



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA MECÁNICA– TERMOFLUIDOS**

**COEFICIENTE DE ARRASTRE EN PRISMAS RECTANGULARES EN FLUJOS  
CONFINADOS**

**MODALIDAD DE GRADUACIÓN: TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:  
JUAN MANUEL RIVERO FERNÁNDEZ**

**TUTOR PRINCIPAL  
FRANCISCO JAVIER SOLORIO ORDAZ, FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MÉXICO, D. F.      MAYO 2014**



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: JAIME CERVANTES DE GORTARI

Secretario: FEDERICO MENDEZ LAVIELLE

Vocal: FRANCISCO JAVIER SOLORIO ORDAZ

1 er. Suplente: EDUARDO MEDINA HERNÁNDEZ

2 do. Suplente: RUBÉN AVILA RODRÍGUEZ

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA

**TUTOR DE TESIS:**

FRANCISCO JAVIER SOLORIO ORDAZ

-----  
**FIRMA**



*Dedicado a  
Papá, Mamá y Ramón  
que siempre apoyaron mis sueños.*



# Agradecimientos

Antes que nada, quiero dedicar este trabajo a la Universidad Nacional Autónoma de México por todo lo que me ha dado, desde la formación académica hasta los gratos recuerdos en sus estancias. A todos los profesores que tuve, que en mayor o menor medida, me dieron lecciones importantes y me impartieron de su conocimiento. Al Doctor Solorio, mi profesor, tutor y mentor, que me acompañó en este viaje; me guió, ilustró y apoyó, y sobre todas las cosas, me regaló el amor a la mecánica de fluidos a través de sus cursos. A mis sinodales (Dr. Avila, Dr. Medina, Dr. Cervantes y Dr. Mendez) que estuvieron para mí cuando los necesitaba, y me ayudaron en la tesis con sus correcciones, consejos y comentarios. A mis padres que siempre apoyaron mis sueños, sin importar que tan locos fueran; me levantaron cuando andaba caído, y me dieron su amor incondicional en las buenas y en las malas. A Ramón que me dio el regalo del amor por la ciencia y me aclaró infinidad de dudas sin importar la hora que fuera. A Lula que me echó porras y me dio cariño y apoyo cuando yo no veía el final del túnel. A mis compañeros de maestría que me acompañaron en clases y ayudaron a resolver mis inquietudes. Por último, agradezco al lector de esta tesis, esperando que su contenido le sea de utilidad.





# Resumen

En la presente tesis se estudia de forma numérica la importancia de la razón de bloqueo (una dimensión dada del prisma dividida entre la misma dimensión pero del conducto), la razón de forma (altura entre largo del prisma) y la distancia relativa del prisma a la pared en el arrastre de prismas rectangulares en flujos confinados. Se definieron tres valores para cada parámetro y se realizaron combinaciones, dando como resultado 27 casos de estudio, cada uno para cinco valores de Reynolds: 1000, 2500, 5000, 7500 y 10000. Se resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas (RANS) con un modelo de turbulencia  $k - \epsilon$ . Se ocupó la paquetería computacional COMSOL Multiphysics<sup>®</sup> para la realización de 135 simulaciones. Los resultados obtenidos fueron presentados en nueve gráficas, y se realizó un promedio del coeficiente de arrastre con respecto al Reynolds para generar isosuperficies de la razón de bloqueo, a fin de presentar de forma clara la tendencia del coeficiente de arrastre cuando cambia cada parámetro. Se encontró que al aumentar la razón de bloqueo (aumentar la dimensión dada del prisma), el arrastre aumenta; al disminuir la distancia relativa del prisma a la pared aumenta el arrastre; al disminuir la razón de forma (aumentar la longitud del prisma paralela al flujo) disminuye el arrastre excepto para casos de mayor razón de bloqueo. Se concluye de forma general que el factor con mayor importancia es la razón de bloqueo, seguida por la razón de forma, y finalmente, la distancia relativa del prisma a la pared.



# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
Nomenclatura	XV
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo . . . . .	1
1.2. Alcance . . . . .	1
1.3. Motivación . . . . .	1
1.4. Organización de la tesis . . . . .	2
<b>2. Antecedentes</b>	<b>3</b>
2.1. Antecedentes de mecánica de fluidos . . . . .	3
2.1.1. Capa límite . . . . .	3
2.1.2. Desprendimiento . . . . .	3
2.1.3. Arrastre . . . . .	4
2.1.4. Sustentación . . . . .	9
2.2. Revisión bibliográfica . . . . .	9
2.2.1. Mediciones experimentales sobre el efecto de la razón de forma en cilindros rectangulares . . . . .	10
2.2.2. Simulaciones numéricas sobre el efecto de la razón de forma en cilindros rectangulares . . . . .	12
2.2.3. Mediciones experimentales sobre el efecto de la razón de bloqueo . . . . .	13

2.2.4. Simulaciones numéricas sobre el efecto de la razón de bloqueo . . . . .	15
<b>3. Modelo físico</b>	<b>19</b>
3.1. Planteamiento del problema . . . . .	19
3.2. Parámetros a variar . . . . .	19
<b>4. Modelo matemático</b>	<b>23</b>
4.1. Ecuaciones a resolver . . . . .	23
4.2. Condiciones iniciales y de frontera . . . . .	26
<b>5. Modelo computacional</b>	<b>27</b>
5.1. COMSOL Multiphysics® . . . . .	27
5.1.1. Desarrollo . . . . .	27
5.1.2. Modelos de turbulencia . . . . .	29
5.2. Validación . . . . .	31
5.2.1. Comparación de los modelos $k - \epsilon$ y $k - \epsilon$ de bajo $Re$ .	31
5.2.2. Resultados de la validación . . . . .	33
5.2.3. Independencia de malla . . . . .	35
5.3. Casos de estudio . . . . .	37
5.3.1. Valores en los rubros de simulación . . . . .	37
<b>6. Resultados</b>	<b>39</b>
6.1. Visualización . . . . .	39
6.2. Coeficientes de arrastre obtenidos . . . . .	44
6.3. Gráficas . . . . .	44
6.4. Promediado en el Reynolds . . . . .	51
6.4.1. Importancia de $\delta$ . . . . .	51
6.4.2. Importancia de $AR$ . . . . .	52
6.4.3. Importancia de $\beta$ . . . . .	52
6.4.4. Máximos valores en los parámetros . . . . .	53
6.4.5. Comparación con $C_D$ de cilindros rectangulares en flujo libre . . . . .	54
<b>7. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. Experimento en mini túnel de viento</b>	<b>59</b>
A.1. Introducción . . . . .	59
A.2. Planteamiento del problema . . . . .	60

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IX
A.3. Funcionamiento del dispositivo . . . . .	60
A.4. Diferentes modelos propuestos . . . . .	61
A.5. Parámetros a variar . . . . .	63
A.6. Resultados . . . . .	64
A.7. Análisis de resultados . . . . .	65
A.8. Conclusiones . . . . .	69
<b>Referencias</b>	<b>71</b>



# Índice de figuras

2.1. La importancia de hacer aerodinámica una figura para reducir el arrastre (basada en el área frontal) . . . . .	6
2.2. Coeficiente de arrastre de cuerpos suaves en función del $Re$ . . . . .	7
2.3. Arrastre de cuerpos bidimensionales a $Re > 10^4$ . . . . .	8
3.1. Geometría de los casos de estudio. . . . .	20
5.1. Geometria de las simulaciones de validación y comparación. Bloqueo de $1/6$ . . . . .	32
5.2. $C_D$ contra tiempo para bloqueo de $1/6$ . . . . .	34
5.3. $C_D$ contra tiempo para bloqueo de $1/4$ . . . . .	34
5.4. Detalle de malla <i>Más fina</i> alrededor del cilindro cuadrado. . . . .	36
6.1. Visualización del campo de velocidades del caso 3. . . . .	40
6.2. Visualización del campo de presiones del caso 3. . . . .	41
6.3. Visualización del campo de velocidades del caso 25. . . . .	42
6.4. Visualización del campo de presiones del caso 25. . . . .	43
6.5. Resultados de los casos 1, 2 y 3. . . . .	44
6.6. Resultados de los casos 4, 5 y 6. . . . .	46
6.7. Resultados de los casos 7, 8 y 9. . . . .	47
6.8. Resultados de los casos 10, 11 y 12. . . . .	48
6.9. Resultados de los casos 13, 14 y 15. . . . .	48
6.10. Resultados de los casos 16, 17 y 18. . . . .	49
6.11. Resultados de los casos 19, 20 y 21. . . . .	49
6.12. Resultados de los casos 22, 23 y 24. . . . .	50
6.13. Resultados de los casos 25, 26 y 27. . . . .	50
6.14. Agrupación de $C_{Dp}$ en isosuperficies de $\beta$ ; vista isométrica. . . . .	51

6.15. Agrupación de $C_{Dp}$ en isosuperficies de $\beta$ , visto desde el plano $C_D-\delta$ . . . . .	52
6.16. Agrupación de $C_{Dp}$ en isosuperficies de $\beta$ , visto desde el plano $C_D-AR$ . . . . .	53
A.1. Vista lateral del mini túnel de viento. . . . .	61
A.2. Vista transversal del mini túnel de viento. . . . .	62
A.3. Vista lateral de la zona de visualización. . . . .	63
A.4. Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en la razón de bloqueo, frente romo. . . . .	64
A.5. Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en la razón de bloqueo, frente redondeado. . . . .	65
A.6. Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en la razón de forma, bloqueo de 26 %. . . . .	65
A.7. Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en la razón de forma, bloqueo de 46 %. . . . .	66
A.8. Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en el perfil del frente, bloqueo de 26 %. . . . .	66
A.9. Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en el perfil del frente, bloqueo de 46 %. . . . .	67



# Índice de tablas

5.1. Parámetros de malla para validación y comparación de los modelos. . . . .	33
5.2. Resultados de la validación y comparación de modelos. . . . .	35
5.3. Variaciones del refinamiento de malla. . . . .	36
5.4. Parámetros de malla para casos de estudio. . . . .	38
6.1. Coeficientes de arrastre de los casos de estudio. . . . .	45
6.2. Comparación de los $C_D$ de los casos de estudio contra $C_D$ en flujo libre. . . . .	55
A.1. Diferencia entre los parámetros de cada prisma. . . . .	62
A.2. Resultados de los experimentos. . . . .	68



# Nomenclatura

	Romano		Griego
$A$	Lado del prisma paralelo al flujo	$\beta$	Razón de bloqueo
$AR$	Razón de forma	$\delta$	Distancia relativa del prisma a la pared
$B$	Lado del prisma normal al flujo		
$H$	Altura del canal	$\epsilon$	Disipación turbulenta
$k$	Energía cinética turbulenta	$\mu$	Viscosidad dinámica
$P$	Presión	$\mu_T$	Viscosidad turbulenta
$Re$	Número de Reynolds	$\nu$	Viscosidad cinemática
$St$	Número de Strouhal	$\rho$	Densidad
$t$	Tiempo		
$U$	Velocidad media de entrada		
$\mathbf{u}$	Campo de velocidad		
$u$	Componente de la velocidad en $x$		
$\bar{u}$	Velocidad promediada en $t$		
$u'$	Fluctuación de la velocidad		
$v$	Componente de la velocidad en $y$		



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Objetivo

Estudiar el arrastre del flujo bidimensional en prismas rectangulares a fin de conocer los efectos de la razón de bloqueo, razón de forma y distancia relativa del prisma a la pared en el coeficiente de arrastre.

### 1.2. Alcance

Obtener los coeficientes de arrastre en prismas rectangulares, para distintos números de Reynolds, razones de bloqueo, distancias relativas del prisma a la pared y razones de forma, utilizando el código computacional COMSOL Multiphysics®.

### 1.3. Motivación

La obtención del coeficiente de arrastre en objetos de formas diversas es un tema de mucho interés en la mecánica de fluidos. Sin embargo, en la mayoría de los estudios realizados hasta la fecha se considera que el objeto se encuentra en flujo libre, es decir, se desprecia el efecto de las paredes que en muchos casos confinan al flujo, el bloqueo que representa el objeto mismo, y su ubicación dentro del conducto, lo que influye de forma significativa en la naturaleza del flujo alrededor del cuerpo. La razón de forma del cuerpo también juega un papel diferente en flujos libres y confinados. Este tipo de

problemas se presentan en el transporte neumático, en vehículos dentro de túneles, e incluso en las mediciones hechas en túneles de viento, donde se quiere encontrar un coeficiente representativo para flujo libre, por lo que hay que hacer correcciones que tomen en cuenta estos factores.

## 1.4. Organización de la tesis

En el capítulo 2, Antecedentes, se presentan conceptos generales de la mecánica de fluidos, como son la capa límite, el desprendimiento, el arrastre y la sustentación, así como la revisión bibliográfica que compone los artículos más relevantes sobre el arrastre de prismas rectangulares confinados.

En el capítulo 3, Modelo físico, se plantea el problema a estudiar, así como los parámetros a variar que influyen en el arrastre.

En el capítulo 4, Modelo matemático, se plantean las ecuaciones a resolver, las condiciones iniciales y de frontera, el modelo de turbulencia a usar, así como los valores de las constantes del mismo.

En el capítulo 5, Modelo computacional, se da una descripción de la paquetería computacional comercial utilizada (COMSOL Multyphysics<sup>®</sup>), los módulos que se deben cubrir para desarrollar el modelo, la validación de las simulaciones, la independencia de malla y los valores de los módulos en los casos de estudio.

En el capítulo 6, Resultados, se presentan los resultados en tablas y gráficas, realizando análisis de las mismas y promediados con respecto al Reynolds para facilitar la comprensión de la importancia de cada parámetro; también se incluyeron visualizaciones del campo de velocidades y presiones de los casos críticos.

En el capítulo 7, Conclusiones, se plantean y sintetizan las conclusiones generales de la tesis.

En el apéndice A, Experimento en mini túnel de viento, se presenta un experimento sobre el arrastre de prismas rectangulares de distintos tamaños y longitudes dentro de un mini túnel de viento, a fin de registrar la importancia de la razón de bloqueo y la razón de forma en el arrastre.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1. Antecedentes de mecánica de fluidos

#### 2.1.1. Capa límite

Para altos números de Reynolds, un flujo alrededor de un objeto inmerso tiene un comportamiento viscoso cerca de su superficie; lejos del cuerpo se comportará como un flujo potencial. La zona que existe entre la superficie del objeto y el flujo de comportamiento potencial, es definida como capa límite. Ya sea laminar o turbulenta suele escribirse con la letra  $\delta$  (no confundir con la distancia relativa del prisma a la pared, definida más adelante con la misma letra  $\delta$ ), y ser relativamente delgada.

La teoría de la capa límite desarrollada por Prandtl (1904) puede ayudar a entender y calcular de forma analítica los campos de flujo alrededor de geometrías muy sencillas. Sin embargo, una de sus limitaciones más claras es que la teoría sólo abarca hasta el momento del desprendimiento, pero lo que ocurre después de este desprendimiento arroja mucha información de la naturaleza del flujo, *e.g.* la distribución de presiones en la zona separada.

#### 2.1.2. Desprendimiento

Un cuerpo inmerso en un flujo, invariablemente experimentará un desprendimiento de la capa límite; esto puede explicarse con una sencilla analogía mecánica:

Hay una valle entre dos colinas con la misma forma y altura. Hay un camino

que pasa sobre las colinas y el valle, y sobre el camino hay un niño en una avalancha. El niño se encuentra estático en la cima de una de las colinas, con una alta energía potencial, y se lanza hacia el valle dejando que la única fuerza que lo mueva sea la de gravedad. En un mundo sin fricción el niño llegaría al valle con toda la energía potencial que tenía en la cima transformada en energía cinética; empezaría a subir la otra colina hasta que su velocidad llegara a cero, alcanzando la misma altura con la que partió. Pero no. Vivimos en un mundo donde la fricción existe y parte de la energía en la mayoría de los fenómenos físicos (en especial de la mecánica de fluidos) se transforma en calor. El niño se lanzará por el valle y llegará a subir hasta cierta altura, pero nunca a la cima. Lo mismo ocurre con el desprendimiento:

Una partícula de fluido viaja hacia un objeto y comienza a rodearlo (imaginemos un cilindro circular inmerso en un flujo bidimensional), aumentando su velocidad para cumplir con la ley de conservación de masa (tiene que pasar la misma cantidad de fluido por un área sin un objeto,  $A_1$ , que por un área con un objeto,  $A_2$ , donde  $A_1 > A_2$ , y para conseguirlo debe moverse a mayor velocidad en  $A_2$ , de lo que se movía en  $A_1$ ).

Debido al principio de Bernoulli la presión antes de rodearlo es mayor que cuando lo está rodeando; esto significa que la partícula viaja con un gradiente de presión favorable. Pero luego, al llegar a la “cima” del objeto, la partícula tiene que viajar con un gradiente de presión adverso. Nuevamente, imaginando un mundo sin fricción viscosa, la partícula de fluido llegaría a la misma “altura” de la que partió, alcanzando la misma presión y velocidad que tenía antes de rodear al objeto.

Pero no. La viscosidad está presente. La partícula de fluido pierde energía, transformada en calor, y le es imposible seguir rodeando la superficie del cuerpo; se desprende para seguir el camino de menor esfuerzo. Esto da como resultado una estela, donde por lo general se presentan vórtices y zonas de recirculación.

Es de suma importancia tener en cuenta que una capa límite turbulenta recorre una mayor distancia antes de separarse, lo que genera una menor estela y una presión más alta en la superficie del objeto que da a la estela (en comparación con el caso laminar).

### 2.1.3. Arrastre

Cualquier cuerpo que se encuentre inmerso en una corriente experimentará fuerzas causadas por el flujo. La fuerza total paralela al flujo se conoce



como arrastre y está compuesta por dos efectos:

- Arrastre viscoso: Es la fuerza resultante por los esfuerzos viscosos sobre la superficie del objeto, y en mayor medida están ligados a la longitud paralela a la corriente del objeto.
- Arrastre de forma: Es la fuerza resultante por los esfuerzos normales a la superficie, y se manifiesta como una diferencia de presión entre la región de estancamiento del frente y la región separada de la parte trasera .

Es de suma importancia tener en consideración ambos efectos; habrán escenarios donde la forma cobrará mayor relevancia, y otros en donde el factor viscoso sea el que más aporte. La forma adimensional del arrastre, es definida como coeficiente de arrastre y se expresa como  $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$ , donde  $D$  es la fuerza de arrastre y  $V$  es la velocidad media del flujo paralelo a la fuerza. El factor  $1/2$  es un tributo tradicional a Euler y Bernoulli; el área  $A$  usualmente es uno de estos tres tipos:

1. *Área frontal*, el área que se proyecta al ver al cuerpo desde la corriente, es decir, normal a ella; se suele usar para cuerpos gruesos como esferas, cilindros, autos, misiles, etc.
2. *Área de plataforma*, el área que se proyecta al ver al cuerpo desde arriba; suele usarse para cuerpos delgados como alas y aletas.
3. *Área mojada*, usualmente se ocupa en barcos.

Por lo general, la estela ancha y la baja presión en la región separada del flujo laminar causan un coeficiente de arrastre más alto que en el flujo turbulento.

