



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
Ingeniería Mecánica - Mecatrónica

**DESARROLLO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA LA SIMULACIÓN
DEL PROCESO DE SOLDADURA POR PUNTEO EN ELEMENTOS DE
DIMENSIONES REDUCIDAS**

T E S I S

Que para optar por el grado de:

Maestro en Ingeniería

PRESENTA

Alejandro Santiago Carreño Rodríguez

TUTOR

Dr. Alberto Caballero Ruíz, CCADET, UNAM.

COTUTOR

Dr. Leopoldo Ruíz Huerta, CCADET, UNAM.

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE DE 2014

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Arturo Barba

Secretario: Dr. Leopoldo Ruíz

Vocal: Dr. Alberto Caballero

1^{er} Suplente: Dr. Edmundo Rocha

2^{do} Suplente: Dr. Fernando Velázquez

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Grupo de Micromecánica y Mecatrónica (GMM) del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

TUTOR DE TESIS

Dr. Alberto Caballero

FIRMA

La ciencia es un juego, pero un juego con la realidad, un juego con los cuchillos afilados... Si alguien corta con cuidado una imagen en mil trozos, puedes resolver el rompecabezas si vuelves a colocar las piezas en su sitio.

ERWIN SCHRÖDINGER

Esta tesis se la dedico a las personas más importantes en mi vida.

A mi gran amor y esposa
por toda la vida:

Liz
... Transformaremos mundos,
inventaremos mares que cruzar,
si nos perdemos nada pasará,
ahora lo entiendo, amar es liberar...

A mis padres y mi hermana,
por ser mi familia:

Damián
Alejandra
Ana

A mi gran amigo,
por su completa confianza:

Jair

Gacias por su cariño.

Quiero agradecer a todas aquellas personas que formaron parte en la realización y conclusión de esta tesis. A quienes contribuyeron con ideas, opiniones y sus valiosos puntos de vista.

Con admiración a mi tutor de tesis el Dr. Alberto Caballero

Con profundo agradecimiento para el Dr. Leopoldo Ruíz

A mis sinodales:

Dr. Edmundo Rocha

Dr. Fernando Velázquez

Dr. Arturo Barba

Muy en especial al Dr. Francisco Marichi y al Dr. Roberto Ruíz por su valiosa ayuda en el desarrollo y conclusión de esta tesis

Mi gratitud a todos los compañeros del Grupo de Micromecánica y Mecatrónica por sus comentarios y opiniones a lo largo de la construcción de este trabajo.

Gracias a todos, amigos y colegas.

Índice general

Índice general	V
Resumen	VII
Introducción	VIII
1. Antecedentes	1
1.1. Historia del bracket	1
1.1.1. Avances tecnológicos	2
1.2. El movimiento en los dientes	4
1.2.1. El bracket convencional	5
1.3. Tendencias en la personalización de brackets	8
1.3.1. El caso de estudio	12
1.4. Antecedentes de la soldadura por punteo	13
1.4.1. La soldadura en aparatos de ortodoncia	14
1.4.2. Soldadura por punteo en brackets	14
2. Planteamiento del problema	16
2.1. Objetivo	17
2.2. Alcances	17
3. Marco teórico	18
3.1. Aproximación teórica	18
3.2. Preliminares de ecuaciones elípticas y parabólicas	19
3.3. Ecuaciones constitutivas del modelo teórico	20
3.3.1. Ecuación de difusión	21
3.3.2. Ecuación de Laplace	23
3.3.3. Métodos de solución numérica	24
3.4. El método de Dirección Alterna Implícito	25
3.4.1. El método de Sobre-relajación (SOR)	26
4. Desarrollo teórico y experimental	28
4.1. Diferencias finitas en dos dimensiones	28
4.1.1. Discretización del modelo matemático	28
4.1.2. Propiedades del material	30

4.1.3. La conductividad térmica y resistividad eléctrica como funciones de la temperatura	31
4.2. Solución numérica con el método SOR	34
4.3. Ecuación de prueba	35
4.3.1. Solución del caso ideal con elemento finito	36
4.4. Unión de brackets	38
4.4.1. Medición de variables	39
4.4.2. Verificación de la unión	40
4.5. Diseño del banco de pruebas	42
4.5.1. Diseño del circuito de control	43
5. Pruebas, análisis y resultados	45
5.1. Solución de la ecuación de prueba	45
5.1.1. Consistencia de la solución	47
5.2. La solución del modelo matemático	48
5.2.1. Solución de la ecuación de difusión	48
5.2.2. Sobre la distribución de voltaje	51
5.3. Desarrollo de simulaciones usando elemento finito	51
5.4. Construcción del banco de pruebas	54
5.5. Resultados experimentales	56
5.5.1. Tiempo	57
5.5.2. Corriente	61
5.5.3. Fuerza entre electrodos	63
Conclusiones y trabajo a futuro	65
Bibliografía	67
Código de SOR para parabólicas	72
Código de SOR para elípticas	74
Código de ADI usando SOR	76

Resumen

En este trabajo de investigación se presenta el desarrollo de un modelo matemático que ayude a predecir la distribución de temperatura en la unión de la soldadura por resistencia eléctrica en brackets personalizables. A partir de dos métodos numéricos distintos se busca establecer una solución única para la distribución de temperatura.

Se hace un breve recorrido sobre la evolución de los aparatos de ortodoncia y se mencionan algunos de los últimos avances tecnológicos en el área. Se estudian brevemente los fundamentos para el movimiento de los dientes además de una explicación del principio de funcionamiento de los brackets comerciales. El funcionamiento de un nueva generación de brackets para el tratamiento individualizado de los dientes es explicado y se muestra la necesidad de la aplicación de la soldadura por punteo en ortodoncia.

Se hace el planteamiento del objetivo para la solución del problema de soldado en brackets. Se plantea las características de un prototipo de punteadora para brackets que servirá como sistema experimental.

Se hace una revisión de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas y elípticas. Se plantea un modelo matemático para la descripción de la dinámica del soldado por resistencia eléctrica con coeficientes en función de la temperatura. También se revisa el método de diferencias finitas en dos dimensiones y el método iterativo de solución numérica conocido como sobre-relajación.

La discretización del modelo matemático es mostrada y se plantean los coeficientes en función de la temperatura usados. La forma de la función iterativa del esquema de solución es mostrado así como las funciones para el cálculo del factor de sobre-relajación. Una ecuación de prueba es usada para mostrar la consistencia entre la solución analítica y la numérica. Una ecuación diferencial parcial aplicada al punteo en brackets es usada como caso ideal para la búsqueda de una solución única entre métodos numéricos diferentes. El diseño de una máquina para el soldado por resistencia eléctrica es mostrado, así como el circuito para control de la corriente.

Se muestran los resultados de la solución analítica y discreta. Se analiza lo obtenido numéricamente con diferencias finitas y elemento finito del caso ideal aplicado a la soldadura por punteo. Finalmente se estudian los resultados obtenidos experimentalmente con el prototipo de máquina punteadora construido y utilizado para soldar brackets personalizables.

Introducción

La finalidad de todo tratamiento de ortodoncia es corregir a una posición definida las piezas dentales de la boca para mejorar la función de los sistemas que intervienen en la masticación. Además, la estética de los dientes también se beneficia [1].

A principios del siglo XX los ortodoncistas vislumbraban la necesidad de corregir los dientes de forma individualizada, con lo que los instrumentos para realizarlo se han ido perfeccionando a través de los años. Los aparatos de ortodoncia son utilizados dentro de los tratamientos mecánicos, para la corrección de la posición de los dientes en personas jóvenes y adultas. El aparato por excelencia en tratamientos de corrección bucal es el freno, el cual está constituido por el binomio soporte y arco [2]. El soporte es lo que hoy en día se le llama “bracket”.

Actualmente los brackets son más cómodos y menos molestos que los del pasado. Son más pequeños y se usa un menor número de ellos dentro de un tratamiento. Por otra parte, los alambres tienden a ser menos perceptibles. Existen soportes de plástico, o cerámica, que no son tan resistentes como el acero inoxidable y pueden mancharse con el tiempo. Éstos elementos a veces crean más fricción entre el alambre y la ranura, lo que significa que los dientes no cambian tan rápidamente su posición y el tiempo del tratamiento puede prolongarse.

Algunos ortodoncistas ofrecen un dispositivo llamado aparato lingual, que se conecta a la parte posterior de los dientes, por lo que los soportes y cables no son visibles. La desventaja de estos aparatos invisibles es que pueden irritar la lengua y causar problemas con el habla. También tienden a ser mucho más costosos y requieren más cuidados que los aparatos tradicionales. Debido a la eficacia y la economía de producción se utilizan comúnmente brackets fabricados en acero inoxidable aunque también pueden encontrarse en otros materiales como el oro o el zafiro.

La extensa gama de soportes son diseñados y fabricados bajo estándares de estudios realizados sobre el movimiento de dientes, lo que implica que se fabrican brackets con orientaciones predefinidas. La enorme desventaja que conlleva el colocar este tipo de aparatos, es que suponen que todas las personas que los usen tienen padecimientos similares.

Actualmente existe una tendencia para la individualización del tratamiento de las piezas dentales. Lo más natural en un tratamiento de ortodoncia sería mover cada diente por separado. Diferentes diseños de brackets individualizados han sido patentados con la idea de que sean producidos en masa para incorporarse dentro de los tratamientos comunes de ortodoncia. Estos aparatos tienen la capacidad de ser adaptados a los requerimientos espaciales de cada diente para corregir adecuadamente su posición y reducen el tiempo de tratamiento ortodontal.

Desde hace tiempo, en el Posgrado de Odontología de la UNAM, se inventó un bracket de acero inoxidable en dos piezas que permite la individualización de los tratamientos de ortodoncia. El nuevo diseño requiere de un método de unión que asegure que el bracket permanecerá en una posición programada durante el tiempo que dure el tratamiento. La soldadura por resistencia eléctrica es un proceso conveniente para la unión del bracket [3]. Una de las características de este tipo de soldadura, es que no requiere de un material adicional para lograr la unión. Además, la soldadura por punteo es un proceso usado ampliamente en los consultorios de los especialistas en ortodoncia, por lo que no se requiere generar una nueva tecnología para crear la soldadura, sino de controlar el proceso para obtener los resultados deseados. Entonces, es necesario conocer el mecanismo de los fenómenos físicos involucrados en el proceso.

La finalidad de este trabajo de investigación es el desarrollar un modelo teórico que permita el estudio, análisis y control de un proceso de soldadura por punteo en piezas de dimensiones reducidas por medio de una simulación matemática y un dispositivo experimental. Desde la década de los ochenta se han hecho diversos trabajos [4, 5, 6, 7] relacionados con los modelos teóricos y su solución para el análisis del proceso de soldado, pero los esfuerzos se han enfocado hacia investigar este proceso aplicado a diversas manufacturas industriales como por ejemplo: el punteo en chasis de automóviles [8], láminas de acero, de aluminio y para el control de robots de soldado. Sin embargo, este trabajo es el primer estudio del proceso de soldadura por punteo en aparatos de ortodoncia personalizados que se apoya de un desarrollo teórico y experimental.

En el Capítulo 1 se describen los antecedentes de los aparatos de ortodoncia y se dan algunos fundamentos del mecanismo de movimiento de los dientes, además se describe proceso de punteo en ortodoncia. En Capítulo 2 se plantea el problema y el objetivo del presente trabajo de investigación. Las características del modelo teórico y el método de solución se describen en el Capítulo 3. El desarrollo de la solución del modelo matemático y el diseño del prototipo experimental que se construyó se aborda en el Capítulo 4. Los resultados obtenidos con la realización de las de las pruebas experimentales, a lo largo de la investigación, se exponen en el Capítulo 5. Al finalizar este último se presentan las Conclusiones y el trabajo a futuro para el soldado por punteo en brackets.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Historia del bracket

A principios del siglo XX, se visualizó la necesidad de tener un control tridimensional del movimiento de los dientes en los tratamientos de ortodoncia. Es por ello que se desarrollaron los primeros frenos (o conocidos también como *brackets*) para ortodoncia. Se envolvía cada diente con una banda (Figura 1.1).

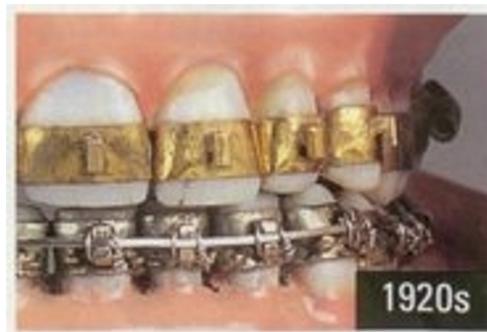


Figura 1.1: Primeros frenos en la década de los veinte [9].

Entre los materiales más utilizados por los ortodontistas estaban el oro, platino, plata, goma de caucho, madera, marfil, zinc, cobre, latón entre otros. Se fabricaban varios elementos de ortodoncia tales como bandas, ganchos y ligaduras sólo por mencionar algunos. El oro de 14 y 18 quilates fue utilizado rutinariamente; al igual que el iridio-platino para las bandas y arcos de alambre. El oro platinado sirvió para crear los primeros soportes para alambre debido a que es maleable y fácil de moldear, pero tiene sus inconvenientes. La suavidad de este metal requiere de ajustes frecuentes y además es costoso [10].

Usando un arco metálico se conectaban todas las bandas en cada diente. Se doblaba el arco con la finalidad de compensar la inclinación dada por cada pieza

dental. La desventaja de este procedimiento era que el tratamiento de ortodoncia se convertían en un procedimiento totalmente artesanal. A mediados de la década de los setentas, el soporte del sistema de sujeción a los dientes se cambió. Una malla se añadió a la base para el pegado directo sobre el esmalte (Figura 1.2).



Figura 1.2: Evolución de brackets en la década de los setentas [11].

En esa misma época, se desarrolló el pegamento con el que se une el bracket sobre el esmalte del diente. Se eliminó así la necesidad de utilizar bandas incrustadas en cada pieza dental. Aún en la década de los setentas, también se desarrolló el primer sistema de brackets preajustados, fabricados en acero inoxidable como el que se muestra en la Figura 1.3.



Figura 1.3: Bracket de acero inoxidable [11].

Estos tenían una orientación dada por una receta desarrollada para la medición de la inclinación labial que parte desde la superficie exterior del diente. A partir de entonces, se inició el desarrollo de numerosos sistemas preajustados. Cada uno con una receta diferente, pero con el objetivo de colocar los dientes en posiciones adecuadas sin la necesidad de realizar dobleces en los arcos. Aún con el desarrollo de este tipo elementos de corrección, en los tratamientos con brackets de inclinación fija se requieren de ajustes en arcos de alambre.

1.1.1. Avances tecnológicos

En años recientes se ha mejorado el diseño de los brackets con elementos que permiten fijar rápidamente el arco a la ranura del soporte. Prueba de esto es el

tratamiento con brackets autoligantes como el de la Figura 1.4 [12].



Figura 1.4: Bracket autoligante [13].

La ventaja principal del sistema de autoligación es que se elimina la necesidad de sujetar el arco con ligas. Tiene una especie de tapa para mantener en una posición el alambre alineador. Es más práctico y reduce la fricción del alambre con la superficie del bracket, logrando movimientos más suaves y constantes. Reduce el tiempo total del tratamiento.

En un tratamiento con brackets autoligantes se utilizan arcos especiales que son confeccionados en níquel-titanio y responden a la temperatura oral ($\approx 35^{\circ}C$), en lo que se refiere a deformaciones. Se prescriben en todos los casos de maloclusión¹ donde se requiera gran confort y resultados en un menor tiempo de tratamiento. El costo es mayor que cualquier tratamiento convencional.

El acero inoxidable no es el único material utilizado para frenos. Existen brackets de cerámica que tienen como mayor ventaja el ser transparentes e invisibles al ojo a cierta distancia. Dentro de la tendencia de tratamientos con mayor estética los fabricados de zafiro son insuperables (Figura 1.5).



Figura 1.5: Bracket transparente [14].

Están confeccionados de un solo bloque de zafiro puro el cual es tallado. Luego es tratado térmicamente para pulirlo y dotarlo de transparencia. Estos brackets utilizados con arcos cosméticos hacen que el tratamiento de ortodoncia sea prácticamente invisible.

¹Maloclusión: se refiere a cualquier grado de contacto irregular de los dientes del maxilar superior con los del maxilar inferior. Incluye sobremordidas, submordidas y mordidas cruzadas.

1.2. El movimiento en los dientes

Es primordial comprender la naturaleza del comportamiento de los dientes para entender con mayor precisión qué tipo de tratamiento mecánico será usado para el tratamiento. Estudios realizados en la década pasada [15], sugieren que existen movimientos en la dentadura de las personas durante su crecimiento. Tales movimientos se presentan principalmente en los premolares y molares superiores e inferiores. El rango de edad va desde los 7 a los 29 años en promedio. La mayoría de las personas tienen diferentes características en lo que se refiere a maloclusiones; que son generadas por la forma en cómo está constituida la dentadura.

En la dentadura, los dientes están rodeados por la encía en la parte superior. Bajo ésta se encuentra la membrana o ligamento periodontal que se sujeta al hueso alveolar y encierra a la raíz del diente (Figura 1.6).

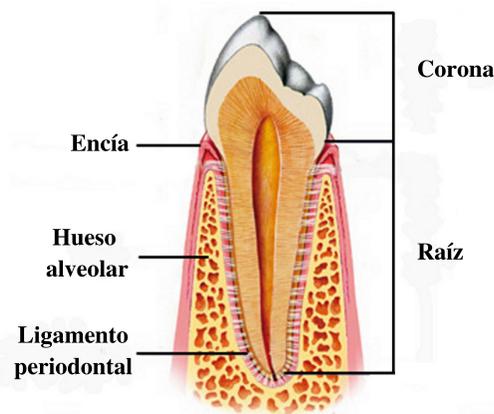


Figura 1.6: Partes del diente [16].

En la Figura 1.7 se representa la dinámica del movimiento en un diente. Las fuerzas que generan la musculatura de masticación son amortiguadas por el ligamento periodontal. Se trata de fuerzas de corta duración. Cuando un diente es sometido a una fuerza prolongada en el tiempo, por ejemplo días o semanas, el ligamento periodontal deja de ejercer el amortiguamiento en él. Es entonces cuando se logra un desplazamiento en las piezas dentales. Durante el movimiento de los dientes el ligamento de fijación al hueso se reabsorbe (desaparece) mientras que el hueco que deja detrás se regenera (rellena) con ligamento nuevo, es decir, un lugar se pierde y en otro se añade. La ortodoncia consigue aplicar fuerza a cada diente para moverlos de forma controlada hasta una posición planificada.

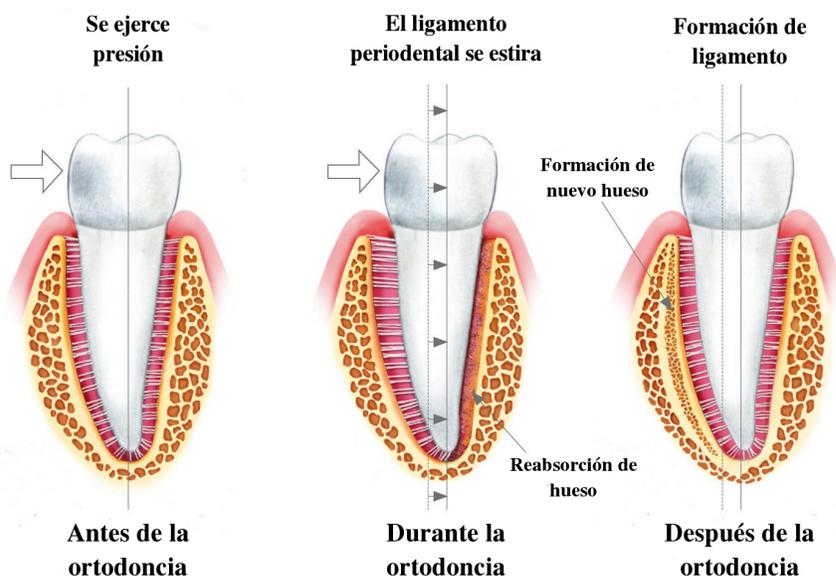


Figura 1.7: Movimiento y fijación de una pieza dental [16].

La presión entre el ligamento periodontal y el hueso crea osteoclastos². La tensión correspondiente entre la ruptura con el hueso y el ligamento detrás del movimiento genera osteoblastos³. La construcción efectiva de nuevo hueso, para llenar la diferencia y restaurar la separación normal entre el diente y hueso mandibular requiere de tiempo. El proceso para generar osteoclastos toma alrededor de 72 horas, después se pone en marcha la transformación completamente. Por otro lado, el osteoblasto es un proceso de 90 días. Estabilizar el resultado tarda casi 10 meses. En esencia, todos los dientes se mueven dentro de la mandíbula llevando consigo su aparato de fijación.

1.2.1. El bracket convencional

Diversos estudios se han realizado sobre las aplicaciones y efectos de los aparatos ortodónticos [1] [17]. El objetivo de los tratamientos de ortodoncia es ayudar a corregir las maloclusiones. Los brackets son aparatos de ortodoncia que ayudan en el tratamiento de éstas. Se pegan en los dientes para ejercer un desplazamiento torcional respecto a la encía y hacia el paladar o la lengua, según sea el caso. Dichos aparatos no funcionan por si solos sin el arco metálico.

El arco forma la unidad básica de la terapia mecánica de ortodoncia a través del cual se aplica una fuerza óptima para el movimiento de los dientes. La ranura del bracket es muy importante debido a que la inclinación y el par que se aplican

²El osteoclasto es una célula multinucleada, móvil, gigante, encargada de reabsorber y remodelar hueso

³Los osteoblastos son células formadoras del tejido óseo.

son controlados con ésta. Cuando el alambre se coloca en la ranura del bracket comienza a mover el diente a una posición predeterminada. Si el diente no se mueve completamente a la posición correcta, el ortodoncista curva el arco metálico para moverlo. Entonces, la presión ejercida en los dientes puede ser controlada.

Además de curvar el alambre, el ortodoncista puede apoyarse de otros elementos de acción como pueden ser: ligas, cadenas de goma, resortes helicoidales, entre otros. Éstos se colocan con la ayuda de fuertes brazos en los brackets o con accesorios soldados al arco. Un ejemplo de cómo pueden usarse tales componentes se muestra en la Figura 1.8.

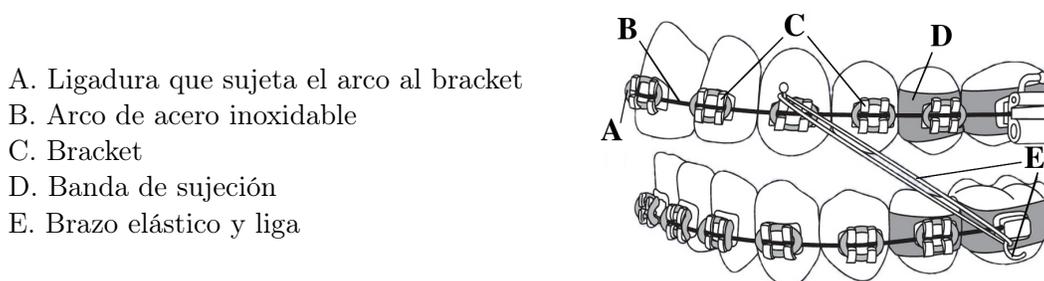


Figura 1.8: Componentes [18].

