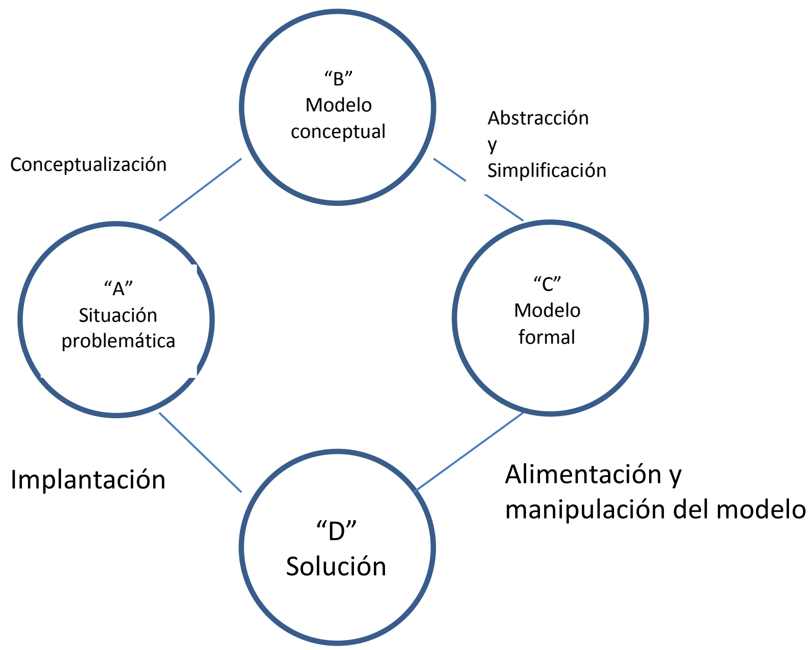


Figura 2.1. El Modelo del Diamante

"A". Situación problemática. El proceso de resolver problemas inicia con la detección de una situación problemática, que va desde el vago reconocimiento o sentimiento de que algo está mal o puede mejorarse, hasta un estado de emergencia.

Este es un nivel en el cual los problemas se perciben y plantean a partir de sus manifestaciones últimas, formando una serie de imágenes y pensamientos desorganizados y parciales que son insuficientes para determinar el problema y los efectos que podrían tener distintos modos de actuar sobre él.

“B” El modelo conceptual. Es una representación gráfica, escrita o mental elaborada por el analista y que sirve de marco de apoyo para situar y ordenar sus percepciones para lograr establecer la estructura del problema, delimitar el área de interés y decidir qué aspectos son relevantes y cuáles no.

“C” El modelo formal. Una vez que ha sido formulado el modelo conceptual, mediante la abstracción se procede a la elaboración de uno o varios modelos formales, en los cuales no caben la ambigüedad y la imprecisión.

D. Solución. En esta fase se aspira a la deducción de las consecuencias de distintos modos de acción, para así apoyar la toma de decisiones y la integración de las estrategias de cambio. Las soluciones que se elijan deben ser congruentes con las ideas plasmadas en el modelo conceptual.

2.1.2 La construcción del modelo conceptual

Existen tres formas básicas para la construcción del sistema reconocidas por los especialistas en el tema: la concepción estructural, la funcional y la de caja negra, cuyas características se revisan en este apartado.

La concepción estructural

La definición de sistema como un conjunto de elementos interconexos que forman una integridad, lleva casi de manera inmediata a plantear que para conocer el objeto y explicar sus propiedades debe hacerse lo siguiente:

a) identificar las partes que integran el sistema;
b) conocer las características de las partes;
c) establecer el patrón de relaciones entre las partes;
d) reunir esta información y de ahí deducir las propiedades y comportamiento del sistema total.

Esta concepción es la que comúnmente se adopta. Sin embargo, casi siempre se genera la dificultad de que al intentar seguir el procedimiento el volumen de información que demanda crece de manera explosiva, haciéndose poco práctico.

La solución sería tomar solo lo relevante y evitar los detalles. Pero cómo decidir qué es lo importante.

La concepción de Caja Negra

El objeto es visto como una entidad que recibe ciertos insumos y los transforma en un producto, empleando para su representación diagramas de bloque (fig. 2.2), llamados también de *Caja Negra* porque en un primer momento de análisis no se establece cómo se lleva a cabo el proceso de transformación.

Figura 2.2 Esquema básico de un modelo de Caja Negra

Esta forma de representación parece muy simple, pero puede ser muy poderosa, ya que obliga a definir de forma clara la naturaleza del sistema, y con ello se ponen en tela de juicio aspectos tan importantes como la validez de los objetivos, la viabilidad del sistema de acuerdo con la disponibilidad de insumos o el tipo de éstos, etc.

La Concepción Funcional

A diferencia de la concepción estructural que visualiza al objeto como un agregado de partes, la concepción funcional estudia dicho objeto como un proceso; como el conjunto de actividades necesarias para cumplir con el propósito, que puede ser la producción de un bien, la formación de economistas, etc.

Las actividades identificadas como principales tienen relaciones de dependencia lógica, tanto entre ellas como con el exterior del sistema. Cada actividad puede desglosarse en subactividades, al mismo tiempo que el sistema se puede ver como parte de un sistema más amplio, lo que lleva a hablar de subsistemas y suprasistema, respectivamente. Este procedimiento de agregación o desagregación se puede continuar hasta alcanzar el nivel de detalle que se considere apropiado.

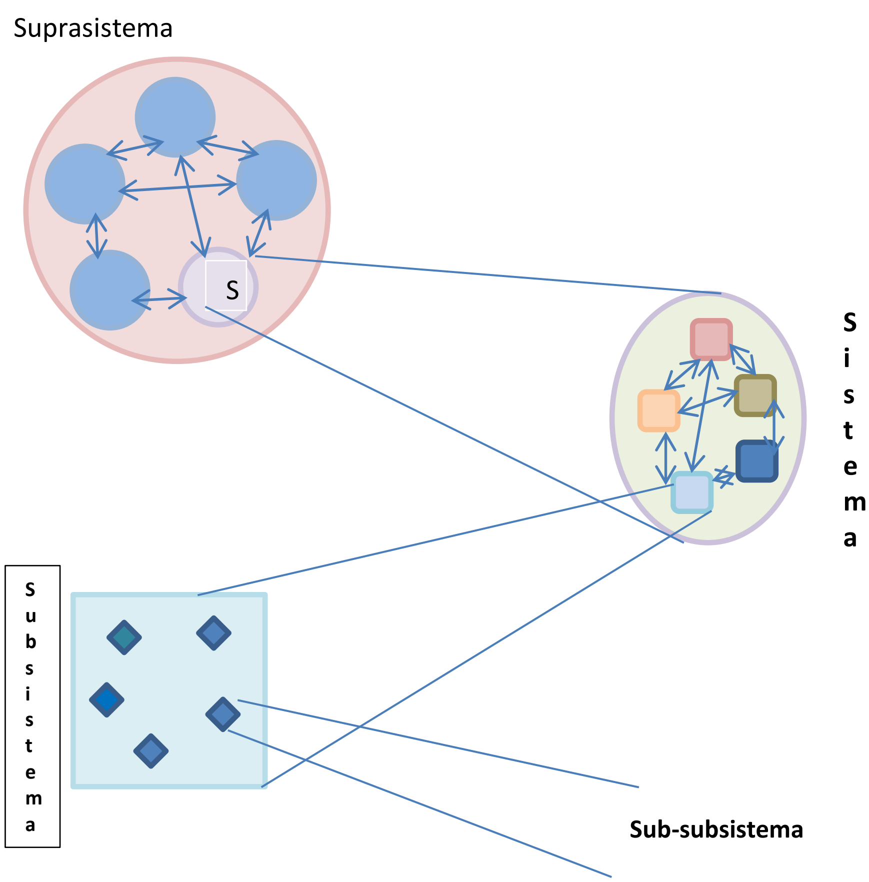


Figura 2.3 Representación de un sistema de actividades con varios niveles

El nivel de detalle de los sistemas de actividades y la clase de preguntas que se harán en cada caso dependerán del problema por resolver. Los modelos conceptuales se formulan a partir de considerar de manera lógica, qué actividades se requieren para cumplir con la función propuesta y con qué medios o recursos se podrían ejecutar. Esto permitirá desarrollar una forma de indagar qué está mal y cuál es la causa.

La ventaja de esta concepción es evitar la recolección indiscriminada de datos y, por tanto, el desperdicio de recursos y la dilatación de los resultados.

Una de las desventajas radica en que las organizaciones son diseñadas y operadas conforma a muchos propósitos y de muchas formas, por lo que también pueden ser interpretadas de muchas formas.

Las concepciones de un sistema que se han presentado no son contradictorias ni excluyentes, más bien son complementarias y llevan a considerar un mismo objeto o problema desde distintas facetas. Así, la concepción estructural es útil para explicar el porqué de ciertas propiedades del objeto, la funcional para entender cómo opera y, la de caja negra para aclarar el para qué existe ese objeto.

2.2 La metodología de sistemas suaves

Los problemas estructurados o "duros" son problemas caracterizados por el hecho de que están bien definidos. Se asume, en ellos, que hay una solución definida y que se pueden plantear metas numéricas específicas a ser logradas. Esencialmente, con un problema "duro" se puede definir qué tipo de resultado se logrará antes de poner en ejecución la solución. Por el contrario en los llamados *problemas no estructurados o "suaves"* son difíciles de definir. Tienen una componente social y política grande, por eso cuando pensamos en *problemas "suaves"*, no pensamos en problemas sino en problemáticas. Se detecta que las cosas no están trabajando de la manera en que lo deseamos y queremos averiguar porqué y vemos si hay alguna cosa que podamos hacer para aliviar la situación.

Peter Checkland desarrolló la metodología de sistemas suaves (MSS) después de haber trabajado varios años en la industria resolviendo problemas duros. Él se dio cuenta que no era posible aplicar la misma metodología de los problemas duros a problemas con una alta componente social

En realidad puede decirse que todos formamos parte de un subsistema: la familia, la escuela, una oficina, una fábrica, etc., que al trascurrir el tiempo genera diversos eventos e ideas en sus integrantes de que existe una situación problemática, es decir, que el sistema no está generando los resultados deseados, o que se tiene una situación pero se aspira a tener una mejor.

Cada participante del sistema tendrá una percepción diferente de lo que ocurre en él y por lo tanto de lo que hay que hacer para mejorarlo. Incluso alguno o algunos de los integrantes pueden tener un propósito definido. Con base en estos puntos de vista se pueden elaborar modelos conceptuales y realizar debates estructurados para discutir cambios (deseables y/o factibles) para identificar las situaciones que pueden ser cambiadas y aceptadas por los diferentes puntos de vista. Finalmente se implementarían los cambios para mejorar la situación problemática.

La metodología de sistemas suaves se divide en siete etapas que son: [4]

1. Identificar la problemática. Ésta es una investigación básicamente en el área del problema. Quiénes son los actores principales? Cómo trabaja el proceso ahora? etc.

2. Expresar la situación problema con diagramas de Visiones Enriquecidas. En cualquier tipo de diagrama, más conocimiento se puede comunicar visualmente. Un dibujo vale más que 1000 palabras.

[4] Fuentes Zenón, Arturo: El pensamiento sistémico, caracterización y principales corrientes, Cuadernos de planeación y sistemas nº 3, México:FI-DEP, UNAM, 1990.

3. Seleccionar una visión de la situación y producir una definición raíz. Puede que existan perspectivas diferentes al mirar la situación problema.

4. Construcción de modelos conceptuales construidos de lo que hace el sistema, teniendo como guía cada una de las definiciones raíz.

5. Comparación de los modelos conceptuales con el mundo real. Compare los resultados de los pasos 4 y 2 para ver donde hay diferencias y similitudes.

6. Definición de cambios factibles y deseables. Hay varias maneras de mejorar la situación.

7. Recomendaciones para tomar la acción que mejore la situación problema. Cómo usted pondría práctica los cambios del paso 6.

La MSS pone énfasis en la carga cultural de los integrantes del sistema, porque aunque la lógica y los hechos forman parte de los asuntos humanos, la percepción que se tiene de ellos deriva de las creencias y significados que los seres humanos atribuyen a sus problemas laborales, personales o de cualquier índole.

La MSS tiene que ver con un proceso de indagación, es una metodología que tiene como objetivo, introducir mejoras en áreas de interés social al activar entre la gente involucrada en la situación un ciclo de aprendizaje que idealmente no tiene un fin, es un proceso iterativo a partir de mejorar todos los “qué” y “cómos”. Además, esta metodología ayuda a estructurar, escoge un proyecto cualquiera y encuentra los aspectos “suaves” del problema.

En la MSS se conciben dos tipos de actividad: en las etapas 1, 2, 5, 6 y 7 hay interacción con las personas involucradas en la situación, mientras que en las etapas 3 y 4 tienen un carácter conceptual.

En particular, en las etapas 1 y 2 se busca contar con una descripción amplia del sistema y de la situación problemática, a través de la opinión de personas relacionadas con la situación.

Las etapas 3 y 4 (definición de raíz y modelo conceptual, respectivamente) constituyen el corazón de la metodología de Checkland; su propósito es definir los aspectos esenciales del sistema que se desea, así como el conjunto de actividades que, a partir de la lógica, se requieren para que el sistema cumpla con su función.

En términos generales, la definición de raíz es una descripción breve y precisa de lo que se considera que debe ser el sistema y que, de acuerdo con la situación problemática estudiada, se considera relevante. Busca respuesta a las siguientes interrogantes:

¿Qué hace el sistema?

¿quiénes ejecutan las actividades?

¿quién decide?

¿a quién beneficia o perjudica?

¿qué restricciones existen? y

¿desde qué punto de vista se le está considerando?

Una vez que se ha determinado qué debería hacer el sistema a través de la definición raíz, se formulan los modelos conceptuales de acuerdo con el siguiente procedimiento:

a) establecer el conjunto de actividades primarias o generales que, desde un punto de vista lógico, se requieren para llevar a cabo el proceso de transformación contenido en la definición de raíz.
b) establecer las relaciones entre las distintas actividades (relaciones de dependencia lógica y flujos de información, materiales, financieros, etc.)

c) desarrollar en subsistemas hasta alcanzar el nivel de detalle requerido.
d) también puede requerirse de la elaboración de una versión de “nombres” del modelo conceptual.

Con la participación de los interesados, en la etapa 5 se comparan los modelos conceptuales con lo que en la realidad se practica; su finalidad es identificar qué diferencias existen y cuál es la razón de las mismas. Este uso de los modelos permite conducir la investigación en forma más amplia y más ordenada, además de que hace explícitas algunas concepciones intuitivas.

Después de haber realizado tal comparación, en la etapa 6 se plantean los posibles cambios que pueden ir desde un modesto ajuste hasta el diseño e implantación de nuevos sistemas. Los cambios deben satisfacer dos requisitos: ser deseables y factibles.

Finalmente, en la etapa 7 se procede a la implantación; en ella, puede suceder que se logre lo esperado, que se alivie la problemática original pero surjan nuevos problemas, que la actividad misma de implantación sea problemática, etc. En caso de nuevos problemas, se vuelve a la etapa 1.

Capítulo 3 ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN.

El objetivo de este capítulo es aplicar la metodología de sistemas presentada en el capítulo anterior a la problemática que se manifiesta en la Academia de Economía Política de la Facultad de Economía de la UNAM, a fin de elaborar una propuesta de solución.

El capítulo consta de dos partes:

3.1. La AEP como sistema
3.2. Conclusiones

3.1 La AEP como sistema

La AEP puede conceptualizarse como un sistema porque cumple con la definición de ser un complejo de elementos interrelacionados con una misión que cumplir, el cual se define en función del rol que desempeña el sistema en el suprasistema, que en este caso es el conjunto de actividades académicas llevadas a cabo en la Facultad de Economía y que podría ser representado por la estructura curricular del plan de estudios.

Esta conceptualización de la AEP como sistema lleva a verla por un lado, integrada de varios subsistemas, que vendrían siendo los distintos grupos de profesores con una visión común de lo que debe ser la economía política, los estudiantes y la coordinación. Por otro lado, la AEP tiene que verse como parte de un suprasistema identificado como el conjunto de academias de la facultad, el cual a su vez es parte de un sistema mayor que es la sociedad y ante la cual debe dar resultados. (ver figura 3.1).

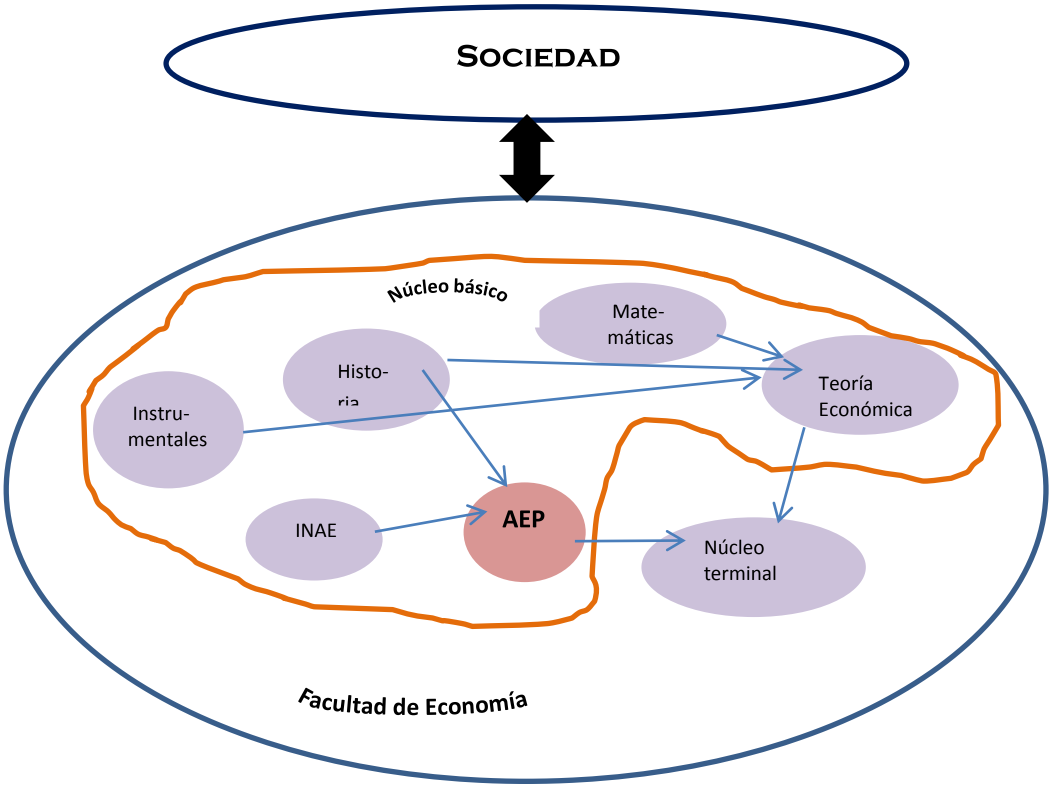


Figura 3.1La AEP vista como sistema

Si aplicamos el proceso por descomposición funcional, pueden identificarse los subsistemas de las academias, cuyas funciones, tanto en lo individual como en conjunto, aseguran el cumplimiento de la función de docencia de la FE. La descomposición funcional aplicada de forma sucesiva permite descomponer funcionalmente estos subsistemas denominados Academias e identificar sus componentes como son: las coordinaciones responsables de la organización del trabajo docente de y entre los profesores, los profesores, los estudiantes, los programas de estudio, los recursos con los que cuenta para el desempeño de su trabajo, materiales, etc.

Para construir nuestro modelo conceptual vamos a responder las siguientes preguntas:

1. ¿Para qué sirve el sistema en estudio? Es decir, ¿Cuál es la función que cumple la AEP en su medio ambiente?

La Facultad de Economía tanto en su plan de estudios vigente como en las propuestas presentadas en el actual proceso de transformación de dicho plan, se ha marcado como misión la de formar economistas con amplio conocimiento de la cultura económica, de manera que, sin dejar de conocer el pensamiento dominante, conozca los desarrollo del pensamiento alternativo.

También hay acuerdo en que se enseñen modelos analíticos que desarrollen en el alumno la capacidad de investigar y le ayuden a resolver problemas.

Ni en el plan de 1994 (vigente) ni en las discusiones recientes ha habido quien se oponga a que se enseñen los paradigmas comúnmente aceptados: clásico, marxista, neoclásico y keynesiano, desde sus orígenes hasta sus desarrollos más recientes.

En este contexto, la AEP al ser un área eminentemente teórica (en núcleo básico) y tanto teórica como aplicada en núcleo terminal, cumple la función de mostrar al alumno la otra cara del saber económico moderno; de introducirlo en la comprensión de las condiciones de posibilidad histórico-materiales del capitalismo, identificando este modo de producción como el objeto teórico particular de sus asignaturas.

2. ¿Cómo funciona?

Esta academia tiene una coordinación electa por los profesores y estudiantes, a través del voto directo, secreto y paritario. Esto le da un carácter muy particular, porque las demás academias cuentan con un jefe académico, designado por el Jefe de la División de Estudios Profesionales.