Un objeto romo genera separación inmediata en sus filos (sin importar si la capa límite es laminar o turbulenta), dando como resultado un gran arrastre. En la figura 2.1 se ilustra cómo un cilindro rectangular sufre una separación en todos los filos (a). En comparación, el redondear el frente reduce el arrastre en un 45 %, a pesar de que el  $C_D$  sigue siendo alto (b). Al darle una forma afilada en la parte trasera, se logra reducir el arrastre en un 85 % más (c). Como un contraste dramático, un cilindro circular con un grosor de un octavo de la figura original y una sección transversal 100 veces más chica, genera el

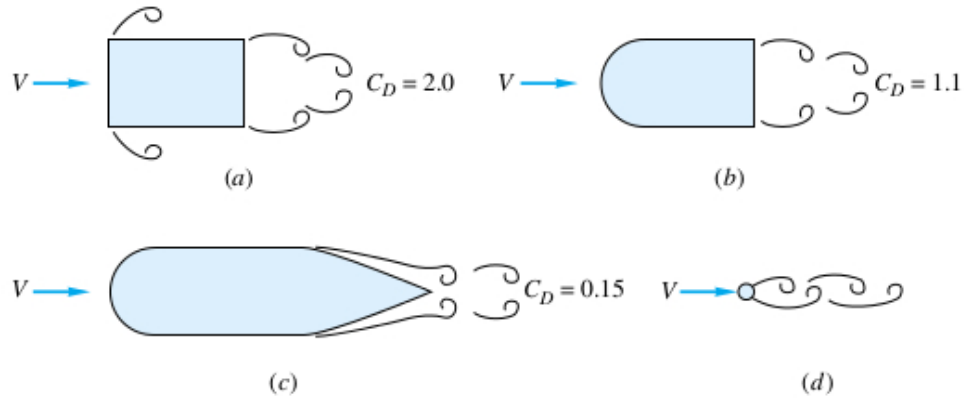


Figura 2.1: La importancia de hacer aerodinámica una figura para reducir el arrastre (basada en el área frontal)

a) cilindro rectangular; b) nariz redondeada; c) nariz redondeada y parte trasera afilada; d) cilindro circular con el mismo arrastre que en el caso c).

White (1998).

mismo arrastre que en el caso anterior (caso c) (d).

El coeficiente de arrastre en un flujo libre depende únicamente del número de Reynolds, no del tamaño del objeto; de ahí la importancia de la adimensionalización, *i.e.*, un modelo a escala presenta el mismo comportamiento de arrastre que el modelo real, siempre y cuando se mantenga constante el Reynolds.

El arrastre de algunos cuerpos anchos (casi bidimensionales) contra el número de Reynolds se muestra en la figura 2.2. Todos los cuerpos tienen un alto  $C_D$  a muy bajos  $Re \leq 1.0$ . Conforme el Reynolds crece las gráficas se separan según lo aerodinámica que sea su forma. Todos los valores de  $C_D$  están basados en el área de plataforma, con excepción de la placa normal al flujo. La tabla de la figura 2.3 proporciona datos de cuerpos bidimensionales, basados en el área frontal, a  $Re \geq 10^4$ . Los cuerpos con bordes agudos (cuerpos romos), que generan separación del flujo sin importar el tipo de capa límite, son insensibles al número de Reynolds. Los cilindros elípticos, siendo redondeados de manera suave, son muy sensibles a si la capa límite es laminar o turbulenta.

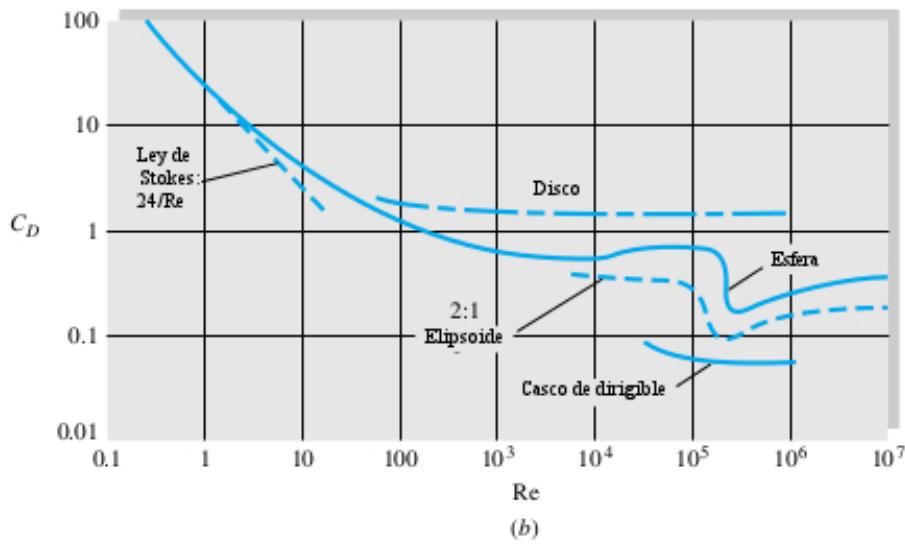
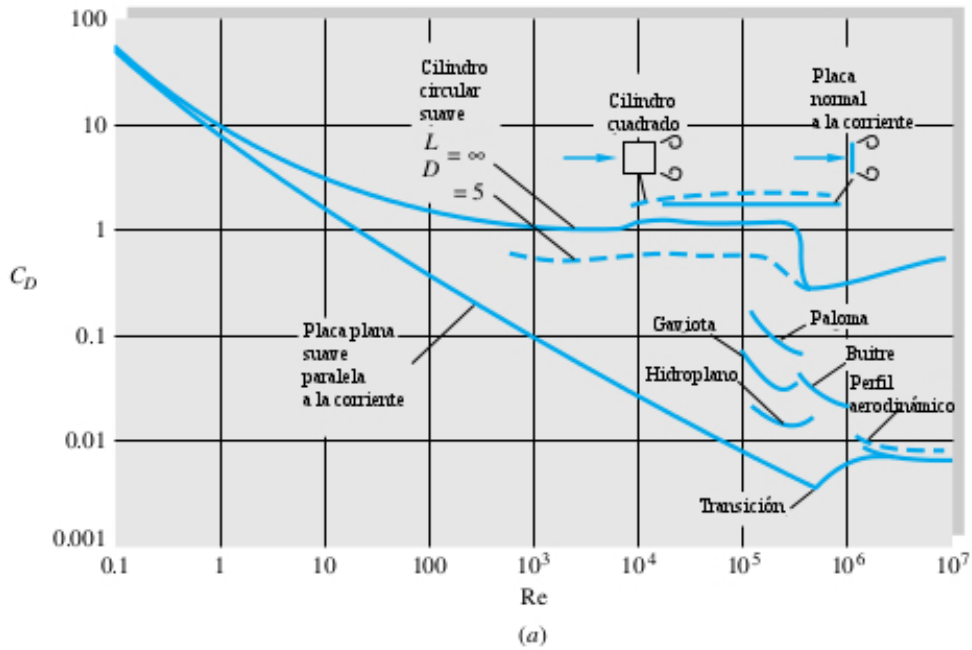





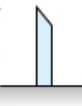






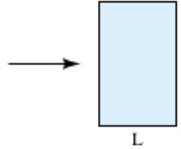


Figura 2.2: Coeficiente de arrastre de cuerpos suaves en función del  $Re$   
 a) cuerpos bidimensionales; b) cuerpos tridimensionales. Nótese la independencia del número de Reynolds a altos número de  $Re$ . White (1998).

Forma	Cd basado en el área frontal	Forma	Cd basado en el área frontal	Forma	Cd basado en el área frontal
 Cilindro cuadrado	2.1	 Medio cilindro	1.2	 Placa	2.0
 Rombo	1.6	 Medio cilindro	1.7	 Placa delgada normal a la pared	1.4
 Medio tubo	1.2	 Triángulo equilátero	1.6	 Hexágono	1.0
 Cilindro	2.3	 Triángulo equilátero	2.0		0.7

Forma	Cd basado en el área frontal								
 <p>Sección con frente redondeado</p> <p><math>L</math>, <math>H</math></p>	$L/H:$	0.5	1.0	2.0	4.0	6.0			
	$C_D:$	1.16	0.90	0.70	0.68	0.64			
 <p>Sección con frente plano</p> <p><math>L</math>, <math>H</math></p>	$L/H:$	0.1	0.4	0.7	1.2	2.0	2.5	3.0	6.0
	$C_D:$	1.9	2.3	2.7	2.1	1.8	1.4	1.3	0.9





Cilindro elíptico:	Laminar	Turbulento
1:1 	1.2	0.3
2:1 	0.6	0.2
4:1 	0.35	0.15
8:1 	0.25	0.1

Figura 2.3: Arrastre de cuerpos bidimensionales a  $Re > 10^4$  White (1998).

### 2.1.4. Sustentación

La fuerza de sustentación, definida como la fuerza total perpendicular al flujo, es generada principalmente por una diferencia de presiones; las fuerzas viscosas afectan la distribución de presiones sobre el objeto, así que influyen de manera indirecta. Sin embargo, a diferencia del arrastre, la sustentación puede explicarse y analizarse, y usualmente se hace, por medio de un flujo potencial (sin viscosidad).

Los cuerpos pensados para generar una alta sustentación en un flujo libre también están hechos para generar la menor cantidad de arrastre posible. El diseño convencional ha evolucionado a formas que no distan mucho de las alas de un ave: relativamente delgadas, con un borde frontal redondeado y una parte trasera afilada.

El coeficiente de sustentación se define con respecto al área de normal a la fuerza  $A_p = bc$ :

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_p}$$

La sustentación ocurre en cualquier objeto que tenga una diferencia de presiones entre superficies paralelas al flujo. Por ejemplo un prisma cuadrado cercano a una pared: el flujo viaja más rápido en el espacio que hay entre el prisma y la pared (para conservar la masa) y más lento en la superficie contraria del objeto (la superficie que da al flujo libre), de esta forma hay una diferencia de presiones ejercida sobre el prisma que lo tratará de hacer colisionar con la pared. Esto se puede apreciar en un caso cotidiano: cuando uno viaja en carretera y pasa cerca de un vehículo de mayor tamaño al propio (por ejemplo un camión) se genera una fuerza de sustentación sobre nuestro vehículo que nos obligará a mantener el volante firme, a fin de no terminar en un accidente.

## 2.2. Revisión bibliográfica

En el flujo alrededor de un cilindro circular el desprendimiento de la capa límite ocurre alrededor de la mitad del cuerpo (un poco antes si es laminar, un poco después si es turbulento), esto debido a la forma suave. En el caso de un cilindro cuadrado<sup>1</sup> el flujo sufre un gradiente de presiones adverso justo

---

<sup>1</sup>El término correcto es barra cuadrada o prisma cuadrado, pero en esta tesis, para simplificar, se tomó la traducción literal del término en inglés *square cylinder*.

al inicio del cuerpo, debido a los filos del frente. Sin embargo la formación de vórtices es muy parecida a la de un cilindro circular: a bajos números de Reynolds se forman dos vórtices gemelos en la estela con simetría en una línea media paralela al flujo. Estos vórtices se alargan conforme crece el  $Re$ . Sin embargo, rebasando un valor crítico (en el cilindro circular suele ser de 49) cualquier inestabilidad rompe la simetría de los vórtices y uno se sobrepone al otro por un momento, se aleja de la parte trasera del objeto, dejando que el otro crezca, repitiéndose el ciclo, y generando un movimiento periódico en el flujo conocido como la calle (o avenida) de Von Kármán.

La frecuencia  $f_0$  se expresa adimensionalmente como el número de Strouhal

$$St = \frac{f_0 d}{U}$$

donde  $d$  es la longitud característica del objeto y  $U$  es la velocidad media del flujo.

### 2.2.1. Mediciones experimentales sobre el efecto de la razón de forma en cilindros rectangulares

Bearman y Trueman (1972) realizaron experimentos con Reynolds ( $Re = UB/\nu$ , donde  $U$  es la velocidad media del flujo de entrada y  $B$  es la longitud del cuerpo normal a la corriente) entre  $2 \times 10^4$  y  $7 \times 10^4$ , variando razones de forma (longitud paralela al flujo,  $A$ , entre  $B$ ) en el rango de  $0.2 \leq A/B \leq 1.2$ . Se descubrió un mayor arrastre con una relación  $A/B = 0.6$ , lo cual fue una sorpresa, dado que anteriormente se creía que el coeficiente de arrastre se mantenía constante y cercano a 2.0 para placa plana y cilindros cuadrados. Encontraron que para una placa plana normal a un flujo la generación de vórtices (y por ende donde se genera una baja presión) se encuentra más alejada de la superficie trasera del objeto, que si se tuviera más profundidad (aumento de  $A/B$ ); mientras mayor sea la distancia entre la cara trasera del cilindro y la generación de vórtices, menor será el arrastre, *i.e.*, para una placa plana el arrastre es menor que para un cilindro con cierto espesor. Sin embargo, llega un punto en el que si la relación  $A/B$  sigue creciendo, las esquinas traseras interactúan con las capas límites desprendidas, y los vórtices vuelven a alejarse del cuerpo nuevamente.

Laneville y Young (1983) realizaron visualizaciones de estos flujos usando técnica de película de aceite para obtener patrones promediados en el tiempo y poder identificar distintos parámetros del flujo, como la longitud de

la burbuja de separación, la distancia entre centros de vórtices, la distancia entre el centro del vórtice a la superficie trasera, entre otros. Recalaron que para  $0.3 \leq A/B \leq 0.8$  había una variación considerable en el arrastre, con el máximo ocurriendo a 0.6. La distribución de presiones en la cara frontal permanece casi constante ante todas las variaciones de forma; en contraste la presión base, definida como la presión promedio de la cara trasera del rectángulo, cambia considerablemente cuando varía la longitud  $A$ .

Ohya (1994) realizó mediciones de la presión base para cilindros rectangulares con  $A/B = 0.4, 0.5$  y  $0.6$ . A  $0.4$  los vórtices se forman lejos del objeto, teniendo una presión base más alta y un arrastre bajo; a  $0.6$  los vórtices se forman cerca del objeto, baja presión base, alto arrastre; a  $0.5$  hay una discontinuidad en la estructura del flujo con una formación de vórtices intermitentes. Sin embargo, es extraño que ni Bearman y Trueman (1972) ni Laneville y Young (1983) hayan reportado un comportamiento similar al recién mencionado.

Okajima (1982) realizó experimentos con relaciones  $A/B = 1.0, 2.0, 3.0$  y  $4.0$  en el rango  $70 < Re < 2 \times 10^4$ . Al inicio del artículo mencionaba como hipótesis la insensibilidad del arrastre al Reynolds, ya que, la separación del flujo siempre ocurría en los bordes iniciales. Sin embargo, encontró que para números extremadamente bajos de  $Re$ , la separación ocurría en los bordes traseros, debido a la reincorporación del flujo en los bordes frontales. Conforme aumenta  $Re$  esta reincorporación se vuelve imposible y se genera una separación inmediata en los bordes frontales. Se denominó un Reynolds crítico,  $Re_C$ , cuando cae el coeficiente de arrastre debido a la interacción de los bordes traseros con la estela. Para el cilindro cuadrado no se encontró  $Re_C$  crítico. Para  $A/B = 2.0$ , el  $Re_C$  ronda alrededor de 500; para  $A/B = 3.0$  ronda en el 1000. Para  $A/B = 4.0$  no se encontró un número crítico (el flujo se mantuvo despegado de los bordes traseros y delanteros para el rango de Reynolds registrado).

Nakamura *et al* (1991) realizaron mediciones para razón de forma de  $3 < A/B < 16$  para Reynolds en el rango  $1.5 \times 10^4 \leq Re \leq 3.1 \times 10^4$  y se encontraron cuatro regímenes principales:

1.  $A/B < 3.2$ : El flujo está completamente separado del borde frontal y la interacción de la capa límite ocurre sin reincorporarse a la superficie.
2.  $3.2 < A/B < 7.6$ : La capa límite se reincorpora de forma periódica y se forma una calle regular de vórtices en la estela.

3.  $7.6 < A/B < 16$ : La burbuja de separación está completamente anclada. Su longitud varía de forma periódica, y en su máximo tamaño la burbuja se divide en forma de vórtices de manera aleatoria hacia la estela, pero no se ve una calle aparente.
4.  $A/B > 16$ : Se desarrolla una capa límite turbulenta, y se genera una calle de vórtices regular, resultado de la interacción de la capa superior con la capa inferior.

Sin embargo a menores números de Reynolds (entre 1000 y 3000), se nota la formación regular de vórtices a lo largo de las distintas razones de forma.

### 2.2.2. Simulaciones numéricas sobre el efecto de la razón de forma en cilindros rectangulares

Las simulaciones numéricas suelen realizarse para casos bidimensionales y para situaciones de flujo laminar. Davis y Moore (1982) fueron los primeros en modelar el flujo alrededor de un cilindro rectangular con una simulación numérica directa (DNS) en 2D a números de Reynolds ( $Re = UB/\nu$ ) entre 100 y 2800, y con razones de forma de  $A/B = 0.6, 1.0$  y  $1.7$ . Llevaron a cabo algunas corridas experimentales como comparación cualitativa para la visualización y cuantitativa con respecto al  $St$  y encontraron buenas aproximaciones entre el modelo numérico y los datos experimentales. En un artículo subsecuente, Davis *et al* (1983) continuaron el trabajo incorporando el efecto de pared en las simulaciones. Su Reynolds varió entre 100 y 1850 con razones de bloqueo (longitud normal al flujo del cilindro,  $B$ , entre el altura del ducto,  $H$ ) de 0.25 y 0.17 con las mismas razones de forma del estudio anterior. La presencia de fronteras que confinan aumentaron el arrastre y el número de Strouhal. Los autores indican que el modelo numérico, a pesar de sus limitaciones, fue capaz de dar buenos resultados del arrastre y el Strouhal. Se realizaron simulaciones a un alto Reynolds,  $Re = 2 \times 10^4$ , por Nagano *et al* (1982) con un método de discretización de vórtices<sup>2</sup>. La razón de forma varía entre 0.5 y 2.0 y se encontró un valor de arrastre máximo que jamás

<sup>2</sup>Un vórtice en un espacio de dos dimensiones se discretiza usando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias complejas de la forma  $\frac{dZ_\mu(t)}{dt} = i \sum_{\nu=1}^M \frac{Q_\nu}{z_\mu(t) - z_\nu(t)}$  donde  $z_\mu(t)$  representa la locación del vórtice discretizado  $\mu$  en un tiempo  $t$ . El valor de  $Q_\nu$  representa la rotación del vórtice  $\nu$ . Es de notarse que el denominador es un conjugado complejo. Si se discretiza el tiempo entonces se obtiene la forma numérica  $z_\mu^{n+1} = z_\mu^n + \Delta t \left( i \sum_{\nu=1}^M \frac{Q_\nu}{z_\mu^n - z_\nu^n} \right)$ .



se había observado en otros estudios numéricos. Es posible que este método haya removido mucha vorticidad para los casos de baja razón de forma, ya que el coeficiente de arrastre era mucho menor al que se encontró experimentalmente.

Okijama (1990) encontró que para  $A/B = 1.0$  y  $A/B = 2.0$  la presión base de la cara trasera varía considerablemente con el Reynolds, en particular para  $Re < 1000$ . Corridas numéricas con método de vórtices discretizados (DVM) a altos  $Re$  dan buena aproximación a los resultados experimentales (de experimentos realizados por el propio Okijama) de coeficiente de arrastre contra razón de forma: el arrastre aumenta cuando la razón decrece hasta  $A/B = 0.6$ .

Por su parte, en su tesis doctoral Nathan Steggel (1998) estudia el flujo bidimensional alrededor de cilindros rectangulares. Se consideran los efectos de la relación  $A/B$ , el ángulo de incidencia y el número de Reynolds. Para un Reynolds de 200, se encontró que el coeficiente de arrastre se incrementa cuando decrece  $A/B$ .

### 2.2.3. Mediciones experimentales sobre el efecto de la razón de bloqueo

Para mediciones en laboratorio de razón de bloqueo, se presentan experimentos con cilindros de distintas geometrías; dado que el comportamiento en cilindros circulares y triangulares pueden tener analogía con el de cuadrados y rectángulos.

Entre los primeros estudios se encuentra el de Ng (1972), donde usando un túnel de viento de sección transversal rectangular de 35.56 cm x 25.4 cm (14 x 10 pulgadas), reportó la variación en los coeficientes de arrastre y sustentación para cilindros circulares y triangulares en flujos bidimensionales, debido a la interferencia de alguna pared, con un gran rango de razón de bloqueo (la razón de bloqueo se define como  $b/B$ , donde  $b$  es la altura del prisma y  $B$  es la altura del canal). Los coeficientes de arrastre obtenidos para cilindros circulares en el rango de Reynolds crítico (cambio de flujo laminar a turbulento) indican que el incremento en la razón de bloqueo, promueve una transición temprana de flujo laminar a turbulento, llevando a menores fuerzas de arrastre.

