



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – OPTIMACIÓN FINANCIERA

IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN PARA PRONOSTICAR LOS
RENDIMIENTOS DEL ÍNDICE DE PRECIOS Y COTIZACIONES

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
LUIS RICARDO NAVA PÉREZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. FEDERICO HERNÁNDEZ ÁLVAREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. MAYO 2014

Índice

INTRODUCCIÓN	4
I. CRISIS FINANCIERAS Y GLOBALIZACIÓN FINANCIERA	6
I.1 Las primeras Crisis Financieras Globales.....	7
I.2 La Globalización Financiera a finales del milenio	7
I.3 La crisis económica de 2008-2009	8
II. LA TRANSFORMACIÓN TECNOLÓGICA EN LOS MERCADOS DE CAPITAL.....	10
III. RELEVANCIA EN PRONÓSTICOS ECONÓMICOS-FINANCIEROS.....	12
IV. EL IPC, OTROS ÍNDICES Y ACCIONES.....	13
IV.1 Índice de Precios y Cotizaciones	13
IV.2 Índices	17
IV.2 Acciones.....	19
V. CONCEPTOS BÁSICOS DE SERIES DE TIEMPO	20
V.1 Primeras Diferencias	21
V.2 Operador de Rezagos	22
V.3 Proceso Estocástico	24
VI. PROCESOS AR, ARMA, ARIMA	25
VI.1 Procesos AR.....	25
VI.2 Proceso MA	26
VI.3 Proceso ARMA	27
VI.4 Proceso ARIMA.....	27
VII. FILTRO DE KALMAN COMO HERRAMIENTA PARA HACER PRONÓSTICOS	28
VIII. DESCRIPCIÓN DEL FILTRO DE KALMAN (MODELO Y ALGORITMO).....	32
VII.1 Modelo	32
VII.2 Algoritmo	36
IX. IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN.....	39
X. ANÁLISIS DE DATOS.....	41
XI. PROGRAMACIÓN.....	42
XII. RESULTADOS.....	45

XIII.	CONCLUSIONES	52
XIV.	BIBLIOGRAFÍA	54
XV.	ANEXOS	56
	XV.1 Dinámica supuesta para gt, ut y vt y las matrices H y F para $t = 0$	56
	XV.2 Resultados de Estacionalidad de Series	58
	XV. 3 Resultados de Cointegración	59
	<i>XV.3.A PRUEBA DE COINTEGRACIÓN DE JOHANSEN</i>	<i>59</i>
	<i>XV.3.B GRÁFICAS COMPORTAMIENTO IPC vs ÍNDICES Y ACCIONES</i>	<i>60</i>
	XV.4 Prueba Diebold-Mariano	64
	<i>XV.4. A RESULTADOS PRUEBAS DIEBOLD-MARIANO</i>	<i>64</i>
	XV.5 Medidas para evaluar eficiencia de Pronósticos	65
	<i>XV.5.A RESULTADOS MEDIDAS DE EFICIENCIA</i>	<i>66</i>

Introducción

La relación positiva existente entre el la riqueza de un país y el desarrollo de su sistema financiero es ampliamente aceptada por los economistas, de ahí la necesidad de un sistema financiero eficiente es de suma importancia; sistema que puede basar su fortaleza en la banca o en los mercados de capital. Los canales por medio de los cuales el sector financiero afecta el crecimiento son variados, aunque es posible dividirlos en acumulación de capital y en innovación tecnológica. Las funciones del sector pueden clasificarse en a) Manejo de riesgo financiero, b) producción y procesamiento de la información, c) observar, verificar y supervisar las actividades empresariales, así como inducir el control corporativo, d) captación y canalización de recursos, e) facilitar transacciones económicas [Hernández, Villagómez; 2012].

Para mejorar el sistema financiero nacional es preciso contar con herramientas que nos permitan identificar las señales que el mercado arroja y así desarrollar estrategias que maximicen los recursos disponibles. Como consecuencia inmediata se lograría una asignación más eficiente de los recursos, canalizándolos a inversiones rentables. Este documento tiene como principal objetivo desarrollar una herramienta capaz de mejorar la toma de decisiones en el mercado de capitales, particularmente en el mexicano.

Para lograr dicho objetivo se implementará el Filtro de Kalman (FK) para hacer pronósticos sobre el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), que es el principal indicador bursátil de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Este trabajo tiene como principal referencia el documento de investigación de Camacho & Pérez-Quiroz (2010) en el cuál se implementa el FK para hacer pronósticos sobre el PIB de la zona europea. En el trabajo se supone que el comportamiento del PIB está altamente relacionado con choques económicos globales e idiosincráticos locales.

Para poder implementar el FK fueron escogidos cuatro índices de bolsas de países con los que México tiene una interacción comercial importante y tres acciones de mayor capitalización y volumen de transacción de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), acciones que a su vez conforman una parte importante del IPC. El periodo de análisis

consta el periodo 2008-2013 con datos semanales, este periodo fue escogido con el fin de probar el nivel de eficiencia del Filtro de Kalman en periodos de alta volatilidad (crisis económica de 2008 - 2009), así como periodos de recuperación económica (2010-2013). El algoritmo del FK para hacer pronósticos es implementado en MATLAB, logrando ser una herramienta poderosa en cuanto al manejo de datos. Para validar los resultados se hace una comparación con otros métodos para pronosticar usados generalmente usando medidas de evaluación de errores.

El documento está dividido en trece secciones. En la primera sección se hace un breve resumen sobre la historia de las crisis en el mundo, lo anterior como fundamento principal para herramientas que nos permitan evaluar la volatilidad de los mercados de capital y las señales que éste manda. En la segunda sección se analizará la importancia que tiene el cambio tecnológico en los mercados de capital, en un entorno de globalización financiera acelerada. En la tercera sección se analizará la relevancia que han cobrado los pronósticos económicos y financieros como medio para asignar eficientemente los recursos. La cuarta sección es una revisión sobre la relevancia que tiene el IPC como indicador de la economía mexicana y del mercado de capitales nacional, así como una revisión de las acciones y otros índices que se usan para hacer pronósticos sobre el IPC; también contiene una explicación de por qué el uso de estos activos financieros.

La quinta sección tiene como objetivo hacer una introducción somera a los principios básicos en el análisis de series de tiempo. La sexta sección se hace una revisión sobre dos de los modelos más usados en el análisis de series de tiempo, los modelos ARMA(p, q) y los ARIMA(p, d, q).

La séptima sección es una introducción al Filtro de Kalman como herramienta para hacer pronósticos, contiene una breve explicación y motivación del Filtro, algunos ejemplos de su uso en distintas disciplinas y ventajas del Uso del FK en un contexto dinámico volátil. La octava sección contiene una descripción generalizada del FK, así como una explicación detallada de su algoritmo.

La novena sección contiene la explicación detallada del proceso de Implementación del FK y los métodos para validar su eficiencia. En ésta se entra a detalle desde el manejo de los datos, la validación de los datos y la programación en MATLAB, La décima sección es de conclusiones, las más importantes del trabajo, así como líneas de investigación futuras. Por último, las secciones dedicadas a Bibliografía y Anexos.

I. Crisis Financieras y Globalización Financiera¹

Los mercados financieros se caracterizan por ser sistemas dinámicos con periodos de alta volatilidad, algunos de estos periodos se han convertido en crisis financieras. A partir de la crisis londinense de 1825 se suscitaron varios colapsos financieros que confirmaron la periodicidad de éstas [Marichal, 2010] lo que hace necesario tener herramientas que nos permitan identificarlas y reaccionar a ellas.

El periodo 1870-1914 debería describirse como la primera época de globalización económica. Antes de éste nunca habían sido tan amplios e intensos los flujos internacionales del comercio y capitales, acompañados por intensas migraciones internacionales. Situación directamente relacionada con la revolución financiera. Desde la integración mundial de los mercados financieros, el alcance que han tenido las crisis ha sido de tal magnitud que han afectado a la economía mundial y no sólo a los mercados en los que surgen [Marichal, 2010]. Sin embargo debido a la implementación de herramientas computacionales en los últimos años, la velocidad de contagio ha aumentado significativamente.

¹ Este capítulo está basado en los libros Nueva historia de Las Grandes Crisis Financieras -Una perspectiva global, 1871-2008- de Carlos Marichal y La Primera Gran Crisis del Siglo XXI de Alejandro Villagómez.

I.1 Las primeras Crisis Financieras Globales

La primera gran crisis financiera mundial se dio en 1873 y tuvo su origen en Australia, expandiéndose por Europa hasta llegar a EE.UU. Esta crisis se caracterizó por quiebras bancarias y comerciales, agudizada por una caída en los flujos de capitales internacionales, la contracción del crédito bancario y una baja pronunciada de los precios de materias primas. A pesar de la crisis, en pocos años se recuperó el nivel de producción en los países [Marichal, 2010].

En cuanto a la Gran Depresión, la Primera Guerra Mundial fue un antecedente fundamental para que ésta sucediera; sobre todo por las condiciones económicas que imperaron una vez que se terminó el conflicto bélico. La adopción del patrón oro como medida para mitigar la volatilidad de precios logró estabilizar los precios. Sin embargo, a partir del 24 de octubre de 1929 las bolsas en todo el mundo comenzaron a desplomarse, comenzando con la de Nueva York. La segunda ola destructiva llegó con las quiebras bancarias en varios países, provocando una contracción del crédito y una baja en el consumo. Nunca antes en la historia se había producido una tendencia tan negativa en el comercio global. En el caso de México el impacto de la crisis no fue tan catastrófico, probablemente porque desde 1914 se habían suspendido los pagos de la deuda externa.

I.2 La Globalización Financiera a finales del milenio

La época más notable de globalización financiera ocurrió durante el último decenio del siglo XX como consecuencia de las transformaciones en el marco regulatorio del mercado financiero londinense de 1986. Tres factores fueron claves: a) la desregularización en los mercados bursátiles, bancarios y monetarios, b) el aumento en las transacciones internacionales de capitales y c) la innovación en instrumentos de inversión, seguros y especulación.

Referente a la recesión económica que sufrirían un gran número de economías en la década de 1980 hay un consenso generalizado en tomar el choque petrolero de fines de 1973 como una de las principales causas. Otras variables que afectaron el comportamiento de los mercados fueron el debilitamiento de las industrias de EE.UU, Europa occidental, Europa oriental y la URSS. A esto hay que sumarle el hundimiento del sistema Bretton Woods -que contribuyó al aumento de la volatilidad en los mercados financieros mundiales-. El arranque de las crisis internacionales derivadas por deudas externas no cumplidas se produjo en 1982, cuando el secretario de Hacienda de México anunció que el gobierno ya no estaba en condiciones para cubrir el servicio completo de su deuda. A partir de la moratoria mexicana, países latinoamericanos descubrieron que el saldo de sus deudas había aumentado desmedidamente; el aumento súbito de las tasas de interés en 1980 provocó que países deudores se encontraran al borde de la suspensión de pagos.

I.3 La crisis económica de 2008-2009

La crisis financiera y económica que estalló en EE.UU. durante septiembre de 2008 ha tenido impactos y consecuencias equiparables con la Gran Depresión. El principal problema consistió en el uso de nuevos títulos financieros en un mercado bancario con poca información y por consiguiente poca supervisión.

Con el fin de entender la crisis es necesario entender las circunstancias que ayudaron a crear la burbuja en el mercado inmobiliario. Tras la crisis dot/com en el 2000 la FED siguió una política monetaria laxa con el fin de asegurar la recuperación de los mercados de capitales, disminuyendo el costo de los créditos y aumentando la liquidez de los mercados. La paradoja de estos años fue que a pesar de las tasas bajas, los flujos de capitales seguían llegando del exterior canalizados a la bolsa de Nueva York: las reservas internacionales se reciclaron y alimentaron las burbujas.

La desregulación del mercado financiero aceleró la innovación financiera a escala global. Una de las características más riesgosas de la expansión en los mercados financieros fue la innovación tecnológica que dio lugar a instrumentos financieros

basados en mecanismos de especulación que no podían ser supervisados apropiadamente.

Existe un acuerdo prácticamente unánime en que la ruptura de la burbuja inmobiliaria en EE.UU. constituye la causa más inmediata de la crisis de 2008. De entre las causas que afectaron este proceso y la demanda residencial se pueden resaltar tres: Las expectativas de precios reales futuros crecientes (aspecto fundamental en la creación de la burbuja), un incremento en el ingreso familiar norteamericano y una disminución importante de las tasas de interés (el bajo costo de los créditos inmobiliarios estimuló la expansión de este mercado).

La ruptura de la burbuja inmobiliaria se tradujo en una contracción crediticia, para los intermediarios financieros implicó una reducción en su capital en la misma magnitud. El fenómeno fue global y alcanzó a todo tipo de intermediarios, dentro y fuera de EE.UU. Como resultado los mercados se volvieron disfuncionales, con altos niveles de incertidumbre y con una creciente dificultad para valuar diversos activos.

México fue una de las economías emergentes que registró una de las más amplias contracciones durante la crisis. La severidad de este efecto se explica por la fuerte sincronización que existe entre el ciclo económico de éste y el estadounidense. México fue uno de los primeros países emergentes en verse afectado por la reciente crisis, aunque el contagio no sucedió por el canal financiero, sino en la economía real. A partir de la disrupción generalizada de los mercados en el mundo, las dificultades en los mercados financieros mexicanos aumentaron considerablemente.

La recuperación en México empezó a registrarse durante el tercer trimestre de 2009, a la par de lo que sucedía en el mercado norteamericano. Al iniciar el 2010, el sector externo continuaba mostrando fuerte dinamismo, por lo que las exportaciones registraban tasas de crecimiento superiores al 40%. A Partir del primer trimestre de ese año, la economía mexicana volvió a registrar tasas de crecimiento positivas en términos reales.

II. La transformación Tecnológica en los Mercados de Capital

La primera época de globalización económica puede considerarse desde los últimos años del siglo XIX. Nunca antes habían sido tan amplios e intensos los flujos internacionales del comercio y capitales. Sin embargo el sistema financiero podía desestabilizarse a partir de las debilidades internas de los mercados más importantes. [Marichal, 2010].

En el siglo XXI fue gestada una revolución financiera que ha aumentado el volumen de los flujos de capital que van principalmente de las economías desarrolladas hacia las emergentes. Para las instituciones financieras extranjeras, la inversión directa extranjera (FDI por sus siglas en inglés) se ha convertido en la vía de desarrollo más importante para el comercio de bienes y posiblemente servicios. Como parte de este proceso, las economías domésticas han encontrado en la desregularización una forma de atraer flujos de capital, permitiendo que instituciones financieras extranjeras entren a las economías emergentes. Como consecuencia, la globalización de servicios financieros se ha acelerado [Mosirian, 208].

La función principal que cumplen los mercados de capital es designar la propiedad del capital de la economía. El ideal es un mercado en el cual las empresas puedan tomar decisiones de producción e inversión; así como los inversionistas pueden elegir entre distintos securities que representan la propiedad de las empresas. El principal supuesto para garantizar la existencia de mercados eficientes es que los precios de los securities siempre reflejan completamente la información disponible en cualquier tiempo t . [Fama, 1969]. Al interpretar correctamente las señales del mercado, la asignación de recursos en la economía se vuelve más eficiente.

Recientemente se ha gestado una revolución tecnológica en los mercados, que ha mejora la eficiencia en las operaciones en éste. El comercio tecnológico actual destruyó la organización tradicional de los mercados de capital (en donde las transacciones se llevaban a cabo en un lugar físico, con una interacción cara a cara entre comprador y

vendedor, o por medio de un intermediario o broker). Actualmente las transacciones son realizadas a través de sistemas de cómputo, en éstos las transacciones son registradas, enrutadas, ejecutadas y aprobadas electrónicamente sin alguna participación humana: el papel de los brokers e intermediarios ha disminuido sustancialmente y el de los dueños y operadores de los servicios tecnológicos ha aumentado. Actualmente, el comercio electrónico ha aumentado en todos los mercados, gestado por la unión en 2005 entre algunos de los mercados de capital más importantes y redes electrónicas de comunicación [Stoll, 2006].

El bienestar de los inversionistas aumenta con la implementación de nuevas tecnologías en los mercados de capital. Para entender la razón es necesario comprender los costos explícitos (comisiones y pérdidas asociadas a la acción misma de compra/venta de títulos en la bolsa) e implícitos (costos de retraso y efectos adversos al precio que el inversionista puede tener una vez realizada la transacción) en los que incurren los inversionistas. Los mercados electrónicos han disminuido todos esos costos. Las comisiones son más bajas, los sistemas electrónicos han reducido los costos por administración de transacciones. Las pérdidas de transacción y las diferencias entre los precios bid-ask son más pequeñas, el intermediario de las empresas se han consolidado. Los costos por retraso (o por cambio de precios) también han disminuido con transacciones electrónicas de alta frecuencia. [Stoll, 2006].

Otra forma por la que la implementación de nuevas tecnologías ha permitido que los mercados de capitales sean más eficientes es por el aumento en la disponibilidad de información, haciéndola accesible para una proporción mayor de personas. A su vez, este aumento en accesibilidad ha aumentado la rendición de cuentas entre emisores e inversionistas. Por último ha logrado disminuir las barreras de entrada a las que se enfrentan los inversionistas, al permitir que las transacciones en la bolsa se puedan llevar a cabo con una mayor facilidad.