El carácter particular al que nos referimos tiene dos caras. La primera que puede calificarse de negativa dada la hostilidad de las autoridades hacia los acuerdos generados por la AEP. La otra cara es positiva, y tiene que ver con los procesos llevados a cabo por la coordinación, que tienden a ser transparentes y democráticos, como son la asignación de grupos o la incorporación de nuevos profesores (interinos) de acuerdo con reglas emanadas de la asamblea de profesores.

3. ¿Por qué? Es decir qué ha funcionado mal y por qué.

El sistema formado por el conjunto de las academias ha fallado en la formación de economistas con una amplia cultura económica; tampoco ha logrado que sean capaces de construir modelos, ya que no se les enseñan los que ya están hechos. Pero sobre todo, ha fallado en que sean críticos y propositivos a los grandes problemas nacionales porque se ha dado prioridad en formarlos para el mercado de trabajo. Además, se ha dado preponderancia a la relación entre las materias de teoría económica y matemáticas, en el mejor de los casos, dejando fuera de la discusión a la AEP.

Los profesores de la AEP no actúan unidos en busca de un bien superior, que sería el fortalecimiento de su área de trabajo como un medio para entrar en el debate en todas sus vertientes.

De todo lo expuesto se visualiza la problemática que vive la AEP y que puede resumirse en los siguientes hechos:

- Su coordinador no tiene remuneración, los jefes de área que son designados por el jefe de la DEP, sí. Esto ha traído como consecuencia condiciones de trabajo muy difíciles para el profesor que es electo en el cargo, porque al menos los últimos tres coordinadores eran profesores de asignatura y tenían que buscar fuentes complementarias de ingreso, lo que no les permitió ocuparse de tiempo completo de la coordinación.

- En el Plan de 1994, se redujo la cantidad de semestres de Economía Política, pues de siete pasaron a ser sólo cinco.
- La AEP no tiene un área terminal propia, tiene que compartirla con el área de historia.
- La AEP es el área académica con menos profesores de tiempo completo
- No se abren nuevas plazas de tiempo completo a concurso
- Sus contenidos no se entrelazan con los de otras áreas académicas, como matemáticas, que se supone debería proporcionar las herramientas para el análisis económico de los principales paradigmas económicos, incluyendo el marxista.

3.2 Conclusiones

La información presentada constituye un recuento de varias discusiones que se han realizado tanto entre los profesores de la AEP, como en espacios más amplios como lo han sido los dos foros de transformación que ha organizado la dirección de la facultad.

La propuesta consiste esencialmente en generar un sistema de trabajo al interior de la AEP que detone la creatividad de sus integrantes. Sabemos que varios de ellos han o están estudiando un posgrado, y que algunos han realizado trabajo de investigación. Entonces tiene que presentarse este trabajo a los estudiantes de la facultad para que ellos también vean la gran utilidad del paradigma teórico de la Economía Política (basado en la Crítica de la Economía Política de Marx). Las acciones que se proponen son:

- Crear una publicación digital. En la cual se expondrían los trabajos de los profesores de la AEP y de cualquiera que lo solicite: avances de tesis, artículos publicados en otras revistas o periódicos.

- Publicación de cuadernos didácticos. Donde se compartan experiencias del proceso de enseñanza-aprendizaje en temas específicos.
- Talleres de discusión de experiencias en la docencia: lecturas de apoyo que han beneficiado la tarea docente, problemas enfrentados en el aula, etc.
- Organización de un Seminario Permanente de discusión de los temas centrales de la Economía Política (podría ser mensual) en el que se invite a profesores de otras áreas.
- Discutir con la administración de la facultad la posibilidad de que se abran plazas de tiempo completo, con base en el diagnóstico de la planta docente de la academia.

Lo que se presenta en lo que resta de esta investigación es una propuesta de material de apoyo a la docencia, porque en el transcurso de la misma se detectó que uno de los temas que generalmente dejan de lado los profesores de la AEP es el de la formación de los precios.

CAPÍTULO 4. LA TRANSFORMACIÓN DE VALORES EN PRECIOS DE PRODUCCIÓN DE MARX, LA *SOLUCIÓN* DE BORTKIEWICZ Y LA RESPUESTA DE SHAIKH

El propósito de este capítulo es presentar una propuesta didáctica del tema La transformación de valores en precios presentada por Carlos Marx en su obra *El Capital*, así como el debate que generó. También se presentan dos trabajos surgidos de esta polémica, el de Bortkiewicz, quien pretendió corregir a Marx al decir que éste había planteado mal el problema y el de Anwar Shaik, quien afirma que en realidad la presentación de Marx no tenía problema, que sólo hacía falta usar el álgebra lineal para consolidar su presentación.

El aporte que se hace en este capítulo y en el siguiente es que se presenta la aplicación de los métodos del álgebra lineal paso a paso, sin eludir ninguno, de tal forma que el alumno pueda entender la parte económica sin tener problemas en la parte matemática. Por si acaso no se recordaran algunos de los métodos del algebra matricial y lineal, estos se incluyen en el anexo 2

El capítulo consta de 3 partes

4.1. Antecedentes
4.2. La construcción de Marx en el Tomo III de *El Capital*
4.3. El proceso de transformación de valores en precios de producción seguido por Marx
4.4. El debate
4.5. La solución de Bortkiewicz usando álgebra lineal
4.6. La respuesta de Shaikh (teoremas de Perron-Frobenius)

4.1 Antecedentes[5]

Carlos Marx nació en Tréveris, Alemania, el 5 de mayo de 1818 y murió el 14 de marzo de 1883 en la ciudad de Londres, Inglaterra.

En la época de su nacimiento, su ciudad natal carecía de una industria significativa, y su población no era mayor de los 15 mil habitantes, dedicados principalmente a la administración pública, la producción artesanal y el comercio.

La familia Marx, originalmente judía, se convirtió al cristianismo cuando Carlos tenía apenas 6 años de edad. Esto se considera algo más que una anécdota, porque sería parte del legado que el padre de Carlos le dejaría, una cultura del hombre libre que le emancipaba de las ataduras judías.

Marx inició sus estudios en su ciudad natal donde cursó el bachillerato de cultura clásica. En 1835, escribió su trabajo final *Reflexiones de un joven al elegir su profesión*, en el cual reflexiona <No siempre podemos abrazar la carrera a la que nuestra vocación nos llama, la situación que ocupamos dentro de la sociedad empieza ya, en cierto modo, antes de que nosotros mismos podamos determinarla> Esta temprana reflexión respecto de la influencia que ejercen las condiciones sociales sobre el ser individual le surgió, tal vez, por la insistencia de su padre para que siguiera su misma profesión: la abogacía.

Al terminar el bachillerato, en 1835, Marx se muda a Bonn, donde estudia jurisprudencia. En este lugar sólo permanece un año, pues en 1836 se traslada a Berlín, donde continua sus estudios de Jurisprudencia y Ciencias Camerales.[6]Sin embargo, para Marx la Jurisprudencia sería una preocupación secundaria, siendo la principal el estudio de la Filosofía y la Historia. En realidad, en su formación profesional, la economía política no ocupa lugar alguno.

[5] La información sobre la vida de Carlos Marx fue tomada, a menos que se indique otra fuente, de Ornelas Jaime (1984), *Carlos Marx. Una biografía*, (Colección Extensión Universitaria núm. 2), México, Universidad Autónoma de Puebla

[6] *Cameralismo* era el nombre que recibía el *mercantilismo* en Alemania, doctrina cuya tesis central sostenía que la riqueza de las naciones dependía de los metales preciosos disponibles (*ibid*. pág. 13)

Sin embargo, cuenta el propio Marx,[7] durante los años 1842-1843, siendo redactor de la Rheinische Zeitung, Marx se vería obligado a dar su opinión sobre los llamados intereses materiales. Los temas en debate eran variados, desde opinar sobre los delitos forestales y el parcelamiento de la propiedad de la tierra hasta las discusiones sobre el libre cambio y el proteccionismo. Esto le daría los primeros motivos para ocuparse de las cuestiones económicas. Saber que los estudios que había realizado hasta entonces no le permitían arriesgar un juicio respecto de estos y otros temas hizo que renunciara y se retirara a su gabinete de estudio.

El primer trabajo que emprendió Marx para resolver sus dudas fue una revisión crítica de la Filosofía del derecho de Hegel. De estas primeras investigaciones Marx obtuvo el siguiente resultado: que las relaciones jurídicas, así como las formas de estado, no pueden explicarse ni por sí mismas, ni por la llamada evolución general del espíritu humano; que se originan más bien en las condiciones materiales de existencia que Hegel comprendía bajo el nombre de <sociedad civil> pero que la sociedad civil hay que buscarla en la economía política.

Sus estudios de economía política le llevarían al resultado general siguiente, que una vez obtenido le serviría de guía para sus estudios posteriores:

en la producción social de su existencia, los hombres entran en relaciones determinadas, necesarias, independientes de su voluntad; estas relaciones de producción corresponden a un grado determinado de desarrollo de sus fuerzas productivas materiales. El conjunto de estas relaciones de producción constituye la estructura económica de la sociedad, la base real, sobre la cual se eleva una superestructura jurídica y política y a la que corresponden determinadas formas de conciencia social. El modo de producción de la vida material condiciona el proceso de vida social, política e intelectual en general. No es la conciencia de los hombres la que determina su ser; por el contrario, su ser social es lo que determina su conciencia. En una fase determinada de su desarrollo, las fuerzas productivas de

[7] Marx, C; Contribución a la crítica de la economía política; 9ª. reimpresión, México: Ediciones de Cultura Popular, 1979. p. 11

la sociedad entran en contradicción con las relaciones de producción existentes, o, lo cual no es más que su expresión jurídica, con las relaciones de propiedad en cuyo interior se habían movido hasta entonces. De formas evolutivas de las fuerzas productivas que eran, estas relaciones se convierten en trabas de estas fuerzas. Entonces se abre una época de revolución social.[8]

Esto es la esencia de la concepción materialista de la historia que regiría toda la investigación económica de Marx.

Marx veía a la economía política alemana como un conjunto de fraudes y charlatanería, inscrita en los confines del horizonte intelectual burgués, en la medida en que consideraban el orden capitalista no como la fase de desarrollo históricamente transitoria, sino, a la inversa, como figura absoluta y definitiva de la producción social.

Por ello, el objetivo de la investigación de Marx, plasmada en su obra El Capital, es el modo de producción capitalista y las relaciones de producción e intercambio a él correspondientes, y dado que la sede clásica de ese modo de producción era, en ese entonces, Inglaterra, se sirvió de ese país como principal fuente de ejemplos. Esto es importante de destacar, porque Marx pretendió descubrir la ley que rige el movimiento del modo de producción capitalista, no buscó la manera de solucionar las contradicciones inherentes a dicho modo de producción.

Uno de los puntos centrales en el análisis materialista de la historia hecha por Marx[9] es el que se refiere a la distribución social del trabajo entre las diferentes actividades productivas. Marx quiso resaltar el hecho de que en todas las formaciones económicas no sólo el trabajo es social, sino que también se gastan determinadas cantidades de trabajo, distribuidas entre diferentes sectores productivos.

[8] Ibid. p. 12
[9] Popoca Alfredo, Valor, precio directo, precio de producción y la teoría monetaria de Marx en patrones monetarios de reproducción simple, México: UNAM-FE, 2012, pp. 22-27

Marx define al sistema capitalista como un modo de producción, lo cual constituye "la marca de fábrica" de la economía política marxista ya que le otorga su propia problemática y la diferencia de cualquier otra corriente radical del pensamiento económico. Marx enfatiza que en todos los modos de producción por los que ha atravesado la humanidad, además de llevarse a cabo el proceso técnico de la producción, los hombres establecen relaciones sociales en el proceso productivo que son la esencia de la estructura económica, relaciones que se definen básicamente en relación al tipo de propiedad de los medios de producción.

Bajo el capitalismo existe propiedad privada de los medios de producción por parte de la clase capitalista, existiendo en contraparte una no-propiedad de medios de producción por los individuos que pertenecen a la clase de los trabajadores asalariados. Estas dos clases fundamentales de la sociedad capitalista establecen, entonces, relaciones sociales antagónicas y conflictivas entre ellas en la producción de los satisfactores que toman la forma de mercancías, las cuales contienen determinadas cantidades de trabajo (social) asalariado, lo que constituye su valor. El valor de las mercancías, convertido posteriormente en diferentes formas de precios, expresa las relaciones sociales de producción y distribución mercantiles de corte capitalista. Este es el aspecto cualitativo del valor.

El aspecto cuantitativo, se refiere a las cantidades del trabajo social asignado entre las diferentes ramas de la producción, en los diferentes modos de producción. En el caso de los modos de producción mercantiles, dado que en ellos existe una amplia división social del trabajo que produce fundamentalmente mercancías, y no simplemente valores de uso o satisfactores, no existe un control directo de la distribución del trabajo social entre las diferentes ramas, de manera que la regulación de la producción se lleva a cabo mediante un ajuste *a posteriori*, a través del mercado, quien es el que tiende a determinar la cantidad de trabajo socialmente requerido.

De esta manera en los modos de producción mercantiles, por un lado, la única forma en que los trabajos individuales llevados a cabo por los productores independientes se relacionan, convirtiéndose en trabajo social, es a través del intercambio y, por otro lado, la forma en que se lleva a cabo la regulación de la producción social también es a través del mercado.

Estos dos aspectos de la producción, que interconectan las diferentes cantidades de trabajos individuales y lo convierten en trabajo social se lleva a cabo a través del valor de cambio de las mercancías que se establece en el intercambio, el cual en su forma monetaria adopta la del **precio** de las mismas.

4.2. La construcción de Marx en el tomo III de El Capital

Marx presenta su teoría de la transformación de los valores en precios de producción en la segunda sección del tercer libro de El Capital. Si bien esta parte de la obra económica fundamental de Marx fue escrita entre los años 1863-1865, sería publicada de manera póstuma en 1895, gracias a la labor de Engels, poco antes de la muerte de éste.

Engels lo publica después de lanzar su célebre desafío al conjunto de economistas burgueses y socialistas, un año después de la muerte de Marx, en el prólogo a la primera edición del segundo libro de El Capital (1885). El desafío consistió en invitar a "demostrar cómo, no sólo sin infringir la ley del valor, sino, por el contrario, sobre la base de la misma, puede y debe formarse una tasa media igual de la ganancia".[10]

Para comprender el proceso de transformación de valores en precios de producción, es necesario tomar en cuenta la diferencia crítica que hizo Marx entre ganancia y plusvalía. Para Marx la ganancia y la tasa de ganancia constituyen las formas transfiguradas y mixtificantes de la plusvalía; representan una ilusión práctica que presenta la plusvalía como resultado de todo el capital desembolsado, cuando en realidad son resultado del trabajo excedente rendido por el obrero.

[10] Marx, C, (2002) El Capital (Tomo II, vol. 4), Siglo XXI, México, p. 23

Marx plantea que esta apariencia parecerá que se confirma cuando los capitalistas entran en relaciones de intercambio y competencia, pues sólo cuando se forma la tasa general de ganancia como algo independiente de las diferentes composiciones orgánica de los diversos capitales individuales de las diversas ramas de la producción, se consolida la ilusión de que la plusvalía no es resultado de la explotación de la clase obrera sino de todo el capital desembolsado

Marx presenta la contradicción entre valores y precios y su solución en la sección segunda del Tomo III de El Capital, que lleva por título "¿Cómo se convierte la ganancia en ganancia media?". Esta sección está integrada por tres capítulos, cada uno de los cuales presenta un nivel superior de concreción.

Marx parte del reconocimiento de que en las diferentes esferas de la producción existen diferentes composiciones orgánicas del capital y, por tanto, diferentes tasas de ganancia:

[...] puesto que los capitales en diversas esferas de la producción, porcentualmente considerados (o bien capitales de igual magnitud), se dividen desigualmente en sus elementos constante y variable, ponen en movimiento cantidades desiguales de trabajo vivo y por tanto, generan cantidades desiguales de plusvalor, o sea de ganancia, entonces, la tasa de ganancia que es el cálculo porcentual del plusvalor según el capital global, es diferente en ellos.[11]

El Capítulo VIII. "Diferente composición de los capitales en diversos ramos de la producción y consiguiente diferencia entre las tasas de ganancia". Aquí Marx hace el planteamiento del problema: capitales con diferente composición orgánica tendrán, individualmente, tasas de ganancia diferentes, dado que esta última está en función precisamente de la composición orgánica.

Al final de este capítulo Marx plantea la aparente contradicción a la que se ha llegado después de haber planteado en el tomo I que las mercancías se intercambian por su valor (c+v+p) y de haber llegado en el tomo III al hecho de

[11] Marx, C. (2002) Op. Cit, (Tomo III, vol. 6), p. 188.)

que los precios de las mercancías no necesariamente están en correspondencia con el valor generado en una determinada rama de producción:

> Hemos demostrado, pues, que en diversos ramos de la industria, en correspondencia con la diferente composición orgánica de los capitales, y dentro de los límites indicados también en correspondencia con sus diferentes tiempos de rotación, prevalecen tasas desiguales de ganancia, y que también por ello, a igual tasa de plusvalor, sólo rige para capitales de igual composición orgánica –suponiendo tiempos de rotación iguales- la ley (de acuerdo con la tendencia general) de que las ganancias son directamente proporcionales a las magnitudes de los capitales, y que por ello capitales de igual magnitud arrojan, en lapsos iguales, ganancias de igual magnitud. Lo expuesto vale sobre la base que, en general, ha sido hasta ahora el fundamento de nuestro desarrollo: la de que las mercancías se vendan a sus valores. Por otra parte, no cabe duda alguna de que, en la realidad, y haciendo abstracción de diferencias irrelevantes, fortuitas y que se compensan, la diferencia entre las tasas medias de ganancia para los diversos ramos de la industria no existe ni podría existir sin abolir todo el sistema de la producción capitalista. Por tanto, pareciera que la teoría del valor resulta incompatible, en este caso, con el movimiento real, incompatible con los fenómenos efectivos de la producción, y que por ello debe renunciarse en general a comprender estos últimos.[12]

Capítulo IX. "¿Cómo se forma una tasa general de ganancia y cómo los valores de las mercancías se convierten en precios de producción?". Aquí hace explícito el problema y da una solución formal, en el sentido de que no presenta el mecanismo de solución que es la competencia.

Marx plantea que la competencia capitalista se traducirá en la movilidad del capital por lograr la máxima tasa de ganancia, lo que dará lugar a que, en el largo plazo, el sistema tienda a generar una tasa general de ganancia y por tanto, a la formación de los precios de producción, los cuales dan lugar a una distribución equitativa del plusvalor entre los capitalistas, de acuerdo con la composición orgánica de cada capital y de acuerdo con el monto del capital total adelantado.

Capítulo X. "Nivelación de la tasa general de ganancia por medio de la competencia. Precios comerciales y valores comerciales. La ganancia

[12] Marx,C, (2002), op.cit., pág. 193-194

extraordinaria." Aquí elabora una solución real, pues muestra cómo opera el mecanismo de la competencia para nivelar las tasa individuales de ganancia hasta formar una tasa media general.

4.3. El proceso de transformación de valores en precios de producción seguido por Marx

Para exponer el proceso de formación de los precios de producción Marx usa cinco capitales en tantos por cien, con composiciones orgánicas distintas, tasas de plusvalor igual (de 100%) y distintas proporciones del capital constante realmente empleado, dando lugar a precios de costo diferentes para cada capital. Estos datos Marx los presenta en tres cuadros, que aquí resumimos en uno solo. (Ver cuadro 4.1)

Cuadro 4.1 Los datos de Marx

Capitales	plusvalor	Precio de costo	Valor	Composiciones orgánicas	Tasas de ganancia	Precios de producción	Desviaciones
I. 80c + 20v	20	70	90	4.00	20%	92	+2
II. 70c + 30v	30	81	111	2.33	30%	103	-8
III. 60c + 40v	40	91	131	1.50	40%	113	-18
IV. 85c + 15v	15	55	70	5.67	15%	77	+7
V. 95c + 5v	5	15	20	19.00	5%	37	+17
390c + 110v	110		422	3.55	22%	422	0

En la primera columna están los capitales utilizados, en la segunda el plusvalor generado por cada uno de esos capitales. Puede verse que el plusvalor está en función del capital variable empleado y de la tasa de plusvalía homogénea de 100%, por eso aunque para dar mayor realismo al ejemplo, Marx considera para cada uno de los capitales distintos consumos de capital constante dando lugar a los precios de costo de la columna 3, esto no afecta el cálculo de la tasa de ganancia promedio, ya que esta es igual al cociente de dividir la plusvalía total (110) por el capital total adelantado (500).

En la columna 5 se verifica que existe una composición orgánica del capital distinta para cada uno de los capitales, lo que se traduce en tasas de ganancia distintas (columna 6). En la columna 7 se ha sumado a los precios de costo de cada capital, la ganancia media de 22, lo cual da por resultado los precios de producción de las mercancías de cada capital. En la última columna se calculan las diferencias entre los precios de producción así obtenidos con los valores calculados en la columna 4.

Con estos datos puede observarse lo siguiente. Por un lado, la suma de los plusvalores generados por los cinco capitales (110) es igual a la suma de las ganancias medias (22*5 = 110) y por otro, la suma de los valores (422 de la cuarta columna) es igual a la suma de los precios de producción (422 de la séptima columna)

El “problema” de la transformación de valores en precios de producción efectuada por Marx, surgió originalmente del siguiente hecho. Marx calculó la tasa general de ganancia como la razón entre la plusvalía total y el capital total social a precios directos (o proporcionales a los valores) en la economía.

