

CAPÍTULO III

Análisis Teórico Matemático Estático Y Dinámico Del Las Características Del Modelo

3. Justificación teórica

En este capítulo se abarcará la justificación teórica del desempeño estático y dinámico del microespejo para poder validar el modelo que se propone en esta tesis, así como el proceso de diseño del microespejo.

El modelo de un microespejo torsional convencional de dos electrodos, está sostenido por dos micro-vigas torsionales, las cuales están montadas en dos anclajes fijos al sustrato.

Debajo del microespejo, se encuentran los dos electrodos sobre el sustrato. La figura 3.1 muestra un diagrama esquemático de este dispositivo y la tabla 3.1 explica la notación de su geometría.

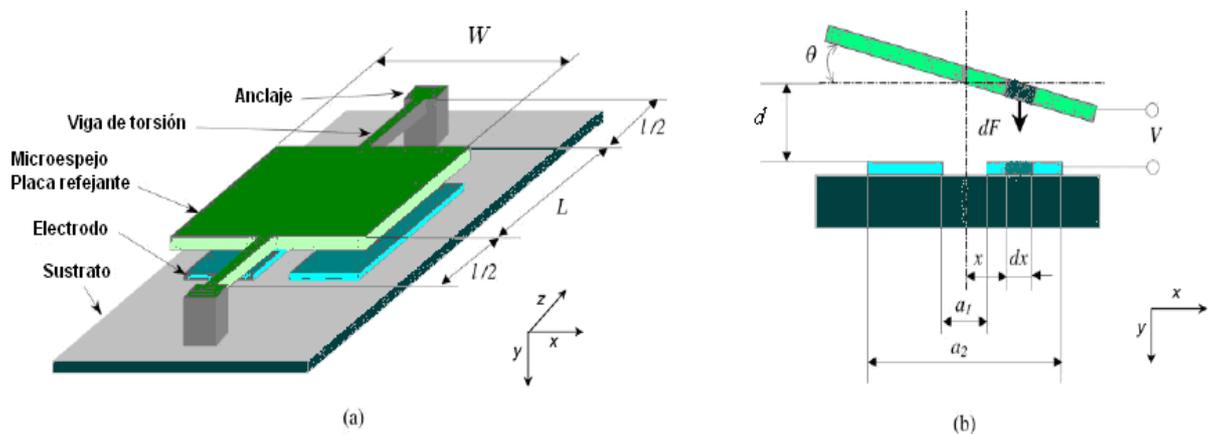


Figura 3.1 Diagrama esquemático de un microespejo torsional: (a) Diagrama en 3D (b) Vista de sección transversal

Básicamente, se puede explicar el funcionamiento del microespejo torsional de la siguiente manera: cuando se aplica un voltaje V entre el microespejo y uno de los electrodos, la atracción electrostática causa que éste rote sobre su línea central con un desplazamiento angular θ (ver figura 3.1 (b)).

La dirección en la que rota el microespejo, depende del electrodo al que se esté aplicando dicha diferencia de potencial, ya que el microespejo girará en una dirección con un electrodo determinado y en dirección inversa con el otro.

Tabla 3.1 Notación de las partes geométricas del microespejo torsional

Parte Geométrica	Notación	Parte Geométrica	Notación
Largo del microespejo	L	Ancho de la viga torsional	w
Ancho del microespejo	W	Grosor de la viga torsional	t
Largo efectivo de cada electrodo	$l_e=L$	Largo total de las vigas torsionales	l
Ancho de los electrodos	$w_e=a_2-a_1$	Largo de una sola viga torsional	$l/2=l_v$
Grosor de cada electrodo	t_e	Parámetro de posición de los electrodos	$a_1=\alpha W$
Espacio entre microespejo y electrodos	d	Parámetro de tamaño de los electrodos	$a_2=\beta W$

3.1 Análisis Teórico de las Características Estáticas del Microespejo Torsional

Para obtener el modelo estático del sistema torsional del microespejo, se realizarán los análisis del momento torsional electrostático, de la relación de funcionamiento estático entre el voltaje de operación y el ángulo de rotación y del efecto de adhesión momentánea.

3.1.1 El Principio del Capacitor y el Momento Torsional Electrostático.

El microespejo torsional se basa en el principio del capacitor de placas paralelas, en el que dos placas conductoras cualesquiera, separadas por un dieléctrico o por el vacío a una distancia d , forman un capacitor.

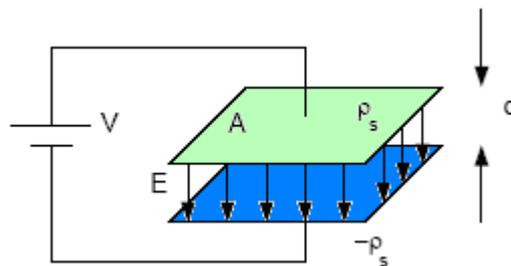


Figura 3.2 Esquema del comportamiento interno en un capacitor.

La carga del capacitor se debe a la transferencia de electrones entre una placa y otra y su comportamiento se ilustra en la figura 3.3. Una de las placas puede estar cargada positivamente y la otra negativamente o viceversa. Para este tipo de capacitor, la capacitancia está dada por:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (3.1)$$

Donde A es el área de de las placas, d es la separación entre estas y ϵ_0 es la constante dieléctrica del material situado entre las mismas. De igual modo, el campo eléctrico en un capacitor de placas paralelas, con capacitancia C es:

$$E = \frac{V}{d} \quad (3.2)$$

Pero como la distancia entre los electrodos y el microespejo es una distancia angular, como se ilustra en la figura 3.2, se define a d como $d = a$, por tanto:

$$E = \frac{V}{a} \quad (3.3)$$

Donde $a = r\theta = (d / \text{sen}\theta - x)\theta$, de este modo, el campo eléctrico se define como:

$$E = \frac{V}{(d / \text{sen}\theta - x)\theta} \quad (3.4)$$

Para obtener el momento electrostático en el microespejo, la presión electrostática también es un factor importante y está dada por:

$$P = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon V^2}{((d / \text{sen}\theta - x)\theta)^2} \quad (3.5)$$

Sin embargo, el momento electrostático producido por el incremento de la longitud de la placa dx localizado en x , está dado por:

$dM_E = Fdx$ y utilizando la expresión $F = PWx$, tenemos que

$$dM_E = PWx dx \quad (3.6)$$

Donde W , es el ancho de la placa del espejo, L es su longitud y w_e , t_e y l_e , son el ancho, el grosor y la longitud del electrodo respectivamente, de este modo, para analizar al microespejo y al electrodo se supuso que ambos dispositivos estuviesen formados de

un número infinito de capacitores infinitesimalmente pequeños, de ancho dx . Este comportamiento puede verse en la figura 3.3

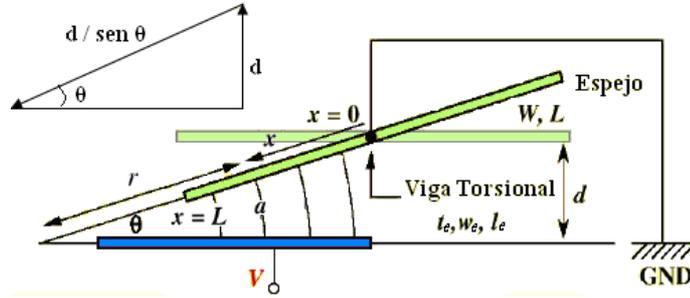


Figura 3.3 Comportamiento angular de la placa del microespejo

De esta manera, el momento torsional electrostático total se obtiene integrando el incremento del momento sobre la longitud de la placa y está dado por Me :

$$Me = \int dMe = \int PWx dx = \int_{\alpha a/2}^{\beta a/2} x dF \quad (3.7)$$

Donde la fuerza electrostática está determinada por la distancia entre la base del segmento del espejo y el electrodo $d(x) = d - \theta x$.

Por otra parte, tanto a_1 como a_2 definen la posición y el tamaño de los electrodos (normalizados por el ancho de la placa del microespejo, tal que tanto α como β son independientes del tamaño específico del microespejo) y como $W=L$, porque la placa del microespejo es cuadrada, se tiene entonces:

$$\begin{aligned} Me &= \int_{\alpha a/2}^{\beta a/2} x dF = \int_{\alpha a/2}^{\beta a/2} x \frac{\epsilon V^2}{2(d - \theta x)^2} L dx = \frac{\epsilon V^2 L}{2} \int \frac{x}{(d - \theta x)^2} dx \\ &= \frac{\epsilon V^2 L}{2\theta^2} \left[\frac{1}{1 - (a_2/2d)\theta} - \frac{1}{1 - (a_1/2d)\theta} + \ln\left(1 - \frac{a_2}{2d}\theta\right) - \ln\left(1 - \frac{a_1}{2d}\theta\right) \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

Donde ϵ es la permitividad del aire ($\epsilon = 8.85$ pF/m), y x y dx representan la posición y el ancho del capacitor infinitesimal utilizado, por integración. Por simplicidad, se normaliza el ángulo de rotación θ :

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_{max}} \quad (3.9)$$

Donde $\theta_{max} = 2d/W$ representa el ángulo máximo de rotación.