III. Relevancia en Pronósticos Económicos-Financieros

Pronosticar puede ser visto como el proceso que envuelve el ofrecer información sobre valores futuros de una o más variables de interés. La variable de interés siempre tiene que ser definida y el conjunto de información que contiene información relevante para resolver nuestro problema también debe estar definido. Una vez definida nuestra variable de interés y el conjunto de información, otros elementos que son necesarios para continuar con el proceso son los modelos para pronosticar que se usarán para medir niveles de eficiencia y el tipo de información que se reportará al final [Elliot & Timmermann, 2008].

El ejercicio de elaborar pronósticos está presente en todas aquellas áreas de la economía y finanzas en las que las decisiones de los agentes dependen de la incertidumbre del valor futuro de una o más variables de interés. Todos los cálculos de valores presentes -y por lo tanto la gran mayoría de valoración de activos- están asociados a pronósticos sobre la generación futura de flujos de efectivo, a partir de expectativas asociadas a una rentabilidad esperada [Elliot & Timmermann, 2008].

En un entorno económico volátil, la capacidad para hacer pronósticos sobre los mercados financieros es una tarea de suma importancia, tanto que ha logrado capturar la atención de académicos y profesionales desde hace dos décadas. El vasto monto de investigación relacionada con el tema refleja la importancia que tienen los pronósticos y su eficiencia en distintas actividades económicas: inversión, valuación de activos y derivados financieros, administración del riesgo, elaboración de la política monetaria [Poon & Granger, 2003].

La investigación reciente ha experimentado una revolución virtual en como los economistas calculan, aplican y evalúan pronósticos. Esta investigación ha ocurrido como resultado de un vasto desarrollo en teorías de la información, lo que ha permitido tener acceso a un número significativamente mayor de variables potencialmente predictivas (datos de transacciones, encuestas desagregadas de pronósticos, datos

macroeconómicos en tiempo real) y una gran variedad de nuevas técnicas y modelación matemática que facilitan la investigación y el proceso de calcular parámetros [Elliot & Timmermann, 2008].

Dentro del ejercicio de pronosticar, el de pronosticar volatilidades (que no es lo mismo que riesgo) es una tarea importante en los mercados financieros. Cuando la volatilidad es interpretada como incertidumbre, se vuelve una variable de lo más relevante para la toma de decisiones de inversión y creación de portafolios. Inversionistas y administradores de portafolios tienen cierto nivel de riesgo con el que es aceptable trabajar. Por ejemplo, un buen pronóstico de volatilidad sobre el precio de activos en una inversión dentro de un periodo de tiempo es un buen punto de inicio para evaluar el riesgo de inversión [Poon & Granger, 2003].

IV. El IPC, Otros Índices y Acciones

La implementación de productos derivados en el mercado bursátil mexicano trajo consigo la necesidad de contar con un nuevo índice de precios, el cual estuviera dentro de los estándares de cálculo y las políticas de mantenimiento de los índices que existen en otros países y que también tuviera reconocimiento en el ámbito internacional.

IV.1 Índice de Precios y Cotizaciones

El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) es el principal indicador de Mercado Mexicano de Valores; expresa el rendimiento del mercado accionario en función de las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de Emisoras cotizadas en la Bolsa. El Índice tiene como principal objetivo, constituirse como un indicador representativo del Mercado Mexicano para servir como referencia y subyacente de productos financieros.²

² Bolsa Mexicana de Valores, Nota Metodológica del Índice de Precios y Cotizaciones IPC

El IPC está compuesto actualmente por 35 Emisoras, la serie accionaria más bursátil de cada una de ellas es la que es seleccionada. Para formar parte del IPC se necesita pasar por varios filtros. El primero es el tiempo mínimo de operación continua: son elegibles aquellas Emisoras que tengan al menos 3 meses de operación, previos al mes de revisión de la muestra.

El segundo filtro indica que serán elegibles aquellas Emisoras cuyo porcentaje de acciones flotantes³ sea igual o mayor al 12% o su Valor de Capitalización Flotado⁴ sea igual o mayor a 10 mil millones de pesos en la fecha de selección. El fundamento del requisito tiene como fundamento establecer una base razonablemente amplia de liquidez y operatividad para las series accionarias que integran la muestra del IPC.

El tercer filtro indica que de las series accionarias de las Emisoras que pasaron los primeros dos serán seleccionadas aquellas cuyo Valor de Capitalización Flotado sea mayor o igual al 0.1% del Valor de Capitalización de la muestra del IPC en la fecha de selección. El cuarto filtro dice que de las series accionarias con mayor Factor de Rotación de cada Emisora, medido como la mediana de medianas mensuales de la rotación durante los 12 meses previos al mes de revisión de la muestra, serán elegibles las 55 series accionarias cuyo factor de Rotación sea el más alto.⁵

³ Acción Flotante: Número de Acciones que resultan de restar al total de acciones listadas en Bolsa, las acciones que sean propiedad o sobre las que tengan derechos que se mencionan: Acciones en la Tesorería de la Emisora, Directivos de primer nivel y consejeros, Personas físicas o morales que mantengan el control directo o indirecto de 30% o más de las acciones s listadas, accionistas de control, Fideicomisos de control, empresas tenedoras de la Emisora, Socios estratégicos, Gobiernos municipales o extranjeros que fungan como accionistas, Títulos representativos del capital social de la Emisora, Personas físicas o morales que tengan el derecho de inmovilizar acciones de la Emisora, Persona física o moral que tenga más del 10% y hasta el 30% que tenga alguna influencia significativa en la compañía.

⁴ Valor de Capitalización Flotado: es el valor que resulta de multiplicar el número de Acciones Flotantes de la Emisora por el precio de mercado de la acción. La Fórmula con la que se calcula es:

$$VCF_{it} = (FAF_{it} * Q_{it}) * P_{it}$$

donde:

FAF_{it} := Porcentaje de ajuste por acciones flotantes de la serie accionaria de la Emisora i

Q_{it} := Número de acciones inscritas en Bolsa de la serie accionaria de la Emisora i

P_{it} := Precio de Mercado de la serie accionaria de la Emisora i

⁵ Para calcular el factor de rotación se tomará la mediana de las 12 medianas mensuales anteriores a la fecha de selección. En este sentido, la mediana implica lo mismo que en el contexto básico de la estadística.

Para el quinto filtro se realiza una calificación conjunta de los siguientes indicadores para cada una de las 55 series accionarias de las Emisoras que pasaron los filtros anteriores:

- Factor de Rotación
- Valor de Capitalización Flotado
- Mediana de medianas mensuales del importe operado en Bolsa de los últimos dos meses.

La asignación de calificaciones funciona de la siguiente forma. De las 55 Emisoras que pasaron los filtros serán ordenadas de mayor a menor en cuanto a su Factor de Rotación, Valor de Capitalización Flotado y la Mediana de Medianas Mensuales, recibiendo una calificación de acuerdo al lugar que ocupan de manera consecutiva:

Emisora	Calificación Rotación	Emisora	Calificación VCF	Emisora	Calificación Importe
A	1	C	1	B	1
B	2	A	2	C	2
C	4	B	8	A	3
...	
N	55	N	20	N	20

Se suman las calificaciones de los tres factores y se seleccionan a las 35 Emisoras con menor calificación. En caso de empate, se selecciona la emisora que tenga mayor Valor de Capitalización.

La participación o peso relativo de cada serie accionaria dentro de la muestra del IPC está determinado en función del Valor de Capitalización Flotado. Para determinar el peso relativo de cada serie accionaria dentro del IPC.

El Peso Relativo de la serie accionaria de la Emisora para la ponderación del IPC es calculado a través de la siguiente fórmula:

$$\omega_{it} = \frac{VCF_{it}}{VCF_{IPC_{it}}}$$

donde:

ω_{it} := Peso relativo de cada Emisora dentro de la muestra del índice.

VCF_{it} := Valor de Capitalización flotado de la serie accionaria de la emisora i

$VCFIPC_{it}$:= Valor de Capitalización flotado del total de series accionarias de la muestra del índice.⁶

Para evitar concentraciones en los pesos relativos de los componentes del IPC, el peso máximo que una serie accionaria puede tener al inicio de la muestra es de 25%. De igual forma, las 5 series accionarias más importantes no podrán tener un peso relativo en conjunto de más del 60%.

La revisión de las Emisoras que forman parte de la muestra del IPC se realizará una vez al año en agosto con datos al cierre del mes de julio y entrará en vigor el primer día hábil del mes de septiembre. En caso de presentarse alguna situación especial se harán modificaciones de acuerdo al evento y se informará con oportunidad

El número de muestras podrá variar en la muestra en caso de presentarse una escisión de alguna Emisora. Si una muestra se encuentra sujeta a un proceso de Oferta Pública de adquisición, fusión, o algún otro evento extraordinario que conlleve a la intención formal o implicación de cancelación de su listado en la BMV, las acciones objeto de la oferta de adquisición serán retiradas de la muestra el día en que se concrete la misma y su lugar será ocupado por otra Emisora.

Con el propósito de contar con un índice que represente lo mejor posible el comportamiento del mercado y al mismo tiempo mantenga una replicabilidad alta, los pesos relativos de las series accionarias dentro de la muestra serán rebalanceados de manera trimestral durante el periodo de vigencia (diciembre, marzo y junio posteriores a la revisión).

⁶ $VCFIPC_{it}$:= Valor de Capitalización flotado del total de series accionarias de la muestra del IPC.

IV.2 Índices

Para hacer pronósticos sobre el comportamiento del IPC, el primer supuesto es la existencia de un factor g_t que afecta el comportamiento de la economía global. Para medir este parámetro son seleccionados índices internacionales que ayuden a inferir la dinámica de la economía mundial. Los índices internacionales fueron seleccionados de acuerdo a la actividad comercial que tiene México con distintas partes del mundo (EE.UU, Europa, Asia, Sudamérica). A continuación se presenta una breve explicación de los índices seleccionados para la implementación del trabajo.

NASDAQ: Contempla 100 de las acciones no financieras, incluyendo compañías de inversión, listadas en el mercado de capitales de NASDAQ, basando su selección en la capitalización de mercado. Para poder ser incluida en el índice, una acción debe cumplir con los siguientes requerimientos:

- La acción debe estar listada exclusivamente en el *NASDAQ Global Select Market* o en el *NASDAQ Global Market* y estar inscrita como una compañía no financiera.
- No estar en procedimiento de bancarrota al momento de la selección.
- Tener un volumen de intercambio diario promedio de al menos 200,000.
- La emisora de la acción no debería entrar en ningún tipo de arreglo en el que como resultado la acción no pudiera ser elegible para el índice

La composición del índice es revisada anualmente siguiendo la siguiente metodología: Las series accionarias que pasaron la etapa de elegibilidad son acomodadas de acuerdo a su capitalización en el mercado, preseleccionando 100 acciones, manteniendo las acciones que van del lugar 101 al 125. Generalmente la lista con las adiciones anuales es publicada mediante comunicados de prensa a principios de Diciembre.

FTSE 100: es un índice creado con las 100 acciones con mayor nivel de capitalización en el mercado listadas en el London Stock Exchange. El nivel base de 1000 está referenciado a la fecha de su inicio, el 3 de enero de 1984. Los componentes del índice se escogen trimestralmente, algunos de los requisitos que se necesitan cumplir para

ser parte del índice son tener un listado completo del London Stock Exchange con el precio en Libras Esterlinas o Euros, algunas restricciones de nacionalidad, libre flotación y liquidez.

Nikkei 225: es un índice accionario ponderado de precios con datos históricos de más de 60 años conformado por 225 emisoras; es el índice japonés reconocido como el más importante del mercado. El índice ha sido utilizado como indicador en el mercado de capitales japonés. El valor del índice se calcula dividiendo la suma de los precios ajustados por el divisor. El propósito del divisor es mantener la continuidad del índice al eliminar probables efectos de factores externos no relacionados directamente con el movimiento del mercado. El método es llamado *Down Adjustment*.

La composición del índice puede ser cambiada a principios de cada Octubre basados en la revisión anual. Los dos factores que determinan un cambio en la composición son liquidez y balance del sector (el Nikkei contempla 6 sectores).⁷

BOVESPA: es un índice ponderado compuesto por las 50 acciones más líquidas del Mercado de Capital de Sao Paulo.⁸ En el 2008 el índice alcanzó su décima marca récord consecutiva, en el 2011 el índice logró su mayor volumen de transacción en su historia. Este índice cubre más del 80% de las transacciones y aproximadamente el 70% de la capitalización de los intercambios. El IBOVESPA usa el índice de negociabilidad para calcular el criterio y ponderación de las acciones dentro de él. Este método es similar al de libre flotación. Los criterios para formar parte del índice son principalmente tres: a) debieron ser parte de una transacción en los últimos 12 meses, b) la proporción de transacción de la acción debe ser mayor al 0.1% del total del volumen de acciones intercambiadas, y c) Más del 80% de las acciones del emisorario deben tener transacciones en la bolsa.⁹

⁷ <http://indexes.nikkei.co.jp/en/nkave/index/profile?idx=nk225>

⁸ <http://www.bloomberg.com/quote/IBOV:IND>

⁹ Wikinvest, [http://www.wikinvest.com/index/Indice_Bovespa_\(BVSP\)](http://www.wikinvest.com/index/Indice_Bovespa_(BVSP))

IV.2 Acciones

Para seleccionar las acciones que auxiliarán hacer pronósticos sobre el IPC se siguieron dos criterios, el primer lugar fue el porcentaje que tienen en la composición del IPC, el segundo criterio fue la actividad económica de la emisora (al ser el IPC un indicador de la economía mexicana, utilizar emisoras de distintas actividades tiene como propósito capturar choques de una forma más heterogénea). A continuación se presenta una breve explicación de los índices seleccionados para la implementación del trabajo.

América Móvil: es una empresa mexicana de telecomunicaciones, fundada en el año 2000 con sede en la Ciudad de México y presencia en Latino América, Estados Unidos y el Caribe. Cuenta con más de 262 millones de cuentas de teléfonos móviles, más de 31 millones de líneas fijas, 18 millones de accesos de banda ancha, más de 18 millones de suscriptores de televisión. Ofrece servicios de voz fijos y móviles, así como servicios de valor añadido (servicios de mensajes cortos, mensajería multimedia, interconexión entre distintas redes) y servicios de datos (transmisión de datos, navegación en web, mensajería instantánea, transmisión de contenido, aplicaciones interactivas, servicios de redes corporativas).¹⁰

Walmart de México y Centroamérica: es una empresa dedicada al sector comercio, opera en seis países y cuenta con una amplia variedad de formatos: tiendas de descuento, supermercados, bodegas, hipermercados, clubes de precios con membresías, tiendas de ropa, restaurantes y servicios financieros. Sus ventas alcanzaron 424,987 millones de pesos, su margen de EBITDA fue de 9.2% en el 2013,¹¹ su valor de capitalización llegó a los 565,982 millones de pesos.¹² En la Bolsa Mexicana de Valores es la 2ª empresa más bursátil.¹³

¹⁰ Periódico el financiero en línea: <http://mx.finanzas.yahoo.com/q/pr?s=AMXL.MX>
<http://www.americamovil.com/amx/es/cm/about/intro.html?p=1&s=7>

¹¹ Últimos 12 meses, hasta junio 2013

¹² Datos al 31 Agosto de 2013

¹³ http://www.walmartmexico.com.mx/nuestro_compromiso.html

Banorte: actualmente opera como Grupo Financiero Banorte (GFNorte), bajo un modelo de banca universal ofreciendo productos y servicios bancarios en el sistema financiero mexicano. Actualmente es la tercera institución bancaria más grande en México¹⁴ medida en tamaño de depósitos y crédito. Es el segundo proveedor de financiamiento a estados y municipios, así como créditos hipotecarios, y es el tercer jugador más grande en cuanto a préstamos comerciales. GFNorte tiene un enfoque de banca al menudeo, pero también provee productos y servicios a través de su casa de bolsa, las compañías de pensiones y seguros, Afore, sociedades de inversión, así como las empresas de arrendamiento y factoraje y la almacenadora.¹⁵

V. Conceptos Básicos de Series de Tiempo¹⁶

El proceso de realizar pronósticos ha recibido la atención de un gran número de académicos, como consecuencia se han desarrollado un gran número de técnicas para poder realizarlos. A continuación hay una síntesis de éstos, en particular del modelo $AR(p)$, $ARMA(p, q)$ y $ARIMA(p, i, d)$.

La Econometría de Series de Tiempo es la rama de la Econometría enfocada a modelar series de tiempo económicas y financieras. Cuando las series tienen tendencias estocásticas el análisis clásico es inválido, por lo que se necesita una herramienta especializada en series de datos de este tipo. Algunas de las principales características de estas series son:

- Tendencia
- Estacionalidad
- Heterocedasticidad Condicional

¹⁴ Medida en tamaño de depósitos y crédito.

¹⁵ <http://www.banorte.com/portal/personas/informacion.web?grupo=4&elemento=5&fullSite=true>

¹⁶ Hamilton, Time Series Analysis de Hamilton, Capítulos I-II.