Para obtener el producto a precios de producción procedió a sumar al monto a precio directo de los insumos (C+V) la ganancia (obtenida a través de la tasa general sobre el capital total).

Así, los insumos están valuados a precios directos (valores), mientras que el producto resultante está valuado a precios de producción. Esto dio origen al llamado problema de la transformación.

La solución completa requeriría transformar no sólo el valor del producto sino también los valores de los insumos.

4.4. El debate

La primera crítica que se hizo a la formulación de Marx para pasar de un sistema de valores a uno de precios fue por parte de Eugen von Böhm-Bawerk[13] , quien en 1884, publica un ensayo, que no fue conocido por Engels, *Capital, interés del capital: historia y crítica de la teoría del interés del capital*, en el que critica las teorías del valor y del plusvalor de Marx y de Rodbertus reprochando a ambos la insuficiencia de sus teorías para explicar la igualdad de la tasa de ganancia.

Más tarde, en 1896 en su escrito *Karl Marx and the close of his system,* establece la supuesta inconsistencia entre el Libro I de El Capital, donde Marx expuso el intercambio de las mercancías con base en el valor contenido en ellas, y el Libro III, donde Marx trabaja el intercambio mercantil con base en los precios de producción.

Böhm-Bawerk argumentó que la característica de que en las distintas ramas se requirieran desiguales cantidades de valor de los medios de producción con respecto al trabajo directamente empleado (distintas composiciones orgánicas del capital) invalidan la teoría del valor trabajo estudiada en el tomo I de *El Capital*.

Böhm-Bawerk señaló muy claramente que la teoría de la explotación se basa en la teoría del valor y que desde el punto de vista de la clase dominante había que combatir a ambas. Mostró, lo que según él eran inconsistencias en la teoría del valor trabajo y formuló contra ella el ataque más fuerte y hasta ahora el más exitoso: el argumento de redundancia. Los precios de mercado debían oscilar

[13] Eugen von Böhm-Bawerk (1851-1914), economista austriaco, fue profesor en la universidad de Innsbruck y en la de Viena. Fue varias veces ministro de Hacienda y uno de los principales marginalistas de la Escuela Austríaca, de la que fue fundador. Expuso el papel de los factores subjetivos en el establecimiento del valor de cambio, desarrolló su propia teoría del capital y del interés e introdujo el parámetro del tiempo en el análisis económico como factor de producción

alrededor de los precios de producción, los que garantizan la misma tasa de ganancia a todas las ramas de la economía. Para explicar esos precios el valor es innecesario concluyó Bhöm-Bawerk.

La segunda fase clásica de este debate se da en el periodo de 1920 a 1930, también en Alemania, la ex URSSS y Polonia. Sus principales representantes fueron Nicolai Bujarin, Isacc Rubin, David Rosenberg y Henryk Grossman. El stalinismo en la exURSS y la derrota del movimiento obrero alemán en 1934 detuvo la controversia teórica.

En 1960, Maurice Dobb, Paul M. Sweezy y Ronald L. Meek retoman la discusión del problema con objeto de formular una teoría científica de los precios desde una óptica ricardiana.

Como producto culminante de esta corriente Piero Sraffa publica en 1960 *Producción de mercancías por medio de mercancías*, trabajo que abriría la cuarta y última etapa de esta discusión.[14]

4.5 La “solución” de Bortkiewicz usando álgebra lineal

En el año de 1907, cuando el economista alemán Ladislaus von Bortkiewicz[15] escribió *On the Correction of Marx's Fundamental Theoretical Construction in the Third Volume of Capital* que se formularía de manera específica lo que sería conocido en la literatura económica como el problema de la transformación de valores en precios:

[14] Parte de este breve recorrido acerca del llamado <problema de la transformación> fue tomado de Barreda Marín, Andrés; La transformación de los valores en precios de producción, (s/d)

[15] Ladislaus von Bortkiewicz (1868-1931), estadístico y economista ruso de origen polaco, nacido en San Petersburgo. Fue profesor en Estrasburgo, San Petersburgo y, sobre todo, Berlín (1901-1931). Fue amigo de León Walras y defensor de la economía matemática, se le considera de la Escuela Clásica. Es conocido (sobre todo gracias a Paul Sweezy) por su intento de corrección de la solución marxista al problema de la transformación, basado en los escritos de sus compatriotas Dmitriev y Tugán-Baranovski

De acuerdo con Bortkiewicz el procedimiento seguido por Marx presenta una seria deficiencia que consiste en que llevó a cabo la transformación de valores a precios de producción del producto de cada uno de los sectores productivos, pero no realizó el mismo proceso para los insumos utilizados por cada uno de ellos, es decir, para el capital constante y el capital variable.

De acuerdo con Meek[16], este habría sido el planteamiento original del problema, después del cual su contenido se habría ampliado, para incluir no sólo este problema que podría considerarse técnico, sino también otra serie de problemas relacionados con el procedimiento transformacional de Marx en general.

Marx reconoció la necesidad de llevar a cabo la transformación de los insumos utilizados, aunque consideraba que llevarla a cabo no afectaría los resultados del procedimiento seguido. Sin embargo, recientes trabajos demuestran que dicha transformación si es necesaria ya que de no llevarse a cabo se genera una deficiencia reproductiva, es decir, el método de Marx no garantiza cumplir con las condiciones de reproducción simple del capital, debido a que el precio de producción total de los medios de producción y de los bienes de consumo de la clase trabajadora, no coinciden con su importe agregado como insumos, ya que este importe sigue estando presente en términos de valor y no en precios de producción.

La presentación de Bortkiewicz fue la que revivió el debate y durante algún tiempo se consideró definitiva, por lo que aquí se intenta presentar completa .

Bortkiewicz trabaja con los siguientes datos, tomados del tomo III de El Capital de Marx, los cuales modifica para simplificar su exposición:

[16] Meek, Ronald, *Smith, Marx y después, Diez ensayos sobre el desarrollo del pensamiento económico,* Siglo XXI, Madrid, 1980, pp. 117-118

Cuadro 4.2 Los datos que usa Bortkiewicz

Capitales	plusvalor	Capital consumido (Kc)	Precio de costo	Valor	Ganancia (G)	Precio de producción(pp)
I. 80c + 20v	20	50	70	90	22	92
II. 70c + 30v	30	51 [50]	81 [80]	111 [110]	22	103 [102]
III. 60c + 40v	40	51 [52]	91 [92]	131 [132]	22	113 [114]
IV. 85c + 15v	15	40	55	70	22	77
V. 95c + 5v	5	10	15	20	22	37
Total: 390c +110v	110	202	312	422	110	422

Primero, realiza la modificación que está entre paréntesis en el cuadro, después transforma los cinco sectores de Marx en solo tres, sumando los sectores III y IV en uno solo que llamará sector I productor de medios de producción; los sectores I y V los suma y para él será el sector II, productor de medios de consumo y por último, el sector II del cuadro de Marx será ahora el sector III, productor de bienes de lujo. A partir de estas modificaciones Bortkiewicz obtiene el siguiente cuadro:

Cuadro 4.3 Datos agregados de Bortkiewicz

Sector	**C**	**V**	**Kc**	**Plusvalor (P)**	**Valor**	**Pc**	**G**	**Pp**
I	145	55	92	55	202	147	44	191
II	175	25	60	25	110	85	44	129
III	70	30	50	30	110	80	22	102
Total	390	110	202	110	422	312	110	422

Las condiciones de reproducción simple estarían expresadas por las siguientes ecuaciones:

$$K_{c1} + V_1 + P_1 = K_{c1} + K_{c2} + K_{c3}$$

$$K_{c2} + V_2 + P_2 = V_1 + V_2 + V_3 \qquad (4.1)$$

$$k_{c2} + V_3 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$$

Es decir, el producto generado por el sector I debe ser igual al valor de los medios de producción consumidos por los tres sectores; el producto del sector II debe ser igual al fondo de consumo de los obreros y, el producto del sector III deberá ser equivalente al consumo de la clase capitalista.

Si en (4.1) sustituimos los valores del cuadro (4.3) obtenemos:

$$92+55+55 = 92+60+50$$

$$60+25+25 = 55+25+30 \qquad (4.2)$$

$$50+30+30 = 55+25+30$$

Así, las condiciones de la reproducción simple se respetan en el modelo de valores, pero al transformarlo a un modelo de precios de producción, ya no se cumplen dichas condiciones:

Para el sector I tenemos que :

$92+60+50 \neq 147+44$

Para el sector II:

$55+25+30 \neq 85+44$

Para el sector III:

$55+25+30 \neq 80+22$

Es decir, puede observarse, dice Bortkiewicz, que los ingresos distribuidos conforme a la tasa de ganancia media, no permiten reproducir las condiciones iniciales de producción.

Con esto, Bortkiewicz concluye lo siguiente: 1) Que el método de transformación que planteó Marx es erróneo porque una correcta transformación debe preservar las condiciones de reproducción, 2) Que Marx cometió el error de no convertir a precios los valores de los insumos (C y V), y 3) Que la ecuación que expresa los precios de producción es falsa ya que la tasa de ganancia media está calculada en valores, cuando debe ser una relación entre precios.

Bortkiewicz afirma que toda la construcción de precios que hizo Marx es inútil y afirma haber demostrado que es falso que la suma de precios sea igual a la suma de valores y que la suma de ganancias sea igual a la suma de los plusvalores obtenidos por cada sector.

Bortkiewicz consideró que la forma correcta de resolver el problema es la siguiente:

Sea X:1 la relación del valor con el precio en el sector I; Y:1 en el sector II y Z:1 para el III. Sea ρ' la cuota media de ganancia (diferente de la expresión usada por Marx). Con esto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1+\rho')\ (C_1X + V_1Y) = (C_1+C_2+C_3)X = Cx = (C_1+V_1+P_1)X$$

$$(1+\rho')\ (C_2X + V_2Y) = (V_1+V_2+V_3)Y = Vy = (C_2+V_2+P_2)Y \qquad (4.3)$$

$$(1+\rho')\ (C_3X + V_3Y) = (P_1+P_2+P_3)Z = Pz = (C_3+V_3+P_3)Z$$

De aquí se toman los extremos de las igualdades y obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas (X, Y, Z, ρ')

$$(1+\rho')\ (C_1X + V_1Y) = (C_1+V_1+P_1)X$$

$$(1+\rho')\ (C_2X + V_2Y) = (C_2+V_2+P_2)Y \qquad (4.4)$$

$$(1+\rho')\ (C_3X + V_3Y) = (C_3+V_3+P_3)Z$$

Para hacer determinado este sistema, Bortkiewicz considera que la unidad de precio debe ser igual a la unidad de valor por lo que considera que el oro, que es la mercancía que sirve de unidad de valor y precio, se produce en el sector III. Entonces introduce la igualdad z = 1 y (4.4) se transforma en:

$$(1+\rho')\ (C_1X + V_1Y) = (C_1+V_1+P_1)X$$

$$(1+\rho')\ (C_2X + V_2Y) = (C_2+V_2+P_2)Y \qquad (4.5)$$

$$(1+\rho')\ (C_3X + V_3Y) = C_3+V_3+P_3$$

Por lo que ya solo se tienen que determinar X, Y y ρ'. Para ello, divide la primera ecuación de (4.5) por C_1, la segunda por C_2 y la tercera por C_3, nos queda:

$(1+\rho')\,(X + {}^{V_1}/_{C_1}\,Y) = \left(\frac{C_1 + V_1 + P_1}{C_1}\right)X$

$(1+\rho')\,(X + {}^{V_2}/_{C_2}\,Y) = \left(\frac{C_2 + V_2 + P_2}{C_2}\right)Y$

$(1+\rho')\,(X + {}^{V_3}/_{C_3}\,Y) = \left(\frac{C_3 + V_3 + P_3}{C_3}\right)$

Para simplificar utiliza la notación:

$f_i = \frac{V_i}{C_i}$

$1 + \rho' = \sigma$

$g_i = \left(\frac{C_i + V_i + P_i}{C_i}\right)$ (4.6)

Con lo cual reescribe el sistema como sigue:

$\sigma(X + f_1Y) = g_1X$

$\sigma(X + f_2Y) = g_2Y$ (4.7)

$\sigma(X + f_3Y) = g_3$

Resuelve este sistema. Primero obtiene de la primera ecuación el valor de X:

$X = \frac{f_{1Y\sigma}}{g_1-\sigma}$ (4.8)

Valor que sustituye en la segunda ecuación:

$$\sigma\left(\frac{f_1Y\sigma}{g_1-\sigma} + f_2y\right) - g_2Y = 0$$

$$\frac{f_1Y\sigma^2}{g_1-\sigma} + f_2Y\sigma - g_2Y = 0$$

Entonces:

$$f_1Y\sigma^2 + f_2Y\sigma g_1 - f_2Y\sigma^2 - g_1g_2Y + g_2Y\sigma = 0$$

como Y > 0

$f_1\sigma^2 + \ f_2\sigma g_1 - f_2\sigma^2 - g_1 g_2 + \ g_2\sigma = 0$

$\therefore \ (f_1 - f_2)\sigma^2 + (f_2 g_1 + g_2)\sigma - g_1 g_2 = 0$ (4.9)

además, como $f_1 - f_2 \neq 0$

σ = $\frac{-\left(f_2 g_1 + g_{2)} \pm \sqrt{(f_2 g_1 + g_2)^2 + 4(f_1 - f_2)(g_1 g_2)}\right)}{2(f_1 - f_2)}$ (4.10)

Como: $(f_2 g_1 + g_2)^2 + 4(f_1 - f_2)(g_1 g_2) =$

$= f_2^2 g_1^2 + 2f_2 g_1 g_2 + g_2^2 + 4f_1 g_1 g_2 - 4f_2 g_1 g_2$

$= f_2^2 g_1^2 - 2f_2 g_1 g_2 + g_2^2 + 4f_1 g_1 g_2$

$(f_2 g_1 - g_2)^2 + 4f_1 g_1 g_2$

A partir de aquí se obtiene:

$\sigma = \ \frac{(f_2 g_1 + g_2) \pm \sqrt{(f_2 g_1 - g_2)^2 + 4f_1 g_1 g_2}}{2(f_2 - f_1)}$ (4.11)

Analicemos los dos casos:

$f_1 - f_2 > 0$

$f_1 - f_2 < 0$

Primero, si $f_1 - f_2 > 0$, entonces $\frac{V_1}{C_1} - \frac{V_2}{C_2} > 0$, lo que significa que $\frac{V_1}{C_1} > \frac{V_2}{C_2}$ y $\frac{C_1}{V_1} < \frac{C_2}{V_2}$

Es decir, la composición orgánica (según Marx) del sector I es menor que la del sector II lo que, económicamente, es un supuesto poco razonable.

Entonces, supóngase que $f_1 - f_2 < 0$

De esto se podría concluir que

$(f_2 g_1 + g_2) > \sqrt{(f_2 g_1 - g_2)^2 + 4f_1 g_1 g_2}$

Ya que:

$$(f_2g_1 + g_2)^2 + 4(f_1 - f_2)g_1g_2 = (f_2g_1 - g_2)^2 + 4f_1g_1g_2$$

Por lo tanto, si $f_1 - f_2 < 0$, las dos raíces de la ecuación de segundo grado (4.11) son positivas. Ahora, pasamos a analizarlas:

Si consideramos el signo "+" en 4.11 se obtiene:

$$\sigma = \frac{(f_2g_1+g_2)+\sqrt{(g_2-f_2g_1)^2+4f_1g_1g_2}}{2(f_2-f_1)} > \frac{(f_2g_1+g_2)+\sqrt{(g_2-f_2g_1)^2}}{2(f_2-f_1)}$$

Es decir, si $g_2 - f_2g_1 > 0$

$$\sigma > \frac{f_2g_1+g_2+g_2-f_2g_1}{2(f_2-f_1)} = \frac{2g_2}{2(f_2-f_1)} = \frac{g_2}{f_2-f_1}$$

y como $f_2 - f_1 < f_2$

obtenemos que:

$$\sigma > \frac{g_2}{f_2}$$

Pero de la segunda ecuación del sistema (4.7) $\sigma X + \sigma f_2Y = g_2Y$, puede deducirse que:

$$\frac{\sigma X}{f_2Y} + \sigma = \frac{g_2Y}{f_2Y} = \frac{g_2}{f_2} \quad \therefore \quad \sigma < \frac{g_2}{f_2}$$

Luego, la raíz que se obtiene por usar el signo "+" en (4.11) es incompatible con el sistema (4.7). Se puede concluir entonces que $f_1 - f_2 < 0$ y que:

$$\sigma = \frac{(f_2g_1+g_2)-\sqrt{(g_2-f_2g_1)^2+4f_1g_1g_2}}{2(f_2-f_1)} \qquad (4.12)$$

Ahora, de la segunda y tercera ecuación del sistema (4.7) obtenemos:

$$\sigma X + \sigma f_2Y - g_2Y = \sigma X + \sigma f_3Y - g_3$$

$$\therefore \; Y(-\sigma f_2 + g_2 + \sigma f_3 = g_3)$$

y $\quad Y = \frac{-g_3}{g_2+(f_3-f_2)\sigma}$ (4.13)

Por lo que, teniendo el valor de σ, obtenemos el de Y para, con ambos valores, obtener el de X de la ecuación (4.8)

Con los siguientes datos, Bortkiewicz ilustra la solución que propone.

Cuadro 4.4. Ejemplo de Borkiewicz

Sector	C	V	M*	Valor
I	225	90	60	375
II	100	120	80	300
III	50	90	60	200
Total	375	300	200	875
* M representa al plusvalor				

De donde:

$C_1 = 225$ $\quad$ $C_2 = 100$ $\quad$ $C_3 = 50$

$V_1 = 90$ $\quad$ $V_2 = 120$ $\quad$ $V_3 = 90$

$M_1 = 60$ $\quad$ $M_2 = 80$ $\quad$ $M_3 = 60$

Por lo tanto:

$f_1 = \frac{90}{225} = \frac{2}{5}$ $\quad$ $g_1 = \frac{225+90+60}{225} = \frac{5}{3}$

$f_2 = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}$ $\quad$ $g_2 = \frac{100+120+80}{100} = 3$

$f_3 = \frac{90}{50} = \frac{9}{5}$ $\quad$ $g_3 = \frac{50+90+60}{50} = 4$

Al sustituir estos valores en (4.8) (4.11) y en (4.13), se obtiene:

$\sigma = \frac{5}{4}$

y por tanto, $\rho' = \sigma - 1 = \frac{1}{4}$

$Y = \frac{16}{15}$ $X = \frac{32}{25}$

Con estos valores, Bortkiewicz calcula los precios

Cuadro 4.5. Cálculo en término de precios

Sector	C	V	G	Total
I	$225 * \frac{32}{25} = 288$	$90 * \frac{16}{15} = 96$	$(288 + 96)\frac{1}{4} = 96$	288+96+96=480
II	$100 * \frac{32}{25} = 128$	$120 * \frac{16}{15} = 128$	$(128 + 128)\frac{1}{4} = 64$	128+128+64=320
III	$50 * \frac{32}{25} = 64$	$90 * \frac{16}{15} = 96$	$(96 + 64)\frac{1}{4} = 40$	64+96+40=200
Total	480	320	200	1000

Comparando estos resultados con los del cuadro 4.4, puede observarse que:

[Σ de precios = 1000] > [Σ de valores = 875]

Esta diferencia se debe, según Bortkiewicz, a que la composición orgánica del sector III es relativamente baja y es ahí de donde se elige el bien que sirve de medida de precio y de valor.

Al mismo tiempo:

[Σ de ganancias =200] = [Σ de plusvalor = 200]

Lo que Bortkiewicz explica por el hecho de que el bien utilizado como medida de valor y de precio pertenece al sector III, el cual produce los bienes de consumo capitalista.

Bortkiewicz llega a las siguientes conclusiones:

1) Que la tasa de ganancia media de Marx era errónea

2) Que los determinantes de la tasa de ganancia supuestos por Marx eran, en general erróneos

4.6. La solución de Shaikh (teoremas de Perron-Frobenius)[17]

Pasinetti dice que la parte matemática del problema de la transformación no está a debate, solo se tiene que buscar un operador que transforme un vector [v] en otro [p]. Marx no contaba con el material matemático para resolver este problema.

Según Shaikh el único problema del *problema* es cuál numerario elegir, porque si bien Marx estableció que la suma de valores es igual a la suma de precios, y que la suma de plusvalía es igual a la suma de ganancias, en realidad sólo se puede mantener una de las dos igualdades. Aquí se tomará la primera, es decir que el producto total medido en términos de valores es igual al producto total en términos de precios.

Debe tenerse presente que el proceso de transformación no cambia las mercancías físicas, lo que cambia es cómo se valúa ese conjunto de mercancías: en valores o en precios de producción.