West y Aplet (1981) presentaron resultados de una serie de experimentos con un cilindro con sección transversal circular perpendicular a un flujo dentro

de un túnel de viento para estudiar la relación del número de Strouhal, la distribución de presiones a lo largo del cilindro y el coeficiente de arrastre del mismo con respecto al cambio en la razón de forma (largo del cilindro entre el diámetro) y la razón de bloqueo (sección transversal del cilindro entre sección transversal del túnel). Si la razón bloqueo es menor al 6 % la forma de la distribución de presiones alrededor del cilindro varía solo ligeramente con la razón de bloqueo, y el número de Strouhal es independiente tanto de la razón de bloqueo y como de la razón de forma. Para razones de bloqueo entre 6 y 16 % hay una distorsión considerable del flujo comparado con un estado sin bloqueo. La reducción en la razón de forma tiene efectos similares en el coeficiente de arrastre que el incremento en la razón de bloqueo.

En términos de aplicaciones, una razón de bloqueo dada puede afectar notoriamente los resultados de experimentos para modelos a escala dentro de túneles de viento. Lutz y Sayer (1998) estudiaron la influencia que tiene la capa límite en el suelo de un túnel de viento sobre el arrastre de un modelo a escala de un camión. Se incorpora un sistema de succión en el suelo (se genera una menor presión abajo del suelo, de modo que haya un flujo a través de orificios en el suelo) para eliminar el efecto de la capa límite y se compara con las mediciones obtenidas sin la succión. Se probó el sistema de manera que la succión no afectara de forma relevante el comportamiento del flujo principal. Se demostró que el arrastre en el modelo del camión aumentaba cuando se removía el efecto de la capa límite en el suelo.

Otro experimento de aplicación y digno de mención fue el realizado por Wang *et al.* (2008) donde se midió el arrastre aerodinámico en un tren de baja velocidad dentro de un túnel. Se reportan los valores de arrastre en un tren de 8 vagones durante una operación de rutina. La diferencia del arrastre por viscosidad  $D_f$  y el arrastre por diferencia de presiones  $D_P$  entre el caso dentro del túnel y el caso de flujo libre se estimó basándose en los resultados obtenidos. Se investigaron dos modos distintos de ventilación en el túnel, ventilación libre (la ventilación se debe al efecto pistón que ejerce el tren dentro del túnel) y recirculación (se inyecta aire frío desde el exterior). Las mediciones se llevaron a cabo con el tren en aire abierto y dentro del túnel. Se concluyó que la presencia del túnel aumenta el coeficiente de arrastre (tanto la parte viscosa como la parte por diferencia de presiones, el arrastre de forma). El efecto del túnel afecta más al arrastre viscoso que al arrastre de forma; el incremento del arrastre viscoso debido a la presencia del túnel es casi el doble que el del arrastre de forma a 18 m/s.

La tesis de maestría de Stig Sund (2010) reportó distribuciones de presión al-

rededor de un cilindro semi-circular en un flujo nominalmente bidimensional. Se propusieron distintos diámetros para el cilindro, variando de 0.05 a 0.30 m para un rango de  $0.3 \times 10^5 \leq Re \leq 3.5 \times 10^5$  ( $Re = UD/\nu$  donde  $U$  es la velocidad media y  $D$  es el diámetro del cilindro). No se encontraron efectos de bloqueo significativos para  $\beta = 0.05$  (radio del cilindro entre la altura del ducto). Los resultados indicaron que la razón de bloqueo es un factor fundamental para la presión en la cara trasera normal al flujo del cilindro para un  $L/D > 10$  (longitud del cilindro entre el diámetro), mientras que la razón de forma tiene una mayor influencia abajo de este valor. La progresión de la separación laminar a separación puramente turbulenta puede acelerarse al incrementar la razón bloqueo. Además, la aceleración sobre los cilindros se encontró proporcional a  $\beta^2$ .

#### 2.2.4. Simulaciones numéricas sobre el efecto de la razón de bloqueo

Como se mencionó anteriormente, Davis *et al.* (1983) estudiaron la formación y desarrollo de vórtices generados por flujos bidimensionales alrededor de cilindros rectangulares, confinados entre paredes. Los parámetros del problema son el número de Reynolds, la razón de forma del rectángulo y el perfil de velocidades de entrada (obtenido de forma experimental con anemómetro de hilo caliente). Se resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo bidimensional. El perfil de velocidades de entrada varió entre uniforme, parabólico y el obtenido de forma experimental. La razón de bloqueo (longitud normal al flujo del cilindro,  $B$ , entre la altura del ducto,  $H$ ) varió entre  $1/4$  y  $1/6$  y el número de Reynolds ( $Re = UB/\nu$  donde  $U$  es la velocidad media del flujo) entre 100 y 1850. No se utilizó un modelo de turbulencia. Las ecuaciones se resuelven por DNS en 2D. Se discuten las fuerzas que actúan sobre los cilindros y las estructuras de las estelas generadas. Las visualizaciones numéricas se comparan con las obtenidas experimentalmente por Davis *et al.* (1983) (uso de humo en túnel de viento).

Años después, Turki *et al.* (2003) simularon las estructuras en las estelas detrás de un cilindro cuadrado en un flujo laminar de canal. Se estudiaron el número de Strouhal y los coeficientes de arrastre y de sustentación en un flujo periódico para razón de bloqueo (altura del cilindro entre la altura del canal) de  $1/4$ ,  $1/6$  y  $1/8$  con número de Reynolds entre 62 y 300. A Reynolds constantes, cuando se incrementa la razón de bloqueo, crecen el número de

Strouhal y el coeficiente de arrastre, y disminuye el coeficiente de sustentación.

Como un complemento Dhiman *et al.* (2008) simularon el efecto de la razón de bloqueo en las características del flujo de un fluido no newtoniano con viscosidad de ley de potencia  $\eta = \left(\frac{\Pi_\epsilon}{2}\right)^{(n-1)/2}$  (donde  $\Pi_\epsilon$  es el segundo invariante del tensor velocidad de deformación) a través de un cilindro cuadrado confinado en un canal. El rango del Reynolds fue de 1 a 45, con el índice de potencia ( $n$ ) de 0.5 a 2.0, y razones de bloqueo (altura del cilindro entre la mitad de la altura del canal) de 1/8, 1/6 y 1/4. Se reportaron extensos resultados en los coeficientes de arrastre local y total, longitud de la estela, función de corriente, vorticidad y viscosidad de ley de potencia en la superficie del cilindro para determinar los efectos combinados del índice  $n$ , la razón de bloqueo y el número de Reynolds. Se encontró que el tamaño de la estela es influenciado más por la razón de bloqueo que por el índice  $n$ . De forma similar, el arrastre es influenciado más por la razón de bloqueo y el Reynolds, que por el índice  $n$  de la ley de potencia.

Un ejemplo de la influencia de la razón de bloqueo en un fenómeno acoplado fue simulado por Krishnan y Kannan (2010), donde realizaron análisis hidrodinámicos y transferencia de calor en un flujo laminar alrededor de una esfera confinada y centrada en un ducto de sección circular. El perfil de velocidades se tomó como parabólico. La razón de bloqueo (diámetro de la esfera entre diámetro del ducto) varió en el rango de 0.1 a 0.5. Se reportaron los efectos en la variación de bloqueo sobre el coeficiente de arrastre. Se usó un rango de número de Reynolds  $0.1 \leq Re \leq 500$  y un número de Prandtl fijo de 5.12. Se encontró que el efecto del bloqueo era más significativo en el coeficiente de arrastre a bajos números de Reynolds. Altas razones de bloqueo retrasaron la separación de capa límite.

Dhiman *et al.* (2011) también investigaron de forma numérica el efecto que tiene la razón de bloqueo en la convección libre y forzada de un obstáculo cuadrado confinado en un ducto horizontal. Las simulaciones se realizaron en un régimen estacionario con número de Reynolds entre 1 y 30, para razones de bloqueo (altura del cuadrado entre la altura del ducto) de 0.125 y 0.25 con un número de Prandtl de 0.7 (aire). Las ecuaciones de gobierno, junto con las condiciones de frontera, se resolvieron usando método de volumen finito. Los coeficientes de arrastre y sustentación totales, las líneas de corriente representativas, la vorticidad y patrones isotérmicos fueron presentados para aclarar el papel que juega la razón de bloqueo en la flotación

de cilindros cuadrados confinados. La asimetría del flujo y los campos de temperatura disminuyen con el aumento del valor en la razón de bloqueo. De manera similar a la convección forzada, el coeficiente de arrastre total se incrementa cuando la razón de bloqueo crece para valores fijos de números de Reynolds. En un estudio orientado a la sedimentación, Lv *et al.* (2011) simularon una partícula que cae en un canal bidimensional lleno de un fluido newtoniano e incompresible usando método de elemento finito. La razón de bloqueo se define como la altura del ducto entre la longitud normal al flujo de la partícula (una definición inversa a las mostradas anteriormente). Se encontró un número de Reynolds crítico  $Re_C$ . Debajo de éste la partícula cae con su lado largo paralelo a la gravedad; de otra forma la partícula cae con su lado largo perpendicular a la gravedad.  $Re_C$  es una función decreciente de la razón de bloqueo y la razón de forma de la partícula (longitud entre altura). Se encontró que el coeficiente de arrastre decrece cuando el  $Re_C$  o la razón de bloqueo crecen; parece ser independiente de la razón de forma.



# Capítulo 3

## Modelo físico

### 3.1. Planteamiento del problema

El problema a estudiar es el arrastre de flujo generado en un cilindro rectangular de largo  $A$  (lado paralelo al flujo) y altura  $B$  (lado normal al flujo) dentro de un canal con un largo de 2 m y altura  $H$  (Fig. 3.1, el origen se encuentra en el centro del canal). El lado inferior del rectángulo se encuentra a una distancia  $Y$  de la pared inferior del canal; la distancia entre la entrada del canal y el frente del cilindro es de 0.6 m. El cilindro se considera infinitamente largo en la dirección perpendicular al plano de visión y el perfil de velocidad de entrada es uniforme<sup>1</sup>.

### 3.2. Parámetros a variar

Se realizaron múltiples simulaciones para abarcar la influencia de los tres parámetros de interés:

1. Razón de bloqueo: Se definió como la altura del rectángulo entre altura del ducto,  $\beta = B/H$ . Se propusieron los valores de  $1/6$ ,  $1/4$  y  $1/2$ .

---

<sup>1</sup>Patel y Head (1969) reportan un  $Re$  crítico experimental para flujo plano de Poiseuille de 1350 con  $Re = \rho UL/\mu$ , donde  $U$  es la velocidad media y  $L$  la altura del canal. Bajo esa definición, el menor Reynolds en las simulaciones es de 2000; entre un perfil de entrada parabólico y uno uniforme, se optó por el uniforme, que representa más al perfil de velocidades de un flujo turbulento.

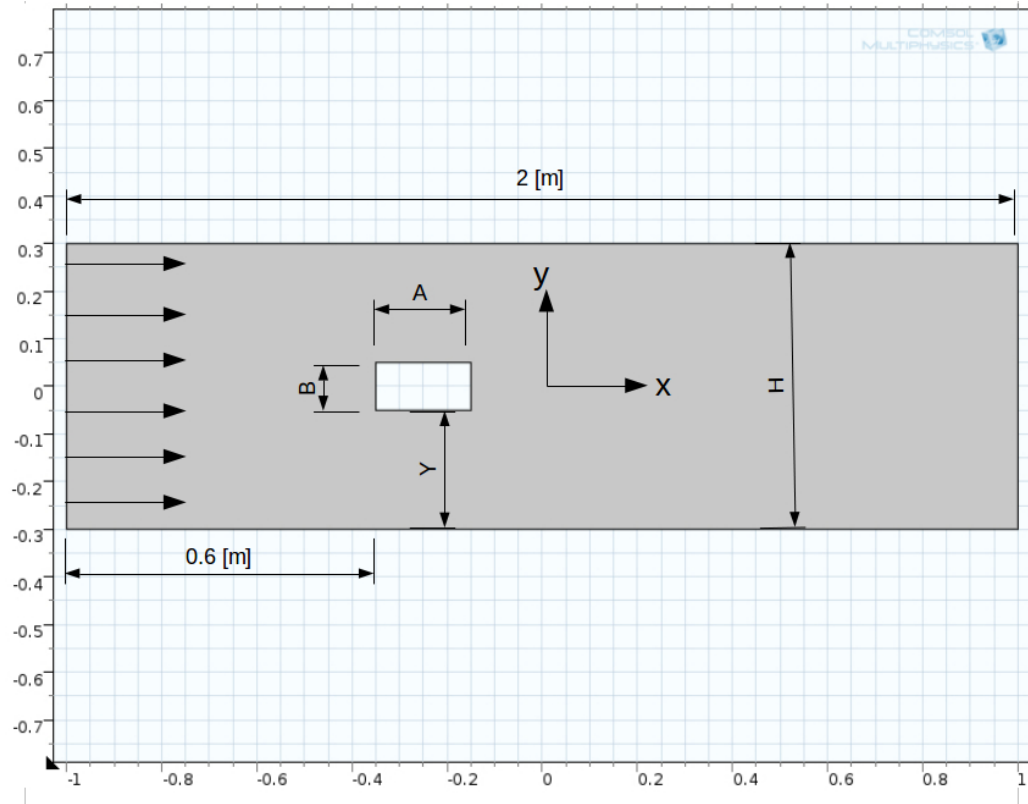


Figura 3.1: Geometría de los casos de estudio.

2. Razón de forma: Se definió como la altura entre el largo del rectángulo,  $AR = B/A$ . Se propusieron los valores de 1 (cuadrado),  $1/2$  y  $1/4$ .
3. Distancia relativa del prisma a la pared: Se definió como  $\delta = \frac{Y}{(H-B)/2}$ ; para una razón de bloqueo dada, todos los valores son constantes, excepto  $Y$ . Se propusieron valores de  $\delta$  igual a 1 (centrado),  $1/2$  y  $1/4$ .

Cada parámetro tuvo tres variaciones. Esto da un total de 27 combinaciones. Para cada combinación se corrieron cinco casos, cada uno con un número de Reynolds ( $Re = UB/\nu$ , donde  $U$  es la velocidad media de entrada)<sup>2</sup> distinto (1000, 2500, 5000, 7500 y 10,000). Eso da un total de 135 simulaciones. Para cada caso se obtuvo el coeficiente de arrastre del cilindro. Todos los datos se juntaron en nueve gráficas distintas ( $C_D$  vs  $Re$ ), acomodo-

<sup>2</sup>No confundir con el  $Re = \rho UL/\mu$  de entrada, donde el valor crítico es de 1350.



dadas para facilitar la apreciación de las tendencias de incremento o decremento del  $C_D$ ; a modo de apreciar la influencia de cada parámetro.



# Capítulo 4

## Modelo matemático

### 4.1. Ecuaciones a resolver

El flujo se considera bidimensional, incompresible y newtoniano ( $\rho$  y  $\mu$  constantes). Las ecuaciones que lo rigen son la conservación de masa (ecuación 4.1) y las de Navier-Stokes en dos dimensiones (en  $x$  ecuación 4.2, en  $y$  4.3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.3)$$

Donde  $u$  es la componente del campo de velocidad en dirección  $x$  y  $v$  es la componente del campo de velocidad en dirección  $y$  ( $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ ),  $P$  es la presión,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido.

Dado que resolver estas ecuaciones de forma directa requiere de un altísimo poder de cómputo, se recurre a un promediado de Reynolds (RANS) en conjunto con la suposición de Boussinesq (para relacionar el tensor de los esfuerzos de Reynolds,  $\overline{u'_i u'_j}$ , con el gradiente de la velocidad promedio,  $\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}$ , usando una viscosidad turbulenta  $\mu_T$ ). Para lograr la cerradura de las ecuaciones se utiliza un modelo de turbulencia  $k - \epsilon$ ; este modelo se sustenta en el uso de dos variables fundamentales en la turbulencia: la energía cinética turbulenta  $k$  y la disipación turbulenta  $\epsilon$ . Estas se definen como  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ ,

$\epsilon = -\nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}$ , White (1991), donde  $u'$  es la fluctuación de la velocidad, medida a partir del promedio temporal de la misma ( $\bar{u}$ ), *i.e.*,  $u = \bar{u} + u'$ .

La viscosidad turbulenta puede calcularse usando  $\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$  donde  $C_\mu$  es una constante que se encuentra de forma semi-empírica y varía para cada problema en específico.

De esta forma, la ecuación de continuidad (ecuación 4.4), las ecuaciones con RANS y Boussinesq (en  $x$ , ecuación 4.5, y en  $y$ , ecuación 4.6) y las del modelo  $k - \epsilon$  (ecuaciones 4.7, 4.8 y 4.9) quedan como:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \\ - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu + \mu_T) \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial (\rho k)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \\ - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\mu + \mu_T) \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial (\rho k)}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \rho \epsilon \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$P_k = \mu_T \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4.9)$$

Los parámetros de turbulencia del modelo utilizan los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 C_{\epsilon 1} &= 1.44 \\
 C_{\epsilon 2} &= 1.92 \\
 C_{\mu} &= 0.09 \\
 \sigma_k &= 1 \\
 \sigma_{\epsilon} &= 1.3
 \end{aligned}$$

## 4.2. Condiciones iniciales y de frontera

Las condiciones iniciales para todas las simulaciones fueron:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}} &= 0 \\
 \bar{P} &= P_{atm}
 \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera fueron:

$$\begin{aligned}
 x = -1 &\longrightarrow \bar{u} = 1; \bar{v} = 0 \\
 x = 1 &\longrightarrow \bar{P} = P_{atm} \\
 y = H/2 &\longrightarrow \bar{u} = 0; \bar{v} = 0 \\
 y = -H/2 &\longrightarrow \bar{u} = 0; \bar{v} = 0
 \end{aligned}$$

En referencia a la frontera de salida (donde  $\bar{P} = P_{atm}$ ), es muy usual en las paqueterías de CFD ver este tipo de condición. En particular, para el estudio realizado, la salida se encuentra muy cerca del cilindro por lo que los valores de velocidad en esa frontera son desconocidos (la estela generada se extiende más allá de la salida); por lo tanto es conveniente usar esta condición.

En todos los puntos de las paredes del cilindro,  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ .

# Capítulo 5

## Modelo computacional

### 5.1. COMSOL Multiphysics<sup>®</sup>

El código computacional ocupado para las simulaciones numéricas fue COMSOL Multiphysics<sup>®</sup>, versión 4.3; un paquete de análisis y resolución por elemento finito de ecuaciones diferenciales parciales con la capacidad para atacar distintos fenómenos físicos y relacionarlos entre sí (sistemas acoplados). Comenzó a programarse en 1986 por estudiantes graduados del *Real Instituto de Tecnología* en Estocolmo, Suecia. Entre sus módulos se encuentran Acústica, Baterías y Celdas de Combustible, Electroquímica, Transferencia de calor, Mezclado, CFD, entre muchos otros. Para el proyecto se utilizó únicamente el módulo de CFD. Para validar el código, se realizaron simulaciones en 2D de los flujos alrededor de un cuadrado con distintas razones de bloqueo. Se calcularon los coeficientes de arrastre, y se compararon con valores registrados en el artículo de Davis *et al.* (1983), donde, como se mencionó anteriormente, se realizaron simulaciones numéricas validadas por experimentos.

#### 5.1.1. Desarrollo

Un modelo en COMSOL<sup>®</sup> está integrado por distintas partes. Cada una cumple una función específica para la descripción, elaboración y cálculo del modelo:

- *Definiciones globales*: Aquí se definen y describen parámetros globales como velocidad media, longitud característica, etc. La ventaja de usar

estos parámetros es el ahorro de tiempo (con un solo cambio en el valor, todos los rubros que utilicen el parámetro se verán automáticamente renovados). También pueden definirse elementos como funciones (por ejemplo un escalón) para usarse a lo largo de los componentes.