V.1 Primeras Diferencias

El concepto desde el que se parte en este análisis es el de Primeras Diferencias. Cuando se estudia una variable con valor en el tiempo t está dado por y_t . La dinámica asignada a la variable y está dada por otra variable w_t y valores previos de y :

$$y_t = \varphi y_{t-1} + w_t \quad (1)$$

La ecuación anterior es una ecuación lineal de primeras diferencias. Una ecuación de diferencias es una expresión que relaciona la variable y_t con sus valores anteriores. Esta ecuación es una de diferencia de primer orden porque solamente el primer rezago de la variable (y_{t-1}) aparece en la ecuación. Se puede observar que y_t es una función lineal de y_{t-1} y w_t . Si se conoce el valor inicial y_0 y sólo por supuesto, asumimos que cada w_t es un valor dado, entonces de forma recursiva podemos calcular el valor de y_t :

$$y_t = \varphi^{t+1} y_{-1} + \varphi^t w_0 + \varphi^{t-1} w_1 + \dots + \varphi w_{t-1} + w_t \quad (2)$$

El procedimiento anterior es conocido como resolver la ecuación de diferencias por sustitución recursiva. Si se supone que asumiendo que w_0 cambia con y_t y que w_1, \dots, w_t no cambian, el efecto de w_0 en y_t está dado por:

$$\frac{\partial y_t}{\partial w_0} = \varphi^t \quad (3)$$

El resultado claramente es válido cuando el valor inicial está dado en y_t , tomando como dado y_{t-1} y el efecto de w_t sobre y_{t+1} estaría dado por:

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \varphi^j \quad (4)$$

Así la dinámica del multiplicador φ^j depende solamente de j , la distancia en el tiempo entre el choque w_t y el valor observado de la variable de interés y_{t+j} . El valor que tenga φ tiene distintas implicaciones sobre y_t . Cuando $|\varphi| < 1$ el sistema es estable: el efecto que tendría sobre y_t un cambio en w_t eventualmente se desvanecerá. Si $|\varphi| > 1$ el sistema es explosivo: el efecto de un cambio en w_t tendrá un efecto permanente en y_t . Por último, si $\varphi = 1$, un aumento de una unidad de w tendrá un efecto permanente sobre y de uno.

El siguiente paso es generalizar la dinámica de la ecuación (1) permitiendo que el valor de y al tiempo t pueda depender de p rezagos, así como el valor actual de la variable w_t :

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + w_t \quad (5)$$

En este contexto, el proceso dinámico es más difícil de caracterizar, aunque pueden ser utilizados con este propósito los valores de λ que satisfacen:

$$\lambda^p - \varphi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \varphi_{p-1} \lambda - \varphi_p = 0 \quad (6)$$

La forma matricial de la ecuación $y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ está representada por:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ o en forma compacta: } \mathbf{Y}_t = \mathbf{F} \mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

En donde la matriz \mathbf{F} es la matriz de coeficientes del vector autoregresivo de primer orden. Los valores propios de la matriz \mathbf{F} se obtienen resolviendo $|\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}_p| = 0$.

En general una ecuación en diferencias de p -ésimo orden con valores propios diferentes:

- i. Si todos los valores propios son reales y menores a uno en valor absoluto, el proceso es estable.
- ii. Si los valores propios son reales pero, al menos uno, es mayor a uno en valor absoluto, la dinámica es explosiva.
- iii. Si algunos de los valores propios son complejos y tienen un módulo se tendrá un patrón sinusoidal con amplitud decreciente-
- iv. Si los valores propios complejos son mayores a uno en módulo se tendrá un patrón sinusoidal explosivo.

V.2 Operador de Rezagos

Una herramienta conveniente para el empleo de variables retrasadas es el operador de rezagos (L), este operador es utilizado para representar valores actuales así como

valores rezagados y adelantados en una serie de tiempo. Para la serie de tiempo $\{y_t\}$ el operador de rezagos se define como:

$$L^k y_t = y_{t-k} \quad (7)$$

Algunas características esenciales del operador de rezagos son: $La = a$ si a es constante y $L(Ly_t) = y_{t-2}$. Así $L^p y_t = y_{t-p}$, $L^q(L^p y_t) = y_{t-p-q}$, y $(L^p + L^q)y_t = y_{t-p} + y_{t-q}$. Por convención $L^0 y_t = y_t$.

La característica esencial del operador de rezagos es que puede ser manipulado algebraicamente:

i. Para $0 < \alpha < 1$

$$(1 - \alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots ; \text{ por lo tanto } (1 - \alpha L)^{-1} y_t$$

$$(1 - \alpha L)^{-1} y_t = y_t + \alpha y_{t-1} + \alpha^2 y_{t-2} + \dots$$

ii. $(1 + L^2)(1 - L^2)y_t = (1 - L^4)y_t = y_t - y_{t-4}$

iii. Las ecuaciones (1) y (5) pueden ser representadas de la siguiente forma:

$$(1 - \varphi L)y_t = \varepsilon_t \text{ y } (1 - \varphi L - \dots - \varphi_p L^p)y_t = \varepsilon_t$$

iv. $y_t = (a + bL)Lx_t = (aL + bL^2)x_t = ax_{t-1} + bx_{t-2}$

Relacionando el operador de rezagos, el operador de diferencias es definido como

$$\Delta^d = (1 - L)^d \quad (8)$$

Al aplicar el operador Δ^d con $d = 1$ a una variable se obtiene la primera diferencia de la variable:

$$\Delta y_t = (1 - L)y_t = y_t - y_{t-1}$$

Claramente $\Delta y_t = (1 - L)y_t$. Combinando las dos operaciones anteriores es posible representar el modelos de diferencias de orden p , a continuación un ejemplo con $p = 2$.

$$\Delta^2 y_t = (1 - L)^2 y_t = (1 - 2L + L^2)y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

Acomodando términos:

$$(1 - L)^2 y_t = (1 - L)(1 - L)y_t = (1 - L)(y_t - y_{t-1}) = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$$

Que es la segunda diferencia de y_t . La definición general de este operador es:

$$\Delta_j^d = (1 - L^j)^d \quad (9)$$

V.3 Proceso Estocástico

En general, un Proceso Estocástico es una familia o colección de variables aleatorias $\{X_t, t \in Z\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad. En series de tiempo el conjunto Z es un conjunto de puntos en el tiempo. Las funciones $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ en Z son conocidas como realizaciones u observaciones muestrales de la trayectoria de un proceso estocástico. Los datos de series de tiempo financieras son modelados como realizaciones de procesos estocásticos.

La serie de tiempo $\{X_t, t \in Z\}$ se dice estacionaria (débilmente estacionaria) si;

- i. $E|X_t|^2 < \infty, \forall t \in Z$
- ii. $EX_t = m, \forall t \in Z$ y
- iii. $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t), \forall r, s, t \in Z^{17}$ (La función de autocovarianza γ_X depende únicamente de la diferencia de tiempo y no del punto de tiempo en particular)

Se dice que la serie de tiempo $\{X_t, t \in Z\}$ es estrictamente estacionaria si las distribuciones conjuntas $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})'$ y $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})'$ son iguales para todo número entero k y para todo $t_1, \dots, t_k, h \in Z$.

Antes de estudiar los procesos autoregresivos (AR) y de media móvil (MA) es necesario definir que es Ruido Blanco. La serie de tiempo $\{\varepsilon_t\}$ sigue un proceso de Ruido Blanco si:

- i. $E(\varepsilon_t) = 0 \quad t = 1, 2, \dots, T$
- ii. $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \quad t = 1, 2, \dots, T$
- iii. $E(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0 \quad s, t = 1, 2, \dots, T; s \neq t$

¹⁷ $\gamma_X(r, s) = Cov(X_r, X_s) = E[(X_r - EX_r)(X_s - EX_s)]$

Comúnmente este proceso se denota como $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Para este proceso cualquier valor pasado no provee información del valor actual y la mejor predicción para el periodo $(t + h)$ es igual a cero.

Otro concepto necesario para el análisis de series de tiempo es el de Cointegración. Se dice que dos series de tiempo X_t y Y_t están cointegradas si existe un parámetro α tal que $u_t = y_t - \alpha x_t$ es un proceso estacionario, esto implica que comparten una tendencia estocástica.¹⁸

VI. Procesos AR, ARMA, ARIMA

Para implementar el Filtro de Kalman es necesario manejar las series de datos de los índices internacionales y de acciones nacionales para poder generar condiciones iniciales óptimas para comenzar con el proceso recursivo de filtración. Debido a lo anterior es importante tener presentes las características de los procesos $AR(p)$, $ARI(p, d)$, $MA(q)$, $ARMA(p, q)$, $ARIMA(p, d, q)$.

VI.1 Procesos AR

Los procesos AR son aquéllos en los cuáles los valores actuales dependen de los valores pasados más un ruido blanco (error o perturbación aleatoria). La ecuación en diferencia lineal de p –ésimo orden, denotado por $AR(p)$ es:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = p + 1, p + 2, \dots T$$

Donde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ y $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ son parámetros.

Utilizando el operador de rezagos el proceso anterior puede representarse como:

$$\Phi_p(L)y_t = \varepsilon_t$$

¹⁸ Bent E. Sorensen, University of Houston, en <http://www.uh.edu/~bsorensen/coint.pdf>

Donde $\Phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$ es el polinomio de p –ésimo orden en el operador de rezagos.

Una serie que necesita ser diferenciada d veces para ser estacionaria se dice que tiene orden *de integración* p y se denota $I(d)$. Una serie $I(d)$ que, después de ser diferenciada d veces, sigue un $AR(p)$ se llama un proceso *autoregresivo integrado* o $ARI(p, d)$;

$$\Delta_1^d y_t - \phi_1 \Delta_1^d y_{t-1} - \dots - \phi_p \Delta_1^d y_{t-p} = \varepsilon_t; \quad t = p + d, p + d + 1 \dots T$$

La respuesta de y a ε dependerá de la dinámica del proceso, la cual puede ser caracterizada utilizando la solución de la ecuación (6). Una alternativa para caracterizar la dinámica puede ser estableciéndola en término de raíces características del polinomio en el operador de rezagos. En el caso de un $AR(p)$ el polinomio característico es:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 \dots - \phi_p z^p = 0 \quad (11)$$

El cual puede tener una solución de la forma

$$(1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z) \dots (1 - \alpha_p z) = 0$$

Donde los valores α_i son funciones de los parámetros ϕ_i . Se puede demostrar que $\alpha_i = \lambda_i$. Por lo que las raíces de la ecuación (11) son iguales a la inversa de las raíces y viceversa. Si todas las raíces son reales con valor absoluto mayor a 1, el proceso $AR(p)$ es estacionario. Si alguna raíz es igual a la unidad, entonces el proceso es no estacionario, por lo que el efecto de ε sobre y es permanente.

VI.2 Proceso MA

Son procesos en los cuales los valores actuales de la variable de interés dependen de los valores actuales y pasados de algún proceso de ruido blanco. El proceso de Media Móvil (Moving Average) de orden q , $MA(q)$, se define

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (12)$$

Donde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ y $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ son parámetros

Utilizando el operador de rezagos el proceso anterior puede ser representado de la siguiente forma:

$$y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$$

Donde $\theta_q(L) = 1 + \theta_1L + \theta_2L^2 + \dots + \theta_qL^q$ es un polinomio de q - èsimo orden.

VI.3 Proceso ARMA

Estos procesos incluyen componentes *AR* y *MA*. Formalmente se dice que la serie de tiempo $\{Y_t, t = 0 \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso *ARMA*(p, q) si

$$Y_t - \varphi_1Y_{t-1} - \varphi_pY_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (13)$$

También puede ser expresada de la forma:

$$\Phi_p(L)Y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$$

Donde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Un proceso *ARMA*(p, q) puede ser considerado una aproximación de un polinomio *AR* de orden alto por medio de un cociente de dos polinomios que juntos implican un número menor de parámetros. La ecuación (13) puede obtenerse de $\left[\frac{\Phi_p(L)}{\theta_q(L)}\right]Y_t = \varepsilon_t$. En donde el cociente $\left[\frac{\Phi_p(L)}{\theta_q(L)}\right]$ se aproxima a un *AR* de orden grande.

De lo anterior, se dice que un proceso *ARMA*(p, q) Y_t es causal si existe una secuencia de constantes $\{\Psi_j\}$ tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |\Psi_j| < \infty$ y $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j}$. Un proceso *AR*(1) con $|\varphi_1| < 1$ es causal y en los casos $|\varphi_1| > 1, \varphi_1 = 1$ el proceso es no causal.

La dinámica de un proceso *ARMA*(p, q) puede ser caracterizada evaluando el polinomio característico del componente *AR*(p). Cuando las raíces del polinomio *AR*(p) son todas mayores a uno en valor absoluto y el proceso *ARMA* es estacionario.

VI.4 Proceso ARIMA

Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}$ es un proceso $ARIMA(p, d, q)$, donde I representa el orden de integración, si su polinomio característico $AR(p + d)$ tiene d raíces iguales a uno y p raíces mayores a uno en valor absoluto. En este caso, la transformación $\Delta_1^d Y_t$ se convierte en un proceso $ARMA(p, q)$ estacionario, lo cual puede ser reescrito como:

$$\Delta^d y_t - \varphi_1 \Delta^d y_{t-1} - \dots - \varphi_p \Delta^d y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (14)$$

VII. Filtro de Kalman como Herramienta para Hacer Pronósticos

El Filtro de Kalman (FK) sirve para modelar problemas con la forma lineal-cuadrática: estimar “estados” instantáneos de un sistema dinámico lineal afectado por choques aleatorios. El parámetro resultante es estadísticamente óptimo respecto a cualquier función cuadrática de error. Una característica de este método es la facilidad que tiene para su implementación computacional [Grewal & Andrews, 2001].

La Metodología del FK es potencialmente de gran interés en el análisis de series de tiempo con parámetros que no son constantes a lo largo del proceso, ya que es capaz de obtener una estimación “óptima” del vector de estado (parámetros que por hipótesis son inobservables). Un ejemplo en el campo de las finanzas es el proceso que siguen las acciones en los mercados de capital; es posible modelar este proceso como uno en el que su media varía en el tiempo con ruido blanco aditivo y que además se puede caracterizar como una combinación lineal de funciones y coeficientes desconocidos. [Morrison & Pike, 1997]

El FK es un estimador de mínimos cuadrados recursivo e insesgado, con una señal aleatoria que se asume Gaussiana. La dinámica de las variables observables y no observables está dada por un sistema de dos ecuaciones: una de estados de naturaleza (u observación) y la otra relacionada a la dinámica del sistema (o de transición). [Ordorica, 1995]

Este modelo también incluye la solución al problema inverso, en el cual se conoce como representar la medición de las variables como función de las variables de interés principal: se invierte esta relación funcional y se estima a las variables independientes como una función inversa de las variables dependientes, la cuáles pueden ser dinámicas. [Ordorica, 1995]

El FK se ha aplicado más comúnmente en el campo de ingeniería de control y en otros campos relacionados con la física; sin embargo recientemente su uso ha aumentado considerablemente en campos disciplinarios no ingenieriles como en el de predicción a corto plazo y el análisis de respuesta en experimentos que involucran una dosis y su respuesta. Dado que su uso ha sido primordialmente en campos ingenieriles otro tipo de disciplinas, que usan estadística intensivamente, no están al tanto de su practicidad y la relativa facilidad con la que es posible implementarlo. Sin embargo, el modelo, las nociones y las técnicas utilizadas en el FK son de gran interés para los estadísticos; principalmente por su posible implementación en problemas que resuelven modelos de regresión lineal y el análisis de series de tiempo. En un principio el FK puede ser fácilmente comprendido usando estadística Bayesiana. [Meinhold, Singpurwalla, 1993]

Para ejemplificar algunas de las aplicaciones en las que se puede usar el FK se explicará en primer lugar la versión simplificada del rastreo de un satélite orbitando alrededor de la tierra. El modelo simplificado del FK está representado por dos ecuaciones:

- La dinámica entre nuestra variable de interés Y_t (la posición del satélite para cada momento t) y variables no observables o estado de naturaleza h_t (por ejemplo la velocidad del satélite, datos que no sabemos y que están expuestos a errores de medición) está dada por:

$$Y_t = Hh_t + w_t$$

$$w_t \sim N(0, W_t)$$

H es una matriz siempre conocida, en donde estarían incorporados los principios geométricos para mapear Y_t de acuerdo a h_t , mientras que w_t reflejaría errores de medición.

- La dinámica del sistema se incorpora a través de la ecuación del sistema:

$$\begin{aligned}\hat{h}_t &= F_t h_{t-1} + v_t \\ v_t &\sim N(0, V_t)\end{aligned}$$

El análisis de la segunda ecuación empieza con \hat{h}_t . En el caso del rastreo del satélite, es el parámetro sobre el que se hace inferencia estadística a partir de la información disponible en $t-1$. La matriz F_t contiene información sobre el cambio en la posición y velocidad en el tiempo de acuerdo a las leyes de la física que gobiernan cuerpos que orbitan. Por último w_t permitiría desviaciones de estas leyes derivadas de factores como la no uniformidad del campo gravitacional de la tierra.