[17] Esta parte del trabajo está basado, principalmente, en :Mendoza Gabriel, <<La transformación de valores en precios de producción. Ilustración con un modelo de capital circulante>>,**Economía y Práctica**, (México, D.F), no. 10, Nueva época, 1999, 24 pp

El modelo

Aquí se asume que el valor-trabajo total del sistema (o sea, la sumatoria de los valores unitarios por la cantidad producida por sector) es igual a la suma del valor monetario del producto a precios de producción, es decir:

$$\sum a_i = \sum p_i \qquad (4.14)$$

Donde a_i y p_i son el monto monetario del producto bruto del sector i en términos de valores-trabajo (precios directos) y precios de producción, respectivamente. Lo anterior significa que el valor del dinero es igual a 1, es decir, que los precios directos (proporcionales a los valores unitarios) de cada sector de la producción son iguales a los valores unitarios. La ecuación (4.14) constituye el numerario del modelo.

El sistema en términos de valor

Notación:

C_i.- valor del capital constante (circulante)

V_i.- valor del capital variable

S_i.- valor de la plusvalía (plusvalor)

a_i.- valor del producto bruto del sector i, igual a $c_i + v_i + s_i$

como $s_i = v_i\boldsymbol{\sigma}_i$, entonces, $a_i = c_i + v_i + v_i\boldsymbol{\sigma}_i = c_i + v_i(1+\boldsymbol{\sigma}_i)$

$\sigma = \sigma i = S_i/V_i = S_j/V_j \quad \forall\ i \neq j$ - es la tasa de plusvalía (considerada uniforme),

$\varphi_i = C_i/V_i$.- composición orgánica de capital en el sector i

g.- tasa de crecimiento uniforme (por convención, G= (1+g)

Las composiciones orgánicas de los capitales y la tasa de plusvalía constituyen las condiciones técnicas del modelo de capital circulante.

Se considera una economía de tres sectores en equilibrio y con parámetros estructurales determinados. Estos parámetros son la composición orgánica en cada uno de los sectores, la tasa de plusvalía (uniforme) y la tasa de crecimiento también uniforme. El monto de valor total de cada sector es tal que la reproducción a la tasa de crecimiento dada puede tomar lugar en el conjunto de la economía.

El modelo, en términos de valor es el siguiente:

Sector I. Productor de medios de producción:

$C_1 + V_1 + S_1 = a_1 = (1+g)\Sigma C_i$

Sector II. Productor de medios de consumo para los trabajadores:

$C_2 + V_2 + S_2 = a_2 = (1+g)\ \Sigma V_i$ (4.15)

Sector III. Productor de medios de consumo para los capitalistas:

$C_3 + V_3 + S_3 = a_3 = \Sigma S_i - g\ (\Sigma C_i + \Sigma V_i)$

Total:

$\Sigma(C_i + V_i + S_i) = \Sigma a_i$

Para construir el sistema en términos de valor, expresamos C_i como $V_i\varphi_i$ y Si como $Vi\sigma$, en las dos primeras ecuaciones del sistema anterior, además de considerar la convención de que $G = 1+g$, con esto puede reescribirse un nuevo sistema en el que el capital variable de cada sector represente las tres incógnitas de un sistema de ecuaciones simultáneas:

$(1+\varphi_1 + \sigma - G\varphi_1)\ V_1 - G\varphi_2 V_2 - G\varphi_3 V_3 = 0$

$-GV_1 + (1+ \varphi_2 + \sigma - G)V_2 - GV_3 = 0$ (4.16)

$\sigma V_1 + \sigma\ V_2 + \sigma\ V_3 = \Sigma s_i$

A partir de (2.3), dado φ_i, $\forall$ i, σ, g y para un monto dado de plusvalía (es decir, Σs_i es constante), podemos encontrar el valor del capital variable para cada uno de los tres sectores y con ellos podemos construir el sistema económico en términos de valor, como se muestra a continuación.

Datos: $\Sigma s_i = 200$, $\varphi_1 = \frac{5}{2}$, $\varphi_2 = \frac{5}{6}$, $\varphi_3 = \frac{5}{9}$, $\sigma = \frac{2}{3}$, $g = 0$ y $\therefore$ $G = 1$

Con estos datos, (4.16) se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1+\cancel{\varphi_1}+\sigma\cancel{-\varphi_1})\,V_1 - \varphi_2 V_2 - \varphi_3 V_3 = 0 \\ (\cancel{1}+\varphi_2+\sigma\cancel{-1})V_2 - V_1 - V_3 = 0 \\ \sigma V_1 + \sigma V_2 + \sigma V_3 = \Sigma s_i = 200 \end{cases}$$

Simplificamos

$$\begin{cases} (1+\sigma)\,V_1 - \varphi_2 V_2 - \varphi_3 V_3 = 0 \\ (\varphi_2 + \sigma)V_2 - V_1 - V_3 = 0 \\ \sigma V_1 + \sigma V_2 + \sigma V_3 = \Sigma s_i = 200 \end{cases}$$

Sustituimos los datos:

$$\begin{cases} \frac{5}{3}\,v_1 - \frac{5}{6}v_2 - \frac{5}{9}\,v_3 = 0 \\ -1v_1 + \frac{9}{6}v_2 - v_3 = 0 \\ \frac{2}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_3 = 200 \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{5}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{9} & 0 \\ -1 & \frac{9}{6} & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R1,R2 (-1),}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{9}{6} & 1 & \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{9} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R1 (- 5/3) + R2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{9}{6} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{10}{6} & -\frac{20}{9} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R1 (- 2/3) + R3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{9}{6} & 1 & (\\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{20}{9} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R3 (- 1) + R2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{9}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{20}{9} & -200 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R2 (- 9/20)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{9}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R3 (3/5)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{9}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R3 (9/6) + R1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 180 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{\text{R2 (- 1) + R1}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{\text{R2 , R3}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right)$$

Entonces: $v_1 = 90, v_2 = 120,\ v_3 = 90$

Con estos valores calculamos c_i

$$c_1 = \varphi_1 v_1 = \frac{5}{2} 90 = 225$$

$$c_2 = \varphi_2 v_2 = \frac{5}{6} 120 = 100$$

$$c_3 = \varphi_3 v_3 = \frac{5}{9} 90 = 50$$

$$\sum c_i = 375$$

Dada la tasa de plusvalía constante de $\frac{2}{3}$ calculamos la plusvalía para cada sector:

$$s_1 = \sigma\, v_1 = \frac{2}{3}\, 90 = 60$$

$$s_2 = \sigma\, v_2 = \frac{2}{3}\, 120 = 80$$

$$s_3 = \sigma\, v_3 = \frac{2}{3}\, 90 = 60$$

Estos resultados se presentan en el siguiente cuadro

Cuadro 4.6. Sistema económico en términos de valores

Sector	c	**v**	s	a	$c_i + v_i/C$	Tasa de ganancia en términos de valor	Part. del consumo capitalista en el cons. capt. total
I	225	90	60	375	0.467	0.190	0.3
II	100	120	80	300	0.326	0.364	0.4
III	50	90	60	200	0.207	0.429	0.3
Total	375	300	200	875	1.000	0.296	

En este cuadro se ha agregado la tasa de ganancia en términos de valor, que es igual a la plusvalía generada en cada sector dividido por la suma de su capital constante y del variable.

Como se supone que es un modelo en reproducción simple, toda la s se consume y no se destina nada a nueva inversión de capital.

El sistema en términos de precios de producción

Notación

r_i = tasa de ganancia del sector i (la forma transformada de la plusvalía)

$\boldsymbol{\pi}$ = tasa de ganancia uniforme

Π =1+ $\boldsymbol{\pi}$ = tasa de crecimiento

También se introducen los multiplicadores de valores a precios: X, Y, y Z, de los sectores 1, 2 y 3 respectivamente. Entonces, el sistema de precios de producción correspondiente al sistema de valor (4.2) es:

$(C_1X + V_1Y)\,\Pi = P_1 = a_1X$

$(C_2X + V_2Y)\,\Pi = P_2 = a_2Y$ (4.17)

$(C_3X + V_3Y)\,\Pi = P_3 = a_3Z = \Sigma a_i - a_1X - a_2Y = (\Sigma C_iX + \Sigma V_iY)(\boldsymbol{\pi} - g)$

Donde el consumo de los capitalistas es igual a la ganancia obtenida por todo el sistema menos la parte que se destina a acumulación, si $\boldsymbol{\pi}$=g, entonces la tasa de crecimiento sería igual a la tasa de ganancia

$(C_iX + V_iY)\,\Pi = (\Sigma C_iX + V_iY + r_i)$

donde:

$r_i = (C_iX + V_iY)\boldsymbol{\pi}$

El problema que se plantea en (4.17) es el de encontrar la tasa de ganancia $\boldsymbol{\pi}$ (o Π) y los multiplicadores X, Y, Z que transformen el valor de cada sector en precios de producción.

En términos matriciales, el sistema queda como sigue:

$$\mathbf{IN}\,\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \qquad (4.18)$$

donde:

IN = matriz de los insumos

$\boldsymbol{\pi}$ = tasa de ganancia uniforme

A = matriz diagonal del producto bruto

x = vector de los multiplicadores

Multiplicamos (4.18) por $\frac{1}{\pi}$ y obtenemos:

$$IN\,x = A\,\frac{1}{\pi}\,x$$

$$(IN - A\,\frac{1}{\pi})\,x = 0 \qquad (4.19)$$

Cuya solución arroja la tasa de ganancia y el vector de multiplicadores. Según esto, puede demostrarse que la tasa de ganancia y los multiplicadores de los precios están determinados únicamente por las condiciones técnicas de la producción en los sectores básicos, en el sentido de Sraffa. Como el sector 3 es un sector no básico, al no utilizarse su producto para producir bien alguno, pueden eliminarse el tercer renglón y la tercera columna del sistema expresado en (4.18).

Trabajamos (4.19), recordando que $a_i = c_i + v_i(1+\boldsymbol{\sigma}_i)$, dividimos cada renglón entre su respectivo capital variable y reordenando queda:

$$\left[\begin{pmatrix} c_1 & v_1 \\ c_2 & v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\pi}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Sustituimos a_i:

$$\left[\begin{pmatrix} c_1 & v_1 \\ c_2 & v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [c_1 + v_1(1+\sigma)]\frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & [c_2 + v_2(1+\sigma)]\frac{1}{\pi} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Se hacen las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} c_1 - (c_1 + v_1 + v_1\sigma)\frac{1}{\pi} & v_1 \\ c_2 & v_2 - (c_2 + v_2 + v_2\sigma)\frac{1}{\pi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Dividimos cada renglón por su respectivo capital variable:

$$\begin{bmatrix} \frac{c_1 - (c_1 + v_1 + v_1\sigma)\frac{1}{\pi}}{v_1} & \frac{v_1}{v_1} \\ \frac{c_2}{v_2} & \frac{v_2 - (c_2 + v_2 + v_2\sigma)\frac{1}{\pi}}{v_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Simplificamos:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 - (\varphi_1 + 1 + \sigma)\frac{1}{\pi} & 1 \\ \varphi_2 & 1 - (\varphi_2 + 1 + \sigma)\frac{1}{\pi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad (4.20)$$

Así, $\boldsymbol{\pi}$,x e y sólo dependen de las condiciones técnicas de producción en los sectores 1 y 2.

La matriz cuadrada que se ha obtenido es una matriz no negativa y singular, que de acuerdo con el teorema de Perron-Frobenius, sólo el valor máximo de los dos posibles para $\frac{1}{\Pi}$, arroja un vector de multiplicadores con sentido económico, es decir, valores x,y >0

A partir de (4.17), con el valor de $\boldsymbol{\pi}$ encontrado con (4.20) y aplicando la normalización que en nuestro caso es Σai = ΣPi, se obtendrán los valores absolutos de los multiplicadores x e y. Con estos resultados será posible construir la tabla de precios de producción.

Para encontrar los valores de los multiplicadores, procedemos como sigue.

Conociendo los parámetros estructurales $\varphi'_1 = 2.5,\ \varphi_2 = 0.83, \varphi_3 = 0.5, \sigma = \frac{2}{3}$. Primero igualamos a cero el determinante de (4.20) y resolvemos la ecuación que resulta, que es el polinomio característico del sistema dado

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 - (\varphi_1 + 1 + \sigma)\frac{1}{\pi} & 1 \\ \varphi_2 & 1 - (\varphi_2 + 1 + \sigma)\frac{1}{\pi} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2.5 - (2.5 + 1 + \frac{2}{3})\frac{1}{\pi} & 1 \\ 0.8333 & 1 - (0.8333 + 1 + \frac{2}{3})\frac{1}{\pi} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\left(2.5 - (4.16)\frac{1}{\pi}\right)\left(1 - (2.5)\frac{1}{\pi}\right)\right] = 0$$

$= 1.667 - 10.41\frac{1}{\pi} + 10.4\left(\frac{1}{\pi}\right)^2$ que es una ecuación de segundo grado. Se resuelve con la fórmula general: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y obtenemos:

$$\Pi_1 = 0.8 \quad y \quad \Pi_2 = 0.2$$

como $\frac{1}{\Pi_1} = 0.8 = \frac{1}{1+\pi_1} \rightarrow \pi_1 = 0.25 \ \ y \quad \frac{1}{\Pi_2} = 0.2 = \frac{1}{1+\pi_2} \rightarrow \pi_2 = 4.9$

Se elige el valor mayor de $\frac{1}{\Pi}$ que es 0.8, con el cual se obtiene una tasa de ganancia media ($\boldsymbol{\pi}$) de 0.25 y se calculan los multiplicadores x y y.

Sustituimos c_1 = 225, c_2 = 100, c_3 = 50, v_1 = 90, v_2 = 120, v_3 = 90, Π =1+$\boldsymbol{\pi}$ =1+0.25, la condición de que g=0 y el numerario (Σai = Σ pi), en el sistema (4.17) y calculamos X, Y, y Z.

(225X + 90Y) 1.25 = 375X

(100X + 120Y) 1.25 = 300Y

(50X + 90Y) 1.25 = 875-375X-300Y

Se forma la matriz correspondiente y se resuelve por el método de Gauss, obteniéndose los siguientes resultados:

X = 1.116, Y = 0.933

Sustituimos estos valores en la tercera ecuación de (4.17) para obtener el valor de Z:

$(C_3X + V_3Y)\,\Pi = P_3 = a_3Z = \Sigma a_i - a_1X – a_2Y = (\Sigma C_iX + \Sigma V_iY)(\boldsymbol{\pi} – g)$

y obtenemos Z = 0.872

Para los parámetros dados, con g = 0, y los multiplicadores X = 1.12, Y = 0.9333 y Z = 0.872, se obtienen los siguientes resultados

Cuadro 4.7. Sistema económico en términos de precios de producción

Sector	cX	vY	r	P	$c_i + v_i/C$	Tasa uniforme de ganancia	Valor de X, Y y Z
I	252	84	84	420	0.48	0.25	1.12
II	112	112	56	280	0.32	0.25	0.933
III	56	84	35	175	0.20	0.25	0.875
Total	420	280	175	875	1.00	0.25	

Con estos resultados se puede ver que no se pueden mantener las dos igualdades que postula Marx, sólo se mantiene la igualdad del producto total en términos de valores y en términos de precios (=875). Las cantidades físicas son las mismas, pero ahora el reparto entre los capitalistas es distinto

4.7 Conclusiones

No debe olvidarse que la teoría de Marx opera a niveles diferentes de abstracción. El valor-trabajo es la categoría que analiza al más alto nivel, mientras que los precios de producción y los precios de mercado son manifestaciones concretas de aquella categoría abstracta, modificadas por las circunstancias concretas que los rodean.

En sentido estricto, la transformación de los valores en precios de producción es un desarrollo dialéctico, es decir, una transformación en su contrario, Así, mientras los valores distribuyen el plusvalor entre los capitalistas en proporción al capital variable adelantado, el precio de producción distribuye la ganancia, la forma transformada del plusvalor, de acuerdo al capital total avanzado. Por lo tanto, Marx se propone mostrar que se puede derivar analíticamente los precios de producción, comenzando de una situación en la cual los precios son proporcionales a los valores-trabajo y las ganancias son proporcionales al plusvalor, y seguidamente redistribuyendo las ganancias entre industrias tal que se logren tasas iguales de ganancia.

En cuanto a la “solución” desarrollada por Bortkiewicz, si bien en su origen tiene una preocupación por el valor, culmina siendo un modelo de precios

En realidad, Bortkiewicz aborda la problemática considerando solamente las condiciones técnicas de producción, asumiendo un carácter fetichista al dejar de lado la dimensión del valor y por tanto, las relaciones sociales de producción así como la determinación y función de los precios.

CAPITULO 5. EL MODELO DE PRECIOS DE SRAFFA

El propósito de este capítulo es mostrar el uso que hace otro gran economista del álgebra matricial y del álgebra lineal. También en torno de este economista existe una gran polémica, que va desde decir que el vino a continuar la teoría económica de Marx, pero en mejores términos, hasta quien afirma que más bien él es un fiel continuador de la teoría de Ricardo.

El trabajo de Sraffa es uno de los más importantes en el desarrollo del pensamiento económico pero desafortunadamente poco se estudia en la Facultad de Economía.

El capítulo consta de tres apartados:

5.1 Trayectoria de Piero Sraffa

Piero Sraffa nació en Turín, Italia, el 5 de agosto de 1898, de padres judíos, falleció en Cambrige, Inglaterra, en 1983. Siguiendo la carrera de su padre, Sraffa estudió la escuela primaria en Parma y continuó en Milán y Turín. En Turín el cursó la escuela secundaria especializada en estudios clásicos y se inscribió en la Facultad de Leyes de la universidad aun cuando su familia se había mudado otra vez a Milán, por lo que su asistencia no era regular. Ahí Sraffa evitaba las conferencias de Achille Loria, titular de la cátedra de economía política, a quien no tenía en mucha consideración. Sraffa pasó el periodo de 1917-20 haciendo el servicio militar, y al final de la guerra fue asignado a la Secretaría de la ´Comisión

Real para la Investigación de Violaciones de los Derechos Humanos´ cometidas por el enemigo, comisión que concluyó con los siete volúmenes de los informes publicados. Él pudo presentar sus exámenes gracias al trato especial que los catedráticos patriotas daban a los examinados en uniforme.

En noviembre de 1920 se graduó con la tesis *Inflación monetaria en Italia durante y después de la guerra*, bajo la supervisión de Luigi Einaudi, profesor de finanzas públicas, senador liberal desde 1919, quien se convertiría en Ministro de Presupuesto, Gobernador del Banco de Italia y presidente de la República Italiana después de la segunda guerra mundial. Sraffa conservó una relación amistosa con él por el resto de su vida. Aunque el tema de la tesis parece haber sido sugerido por Attilio Cabiati, ámigo del padre de Sraffa y profesor de economía en Génova en ese momento. En 1920 tuvo un primer contacto con John Maynard Keynes con quien conservaría una larga amistad.

La tesis de titulación de Sraffa sería su primera publicación. Ahí consideraba que un fuerte aumento de los precios estaba asociado con la expansión del dinero en circulación, en línea con la tradición dominante de la teoría cuantitativa del dinero. Sin embargo, el análisis empírico que figura en él se distancia de esa teoría al considerar pragmáticamente las tendencias diferenciadas que presentan los distintos índices de precios, su significado lo busca en las consecuencias que tiene en los distintos grupos que participan en la vida económica, principalmente de obreros y empresarios.

Es importante destacar este punto, ya que es precisamente la naturaleza no unívoca del concepto de un nivel general de precios (y de su inversa, el poder adquisitivo del dinero) la que subyace en la crítica de Keynes de la teoría cuantitativa del dinero en los capítulos iniciales de su *Tratado sobre el dinero.* Este análisis implica que la política monetaria puede afectar la distribución del ingreso y es un punto central en el pensamiento de Sraffa.[18]

[18] Roncaglia, Alessandro, *Piero Sraffa*. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2009. Libro consultado electrónicamente en: http://iztacalaunam.eblib.com/patron/FullRecord.aspx?p=485372 (consultado junio 09, 2014)

Sraffa tuvo una intensa labor universitaria. En 1923 es nombrado encargado de curso en la Facultad de Derecho de Perugia, para impartir primero Economía Política y después Hacienda Pública. A finales de 1925 concursa por una cátedra afirmándose como un pensador riguroso y un crítico avisado. En marzo de 1926 Sraffa se convierte en catedrático de economía política en Cagliari (Cerdeña), donde permanecerá hasta el verano de 1927. A partir de 1928, por recomendación de Keynes, Sraffa ocupa una plaza docente en la universidad de Cambridge, iniciando así su etapa británica que se prolongaría hasta el final de sus días.

En 1926 Sraffa publica en el *Economic Journal* ("The Laws of Returns under Competitive Conditions") un artículo que sería considerado como una de las semillas intelectuales que dieron lugar poco después a las teorías de la competencia imperfecta. La misma Joan Robinson, fundadora de esa línea teórica, lo reconoció explícitamente: <El artículo de Sraffa debe considerarse como la fuente de la que fluye mi trabajo, pues el objetivo fundamental de este libro es desarrollar su fecunda sugerencia de que la teoría del valor debe tratarse en términos de análisis de monopolio>[19]

La preocupación teórica de Sraffa por el tema de la distribución se ve reflejado en su obra más importante, *Producción de Mercancías por Medio de Mercancías*, publicado por primera vez en 1960, donde tenía un propósito muy preciso, indicado por su subtítulo, Preludio a una crítica de la teoría económica. Tal propósito era crear el fundamento de la crítica a las teorías marginalistas de los salarios, las ganancias, las rentas y los precios. Su preocupación central eran las relaciones necesariamente existentes entre los salarios, las ganancias y los precios, en condiciones dadas de la producción, cuando la tasa salarial, la tasa de ganancia y el precio de cada mercancía son uniformes en toda la economía.

