



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**INCERTIDUMBRE EN EL MODELADO DE  
LA CONSTRUCCIÓN DE PRESAS DE  
TIERRA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS**

FELIPE VÁZQUEZ GUILLÉN

**TESIS**

Presentada a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, como requisito para obtener el grado de

**MAESTRO EN INGENIERÍA  
(GEOTECNIA)**

DIRECTOR DE TESIS: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

México, D.F., Ciudad Universitaria  
Noviembre del 2005



Mi mas profundo y sincero agradecimiento a todos y cada uno de los invaluable profesores que conocí en esta máxima universidad por compartir conmigo sus logros, experiencias, dedicaciones e incuestionable vocación por la enseñanza de este apasionante eslabón de la ingeniería.

# Contenido

## INTRODUCCIÓN.

Justificación.	xiv
Antecedentes.	xiv
Objetivos y límites.	xv
Descripción de los capítulos.	xv

## 1. INCERTIDUMBRE EN GEOMECÁNICA.

1.1	Fuentes de incertidumbre.	1
1.1.1	Modelo constitutivo.	1
1.1.2	Variabilidad espacial.	2
1.1.3	Medición y estimación de parámetros.	2
1.1.4	Solicitaciones y condiciones de frontera.	2
1.1.5	Método de cálculo.	2
1.2	Representación de la incertidumbre.	3
1.2.1	Campos estimativos.	3
1.2.2	Campos descriptivos.	3
1.2.3	Campos mixtos.	4
1.3	Modelación de la incertidumbre.	4
1.3.1	Modelación por campos estimativos.	4
1.3.1.1	Momentos estadísticos del campo.	5
1.3.1.2	Cálculo aproximado de momentos.	7
1.3.2	Modelación por campos descriptivos.	8
1.3.2.1	Discretización del campo.	9
1.3.2.2	Promedios espaciales y campos condicionales.	11

## 2. ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS.

2.1	Perturbaciones en las ecuaciones estructurales.	13
2.1.1	Método clásico.	13
2.1.1.1	Aproximación de segundos momentos.	17
2.1.1.2	Técnica de los cocientes polinomiales.	18
2.1.2	Método de aproximaciones puntuales.	20
2.1.2.1	Función univariable.	21
2.1.2.2	Función multivariable.	23
2.2	Perturbaciones en el principio variacional.	26
2.3	Método del elemento finito estocástico espectral.	26
2.3.1	Discretización del campo aleatorio.	27
2.3.2	Representación del campo de desplazamientos.	27
2.3.3	Aplicabilidad.	29
2.4	Simulaciones con el método de Monte Carlo.	30
2.4.1	Generación de variables aleatorias.	31
2.4.1.1	Variables independientes.	31
2.4.1.2	Variables normales correlacionadas.	32

2.4.2	Expansión en serie de Newman.	34
2.4.3	Pruebas de convergencia.	36
2.4.3.1	Intervalo de confianza para el valor esperado.	36
2.4.3.2	Desigualdad de Chebyshev.	37
<b>3.</b>	<b>APLICACIÓN DEL MEFE AL MODELADO DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TERRAPLÉN DE LA PRESA “AGUAMILPA”.</b>	
3.1	Planteamiento del análisis.	39
3.1.1	Descripción general de la presa.	39
3.1.2	Modelado geométrico y mecánico.	40
3.1.3	Modelado de las incertidumbres.	42
3.1.3.1	Variabilidad espacial.	42
3.1.3.2	Medición y estimación de propiedades.	43
3.2	Análisis estocástico.	46
3.2.1	Aproximación de segundos momentos.	46
3.2.2	Método de estimación puntual.	48
3.2.3	Método de Monte Carlo.	50
3.3	Discusión de los resultados del MEFE.	52
3.3.1	Análisis de sensibilidad.	52
3.3.1.1	Desplazamientos.	52
3.3.1.2	Esfuerzos.	54
3.3.1.3	Resumen de resultados.	56
3.3.2	Influencia de la correlación.	57
3.3.2.1	Desplazamientos.	58
3.3.2.2	Esfuerzos.	67
3.3.2.3	Resumen de resultados.	73
3.4	Comparación entre desplazamientos medidos y calculados.	76
3.4.1	Desplazamientos horizontales.	76
3.4.2	Desplazamientos verticales.	78
	<b>Conclusiones.</b>	83
	<b>Referencias.</b>	87
	Anexo 1. Figuras de los resultados del análisis estocástico.	93
	Anexo 2. Justificación del modelo constitutivo lineal.	125
	Anexo 3. El modelo constitutivo en el programa FEADAM84.	129

# Índice de figuras

Fig. 2.1	Discretización de la función de densidad de $X$ en dos puntos.	21
Fig. 2.2	Principio del método de estimación puntual de Rosenblueth.	23
Fig. 2.3	Representación de la función de distribución de probabilidad.	30
Fig. 2.4	Ejemplificación del método de la transformación inversa.	31
Fig. 3.1	Zonificación de la presa “Aguamilpa”.	40
Fig. 3.2	Malla de elementos finitos.	42
Fig. 3.3	Diagrama de flujo (SMA).	48
Fig. 3.4	Diagrama de flujo (PEM).	50
Fig. 3.5	Diagrama de flujo (MCSM).	51
Fig. 3.6	Influencia de los parámetros del modelo en la desviación estándar del desplazamiento vertical al centro del terraplén (m).	54
Fig. 3.7	Influencia de los parámetros del modelo en la desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa).	55
Fig. 3.8	Influencia de la correlación en la desviación estándar del desplazamiento vertical al centro del terraplén (m).	59
Fig. 3.9	Desviación estándar del desplazamiento vertical al centro del terraplén (m). Comparación entre (SMA) y (PEM).	60
Fig. 3.10	Convergencia del desplazamiento vertical.	60
Fig. 3.11	Desviación estándar del desplazamiento vertical al centro del terraplén (m). Comparación entre (SMA) y (MCSM).	61
Fig. 3.12	Evolución del coeficiente de variación del desplazamiento vertical conforme al avance de la construcción en los nudos comprendidos en una capa horizontal: a) Materiales independientes; b) Correlación entre los $K_i$ y $K_{b_i}$ ; c) Correlación entre los materiales $T$ y $3C$ .	63
Fig. 3.13	Coefficiente de correlación entre el desplazamiento vertical máximo y el resto de los nudos para tres etapas de construcción. Correlación entre los $K_i$ y $K_{b_i}$ : a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura y c) Final de la construcción.	64
Fig. 3.14	Valor esperado del vector de desplazamientos totales (m): a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura y c) Final de la construcción.	65
Fig. 3.15	Desviación estándar de la magnitud del desplazamiento total (m). Correlación entre los $K_i$ y $K_{b_i}$ : a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura y c) Final de la construcción.	66
Fig. 3.16	Distribución de frecuencias de los desplazamientos en el nudo 153.	68

Fig. 3.17	Influencia de la correlación en la desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa).	69
Fig. 3.18	Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Comparación entre (SMA) y (PEM).	69
Fig. 3.19	Convergencia del esfuerzo vertical.	70
Fig. 3.20	Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Comparación entre (SMA) y (MCSM).	70
Fig. 3.21	Coefficiente de variación del esfuerzo vertical en un plano horizontal. Comparación entre (SMA) y (MCSM).	71
Fig. 3.22	Evolución del coeficiente de variación del esfuerzo vertical conforme al avance de la construcción.	72
Fig. 3.23	Convergencia de la relación entre esfuerzos principales.	73
Fig. 3.24	Distribución de frecuencias de los esfuerzos principales en el elemento 197.	74
Fig. 3.25	Comparación entre los desplazamientos horizontales medidos en inclinómetros y los que resultan del MEFÉ: a) Inclinómetro en el material 3B; b) Inclinómetro en el material T; c) Inclinómetro en el material 3C.	77
Fig. 3.26	Evolución del desplazamiento vertical medido en inclinómetros conforme al crecimiento del terraplén.	79
Fig. 3.27	Comparación entre los asentamientos medidos en inclinómetros y los que resultan del MEFÉ: a) Inclinómetro en el material 3B; b) Inclinómetro en el material T; c) Inclinómetro en el material 3C.	80
Fig. 3.28	Comparación entre los asentamientos medidos en niveles hidráulicos y los que resultan del MEFÉ en tres niveles con distinta elevación.	81

# Índice de tablas

Tabla 2.1	Coefficientes de la fracción polinomial para la variable $v_i$ .	19
Tabla 2.2	Comparación entre el número de incógnitas y de ecuaciones correspondientes, en función del número de variables aleatorias $n$ ( <i>Bolle, 1988</i> ).	25
Tabla 2.3	Dimensión total del caos homogéneo en función del número de variables aleatorias $M$ y del orden del caos polinomial $p$ .	29
Tabla 3.1	Especificaciones de colocación de los materiales en la presa “Aguamilpa”.	41
Tabla 3.2	Valores del módulo de compresibilidad volumétrica medio $\bar{m}_v$ para los materiales 3B y 3C.	44
Tabla 3.3	Valores de la relación de Poisson $\nu$ determinados en forma indirecta mediante grupos de celdas y extensómetros durante la construcción de varias presas ( <i>Alberro et al., 1998</i> ).	44
Tabla 3.4	Valores esperados y coeficientes de variación del módulo de compresibilidad volumétrica $m_v$ y de la relación de Poisson $\nu$ .	45
Tabla 3.5	Valores esperados y coeficientes de variación de los parámetros del modelo lineal.	46
Tabla 3.6	Valores esperados y coeficientes de variación de los parámetros del modelo lineal para el análisis de sensibilidad.	52
Tabla 3.7	Resumen de las influencias de los parámetros en los distintos campos analizados.	57
Tabla 3.8	Valores esperados y coeficientes de variación de los parámetros del modelo lineal para el análisis de la influencia de la correlación.	58
Tabla 3.9	Valores esperados máximos del desplazamiento vertical y su coeficiente de variación.	61
Tabla 3.10	Resumen de la influencia de la correlación en los distintos campos analizados.	75



# Resumen

El método del elemento finito estocástico es una herramienta analítica que permite incorporar de manera explícita, las incertidumbres involucradas en un análisis con elementos finitos. En la modelación de estructuras de tierra, la principal fuente de incertidumbre se debe a los errores aleatorios asociados a los ensayos de campo y laboratorio, y a los sistemáticos presentes tanto en las estimaciones parcialmente subjetivas, como en el empleo de correlaciones empíricas entre propiedades índice y mecánicas. En esta tesis se realiza el análisis esfuerzo deformación del proceso constructivo del terraplén de la presa “Aguamilpa” dentro de una estructura de análisis probabilista. Se implementan dos de los métodos de perturbaciones en un programa de elementos finitos determinista para el análisis de estructuras de tierra; además, se efectúan simulaciones con el método directo de Monte Carlo. Se analiza la incidencia relativa de los diferentes parámetros del modelo constitutivo lineal sobre la precisión de los campos de desplazamientos y esfuerzos, además de la influencia de la incertidumbre en los parámetros materiales para varias condiciones de correlación. Los campos de desplazamientos vertical y total, así como el campo de esfuerzos verticales, se analizan conforme al crecimiento del terraplén. En general, los resultados muestran que la distribución de la incertidumbre coincide en los pares de métodos empleados aunque se observaron algunas diferencias en las magnitudes máximas, en particular, en los campos de desplazamientos. Las diferencias observadas se podrían investigar variando el intervalo de separación entre los puntos discretos utilizados para el cálculo numérico de las derivadas parciales, necesarias en el método clásico de perturbaciones. También es importante mencionar el destacado efecto de reducción de varianza en todos los campos analizados.

# Abstract

The stochastic finite element method is an analytical tool that permits to incorporate in an explicit form, the uncertainties involved in an analysis with finite elements. In the modeling of earth structures, the principal source of uncertainty is encountered in the random errors related with the field and laboratory tests, and in the systematic errors present as much in the partial subjective estimations, as in the employed empirical correlations between index and mechanical properties. In this thesis the stress strain analysis of the construction process of the embankment of the “Aguamilpa” dam is effected into a probabilistic structure of analysis. Two of the perturbations methods are implemented in a deterministic finite elements code for earth structure analysis; furthermore, realizations with the direct Monte Carlo simulation method are effected. The relative incidence of the different lineal model parameters on the precision of the displacement and stress fields is evaluated, besides the influence of the uncertainty in the material parameters for several correlation conditions. The vertical and total displacement fields, as well as the vertical stress field, are analyzed in accordance with the growth of the embankment. In general, the results show that the distributions of the uncertainty are in good agreement in the pairs of methods utilized although some differences were observed in the maximum magnitudes, in particular, in the displacements fields. The origin of the observed differences could be investigated varying the interval of the separation between discrete points utilized for the numerical calculation of the partial derivatives, performed in the classic perturbation method. It is also important to mention the notable effect of reduction of variance in all the analyzed fields.

# Introducción

En la modelación de problemas en ingeniería se elige con criterio los parámetros relevantes del problema y se plantea su solución analítica formal. Los elementos finitos aplicados de manera determinista han sido una valiosa herramienta ampliamente aceptada para comprender y anticipar el comportamiento mecánico de estructuras de tierra. No obstante, con frecuencia las propiedades mecánicas del modelo constitutivo solo se pueden definir dentro de un amplio margen de incertidumbre. Se debería reconocer que, al menos en algunos casos, constituyen verdaderas “*suposiciones educadas*”. Estas incertidumbres son principalmente una consecuencia de la falta de conocimiento, baja confiabilidad en las pruebas de campo o laboratorio y de la variabilidad espacial de las propiedades de los geomateriales.

El problema de la incertidumbre y sus implicaciones se puede enfrentar explícitamente con las mejores herramientas disponibles. Para ello, es necesario identificar los factores que dan origen a la incertidumbre y conocer los formalismos que permiten tomarla en cuenta racionalmente. Los métodos estadísticos y probabilistas permiten evaluar la incertidumbre en el comportamiento de las estructuras de tierra en función de las existentes, en particular, en los parámetros de los materiales. Estos parámetros pueden ser tratados como variables aleatorias o como campos aleatorios. Las técnicas probabilistas que permiten involucrar la aleatoriedad de los parámetros de los materiales (u otros parámetros del modelo) en los análisis con elementos finitos, reciben en conjunto, el nombre de *método de elementos finitos estocásticos*.

Los modelos probabilistas requieren información acerca de las propiedades estadísticas del problema por modelar. Esto es visto en algunos casos como una desventaja debido a que los parámetros estadísticos exactos son difíciles de obtener. Pero si la información disponible es escasa, es posible introducir elementos subjetivos y al mismo tiempo aprovechar toda la información estadística disponible. En realidad, se podría aceptar que esta situación prevalece en muchos análisis deterministas en ingeniería.

Alternativamente, la teoría de los conjuntos borrosos se puede utilizar para describir incertidumbres (*Auvinet, 1986*). En ella se definen parámetros por funciones de posibilidad que especifican su grado de pertenencia a un conjunto. Sin embargo, la teoría de la probabilidad ha sido extensamente utilizada para representar la indefinición. Cuenta con fundamentos

matemáticos sólidos y además, con los avances en métodos numéricos y el incremento en la capacidad de cómputo, su aplicación a sistemas complejos es cada vez mas practicable.

## Justificación.

El interés en modelar la incertidumbre surge a partir del momento en que las incertidumbres permanecen en muchos modelos de problemas en geomecánica. Las incertidumbres surgen debido a la falta de conocimiento en algunos parámetros (heterogeneidad de las masas térrreas, alcance limitado de las campañas de reconocimiento, falta de representatividad de los ensayos de campo y de laboratorio, errores de medición, empleo de correlaciones empíricas, estimaciones subjetivas y el sesgo implícito en muchos de los modelos geomecánicos) o bien, debido a las cantidades intrínsecamente aleatorias como lo son las cargas estáticas y dinámicas.

Debido a las incertidumbres en el modelo, en ocasiones es incierto en qué grado el pronóstico de la simulación numérica coincide con la realidad; este hecho es ignorado con frecuencia en la práctica de la ingeniería.

Aunque el método de los elementos finitos estocásticos en principio no es reciente, se han publicado pocos trabajos que manifiesten su utilidad práctica y resultados típicos.

## Antecedentes.

Los primeros trabajos sobre la aplicación del método de los elementos finitos estocásticos (MEFE) a la geotecnia fueron expuestos por *Cambou y Auvinet (1974)*; quienes desarrollaron un algoritmo para el análisis estocástico de los desplazamientos y esfuerzos en los suelos, como consecuencia de las excavaciones realizadas para la construcción del metro en la ciudad de México. Posteriormente, la literatura reciente a estos métodos, y en menor medida a sus aplicaciones, ha aumentado (*Vanmarcke et al., 1983*); (*Bittnar, 1996*).

En el contexto de las estructuras de tierra se han realizado algunos ejemplos. *Orlandi (1996)* y *Bouayed (1997)* realizaron el análisis del proceso constructivo de la sección transversal máxima de una presa de tierra y enrocamiento. Limitaron su estudio al análisis de los desplazamientos verticales considerando un modelo constitutivo elástico no lineal, y únicamente implementaron una aproximación de segundos momentos (SMA) en el programa determinista. Posteriormente, *Mellah (1999)* utilizando la misma matriz de covarianza amplía el estudio hacia las deformaciones y esfuerzos; además, confronta los resultados del método SMA con los que obtiene con las simulaciones del método de Monte Carlo (MCSM). Asimismo, analiza terraplenes con diferentes factores de seguridad y observa la influencia de cada uno de los parámetros del modelo elástico no lineal en la dispersión de los desplazamientos verticales. Concluye que conforme disminuye el factor de seguridad del terraplén, aumenta la participación de los parámetros relacionados con las deformaciones al cortante y con los de comportamiento límite.

Por otro lado, *Louault (1997)* utilizando el método SMA analiza la sección máxima longitudinal de una presa simulando la construcción por capas, y estudia la influencia de los

parámetros del modelo elástico lineal  $E$  y  $\nu^1$ , en la distribución de las zonas de tensión. Confirma el efecto de la relación de Poisson en la incertidumbre relativa a la ubicación y extensión de las zonas de tensión en la presa. En esa misma línea, *Pérez-Duarte (2000)* analiza la incidencia relativa de los parámetros de un modelo constitutivo elástico anisótropo con ortotropía, en la extensión de las zonas de extensión analizando la misma presa. Encuentra que el parámetro que tiene más influencia en los esfuerzos principales menores es  $\nu_{vh}^2$ , que sobresale de la que exhiben  $E_h$ ,  $E_v$  y  $\nu_{hh}^3$ , y observa que el módulo de rigidez al cortante  $G_{vh}^4$  tiene una influencia pequeña en esta incertidumbre.

## Objetivos y límites.

En este trabajo se modelará la construcción de un terraplén de materiales compactados dentro de una estructura de análisis probabilista. Para ello se utilizará el método de los elementos finitos estocásticos (MEFE). La incertidumbre en los parámetros del modelo constitutivo se modelará como variables aleatorias que describen un campo aleatorio estimativo. Los alcances de este estudio se resumen como sigue:

- Discutir el potencial de los elementos finitos estocásticos.
- Definir en detalle las incertidumbres involucradas en el análisis y modelarlas conforme a una metodología típica de evaluación de los parámetros del modelo constitutivo.
- Utilizar una aproximación de segundos momentos (SMA), el método de estimación puntual de Rosenblueth (PEM) y el método de simulación con la técnica de Monte Carlo (MCSM), en un análisis determinista con elementos finitos utilizando el programa FEADAM84 y confrontar los resultados.
- Involucrar diferentes condiciones de correlación en el análisis.
- Verificar la distribución de la incertidumbre dentro del cuerpo del terraplén para los campos de desplazamientos y esfuerzos, con la intención de detectar las zonas con mayores incertidumbres y las zonas de comportamiento robusto.
- Analizar el comportamiento del coeficiente de variación de los resultados conforme al avance de la construcción.

## Descripción de los capítulos.

El contenido de este trabajo se ha organizado en tres capítulos. En el capítulo 1 se presentan las principales fuentes de incertidumbre involucradas en la modelación en geomecánica; además se muestra como representarlas y modelarlas apropiadamente. En el

---

<sup>1</sup> Módulo de elasticidad y relación de Poisson, respectivamente.

<sup>2</sup> Relación de Poisson por deformación en el plano horizontal debido a esfuerzos que actúan en dirección vertical.

<sup>3</sup> Módulo de elasticidad en la dirección horizontal, vertical y relación de Poisson por deformación en el plano horizontal debido a esfuerzos que actúan en ese mismo plano, respectivamente.

<sup>4</sup> Módulo de rigidez al cortante en el plano vertical.

capítulo 2 se discute el potencial del MEFÉ y se exponen las formulaciones de los métodos basados en las técnicas de perturbaciones, la del MEFÉ espectral y la del método de simulación basado en las técnicas de Monte Carlo. El capítulo 3 discute los resultados del análisis estocástico esfuerzo-deformación del terraplén de la presa “Aguamilpa” para el caso de la construcción. Se explica como se implementó el análisis probabilista y como se modelaron las incertidumbres relacionadas con la medición y estimación de las propiedades del modelo constitutivo. Finalmente, se concluye con las apreciaciones destacadas del estudio y se sugieren algunos trabajos que podrían ayudar a definir un marco de aplicabilidad real de la técnica de perturbaciones a estos casos de estudio.

Las figuras que ilustran los resultados del análisis estocástico se muestran en el anexo 1. En el anexo 2 se presenta la justificación del uso del modelo constitutivo lineal en la modelación del proceso constructivo de presas; en tanto que en el anexo 3 se describe el modelo constitutivo que contiene el programa determinista utilizado.

# Capítulo 1

## 1. INCERTIDUMBRE EN GEOMECÁNICA.

En este capítulo se describen las principales fuentes de incertidumbre involucradas en la modelación de un problema en geomecánica con elementos finitos, y la manera de representarlas. Se discute la aplicabilidad de la modelación por campos descriptivos de la variabilidad espacial en la modelación de estructuras de tierra, y se presenta el marco teórico en el que se modela la incertidumbre por campos estimativos.

### 1.1 FUENTES DE INCERTIDUMBRE.

Las presas de tierra y enrocamiento se construyen con materiales naturales de características complejas y variables en espacio y tiempo, en los que la medición de propiedades mecánicas es delicada. Además de los parámetros mecánicos, las condiciones de frontera que se introducen en los cálculos y en particular en los que se realizan con elementos finitos, con frecuencia son mal conocidas. A esta incertidumbre debida a un conocimiento incompleto se debe añadir la de los factores intrínsecamente aleatorios, como lo son las solicitaciones estáticas y dinámicas, además del error en las hipótesis y aproximaciones que el modelo geomecánico introduce.

#### 1.1.1 Modelo constitutivo.

Las leyes de comportamiento de geomateriales comúnmente aceptadas en la modelación de estructuras de tierra permiten describir de manera aproximada el comportamiento real. Los parámetros del modelo constitutivo se suelen estimar con base en experiencias previas (*Marsal et al., 1965*), (*Duncan et al., 1980*), de correlaciones con las propiedades índice de los enrocamientos (*Alberro y Gaziev, 2002*) o en el mejor de los casos, a partir de un número limitado de pruebas de campo y/o laboratorio.

Por esta razón conviene distinguir entre dos tipos de incertidumbre: la debida a la medición y estimación de los parámetros de una muestra o elemento de suelo, y la asociada a las variaciones espaciales de estos mismos parámetros.

### **1.1.2 Variabilidad espacial.**

El conocimiento de la geología del sitio o del proceso constructivo en general hace posible definir campos con características aproximadamente homogéneas. Sin embargo, en estas condiciones solo se puede hablar de una “*homogeneidad estadística*” que disimula variaciones espaciales frecuentemente significativas.

Se han propuesto varias aproximaciones para caracterizar la variabilidad espacial de una propiedad obtenida en diversos puntos de un espacio. Entre ellas se pueden citar los métodos que tienen el propósito de describir la realidad por medio del formalismo de las funciones aleatorias, como es el caso de los métodos geoestadísticos (*Auvinet, 2002*).

### **1.1.3 Medición y estimación de parámetros.**

En la determinación de los parámetros que definen al modelo constitutivo se pueden presentar dos tipos de errores: los errores aleatorios y los sistemáticos.

Los errores aleatorios se cometen principalmente durante las mediciones. En este caso el error se puede estimar recurriendo a la estadística descriptiva para evaluar la dispersión en las mediciones experimentales.

Los errores sistemáticos se deben a un sesgo en las mediciones, al remoldeo de muestras o factores similares. También se introduce un sesgo cuando la ley constitutiva se elige de manera arbitraria, cuando los parámetros del suelo se estiman de manera parcialmente subjetiva (“*opinión de experto*”) o a partir de correlaciones estadísticas entre propiedades índice y mecánicas.

### **1.1.4 Solicitaciones y condiciones de frontera.**

La naturaleza aleatoria de las solitaciones estáticas y dinámicas involucradas en los análisis con elementos finitos es una fuente de incertidumbre. Por otro lado, las condiciones de frontera frecuentemente se pueden representar solo de manera aproximada. Por ejemplo, en el caso de presas de materiales graduados la interacción en las fronteras interiores con distintas propiedades mecánicas se suele modelar mediante interfaces (*Goodman et al., 1968*); sin embargo, la dificultad para definir un modelo constitutivo representativo del comportamiento en la interfaz ha limitado su utilidad práctica. En la literatura no existen análisis estocásticos que evalúen la sensibilidad de esta variable ante el modelo constitutivo.

### **1.1.5 Método de cálculo.**

Un modelo no puede representar la realidad física si no toma en cuenta varios tipos de errores. Entre ellos se pueden citar: 1) Los debidos a la simplificación del modelo mecánico y su

solución numérica; 2) A la omisión de un escenario que pueda producir resultados completamente diferentes y 3) Los errores por redondeo.

En la literatura se encuentran resultados dispersos relativos a estudios de sensibilidad a la influencia de diferentes detalles de los modelos numéricos (módulo de la malla, método de integración, criterio de plasticidad, etc.); sin embargo, la mayoría de estos estudios no son sistemáticos y no permiten llegar a conclusiones generales. Con frecuencia este tipo de incertidumbre en la práctica de la ingeniería se toma en cuenta calibrando el modelo en forma empírica, validando los resultados mediante modelos físicos y observación de obras reales mediante instrumentación.

## 1.2 REPRESENTACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE.

Debido a que el experimento probabilista se debe definir con toda precisión antes del análisis, dependiendo del origen de la incertidumbre que se desea modelar se debe elegir entre varios tipos de campos aleatorios (*Auvinet et al., 2001*).

### 1.2.1 Campos estimativos.

Cuando las propiedades de los suelos son estimadas a partir de opiniones basadas principalmente en la experiencia y observación de un experto, el campo estocástico es del tipo *estimativo*. Sus parámetros deben entonces reflejar el conocimiento pero además la ignorancia del experto.

Esta situación es común en geotecnia porque no siempre es posible efectuar un número suficiente de mediciones como para liberarse de toda opinión subjetiva. En este caso, las probabilidades reflejarán antes que todo el “*grado de confianza*” que merece la estimación propuesta por el experto.

En la etapa de proyecto de una presa de tierra no se dispone de información acerca de la variabilidad espacial de las propiedades de los materiales, con excepción de la zonificación general involucrada en el proyecto mismo. En esta situación solo es posible el uso de campos estimativos que reflejen la incertidumbre *a priori* sobre las propiedades de los materiales de las diferentes zonas de la presa.

### 1.2.2 Campos descriptivos.

Cuando se cuenta con un número suficiente de mediciones en distintos puntos de la masa de suelo el campo aleatorio puede ser del tipo *descriptivo*. Los parámetros del campo pueden entonces ser considerados para un análisis estadístico. En este campo se ha desarrollado la geoestadística. Sin embargo, se debe señalar que los campos aleatorios que describen la variabilidad espacial de las propiedades de los suelos se conocen únicamente por la medición o la estimación que a su vez, se realiza con incertidumbre. De esta manera solo se puede tener acceso a un “*campo aparente*” cuyas características difieren de las del campo real.

### 1.2.3 Campos mixtos.

En la práctica frecuentemente la situación es intermedia a los dos casos anteriores. Las propiedades de los suelos se definen por una combinación de opiniones (probabilidades *a priori*) y de resultados experimentales. Puede entonces recurrirse a un análisis Bayesiano explícito o implícito para definir probabilidades *a posteriori* (tomando en cuenta las mediciones) (Cornell, 1971). La interpretación dada al concepto de probabilidad en este caso llega a ser subjetiva, pero este concepto sigue siendo muy útil en la práctica (Ditlevsen y Madsen, 1996).