El FK recientemente ha sido aplicado exitosamente fuera del campo de la ingeniería en pronóstico de corto plazo, en la evaluación de políticas macroeconómicas, procesos de manufactura, en aviación, navegación marina o espacial [Ordorica, 1995]. También es usado para predecir el curso que tomarán sistemas dinámicos que no pueden ser controlados, tal como las corrientes de los ríos durante inundaciones, trayectorias de cuerpos celestiales o el precio de acciones [Grewal & Andrews, 2001].

La volatilidad de los mercados tiende a aumentar en periodos de inestabilidad económica, situación que hace necesario tener herramientas que nos ayuden a hacer pronósticos eficientes sobre el estado futuro de nuestras variables de interés. Algunos ejemplos de la implementación del FK para realizar pronósticos en el campo de la economía o finanzas se presentan a continuación.

Recientemente se analizó la habilidad para hacer pronósticos entre 4 modelos *GARCH* distintos¹⁹ y el FK. Como resultado final, la habilidad de predicción es considerablemente mayor con el FK. La base de datos con la que se realizó el estudio consta del retorno diaria de las acciones de 20 compañías con sede en el Reino Unido. Los modelos *GARCH* utilizados eran considerablemente más sofisticados que el modelo *CAPM* implementado para el FK,²⁰ sin embargo los errores de los pronósticos generados entre los distintos modelos permite asegurar que éste último es más eficiente que cualquiera de los modelos *GARCH* [Taufiq Choudhry & Hao Wu, 2008].

Otro ejemplo sobre la implementación del Filtro de Kalman en finanzas fue el realizado por Mergner y Bulla, quienes pronosticaron con distintos modelos los coeficientes β (en el contexto *CAPM*) dinámicos de sectores industriales europeos. El interés primordial del trabajo es probar la hipótesis de una β con un comportamiento estocástico. La primera técnica utilizada para estimar los coeficientes es un *M – GARCH* (*GARCH* Multivariado). Aunque el *GARCH* puede ser considerado la herramienta preferida para pronosticar volatilidad, los modelos de la clase de Volatilidad Estocástica (SV por sus siglas en inglés) representan una alternativa interesante; al añadir un choque a la varianza de los rendimientos son más flexibles en la caracterización de la dinámica de la volatilidad que los modelos *GARCH*. La otra forma de modelar las β está basada en la forma *CAPM*, el enfoque de estado-espacio le permite modelar y estimar las betas directamente usando el Filtro de Kalman. Por último, se usan la estructura de cadenas de Markov con estructura cambiante. Para el estudio son utilizados datos del rendimiento mensual de Abril de 1986 a Diciembre de 1993. Los resultados del estudio concluyen que las β pueden ser descritas de mejor forma usando el FK, al mostrar una superioridad clara en los resultados, respecto a los otros modelos. [Menger, Bulla, 2005]

¹⁹ Los modelos *GARCH* comparados en el documento son: i) el modelo *GARCH* bivaridado estándar, *BEKK* bivaridado, *GARCH – GJR* bivaridado y *GARCH – X*.

²⁰ El modelo propuesto en el artículo para el FK está dado por las ecuaciones:
La dinámica del sistema: $R_{it} = \alpha_t + \beta_{it-1} + R_{Mt} + \varepsilon_t$ y la dinámica del estado: $\beta_{it} = \beta_{it-1} + \eta_i$.

VIII. Descripción del Filtro de Kalman (Modelo y Algoritmo)

La siguiente sección explica los aspectos teóricos del FK desde un punto de vista Bayesiano, aunque los mismos resultados pueden ser alcanzados desde un enfoque de programación dinámica, sistemas dinámicos lineales o de mínimos cuadrados condicionados [Ordorica,1995].

VII.1 Modelo²¹

El FK es un proceso de inferencia recursivo sobre estados de naturaleza h_t inobservables. El modelo está compuesto por dos ecuaciones: la ecuación de observación y la que representa la dinámica del sistema:

- Ecuación de observación

$$Y_t = Hh_t + w_t \quad (1)$$

$$w_t \sim N(0, W_t)$$

- Ecuación del sistema

$$\hat{h}_t = F_t h_{t-1} + v_t \quad (2)$$

$$v_t \sim N(0, V_t)$$

Donde:

- Y_t : Variable Observable para todo t , de dimensión $nx1$.

$$Y_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}]$$

- x_{1t} es una entrada de la ecuación h_t que representa el valor de la variable i en el tiempo t . En el contexto de este trabajo sería el rendimiento de una acción o un índice en una fecha determinada.

²¹ [Morrison & Dike, 1997]; [Ordorica 1995]

- h_t : Variable no observable de dimensión $m \times 1$, que en la ecuación del sistema está compuesta por otras variables:

$$\hat{h}_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}, b_{1t}, b_{2t}, b_{kt}, \dots)$$

- H_t : Siempre conocemos la composición de esta variable
- Dentro del sistema de ecuaciones, los supuestos sobre la caracterización del ruido blanco son:

$$w_t \sim N(0, W_t)$$

$$v_t \sim N(0, V_t)$$

$$Cov(v_t, w_t) = 0$$

- F_t : Siempre conocemos la composición de esta variable

Para la implementación del sistema debemos recordar que el FK es un proceso recursivo para hacer inferencia sobre el estado de naturaleza h_t . La clave para su implementación es tener presente que dados nuestros valores de Y_t es necesario utilizar el Teorema de Bayes para inferir el comportamiento de la variable:

Prob.{Estado de Naturaleza|Datos} =

$$\text{Prob}\{\text{Datos}|\text{Estado de Naturaleza}\} \times \text{Prob}\{\text{Estado de Naturaleza}\}$$

O escrito de otra forma

$$P(h_t|Y_t) = P(Y_t|h_t, Y_{t-1}) * P(h_t|Y_{t-1}) \quad (4)$$

Hay que identificar que la parte izquierda de la igualdad denota una distribución *a posteriori* para h en el tiempo t . En $t-1$ nuestro estado de conocimiento sobre h_{t-1} está representada en la distribución asumida:

$$(h_{t-1}|Y_{t-1}) \sim N(\hat{h}_t, \Sigma_{t-1}) \quad (5)$$

Para entender mejor el proceso recursivo es importante remarcar que empezamos en $t = 0$ escogiendo un \widehat{h}_0 y Σ_0 ²² como una mejor aproximación sobre la media y la varianza. Para empezar el camino hacia delante es necesario atacar el problema en dos etapas distintas:

1. Antes de observar Y_t y
2. Después de observar Y_t

1ª Etapa:

Antes de observar Y_t nuestra mejor opción para inferir h_t está dada por la ecuación de la dinámica del sistema (2). Dado que el comportamiento de h_{t-1} está descrito por (5), el conocimiento que tenemos sobre el estado de naturaleza está representado por la expresión, la cual es la distribución *a priori*:

$$(h_t|Y_{t-1}) \sim N(F_t \widehat{h}_{t-1}, R_t) \quad (6)$$

$$R_t \equiv F_t \Sigma_{t-1} F_t' + V_t$$

2ª Etapa:

Una vez observada Y_t lo que se busca es calcular el h_t posterior, por lo que necesitamos conocer la probabilidad $L(h_t|Y_t)$ o lo que es lo mismo: $P(Y_t|h_t, Y_{t-1})$, la cual se determina según el siguiente proceso:

- Denotamos el error de predicción Y_t en el tiempo anterior $t-1$ como:

$$e_t = Y_t - Y_t^e = H(\theta_t - F_t \widehat{h}_{t-1}) \quad (7)$$

Como conocemos H, F_t y \widehat{h}_{t-1} son todas conocidas, observar e_t es equivalente a observar Y_t , así la ecuación (4) puede ser rescrita como:

$$P(h_t|Y_t, Y_{t-1}) = P(h_t|e_t, Y_{t-1}) = P(e_t|h_t, Y_{t-1}) * P(h_t|Y_{t-1}) \quad (8)$$

²² Morrison & Pike recomiendan obtener Σ_0 como la varianza de un OLS

Siendo $P(h_t|Y_t, Y_{t-1})$ la probabilidad del estado de naturaleza dado que tenemos información de nuestra variable de interés hasta el tiempo t .

Usando la ecuación (7), se puede escribir la esperanza $E(e_t|h_t, Y_{t-1}) = H(h_t - F_t \widehat{h_{t-1}})$. Dado que $v_t \sim N(0, V_t)$, podemos describir su distribución de probabilidad como:

$$P(e_t|h_t, Y_{t-1}) \sim N(H(h_t - F_t \widehat{h_{t-1}}), V_t) \quad (9)$$

Usando el Teorema de Bayes obtenemos:

$$P(h_t|Y_t, Y_{t-1}) = \frac{P(e_t|h_t, Y_{t-1}) * P(h_t|Y_{t-1})}{\int_{\forall \theta_t} P(e_t, h_t|Y_{t-1}) dh_t} \quad (10)$$

La ecuación (10) es la que mejor describe nuestro conocimiento sobre h_t en el tiempo t . Una vez que se conoce $P(h_t|Y_t, Y_{t-1})$ se puede ir atrás hacia la ecuación (6) para el siguiente ciclo recursivo. El siguiente paso es encontrar la distribución posterior a la ecuación (10).

Usando resultados conocidos de distribuciones normales bivariadas conjuntas X_1 y X_2 , en donde su distribución está caracterizada por:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right] \quad (11)$$

Cuando la ecuación (11) describe la distribución condicional de X_1 dada X_2 , podemos describir la distribución de la primera como:

$$(X_1|X_2 = x_2) \sim N[\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}] \quad (12)$$

Para el desarrollo de la formulación, eliminamos las variables condicionales Y_{t-1} y sustituimos los valores de X_1 por e_t y X_2 por h_t . La media de la primera variable $\mu_1 = 0$ y de la segunda variable μ_2 es $F_t \widehat{h_{t-1}}$ y $\Sigma_{22} = R_t$

Sustituyendo los valores en (12) y recordando la distribución de $P(e_t | h_t, Y_{t-1})$ llegamos a los resultados:

$$\begin{aligned}\Sigma_{12} &= HR_t; \\ \Sigma_{11} &= V_t + HR_t H'\end{aligned}$$

Por lo tanto la distribución conjunta es:

$$\begin{bmatrix} h_t \\ e_t \end{bmatrix} | Y_{t-1} \sim N \left[\begin{pmatrix} F_t \widehat{h_{t-1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_t & R_t H' \\ F_t R_t & V_t + HR_t H' \end{pmatrix} \right] \quad (13)$$

Si proponemos a h_t como la variable condicionada y a e_t como variable que condiciona, llegamos a conocer la distribución de $(\theta_t | e_t, Y_{t-1})$:

$$\begin{aligned}\widehat{h}_t &= F_t \widehat{h_{t-1}} + R_t H' (V_t + HR_t H')^{-1} e_t \\ \Sigma_t &= R_t - R_t H' (V_t + HR_t H')^{-1} HR_t\end{aligned} \quad (14)$$

Las ecuaciones anteriores describen la distribución a posteriori deseada. Estas ecuaciones son las que son usadas para el proceso de recursión.

VII.2 Algoritmo

El proceso del FK se basa en hacer pronósticos de forma recursiva basados en estimaciones anteriores. Dentro de este contexto, si $h_{t|\tau}$ es el estimador de h_t basado en la información disponible hasta el periodo τ y $P_{t|\tau}$ su matriz de covarianza, las ecuaciones para hacer pronósticos son:

$$\begin{aligned}h_{t|t-1} &= F h_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= F P_{t-1|t-1} F' + V_t\end{aligned}$$

Los errores de predicción y su matriz de covarianza son:

$$\eta_{t|t-1} = Y_t - H_t h_{t|t-1}$$

$$\zeta_{t|t-1} = H_t P_{t|t-1} H_t' + W_t$$

El logaritmo de Máxima Versosimilitud fue utilizada para minimizar la diferencia cuadrática de los errores:

$$l_t = -\frac{1}{2} \ln(2\pi |\zeta_{t|t-1}|) - \frac{1}{2} \eta_{t|t-1}' (\zeta_{t|t-1})^{-1} \eta_{t|t-1}$$

Las ecuaciones de actualización son

$$h_{t|t} = h_{t|t-1} + K_t^* \eta_{t|t-1}$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t^* H_t^* P_{t|t-1}$$

En donde la matriz de ganancia de Kalman K_t^* está definida como

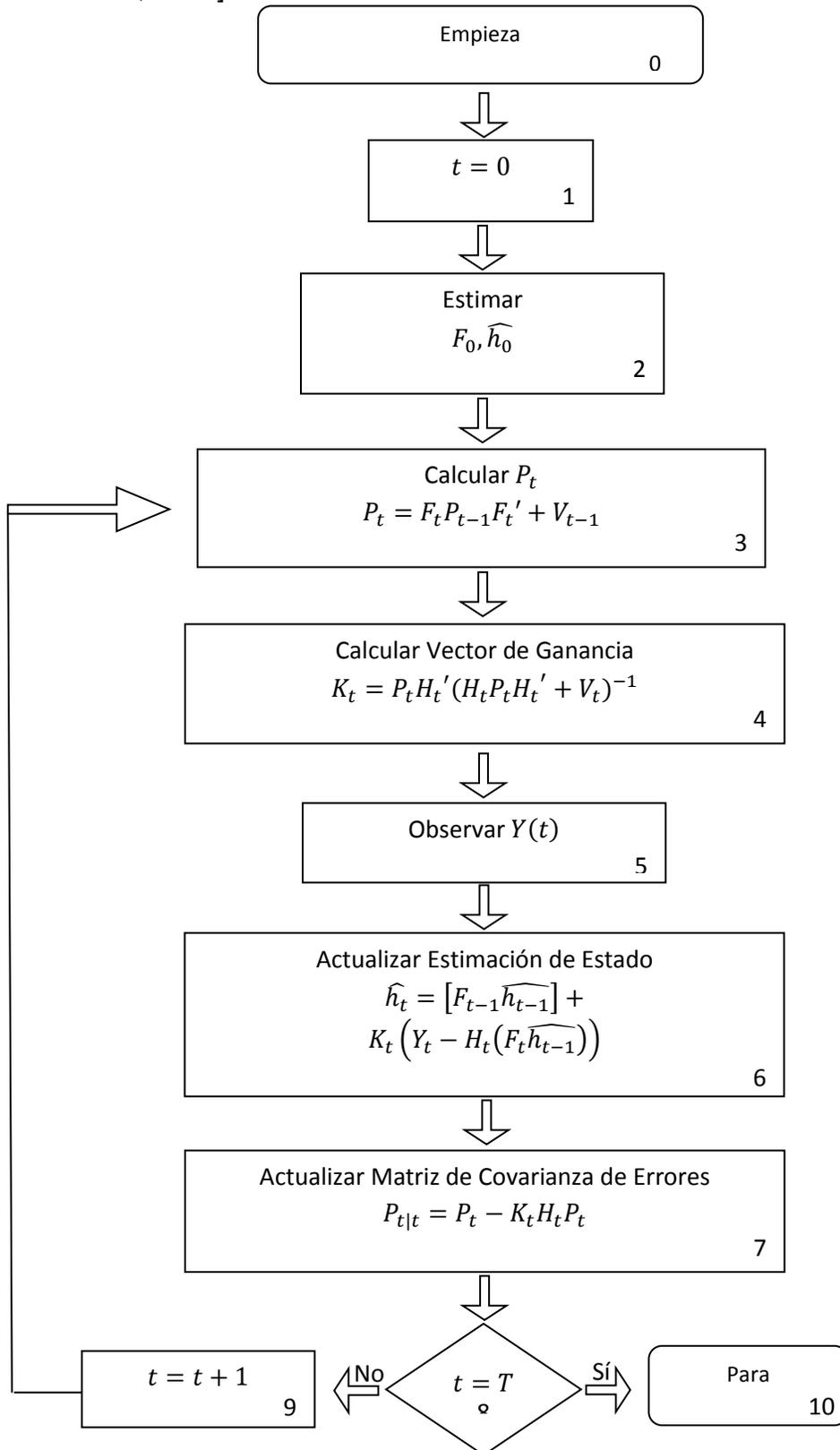
$$K_t^* = P_{t|t-1} H_t' (\zeta_{t|t-1})^{-1}$$

Y los errores en los pronósticos

$$\eta_{t|t-1} = Y_t - K_t^* h_{t|t-1}$$

Para iniciar el proceso de iteración, por convención, el vector para $h_{0|0}$ es el vector 0 y para $P_{0|0}$ se usa la matriz identidad. Otra forma de asignar valores iniciales es calcular una aproximación de parámetros insesgados sobre las entradas en el vector de estados de naturaleza. En el caso de la matriz de covarianza se puede usar como primera aproximación una matriz de covarianzas del tipo *OLS*.

La *Figura VII.1* muestra de forma detallada el proceso de recursividad que sigue el FK [Morrison & Pike, 1977]:



IX. Implementación del Filtro de Kalman

Para la implementación del modelo, como principal referencia es usado el artículo *Introducing The Euro-Sting: Short-term indicator of Euro Area Growth* de Camacho & Pérez-Quiros del 2010. El modelo se basa en la existencia de dos factores g_t y u_t . El primero tiene como supuesto ser un factor que afecta a la economía global, el segundo es un factor idiosincrático de cada variable explicativa que afecta el comportamiento de nuestra variable de interés. El propósito es modelar el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) como una combinación lineal de estos dos factores, a través del comportamiento de índices y acciones. El Filtro de Kalman (FK) es particularmente útil para este tipo de pronósticos. Los factores g_t y u_t no pueden ser observados, sin embargo es posible hacer aproximaciones sobre estos, las que permiten pronosticar el comportamiento del IPC.