Sraffa advirtió que las relaciones entre salarios, ganancias, precios y condiciones de la producción, daban el fundamento no sólo para la crítica de la teoría

[19] Citado por Barceló Alfons, en su artículo Presentación del artículo de Piero Sraffa, sobre las relaciones entre coste y cantidad producida, *Economía crítica no. 10*, consultado en línea en http://revistaeconomiacritica.org/sites/default/files/revistas/n10/10.pdf. (consultado junio, 19, 2014)

marginalista sino también para la solución de ciertos problemas que habían sido debatidos durante largo tiempo por los marxistas (aunque en la obra mencionada no se presenta ninguna crítica a Marx). Steedman llega a considerar que aunque no se agota toda la discusión de la economía política marxista, la solución que provee el trabajo de Sraffa no es menor y que debió ser bien recibida por todos los que trabajan en el desarrollo de la concepción materialista de la sociedad capitalista. Pero no ocurrió así.[20]

5.2 Los supuestos del modelo simple de Sraffa[21]

Los grandes economistas del siglo XIX, se habían fijado como meta el estudio de la realidad económica en toda su complejidad, usando instrumentos analíticos poco refinados. A fines de ese siglo ya se habrían desarrollado varios instrumentos matemáticos que empezaban a usarse en esa tarea. Los economistas se volvieron más conscientes de la complejidad de las relaciones económicas concretas y han seguido el camino de iniciar el análisis con un sistema económico simple, el cual es estudiado de forma rigurosa con instrumentos analíticos que dejan poco margen a la ambigüedad, después de lo cual intentan introducir poco a poco hipótesis más complicadas.

Siguiendo este procedimiento, se tratará en este capítulo la versión menos compleja del esquema teórico de Sraffa, que se refiere a dos industrias que obtienen un solo producto cada una.

Indica “se producen

El primer sector produce trigo y el segundo hierro:

280 (arrobas de trigo) + 12 (tm de hierro) + 0.7 (unidades de trabajo) $\rightarrow$ 575 arrobas de trigo

[20] Steedman Ian, *Marx, Sraffa y el problema de la transformación*, (Eduardo L. Suárez, trad.), 1ª. ed en español, México:Fondo de Cultura Económica, 1985

[21] Aunque generalmente se mencionan juntos los trabajos de Leontief y el de Sraffa, cabe precisar que ambos desarrollaron su cometido de manera independiente y con objetivos diferentes.

120 (arrobas de trigo) + 8 (tm de hierro) + 0.3 (unidades de trabajo) $\longrightarrow$ 25 tm de hierro

Con este sistema de producción se cumple el supuesto de que hay excedentes positivos en cada rama pues:

$$\boxed{\text{Cantidad producida de trigo}} = 575 \text{ arrobas} > \boxed{\text{Cantidad utilizada de trigo en la producción}}\ 400 \text{ arrobas} \qquad (5.1)$$

$$\boxed{\text{Cantidad producida de hierro}} = 25 \text{ tm} > \boxed{\text{Cantidad utilizada de hierro en la producción}} = 20 \text{ tm}$$

Para obtener los coeficientes de producción a_{ij} Sraffa considera un cambio de unidades en la medición de las cantidades de mercancías de manera que se produzca 1 (nueva) unidad en cada sector. Es decir:

1 (nueva) unidad de trigo = 575 arrobas

1 (nueva) unidad de hierro = 25 tm de hierro.

El modo de producción queda como:

a_{11}

$$\left(\frac{280}{575}\right) U.de\ trigo + \left(\frac{12}{25}\right) U.de\ hierro + 0.7\ U.de\ trabajo \ \rightarrow 1\ U.de\ trigo$$

$$\left(\frac{120}{575}\right) U.de\ trigo\ + \left(\frac{8}{25}\right) U.de\ hierro + 0.3\ U.de\ trabajo \ \rightarrow 1\ U.de\ hierro$$

Entonces, a_{ij} = cantidad de la mercancía –j requerida como insumo en la producción de 1 unidad de la mercancía i; es decir, es la cantidad de M_j utilizada como insumo en la producción de una unidad de la M_i.

No debe confundirse este concepto de coeficiente de producción con el de coeficientes técnicos utilizado en el modelo de insumo-producto de Leontief.

La descripción anterior se puede extender a una economía de n-sectores. Los coeficientes de producción estarán representados en una matriz cuadrada, como veremos más adelante.

Los supuestos son:

i. Se considera un sistema económico en estado estacionario, por lo cual produce cada año la misma cantidad de mercancías

ii. Se considera una producción simple, es decir, las mercancías utilizadas como medios de producción son consumidas completamente durante el periodo correspondiente, por lo que deben ser reemplazadas al final del periodo.

iii. Hay excedentes ≥ 0 en todas las ramas, y positivas en aquellas donde se requiera satisfacer una demanda externa (de las familias)

iv. Sólo hay un tipo de trabajo y el salario (W_1) tiene dos componentes: $W_1 = W_0 + W$, donde W_0 es el salario de subsistencia y W es el salario complementario. W_0 y W son exógenos y además, $W_0 > 0$ y $W \geq 0$

v. El salario de subsistencia (W_0) ya está incluido en los coeficientes de producción (como parte de los insumos).

vi. Los salarios forman parte del capital adelantado y son uniformes.

vii. Hay uniformidad en la tasa de ganancia (g') de todos los sectores, es decir:

$r_1 = r_2 = ... = r_n = r$

viii. El valor añadido del sistema económico, igual al valor de las mercancías que constituyen la renta nacional (o producto) neto, se distribuye al final del año en forma de salarios y beneficios. Los salarios son distribuidos en proporción a la cantidad física del trabajo empleada y los beneficios en proporción al valor de los medios de producción empleados.

ix. Los distintos métodos de producción serán representados por una matriz de coeficientes industriales (**A**) y por un vector fila de coeficientes de trabajo directo (L_{ij}). Entonces, tendremos las siguientes expresiones:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2,n-1} \\ & \dots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

$$L_n = [l_{n1} \quad l_{n2} \ \dots \quad l_{n,n-1}] \qquad (5.3)$$

Llamaremos a $\begin{bmatrix} A \\ l_n \end{bmatrix}$ técnica del sistema. Es importante señalar que, a diferencia de Leontief, Sraffa no introduce la hipótesis de rendimientos constantes a escala. Pero advierte que si tal hipótesis sirve de ayuda no existe ningún problema en que sea adoptada temporalmente como hipótesis de trabajo.

x. El vector de los precios se indicará como:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \text{ donde } p_1 \ \geq 0, p_2 \ \geq 0, \dots, p_n \ \geq \ \ 0 \qquad (5.4)$$

$$y\ p_1\ es\ el\ precio\ de\ la\ mercancía\ 1, p_2\ es\ el\ precio\ de\ la\ mercancía\ 2, etc.$$

5.3. El modelo de precios

Es importante no olvidar que en este modelo el valor añadido está integrado por dos categorías retributivas: salarios y beneficios. Denotaremos con ***w*** el salario unitario (w es un escalar) y con $\boldsymbol{\pi}$, la tasa de beneficio, también es un escalar.

Dada la técnica $\begin{bmatrix} A \\ l_n \end{bmatrix}$ y considerando la hipótesis (viii) sobre la distribución del valor añadido, el sistema de precios quedará definido mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n-1,1}p_{n-1})(1+\boldsymbol{\pi}) + a_{n1}w = p_1 \\ (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n-1,2}p_{n-1})(1+\boldsymbol{\pi}) + a_{n2}w = p_2 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{1,n-1}p_1 + a_{2,n-1}p_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}p_{n-1})(1+\boldsymbol{\pi}) + a_{n,n-1}w = p_{n-1} \end{cases} \tag{5.5}$$

donde; p_1, p_2, …, p_{n-1} indican los precios de las mercancías 1,2,...,n-1; $\boldsymbol{\pi}$ el tipo de beneficio, y **w** el salario unitario. De forma compacta, el sistema puede escribirse:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{A}(1+\boldsymbol{\pi}) + \mathbf{l_n}w = \mathbf{p} \tag{5.6}$$

donde **p** representa el vector fila de los precios.

Este esquema contiene (n-1) ecuaciones con (n+1) incógnitas: w, $\boldsymbol{\pi}$ y los (n-1) precios. Se tiene, entonces, un número de incógnitas que supera en dos el número de ecuaciones, lo cual significa que dos de ellas pueden fijarse libremente.

Este problema tiene una larga historia en la evolución del pensamiento económico. Los economistas clásicos (aquí Pasinetti incluye a Smith, Ricardo y Marx) eran conscientes de la indeterminación del sistema de precios (5.5) y habían resuelto el problema pensando que el salario unitario era determinado por una relación exógena al sistema. Pensaban en las necesidades biológicas de subsistencia como factores determinantes del salario unitario. La tendencia de un importante número de estudiosos del tema en relación al sistema (5.5) consiste en un rechazo del planteamiento de los clásicos y en buscar fuera del sistema (.5) una relación que determine el tipo de beneficio. El propio Sraffa da muestras de pensar en estos términos, aunque sin llegar a explicitar claramente la relación externa que debería determinar el tipo de beneficio.[22]

Siguiendo el procedimiento de Leontief puede iniciarse fijando uno de los precios. Reduciendo a (n-2) el número de precios (que se convierten en relativos) y a n el número total de incógnitas. Después de esto queda un grado de libertad. Las posibilidades, con sentido económico, se reducen a elegir entre el salario unitario y el tipo de beneficio.

Sin embargo, lo anterior no significa que en un sistema económico real el salario unitario o el tipo de beneficio se pueden fijar de manera arbitraria. Sólo se está indicando que el sistema de ecuaciones (5.5) no es suficiente para determinar todas las incógnitas. Es necesario hacerlo determinado, buscando que una de estas dos variables se maneje como dada fuera del sistema.

El caso que se examinará es el que consiste en un tipo de beneficio de tal nivel que se anula el salario unitario de forma que todo el producto nacional neto va a parar a los beneficios.[23] En este caso el tipo de beneficio alcanza el máximo nivel posible, que denotaremos con $\boldsymbol{\Pi}$, de forma que quedará:

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\pi}_{(w=0)} \tag{5.7}$$

Con este nuevo supuesto, el sistema de ecuaciones (5.6) quedará como se muestra enseguida:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{A}(1+\boldsymbol{\Pi}) = \mathbf{p} \tag{5.8}$$

[22] Pasinetti Luigi, Lecciones de teoría de la producción, (Luis Tormo, trad.), 1ª. reimp., México: FCE, 1987

[23] Aquí es útil recordar los supuestos iv y v anotados al principio de este capítulo, porque así es fácil imaginar que es el salario de excedente el que se hace cero, ya que el de subsistencia está incorporado en los coeficientes de producción.

o bien:

$$\mathbf{p}[\mathrm{I} - (1 + \boldsymbol{\mathit{\Pi}})\mathbf{A}] = \mathbf{0} \tag{5.9}$$

si hacemos $\frac{1}{1+\Pi} = \lambda$, obtenemos

$$\mathbf{p}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \tag{5.10}$$

El cual es un sistema homogéneo el cual para tener soluciones distintas de cero, el determinante de la matriz de coeficientes, es decir, det $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, deberá ser nulo. Podemos buscar los valores de λ que satisfagan esta condición resolviendo la ecuación característica:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \tag{5.11}$$

Puede notarse que las raíces de la ecuación (5.11) son los autovalores o valores propios de la matriz **A**. El número de esos autovalores es (n-1), aunque es posible que algunos se repitan y que otros no tuvieran significado económico. Pero dado que A es una matriz no negativa, podemos afirmar que sólo uno de los (n-1) autovalores, y concretamente el autovalor máximo λ_m asegura un autovector (o vector propio) cuyos componentes son todos no negativos.[24] En el problema que nos ocupa los componentes del autovector son los precios (y precios negativos no tienen significado económico). De acuerdo con todo esto, $\mathit{\Pi}$ será el tipo de beneficio asociado a λ_m.

Sustituyendo este tipo de beneficio $\mathit{\Pi}$ en (5.9) y λ_m en (5.10), el sistema de ecuaciones que se obtiene es lineal y homogéneo con determinante igual a cero.

Además, la matriz $[\mathrm{I} - (1 + \quad)\mathbf{A}]$ tendrá rango (n-2); es decir, el sistema (5.9) contendrá (n-2) ecuaciones independientes. Esto asegura soluciones determinadas, que denotaremos con **p***, para los precios, luego de que alguno de ellos haya sido fijado libremente (puede ser igualado a 1).

[24] Véase en el Capítulo I el apartado correspondiente a los Teoremas 1 y 1 bis (de Perron Frobenius)

La última condición que debe ser satisfecha cuando w = 0, es que el único tipo de beneficio

$$\Pi = \frac{1}{\lambda m} - 1 \qquad (5.12)$$

que nos asegura precios no negativos (es decir, con significado económico), debe tener también significado económico, es decir, debe ser no negativo, por lo que

$$\Pi \geq 0 \qquad (5.13)$$

o bien, por lo que se refiere a la (5.11)

$$\lambda_m \leq 1 \qquad (5.14)$$

Si esta última condición no se cumple, estaríamos ante un sistema económico tan inoperante técnicamente que no podría generar beneficio a pesar de que el salario unitario es cero y, evidentemente, no podría sobrevivir.

5.4. Ejemplo numérico

Para el ejemplo del libro de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías*, de una economía de dos sectores con coeficientes de producción:

$$A = \begin{pmatrix} 0.486956 & 0.48 \\ 0.208696 & 0.32 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \;\; y \;\; w = 0$$

Interesa obtener el vector de precios de equilibrio y calcular la tasa máxima de ganancia con sentido económico.

Solución

Sabemos que P ≥ 0 solo si $0 \leq \boldsymbol{\pi} \leq \frac{1}{\lambda_m} - 1$ ó de forma equivalente $0 \leq \boldsymbol{\pi} \leq \Pi$

Entonces debemos calcular λ_m y Π

Como λ_m es un valor propio de A utilizamos el método para calcularlos visto en el capítulo I

$$|A - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 0.486956 & 0.48 \\ 0.208696 & 0.32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} (0.486956 - \lambda) & 0.48 \\ 0.208696 & (0.32 - \lambda) \end{vmatrix}$$

$= (0.486956 - \lambda)\ (0.32 - \lambda) – 0.48\ (0.208696)$

$= 0.15582592 – 0.486956\ \lambda - 0.32\ \lambda + \lambda^2 – 0.10017408$

$= \lambda^2 – 0.806956\ \lambda + 0.5565184$

Igualamos a cero:

$\lambda^2 – 0.806956\ \lambda + 0.5565184 = 0$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado mediante la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y obtenemos dos valores propios:

$\lambda_1 = 0.7308045$ y $\lambda_2 = 0.0761514$

En este caso los dos valores propios son positivos. Elegimos el valor mayor de λ que se convertirá en $\lambda_m = 0.7308045$ y calculamos su vector propio: **p***

La ecuación de vectores propios es:

AP* = 0.7308045**P***

desarrollamos:

$$\begin{pmatrix} 0.486956 & 0.48 \\ 0.208696 & 0.32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0.7308045 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.486956\ p_1 + 0.48\ p_2 \\ 0.208696\ p_1 + 0.32\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7308045\ p_1 \\ 0.7308045\ p_2 \end{pmatrix}$$

reescribimos en su forma estándar:

$0.486956\ p_1 – 0.7308045\ p_1 + 0.48\ p_2 = 0$

$0.208696\ p_1 + 0.32p_2 – 0.7308045\ p_2 = 0$

simplificamos:

$-0.2438485\ p_1 + 0.48p_2 = 0$

$0.208696\ p_1 – 0.4108045\ p_2 = 0$

Resolvemos por Gauss y obtenemos:

$$(1 \quad -1.968435319|0)$$

Entonces, el sistema tiene un número infinito de soluciones. Despejamos la variable que tiene pivote (p_1) y se determina que p_2 es variable libre o arbitraria.

$p_1 – 1.968435319\ p_2 = 0$

De donde:

$p_1 = 1.968435319\ p_2$

p_2 = cualquier valor

Reescribimos en su forma matricial:

$$\mathbf{p}^* = \binom{p_1}{p_2} = \binom{1.968435319\ p_2}{p_2} = p_2 \binom{1.968435319}{1}$$

Hacemos $p_2 = 1$ y obtenemos:

$$\mathbf{p}^* = \binom{1.968435319}{1}$$

Este es el vector propio **p*** de la matriz del ejemplo de Sraffa (asociado a λ_m). Este vector es el de precios de equilibrio, cuando w = 0.

Ahora calculamos Π:

$$\Pi = \frac{1}{\lambda_m} - 1$$

$$= \frac{1}{0.7308045} - 1$$

$$= 0.3683$$

es decir, la tasa de ganancia máxima del sistema es 36.8%

5.5 Conclusiones

A partir del trabajo de Bortkiewicz presentado en el capítulo anterior, puede observarse que se inauguró una ruta en el desarrollo del pensamiento económico que parte del proceso de transformación de Marx, pasa por la forma como Bortkiewicz ataca el problema para que, a partir de ahí surjan los modelos de insumo producto usados tanto por Sraffa como por Leontief.

Destaca el hecho de que en esta ruta, el centro de atención se desplazó: de la búsqueda de Marx por descubrir las relaciones sociales entre los hombres y su expresión en las relaciones de intercambio entre las mercancías, con Bortkiewicz se transformó en la investigación de la tasa de ganancia "máxima" en términos de precios y de los coeficientes X, Y y Z de transformación de los valores en precios pero, sin sentirlo el propio Bortkiewicz, su enfoque es tal que puede hacerse caso omiso de los valores para la determinación de los precios. En el caso de Sraffa ocurre algo muy similar, porque el vector de precios puede obtenerse sin necesidad de usar las magnitudes en términos de valor.

CONCLUSIONES GENERALES

El enfoque sistémico es una metodología que nos permitió, a través de herramientas aparentemente simples, pero poderosas, definir nuestro sistema y el complejo de interrelaciones que mantiene tanto con el sistema mayor del cual forma parte, como con los subsistemas que lo integran.

Determinar cuál es el problema que está generando que el sistema (la AEP) se encuentre en un estado insatisfactorio que afecta el funcionamiento de los subsistemas que lo integran (profesores, alumnos, formación, etc), no fue fácil debido a que involucra intereses de los actores, factores políticos, aspectos culturales e ideológicos, entre otros.

La metodología de sistemas suaves nos permitió acercarnos a la formulación del problema a través del conjunto de sus manifestaciones, a lo que se llama su problemática.

En este proceso pudimos comprobar lo que dice Checkland acerca de que cada participante tiene una percepción diferente de lo que ocurre en el sistema y, por tanto, también tienen una perspectiva de cuál es la solución. Con el uso de la metodología de sistemas y la de sistemas suaves, se logró estructurar estas percepciones diversas hasta llegar a determinar los componentes más importantes de la problemática de la AEP, que puede resumirse en los siguientes aspectos:

- La AEP se encuentra inmersa en un medio ambiente hostil para el logro de sus objetivos. Por un lado, la situación económica del país presiona a los estudiantes y a la administración de la Facultad a preferir una formación académica para “encontrar trabajo”.
- Los integrantes de la AEP no están dirigiendo sus esfuerzos a buscar el fortalecimiento de su espacio de trabajo.

Entonces debe integrarse el trabajo de los profesores en un proceso que tenga el objetivo común de fortalecer la presencia de la AEP en la facultad.

En este trabajo se plantea una forma de trabajar uno de los temas más importantes en la literatura económica (marxista o no marxista) como es el de la formación de los precios. A partir de éste podrán generarse varios resultados:

- Mostrar a los estudiantes que hay un debate en el cual está involucrado el pensamiento marxista.
- Mostrar que el marxismo no es ajeno a la formalización matemática
- Enseñar a construir modelos económicos
- Transformar este tipo de propuestas en materiales didácticos

En cuanto a esta parte de la tesis podemos decir lo siguiente:

Lo expuesto, tanto en lo que se refiere a los temas del álgebra lineal como al debate en torno del proceso de transformación de valores en precios, es apenas una minúscula parte de lo que existe de ambos. No ha sido el objetivo de este trabajo agotarlos, ni mucho menos pensar en aportar algo nuevo en ninguno de los dos campos. Pero los objetivos que nos marcamos en un principio se han logrado de manera satisfactoria.

Comprobamos que el conocimiento del lenguaje de las matemáticas no es suficiente para aplicarlo a la economía. Para lograrlo es esencial comprender la teoría económica, porque con base en ella, es que se eligen las variables a tomar en cuenta para realizar el análisis; se establecen los tipos de relaciones que se podrían esperar que existan entre esas variables; se adoptan supuestos simplificadores para ver en toda su pureza el funcionamiento de tales variables y llegar así a su esencia y, por último, interpretar sus resultados para validar su consistencia con la realidad.