- *Geometría*: Aquí se construye el modelo, ya sea en 2D o 3D usando formas primitivas como cuadrados, círculos, rectángulos, etc.; o líneas rectas, curvas, polígonos, etc. En el caso de la licencia comercial, pueden importarse geometrías de paqueterías CAD.
- *Materiales*: En este componente se definen las propiedades del fluido a usarse. Puede utilizarse un material ya existente de la biblioteca que contiene el programa, o puede definirse uno dando los valores de las propiedades requeridas por la física del problema. También pueden importarse tablas con valores experimentales del material a usar.
- *Físicas*: Aquí es donde se incorporan los fenómenos a estudiar. Se pueden usar físicas por separado (transferencia de calor, electromagnetismo, mecánica de sólidos, mecánica de fluidos, etc.) o, como su nombre Multiphysics lo indica, combinar distintas físicas para resolver problemas acoplados. En este rubro se definen las condiciones iniciales y condiciones de frontera.
- *Malla*: Se puede dejar que la computadora la construya dándole únicamente un parámetro de fineza, o se puede designar con mayor precisión el tamaño máximo y mínimo de elemento, el factor de curvatura, la resolución en regiones angostas, el crecimiento de elementos, etc. La malla puede ser fija, deformable, o móvil. Un mismo modelo puede contener varias mallas de distintos tamaños y resoluciones.
- *Estudio*: En esta sección se determina si la resolución será estacionaria o variable con el tiempo (en cuyo caso se puede definir el delta de tiempo, el tiempo inicial y final, etc.). Se puede controlar el número de iteraciones, los factores de error y las variables a calcular, el tipo de solucionador, iterativo o directo (PARDISO, MUMPS o SPOOLES)<sup>1</sup>, entre otros elementos.

---

<sup>1</sup>Basados en la factorización LU en donde se factoriza una matriz como el producto de una matriz triangular inferior y una superior. Los solucionadores directos calculan la inversa de la matriz; los iterativos iteran hasta encontrar una aproximación de la solución.



- *Resultados:* Aquí se obtienen las gráficas de las variables obtenidas (en el caso de CFD: presión, velocidades, esfuerzos, etc.). Se pueden obtener gráficas, animaciones, e integrar valores de una variable dada a lo largo de superficies. También se pueden exportar los resultados en distintos formatos.

### 5.1.2. Modelos de turbulencia

Los modelos de turbulencia fueron inventados para poder estudiar y simular flujos complejos (y evidentemente turbulentos), sin la necesidad de resolver directamente las ecuaciones de Navier-Stokes (para lo cual se necesita un altísimo poder de cómputo, si no se quiere obtener un resultado con un alto porcentaje de error). Entre los más populares se encuentran el  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$ , y el  $k - \tau$ . Los último dos son derivados del primero.

La paquetería de COMSOL® incluye en su haber cinco modelos de turbulencia distintos. Para el tema de estudio, los dos más apropiados son el modelo  $k - \epsilon$  y el modelo  $k - \epsilon$  para bajos números de Reynolds. En ambos modelos se plantea un fluido newtoniano e incompresible.

#### Modelo $k - \epsilon$

Los detalles de este modelo se describieron en la sección 4.1

#### Modelo $k - \epsilon$ de bajo $Re$

Antes que nada, se aclara que por *bajo número de Reynolds* no se refiere al  $Re$  global, sino a un Reynolds turbulento local definido como  $Re = \bar{u}l/\nu$ . Este número de Reynolds varía a lo largo del dominio computacional y es proporcional a la relación de la viscosidad turbulenta y la viscosidad molecular  $\nu_t/\nu$ . Esta relación es del orden de 100 o más para flujo completamente turbulento y cae a cero cuando se aproxima a una pared.

El modelo usado en COMSOL® se basa en la variante Launder-Sharma, que a su vez, está basada en el modelo de Jones & Launder; las ecuaciones que se resuelven son:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\
& \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \\
& -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu + \mu_T) \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial(\rho k)}{\partial x} \\
& \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \\
& -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\mu + \mu_T) \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial(\rho k)}{\partial y} \\
& \rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} \right) = \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \rho \epsilon \\
& \rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) = \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} f_\epsilon \\
& \mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} f_\mu \\
& P_k = \mu_T \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Donde  $f_\epsilon$  y  $f_\mu$  son funciones de amortiguamiento definidas como

$$\begin{aligned}
f_\epsilon &= 1 - 0.3 \exp(-R_T^2) \\
f_\mu &= \exp\left(\frac{-3.4}{(1 + R_T/50)^2}\right) \\
R_T &= \frac{k^2}{\nu \epsilon}
\end{aligned}$$

Los parámetros de turbulencia del modelo utilizan los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
C_{\epsilon 1} &= 1.5 \\
C_{\epsilon 2} &= 1.9 \\
C_{\mu} &= 0.09 \\
\sigma_k &= 1.4 \\
\sigma_{\epsilon} &= 1.5
\end{aligned}$$

## 5.2. Validación

### 5.2.1. Comparación de los modelos $k - \epsilon$ y $k - \epsilon$ de bajo $Re$

Para decidir por el modelo de turbulencia más adecuado al caso de estudio se usaron resultados del artículo de Davis *et al* (1983) como referencia; en particular, los valores de  $C_D$  promedio y  $C_{Drms}$  para razones de bloqueo de 1/6 y 1/4, a un  $Re$  de 1000<sup>2</sup>, con perfil de velocidad de entrada uniforme. Los escenarios simulados en COMSOL<sup>®</sup> tenían las siguientes características:

- *Definiciones globales:* Velocidad media de 1 m/s, altura del cilindro de 0.1 m, altura del ducto de 0.6 m si la razón de bloqueo es de 1/6 y 0.4 m si es de 1/4 y una función escalón unitaria.
- *Geometría:* Rectángulo que simula el ducto de 2 m de largo y una altura mencionada en el rubro anterior; cuadrado que simula el cilindro cuadrado localizado a  $-0.3$  m en  $x$  y 0 m en  $y$  del centro del ducto (Fig. 5.1).
- *Materiales:* Se definieron como propiedades del fluido

$$\begin{aligned}
\rho &= 1 \text{ kg/m}^3 \\
\mu &= 1 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}
\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>El Reynolds de entrada (definido por Patel *et al*, (1969) como  $Re = \rho UL/\mu$  y cuyo valor crítico es 1350) que corresponde para nuestro  $Re = 1000$  es de 4000 para  $\beta = 1/4$  y 6000 para  $\beta = 1/6$  por lo que el flujo es claramente turbulento.

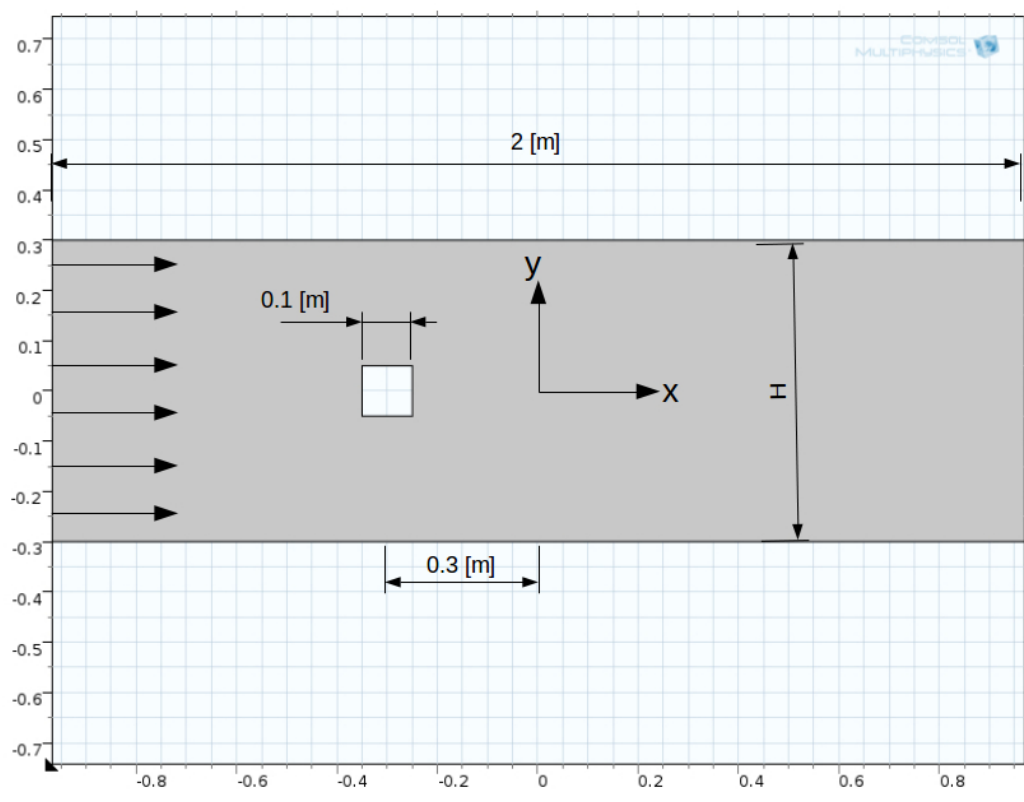


Figura 5.1: Geometría de las simulaciones de validación y comparación. Bloqueo de  $1/6$ .

Los valores en la altura del ducto variaron según la razón de bloqueo; todos los demás parámetros geométricos se mantuvieron constantes.

- *Físicas*: Para ambos modelos de turbulencia se planteó una entrada de velocidad uniforme por el lado izquierdo del ducto y una salida por el lado derecho con presión igual a la atmosférica suprimiendo el flujo de retorno. Condición de no deslizamiento en las paredes superior e inferior del ducto y en la superficie del cilindro. Las condiciones iniciales son  $\mathbf{u} = 0$  y  $P = P_{atm}$ .
- *Malla*: Este rubro varió en los 4 escenarios como muestra la tabla 5.1.
- *Estudio*: Para todos los casos se estableció un tiempo inicial en el segundo 0, se usó un paso de tiempo de 0.1, y se calculó hasta 10 segundos. Se

Tabla 5.1: Parámetros de malla para validación y comparación de los modelos.

Bloqueo	Modelo	Elementos de dominio	Elementos de frontera
1/6	$k - \epsilon$	85860	1386
1/6	$k - \epsilon$ de bajo $Re$	90548	1402
1/4	$k - \epsilon$	125540	1936
1/4	$k - \epsilon$ de bajo $Re$	132428	1952

usó un solucionador segregado<sup>3</sup> con sub-solucionadores directos PAR-DISO. Para el caso del modelo  $k - \epsilon$  las variables dependientes fueron la presión, la velocidad, la energía cinética turbulenta,  $k$ , y la disipación turbulenta,  $\epsilon$ .

Para el caso del modelo  $k - \epsilon$  de bajo  $Re$  las variables dependientes fueron la presión, la velocidad, la energía cinética turbulenta,  $k$ , y la disipación turbulenta,  $\epsilon$ .

### 5.2.2. Resultados de la validación

Utilizando la función de *integral* de COMSOL<sup>®</sup> se obtuvieron los coeficientes de arrastre, graficándolos contra el tiempo y exportándolos en un archivo *.txt* para obtener los promedios y las *rms*. Las figuras 5.2 y 5.3 muestran las gráficas del coeficiente de arrastre contra el tiempo. Dado que los primeros segundos de simulación marcan un ruido considerable, el promedio del  $C_D$  se dio del segundo 7 al segundo 10, cuando las simulaciones se estabilizan. La tabla 5.2 muestra la comparación entre valores reportados por Davis *et al* (1983) y valores obtenidos en COMSOL<sup>®</sup>.  $t_C$  representa el tiempo de cómputo.

---

<sup>3</sup>El solucionador parte la matriz Jacobiana para resolver las variables dependientes en grupos separados, esto requiere un mayor número de iteraciones, pero ocupa una menor cantidad de memoria RAM.

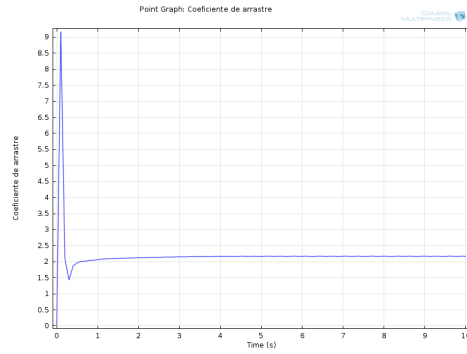
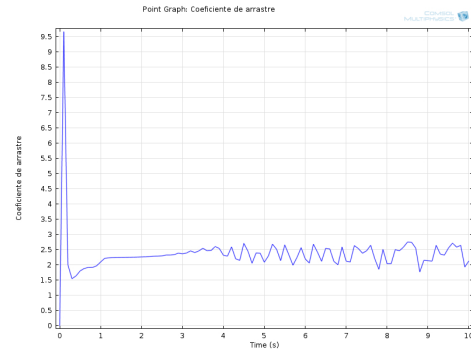
(a) Modelo  $k - \epsilon$ .(b) Modelo  $k - \epsilon$  de bajo  $Re$ .

Figura 5.2:  $C_D$  contra tiempo para bloqueo de  $1/6$ .  
 $Re = 1000$ , perfil de velocidad de entrada uniforme.

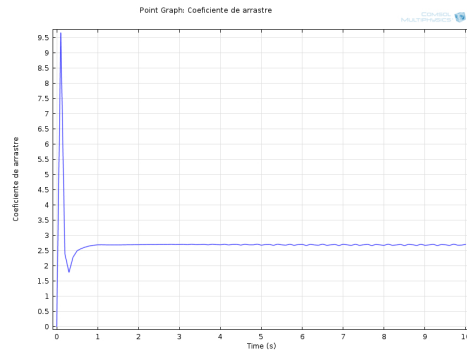
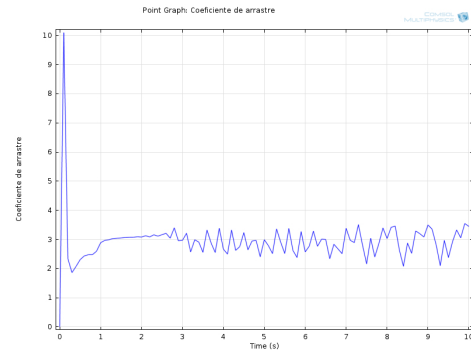
(a) Modelo  $k - \epsilon$ .(b) Modelo  $k - \epsilon$  de bajo  $Re$ .

Figura 5.3:  $C_D$  contra tiempo para bloqueo de  $1/4$ .  
 $Re = 1000$ , perfil de velocidad de entrada uniforme.

Tabla 5.2: Resultados de la validación y comparación de modelos.

Perfil	$\beta$	Re	Davis <i>et al</i>	COMSOL <sup>®</sup>		%Err. $C_D$	$t_C$ [min]
			$C_D$	Modelo	$C_D$		
Uniforme	1/6	1000	2.32	$k - \epsilon$	2.16	-6.89	90
Uniforme	1/6	1000	2.32	$k - \epsilon$ de bajo Re	2.36	+1.72	126
Uniforme	1/4	1000	2.82	$k - \epsilon$	2.69	-4.6	135
Uniforme	1/4	1000	2.82	$k - \epsilon$ de bajo Re	2.96	+4.9	350

Se puede apreciar que ambos modelos dieron mejores y peores resultados, según fuera la razón de bloqueo<sup>4</sup>. No obstante, ambos obtuvieron buenas aproximaciones en la validación.

Se decidió finalmente por el modelo  $k - \epsilon$  dado que su tiempo de cálculo es menor.

### 5.2.3. Independencia de malla

Para ahorrar tiempo de cálculo, al ocupar análisis numérico, es recomendable realizar un análisis de independencia de malla. Este consiste en repetir el mismo escenario, con distintas refinaciones de malla, comparando siempre un parámetro de referencia (en nuestro caso, el  $C_D$ ). Una vez que el valor del parámetro se estabiliza, se puede considerar que se alcanzó la independencia, y un refinamiento más profundo no arrojará mejores resultados.

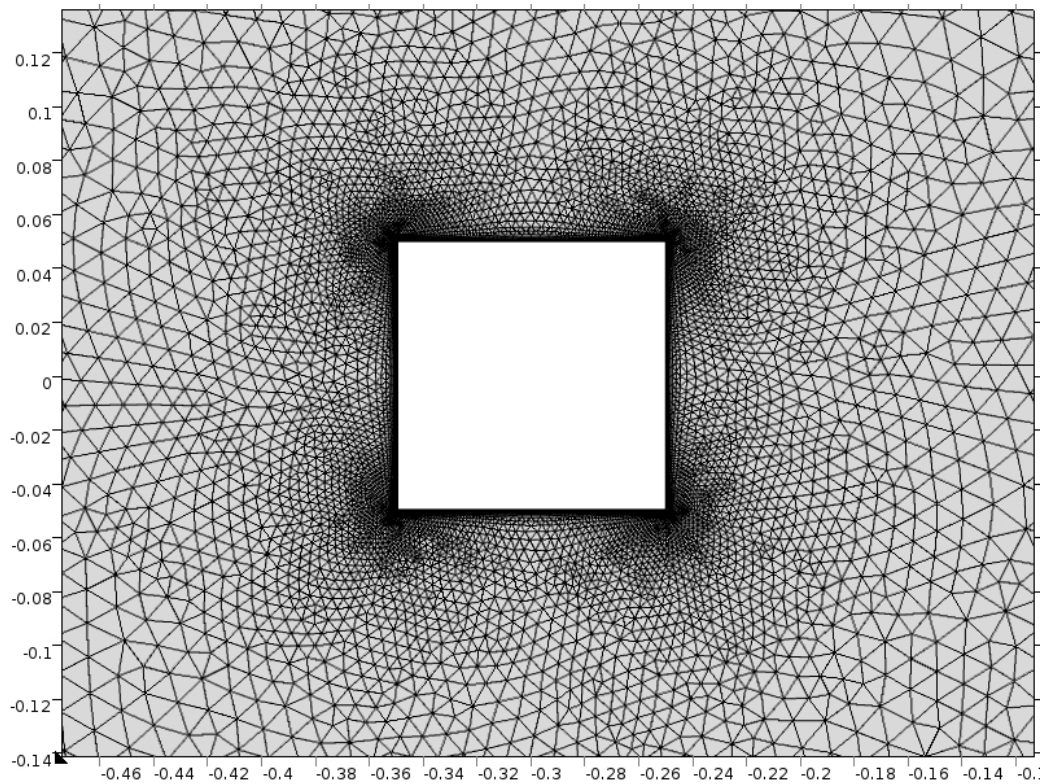
El caso que utilizamos fue el de flujo de entrada uniforme, razón de bloqueo de 1/6 y  $Re = 1000$  (el mismo que se usó para la comparación de modelos turbulentos). Comenzamos con una malla extremadamente gruesa, y pasamos por nueve simulaciones hasta llegar a una malla extremadamente fina. Los parámetros de malla, los valores de  $C_D$  y  $C_{Drms}$  y el tiempo de cálculo de cada simulación se encuentran en la tabla 5.3.

Se decidió utilizar para el resto de las simulaciones una malla con un número de elementos de dominio entre 50000 y 80000, dado que el valor de  $C_D$  en la malla *Más fina* (Fig. 5.4) varió en un 0.41% con respecto a la *Extremadamente fina*, y su tiempo de cómputo es casi tres veces menor que el de la *Extra fina*.

<sup>4</sup>Es curioso notar que el modelo  $k - \epsilon$  diera un mejor resultado para una razón de bloqueo de 1/4; dada la naturaleza del modelo para bajos Reynolds, se hubiera esperado lo contrario.

Tabla 5.3: Variaciones del refinamiento de malla.

Refinamiento	Elementos de dominio	Elementos de frontera	$C_D$	$t_C$ [min]
<i>Extremadamente gruesa</i>	1394	138	1.91	0.6
<i>Extra gruesa</i>	2092	168	1.89	0.9
<i>Más gruesa</i>	3714	236	1.89	1.25
<i>Gruesa</i>	5758	300	1.92	3.15
<i>Normal</i>	9504	370	1.95	7.25
<i>Fina</i>	21645	722	2.06	15
<i>Más fina</i>	50146	1342	2.158	33
<i>Extra fina</i>	85860	1386	2.16	82
<i>Extremadamente fina</i>	226356	1516	2.167	300

Figura 5.4: Detalle de malla *Más fina* alrededor del cilindro cuadrado.