La actividad económica más importante de México es la exportación por lo que la economía nacional está altamente relacionada al comportamiento económico de sus principales socios comerciales. Por tal motivo el comportamiento del IPC debería estar altamente correlacionado con los índices de las principales regiones económicas del mundo. La selección de los índices está basada en la representatividad de estas regiones: BOVESPA como indicador económico de Sudamérica, FTSE 100 de Europa. NASDAQ de EE.UU. y el NIKKEI de la zona Asia Pacífico. A nivel mercado interno, la muestra del IPC está altamente concentrada, históricamente se compone por menos de 35 acciones. Los factores que determinaron la selección de las tres acciones fueron el porcentaje de composición dentro del índice, sector de pertenencia y disponibilidad de datos. América Móvil y Walmex fueron una decisión primaria, puesto que tienen los porcentajes de composición más altos (25% y 11.45% respectivamente) y pertenecen a sectores distintos (telecomunicaciones y Productos de Consumo Frecuente). Grupo Financiero Banorte fue elegida por ser la acción con un porcentaje de composición más alto del sector financiero (6.04%), sector primordial para cualquier economía.²³

²³ Composición del IPC consultado en <http://eleconomista.com.mx/corto-plazo/2012/08/15/bmv-revela-nueva-muestra-ipc>

Para facilitar el manejo de datos fueron creados dos vectores para agrupar los datos: Z_t^i y Z_t^n . El vector Z_t^i contiene los rendimientos de los índices internacionales al tiempo t , su dimensión es $s^i = 4 \times 1$, por su parte Z_t^n contiene los rendimientos de las acciones seleccionadas y su dimensión es $s^n = 3 \times 1$. El vector h_t para la implementación del FK tendrá la dimensión $(1 + s^i + s^n)$. Los parámetros modelados como procesos $AR(2)$ son g_t , u_t , así como la dinámica de los índices y acciones.

Para la implementación del FK es necesario recordar que se modela la dinámica de proceso basado en dos ecuaciones, la de observación y la del sistema:

$$Y_t = Hh_t + w_t$$

$$h_t = Fh_{t-1} + v_t$$

Donde $w_t \sim N(0, W_t)$ y $v_t \sim N(0, V_t)$

El modelo a calcular de forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} IPC_t \\ Z_t^I \\ Z_t^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 g_t \\ \bar{\beta}_2 g_t \\ \bar{\beta}_3 g_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 u_t \\ \bar{\gamma}_2 \bar{v}_t^I \\ \bar{\gamma}_3 \bar{v}_t^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \bar{\varepsilon}_{it} \\ \bar{\varepsilon}_{nt} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$Z_t^n = \begin{pmatrix} I_{1t} \\ I_{2t} \\ I_{3t} \\ I_{4t} \end{pmatrix}; \quad Z_t^i = \begin{pmatrix} A_{1t} \\ A_{2t} \\ A_{3t} \end{pmatrix}; \quad \bar{\beta}_2 = \begin{pmatrix} \beta_{21t} \\ \beta_{22t} \\ \beta_{23t} \end{pmatrix}; \quad \bar{\beta}_3 = \begin{pmatrix} \beta_{31t} \\ \beta_{32t} \\ \beta_{33t} \end{pmatrix}; \quad \bar{v}_t^I = \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \\ v_{4t} \end{pmatrix}; \quad \bar{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{21t} \\ \gamma_{22t} \\ \gamma_{23t} \\ \gamma_{24t} \end{pmatrix};$$

$$\bar{v}_t^A = \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{pmatrix}; \quad \bar{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} \gamma_{31t} \\ \gamma_{32t} \\ \gamma_{33t} \end{pmatrix}$$

La composición explícita del vector de estados de naturaleza sobre el que se harán inferencias estadísticas es:

$$h_t = (g_t \dots, g_{t-5} \ u_t, \dots, u_{t-5} \ v_{1t}^i \ v_{1t-1}^i \dots \ v_{4t}^i \ v_{4t-1}^i \ v_{1t}^n \ v_{1t-1}^n \dots \ v_{3t}^n \ v_{3t-1}^n)'$$

La matriz H tiene dimensión de 8×26 y F es una matriz cuadrada 26×26 .²⁴

²⁴ En el Anexo están explícitamente la dinámica para g_t , u_t y v_t y las matrices F y H para $t = 0$

Para que el FK converja eficientemente a la solución del problema y sea el filtro óptimo es necesario imponer unas condiciones iniciales correctas [Morrison & Pike, 1977]. Las condiciones iniciales fueron obtenidas al realizar dos estimaciones vía OLS. El cálculo para el factor g_t fue con los rendimientos del IPC como variable dependiente y como variables independientes los rendimientos de los índices internaciones y las acciones de la muestra más un intercepto. El supuesto para poder hacer este ejercicio es que el intercepto es la proporción del impacto de g_t sobre el IPC limpiando el impacto de los otros activos en g_t . Para imponer las condiciones iniciales de u_t se hizo una estimación $AR(2)$ para cada activo financiero; el valor asociado al parámetro del intercepto fue utilizado como factor idiosincrático inicial, asumiendo que cada activo sigue su propia dinámica y que ésta afecta a su vez la dinámica del IPC.

X. Análisis de Datos

Para justificar el supuesto del parámetro g_t es necesario verificar que el IPC, los índices y las acciones seleccionados comparten algún tipo tendencia conjunta, por lo que se hacen pruebas de cointegración sobre los índices y acciones respecto al IPC.

Para poder probar la hipótesis de cointegración es necesario que las series de tiempo sean estacionarias individualmente. El primer paso es cambiar los valores del índice y los precios de las acciones a retornos. Posteriormente usando medias móviles simples generar series estacionarias para hasta dos rezagos. La amplitud de la ventana para calcular las medias móviles varía según el índice y la acción. El objetivo es reducir el tamaño de la ventana lo más posible y así evitar perder información útil para la generación de pronósticos.²⁵

Para verificar estadísticamente si las series son estacionarias se implementó la prueba KPSS para estacionalidad. La prueba usa regresiones OLS con intercepto sobre la serie de tiempo. Si existe una tendencia, el intercepto es estadísticamente significativo. La prueba estadística es:

²⁵ En el anexo están todos los resultados derivados del estudio de cointegración realizados con la prueba estadística KPSS (rezagos, valor del estadístico, p-value).

$$stat = \frac{\sum_{t=1}^T (s(t))^2}{s_{nw}^2 T^2}$$

Donde $s(t) = r_1 + \dots + r_t$, r es el vector de residuos de la regresión; s_{nw}^2 es el estimador Newey-West para la varianza de largo plazo y T es el tamaño de la muestra. El orden de diferencia d para BOVESPA fue de 7, para FTSE 6, NASDAQ 5, NIKKEI 10, América Móvil 5, Walmex 6 y Banorte 6.

Una vez que se tienen las series estacionarias se prueba cointegración primero entre el IPC y los índices internacionales, posteriormente entre el IPC y las acciones del mercado local. Para verificar si existe cointegración entre las series se usa la prueba de Johansen que usa un modelo de Vectores Autoregresivos con restricciones. El modelo sobre el que se hacen las pruebas es $A(B'y_{t-1} + c_0) + c_1$. El modelo tiene intercepto y una tendencia lineal en los datos. Este es el modelo de cointegración determinística. El resultado de las pruebas es reportado en los Anexos, el resultado para las pruebas es que existe cointegración entre el IPC y todas las variables explicativas escogidas en el modelo.

XI. Programación

El entorno en el que se trabaja es MATLAB, el proceso de programación tiene dos partes importantes. La primera es la preparación de las series de datos para su uso en el Filtro de Kalman, la segunda es la implementación del FK.

El proceso con el que se preparan los datos para su implementación consta de 4 funciones: *relleno.m*, *estacionariedad.m*, *analisis_cointegracion.m*, *analisis_ar.m*, *ols_r.m*, *ols.m*.

Una vez con los datos de los índices y acciones, el primer paso fue asegurarse que las fechas y los datos coincidieran para todos los activos. Cuando no existían datos para la fecha especificada se generaba un dato de forma aleatoria usando la función *relleno.m*.

La siguiente fase fue generar series explicativas estacionarias, usando la función *estacionariedad.m*. Dentro de esta, el primer paso fue crear los rendimientos para todas las series y posteriormente suavizar las series con medias móviles ponderadas exponencialmente²⁶ hasta lograr que cada una fuera estacionaria para hasta dos rezagos.²⁷ Para la serie del IPC solamente se generaron los rendimientos. El siguiente paso fue verificar que el IPC y las demás series comparten un proceso estocástico común usando la función *analisis_cointegracion.m*. La prueba para cointegración de Johansen fue implementada para validar estadísticamente nuestra hipótesis. Siendo el resultado positivo para todas las series.

Antes de la implementación del Filtro de Kalman es necesario generar condiciones iniciales óptimas, con el fin de una convergencia eficiente. Los parámetros fueron tomados a partir de los resultados de generar procesos $AR(2)$ para todas las series explicativas, un $AR(6)$ para el IPC y por último 6 modelos distintos de Mínimos Cuadrados Ordinarios (*OLS*):

$$IPC_t = \beta_0 + \beta_{11}I_{1,t-i} + \beta_{12}I_{2,t-i} + \beta_{13}I_{3,t-i} + \beta_{14}I_{4,t-i} + \beta_{21}A_{1,t-i} + \beta_{22}A_{2,t-i} + \beta_{23}A_{3,t-i} + \varepsilon_t$$

Con $i = 1, 2, \dots, 6$

Para lo anterior fueron utilizadas las funciones *analisis_ar.m*, *ols_r.m*, *ols.m*. Las condiciones iniciales son divididas en 5 subgrupos:

- Factor Común: Parámetros del *OLS* sin rezagos en las variables explicativas
- Factores Idiosincráticos: La constante obtenida al calcular el *AR* para cada activo financiero.
- Rezagos del factor común: Interceptos de cada *OLS* con rezagos en las variables explicativas.
- Factor idiosincrático rezagado: Parámetros del $AR(6)$ sobre el IPC
- Parámetros autoregresivos: Los parámetros obtenidos en los procesos $AR(2)$ de cada serie.

²⁶ Este método pondera más las observaciones recientes que las pasadas, ajustando mejor que otros métodos para este análisis.

²⁷ El tamaño para suavizar las series varía para cada una.

Una vez que se tienen series de tiempo estacionarias, estadísticamente cointegradas y las condiciones iniciales es posible implementar el Filtro de Kalman. La implementación consta de 5 funciones: *desde_archivo.m*, *impresion.m*, *pronosticos.m*, *Homework_Escenarios.m*, *standard.m*, *matrices.m*, *ofn.m*.

La función *impresion.m* genera la matriz de datos con la que se estimará el Filtro de Kalman. La primera matriz generada tiene dimensión de 8×9 , y va aumentando el número de renglones en uno hasta alcanzar el tamaño final de la muestra (319 si el filtro se hace para el periodo 2008-2013, 163 para el periodo 2008-2010 o 174 para el periodo 2011-2013). Esta función tiene como fin generar un pronóstico para cada semana dentro del periodo muestral, así como almacenar los pronósticos en una matriz. La función *pronosticos.m* llama a la matriz generada en *impresion.m* y la manda a *Homework_Escenarios.m* para obtener el vector con el pronóstico y las aproximaciones al valor de cada variable explicativa.

En la función *Homework_Escenarios.m* los datos son procesados para obtener el pronóstico. El primer paso es estandarizar todas las entradas de la matriz de variables explicativas; posteriormente se declara el vector con los valores iniciales, que son el punto de partida para el proceso de iteración del FK. La estimación de los parámetros se hace con máxima verosimilitud; minimizando la diferencia cuadrática del pronóstico generado y el dato real. Para generar el proceso de optimación, se llama a la función *ofn.m*.

En la función *ofn.m* son generadas las matrices $h_{t|t-1}$, $P_{t|t-1}$, $\eta_{t|t-1}$, $\zeta_{t|t-1}$, $h_{t|t}$, $P_{t|t}$, K_t^* , $\eta_{t|t-1}$. Como insumos esta función necesita las matrices F, H, Q y R. La función que las genera es *matrices.m*. El proceso de iteración funciona de la siguiente forma: Los valores iniciales son llamados a la función *matrices.m* para generar F, H, Q y R. Con estas matrices se intenta replicar el modelo del IPC hasta el tiempo t. El siguiente paso es generar el pronóstico para $t+1$.

XII. Resultados

Para validar la eficiencia del FK, los pronósticos obtenidos con el FK son comparados con pronósticos generados a través de dos procesos ARIMA – (2,6,2) y (6,6,6) –. Los pronósticos generados a través del FK siguieron dos procesos distintos de acuerdo a las condiciones iniciales impuestas y el tamaño de la base de datos. Si las condiciones iniciales son cercanas a cero (Condiciones Iniciales Restringidas), la vecindad en la que el FK se optimiza es más pequeña. Entre más grande sea el valor de las condiciones iniciales (Condiciones Iniciales Aleatorias), la vecindad en la que el FK optimiza los pronósticos es más grande, lo que es de gran utilidad en periodos de alta volatilidad (2008-2009).

Para que el rendimiento del FK sea óptimo es necesaria una base de datos lo suficientemente grande que le permita a al filtro converger eficientemente a los valores reales, es decir que entre mayor sea la información disponible, mayor eficiencia en los pronósticos. La primera base de datos utilizada para generar pronósticos comprendía el periodo 2008-2013. Cuando las bases de datos que se manejan son grandes y con alta volatilidad en los datos, algunos pronósticos pueden divergir tanto que el proceso de filtrado no es capaz de ponderar correctamente las desviaciones entre los pronósticos y los resultados reales disminuyendo ampliamente la eficiencia del Filtro de Kalman. Para contrarrestar este problema fueron usadas dos bases de datos con la misma longitud temporal. La primera abarcó los años 2008-2010, la segunda los años 2011-2013.

El siguiente paso es evaluar la eficiencia de los pronósticos obtenidos con el FK (con CI Aleatorias y Restringidas). Un primer ejercicio es hacer una inspección visual.²⁸ La *Figura 1* muestra los pronósticos obtenidos con el FK con CI aleatorias contra del Comportamiento del IPC con bandas de dos desviaciones estándar respecto al valor del IPC_t . En la *Figura 2* la gráfica contiene al FK con CI Restringidas contra el IPC_t . La *Figura 3* y *4* muestran los pronósticos obtenidos mediante los proceso *ARIMA* (2,6,2) y *ARIMA* (6,6,6) respectivamente.

²⁸ El orden de l en los procesos *ARIMA* es 6.