A pesar de que este valor representa el valor nominal del ángulo de rotación, no significa nada ya que el ángulo máximo de rotación efectivo depende específicamente del arreglo del microespejo. De esta manera, si la ecuación 3.9 se sustituye en la ecuación 3.8:

$$Me = \frac{\epsilon V^2 L}{2\theta_{\max}^2} \frac{1}{\Theta^2} \left[\frac{1}{1-\beta\theta} - \frac{1}{1-\alpha\theta} + \ln\left(\frac{1-\beta\Theta}{1-\alpha\Theta}\right) \right] \quad (3.10)$$

En esta ecuación, todos los parámetros estructurales, excepto α y β , contribuyen sólo como coeficientes de Me . Se observa que el momento torsional electrostático Me , es proporcional a la longitud L del microespejo y al cuadrado del voltaje V de operación. Por lo tanto Me , es muy sensible a este voltaje.

3.1.2 Relación Estática entre el Voltaje de Operación y el Ángulo de Rotación.

Cuando el microespejo es accionado para rotar con un momento torsional electrostático, las vigas que soportan la placa del microespejo se tuercen en un ángulo θ en un extremo, es decir, la vigas torsionales presentan un desplazamiento angular el cual generará un momento torsional elástico de restauración torsional T_{rT} y es linealmente proporcional a su correspondiente desplazamiento en θ y puede expresarse como

$$T_{rT} = -S_{\theta}\theta \quad (3.11)$$

Donde S_{θ} denota la rigidez de las vigas torsionales y también puede expresarse de la siguiente manera:

$$S_{\theta} = \frac{2GI_p}{l} \quad (3.12)$$

Donde G es el módulo de corte e I_p es el momento polar de inercia de la viga torsional y si la estructura está hecha de polisilicio, entonces $G= 6.6 \times 10^{10}$ Pa.

De este modo, el microespejo se queda quieto únicamente cuando estos momentos torsionales están balanceados (por ejemplo, en condición de equilibrio estático), de tal modo cuando $Me = T_{rT}$:

$$V = k_o \left\{ \frac{\Theta^3}{\left[\frac{1}{1-\beta\Theta} \right] - \left[\frac{1}{1-\alpha\Theta} \right] + \ln(1-\beta\Theta)/(1-\alpha\Theta)} \right\}^{1/2} \quad (3.13)$$

Donde k_o representa

$$k_0 = \left[\frac{2S_0 \theta_{\max}^2}{\epsilon L} \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

La ecuación normalizada del voltaje, representa las relaciones estáticas entre el ángulo de rotación, el voltaje de operación y los parámetros estructurales del microespejo torsional.

El lado derecho de la ecuación 3.13, está compuesta de dos partes. La k_0 representa la combinación de todos los parámetros estructurales (excepto para los parámetros normalizados de los electrodos) del microespejo torsional, y actúa únicamente como coeficiente de sensibilidad. Por esta razón, la relación entre voltaje V y el ángulo torsional θ está determinada principalmente por la otra parte (encerrada entre los corchetes), en la que se involucran los parámetros normalizados de los electrodos (representados por α y β).

A partir de este punto de vista, puede decirse que los electrodos determinan el comportamiento del microespejo torsional.

La figura 3.4 muestra una curva típica que representa la relación entre el voltaje de operación y el ángulo de rotación de un microespejo torsional. Inicialmente, el voltaje de operación incrementa en relación con el ángulo.

Sin embargo, cuando el ángulo de rotación alcanza cierto valor de θ_0 (o equivalentemente con θ_0), el voltaje de operación alcanza su valor máximo V_{\max} .

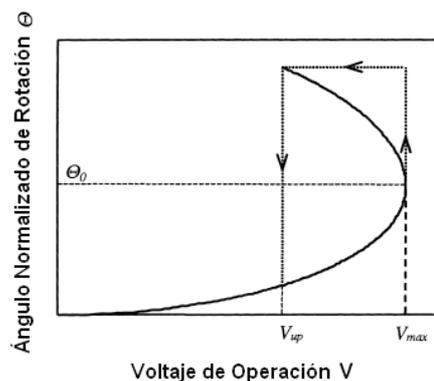


Figura 3.4 Curva de operación típica de la viga de torsión del microespejo.

Este punto crucial en la curva y el ángulo son tomados como punto de caída instantánea y como ángulo de caída instantánea, respectivamente. Por tanto, se requiere de un voltaje muy bajo para mantener el momento torsional de equilibrio para posiciones con ángulos de rotación mayores. De hecho, este tipo de balance no es estable y no puede mantenerse.

Cuando el microespejo rota más allá del ángulo θ_0 , puede bajar instantáneamente hasta que el borde toque el sustrato. Este es el llamado fenómeno de caída instantánea. Como resultado, después del punto de caída instantánea, la relación $V-\theta$, no seguirá la curva definida por la ecuación 3.13, y en su lugar quedará una línea ascendente.

El microespejo no podrá rotar de regreso con una reducción de voltaje, sino hasta que el voltaje de operación sea menor que cierto valor de voltaje de levantamiento V_{up} . Este fenómeno histerético, es otra de las características del microespejo torsional, que es similar a un circuito de disparo en estado estable y de hecho puede utilizarse para regir y auto bloquear un arreglo de microespejos.

3.1.3 Estudio del Efecto Caída Instantánea

Inicialmente, cuando se aplica un voltaje sobre el sistema, la fuerza electrostática sirve para reducir la separación de las placas, es decir, el ángulo de torsión y el desplazamiento vertical $d-x$ aumentan con el voltaje aplicado requerido.

Sin embargo cuando este voltaje alcanza cierto valor, el ángulo de torsión y el desplazamiento horizontal, alcanzan sus valores críticos. Cuando el voltaje aplicado excede ese valor, la viga torsional colapsa abruptamente con la placa del electrodo.

En este punto de cambio, el ángulo de torsión, del desplazamiento vertical y el voltaje aplicado se refiere como el ángulo de caída instantánea, el desplazamiento de caída instantánea y como voltaje de caída instantánea. Por tanto este es el mejor conocido efecto de caída instantánea.

Una propiedad importante de los microespejos torsionales electrostáticos son sus características de caída instantánea, donde la fuerza/momento electrostático supera a la fuerza/momento mecánico y la placa móvil golpea abruptamente con el electrodo fijo (cuando el voltaje aplicado en la placa móvil se incrementa sobre cierto valor de voltaje).

En otras palabras, la esencia del fenómeno de caída instantánea se debe a la dependencia compartida de la fuerza electrostática sobre la eléctrica y los parámetros mecánicos.

Los parámetros específicos de caída instantánea (voltaje de caída instantánea, ángulo de caída instantánea y el desplazamiento de caída instantánea), están determinados por el diseño de la geometría del microespejo y de los electrodos y juegan un papel importante en el comportamiento del microespejo torsional.

En general, el voltaje de caída instantánea, debe ser lo más bajo posible para prevenir una ruptura eléctrica. Como resultado, es necesario utilizar la torsión efectiva y el modelo de inclinación para optimizar la geometría de la viga torsional y poder reducir el voltaje de caída instantánea.

Como este fenómeno es cortante y sucede sin previo aviso, es indispensable hacer una medición exacta del voltaje de accionamiento requerido para alcanzar dicha inestabilidad, ya que, debido a las cargas opuestas en las placas de los electrodos y del microespejo, se forma entre ambas una fuerza electrostática de atracción.

Esta medición se puede lograr fácilmente utilizando el modelo de las placas paralelas a lo largo de un coeficiente de resorte efectivo de la estructura, como la que puede verse en la figura 3.5, para estimar el voltaje de caída instantánea y el ángulo de caída instantánea.