## 5.3. Casos de estudio

### 5.3.1. Valores en los rubros de simulación

- *Definiciones globales:* Velocidad media de 1 m/s, altura del cilindro de 0.1 m, altura del ducto de 0.6 m si la razón de bloqueo es de 1/6, 0.4 m si es de 1/4 y 0.2 m si es de 1/2, y una función escalón unitaria.
- *Geometría:* Rectángulo que simula el ducto de 2 m de largo y una altura mencionado en el rubro anterior; rectángulo que simula el cilindro localizado a 0.6 m en  $x$  y 0 m en  $y$  de la entrada del ducto, medido hasta la cara frontal del cilindro (Fig. 3.1).

- *Materiales:* Se definieron como propiedades del fluido

$$\begin{aligned}\rho &= 1 \text{ kg/m}^3, 5 \text{ kg/m}^3, 10 \text{ kg/m}^3, 50 \text{ kg/m}^3, 100 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 1 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}\end{aligned}$$

- *Físicas:* Se planteó una entrada de velocidad uniforme por el lado izquierdo del ducto y una salida por el lado derecho con presión igual a la atmosférica suprimiendo el flujo de retorno. Condición de no deslizamiento en las paredes superior e inferior del ducto y en la superficie del cilindro. Las condiciones iniciales son  $\mathbf{u} = 0$  y  $P = P_{atm}$ .
- *Malla:* Este rubro varió en las 27 combinaciones como muestra la tabla 5.4.
- *Estudio:* Para todos los casos se estableció un tiempo inicial en el segundo 0, se usó un paso de tiempo de 0.1, y se calculo hasta el segundo 10. Se usó un solucionador segregado con sub-solucionadores directos PARDISO (los mismos valores usados para las simulaciones de validación). Las variables dependientes fueron la presión, la velocidad, la energía cinética turbulenta,  $k$ , y la disipación turbulenta,  $\epsilon$ .

Tabla 5.4: Parámetros de malla para casos de estudio.

Combinación	$\beta$	$\delta$	$AR$	Elementos de dominio	Elementos de frontera
1	1/6	1	1	50032	1342
2	1/6	1	1/2	51718	1396
3	1/6	1	1/4	53994	1492
4	1/6	1/2	1	49756	1342
5	1/6	1/2	1/2	50926	1396
6	1/6	1/2	1/4	53034	1492
7	1/6	1/4	1	48750	1342
8	1/6	1/4	1/2	49918	1396
9	1/6	1/4	1/4	51274	1492
10	1/4	1	1	71938	1892
11	1/4	1	1/2	73658	1968
12	1/4	1	1/4	76980	2116
13	1/4	1/2	1	71290	1892
14	1/4	1/2	1/2	72832	1968
15	1/4	1/2	1/4	75626	2116
16	1/4	1/4	1	70352	1894
17	1/4	1/4	1/2	71608	1970
18	1/4	1/4	1/4	73530	2118
19	1/2	1	1	58506	1856
20	1/2	1	1/2	59204	1934
21	1/2	1	1/4	60156	2088
22	1/2	1/2	1	57990	1856
23	1/2	1/2	1/2	58522	1934
24	1/2	1/2	1/4	59314	2088
25	1/2	1/4	1	57670	1867
26	1/2	1/4	1/2	58058	1945
27	1/2	1/4	1/4	57940	2099

# Capítulo 6

## Resultados

### 6.1. Visualización

Se presentan visualizaciones para  $Re = 10000$  en el segundo 10 de simulación, de la magnitud del campo de velocidades y del campo de presiones, para los dos casos que tuvieron la mayor diferencia en el valor del  $C_D$ ; éstos fueron el caso 3 (Fig. 6.1 y 6.2) y el caso 25 (Fig. 6.3 y 6.4).

Se puede observar que en el caso 25 (Fig. 6.3) la cara superior e inferior del cilindro tienen gradientes de velocidad mayores (en especial en la cara inferior donde el efecto de la pared está más presente) que los del caso 3 (Fig. 6.1); esto lleva a que el arrastre viscoso sea mayor en el caso 25 que en el caso 3. Además se observa que la diferencia de presiones entre la cara frontal y trasera del cilindro del caso 25 (Fig. 6.4) es mucho mayor que en la del caso 3 (Fig. 6.2); por lo que el arrastre de forma es mayor en el caso 25 que en el caso 3.

Esta diferencia reside en el efecto de la pared (caso 25) que aumenta el arrastre y en la interferencia de los bordes traseros del cilindro con la estela (caso 3) que disminuye el arrastre.

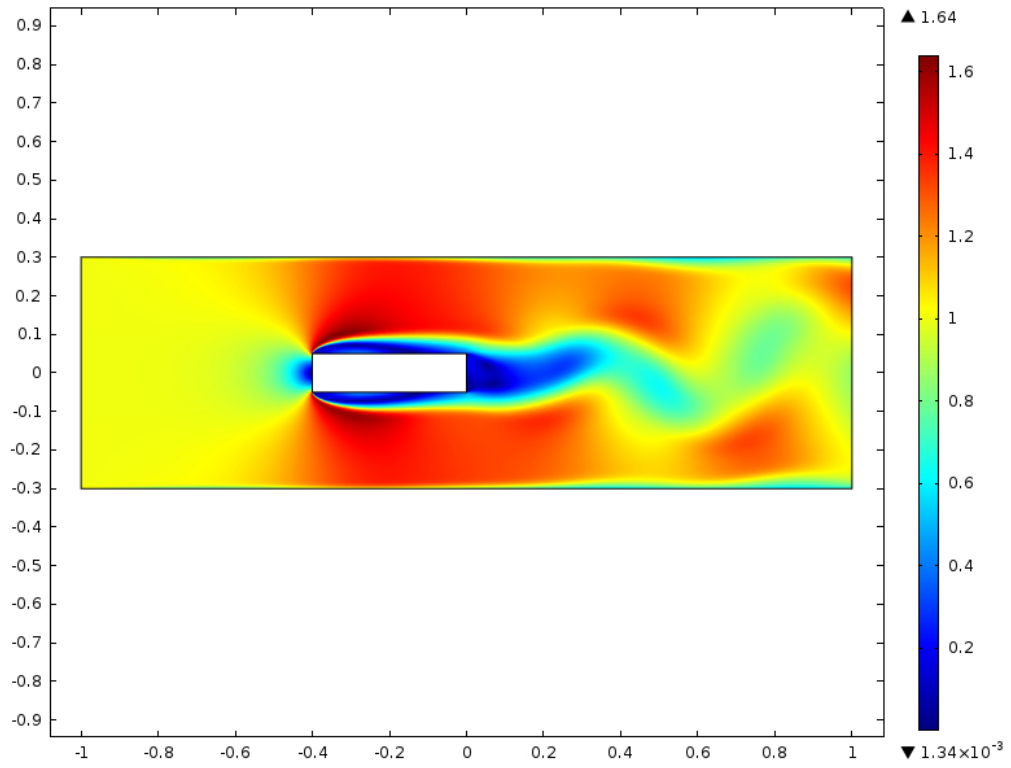


Figura 6.1: Visualización del campo de velocidades del caso 3.  $Re = 10000$ ,  $\beta = 1/6$ ,  $\delta = 1$  y  $AR = 1/4$ . Simulación en el segundo 10.

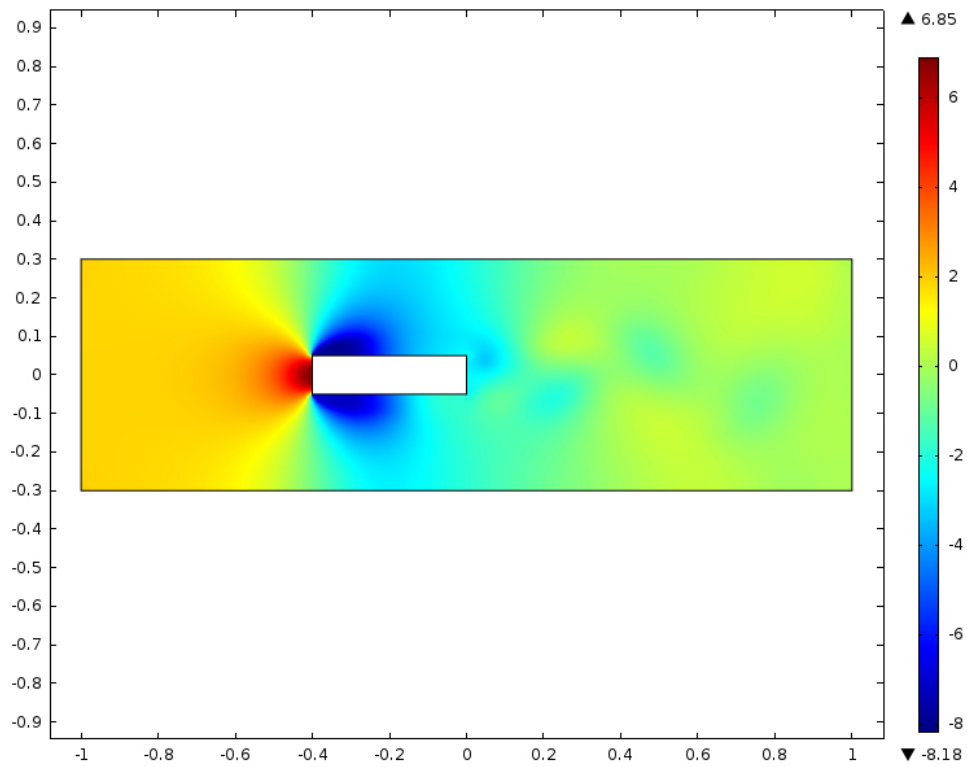


Figura 6.2: Visualización del campo de presiones del caso 3.  
 $Re = 10000$ ,  $\beta = 1/6$ ,  $\delta = 1$  y  $AR = 1/4$ . Simulación en el segundo 10.

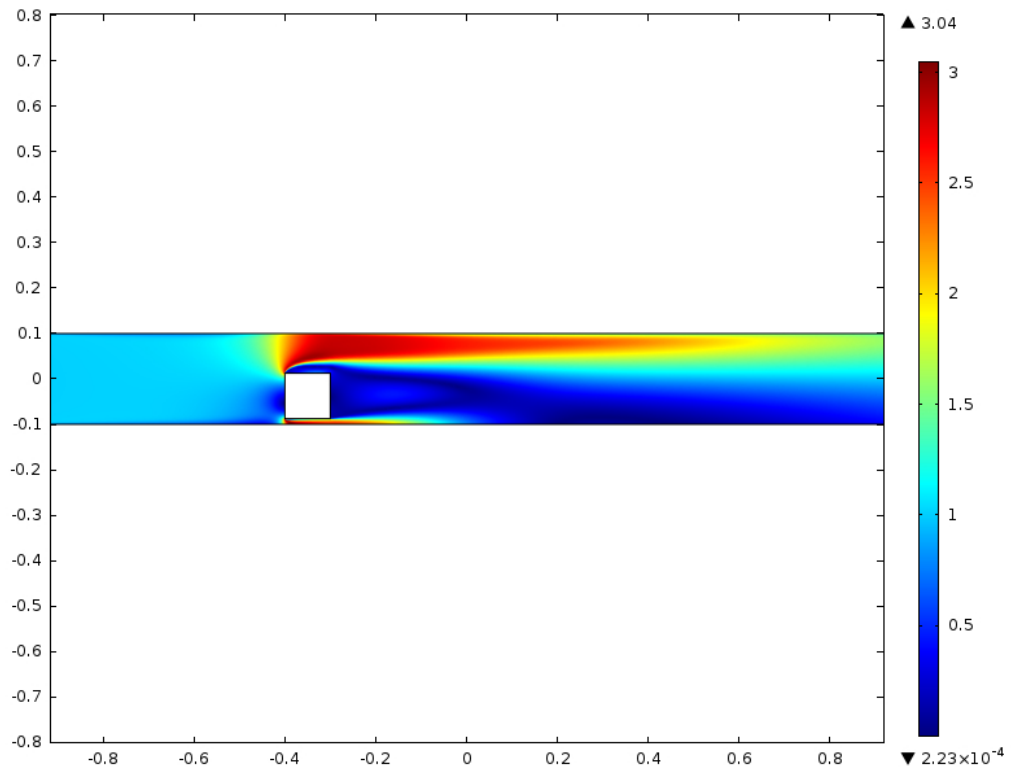


Figura 6.3: Visualización del campo de velocidades del caso 25.  $Re = 10000$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\delta = 1/4$  y  $AR = 1$ . Simulación en el segundo 10.

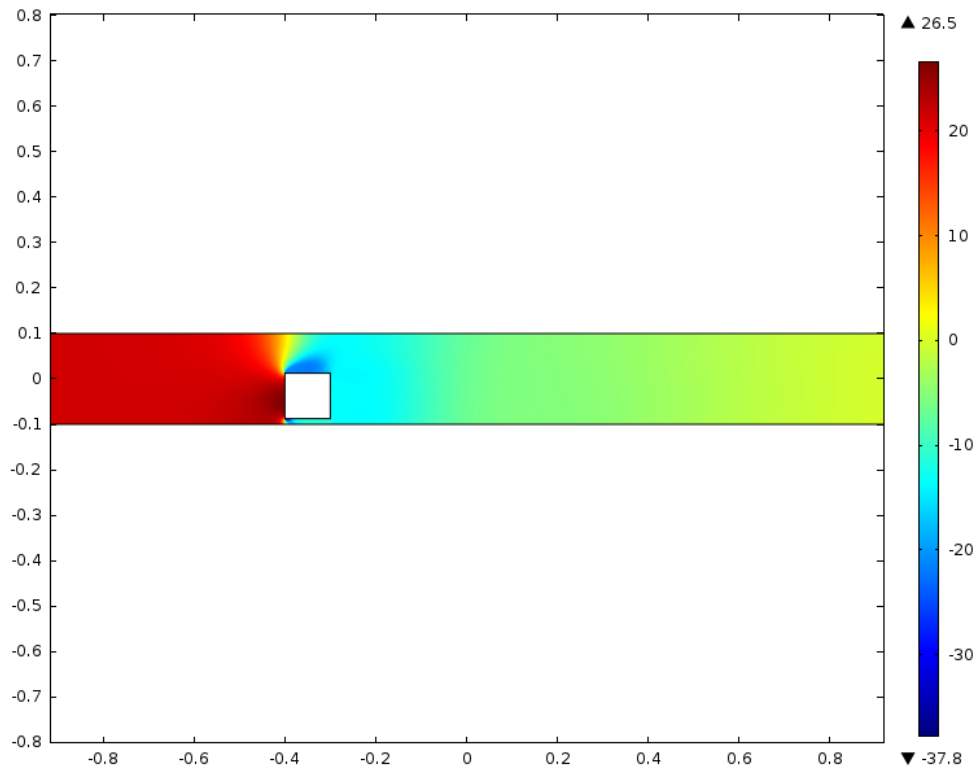


Figura 6.4: Visualización del campo de presiones del caso 25.  
 $Re = 10000$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\delta = 1/4$  y  $AR = 1$ . Simulación en el segundo 10.

## 6.2. Coeficientes de arrastre obtenidos

La tabla 6.1 muestra los  $C_D$  promediados en el tiempo (del segundo 7 al segundo 10, contados a partir del arranque de la simulación), obtenidos para cada simulación; al final de cada fila, se muestra un coeficiente de arrastre promediado con respecto al Reynolds,  $C_{Dp}$  (ya que en todos los casos, la variación del  $C_D$  contra el número de Reynolds es menor al 21 %).

## 6.3. Gráficas

Por claridad, para evitar una saturación gráfica, los resultados se agruparon en 9 figuras (Figs. 6.5-6.13); cada una representa gráficas del  $C_D$  contra  $Re$ , con valores de  $\beta$  y  $\delta$  fijos. La diferencia entre las tres gráficas de cada figura reside en el valor del  $AR$ .

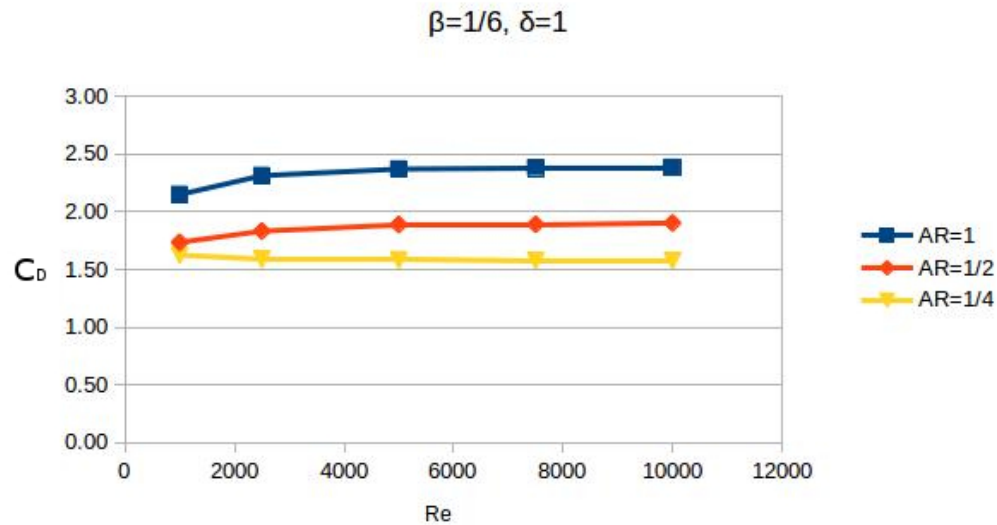


Figura 6.5: Resultados de los casos 1, 2 y 3.

Para las figuras 6.5-6.7 el  $C_D$  tiene una ligera variación con respecto al Reynolds, teniendo el mayor cambio al pasar de  $Re = 1000$  a  $2500$ . Se aprecia que al aumentar  $AR$  aumenta el arrastre.



Tabla 6.1: Coeficientes de arrastre de los casos de estudio.

$Re$	1000	2500	5000	7500	10000	
Caso	$C_D$	$C_D$	$C_D$	$C_D$	$C_D$	$C_{Dp}$
1	2.15	2.31	2.37	2.38	2.39	2.32
2	1.74	1.83	1.89	1.89	1.90	1.85
3	1.63	1.59	1.58	1.58	1.58	1.59
4	2.25	2.42	2.48	2.49	2.49	2.43
5	1.88	1.93	1.96	1.96	1.96	1.94
6	1.69	1.66	1.64	1.63	1.63	1.65
7	2.44	2.66	2.72	2.72	2.72	2.65
8	2.09	2.14	2.15	2.15	2.15	2.14
9	1.79	1.79	1.78	1.78	1.77	1.78
10	2.68	2.82	2.85	2.86	2.86	2.81
11	2.18	2.22	2.26	2.27	2.27	2.24
12	2.22	2.18	2.16	2.15	2.14	2.17
13	2.76	2.92	2.99	3.00	3.00	2.94
14	2.38	2.44	2.47	2.47	2.48	2.45
15	2.21	2.14	2.11	2.09	2.08	2.12
16	2.94	3.33	3.53	3.54	3.49	3.37
17	2.64	2.72	2.76	2.76	2.76	2.73
18	2.27	2.22	2.20	2.19	2.18	2.21
19	5.80	5.79	5.79	5.78	5.76	5.78
20	5.73	5.58	5.48	5.43	5.39	5.52
21	6.09	5.83	5.67	5.58	5.52	5.74
22	6.26	6.41	6.45	6.43	6.43	6.40
23	5.84	5.70	5.61	5.57	5.54	5.65
24	6.14	5.90	5.74	5.65	5.59	5.80
25	6.84	7.17	7.26	7.24	7.20	7.14
26	5.94	5.88	5.85	5.81	5.76	5.85
27	6.08	5.89	5.77	5.70	5.65	5.82

Para  $\beta = 1/4$  y  $\delta = 1$  (Fig. 6.8) el  $C_D$  tiene una ligera variación con respecto al Reynolds, teniendo el mayor cambio al pasar de  $Re = 1000$  a  $2500$ . Para  $AR = 1/2$  y  $AR = 1/4$  los valores de  $C_D$  son muy parecidos; sin embargo al aumentar a  $AR = 1$  el  $C_D$  aumenta notablemente.