Figura XII.1

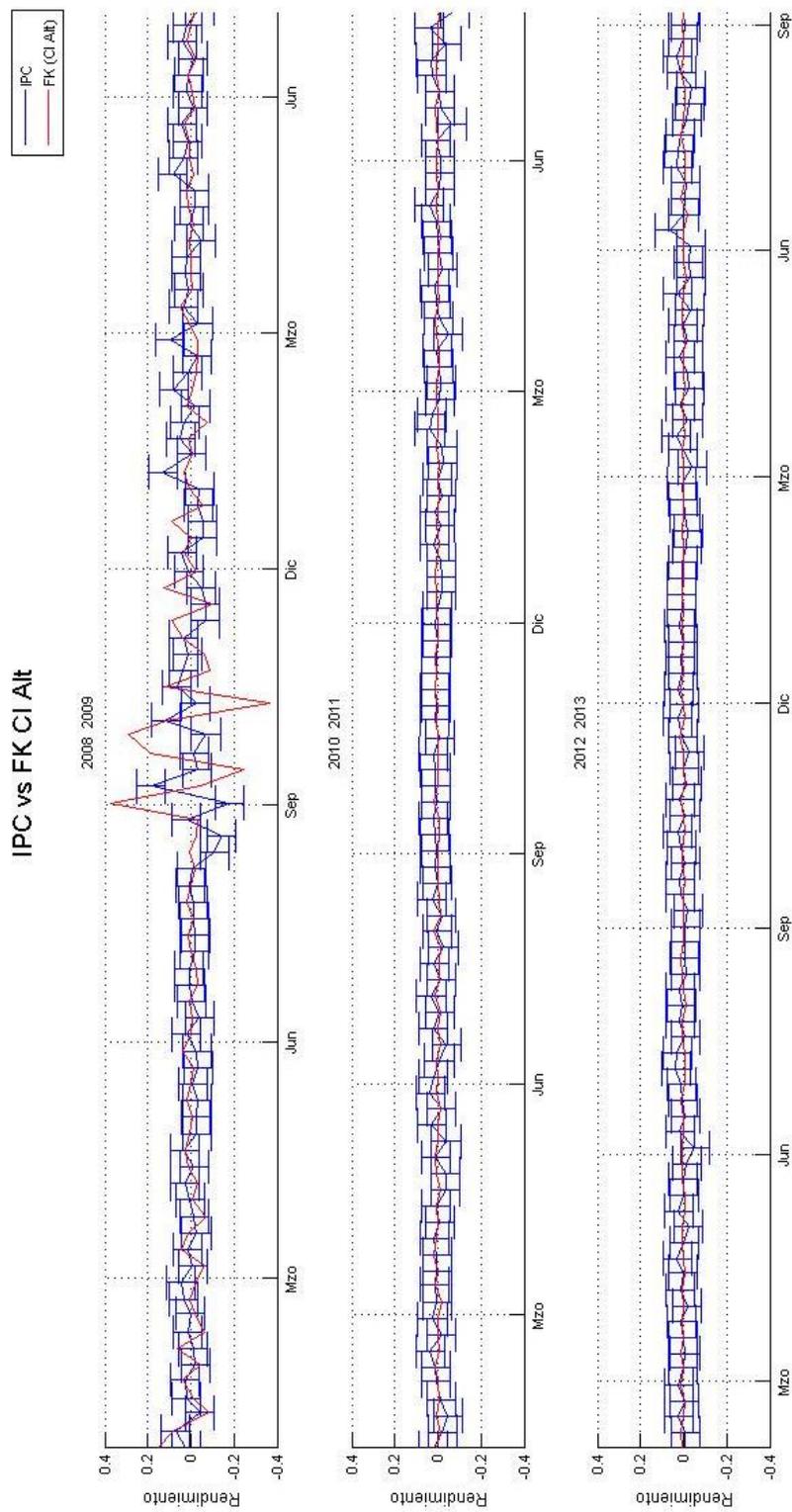


Figura XII.2

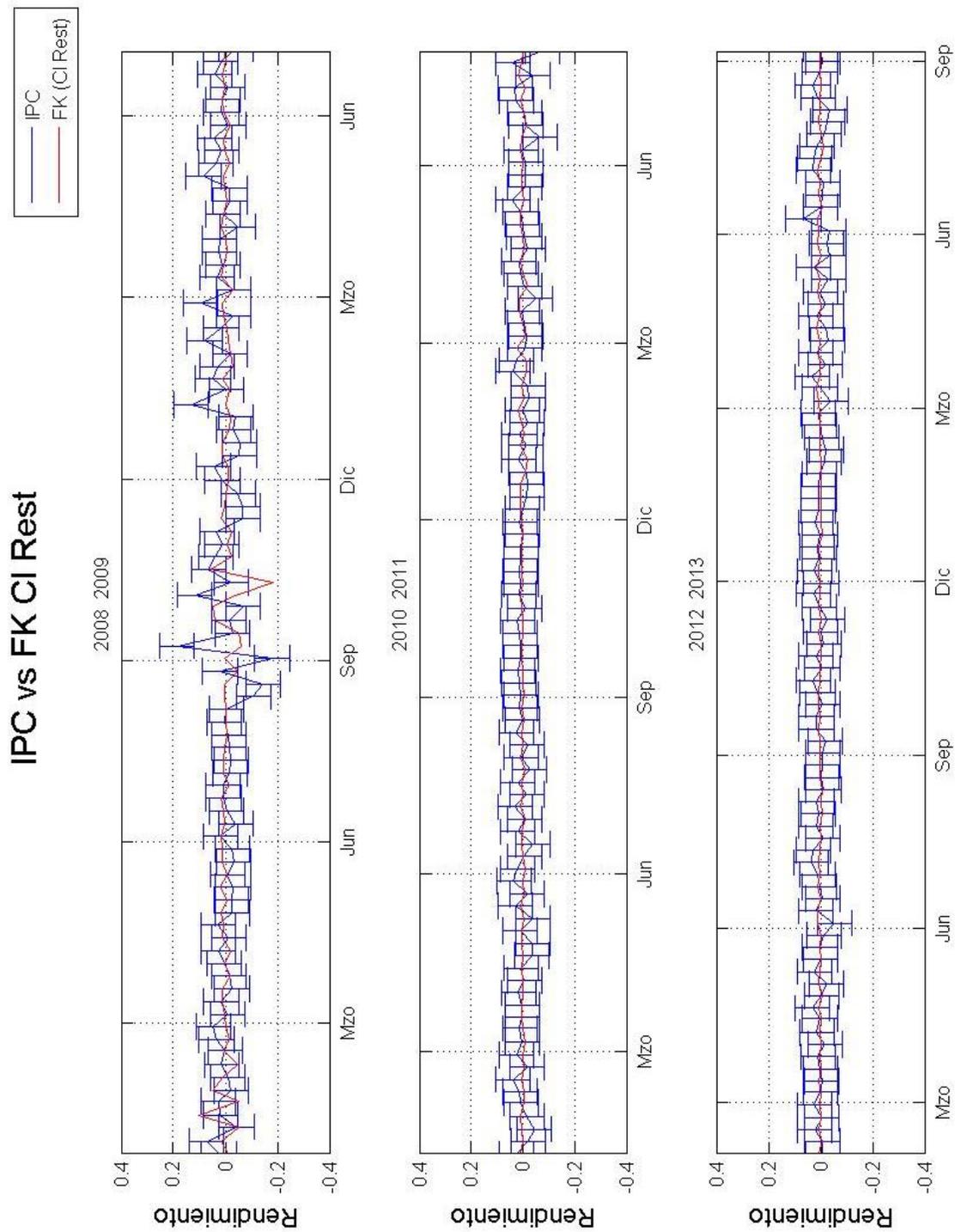


Figura XII.3

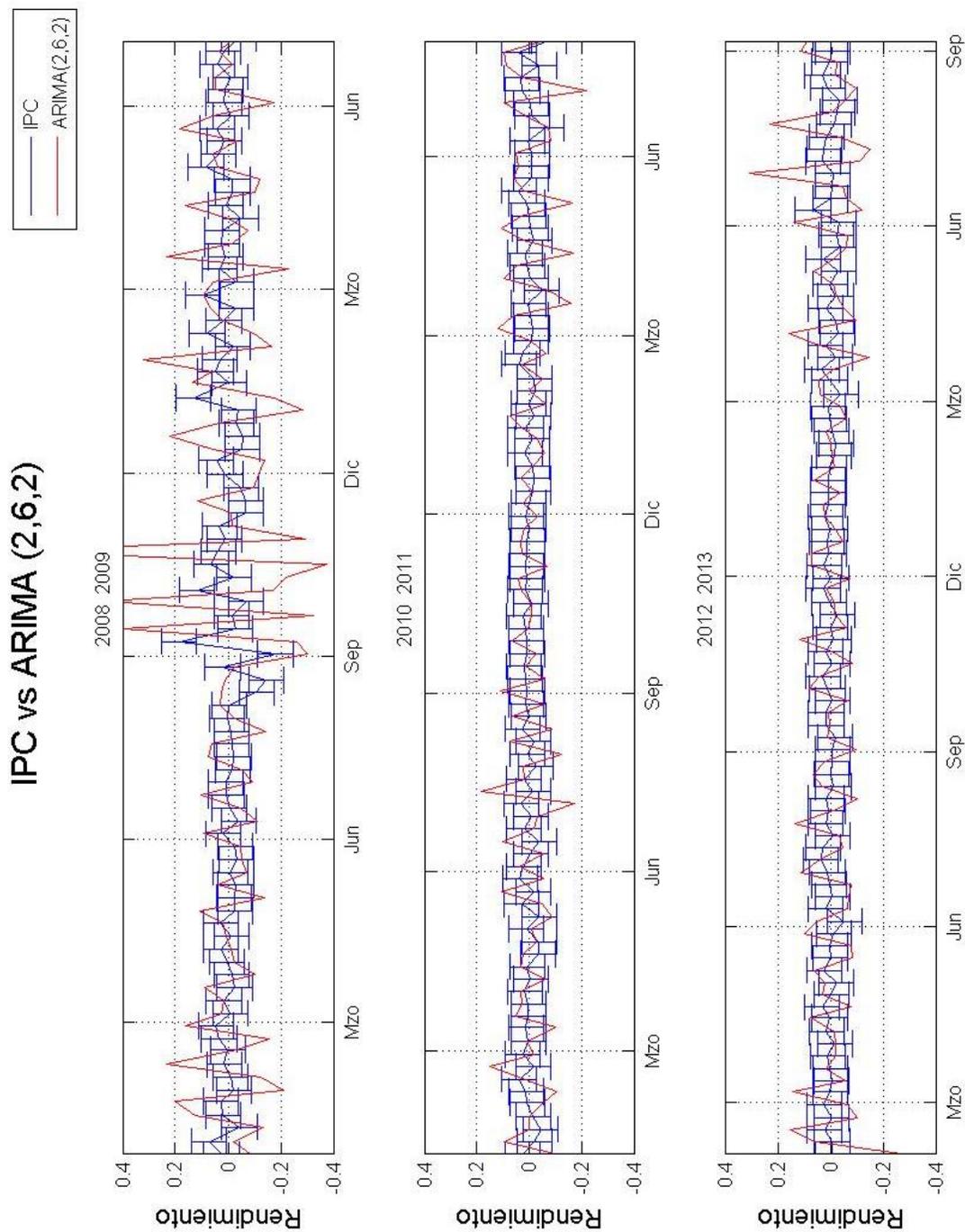
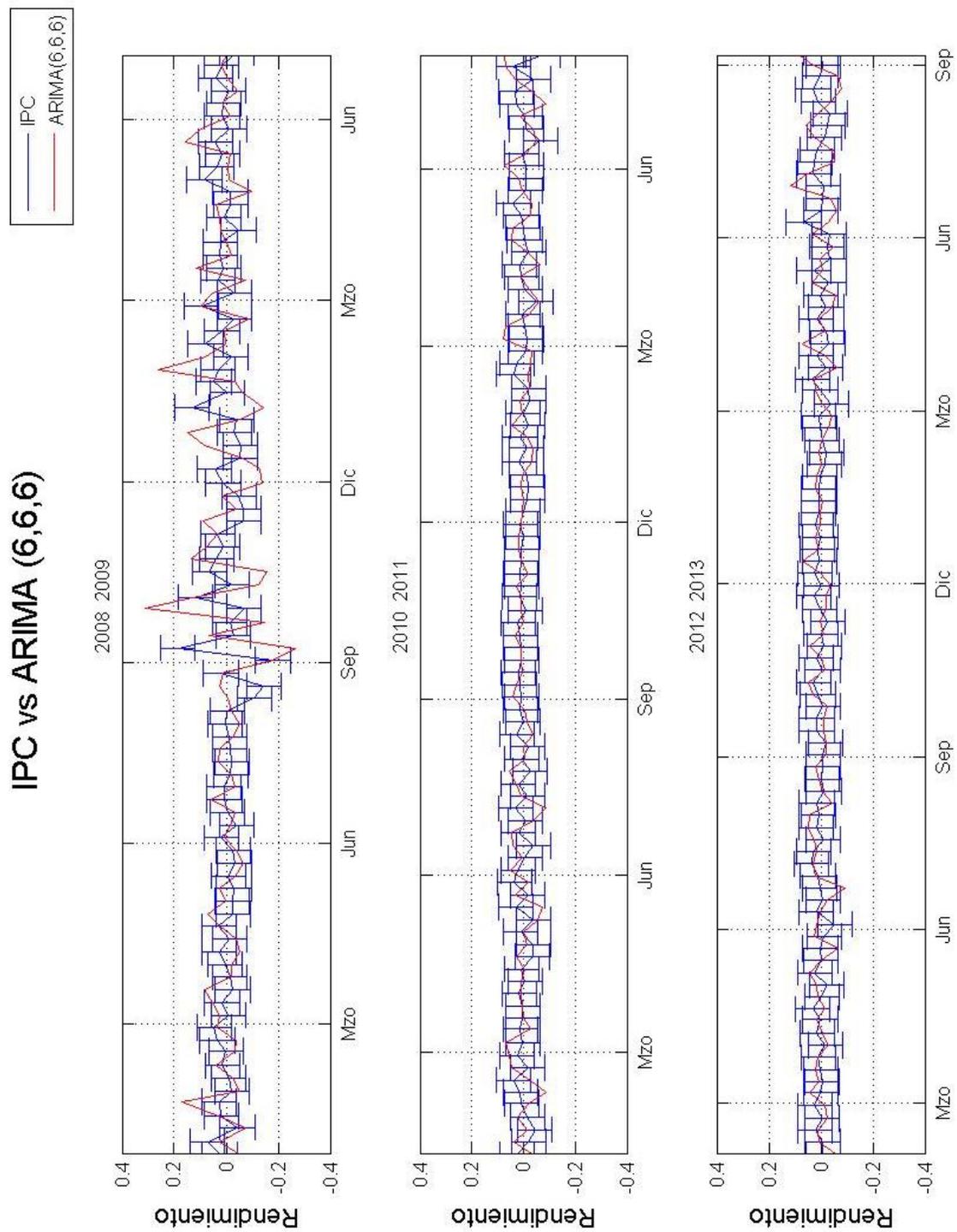


Figura XII.4



Con las gráficas anteriores es posible observar que los pronósticos obtenidos con el FK están en general dentro de la vecindad de dos desviaciones estándar. Esxcepto en periodos de alta volatilidad del IPC (2008). Los pronósticos con CI aleatorias son menos eficientes en pediodos de mayor volatilidad en comparación a los generados con CI restringidas. Cuando el IPC se comporta de forma estable, el comportamiento de los pronósticos obtenidos con el FK son bastante aceptables.

Por otro lado, analizando las gráficas con los procesos *ARIMA* se puede observar que la volatilidad de los pronósticos es mayor, especialmente con el proceso (2,6,2). Con el proceso (6,6,6) los pronósticos son más estables, aunque en periodos de alta volatilidad son muy imprecisos, incluso hay ocasiones en periodos de estabilidad en donde los pronósticos salen de la vecindad de dos desviaciones estándar.

De las gráficas es posible inferir que la eficiencia de los pronósticos obtenidos con el FK es mayor que aquéllos obtenidos por procesos *ARIMA*. Para reforzar lo anterior el primer paso es evaluar si los pronósticos son estadísticamente distintos, para lo anterior se usa la prueba Diebold-Mariano con un nivel de confianza de 95%.²⁹ Los resultados obtenidos permiten afirmar, dada la muestra de pronósticos, que los resultados entre los distintos modelos son estadísticamente distintos, con algunas excepciones. Éstas se encuentran primordialmente en el 2008, periodo de alta volatilidad. El siguiente paso fue evaluar la eficiencia de los distintos pronósticos y así tener más herramientas para seleccionar el modelo más poderoso.

Para evaluar el nivel de eficiencia de los pronósticos, los resultados fueron comparados con las medidas: MAE (Mean Absolute Error), MSE (Mean Squared Error), RMSE (Root Mean Squared Error), MAPE (Mean Absolute Percentage Error), MSPE (Mean Squared Percentage Error), RMSPE (Root Mean Squared Percentage Error).³⁰ Las comparaciones se hicieron para todo el periodo que comprende del 2008 al 2013, así como por año.

²⁹ En el Anexo hay se adjunta una explicación detallada de esta prueba.

³⁰ El Anexo c contiene descripciones detalladas de los métodos usados para evaluar la eficiencia de los pronósticos.

La necesidad de usar varios tipos de medida para evaluar los errores reside en las limitaciones que presentan de forma individual. Por ejemplo, sensibilidad a variaciones en la base de datos, validez de construcción, confianza en la medida, protección a datos atípicos [Asmstrong & Collopy, 1992]. A continuación son descritos los resultados obtenidos con las medidas MAE, RMSE y MAPE (que son de las medidas más utilizadas en la literatura).

Para el coeficiente MAE, los resultados son mixtos. Para el periodo 2008-2013 el modelo que arroja los mejores valores es el FK con CI restringidas, así como en la mayoría de los años. En los años 2010, 2011 y 2013 (los años con varianza del IPC menor) el modelo FK con CI aleatorias arrojó los valores más bajos de este coeficiente. Los modelos *ARIMA* siempre obtuvieron un valor más alto que los modelos de FK. El comportamiento anteriormente descrito es el mismo para el coeficiente RMSE.

Tabla XII.1

MAE	FK(CI A)	FK(CI R)	ARIMA(2,6,2)	ARIMA (666)	Var IPC	MIN
2008-2013	0.0306	0.0256	0.0901	0.0467	0.0011	FK(CI R)
2008	0.0738	0.0489	0.1452	0.0649	0.0030	FK(CI R)
2009	0.0428	0.0354	0.1210	0.0706	0.0018	FK(CI R)
2010	0.0150	0.0154	0.0611	0.0320	0.0004	FK(CI A)
2011	0.0226	0.0246	0.0810	0.0474	0.0008	FK(CI A)
2012	0.0148	0.0130	0.0628	0.0264	0.0003	FK(CI R)
2013	0.0170	0.0177	0.0735	0.0406	0.0005	FK(CI A)

Para el coeficiente MAPE los pronósticos obtenidos con el FK con CI restringidas, para el periodo 2008-2013 arrojan un valor casi 10 veces menor a los valores arrojados por los modelos *ARIMA*, con respecto al FK con CI aleatorias el valor es de poco menos de la mitad. Cuando el análisis es por año, las proporciones descritas anteriormente se siguen manteniendo. Los pronósticos generados por el FK con CI restringidas siempre arrojan el valor más bajo cuando se mide la eficiencia con el coeficiente MAPE, es decir el pronóstico con este modelo siempre es más eficiente en comparación con los otros. La situación descrita anteriormente se sigue cumpliendo para las medidas MSPE y RMSPE.