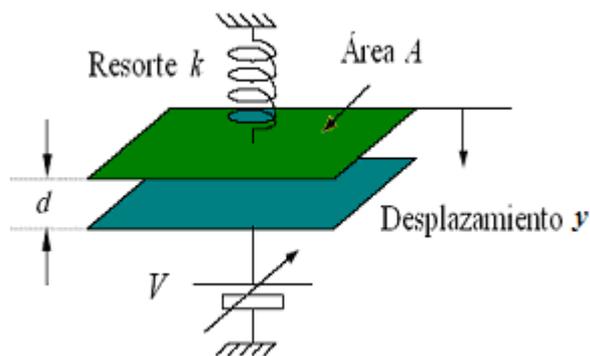


Figura 3.5 Modelo de un capacitor de placas paralelas con coeficiente de resorte

Para derivar la expresión del efecto caída instantánea, comenzamos escribiendo la energía potencial total del sistema, tomando en cuenta que para el microespejo torsional, la distancia entre la placa y el electrodo es $d(x)=d-\theta x$ y es igual desplazamiento del modelo del capacitor de placas paralelas $d(x)=d(y)$ en la figura 3.5:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d-y} V^2 + \frac{1}{2} ky^2 \quad (3.15)$$

Donde el primer término es el potencial electrostático del capacitor y del voltaje de fuente y el segundo término se debe a la energía mecánica almacenada en el resorte. La fuerza que actúa en la placa móvil se obtiene derivando esta ecuación:

$$F = -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{(d-y)^2} V^2 - ky \quad (3.16)$$

En condición de equilibrio, y con voltaje $V=0$, la distancia entre las placas del capacitor es $d(y=0)$, con $C = \frac{\epsilon_0 A}{(d-y)}$; la fuerza electrostática y la fuerza del resorte se cancelan ($F=0$), y la ecuación de la fuerza electrostática queda:

$$ky = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{(d - y)^2} V^2 \quad (3.17)$$

Cuando se aplica un cierto voltaje V , la fuerza electrostática causa una reducción de esta distancia y la fuerza del resorte, inducida por el desplazamiento de la placa tiende a contrarrestar los efectos de las fuerzas electrostáticas.

Inicialmente, el ángulo torsional y el desplazamiento vertical incrementa junto con el voltaje aplicado requerido.

La posición de equilibrio de z de la placa contra el voltaje V , está dada por:

$$F_{el} + F_{sp} = 0, \text{ donde la fuerza del resorte queda: } F_{sp} = -ky \quad (3.18)$$

El voltaje de caída instantánea se deduce de la ecuación $F_{el} + F_{sp} = 0$ y puede resolverse por la posición de equilibrio de la placa x como una función del voltaje aplicado. Para voltajes suficientemente bajos, el ángulo de la masa de prueba exhibe dos soluciones físicas de equilibrio, en las que sólo una es estable (Ver figura 3.6).

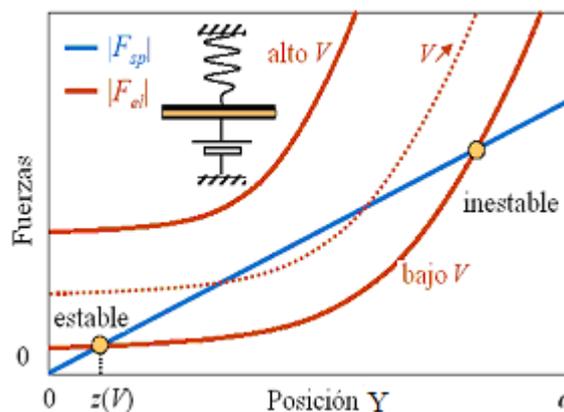


Figura 3.6 Relación del comportamiento entre fuerzas electromecánicas y desplazamiento de la placa

Sin embargo, cuando el voltaje aplicado requerido alcanza cierto valor, el ángulo torsional y el desplazamiento vertical alcanzan su valor crítico, esto es, a altos voltajes no existe la posición de equilibrio y por tanto, las soluciones por encima del desplazamiento de caída instantánea (línea recta en la figura 3.7) resultan ser inestables en lo consecutivo.

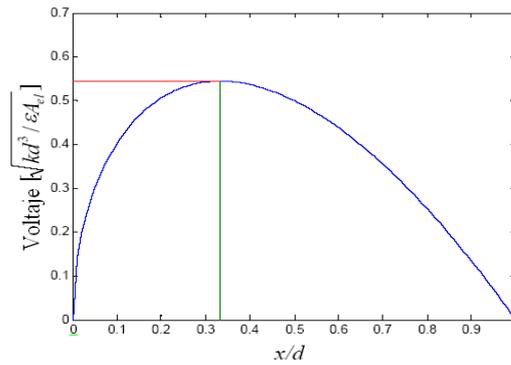


Figura 3.7 Relación de equilibrio entre el desplazamiento de la placa x y el voltaje V

Una simple expresión de los puntos de caída instantánea, se obtiene derivando la ecuación 3.16 para obtener la rigidez del sistema (ver figuras 3.8 y 3.9):

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{\epsilon_0 A}{(d-x)^3} V^2 - k \tag{3.19}$$

Sustituyendo esta en la ecuación 3.17, tenemos la rigidez en el punto de equilibrio:

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{2kx}{(d-x)} - k \tag{3.20}$$

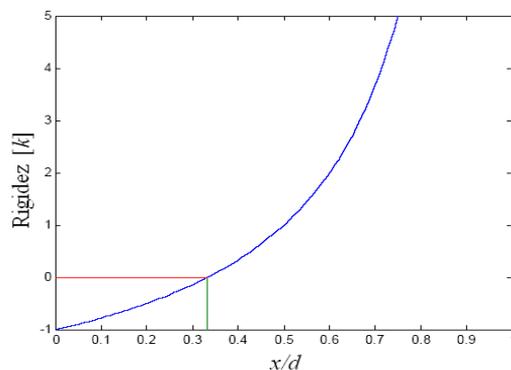


Figura 3.8 La rigidez como función del punto de equilibrio x . Una rigidez positiva indica un punto de equilibrio inestable

En este punto de cambio, el ángulo torsional, el desplazamiento vertical y el voltaje aplicado se refieren como el ángulo de caída instantánea, el desplazamiento de caída instantánea y el voltaje de caída instantánea.

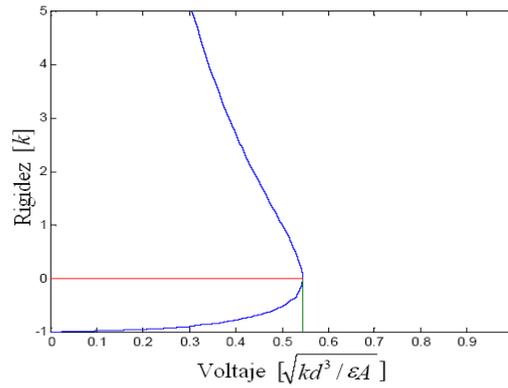


Figura 3.9 La rigidez como función del voltaje V

La fuerza electrostática al ser siempre mayor que la fuerza de resorte, provoca que la placa móvil sea jalada hacia abajo directamente hacia la placa fija. Este es el llamado efecto de caída instantánea y ocurre para un voltaje mayor que el Voltaje de caída instantánea.

El voltaje de caída instantánea se calcula al límite de la región estable:

$$\frac{\epsilon_0 A}{2k} V^2_{pull-in} = \frac{4}{27} d^3 \quad (3.21)$$

$$V_{pull-in} = \sqrt{\frac{8kd^3}{27\epsilon_0 A}} \quad (3.22)$$

Sin voltaje aplicado, la ecuación 3.19 es simplemente:

$$\frac{\delta F}{\delta x} = -k; \quad (3.23)$$

Donde un pequeño movimiento positivo δx resulta en una fuerza negativa de restauración

$$\frac{\delta F}{\delta x} \delta x = -k \delta x. \quad (3.24)$$

Al ir incrementando el voltaje de alimentación V , la rigidez se hace menos negativa. El punto de inestabilidad está dado por:

$$\frac{\delta F}{\delta x} = 0, \text{ quedando: } x = \frac{1}{3} d \quad (3.25)$$

Las posiciones de equilibrio estables existen únicamente en las regiones de $0 < z < d/3$ (ver figura 3.10). Más allá de este punto, la rigidez se vuelve positiva y el sistema inestable: un pequeño movimiento positivo δx resulta en una fuerza positiva tal que incrementa x .