El arco metálico es un elemento que tiende a mantener su forma original. Están hechos de materiales activados por el calor corporal⁴ para aumentar la rigidez. La tendencia del arco a permanecer recto proporciona directamente la fuerza necesaria para que el proceso biomecánico de la remodelación ósea en los dientes que se mueven, pueda comenzar y continuar. Los alambres sólidos están hechos de una aleación de níquel-titanio. La colocación estratégica de los brackets y la sujeción a los soportes, completa la transmisión de fuerzas desde el arco de alambre hacia los dientes.

Algunos fabricantes de brackets hacen mejoras para proporcionar un movimiento dental óptimo. Debido a que el bracket es específico para cada diente, las compañías tiene su propia formulación para proporcionar la incinación y el par de torsión. Aunque, el movimiento dental es más o menos el mismo todos lo brackets tienen las mismas partes básicas, sin importar qué marca se esté utilizando. Las partes del bracket se muestran en la Figura 1.9 y se describen a detalle en la Tabla 1.1.

⁴En particular, la temperatura interna de la boca es de 35 °C.

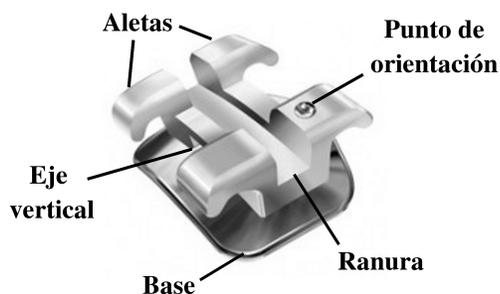


Figura 1.9: Partes de un bracket [11].

Tabla 1.1: Función por componente.

Base	En esta zona se coloca la resina para que el bracket quede firmemente pegado a la superficie dental.
Aletas	Permitirán colocar los arcos y sujetarlos con los elásticos. Deben tener un contorno redondeado para evitar las heridas.
Eje vertical	Se usa de referencia para que coincida con el eje vertical del diente.
Ranura	En ella se ubicará el arco ortodóncico.
Punto de orientación	Se usa para identificar y ubicar el bracket en su respectivo lugar. Esta referencia se encuentra generalmente cerca de la encía pero posterior al diente.

Es posible advertir que dentro de la dentadura la posición de los dientes está definida por tres parámetros. El primero es la posición “dentro fuera”. El segundo parámetro es el ángulo de la corona. El tercer parámetro es la inclinación coronaria. Estos tres parámetros definen la posición espacial de cada diente. Los primeros brackets eran iguales para todos los dientes. Los ortodoncistas tenían que incorporar tres dobleces en el arco para ajustar los movimientos del diente. Estos dobleces se conocen como de 1er orden, 2do orden y 3er orden, que se asocian con el movimiento que se está compensando en el diente. Actualmente los brackets incorporan los tres ordenes de movimientos dentro de su diseño [19].

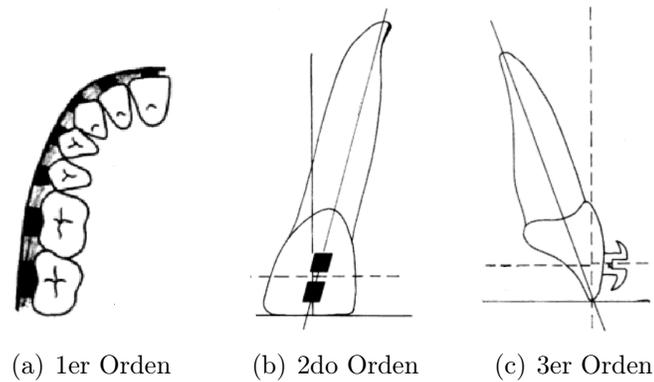


Figura 1.10: Ordenes de movimiento en dientes [11]

En la Figura 1.10(a) se muestra el 1er orden de movimiento que se controla usando diferentes espesores de cada bracket por pieza dental. El 2do orden se logra inclinando la ranura, como se muestra en la Figura 1.10(b). El 3er orden se alcanza inclinando el cuerpo del bracket como se observa en la Figura 1.10(c).

El aparato de corrección preajustado deberá estar en el centro de la corona y paralelo al eje longitudinal del diente. Suponiendo que se coloca idealmente sobre la superficie de cada pieza dental. En consecuencia, el arco tendría que ser capaz de terminar un tratamiento sin doblez alguno. Esto no es posible porque la morfología de cada paciente es distinta. A pesar de que los brackets actuales incorporan la mayoría de las posibles variaciones para los pacientes, siempre se requerirá de al menos un doblez en el arco [19].

1.3. Tendencias en la personalización de brackets

Muchos ortodoncistas continúan buscando sistemas de aparatos que les brinden resultados predecibles, económicos, efectivos y eficientes en los tratamientos que llevan a cabo. Las empresas especialistas ofrecen diseños diversos en cuanto a aparatos se refiere [12, 20, 21]. La mayoría de éstas ofrece la personalización del tratamiento aunque el costo se incrementa. A continuación se hace una descripción de los diferentes aparatos de ortodoncia que siguen la tendencia de personalización del tratamiento.

Brackets linguales. El sistema de brackets lingual se coloca en la parte posterior del diente y muy cercano a la lengua, de allí deriva su nombre. La individualización con este tipo de tratamiento consiste en tomar un registro de la mordida

del paciente y un molde de la dentadura. Posteriormente, con un escáner tridimensional se genera un modelo digital. El modelo digitalizado sirve para la optimización del aparato lingual usando paquetería de computo especializada [20]. Después, se hace un bosquejo digital de las bases de los brackets y se arman basados en su posición óptima y considerando la comodidad del paciente. Cada bracket es fijado a la base y unido por medio de un arco metálico como se muestra en la Figura 1.11.

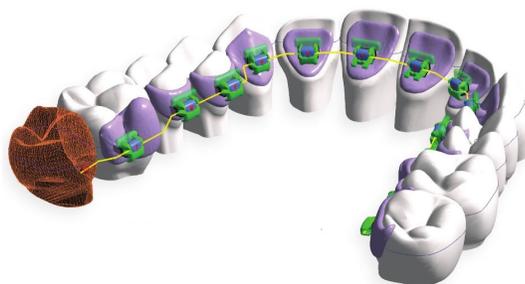


Figura 1.11: Modelo digital del molde [22].

Una vez completado el proceso de diseño, comienza la fabricación del aparato lingual que se colocará en la dentadura. Primero se crean las mallas sobre las que se fija el bracket. La información generada en el diseño sirve para fabricar y doblar el arco metálico usando robots [23]. En la Figura 1.12 se observa un aparato lingual colocado en un paciente.

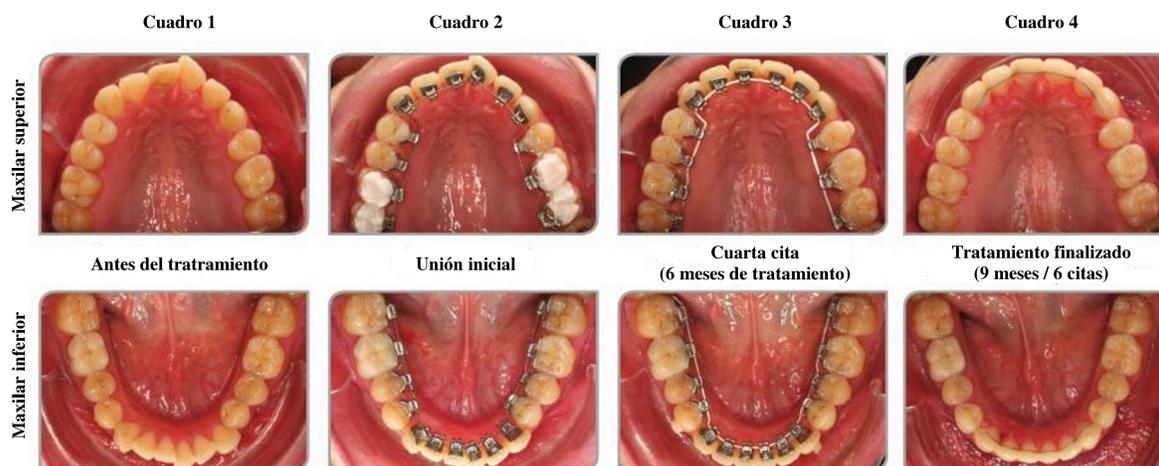


Figura 1.12: Colocación física [22].

En la imagen de la Figura 1.12 se muestra desde el cuadro 1 hasta el cuadro 4 el inicio, la evolución y el final del tratamiento de ortodoncia con un aparato

lingual. El arco metálico es doblado y reemplazado de acuerdo al plan del tratamiento para corregir la posición de los dientes, como se observa en el cuadro 2 y el cuadro 3. En el cuadro 4 se observa el resultado final después de haber usado brackets linguales, que puede ser comparado con la fase inicial de la imagen en el cuadro 1 de la Figura 1.12. Este tipo de aparatos tienen un costo 50 % mayor al de los tratamientos con brackets convencionales lo cual los convierte en un tratamiento poco recomendado.

Alineadores removibles. El tratamiento consiste usar aparatos removibles en lugar de brackets y que consisten en una serie de alineadores con la forma de la dentadura, como muestran en la Figura 1.13. Estos ejercen una ligera presión controlada individualmente sobre cada uno de los dientes. Con este tipo de aparatos se consigue un movimiento, hacia el punto deseado, de manera controlada y progresiva. Se sigue con una secuencia de uso de los alineadores de diferente grosor, que ejercen más o menos presión en función del momento del tratamiento en el que se encuentre el paciente [21]. En las primeras fases, los alineadores tienen menor grosor y son más flexibles para iniciar fácilmente el movimiento. Después adquiere mayor grosor para afianzar la posición deseada, sirviendo el último de la serie como retenedor.



Figura 1.13: Sistema invisible [21].

El diseño de los alineadores invisibles es semejante al de los brackets linguales. Se toma un molde de la mordida del paciente y se envía a una empresa especializada (por ejemplo Invisaling) para que evalúe y determine el plan de tratamiento a seguir. El ortodoncista solicitante debe aprobar y/o corregir el diseño propuesto. Finalizado el paso anterior, comienza la fabricación del aparato y después se envía al consultorio solicitante un conjunto de alineadores del plan de tratamiento. El tratamiento dura en promedio alrededor de un año.

Las visitas al ortodoncista tienen una periodicidad de entre 2 y 4 semanas, tanto para el seguimiento como para la evaluación del cambio del aparato. El costo de este innovador tratamiento de ortodoncia es cercano al de los aparatos linguales (50 % más sobre los brackets convencionales) pero el precio está en función de la complejidad del aparato.

Brackets ajustables. El bracket ajustable es una nueva generación de aparatos de ortodoncia. Se basa en los mismos principios de aplicación⁵ que un bracket convencional pero con la capacidad de ser adaptado a las condiciones espaciales de cada diente. En la Figura 1.14 se muestra la imagen del diseño de un bracket ajustable (tomada de [24]). Las partes que lo conforman son: la base y el cuerpo. El cuerpo cuenta con un mecanismo de cierre automático que impide que el arco metálico se mueva, lo que elimina la necesidad de otros aditamentos para la sujeción. Por otra parte, la base cuenta con una malla que se adhiere al esmalte del diente con un pegamento.

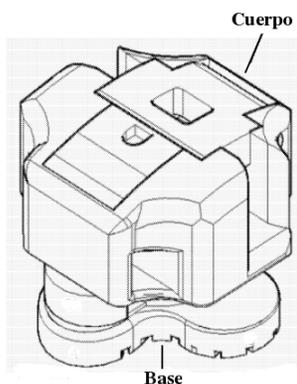


Figura 1.14: Propuesta de diseño de bracket ajustable.

Este diseño en particular, posee un complicado mecanismo de ajuste que consta de tornillos independientes los cuales mueven el cuerpo del bracket en una de las direcciones espaciales por separado. Además, el cuerpo y la base aseguran girando uno respecto al otro. En la Figura 1.15 se muestra cómo se une el bracket y uno de los orificios de los tornillos con los que direccionan el cuerpo.

⁵En la Figura 1.10 de la Subsección 1.2.1 de muestran los órdenes de movimiento bajo los cuales debe prescribirse un bracket. Esto es lo que se considera como los principios de aplicación.

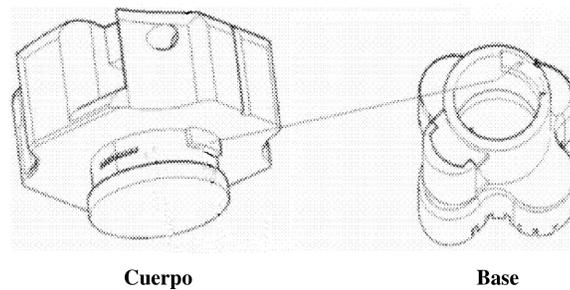


Figura 1.15: Elementos del bracket ajustable.

La ventaja de este tipo de brackets es que puede orientarse de acuerdo a los requerimientos espaciales de cada diente afectando, o dejando intacta, cada pieza dental. En la literatura especializada [24] se puede revisar con mayor detalle el diseño y mecanismo de funcionamiento del bracket ajustable.

1.3.1. El caso de estudio

Existen diseños de brackets ajustables que están siendo evaluados por ortodontistas para ser colocados en pacientes. Este tipo de bracket es una alternativa para emplearse en la ortodoncia con la finalidad de mover los dientes de una forma más eficiente y directa.

Investigadores del Posgrado de Odontología de la UNAM idearon un bracket ajustable que puede ser fabricado en acero inoxidable u otras aleaciones. Fue diseñado para adaptarse a las necesidades de cada persona, logrando individualizar la prescripción para cada pieza dental [25]. En la Figura 1.16 se muestra un dibujo del bracket regulable propuesto por los investigadores.

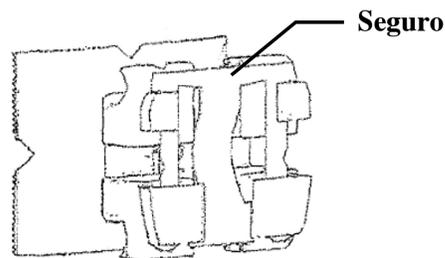


Figura 1.16: Bracket regulable con sistema autoligante.

El seguro impide que el arco metálico salga de la ranura de bracket y elimina la necesidad de utilizar elementos extra para la sujeción. Este nuevo diseño de bracket

se compone de dos partes principales: la base y el cuerpo. En la Figura 1.17 se muestran los elementos que lo conforman pero, se eliminó el seguro que se muestra en la Figura 1.16 para dar una descripción más simplificada.

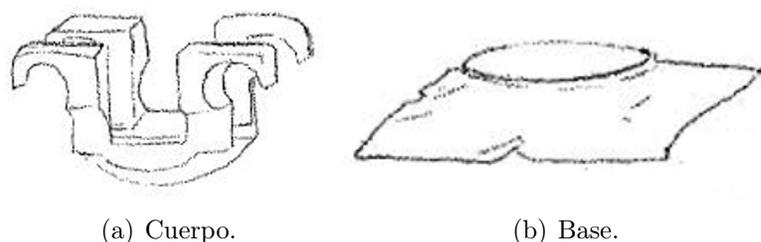


Figura 1.17: Bracket ajustable: (a)Cuerpo, (b)Base

Al ser fabricado en metal, este diseño (Figura 1.17) requiere de una forma de unión que no modifique físicamente el bracket y que sea resistente a las fuerzas generadas en la masticación. El ortodoncista encargado del tratamiento tiene la posibilidad de crear cada elemento ortodóntico de manera única, en su consultorio, para cada pieza dental del paciente. Por tal motivo, la soldadura por punteo se convierte en un excelente candidato para cumplir con el propósito por el que este tipo de bracket ajustable ha sido creado. La soldadura por punteo es un proceso usado en la mayoría de los consultorios y/o laboratorios dentales.

1.4. Antecedentes de la soldadura por punteo

En 1877 Eliu Thomson desarrolló una máquina de soldado por resistencia eléctrica [26]. Es a él a quien se le da el crédito por originar la soldadura por resistencia eléctrica, sus patentes datan de entre 1885 a 1900. El procedimiento empleado por Thomson usa la resistencia interna del metal para ser unido y generar el aumento de temperatura por el flujo de corriente. En un principio se le conoce como “proceso incandescente. El método de soldado creado por Thomson fue sugerido tempranamente por Joule. Comercialmente se han usado el proceso de soldadura por resistencia desde 1880 y se cree que desde 1900 ha tenido un mayor desarrollo. Desde entonces es ampliamente conocido y usado el proceso de soldadura por resistencia.

Aunque en diferentes procesos de soldadura por resistencia está involucrada la corriente, la idea básica de cada proceso es producir el calor suficiente para el soldado, por medio de la resistencia de material al flujo de la corriente eléctrica. La calidad y profundidad de la soldadura está relacionada con diferentes propiedades del material como por ejemplo: el espesor de la pieza, la composición química (e.g. ferrosos y no

ferrosos), la conductividad, etc.

1.4.1. La soldadura en aparatos de ortodoncia

Entre las técnicas de soldado para aparatos de ortodoncia existentes las más comunes son: soldado láser, soldado con alambre de tungsteno (Tugsten Inert Gas, TIG) y soldadura eléctrica por punteo. Por lo regular tienen aplicaciones muy específicas por ejemplo: el soldado con láser utiliza un cristal de neodimio (conocido por sus siglas Nd:Yag) desarrollado para aplicaciones estándar con propósitos de unión entre piezas usadas en laboratorios dentales. Ofrece claras ventajas comparado con respecto a las demás técnicas, por ejemplo: se puede concentrar la energía del láser en áreas diminutas en el metal o incluso cerca a las resinas sensibles al calor [27]. La adquisición de un equipo láser para soldadura aún sigue siendo muy costosa para los laboratorios dentales.

La soldadura por punteo (también conocida como: *soldadura por resistencia eléctrica*) es un proceso que ha sido ampliamente usado en la industria y también en los aparatos de ortodoncia. Algunas de las ventajas de este tipo de proceso es la velocidad de aplicación, la facilidad de automatización, no se requiere añadir otro metal, la soldadura es ligera, resistente, económica, entre otras.

El soldado de accesorios en los arcos es algo que ha fascinado a los expertos en el área por la facilidad con la que la fuerza se transfiere al punto de aplicación, así como a través del centro de masa del diente. Esto hace que los investigadores en este campo se centren en desarrollar aleaciones para arcos con características de soldado superiores. Esto llevó a la introducción de arcos con base de Titanio y sus diversas aleaciones, especialmente la Titanio beta por sus características como: textura lisa de la superficie, menor fricción dentro de los brackets, entre otras. Se han reportado estudios respecto al las características de soldado en arcos metálicos de diferentes materiales [28].

1.4.2. Soldadura por punteo en brackets

Hoy en día, las máquinas de soldadura utilizadas por los ortodontistas permiten llevar a cabo la soldadura por punteo de los accesorios utilizados en los tratamientos de ortodoncia [3], por ejemplo, en los aditamentos linguales o brackets unidos a las bandas. La soldadura por punteo realizada al lado del sillón, actualmente carece de la precisión necesaria para soldar un bracket ajustable con la información de prescripción ortodóntica.

Existen máquinas comerciales para punteo en aparatos de corrección dental. La mayoría de estas máquinas son utilizadas para soldar elementos a los brackets como bandas, alambres o algún otro aditamento especial. En el Posgrado de Odontología de la UNAM, se modificó una punteadora comercial con el objetivo de resolver la necesidad de soldado en los nuevos brackets. Este diseño permite modificar la orientación de la base del bracket respecto al cuerpo de este. El eje horizontal es paralelo a la línea base de la máquina y se permiten rotaciones alrededor de este eje; también respecto al eje vertical y al eje perpendicular al plano vertical. En la Figura 1.18 se pueden observar las rotaciones permitidas por el mecanismo de rotación que se dibujan con flechas curvas.

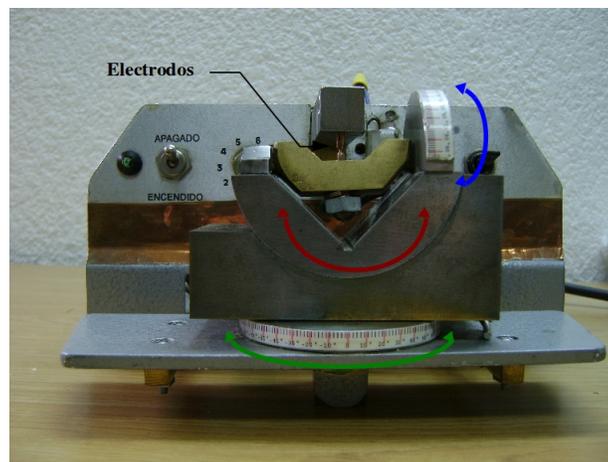


Figura 1.18: Prototipo de punteadora y orientaciones permisibles.

Entre los electrodos se sostiene el bracket (ver Figura 1.18) y se forma la tenaza usando el mecanismo de giro con una barra sujeta a la carcasa de la punteadora. La barra se mueve verticalmente para abrir o cerrar la tenaza. En medio de ésta se encuentran los electrodos que conducen la corriente eléctrica que a su vez se usan para aprisionar el bracket. Cuando la tenaza es abierta el automáticamente el circuito de corriente también. Usando un interruptor de palanca se controla el tiempo en que el flujo de corriente es aplicado al bracket. Los tiempos que se toman son arbitrarios y en algunos casos se calculan heurísticamente. Además, no se sabe la cantidad de energía necesaria para soldar un bracket en acero inoxidable. Los brackets soldados con ésta máquina suelen desprenderse aplicando un leve esfuerzo manualmente.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

La soldadura por resistencia eléctrica es un proceso ampliamente usado y diferenciada de otros procesos de soldadura por ser rápida y limpia. En diversas tecnologías de manufactura es preferida por tener características ideales como peso ligero, fácil manejo y facilidad de producción en masa. Hasta ahora existen modelos matemáticos que describen el comportamiento de un proceso de soldadura por punteo con aplicaciones industriales. En la mayor parte de las aplicaciones se busca obtener un punto de unión controlado. Con esto se facilita la producción en masa, se disminuyen las fallas y se reducen los costos en fabricación.

En piezas de dimensiones reducidas el estudio del control de la unión entre piezas metálicas por soldadura eléctrica es prácticamente inexistente en el área de ortodoncia. Los desarrollos tecnológicos para soldar brackets se crean de forma heurística. En particular, se investiga la soldadura por punteo en una nueva generación de brackets personalizados. El nuevo concepto en el tratamiento de ortodoncia lleva a la necesidad de estudiar un método de unión para brackets con características tales como son: bajo costo, fácil de realizar, durable y resistente. A partir de una simulación numérica se investigará las dimensiones de la soldadura resultante. Un modelo teórico es una poderosa herramienta con la que se podrá controlar, analizar y estudiar un fenómeno dinámico como el que se plantea en la presente investigación.