Para  $\beta = 1/4$  y  $\delta = 1/2$  (Fig. 6.9) el  $C_D$  tiene una ligera variación con

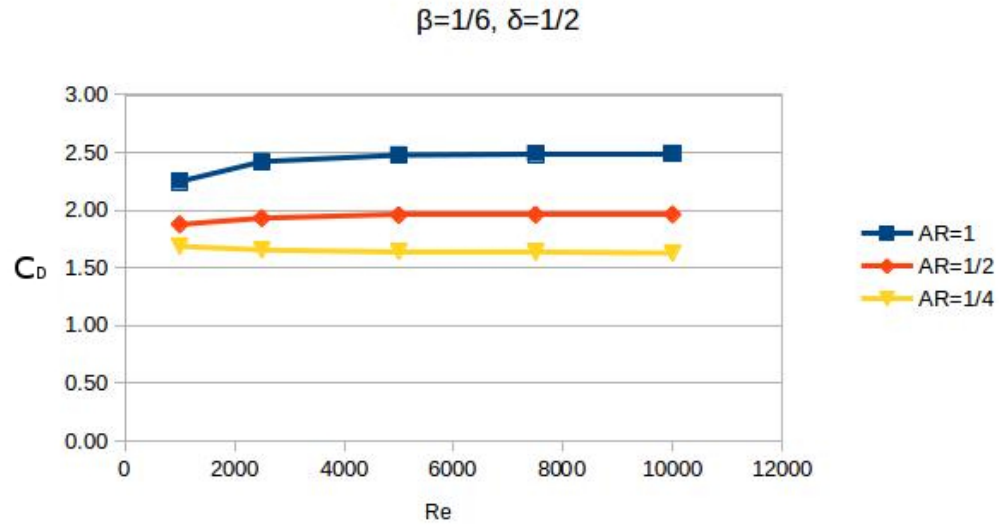


Figura 6.6: Resultados de los casos 4, 5 y 6.

respecto al Reynolds, teniendo el mayor cambio al pasar de  $Re = 1000$  a  $2500$ . Se aprecia que al aumentar  $AR$  aumenta el arrastre.

Para  $\beta = 1/4$  y  $\delta = 1/4$  (Fig. 6.10), con valores de  $AR = 1/2$  y  $1/4$ , el  $C_D$  tiene una ligera variación con respecto al Reynolds, teniendo el mayor cambio al pasar de  $Re = 1000$  a  $2500$ ; para  $AR = 1$  hay cambio notorio de  $Re = 1000$  hasta  $Re = 5000$ . Se aprecia que al aumentar  $AR$  aumenta el arrastre.

Para  $\beta = 1/2$  y  $\delta = 1$  (Fig. 6.11), para  $AR = 1$ , el  $C_D$  tiene una ligera variación con respecto al Reynolds; para  $AR = 1/2$  y  $AR = 1/4$  al aumentar el  $Re$  disminuye el  $C_D$ . Con respecto a la variación de  $AR$  se aprecia una tendencia distinta a la de los casos anteriores: para  $Re = 1000$  y  $2500$ ,  $AR = 1/4$  genera los mayores  $C_D$ ; le sigue  $AR = 1$  y finalmente  $AR = 1/2$ ;<sup>1</sup> para  $Re = 5000$  hasta  $10000$ ,  $AR = 1$  genera los mayores  $C_D$ ; le sigue  $AR = 1/4$  y finalmente  $AR = 1/2$ .

Para  $\beta = 1/2$  y  $\delta = 1/2$  (Fig. 6.12), para  $AR = 1$ , el  $C_D$  tiene una ligera

<sup>1</sup>Se cree que este cruce de gráficas se debe a una falta de precisión en la simulación (falta de refinamiento en la malla o de un paso de tiempo menor; dado que COMSOL<sup>®</sup> es un código cerrado es difícil saber en donde se encuentra el error de cálculo), ya que esta tendencia no vuelve a presentarse en ninguna otra figura.

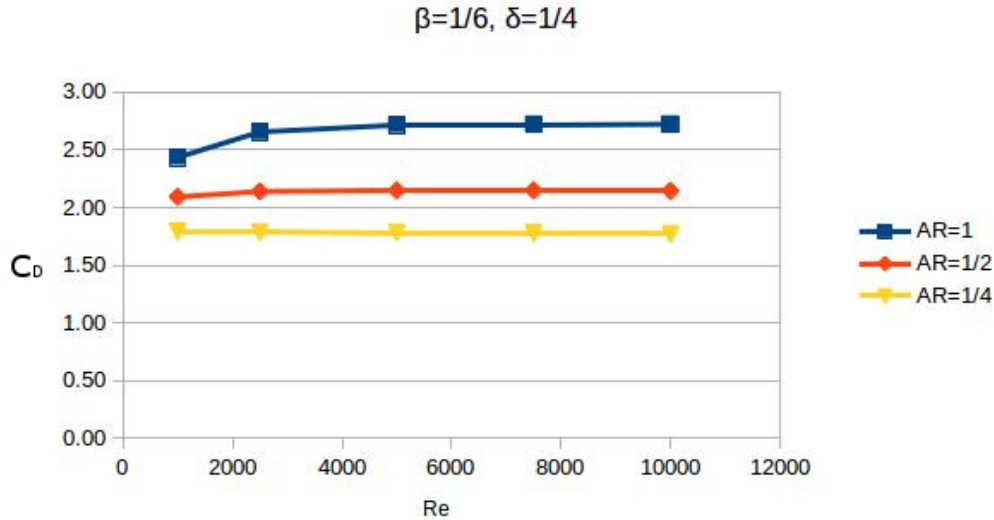


Figura 6.7: Resultados de los casos 7, 8 y 9.

variación con respecto al Reynolds, con el mayor cambio de  $Re = 1000$  a  $Re = 2500$ ; para  $AR = 1/2$  y  $AR = 1/4$  al aumentar el  $Re$  disminuye el  $C_D$ . Con  $AR = 1$  se generan los mayores  $C_D$ ; le sigue  $AR = 1/4$  y finalmente  $AR = 1/2$ .

Para  $\beta = 1/2$  y  $\delta = 1/4$  (Fig. 6.13), el  $C_D$  tiene una ligera variación con respecto al Reynolds, teniendo el mayor cambio al pasar de  $Re = 1000$  a  $2500$ . Con  $AR = 1$  se generan los mayores  $C_D$ ; para  $AR = 1/2$  y  $AR = 1/4$  los valores son prácticamente iguales.

La tendencia al variar  $AR$  en las figuras 6.11-6.13 se debe a que el efecto de las paredes aumenta el arrastre viscoso (su importancia contra el arrastre de forma aumenta), por ello el  $C_D$  es mayor cuando se alarga el cilindro al pasar de  $AR = 1/2$  a  $AR = 1/4$ ; pero el arrastre viscoso sigue teniendo menor importancia ante el arrastre de forma cuando se pasa de  $AR = 1/4$  a  $AR = 1$  y por ello el  $C_D$  mayor lo sigue teniendo  $AR = 1$ , *i.e.*, con  $\beta = 1/2$  la importancia del arrastre viscoso aumenta; este aumento es suficiente para que  $AR = 1/4$  de un  $C_D$  mayor que el de  $AR = 1/2$ , pero no lo suficiente como para que  $AR = 1/4$  de un  $C_D$  mayor que el de  $AR = 1$ .

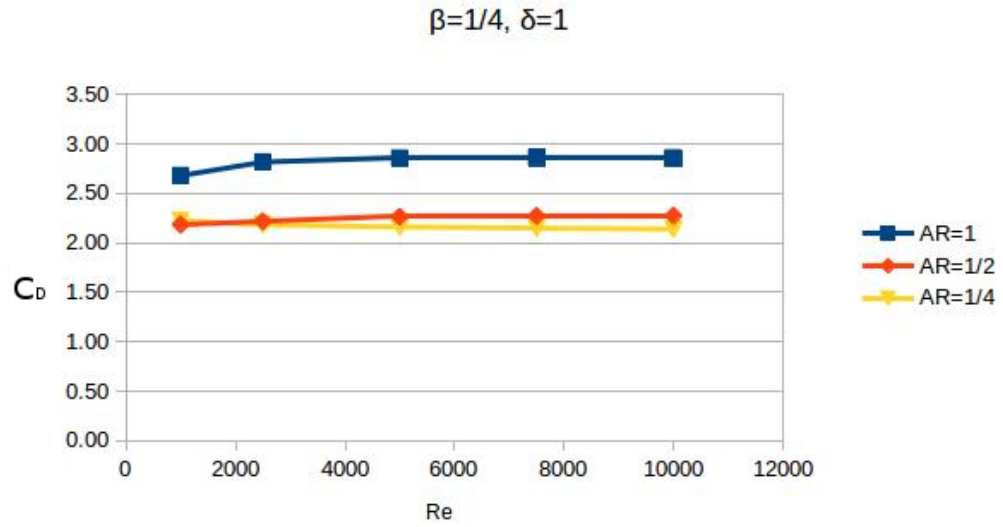


Figura 6.8: Resultados de los casos 10, 11 y 12.

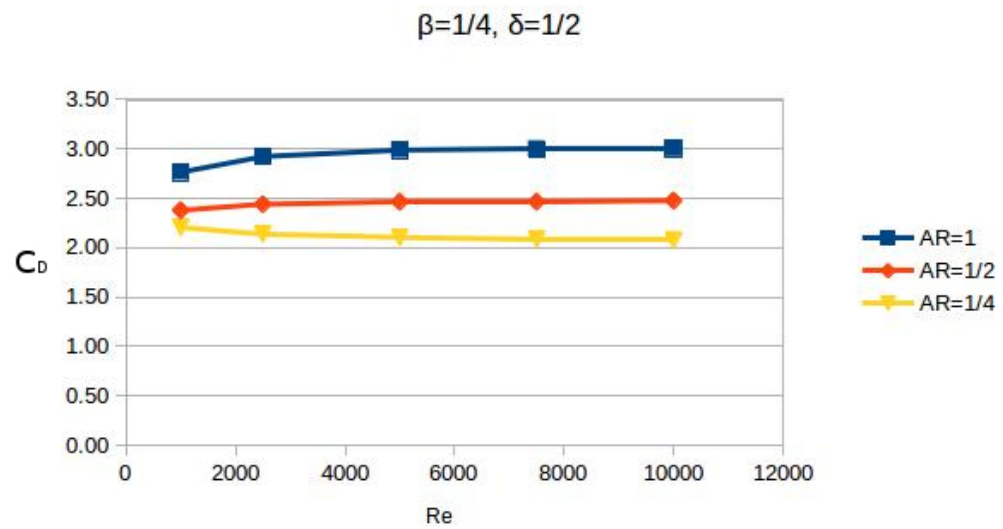


Figura 6.9: Resultados de los casos 13, 14 y 15.

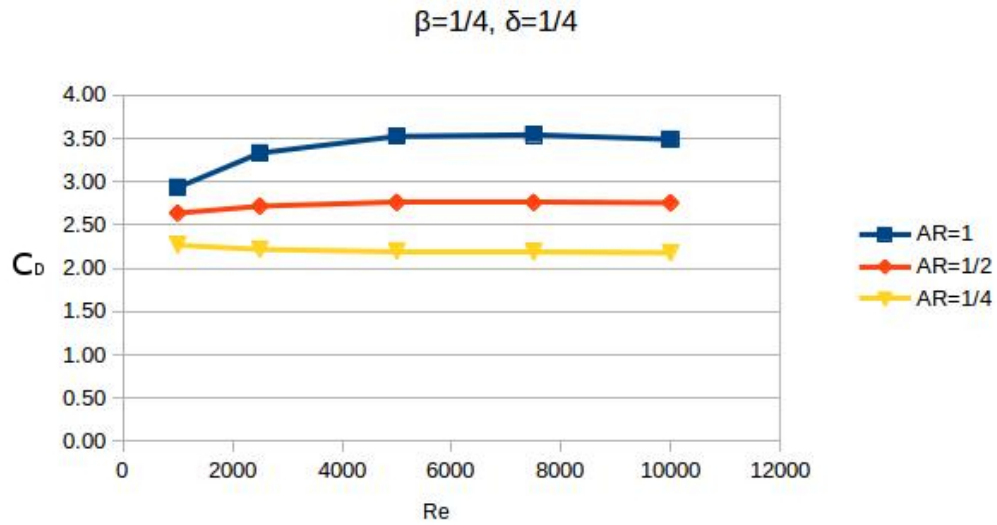


Figura 6.10: Resultados de los casos 16, 17 y 18.

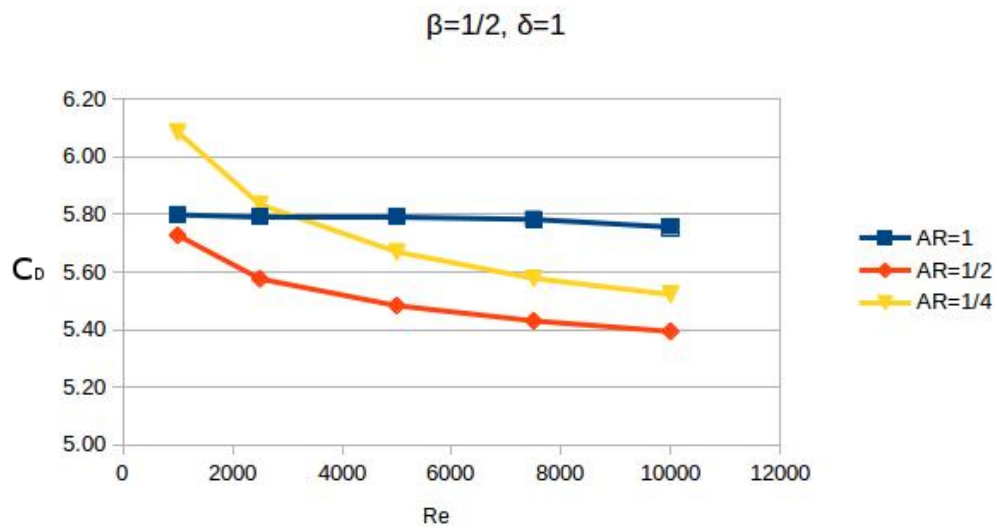


Figura 6.11: Resultados de los casos 19, 20 y 21.

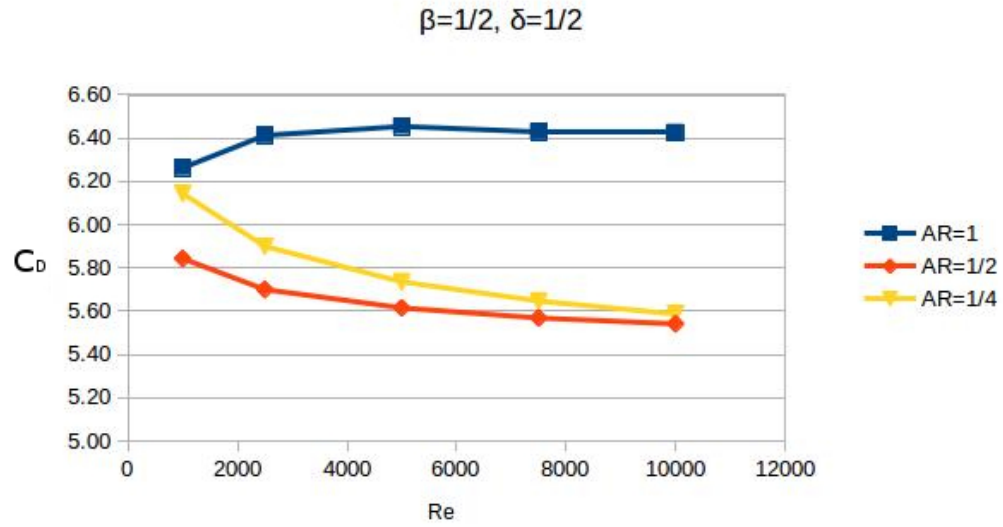


Figura 6.12: Resultados de los casos 22, 23 y 24.

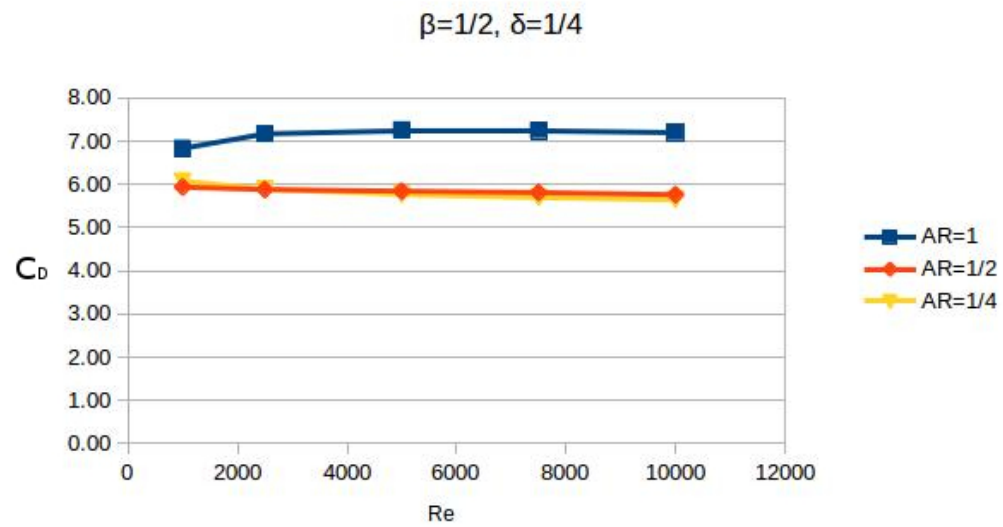


Figura 6.13: Resultados de los casos 25, 26 y 27.

## 6.4. Promediado en el Reynolds

Dado que en la mayoría de los casos el  $C_D$  varía muy poco con respecto al  $Re$  (la mayor variación del  $C_D$  contra el número de Reynolds es menor al 21 %), se decidió utilizar los  $C_{Dp}$  de cada caso para analizar la importancia de los factores ( $\beta$ ,  $\delta$  y  $AR$ ). Esos 27 datos se agruparon en tres isosuperficies (Fig. 6.14), donde la constante en cada superficie es el valor de  $\beta$ . Uno de los ejes horizontales representa el valor de  $\delta$  mientras que el otro representa el valor de  $AR$ . El eje vertical representa el valor de  $C_{Dp}$ .

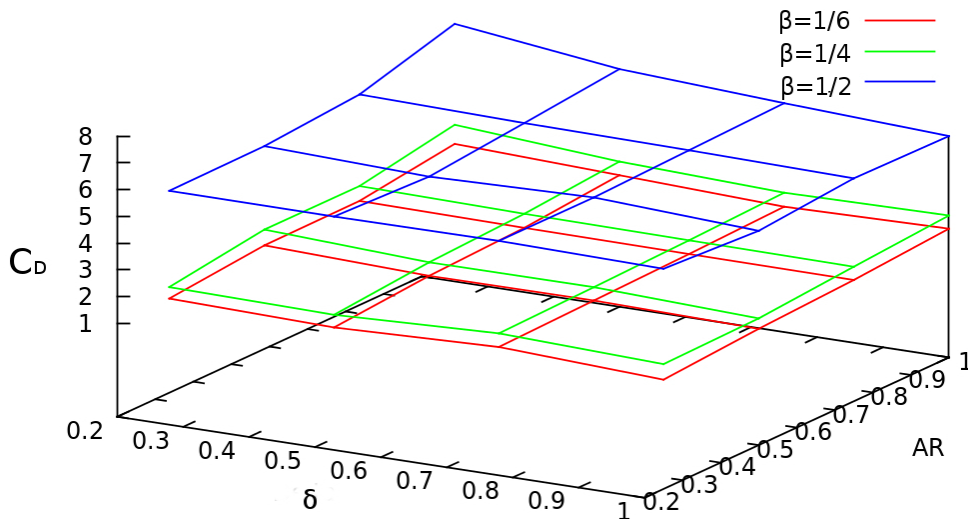


Figura 6.14: Agrupación de  $C_{Dp}$  en isosuperficies de  $\beta$ ; vista isométrica.