Tabla XII.2

MAPE	FK(CI A)	FK(CI R)	ARIMA(2,6,2)	ARIMA (666)	Var IPC	MIN
2008-2013	1223	550	4925	4470	0.0011	FK(CI R)
2008	332	167	698	356	0.0030	FK(CI R)
2009	183	147	862	374	0.0018	FK(CI R)
2010	100	99	577	248	0.0004	FK(CI R)
2011	225	205	1705	802	0.0008	FK(CI R)
2012	143	128	1241	462	0.0003	FK(CI R)
2013	6362	2556	24462	24582	0.0005	FK(CI R)

Dado los resultados obtenidos con los coeficientes para medir la eficiencia de los pronósticos es posible asegurar que el modelo de FK es más eficiente que los modelos *ARIMA*. Dentro de los dos FK estimados para este trabajo, aquél que tiene condiciones iniciales restringidas generalmente arroja pronósticos más eficientes que el modelo con CI aleatorias. Lo anterior remarca la importancia de plantear adecuadamente el problema a resolver.

XIII. Conclusiones

El uso de tecnologías de información es cada vez más intensivo en las ciencias sociales, en particular en finanzas. Por lo anterior es necesario desarrollar a nivel teórico e implementar empíricamente herramientas con la capacidad de aprovechar el potencial que algunas tecnologías computacionales ponen en la mesa. El Filtro de Kalman es una herramienta que encaja con el perfil anteriormente descrito. A nivel teórico es un algoritmo que permite generar pronósticos de un sistema dinámico ponderado por los errores de pronósticos pasados. A nivel empírico, de acuerdo a literatura académica descrita anteriormente, el FK tiene la capacidad de arrojar pronósticos más eficientes que otros tipos de métodos; en el caso particular de finanzas modelos como *GARCH*, *ARIMA*, *OLS*.

Sin embargo es necesario atender los detalles de implementación del FK. La construcción de las matrices de covarianzas W_t y V_t , así como las Condiciones Iniciales para los parámetros en la matriz H_t . El pasarlo por alto lleva inequívocamente a una disminución en la eficiencia de los pronósticos, así como un aumento en el tiempo de

procesamiento de datos. En el caso de este trabajo, al generar Matrices de Covarianzas como si fueran de un *OLS*, la minimización de los errores en MATLAB convergía a soluciones más eficientes y rápidas. Cuando las condiciones iniciales se generaron como parámetros de regresiones los resultados fueron más eficientes, en comparación con la implementación del FK con Condiciones Iniciales impuestas de forma aleatoria.

Cuando los pronósticos obtenidos por FK y *ARIMA* son comparados usando distintos métodos para evaluar residuos de pronósticos, los obtenidos por medio del FK siempre resultan ser más eficientes que los obtenidos con otros métodos. En particular, usando Condiciones Iniciales restringidas. Por lo que es posible afirmar que dada la muestra de los años en estudio y la modelación impuesta a la dinámica del IPC que el FK arroja pronósticos más eficientes, tanto en periodos de alta volatilidad como de estabilidad.

Dado que el Filtro de Kalman ha probado ser un modelo más eficiente para realizar pronósticos, al menos en este trabajo, una probable línea de investigación sería implementar un programa en MATLAB con procesos *ARIMA* en la ecuación que describe la dinámica del sistema. Otra posible mejora sería generar un programa en el que las matrices de covarianzas W_t y V_t fueran generadas para cada periodo y no estimadas solamente para toda la muestra del estudio.

XIV. Bibliografía

- Armstrong J. Scott & Fred Collopy, *International Journal of Forecasting*, 1992, 8. Pp. 69-80.
- Graham Elliot & Allan Timmerman, *Economic Forecasting, Journal of Economic Literature*, 2008, Vol 46, No 2. Pp. 3-56.
- Camacho Máximo & Gabriel Perez-Quiroz, *Introducing The Euro-Sting: Short-Term Indicator of Euro Area Growth, Journal Of Applied Econometrics*, 2010, Vol. 25, pp. 663-694.
- Fama Eugene F., *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, *Papers and Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the American Finance Association New York, N.Y. December, 28-30, 1969 (May, 1970)*, pp. 383-417.
- Greene William H., *Análisis Econométrico* (Nueva York, Pearson, 1999).
- Grewal Mohinder S. & Angs P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab* (Estados Unidos de América, Nueva York, Wiley-Interscience Publication, 2001).
- Hamilton James D., *Time Series Analysis* (Princeton: Princeton University Press, 1994).
- Hernández Trillo Fausto & Alejandro Villagómez Amezcua, *El Enigmático Sistema Bancario Mexicano Contemporáneo* (México D.F, Centro de Estudios Espinosa Yglesias, 2012).
- Marichal Carlos, *Nueva Historia de Las Grandes Crisis Financieras. Una perspectiva Global, 1873-2008*. (México D.F, Debate, 2010).
- Meinhold Richard J. & Nozer D. Singpurwalla, *Understanding the Kalman Filter, The American Statistician*, Vol. 37, No. 2, Mayo 1993. Pp. 123-127.
- Mergner Sascha & Jan Bulla, *Time-varying Beta Risk of Pan-European Industry Portafolios: A Comparison of Alternative Modeling Techniques, The European Journal of Finance*, Vol. 14, No. 8, Nov 2008. Pp. 771-802.

- Morrison G. W. & D.H. Pike, Kalman Filtering Applied To Statitcal Forecasting, Management Science, Vol 23, No. 7, Marzo 1997. Pp. 768-774.
- Mosirian Fariborz, Financial services in an increasingly integrated global financial market, Journal of Banking & Finance. Marzo 2008. Num 32. Pp. 2288 – 2292.
- Ordorica Manuel, El Filtro de Kalman en la planeación demográfica, Tesis Doctoral, México, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, 1995.
- Poon Ser-Huang & Clive W. Granger, Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review, Journal of Economic Literature, Vol. XLI, Junio 2003. Pp. 478-539.
- Stoll Hans R., Electronic Trading in Stock Markets, Journal of Economic Perspectives, Vol. 20, Number 1, Winter 2006. Pp. 153-174.
- Taufiq Choudhry & Hao Wu, Time-Varyng Beta and Forecasting UK Company Stock Returns: GARCH Models vs Kalman Filter Method, Journal of Forecasting, Vol. 27, Septiembre 2008. Pp. 670-689.
- Villagómez Alejandro, La primera Gran Crisis del Siglo XXI (México D.F., Tusquets Editores, 2011).

XV.2 Resultados de Estacionalidad de Series

Resultados para Prueba Kwiatkowski, Phillips, Schmidt & Shin (KPSS)

Índices

	Lags	P-value	Stats
Bovespa	0	0.010	0.274
	1	0.021	0.188
	2	0.047	0.150
	3	0.075	0.133
NASDAQ	0	0.010	0.390
	1	0.010	0.223
	2	0.035	0.164
	3	0.071	0.135

	Lags	P-value	Stats
FTSE	0	0.010	0.339
	1	0.014	0.205
	2	0.043	0.155
	3	0.078	0.131
NIKKEI	0	0.010	0.368
	1	0.012	0.211
	2	0.043	0.154
	3	0.086	0.127

Acciones

	Lags	P-value	Stats
America Móvil	0	0.010	0.238
	1	0.022	0.185
	2	0.042	0.156
	3	0.063	0.139
Banorte	0	0.010	0.302
	1	0.017	0.197
	2	0.040	0.158
	3	0.058	0.141

	Lags	P-value	Stats
WALMEX	0	0.010	0.341
	1	0.014	0.206
	2	0.041	0.157
	3	0.077	0.131

XV. 3 Resultados de Cointegración

XV.3.a Prueba de Cointegración de Johansen

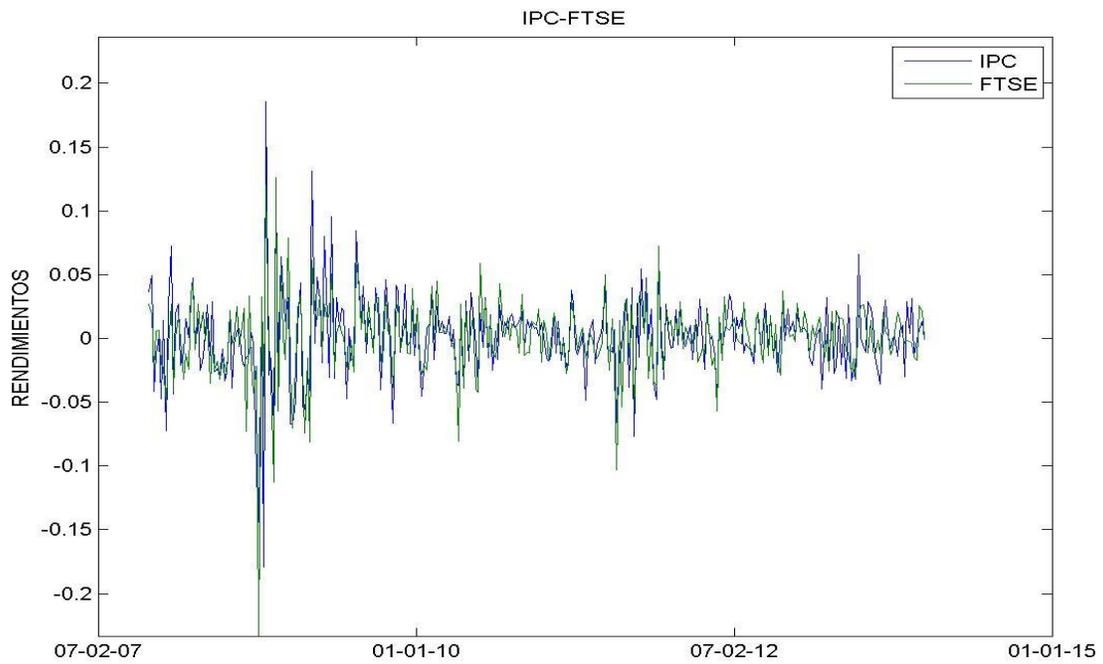
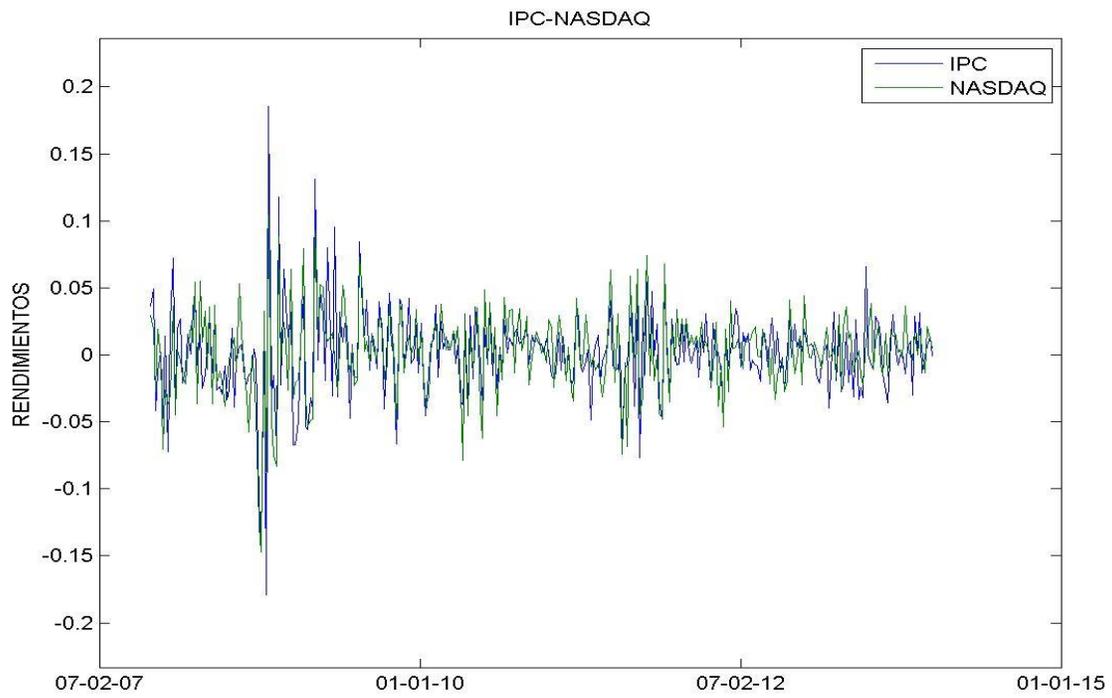
Índices

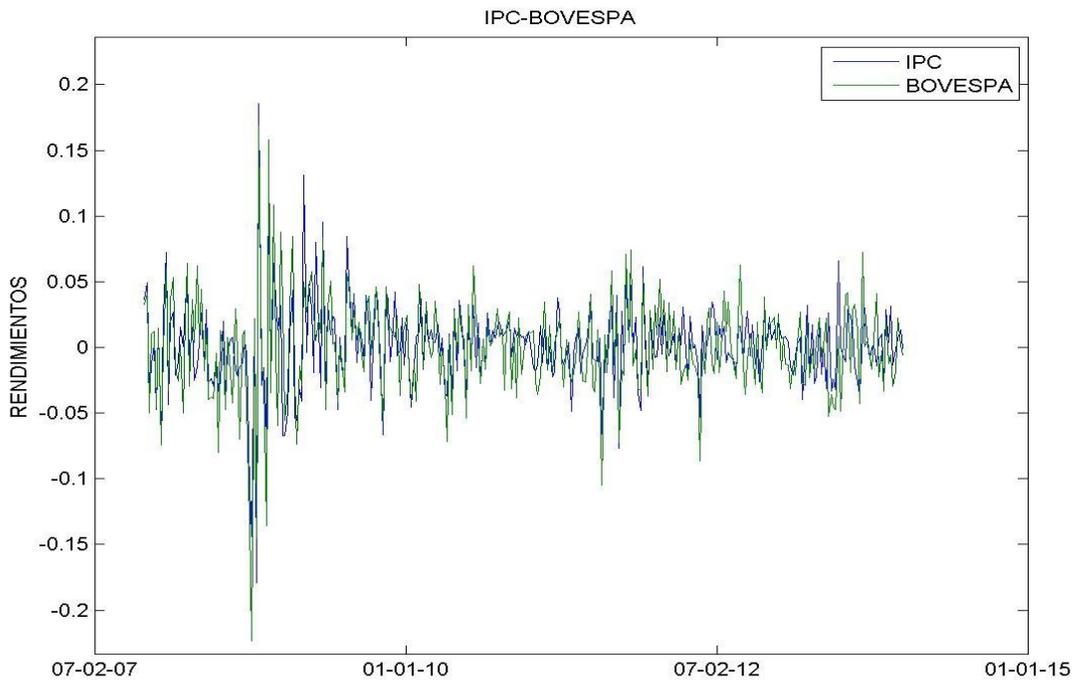
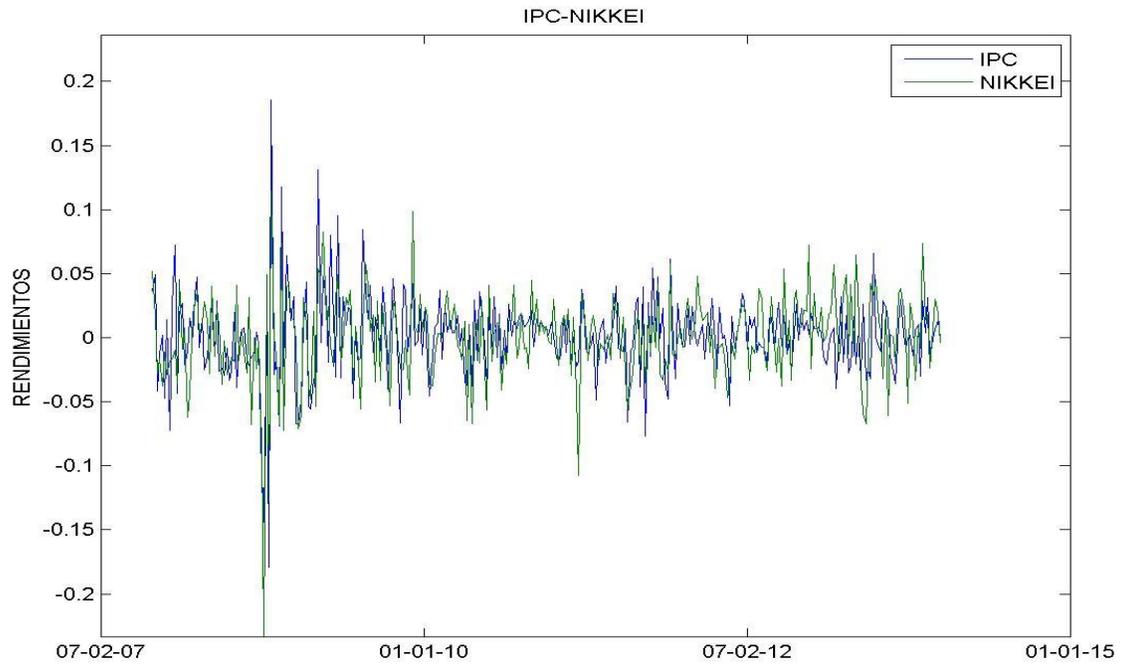
r	h	Stat	cValue	pValue	eigValue
0	1	1304.4	69.8187	0.001	0.637
1	1	982.1	47.8564	0.001	0.6135
2	1	679.9	29.7976	0.001	0.5438
3	1	430.3	15.4948	0.001	0.5243
4	1	194	3.8415	0.001	0.4568