## 1.3 MODELACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE.

En los análisis estocásticos esfuerzo-deformación con elementos finitos, los parámetros materiales (parámetros del modelo constitutivo, propiedades mecánicas, etc.), geométricos (dimensiones del cuerpo, forma de la frontera, forma de algún subdominio, etc.) y/o de cargas, se pueden modelar como variables aleatorias que representan un campo estimativo o como campos aleatorios descriptivos de la variabilidad espacial, dependiendo de la incertidumbre que interese modelar.

### 1.3.1 Modelación por campos estimativos.

En la modelación por campos estimativos los parámetros materiales, geométricos y/o de cargas se consideran como variables aleatorias. Una variable aleatoria es una función de valor generalmente real cuyo dominio es un espacio muestral; en otras palabras, las variables aleatorias son valores numéricos asociados a los resultados de un experimento (real o ficticio). En el caso particular de los parámetros materiales, con frecuencia se define una variable aleatoria para cada subdominio en el cual se encuentran reunidas ciertas condiciones de homogeneidad estadística; por ejemplo, en cada una de las distintas zonas de una presa de materiales compactados.

En la práctica se considera comúnmente que un cierto parámetro material  $V$  (módulo de deformación  $E$ , relación de Poisson  $\nu$ , etc.) es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad se supone generalmente Gaussiana, la cual se puede definir mediante la esperanza  $E\{V\}$  y la varianza  $Var[V]$ , parámetros que, a su vez, se obtienen a partir de resultados experimentales mediante estimadores estadísticos puntuales o de intervalos de confianza. El número de ensayos necesarios para definir estos estimadores puede determinarse entonces recurriendo a los métodos de la estadística inferencial tradicional (Mood y Graybill, 1963, véase también inciso 2.4.3.1).

También es posible recurrir a la definición subjetiva del concepto de probabilidad para modelar las incertidumbres en los parámetros materiales mediante campos estimativos. Aplicar esta definición consiste en asignar al parámetro de interés una densidad de probabilidad basada en la opinión de una persona con cierta experiencia.

Las probabilidades subjetivas pueden corregirse tomando en cuenta los resultados de ensayos de laboratorio. Se consideran entonces como probabilidades *a posteriori*, dentro de un análisis Bayesiano.

En todos los casos, los resultados del análisis estocástico no tendrán más valor que el de las probabilidades asignadas a los parámetros de interés, pero siempre resultarán útiles para sensibilizarse a la respuesta del modelo geomecánico.

El grado de correlación entre las distintas variables aleatorias que definen el campo estimativo siempre será difícil de estimar. Sin embargo, se ha observado que es más representativo considerar que existe correlación entre las propiedades de materiales diferentes cuando se tiene el mismo tipo de dudas respecto a su valor o cuando han sido determinados experimentalmente por el mismo procedimiento (Auvinet, 2002). Además, los resultados típicos de ensayos de campo y laboratorio también deben tenerse en cuenta.

### 1.3.1.1 Momentos estadísticos del campo.

Sea  $V$  el valor de alguna propiedad que caracteriza a un subdominio específico dentro de una masa de suelo. Este valor, que refleja las incertidumbres involucradas en su medición y/o estimación, se considera una variable aleatoria. La esperanza o valor medio de la variable aleatoria  $V$ , se define como:

$$E\{V\} = \mu_V \quad (1.1)$$

La varianza de  $V$ , escrita como  $Var[V]$  o  $\sigma_V^2$ , se define como la esperanza del cuadrado de la desviación del valor de la variable con respecto a su esperanza, es decir:

$$Var[V] = E\{(V - \mu_V)^2\} \quad (1.2)$$

El valor mínimo que puede tomar  $\sigma_V^2$  es cero; esto sucede si  $V$  toma un valor constante con probabilidad uno. La varianza crece conforme se esparcen los puntos con probabilidad positiva.

La raíz cuadrada positiva de la varianza se escribe como:

$$\sigma_V = +\sqrt{Var[V]} \quad (1.3)$$

y se conoce como la desviación estándar de  $V$ . Obsérvese que la desviación estándar mantiene las unidades originales de la variable.

El coeficiente de variación de la variable aleatoria  $V$ , escrito  $C_V(V)$ , se expresa como:

$$C_V(V) = \frac{\sigma_V}{\mu_V} \quad (1.4)$$

El coeficiente de variación describe la variabilidad de los datos alrededor de la media. Un valor pequeño en  $C_V(V)$  indica una casi constancia de la variable aleatoria, mientras que un valor elevado indica gran dispersión alrededor de la media. Note que si el valor esperado de la variable aleatoria tiende a cero, el coeficiente de variación tiende a infinito.

La notación de esperanza también se puede aplicar a un conjunto de variables aleatorias. Por ejemplo, en caso de utilizar un modelo constitutivo lineal, en cada subdominio se tendrán que definir los valores del módulo de deformabilidad  $E$  y de la relación de Poisson  $\nu$ .

La esperanza de un vector  $\bar{\mathbf{V}}$ , de  $n$  variables aleatorias  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , se define como:

$$E\{\bar{\mathbf{V}}\} = \bar{\boldsymbol{\mu}}_{\bar{\mathbf{V}}} \quad (1.5)$$

En particular, la covarianza entre dos elementos cualesquiera del vector  $\bar{\mathbf{V}}$ , por ejemplo, entre  $V_k$  y  $V_l$ , se puede calcular como:

$$\text{Cov}(V_k, V_l) = E\{V_k V_l\} - \mu_{V_k} \mu_{V_l} \quad (1.6)$$

de donde se puede observar que si  $V_k$  y  $V_l$  son estadísticamente independientes, entonces su covarianza es nula.

La covarianza representa el grado de dependencia lineal que existe entre las dos variables. Es difícil determinar a simple vista si una covarianza es grande o pequeña debido a que su valor depende de la escala de medición. Este problema se puede eliminar al estandarizar su valor, utilizando el coeficiente de correlación lineal:

$$\rho_{V_k V_l} = \frac{\text{Cov}(V_k, V_l)}{\sigma_{V_k} \sigma_{V_l}} \quad (1.7)$$

el cual está comprendido en el intervalo:  $-1 \leq \rho_{V_k V_l} \leq +1$ . Un valor de  $\rho_{V_k V_l} = 1$  o  $\rho_{V_k V_l} = -1$  implica una correlación perfecta con todos los puntos de cualquier muestra alineados sobre una recta. Si las variables aleatorias  $V_k$  y  $V_l$  son independientes ( $\text{Cov}(V_k, V_l) = 0$ ), entonces no están correlacionadas y  $\rho_{V_k V_l} = 0$ . Sin embargo, si no están correlacionadas, no necesariamente son independientes en virtud de que pueden exhibir una dependencia no lineal. Un coeficiente de correlación positivo indica que  $V_l$  tiende a crecer cuando  $V_k$  crece; mientras que un coeficiente de correlación negativo implica que  $V_l$  tiende a decrecer cuando  $V_k$  crece.

Las varianzas y covarianzas de  $n$  elementos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de un vector aleatorio con valores esperados  $\mu_{V_1}, \mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_n}$ , forman una matriz de covarianza  $T_{VV}$ , que en forma expandida queda:

$$T_{VV} = \begin{bmatrix} \text{Var}[V_1] & \text{Cov}(V_1, V_2) & \cdots & \text{Cov}(V_1, V_n) \\ \text{Cov}(V_1, V_2) & \text{Var}[V_2] & \cdots & \text{Cov}(V_2, V_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(V_n, V_1) & \text{Cov}(V_n, V_2) & \cdots & \text{Var}[V_n] \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Donde;  $Cov(V_i, V_j) = Cov(V_j, V_i)$ . Si los elementos fuera de la diagonal valen cero, entonces todas las variables aleatorias son independientes y por lo tanto no correlacionadas.

La matriz de covarianza es positiva semidefinida, por lo que su determinante es  $\geq 0$  e inferior al producto de los elementos de su diagonal principal, es decir:

$$0 \leq \det T_{VV} \leq \prod_{i=1}^n Var[V_i] \quad (1.9)$$

En la propagación de la incertidumbre conviene utilizar el valor estandarizado de la covarianza para anular su dependencia con la escala de medición; de esta manera se logra una visión clara de la dependencia directa entre las variables consideradas. La matriz de correlación  $\rho_{VV}$ , de un vector aleatorio de  $n$  elementos,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  se puede expresar en forma expandida como:

$$\rho_{VV} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{V_1V_2} & \cdots & \rho_{V_1V_n} \\ \rho_{V_2V_1} & 1 & \cdots & \rho_{V_2V_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{V_nV_1} & \rho_{V_nV_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Donde;  $\rho_{V_iV_j} = \rho_{V_jV_i}$ . Al igual que la matriz de covarianza, la matriz de correlación es positiva semidefinida por lo que el valor de su determinante se puede acotar entre los límites:

$$0 \leq \det \rho_{V_iV_j} \leq 1 \quad (1.11)$$

Cuando el determinante de la matriz de correlación es nulo (matriz singular), se dice que las variables aleatorias del vector aleatorio están correlacionadas; mientras que cuando es unitario se dice que las variables aleatorias del vector no están correlacionadas.

### 1.3.1.2 Cálculo aproximado de momentos.

Si se define una variable aleatoria  $U$  en función de otra variable aleatoria  $V$ , es decir;  $U = g(V)$ , es posible calcular los momentos de  $U$  a partir de los de  $V$  aproximando la densidad de probabilidad de la función  $g(V)$ , al menos con los primeros dos o tres términos de su desarrollo en serie de Taylor alrededor del valor medio de  $v$ , es decir, en  $\mu_V$ :

$$U = g(V) = g(\mu_V) + (v - \mu_V) \left[ \frac{\partial g(v)}{\partial v} \right]_{\mu_V} + \frac{(v - \mu_V)^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 g(v)}{\partial v^2} \right]_{\mu_V} + \dots \quad (1.12)$$

Tomando la esperanza matemática de ambos miembros de la igualdad y considerando que  $E\{V - \mu_V\} = 0$ , se encuentra que el valor esperado  $E\{U\}$ , resulta:

$$E\{U\} = E\{g(V)\} \approx g(\mu_V) + \frac{\sigma_V^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 g(v)}{\partial v^2} \right]_{\mu_V} \quad (1.13)$$

De la misma forma, tomando la varianza de ambos lados de la ec. (1.12) operando algebraicamente y considerando que  $Var[g(\mu_V)] = 0$ , se obtiene:

$$Var[U] = Var[g(V)] \approx \sigma_V^2 \left[ \frac{\partial g(v)}{\partial v} \right]_{\mu_V}^2 \quad (1.14)$$

Si la función depende de  $n$  variables aleatorias;  $U = g(V_1, V_2, \dots, V_n)$ , del desarrollo en serie de Taylor se tiene:

$$E\{U\} = E\{g(V_1, V_2, \dots, V_n)\} \approx g(\mu_{V_1}, \mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_n}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial^2 g(v_k)}{\partial v_i \partial v_j} \right]_{\mu_{V_k} \mu_{V_j}} Cov(v_i, v_j) \quad (1.15)$$

$$Var[U] = Var[g(V_1, V_2, \dots, V_n)] \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial g(v_k)}{\partial v_i} \right]_{\mu_{V_k}} \left[ \frac{\partial g(v_k)}{\partial v_j} \right]_{\mu_{V_k}} Cov(v_i, v_j) \quad (1.16)$$

El método se puede generalizar para varias funciones de varias variables aleatorias.

Para cada función  $U_k$ , se tendrá:

$$E\{U_k\} = E\{g_k(V_1, V_2, \dots, V_n)\} \approx g_k(\mu_{V_1}, \mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_n}) \quad (1.17)$$

$$Var[U_k] \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial g_k}{\partial v_i} \right]_{\mu_{V_i}} \left[ \frac{\partial g_k}{\partial v_j} \right]_{\mu_{V_j}} Cov(v_i, v_j) \quad (1.18)$$

$$Cov(U_k, U_l) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial g_k}{\partial v_i} \right]_{\mu_{V_i}} \left[ \frac{\partial g_l}{\partial v_j} \right]_{\mu_{V_j}} Cov(v_i, v_j) \quad (1.19)$$

Si bien el método anterior permite el cálculo aproximado de los primeros momentos, no es posible obtener la forma exacta de la densidad de probabilidad, excepto en el caso Gaussiano. Obsérvese además que para llegar a las ecs. 1.13 y 1.14 se consideró que la dispersión en un punto alrededor de la media es pequeña.

### 1.3.2 Modelación por campos descriptivos.

Mientras que en un campo estimativo la correlación entre las variables aleatorias definidas en distintos subdominios se establece a partir de la incertidumbre que se tiene en la estimación de sus valores esperados, o bien, en cuanto a las dudas que se tienen en el procedimiento de

medición que definió a esas variables, en la modelación por campos descriptivos de la variabilidad espacial se toma en cuenta explícitamente la estructura de correlación espacial de las propiedades aleatorias del medio. Por lo tanto, en un subdominio dado se tendrán tantas variables aleatorias como sea posible; por ejemplo, una por cada elemento o por cada nudo de la malla.

Sea  $V(X)$  el valor de alguna propiedad del suelo en el punto  $X$  de un dominio  $R^P$  ( $P = 1, 2, 3$ ). Este valor, en cada punto, generalmente desconocido o mal conocido, puede ser considerado como una variable aleatoria. El conjunto de variables aleatorias del dominio constituyen un campo descriptivo de la variabilidad espacial o simplemente un campo aleatorio. Sus propiedades estadísticas se pueden definir a través de los siguientes parámetros.

$$\text{Esperanza matemática:} \quad \mu_{V(X)} = E\{V(X)\} \quad (1.20)$$

$$\text{Varianza:} \quad \sigma_{V(X)}^2 = \text{Var}[V(X)] \quad (1.21)$$

$$\text{Auto-correlación:} \quad R_{VV}(X_1, X_2) = E\{V(X_1)V(X_2)\} \quad (1.22)$$

$$\text{Auto-covarianza:} \quad C_{VV}(X_1, X_2) = E\left\{\left(V(X_1) - \mu_{V(X_1)}\right)\left(V(X_2) - \mu_{V(X_2)}\right)\right\} \quad (1.23)$$

Las últimas dos funciones anteriores representan el grado de dependencia lineal entre los valores de las propiedades medias, en dos puntos diferentes del dominio considerado. Asimismo:

$$\text{Coeficiente de auto-correlación:} \quad \rho_{VV}(X_1, X_2) = C_{VV}(X_1, X_2) / \sigma_{V(X_1)} \sigma_{V(X_2)} \quad (1.24)$$

El coeficiente de auto-correlación representa la auto-covarianza normalizada (adimensional). Su valor queda comprendido entre  $-1$  y  $1$ .

Por simplicidad, se acepta que el campo presenta cierta regularidad. Se admite que existe una homogeneidad estadística, a reserva de subdividir el medio en varios subdominios. La hipótesis simplificatoria mas coherente con esto es la de estacionariedad en el sentido amplio. De esta manera, la esperanza es considerada como constante en el dominio y se admite que la auto-covarianza depende únicamente de la distancia vectorial entre los puntos  $X_1$  y  $X_2$ :

$$C_{VV}(X_1, X_2) = C_{VV}(X_2 - X_1) = C_{VV}(X_1 - X_2) = C_{VV}(\tau) \quad (1.25)$$

El valor al origen de esta función es la varianza de  $V(X)$ :

$$\text{Var}[V(X)] = cte \quad (1.26)$$

Y el coeficiente de auto-correlación se escribe como:

$$\rho_{VV}(X_1, X_2) = \rho_{VV}(\tau) \quad (1.27)$$

### 1.3.2.1 Discretización del campo.

Por consistencia con la estructura de las ecuaciones de elementos finitos, es necesario asociar a cada elemento o grupos de elementos correspondientes a un volumen dado, parámetros mecánicos aleatorios específicos. Es decir, es necesario pasar de la representación de un campo aleatorio continuo a un número finito de variables aleatorias  $\bar{\mathbf{V}}$ , donde  $\bar{\mathbf{V}}$ , sea un vector de variables aleatorias definido por un vector de valores medios  $\bar{\mu}_{\bar{\mathbf{V}}}$  y su matriz de covarianza  $T_{\bar{\mathbf{V}}}$ .

Un campo aleatorio, representado por  $V(X)$ ,  $X \in R^P$  ( $P=1,2,3$ ), se puede aproximar como una serie tal que:

$$V(X) = \sum_{i=1}^m N_i(X) V_i(X) = \bar{\mathbf{N}}(X) \bar{\mathbf{V}}(X) \quad (1.28)$$

con un número finito de variables  $V_i$  y funciones  $N_i$ , las cuales se agrupan en los vectores  $\bar{\mathbf{V}}(X) = (V_1(X), \dots, V_m(X))^T$  y  $\bar{\mathbf{N}}(X) = (N_1(X), \dots, N_m(X))$ , respectivamente. Las aproximaciones para la media y covarianza del campo están dadas por relaciones de la forma:

$$\mu_{V(X)} = \bar{\mathbf{N}}(X)^T \bar{\mu}_{\bar{\mathbf{V}}} \quad (1.29)$$

$$C_{VV}(X_1, X_2) = \bar{\mathbf{N}}(X)^T T_{\bar{\mathbf{V}}}$$

donde;  $\bar{\mu}_{\bar{\mathbf{V}}} = E\{\bar{\mathbf{V}}(X)\}$  representa al vector de valores esperados y  $T_{\bar{\mathbf{V}}}$ , la matriz de covarianza del vector aleatorio  $\bar{\mathbf{V}}(X)$ . Es decir, de acuerdo con las *ecs. (1.29)* la aproximación del campo aleatorio depende de las características de las funciones  $N_i(X)$  y del lugar geométrico en el cual se decide representar el campo aleatorio dentro del elemento.

En la literatura se encuentran varios métodos de discretización de campos aleatorios. En términos generales, se diferencian entre si por las propiedades inherentes de las funciones  $N_i$  y por el lugar geométrico en el que se decide representar el campo aleatorio; es decir, puntualmente o como un promedio espacial del dominio del elemento finito.

El método de “*interpolación*” (*interpolation method*) (*Liu et al., 1987*) consiste en representar el campo aleatorio en términos de una regla de interpolación que involucra un conjunto de funciones de forma deterministas con los valores nodales aleatorios del campo. En el método del “*punto medio*” (*midpoint method*) (*Hisada y Nakagiri, 1985*) la variable aleatoria en un elemento se define como el valor del campo aleatorio en el centroide del elemento. En el método de los “*promedios espaciales*” (*spatial averaging method*) (*Vanmarcke, 1983*) la variable aleatoria en cada elemento se define como el promedio espacial del campo aleatorio sobre el dominio del elemento. Por último, en el método de “*expansión en series*” (*series expansion method*) (*Ghanem y Spanos, 1991*) el campo aleatorio se expande en una serie de funciones ortogonales deterministas y coeficientes aleatorios por determinar, evitando así la discretización del dominio del campo en el sentido de los métodos anteriores (*véase el inciso 2.3*).

Con excepción del método del *punto medio*, las demás aproximaciones solo son válidas en caso de que el campo aleatorio sea Gaussiano.

La aplicabilidad de los métodos de discretización anteriores es discutible en los problemas de modelación en geomecánica; entre los factores involucrados podemos citar los siguientes.

### 1.3.2.2 Promedios espaciales y campos condicionales.

La discretización de los campos aleatorios es delicada debido a que en la práctica el problema de la asignación de propiedades es más mecánico que estadístico. Con frecuencia se considera que el valor esperado de una propiedad mecánica en un dominio considerado constituye un valor representativamente aceptable.

En un subdominio  $\Omega$  (segmento, superficie, volumen), la esperanza matemática del valor medio de una propiedad  $V(X)$  se puede expresar como (*Papoulis, 1984*):

$$E\{V_\Omega\} = \frac{1}{\Omega} \int V(X) dX = E\{V(X)\} \quad (1.30)$$

y su varianza como:

$$Var[V_\Omega] = \frac{1}{\Omega^2} \iint C_{VV}(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (1.31)$$

la cual también se puede escribir como:

$$Var[V_\Omega] = \frac{Var[V(X)]}{\Omega^2} \iint \rho_{VV}(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (1.32)$$

La expresión (1.32) muestra que la varianza del valor medio de una propiedad aleatoria disminuye conforme el tamaño del subdominio  $\Omega$  (donde está definida) aumenta (excepto en el caso trivial de correlación perfecta). Al recurrir a los promedios espaciales en los cálculos con elementos finitos en geomecánica, con frecuencia las incertidumbres más significativas son las que corresponden a sesgos en los ensayos o en el uso de correlaciones estadísticas aproximadas. Estas incertidumbres, por estar perfectamente correlacionadas en el espacio, no sufren reducción de varianza.

Por otra parte, si el campo aleatorio es estacionario, el valor medio de alguna propiedad definida en un subdominio  $\Omega_2$ , se puede estimar a partir de los valores obtenidos por muestreo en otro subdominio del medio  $\Omega_1$ . Considerando los valores medios  $V_1$  y  $V_2$ , en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , respectivamente, y aceptando que su distribución de probabilidad conjunta es Gaussiana, el valor esperado y la varianza condicionales están dadas por:

$$E\{V_2|V_1\} = E\{V_2\} + \rho_{VV} \frac{\sigma_{V2}}{\sigma_{V1}} [V_1 - E\{V_1\}] \quad (1.32)$$

$$\text{Var}[V_2|V_1] = \text{Var}[V_2](1 - \rho_{VV}^2) \quad (1.33)$$

donde;  $\rho_{VV}$ , es el coeficiente de correlación entre  $V_1$  y  $V_2$ . De las expresiones anteriores se puede observar que el conocimiento de la propiedad en el subdominio  $\Omega_1$  conduce a una corrección del valor esperado y a una reducción de varianza del valor medio en el subdominio  $\Omega_2$ .

En la práctica, dependiendo de la estructura de correlación del campo y de la posición relativa de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , la situación es intermedia entre los siguientes casos extremos:

- Si;  $V_1$  y  $V_2$  no son correlacionadas, entonces  $\rho_{VV} = 0$  y la información en  $\Omega_1$  no reduce la incertidumbre en  $V_2$ .
- Por otro lado, si  $\rho_{V_1, V_2} = 1$ , entonces  $V_2 = V_1$

Los métodos de discretización mencionados en el inciso anterior ignoran el hecho de que la existencia de datos en un subdominio dado, reduce considerablemente la incertidumbre en los puntos vecinos a él. De esta manera, para asignar a elementos o grupos de elementos finitos los resultados directos de las mediciones se debería recurrir a las técnicas de estimación condicional conocidas como Kriging (*Matheron, 1971*), en las que de una propiedad definida en un dominio  $\Omega$ , se puede evaluar el valor esperado y la varianza condicionales de una propiedad  $V_{\Omega_1}$ , medida en un subdominio  $\Omega_1$ , a partir del valor  $V_{\Omega_2}$ , obtenido por medición directa en otro subdominio  $\Omega_2$  (*Auvinet, 2002*). Por otra parte, en rigor, todos los análisis con elementos finitos estocásticos que involucren la variación espacial de las propiedades mediante campos aleatorios descriptivos deberían ser tridimensionales. En efecto, de ser bidimensionales se estaría suponiendo una homogeneidad estricta en la dirección perpendicular al plano de análisis, lo cual contradice la hipótesis de variabilidad espacial.

# Capítulo 2

## 2. ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS.

Al tratamiento explícito de la incertidumbre en cualquier valor de entrada correspondiente a un análisis determinista con elementos finitos, se le conoce como método de los elementos finitos estocásticos (MEFE) (*Vanmarcke et al., 1986*). El MEFE permite cuantificar la incertidumbre que afecta los resultados de un análisis geomecánico tomando en cuenta la que existe en algunas variables, como por ejemplo, en las propiedades de los materiales o en las sollicitaciones.

Las técnicas que permiten la aplicación del método de los elementos finitos estocásticos se pueden clasificar en dos categorías (*Bittnar, 1996*): los que se basan en los métodos de perturbaciones y los que se basan en los métodos de simulación.

### 2.1 PERTURBACIONES EN LAS ECUACIONES ESTRUCTURALES.

La técnica de perturbaciones aplicada en las ecuaciones estructurales globales de elementos finitos consiste en obtener la medida del cambio de la solución respecto a las variables aleatorias, expandiendo el parámetro asociado con el término aleatorio en series de potencias (*Nayfeh, 1981*), y evaluar la esperanza, varianza y covarianza de la solución a partir de las esperanzas, varianzas y covarianzas de las variables aleatorias.

#### 2.1.1 Método clásico.

En la solución de un problema lineal con elementos finitos se llega a un sistema global de ecuaciones del tipo:

$$\{\bar{F}\} = [K]\{\bar{U}\} \quad (2.1)$$

donde  $[K]$  es la matriz de rigidez y  $\{\bar{F}\}$  y  $\{\bar{U}\}$  son los vectores de cargas y desplazamientos, respectivamente.

Si  $\bar{\mathbf{V}} = (V_1, V_2, \dots, V_n)^T$  es un vector de variables aleatorias estandarizadas con media cero y varianza uno, la expansión de la ec. (2.1) en serie de Taylor hasta el segundo orden resulta:

$$\{\bar{F}^0\} + \{\bar{F}^I\} V_i + \frac{1}{2} \{\bar{F}^{II}\} V_i V_j = \left( [K^0] + [K^I] V_i + \frac{1}{2} [K^{II}] V_i V_j \right) \left( \bar{U}^0 + \{\bar{U}^I\} V_i + \frac{1}{2} \{\bar{U}^{II}\} V_i V_j \right) \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} [K^I] &= \left. \frac{\partial [K]}{\partial V_i} \right|_{V=0} & [K^{II}] &= \left. \frac{\partial^2 [K]}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{V=0} \\ \{\bar{F}^I\} &= \left. \frac{\partial \{\bar{F}\}}{\partial V_i} \right|_{V=0} & \{\bar{F}^{II}\} &= \left. \frac{\partial^2 \{\bar{F}\}}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{V=0} \\ \{\bar{U}^I\} &= \left. \frac{\partial \{\bar{U}\}}{\partial V_i} \right|_{V=0} & \{\bar{U}^{II}\} &= \left. \frac{\partial^2 \{\bar{U}\}}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{V=0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

y  $[K^0]$  es la matriz de rigidez evaluada en el valor esperado de las propiedades aleatorias.

Para  $\bar{\mathbf{V}} = 0$ , es decir, para el valor esperado de las variables aleatorias del vector  $\bar{\mathbf{V}}$ , la expresión (2.2) brinda la condición de equilibrio determinista:

$$\{\bar{F}^0\} = [K^0] \{\bar{U}^0\} \quad (2.4)$$

Derivando la expresión (2.2) respecto a  $V_i$  y evaluando en  $\bar{\mathbf{V}} = 0$  se encuentra que:

$$\{\bar{F}^{II}\} = \{\bar{F}^I\} - [K^I] \{\bar{U}^0\} = [K^0] \{\bar{U}^I\} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

de donde se puede determinar  $\{\bar{U}^I\}$ .

Derivando (2.2) respecto a  $V_i$  y  $V_j$  y haciendo  $\bar{\mathbf{V}} = 0$ , resulta:

$$\left\{ \overline{F}_f^{\prime\prime} \right\} = \left\{ \overline{F}_{ij}^{\prime\prime} \right\} - [K_{ij}^{\prime\prime}] \left\{ \overline{U}^0 \right\} - [K_i^{\prime}] \left\{ \overline{U}_j^{\prime} \right\} - [K_j^{\prime}] \left\{ \overline{U}_i^{\prime} \right\} = [K^0] \left\{ \overline{U}_{ij}^{\prime\prime} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

de donde se puede encontrar  $\left\{ \overline{U}_{ij}^{\prime\prime} \right\}$ .

Las expresiones (2.3) a (2.6) permiten propagar la incertidumbre en los parámetros materiales y de cargas en un análisis lineal con elementos finitos para los desplazamientos. Obsérvese que la matriz de rigidez se invierte una sola vez y que las soluciones se obtienen en secuencia.