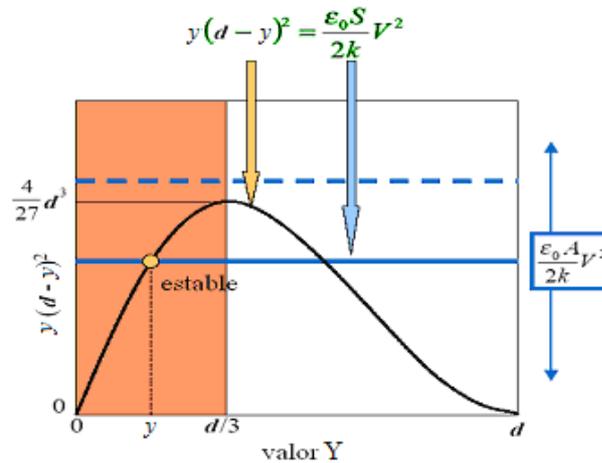


Figura 3.10 Gráfico de la posición de equilibrio

Se tiene que la ecuación para el ángulo de caída instantánea, es independiente del voltaje de caída instantánea y del coeficiente del momento de resorte, por lo tanto el ángulo de caída instantánea es una constante de la estructura. De este modo, el ángulo de caída instantánea puede fijarse en un rango amplio cuando la situación de caída instantánea no ocurre antes de que la franja se cierre.

3.1.4 Estudio del Efecto de Adhesión Momentánea

Aunado al efecto de caída instantánea, otro de los problemas fundamentales en la operación de los MEMS es el efecto llamado de adhesión momentánea, que complica significativamente los problemas de control.

Este fenómeno es una falla catastrófica que ocurre cuando la fuerza electrostática entre la masa de prueba y el electrodo aumenta mucho más aprisa que la fuerza de restauración provista por la constante de resorte de la masa suspendida.

Cuando esto ocurre, el sistema se vuelve inestable de controlar a lazo abierto más allá de aproximadamente $1/3$ del ancho del alto de esta distancia. Después de este punto, la masa suspendida tocará o golpeará el electrodo de manera abrupta y provocará la adhesión permanente de las partes móviles.

Este fenómeno es una consecuencia del fenómeno de caída instantánea y hace que el espejo actúe en un rango reducido de inclinación. El ángulo de caída instantánea se encuentra entre un tercio y un medio del ángulo de adhesión momentánea (por ejemplo en el ángulo en el que el microespejo hace contacto físico con el electrodo que yace debajo).

Bajo la condición de lazo abierto la regla de control es limitar el ángulo de inclinación del espejo a menos de un tercio del ángulo de adhesión momentánea, para evitar la inestabilidad de caída instantánea.

El efecto de adhesión momentánea resultante en estos transductores, limita su máxima amplitud de operación y puede inclusive dañar a los microespejos, que se atorarán en su posición de máximo desplazamiento.

Debe aclararse que el efecto de adhesión momentánea es causado por mucho desplazamiento, no por mucho voltaje, de este modo puede incrementarse el voltaje operacional por encima del voltaje máximo, mientras se encuentre dentro del rango de desplazamiento aceptable.

Como el ángulo de caída instantánea Θ_0 , determina el rango angular sobre el cual el microespejo puede funcionar suavemente, representa un parámetro importante en aplicaciones donde el microespejo opera con ángulos continuos.

El voltaje máximo de operación V_{max} es otro parámetro importante de considerar en aplicaciones prácticas. Para que sea compatible con componentes de circuitos integrados los cuales operan a 5V normalmente, y para prevenir un corte eléctrico, el valor máximo del voltaje de operación deberá ser lo más bajo posible.

Teóricamente, el punto de caída instantánea puede obtenerse resolviendo $dV/d\Theta=0$. Así, la relación entre el ángulo Θ_0 de caída instantánea y los parámetros de los electrodos α y β , están determinados por:

$$\frac{3}{1-\beta\Theta_0} - \frac{3}{1-\alpha\Theta_0} - \frac{\beta^2\Theta_0^2}{(1-\beta\Theta_0)^2} + \frac{\alpha^2\Theta_0^2}{(1-\alpha\Theta_0)^2} + 3\ln\left(\frac{1-\beta\Theta_0}{1-\alpha\Theta_0}\right) = 0 \quad (3.26)$$

Donde \ln representa el logaritmo natural. Esta ecuación no tiene una solución analítica excepto cuando $\alpha=0$. Asumiendo que $\alpha=0$:

$$\beta\Theta_0 = 0.4404, \quad (\alpha = 0, 0 \leq \beta, \Theta_0 \leq 1) \quad (3.27)$$

Aquí, 0.4404 es la constante universal para todos los microespejos torsionales accionados electrostáticamente. Esta ecuación revela que el mecanismo intrínseco del efecto de caída instantánea, está influenciado por las dimensiones del electrodo. Esto prueba nuevamente que “los electrodos determinan el comportamiento del microespejo torsional”.

La ecuación 3.27 indica claramente cómo obtener un ángulo de caída instantánea seleccionando el tamaño de los electrodos, lo cual es muy útil para diseñar microespejos torsionales. Significativamente, se puede derivar el microespejo torsional sin caída instantánea. De la ecuación 3.27, si $\beta \leq 0.4404$, $\Theta_0=1$ (Figura 3.11).

Esto quiere decir, que cuando el tamaño normalizado del electrodo es menor o igual que 0.4404, el efecto de caída instantánea tiene lugar únicamente cuando el microespejo torsional rota hasta su ángulo máximo y hace contacto con el sustrato. Si estos son equivalentes, entonces no existe caída instantánea. Se ha medido y verificado este valor para ángulos de caída instantánea entre 0.44-0.46.

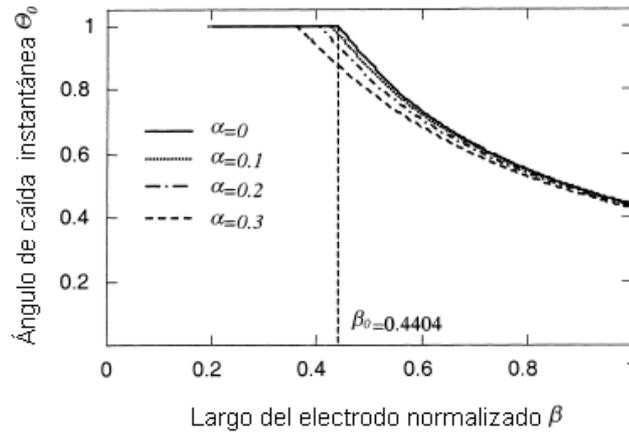


Figura 3.11 Ángulo de caída instantánea vs tamaño del electrodo

La ecuación 3.27 se ha basado en la condición que $\alpha=0$. Para casos en los que $\alpha \neq 0$, las relaciones de β y Θ_0 , se obtienen numéricamente resolviendo la ecuación 3.26. La figura 3.11 muestra las curvas correspondientes a Θ_0 contra β cuando $\alpha=0.3$. Queda claro que la curva de $\alpha=0.2$ no es significativamente distinta de la de $\alpha=0$. En otras palabras, la ecuación 3.27 es aproximadamente válida para todos aquellos casos en los que $\alpha \leq 0.3$. Sustituyendo la ecuación 3.27 en la ecuación 3.13, el voltaje máximo de operación V_{max} , se expresa como:

$$V_{max} = 2.2009k_0\Theta_0^{-3/2} \quad (3.28)$$

$$V_{max} = 0.6432k_0\beta^{-3/2} \quad (3.29)$$

Estas dos ecuaciones combinadas con la ecuación 3.27, ilustran las relaciones directas entre el voltaje de operación, el ángulo de caída instantánea y el tamaño de los electrodos, y son muy útiles al momento de diseñar microespejos torsionales.

3.2 Análisis Teórico de las Características Dinámicas del Microespejo Torsional

Es muy importante entender el comportamiento dinámico del microespejo torsional para poder diseñar un nuevo microespejo y poder controlar sus movimientos. Por lo tanto, es necesario considerar el dominio físico de acoplamiento entre lo eléctrico y lo

mecánico y el movimiento de acoplamiento no lineal entre torsión e inclinación en el modelo dinámico del microespejo torsional.

Esto, debido a que algunos experimentos previos indican que el comportamiento dinámico del microespejo puede cambiar significativamente bajo diferentes presiones de aire, lo que conlleva a numerosas complicaciones en el efecto de amortiguamiento.

En estudios previos, se han realizado algunos análisis modales en microespejos torsionales para determinar el comportamiento dinámico de la placa de los microespejos, los cuales revelaron que la deformación de la placa del microespejo es muy pequeña y que el desplazamiento vertical del microespejo se atribuye principalmente a la deflexión de las microvigas. Por esta razón, el microespejo puede tomarse como un cuerpo rígido.