La medición directa de la temperatura en el centro del punto de soldadura es sumamente complicada, por lo menos con medios convencionales como por ejemplo con un termopar. Estudiar cómo hacer mediciones directas con elementos no invasivos se convierte en un tema de investigación diferente al del presente trabajo. La adaptación de ecuaciones a un fenómeno físico exige consistencia respecto a la realidad, por lo tanto se construyó un dispositivo experimental con las características adecuadas para la obtención de datos.

El principio de funcionamiento de una soldadora por resistencia eléctrica es am-

pliamente conocido en el sector industrial. Para investigar el mecanismo del proceso de soldado en el sistema de brackets en dos piezas es necesario contar con un dispositivo experimental, con la finalidad de crear un punto de soldadura en brackets y que permita capturar los datos de variables relacionadas con la temperatura en el centro de la pieza.

2.1. Objetivo

El objetivo de este trabajo es proponer un modelo teórico del proceso de soldado por punteo en brackets personalizados por medio de la distribución de temperatura en el centro de la unión de las piezas.

2.2. Alcances

1. Investigación del método de soldadura por resistencia eléctrica
2. Búsqueda de modelos matemáticos
3. Aplicar el modelo teórico al caso de estudio
4. Solución numérica con diferentes métodos
5. Diseño y construcción del banco de pruebas
6. Pruebas de resistencia mecánica

Capítulo 3

Marco teórico

3.1. Aproximación teórica

Una aproximación matemática ayuda a entender con precisión el comportamiento del fenómeno en estudio, así que es importante investigar la relación entre las variables del proceso de soldado con la calidad de la unión producida. En forma general, se puede calcular la cantidad de energía necesaria para lograr la unión entre dos piezas metálicas equivalente al incremento de la temperatura desde el punto de contacto. Usando la relación de potencia eléctrica (efecto Joule) se puede escribir:

$$H = i^2 R \quad (3.1)$$

donde:

H = calor generado

i = corriente

R = resistencia

La resistencia al flujo de corriente eléctrica durante un periodo de tiempo en un conductor generará calor, matemáticamente se puede reescribir la ecuación (3.1) como:

$$G = i^2 R t K \quad (3.2)$$

donde:

G = calor generado por intervalo de tiempo

t = tiempo

K = pérdida de calor

La igualdad (3.2) se puede usar para el cálculo de la generación de calor de una punteadora [29] pero el proceso de soldadura por punteo requiere del modelado de complejas interacciones entre fenómenos eléctricos, térmicos, metalúrgicos y mecánicos.

3.2. Preliminares de ecuaciones elípticas y parabólicas

Modelar diferentes partes de un mismo fenómeno puede requerir de una o varias ecuaciones diferenciales parciales (EDP) para su descripción matemática. Comúnmente las ecuaciones diferenciales parciales suelen clasificarse en diferentes tipos: elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Cada una de ellas muestran un comportamiento diferente, además de que requieren de técnicas distintas para su solución.

Las ecuaciones elípticas describen comportamientos físicos que no cambian en el tiempo, o bien, comportamientos que en cierta forma son periódicos y cuya dependencia temporal es posible reducirla a un problema estático. Algunos campos de aplicación de este tipo de ecuaciones son: la mecánica de fluidos, elasticidad y electrostática por mencionar sólo algunos. El arquetipo de una ecuación diferencial parcial elíptica en dos dimensiones es la conocida como de Poisson, que matemáticamente se escribe:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad (3.3)$$

para un dominio dado Ω . Para determinar completamente la solución de (3.3) es necesario especificar las condiciones de frontera para algún dominio específico. Si $f(x, y) = 0$ la homogénea correspondiente para (3.3) se convierte en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (3.4)$$

y su solución se reduce a una función armónica si se trata de un caso ideal, como la difusión de temperatura en una placa metálica cuadrada. Para la ecuación (3.4) se requiere, necesariamente, de condiciones de frontera que se clasifican en dos tipos: de Dirichlet y de Neumann. En las condiciones de Dirichlet, los valores de la solución son especificados en la frontera, es decir:

$$u = b_1 \text{ en la frontera } \partial\Omega$$

En las condiciones de Neumann los valores de la derivada normal son especificados en la frontera y se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = b_2 \text{ en el dominio } \partial\Omega$$

Las condiciones de frontera pueden ser mixtas (Dirichlet y Neumann) las cuales son una combinación de u y sus derivadas parciales.

Las EDP con dependencia temporal son conocidas como ecuaciones parabólicas y en las que se relaciona la variación del espacio con la del tiempo. La ecuación de

difusión es un ejemplo de una ecuación parabólica que está dada por:

$$u_t = \kappa u_{xx} \quad (3.5)$$

Además de las condiciones de frontera, para la parte espacial, la ecuación (3.5) necesita de una condición inicial al tiempo t_0 , que típicamente se toma como $t_0 = 0$. En forma funcional se escribe:

$$u(x, 0) = \eta(x) \quad (3.6)$$

Al igual que en las elípticas las condiciones de frontera puede ser del tipo Dirichlet, Neumann o mixtas.

3.3. Ecuaciones constitutivas del modelo teórico

El modelo teórico del proceso de soldado por punteo debe incorporar la interacción de diferentes fenómenos dinámicos. Un modelo que describa mejor la dinámica del fenómeno físico es aquel que incorpora la mayoría de fenómenos identificados en el proceso pero su complejidad está directamente relacionada con las variables que incluya. La finalidad de todos los modelos, que representan el proceso de soldadura por resistencia eléctrica, es calcular la distribución de temperatura desde un punto de contacto en común hacia las fronteras. Lo que se lograría es controlar y predecir el comportamiento del punto de soldadura resultante.

La forma general de modelar el proceso de soldadura por punteo se hace con la ecuación de calor y la ecuación de Laplace, dadas sus respectivas condiciones de frontera. Así, el modelo teórico está conformado por el siguiente conjunto de ecuaciones generales:

$$T_t = \kappa \nabla^2 T + Q \quad (3.7)$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.8)$$

donde:

$T = T(x, y, t)$ es una función que representa la temperatura punto a punto en cada instante de tiempo.

Q es el calor generado por el sistema

$V = V(x, y, t)$ es una función que representa el voltaje punto a punto.

κ es el coeficiente de difusión térmica en unidades de $[m^2/s]$, dado por:

$$\kappa = k/\rho C$$

donde:

k es la conductividad térmica en $[W/mm \cdot K]$

ρ es la densidad del material en $[g/mm^3]$

C es el capacidad térmica en $[J/g \cdot K]$

En una nueva área de aplicación, como lo son los brackets personalizados, establecer un modelo propio ayudará a predecir el comportamiento de la soldadura por punteo. Usando un enfoque teórico y experimental del fenómeno, se busca establecer un modelo matemático formado por el sistema de EDP constituido por una ecuación de difusión (3.7) y otra de dispersión (3.8).

3.3.1. Ecuación de difusión

La ecuación de difusión en dos dimensiones describe el comportamiento térmico en la soldadura suponiendo que la distribución de presión es uniforme en la interfase de las dos piezas de trabajo. Entonces, la distribución temperatura T_w de la soldadura puede escribirse como un problema de conducción no estacionario más un término de generación de calor. Aprovechando la simetría cilíndrica que posee el sistema descrito, se puede escribir:

$$\rho_w C_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) + \frac{k_w}{r} \frac{\partial T_w}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_e} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \quad (3.9)$$

como la ecuación que describe punto a punto, a lo largo de un tiempo finito, la distribución de temperatura desde punto de soldadura hacia los límites físicos de la pieza.

Un corte a lo largo del eje vertical de dos electrodos que aprisionan una pieza de trabajo se muestra en la Figura 3.1. Debido a la simetría a lo largo del eje vertical se eligieron coordenadas cilíndricas¹ para escribir la ecuación de difusión.

¹Se puede demostrar que la solución de esta ecuación en coordenadas cilíndricas, con coeficientes constantes, es consistente con la de coordenadas cartesianas.

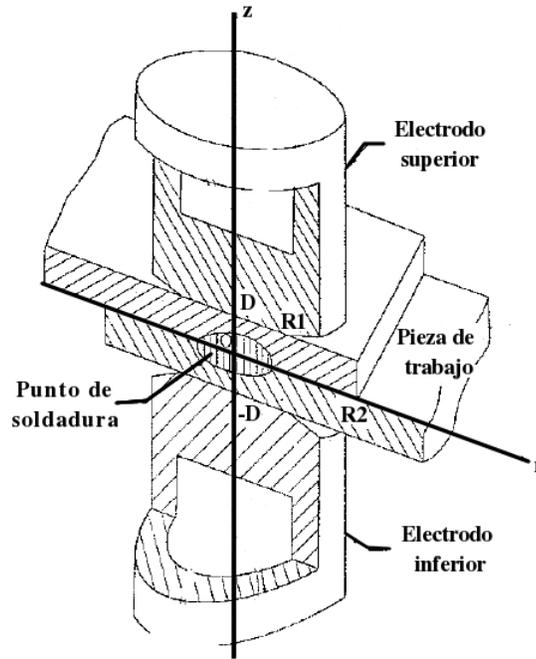


Figura 3.1: Diagrama esquemático de electrodos.
Modificada de [4]

Las variables geométricas D , R_1 y R_2 , se refieren a las coordenadas del diámetro de ambos electrodos y de los límites de la pieza de soldado. Las condiciones de frontera se definen como:

$$\begin{aligned}
 -k_w \frac{\partial}{\partial z} T_w(r, 0, t) &= \frac{1}{\sigma_w} \Phi^2 \text{ en } 0 \leq r \leq R_2 \\
 T_w(r, D, t) &= 296 \text{ en } R_1 \leq r \leq R_2 \\
 T_w(r, D, t) &= T_e(r, D, t) \text{ en } 0 \leq r \leq R_1 \\
 T_w(R_2, z, t) &= 296 \text{ en } 0 \leq z \leq D \\
 \frac{\partial}{\partial r} T_w(0, z, t) &= 0 \text{ en } 0 \leq z \leq D
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

y como condición inicial se impone que:

$$T(r, z, 0) = 296 [K] \tag{3.11}$$

donde:

$T_w = T_w(r, z, t)$ es la temperatura del punto de soldadura en cada instante de tiempo

k_w es la conductividad térmica

ρ_w es la densidad del material (brackets), que en este caso es el acero 17-4 PH

C_w es el calor específico

Por otra parte, se puede demostrar que a partir de la ley de Ohm en forma vectorial:

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho_e} \nabla \Phi$$

donde \vec{J} es el vector de densidad de corriente, combinando con la ecuación del efecto Joule en forma vectorial se obtiene:

$$\frac{1}{\sigma} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \quad (3.12)$$

que representan el término disipativo o de generación de calor, que aparece en la ecuación (3.9) y en donde:

$\rho_e = \sigma$ es la resistividad eléctrica²

Φ es voltaje entre los electrodos

Entonces, resolver la ecuación (3.12) implica resolver la ecuación de Laplace para la distribución de voltaje aplicado por los electrodos.

3.3.2. Ecuación de Laplace

En un proceso de soldadura que involucra la fusión se producirá transferencia de calor por conducción además de convección. Para que estos efectos térmicos ocurran, se aplica una diferencia de potencial entre dos electrodos que aprisionan la pieza a soldar. Instantáneamente aparece una corriente eléctrica que fluye a lo largo de las dos partes de la pieza de trabajo a través de un punto de contacto en común, generando el calor requerido para la fusión del material. La ecuación de Laplace que representa la formación de voltaje $\Phi(r, z)$ (en coordenadas cilíndricas) está dada como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sigma r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.13)$$

y con las condiciones de frontera:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(r, 0) = \frac{1}{\sigma_w} \Phi(r, 0) \text{ en } 0 \leq r \leq R_2 \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(r, D) = \frac{1}{\sigma_e} \Phi(r, D) \text{ en } 0 \leq r \leq R_1 \quad (3.15)$$

donde:

σ = resistividad eléctrica

²La letra σ se usará para denotar la resistividad eléctrica sustituyendo a ρ_e , con la que normalmente se describe.

σ_w = resistividad eléctrica entre las piezas de trabajo

σ_e = resistividad eléctrica de interfase entre el electrodo y la pieza

La resolución de este modelo dará información sobre la contribución de energía conforme cambia el voltaje de AC. Se puede sumar el incremento de calor de acuerdo a un tiempo discreto a la ecuación de difusión.

Normalmente, un modelo teórico ofrece una poderosa alternativa para revisar los conceptos relacionados al proceso, por ejemplo, para estimar la importancia de los parámetros de entrada y calcular los efectos producidos por alguna variación. Distintos modelos incorporan comportamientos no lineales o condiciones de frontera no triviales, que dificultan encontrar un resultado directo. La complejidad de las ecuaciones influirá directamente en la búsqueda de su solución, así que los métodos numéricos se convierten en una poderosa alternativa para resolver EDP cuando los métodos analíticos no son tan accesibles.

3.3.3. Métodos de solución numérica

Los métodos de solución del modelo matemático es el analítico y numérico pero se debe elegir el más adecuado basado en el tipo y complejidad de las ecuaciones usadas. El primer método es por excelencia la mejor manera de encontrar un solución exacta, pero con el inconveniente de que no siempre puede asegurarse la existencia de un resultado único [30]. Las técnicas comúnmente usadas en métodos analíticos son: la separación de variables y por medio de características. El método de solución numérica tiene como principal ventaja que es fácil adaptarlo a las características de la ecuación.

Una forma de resolver numéricamente una ecuación diferencial parcial es usando un poderosa herramienta de cálculo numérico conocida como elemento finito (EF). Es una técnica ideada para resolver problemas físicos complejos. Este método se caracteriza por dividir el dominio de la EDP en una colección de subdominios llamados elementos finitos. Sobre cada elemento se construyen funciones de aproximación bajo la idea básica de que cualquier función puede ser representada por una combinación lineal de polinomios. Las relaciones algebraicas ente los coeficientes indeterminados se obtienen satisfaciendo las ecuaciones constitutivas. Existe únicamente un método de elemento finito pero puede existir más de un modelo de elemento finito para el mismo problema que depende del tipo de ecuación a resolver y de método usado para aproximar con funciones algebraicas. En diferentes paqueterías de cómputo existen algoritmos para resolver EDP por medio de EF, como por ejemplo en *Matlab*.

La forma común de resolver una EDP numéricamente es usando un esquema de

discretización en diferencias finitas junto con un método apropiado de solución iterativa. El objetivo de cualquier esquema de diferencias finitas es transformar una ecuación analítica en un problema aritmético. Son cuatro las propiedades fundamentales que deben considerarse antes de elegir una aproximación específica en diferencias finitas (DF) para solucionar una EDP.

Consistencia. La diferencia entre una ecuación en diferencias finitas (EDF) y una EDP desaparece a medida que el espacio entre las variables en la malla computacional tiende a cero independientemente.

Estabilidad. La solución de la EDF es acotada para una EDP estable.

Convergencia. Los valores numéricos de EDF se aproximan a los valores de la solución real cuando las variables en la malla computacional tiende a cero independientemente.

Orden. Es la razón a la cual el error global decrece a medida que las variables en la malla computacional tiende a cero independientemente.

El esquema de diferencia finitas a elegir está determinado por el tipo de ecuaciones que constituyan el modelo teórico.

3.4. El método de Dirección Alterna Implícito

Los esquemas de división de tiempo son un método general para reducir problemas multidimensionales en regiones cuadradas a problemas de una dimensión. Una dificultad de este tipo de métodos es determinar apropiadamente las condiciones de frontera en cada uno de los pasos. Condiciones no bien establecidas pueden degradar seriamente la precisión de la solución. Un método para derivar condiciones de frontera en esquemas con división de tiempo se puede revisar en [31]. En cambio, una de las ventajas de estos esquemas de solución es que cada etapa es fácil de programar y esto es muy deseable para usar procesadores de varios núcleos o en paralelo.

Una poderosa herramienta para solucionar ecuaciones parabólicas en dominios rectangulares es el llamado método implícito de dirección alterna (Alternating Direction Implicit method, ADI). Éste se aplica a ecuaciones de la forma

$$u_t = \alpha \nabla^2 u$$

sin términos mixtos en dominios rectangulares. El método ADI es una forma de reducir problemas bidimensionales a una sucesión de varios problemas unidimensionales.

Los métodos implícitos tienen mayor estabilidad, conforme crece el tiempo, que los explícitos además de que son muy usados. Desafortunadamente los métodos implícitos para dos dimensiones requieren de un conjunto de ecuaciones a ser resueltas a un nivel de tiempo avanzado, lo que no siempre es muy fácil de realizar directamente. En contraste, si se plantea un esquema ADI en dos etapas se puede obtener la solución del sistema de ecuaciones en una matriz tridiagonal. El sistema se obtiene de la discretización a lo largo de las líneas paralelas a los ejes del sistema de coordenadas que se esté usando.

Existen varios esquemas ADI con características similares, pero todos están basados en la misma idea. Algunos ejemplos de estos esquemas son conocidos con el nombre de quienes los dedujeron, por ejemplo: Peaceman-Rachford, Mitchell-Fairweather y Douglas por mencionar algunos. En este trabajo se usa el esquema de D'Yakonov, representado como:

$$\left(1 - \frac{1}{2}r\delta_{x1}^2\right) u^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2}r\delta_{x2}^2\right) u^n \quad (3.16)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}r\delta_{x1}^2\right) u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

en donde:

u^n = aproximación de la solución al tiempo n .

u^{n+1} = aproximación de la solución al tiempo $n + 1$.

$u^{n+\frac{1}{2}}$ = aproximación intermedia de la solución entre el tiempo $n + 1$ y n .

δ = operador de diferencias finitas.

para la discretización de EDP en dos dimensiones con dependencia temporal.

El esquema D'Yakonov (como otros en su tipo) calcula al tiempo $n + 1/2$ el valor de la variable u para predecir el valor es esta misma al tiempo $n + 1$. Es posible mostrar que si se multiplica la ecuación (3.17) por $(1 - \frac{1}{2}r\delta_{x1}^2)$ y se combina con (3.16) se obtiene una ecuación en términos puramente de u^{n+1} y u^n . Además de la representación de la EDP en términos de diferencias finitas se requiere de un método de aproximación aritmética que se escribe en algún lenguaje de programación.

3.4.1. El método de Sobre-relajación (SOR)

Existen varios métodos iterativos, que dependiendo de las características de la matriz, pueden ser empleados para resolver un sistema de ecuaciones. Entre los más comunes están: Gauss-Seidel, Relajación Sucesiva, Gradiente Conjugado y Cholesky, por mencionar algunos. El método de sobre-relajación (SOR) es un método

de aproximaciones sucesivas dado por:

$$u_{l,m}^{k+1} = u_{l,m}^k + \omega \left[\frac{1}{4}(u_{l+1,m}^k + u_{l-1,m}^k + u_{l,m+1}^k + u_{l,m-1}^k) - u_{l,m}^k \right] \quad (3.18)$$

Si el parámetro ω es elegido apropiadamente para (4.7) puede ser rápido en comparación con otros métodos de la misma categoría. Tres casos distintos se pueden distinguir para ω en la Tabla 3.1,

Tabla 3.1: Condiciones de ω .

Condición	Nombre
$\omega > 1$	sobre-relajación
$\omega = 1$	Gauss-Seidel
$1 > \omega > 0$	subrelajación

Dependiendo de la condición que se cumpla para el factor de relajación se tendrán características diferentes en cuanto a la solución como la rapidez de convergencia, precisión del cálculo, entre varios [31]. Dentro de los métodos iterativos el de SOR es conveniente por la rapidez y precisión con la que se llega a la solución. A pesar de las características del esquema de solución, la precisión del recurso computacional siempre será una limitante para obtener una solución con un error de cálculo menor.

Los cambios de fase de un sistema dinámico, como la soldadura por punteo, provocan que los métodos analíticos estén limitados en su aplicación e incluso que su teoría sea más complicada. Una forma de superar el problema es usando un método de discretización para aproximar la solución de la ecuación usando diferencias finitas.

Capítulo 4

Desarrollo teórico y experimental

4.1. Diferencias finitas en dos dimensiones

El método de diferencias finitas es un procedimiento numérico con el que se resuelve una EDP por medio de la discretización del dominio físico y temporal. Las ecuaciones en diferencias finitas se usan ampliamente como una herramienta matemática para desmembrar ecuaciones diferenciales o polinomios [32]. La ecuación de difusión y la de Laplace, en términos de derivadas parciales, fueron convertidas al dominio de las diferencias finitas. La finalidad de este tipo de procedimiento es la de convertir todas las derivadas parciales de un espacio real a uno discreto para usar el algoritmo de cálculo numérico. Con este procedimiento se crea un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto por medio de un esquema de cálculo empleando un algoritmo de programación en algún lenguaje de cómputo.

4.1.1. Discretización del modelo matemático

El esquema ADI de D'Yakonov se usó para reescribir la ecuación (3.9), en términos de diferencias finitas y construir un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$, dando como resultado:

$$\left[1 - \frac{\alpha_w}{\Delta r^2} \left(\frac{\delta_{kr}^2}{2} + \frac{\delta_{kr}^2}{2(i-1)} \right)\right] \Theta_{ij}^{w*} = \left[1 + \frac{\alpha_w}{\Delta r^2} \left(\frac{\delta_{kr}^2}{2} + \frac{\delta_{kr}^2}{2(i-1)} \right)\right] \Theta_{ij,n}^{w*} + \frac{\alpha_w}{2\Delta z^2} \delta_{kz}^2 \Theta_{ij,n}^w + \frac{\alpha_w}{\sigma_e} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \quad (4.1)$$

$$\left[1 - \frac{\alpha_w}{2\Delta z^2} \delta_{kz}^2\right] \Theta_{ij,n+1}^w = \Theta_{ij}^{w*} \quad (4.2)$$

$\Theta_{ij,n}^w$ es la aproximación de la temperatura T_w en el punto i, j al tiempo $t = n\Delta t$
 $\Theta_{ij,n}^{w*}$ es un valor intermedio de la temperatura

σ_e es la resistividad eléctrica del material¹

α_w es el coeficiente de difusividad discreto dado por: $\frac{\Delta t \cdot k_{i,j,n}}{\rho_w C_w}$

donde:

$k_{i,j,n}$ es la conductividad térmica correspondiente a la temperatura $\Theta_{i,j,n}$

ρ_w es la densidad del material

C_w es la capacidad calorífica asociada al material

La discretización de la ecuación de calor se escribió en forma dividida, es decir, se usó una variable auxiliar que toma valores dentro del tiempo intermedio entre $\Theta_{ij,n}^w$ y $\Theta_{ij,n+1}^w$. La variable auxiliar es Θ_{ij}^{w*} la cual toma valores intermedios, pero no se puede garantizar que su valor coincida con el de la temperatura en el tiempo $n + 1/2$.