Las expresiones para las deformaciones,  $\left\{ \overline{\varepsilon}^0 \right\}, \left\{ \overline{\varepsilon}_i^{\prime} \right\}, \left\{ \overline{\varepsilon}_{ij}^{\prime\prime} \right\}$  y esfuerzos,  $\left\{ \overline{\sigma}^{e0} \right\}, \left\{ \overline{\sigma}_i^{\prime} \right\}, \left\{ \overline{\sigma}_{ij}^{\prime\prime} \right\}$  se pueden obtener a partir de un planteamiento totalmente análogo. En efecto, el vector de deformaciones nodales y el de esfuerzos al nivel del elemento se resuelven a través de ecuaciones del tipo:

$$\left\{ \overline{\varepsilon} \right\} = [B] \left\{ \overline{U} \right\} \quad (2.7)$$

$$\left\{ \overline{\sigma}^e \right\} = [C^e] \left\{ \overline{\varepsilon} \right\} \quad (2.8)$$

Donde;  $[B]$ , es la matriz que describe las relaciones deformación-desplazamiento y  $[C^e]$ , la matriz constitutiva al nivel del elemento. Expandiendo  $\left\{ \overline{\varepsilon} \right\}$  de la ec. (2.7) en un desarrollo en serie de Taylor de segundo orden se obtiene:

$$\left\{ \overline{\varepsilon} \right\} = \left\{ \overline{\varepsilon}^0 \right\} + \left\{ \overline{\varepsilon}_i^{\prime} \right\} V_i + \frac{1}{2} \left\{ \overline{\varepsilon}_{ij}^{\prime\prime} \right\} V_i V_j \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Para  $\overline{\mathbf{V}} = 0$ :

$$\left\{ \overline{\varepsilon}^0 \right\} = [B] \left\{ \overline{U}^0 \right\} \quad (2.10)$$

Derivando la expresión (2.9) respecto a  $V_i$  y evaluando en  $\overline{\mathbf{V}} = 0$ :

$$\left\{ \overline{\varepsilon}_i^{\prime} \right\} = [B] \left\{ \overline{U}_i^{\prime} \right\} \quad (2.11)$$

Derivando (2.9) respecto a  $V_i$  y  $V_j$  y haciendo  $\overline{\mathbf{V}} = 0$ , se tiene:

$$\left\{ \overline{\varepsilon}_{ij}^{\prime\prime} \right\} = [B] \left\{ \overline{U}_{ij}^{\prime\prime} \right\} \quad (2.12)$$

Ahora, expandiendo  $\{\bar{\sigma}^e\}$  y  $[C^e]$  de la ec. (2.8) en serie de Taylor hasta el segundo orden:

$$\left\{\bar{\sigma}^{e0}\right\} + \left\{\bar{\sigma}^{eI}\right\} V_i + \frac{1}{2} \left\{\bar{\sigma}^{eII}\right\} V_i V_j = \left([C^{e0}] + [C^{eI}] V_i + [C^{eII}] V_i V_j\right) \{\bar{\varepsilon}\} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \left\{\bar{\sigma}^{eI}\right\} &= \left. \frac{\partial \left\{\bar{\sigma}^e\right\}}{\partial V_i} \right|_{V=0} & \left\{\bar{\sigma}^{eII}\right\} &= \left. \frac{\partial^2 \left\{\bar{\sigma}^e\right\}}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{V=0} \\ [C^{eI}] &= \left. \frac{\partial [C^e]}{\partial V_i} \right|_{V=0} & [C^{eII}] &= \left. \frac{\partial [C^e]}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{V=0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para  $\bar{V} = 0$ , de la ecuación (2.13), se obtiene:

$$\left\{\bar{\sigma}^{e0}\right\} = [C^{e0}] \left\{\bar{\varepsilon}^0\right\} \quad (2.15)$$

Derivando la expresión (2.13) respecto a  $V_i$  y evaluando en  $\bar{V} = 0$ , resulta:

$$\left\{\bar{\sigma}^{eI}\right\} = [C^{e0}] \left\{\bar{\varepsilon}_i^I\right\} + [C^{eI}] \left\{\bar{\varepsilon}^0\right\} \quad (2.16)$$

Derivando (2.13) respecto a  $V_i$  y  $V_j$  y haciendo  $\bar{V} = 0$ , se tiene:

$$\left\{\bar{\sigma}^{eII}\right\} = [C^{e0}] \left\{\bar{\varepsilon}_{ij}^{II}\right\} + [C^{eI}] \left\{\bar{\varepsilon}_j^I\right\} + [C^{eI}] \left\{\bar{\varepsilon}_i^I\right\} + [C^{eII}] \left\{\bar{\varepsilon}^0\right\} \quad (2.17)$$

Obsérvese que ahora, para obtener  $\left\{\bar{\sigma}^{eI}\right\}$  y  $\left\{\bar{\sigma}^{eII}\right\}$ , se requiere determinar las derivadas primera y segunda de la matriz constitutiva respecto a los parámetros aleatorios.

En problemas estáticos no lineales, la carga se aplica por incrementos sucesivos  $\{\Delta \bar{F}\}$ , tales que la carga total es  $\{\bar{F}^m\}$  en la etapa  $m$ . La ecuación de equilibrio correspondiente a este caso se puede escribir como:

$$\{\bar{F}^m\} = f(\bar{U}^m) \quad (2.18)$$

donde;  $f(\bar{U}^m)$ , es el vector de fuerzas internas que incluye las no linealidades mecánicas y geométricas y  $\{\bar{U}^m\}$ , son los vectores de desplazamiento en la configuración de equilibrio de la etapa  $m$ .

Con frecuencia se recurre a una estrategia de solución incremental para resolver el problema. La ecuación incremental está dada como:

$$\{\Delta \bar{F}\} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{U}} \right]_{\{\bar{U}\}=\{\bar{U}^m\}} \{\Delta \bar{U}\} = [K_t^m] \{\Delta \bar{U}\} \quad (2.19)$$

donde;  $[K_t^m]$ , es la matriz de rigidez tangente (*Bathe, 1982*).

La ecuación (2.19) es similar a la (2.1), correspondiente al caso lineal, pero ahora la matriz  $[K]$  se sustituye por la matriz tangente  $[K_t^m]$  y su solución se realiza de manera iterativa. Por lo tanto, las ecuaciones para el caso no lineal son completamente similares a las del caso lineal.

Se ha descrito como evaluar la incertidumbre en los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos a partir de las incertidumbres en los parámetros materiales y de cargas; sin embargo, también se puede involucrar la incertidumbre en los parámetros geométricos (dimensiones del cuerpo, forma de la frontera, forma de los subdominios con diferentes materiales, etc.) aplicando la técnica de perturbaciones al jacobiano de la matriz de transformación de coordenadas (*Bittnar, 1996*).

### 2.1.1.1 Aproximación de segundos momentos.

Las ecuaciones (2.3) y (2.14) expresan la sensibilidad de la respuesta ante la variabilidad en los parámetros aleatorios. Por lo tanto, el método de perturbaciones permite detectar los parámetros de mayor incidencia a través de las varianzas en la respuesta. El método de perturbaciones es particularmente útil en los casos en que los parámetros del modelo constitutivo y eventualmente las solicitaciones, se considerarán la principal fuente de incertidumbre.

La aproximación de primer orden para el valor esperado de los desplazamientos se obtiene tomando la esperanza matemática en la expansión de  $\{\bar{U}\}$  de la ec. (2.2):

$$E\{\bar{U}\} \approx \{\bar{U}^0\} \quad (2.20)$$

Tomando la varianza de la expansión de  $\{\bar{U}\}$  de la ec. (2.2) y operando algebraicamente se llega a la siguiente aproximación de primer orden para la covarianza:

$$\text{Cov}(\bar{U}, \bar{U}) \approx \left\{ \bar{U}_i^l \right\} \left\{ \bar{U}_j^l \right\}^T \text{Cov}(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \{ \bar{U} \}}{\partial v_i} / E \right) \left( \frac{\partial \{ \bar{U} \}^T}{\partial v_j} / E \right) \text{Cov}(v_i, v_j) \quad (2.21)$$

En donde;  $\frac{\partial \{ \bar{U} \}}{\partial v_i} / E$ , significa la derivada del vector de desplazamientos con respecto a  $v_i$ , evaluada para el valor esperado de la variable aleatoria  $v_i$  y  $\text{Cov}(v_i, v_j)$ , son los elementos de la matriz de covarianza de las variables aleatorias involucradas.

Una vez encontradas las soluciones para las deformaciones,  $\left\{ \bar{\varepsilon} \right\}, \left\{ \bar{\varepsilon}_i \right\}$  y los esfuerzos,  $\left\{ \bar{\sigma} \right\}, \left\{ \bar{\sigma}_i \right\}$  (y eventualmente sus segundas derivadas) sus esperanzas y covarianzas se pueden obtener sustituyendo el campo correspondiente en las ecuaciones (2.20) y (2.21).

En problemas lineales, las derivadas  $\partial \{ \bar{U} \} / \partial v_i, \partial \{ \bar{\varepsilon} \} / \partial v_i$  y  $\partial \{ \bar{\sigma} \} / \partial v_i$ , es decir, de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos con respecto a las variables aleatorias, respectivamente, necesarias en las expresiones (2.20) y (2.21), se han obtenido derivando las matrices de rigidez  $[K]$ , constitutiva  $[C]$ , y de relaciones deformación-desplazamiento  $[B]$ , de manera explícita (Cambou, 1974) y (Bouayed, 1997). Sin embargo, en problemas que involucran no linealidad geométrica y/o mecánica, el cálculo explícito de las derivadas ya no es posible. No obstante, el método sigue siendo válido, evaluando las derivadas numéricamente.

### 2.1.1.2 Técnica de los cocientes polinomiales.

La técnica de los cocientes polinomiales (Chowdhury, 1993), se puede aplicar en la aproximación de derivadas e integrales y en la interpolación de funciones de varias variables.

Para el cálculo numérico de las derivadas de una función de  $n$  variables aleatorias (eventualmente de algunas no aleatorias)  $U = g(V_1, V_2, \dots, V_n)$ , se asignan  $m$  valores discretos a las variables  $v_1$ , comprendidos, por ejemplo, dentro de un intervalo acotado como  $k$  desviaciones estándar antes y después del valor medio de  $v_1$ , manteniendo los valores de  $v_2$  a  $v_n$  iguales a sus valores medios,  $\mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_n}$ , es decir:

$$\begin{aligned} U_{11} &= g\left(v_1^{(1)}, \mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_n}\right) \\ U_{12} &= g\left(v_1^{(2)}, \mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_n}\right) \\ &\vdots \\ U_{1m} &= g\left(v_1^{(m)}, \mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_n}\right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

El número de valores discretos  $m$  depende de la aproximación deseada. Por ejemplo, en este trabajo en particular se utilizaron cinco puntos discretos,  $m = 5$  y  $k = 2\sigma_{V_1}$ .

El valor de la función en el argumento  $v_1$ , se obtiene a partir de la siguiente fracción continua:

$$\phi_1(v_1) = U_1(v_1, \mu_{v_2}, \dots, \mu_{v_n}) \approx a_1 + \frac{v_1 - v_1^{(1)}}{a_2 + \frac{v_1 - v_1^{(2)}}{a_3 + \frac{v_1 - v_1^{(3)}}{\dots + \frac{v_1 - v_1^{(m-1)}}{a_m}}} \quad (2.23)$$

donde las constantes  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , se calculan de acuerdo al procedimiento mostrado en la tabla 2.1.

**Tabla 2.1 Coeficientes de la fracción polinomial para la variable  $v_i$ .**

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...
$a_1 = U_{11}$	-----	-----	-----	-----
$a_{21} = U_{12}$	$a_2 = \frac{v_1^{(2)} - v_1^{(1)}}{a_{21} - a_1}$	-----	-----	-----
$a_{31} = U_{13}$	$a_{32} = \frac{v_1^{(3)} - v_1^{(1)}}{a_{31} - a_1}$	$a_3 = \frac{v_1^{(3)} - v_1^{(2)}}{a_{32} - a_2}$	-----	-----
$a_{41} = U_{14}$	$a_{42} = \frac{v_1^{(4)} - v_1^{(1)}}{a_{41} - a_1}$	$a_{43} = \frac{v_1^{(4)} - v_1^{(2)}}{a_{42} - a_2}$	$a_4 = \frac{v_1^{(4)} - v_1^{(3)}}{a_{43} - a_3}$	-----
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La relación entre el  $i$ -ésimo valor de la función en  $v_1$ ,  $\phi_i(v_1)$  y el consecutivo  $\phi_{i+1}(v_1)$ , se puede escribir en la forma:

$$\phi_i(v_1) = a_i + \frac{v_1 - v_1^{(i)}}{\phi_{i+1}(v_1)} \quad (2.24)$$

de donde se tiene que para  $i = m$  :

$$\phi_m(v_1) = a_m \quad (2.25)$$

Obsérvese que si la función evaluada en los distintos valores  $v_1^{(i)}$ , presenta escasa variación, entonces el denominador de los coeficientes  $a_2, a_3, a_4, \dots, a_m$  sería muy próximo a cero, y en consecuencia,  $\phi_m(v_1) \rightarrow \infty$

La derivada parcial de la función  $U$  con respecto a la variable  $v_1$ , se obtiene derivando (2.24) con respecto a  $v_1$  con  $i = 1$ :

$$\frac{\partial U}{\partial v_1} \approx \phi'_1(v_1) = \frac{\phi_2(v_1) - [v_1 - v_1^{(1)}] \phi'_2(v_1)}{[\phi_2(v_1)]^2} \quad (2.26)$$

En general, se puede escribir:

$$\phi'_i(v_1) = \frac{\phi_{i+1}(v_1) - [v_1 - v_1^{(i)}] \phi'_{i+1}(v_1)}{[\phi_{i+1}(v_1)]^2} \quad (2.27)$$

De donde se observa que cuando  $i = m$ :

$$\phi'_m(v_1) = 0$$

Sustituyendo  $v_1$  por  $\mu_{v_1}$ , el valor de la derivada parcial en el entorno del valor medio de  $v_1$  resulta:

$$\frac{\partial U(\mu_{v_1}, \mu_{v_2}, \dots, \mu_{v_n})}{\partial v_1} \approx \phi'_1(\mu_{v_1}) \quad (2.28)$$

Las derivadas parciales respecto a los demás argumentos se obtienen de igual manera.

Al expandir la ec. (2.27) es importante observar que si  $\phi_m(v_1) = \infty$ , entonces:  $\phi'_1(\mu_{v_1}) = 0$

La aplicabilidad de las técnicas de perturbaciones basadas en el desarrollo en serie de Taylor depende en gran medida de la *diferenciabilidad* de las ecuaciones de comportamiento, con respecto a las variables aleatorias involucradas. Esta característica hace que la aplicabilidad de los métodos basados en las técnicas de perturbaciones sea discutible en los problemas altamente no lineales o cuando la dispersión en los parámetros aleatorios es relativamente grande (*Spanos y Ghanem, 1989*).

## 2.1.2 Método de aproximaciones puntuales.

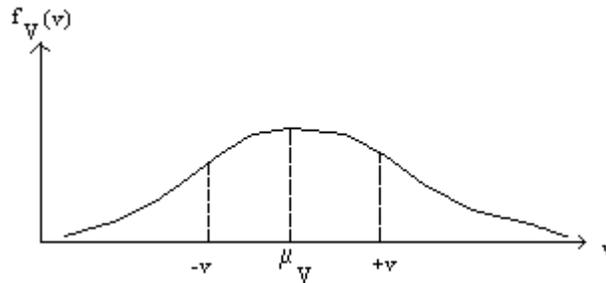
Como una alternativa al cálculo aproximado de la densidad de probabilidad de una función de variables aleatorias que no requiere el cálculo de las derivadas parciales  $\phi'_n(\mu_{v_1})$ ; se puede citar, entre otros, el método de aproximaciones puntuales. *Rosenblueth (1975)* desarrolló una técnica que permite estimar los primeros momentos de una función continua de variables aleatorias, a partir del conocimiento de los tres primeros momentos de cada variable. La técnica consiste en recurrir a una distribución de probabilidad discreta con los mismos momentos que la densidad continua. *Rosenblueth* mostró que la técnica se puede generalizar a un número cualquiera de puntos de estimación, sin embargo, en este trabajo nos limitamos al caso *bipuntual*.

### 2.1.2.1 Función univariable.

Sea  $f_V(v)$  la densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua  $V$ , con dos valores de  $v$ ,  $v_-$  y  $v_+$ , localizados en ambos lados de su valor medio,  $\mu_V$  (fig. 2.1). Si se considera que  $v_-$  y  $v_+$  constituyen el dominio de definición de alguna variable aleatoria discreta  $v^0$ , las probabilidades correspondientes a esa variable aleatoria se definen por:

$$P_+ = \text{probabilidad}[v^0 = v_+] \quad (2.29)$$

$$P_- = \text{probabilidad}[v^0 = v_-]$$



**Fig. 2.1** Discretización de la función de densidad de  $V$  en dos puntos.

Es decir, *Rosenblueth* supone que  $v^0$  constituye una aproximación puntual de la variable continua  $V$  si los tres primeros momentos de la distribución de  $v^0$  son iguales a los de la distribución de  $V$ .

De esta manera, la esperanza de  $v^0$  es equivalente a la de  $V$ , ( $\mu_{v^0} = \mu_V$ ); donde:

$$\mu_V = P_+v_+ + P_-v_- \quad (2.30)$$

la varianza de  $v^0$  es equivalente a la de  $V$ , ( $\sigma_{v^0}^2 = \sigma_V^2$ ), donde:

$$\sigma_V^2 = P_+(v_+ - \mu_V)^2 + P_-(v_- - \mu_V)^2 \quad (2.31)$$

El tercer momento central de  $v^0$  es equivalente al de  $V$ :

$$\beta_1\sigma_V^3 = P_+(v_+ - \mu_V)^3 + P_-(v_- - \mu_V)^3 \quad (2.32)$$

siendo,  $\beta_1$ , el coeficiente de asimetría.

Finalmente, se cumple:

$$P_+ + P_- = 1 \quad (2.33)$$

A partir de las *ecs.* (2.30) a (2.33) se pueden obtener los valores de  $v_+, P_+, v_-$  y  $P_-$ , como:

$$P_+ = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\beta_{1v}}{|\beta_{1v}|} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + (\beta_{1v}/2)^2}} \right]$$

$$P_- = 1 - P_+$$

$$v_+ = \mu_V + \sigma_V \sqrt{P_-/P_+}$$

$$v_- = \mu_V - \sigma_V \sqrt{P_+/P_-}$$
(2.34)

Si la función de distribución de probabilidad es simétrica ( $\beta_{1v} = 0$ ), las expresiones anteriores se simplifican:

$$P_+ = P_- = 1/2$$

$$v_{\pm} = \mu_V \pm \sigma_V$$
(2.35)

En el método se considera que la densidad de probabilidad de la función  $U = f(V)$ , en la que  $V$  es una variable aleatoria, se puede representar por una aproximación puntual  $u^0$ , definida por los valores  $u_+$  y  $u_-$  y sus probabilidades. Los valores  $u_+$  y  $u_-$  se pueden obtener por aplicación de las funciones y sus probabilidades correspondientes:

$$u_+ = f(v_+)$$

$$u_- = f(v_-)$$
(2.36)

$$P_+ = \text{probabilidad}[u^0 = u_+]$$

$$P_- = \text{probabilidad}[u^0 = u_-]$$

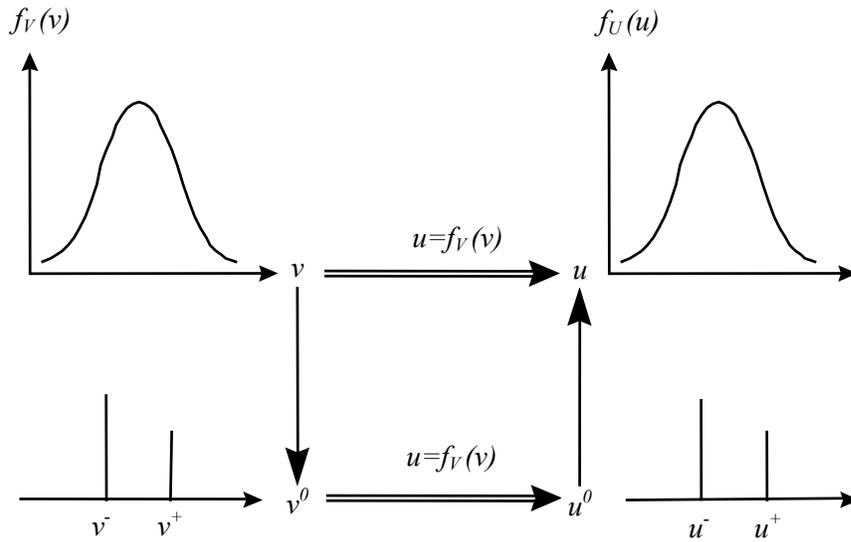
Conociendo  $v_+, P_+, v_-$  y  $P_-$ , los parámetros de la distribución  $f_U(u)$  se pueden obtener aplicando las expresiones:

$$\mu_U = P_+ u_+ + P_- u_-$$

$$\sigma_U^2 = P_+ (u_+ - \mu_U)^2 + P_- (u_- - \mu_U)^2 \quad (2.37)$$

$$\beta_1 \sigma_U^3 = P_+ (u_+ - \mu_U)^3 + P_- (u_- - \mu_U)^3$$

El principio del método descrito en los párrafos anteriores se ilustra en la *fig. 2.2*.



**Fig. 2.2** Principio del método de estimación puntual de Rosenbluth.

### 2.1.2.2 Función multivariable.

Sea una función  $U = f(V_1, V_2, \dots, V_n)$  en la que  $V_1, V_2, \dots, V_n$  son variables aleatorias independientes o correlacionadas.

Las ecuaciones para el cálculo de los primeros momentos de la función multivariable se obtienen en forma análoga al caso univariable.

En el caso de dos variables aleatorias:

$$\mu_U = P_{++}u_{++} + P_{+-}u_{+-} + P_{-+}u_{-+} + P_{--}u_{--} \quad (2.38)$$

donde:

$$U_{\pm\pm} = f \left[ \mu_{V_1} \pm \sigma_{V_1} (P_-/P_+)^{\pm 1/2}, \mu_{V_2} \pm \sigma_{V_2} (P_-/P_+)^{\pm 1/2} \right] \quad (2.39)$$

$$\mu_{U^n} = P_{++}u_{++}^n + P_{+-}u_{+-}^n + P_{-+}u_{-+}^n + P_{--}u_{--}^n \quad (2.40)$$

$$Var[U] = \sigma_U^2 = \mu_{U^2} - (\mu_U)^2 \quad (2.41)$$

En el caso de tres variables:

$$\mu_U = P_{+++}u_{+++} + P_{++-}u_{++-} + P_{+-+}u_{+-+} + P_{+--}u_{+--} + P_{-++}u_{-++} + P_{-+-}u_{-+-} + P_{-+}u_{-+} + P_{-+-}u_{-+-}$$

$$\mu_{U^n} = P_{+++}u_{+++}^n + P_{++-}u_{++-}^n + P_{+-+}u_{+-+}^n + P_{+--}u_{+--}^n + P_{-++}u_{-++}^n + P_{-+-}u_{-+-}^n + P_{-+ -}u_{-+ -}^n + P_{-- +}u_{-- +}^n$$

$$\text{Var}[U] = \sigma_U^2 = \mu_{U^2} - (\mu_U)^2 \quad (2.42)$$

Si la densidad de las variables es simétrica y además son independientes:

$$P_{++} = P_{+-} = P_{-+} = P_{--} = 1/4 \quad (2.43)$$

$$P_{+++} = P_{++-} = P_{+-+} = P_{+--} = P_{-++} = P_{-+-} = P_{-+ -} = P_{-- +} = 1/8 \quad (2.44)$$

Si las variables son simétricas pero correlacionadas:

$$P_{++} = P_{--} = (1 + \rho)/4 \quad P_{+-} = P_{-+} = (1 - \rho)/4 \quad (2.45)$$

$$P_{+++} = P_{---} = (1 + \rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31})/8$$

$$P_{++-} = P_{--+} = (1 + \rho_{12} - \rho_{23} - \rho_{31})/8 \quad (2.46)$$

$$P_{+-+} = P_{-+-} = (1 - \rho_{12} - \rho_{23} + \rho_{31})/8$$

$$P_{+--} = P_{-++} = (1 - \rho_{12} + \rho_{23} - \rho_{31})/8$$

donde;  $\rho_{ij}$ , es el coeficiente de correlación entre las variables  $v_i$  y  $v_j$ . El signo que le precede al valor de  $\rho_{ij}$  se obtiene como el producto de los signos que aparecen en las posiciones  $i$  y  $j$  de las distintas permutaciones.

Si las variables aleatorias son independientes pero asimétricas:

$$P_{++} = P_+(v_1)P_+(v_2) \quad P_{--} = P_-(v_1)P_-(v_2) \quad (2.47)$$

$$P_{+-} = P_+(v_1)P_-(v_2) \quad P_{-+} = P_-(v_1)P_+(v_2)$$

donde los valores de  $P_+(v_1), P_-(v_1), P_+(v_2)$  y  $P_-(v_2)$ , están dados por las relaciones (2.36).

En el caso general de  $n$  variables aleatorias,  $U = f(V_1, V_2, \dots, V_n)$ :

$$\mu_U = \sum_1^{2^n} P_{i,j,k,l,\dots,n} u_{i,j,k,l,\dots,n}$$

$$\mu_{U^n} = \sum_1^{2^n} P_{i,j,k,l,\dots,n} \mu_{i,j,k,l,\dots,n}^n \quad (2.48)$$

$$\text{Var}[U] = \sigma_U^2 = \mu_{U^2} - (\mu_U)^2$$

donde los subíndices  $i, j, k, l, \dots, n$  representan las permutaciones de los signos  $\pm$ . El número total de posibles permutaciones es igual a  $2^n$ .

Si las variables aleatorias son correlacionadas, la probabilidad correspondiente a cada variable está dada por:

$$P_{i,j,k,l,\dots,n} = \left[ 1 \pm \rho_{n,1} \pm \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{i,i+1} \right] / 2^n \quad (2.49)$$

Si las variables son independientes, entonces:

$$P_{i,j,k,l,\dots,n} = 1/2^n \quad (2.50)$$

Si las variables aleatorias son asimétricas:

$$P_{i,j,k,l,\dots,n} = P_i(v_1) P_j(v_2) P_k(v_3) \dots P_n(v_n) \quad (2.51)$$

Existe una observación al método de aproximaciones *bipuntuales* en el caso de que las variables aleatorias sean todas correlacionadas. *Bolle (1988)* notó que cuando el número de variables aleatorias  $n$  era superior a 3 (Tabla 2.2), el número de incógnitas para determinar los primeros momentos excedía el número de relaciones disponibles, por lo que la aplicación del método original de *Rosenblueth* con dos puntos de estimación por variable no era posible. Sin embargo, el método original permanece aplicable cuando las variables son no correlacionadas y el número de las misma no es muy elevado ( $< 12$ ). Para los casos en los que el número de variables aleatorias sea importante, se han sugerido otras variantes con la intención de reducir el volumen de cálculos (*Bolle, 1988*); (*Christian y Becker, 2002*).

**Tabla 2.2 Comparación entre el número de incógnitas y de ecuaciones correspondientes, en función del número de variables aleatorias  $n$  (*Bolle, 1988*).**

Número de variables $n$	1	2	3	4	5	6	7
Número de incógnitas	1	2	4	8	16	32	64
Número de ecuaciones	1	2	4	7	11	16	22

## 2.2 PERTURBACIONES EN EL PRINCIPIO VARIACIONAL.

El enfoque es totalmente análogo al caso de las ecuaciones estructurales deterministas, solo que en este caso la técnica de perturbaciones se aplica a funcionales. La idea básica del método de perturbaciones en el principio variacional es expandir cada función aleatoria alrededor del valor medio del campo aleatorio  $V(X)$ , denotado por  $\bar{V}(X)$  y retener al menos los términos de segundo orden. Es decir, para un parámetro pequeño dado  $\xi$ , que representa la escala de dispersión de  $V(X)$ ; por ejemplo, la función aleatoria del campo de desplazamientos  $u_i$ , se expande alrededor de  $\bar{V}$  por el método de perturbaciones de segundo orden en un punto  $X$  como:

$$u_i \approx u_i^0 + \xi u_i^1 + \xi^2 u_i^2 \quad (2.52)$$

donde;  $u_i^0, u_i^1$  y  $u_i^2$  son funciones de orden cero, primero y segundo, respectivamente.

Después de expandir en forma análoga cada una de las funciones involucradas en la funcional, sustituirlas en el principio variacional e igualar términos del mismo orden, se llega a principios variacionales de orden cero, primero y segundo.

Las funciones de orden cero son idénticas a las deterministas, por lo que en el principio variacional de orden cero se emplea el método usual de Galerkin en forma directa. Una vez que se determina  $u^0$ , las funciones aleatorias de primer y segundo orden se resuelven en secuencia.

*Liu et al. (1987)* formularon estocásticamente el principio variacional de la energía potencial y *Liu et al. (1988)* el principio variacional de Hu-Washizu. Conviene mencionar que ambos principios fueron formulados para tratar con campos aleatorios del tipo descriptivo, por lo que además de la aproximación usual para el campo de desplazamientos, el campo aleatorio descriptivo se discretiza por medio de  $q$  funciones de “interpolación” que aproximan la esperanza espacial y la función de autocovarianza. De acuerdo con lo comentado en el inciso 1.3.2.2, la aplicabilidad de la formulación original de estos principios al caso en estudio de este trabajo es discutible.