3.2.1 Doblez de Las Vigas Torsionales debido a la Masa Del Microespejo

Como condición típica del sistema del microespejo torsional propuesto, la masa central (la placa del microespejo) es mucho más ancha y/o más gruesa que las vigas que la sostienen, de modo que si existe algún tipo de doblez en la masa de la placa del microespejo, éste se considera insignificante.

Si la carga de la estructura viga torsional-masa de la placa es su propio peso en la dirección y , el desplazamiento de la masa se asemeja al movimiento de un pistón debido a la simetría en la estructura en las direcciones x y z . Por lo tanto, se puede considerar únicamente la mitad de la estructura, y para la viga el desplazamiento, de acuerdo con la figura 3.12 es:

$$-EIv''(z) = \frac{Mg}{2}z - m_0 - \frac{\rho w t g z^2}{2} \quad (3.30)$$

Donde E representa al módulo de Young, $I = wt^3/12$ y $v(z)$ es una función de desplazamiento, cuya segunda derivada representa el recíproco del radio de curvatura de una curva $v(z)$, matemáticamente, esto es:

$$\frac{1}{r} = |v''(z)|$$

Además, g representa la fuerza de gravedad, ρ es la resistividad del material, m_0 es el momento de inclinación restrictivo a determinarse y M es la masa total de la estructura viga-placa que a su vez se define por:

$$M = 2(P_M - l_v)Wt\rho + 2wtl_v\rho \quad (3.31)$$

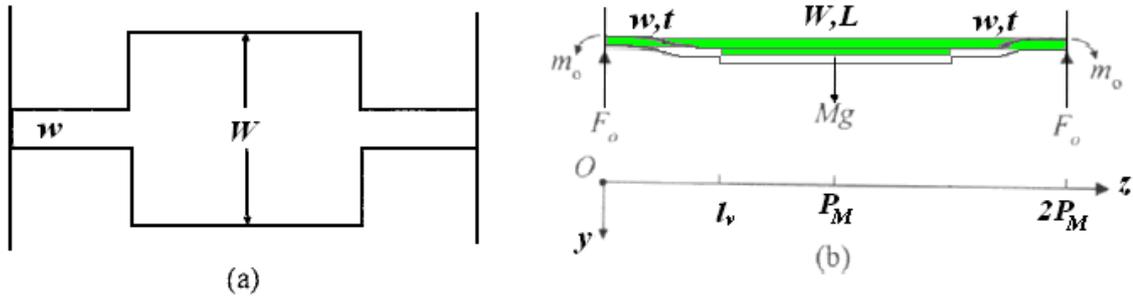


Figura 3.12 Esquema de la estructura (a) vista superior (b) vista transversal

Donde $P_M=(l+L)/2$, que es el punto medio del largo total de la estructura del microespejo torsional. Si la estructura está hecha de silicio, entonces $\rho=2330 \text{ kg/m}^3$.

Bajo la condición de que la masa de las vigas es mucho menor que la masa central de la placa del microespejo, la ecuación 3.30 puede simplificarse como:

$$-EIv''(z) = \frac{Mg}{2}z - m_0 \tag{3.32}$$

Las condiciones de frontera para la ecuación son:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v'(l_v) = 0, \quad \text{y} \quad v''\left(\frac{1}{2}l_v\right) = 0 \tag{3.33}$$

A partir de las ecuaciones 3.32 y 3.33 tenemos que:

$$m_0 = \frac{1}{4}Mgl_v \tag{3.34}$$

Por lo tanto la tensión en la parte superior de la viga es

$$T(z) = 3\frac{Mg}{wt^2}\left(\frac{1}{2}l_v - z\right) \tag{3.35}$$

De tal modo, las tensiones sobre la superficie de las vigas varían linealmente desde un máximo positivo en un extremo hasta un máximo negativo en el otro extremo, y los valores para ambos máximos son los mismos:

$$T_{\max} = \frac{3l_v}{2wt^2}Mg \tag{3.36}$$

Por lo tanto, el desplazamiento de cada viga es:

$$v(z) = \frac{Mg}{Ewt^3} z^2 \left(\frac{3}{2} l_v - z \right) \quad (3.37)$$

El desplazamiento de la masa central es

$$v(l_v) = \frac{Mg}{2Ewt^3} l_v^3 \quad (3.38)$$

Y si las vigas se consideran como resortes, la constante de ese resorte es:

$$k = \frac{2Ewt^3}{l_v^3} \quad (3.39)$$

3.2.2 Desplazamiento Angular de las Vigas Torsionales.

Para una viga torsional con cruce transversal rectangular como las que soportan la placa del microespejo, el análisis de su constante de torsión es un poco complicado. De tal modo que la expresión teórica para k_ϕ es:

$$k_\phi = \frac{1}{3P_M} Ga^3b \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) = \frac{k_1 Ga^3b}{P_M} \quad (3.40)$$

donde a y b son los lados de la sección rectangular (largo y ancho, donde $b > a$, por ejemplo), como se muestra en la figura 3.13 respectivamente y el coeficiente k_1 es:

$$k_1 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad (3.41)$$

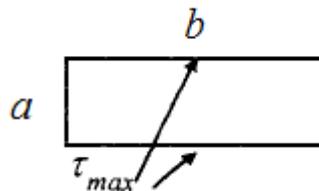


Figura 3.13 Sección transversal rectangular de una viga torsional

Para $a=b$ tenemos que $k_\phi = 0.141$. Algunos valores posibles de k_1 se proporcionan en la tabla 3.2

Tabla 3.2 Factores para relaciones torsionales

b/a	1.0	1.2	1.5	3.0	3.5	3.0	4.0	5.0	10	∞
k	0.675	0.759	0.848	0.930	0.968	0.985	0.997	0.999	1.000	1.000
k ₁	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333
k ₂	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.291	0.312	0.333

Entonces, un momento torsional actuará sobre las barras torsionales cuando la placa del microespejo sea sometida a una aceleración (o gravedad) en su dirección normal y las vigas de torsión se torcerán por ese momento. Como el ángulo de torsión es proporcional al momento de torsión que es también proporcional a la aceleración, el ángulo de torsión puede utilizarse para medir la aceleración.

3.2.3 Frecuencia de Vibración para la Estructura del Microespejo.

Para una estructura como la del microespejo en la que una masa (la placa del microespejo) es soportada por dos vigas (ver figura 3.14), si la masa de la placa entre las vigas y la inclinación entre la masa central total son despreciables, la estructura puede considerarse como un sistema masa-resorte y la constante de resorte estará dada por la ecuación 3.39.

Por lo tanto, la frecuencia de vibración de la estructura está determinada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Ewt^3}{Ml_v^3}} \quad (3.42)$$

Donde $M = 2\rho Wt(P_M - l_v)$ es la masa de la placa central.

3.2.4 Frecuencia de Vibración de la Viga Torsional

Retomando el concepto y la ecuación 3.11 del momento elástico de restauración torsional generado por las vigas torsionales, si el momento de inercia para la rotación de la masa es I_θ , por la segunda ley de Newton sobre rotación, se puede la ecuación diferencial

$$I_\theta \ddot{\theta} + k_\theta \theta = 0 \quad (3.43)$$

La solución de la ecuación anterior es una oscilación angular donde $\theta = \Phi \sin(\omega t + \alpha)$ y la frecuencia radial de vibración es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_\theta}} \quad (3.44)$$

Para calcular esta frecuencia y la frecuencia en Hz, podemos utilizar la expresión del momento de inercia para la rotación de la placa:

$$I_{\theta} = \int_{-P_M/2}^{P_M/2} \rho W t z^2 dz \quad (3.45)$$

La constante elástica resultante de las dos vigas torsionales es:

$$k_{\theta} = \frac{2Gk_1 w t^3}{l} \quad (3.46)$$

De este modo, de la tabla 3.2 se tiene que $k_1=0.141$.

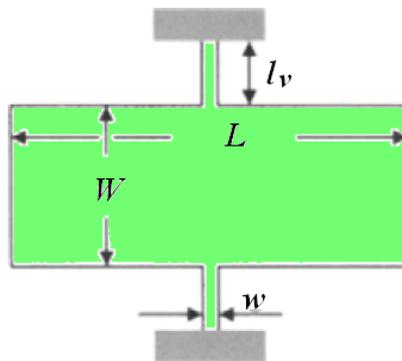


Figura 3.14 Parámetros de la estructura para realizar un análisis de la frecuencia

3.2.5 Diferentes Fuerzas de Amortiguamiento para el Microespejo Torsional

El amortiguamiento es un factor destructivo para mantener vibraciones, por lo tanto generalmente se realizan mediciones para reducirlo o aumentarlo, tal que permanezcan las vibraciones con un mínimo de energía. Sin embargo en muchos otros casos, se introduce amortiguamiento para reducir la oscilación del sistema.