La letra δ , dentro de las ecuaciones (4.1) y (4.2), representa un operador de diferencias finitas que según su índice está dado como:

$$\begin{aligned}
 \delta_r \Theta_{ij,n} &= \frac{1}{2} [\Theta_{(i+1)j,n} - \Theta_{(i-1)j,n}] \\
 \delta_{kr} \Theta_{ij,n} &= \frac{1}{2} k_{ij,n} [\Theta_{(i+1)j,n} - \Theta_{(i-1)j,n}] \\
 \delta_r^2 \Theta_{ij,n} &= \Theta_{(i+1)j,n} - 2\Theta_{ij,n} + \Theta_{(i-1)j,n} \\
 \delta_{kr}^2 \Theta_{ij,n} &= \frac{k_{(i-1)j,n} + k_{ij,n}}{2} \Theta_{(i-1)j,n} - \frac{k_{(i-1)j,n} + 2k_{ij,n} + k_{(i+1)j,n}}{2} \Theta_{ij,n} + \\
 &\quad \frac{k_{ij,n} + k_{(i+1)j,n}}{2} \Theta_{(i+1)j,n}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

La discretización de la ecuación de Laplace (3.13) es:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\Delta r^2} \left[\frac{\phi_{(i-1)j} - \phi_{ij}}{\sigma_{(i-1)j} + \sigma_{ij}} - \frac{\phi_{ij} - \phi_{(i+1)j}}{\sigma_{ij} + \sigma_{(i+1)j}} \right] - \\
 &\frac{1}{2(i-1)\Delta r^2} \left[\frac{\phi_{(i-1)j} - \phi_{ij}}{\sigma_{(i-1)j} + \sigma_{ij}} - \frac{\phi_{ij} - \phi_{(i+1)j}}{\sigma_{ij} + \sigma_{(i+1)j}} \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{\phi_{i(j-1)} - \phi_{ij}}{\sigma_{i(j-1)} + \sigma_{ij}} - \frac{\phi_{ij} - \phi_{i(j+1)}}{\sigma_{ij} + \sigma_{i(j+1)}} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde:

$\phi_{i,j}$ es la aproximación la distribución de voltaje ϕ en el punto i, j

¹En general, se usa ρ para designar a la resistividad eléctrica para no generar confusión con la densidad, en este trabajo se utiliza σ_e en caso continuo y $\sigma_{i,j}$ en el discreto.

$\sigma_{i,j}$ es la resistividad eléctrica en cada punto de la malla computacional. Es posible mostrar que la discretización de la ecuación (4.4) puede reescribirse, también, como un sistema de la forma $Ax = b$.

4.1.2. Propiedades del material

Una solución más realista del modelo matemático tendrá que considerar las variaciones de la conductividad térmica así como de la resistividad eléctrica, ambas en función de la temperatura. Las aproximaciones en diferencias finitas de las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.4) están multiplicadas por sus respectivos coeficientes como función de la temperatura. Estos coeficientes aportan información al modelo sobre el comportamiento del material a diferentes temperaturas.

El material del que están hechos los brackets es de acero inoxidable 17-4 endurecido por precipitación o PH (por sus siglas en inglés de: *precipitation hardened*). Es un material usado en aplicaciones tales como: la aeroespacial, engranajes, válvulas, álabes de turbinas, barriles de residuos nucleares, la petroquímica, el procesamiento de alimentos y papel. Algunas de sus propiedades más sobresalientes son: alta resistencia a deformaciones, baja corrosión, propiedades mecánicas estables a temperaturas superiores a 590 K (316°C) que lo hacen un material versátil. Debido a su composición química este tipo de acero inoxidable resiste mucho mejor un ataque corrosivo que otros aceros del tipo endurecidos por precipitación [33], bajo condiciones normales de uso.

En la Tabla 4.1 se hace un compendio de las propiedades físicas² del acero inoxidable 17-4 PH, necesarias para resolver el modelo matemático.

Tabla 4.1: Propiedades físicas.

Propiedad	Valor	Unidad
Conductividad térmica (k)	0.0179	$[W/mm \cdot K]$
Densidad (ρ_w)	0.00786	$[g/mm^3]$
Capacidad térmica (C)	0.460	$[J/g \cdot K]$
Temperatura de fusión (T_f)	$\simeq 1220$	$[K]$
Temperatura de líquido (T_f)	$\simeq 1250$	$[K]$
Resistividad eléctrica (σ_e)	770	$[\mu\Omega \cdot mm]$

Un modelo matemático más realista de la soldadura por punteo requiere de parámetros que puedan ser descritos en función de la temperatura. La conductividad

²Tomando en cuenta que las propiedades investigadas se reportan bajo la *Condición A*, que se refiere a una muestra tratada a $1311\text{ K} \pm 287\text{ K}$ ($1038^\circ\text{C} \pm 14^\circ\text{C}$) y enfiada con un flujo de aire constante a 305 K (32°C)

térmica y la resistividad eléctrica son parámetros que están relacionados con propiedades del material referentes a la conducción de calor y a la oposición de la corriente eléctrica, respectivamente.

4.1.3. La conductividad térmica y resistividad eléctrica como funciones de la temperatura

La conductividad térmica es una propiedad física de magnitud intensiva³ propia de cada material, que mide la capacidad de conducción de calor.

La información del comportamiento de la conductividad térmica como función de la temperatura para el acero 17-4 PH se tomó de [7]. Usando esta información, se hizo una gráfica con una aproximación de funciones analíticas que mejor se adaptaran a los datos de la conductividad. En la gráfica de la Figura 4.1 se muestran las curvas de ajuste.

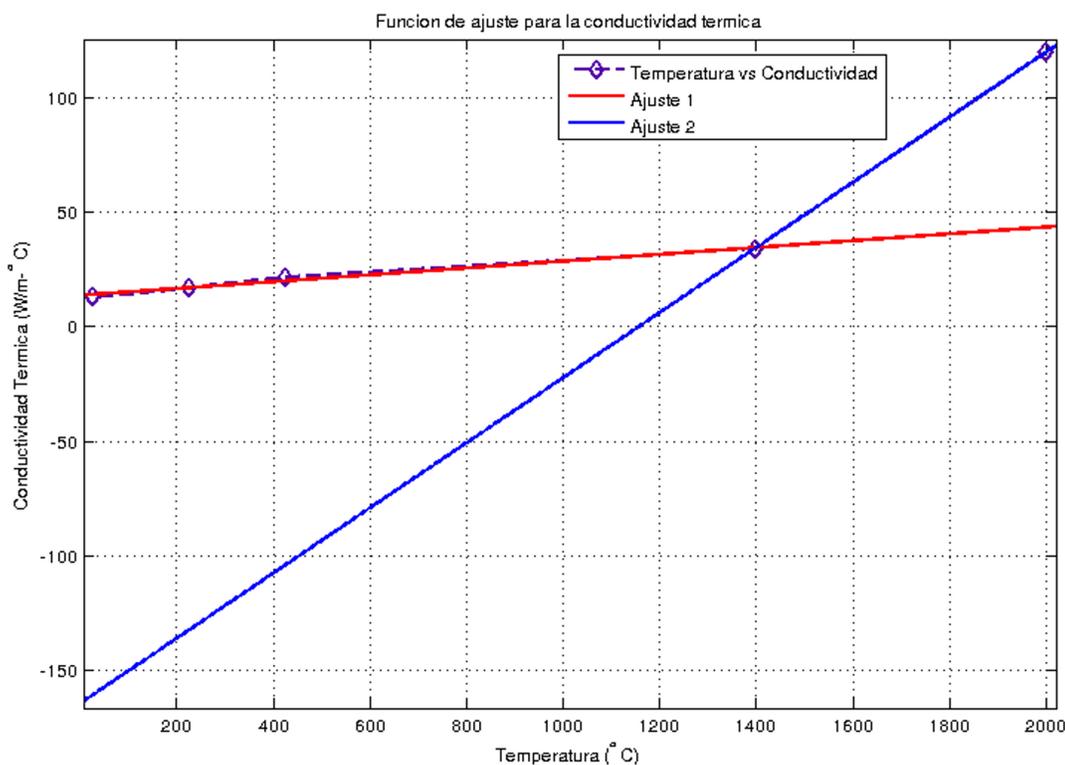


Figura 4.1: Curvas de aproximación para la conductividad térmica.

Las líneas con la leyenda Ajuste 1 y Ajuste 2 en la gráfica de la Figura 4.1 representan a un conjunto de funciones que forman una sola. La función resultante

³Se refiere a que no depende de la cantidad de sustancia o del tamaño de un cuerpo, por lo que el valor permanece inalterable al dividir el sistema en varios subsistemas, es decir, no son propiedades aditivas.

se expresa como:

$$k(x) = \begin{cases} a_1x + b_1 & \text{si } x \leq 1397 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (Ajuste 1)} \\ a_2x + b_2 & \text{si } x > 1397 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (Ajuste 2)} \end{cases} \quad (4.5)$$

El comportamiento de la conductividad térmica $k(x)$, se calculó tomando a la temperatura como la variable independiente, representada como x en (4.5). Las constantes de las ecuaciones asociadas con el Ajuste 1 y el Ajuste 2 se presentan en la Tabla 4.2 junto con el intervalo de confianza.

Tabla 4.2: Resultados del ajuste para conductividad térmica.

Coefficiente	Valor	Unidad	Intervalo de confianza ($\times 10^3$)
a_1	9.068×10^3	$[W/mm(^{\circ}C)^3]$	(6.023, 12.11)
b_1	21.47×10^3	$[W/mm(^{\circ}C)^2]$	(18.83, 24.1)
a_2	0.1423×10^3	$[W/mm(^{\circ}C)^3]$...
b_2	-164.7×10^3	$[W/mm(^{\circ}C)^2]$...

La ecuación de la recta que pasa por tres puntos tiene un intervalo de confianza pequeño (Tabla 4.2) si se compara con el valor de los coeficientes a_1 y b_1 , con lo que se confirma que ese ajuste es aceptable. La segunda ecuación pasa únicamente por dos puntos, por lo que el intervalo de confianza es inexistente.

Por otra parte, la resistencia de contacto entre las piezas es determinante para el flujo de corriente entre dos piezas en la soldadura por punteo. Tanto el área de contacto como el espesor del material condicionan la cantidad de corriente usada es por esto que se habla de resistividad eléctrica. Siguiendo la ley de Ohm para materiales isotrópicos se puede calcular la resistencia eléctrica, pero no es trivial el cálculo si se busca una relación como función de la temperatura. Se tomaron los datos reportados en [7] para la resistividad y se hizo un ajuste de con polinomios. En la Figura 4.2 se muestra la gráfica con la aproximación de dos funciones asociadas.

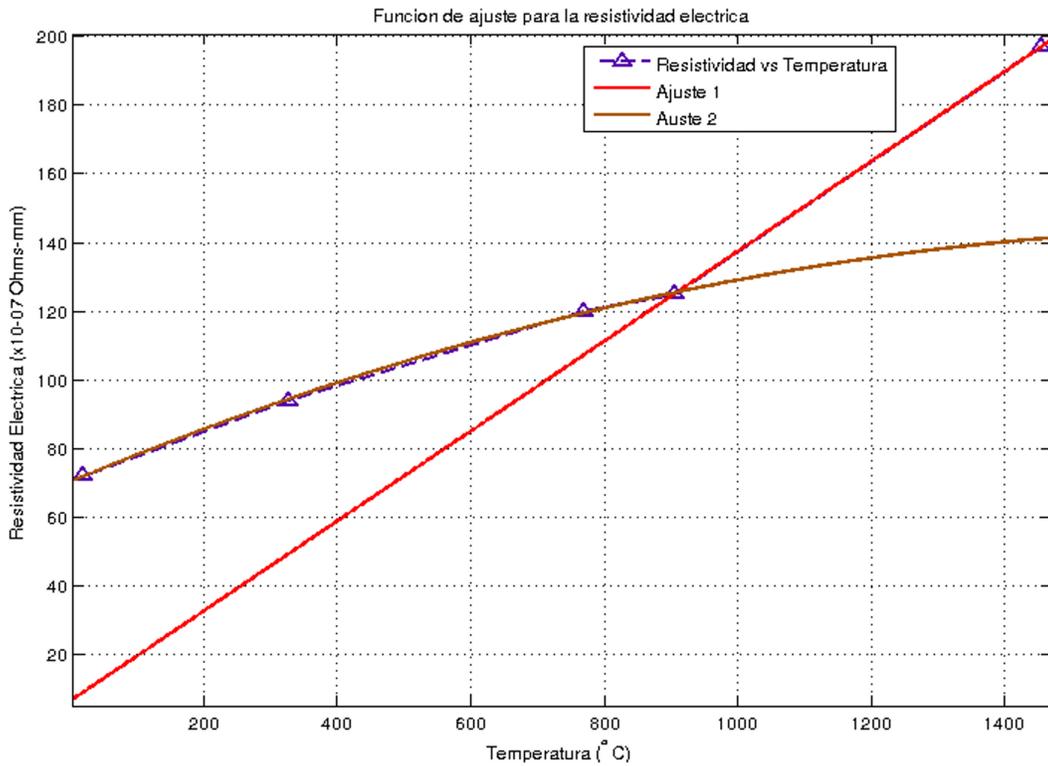


Figura 4.2: Resistividad eléctrica en función de la temperatura con ajuste de curvas.

Se construyó una función $f(x)$ continua, por partes, usando polinomios más próximos que se pueden distinguir uniendo puntos de la Figura 4.2. La función resultante tiene la forma:

$$f(x) = \begin{cases} a_3x + b_3 & \text{si } x \leq 906 \text{ } ^\circ C \text{ (Ajuste 1)} \\ a_4x^2 + b_4x + c_4 & \text{si } x > 906 \text{ } ^\circ C \text{ (Ajuste 2)} \end{cases} \quad (4.6)$$

Las etiquetas, Ajuste 1 y Ajuste 2, en el extremo derecho de (4.6) se refieren al polinomio usado en la aproximación de los datos de la resistividad. Los coeficientes de (4.6) se resumen en la Tabla 4.3. El ajuste de las funciones se consideró aceptable debido a que cada variable se encuentra dentro de su intervalo de confianza además de que no es necesaria una gran exactitud en estos coeficientes.

Tabla 4.3: Resultados del ajuste para resistividad eléctrica.

Coefficiente	Valor	Unidad	Intervalo de confianza
$a_3 =$	50.91×10^{-3}	$[\mu\Omega \cdot mm / (^\circ C)^2]$...
$b_3 =$	161×10^{-3}	$[\mu\Omega \cdot mm / ^\circ C]$...
$a_4 =$	-2.216×10^{-5}	$[\mu\Omega \cdot mm / (^\circ C)^3]$	$(-9.152 e^{-5}, 4.719 e^{-5})$
$b_4 =$	0.08094	$[\mu\Omega \cdot mm / (^\circ C)^2]$	(0.01441, 0.1475)
$c_4 =$	70.25	$[\mu\Omega \cdot mm / ^\circ C]$	(59.12, 81.39)

El comportamiento de la conductividad y resistividad es independiente de las unidades de medición, en otras palabras, si se analiza el comportamiento de los datos en unidades de Celcius es el mismo que si fuera en Kelvin. Para convertir de una unidad a otra se multiplicó por el factor

$$273 \left[\frac{^{\circ}C}{K} \right]$$

los coeficientes de las ecuaciones (4.5) y (4.6). Se puede demostrar que el análisis dimensional es consistente en todos los casos.

4.2. Solución numérica con el método SOR

Una solución directa requiere de un excesivo esfuerzo de cálculo y memoria computacional en tanto el número de puntos en la malla se incrementa. En términos generales, cualquier método iterativo comienza con una estimación inicial de la solución, después se hacen intentos de mejorarla por medio de alguna iteración. Se detiene el ciclo cuando se obtiene un resultado con una aproximación a una condición de error, entre el valor anterior y el actual.

Existen varios métodos iterativos que, dependiendo de las características de la matriz, pueden ser empleados para resolver un sistema de ecuaciones. En este caso se usó el de sobre-relajación (SOR) como método de solución por aproximaciones sucesivas y dado por:

$$u_{l,m}^{k+1} = u_{l,m}^k + \omega \left[\frac{1}{4}(u_{l+1,m}^k + u_{l-1,m}^k + u_{l,m+1}^k + u_{l,m-1}^k) - u_{l,m}^k \right] \quad (4.7)$$

La elección adecuada del factor de sobre-relajación permite encontrar una solución más rápida. El rango que se impuso para encontrar una solución es $1 > \omega > 0$, así para cada EDP se calculó un factor de relajación distinto. En el caso de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas el factor ω se calculó a partir de la siguiente expresión [34],

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)}} \quad (4.8)$$

donde:

$$r = \alpha \left(\frac{dt}{dx^2} \right)$$

α = coeficiente de difusividad $\left(\frac{\rho C}{k} \right)$

dt = paso en el temporal

dx = paso en la variable espacial

N = es el rango de la matriz escasa sin considerar las condiciones de frontera

Para ecuaciones diferenciales parciales elípticas el factor de sobre-relajación [32] se calculó con:

$$\omega = 2 \frac{(1 - \sqrt{1 - \xi})}{\xi}$$

$$\xi = \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{I}) + \beta^2 \sin(\frac{\pi}{J})}{1 + \beta^2} \right)^2 \quad (4.9)$$

donde:

I = número de puntos en el eje horizontal del eje coordenado

J = número de puntos en el eje vertical del eje coordenado

$$\beta = \frac{dx}{dy}$$

Se impuso una última condición dentro de la programación para la función SOR que obliga al sistema a parar cuando se haya alcanzado una condición de error permisible. En otras palabras, si x_{new} es el resultado de la solución dado una iteración y x_{old} es un valor inicial o anterior, entonces: $|x_{new} - x_{old}| \leq 0,000001^4$. Se eligió SOR como método de solución de numérica por sus características de estabilidad, simplicidad y facilidad de programación⁵ además de la precisión de cálculo que presenta respecto a otros esquemas de solución, como Gauss-Seidel por ejemplo.

4.3. Ecuación de prueba

El desarrollo de una simulación usando el método de diferencias finitas es un proceso que requiere de un cuidado especial. Independientemente del método numérico utilizado siempre se debe comprobar que la solución es consistente con la real. Los métodos analíticos son por excelencia la mejor opción para resolver una EDP, o un sistema de éstas, aunque regularmente se opta por resolverlas con algún método numérico. Estos métodos de cálculo son una potente herramienta para solucionar ecuaciones con coeficientes constantes.

⁴Éste número se ajustó experimentalmente tomando en cuenta el tiempo que tarda la máquina en solucionar la ecuación. La computadora que se usó tiene dos núcleos dentro del procesador. Si se usa un procesador más actual se mejorará considerablemente el tiempo y la precisión de los cálculos. Por otra parte, el programa puede paralelizarse para mejores resultados respecto a la precisión y tiempo de ejecución.

⁵En los Apéndices A,B y C, se puede consultar el programa de la función SOR para ecuaciones parabólicas, elípticas y el programa para la solución de la ecuación de calor.

La solución de la ecuación de un problema de difusión con coeficientes constantes es única. Se planteó un problema de difusión de temperatura en una placa de metal cuadrada, con dimensiones $a = \pi$ en el eje x y $b = \pi$ en el eje y . El espesor del material es despreciable. En términos matemáticos el problema a resolver es:

$$T_t = k(T_{xx} + T_{yy}) \quad (4.10)$$

donde:

$$T = T(x, y, t)$$

k es el coeficiente de difusividad térmica.

Como condición inicial se impuso que al tiempo $t = 0$ la temperatura fuera igual a 100°C y las aristas de la placa se mantuvieron a una temperatura de 0°C , como condición de frontera.

La ecuación de calor (4.10) es un problema clásico en EDP. La solución analítica se puede obtener usando separación de variables, dado que k se supone constante. Entonces,

$$T(x, y, t) = A_{nm} \text{Sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \text{Sen} \left(\frac{m\pi}{b} y \right) e^{(-k(\mu^2 + \alpha^2)t)} \quad (4.11)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b T(x, y, 0) \text{Sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \text{Sen} \left(\frac{m\pi}{b} y \right) dx dy \\ \mu &= \frac{m\pi}{b} \\ \alpha &= \frac{n\pi}{a} \end{aligned} \quad (4.12)$$

es una solución a la ecuación (4.10).

Por otra parte, la EDP (4.10) se convirtió al dominio de las diferencias finitas y se construyó un arreglo de la forma $Ax = b$. Primero se planteó el esquema ADI de la ecuación de difusión en el mismo dominio y luego se resolvió usando SOR para ecuaciones parabólicas. La solución de la ecuación de difusión es un caso particular del modelo matemático.

4.3.1. Solución del caso ideal con elemento finito

El uso de métodos numéricos tales como elemento finito (EF) ha sido adoptado en la resolución de problemas geométricos complicados en donde es difícil lograr una solución analítica. Para tener una guía de cómo se comporta la solución de la ecuación de calor del modelo teórico con condiciones de frontera bien definidas, se

usó el EF y se implementó usando la herramienta *pde-tool* de Matlab, el resultado se comparó con lo obtenido aplicando la función SOR.

El caso ideal se refiere a resolver la ecuación de calor del modelo teórico, sin considerar algún tipo de variación en sus coeficientes. En otras palabras, la conductividad térmica (k_w) y la capacidad térmica (C_w) se tomaron como funciones invariantes de la temperatura. La ecuación de calor a resolver con EF, tomando valores experimentales de los coeficientes es:

$$\rho_w C_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) + \frac{k_w}{r} \frac{\partial T_w}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial z} \right) + Q \quad (4.13)$$

donde:

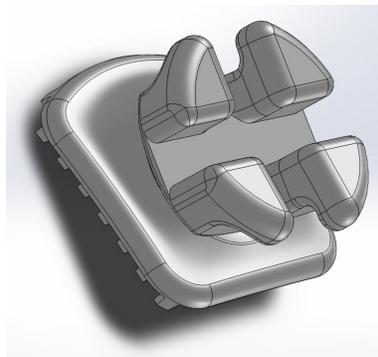
T_w = la distribución de temperatura

$Q = i^2/\sigma$, es el calor generado por el flujo de la corriente en un punto

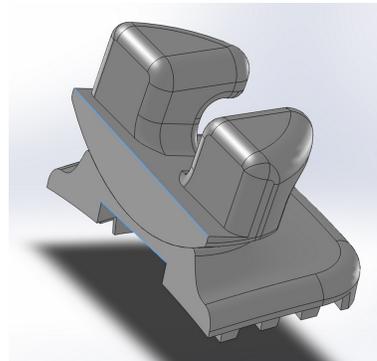
$i = 30 \cdot \text{Sen}(2\pi ft)$, función de corriente

La función que describe a i es una forma de onda que tiene un periodo igual al usado para soldar un bracket. Se midió en el banco de pruebas, con una sonda de corriente conectada a un osciloscopio.

El dominio de solución para cualquier método numérico es vital. En cualquier caso, hablando de diferencia finitas o elemento finito, es necesario establecer en qué sección geométrica se pretende resolver la ecuación diferencial. En la 4.3(b) se observa un corte transversal al eje mayor del bracket.



(a) Dibujo de brabcket completo



(b) Corte transversal.

Figura 4.3: Bracket y corte transversal.

Se aprovecha la simetría que posee la pieza superior respecto al eje vertical z . Si se hace un nuevo corte perpendicular a la sección transversal en la 4.3(b) se observa una geometría que será la que represente el dominio computacional.

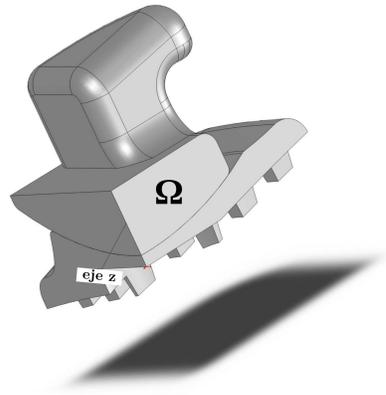


Figura 4.4: Sección

El espacióñ marcado con Ω en la Figura 4.4 se tomó como el dominio computacional para la solución de la ecuación Ecuación 4.13.