## 2.3 MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO ESTOCÁSTICO ESPECTRAL.

El método del elemento finito estocástico espectral (MEFEE) es una extensión del método del elemento finito determinista (MEF) en el que se involucran propiedades aleatorias en los materiales constitutivos, a través de los coeficientes de una serie de polinomios en variables Gaussianas estandarizadas. Como las propiedades mecánicas se modelan como un campo aleatorio descriptivo, el campo de desplazamientos nodales  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  (donde  $x_i, i=1, \dots, N$  coordenadas nodales de la malla y  $u^i, i=1, \dots, N$  desplazamientos nodales) es un campo aleatorio que se simboliza como  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta)$ ; donde  $\theta \in \Theta$ , representa un resultado del total de resultados posibles del experimento que conforman el espacio muestral  $\Theta$ . De esta manera, el proceso de discretización espacial de la geometría  $\Omega$  consiste ahora, a diferencia del MEF, en aproximar la respuesta mediante un vector aleatorio de desplazamientos nodales  $\mathbf{U}(\theta)$ , en el cual

cada componente  $u^i(\theta)$  es una variable aleatoria por determinar que se representa por sus “coordenadas” en el espacio de variables Gaussianas estandarizadas.

Para discretizar la “*dimensión aleatoria*” el MEFEE recurre a dos procedimientos de expansión en series. Primero, el campo aleatorio descriptivo de la variación espacial de las propiedades se discretiza utilizando una expansión truncada en serie de *Karhunen-Loève* y posteriormente, cada desplazamiento nodal aleatorio  $u^i(\theta)$  se representa por sus “*coordenadas*” en un espacio apropiado de variables aleatorias llamado “*caos polinomial*”.

### 2.3.1 Discretización del campo aleatorio.

La expansión en serie de *Karhunen-Loève* de un campo aleatorio  $V(X, \theta)$  se basa en la expansión espectral de la función de covarianza  $C_{VV}(X_1, X_2)$ . En el MEFEE el campo aleatorio aproximado se representa mediante la siguiente expansión truncada:

$$V(X, \theta) = \mu_{V(X)} + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \xi_i(\theta) \quad (2.53)$$

Donde;  $\mu_{V(X)}$ , es la media del campo aleatorio y  $\xi_i(\theta)$  un conjunto de variables aleatorias ortogonales. Asimismo,  $\varphi_i(X)$  y  $\lambda_i$  son las funciones propias y los valores propios, respectivamente, de la siguiente ecuación integral que contiene a la función de covarianza,  $C_{VV}(X_1, X_2)$ , como el Kernel:

$$\int_D C_{VV}(X_1, X_2) \varphi_i(X_1) dX_1 = \lambda_i \varphi_i(X_2) \quad (2.54)$$

siendo  $D$  el dominio espacial sobre el cual se define el campo aleatorio.

La importancia de esta representación espectral se encuentra en que el campo aleatorio se ha descompuesto en un conjunto de funciones deterministas en las variables espaciales, que multiplican a coeficientes aleatorios, los cuales a su vez, son independientes de esas variables. En particular, si  $V(X, \theta)$  es Gaussiano, entonces las variables aleatorias  $\xi_i$  forman un vector Gaussiano ortonormal. Para el caso particular de campos aleatorios Gaussianos (o lognormales) sobre un dominio rectangular, *Spanos y Ghanem, (1989)* presentan la solución analítica de la ec. (2.54).

### 2.3.2 Representación del campo de desplazamientos.

En el MEFEE cada desplazamiento nodal  $u(\theta)$  se considera una variable aleatoria que se puede representar a través de sus coordenadas  $\{u_j\}$  sobre un espacio de variables aleatorias. Esta representación se describe mediante la siguiente serie truncada:

$$u(\theta) = \sum_{j=0}^{P-1} u_j \Psi_j \quad (2.55)$$

Donde;  $\{\Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M)\}$ , es el espacio de variables aleatorias denominado “*caos polinomial*” definido por medio de  $M$  variables normales estandarizadas  $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M$ . El *caos polinomial* de dimensión  $M$ -ésima y orden  $p$ , consiste en un conjunto multidimensional de polinomios de *Hermite* en las variables  $\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$  cuyo grado no excede a  $p$ .

Los polinomios multidimensionales de *Hermite* se pueden obtener como productos de polinomios unidimensionales de *Hermite* en variables normales estándar independientes. Por ejemplo, considerando la siguiente secuencia de enteros:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \{i_1, \dots, i_p\} & i_j &\geq 0 \\ \boldsymbol{\alpha} &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} & \alpha_j &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

El polinomio multidimensional de *Hermite* asociado con las secuencias  $(\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha})$  es:

$$\psi_{\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha}}(\theta) = \prod_{k=1}^p H_{\alpha_k}(\xi_{i_k}(\theta)) \quad (2.57)$$

Donde;  $H_{\alpha_k}$ , es el polinomio unidimensional de *Hermite* asociado a la secuencia  $\alpha_k$ . El conjunto de todos los polinomios  $\{\psi_{\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha}}\}$  asociados con todas las secuencias posibles  $(\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha})$  de cualquier longitud  $p$  forma un *caos polinomial*.

Sea  $\Gamma_p(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_p}(\theta))$  el conjunto de polinomios  $\{\psi_{\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha}}(\theta) | \sum_{k=1}^p \alpha_k = p\}$  y  $\Gamma_p$  el espacio que ellos ocupan.  $\Gamma_p$  es un subespacio llamado “*caos homogéneo de orden p*”. Como los subespacios  $\Gamma_p$  son ortogonales entre si (*Ghanem y Spanos, 1991*), la expansión de cualquier variable aleatoria  $u(\theta)$  en el *caos polinomial* se puede escribir como:

$$u(\theta) = u_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} u_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \quad (2.58)$$

En esta expresión,  $u_0, u_{i_1}, u_{i_1 i_2}$  se pueden interpretar como las “coordenadas” de  $u(\theta)$  asociadas con el caos homogéneo de orden 0, 1° y 2°, respectivamente. Los caos homogéneos de hasta el tercer orden tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 1 \\ \Gamma_1(\xi_i) &= \xi_i \\ \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) &= \xi_{i_1} \xi_{i_2} - \delta_{i_1 i_2} \\ \Gamma_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) &= \xi_{i_1} \xi_{i_2} \xi_{i_3} - \xi_{i_1} \delta_{i_2 i_3} - \xi_{i_2} \delta_{i_3 i_1} - \xi_{i_3} \delta_{i_1 i_2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Donde;  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

Para la práctica, los caos polinomiales se construyen de dimensión finita, es decir, por medio de un número finito  $M$  de variables aleatorias Gaussianas ortonormales; las cuales se toman de la expansión en serie de *Karhunen-Loève* del campo aleatorio. El espacio polinomial

formado mediante las  $M$  variables aleatorias se expresa por  $\Gamma_p(\xi_1, \dots, \xi_M)$  y se le llama el caos homogéneo de dimensión  $M$  y orden  $p$ .

Truncando la ec. 2.58 hasta el orden  $p$ , la dimensión total de  $\Gamma_p(\xi_1, \dots, \xi_M)$  está dada por el siguiente factor binomial:

$$P = \sum_{k=0}^p \binom{M+k-1}{k} \quad (2.60)$$

En la tabla 2.3 se muestra el valor de  $P$  para ciertos valores de  $M$  y  $p$ . Se observa que  $P$  se incrementa rápidamente con ambos parámetros. Como en el MEFEE cada cantidad escalar  $u$  (la cual es una cantidad única en el MEF determinista) se representa por  $p$  coeficientes, se concluye que el MEFEE requiere resolver un sistema de ecuaciones de  $NP \times NP$ ; siendo  $N$  el número de grados de libertad. La forma en la que los autores del MEFEE sugieren se implemente la solución de este sistema se expone en *Ghanem y Kruger, (1996)*. Los valores típicos utilizados en las aplicaciones son  $M = 4$  y  $p = 2$  o  $3$ .

**Tabla 2.3 Dimensión total del caos homogéneo en función del número de variables aleatorias  $M$  y del orden del caos polinomial  $p$ .**

$M$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
2	3	6	10	15
4	5	15	35	70
6	7	28	83	210

### 2.3.3 Aplicabilidad.

En la aproximación mediante el MEFEE la respuesta se expresa como un vector de desplazamientos nodales. Cada componente se caracteriza por los coeficientes de una serie de polinomios en variables normales estandarizadas. Debido a esta característica, se dice que la representación de la aleatoriedad de la respuesta es intrínseca. Sin embargo, se han reconocido las siguientes limitantes en esta aproximación (*Sudren y Der Kiureghian, 2000*):

- En su estado actual de desarrollo, el MEFEE está limitado prácticamente a problemas lineales.
- La cantidad de cálculo necesaria en un problema en particular es mucho mayor que la equivalente a un problema determinista. Típicamente, se necesitan de 15 a 35 coeficientes para caracterizar cada desplazamiento nodal.
- En la generalización para involucrar un mayor número de parámetros aleatorios, se ha sugerido discretizar cada campo aleatorio utilizando diferentes conjuntos de

variables normales estandarizadas; es decir,  $\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$  para el primero, luego  $\{\xi_{M+1}, \dots, \xi_{M'}\}$  para el segundo y así sucesivamente. Sin embargo, multiplicando por dos la longitud del vector  $\xi$ , se incrementa dramáticamente el tamaño del caos polinomial (ver tabla 2.3).

- Las escasas aplicaciones prácticas se han limitado a campos aleatorios Gaussianos y lognormales. En el caso de los campos lognormales, aun para una variable aleatoria, solo un número infinito de términos en la expansión reproduce la característica lognormal. Esto significa que el campo aleatorio descriptivo definido utilizando solo algunos términos en la expansión del caos polinomial, puede no ser representativo del campo lognormal real.

Por lo anterior parece valido concluir que el MEFEE, en su estado actual de desarrollo, no es práctico para el caso en estudio de este trabajo.

## 2.4 SIMULACIONES CON EL MÉTODO DE MONTE CARLO.

Para evitar las dificultades relativas a la implementación y limitaciones propias de los métodos disponibles de transformación analíticos y numéricos, se puede recurrir a los métodos de simulación basados en las técnicas de Monte Carlo.

El principio general del método de Monte Carlo consiste en construir una serie de números comprendidos entre 0 y 1, los cuales pueden representar las realizaciones de una variable aleatoria uniformemente distribuida  $u_i$  entre  $[0,1]$ , para generar, a partir de esa serie y de la función de distribución acumulada  $F_V(v_i) = P(v \leq v_i)$ , las realizaciones  $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$  de la variable aleatoria considerada (fig. 2.3). Estas realizaciones, a su vez, presentarán a la larga, la función de densidad de probabilidad  $f_V(v_i)$  adoptada para esa variable. El análisis estadístico de los resultados de un gran número de simulaciones hace posible obtener la densidad de probabilidad de los resultados, a partir de la función de distribución de  $f_U(u(v))$ .

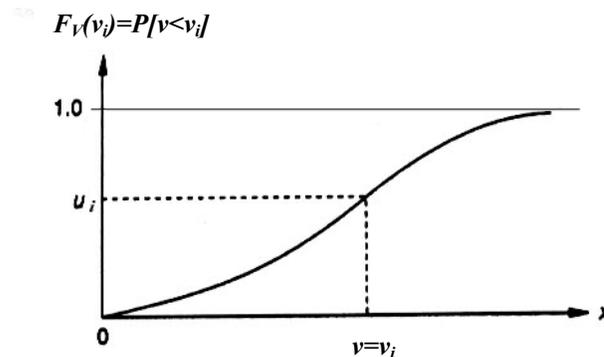


Fig. 2.3 Representación de la función de distribución de probabilidad.

### 2.4.1 Generación de variables aleatorias.

El proceso de simulación con el método de Monte Carlo involucra la generación de un vector de valores de los parámetros aleatorios del modelo, respetando sus densidades y las correlaciones existentes entre ellos, y realizar el análisis numérico del problema de interés hasta definir la tendencia central, la dispersión e incluso la densidad de probabilidad de la respuesta del modelo.

Si el vector de variables aleatorias considerado tiene componentes independientes, la simulación se realiza para cada uno de los componentes. Por otro lado, si el vector tiene componentes dependientes, es posible diagonalizar la matriz de covarianza con el método generalizado de Cholesky, para convertir los componentes en variables independientes y posteriormente generar un conjunto de variables aleatorias normales correlacionadas.

#### 2.4.1.1 Variables independientes.

Para generar variables aleatorias con una distribución de probabilidad específica, primero se genera un número aleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1 y luego se realiza una transformación conveniente para obtener la variable aleatoria correspondiente con la distribución de probabilidad específica.

Sea  $U$  una variable aleatoria uniforme con funciones de densidad y de distribución de probabilidad dadas por:

$$f_U(u) = \begin{cases} 0 & ; & u < 0 \\ 1 & ; & 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & ; & u > 1 \end{cases} \quad F_U(u) = \begin{cases} 0 & ; & u < 0 \\ u & ; & 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & ; & u > 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

Sea  $V$  una variable aleatoria con función de distribución  $F_V(v)$ . El valor de  $v$  que corresponde con un valor dado  $u$  de la distribución de probabilidad, está dado por (fig. 2.4):

$$v = F_V^{-1}(u) \quad (2.62)$$

donde;  $F_V^{-1}$ , representa la función inversa de  $F_V$ .

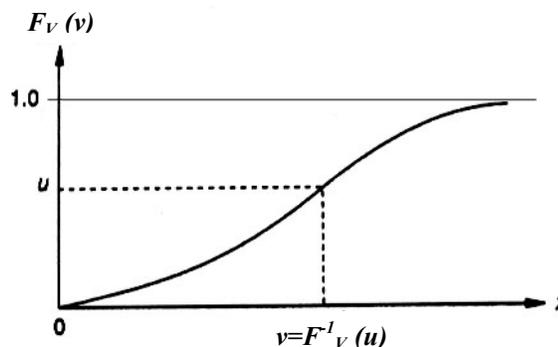


Fig. 2.4 Ejemplificación del método de la transformación inversa.

Al procedimiento para determinar números aleatorios a partir de la ec. (2.62), se le conoce como método de la “transformación inversa”; es utilizado cuando la función  $F_V$  se puede invertir de manera directa. Si la función de distribución de probabilidad no se puede invertir analíticamente, se puede recurrir al “método de composición” o a los “métodos de funciones de variables aleatorias” (Rubinstein, 1981) entre muchos otros (Rao, 1992); (Nechnech, 1994).

### 2.4.1.2 Variables normales correlacionadas.

Un caso particular de gran utilidad lo constituye la simulación de un vector de variables aleatorias normales correlacionadas. En la práctica, la adopción de un modelo Gaussiano se puede aceptar o no, dependiendo del comportamiento de las variables involucradas.

Sean  $n$  variables aleatorias correlacionadas  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  con una función de densidad de probabilidad conjunta Gaussiana. Se considera que el vector de valores medios  $\{\mu_V\}$  y la matriz de covarianza  $[T_{VV}]$ , es decir:

$$\{\mu_V\} = \begin{Bmatrix} \mu_{V_1} \\ \mu_{V_2} \\ \vdots \\ \mu_{V_n} \end{Bmatrix} \quad [T_{VV}] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

son conocidos.

Se acepta además que se desean generar  $m$  números aleatorios para cada variable aleatoria. El  $j$ -ésimo número aleatorio generado para la  $i$ -ésima variable aleatoria se define como:

$${}^{(j)}v_i \quad j = 1, 2, \dots, m ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.64)$$

El proceso para la generación de los números aleatorios comienza generando  $n$  conjuntos de números aleatorios independientes normalmente distribuidos  $w_i$ , con un vector de valores medios  $\{\mu_w\}$  y matriz de covarianza  $[T_{ww}]$  especificados. Cada conjunto tiene  $m$  números aleatorios. Estos números aleatorios se escriben como:

$${}^{(j)}w_i \quad j = 1, 2, \dots, m ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.65)$$

Las variables aleatorias correlacionadas deseadas  $v_i$ , se pueden expresar como una función lineal de las variables aleatorias independientes, es decir:

$$\begin{aligned} {}^{(j)}v_i &= a_{i1}^{(j)}w_1 + a_{i2}^{(j)}w_2 + \cdots + a_{in}^{(j)}w_n \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(j)}w_k \quad i=1,2,\dots,n ; j=1,2,\dots,m \end{aligned} \quad (2.66)$$

de donde, para cada  $j$  se tiene:

$$\left\{ {}^{(j)}v \right\}_{nx1} = \left[ {}^{(j)}a \right]_{nxn} \left\{ {}^{(j)}w \right\}_{nx1} \quad (2.67)$$

Debido a que la variable aleatoria  $v_i$  está expresada como una función lineal de  $w_i$ , es decir:

$$\{V\} = [a]\{W\} \quad (2.68)$$

entonces, las medias y desviaciones estándar de  $\{V\}$  pueden ser expresadas como:

$$\{\mu_V\} = [a]\{\mu_W\} \quad (2.69)$$

y:

$$[T_{VV}] = [a][T_{WW}][a]^T \quad (2.70)$$

donde  $\{\mu_V\}$  y  $\{\mu_W\}$  son los vectores de valores medios de  $v_i$  y  $w_i$ , mientras que  $[T_{VV}]$  y  $[T_{WW}]$ , sus matrices de covarianza, respectivamente.

Obsérvese que  $\{\mu_V\}$  y  $[T_{VV}]$  contienen las características de las variables aleatorias que se desean simular; es decir, solo se deben determinar  $[a]$ ,  $\{\mu_W\}$  y  $[T_{WW}]$  y después, cada conjunto de números aleatorios normales independientes  ${}^{(j)}w_k$  se puede transformar por medio de la ec. (2.67) en un conjunto de números aleatorios normales correlacionados  ${}^{(j)}x_i$ , para un vector de valores medios  $\{\mu_V\}$  y matriz de covarianza  $[T_{VV}]$  dados.

Las matrices  $[a]$ ,  $\{\mu_W\}$  y  $[T_{WW}]$  se pueden encontrar utilizando el método de descomposición de Cholesky, el cual muestra que una matriz simétrica  $[S]$  de orden  $nxn$  se puede descomponer en el siguiente producto de matrices:

$$[S] = [L][D][L]^T \quad (2.71)$$

donde;  $[L]$ , es una matriz triangular inferior de orden  $nxn$  con unos en su diagonal principal y  $[D]$ , es una matriz diagonal de orden  $nxn$ . Los elementos de ambas matrices están dados por (Rao, 1992):

$$\begin{aligned}
D_{11} &= S_{11} \\
L_{ii} &= 1; \quad i = 1, 2, \dots, n \\
L_{j1} &= \frac{S_{1j}}{D_{11}}; \quad j \geq 2 \\
D_{ii} &= S_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2 D_{jj}; \quad i \geq 2 \\
L_{ji} &= \frac{1}{D_{ii}} \left[ S_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} D_{kk} \right]; \quad i \geq 2; \quad j \geq i+1, +2, +3, \dots
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Comparando las *ecs.* (2.70) y (2.71) es posible establecer que

$$[S] = [T_{VV}] \tag{2.73}$$

$$[a] = [L] \tag{2.74}$$

y:

$$[T_{WW}] = [D] \tag{2.75}$$

por lo tanto, es posible definir la matriz de transformación  $[a]$ , la matriz de covarianza  $[T_{WW}]$  y el vector de valores medios como:

$$\{\mu_w\} = [a]^{-1} \{\mu_v\} \quad \text{para cada conjunto } j \tag{2.76}$$

Debido a que la matriz de covarianza es diagonal, se asegura que las variables aleatorias  $^{(j)}w_i$  no están correlacionadas. Asimismo, se puede observar que las variables aleatorias  $^{(j)}v_i$  son normalmente distribuidas debido a que se obtienen a partir de una combinación lineal de las variables aleatorias normales  $^{(j)}w_i$  (*ec.* 2.66).

La principal desventaja del método de Monte Carlo se encuentra en su lenta convergencia; sin embargo, es posible acelerar el procedimiento utilizando diferentes técnicas, como por ejemplo, el desarrollo en serie de Neumann de la matriz de rigidez.

### 2.4.2 Expansión en serie de Newman.

Para evitar ensamblar e invertir la matriz global de rigidez  $[K]$  en cada simulación, se puede recurrir a la expansión de  $[K]^{-1}$  en serie de Neumann.

Si se considera que  $[K]$  contiene los parámetros aleatorios del modelo, se puede descomponer en dos partes:

$$[K] = [K^0] + [\Delta K] \quad (2.77)$$

donde;  $[K^0]$ , es la matriz global de rigidez en la cual los parámetros aleatorios se sustituyen por sus valores esperados y  $[\Delta K]$ , representa la parte “desviadora” de los parámetros correspondientes en  $[K]$ , esto es:  $[\Delta K] = [K] - [K^0]$ . La solución para los desplazamientos  $\{\bar{U}^0\}$  que corresponde a  $[K^0]$ , se obtiene como:

$$\{\bar{U}^0\} = [K^0]^{-1} \{\bar{F}\} \quad (2.78)$$

siendo,  $\{\bar{F}\}$ , el vector de cargas.

La expansión en serie de Neumann de  $[K]^{-1}$  resulta (Yamasaki et al., 1988):

$$[K]^{-1} = ([K^0] + [\Delta K])^{-1} = ([I] - [P] + [P]^2 - [P]^3 + \dots) [K^0]^{-1} \quad (2.79)$$

donde;  $[I]$ , es la matriz identidad y  $[P] = [K^0]^{-1} [\Delta K]$ .

De la ec. (2.79), la solución para el vector  $\{\bar{U}\}$  se representa por medio de las siguientes series:

$$\begin{aligned} \{\bar{U}\} &= \{\bar{U}^0\} - [P] \{\bar{U}^0\} + [P]^2 \{\bar{U}^0\} - [P]^3 \{\bar{U}^0\} + \dots \\ \{\bar{U}\} &= \{\bar{U}^0\} - \{\bar{U}_1\} + \{\bar{U}_2\} - \{\bar{U}_3\} + \dots \end{aligned} \quad (2.80)$$

esta solución en serie es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones iterativas:

$$[K^0] \{U_i\} = [\Delta K] \{U_{i-1}\} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.81)$$

De esta manera, la matriz  $[K^0]$  se ensambla e invierte una sola vez, y por medio de las simulaciones se obtiene la parte “desviadora”  $[\Delta K]$ .

Cuando la dispersión de los parámetros aleatorios es relativamente pequeña, este método es más eficiente que el método directo de Monte Carlo; sin embargo, cuando los parámetros aleatorios presentan grandes dispersiones, se requiere retener tantos términos de la serie de la ec. (2.81) como para que se pierda la ventaja de utilizar la expansión de Neumann en  $[K]^{-1}$  (Araujo and Awruch, 1994).

Después de que se obtienen los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, las esperanzas, varianzas y covarianzas se calculan, como en el método directo de Monte Carlo, a partir de un análisis estadístico.

### 2.4.3 Pruebas de convergencia.

Existen varias técnicas para determinar el número de simulaciones necesarias para lograr una aproximación estadística determinada. Entre las más usuales, se pueden mencionar el método clásico de convergencia (intervalos de confianza de la esperanza y de la varianza de la cantidad estimada) y el uso de la desigualdad de Chebyshev.

#### 2.4.3.1 Intervalo de confianza para el valor esperado.

Sea una variable aleatoria normalmente distribuida  $V$ , con una media poblacional  $\mu_V$  desconocida y una desviación estándar poblacional  $\sigma_V$  conocida. Sea  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$ , la cual tiene una media muestral  $\bar{V}$ . El teorema del límite central permite mostrar que la media muestral  $\bar{V}$  es una variable aleatoria que tiene una distribución aproximadamente normal con media y desviación estándar dadas como:

$$\mu_{\bar{V}} = \mu_V \quad \sigma_{\bar{V}} = \frac{\sigma_V}{\sqrt{n}} \quad (2.82)$$

De esta manera, una variable aleatoria definida como  $Z = (\bar{V} - \mu_V) / (\sigma_V / \sqrt{n})$  será una variable aleatoria normal estandarizada  $N(0,1)$ ; y el intervalo de confianza para la media  $\mu_V$ , estará dado por:

$$P\left[\left(\bar{V} - z_{(\alpha/2)} \frac{\sigma_V}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu_V \leq \left(\bar{V} + z_{(\alpha/2)} \frac{\sigma_V}{\sqrt{n}}\right)\right] = 1 - \alpha \quad (2.83)$$

Donde;  $z_{(\alpha/2)}$ , es el valor de la variable  $z$ , tal que:  $1 - F_Z(z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ ; siendo,  $F_Z(\cdot)$ , la función de distribución normal estandarizada y  $1 - \alpha$ , el nivel de confianza de la estimación.

Sin embargo, el intervalo anterior tiene el inconveniente de requerir la desviación estándar de la población,  $\sigma_V$ . Si se acepta que se está muestreando de una población normal es posible introducir el estimador:

$$t = \frac{\bar{V} - \mu_V}{s_V / \sqrt{n}} \quad (2.84)$$

donde;  $t$ , es el valor de una variable aleatoria que tiene la distribución  $t$  de *Student* con  $n - 1$  grados de libertad y  $s_V$ , la desviación muestral de la variable aleatoria  $V$ . De esta manera, con  $t_{\alpha/2}$  el intervalo que define la ec. 2.83 se puede expresar ahora como:

$$P\left[\left(\bar{V} - t_{(\alpha/2)} \frac{s_V}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu_V \leq \left(\bar{V} + t_{(\alpha/2)} \frac{s_V}{\sqrt{n}}\right)\right] = 1 - \alpha \quad (2.85)$$

de donde se puede establecer la relación:

$$t_{\alpha/2} \frac{s_V}{\sqrt{n}} = \delta \quad (2.86)$$

siendo  $\delta$ , el margen de error deseado para la estimación. Por lo tanto, el número de simulaciones necesarias  $n$ , se puede obtener como:

$$n = \left( \frac{t_{(\alpha/2)} s_V}{\delta} \right)^2 \quad (2.87)$$

Es decir, el número de simulaciones necesarias se puede definir a partir de un nivel de confianza y un margen de error deseados para la estimación.

### 2.4.3.2 Desigualdad de Chebyshev.

Cuando se desconoce la forma de la función de distribución de los resultados, el número de simulaciones necesarias  $n$ , para la estimación del valor medio  $\mu_V$ , correspondientes a un margen de error  $\delta = k\sigma_V/\sqrt{n}$ , dado, se puede determinar a través de la desigualdad de Chebyshev:

$$P \left[ \bar{V} - k \frac{\sigma_V}{\sqrt{n}} \leq \mu_V \leq \bar{V} + k \frac{\sigma_V}{\sqrt{n}} \right] \leq 1 - \frac{1}{k^2} \quad (2.88)$$

donde;  $k$ , es un entero positivo que define un “*nivel de confianza*” dado como:  $1 - 1/k^2$ .

Debido a que en este caso se asume que se desconoce la forma de la función de distribución de los resultados, el número de simulaciones necesarias para un mismo nivel de confianza resulta más conservador utilizando la desigualdad de Chebyshev.

# Capítulo 3

## 3. APLICACIÓN DEL MEFE AL MODELADO DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TERRAPLÉN DE LA PRESA “AGUAMILPA”.

En este capítulo se detalla el modelado de las partes mecánica y probabilista aplicando el MEFE al caso de la construcción del terraplén de la presa “Aguamilpa”. El análisis estocástico se realiza para los desplazamientos y esfuerzos con dos de los métodos de perturbaciones y además, se efectúan simulaciones con el método directo de Monte Carlo.

### 3.1 PLANTEAMIENTO DEL ANÁLISIS.

Los análisis esfuerzo-deformación de estructuras de tierra con elementos finitos requieren el modelado geométrico y mecánico del dominio en estudio, involucrando la no-linealidad geométrica y las condiciones iniciales de esfuerzos. La parte probabilista del análisis requiere definir con toda precisión la o las incertidumbres que se involucrarán, para posteriormente modelar esas incertidumbres mediante la reflexión acerca de la dependencia de los diferentes parámetros aleatorios del modelo, con la intención de rescatar toda la información estadística posible.

#### 3.1.1 Descripción general de la presa.

La presa en el proyecto hidroeléctrico “Aguamilpa”, localizado sobre el río Santiago en el estado de Nayarit, es del tipo enrocamiento con cara de concreto. La altura en su máxima sección transversal es de 180 m. La cortina se apoya casi en su totalidad sobre ignimbrita sana y masiva. Debido a sus convenientes propiedades, durante la construcción de la cortina el aluvión del cauce del río solo se retiró en 90 m aguas abajo del plinto.

El elemento impermeable de la cortina es la cara de concreto. Su comportamiento depende en gran medida de la deformabilidad de los materiales colocados en la cortina. La cara de concreto esta compuesta por 44 losas de 15 m de ancho y un espesor,  $t$ , que varía según la expresión empírica:  $t = 0.3 + 0.0003H$ , siendo;  $H$ , la altura del embalse. En la cresta de la presa se sitúa una prolongación de la losa llamada muro parapeto, de 5 m de altura, el cual se utiliza en este tipo de presas para reducir el volumen de materiales sin disminuir la altura del bordo libre.