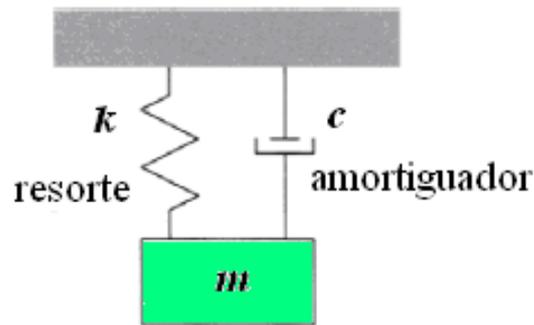


Figura 3.15 Modelo simplificado para un modelo vibracional con amortiguamiento

De esta manera, la vibración de un sistema real siempre se resiste por la acción de fuerzas de disipación, tales como la viscosidad del aire, la fricción, transmisión acústica, disipación interna, etc. El sistema entonces, realiza un trabajo positivo.

La energía para el trabajo es sustraída de la energía de vibración y usualmente se convierte en energía térmica. Por lo tanto, el amortiguamiento es el proceso en el cual se toma energía de las vibraciones de un sistema.

Generalmente el amortiguamiento es inevitable en cualquier sistema. Una causa común de amortiguamiento es la viscosidad del fluido que rodea al sistema, como el aire. El fluido ejerce fuerzas viscosas sobre el objeto móvil y se opone al movimiento de éste a través del fluido.

Como primera aproximación se tiene que la fuerza de amortiguamiento F_d , es proporcional a la velocidad de movimiento:

$$F_d = -c\dot{x} \quad (3.47)$$

Donde c es el llamado coeficiente de amortiguamiento y su signo negativo indica que la fuerza se opone a la dirección de movimiento.

3.2.6 Amortiguamiento de la Vibración oscilatoria del microespejo.

El amortiguamiento del sistema del microespejo torsional puede representarse como el sistema de amortiguamiento que se muestra en la figura 3.15, cuya ecuación diferencial de segundo orden para el movimiento es:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad (3.48)$$

Donde m es la masa del sistema y c es el coeficiente de la fuerza de amortiguamiento. O también se tiene que

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.49)$$

Haciendo que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y que $n = \frac{c}{2m}$, se tiene que

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.50)$$

Donde ω_0 es la frecuencia radial de vibración del sistema si es que no hay amortiguamiento y n es el llamado coeficiente de amortiguamiento. Haciendo que $x = Ae^{\lambda t}$, tenemos:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (3.51)$$

La solución de la ecuación es:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2} \quad (3.52)$$

El comportamiento del sistema puede discutirse de acuerdo a la razón entre n y ω_0 . La razón $\zeta = n / \omega_0$ es conocida como la razón de amortiguamiento del sistema.

a) Sistema del microespejo con Sub-Amortiguamiento:

Si $n < \omega_0$, es decir $\zeta < 1$ tenemos:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{(\omega_0^2 - n^2)} \quad (3.53)$$

Por lo tanto la solución a la ecuación 3.50 es:

$$x = Ae^{-nt} \text{sen}(\sqrt{(\omega_0^2 - n^2)t + \alpha}) \quad (3.54)$$

Lo que indica que el sistema tendrá una oscilación que será distinta de la vibración libre, por lo que:

1) La frecuencia de vibración es $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$, que es menor que la frecuencia de vibración libre ω_0 , y

2) La amplitud de la vibración decae exponencialmente con el tiempo.

b) Sistema del microespejo con Amortiguamiento Viscoso:

Si $n > \omega_0$, es decir $\zeta > 1$ tenemos:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{(n^2 - \omega_0^2)} \quad (3.55) \quad \text{y} \quad x = e^{-nt} \left(c_1 e^{\sqrt{n^2 - \omega_0^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - \omega_0^2}t} \right) \quad (3.56)$$

Como no hay oscilación en el desplazamiento, la masa regresa a su posición balanceada lentamente.

c) Sistema del microespejo con Sobre-Amortiguamiento:

Si $n = \omega_0$, es decir $\zeta = 1$, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -n = -\omega_0$ y la solución especial para la ecuación 3.50 es $x_1(t) = c_1 e^{-nt}$. Asumiendo una solución general de $x = A(t)x_1(t)$ y

sustituyéndola en la ecuación 3.50, tenemos $d^2A/dt^2 = 0$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación 3.50 es:

$$x(t) = c_1 e^{-\zeta t} (c_2 t + c_3) \quad (3.57)$$

El resultado indica que no hay oscilación en el caso de sobre-amortiguamiento, pero el tiempo que se lleva en desplazamiento para que el amortiguamiento sea virtualmente cero, es mínimo. La figura 3.16 muestra las relaciones $x(t)$ para las tres condiciones de amortiguamiento.

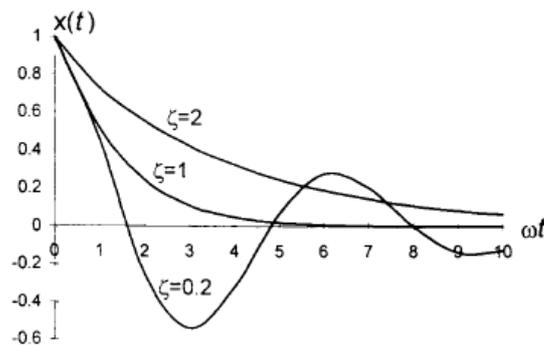


Figura 3.16 Atenuación de la amplitud en sistemas con diferente razón de amortiguamiento

3.2.7 Respuesta del Microespejo Torsional a una Fuerza Escalón

Para el sistema del microespejo que es un sistema masa-resorte, la posición de equilibrio de la masa es $x = 0$. Con una fuerza constante F_0 actuando sobre la masa, la posición de equilibrio es $x_0 = F_0 / k$.

Ahora debemos considerar el tiempo de respuesta del sistema a una fuerza escalón F_0 . Cuando la fuerza se aplica sobre la masa a un tiempo $t=0$, la masa se mueve desde su posición original hacia su nueva posición de equilibrio $x_0 = F_0 / k$.

Si el efecto de amortiguamiento es despreciable, el sistema poseerá una energía total de $E = x_0 F_0$ cuando la masa llegue a x_0 , dado el trabajo hecho por la fuerza.

Como el potencial de energía en ésta condición es $\frac{kx_0^2}{2} = \frac{x_0 F_0}{2}$, la masa debe tener una fuerza cinética de $\frac{x_0 F_0}{2}$ en x_0 . Esto significa que la masa se moverá hasta después de haber pasado por x_0 hasta que llegue a x' , donde el trabajo hecho por la fuerza aplicada iguale a la energía potencial elástica.

$$F_0 x' = \frac{1}{2} kx'^2 \quad (3.58)$$

Como $x' = 2x_0$ no es una posición de equilibrio, la masa se moverá de nuevo hacia $x = 0$. En este sentido, la masa oscila entre 0 y $2x_0$.

Al considerar el efecto de amortiguamiento, la oscilación terminará y la masa finalmente quedará fija en $x = x_0$, cuando el exceso de energía sea consumida completamente por el amortiguamiento. Por lo tanto, se tiene como resultado que la respuesta del sistema a la fuerza escalón es altamente dependiente del amortiguamiento.

El proceso puede describirse por la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \quad (3.59)$$

Como $F_0 = kx_0$, tenemos

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - x_0) = 0 \quad (3.60)$$

Haciendo que $x_1 = x - x_0$, tenemos la ecuación diferencial para x_1

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = 0 \quad (3.61)$$

con las condiciones iniciales

$$x_1|_{t=0} = -x_0, \dot{x}_1|_{t=0} = 0 \quad (3.62)$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación 3.50 es aplicable a la ecuación 3.61 y las condiciones iniciales mostradas en la ecuación 3.62 pueden usarse para determinar las constantes en las soluciones. El análisis arroja los siguientes resultados:

a) Condiciones de Sub-Amortiguamiento, con $\zeta < 1$.