El análisis de Sraffa de la distribución se apoya en la idea de que es posible mover, a voluntad, las variables distributivas. Cierto, es matemáticamente posible cambiar la tasa salarial o la de ganancia, pero la distribución, sola, no puede cambiar arbitrariamente, porque está ligada a la producción. La producción es antes que la distribución y la determina.

Con Shaikh pudimos ver que la transformación de valores a precios consiste en igualar la dimensión de dos formas de medir un conjunto de bienes: en términos de valor se mide en horas de trabajo socialmente necesario, mientras que los precios están expresados en unidades monetarias. Entonces, para comparar valores (horas) con precios (unidades monetarias) es necesario convertir uno de los conjuntos en las unidades del otro. Este investigador, buscó traducir a lenguaje matemático lo hecho por Marx, procurando incluir la esencia de su modelo.

La discusión teórica presentada permite concluir que con el uso del lenguaje matemático se puede mostrar el vínculo entre valores y precios de producción para un sistema económico en reproducción. Los precios de producción son valores transformados con arreglo a una regla matemática: al vector de los valores se le aplica un vector de multiplicadores lo que arroja el vector de precios de producción.

Comprobamos que la traducción de un problema económico al lenguaje matemático, permite operar a aquél con las reglas gramaticales del lenguaje matemático y la aplicación del método lógico deductivo en su análisis, lo que permitió hacer generalizaciones para verificar hipótesis y para enriquecer las conclusiones. Así, por ejemplo, en el trabajo de Shaikh pudimos ver que gracias a la existencia de los teoremas de Perron-Frobenius, él pudo asegurar que existe un valor propio con valor máximo asociado a una matriz no negativa, valor que le permitió resolver el sistema y obtener el vector de multiplicadores que permitiría transformar los valores en precios.

En el caso de Sraffa, él también traduce a lenguaje matemático el modelo económico, pero pierde de vista la esencia del problema que era obtener las variables distributivas pero partiendo de un conjunto de valores de los insumos, por lo que en realidad podríamos decir que no resuelve éste problema sino uno muy distinto.

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN SUGERIDAS

El trabajo que aquí se presenta se limita a definir el problema de la AEP en la Facultad de Economía de la UNAM y, en función de él, a presentar una propuesta de solución, por lo que existen varios aspectos que deberían investigarse para estar en condiciones de plantear una propuesta de mejora integral. Esto puede lograrse en alguna de las vertientes siguientes.

1. Comparar la estructura curricular de la Facultad de Economía de la UNAM con la de otras escuelas de economía: de México (públicas y privadas) y de otros países (desarrollados y con desarrollo similar al de México).
2. .Investigar qué otras temáticas están en el debate teórico actual y cuál ha sido la postura de los economistas de corte marxista.
3. Sistematizar las posturas teóricas de economistas no marxistas respecto de los problemas económicos actuales, que han sido la base de las políticas económicas de muchos países y que puede decirse, no han sido exitosos.
4. Desarrollar otras propuestas didácticas que relacione la Economía Política con la Historia, con la Contabilidad Nacional, con Teoría Económica, etc, con lo que se logrará contar con un acervo de materiales de trabajo para la docencia y mostrará la interrelación de este campo de conocimiento con los demás.

BIBLIOGRAFÍA

Barreda Marín, Andrés; La transformación de los valores en precios de producción (s/d)

Blaug, Mark, Teoría económica en retrospección, (Eduardo L. Suárez, trad.), 1ª. ed. en español, México: FCE, 1985.

Bortkiewicz, L, "Contribución a una rectificación de los fundamentos de la construcción teórica de Marx en el volumen III de El Capital", en *Cuadernos Pasado y Presente* 49, Córdoba: 1974

Chiang Alpha, *Métodos fundamentales de economía matemática*, (Francisco Muñoz, Trad) 3ª. ed., México: Mc Graw Hil, 1984l.

Foley, Duncan, Para entender El Capital (La teoría económica de Marx), (Susana Marín, trad.), 1ª. ed. en español, México: 1989, FCE, cap. VI.

Fuentes Zenón, Arturo: *El pensamiento sistémico, caracterización y principales corrientes*, Cuadernos de planeación y sistemas nº 3, México:FI-DEP, UNAM, 1990

------- *El enfoque de sistemas en la solución de problemas*, Cuadernos de Planeación y Sistemas nº. 4, México:FI-DEP, UNAM, 1991

Grossman Stanley, *Álgebra lineal*, (José Luis Farah, Alagón Cano, Muñoz Abogado y Noriega Rivero, trads), 2ª. ed., México: Grupo editorial Iberoamérica., 1988

Martínez Carlos, *Curso de álgebra lineal* (teoría con aplicaciones a la economía), primera reimpresión, México: UNAM, 2012.

Marx Carlos, *Contribución a la crítica de la economía política*, 9ª. reimpresión, México: Ediciones de Cultura Popular, 1979.

------- *El Capital*, (Pedro Scaron, trad.) 26ª. ed. Vols. I, II y III, México: Siglo XXI, 2005.

Meek, Ronald, (1980)*. Smith, Marx y después, Diez ensayos sobre el desarrollo del pensamiento económico,* Siglo XXI, Madrid, pp. 117-118

Ornelas Jaime, *Carlos Marx. Una biografía*, (col. Extensión universitaria 2), México: UAP, 1984.

Pasinetti Luigi, *Lecciones de teoría de la producción*, (Luis Tormo, trad.), 1ª. reimpr. México: FCE, 1987

Popoca Alfredo, *Valor, precio directo, precio de producción y la teoría monetaria de Marx en patrones monetarios de reproducción simple del capital*, México: UNAM-FE, 2012

Shaikh, Anwar, "Marx´s theory of value and the ´transformation problem´", en Schwartz, J. (ed.), *The subtle anatomy of capitalism*, Goodyear Publishing Company, Inc., 1977, pp. 106-139.

--------Valor, acumulación y crisis, 1a. ed. en español, Colombia: Tercer Mundo Editores, 1990, cap. 2.

Sraffa Piero, *Producción de mercancías por medio de mercancías*, (Luis Ángel Rojo, trad.)) 2ª. ed. en lengua castellana, España: Oikos, 1975

Steedman Ian, *Marx, Sraffa y el problema de la transformación*, (Eduardo Suárez, trad.)1ª. ed. en español, México: FCE, 1985

Valle, Alejandro, *Valor y precio: una forma de regulación del trabajo social*, México: FE- UNAM, 1991, cap. X

REVISTAS

Mendoza Gabriel; : <<La transformación de valores en precios de producción. Ilustración con un modelo de capital circulante>>,**Economía y Práctica**, (México, D.F), no. 10, Nueva época, 1999, 24 pp

RECURSOS ELECTRÓNICOS

Roncaglia, Alessandro, *Piero Sraffa*. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2009. Libro consultado electrónicamente en:

http://iztacalaunam.eblib.com/patron/FullRecord.aspx?p=485372 (consultado junio 09, 2014)

Barceló Alfons, en su artículo Presentación del artículo de Piero Sraffa, sobre las relaciones entre coste y cantidad producida, Economía crítica no. 10, consultado en línea en http://revistaeconomiacritica.org/sites/default/files/revistas/n10/10.pdf. (consultado junio, 19, 2014)

APÉNDICE. ELEMENTOS DE ÁLGEBRA MATRICIAL Y LINEAL[25]

El álgebra matricial es muy útil cuando se trabaja con modelos que involucran varias ecuaciones y variables. En primer lugar, proporciona una forma compacta de escribir un sistema de ecuaciones, por grande que sea. En segundo lugar, nos enseña criterios o métodos para probar la existencia de solución o soluciones. Tercero, permite encontrar esa solución. Además, el desarrollo de esta parte de la matemática ha permitido trabajar problemas económicos de una forma precisa.

A.1 Matrices y Vectores

En general, un sistema de ecuaciones lineales con *n* variables $(\mathrm{x}_{1,}\mathrm{x}_{2,}, \dots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}})$ puede disponerse en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = d_m \end{array} \qquad \text{(I.1)}$$

Observamos que la variable x_j sólo aparece en la columna j-ésima del lado izquierdo del signo de igualdad. El parámetro con doble subíndice, a_{ij} , representa el coeficiente que situado en la i-ésima ecuación afecta a la variable j-ésima. Por ejemplo, a_{21} es el coeficiente en la segunda ecuación, de la variable x_1. Finalmente el parámetro d_1, que no afecta a ninguna variable, representa el término constante de la i-ésima ecuación. Por tanto, todos los subíndices responden a una clave de ubicación específica en (I.1) de las variables y los parámetros.

En general, en un sistema de ecuaciones como (I.1) hay tres tipos de componentes. El primero es el conjunto de los coeficientes a_{ij}; el segundo es el conjunto de las variables $x_1, \dots, x_n$ y el último es el conjunto de los términos constantes $d_1, \dots, d_m$. Al disponer cada uno de estos conjuntos como un arreglo rectangular y los identificamos con A, x y d (sin subíndices) respectivamente, tendremos:

[25] Este capítulo está basado principalmente en Martínez Carlos, *Curso de álgebra lineal* (teoría con aplicaciones a la economía), primera reimpresión, México:UNAM, 2012. Chiang Alpha, *Métodos fundamentales de economía matemática*, (Francisco Muñoz, Trad) 3ª. ed., México: Mc Graw Hil, 1984l. Grossman Stanley, *Álgebra lineal*, (José Luis Farah,Alagón Cano, Muñoz Abogado y Noriega Rivero, trads), 2ª. ed., México: Grupo editorial Iberoamérica., 1988

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \qquad \text{(I.2)}$$

Ejemplo (I.1): el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 2z &= 7 \\ x + y &= 5 \\ 3x + z &= 4 \end{aligned} \qquad \text{(I.3)}$$

Puede escribirse así:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(I.4)}$$

Donde cada arreglo en líneas de (I.2) o de (I.4) constituye una matriz.

Entonces, una matriz se define como un agrupamiento en líneas de números, parámetros o variables en un campo determinado. Los elementos de las matrices están encerrados entre corchetes como en (I.2) o también entre paréntesis. Otra característica de notación es que los elementos están separados no por comas, sino únicamente por espacios en blanco.

De una forma más simplificada, el arreglo en líneas de la matriz A en (I.1) puede escribirse como:

$$A = [a_{ij}] \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Como la ubicación de cada elemento de una matriz está unívocamente determinada por el o los subíndices, toda matriz es un conjunto ordenado.

Los vectores como matrices especiales

En una matriz, el número de filas y el número de columnas definen conjuntamente su dimensión. Así, la matriz A de (I.2) contiene m filas y n columnas, por lo que su dimensión es de $m * n$ (se lee "*m por n*"). Conviene recordar que el número de filas se lee antes que el de columnas. En el caso especial en que $m = n$, A será una matriz cuadrada.

Algunas matrices pueden contener sólo una columna, como X y D en (I.2) o en (I.4). Dichas matrices reciben el nombre especial de *vectores columnas*. En (I.2) la dimensión de X es $n * 1$ y la de D es $m * 1$; en (I.4) X y D ambas son $3 * 1$.

Sin embargo, si hubiéramos dispuesto las variables x_j en un arreglo horizontal, habría resultado una matriz de dimensión $1 * n$, llamada vector fila. Para distinguir un vector columna de un vector fila, éste último se denota como X^1 o $\bar{X}$, así:

$$\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \qquad \text{(I.5)}$$

Cabe recordar que un vector (fila o columna) no es más que una n-tupla ordenada, y como tal debe interpretarse como un punto en un espacio n-dimensional. Así mismo, la matriz A_{m*n} puede interpretarse como un conjunto ordenado de m vectores fila o como un conjunto ordenado de n vectores columna.

Ahora bien, con las matrices definidas en (I.4) puede expresarse el sistema de ecuaciones (I.3) en la forma compacta: $AX = D$.

Esta última expresión plantea al menos tres cuestiones ¿Cómo multiplicamos dos matrices A y X? ¿Qué significa la igualdad de AX y D? y ¿Cómo obtenemos la solución del sistema?

A.2 Tipos de matrices y sus propiedades

Hemos visto que las matrices están integradas por conjuntos ordenados de elementos que pertenecen al campo sobre el cual han sido definidos. Por eso, la posición que ocupa cada elemento en esta estructura matemática es fundamental.

De esta manera, dadas dos matrices cualesquiera $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ se verifica que:

$$A = \{a_{ij}\} = B = \{b_{ij}\} <=> a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j \qquad \text{(I.6)}$$

Es decir, se dice que dos matrices A y B son iguales si y sólo si tienen la misma dimensión e idénticos elementos en las posiciones correspondientes.

De acuerdo al número de filas y columnas que posean, se pueden distinguir diferentes tipos de matrices, de las que mostramos algunas que trabajaremos más adelante.

Dada $A = \{a_{ij}\}$ si $i = 1$ y $j = 1,2, \dots, m$ entonces

$$A = (a_{11} a_{12} \dots a_{1m}) \tag{I.7}$$

Caso que ya vimos se designan como un vector fila.

Dada $A = \{a_{ij}\}$ si $i = 1,2, \dots, n$ y $j = 1$ entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \tag{I.8}$$

Que se designa como un vector columna.

Dada $A = \{a_{ij}\}$ si $i = j = 1,2, \dots, n$ entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{I.9}$$

Que es una matriz cuadrada.

Dada $A = \{a_{ij}\}$ con $i = j = 1,2, \dots, n$, si se verifica que los elementos $a_{ij} = 0 \ \ \forall i > j$ pero $a_{ij} \neq 0 \ \ \forall i \leq j$, entonces:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{I.10}$$

Se designa como una matriz triangular superior[26].

Dada $A = \{a_{ij}\}$ con $i = j = 1,2, \dots, n$ cuando $a_{ij} = 0 \ \ \forall i < j$ pero $a_{ij} \neq 0 \ \ \forall i \geq j$, es decir:

[26] Hay autores que también la designan “diagonal superior”.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (I.11)$$

Se llama matriz triangular (o diagonal) inferior.

Dada $A = \{a_{ij}\}$ con $i = j = 1,2,\dots,n$ si los elementos $a_{ij} \neq 0 \ \ \forall i = j$ y $a_{ij} = 0 \ \ \forall i \neq j$, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (I.12)$$

Se dice que A es una matriz diagonal[27].

Dada una matriz $A = \{a_{ij}\}$ cuadrada, cuya diagonal principal contiene el valor uno en todas sus posiciones, como se muestra

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (I.13)$$

Se designará como una matriz unitaria (o identidad). Por convención, esta matriz se identifica con la letra I.

Dada $A = \{a_{ij}\}$ con $a_{ij} = 0 \ \ \forall i,j$ entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (I.14)$$

Se define como matriz nula.

Dada $A = \{a_{ij}\}_{n*m}$ cuando se permutan *vis a vis* las filas y las columnas, entonces:

$$A = \{a_{ij}\}_{n*m} \ \ => A^t = \{a_{ji}\}_{m*n}$$

[27] Solo cuando la matriz es cuadrada existirá diagonal principal, aunque en ocasiones, en matrices no cuadradas, por semejanza, se hablará de elementos que están en el sentido de la diagonal principal.

Es decir:

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{I.15}$$

Designada como la matriz traspuesta de A, que se denota como A^t.

A.3 Operaciones con matrices

Adición de matrices reales

Dos matrices pueden sumarse si y solo si tienen la misma dimensión. Cuando este requisito dimensional se cumple, se dice que las matrices sumandos son conformes para la suma. En este caso, dadas las matrices reales $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ la adición $A + B$ se define de la forma siguiente:

$$(A + B) = \{a_{ij}\} + \{b_{ij}\} = \{a_{ij} + b_{ij}\} = \{r_{ij}\} \tag{I.16}$$

Con base en esta definición, la adición entre matrices supone adicionar los elementos correspondientes en las matrices sumandos, y como las matrices se han definido sobre el campo de los reales, los sumandos son números reales para los cuales se conoce la regla de adición.

Ejemplo (I.2)

Sean las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

La adición $A + B$ será:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por un número real $k \neq 0$

Dada una matriz real $A = \{a_{ij}\}$ con $i = 1,2, \dots, n,\ \ j = 1,2, \dots, m$ y un número real cualquiera $k \neq 0$, se define la multiplicación de la matriz por un número (escalar) de la forma siguiente:

$$kA = k\{a_{ij}\} = \{ka_{ij}\} = (kA) \qquad \text{(I.17)}$$

Es decir, cada elemento de A se multiplica por el escalar dado. Esta operación siempre estará definida.

Ejemplo (I.3)

Sea la matriz A y el escalar $k = \frac{1}{2}$, realizar la operación kA.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$k * A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{21} & \frac{1}{2}a_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplicación entre matrices reales

Para facilitar la comprensión de esta operación es útil comenzar por definir el producto interno entre vectores.

Sea el vector fila $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ y el vector columna $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$, se define el producto interno $A * B$ como sigue:

$$A * B = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \qquad \text{(I.18)}$$

El producto entre vectores es resultado de sumar los productos de los elementos, tomados uno a uno, de los vectores multiplicando y multiplicador. De ahí que esta operación esté definida cuando ambos vectores posean la misma cantidad de elementos, lo cual es posible si y solo si el vector multiplicando es de dimensión $1 * n$ y el multiplicador de dimensión $n * 1$.

Se observa que el resultado de esta operación es un número.

Ahora bien, si se tienen m vectores fila de la forma $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ puede formarse con ellos una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De la misma forma, si se tienen p vectores columna de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Se puede formar la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.19)}$$

Así definidas, cada una de las m filas de la matriz A consideradas como vectores, poseen n componentes, mientras que cada una de las columnas de B consideradas como vectores, también tiene n componentes. Entonces, cada una de las filas de A se puede multiplicar escalarmente por las columnas de B y se obtendrá como resultado $m * p$ escalares que constituirán cada uno de los elementos de la matriz resultado R, que será de dimensión $m * p$. Es decir:

$$A_{m*n} B_{n*p} = R_{m*p} \qquad \text{(I.20)}$$

Cada r_{ij} elemento en la matriz resultado R está dado unívocamente, por la fila i de A, que es el vector multiplicando y la columna j de B que será el vector multiplicador. Es decir, por ejemplo, el elemento r_{21} de R, se habrá obtenido al multiplicar escalarmente la fila 2 de A y la columna 1 de B.

Por lo tanto, la multiplicación entre matrices requiere que los renglones o filas de la matriz multiplicando A, consideradas como vectores posean exactamente la misma cantidad de elementos que las columnas de la matriz multiplicador B, también consideradas como vectores. Esto sucederá si y solo si la matriz multiplicando contiene tantas columnas como filas tiene la matriz multiplicador. Si esta condición no se verifica, la multiplicación entre matrices no está definida.

De lo anterior resulta que, en general, la multiplicación entre matrices no es conmutativa. Por lo que es indispensable identificar con precisión cual matriz ocupará el lugar de la matriz multiplicando y cual el de multiplicador.

El producto entre matrices reales cumple las siguientes propiedades. Sean A, B y C tres matrices cualesquiera, si entre ellas está definida la operación multiplicación tenemos:

- $A(BC) = (AB)C \qquad Ley\ asociativa$
- $\left.\begin{matrix} A(B+C) = AB + AC \\ (A+B)C = AC + BC \end{matrix}\right\} \quad Ley\ distributiva$

A.4 Operaciones con Vectores

Ya se han tratado los vectores como tipos especiales de matrices. Sin embargo, en atención a sus peculiaridades dimensionales, es útil mencionar algunas cuestiones adicionales.

Multiplicación de vectores

De la multiplicación de un vector columna $m * 1, \upsilon$ y un vector fila $1 * n, \nu'$ resulta una matriz producto $\upsilon\nu'$ de dimensión $m * n$

Ejemplo (I.4)

Si $\upsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\nu' = (1 \quad -2 \quad 3)$, podemos obtener

$$\upsilon * \nu' = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(-2) & 3(3) \\ -1(1) & -1(-2) & -1(3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.21)}$$

En este caso, podemos ver que se obtuvo una matriz $2 * 3$, aunque partimos sólo de dos vectores.

En cambio, dados un vector fila $1 * n,\ \upsilon'$ y un vector columna $n * 1,\ \nu$, el producto $\upsilon'\nu$ será de dimensión $1 * 1$.

Ejemplo (I.5)

Si $\upsilon' = (-1 \quad 2)$ y $\nu = \binom{3}{5}$, obtendremos de la multiplicación $\upsilon'\nu$ lo siguiente:

$$\upsilon'\nu = (-1(3) + 2(5)) = (7) \qquad \text{(I.22)}$$

Como está expresada, $\upsilon'\nu$ es una matriz, a pesar del hecho de que sólo haya un único elemento, sin embargo, las matrices $1 * 1$ se comportan exactamente como escalares con respecto a la suma y a la multiplicación; así, $[4] + [5] = [9]$ tal como $4 + 5 = 9$; y $[-1][3] = [-3]$, como $-1(3) = -3$. Debido a esto, puede redefinirse $\upsilon'\nu$ como el escalar correspondiente a la matriz producto $1 * 1$. Para el anterior ejemplo podemos acordar escribir $\upsilon'\nu = 7$. Denominándose a esta operación un producto escalar. Cabe recordar, sin embargo, que mientras una matriz $1 * 1$ puede tratarse como un escalar, no puede reemplazarse de manera arbitraria un escalar por una matriz $1 * 1$, si después han de realizarse otros cálculos.