El plinto está formado por una losa perimetral a la cara de concreto. En el lecho del río su ancho es de 9 m, mientras que en la cresta es de 5 m.

La forma de la boquilla es de U abierta. Existen cañadas normales al río que hacen que la sección longitudinal de la presa sea asimétrica.

Para el diseño de las juntas perimetrales y verticales se realizó un seguimiento del comportamiento de ese mismo tipo de juntas en las presas más importantes en ese tiempo; además, se efectuaron ensayos con modelos construidos en laboratorio (*Montañez, 1991a*).

El terraplén fue construido básicamente con aluvi6n compactado y enrocamiento de ignimbrita. En la fig. 3.1 se muestra la zonificaci6n de los distintos materiales en el cuerpo de la presa y en la tabla 3.1 sus características y especificaciones generales de colocaci6n. La nomenclatura corresponde a la convencional en este tipo de presas (*Sherard y Cooke, 1987*).

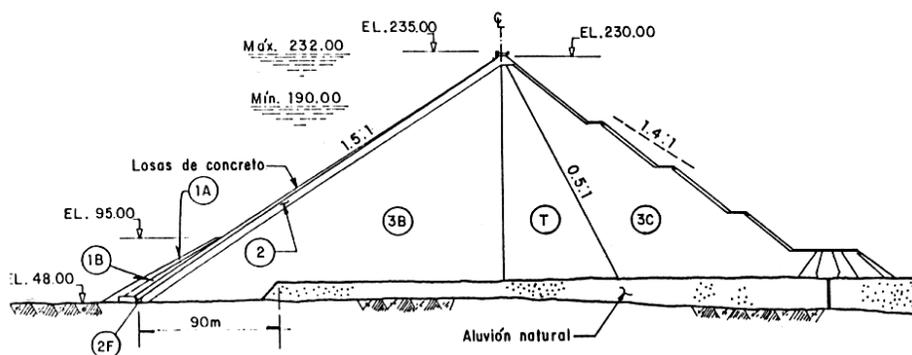


Fig. 3.1 Zonificaci6n de la presa "Aguamilpa".

### 3.1.2 Modelado geométrico y mecánico.

Para el modelado de la construcci6n de la presa se utiliz6 el programa de elementos finitos FEADAM84 (*Duncan et al., 1984*), el cual toma en cuenta la no-linealidad geométrica del problema simulando la construcci6n del terraplén por capas sucesivas (*Clough y Woodward, 1967*), y la eventual no-linealidad mecánica mediante un modelo constitutivo hiperb6lico (*Kondner, 1963*); (*Duncan et al., 1980*). Utiliza la estrategia de soluci6n incremental para aproximar la no-linealidad y la dependencia del comportamiento del suelo en el nivel de esfuerzos, dividiendo la carga en un númerop pequeño de incrementos dentro de los que se considera un comportamiento lineal. Utiliza un elemento isoparamétrico de cuatro nodos del tipo no conforme (*Wilson et al., 1973*), por lo que por condiciones de convergencia y aproximaci6n conviene que los elementos se mantengan cuadriláteros (*Bathe, 1982*).

**Tabla 3.1 Especificaciones de colocación de los materiales en la presa “Aguamilpa”.**

Zona	Material	Espesor de capa [m]	Procedimiento de compactación	$\gamma_d$ [Mg/m <sup>3</sup> ]	$e$	$D_{max}$ [m]	%F
1A	No clasificado	0.80	Sin compactar, solo bandeado	---	---	0.80	---
1B	Arena fina limosa	0.30	Sin compactar, solo bandeado	---	---	0.002	---
2F	Mezcla de grava y arena aluviales	0.30	4P de RLV de 100 kN Talud: 6P de RLV de 40 kN o PC de 130 kN*	2.17	0.22	0.038	8.0
2	Grava arenosa aluvial	0.30	4P de RLV de 100 kN Talud: 6P de RLV de 40 kN o PC de 130 kN*	2.24	0.18	0.076	4.3
3B	Aluvión	0.60	4P de RLV de 100 kN	2.22	0.18	0.40	1.4
T	3B o 3C	0.60	4P de RLV de 100 kN	2.04	0.24	0.50	2.1
3C	Enrocamiento (Ignimbrita)	1.20	4P de RLV de 100 kN	---	---	1.00	2.8

P: Pasadas.

RLV: Rodillo liso vibratorio.

PC: Placa compactadora.

\*: Fuerza de impacto.

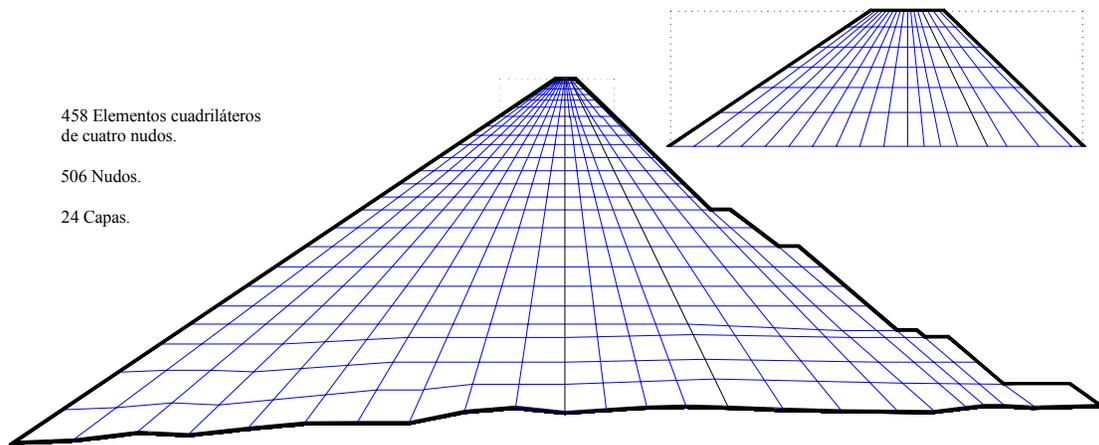
Los campos de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en cada etapa y al final de la construcción se obtienen suponiendo condiciones de deformación plana. Si se desea modelar la no-linealidad mecánica se necesitan definir por lo menos siete de los nueve parámetros del modelo hiperbólico (*Anexo 3*), mientras que en el caso lineal basta definir los parámetros  $K$  y  $K_b$ , que a su vez, están dados como:  $E = K P_a$  y  $B = K_b P_a$ ; donde,  $P_a$ , es la presión atmosférica ingresada en las mismas unidades que el módulo de deformabilidad  $E$ , y que el módulo de compresibilidad volumétrica  $B$ , definido como:  $B = E/3(1-2\nu)$ ; siendo  $\nu$ , la relación de Poisson.

De esta manera, para cada material  $i$  del terraplén, el modelo constitutivo lineal queda descrito por los parámetros  $K_i$  y  $K_{b_i}$ , dados como:

$$K_i = E/P_a \quad K_{b_i} = E/P_a 3(1-2\nu) \quad (3.1)$$

La malla de elementos finitos utilizada se muestra en la *fig. 3.2*. El dominio de la sección máxima de la cortina se dividió en 458 elementos incluidos en 24 capas, todos cuadriláteros. Se mantuvo la zonificación principal del cuerpo del terraplén (3B, T y 3C) considerando propiedades mecánicas específicas para cada material.

Durante la etapa de diseño de la presa se realizaron algunas determinaciones del comportamiento mecánico de los material aluvial 3B (*Montañez, 1991b*), y poco después de iniciada su construcción, se realizaron algunas series de ensayos de compresibilidad con muestras del enrocamiento 3C colocado en la cortina, para varias densidades y condiciones de saturación (*Montañez, Hacelas y Castro, 1993*).



**Fig. 3.2 Malla de elementos finitos.**

### 3.1.3 Modelado de las incertidumbres.

En principio, se podría establecer que la incertidumbre en la modelación del proceso constructivo de la presa se puede asociar a un doble origen: 1) la variabilidad espacial y 2) la medición y estimación de las propiedades de los materiales; sin embargo, conviene destacar lo siguiente.

#### 3.1.3.1 Variabilidad espacial.

En la etapa de proyecto de una presa de tierra no se dispone de información acerca de la variabilidad espacial de las propiedades de los materiales, con excepción de la zonificación general involucrada en el proyecto mismo. Por lo tanto, al menos en los casos de estructuras de tierra, la modelación por campos descriptivos de la variabilidad espacial es generalmente impráctica e innecesaria por las siguientes razones (*Auvinet et al., 2000*):

- La variabilidad espacial en estructuras de tierra compactadas en condiciones controladas es generalmente una fuente secundaria de incertidumbre, comparada con la carencia de datos confiables referentes a las propiedades mecánicas esperadas del suelo. Por ejemplo, la representatividad de pruebas de laboratorio (compresión triaxial, deformación plana o ensayos en odómetro) o de campo (pruebas de placa confinada) y la validez de estimaciones subjetivas o con base en correlaciones, son generalmente las principales fuentes de incertidumbre.
- El comportamiento de grandes masas de tierra es controlado por promedios espaciales de las propiedades mecánicas, que cuentan con una varianza mucho menor que los valores locales, reduciendo así la importancia de la variabilidad espacial.
- Cuando la evaluación de la incertidumbre se realiza en la etapa de diseño de una estructura de tierra, no se dispone de todos los datos acerca de la variabilidad espacial. Eventualmente se podría disponer de suficientes datos de campo como para obtener una estimación confiable de la función de auto-correlación espacial. No obstante, si la cantidad de información requerida se encuentra disponible, entonces una aproximación

probabilista acerca de la variabilidad espacial posiblemente no se justifique desde el punto de vista del ingeniero.

- La variabilidad espacial no puede ser tomada en cuenta en un análisis de deformación o esfuerzo plano, porque la variación de las propiedades mecánicas a lo largo de la dirección normal a la máxima sección transversal o longitudinal de la presa, invalidaría las hipótesis mecánicas. Por lo tanto, en rigor, cualquier análisis estocástico con elementos finitos que pretenda tomar en cuenta la variabilidad espacial debería realizarse en tres dimensiones.

### 3.1.3.2 Medición y estimación de propiedades.

Con base en lo expuesto en el inciso anterior, este trabajo involucra la incertidumbre relacionada con la medición y estimación de las propiedades mecánicas de los enrocamientos del terraplén dentro del análisis con elementos finitos. Para ejemplificar este concepto se utilizó una metodología típica de evaluación de parámetros. El modelado de las incertidumbres, necesario para la definición de los momentos estadísticos de los parámetros del modelo constitutivo, se realizó de acuerdo al siguiente razonamiento.

Los resultados de los ensayos en odómetro de 90 cm de diámetro efectuados en laboratorio con muestras del material 3B (Montañez, 1991b) y en odómetro de 30 cm de diámetro con muestras del material 3C (Montañez, Hacelas y Castro, 1993), además de los realizados con otras muestras de enrocamientos (Marsal, 1972), se utilizaron para definir los valores del módulo de compresibilidad volumétrica medio ( $\bar{m}_v$ ) de los materiales del terraplén, en el intervalo de esfuerzos de 0.1-1.0 MPa, es decir, aproximadamente antes del esfuerzo de compactación (Marsal, 1965); (Alberro, 1990). Por otro lado, los valores de la relación de Poisson  $\nu$ , se definieron teniendo como referencia los determinados “*in situ*” en los enrocamientos, mediante grupos de celdas y extensómetros durante la construcción de varias presas (Alberro et al., 1998).

Por ejemplo, el  $\bar{m}_v$  obtenido de los resultados del ensayo en odómetro con el material 3B se consideró como valor esperado de este parámetro. No existen datos estadísticos que permitan definir la dispersión. Sin embargo, considerando en la base de datos de Marsal un enrocamiento del mismo origen, con propiedades de rotura de partículas y grado de compactación en el odómetro similares (tabla 3.2), se puede concluir que este parámetro es relativamente estable para materiales con rotura de partículas y peso volumétrico semejantes. De esta manera, se consideró razonable un coeficiente de variación del orden de 0.1 para el parámetro  $\bar{m}_v$  del material 3B. En el caso del enrocamiento 3C, solo fue posible definir de los resultados de laboratorio el valor esperado del  $\bar{m}_v$ , debido a que no se determinaron las propiedades índice que permitieran un muestreo representativo de la base de datos como para definir una dispersión objetiva; por lo que solo se estableció un intervalo de variación subjetivo con base en los datos disponibles. Esta opción también fue necesaria en el caso del material T, del que no se efectuaron ensayos de laboratorio. A los parámetros de los materiales T y 3C se les asignó una incertidumbre mayor, debido a que sus valores esperados fueron estimados principalmente a partir de ensayos con otros enrocamientos y de resultados de instrumentación en otras cortinas.

**Tabla 3.2 Valores del módulo de compresibilidad volumétrica medio  $\bar{m}_v$  para los materiales 3B y 3C.**

<i>MATERIAL</i>	<i>ORIGEN</i>	<i>PROPIEDADES ÍNDICE</i>	$\bar{m}_v$ $0.1 \leq \sigma'_v \leq 1.0 \text{ MPa}$	<i>OBSERVACIONES</i>
Aluvión natural del río Santiago. Material 3B	Aluvial	Relación de vacíos $e_i=0.25$ Rotura de partículas $B_g=2\%$ Densidad de sólidos $S_s=2.61$	0.006177	Material representativo de la zona 3B.
Grava arena de “La Angostura”	Aluvial	Relación de vacíos $e_i=0.27$ Rotura de partículas $B_g=1.7\%$ Densidad de sólidos $S_s=2.65$	0.00710	Material del mismo origen y propiedades similares al de la zona 3B.
Enrocamiento de ignimbrita. Material 3C	Producto de excavaciones	----- ----- -----	0.016770	Material representativo de la zona 3C.

Un razonamiento análogo se utilizó para definir los momentos estadísticos de la relación de Poisson, pero ahora con referencia en los resultados de la tabla 3.3, bajo la hipótesis de que  $\nu \sim \bar{m}_v$ .

**Tabla 3.3 Valores de la relación de Poisson  $\nu$  determinados en forma indirecta mediante grupos de celdas y extensómetros durante la construcción de varias presas (Alberro et al., 1998).**

<i>PRESA</i>	<i>ZONA</i>	<i>ORIGEN</i>	<i>MATERIAL</i>	$\nu$	<i>OBSERVACIONES</i>
“El Caracol”	Enrocamiento compactado	Material de cantera	Areniscas sanas	0.34	Valor obtenido en grupo 9
				0.35	Valor obtenido en grupo 6
	Filtros	Material en greña	Aluvión triturado limpio	0.42	Valor obtenido en grupos 7 y 8
	Transición	Material de cantera	Areniscas sanas	0.33	Valor obtenido en grupo 3
“Peñitas”	Enrocamiento	Material producto de excavaciones	Arenisca poco cementada con notable rotura de partículas	0.16	Valor obtenido en grupo 4A
				0.21	Valor obtenido en grupos 4C y 4D
	Filtros	Aluvial	Grava y arena	0.21	Valor obtenido en grupos 3C y 3D
				0.33	Valor obtenido en grupo 3A
	Transición	Aluvial	Grava y arena	0.33	Valor obtenido en los grupos 6A, 6C y 6D

Lo expuesto en los párrafos anteriores intenta mostrar que una de las principales fuentes de incertidumbre involucradas en la evaluación de los parámetros del modelo constitutivo, se debe a los errores aleatorios y sistemáticos asociados a los ensayos, además de los que se cometen durante la estimación de las propiedades mecánicas.

Los valores esperados y coeficientes de variación finalmente considerados como representativos de cada material para este análisis se muestran en la tabla 3.4. Las incertidumbres en este caso representan un intervalo de variación posible de las propiedades de los enrocamientos. Este intervalo refleja en sí el conocimiento y la ignorancia que se tiene en el comportamiento de los enrocamientos que constituyen el terraplén, y podría variar de un observador a otro.

**Tabla 3.4 Valores esperados y coeficientes de variación del módulo de compresibilidad volumétrica  $\bar{m}_v$  y de la relación de Poisson  $\nu$ .**

<b>MATERIAL</b>	$E\{M_{oc}\} = E\{1/\bar{m}_v\}$ MPa	$C_v(M_{oc})$	$E\{\nu\}$	$C_v(\nu)$
<b>3B</b>	165	0.10	0.30	0.10
<b>T</b>	100	0.20	0.35	0.15
<b>3C</b>	60	0.20	0.35	0.17

De los valores esperados  $E\{M_{oc}\}$  y  $E\{\nu\}$  y de los coeficientes de variación  $C_v(M_{oc})$  y  $C_v(\nu)$  para los materiales 3B, T y 3C, mostrados en la tabla 3.4, se efectuó un cálculo de primeros momentos (véase el inciso 1.3.1.2) en el que se obtuvieron los valores esperados, varianzas y covarianzas de las funciones:

$$K_i = \nu_c M_{oc} / P_a \quad K_{b_i} = \nu_c M_{oc} / P_a 3(1 - 2\nu) \quad (3.2)$$

para el modelo lineal (véase el Anexo 3); donde,  $\nu_c^1$ , es una función de la relación de Poisson  $\nu$ .

Para  $P_a$  se consideró un valor constante de 0.1 MPa. En el cálculo se consideró una correlación positiva perfecta entre  $\bar{m}_v$  y  $\nu$  ( $\rho_{\bar{m}_v, \nu} = 1$ ). Obsérvese que como en las funciones  $K_i$  y  $K_{b_i}$  se hizo  $M_{oc} = 1/\bar{m}_v$ , la correlación entre  $\bar{m}_v$  y  $\nu$  en realidad se debe escribir;  $\rho_{M_{oc}, \nu} = -1$ , es decir, el cálculo de primeros momentos se realizó bajo la hipótesis de que:  $E\{\nu\} \sim 1/E\{M_{oc}\}$ .

Los resultados del análisis se muestran en la tabla 3.5. Si bien los valores indicados son sensibles a los valores esperados de  $M_{oc}$ ,  $\nu$  y sus varianzas, debido a la no-linealidad de las funciones  $K_i$  y  $K_{b_i}$ , se observa que, bajo la hipótesis de cálculo, una correlación negativa entre  $\nu$  y  $M_{oc}$  conduce a una amplificación de la incertidumbre en  $K_i$  y a una marcada reducción de

<sup>1</sup>  $\nu_c = (1 + \nu)(1 - 2\nu)/(1 - \nu)$

las incertidumbres iniciales en  $K_{b_i}$ . El coeficiente de correlación entre  $K_i$  y  $K_{b_i}$  resultó muy próximo a la unidad.

**Tabla 3.5 Valores esperados y coeficientes de variación de los parámetros del modelo lineal.**

<i>MATERIAL</i>	$E\{K\}$ (---)	$C_v(K)$	$E\{K_b\}$ (---)	$C_v(K_b)$	$\rho_{K,K_b}$
<b>3B</b>	121.70	0.185	101.10	0.035	$\cong 1.0$
<b>T</b>	60.30	0.438	66.30	0.089	$\cong 1.0$
<b>3C</b>	35.8	0.472	39.30	0.077	$\cong 1.0$

Realizando el análisis para otras condiciones de correlación se observaron las siguientes tendencias:

- Suponiendo una independencia entre  $\nu$  y  $M_{oc}$ , la incertidumbre en  $K_i$  presenta un ligero aumento, mientras que la incertidumbre inicial prácticamente se mantiene en  $K_{b_i}$ .
- Una correlación positiva perfecta entre  $\nu$  y  $M_{oc}$ , provoca una reducción en la incertidumbre en  $K_i$  y un aumento de las incertidumbres iniciales en  $K_{b_i}$ . El coeficiente de correlación entre  $K_i$  y  $K_{b_i}$  en este caso resultó muy próximo a  $-1$ .

### 3.2 ANÁLISIS ESTOCÁSTICO.

El modelado de la construcción del terraplén se realizó con el método de los elementos finitos estocásticos incorporando al programa determinista, el método de aproximación de segundos momentos (SMA), el método de estimación puntual de Rosenblueth (PEM) y el método directo de Monte Carlo (MCSM). Se aprovecharon las ventajas que presentan cada uno de los métodos probabilistas para el análisis estocástico. El método SMA se utilizó para evaluar la influencia de cada uno de los parámetros del modelo sobre los campos de desplazamientos y esfuerzos, así como la influencia de la correlación entre los parámetros aleatorios. Por otra parte, el PEM se utilizó para comparar los resultados del SMA cuando los parámetros del modelo constitutivo se consideraron independientes; mientras que el MCSM se utilizó como un marco de referencia para la validación de los resultados del SMA, cuando los parámetros aleatorios del modelo constitutivo se consideraron correlacionados.

#### 3.2.1 Aproximación de segundos momentos.

El método es principalmente ventajoso cuando los parámetros del modelo constitutivo y eventualmente las sollicitaciones, se considerarán como la principal fuente de incertidumbre. Como se mencionó en el inciso 2.1.1.1, consiste básicamente en sustituir la función implícita que

relaciona los resultados del análisis con la incertidumbre en las variables, por un desarrollo truncado en serie de Taylor alrededor del valor esperado de las mismas.

Las derivadas parciales del desarrollo en serie de Taylor se obtuvieron numéricamente con la técnica del cociente polinomial (*véase el inciso 2.1.1.2*). Esta técnica se utilizó de manera externa al programa determinista. La *fig. 3.3* presenta el diagrama de flujo para la aproximación de segundos momentos. La metodología de cálculo que se muestra se puede resumir como sigue:

- A partir de los valores esperados, varianzas y matriz de correlación de los parámetros aleatorios involucrados en el análisis, se obtienen los valores  $V_i[0]$ ,  $V_i[1]$ ,  $V_i[2]$ ,  $V_i[3]$  y  $V_i[4]$  para cada uno de los parámetros aleatorios del modelo.
- Después de modificar cada uno de los parámetros constitutivos con cada uno de los valores  $V_i$  y ejecutar el programa determinista, para cada uno de ellos por separado; es decir, manteniendo los demás valores iguales a su valor esperado, se evalúan los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_5$  que permiten finalmente el cálculo de las derivadas parciales  $\partial\{\bar{U}\}/v_i$ , las cuales a su vez, permiten aplicar las ecuaciones del método de perturbaciones.

En este trabajo se han utilizado cinco valores discretos para cada variable aleatoria, cuatro de ellos alrededor de su valor esperado, contenidos dentro de un intervalo igual a dos desviaciones estándar, y el restante igual a su valor esperado. Es decir, por lo menos en una ocasión todos los parámetros coinciden con su valor esperado. Por lo tanto, para el cálculo de la derivada parcial de alguno de los campos con respecto a uno de los parámetros del modelo, es necesario ejecutar el programa determinista cuatro veces. Siendo seis el número total de parámetros aleatorios en el modelo, el número de veces que hay que llamar al programa determinista es igual a 24 mas una ocasión con los valores esperados.

Obsérvese en la *fig. 3.3* que la matriz de covarianza se puede modificar de manera independiente al cálculo de las derivadas parciales, por lo tanto, este método permite evaluar la influencia de cada uno de los parámetros aleatorios del modelo y el cálculo de varianzas para diversas matrices de correlación en forma directa.

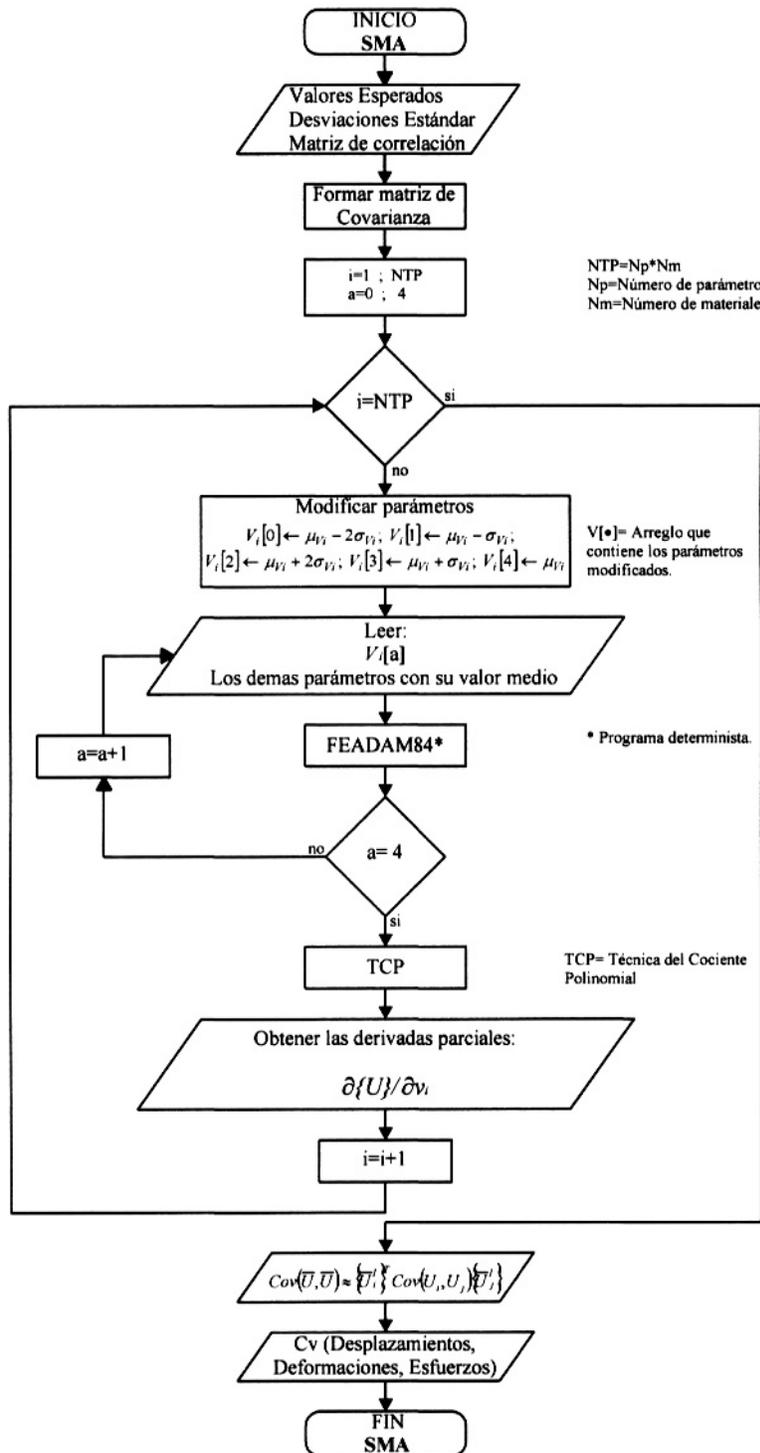


Fig. 3.3 Diagrama de flujo (SMA).

### 3.2.2 Método de estimación puntual.

El método de estimación puntual desarrollado por *Rosenblueth (1975)* consiste en aproximar una densidad de probabilidad continua con distribuciones de probabilidades asociadas a valores puntuales; de esta manera se pueden estimar los primeros momentos de una función de

variables aleatorias considerando únicamente los dos primeros momentos de cada una de ellas. La aproximación del método se puede mejorar involucrando un mayor número de valores puntuales, sin embargo, en este trabajo nos limitamos al caso de dos puntos de estimación.

La efectividad del método ha sido comprobada ampliamente en diversos problemas en los que el número de variables aleatorias es reducido y/o cuando son independientes. Sin embargo, cuando el número de variables aleatorias correlacionadas es mayor que tres, no conviene aplicar el método original con dos puntos de estimación debido a que no es posible involucrar a todas ellas en el cálculo de las “probabilidades discretas” (véase el inciso 2.1.2.2), además de que aun cuando es posible involucrar a las variables correlacionadas, se obtienen valores negativos de las probabilidades para algunas combinaciones de signos  $\pm$ , cuando el coeficiente de correlación entre las variables es mayor que 0.5. Existen diversas propuestas para resolver estas desventajas, sin embargo, en este estudio el PEM solo se ha utilizado para comparar los resultados del SMA en el caso en que las variables se consideraron independientes. Así, al mismo tiempo se verificaron los resultados del cálculo numérico de las derivadas parciales.

La *fig 3.4* muestra el diagrama de flujo que representa el proceso de cálculo del método de estimación bipuntual utilizando el programa determinista de elementos finitos. El proceso se resume como sigue:

- Se modifica cada uno de los elementos del vector de parámetros del modelo constitutivo para cada una de las  $2^N$  posibles combinaciones de signos  $\pm$ , siendo  $N$ , el número total de variables aleatorias.
- Se ejecuta el programa determinista para cada una de esas posibles combinaciones. Cuando las variables son independientes y la densidad es simétrica las probabilidades están dadas como  $P = 1/2^N$ .