En esta condición, el sistema oscila antes que se estabilice. La expresión para $x(t)$ es:

$$x = x_0 \left(1 - \frac{e^{-\zeta \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0 t + \alpha) \right) \quad (3.63)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\alpha = \text{sen}^{-1} \sqrt{1 - \zeta^2}$.

b) Condición de Sobre-Amortiguamiento, $\zeta = 1$

En esta condición, el sistema se mueve hacia su nueva posición de equilibrio sin oscilar. La dependencia de la posición x en el tiempo es:

$$x = x_0(1 - (1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}) \tag{3.64}$$

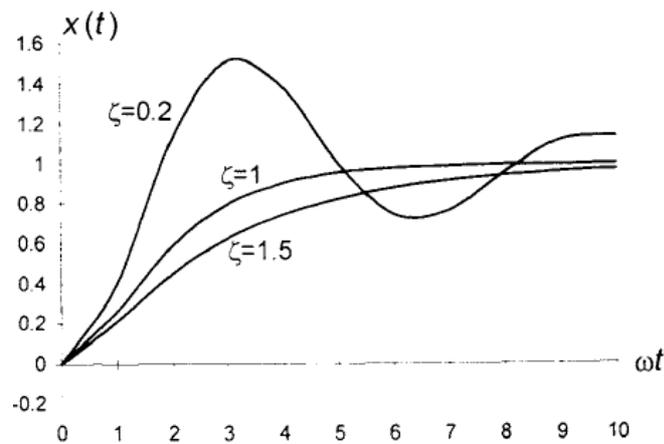


Figura 3.17 Respuesta a una fuerza escalón para diferentes razones de amortiguamiento.

c) Condiciones de Amortiguamiento Viscoso

En esta condición el sistema alcanza una nueva posición de equilibrio lentamente. La expresión de $x(t)$ es:

$$x = x_0 \left(1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t} \right) \tag{3.65}$$

Por ejemplo, las curvas para las tres condiciones de amortiguamiento son las que se muestran en la figura 3.17.

3.3 Acoplamiento Dinámico Entre Los Efectos De Deflexión Y Torsión.

Como se mencionó en el punto 3.1, cuando el voltaje de polarización, V , se aplica al microespejo, éste rota con un desplazamiento angular θ , pero también se ha mencionado que sufre un desplazamiento vertical en la dirección de y , debido a la fuerza, a su propio peso y al momento torsional electrostático, lo cual puede apreciarse en la figura 3.18.

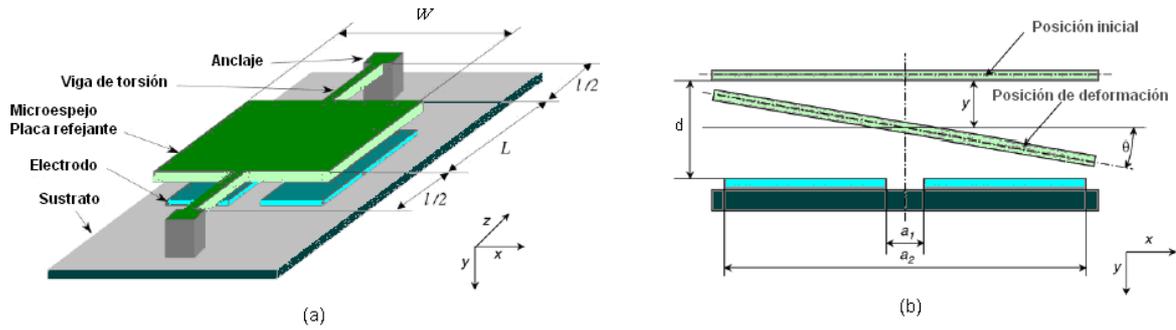


Figura 3.18 (a) Diagrama en 3D (b) Vista de sección transversal con deformación en y.

Como se vio anteriormente, el momento elástico de restauración torsional, en la ecuación 3.11 y ahora la fuerza de restauración de deflexión elástica F_{rB} , que se presenta en la dirección y , son proporcionales a su desplazamiento. La de la fuerza puede expresarse como:

$$F_{rB} = S_y y \quad (3.66)$$

Donde S_y representa rigidez de deflexión de las vigas torsionales y también puede expresarse de la siguiente manera:

$$S_y = \frac{24E_y I}{l^3} \quad (3.67)$$

Donde E_y es el módulo de Young e I es la sección de cruce.

Sin embargo, dado que el microespejo puede tratarse como si fuera un cuerpo rígido y que la fuerza y el momento torsional debidos al peso del microespejo pueden ser despreciados, si suponemos un amortiguamiento viscoso, la resistencia al momento torsional T_{dT} , es linealmente proporcional a la velocidad angular y la fuerza de resistencia de deflexión F_{dB} , es linealmente proporcional a la velocidad de deflexión, esto es:

$$T_{dT} = -C_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (3.68) \quad \text{y} \quad F_{dB} = -c \frac{dy}{dt} \quad (3.69)$$

Donde C_θ y c son los factores de amortiguamiento de los movimientos torsionales y de deflexión, respectivamente.

Así, tenemos que las ecuaciones dinámicas clásicas del microespejo, están dadas por

$$\begin{cases} My + c\dot{y} + K_y y = \Gamma_{eB} \\ I_\theta \ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K_\theta \theta = \Gamma_{eT} \end{cases} \quad (3.70)$$

Donde M es la masa del microespejo, I_θ es el momento de inercia en el eje de rotación, Γ_{eB} es la fuerza electrostática que actúa sobre la masa y Γ_{eT} es el momento torsional debido a la diferencia de potencial aplicada.

En general, se puede ignorar la no linealidad de la rigidez torsional del microespejo. Retomando el modelo del capacitor de placas paralelas, Γ_{eb} y Γ_{eT} , se pueden expresar como:

$$\Gamma_{eB} = \frac{L\epsilon V^2}{2d\theta} \left[\frac{1}{1-(y/d)-(a_2\theta/2d)} - \frac{1}{1-(y/d)-(a_1\theta/2d)} \right] \quad (3.71)$$

$$\Gamma_{eT} = \frac{L\epsilon V^2}{2d\theta^2} \left[\frac{1-(y/d)}{1-(y/d)-(a_2\theta/2d)} - \frac{1-(y/d)}{1-(y/d)-(a_1\theta/2d)} + \ln \left(\frac{1-(y/d)-(a_2\theta/2d)}{1-(y/d)-(a_1\theta/2d)} \right) \right] \quad (3.72)$$

Al introducir los parámetros normalizados:

$$a_1 = \alpha a, \quad a_2 = \beta a, \quad \delta = \frac{y}{d}, \quad \phi = \frac{a\theta}{2d}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{K_\theta}{I_\theta}, \quad \omega_1^2 = \frac{K_y}{M}, \quad R_1 = \frac{c}{M\omega_0}, \quad R_2 = \frac{C_\theta}{I_\theta\omega_0}$$

y $\lambda_{br} = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = \frac{K_y}{M} \frac{I_\theta}{K_\theta}$ y sustituyendo las ecuaciones 3.71 y 3.72 en la ecuación 3.70, las

ecuaciones dinámicas quedan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2\delta}{d\tau^2} + R_1 \frac{d\delta}{d\tau} + \lambda_{br}\delta = \frac{B_1 V^2}{\phi} \left[\frac{1}{1-\delta-\beta\phi} - \frac{1}{1-\delta-\alpha\phi} \right] \\ \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + R_2 \frac{d\phi}{d\tau} + \phi = \frac{B_2 V^2}{\phi} \left[\frac{1}{1-\delta-\beta\phi} - \frac{1}{1-\delta-\alpha\phi} + \ln \left(\frac{1-\delta-\beta\phi}{1-\delta-\alpha\phi} \right) \right] \end{cases} \quad (3.73)$$

$$\text{Donde} \quad B_1 = \frac{L\epsilon W}{3M\omega_0^2 d^3} \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{L\epsilon W^3}{16K_\theta d^3}.$$

La ecuación 3.73 representa el conjunto de ecuaciones no lineales del acoplamiento dinámico de la torsión y deflexión del microespejo.

Para prevenir un sobrecarga por cálculos, cuando $\phi \rightarrow 0$, los términos con un ϕ variable, en el lado derecho de la ecuación 3.73, puede sustituirse por sus límites correspondientes

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\phi} \left[\frac{1}{1-\delta-\beta\phi} - \frac{1}{1-\delta-\alpha\phi} \right] = \frac{\beta-\alpha}{(1-\delta)^2} \quad (3.74)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\phi^2} \left[\frac{1-\delta}{1-\delta-\beta\phi} - \frac{1-\delta}{1-\delta-\alpha\phi} + \ln \left(\frac{1-\delta-\beta\phi}{1-\delta-\alpha\phi} \right) \right] = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(1-\delta)^2} \quad (3.75)$$

Haciendo que $x_1 = \delta$, $x_2 = d\delta/d\tau$, $x_3 = \phi$ y que $x_4 = d\phi/d\tau$, la ecuación 3.73 se vuelve un arreglo de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -R_1 x_2 - \lambda_{br} x_1 + \frac{B_1 V^2}{x_3} \left[\frac{1}{1-x_1-\beta x_3} - \frac{1}{1-x_1-\alpha x_3} \right] \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = -R_2 x_4 - x_3 + \frac{B_2 V^2}{x_3^2} \left[\frac{1-x_1}{1-x_1-\beta x_3} - \frac{1-x_1}{1-x_1-\alpha x_3} + \ln \left(\frac{1-x_1-\beta x_3}{1-x_1-\alpha x_3} \right) \right] \end{cases} \quad (3.76)$$

3.3.1 Respuesta A Una Fuerza Escalón Del Modelo Con Acoplamiento Dinámico

Como se explicó anteriormente, la respuesta a una fuerza escalón del microespejo es una característica muy importante para aplicaciones reales. El modelo de acoplamiento dinámico del microespejo, es de gran ayuda para analizarlos comportamientos con excitación de escalón.