Interpretación geométrica de las operaciones con vectores

Un vector fila o columna con n elementos (que llamaremos vector n-dimensional) puede verse como una n-tupla, y por tanto como un punto en el espacio de dimensión $\boldsymbol{n}$ (que llamaremos espacio n-dimensional).

En la figura I.1 (a) está representado el punto (2,1) en un espacio bidimensional y lo hemos llamado υ. Si se dibuja una flecha (segmento lineal dirigido) desde el origen, punto (0,0), hasta el punto υ, se estará especificando la única ruta directa por la que se alcanza el punto υ desde el punto de origen. Como sólo existe una única flecha para cada punto, puede considerarse que el vector υ está representado gráficamente tanto por el punto (2,1) como por la flecha correspondiente.

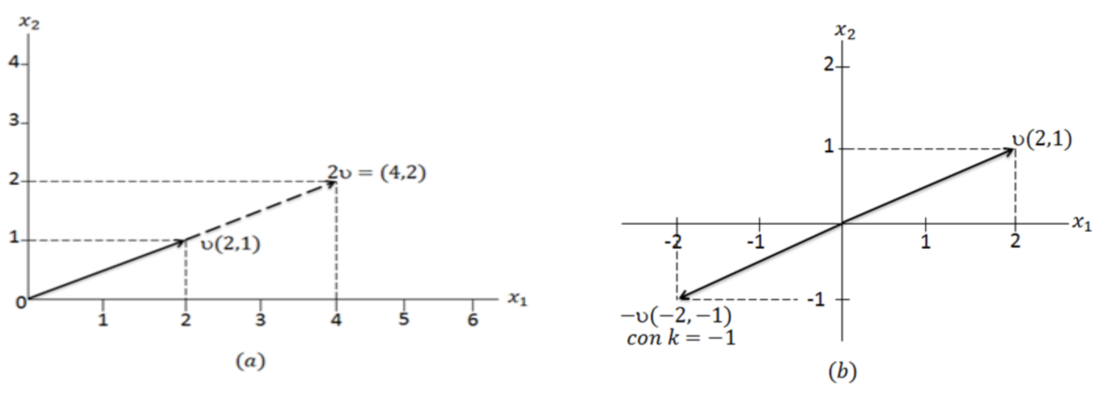
Con estas ideas, es posible dar un significado geométrico a:

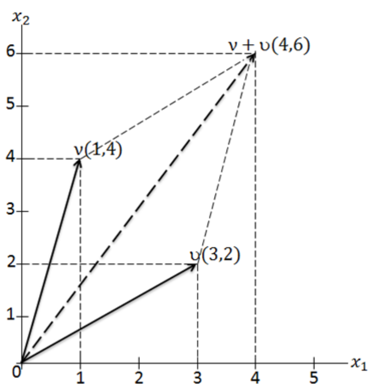
a) La multiplicación de un escalar por un vector: $k\upsilon$.
b) La suma y resta de vectores: $\upsilon + \nu$ ó $\upsilon - \nu$.
c) La combinación lineal entre vectores.

Si definimos $k = 2$ y $\upsilon = (2 \quad 1)$, el producto $k\upsilon = (4 \quad 2)$ que se representa en la figura 1(a) como la flecha que se extiende sobre la anterior, pero dos veces más larga. En general, la extensión y dirección de la flecha dependerá de si $k > 1$, entonces la flecha se alargará; si $k = 0$, se encogerá hasta el origen; si $0 < k < 1$, la flecha se acortará y si $k < 0$, se invertirá la dirección de la flecha. (fig. I.1 (b).

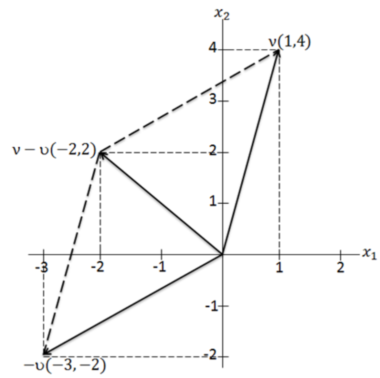
Ahora, consideremos la suma de dos vectores, $\nu = (1 \quad 4)$ y $\upsilon = (3 \quad 2)$, o sea: $\nu + \upsilon = (4 \quad 6)$, la cual puede dibujarse como la flecha punteada de la fig. I.1 (c) , que es la diagonal del paralelogramo formado a partir de los dos vectores υ y ν como dos de sus caras. Este método también proporciona el vector diferencia $(\nu - \upsilon)$, puesto que ésta es equivalente a la suma de ν y $(-1)\upsilon$. En la fig. I.1 (d) se reproduce primero el vector ν y el vector negativo $-\upsilon$ y a partir de ellos se construye un paralelogramo. La diagonal que le corresponde representa la diferencia $\nu - \upsilon$.

Figura I.1





(c)



(d)

A.5 Operaciones elementales por las filas de una matriz

Las operaciones elementales por las filas de una matriz se pueden aplicar a matrices de cualquier tipo (por razones obvias excepto a las tipo $1 * n$ y $n * 1$) y son fundamentalmente:

a) La permutación *vis* a *vis* de dos filas.
b) La multiplicación de toda una fila por un número real $k \neq 0$ y,
c) La adición a una fila del múltiplo de otra.

Se llaman elementales porque modifican sólo a la fila a la cual se aplican.

Ejemplo (I.6)

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.23)}$$

Supongamos que se quiere permutar entre sí la segunda fila por la tercera. Esta operación puede quedar representada como sigue:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{2\,3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda operación consiste en multiplicar toda una fila por un número real $k \neq 0$.

Vamos a suponer que $k = \frac{1}{2}$ y que se desea multiplicar la tercera fila por ese número. La operación se representa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_3\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera operación consiste en sumar a una fila el múltiplo de otra. Supongamos que se requiere sumar a la primera fila la tercera multiplicada por $k = -3$. La operación quedaría representada de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{1\,3}(-3)} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

A.6 Cálculo de la inversa de una matriz usando operaciones elementales

Dada una matriz real A cualquiera, la matriz B se define como su inversa, si se verifican algunas de las siguientes condiciones:

$$AB = I \qquad \text{(I.24)}$$

$$BA = I \qquad \text{(I.25)}$$

$$AB = BA = I \qquad \text{(I.26)}$$

En la expresión (I.24), B es la inversa por la derecha de A_j en (I.25) se dice que B es inversa por la izquierda de A. Por tanto, las inversas representadas en (I.24) y (I.25) se nombran inversas unilaterales.

En (I.26) la matriz B aplica tanto posmultiplicando como premultiplicando, por lo que se dice que B es inversa bilateral de A. Por convención, cuando B es inversa bilateral de una matriz A se designa por A^{-1}. En este caso se verifica la propiedad conmutativa de la multiplicación, por lo cual ambas matrices tendrán que ser cuadradas y del mismo orden.

Por lo tanto, para que una matriz posea inversa bilateral es condición necesaria (aunque no suficiente) que la matriz sea cuadrada.

Se puede demostrar que dada una matriz A cualquiera, si B es su inversa bilateral, entonces B es única.

En lo que sigue presentaremos la condición suficiente para que una matriz cuadrada posea inversa bilateral. Lo referente a las propiedades de las inversas unilaterales no será tratado por no ser necesario para las aplicaciones que se presentarán más adelante.

La inversa de una matriz de cualquier tipo se puede calcular aplicando operaciones elementales por filas. Primero aplicaremos el procedimiento a una matriz cuadrada, para lo cual usaremos la matriz del ejemplo (I.6)

Como en este caso A es una matriz cuadrada de orden 3, se puede suponer que su inversa será bilateral y del mismo orden que A. Para su cálculo se procede como sigue:

1. Se escribe la matriz A y a su derecha la matriz I del mismo orden que A, lo que se expresa del modo siguiente: $[A|I]$.
2. Se aplican operaciones elementales por fila hasta que A se haya transformado en la matriz identidad (I).
3. A la derecha de la tabla y como resultado de las operaciones realizadas por las filas, la matriz I se habrá transformado en A^{-1}.
4. Al terminar se habrá obtenido $[I|A^{-1}]$.

Aplicando el procedimiento a la matriz del ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{P_{1\,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{2\,1}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{3\,1}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{M_2\,(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{A_{3\,2}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{M_3\left(\frac{1}{8}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right] \xrightarrow{A_{2\,3}(-6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{8} & \frac{4}{8} & \frac{10}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right] \xrightarrow{A_{1\,3}\,(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{6}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{8} & \frac{4}{8} & \frac{10}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{1\,2}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{8} & \frac{4}{8} & \frac{10}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right] \qquad \text{(I.27)}$$

Por lo tanto, la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{6}{8} & \frac{4}{8} & \frac{10}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.28)}$$

Es la inversa bilateral de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Lo cual puede comprobarse al realizar el producto $A * A^{-1}$ y $A^{-1} * A$, obteniéndose en ambos casos la matriz identidad (I).

Al definir en la relación (I.26) el concepto de inversa bilateral de una matriz, se estableció como condición necesaria la cuadratura de dicha matriz. Ahora, con base en el procedimiento de cálculo mostrado es posible establecer la condición suficiente para la existencia de inversas bilaterales: una matriz cuadrada tendrá inversa bilateral si y sólo si puede ser reducida a una matriz unitaria aplicando operaciones elementales por filas.

A. 7. Sistemas de ecuaciones lineales: representación matricial y método de solución

Una ecuación es una relación de igualdad de alguna función general del tipo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ donde las variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ representan las incógnitas, es decir, valores no conocidos que se quieren determinar. Por otra parte, un conjunto de valores $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, que sustituidos en la relación verifiquen la igualdad, se dice que son raíces (solución) de la ecuación.

Ahora bien, definimos un sistema de ecuaciones a un conjunto de relaciones del mismo tipo del anterior, como sigue:

$$\begin{array}{c} f_1(x_{1\,1}, x_{1\,2}, x_{1\,n}) = 0 \\ f_2(x_{2\,1}, x_{2\,2}, x_{2\,n}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_{m\,1}, x_{m\,2}, x_{m\,n}) = 0 \end{array} \qquad \text{(I.29)}$$

Para el cual, una solución es un conjunto de valores $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ que verifican las igualdades simultáneamente en todas y cada una de las relaciones que forman el sistema de ecuaciones.

Una ecuación es lineal cuando todas las variables están elevadas a la primera potencia y cuando un sistema de ecuaciones está integrado por este tipo de ecuaciones, se definirá como un sistema de ecuaciones lineales.

En consecuencia, un sistema de ecuaciones lineales como el representado en (I.29) tendrá la forma general siguiente:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (I.30)$$

De este sistema se pueden definir:

Una matriz A de orden $m * n$ cuyos elementos son los a_{ij} valores asociados a cada una de las n variables en cada una de las m ecuaciones que integran el sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (I.31)$$

Un vector columna X de orden $\boldsymbol{n} * \mathbf{1}$ cuyos elementos son las $\boldsymbol{x_i}$ incógnitas (variables) en cada una de las $\boldsymbol{m}$ ecuaciones del sistema.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (I.32)$$

Un vector columna $\boldsymbol{B}$ de orden $\boldsymbol{m} * \mathbf{1}$ cuyos elementos son los b_i valores que aparecen como términos a la derecha de cada una de las $\boldsymbol{m}$ ecuaciones que forman el sistema.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (I.33)$$

Con las expresiones (I.31),(I.32) y (I.33) puede escribirse el sistema representado en (1.29) como sigue:

$$A_{mn}X_{n1} = B_{m1} \quad \text{(I.34)}$$

Donde (I.34) es la representación en forma matricial de un sistema de ecuaciones lineal. Con base en ella y en las propiedades que les corresponden según tengan inversa bilateral (única), unilateral por la izquierda y unilateral por la derecha, es posible establecer las condiciones sobre la existencia y unicidad de soluciones en los sistemas de ecuaciones lineales de cualquier tipo, las que se resumen a continuación.

Dado un sistema lineal de ecuaciones del tipo $A_{mn}X_{n1} = B_{m1}$, en el que las ecuaciones son compatibles[28], se verifica que:

1. Si el sistema contiene menos ecuaciones que incógnitas $(m < n)$ entonces el sistema siempre tendrá múltiples soluciones.
2. Si el sistema posee más ecuaciones que incógnitas $(m > n)$, entonces, en general, el sistema no tendrá solución. En el caso particular de que tenga solución, ésta será única.
3. Si el sistema posee igual número de ecuaciones e incógnitas $(m = n)$, podrá tener solución única o múltiples soluciones.

Con esto se llega a diversas posibilidades en los sistemas de ecuaciones, las que se pueden resumir en tres grandes líneas:

- Los sistemas que poseen solución única.
- Los que no tienen solución y,
- Los que tienen más de una solución.

De acuerdo con lo anterior, es conveniente contar con un procedimiento robusto que permita encontrar solución a todos los casos posibles que se presenten, lo cual se presenta en el siguiente epígrafe.

[28] Dos o más ecuaciones en un sistema se dice que son inconsistentes cuando, siendo sus términos a la izquierda iguales o múltiplos entre sí, los términos a la derecha no lo son. Cualquier sistema que contenga ecuaciones inconsistentes no tiene solución y, en ese caso, se dice que el sistema es incompatible.

El método de Gauss-Jordan en la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Regularmente los procedimientos para hallar los diferentes tipos de inversas de matrices que existen suponen aplicar operaciones elementales sobre las filas de la matriz para llegar, a partir de ella, a una matriz unitaria. Por eso, es posible inferir que el método de cálculo para hallar la solución de cualquier sistema de ecuaciones lineales, que implica encontrar implícitamente la matriz inversa asociada a la matriz del sistema, necesariamente consiste en aplicar operaciones elementales por filas, empleando una secuencia que permita transformar la matriz del sistema en una matriz unitaria.

El procedimiento, conocido como el método de Gauss-Jordan, se ilustra en los tres ejemplos que resumen todos los casos posibles que se pueden presentar.

Caso 1. Cuando: $m < n$, es decir, el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas.

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ x_1 \ + \ x_2 \ + 2x_3 \qquad &= 3 \\ x_2 \ + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(I.35)}$$

Para aplicar el método de Gauss-Jordan se debe escribir la matriz $\boldsymbol{A}$ y junto a ella, separado por una línea, el vector $\boldsymbol{B}$, quedando en la forma $(A|B)$. Si al aplicar operaciones elementales por la fila se logra transformar a A en la matriz unitaria, B también se habrá hecho explícita.

Ejemplo (I.7) tenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{P_{12}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{P_{23}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{31}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{32}(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{M_3\left(-\frac{1}{7}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{23}(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{A_{13}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \end{array}\right)$$

Al concluir el sistema original se habrá reducido a:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 - \frac{15x_4}{7} &= \frac{16}{7} \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + \frac{17x_4}{7} &= -\frac{13}{7} \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 - \frac{x_4}{7} &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

Y de aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{16}{7} + \frac{15}{7}x_4 \\ x_2 &= -\frac{13}{7} - \frac{17}{7}x_4 \\ x_3 &= \frac{9}{7} + \frac{x_4}{7} \end{aligned} \qquad \text{(I.35a)}$$

Por lo que la solución general del sistema podrá expresarse como sigue:

$$S = \left\{ x_1, x_2, x_3, x_4 \,\middle|\, \begin{aligned} x_1 &= \frac{16}{7} + \frac{15}{7}x_4 \\ x_2 &= -\frac{13}{7} - \frac{17}{7}x_4 \\ x_3 &= \frac{9}{7} + \frac{x_4}{7} \end{aligned} \right\} \quad \forall x_4 \in R \qquad \text{(I.36)}$$

Como puede verse, un sistema de este tipo tiene un grado de libertad[29], es decir, existe una variable a la cual se le puede asignar un valor arbitrario cualquiera, tal que $x_4 \in R$.

En resumen, un sistema que posee menos ecuaciones que incógnitas siempre tendrá infinitas soluciones, tantas como las diferentes combinaciones de valores se asignen a las variables que constituyen los grados de libertad.

Por ejemplo, si asignamos el valor $x_4 = 1$, entonces $x_1 = \frac{31}{7}$, $x_2 = -\frac{30}{7}$ y $x_3 = \frac{10}{7}$, la cual es una solución del sistema.

[29] En general para un sistema $A_{nm}X_{m1} = B_{m1} | n < m$ existirán $(m - n)$ grados de libertad.

A.8. Espacios lineales reales (espacios vectoriales reales)

(Un conjunto de elementos definidos sobre el campo R^n, se dice que constituyen un espacio lineal real (V) cuando entre ellos están definidas, de alguna manera, la adición y la multiplicación por un escalar (número), las que cumplen con las propiedades siguientes:

1. Dados $(x_1,\ x_2) \in V \Rightarrow (x_1\ + x_2) \in V$, es decir, la adición definida entre los elementos del conjunto es cerrada en V.
2. Dados $x \in V, \alpha \in R \Rightarrow \alpha * x \in V$, es decir, la multiplicación por un escalar es cerrada en V.
3. Dados $(x_1,\ x_2) \in V \Rightarrow (x_1\ + x_2) = (x_2 + x_1)$, lo que significa que la adición entre elementos del conjunto es conmutativa.
4. Dados $(x_1,\ x_2,\ x_3) \in V \Rightarrow x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1, x_2) + x_3$, por lo cual la adición es asociativa.
5. Existe un vector $0\ \in V$ tal que para todo $x\ \in V, x + 0 = 0 + x$, por lo cual el elemento 0 se define como el neutro aditivo.
6. Dado $x \in V$, existe un $-x \in V \mid x + (-x) = 0$; el elemento $-x$ se define como el inverso aditivo.
7. Dados $x \in V, (\alpha, \beta) \in R \Rightarrow \alpha * (\beta * x) = (\alpha * \beta) * x$; la multiplicación por un escalar es asociativa.
8. Dados $(x_1, x_2) \in V, \alpha \in R \Rightarrow \alpha * (x_1 + x_2) =\ \alpha * x_1 + \alpha * x_2$; es decir, se cumple una primera ley distributiva de la multiplicación por un escalar con relación a la adición.
9. Dado $x \in V, (\alpha, \beta) \in R \Rightarrow (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$; segunda ley distributiva.
10. Existe $1 \in R$ tal que para todo $x \in V \Rightarrow 1 * x = x$; donde el elemento $1 \in R$ se define como neutro para la operación de multiplicación por un escalar.

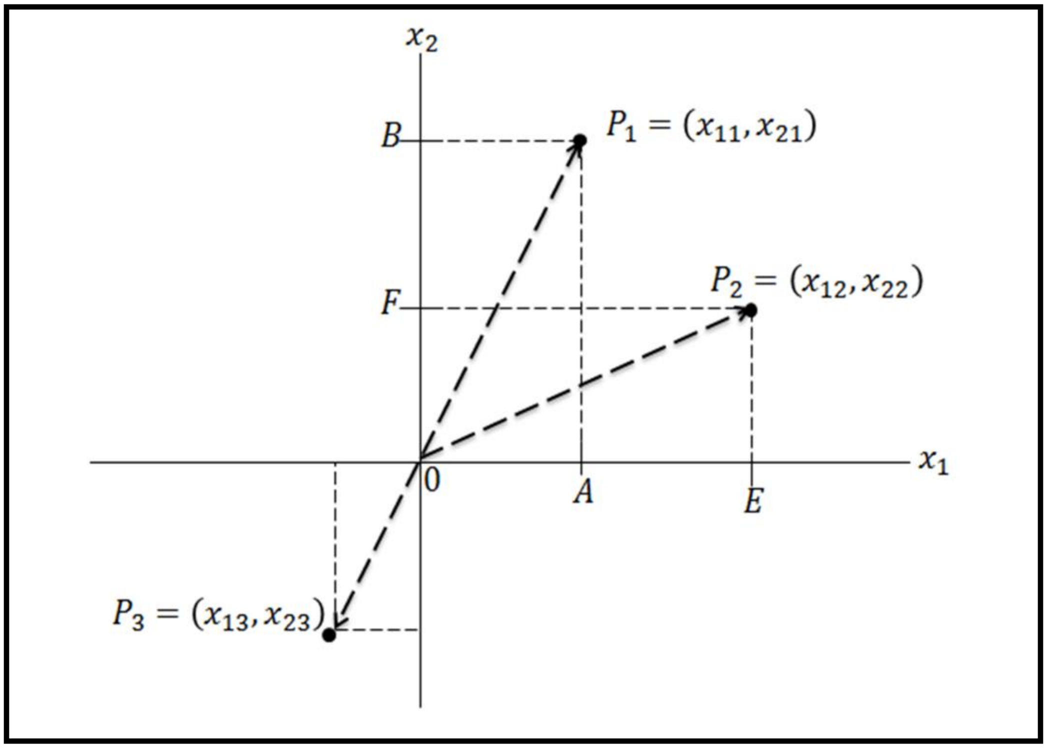
Si para algún conjunto de elementos alguna propiedad no se verifica, no constituirá un espacio lineal. Como los elementos se han definido sobre el campo R, se dice que el espacio lineal (vectorial) es real.