Como en este trabajo se ha utilizado el modelo constitutivo lineal, queda descrito por los parámetros aleatorios  $K_i$  y  $K_{b_i}$ . Siendo tres el número de materiales con distintas propiedades aleatorias en el terraplén, el número total de posibles combinaciones de los signos  $\pm$ , utilizando dos valores puntuales, es igual a  $2^6 = 64$ . Es decir, el número de veces que se requiere ejecutar el programa determinista para definir las varianzas de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en cada nodo o elemento, es igual a 64.

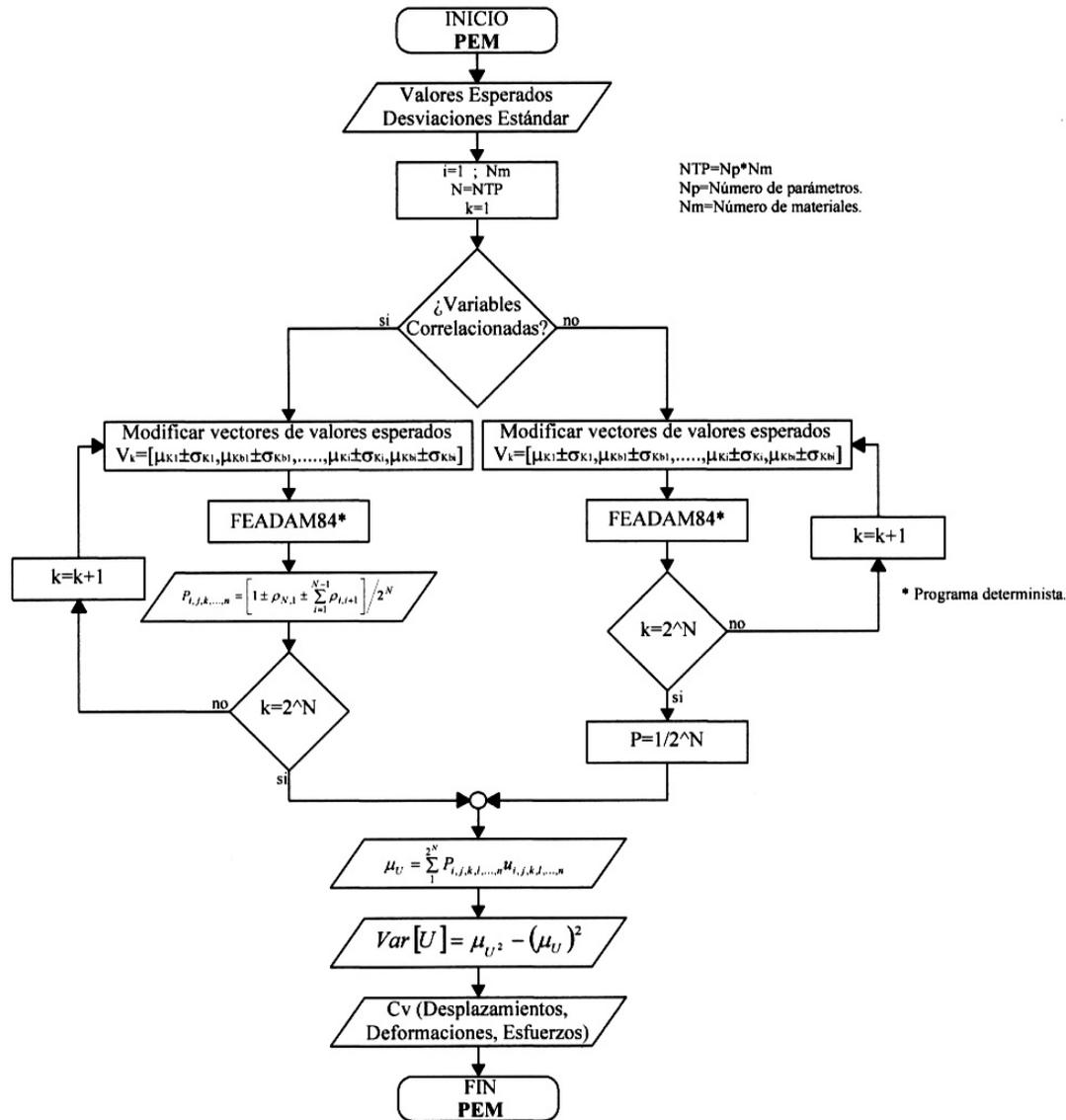


Fig. 3.4 Diagrama de flujo (PEM).

### 3.2.3 Método de Monte Carlo.

El proceso de simulación con el método de Monte Carlo involucra la generación de un vector de valores de los parámetros aleatorios del modelo, respetando sus densidades y las correlaciones existentes entre ellos, y la realización del análisis numérico del problema de interés hasta definir la tendencia central, la dispersión e incluso la densidad de probabilidad de la respuesta del modelo.

Se consideró una densidad de probabilidad *Gaussiana* para todas las variables. Se utilizó el método de *Cholesky* para diagonalizar la matriz de covarianza (véase el inciso 2.4.1.2). Se observó que eventualmente ocurrían valores negativos para dos de los parámetros al momento de

generar las variables normales correlacionadas; por lo que fue necesario utilizar una densidad de probabilidad truncada ( $\cong \pm 3\sigma$ ) para evitar estos inconvenientes.

El diagrama de flujo que representa el proceso de simulación con el método directo de Monte Carlo se ilustra en la *fig. 3.5*. El proceso de generación de las variables normales correlacionadas se realizó con un programa externo e independiente que permitió la preparación de los archivos de datos para el programa determinista. De esta manera se logró observar el comportamiento de las variables aleatorias correlacionadas generadas, antes de realizar alguna simulación.

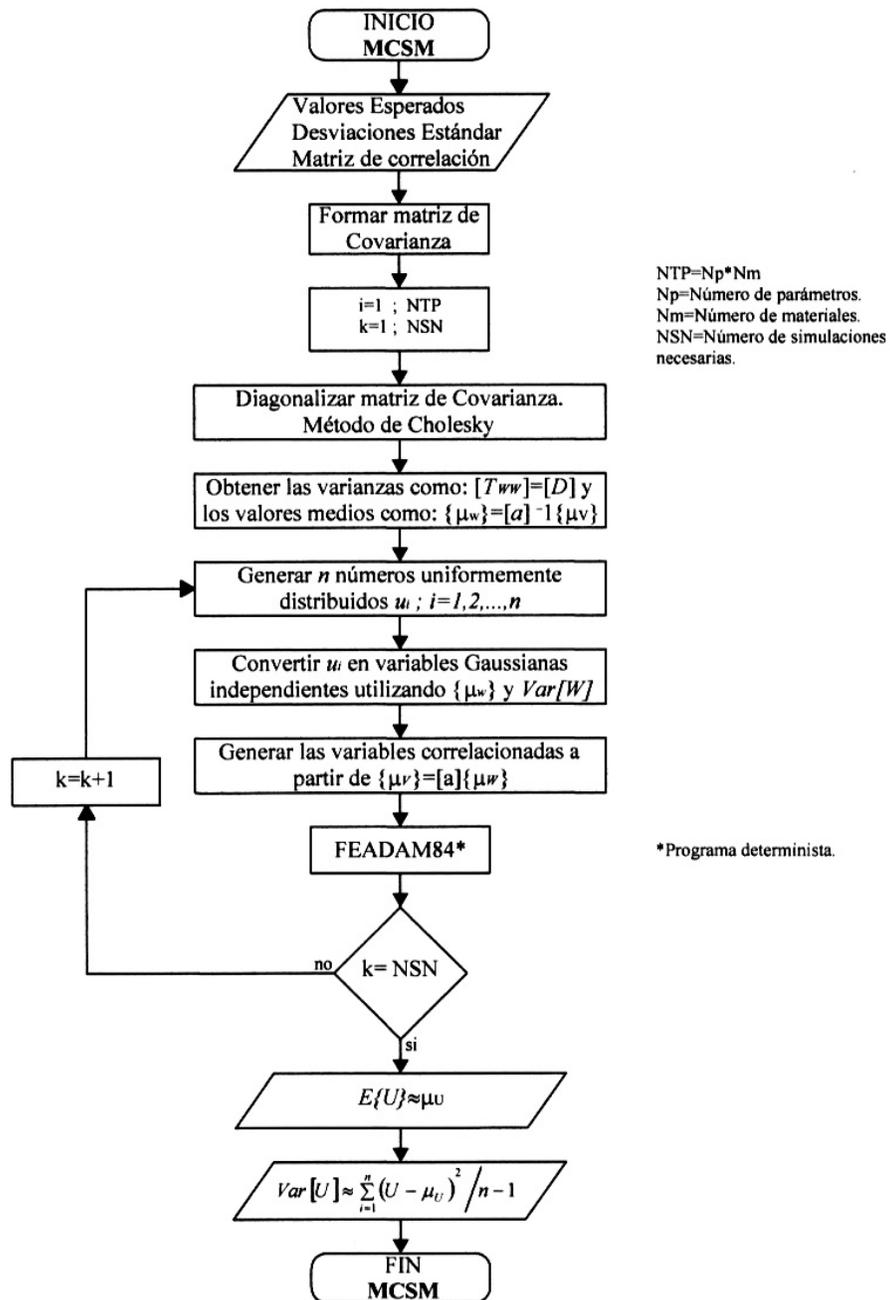


Fig. 3.5 Diagrama de flujo (MCSM).

La observación anterior permite advertir que los resultados de la simulación no tienen porque constituir una verdadera referencia objetiva que evalúe los resultados del método de segundos momentos, y en general de los métodos de perturbaciones. En efecto, mientras que el SMA no cuestiona la forma de la distribución de probabilidad de los parámetros aleatorios, en las simulaciones con el MCSM los resultados dependen en gran manera del comportamiento de las variables aleatorias correlacionadas generadas.

### 3.3 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL MEFE.

El análisis determinista del proceso constructivo del terraplén en la sección transversal máxima se complementó con el método de los elementos finitos estocásticos, investigando la influencia de ambos parámetros del modelo constitutivo de manera aislada y para diferentes condiciones de correlación. El análisis estocástico se realizó para los campos de desplazamientos y esfuerzos al final de la construcción. Además, los campos de desplazamientos verticales y totales y el de esfuerzos verticales se analizaron conforme al crecimiento del terraplén.

#### 3.3.1 Análisis de sensibilidad.

Con la intención de visualizar cuantitativamente la respuesta de los campos de desplazamientos y esfuerzos ante la incertidumbre en cada uno de los parámetros del modelo constitutivo, se realizó el análisis de sensibilidad considerando un coeficiente de variación idéntico para ambos parámetros de cada material, según se aprecia en la tabla 3.6. Este análisis se realizó con el método SMA en todos los casos.

**Tabla 3.6 Valores esperados y coeficientes de variación de los parámetros del modelo lineal para el análisis de sensibilidad.**

<i>MATERIAL</i>	$E\{K\}$ (---)	$C_v(K)$	$E\{K_b\}$ (---)	$C_v(K_b)$
<i>3B</i>	121.70	0.185	101.10	0.185
<i>T</i>	60.30	0.438	66.30	0.438
<i>3C</i>	35.80	0.472	39.30	0.472

En algunos nodos o elementos donde el valor esperado de los resultados es cero o cercano a cero, los valores del coeficiente de variación tienden localmente a infinito. En estos casos la incertidumbre se ha descrito en términos de la desviación estándar.

##### 3.3.1.1 Desplazamientos.

**Desplazamiento horizontal ( $\Delta_x$ ).** En la *fig. A1.1* se muestra la distribución del valor esperado del desplazamiento horizontal en la sección transversal máxima. El máximo valor esperado es de 0.64 m, que corresponde a  $0.0036H$  y se ubica dentro de la zona *3C* a una altura

aproximada de  $0.37H$ ; siendo  $H$ , la altura del terraplén. La principal tendencia del desplazamiento a lo largo del eje central de la cortina es hacia aguas abajo.

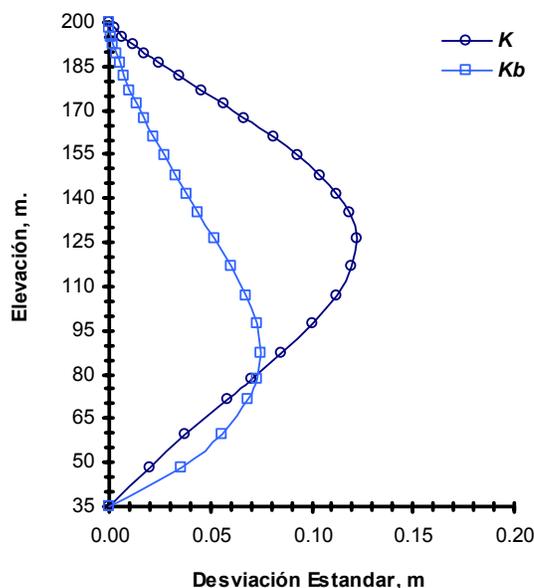
**Influencia de  $K$ .** Para investigar la sensibilidad del desplazamiento horizontal ante la incertidumbre en el parámetro  $K$ , se hace  $C_v(K_b) = 0$ , es decir, se mantiene la incertidumbre en el parámetro  $K$  de cada material mientras que los valores de  $K_b$  se consideran deterministas. La *fig. A1.2* muestra la distribución de la desviación estándar del desplazamiento horizontal. El valor máximo igual a 0.35 m ocurre en la zona 3C a una altura ligeramente mayor que  $0.37H$ . En esa zona se tiene un coeficiente de variación igual a 0.58, mientras que el coeficiente de variación del parámetro  $K$  para el material 3C es igual a 0.47; es decir, la incertidumbre inicial parece amplificarse en esa zona. La desviación estándar crece hacia el tercio inferior del talud de aguas abajo, en tanto que en la base y la cresta del terraplén es nula debido a que en esas zonas se imponen condiciones de frontera.

**Influencia de  $K_b$ .** En este caso se hace  $C_v(K) = 0$  y se mantiene la incertidumbre en  $K_b$  para cada material. La *fig. A1.3* muestra la influencia de  $K_b$  en el desplazamiento horizontal a través de la desviación estándar. A diferencia del parámetro  $K$ , la desviación estándar se concentra en la parte inferior de ambas fronteras interiores con distintas propiedades mecánicas. Sin embargo, la desviación estándar máxima, que ocurre en la frontera entre los materiales  $T$  y 3C, es de 0.13 m, equivalente a un  $C_v = 0.29$ . Por lo tanto, el desplazamiento horizontal es menos sensible a la incertidumbre en  $K_b$ .

**Desplazamiento vertical ( $\Delta_v$ ).** El valor esperado del desplazamiento vertical se presenta en la *fig. A1.4*, donde se puede apreciar que el máximo ocurre en un área que comprende a los materiales  $T$  y 3C, a una altura de  $0.65H$ . El valor esperado del desplazamiento vertical máximo es de aproximadamente 1.0 m, que corresponde a  $0.006H$ .

**Influencia de  $K$ .** Procediendo de la manera señalada en el punto anterior es posible verificar la participación de la incertidumbre en  $K$  sobre el desplazamiento vertical (*fig. A1.5*). La desviación estándar máxima es de 0.18 m y ocurre en las zonas  $T$  y 3C. El coeficiente de variación en esa zona es igual a 0.20, mientras que el  $C_v(K)$  de los materiales  $T$  y 3C es de aprox. 0.40; por lo tanto, se presenta un efecto de *compensación estadística*. La distribución de la incertidumbre corresponde aproximadamente con la distribución del valor esperado.

**Influencia de  $K_b$ .** La *fig. A1.6* muestra la distribución de la desviación estándar del desplazamiento vertical dada la incertidumbre en  $K_b$ . En este caso tiende a concentrarse en el tercio inferior de la zona central. El máximo resulta de 0.12 m. En esa misma zona el coeficiente de variación correspondiente es de 0.15. Comparando este valor con el encontrado en la influencia de  $K$  se puede concluir que la influencia de ambos parámetros es prácticamente idéntica. Sin embargo, como se puede apreciar en la *fig. 3.6*, la participación de la incertidumbre en  $K_b$  llega a ser más importante en la parte inferior de la cortina hasta aprox. un tercio de la altura. Esto se podría explicar teniendo en cuenta que en esa zona ocurre un mayor esfuerzo octaédrico y además, que el asentamiento tiende a crecer hacia el centro del terraplén.



**Fig. 3.6 Influencia de los parámetros del modelo en la desviación estándar del desplazamiento vertical al centro del terraplén (m).**

### 3.3.1.2 Esfuerzos.

**Esfuerzo horizontal ( $\sigma_x$ ).** El valor esperado del esfuerzo horizontal se muestra en la *fig. A1.7*. Su distribución corresponde aproximadamente con la de una sección simétrica. El valor esperado máximo se tiene en la zona central inferior (1.2 MPa).

**Influencia de K.** La desviación estándar máxima ante la incertidumbre en K es igual a 0.22 MPa. El coeficiente de variación en esa zona resulta aprox. 0.18, mientras que cerca de la cresta sobre el talud de aguas arriba, es decir, donde el valor esperado del esfuerzo horizontal es pequeño, vale 0.55. En el entorno del contacto entre los materiales T y 3C, donde existe una concentración de esfuerzos cortantes debido a la diferencia en compresibilidad de ambos materiales, se alcanza un  $C_v = 0.25$ , mientras que en amplias zonas de ambos respaldos el  $C_v$  varía entre 0.10 y 0.20 (*véanse las figs. A1.7 y A1.8*).

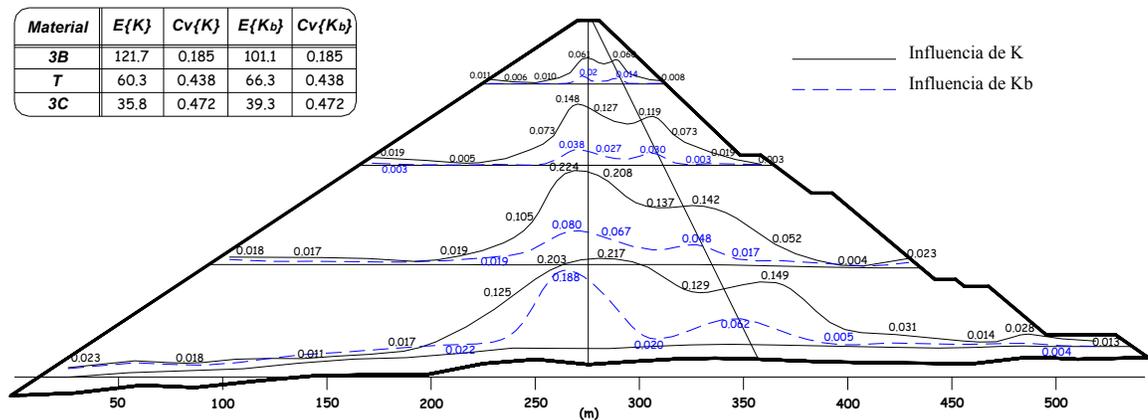
**Influencia de Kb.** En este caso la desviación estándar máxima es igual a 0.30 MPa y el coeficiente de variación correspondiente en esa zona es 0.25. Se ubica en la parte central inferior de la zona T. Como se puede observar en la *fig. A1.9*, en una zona muy amplia de la parte superior del cuerpo del terraplén la desviación estándar del esfuerzo horizontal oscila entre 0.0 y 0.02. Por lo tanto, la influencia del parámetro  $K_b$  se aprecia principalmente en las zonas donde existe un mayor esfuerzo octaédrico.

**Esfuerzo vertical ( $\sigma_y$ ).** La *fig. A1.10* muestra que el valor esperado del esfuerzo vertical es muy sensible a la variación en las propiedades mecánicas de los distintos materiales. En un plano horizontal cercano al fondo de la presa, varía de 3.0 MPa en la zona 3B a 1.8 MPa en la zona 3C pasando por 2.2 MPa en la zona T; es decir, se presenta una transferencia de esfuerzos de las zonas más compresibles a las menos compresibles.

**Influencia de  $K$ .** Las zonas más sensibles a la variación de  $K$  se localizan alrededor de las fronteras materiales interiores (fig. A1.11), donde ocurre una concentración de los esfuerzos cortantes. La desviación estándar máxima se presenta en el contacto  $3B-T$  con un valor de 0.22 MPa. El coeficiente de variación correspondiente equivale al máximo que ocurre dentro del cuerpo de la cortina y es igual a 0.13. El  $C_v(K)$  en el material  $3B$  es de 0.19 y en el material  $T$  es de 0.44; por tanto, se presenta de nueva cuenta un efecto de *compensación estadística* en la respuesta del esfuerzo vertical ante la incertidumbre en el parámetro  $K$ .

**Influencia de  $K_b$ .** Mientras que las zonas más sensibles a la variación de  $K$  se ubican a lo largo de las fronteras entre materiales con distintas propiedades mecánicas, la desviación estándar del esfuerzo vertical ante la incertidumbre en  $K_b$  se concentra en la parte inferior del contacto entre los materiales  $3B-T$ , donde el esfuerzo octaédrico es mayor, alcanzando un valor máximo de 0.17 MPa (fig. A1.12). De esta manera, los esfuerzos verticales son menos sensibles a las variaciones en el parámetro  $K_b$ . En las fronteras donde el esfuerzo vertical es cero la incertidumbre es nula.

La fig. 3.7 presenta los valores de la desviación estándar calculados en distintos planos horizontales, de acuerdo a los valores de dispersión mostrados en el recuadro superior izquierdo. Es evidente el contraste en los valores de la desviación estándar en la zona de respaldos con respecto a las zonas de interacción en ambas influencias. Solo en el contacto inferior entre los materiales  $3B$  y  $T$  y fuera de las zonas de interacción, los valores de las influencias de  $K$  y  $K_b$  son casi idénticas.



**Fig. 3.7** Influencia de los parámetros del modelo en la desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa).

**Esfuerzo cortante ( $\tau_{XY}$ ).** El valor esperado del esfuerzo cortante se presenta en la fig. A1.13. El máximo se alcanza cerca del pie del talud de aguas arriba (0.35 MPa). A simple vista la distribución de los esfuerzos cortantes sugieren la posibilidad de que los círculos potenciales de deslizamiento se presenten localmente, cercanos al pie del talud en ambos lados del terraplén. En las figs. A1.14 y A1.15, se muestran los valores de la desviación estándar dada la incertidumbre en  $K$  y  $K_b$ , respectivamente.

**Influencia de  $K$ .** La influencia de la incertidumbre en  $K$  sobre el esfuerzo cortante se manifiesta de manera más pronunciada a lo largo de las fronteras materiales interiores, llegando a un valor máximo de la desviación estándar igual a 0.14 MPa en la parte inferior del contacto  $T-3C$ . Es decir, la distribución de la desviación estándar sigue aprox. la concentración de esfuerzos cortantes.

**Influencia de  $K_b$ .** La distribución de la desviación estándar debida a la incertidumbre en el parámetro  $K_b$  tiende a concentrarse en las partes inferiores de los contactos materiales, alcanzando un valor máximo de 0.12 MPa. En este caso se presenta una zona muy amplia en la parte superior de la cortina con una incertidumbre muy pequeña ( $0.0 \leq C_v \leq 0.02$ ), la cual está relacionada con esfuerzos cortantes pequeños y bajos niveles de esfuerzo octaédrico.

**Relación de esfuerzos principales ( $\sigma_1/\sigma_3$ ).** La distribución del valor esperado de la relación de esfuerzos principales se ilustra en la *fig. A1.16*. Los valores más elevados se presentan cerca de la cresta y cerca de las bermas del talud de aguas abajo. En la zona  $3B$  donde se tienen los efectos más importantes de interacción se alcanzan valores de hasta 6.5. Este valor es muy próximo al determinado en ensayos triaxiales en muestras con granulometría trasladada y ajustada al contenido de la fracción fina del material  $3B$  (Montañez, 1991b).

**Influencia de  $K$ .** Aunque en general la distribución del coeficiente de variación es un tanto errática, se puede distinguir que la magnitud más elevada ocurre en la parte baja de las zonas  $T$  y  $3C$ , alcanzando un valor de 0.21. En la zona  $3B$ , donde ocurren los valores esperados más grandes, el coeficiente de variación oscila entre 0.10 y 0.19. La incertidumbre crece de los taludes exteriores hacia el centro y del centro hacia la parte inferior del terraplén (*fig. A1.17*); es decir, existe la tendencia a concentrarse a lo largo de las fronteras materiales interiores donde se tienen concentraciones de esfuerzos cortantes.

**Influencia de  $K_b$ .** Las zonas más sensibles a la dispersión de  $K_b$  se localizan en la parte inferior del terraplén, alcanzando un coeficiente de variación máximo de apenas 0.045. En amplias zonas de la cortina el coeficiente de variación pasa de 0.01 a 0.03, manifestando de esta manera una aparente insensibilidad de la relación de esfuerzos principales a la variación de  $K_b$  (*fig. A1.18*).

### 3.3.1.3 Resumen de resultados.

Para comparar la participación de los parámetros del modelo en la incertidumbre de cada uno de los campos analizados, la tabla 3.7 resume los valores más representativos del coeficiente de variación de la respuesta, junto con los valores de las incertidumbres iniciales. Los valores mostrados en los campos de desplazamientos y esfuerzos fueron calculados localmente, en donde ocurrió la desviación estándar máxima.

De los resultados encontrados en el análisis de sensibilidad se desprenden las siguientes observaciones:

- Con excepción de los desplazamientos horizontales y de los esfuerzos cortantes en los que se presentan valores esperados muy próximos a cero dentro del cuerpo del terraplén, ocurre un acentuado efecto de reducción de varianza en todos los campos analizados.

- En los campos de desplazamientos la influencia de la dispersión en el parámetro  $K_b$  no es del todo despreciable.
- Las variaciones en  $K_b$  tienen una influencia muy pequeña en los campos de esfuerzos verticales y en el de la relación de esfuerzos principales, en tanto que su participación en los esfuerzos horizontales y en los cortantes es semejante a la del parámetro  $K$ .
- En los campos de desplazamientos, la influencia del parámetro  $K$  se distribuye aproximadamente conforme a la distribución de los valores esperados, mientras que en los campos de esfuerzos tiende a manifestarse a lo largo de las fronteras interiores con distintas propiedades mecánicas, donde la concentración de esfuerzos cortantes es mayor.
- En todos los campos de desplazamientos y de esfuerzos analizados, la influencia del parámetro  $K_b$  tiende a concentrarse hacia las partes bajas del terraplén, donde el esfuerzo octaédrico es mayor.

**Tabla 3.7 Resumen de las influencias de los parámetros en los distintos campos analizados.**

<i>Incertidumbres iniciales</i>			<i>CAMPO</i>	<i>Influencia de K</i>	<i>Influencia de <math>K_b</math></i>
<i>MATERIAL</i>	$C_v(K)$	$C_v(K_b)$			
<b>3B</b>	0.185	0.185	$\Delta_X$	$C_v \approx 0.58$	$C_v \approx 0.29$
			$\Delta_Y$	$C_v \approx 0.20$	$C_v \approx 0.15$
<b>T</b>	0.438	0.438	$\sigma_X$	$C_v = 0.40$	$C_v = 0.35$
			$\sigma_Y$	$C_v = 0.13$	$C_v = 0.04$
<b>3C</b>	0.472	0.472	$\tau_{XY}$	$C_v \approx 0.62$	$C_v \approx 0.40$
			$\sigma_1/\sigma_3$	$C_v = 0.25$	$C_v = 0.07$

### 3.3.2 Influencia de la correlación.

Una vez identificada la influencia de cada uno de los parámetros de manera aislada, se investigó su influencia conjunta para los siguientes tres casos de correlación:

- Caso 1. Se supuso que todos los parámetros materiales eran independientes. En este caso el análisis se realizó con el SMA y con el PEM.
- Caso 2. Se consideró una correlación positiva perfecta entre los parámetros  $K_i$  y  $K_{b_i}$  de los tres materiales. Los resultados del análisis con el SMA se compararon con los del MCSM.

- Caso 3. Se consideró una correlación positiva perfecta entre los parámetros de los materiales  $T$  y  $3C$ . El análisis estocástico se realizó con el SMA.

En todos los casos se analizó la sección transversal máxima. Los valores esperados y coeficientes de variación utilizados en el análisis fueron los que se muestran en la tabla 3.8 (véase el inciso 3.1.3.2).

**Tabla 3.8 Valores esperados y coeficientes de variación de los parámetros del modelo lineal para el análisis de la influencia de la correlación.**

<i>MATERIAL</i>	$E\{K\}$ (---)	$C_v(K)$	$E\{K_b\}$ (---)	$C_v(K_b)$
<b>3B</b>	121.70	0.185	101.10	0.035
<b>T</b>	60.30	0.438	66.30	0.089
<b>3C</b>	35.80	0.472	39.30	0.077

En las zonas que presentan un cambio de signo en el valor esperado se tienen magnitudes nulas o muy próximas a cero; por lo que en esos casos la incertidumbre se ha descrito en términos de la desviación estándar.