3.3.1.1 Respuesta A Una Fuerza Escalón Sin Amortiguamiento.

Si se asume que el amortiguamiento puede despreciarse, la ecuación 3.76, $R_1=0$ y $R_2=0$, puede utilizarse para calcular la respuesta escalón del microespejo sin el efecto de amortiguamiento. Mejor aún, en el caso del modelo no acoplado, el efecto de deflexión es despreciado y la ecuación 3.73 puede simplificarse de la siguiente forma:

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + R_2 \frac{d\phi}{d\tau} + \phi = \frac{B_2 V^2}{\phi^2} \left[\frac{1}{1-\beta\phi} - \frac{1}{1-\alpha\phi} + \ln \left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi} \right) \right] \quad (3.77)$$

La ecuación 3.77, puede re-escribirse como un arreglo de ecuaciones diferenciales de primer orden, sin el efecto de amortiguamiento:

$$\begin{cases} x_3' = x_4 \\ x_4' = -x_3 + \frac{B_2 V^2}{x_3^2} \left[\frac{1}{1-\beta x_3} - \frac{1}{1-\alpha x_3} + \ln \left(\frac{1-\beta x_3}{1-\alpha x_3} \right) \right] \end{cases} \quad (3.78)$$

Para simular la respuesta del microespejo, los valores iniciales de todas las variables, deben ser prefijados a cero, a saber:

$$[x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0] = [0, 0, 0, 0]$$

De este modo se puede afirmar que la amplitud y el periodo de la respuesta escalón variarán dependiendo del voltaje aplicado, respectivamente. Esto es, la amplitud y el periodo de la respuesta aumentarán conforme el voltaje aplicado incrementa.

La razón por la que tanto la amplitud como el periodo incrementen cuando el voltaje aplicado aumenta, se debe a la no linealidad del sistema.

En un sistema lineal, sólo la amplitud aumenta con el incremento de la magnitud de la carga. Para un sistema lineal, la posición de equilibrio estático es exactamente la media de la respuesta dinámica. Sin embargo, para el microespejo con características no lineales, esto es falso.

Esto significa que al igualar los momentos torsionales y las fuerzas, y al resolver las ecuaciones acopladas, la curva de transferencia de ángulo y voltaje del microespejo, accionado por uno solo de los electrodos, se obtiene como se indica en la figura 3.19.

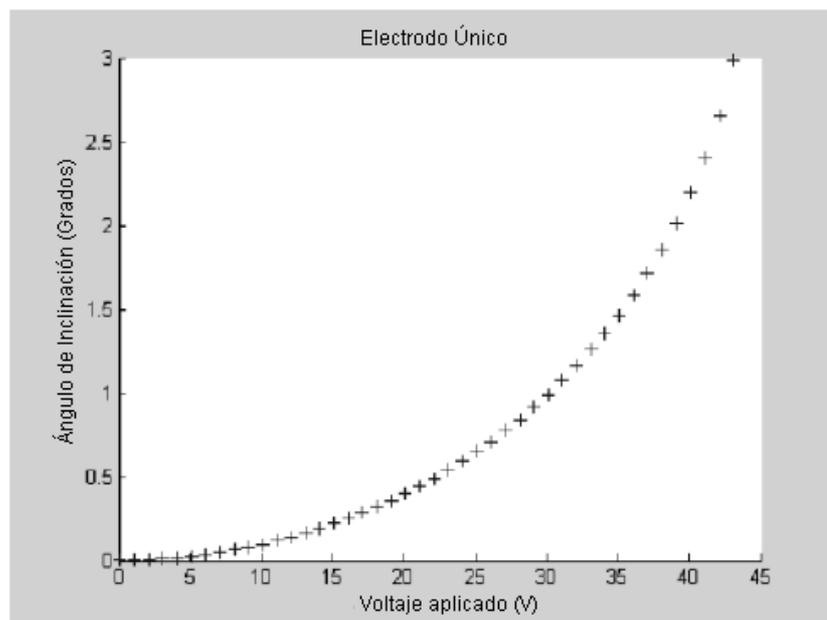


Figura 3.19 Curva del ángulo de torsión vs voltaje del microespejo torsional, manejado por un único electrodo

Es fácil observar que la curva ángulo-voltaje del microespejo torsional presenta un comportamiento no lineal. Esta no linealidad presenta dificultades para alcanzar ángulos de escalonamiento lineales. Por lo tanto, la pregunta sobre cómo alcanzar un comportamiento lineal en la curva ángulo-voltaje, representa un problema importante al momento de diseñar el microespejo.

3.3.1.2 Respuesta Escalón Del Microespejo Con Amortiguamiento Viscoso

La respuesta escalón con el efecto de amortiguamiento viscoso para el modelo acoplado dinámicamente, donde se asume por conveniencia $R_1=R_2=R$ en el cálculo de la ecuación 3.76.

Cuando el voltaje aplicado es bajo, las respuestas de vibración debidas a la torsión y a la deflexión se aproximan al modelo no acoplado. De este modo, al incrementar el voltaje aplicado, la influencia de la vibración por deflexión debida al efecto de acoplamiento es mayor que la causada por el efecto torsional.

Teóricamente, el periodo la respuesta torsional del microespejo con efecto de amortiguamiento, aumentará con el incremento de voltaje que es similar a la respuesta sin efecto de amortiguamiento. Esto quiere decir que a mayor coeficiente de amortiguamiento, mayor será el periodo de la respuesta. Más aún, el periodo del sistema acoplado es mayor que el del sistema no acoplado bajo la aplicación del mismo valor de voltaje.

Cuando el voltaje aplicado es mayor que el voltaje de entrada, el sistema se vuelve inestable a cierto valor de τ , que depende del voltaje aplicado. A mayor voltaje aplicado, que esté más allá del voltaje de entrada, se puede causar más pronto una inestabilidad.

La respuesta torsional suele sobrepasar los límites y el tiempo de levantamiento cuando el efecto de acoplamiento es mayor que en el caso no acoplado. Al mismo tiempo, el sobrepaso y el tiempo de levantamiento incrementan conforme aumenta el voltaje aplicado.

3.3.2 Respuesta Armónica del Microespejo

La respuesta armónica es otra característica importante para las aplicaciones de los microespejos.

Cuando se aplica un voltaje de excitación armónica, $V = V_0 \text{sen}(\omega t)$, entre el microespejo y la placa del electrodo, su ecuación queda como:

$$V^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\lambda\tau)V_0^2 \quad (3.79)$$

Donde $\tau = \omega_0 t$ y $\lambda = \omega/\omega_0$ y ω es la frecuencia angular del voltaje de excitación. Cuando el voltaje de excitación armónica sea aplicado al microespejo, la nueva excitación podría verse como un escalón de excitación y una excitación armónica con una frecuencia angular de 2ω , indicado en la ecuación 3.79.

De esta manera, la respuesta a la excitación armónica anterior, comprende tanto la respuesta transitoria como la respuesta de estado estacionario. Para obtener la respuesta armónica del microespejo, se puede sustituir la ecuación 3.79 en la ecuación 3.76, donde los coeficientes de amortiguamiento del microespejo aún se asumen como $R_1=R_2=R$.

Así, cuando la frecuencia del voltaje aplicado es mucho menor o mayor que la frecuencia de resonancia, la amplitud de las armónicas no son tan grandes, y las respuestas torsional y de deflexión se aproximan a las del modelo no acoplado. Sin embargo, si la frecuencia del voltaje aplicado se aproxima mucho a la frecuencia de resonancia torsional, la vibración por deflexión se ve influenciada en gran parte por el efecto de acoplamiento, a pesar de que la amplitud del voltaje de entrada sea pequeña.