Ahora bien, para estudiar la estructura de un espacio lineal (vectorial) real, aun en el caso más simple como el de un plano, se requiere examinar cómo se comportan todos sus elementos (puntos). Entonces, es necesario identificar con precisión a todos y cada uno de los puntos que existen en ese espacio.

René Descartes solucionó el problema al introducir en el plano dos rectas numéricas perpendiculares, con lo cual hizo posible nombrar unívocamente a cada punto en un espacio bidimensional como un par ordenado de números reales.

En la figura I.1 se ilustró la forma de nombrar puntos en el plano. Ahí, las magnitudes de los segmentos de recta desde el origen (0) y la intersección de las proyecciones perpendiculares del punto a cada recta numérica permiten nombrar cada diferente punto como un par ordenado de números. En la figura I.2 generalizamos estos conceptos.

Figura I.2 Representación general de puntos en el plano.



Por ejemplo, para P_1, la magnitud $0A$ determina x_{11} y la de $0B$ determina x_{21} y el punto se puede nombrar en forma única como el par ordenado (x_{11}, x_{21}).

De esta forma, en la gráfica se identifican también los puntos P_2 y P_3. Es así como se muestran $P_1 = (x_{11}, x_{21})$, $P_2 = (x_{12}, x_{22})$, $P_{3=}(x_{13}, x_{23})$; que se designan como la representación algebraica (o analítica) del punto.

La representación que se muestra en la gráfica es su representación geométrica (o gráfica) del punto en el plano y se designa como un vector (línea gruesa punteada).

Con base en estas representaciones de un punto en el plano y usando el sistema de referencia cartesiano se demuestran importantes propiedades de las expresiones algebraicas y geométricas de los puntos. En la gráfica 2.1 el $\Delta 0AP_1$ es un triángulo rectángulo y por el teorema de Pitágoras se verifica que: $|P_1|^2 = |0A|^2 + |AP_1|^2$ y como $0A = x_{11}$, $AP_1 = 0B = x_{21}$, entonces:

$$|P_1|^2 = x_{11}^2 + x_{21}^2 \qquad \therefore |P_1| = \sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2} \tag{I.37}$$

La relación (I.37) define la magnitud o norma del vector P_1 que siempre es positiva.

Con esta idea no es difícil deducir el concepto de distancia entre dos puntos en un espacio lineal real (distancia euclidiana).

En la gráfica 2.1, la distancia entre P_1 y P_2 será igual a:

$$d_{P_1P_2}^2 = (AE)^2 + (BF)^2$$

$$donde\ AE = 0E - 0A = x_{12} - x_{11}$$
$$BF = 0E - 0F = x_{21} - x_{11}$$

De lo que resulta:

$$d_{P_1P_2} = \sqrt{(x_{12} - x_{11})^2 + (x_{22} - x_{21})^2} \tag{I.38}$$

Los espacios lineales (vectoriales) reales, donde la distancia entre dos de sus elementos (puntos, vectores) está definida de acuerdo con la expresión (1.37), se dice que son espacios euclidianos.

En este punto debe advertirse algo importante. Dado un espacio lineal real, los puntos que lo integran existen con anterioridad, e independientemente de que se haya introducido un sistema de referencia para nombrarlos. Es decir, el sistema cartesiano no es la única forma posible de identificar puntos en un espacio lineal real.

Otra forma de nombrar puntos en un espacio lineal real es conocido como de coordenadas polares, en el que cada punto se identifica en términos de la distancia que lo separa del origen del sistema y del ángulo descrito por la recta hasta alcanzar con su extremo al punto.

Queda claro que un mismo punto en un espacio lineal real puede recibir tantos nombres diferentes como sistemas de referencia se empleen. Pero, una vez que se ha fijado un sistema de referencia en el plano, hay una y sólo una forma de designar a un punto con relación a ese sistema. Volvamos a la fig. (I.2). En ella, la elección del lugar en que se ubicó el origen fue completamente arbitraria. Pero si una vez elegido se cambia de lugar, entonces un mismo punto recibirá un nombre diferente con relación al nuevo sistema de coordenadas cartesianas que se ha situado en otro lugar en el espacio.

Con base en lo anterior, existen tres posibilidades lógicas de modificación en un sistema de coordenadas cartesianas en un espacio lineal real:

1. Desplazamientos en alguna de las rectas numéricas que integran el sistema de referencia. Esto da lugar a la traslación del origen del sistema de coordenadas en cualquier dirección o sentido del espacio.
2. Rotaciones de una o las dos coordenadas, alrededor de su punto de intersección.
3. Cualquier combinación de los dos movimientos anteriores.

Por esta situación, es necesario disponer de procedimientos adecuados para identificar cuando un mismo punto es nombrado de diferentes formas.

A.9. Combinación lineal de vectores en R_n

Dado un conjunto de vectores (puntos), pertenecientes a un espacio lineal real *n* dimensional, se define una combinación lineal como sigue:

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_k X = 0 \;\forall\; a_i \in R^n, X_i \in i \;\forall i \qquad \text{(I.39)}$$

Que en forma desarrollada se escribe:

$$a_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + a_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.40)}$$

Y con base en (I.40) se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1\, x_{11} + a_2\, x_{12} + \cdots + a_n x_{1k} = 0 \\ a_1\, x_{21} + a_2\, x_{22} + \cdots + a_n x_{2k} = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_1\, x_{n1} + a_2\, x_{n2} + \cdots + a_k x_{nk} = 0 \end{cases} \tag{I.41}$$

En este sistema de ecuaciones, los valores de las incógnitas $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ dependerán del número de ecuaciones y de incógnitas que posea, presentándose las siguientes posibilidades:

1. ***Cuando n ≤ k (número de ecuaciones menor o igual que el número de incógnitas)***. Cuando ocurre la igualdad, por lo general, el sistema tendrá solución única si la matriz del sistema puede reducirse a una matriz identidad aplicando operaciones elementales por fila; cuando ocurre la estricta desigualdad (n < k), en general, el sistema no tendrá solución, pero en el caso de que la haya ésta será única. En cualquier caso que exista solución se cumplirá que: $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$

2. **Cuando n > k.** En general, el sistema tendrá infinitas soluciones y, en este caso, habrá varias soluciones donde $a_i \neq 0 \;\; para\; algún\; i$

Cuando (I.41) se cumple si y solo si $a_i \neq 0\, \forall\, i$ se dice que la combinación lineal es linealmente independiente. Pero si (I.41) se verifica para algún $a_i \neq 0$, será linealmente dependiente.

Dos resultados importantes de lo planteado anteriormente son:

1. Cualquier subconjunto de $n + k \mid k > 0$ vectores perteneciente a un espacio lineal R^n es siempre linealmente dependiente.

2. En un espacio lineal R^n nunca existirán más de n vectores linealmente independientes.

A.10. El concepto de base

Las combinaciones lineales tienen varias propiedades, de las cuales nos servirán dos para comprender el concepto de base.

La primera propiedad consiste en que un subconjunto de vectores $(X_1, X_2, \dots, X_m) \in R^n \ /n < m$, es un conjunto generador en R^n. De aquí se desprende el resultado siguiente: si $(X_1, X_2, \dots, X_m) \in R^n \ /n < m$ es un conjunto generador, entonces cualquier X ϵ R^n se podrá expresar de múltiples formas en términos de ese conjunto generador.

Con base en esta propiedad se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_mx_{1m} = x_1 \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_mx_{2m} = x_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_mx_{nm} = x_n \end{cases} \qquad \text{(I.42)}$$

Si en (I.42) se verifica que n = m y la matriz $A = col\ \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ se puede reducir a la unitaria aplicando operaciones elementales por filas, verificándose que $\exists\ (c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*)$ algún $c_i \neq 0$, que será solución del sistema. Por tanto, como $X^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se podría expresar como una combinación lineal del subconjunto de vectores $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in R^n$, entonces, éstos constituirán un conjunto generador.

Pero si $X^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se sustituye a la derecha de (I.45) por el vector 0 ϵ R^n, entonces el sistema tendrá como única solución la trivial, es decir, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, y $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in R^n$ será un conjunto generador linealmente independiente.

Cuando un conjunto generador en R^n está integrado por vectores linealmente independientes se dice que constituye una base en R^n. Este tipo de conjuntos generadores poseen una propiedad importante que consiste en lo siguiente: si un subconjunto B = $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ ϵ R^n es un conjunto generador integrado por vectores linealmente independientes entonces B es una base y cualquier vector X ϵ R^n tiene una y sólo una forma de representación en términos de B.

Por último, debe observarse que la cantidad de vectores que integran una base define la dimensión del espacio. En consecuencia, cualquier conjunto de vectores que sean una base en un espacio Rn constará exactamente de n vectores. Pero como en un espacio n dimensional se pueden encontrar infinitos conjuntos generadores integrados por n vectores, entonces en todo espacio lineal existen infinitas bases.

Para encontrar entre un conjunto de vectores cualquier subconjunto que sea linealmente independiente, es necesario formar una matriz cuyas columnas sean los vectores del conjunto original. Aplicando operaciones elementales por filas a esa matriz, las columnas que en las reducciones elementales se transformen en vectores unitarios canónicos, formarán un conjunto de vectores linealmente independientes. Estos vectores unitarios canónicos se definen como se indica a continuación:

$$X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \; tal\ que\ x_{ij} = 1, \forall\ i = j, x_{ij} = 0, \forall\ i \neq j \qquad \text{(I.43)}$$

A.11. Transformaciones lineales

Definición

Dados dos espacios lineales reales V y W, se define una transformación lineal T de V en W como una función que asigna a cada vector v ϵ V un único vector Tv ϵ W y que satisface para cada u y v en V y cada escalar α las siguientes propiedades:

1. T(u+v) = Tu+Tv (I.44)

2. T(αv) = αTv (I.45)

Entonces, T:V →W indica que T transforma V en W. en dicha transformación el espacio V se define como el dominio de la transformación y W como su codominio.

En general, las transformaciones lineales son una generalización a los espacios lineales reales del concepto de función que se estudia en cálculo. Es decir, se trata de funciones que en vez de definirse e los reales se definen en espacios lineales donde sus elementos son vectores en lugar de números reales. Las transformaciones no llevan de un número real a otro, sino de un vector a otro vector.

Entonces, una transformación lineal real se define por una regla de correspondencia, con base en la cual se determina cómo se forman los componentes del codominio cuando la regla se aplica a un punto cualquiera del espacio dominio.

Para cada transformación lineal T: $R^n \rightarrow R^m$ existe una y solo una matriz referida a una base del espacio dominio Rn que expres la transformación. Como la transformación aplica a cualquier punto que pertenece al espacio dominio, si la regla de transformación se aplica a los vectores canónicos se encuentra una matriz A_{mxn} que representa unívocamente a T, cuyo número de filas es igual a la dimensión del espacio codominio y las columnas a la del dominio.

El siguiente teorema enuncia que la matriz que representa a una transformación lineal real es única.

***Teorema**.I.1 Dada una transformación lineal $T{:}R^n \rightarrow R^m$ existe una única matriz A_{mxn} que representa a T y para al cual se cumple que $\forall X \epsilon R^n$, $T(X) = A_{mxn}X = Y \epsilon R^m$*

De este teorema se derivan algunas conclusiones importantes que serán de mucha utilidad para poder interpretar la naturaleza económica de problemas, tanto empíricos como teóricos, donde se emplean matrices.

1. Dada una transformación $T{:}R^n \rightarrow R^m$ y su regla de correspondencia R: X→Y I T: $R^n \rightarrow R^m$, si se aplica la regla a un subconjunto de vectores que formen una base en R^n es posible encontrar una y sólo una matriz A_{mxn} que represente a T en términos de esa base.

2. Dada A_{mxn} que represente a T en términos de una base, aplicada a un vector $X=(x_1,x_2,...,x_n) \epsilon R^n$, es posible encontrar la regla de correspondencia para T. Si no se indica otra cosa, A_{mxn} que representa a T se considera expresada en términos de la base canónica $E \epsilon R^n$.

3. Entonces, siempre que se opera con una matriz real de cualquier tipo se está operando con una transformación lineal real, aunque no se conozca la regla de correspondencia.

Ejemplo (I.8)

Con base en la siguiente transformación y su regla de correspondencia, determinar la matriz que representa a una transformación utilizando la base canónica:

$$T: R^2 \to R^3 \mid \forall X \in R^2, \qquad T(X) = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la regla a los vectores canónicos del espacio dominio se obtienes:

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 * 1 \\ 1 - 0 \\ 2 * 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 * 0 \\ 0 - 1 \\ 2 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matriz que representa a T en términos de la base canónica es:

$$A_T^E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El caso particular de las transformaciones de semejanza puede definirse de la siguiente manera.

Dado $X=(x_1,x_2)$, representación algebraica de un punto con relación a un sistema original, si en ambas rectas numéricas la escala se multiplica por un valor $|k|\neq 1$ I $k\epsilon R$, ambos componentes del par ordenado se modificarán y su nueva representación será $X^* = (|k|x_1, |k|x_2)$

Este tipo de transformaciones se da sólo entre espacios isomorfos, es decir, cuando $T{:}R_n \to R_n$ representa un cambio de base.

A.12. Valores y vectores propios de una matriz.

Dada una matriz A_{nxn} que representa una transformación lineal de semejanza, $T{:}Rn\to Rn$, un número $\lambda\mathbb{C}$ se define como un valor propio de A_{nxn} si existen algunos vectores $X\epsilon\mathbb{C}$ asociados a los $\lambda\epsilon\mathbb{C}$, y para los cuales se verifica:

$$AX = \lambda X \text{ para } X\neq 0 \qquad \text{(I.46)}$$

Los vectores $X \in \mathbb{C}$ tal que $X \neq 0$ se definen como los vectores propios de A_{nxn}.

Es pertinente observar que aunque todos los elementos de A_{nxn} pertenecen al campo de los $\mathbb{R}$, sus valores y vectores propios pertenecen al campo de los complejos ($\mathbb{C}$).

Con base en lo anterior tenemos:

$$A_{nxn}X_{nx1} = \lambda X \; I \; X_{nx1} \tag{I.47}$$

Cuya forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{I.48}$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Simplificando y agrupando términos queda:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{I.49}$$

Si en (I.49) suponemos $\lambda = 0$ el sistema tendrá solución única $X^* = 0$, porque por definición las columnas de A, tomadas como vectores, son linealmente independientes y entonces $\exists$ A^{-1}.

Pero si en (I.49) suponemos $\lambda \neq 0$, el sistema será linealmente dependiente y tendrá infinitas soluciones, por lo que $\exists$ $X^* \neq 0$ soluciones del sistema. Al vector $X^* \neq 0$ asociado con algún valor propio $\lambda \neq 0$ se llama vector propio de la matriz **A**.

Con algunas transformaciones algebraicas (I.47) se puede presentar como sigue:

$$A_{nxn}X_{nx1} = \lambda X_{nx1}$$

Premultiplicamos X_{nx1} por I_{nxn}

$A_{nxn}X_{nx1} = \lambda I_{nxn} X_{nx1}$

Pasamos la expresión de la derecha a la izquierda, igualamos a cero y factorizamos:

$A_{nxn}X_{nx1} - \lambda I_{nxn} X_{nx1} = 0$

$$(A_{nxn} - \lambda I_{nxn})X_{nx1} = 0 \qquad (I.50)$$

Para obtener el (los) valor(es) de λ que permiten convertir las columnas de **A**, tomadas como vectores, en linealmente dependientes, es necesario resolver el sistema (I.50), el cual puede reducirse a la expresión:

$P(\lambda) = \lambda^n x + \lambda^{n-1} x + \cdots + x = 0$

el cual se llama el polinomio propio de **A** de orden n, porque **A** es de orden n.

Por el teorema fundamental del álgebra, todo polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tiene n raíces exactamente (contando multiplicidades). Así por ejemplo, el polinomio $(\lambda-1)^3$ tiene 3 raíces.

Al sustituir los $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda n)$ valores propios de A en (I.50) se obtendrá el conjunto de vectores $(X_1,X_2, ...,X_k) \in Rn$ l $K\leq n$ cada uno asociado a los diferentes $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda n)$ valores propios de **A**. Los vectores $(X_1,X_2, ...,X_k)$ son los vectores propios de A y se define como una base propia (o característica) de A.

Con el resultado siguiente resulta más conveniente el cálculo de los valores propios de una matriz Anxn.
La expresión (I.50) que en forma simplificada reproducimos es: $(A-\lambda I)X = 0$. Como A es nxn (I.50) representa un sistema homogéneo de n ecuaciones con incógnitas $x_1,x_2,...,x_n$. Como por hipótesis el sistema tiene soluciones no triviales, resulta que $\det(A-\lambda I)=0$.
Entonces, $P(\lambda) = \det(A-\lambda I)=0$, la cual se conoce como la ecuación característica de A.

Ejemplo (I.9)
Calcular los valores propios de A y sus vectores propios asociados a cada λ.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (I.51)

Primero se escribe la ecuación característica:

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \left(\lambda^2 - 6\,\lambda + 8\right) - 3 =$$

$$= \ (\lambda^2 - 6\lambda + 5)$$

Esta ecuación puede resolverse fácilmente usando la ecuación general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resolvemos y obtenemos: λ_1=5, λ_2=1

Sustituimos estos valores en (I.47) donde **A** es (I.51), se resuelve por Gauss-Jordan lel sistema que resulta y se obtiene los conjuntos solución.

Para λ_1=5

AX=5X

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos, simplificamos y queda:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ \ \ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Despejamos x_1 y se obtiene $x_1 = \frac{x_2}{3}\ \forall\, x_2 \ \in R$. Si suponemos que x_2 =3, se obtiene $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ que es un vector propio asociado al valor propio λ_1=5

Procedemos en forma semejante para λ_2=1 y se obtiene $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

En este ejemplo, el subconjunto {X_1,X_2}= $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \in R^2$ son los vectores propios asociados a los valores propios λ_1=5, λ_2=1 de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

que representa a la transformación $T\colon R^2_{dom} \to R^2_{cod}$

A.13. Teoremas de Perron-Frobenius

Una matriz A = {a_{ij}} de cualquier tipo se define como positiva [A > 0] si se verifica que a_{ij} >0, ∀i,j. Cuando a_{ij} ≥0 ∀i,j, se dice que la matriz es no negativa [A ≥ 0]. Las matrices positivas o no negativas aparecen en muchas aplicaciones, entre ellas, en la economía.

Una matriz cuadrada A = {a_{ij}} se define como reducible (o descomponible) si mediante cambios entre sus filas y columnas se puede reducir a la forma siguiente:

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} A_{hh} & A_{hn-h} \\ \varphi & A_{n-h,n-h} \end{pmatrix} \qquad \text{(I.52)}$$

En (I.52) A_{hh}, $A_{n-h,n-h}$, $A_{h\ n-h}$ y φ son submatrices de A = {a_{ij}} donde, además, la submatriz φ es nula.

Si una matriz cuadrada A = {a_{ij}} no se puede reducir a la forma definida en (I.52) se dice que es irreducible (o indescomponible) y en este caso se tendría:

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} A_{hh} & A_{hn-h} \\ A_{n-hh} & A_{n-h,n-h} \end{pmatrix} \qquad \text{(I.53)}$$

Los valores y vectores propios de las matrices positivas poseen propiedades particulares, que fueron demostradas por Oskar Perron y Ferdinand Forbenius. Sus teoremas tienen dos versiones, una débil demostrada para matrices reducibles que se debió a Perron y una fuerte demostrada por Frobenius para matrices irreducibles y no negativas. Aquí presentamos algunos de los teoremas en su versión fuerte, las demostraciones desarrolladas pueden consultarse en el texto citado.

Sea A>0 una matriz cuadrada irreducible de orden n y X ≥ 0 un vector cualquiera no negativo de n componentes. En estas condiciones se puede demostrar que:

Definición 1. $(I+A)^n > 0$

Definición 2. $(I+A)^n AX \geq \lambda (X)(I+A)^n X$ de modo que para cualquier otro valor $\lambda < \lambda(X)$ se tendría que:

$(I+A)^n AX$ **>** $\lambda (X)(I+A)^n X$

Definición 3. La función $\lambda(X) \in S$ admite un máximo positivo en S.[30] De la definición 1 se deduce además que:

1. $(I+A)^n A = A)(I+A)^n$

2. $(I+A)^n AX > 0$

3. $(I+A)^n X > 0$

Con base en estas definiciones es posible demostrar importantes propiedades de las matrices no negativas irreducibles, las que se plantean en los siguientes teoremas.

Teorema I.2 . El máximo de la función $\lambda(X) \in S$ es un valor propio de la matriz A l $A \geq 0$ e irreducible, al cual se asocia un vector propio estrictamente positivo $X^* > 0$

Teorema I.3.. Si $\bar{\lambda}$ es un valor propio de una matriz A real e irreducible, entonces se cumple que $|\bar{\lambda}| \leq \lambda_m$, es decir, el valor modular de cualquier valor propio de A siempre será menor que el valor propio máximo de λ_m de A

[30] Como $\lambda(X)$ es una función continua en S y X es cerrado y acotado, entonces $\lambda(X)$ necesariamente tiene que poseer un valor máximo en S, que tendrá que ser positivo porque se partió de que $X \geq 0$ y $\lambda(X)$ será un límite superior.