### 3.3.2.1 Desplazamientos.

**Desplazamiento horizontal ( $\Delta_X$ ).** Con la intención de resaltar las diferencias en cuanto a la distribución y magnitud de la desviación estándar en la máxima sección transversal del terraplén, las *figs. A1.19, A1.20 y A1.21* presentan los resultados para cada uno de los tres casos analizados, en el mismo orden señalado anteriormente.

La desviación estándar máxima se tiene en el caso 3, con un valor de 0.40 m. Se localiza en el tercio medio de la zona  $3C$ . En los casos 1 y 2 las desviaciones máximas son iguales a 0.35 m y 0.32 m, respectivamente. Su distribución en los tres casos es muy semejante; nula cerca de la base y la cresta (donde se impusieron las condiciones de frontera) y apenas de 0.05 m en una zona muy amplia del talud de aguas arriba (material  $3B$ ), donde los parámetros de dispersión iniciales son pequeños.

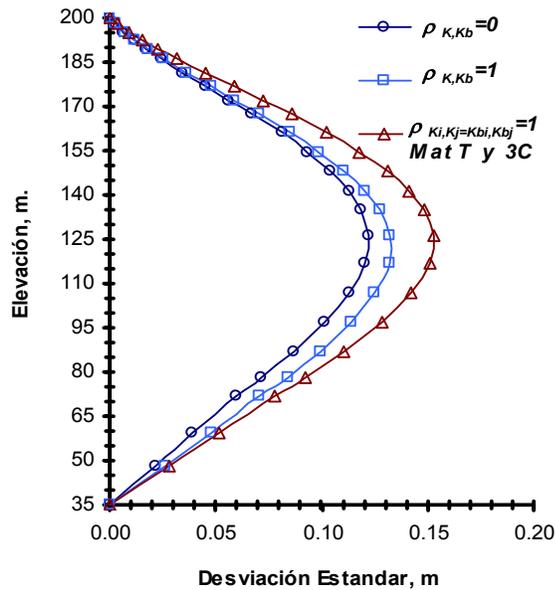
La distribución de la desviación estándar bajo las condiciones de análisis indicadas en el caso 1, se muestra en las *figs. A1.22a y A1.22b*, calculada con el SMA y con el PEM, respectivamente. Como se puede apreciar los resultados coinciden en distribución, sin embargo, el valor máximo obtenido con el PEM es de 0.50 m, es decir, 0.15 m mayor que el obtenido con el SMA.

Las *figs. A1.23a y A1.23b* presentan los resultados del SMA y los del MCSM, respectivamente, bajo las condiciones de análisis del caso 2. En la *fig. A1.24* se ilustra el criterio de convergencia utilizado en las simulaciones. El margen de error en la estimación de la esperanza del desplazamiento horizontal resulta de aprox. 0.02 m con un 99% de confianza. Del análisis comparativo se concluye que la distribución de la desviación estándar presenta una

imagen casi idéntica; sin embargo, los resultados con el SMA tienden a ser menores. Con el MCSM se tiene una desviación estándar máxima de 0.45 m; es decir, 0.13 m mayor que la calculada con el SMA.

**Desplazamiento vertical ( $\Delta_y$ ).** La desviación estándar tiende a concentrarse en las zonas  $T$  y  $3C$ , según se puede apreciar en las *figs. A1.25, A1.26 y A1.27*, calculada para cada uno de los tres casos de análisis con el SMA. La máxima incertidumbre se presenta en el caso 3 (materiales  $T$  y  $3C$  correlacionados), con un valor máximo de 0.26 m. Obsérvese que su distribución sigue aproximadamente la del valor esperado.

En la *fig. 3.8* se presentan los valores de la desviación estándar al final de la construcción a lo largo del eje central del terraplén, para cada uno de los tres casos de análisis. Se puede apreciar que la desviación estándar aumenta conforme aumenta el número de parámetros correlacionados. De esta manera, conforme aumenta el número de parámetros correlacionados en el desplazamiento vertical disminuye el efecto de reducción de varianza.



**Fig. 3.8 Influencia de la correlación en la desviación estándar del desplazamiento vertical al centro del terraplén (m).**

El análisis bajo las condiciones del caso 1 se realizó además con el PEM. Los resultados se comparan en las *figs. A1.28a* (SMA) y *A1.28b* (PEM). La distribución de la desviación estándar en ambos métodos es prácticamente idéntica. Las magnitudes presentan una ligera diferencia. El valor máximo obtenido con el SMA es de 0.18 m, mientras que con el PEM resulta de 0.22 m. La *fig. 3.9* muestra las diferencias entre los resultados de ambos métodos en el centro del terraplén. En general, los resultados con el PEM tiende a ser ligeramente superiores a los del SMA pero coinciden ampliamente en cuanto a su distribución, es decir, siguiendo aproximadamente la distribución del valor esperado.

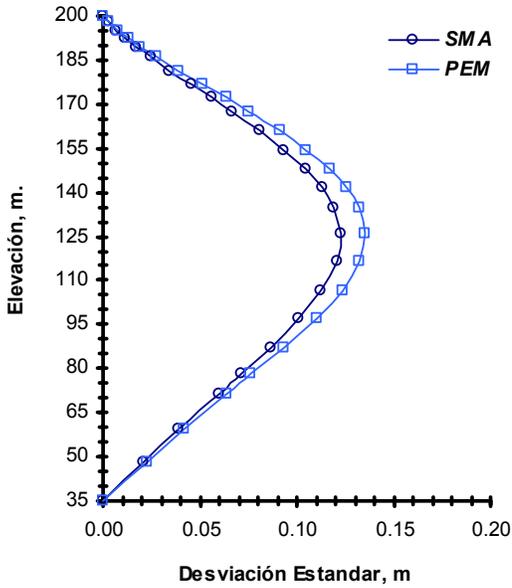


Fig. 3.9 Desviación estándar del desplazamiento vertical al centro del terraplén (m). Comparación entre (SMA) y (PEM).

Siguiendo el mismo esquema comparativo, los resultados del SMA bajo las condiciones de correlación dadas en el caso 2 se compararon con los del MCSM. El comportamiento del coeficiente de variación del desplazamiento vertical en el nodo 193 en función del número de simulaciones, se presenta en la *fig. 3.10*. En este caso, con un 99% de confianza el margen de error en la estimación de la esperanza del desplazamiento vertical es de aprox. 0.015 m. Los resultados de la desviación estándar de ambos métodos se ilustran en las *figs. A1.29a* y *A1.29b*. Como se puede apreciar, la distribución de la incertidumbre coincide ampliamente, sin embargo, mientras que con el MCSM se tiene una desviación máxima de 0.34 m, la correspondiente al SMA es de 0.20 m. En la *fig. 3.11* se pueden apreciar las diferencias encontradas al centro del terraplén. En general el SMA parece por tanto, subestimar la incertidumbre en ambos campos de desplazamientos.

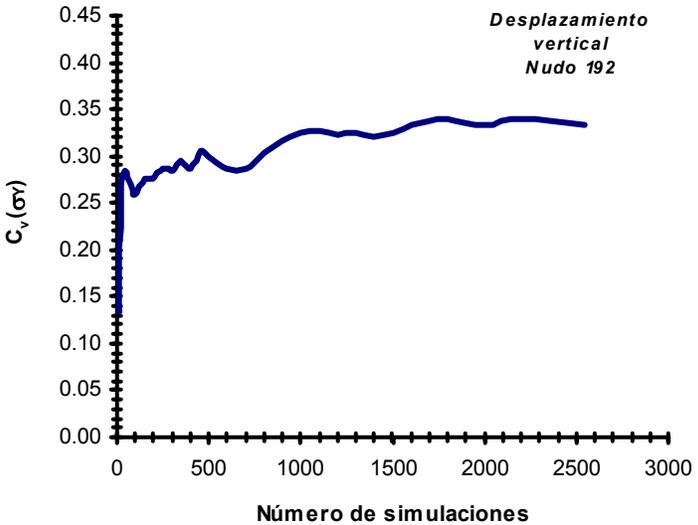
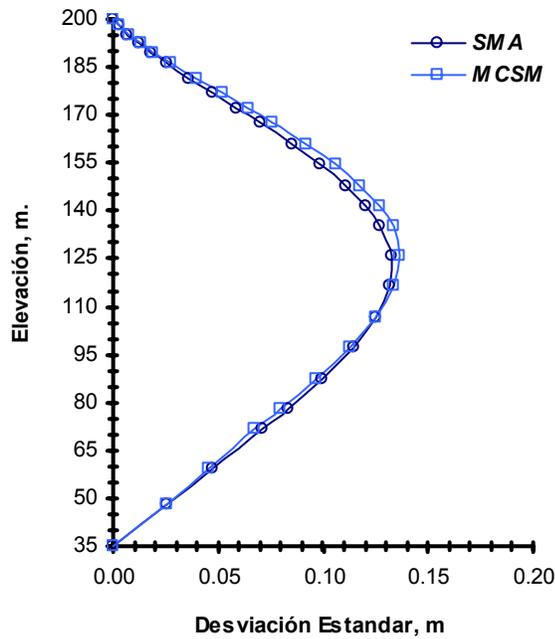


Fig. 3.10 Convergencia del desplazamiento vertical.



**Fig 3.11** Desviación estándar del desplazamiento vertical al centro del terraplén (m). Comparación entre (SMA) y (MCSM).

En la tabla 3.9 se resumen los resultados del análisis estocástico del desplazamiento vertical. Se muestran los valores esperados máximos y sus correspondientes coeficientes de variación para los tres casos analizados. Si bien los valores máximos del coeficiente de variación son ligeramente superiores a los mostrados, se puede apreciar un efecto de reducción de varianza. La dispersión más elevada corresponde al caso 3, en el que se consideró una correlación positiva perfecta entre los parámetros de los materiales  $T$  y  $3C$ .

**Tabla 3.9** Valores esperados máximos del desplazamiento vertical y su coeficiente de variación.

MÉTODO	$E\{\Delta_Y\}$ (m)	$C_v(\Delta_Y)$		
		$\rho_{K_i, Kb_i} = 0$	$\rho_{K_i, Kb_i} = 1$	$\rho_{T, 3C} = 1$
<i>SMA</i>	-1.00	-0.18	-0.21	-0.26
<i>PEM</i>	-1.10	-0.20	-----	-----
<i>MCSM</i>	-1.06	-----	-0.28	-----

Para explorar el comportamiento del coeficiente de variación en los resultados del desplazamiento vertical conforme al avance de la construcción, se calculó la incertidumbre en todos los nodos situados a lo largo de un plano horizontal. El análisis se realizó a cada dos capas con el SMA. La *fig. 3.12* muestra los resultados para uno de los planos analizados por debajo de la capa 10, aproximadamente al nivel en donde ocurre el asentamiento máximo. Los cálculos se efectuaron para las tres condiciones de correlación mencionadas anteriormente.

Cada una de las curvas en la *fig. 3.12* representa un incremento de carga. La configuración del coeficiente de variación sigue aproximadamente la del asentamiento. La evolución de la incertidumbre en el material *3B* es distinta a la de los materiales *T* y *3C*. Dentro del material *3B* tiende a aumentar hacia el final de la construcción conforme a los casos de correlación 1 a 3; mientras que en los materiales *T* y *3C* se observa que la incertidumbre tiende a disminuir hacia el final de la construcción independientemente de la hipótesis de correlación. La explicación de estas tendencias se podría encontrar en el gradiente del asentamiento; es decir, el coeficiente de variación evoluciona de manera distinta debido a que los valores esperados aumentan con mayor rapidez en los materiales más compresibles. Estas tendencias se pueden apreciar con mayor claridad en los nodos extremos de ambos taludes. Bajo la hipótesis de correlación del caso 3 en la que los parámetros de los materiales *T* y *3C* se consideraron perfectamente correlacionados, se aprecia un comportamiento homogéneo del coeficiente de variación en esa zona.

Por otro lado, el coeficiente de correlación entre el desplazamiento vertical máximo para una etapa específica y el resto de los nodos, se calculó para tres etapas de construcción, es decir, para los dos primeros tercios de la altura del terraplén y al final de la construcción. En la *fig. 3.13* se presentan los resultados obtenidos bajo la hipótesis de correlación indicada en el caso 2. Los resultados encontrados para las otras condiciones se muestran en las *figs. A1.30* y *A1.31*.

Cuando el terraplén alcanza el primer tercio de su altura final, el asentamiento máximo ocurre dentro de la zona *3C* (punto *M* de la *fig. 3.13a*). Mientras que en prácticamente toda la zona *3B* y en parte de la *T* se tiene una correlación nula, solo en la zona *3C* se concentran los valores del coeficiente de correlación. Esto indica que el asentamiento máximo se debe prácticamente a la contribución de la zona *3C*.

Los valores del coeficiente de correlación cuando el terraplén alcanza el segundo tercio de su altura final se presentan en la *fig. 3.13b*. En esta etapa el asentamiento máximo ocurre en la zona *T* (punto *M*); a diferencia de la etapa anterior, se presentan valores del coeficiente de correlación que varían desde cero hasta 0.90 en una zona muy amplia del talud de aguas arriba, además de que cerca de ambos taludes exteriores se tiene una correlación negativa. Esto indica que mientras que el asentamiento en la parte central del terraplén tiende a crecer, el asentamiento cerca de los taludes tiende a disminuir.

Al final de la construcción (*fig. 3.13c*) el asentamiento máximo ocurre en la zona *T*. Obsérvese que para esta etapa constructiva la correlación entre el asentamiento máximo y el asentamiento en la parte superior del talud de aguas arriba, presenta valores que varían desde cero hasta 0.80; en la parte restante del talud de aguas arriba (parte inferior), la correlación entre el asentamiento máximo y el asentamiento en esa zona presenta valores negativos. Esto parece indicar que el asentamiento máximo está relacionado con un asentamiento diferencial a lo largo del talud de aguas arriba; donde ocurre un cambio de signo en el valor del coeficiente de correlación.

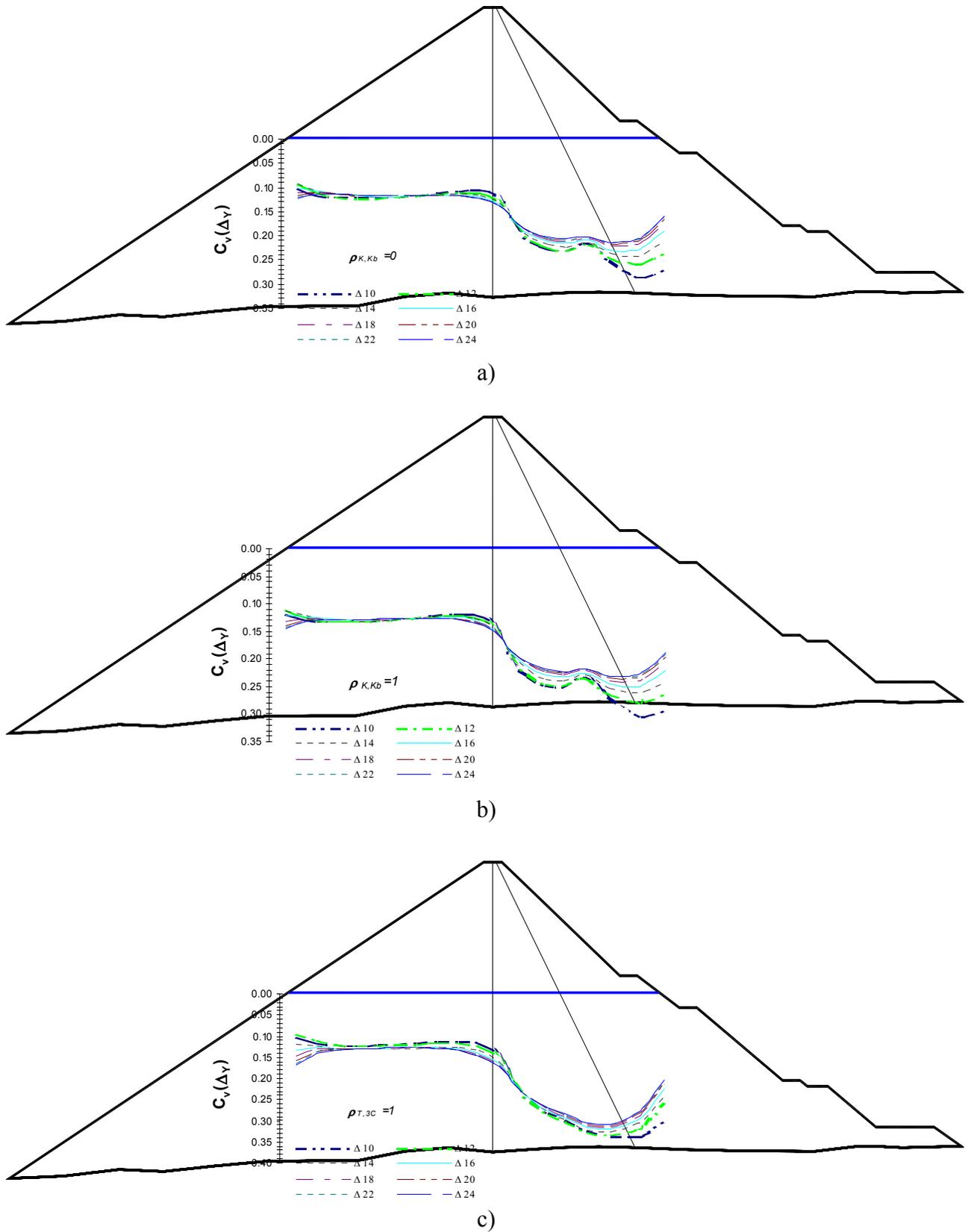
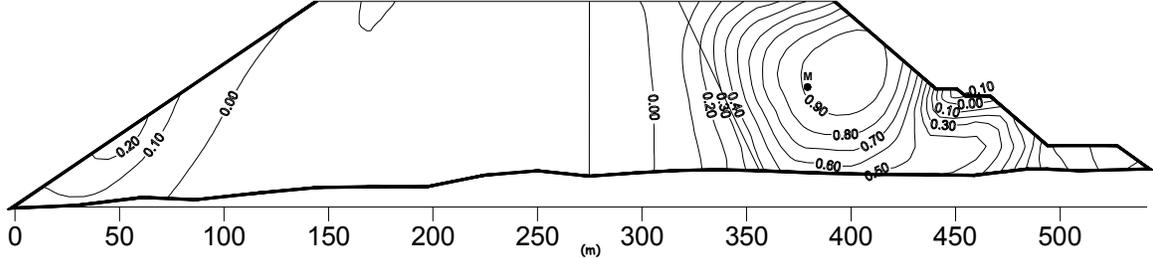


Fig. 3.12 Evolución del coeficiente de variación del desplazamiento vertical conforme al avance de la construcción en los nodos comprendidos en una capa horizontal: a) Materiales independientes; b) Correlación entre los  $K_i$  y  $K_{bi}$ ; c) Correlación entre los materiales  $T$  y  $3C$ .

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1

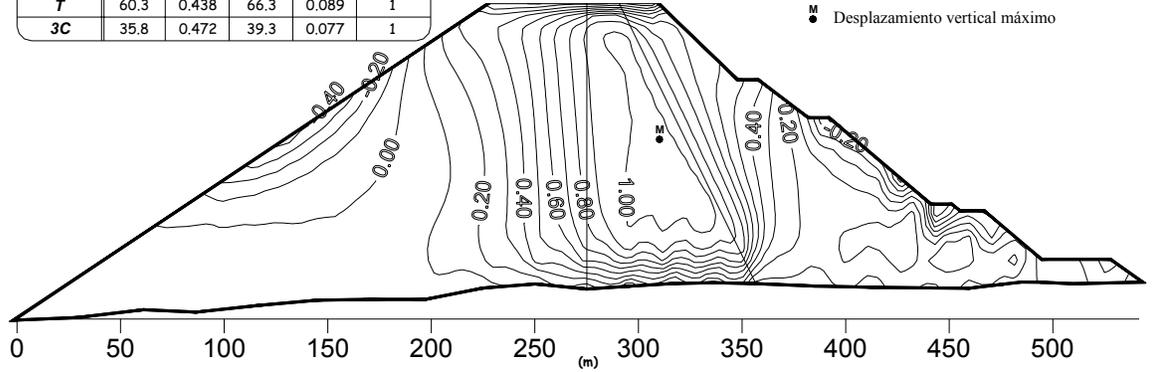
M ● Desplazamiento vertical máximo



a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1

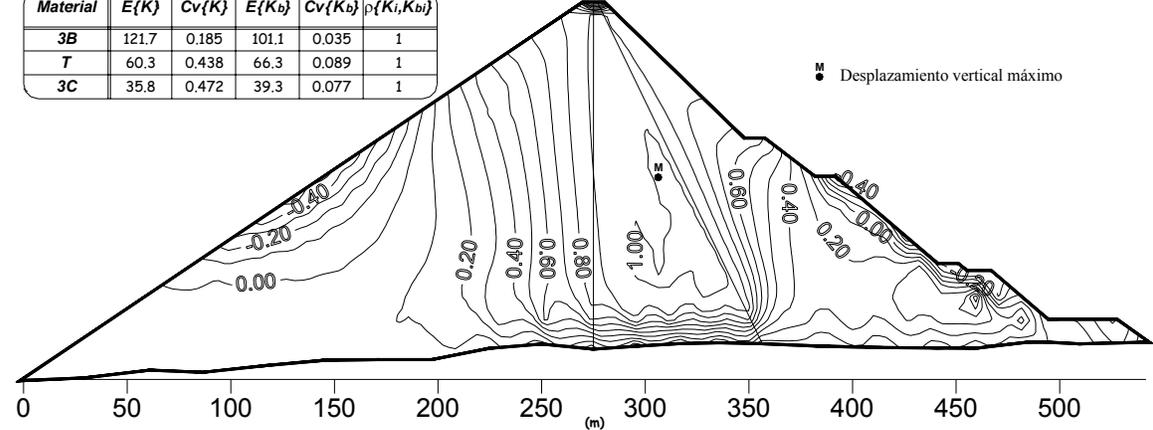
M ● Desplazamiento vertical máximo



b)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1

M ● Desplazamiento vertical máximo

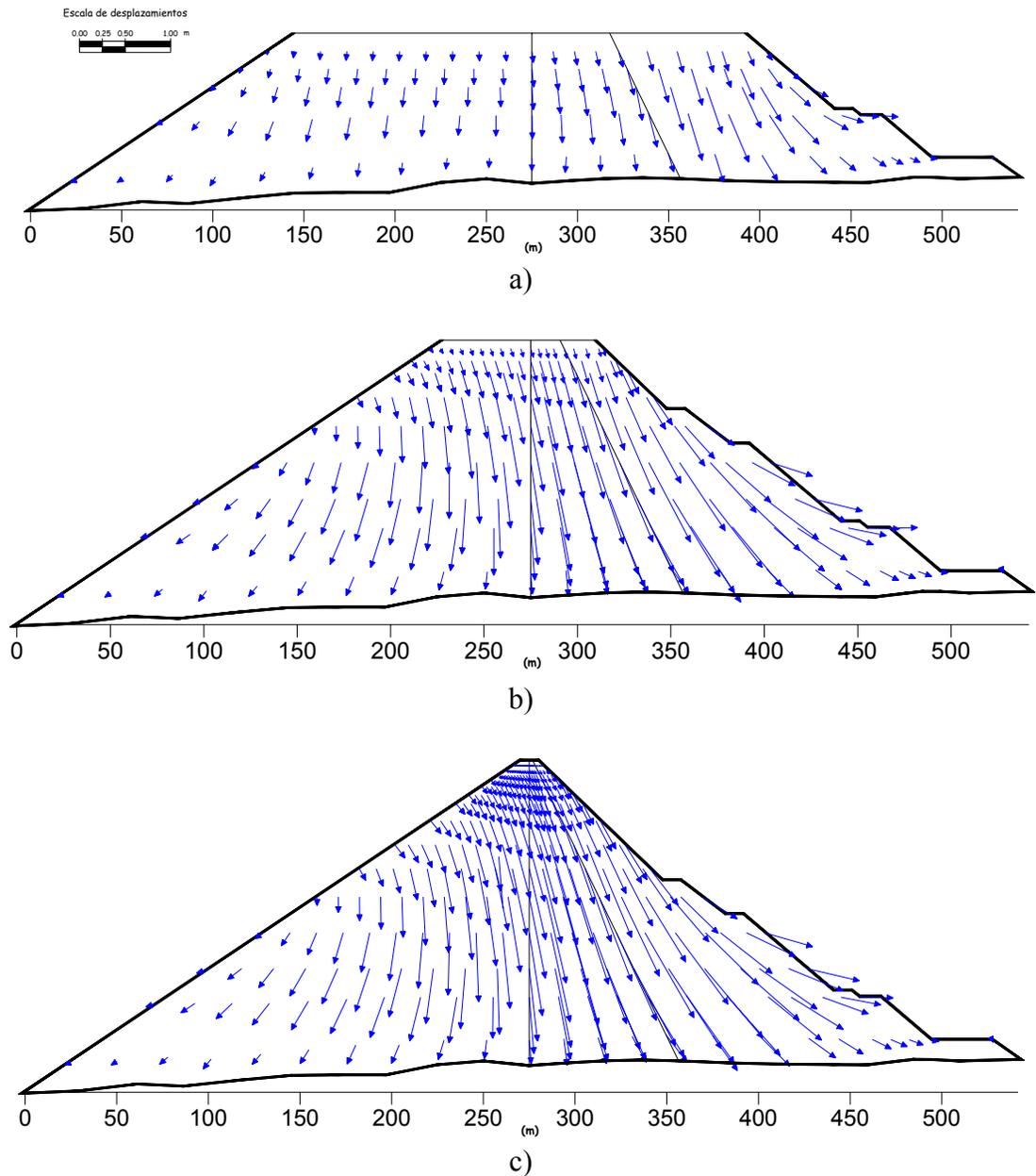


c)

Fig. 3.13 Coeficiente de correlación entre el desplazamiento vertical máximo y el resto de los nodos para tres etapas de construcción. Correlación entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$  : a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura y c) Final de la construcción.

**Desplazamiento total ( $\lambda_T$ ).** Una vez determinada la covarianza entre el desplazamiento vertical y el horizontal en cada nodo para una etapa específica de la construcción, es posible calcular los primeros momentos del vector de desplazamientos totales. En la *fig. 3.14* se presentan los resultados del valor esperado del vector para los dos primeros tercios de la altura del terraplén y para el final de la construcción.

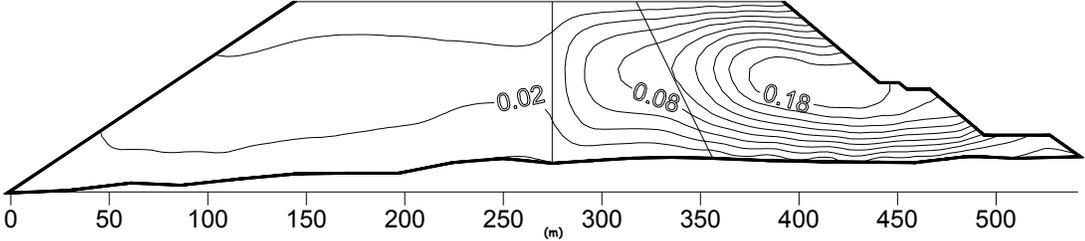
Material	$E\{K\}$	$E\{K_b\}$
3B	121.7	101.1
T	60.3	66.3
3C	35.8	39.3



**Fig. 3.14** Valor esperado del vector de desplazamientos totales (m): a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura y c) Final de la construcción.

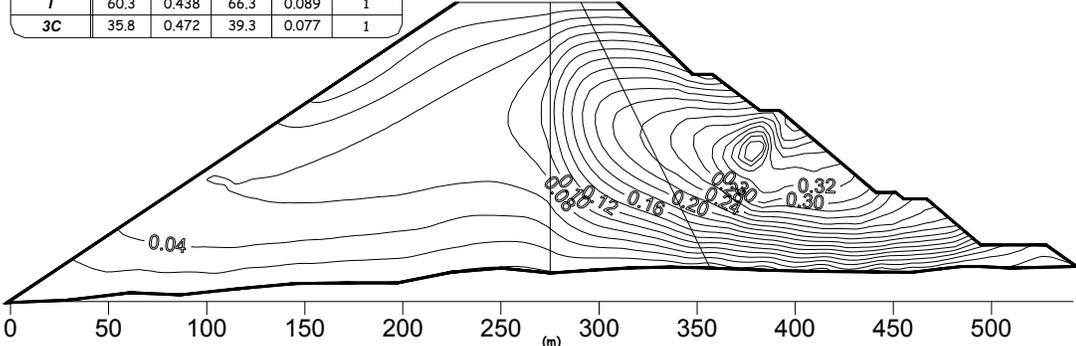
Para las condiciones de correlación indicadas en el caso 2, las curvas de igual valor de la desviación estándar de la magnitud del vector se muestran en la *fig. 3.15* para un tercio, dos tercios y la altura final del terraplén. Los resultados para los casos de correlación 1 y 3 se presentan en las *figs. A1.32* y *A1.33*.