4.4. Unión de brackets

El nuevo bracket ajustable elimina la necesidad de doblar el arco metálico. El fin de colocar los dientes en posiciones apropiadas de acuerdo a las necesidades de cada individuo. Se debe tomar en cuenta que este bracket puede ajustarse en las tres direcciones espaciales y con ello controlar los tres movimientos en el diente (Figura 1.10).

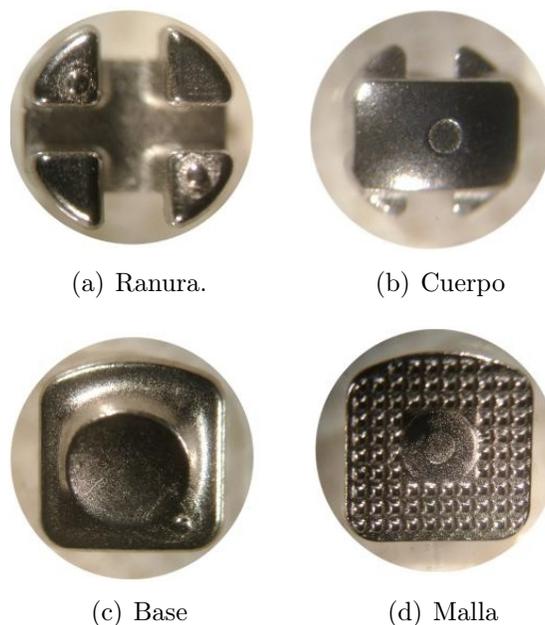


Figura 4.5: Partes que conforman un bracket

La base tiene una malla —Figura 4.5(d)— en una de sus superficies para la unión al esmalte del diente y en la otra tiene una concavidad —Figura 4.5(c)— donde el cuerpo articula. El cuerpo tiene una superficie articular convexa —Figura 4.5(b)— a la concavidad de la base además, cuenta con una ranura para la inserción de arcos metálicos. Sus cuatro aletas de retención —Figura 4.5(a)— sirven para amarrar una ligadura, o bien, para sujetar el seguro del auto-cierre.

La carga principal que soportará el bracket debe ser mayor a la de la mordida en un adulto, que oscila alrededor de 70 Kg/cm^2 lo que representa 7 MPa de presión, aproximadamente. La unión entre ambas piezas debe ser suficientemente resistente para soportar las cargas a las que se someterá en el tratamiento de ortodoncia. El prototipo de punteadora se usó para estudiar e investigar las variables involucradas en el proceso de punteo.

4.4.1. Medición de variables

Los parámetros de punteo identificados en otros trabajos previos, como en [4], [29] y [35], pueden no ser los mismos en todos los casos. Para entender cómo funciona el mecanismo de soldado por punteo en brackets se usó el prototipo (Figura 1.18) como banco pruebas. Se buscó establecer una relación matemática entre las variables identificadas como elementos claves que afectan directamente el proceso de punteo. El conjunto de variables sobre las cuales se hicieron diferentes combinaciones fueron: la corriente, el voltaje, el tiempo y la fuerza aplicada entre los electrodos.

La tenaza aprisiona la pieza de soldado entre los electrodos. La fuerza aplicada por estos se varía colocando diferentes masas —tanto de forma como de tamaño— sobre la barra que forma la tenaza. Las masas fueron pesadas en la balanza digital *A&D* modelo *EK3000* i antes de ser colocadas para calcular la fuerza de los electrodos sobre el bracket.

Las variables eléctricas se midieron directamente en uno de los cables que conecta a los electrodos utilizando el osciloscopio de la marca *Tektronix* modelo MSO4034B (Figura 4.6(a)). En el caso de la corriente eléctrica se usó la sonda TCP0030 (Figura 4.6(b)) y en el voltaje la punta de prueba TPP0500 (Figura 4.6(c)), ambas de la marca *Tektronix*. Además, se capturaron las formas de onda con el osciloscopio en cada medición para el análisis.



Figura 4.6: Osciloscopio y accesorios.
Tomada de [36]

Con el osciloscopio también se midió el tiempo en que fluye la corriente eléctrica entre los electrodos. Para proponer la relación entre las variables del proceso de punteo y la soldadura se estableció una forma de verificarla la calidad de la soldadura.

4.4.2. Verificación de la unión

El propósito del procedimiento de calificación es asegurar que se ha logrado un tamaño adecuado del punto de soldadura. La calidad de una soldadura por lo general se expresa por sus características medibles. Se puede describir en dos maneras: por sus características físicas y/o geometría y la fuerza de unión. Dependiendo de la necesidades específicas. Por lo general, más de un atributo de calidad se controla con el fin de evaluar una soldadura.

Las características geométricas directamente visibles después de hacer una soldadura se hacen o son reveladas a través de ensayos no destructivos. Técnicas no destructivas y más sofisticadas involucran ultrasonido, dispositivos de rayos x o microscopía para estimar el tamaño del punto. Los atributos de soldadura más comunes son: diámetro del punto, penetración, aspecto superficial, grietas (superficiales e internas), porosidad o huecos y separación de las piezas (esfuerzos).

Además de las consideraciones estéticas, la calidad de soldadura por punteo se califica sobre todo por el comportamiento bajo ciertas pruebas físicas. Las características del comportamiento por lo general se refieren a la resistencia estática y la fuerza dinámica de la soldadura. Este tipo de ensayos físicos lleva implícito el hecho de ser una prueba destructiva. Las pruebas físicas más comunes miden la resistencia del punto de soldadura a diferentes esfuerzos, como: la tracción o cizallamiento, torsión, raspado, fatiga, al impacto y la corrosión. La principal preocupación para los procedimientos de calificación de soldadura por resistencia eléctrica es el tamaño

adecuado del punto de soldado. La prueba más comúnmente usada es la resistencia al cizallamiento, debido a que es relativamente fácil medirla.

Se usó una máquina para pruebas en materiales de la marca *Instron* modelo 5567 (Figura 4.7). Es un sistema electromecánico de ensayo que se utilizan para probar una amplia gama de materiales sometidos a esfuerzos tensión o compresión. Las pruebas de resistencia están relacionadas con el tipo de movimientos presentes en los dientes.

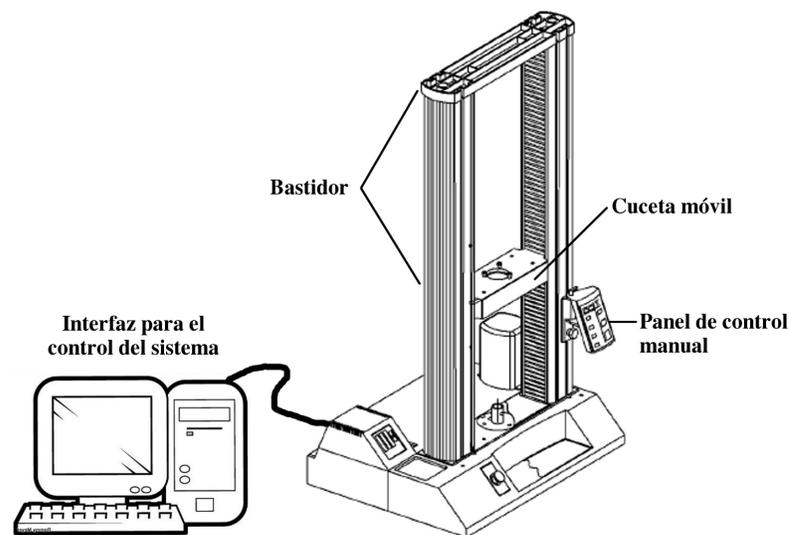


Figura 4.7: Máquina para pruebas de esfuerzo marca Instron.
Modificada de [37]

El sistema de accionamiento mueve la cruzeta móvil hacia arriba para aplicar una carga de tracción sobre la muestra, o hacia abajo para aplicar una carga de compresión sobre la misma. Un transductor, o célula de carga, dentro de la cruzeta mide la carga aplicada. La célula convierte la fuerza aplicada en una señal eléctrica que el sistema de control mide y muestra. La células de carga se puede intercambiar por otras de diferentes capacidades, proporcionando una amplia gama de mediciones y limitadas únicamente por la máxima carga soportada por la estructura.

En la imagen de la Figura 4.8 se muestra cómo se colocó el bracket en la máquina Instron para someterlo a una prueba de esfuerzo. Se observa un bracket soldado dentro de una solución de cerámica que sirvió como base para sujetarlo. Una barra delgada con punta plana es la encargada de transmitir una fuerza vertical sobre la pieza.

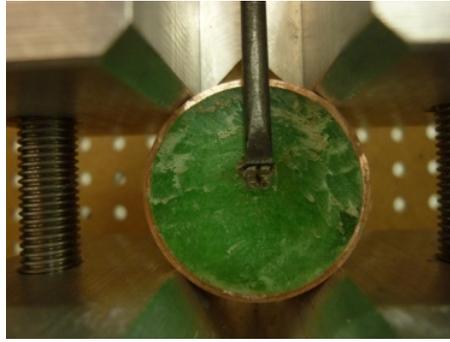


Figura 4.8: Prueba de esfuerzo en bracket

El control del sistema de prueba se hace a través de un programa de computadora que está diseñado específicamente para realizar pruebas de materiales. El funcionamiento del sistema, la adquisición, el análisis de los datos, el ajuste de parámetros y las propiedades del material se realiza a través del programa.

4.5. Diseño del banco de pruebas

Una punteadora para brackets es una máquina que permite grabar una posición dental en diferentes direcciones. El transformador es el elemento más importante, porque provee de la energía necesaria para lograr la soldadura. Un par de electrodos aprisiona la pieza a unir, además de conducir la corriente eléctrica que ésta demande para el puteo. En la Figura 4.9 se muestra un esquema de una punteadora básica.

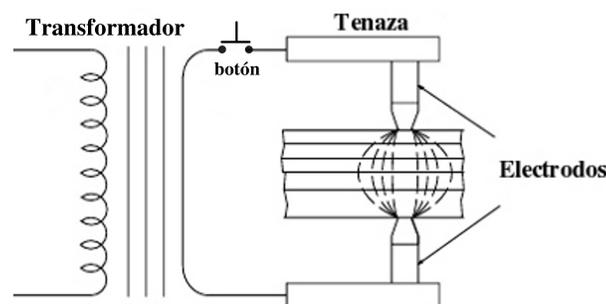


Figura 4.9: Diagrama de una punteadora.

La tenaza, donde se colocan los electrodos, también controlan la presión aplicada en la pieza de soldado. Tendrá que tener un mecanismo de sujeción, posicionamiento y orientación para unir el bracket. El control del tiempo tiene la capacidad de ser modificable para los diferentes experimentos que se realizaron. Adaptando un circuito electrónico se podrá tener un control del periodo de tiempo para limitar el flujo de corriente.

4.5.1. Diseño del circuito de control

Las punteadoras comerciales para aparatos de ortodoncia utilizan corriente eléctrica alterna (CA). Por este motivo se diseñó un circuito electrónico cuya función es la de controlar la duración del tiempo en el que fluye corriente eléctrica entre los electrodos. Se selecciona el tiempo de punteo con una perilla y después, presionando un botón inicia el proceso automáticamente. En la Figura 4.10 se muestra el diagrama diseñado para controlar el tiempo de soldado.

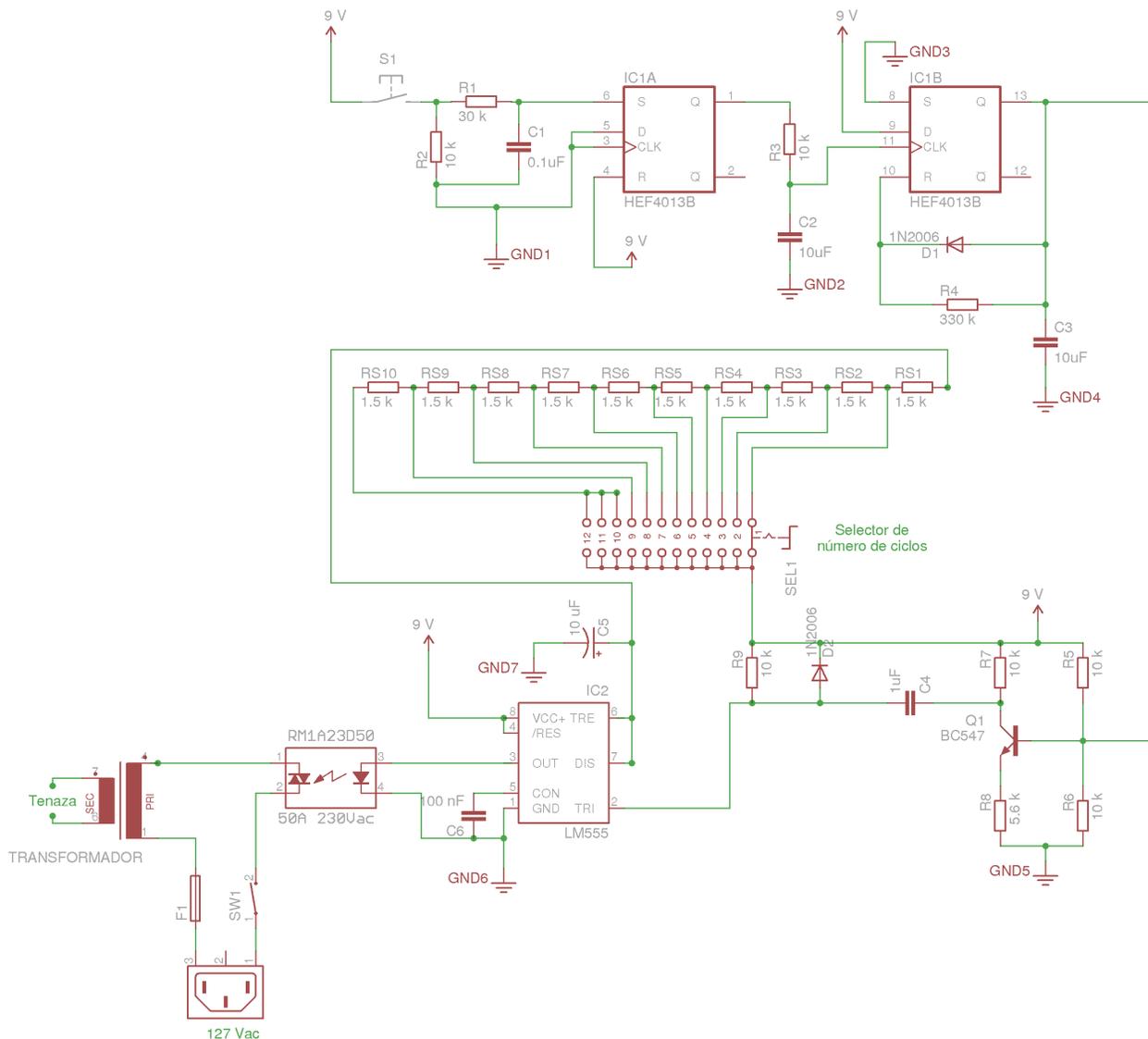


Figura 4.10: Circuito de control.

En la parte superior de la Figura 4.10 se observan los bloques $IC1A$ e $IC1B$ que se refieren al circuito integrado $HEF4013B$. Es un *flip-flop* dual tipo D. Cuando es accionado el interruptor $S1$ el integrado $IC1$ se encarga de generar un pulso cuadra-

do positivo. La salida del integrado *HEF4013B* (pata 13) se conecta al transistor Q1 (*BC547*) para generar un pulso que inicia la acción del integrado *IC2* (*LM555*). El tiempo, T , en el circuito *IC2* es generado con el capacitor *C5* de $10 \mu F$ y la(s) resistencia(s) *RS* de $1,5 k\Omega$ del selector *SEL1*, conectadas en serie. La duración del flujo de corriente eléctrica, medido en términos de ciclos, se ajusta con el selector *SEL1* y se puede elegir múltiplos de ciclos de uno hasta diez.

El integrado *IC2* (*LM555*) genera señales positivas de duración proporcional al tiempo de un periodo de $60 [Hz]$, es decir:

$$T = n \frac{1}{60} [s] \quad (4.14)$$

donde:

T = tiempo de duración del pulso

n = número de ciclos

El pulso generado por del circuito *IC2* controla el relevador de estado solido *RM1A23D50* que a su vez está conectado en serie con el transformador de la tenaza. La señal generada por el integrado *IC2* cierra el circuito de CA, si el relevador recibe un pulso positivo, en caso contrario el circuito siempre está abierto. Así se logró controlar el número de ciclos de corriente alterna. Además de lo anterior, el relevador de estado sólido aísla y protege el circuito de control de la línea de CA.

Capítulo 5

Pruebas, análisis y resultados

5.1. Solución de la ecuación de prueba

La solución analítica a una EDP con coeficientes constantes es bien conocida. Si se usa un método numérico para resolver una ecuación diferencial es importante demostrar la aproximación es buena. Entonces, se puede comparar el resultado de la solución analítica con los cálculos numéricos.

En la Figura 5.1 se muestra la superficie solución asociada a la temperatura en una placa cuadrada con condiciones de frontera iguales a las de (5.1).

$$\begin{aligned} T(0, y, t) = 0 \quad T(\pi, y, t) = 0 \quad T(x, y, 0) = 100 \\ T(x, 0, t) = 0 \quad T(x, \pi, t) = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Los ejes están en función del números de puntos, debido a la discretización de la solución. Se programó un *script* en Matlab para obtener valores discretos de la ecuación (4.11); los parámetros usados se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Parámetros de la solución.

Variable	Valor	Unidad
k	0.1	$[mm^2/s]$
t_{total}	20	$[s]$
dt	0.2	$[s]$
x	π	$[m]$
dx	$\frac{\pi}{40}$	$[m]$
y	π	$[m]$
dy	$\frac{\pi}{40}$	$[m]$

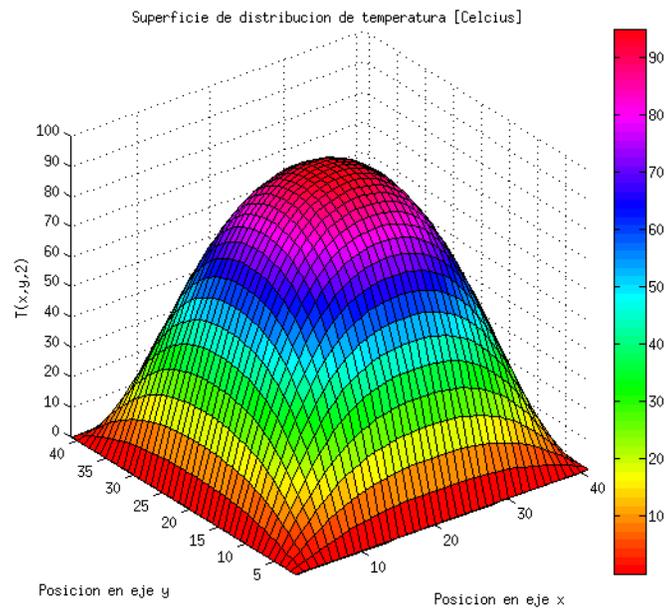


Figura 5.1: Superficie de la solución exacta.

En la gráfica anterior se muestra el resultado del cálculo de temperatura a los 0.4 s después de la condición inicial. Inicialmente ($t = 0$) la placa es calentada a 100° C después ya no se suministra más calor. La proyección de la superficie solución sobre el plano horizontal forma isotermas (curvas de nivel), que se muestran en la Figura 5.2.

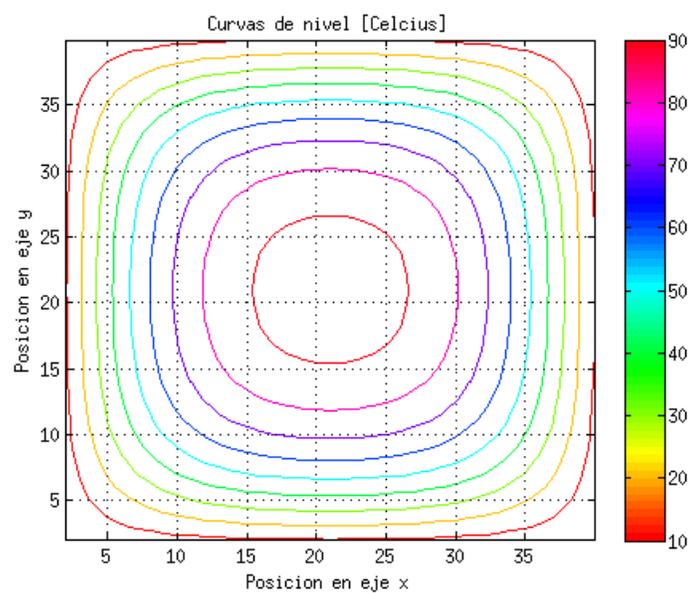


Figura 5.2: Isotermas de la solución exacta.

En la gráfica anterior se puede observar claramente cómo es que la placa de metal difunde el calor generado por la temperatura inicial dando por resultado un gradiente de temperatura. La solución analítica, que es única, se tomó de referencia para validar el método numérico programado.

5.1.1. Consistencia de la solución

Para demostrar que la diferencia entre una solución y otra es consistente, se resolvió la ecuación de difusión por medio del algoritmo de programado en Matlab. La precisión del cálculo con la función SOR fué de 0.000001. Los parámetros utilizados para el cálculo de la solución de la ecuación de difusión con diferencias finitas son los mismos que la Tabla 5.1.

En la Figura 5.3 se muestra la superficie de temperatura después de la discretización de la ecuación de calor clásica y solucionado el sistema con la función SOR.

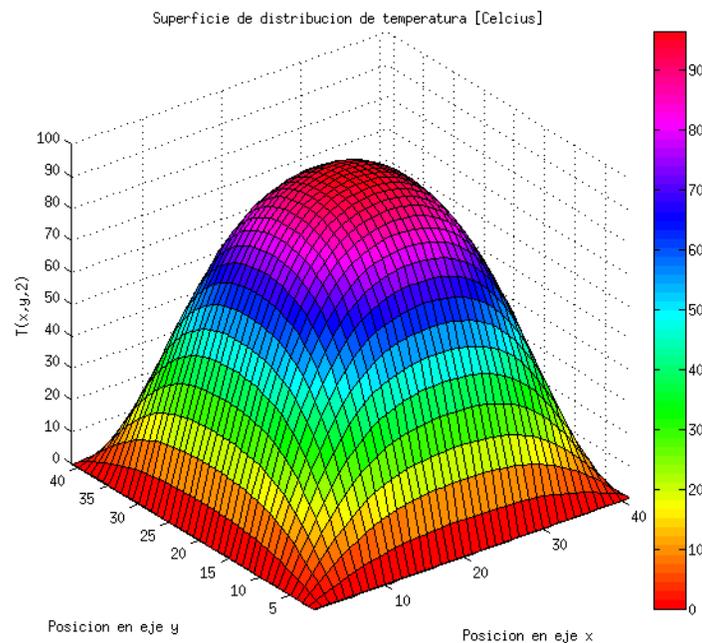


Figura 5.3: Superficie de generada con la solución numérica.