### 6.4.1. Importancia de $\delta$

Viendo a las isosuperficies desde un plano  $C_D$ - $\delta$  (Fig. 6.15), de modo que se pueda observar la tendencia del coeficiente cuando cambia  $\delta$ , se aprecia de forma general que al aumentar  $\delta$  (centrar el cilindro) disminuye el  $C_D$ , *i.e.*, al pegar el cilindro a la pared inferior aumenta el coeficiente de arrastre, aunque de forma ligera.

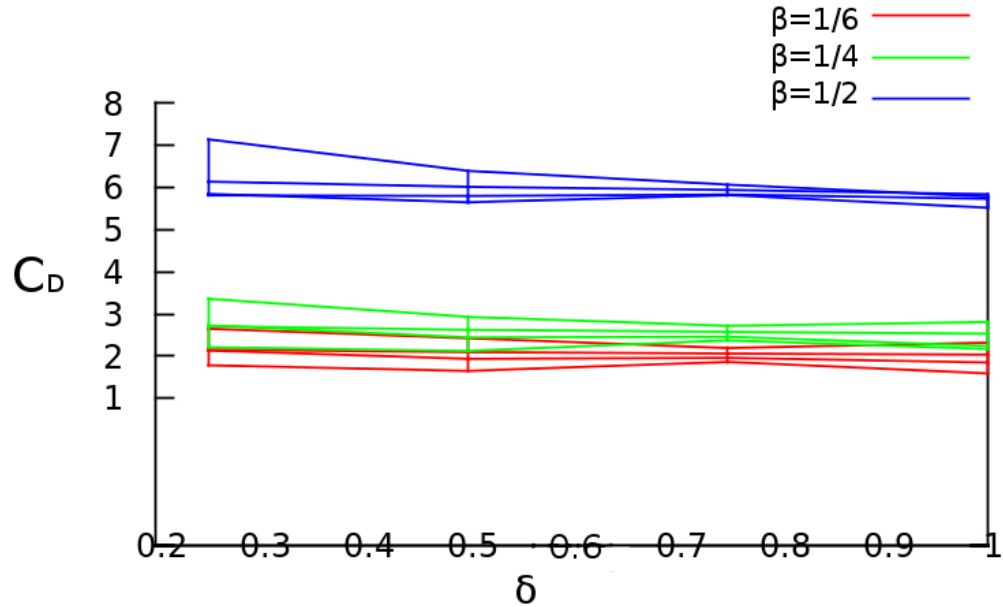


Figura 6.15: Agrupación de  $C_{Dp}$  en isosuperficies de  $\beta$ , visto desde el plano  $C_D$ - $\delta$ .

### 6.4.2. Importancia de $AR$

Viendo a las isosuperficies desde un plano  $C_D$ - $AR$  (Fig. 6.16), de modo que se pueda observar la tendencia del coeficiente cuando cambia  $AR$ , se aprecia que al aumentar  $AR$  aumenta el  $C_D$ . Esto significa que conforme aumenta el largo de un cilindro rectangular su coeficiente de arrastre disminuye (con la excepción que ya se mencionó para los casos 19-27, Figs. 6.11-6.13).

### 6.4.3. Importancia de $\beta$

Observando las figuras 6.14, 6.15 y 6.16 se puede apreciar el cambio en el valor del  $C_D$  cuando varía  $\beta$ , en especial el gran salto cuando se pasa de  $\beta = 1/4$  a  $1/2$ . Mientras mayor sea  $\beta$  mayor será  $C_D$ .



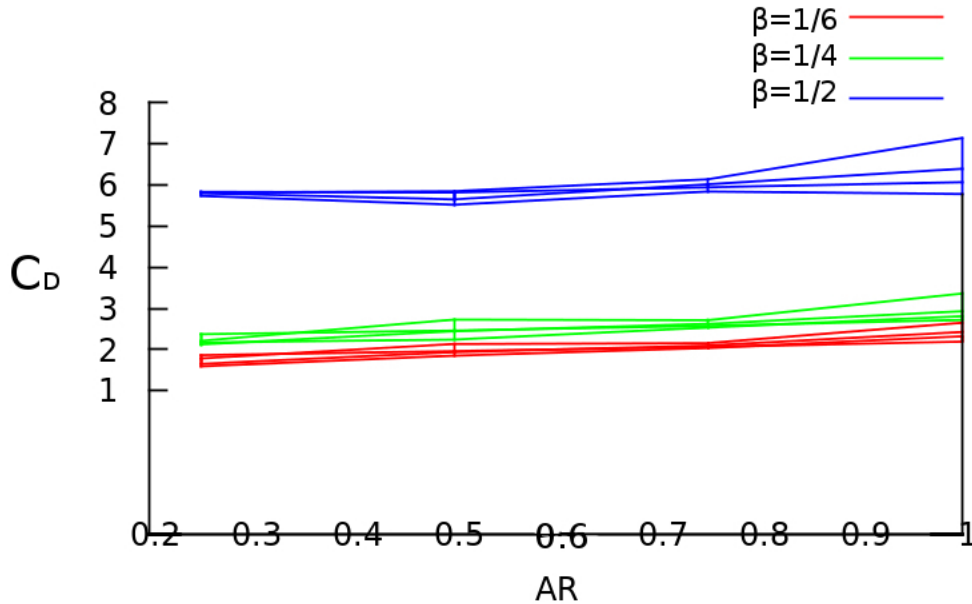


Figura 6.16: Agrupación de  $C_{Dp}$  en isosuperficies de  $\beta$ , visto desde el plano  $C_D$ - $AR$ .

#### 6.4.4. Máximos valores en los parámetros

A cada parámetro se le asignaron tres valores. Uno de esos tres valores arrojó coeficientes de arrastre más altos que los otros dos valores (un valor crítico con el  $C_D$  máximo); de esta manera, para  $\delta = 1/4$  el  $C_D$  es más alto que para  $\delta = 1/2$  y  $\delta = 1$ , para  $\beta = 1/2$  el  $C_D$  es más alto que para  $\beta = 1/4$  y  $\delta = 1/6$ , y para  $AR = 1$  el  $C_D$  es más alto que para  $AR = 1/2$  y  $AR = 1/4$ <sup>2</sup>. Es natural que al combinar estos tres valores ( $\delta = 1/4$ ,  $\beta = 1/2$  y  $AR = 1$ , caso 25) se obtuvieran los coeficientes de arrastre más altos de los casos de estudio.

<sup>2</sup>Con excepción del caso 21 ( $\delta = 1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $AR = 1/4$ ), donde el valor de su  $C_D$  rebasó al del caso 19 ( $\delta = 1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $AR = 1$ ) para valores de  $Re$  de 1000 y 2500; aunque el promediado del  $C_D$  en  $Re$  del 19 es mayor que el del 21.

### 6.4.5. Comparación con $C_D$ de cilindros rectangulares en flujo libre

En flujo libre, para cilindros con  $AR = 1, 1/2$  y  $1/4$ , el  $C_D$  es 2.1, 1.8 y 1.2 respectivamente; los valores se tomaron de White (1998). La diferencia en porcentaje entre estos valores y los  $C_{Dp}$  de los casos de estudio (definida como  $[(C_{Dp} - C_{Dflujolibre}) / C_{Dflujolibre}] \times 100$ ) se muestra en la tabla 6.2.

Para los tres valores de  $AR$ , la menor diferencia con respecto al flujo libre se da cuando  $\beta = 1/6$  y  $\delta = 1$  (centrado); se podría decir que con una  $\beta = 1/6$  el arrastre es bastante parecido al del flujo libre. Conforme  $\beta$  aumenta y  $\delta$  disminuye (el cilindro se pega a la pared), la diferencia comienza a crecer y alcanza su máximo cuando  $\beta = 1/2$  y  $\delta = 1/4$ ; es decir cuando los efectos de la pared son más notorios.

Tabla 6.2: Comparación de los  $C_D$  de los casos de estudio contra  $C_D$  en flujo libre.

Caso	$AR$	Con $\beta$ y $\delta$	Flujo libre	Diferencia en %
		$C_D$	$C_D$	
1	1	2.32	2.1	10.5
2	1/2	1.85	1.8	2.8
3	1/4	1.59	1.2	32.5
4	1	2.43	2.1	15.7
5	1/2	1.94	1.8	7.8
6	1/4	1.65	1.2	37.5
7	1	2.65	2.1	26.2
8	1/2	2.14	1.8	18.9
9	1/4	1.78	1.2	48.3
10	1	2.81	2.1	33.8
11	1/2	2.24	1.8	24.4
12	1/4	2.17	1.2	80.8
13	1	2.94	2.1	40
14	1/2	2.45	1.8	36.1
15	1/4	2.12	1.2	76.7
16	1	3.37	2.1	60.5
17	1/2	2.73	1.8	51.7
18	1/4	2.21	1.2	84.2
19	1	5.78	2.1	175.2
20	1/2	5.52	1.8	206.7
21	1/4	5.74	1.2	378.3
22	1	6.40	2.1	204.7
23	1/2	5.65	1.8	213.9
24	1/4	5.80	1.2	383.3
25	1	7.14	2.1	240
26	1/2	5.85	1.8	225
27	1/4	5.82	1.2	385



# Capítulo 7

## Conclusiones

Como se mencionó anteriormente, el arrastre es resultado del esfuerzo viscoso y la distribución de presiones, por lo que podemos separarlo en: arrastre viscoso y arrastre de forma. Este último está ligado con las observaciones de Bearman y Trueman (1972), donde la distancia entre la cara trasera normal al flujo y los primeros vórtices de la estela determina la presión base (presión en la cara trasera). Esta distancia es afectada por la intervención de los bordes traseros con las capas separadas de la estela (como se mencionó en la sección 2.2.1); mientras mayor sea la distancia, mayor será la presión base y menor será el arrastre. Ambos factores son influidos por la razón de forma ( $AR$ ) y el efecto de la pared (relacionado con  $\beta$  y  $\delta$ ).

Analizando las figuras 6.14, 6.15 y 6.16 se aprecia la variación del  $C_D$  con respecto a los distintos parámetros. Mientras mayor sea esta variación al modificar un parámetro, mayor será su importancia. Por medio de un análisis cualitativo se aprecia que el parámetro con menor peso es  $\delta$  (la tendencia de cambio es la menor de todas), le sigue de cerca  $AR$  y, finalmente, se concluye que el factor de mayor peso en el coeficiente de arrastre de cilindros rectángulos es la razón de bloqueo,  $\beta$ .

El mayor valor de  $C_D$  se da cuando se combinan  $\delta = 1/4$ ,  $\beta = 1/2$  y  $AR = 1$ , dado que esos valores generan los coeficientes de arrastre más altos de cada parámetro. Esto se aprecia en el máximo de las tres isosuperficies (Fig. 6.14) cuando  $\delta = 1/4$  y  $AR = 1$ .

No se aprecia de forma clara si el variar un factor dado afecta la tendencia de cambio del  $C_D$  con respecto a los otros, *e.g.*, que para  $\beta = 1/2$  el incrementar  $AR$  aumentara el  $C_D$ , mientras que para  $\beta = 1/4$  el incrementar  $AR$  disminuiría el  $C_D$  (comportamiento que no se observó). Es probable que se

deban obtener muchos más valores de  $C_D$  variando los tres parámetros en rangos más extensos.

# Apéndice A

## Experimento en mini túnel de viento

### A.1. Introducción

Inicialmente el proyecto de esta tesis era diseñar un perfil aerodinámico para el metro de la Ciudad de México; como caso de estudio se eligió analizar el flujo alrededor del tren cuando este se mueve dentro de un túnel, dado que la mayor parte del trazado del metro se encuentra bajo tierra. Se contruyó un modelo a escala de un túnel donde se cruzaban dos locomotoras del metro, en direcciones opuestas, usando un arreglo de poleas y contrapesos. El experimento resultó falto de hermetización, lo que hizo casi imposible realizar visualizaciones con humo y mediciones de presión en la zona de cruce de los trenes. Se procedió a construir un túnel de viento para poder analizar el flujo alrededor de una sola locomotora, así como el arrastre generado (medido usando un arreglo a base de un resorte). El túnel resultó ser no utilizable para el caso de estudio, dado que las condiciones de frontera eran distintas al problema real (las paredes estaban inmóviles, igual que el modelo; en el caso real, si vamos sobre el tren, las paredes se mueven con la misma velocidad que el flujo de entrada). Sin embargo, los coeficientes de arrastre obtenidos llamaron la atención por su alto valor y se decidió realizar un experimento con prismas rectangulares de distintos tamaños, a fin de registrar el efecto del bloqueo en el arrastre.

Siguiendo el tema del bloqueo con respecto al arrastre se decidió optar por simulaciones numéricas para poder jugar con mayor facilidad con la varia-

ción de parámetros. Por falta de poder de cómputo, se optó por simulaciones en 2D. Los resultados de las simulaciones coincidieron en cierta medida con los del experimento en forma cualitativa: al aumentar el bloqueo aumenta el arrastre; pero el efecto de la razón de forma es distinto: en 2D, en flujo libre, aumentar la razón de forma disminuye el arrastre, en 3D, en flujo libre y con bloqueo, aumentar la razón de forma aumenta el arrastre. Esto es debido a la presencia de las paredes superior e inferior del prisma en el caso tridimensional (el esfuerzo viscoso aumenta por la presencia de estas paredes). Por ello se decidió colocar este experimento como un apéndice, ya que, tiene relación con el tema de tesis, pero no la suficiente como para ser un punto de comparación para las simulaciones.

## A.2. Planteamiento del problema

En el siguiente experimento se midieron los coeficientes de arrastre de 6 prismas rectangulares distintos usando un arreglo con resorte dentro de un mini túnel de viento. Los parámetros a variar fueron la razón de bloqueo y la razón de forma, para reportar y analizar la importancia que tienen sobre el coeficiente de arrastre.

La velocidad de entrada varía para obtener distintos número de Reynolds. Hay condiciones de no deslizamiento en las paredes del túnel y en la superficie del prisma. Se varía la sección transversal del prisma, la forma de la cara frontal, y la longitud paralela al flujo. Se varía además la velocidad de entrada del flujo, usando la válvula, para obtener distintos números de Reynolds.

## A.3. Funcionamiento del dispositivo

El mini túnel de viento funciona por succión gracias a un turbosoplador de 13 caballos de fuerza conectado al final del ducto (Fig. A.1). A la salida del turbosoplador se encuentra una válvula de salida que regula el gasto másico, aumentando o disminuyendo la velocidad de entrada. En la entrada se encuentra una tobera convergente, seguida de un arreglo honeycomb de plástico para rectificar el flujo en la medida de lo posible.

La sección transversal del túnel tiene 6 cm de alto por 8.7 cm de ancho (Fig. A.2); en la parte, media se encuentra una sección de visualización con paredes y techo de acrílico. Dentro de dicha área, se localiza el dispositivo de



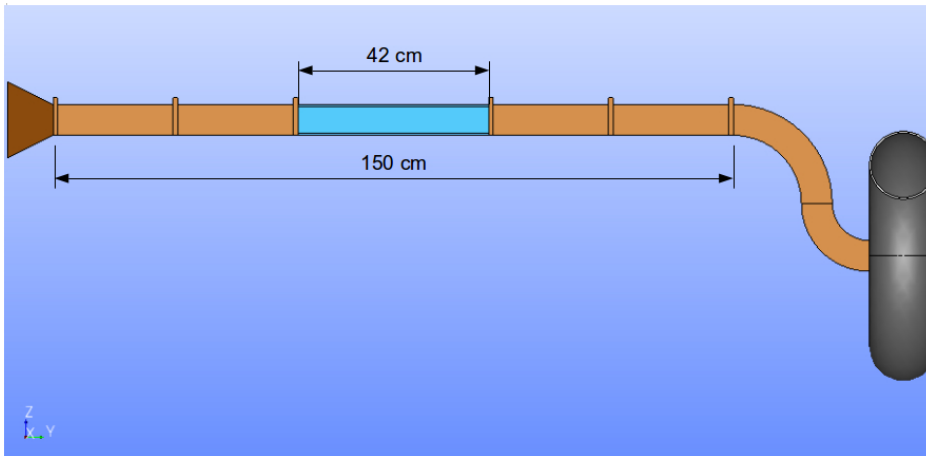


Figura A.1: Vista lateral del mini túnel de viento.

medición de arrastre, compuesto por un tubo delgado de plástico, rodeado por un resorte, y empotrado en un anillo fijo (Fig. A.3). Cuando el modelo se desplaza, el tubo se desplaza con él, y el resorte se comprime; según sea la longitud del resorte, será el arrastre generado sobre el objeto. Para disminuir la influencia de otros factores como la fricción del prisma con el suelo, se colocó una vía escala HO (1:87) con ruedas bajo el objeto para permitir el movimiento de este sin dificultad, asegurando que el arrastre aerodinámico se traduzca (prácticamente en su totalidad) en el movimiento del resorte.

## A.4. Diferentes modelos propuestos

Se propusieron seis escenarios distintos. Todos los casos se realizaron dentro del mismo mini túnel de viento. En cada caso se ocupó un prisma rectangular diferente. Los tres primeros prismas tenían 3 cm de alto por 4.5 cm de ancho (área de sección transversal de  $0.00135 \text{ m}^2$ ); la diferencia entre éstos radicaba en que uno tenía un frente redondeado y 15 cm de longitud; otro un frente romo e igualmente 15 cm de longitud; el último tenía también un frente romo, pero 7.5 cm de longitud.

Los siguientes tres prismas tenían 4 cm de alto por 6 cm de ancho (área de sección transversal de  $0.0024 \text{ m}^2$ ); la diferencia estaba en que uno tenía un frente redondeado y 20 cm de longitud; el siguiente un frente romo y 20 cm de longitud; el último un frente romo y 10 cm de longitud.

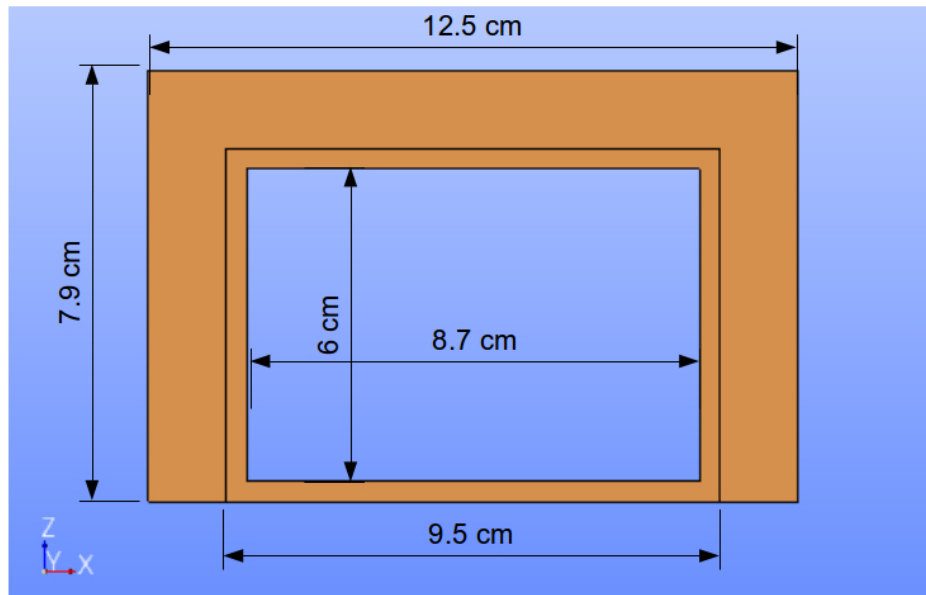


Figura A.2: Vista transversal del mini túnel de viento.

Para cada caso se varió la velocidad cinco veces utilizando la válvula reguladora a la salida del turbosoplador, se registraron los valores de arrastre correspondientes y se calcularon los diferentes coeficientes de arrastre. La tabla A.1 resume las características de cada caso:

Tabla A.1: Diferencia entre los parámetros de cada prisma.