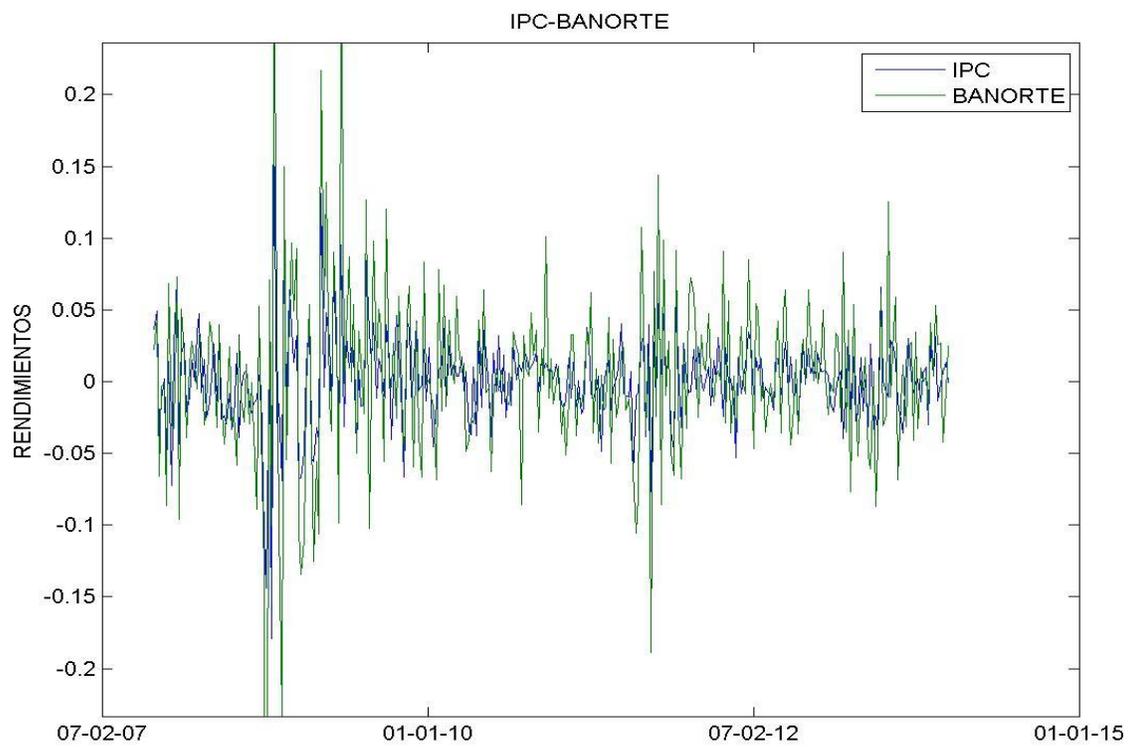
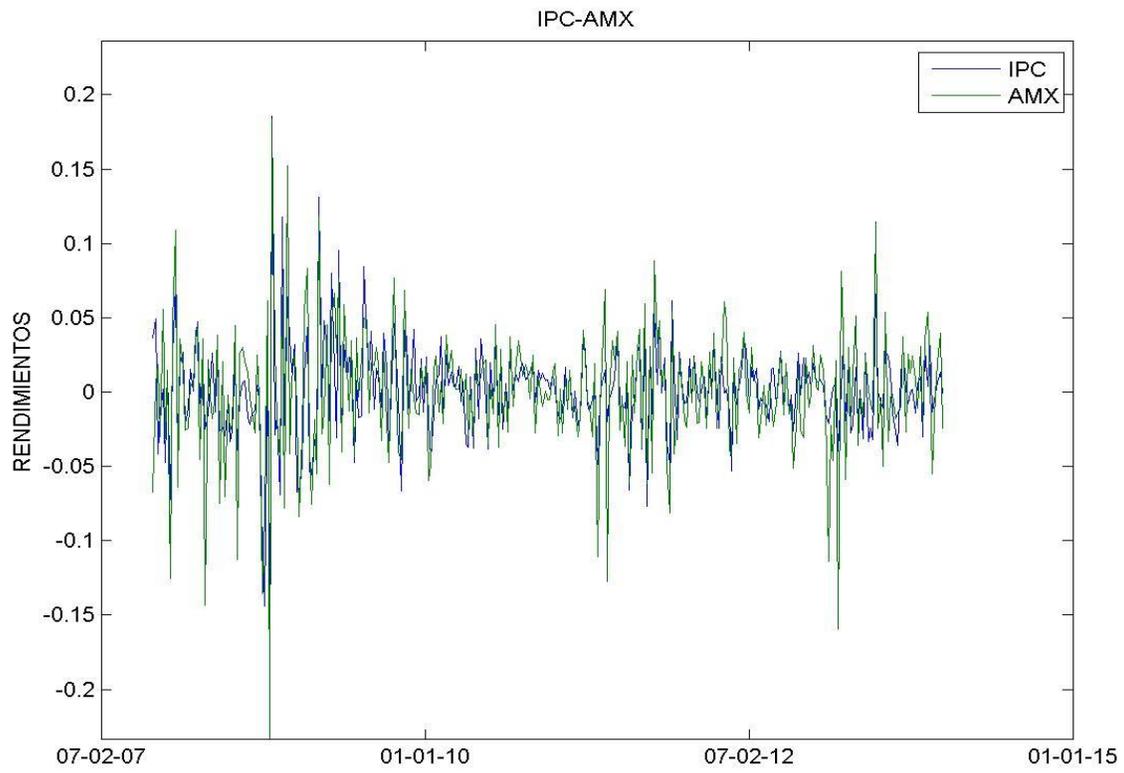
Acciones

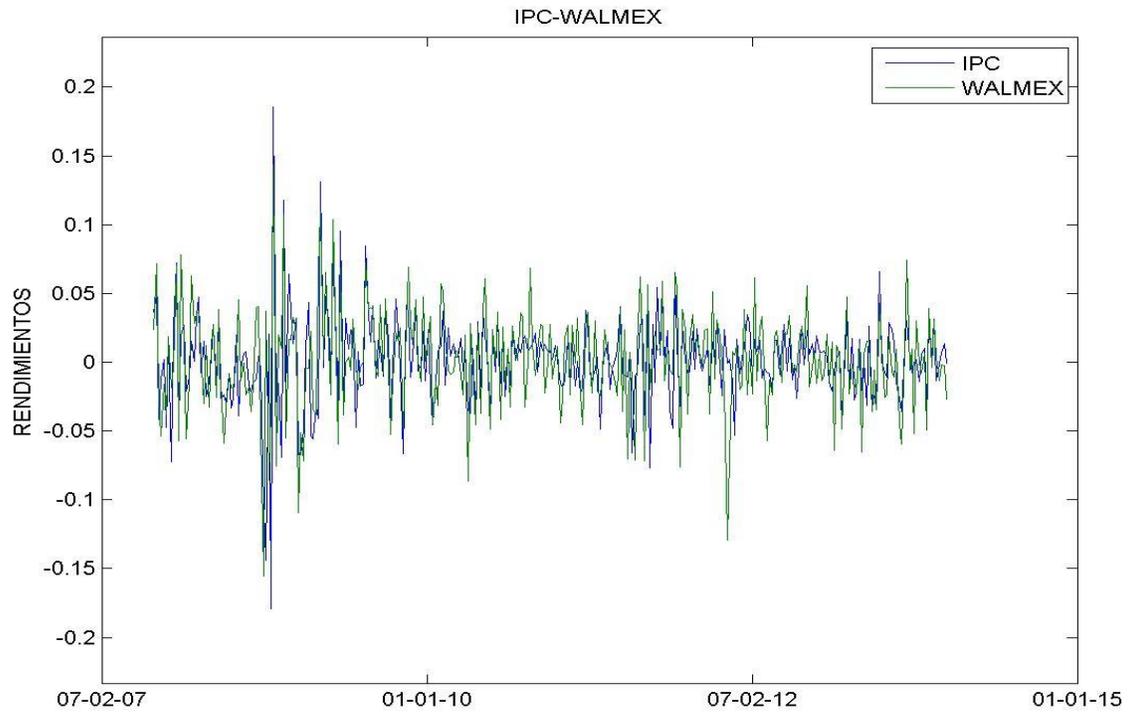
r	h	Stat	cValue	pValue	eigValue
0	1	1162.8559	47.8564	0.001	0.6558
1	1	823.657	29.7976	0.001	0.6175
2	1	518.0182	15.4948	0.001	0.6046
3	1	222.9825	3.8415	0.001	0.504

XV.3.b Gráficas Comportamiento IPC vs Índices y Acciones









XV.4 Prueba Diebold-Mariano³¹

La Prueba fue diseñada para comparar pronósticos sofisticados contra pronósticos “sencillos”. La hipótesis nula es que la diferencia del error cuadrado es cero. Esta prueba asume que la precisión es básicamente medida por: $Eg(x_t - \hat{x}_{t-1}(1))$ y $Eg(x_t - \tilde{x}_{t-1}(1))$ para dos pronósticos distintos \hat{x} y \tilde{x} y funciones de pérdida $g(\cdot)$. Bajo la hipótesis que la diferencia es cero, puede probarse que la prueba estadística

$$S_1 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{m^{-1} * 2\pi * \hat{f}_d(0)}}$$

Converge una distribución normal estándar cuando $m \rightarrow \infty$. Donde \bar{d} es promedio de la muestra de $d_t = g(x_t - \hat{x}_{t-1}(1)) - g(x_t - \tilde{x}_{t-1}(1))$. $\hat{f}_d(0)$ es un factor de escala definido como la densidad espectral calculada de d_t en la frecuencia 0. Una definición operable para $\hat{f}_d(0)$ es:

$$\hat{f}_d(0) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=m+1}^{m-1} w(k, m) \widehat{\gamma}_d(k)$$

Donde $\widehat{\gamma}_d(k)$ es la autocovarianza de la muestra en el retraso k y $w(\cdot)$ es un peso tipo kernel de la función que obedece ciertas condiciones de consistencia, tal como $w(k, m) \rightarrow 1$ para un k fijo y un $m \rightarrow \infty$

XV.4. a Resultados Pruebas Diebold-Mariano

Pronóstico/Años	2008-2013	2008	2009	2010	2011	2012	2013
FK(CI A) vs FK(CI R)	1.9631	1.8082	1.8344	-0.0431	-2.7364	1.9091	-0.2355
FK(CI A) vs ARIMA(2,6,2)	-4.9495	-1.8852	-4.9916	-4.4968	-4.8821	-3.7816	-3.7527
FK(CI A) vs ARIMA (666)	-1.0616	0.6461	-2.7132	-3.6284	-4.0220	-3.2665	-4.4567
FK(CI R) vs ARIMA (2,6,2)	-5.7885	-2.7101	-5.5348	-4.5246	-4.7318	-3.8322	-3.7391
FK(CI R) vs ARIMA 666	-4.4317	-1.5679	-3.7881	-3.6611	-3.6484	-3.6155	-4.4225
ARIMA(2,6,2) vs ARIMA(6,6,6)	4.9524	2.4634	4.3550	3.9060	3.9759	3.3960	3.2360

³¹ Robert Kunst, homepage.univie.ac.at/robert.kunst/prognos7.pdf

XV.5 Medidas para evaluar eficiencia de Pronósticos

MAE (Mean Absolute Error):

$$\frac{\sum |(\text{Valor Observado} - \text{Pronóstico})|}{N}$$

MSE (Mean Squares Error)³²:

$$MSE = \frac{\sum (\text{Valor Observado} - \text{Pronóstico})^2}{N}$$

RMSE (Root Mean Square Error)³³: Raíz Cuadrada del MSE

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (\text{Valor Observado} - \text{Pronóstico})^2}{N}}$$

MAPE (Mean Absolute Percentage Error)³⁴:

$$MAPE = \frac{\sum |PE|}{N}$$

Definido $PE = \left(\frac{\text{Valor Observado} - \text{Pronóstico}}{\text{Valor Observado}} \right) * 100$

MSPE (Mean Square Percentage Error)³⁵:

$$MSPE = \frac{\sum PE^2}{N}$$

RMSPE (Root Mean Square Percentage Error) :³⁶

³² Mark Chockalingam, demandplanning.net/documents/dmdaccuracywebVersions.pdf

³³ *Ídem*

³⁴ Swanson A. David, Jeff Tayman & T. M. Bryan, cssd.ucr.edu/Papers-PDFs/MAPE-R%20EMPIRICAL%20V24%20Swanson%20Tayman%20Bryan.pdf

³⁵ *Ídem*

³⁶ *Ídem*

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum PE^2}{N}}$$

XV.5.a Resultados Medidas de Eficiencia

MAE	FK(CI A)	FK(CI R)	ARIMA(2,6,2)	ARIMA (666)	Var IPC	MIN
2008-2013	0.0306	0.0256	0.0901	0.0467	0.0011	FK(CI R)
2008	0.0738	0.0489	0.1452	0.0649	0.0030	FK(CI R)
2009	0.0428	0.0354	0.1210	0.0706	0.0018	FK(CI R)
2010	0.0150	0.0154	0.0611	0.0320	0.0004	FK(CI A)
2011	0.0226	0.0246	0.0810	0.0474	0.0008	FK(CI A)
2012	0.0148	0.0130	0.0628	0.0264	0.0003	FK(CI R)
2013	0.0170	0.0177	0.0735	0.0406	0.0005	FK(CI A)

MSE	FK(CI A)	FK(CI R)	ARIMA(2,6,2)	ARIMA (666)	Var IPC	MIN
2008-2013	0.0035	0.0015	0.0165	0.0048	0.0011	FK(CI R)
2008	0.0162	0.0051	0.0451	0.0115	0.0030	FK(CI R)
2009	0.0035	0.0020	0.0229	0.0087	0.0018	FK(CI R)
2010	0.0004	0.0004	0.0063	0.0018	0.0004	FK(CI A)
2011	0.0008	0.0010	0.0109	0.0036	0.0008	FK(CI A)
2012	0.0003	0.0003	0.0062	0.0011	0.0003	FK(CI R)
2013	0.0005	0.0005	0.0095	0.0025	0.0005	FK(CI A)

RMSE	FK(CI A)	FK(CI R)	ARIMA(2,6,2)	ARIMA (666)	Var IPC	MIN
2008-2013	0.0592	0.0390	0.1286	0.0693	0.0011	FK(CI R)
2008	0.1274	0.0715	0.2123	0.1073	0.0030	FK(CI R)
2009	0.0589	0.0453	0.1513	0.0931	0.0018	FK(CI R)
2010	0.0192	0.0192	0.0791	0.0425	0.0004	FK(CI A)
2011	0.0282	0.0322	0.1045	0.0604	0.0008	FK(CI A)
2012	0.0183	0.0167	0.0791	0.0333	0.0003	FK(CI R)
2013	0.0215	0.0218	0.0973	0.0499	0.0005	FK(CI A)

MAPE	FK(CI A)	FK(CI R)	ARIMA(2,6,2)	ARIMA (666)	Var IPC	MIN
2008-2013	1223	550	4925	4470	0.0011	FK(CI R)
2008	332	167	698	356	0.0030	FK(CI R)
2009	183	147	862	374	0.0018	FK(CI R)
2010	100	99	577	248	0.0004	FK(CI R)
2011	225	205	1705	802	0.0008	FK(CI R)
2012	143	128	1241	462	0.0003	FK(CI R)
2013	6362	2556	24462	24582	0.0005	FK(CI R)

MSPE	FK(CI A)	FK(CI R)	ARIMA(2,6,2)	ARIMA (666)	Var IPC	MIN
2008-2013	333478065	48754115	4417340197	4493086353	0.0011	FK(CI R)
2008	325765	45957	1083529	532730	0.0030	FK(CI R)
2009	90118	47074	2780632	340116	0.0018	FK(CI R)
2010	17310	15799	1114705	149817	0.0004	FK(CI R)
2011	272720	208513	29258529	6987157	0.0008	FK(CI R)
2012	32910	25485	5627078	740905	0.0003	FK(CI R)
2013	2000141461	292182885	26464109002	26949773633	0.0005	FK(CI R)

RMSPE	FK(CI A)	FK(CI R)	ARIMA(2,6,2)	ARIMA (666)	Var IPC	MIN
2008-2013	18261	6982	66463	67030	0.0011	FK(CI R)
2008	571	214	1041	730	0.0030	FK(CI R)
2009	300	217	1668	583	0.0018	FK(CI R)
2010	132	126	1056	387	0.0004	FK(CI R)
2011	522	457	5409	2643	0.0008	FK(CI R)
2012	181	160	2372	861	0.0003	FK(CI R)
2013	44723	17093	162678	164164	0.0005	FK(CI R)