En la Figura 5.4 se muestra la gráfica de las isoterma asociadas a la superficie de la figura anterior.

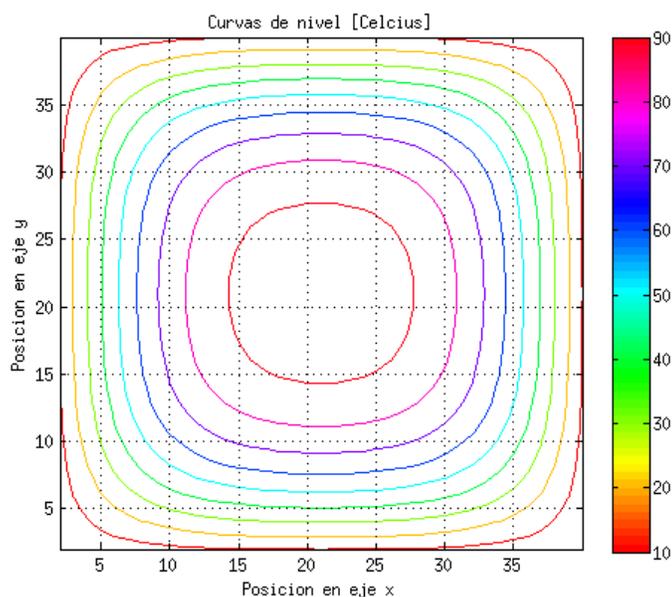


Figura 5.4: Isotermas de la solución numérica.

Cualitativamente se observa que no existe una diferencia significativa entre las gráficas de la Figura 5.1 y la Figura 5.2 contra la de la Figura 5.3 y la Figura 5.4. Además, se puede demostrar que la diferencia del error entre los datos de las figuras anteriores tiende a cero o que al menos se aproxima a la ϵ^1 de la computadora. El método de resolución por medio de diferencias finitas (DF) fué consistente con la solución analítica.

5.2. La solución del modelo matemático

La solución numérica que se obtuvo en la ecuación de prueba fué consistente. Esto quiere decir que es seguro que la herramienta computacional resuelve cualquier ecuación de coeficientes constantes en geometrías regulares. Se probó que la función SOR fuera consistente en el caso más simple, con esto se aseguró la funcionalidad de a herramienta pero también ayudó que la discretización en DF ya se conocía para la ecuación de prueba.

5.2.1. Solución de la ecuación de difusión

La resolución del modelo matemático usando la aproximación de DF con los datos usados en la Tabla 5.2 en un dominio cuadrado se hizo utilizando la función SOR

¹Es la distancia de 1.0 al próximo número más grande de doble precisión. En Matlab es: $\epsilon = 2,2204e - 16$

para EDP parabólicas.

Variable	Valor	Unidad	
$k(T)$	$k_w(T)/\rho \cdot C_w(T)$	$[mm^2/s]$	Función del coeficiente de conducción
t_f	2	$[s]$	Tiempo total de simulación
w	1	$[mm]$	Ancho de la pieza
h	0.5	$[mm]$	Altura de la pieza
dt	0.4	$[s]$	Intervalo de tiempo
dx	0.05	$[mm]$	Intervalo espacial
dy	$dx \cdot h/w$	$[mm]$	Intervalo espacial
N	$[w/dx] + 1 = 31$		Número de puntos con C.F.
M	$[h/dy] + 1 = 31$		Número de puntos con C.F.
T	$[t_f/dt] - 1 = 41$		Número de puntos en el tiempo sin la C.I.
rx	$k_w \cdot dt/dx^2$	$[mm]$	Paso en el eje x
ry	$k_w \cdot dt/dy^2$	$[mm]$	Paso en el eje y
Q	β^2/σ	$[J]$	Fuente de calor

Tabla 5.2: Parámetros de la simulación.

La fuente de calor calculada a partir de i^2 se calculó utilizando la función $i = 30 \cdot \text{Sen}(2\pi ft)$ para el dt propuesto en la tabla anterior. El dominio de solución de la Ecuación 3.9 se tomó rectangular por simplicidad pero pueden agregarse una sección curva. Las dimensiones w y h representan el ancho y la altura respectivamente. Las condiciones de frontera usadas son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} &= 0 \\
 T(1, 5, y, t) &= 26 \text{ }^\circ\text{C} \\
 T(x, 1, t) &= 26 \text{ }^\circ\text{C}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

la condición inicial es:

$$T(x, y, 0) = 26 \text{ }^\circ\text{C} \tag{5.3}$$

La Figura 5.5 es la superficie solución del modelo teórico y la Figura 5.6 las isoterms asociadas.

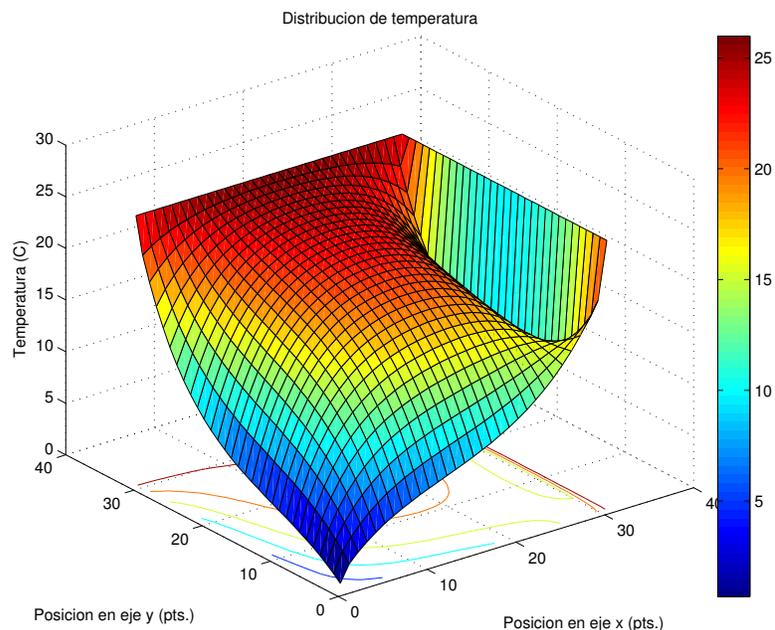


Figura 5.5: Superficie solución.

En la figura anterior se puede observar que el rango de temperaturas recorre el intervalo $[0,25]$ °C. Es claro que no representa la distribución de temperatura que se espera para un punto de soldadura y debería llegar, como máximo, al punto de fusión del material. Además, la superficie no es suave y está deformada por el lado derecho.

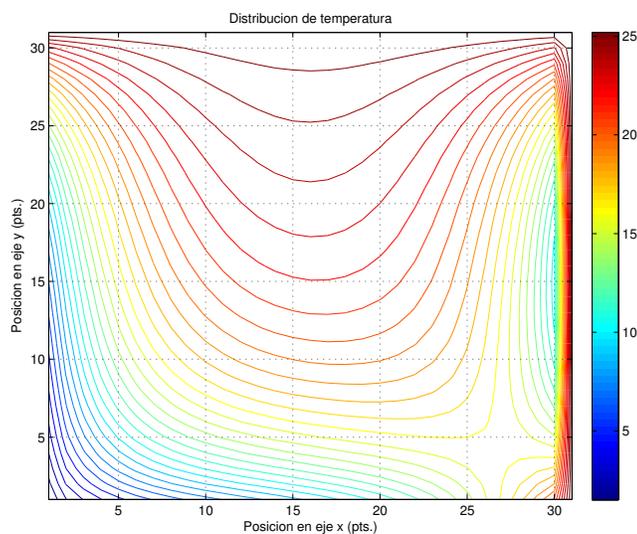


Figura 5.6: Curvas de nivel.

A pesar de que son confiables los métodos de solución numéricos utilizados en este trabajo no muestran una solución que intuitivamente coincida con las observaciones

experimentales. Al igual que en el caso de la solución del caso ideal por elemento finito los coeficientes que acompañan a las ecuaciones del modelo matemático fueron escalados linealmente. Aunque en el caso de la solución por diferencias finitas los coeficientes fueron tomados como funciones de la temperatura.

5.2.2. Sobre la distribución de voltaje

Con la ecuación de Laplace se modeló la distribución de voltaje en la pieza punto a punto espacialmente. Se calculó la solución de esta ecuación usando la discretización con el esquema ADI y se resolvió el sistema. La función SOR para ecuaciones diferenciales elípticas es similar al de EDP parabólicas porque lo único que se cambió fué el factor de sobre-relajación (ecuación (4.9)).

La matriz escasa A y con bandas, asociada a la discretización de la ecuación de distribución de voltaje no es diagonalmente dominante, es decir que

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1, i \neq j}^n |a_{i,j}| \quad \forall i = 1 \dots n \quad (5.4)$$

no se cumple en todos los renglones. Un intercambio de renglones (o columnas) no es posible debido a que se mueven los índices calculados.

Esto último implica que la solución no es convergente y tampoco se puede asegurar que sea aproximada al valor real. Es difícil visualizar que la matriz escasa es diagonalmente dominante a primera vista porque depende del método y esquema de discretización utilizados. El método usado para la distribución de voltaje en el problema de soldadura en brackets no es el apropiado e incluso un cálculo sencillo aportó información a la ecuación de difusión. El cálculo de la cantidad de energía generada por el flujo de corriente, entre las piezas, no requirió de conocer la distribución completa de voltaje en la pieza.

5.3. Desarrollo de simulaciones usando elemento finito

Un ventaja que ofrece el método de elemento finito sobre el de diferencias finitas es la relativa facilidad con que pueden ser manejadas las condiciones de frontera del problema. Ésta es una característica aprovechada para resolver la Ecuación 4.13 en un dominio con una geometría irregular. Además, es un método que servirá de apoyo para comparar las soluciones obtenidas por diferencias finitas y por elemento finito.

En la Figura 5.7 se muestra el contorno de Ω que representa el dominio computacional para la ecuación de calor propuesta.

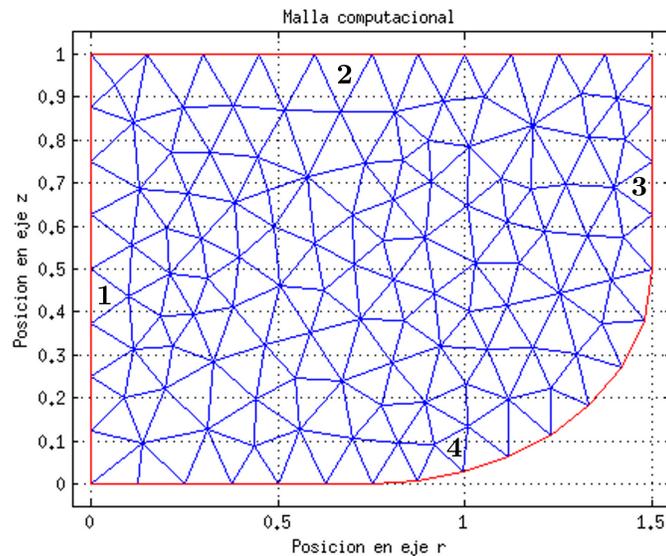


Figura 5.7: Malla computacional.

Los números cerca de perímetro en la Figura 5.7 señalan la condición de frontera en esa sección del dominio impuesta para la Ecuación 4.13. Las condiciones de frontera que se usaron aparecen en (5.6)

$$\begin{aligned}
 1 \quad & T_{w_x}(0, y, t) = 0 \\
 2 \quad & T_w(x, 1, t) = 300[K] \\
 3 \quad & T_w(1,5, y, t) = 300[K] \quad \forall y \in [0,5, 1] \\
 4 \quad & -k_w T_{w_y}(x, 0, t) = \rho(i)^2 \quad \forall y \in [0, 0,5]
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

junto con la condición inicial del problema que fué:

$$T_w(x, y, 0) = 300 [K] \tag{5.6}$$

Las condiciones de frontera (5.6) e inicial (5.6) se usaron para programar la solución de la Ecuación 4.13 usando *pdetool* de *Matlab*.

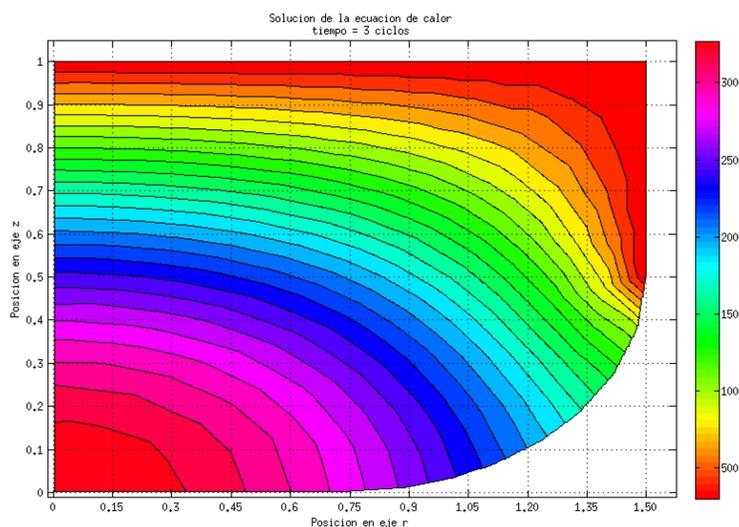
La solución a la ecuación de difusión con coeficientes constantes se consideró como caso ideal porque no tienen variaciones respecto a la temperatura y se resolvió usando el método de elemento finito. Con los coeficientes de la Tabla 5.3 se alimentó el *pdetool* de *Matlab* y resolver la ecuación.

La fuente calor $Q = i^2/\sigma$ donde $i = 30 \cdot \text{Sen}(2\pi ft)$ y las variables internas se toman de la Tabla 5.3. El tiempo total de la simulación fué de 0,1 s, equivalente a 6 periodos de 60 Hz.

Tabla 5.3: Coeficientes constantes.

Coeficiente	Valor	Unidad	
σ	770	$[\mu\Omega \cdot mm]$	resistividad eléctrica
ρ_w	0.00786	$[g/mm^3]$	densidad del acero inoxidable 17-4 PH
C_w	0.460	$[J/g \cdot K]$	capacidad térmica
k_w	0.0179	$[W/mm \cdot K]$	conductividad térmica
f	60	$[Hz]$	frecuencia
t	0.05	$[s]$	tiempo

La solución obtenida dentro de dominio computacional se muestra en la Figura 5.8.

Figura 5.8: Distribución de T_w .

La distribución de temperatura de la Figura 5.8 está dada en grados Kelvin. El tiempo al que se calculó esta distribución es de 0,1 s. Es claro que el rango de temperaturas que se calcula está fuera de toda proporción. La escala de temperaturas convertida a grados centígrados estaría en el intervalo $[227 \ 3227] \text{ }^\circ\text{C}$ y en el que se incluye el punto de fusión del material ($\approx 1400 \text{ }^\circ\text{C}$). La zona en donde se genera el punto de soldadura (extremo inferior izquierdo en la Figura 5.8) tiene una temperatura mayor que el doble que la del punto de fusión del material.

Los coeficientes utilizados en la ecuación resuelta se tomaron como constantes pero se convirtieron a las unidades congruentes al tamaño de las dimensiones reales

del bracket. Cabe la posibilidad de que escalar los coeficientes en forma lineal no sea lo más adecuado cuando se trata de dimensiones ≤ 1 [mm].

5.4. Construcción del banco de pruebas

Se realizaron varias modificaciones que mejoraron el funcionamiento de la punteadora para brackets. Tiene la capacidad de soldar brackets ajustables que incorporen la programación deseada en inclinación, angulación y rotación deseada. En la Figura 5.9 se muestra el banco de pruebas y se puede distinguir una parte mecánica (a la izquierda de la figura) de la eléctrica (a la derecha de la figura).

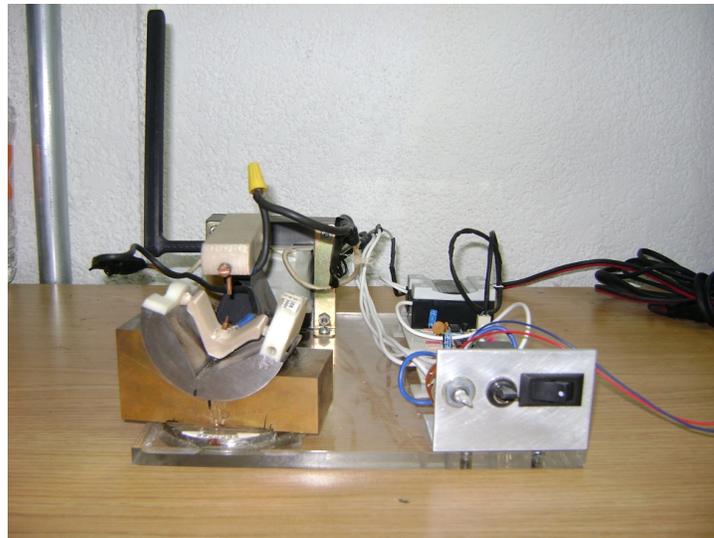


Figura 5.9: Banco de pruebas.

Respecto a la parte mecánica, se construyó una nueva tenaza con una máquina para manufactura aditiva de la marca *Stratasys* con termoplástico. La tenaza tiene un mecanismo de palanca que permite una mejor sujeción del bracket entre los electrodos. También se fabricó e instaló el circuito de control de tiempo, mostrado a la derecha en la Figura 5.10.

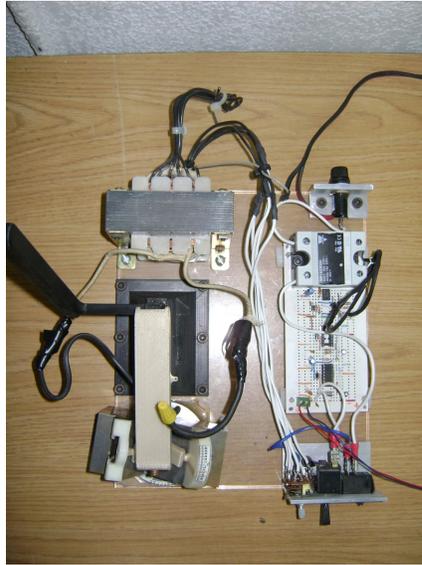


Figura 5.10: Vista superior del banco de pruebas

En la Figura 5.11 se observan las secuencias de pulsos generados en el circuito de control. Con el circuito de control se pueden generar un pulso con una duración igual un múltiplo entero de la frecuencia de CA. La configuración del circuito HEF4013, hace que se eliminen los rebotes producidos por la acción del interruptor de palanca. Se envía un pulso positivo al transistor BC547, que lo invierte para accionar el *trigger* del integrado *LM555*, encargado de los tiempos de soldado. En la Figura 5.11 se puede ver un ejemplo de las señales generadas por el circuito de control marcadas con etiquetas, correspondientes al circuito encargado de generarlas.

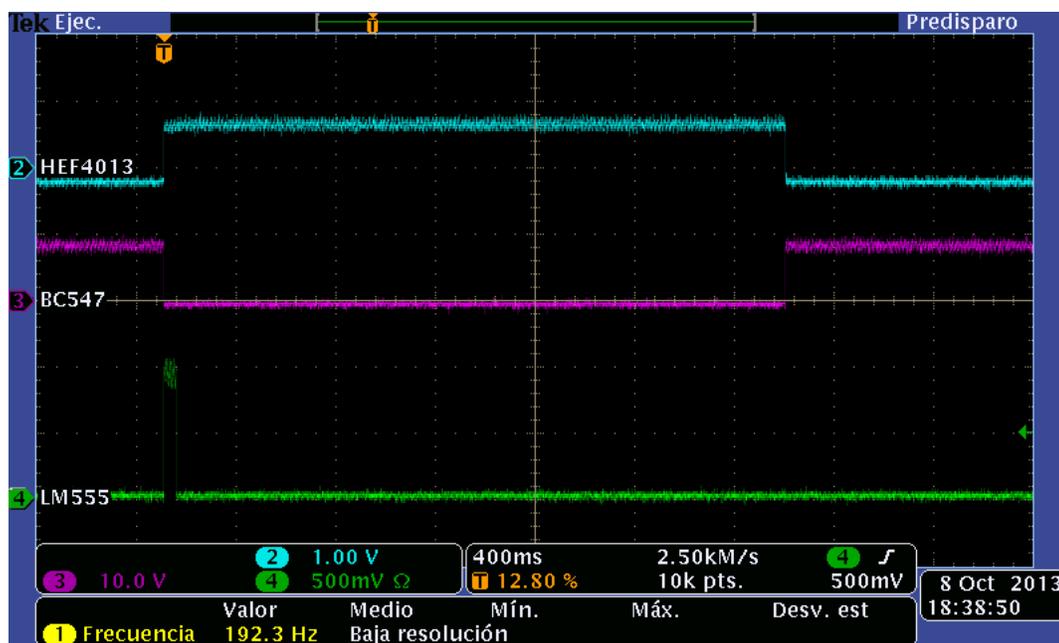


Figura 5.11: Pulsos

El pulso con etiqueta LM555, en la figura anterior, es el que acciona el relevador de estado sólido por un tiempo determinado para cerrar el circuito de CA y con ello generar un punto de soldadura. Se instaló el relevador de estado sólido porque maneja altas corrientes y por la velocidad con la que cierra el circuito de potencia. El control de tiempo de es controlado por un circuito electrónico preciso.

El banco de pruebas se usó como sistema experimental para estudiar al soldadura por punteo en brackets.

5.5. Resultados experimentales

El desarrollo de pruebas experimentales ayuda a tener una comprensión más amplia sobre los fenómenos ocurridos en el proceso de punteo. Por ello se hicieron varias pruebas experimentales con las que se pretende determinar la posible relación entre las variables involucradas en el proceso de punteo con el diámetro medido en piezas de prueba, es decir, en brackets.

Se realizaron pruebas para validar la calidad de la soldadura en brackets. Se realizaron las del tipo geométrico debido a que es fundamental cuidar el aspecto general de la pieza. Un factor muy importante a cuidar en los brackets es la facilidad con que se genere la corrosión. Por tal motivo, los atributos de la Tabla 5.4 se aplicarán para validar los resultados obtenidos.

Tabla 5.4: Pruebas físicas.

Atributo
Diámetro del punto
Penetración
Aspecto superficial
Separación de las piezas

Por otra parte, las pruebas mencionadas en la Tabla 5.4 se eligieron por la simplicidad con la que pueden realizarse. Los ensayos mencionados en la tabla anterior no aplican para determinar la calidad de la soldadura por punteo en brackets. Están diseñados para la soldadura en piezas de dimensiones convencionales y en aplicaciones distintas a la de ortodoncia. En los experimentos realizados se hicieron pruebas para determinar la relación entre el tiempo de punteo contra esfuerzo de corte (resistencia al cizallamiento).

5.5.1. Tiempo

Se hicieron diferentes pruebas experimentales pero únicamente se usaron los resultados de una de ellas como ejemplo para explicar el comportamiento y la relación con el punto de soldadura. En la figura 5.12 se muestra una gráfica del comportamiento.