Caso	Sección transversal [m <sup>2</sup> ]	Longitud [m]	Frente
1	0.00135	0.15	Romo
2	0.00135	0.75	Romo
3	0.00135	0.15	Redondeado
4	0.0024	0.2	Romo
5	0.0024	0.1	Romo
6	0.0024	0.2	Redondeado

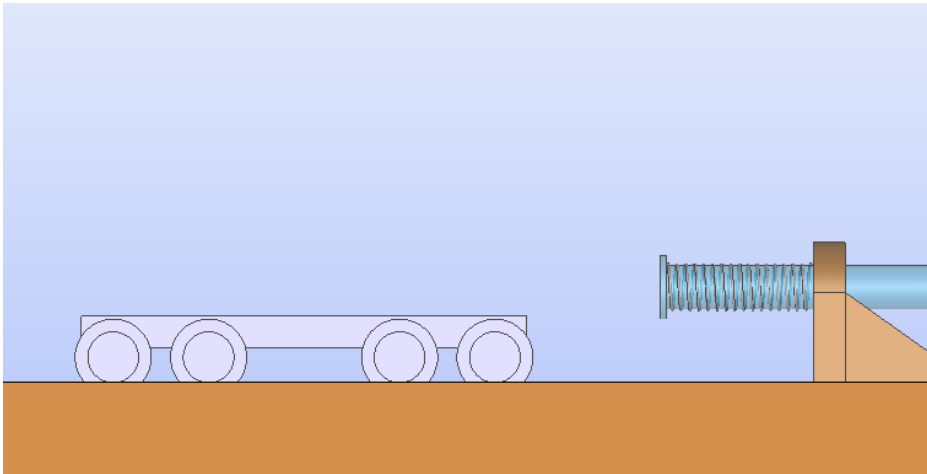


Figura A.3: Vista lateral de la zona de visualización. Nótese el carro sobre el que se desplazan los prismas y el mecanismo del resorte en el extremo derecho.

## A.5. Parámetros a variar

Los seis casos se agruparon en tres grupos para registrar el efecto que tiene la variación de distintos parámetros sobre el coeficiente de arrastre:

1. Razón de bloqueo: Definida como la sección transversal del prisma entre la sección transversal del túnel. Se compararon cuatro casos divididos en dos subgrupos. Primero: dos casos con frente romo, uno con sección transversal de  $0.00135 \text{ m}^2$  (bloqueo del 26 %) y longitud de 15 cm, otro con sección transversal de  $0.0024 \text{ m}^2$  (bloqueo del 46 %) y longitud de 20 cm. Segundo: dos casos con frente redondeado, uno con sección transversal de  $0.00135 \text{ m}^2$  (bloqueo del 26 %) y longitud de 15 cm, otro con sección transversal de  $0.0024 \text{ m}^2$  (bloqueo del 46 %) y longitud de 20 cm. En cada subgrupo la razón de forma era constante.
2. Razón de forma: Se compararon cuatro casos divididos en dos subgrupos. Primero: dos casos con sección transversal de  $0.00135 \text{ m}^2$  (bloqueo del 26 %), uno con longitud de 15 cm y otro con longitud de 7.5 cm. Segundo: dos casos con sección transversal de  $0.0024 \text{ m}^2$  (bloqueo del 46 %), uno con longitud de 20 cm y otro con longitud de 10 cm. En cada subgrupo la razón de bloqueo era constante.

3. Aerodinamización: Se compararon cuatro casos divididos en dos subgrupos. Primero: dos casos con sección transversal de  $0.00135 \text{ m}^2$  (bloqueo del 26 %) y longitud de 15 cm, uno con frente redondeado y otro con frente romo. Segundo: dos casos con sección transversal de  $0.0024 \text{ m}^2$  (bloqueo del 46 %) y longitud de 20 cm, uno con frente redondeado y otro con frente romo. En cada subgrupo la razón de bloqueo era constante.

Variando estos tres parámetros se registraron los efectos que tienen sobre el coeficiente de arrastre de manera individual.

## A.6. Resultados

Los resultados para cada caso se muestran en la tabla A.2. Las gráficas de las figuras A.4 y A.5 agruparon los coeficientes de arrastre contra el Reynolds para resaltar la variación en la razón de bloqueo; las gráficas de las figuras A.6 y A.7 resaltan la variación en la razón de forma; por último, las gráficas de las figuras A.8 y A.9 resaltan la variación entre el cuerpo con frente romo y el cuerpo con frente redondeado.

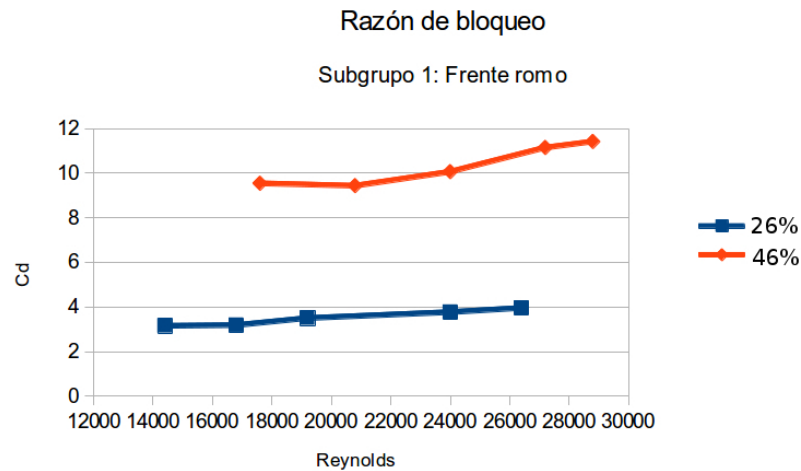


Figura A.4: Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en la razón de bloqueo, frente romo.

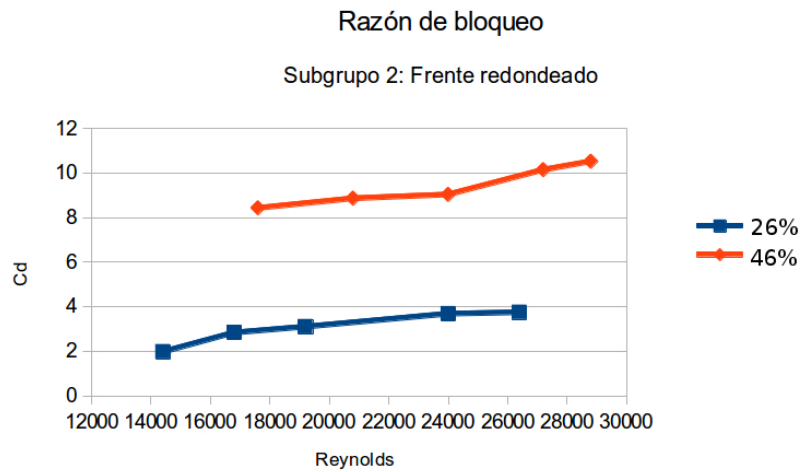


Figura A.5: Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en la razón de bloqueo, frente redondeado.

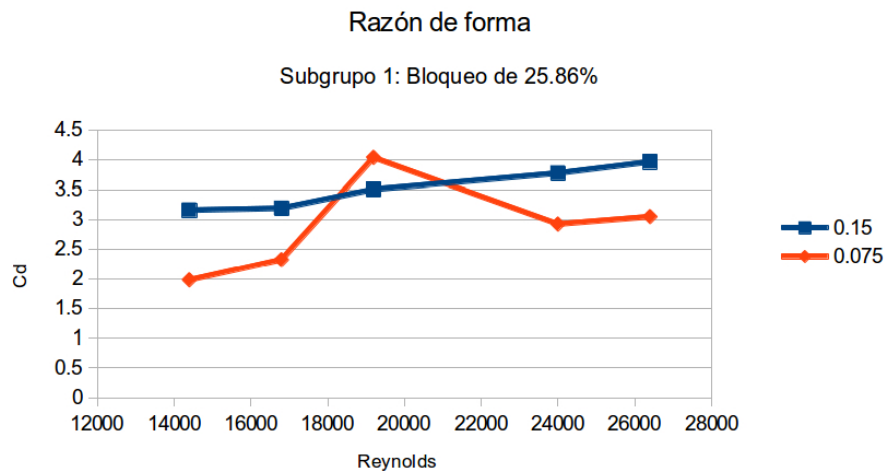


Figura A.6: Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en la razón de forma, bloqueo de 26%.

## A.7. Análisis de resultados

Razón de bloqueo: Para el subgrupo 1 (cuerpo romo), la diferencia promedio de los coeficientes de arrastre entre un bloqueo de 26% y un bloqueo de

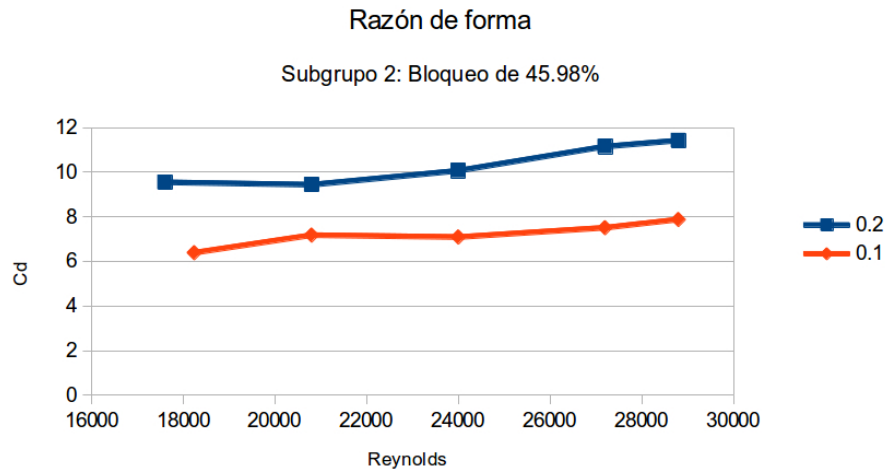


Figura A.7: Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en la razón de forma, bloqueo de 46 %.

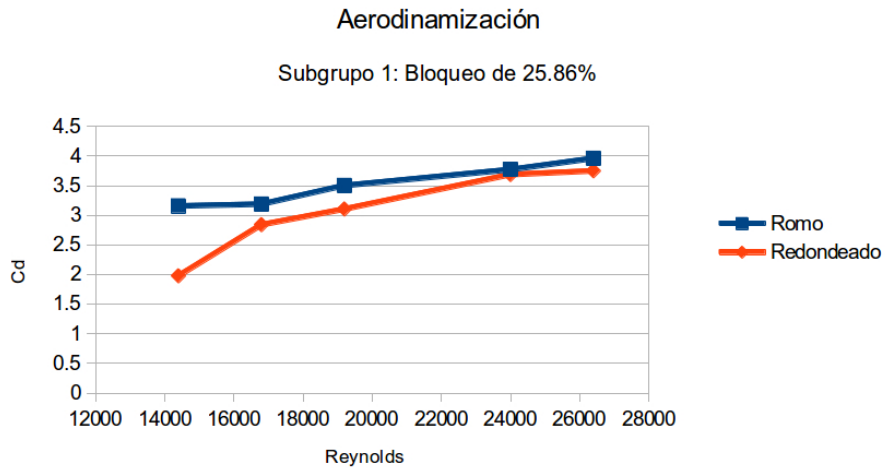


Figura A.8: Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en el perfil del frente, bloqueo de 26 %.

46 % fue de 65.9 %; para el subgrupo 2 (frente redondeado) fue de 67.3 %. Ambos bastante cercanos. Ambos prismas tienen comportamientos de aumento similar en el coeficiente de arrastre cuando aumenta la razón de bloqueo.

Razón de forma: Para el subgrupo 1 (bloqueo de 26 %), la diferencia prome-

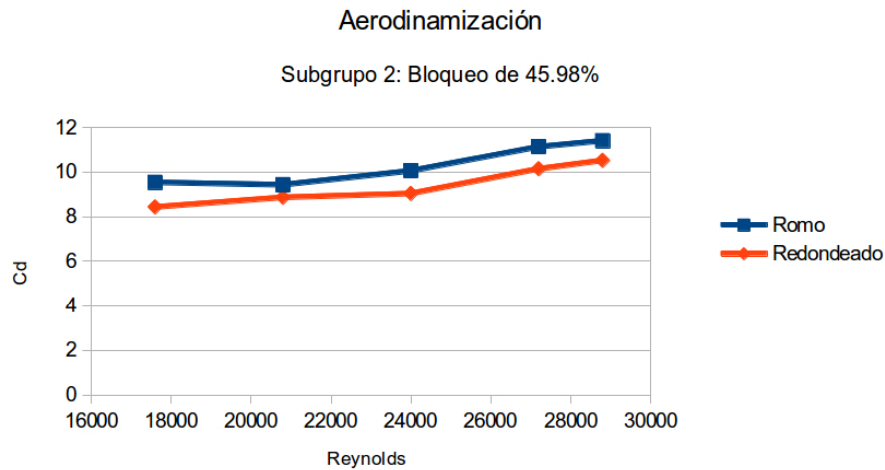


Figura A.9: Coeficiente de arrastre contra Reynolds. Cambio en el perfil del frente, bloqueo de 46 %.

dio entre una razón de forma de 0.15 y una razón de forma de 0.75 fue de 18.6 %; para el subgrupo 2 (bloqueo de 46 %) fue de 30.2 %. A mayor razón de bloqueo, hay mayor importancia en el aumento de la longitud del objeto. Aerodinamización: Para el subgrupo 1 (bloqueo de 26 %), la diferencia promedio entre el frente romo y el frente redondeado fue de 12.6 %; para el subgrupo 2 (bloqueo de 46 %), la diferencia fue de 8.8 %. A mayor razón de bloqueo, importa menos el cambio en la forma del frente del objeto.

Tabla A.2: Resultados de los experimentos.

Caso 1			
Velocidad [m/s]	Arrastre [N]	$C_D$	Reynolds
11	0.39	3.96	26,400
10	0.31	3.77	24,000
8	0.18	3.50	19,200
7	0.13	3.19	16,800
6	0.09	3.16	14,400
Caso 2			
Velocidad [m/s]	Arrastre [N]	$C_D$	Reynolds
11	0.30	3.05	26,400
10	0.24	2.92	24,000
8	0.21	4.04	19,200
7	0.09	2.32	16,800
6	0.06	1.98	14,400
Caso 3			
Velocidad [m/s]	Arrastre [N]	$C_D$	Reynolds
11	0.37	3.75	26,400
10	0.30	3.69	24,000
8	0.16	3.11	19,200
7	0.11	2.84	16,800
6	0.06	1.98	14,400
Caso 4			
Velocidad [m/s]	Arrastre [N]	$C_D$	Reynolds
9	1.33	11.42	28,800
8.5	1.16	11.15	27,200
7.5	0.82	10.07	24,000
6.5	0.57	9.44	20,800
5.5	0.42	9.55	17,600
Caso 5			
Velocidad [m/s]	Arrastre [N]	$C_D$	Reynolds
9	0.92	7.88	28,800
8.5	0.78	7.51	27,200
7.5	0.57	7.09	24,000
6.5	0.44	7.17	20,800
5.7	0.30	6.39	18,240
Caso 6			
Velocidad [m/s]	Arrastre [N]	$C_D$	Reynolds
9	1.23	10.53	28,800
8.5	1.06	10.15	27,200
7.5	0.73	9.05	24,000
6.5	0.54	8.87	20,800
5.5	0.37	8.44	17,600



## A.8. Conclusiones

Analizando los resultados, se muestra que un aumento en la razón de bloqueo (con excepción de un valor de  $C_D = 4.03$  del caso 2 que probablemente se deba a falta de precisión del experimento) genera un aumento en el coeficiente de arrastre. Este efecto es ligeramente más significativo en casos con frente redondeado que con frente romo.

A mayor razón de bloqueo, hay un mayor aumento en el arrastre cuando se dobla la longitud del prisma. Probablemente debido a que las fuerzas viscosas cobran una importancia mucho mayor en el arrastre a la que tienen en flujo libre.

Cuando el bloqueo crece, la diferencia de arrastre entre cuerpo con frente romo y cuerpo con frente redondeado es menos tangible.



# Referencias

Bearman, P.W., y Trueman, D.M. (1972) An investigation of the flow around rectangular cylinders, *Aeronautical Quarterly*, 229-237.

Dhiman, A.K., Chhabra, R.P. y Eswaran, V. (2008) Steady flow across a confined square cylinder: Effects of power-law index and blockage ratio, *Journal of NonNewtonian FLuid Mechanics*, **148**, 141-150.

Davis, R.W., y Moore, E.F. (1982) A numerical study of vortex shedding from rectangles, *Journal of Fluid Mechanics*, **116**, 475-506

Davis, R.W., Moore, E.F., y Purtell, L.P. (1983) A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders, *Physics of Fluids*, **27**, 46-59.

Dhiman, A.K., Sharma, N. y Kumar, S. (2011) Wall effects on the cross-buoyancy around a square cylinder in the steady regime, *Department of Chemical Engineering, Indian Institute of Technology Roorkee*, Roorkee, India.

Krishnan, S. y Kannan, A. (2010) Effect of blockage ratio on drag and heat transfer from a centrally located sphere in pipe flow, *Department of Chemical Engineering, Indian Institute of Technology Madras*, Chennai, India.

Laneville, A., y Young, L.Z. (1983) Mean flow patterns around two-dimensional rectangular cylinders and their interpretation, *Journal of the American Society of Mechanical Engineers, Fluids Engineering Division*, **157**, 189-199.

Lutz, T. y Sayers, A.T. (1998) Wind tunnel boundary layer effects on the

aerodynamic drag of model trucks, *R & D Journal*, **15**(1), 9-15.

Lv, H., Tang, S. y Zhou, W. (2011) Numerical simulation of sedimentation of rectangular particle in Newtonian fluid, *Department of Power Engineering, Chongqing University*, Chongqing, China.

Nagano, S., Naito, M., y Takata, H. (1982) A numerical analysis of two-dimensional flow past a rectangular prism by a discrete vortex model, *Computers and Fluids*, **10**(4), 243-259.

Nakamura Y., Ohya, Y., y Tsuruta, H. (1991) Experiments on vortex shedding from flat plates with square leading and trailing edges, *Journal of Fluid Mechanics*, **222**, 437-447.

Nathan, S. (1998) A numerical investigation of the flow around rectangular cylinders, *School of Mechanical and Materials Engineering, The University of Surrey*, Surrey, Reino Unido.

Ng, C.P. (1972) Wall interference effects on steady force coefficients of bluff bodies, *Sir George Williams University*, Montreal, Canadá.

Ohya, Y. (1994) A note on the discontinuous change in wake pattern for a rectangular cylinder, *Journal of Fluids and Structures*, **8**, 325-330.

Okijama, A. (1982) Strouhal numbers of rectangular cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, **123**, 379-398.

Okijama, A. (1990) Numerical simulation of flow around rectangular cylinders, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **33**, 171-180.

Patel, V.C. y Head, M.R. (1969) Some observations on skin friction and velocity profiles in full developed pipe and channel flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **38**, 181-201.

Sund, S. (2010) The effect of blockage on high Reynolds number flow over a semi-circular obstacle, *Department of Energy and Process Engineering, Norwegian University of Science and Technology*, Trondheim, Noruega.

Turki, S., Abbassi, H. y Nasrallah, S.B. (2003) Effect of the blockage ratio on the flow in a channel with a built-in square cylinder, *Computational Mechanics*, **33**, 22-29.

Wang, H.F., Zhou, Y., Alam, M.M., y Huang, J.F. (2008) Effects of tunnel ventilation modes on the aerodynamic drag of a low speed train, *Department of Mechanical Engineering, The Hong Kong Polytechnic University*, Hong Kong, China.

West, G.S. y Apelt, C.J. (1981) The effects on tunnel blockage and aspect ratio on the mean flow past a circular cylinder with Reynolds numbers between  $10^4$  and  $10^5$ , *Department of Civil Engineering, University of Queensland*, Queensland, Australia.

White, F.M. (1998) Fluid Mechanics, Cuarta Edición, *McGraw-Hill*, Rhode Island, EE.UU.

White, F.M. (1991) Viscous Fluid Flow, Segunda Edición, *McGraw-Hill*, Rhode Island, EE.UU.