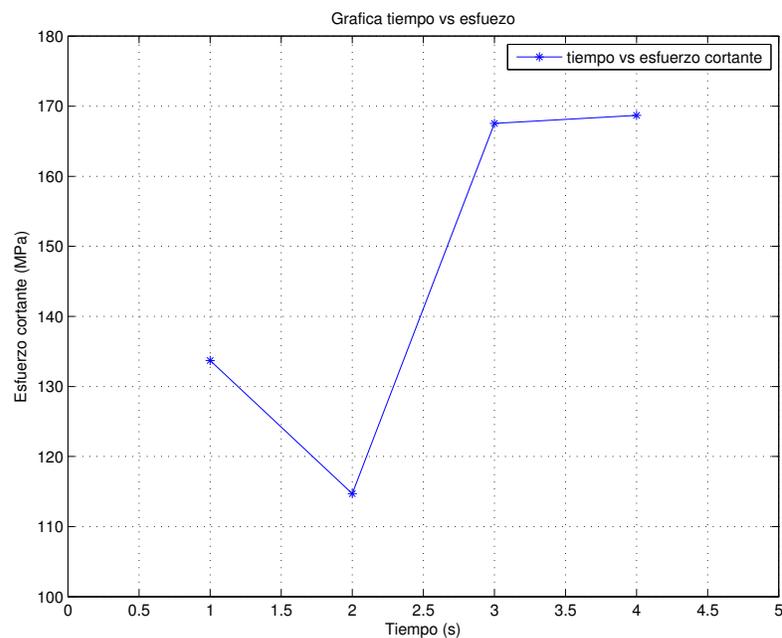


Figura 5.12: Gráfica de tiempo contra esfuerzo.

En la Figura 5.12 observar que para tiempos relativamente altos se incrementa la resistencia al corte pero, al segundo 2 no se sigue el mismo comportamiento. Además de esto, todas las piezas soldadas presentaron una zona carbonizada alrededor del punto de soldado. Esto último es algo indeseable en todo tipo de aparatos de ortodoncia ya que puede derivar en la degradación del material u oxidación temprana cuando es colocado en cualquier paciente.

El tiempo es una variable que controla el proceso de soldado porque funciona como una compuerta de apertura y cierre de la corriente y voltaje. El primer prototipo (Figura 1.18) no tiene un control sobre el soldado, es decir, el operador de esta determina en qué momento inicia y termina el proceso.

En una etapa de experimentación empírica se concluyó que era necesario reducir el tiempo de punteo. De forma un tanto arbitraria se acordó en controlar con un pulso de voltaje de 120 mseg. de duración el flujo de corriente que pasa por los electrodos a través del circuito de control diseñado para el banco de pruebas. Para tratar de tener una correlación entre el tamaño de la soldadura y uno de los parámetros involucrados en el fenómeno se midió la corriente que circula en uno de los cables del transformador en el devanado secundario. Esto es porque en este se encuentran conectados los electrodos que aprisionan la pieza a ser soldada. La corriente que pasa por el punto de contacto puede ser medida usando un osciloscopio con una sonda de corriente. El calor generado por el flujo en este punto es proporcional al valor de la corriente efectiva, es decir, a I_{rms} . El flujo de corriente que pasa a través de un punto de contacto genera un incremento de temperatura que parte desde el centro de este y se difunde hacia las orillas en forma radial. En la Figura 5.13 se puede observar una imagen grabada con el osciloscopio de la señal de corriente, en la que se muestran algunas mediciones. El voltaje medido entre las puntas de los electrodos fue de $4.6 V_{rms}$.

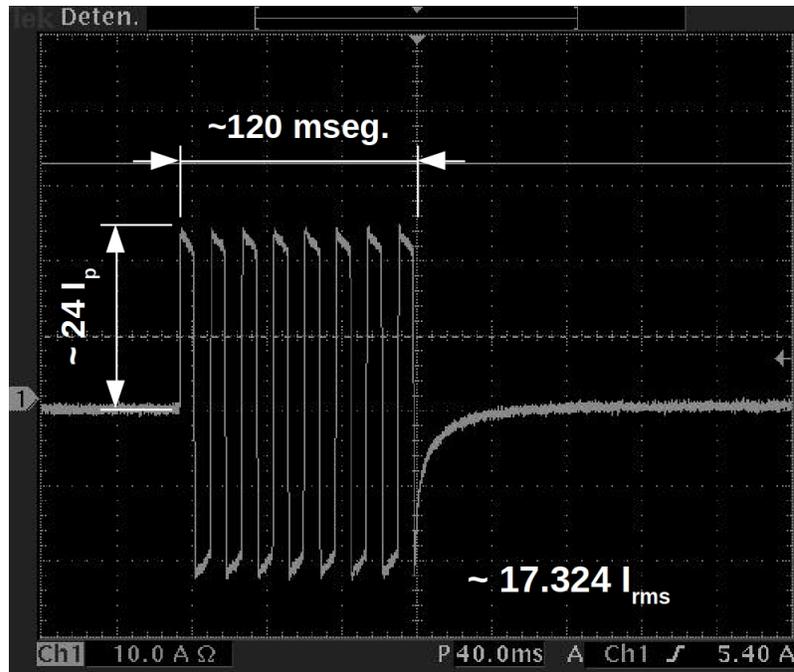
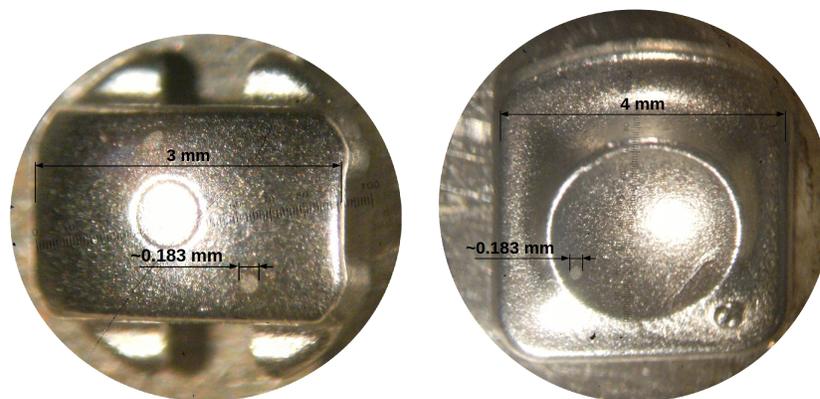


Figura 5.13: Medición de corriente en 120 mseg.

La corriente ($\approx 17.324 A_{rms}$) que circula por 120 s. en un punto de contacto en común entre las piezas genera un punto de soldadura. En la Figura 5.14 se muestran dos fotografías en las que se midió el tamaño del punto de soldado. El diámetro aproximado de este punto es de 0.183 mm.



(a) Parte superior del bracket.

(b) Parte inferior del bracket.

Figura 5.14: Puntos de soldadura. Tiempo de 120 mseg.

Por otra parte, en un experimento muy similar al anterior se incrementó el tiempo de soldado para después observar y medir el tamaño del punto de soldadura. En la imagen de la Figura 5.15 se puede ver la forma de onda, además de algunas mediciones, de la corriente que generó el punto de soldadura en este experimento.

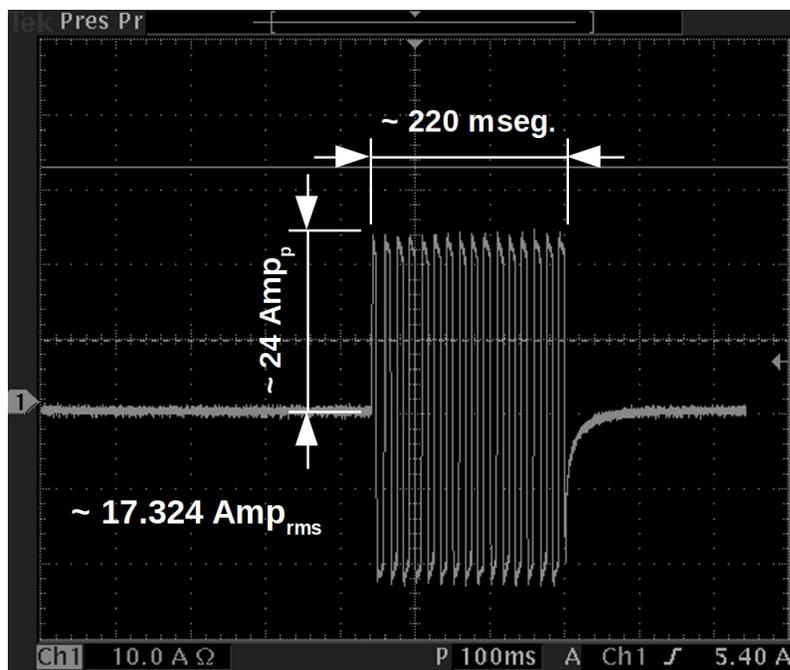


Figura 5.15: Medición de corriente en 220 mseg.

En la Figura 5.16 se muestra fotografías tomadas con microscopio de los puntos de soldadura en los brackets. En estas se puede medir el diámetro del punto de soldadura que para este caso es de 0.366 mm.

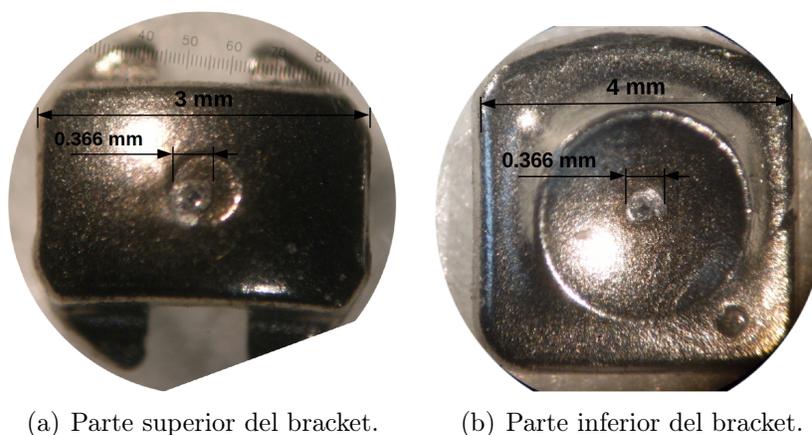


Figura 5.16: Puntos de soldadura. Tiempo de 220 mseg.

Con respecto al experimento con un tiempo de 120 mseg. se presenta una diferencia en los diámetros de los puntos de soldadura de aproximadamente 0.183 mm. La diferencia en tiempos entre los experimentos antes mencionados es de 100 mseg. Estos resultados aún no demuestran algo más concluyente que el hecho de que a mayor tiempo se crea un punto más grande pero no más resistente. En estos experi-

mentos no fue necesario hacer pruebas de esfuerzo puesto que era fácil despegar las piezas.

Un aspecto a notar es que la amplitud de la corriente no cambia a pesar del tiempo, es decir, la amplitud se mantiene constante (Figura 5.13 y Figura 5.15). En cuestión al tiempo se acordó utilizar tiempos que vayan más de acuerdo con el periodo de la frecuencia que se usa, en otras palabras, tomar el tiempo en función del número de periodos completos de la que proporciona la línea de suministro de corriente eléctrica.

5.5.2. Corriente

Para modificar la corriente es necesario cambiar físicamente de transformador. Hay que recordar que esta se ve afectada sólo si cambia la potencia del transformador pero a su vez el voltaje se ve afectado. Éste último es una variable dentro del proceso que no es posible medir directamente como la corriente. Hay que recordar que en presencia de las piezas entre los electrodos se crea un corto circuito que es el que se aprovecha para crear un punto de soldadura a partir del incremento de temperatura local en un punto de contacto. Sólo es posible medir su valor antes de realizar cualquier punteo.

En la Tabla 5.5 se muestran los valores de corriente y el diámetro del punto de soldado obtenido para estos experimentos. Se toma sólo como una referencia el voltaje del devanado secundario para conocer de qué transformador se obtuvo la corriente medida.

Voltaje [V_{rms}]	Corriente [Amp_{rms}]	Diámetro de punto [mm]
4,6	~ 118.1	$\sim 0.290\ mm$
27	~ 22.34	$\sim 0.670\ mm$

Tabla 5.5: Variación de corriente en un periodo equivalente a 10 ciclos.

De la Tabla 5.5 se puede observar que el diámetro del punto crece casi 3 veces uno con respecto del otro. También, se puede notar que la corriente efectiva se incrementa y que el punto de mayor tamaño está acompañado de esta corriente.

La forma de onda del transformador con salida de 4 V se muestra en la Figura 5.17. La corriente efectiva relativa a esta forma de onda es $\sim 18.1\ Amp_{rms}$. En esta imagen se observa que a partir de 22 $Amps.$ y hasta 28 $Amps.$ se crea un pico de corriente de 6 $Amps.$ provocando que la señal se vea cortada en amplitud.

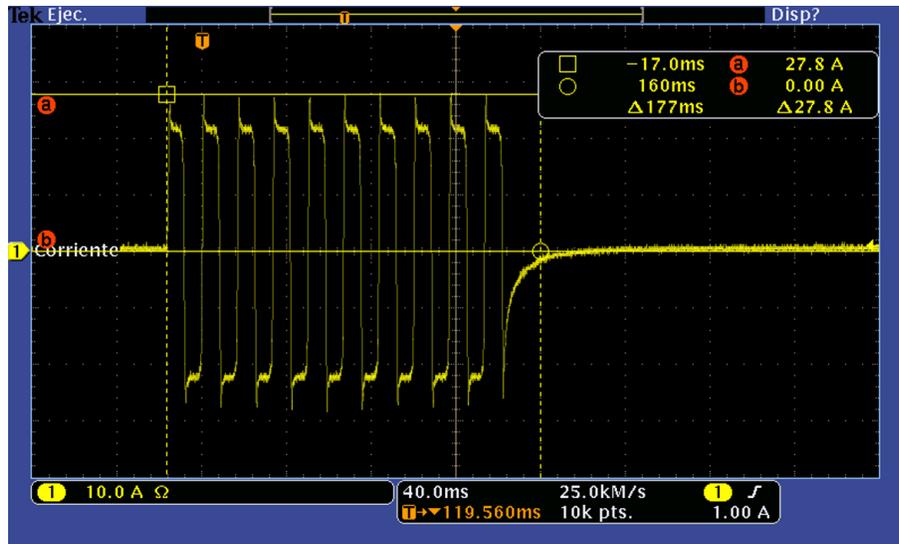


Figura 5.17: Corriente medida para 4.6 V @ 30 Amps.

La Figura 5.18 se muestra la forma de onda del transformador de 27 V. Se puede observar un pico de 9 Amps. que crece a partir de 22 Amps. y termina aproximadamente en 31 Amps.. Éste es es más alto que el que se observa en la Figura 5.17 pero comienza en el mismo valor de amplitud en ambas figuras.

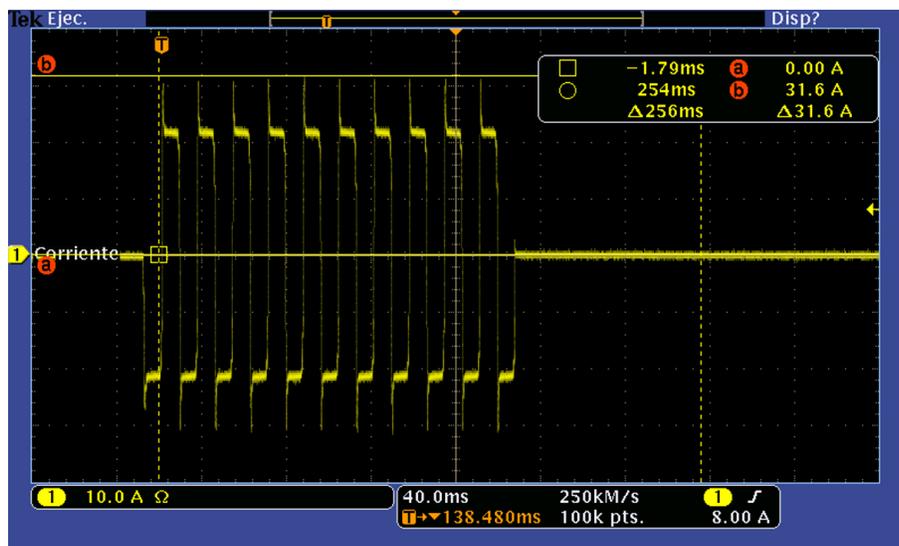


Figura 5.18: Corriente medida para 27 V @ 30 Amps.

En importante observar la forma de onda de la señal generada en el transformado porque podría revelar información relevante acerca del proceso de soldado a través de monitorizar la corriente. El pico que se observa en las dos últimas figuras y que deforma la cresta y el valle de la forma de onda puede asociarse con una saturación

dentro del núcleo del transformador, dado que este tipo de fenómenos se presentan en materiales ferrosos.

5.5.3. Fuerza entre electrodos

La fuerza ejercida sobre las piezas a ser soldadas en el banco de pruebas se varió para observar el comportamiento del punto de soldado respecto a esta variable. En la Tabla 5.6 se muestran los valores de la fuerza aplicada entre los electrodos que aprisionan el bracket y el diámetro del punto de soldado obtenido.

Bracket	Fuerza [N]	ϕ [mm]
1	4.9	~ 0.167
2	9.81	~ 0.210
3	19.62	...

Tabla 5.6: Variación de fuerza con tiempo de soldado fijo.

En el bracket 1 y 2, de la tabla anterior, se observa un comportamiento que parece predecible porque el diámetro del punto de soldadura incrementa su tamaño de uno con respecto al otro. En bracket 3 no parece seguir este comportamiento pues no se generó ningún punto de soldadura. Esto puede deberse a que al incrementarse los puntos de contacto internos de las piezas la energía que inicialmente se le suministra a la pieza se divide entre los puntos de contacto y no es suficiente para elevar la temperatura en cada uno de ellos. La Figura 5.19 se muestran imágenes del bracket 3.



(a) Parte superior del bracket. (b) Parte inferior del bracket.

Figura 5.19: Imágenes del bracket sometido a 19.62 [N]

En la Figura 5.19(a) y la Figura 5.19(b) se muestran las superficies de soldado. Se puede observar que no existe ningún punto de soldadura pero aparecen unas marcas

que bien podrían ser los puntos por donde la corriente eléctrica fluyó. Como una suposición queda que la corriente eléctrica se divide y por lo tanto no es suficiente la que circula por cada punto de contacto para elevar su temperatura.

En la Tabla 5.7 se presentan los resultados de las pruebas realizadas a los brackets soldados bajo condiciones específicas y el esfuerzo al corte soportado por la pieza soldada. Se hicieron dos series de experimentos en donde en una primera corrida no se agregó peso a los electrodos que aprisionan el bracket. En la segunda corrida se agregó peso.

Bracket	tiempo = 10 ciclos	
	sin peso	con peso (4.9 [N])
	Esfuerzo [N]	Esfuerzo [N]
1	16.36	...
2	21.19	54.03
3	80.23	31.18

Tabla 5.7: Pruebas de esfuerzo para brackets con un tiempo de soldado fijo.

En la segunda columna de la Tabla 5.7 se puede notar un crecimiento en cuanto a la fuerza necesaria para romper el punto de soldadura que une al bracket. Se trata del mismo tiempo de soldado para todas las piezas pero el comportamiento respecto al esfuerzo de corte es variable. En la tercera columna el comportamiento es aún más aleatorio, incluso hay una pieza en la que antes de someterse a la prueba se desprendió. La geometría de la pieza soldada jugó un papel importante en este tipo de pruebas. La parte superior del bracket tiene una base cóncava mientras que su parte opuesta es convexa lo que generó un punto de apoyo adicional, es decir, que la fuerza no es aplicada directamente sobre el punto de soldadura, esto generó la desviación en el resultado.

Conclusiones y trabajo a futuro

Al mismo tiempo, en el desarrollo de esta investigación se encontró que para escalar los modelos macroscópicos a aplicaciones de menor tamaño no puede hacerse de forma lineal.

Los brackets personalizables están fabricados en dos piezas de acero inoxidable que deben ser unidas para que cumplan con la función de su diseño. La unión de estas piezas metálicas se logró por medio de la soldadura por punteo. El estudio de la calidad y fuerza de la soldadura fue investigado en este trabajo.

Se hizo un desarrollo de un modelo matemático para calcular la distribución de temperatura desde el centro de la pieza. Es un trabajo pionero en el desarrollo de un modelo teórico para soldadura por resistencia eléctrica enfocado a aparatos de ortodoncia. Se usó un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que se usan para calcular el tamaño del punto de soldadura entre dos piezas metálicas utilizando el método de soldadura por punteo. La característica principal de este modelo es que incorpora las variaciones respecto a la temperatura de constantes físicas pero no funcionan si se usan proporcionalmente.

Resolver el conjunto de EDP por un método analítico es complicado así que se utilizó un método numérico. Se hizo todo el desarrollo matemático para convertir las EDP del modelo a un espacio de diferencias finitas. Se programó la solución numérica con el esquema SOR. En paralelo se resolvió el mismo modelo con el método de elemento finito. Con métodos numéricos distintos la solución del modelo no fue consistente pero se avanzó en cuanto a saber qué características deberá cumplir un nuevo modelo adaptado a las condiciones de soldadura por punteo en brackets. La distribución de voltaje se puede calcular utilizando la función de onda de corriente alterna.

Por otra parte, se construyó el banco de pruebas para brackets personalizables. Se creó un circuito electrónico de control del flujo de corriente que se hace en función del número de ciclos de CA por lo que es muy preciso en el control. Aún con esta ventaja, se observó que los puntos de soldadura son débiles. Las pruebas mecánicas hechas sobre los brackets para asegurar la calidad y la fuerza de la soldadura dieron

resultados aleatorios. También se observó que el bracket tiene poca resistencia a una fuerza de torsión.

Las señales eléctricas capturadas por el osciloscopio mostraron que existe una saturación de corriente en el transformador. Se cambió este elemento por uno con devanados divididos. La saturación desaparece y la corriente requerida por las piezas es suficiente. La soldadura obtenida mejoró en aspecto y fuerza de adhesión. Además, el tiempo requerido para la soldadura se redujo. Aún está en fase de prueba éste último cambio.

Como trabajo a futuro queda proponer un diseño alternativo en la parte cóncava de los brackets. Se observó que el punto de soldadura se crea aleatoriamente debido al punto de contacto. Si se hace un mallado en la superficie cóncava del bracket se crearán más puntos de soldadura con lo que la fuerza de adhesión mejoraría junto con la resistencia a la torsión.

Se observó que las dimensiones del dominio y del modelo matemático afectan la solución. Se debe escalar los coeficientes de magnitudes física del sistema, por lo que es necesario dimensionalizarlos utilizando el número de Nusselt para la ecuación de calor. En otras palabras, si las dimensiones del objeto se reducen se deben escalar algunos coeficientes para definir apropiadamente las condiciones de frontera.

Bibliografía

- [1] Gómez Arenas Antonio, Marichi Rodríguez Francisco Javier, Ruíz Díaz Roberto, and Aguirre Rebeca. Medición del relieve coronal vestibular en arcadas con oclusiones normales. *Revista Odontológica Mexicana*, 16(2):80–87, Abril-Junio 2012.
- [2] S. Lynn. Arch wired [en línea]. <http://www.archwired.com> [ciado en 13 de abril de 2013].
- [3] Marichi Rodríguez Francisco Javier and Ruíz Díaz Roberto. Programamable Aparatus for Measuring and Weding Brackets. *European Patent Office*, (WO 2007/073143), 09 2008.
- [4] H.S. Cho and Y.J. Cho. A study of the thermal behavior in resistance spot welds. *Journal Welding*, 1989.
- [5] B.I. Tomov, V.I. Gagov, and R.H. Radev. Numerical simulations of hot die forging processes using finite element method. *Journal of Materials Processing Technology*, 153–154(0):352–358, 2004. Proceedings of the International Conference in Advances in Materials and Processing Technologies.
- [6] Jamil A. Khan, Lijun Xu, Yuh-Jin Chao, and Kirkland Broach. Numerical Simulation of Resistance Spot Welding Process. *Numerical Heat Transfer: Part A – Applications*, 37(5):425–446, 2000.
- [7] Xiaoqi Zhang, Guocheng Xu, Jing Wen, and Chunsheng Wang. The research for resistance spot welding with rectangular electrode. In *Mechatronics and Automation, 2009. ICMA 2009. International Conference on*, pages 2484–2488, august 2009.
- [8] Haining Zheng and Yongbing Li. On Computer Simulation Models of RSW Process. In *Computer Engineering and Technology, 2009. ICCET '09. International Conference on*, volume 2, pages 176–179, jan. 2009.

- [9] David S. Gilmore. Página web [en línea]. www.gilmoreortho.com [citado en 10 de agosto de 2013].
- [10] Evans David. Cosmetic & general dentistry [en línea]. http://www.davidevansdds.com/History_of_Braces_and_Orthodontics [citado en 13 de abril de 2013], 2013.
- [11] Solución Dental. Página web [en línea]. www.ortodonciaestetica.pe/brackets/ [citado en 12 de junio de 2013].
- [12] Ormco Damon Q. Hoja técnica [en línea]. <http://damon-bracket.com/de/damonq.php> [citado en 3 de mayo de 2013].
- [13] Ormco de México. Página web [en línea]. http://ormco.com.mx/brackets_post/damon-q/ [citado en 12 de junio de 2013].
- [14] Ortho Technology Inc. Información técnica [en línea]. <http://www.orthotechnology.com/Brackets/pure/> [citado en 10 junio de 2013].
- [15] Marshall Steve, Dawson Deborah, Southard Karin A, Lee Adam N, Casco John S, and Southard Thomas E. Transverse molar movements during growth. *American Journal of Orthodontics & Dentofacial Orthopedics*, 124(6):615–624, dec 2003.
- [16] Ortodoncia Invisible Adultos. Página web [en línea]. <http://www.ortodonciadultos.com> [citado en 10 de junio de 2013].
- [17] Jutta Heidemann, Emil Witt, Martin Feeg, Rainer Werz, and Klaus Pieger. Orthodontic Soldering Techniques: Aspects of Quality Assurance in the Dental Laboratory. *Journal of Orofacial Orthopedics / Fortschritte der Kieferorthopädie*, 63(4):325–338, 2002.
- [18] American Association of Orthodontists. Información técnica [en línea]. <http://www.mylifemysmile.org> [citado en 6 de julio de 2013].
- [19] A.D. Viazis and J. Frydman. *Atlas de ortodoncia: Principios y aplicaciones clínicas*. Editorial Médica Panamericana, 1995.
- [20] 3M. Datos técnicos [en línea]. <http://solutions.productos3m.es> [citado en 4 de junio de 2013].
- [21] Invisaling. Hoja técnica [en línea]. <http://www.invisalign.com.mx/index.php> [citado en 10 de junio de 2013].

-
- [22] American Orthodontics. Información técnica [en línea]. <http://www.americanortho.com/> [citado en 10 de junio de 2013].
- [23] Harmony. Información técnica [en línea]. <https://www.myharmonysmile.com/treatment.php> [citado en 10 junio de 2013].
- [24] Ramos de la Peña Alejandro and Menchaca Flores Pedro Nicolás. Adjustable Orthodontic Bracket. *Patent Application Publication*, (US 20120315593 A1), 12 2012.
- [25] Marichi Rodríguez Fransisco Javier and Ruíz Díaz Roberto. Totally Adjustable Bracket System. *European Patent Office*, (US 8,038,438 B2), 10 2011.
- [26] R.N. Hart. *Welding: Theory, Practice, Apparatus and Tests, Electric, Thermit and Hot-flame Processes*. Henry Ford Estate collection. McGraw-Hill book Company, Incorporated, 1914.
- [27] Hisaji Kikuchi, Tomoko Kurotani, Masahiro Kaketani, Hisako Hiraguchi, Hideharu Hirose, and Takayuki Yoneyama. Effect of laser irradiation conditions on the laser welding strength of cobalt-chromium and gold alloys. *J Oral Sci*, 53(3):301–5, 2011.
- [28] Krishnan Vinod and Kumar K. Jyothindra. Weld Characteristics of Orthodontic Archwire Materials. *The Angle Orthodontist*, 74(4):533–538, 2004.
- [29] Miller Electric. Handbook for resistance spot welding [en línea]. <http://www.millerwelds.com/> [citado en 4 de abril de 2013], 2013.
- [30] Jorge Ize. *Teoría de existencia para ecuaciones en derivadas parciales*. IIMAS. Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas, 2002.
- [31] Randall J. Leveque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM, 2007.
- [32] Joe D. Hoffman and S. Frankel. *Numerical Methods for Engineers and Scientists, Second Edition*,. McGraw Hill, 2° ed. edition, 2001.
- [33] ASM International Handbook Committee. *ASM Handbook: Properties and Selection: Irons, Steels, and High-Performance Alloys (Asm Handbook) VOL. 1*. ASM International, 10th edition, 1990.
- [34] Andrew R. Mitchell. *Computational methods in partial differential equations*. Introductory mathematics for scientists and engineers. Wiley New York, 1969.

- [35] P. S. Wei and T. H. Wu. Effects of electrical current on transport processes in resistance spot welding. *Science & Technology of Welding & Joining*, 15(6):448–456, 2010.
- [36] Tektronix. Hoja técnica [en línea]. <http://www.tek.com/datasheet/oscilloscope> [citado en 10 de agosto de 2013].
- [37] Instron. Hoja técnica [en línea]. <http://www.instron.com> [citado en 10 de agosto de 2013].
- [38] T. Yamamoto and T. Okuda. A study of spot welding of heavy gage mild steel. *Welding in the World*, 9(7/8):234–235, 1971.
- [39] Jr. Jim Douglas and Jr. H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 82:421–439, 1956.
- [40] R.W. Jr. Messler, Min Jou, and C.J. Li. An intelligent control system for resistance spot welding using a neural network and fuzzy logic. In *Industry Applications Conference, 1995. Thirtieth IAS Annual Meeting, IAS '95., Conference Record of the 1995 IEEE*, volume 2, pages 1757–1763 vol.2, 1995.
- [41] Hessamoddin Moshayedi and Iradj Sattari-Far. Numerical and experimental study of nugget size growth in resistance spot welding of austenitic stainless steels. *Journal of Materials Processing Technology*, 212(2):347–354, 2012.
- [42] Z Han, J Orozco, JE Indacochea, and CH Chen. Resistance spot welding: a heat transfer study. *Welding journal*, 68(9):363s–371s, 1989.
- [43] PS Wei and FB Yeh. Factors affecting nugget growth with mushy-zone phase change during resistance spot welding. *Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineers), Series C);(United States)*, 113(3), 1991.
- [44] PS Wei, SC Wang, and MS Lin. Transport phenomena during resistance spot welding. *Journal of heat transfer*, 118(3):762–773, 1996.
- [45] PS Wei and TH Wu. Magnetic property effect on transport processes in resistance spot welding. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 44(32):325501, 2011.

- [46] H Zhigang, IS Kim, JS Son, HH Kim, JH Seo, KC Jang, DK Lee, and JM Kuk. A study on numerical analysis of the resistance spot welding process. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 14(1-2):140–145, 2006.
- [47] Prestige Dental Products Inc. Página web [en línea]. <http://www.prestigedentalproducts.com/Ortho-Welder-Yates-and-Bird/> [citado en 30 de abril de 2011].
- [48] School of medicine Harvard. Harvard health publications [en línea]. <http://www.health.harvard.edu/> [citado en 4 de junio de 2013], 2013.
- [49] The University of Chicago Medical Center. The university of chicago medicine, comer children’s hospital [en línea]. <http://www.uchicagokidshospital.org/online-library> [citado en 6 de julio de 2013].
- [50] J.F. Shackelford and W. Alexander. *CRC Materials Science and Engineering handbook*. CRC, 2000.
- [51] J.D. Faires and R.L. Burden. *Numerical Methods*. Books Cole, 7° ed. edition, 2001.
- [52] J. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2° ed. edition, 2007.
- [53] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2nd edition, 1992.
- [54] Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Libros electrónicos [en línea]. <http://www.SIAM.org> [citado en 2012].
- [55] ATI Allegheny Ludlum. Información técnica de acero inoxidable 17-4 ph [en línea]. www.alleghenyludlum.com [4 de abril de 2013].
- [56] AK steel. Información técnica de acero inoxidable 17-4 ph [en línea]. www.aksteel.com [4 de abril de 2013].
- [57] H. Zhang and J. Senkara. *Resistance Welding: Fundamentals and Applications*. Taylor & Francis, 2005.

Código de SOR para parabólicas

Código en matlab de SOR para resolver parabólicas.

```
function x = SORParabolic2D(A,bin,epsilon,alpha,w,dx,dt)
%% Esta funcion calcula el vector x de Ax = b por el metodo iterativo de
% Successive-Over-Relaxation (SOR).
% u = SORMethod(A,bsol,u,tol)
% tol = tolerancia, por omision tol=0.0001
% r = alpha*(dt/dx^2)*(1/2);
% alpha = coeficiente de conduccion, por omision alpha = 0.01 [cm^2 / s];
% w = ancho de placa
% t = tiempo
% dx = diferencial de distancia
% dt = diferencial de tiempo
% u = SORParabolic(A,bin,u,epsilon,alpha,w,dx,dt,t)

%% # nodos de la malla sin contar las condiciones de frontera
N = round(w/dx)-1;

%% Prueba opciones
if nargin < 4, epsilon = 0.0001; end
if nargin < 5, alpha = 0.001; end

% relacion de mallado
r = alpha*(dt/dx^2);

%% Comienza ecuacion
n = rank(A);

% Inicializacion de variables
X = zeros(n,1); x = X;
% k = 1;

%% Calculo de factor optimo de relajacion para parabolicas (Mitchell)
wo = 2/( 1 + sqrt(1-( r/(1+r) )^2 * (cos(pi/N))^2) );

%% Inicio de metodo (Burden)
% "b" se carga en memoria cuando llamo por primera vez a la funcion, es
% equivalente a u(:,1) en t=0 (k controla el tiempo)
```

```

ite = 10000;
k = 1;
while k <= ite %t, # total de iteraciones
    if k <= ite-1
        for i = 1:n
            x(i) = (1-wo)*X(i) + wo*( bin(i) - (A(i,1:i-1)*x(1:i-1)) ...
- (A(i,i+1:n)*X(i+1:n)) ) / A(i,i);
            end

            % Convergencia
            conv = abs(norm(x-X));
            if conv <= epsilon
                % disp (';Se fini!');
                fprintf('Successieve-Over-Relaxation (SOR)\n# de iteraciones = %1.3d ...
con un error <= %f \n',k,epsilon);
                break
            end
            X = x;
            k = k+1;
        else
            display('Se excedio el maximo de iteraciones permitidas')
            return
        end

        % Actualizo la matriz u para el tiempo siguiente.
        % La actualizacion del ciclo anterior va llenando la matriz solucion.
        for j = 1:N
            u(j+1,tie) = x(j,1);
        end

        % Actualizo el vector solucion a partir de los nuevos valores de u al
        % tiempo siguiente (calculados en el ciclo anterior)

        bin(1,1) = (r*u(1,tie) + (1-2*r)*u(2,tie) + r*u(3,tie) + r*u(1,tie+1));
        for i =2:N-1
            bin(i,1) = (r*u(i,tie) + (1-2*r)*u(i+1,tie) + r*u(i+2,tie));
        end
        bin(N,1) = (r*u(N,tie) + (1-2*r)*u(N+1,tie) + r*u(N+2,tie) + r*u(N+2,tie+1));

end
end

```

Código de SOR para elípticas

Código en matlab de SOR para resolver elípticas.

```
function x = SORmElliptic(A,bsol,renglon,epsilon,beta,w,h,dx,dy)
%% Esta funcion calcula el vector x de Ax = b por el metodo iterativo de
% Successieve-Over-Relaxation (SOR).
% x = SORMethod(A,bsol,tol)
% tol = tolerancia, por omision tol=0.0001
% beta = dx/dy, por omision dx = dy

%% Matriz de ejemplo para probar la funcion. La solucion unica es x = [1,2,-1,1]
% clear all; clc;
% A = [10 -1 2 0; -1 11 -1 3; 2 -1 10 -1; 0 3 -1 8];
% bsol = [6 25 -11 15]; epsilon = 0.0001;
% % Entradas
% w = 10; h = 15; %Tamaño de la placa
% % Paso
% dx = 2.5; dy = dx; beta = dx/dy;

% # nodos de la malla sin contar las condiciones de frontera
I = abs(w/dx); J = abs(h/dy);

%% Prueba opciones
if nargin < 3, epsilon = 0.0001; end
if nargin < 4, beta = 1; end

%% Comienza ecuacion
n = renglon;

% Inicializacion de variables
X = zeros(n,1); x = X; k = 0;

%% Calculo de factor optimo de relajacion para elipticas
% (Hoffman)
xi = ((cos(pi/I) + beta^2*sin(pi/J)) / (1+beta^2) )^2;
w = 2*(1-sqrt(1-xi))/xi;

%% Inicio de metodo (Burden)
while k <= 1000 % # total de iteraciones
    for i = 1:n
```

```
        x(i) = (1-w)*X(i) + w*(bsol(i) - (A(i,1:i-1)*x(1:i-1)) ...
- (A(i,i+1:n)*X(i+1:n)) ) / A(i,i);
    end

    % Convergencia
    conv = abs(norm(x-X));
    if conv <= epsilon
        disp ('Termine')
        fprintf('Successieve-Over-Relaxation (SOR)\n# de iteraciones = ...
%1.3d con un error <= %f \n',k,epsilon);
        return
    end
    X = x;
    k = k+1;
end
```

Código de ADI usando SOR

Código en matlab para discretizar ecuación de difusión. Usa la función SOR para obtener la solución.

```
clear all; clc;
%% Este script genera la solucion exacta de la ecuacion siguiente.
%  $U_t = k(U_{xx} + U_{yy})$ 

%% Comienza programa
% Condiciones iniciales
k = 1; % Coeficiente de conduccion
alpha = 0.1; % Coeficiente de difusividad (o mejor conocido como K) [mm2 / s]
tf = 20; % Tiempo de simulacion (seg.)
a = pi; b = a; % Dimensiones de la placa
dt = 0.2; % Intervalo de tiempo
dx = pi/40; dy = dx; % Intervalo espacial
N = round(pi/dx)-1; % Numero de puntos internos (sin considerar las C.F.)
M = round(pi/dy)-1; % Numero de puntos internos (sin considerar las C.F.)
T = round(tf/dt); % Numero de puntos temporales (sin considerar la C.I.)
rx = alpha*(dt/dx2);
ry = alpha*(dt/dy2);

%% Genero la matriz de temperaturas inicial
% La matriz u(x,y,T) representa la matriz de temperaturas con C.F.
u(1:N+2,1:M+2,T+1) = 0;
u(2:N+1,2:M+1,1)= 100;

%% Genero la matriz por el metodo de D'Yakonov
% Generando la matriz de carga y el vector solucion (la solucion es para cada tiempo)

A = diag(-rx/2*ones(N-1,1),1) + (1+rx)*diag(ones(N,1)) + diag(-rx/2*ones(N-1,1),-1);
B = diag(-ry/2*ones(N-1,1),1) + (1+ry)*diag(ones(N,1)) + diag(-ry/2*ones(N-1,1),-1);

%% Condiciones iniciales y de frontera
% % Algoritmo para generar las C.F. parciales de v*
% NOTA: v* = u(j,k,n+1/2)
tic;

%% D'YAKONOV
```

```

% Resolviendo tiempo a tiempo
% Para resolver el sistema bidimensional llamo la funcion SORParabolic2D en cada
% paso del ciclo tiempo.
% Primero se resuelve el vector  $v^{(n+1/2)}$  y luego el vector  $u^{(n+1)}$ 
n=1;
v(N+2,M+2) = 0; bv(N,1) = 0; vast(N,M) = 0; bu(N,1) = 0; uast(N,M) = 0;
while n*dt < tf
    % Primer ciclo de la solucion para v (temperaturas intermedias de la placa)
    % Al tiempo t = 1 el vector es el siguiente:
    % Como k comienza en 1, tengo que ajustar los indices del esquema para el indice k
    for k = 2:N+1
        %Son numeros que se necesitan para el vector bv (son los extremos de v*)
        v(1,k,n) = -ry/2*u(1,k-1,n+1) + (1 + ry)*u(1,k,n+1) - ry/2*u(1,k+1,n+1);

        v(N+2,k,n) = -ry/2*u(N+2,k-1,n+1) + (1 + ry)*u(N+2,k,n+1) - ry/2*u(N+2,k+1,n+1);

        % Contruyo el vector solucion bv el cada llamada del ciclo
        % Es el vector solucion del sistema Ax = bv
        bv(1) = u(2,k,n) + ...
            ry/2*(u(2,k-1,n) - 2*u(2,k,n) + u(2,k+1,n)) + ...
            rx/2*(u(2-1,k,n) - 2*u(2,k,n) + u(2+1,k,n)) + ...
            (rx*ry/4)*( u(2-1,k-1,n) - 2*u(2,k-1,n) + u(2+1,k-1,n) - ...
            2*(u(2-1,k,n) - 2*u(2,k,n) + u(2+1,k,n)) + ...
            u(2-1,k+1,n) - 2*u(2,k+1,n) + u(2+1,k+1,n) ) + v(1,k,n);
        for i = 2:N-1
            bv(i) = u(i+1,k,n) + ...
                ry/2*(u(i+1,k-1,n) - 2*u(i+1,k,n) + u(i+1,k+1,n)) + ...
                rx/2*(u(i+1-1,k,n) - 2*u(i+1,k,n) + u(i+1+1,k,n)) + ...
                (rx*ry/4)*( u(i+1-1,k-1,n) - 2*u(i+1,k-1,n) + u(i+1+1,k-1,n) - ...
                2*(u(i+1-1,k,n) - 2*u(i+1,k,n) + u(i+1+1,k,n)) + ...
                u(i+1-1,k+1,n) - 2*u(i+1,k+1,n) + u(i+1+1,k+1,n) );
        end
        bv(N) = u(N+1,k,n) + ...
            ry/2*(u(N+1,k-1,n) - 2*u(N+1,k,n) + u(N+1,k+1,n)) + ...
            rx/2*(u(N+1-1,k,n) - 2*u(N+1,k,n) + u(N+1+1,k,n)) + ...
            (rx*ry/4)*( u(N+1-1,k-1,n) - 2*u(N+1,k-1,n) + u(N+1+1,k-1,n) - ...
            2*(u(N+1-1,k,n) - 2*u(N+1,k,n) + u(N+1+1,k,n)) + ...
            u(N+1-1,k+1,n) - 2*u(N+1,k+1,n) + u(N+1+1,k+1,n) );

        %Solucion al tiempo n+1/2, necesita condiciones de n = 1 de las U
        x = SORParabolic2D(A,bv,0.00001,alpha,a,dx,dt);

        % Lleno la matriz con el vector de resultados
        for i = 1:N
            vast(i,k-1,n) = x(i); % Matriz auxiliar de resultados
            v(i+1,k,n) = x(i); % Esta es la matriz al tiempo n+1/2 (tie-1 + 1/2)
        end
    end
end
end

```

```

% Segundo ciclo de la solucion ahora para u (temperaturas de la placa)
for j = 2:N+1
    % Contruyo el vector solucion bv el cada llamada del ciclo
    bu(1) = v(j,2,n) + ry/2*u(j,1,n+1);
    for i = 2:N-1
        bu(i) = v(j,i+1,n);
    end
    bu(N) = v(j,N+1,n) + ry/2*u(j,N+2,n+1);

    %Solucion al tiempo t = 2, necesita condiciones de t = 1
    x = SORParabolic2D(B,bu,0.00001,alpha,b,dy,dt);

    % Llamo la matriz con el vector de resultados
    for i = 1:N
        uast(i,j-1,n) = x(i); % Matriz auxiliar de resultados
        u(i+1,j,n+1) = x(i); % Esta es la matriz al tiempo n+1
    end
end
n = n +1;
end
tiempo = toc;

if tiempo < 120
    tseg = tiempo;
else
    tmin = tiempo/60;
end

%% Graficas
figure(1)
colormap(hsv)
surf(u(:,:,10))
colorbar
axis tight % sets the axis limits to the range of the data
zlim([0 100]);
title(['Superficie de distribucion de temperatura', ' [Celcius]'])
xlabel('Posicion en eje x'); ylabel('Posicion en eje y'); zlabel('T(x,y,2)')
grid on

figure(2)
colormap(hsv)
contour(u(:,:,10))
colorbar
axis tight % sets the axis limits to the range of the data
zlim([0 100]);
title(['Curvas de nivel', ' [Celcius]'])
xlabel('Posicion en eje x'); ylabel('Posicion en eje y'); zlabel('T(x,y,2)')
grid on

```

```
%% Crea animacion y prepara las graficas
% Mapas de colores
colormap(hot)

% % Grafica y guarda los cuadros

% Asignacion de colores a cada gradiente
set(gca,'nextplot','replacechildren');
figure(1)
caxis manual; % Permite que todos los graficos usen los mismos limites en colores.
caxis([0, 100]); % Define los valores maximos para los limites
title('Distribucion de temperatura')
xlabel('Posicion en eje x'); ylabel('Posicion en eje y'); zlabel('Temperatura')
for j = 1:T
    surf(u(:,:,j));
    grid on
    zlim([0 100]);
%    view(3);
    colorbar
    F(j) = getframe(gcf);
    pause(0.050)
end

% title(['Temperature is ',num2str(c),'C'])
% surf(u(:,:,1))
% axis tight % sets the axis limits to the range of the data
figure(2)
title('Distribucion de temperatura')
xlabel('Posicion en eje x'); ylabel('Posicion en eje y'); zlabel('Temperatura')

%Asiganacion de colores a cada curva
az = 180; % azimuthal
el = 90; % elevation
colormap(hot)
set(gca,'nextplot','replacechildren');
caxis manual; % Permite que todos los graficos usen los mismos l´imites en colores.
caxis([0, 100]); % Define los valores maximos para los limites
title('Distribucion de temperatura')
xlabel('Posicion en eje x');
ylabel('Posicion en eje y');
zlabel('Distribucion de temperatura');

for j = 1:T
    contour(u(:,:,j),10)
    grid on
%    view(3);
    colorbar
    G(j) = getframe(gcf);
    pause(0.050)
```

```
end
movie2avi(F, 'TemperaturasDYakonov.avi', 'quality', 100, 'fps', 3)
movie2avi(G, 'CurvasDeNivelDYakonov.avi', 'quality', 100, 'fps', 3)
```