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1



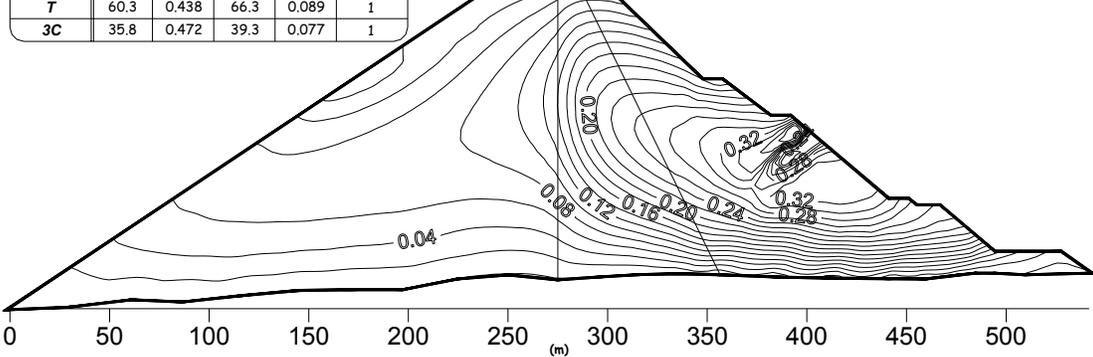
a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1



b)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1



c)

**Fig. 3.15** Desviación estándar de la magnitud del desplazamiento total (m). Correlación entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$  : a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura y c) Final de la construcción.

La desviación estándar del desplazamiento total tiende a concentrarse en las zonas con mayor incertidumbre ( $T$  y  $3C$ ). En un mismo punto pasa de 0.18 m a 0.28 m al final de la construcción. Comparando el coeficiente de correlación máximo que ocurren al final de la construcción ( $C_v = 0.67$ ) con respecto a las dispersiones iniciales ( $C_v = 0.47$ ) se aprecia una amplificación de las incertidumbres iniciales. Sin embargo, en la *fig. 3.15c* se puede notar que el área en donde ocurre la desviación máxima es muy reducida.

Para ilustrar cómo modifica el modelo la distribución de frecuencias de los campos de desplazamientos, con los resultados de las 2600 simulaciones se construyeron los histogramas de los desplazamientos horizontal, vertical y total, del nodo 153, donde ocurre el desplazamiento total máximo. Sabemos que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dos variables aleatorias normales independientes con media nula e idéntica varianza, sigue la densidad de probabilidad de Rayleigh (*Benjamín y Cornell, 1970*). Bajo esta idea se construyeron los histogramas de los desplazamientos horizontal y vertical estandarizando sus valores con respecto al valor medio y desviación estándar de cada muestra. A su vez, con estos valores se obtuvo la distribución de frecuencias del desplazamiento total. En las *figs. 3.16a y b* se puede observar que los desplazamientos horizontal y vertical, respectivamente, se separan significativamente de la forma Gaussiana y en consecuencia, la densidad de Rayleigh con  $\sigma = 1$  no se ajusta a la distribución de frecuencias del desplazamiento total. La explicación de estas discrepancias también se puede encontrar en la dependencia entre desplazamientos horizontal y vertical. En la *fig. 3.16c* se muestra con línea discontinua una curva con  $\sigma = 0.6$ , la cual al parecer permite un mejor ajuste.

### 3.3.2.2 Esfuerzos.

**Esfuerzo horizontal ( $\sigma_x$ ).** La distribución de la incertidumbre en el esfuerzo horizontal para los tres casos de correlación analizados se presentan en las *figs. A1.34, A1.35 y A1.36*. En los esfuerzos horizontales la matriz de correlación influye apreciablemente en la distribución de la incertidumbre. Dentro del cuerpo de la presa, las zonas con mayores incertidumbres se ubican en la frontera entre los materiales  $T$  y  $3C$  para los casos 1 y 2; en esa zona se alcanzan valores de la desviación estándar iguales a 0.16 MPa y 0.12 MPa, respectivamente. En el caso 3 la desviación estándar se concentra en la base del terraplén originando una zona con comportamiento robusto en la parte superior; es decir, donde la incertidumbre es pequeña ( $0.00\text{MPa} \leq \sigma \leq 0.02\text{MPa}$ ) (*fig. A1.36*).

Los resultados del SMA para el caso 1 se comparan con los del PEM en las *figs. A1.37a y A1.37b*, respectivamente. En el caso de los esfuerzos horizontales los resultados coinciden en distribución y magnitud, alcanzando una desviación estándar máxima de 0.24 MPa en la parte inferior de la zona central. En el contacto entre las fronteras  $T$  y  $3C$ , se tiene un coeficiente de variación igual a 0.25 con ambos métodos.

Por otro lado, en las *figs. A1.38a y A1.38b* se muestran los resultados del SMA y los del MCSM, respectivamente. La convergencia del coeficiente de variación del esfuerzo horizontal en el elemento 77 (*fig A1.39*) se obtuvo a partir de las 2000 simulaciones con un margen de error de  $3 \times 10^{-3}$  y un nivel de confianza del 99%. Una vez más la distribución y magnitud de la desviación estándar coincide en ambos métodos. Los valores máximos, que se presentan en la parte inferior de la zona central del terraplén coinciden en 0.16 MPa.

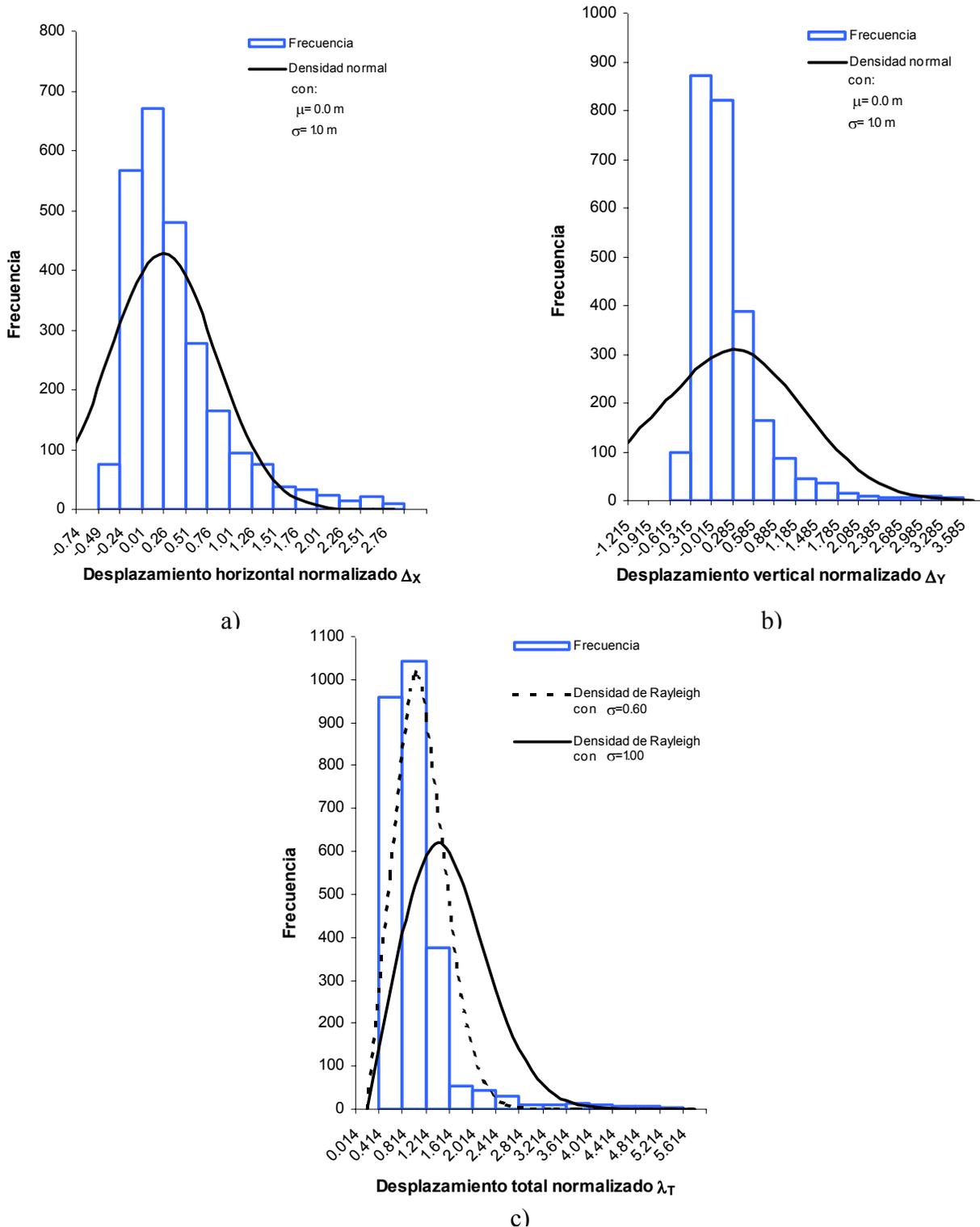
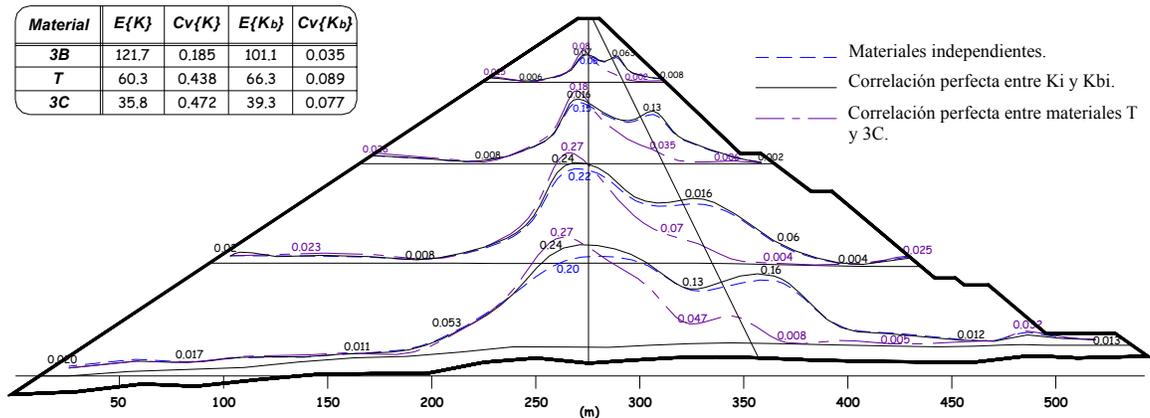


Fig. 3.16 Distribución de frecuencias de los desplazamientos en el nodo 153.

**Esfuerzo vertical ( $\sigma_y$ ).** El coeficiente de variación del esfuerzo vertical para los casos de correlación en los que se basa este análisis, se ilustra en las *figs. A1.40, A1.41 y A1.42*. En el caso 1 la desviación estándar se concentra en las dos fronteras materiales interiores, y gradualmente se dirigen hacia la frontera central entre los materiales 3B y T, conforme a los

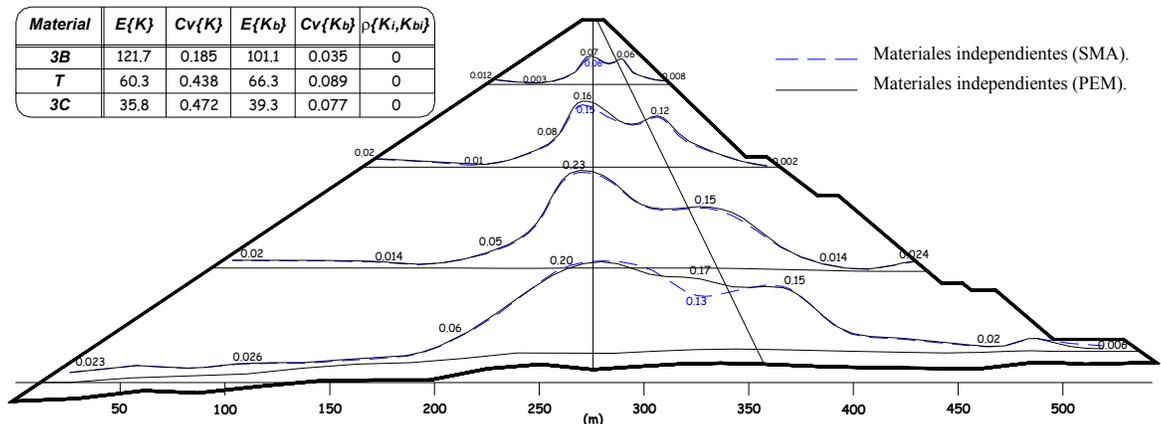
casos 2 y 3. El coeficiente de variación en los tres casos prácticamente permanece constante. Sus valores son iguales a 0.12, 0.13 y 0.14, respectivamente, calculados localmente donde la desviación estándar es máxima. Comparando estas magnitudes con la incertidumbre inicial de los parámetros, se puede señalar que los esfuerzos verticales parecen insensibles a la incertidumbre en los parámetros del modelo constitutivo para este caso particular.

En la *fig. 3.17* se presentan los resultados del análisis en planos horizontales con distinta elevación. Obsérvese como los resultados en los casos 1 y 2 son prácticamente iguales. En el caso 3 el efecto de la correlación entre los parámetros de los materiales *T* y *3C* tiende a concentrar una desviación estándar mayor, solo en la zona en donde se tienen los mayores esfuerzos verticales de ese plano, disminuyendo rápidamente su magnitud hacia las zonas *T* y *3C*.



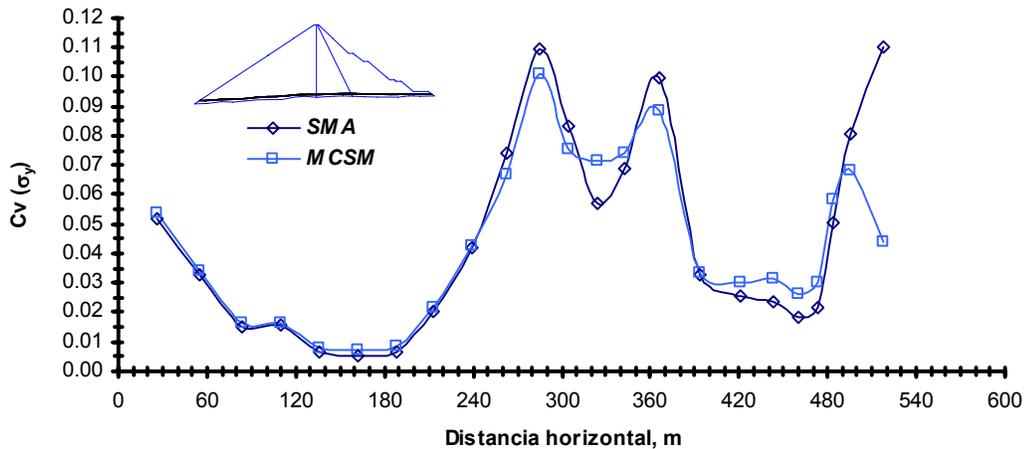
**Fig. 3.17** Influencia de la correlación en la desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa).

Los resultados del caso 1 se compararon con los del PEM (*figs. A1.43a* y *A1.43b*) y los del caso 2 con los del MCSM (*figs. A1.44a* y *A1.44b*). En el caso 1 los resultados coinciden totalmente. En la *fig. 3.18* se presenta la distribución de los esfuerzos verticales en planos con diferente elevación, la cual confirma la concordancia entre los resultados de ambos métodos.



**Fig. 3.18** Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Comparación entre (SMA) y (PEM).



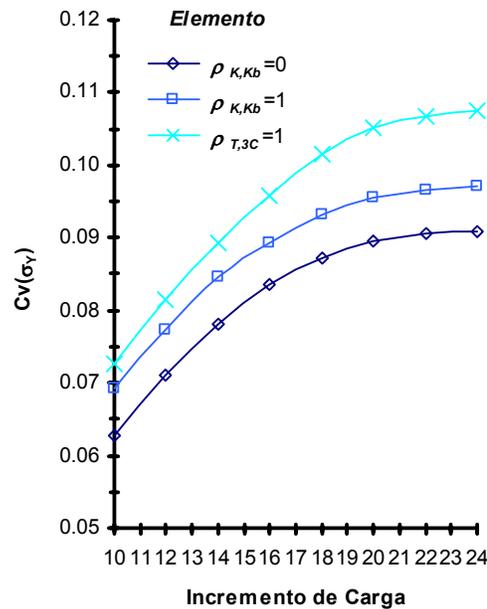


**Fig. 3.21** Coeficiente de variación del esfuerzo vertical en un plano horizontal. Comparación entre (SMA) y (MCSM).

De acuerdo con las *figs. 3.20 y 3.21*, se puede concluir que el SMA tiende a sobreestimar ligeramente la incertidumbre en los esfuerzos verticales; sin embargo, también es importante destacar el efecto acentuado de reducción de varianza aun para el tercer caso de correlación (*fig. A1.42*).

Al igual que en el caso de los desplazamientos verticales, el coeficiente de variación del esfuerzo vertical se calculó conforme al avance de la construcción en todos los elementos contenidos a lo largo de un plano horizontal, es decir, conforme aumentaba la carga sobre esos elementos. En la *fig. 3.22* se presentan los resultados de este análisis para el caso del elemento 98. El cálculo se realizó con el SMA para los tres casos de correlación citados. Es interesante observar que, a diferencia del desplazamiento vertical, el coeficiente de variación tiende a crecer conforme el terraplén gana altura. La misma tendencia se observó prácticamente en todos los elementos del plano horizontal y en otras elevaciones. Esto parece explicarse por el hecho de que para un nivel de esfuerzos mayor, aumenta la participación de la incertidumbre en el parámetro de compresibilidad  $K_b$  y la del parámetro de deformaciones desviadoras  $K$ , provocando que la incertidumbre en su conjunto aumente. De acuerdo con la *fig. 3.22* es evidente la no linealidad de la evolución de la incertidumbre en el esfuerzo vertical hacia el final de la construcción.

**Esfuerzo cortante ( $\tau_{XY}$ ).** La respuesta del esfuerzo cortante ante la incertidumbre en los parámetros del modelo lineal se muestra en las *figs. A1.46, A1.47 y A1.48*, a través de la distribución de la desviación estándar para los casos de análisis 1 a 3. En los esfuerzos cortantes se presenta algo semejante a lo ocurrido en los verticales. Las zonas con mayor incertidumbre se concentran a lo largo de los contactos entre materiales y esta concentración se dirige hacia la frontera *3B-T*, conforme al orden de los casos analizados; originando amplias zonas en los respaldos con un comportamiento robusto. La distribución de esta incertidumbre sugiere que la participación de ambos parámetros es semejante, es decir, se concentra a lo largo de las fronteras interiores y hacia el fondo del terraplén. La desviación estándar máxima en los casos 1, 2 y 3 es igual a 0.14 MPa, 0.13 MPa y 0.10 MPa, respectivamente; es decir, la incertidumbre disminuye ligeramente conforme la correlación aumenta.



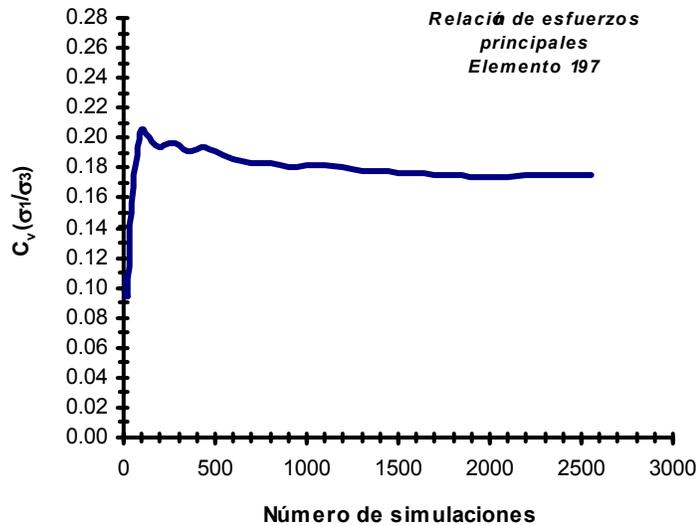
**Fig. 3.22 Evolución del coeficiente de variación del esfuerzo vertical conforme al avance de la construcción.**

El caso 1 se analizó además con el PEM. Las *figs. A1.49a* y *A1.49b* muestran los resultados. Como en todos los casos analizados la correspondencia en distribución y magnitud de la incertidumbre es muy buena. La desviación estándar máxima registrada es de 0.15 MPa. Por otra parte, el MCSM se utilizó para confrontar los resultados del SMA en el caso 2. Como en todos los casos analizados las distribuciones y magnitudes de la desviación estándar son prácticamente idénticas (*figs. A1.50a* y *A1.50b*). La convergencia del coeficiente de variación del esfuerzo cortante en el elemento 81 conforme al número de simulaciones se muestra en la *fig. A1.51*. El margen de error en la estimación al cabo de 2000 simulaciones es de  $2 \times 10^{-3}$  con un 99% de confianza.

**Relación de esfuerzos principales ( $\sigma_1/\sigma_3$ ).** El coeficiente de variación de la relación de esfuerzos principales aumenta ligeramente conforme al orden de los casos analizados. Las magnitudes máximas registradas presentan valores iguales a 0.34, 0.30 y 0.40, para los casos de correlación 1 a 3, respectivamente (*figs. A1.52-A1.54*). Los valores máximos se presentan en la parte superior del talud de aguas arriba. La distribución del coeficiente de variación es un tanto errática. Sin embargo, mientras que en los dos primeros casos se concentra en la parte central de la presa, en el tercer caso crece hacia la parte superior del talud de aguas arriba y la inferior del talud de aguas abajo, originando amplias zonas de ambos respaldos con un comportamiento robusto ( $C_v = 0.05 - 0.10$ ).

Los resultados encontrados con el SMA para el caso 1, se muestran en la *fig. A1.55a* y en la *fig. A1.55b*, los obtenidos con el PEM. Es notoria la correspondencia en distribución en los dos métodos. Las diferencias observadas entre los coeficientes de variación máximos son del 8%. En la *fig. A1.56a* se presentan los resultados del caso 2 analizado con el SMA y en la *fig. A1.56b* los obtenidos con el MCSM. La evolución del coeficiente de variación en el elemento 197 conforme al número de simulaciones se muestra en la *fig. 3.23*. La convergencia se logra a partir de las 2200 simulaciones con un margen de error de  $6 \times 10^{-3}$  con un 99% de confianza. La distribución

del coeficiente de variación obtenida por ambos métodos es semejante. La máxima diferencia entre los coeficientes de variación obtenidos por ambos métodos es del 7%, sin embargo, ocurre en una zona muy pequeña del talud de aguas arriba. En general, en el cuerpo del terraplén los valores son prácticamente idénticos.



**Fig. 3.23** Convergencia de la relación entre esfuerzos principales.

Los histogramas de los esfuerzos principales, mayor, menor y del cociente entre el mayor y el menor en el elemento 197, en donde ocurre la relación máxima entre esfuerzos principales del interior del terraplén, se presentan en la *fig. 3.24*. Como referencia, se ha trazado una densidad normal con los parámetros estadísticos de cada muestra. En el caso de la relación entre esfuerzos principales (*fig.3.24c*) la forma de la distribución de frecuencias presenta un acentuado sesgo positivo, apartándose considerablemente de la forma Gaussiana. Es interesante destacar que los esfuerzos principales varían dentro de un intervalo estrecho. El coeficiente de variación de la muestra es de 0.25; es decir, aproximadamente la mitad de las dispersiones iniciales en los parámetros del modelo constitutivo.

### 3.3.2.3 Resumen de resultados.

En la tabla 3.10 se muestra la influencia de la correlación en cada uno de los campos analizados, a través de los valores máximos del coeficiente de variación o de la desviación estándar. También se han incluido los resultados obtenidos con el PEM y con el MCSM. La incertidumbre en el caso del vector de desplazamientos totales solo se determinó con el método de segundos momentos (SMA).

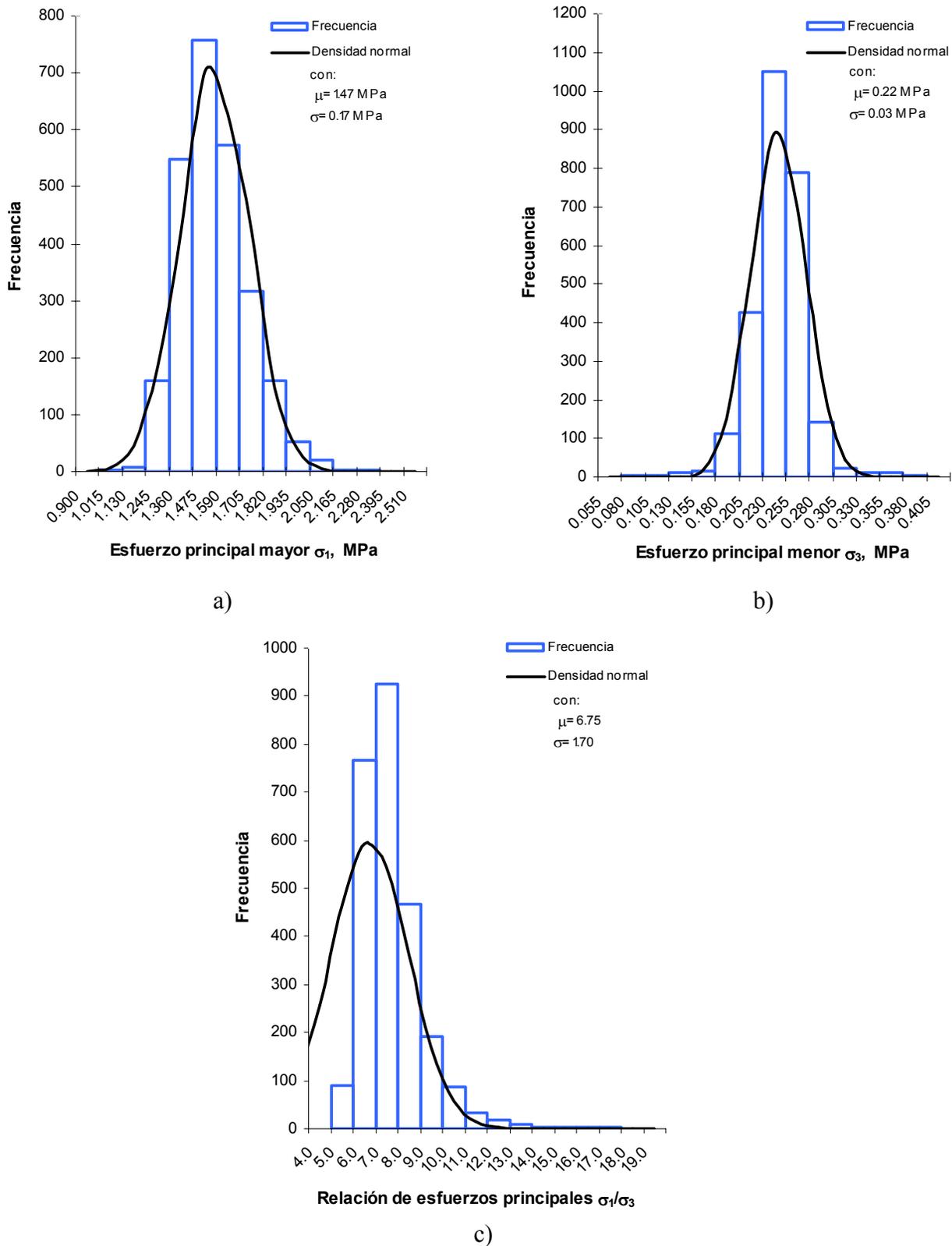


Fig. 3.24 Distribución de frecuencias de los esfuerzos principales en el elemento 197.

**Tabla 3.10 Resumen de la influencia de la correlación en los distintos campos analizados.**

<i>CAMPO</i>	$\rho_{K_i, K_{b_i}} = 0$		$\rho_{K_i, K_{b_i}} = 1$		$\rho_{T,3C} = 1$
	<i>SMA</i>	<i>PEM</i>	<i>SMA</i>	<i>MCSM</i>	<i>SMA</i>
$\Delta_X$	$\sigma = 0.35$ m	$\sigma = 0.50$ m	$\sigma = 0.32$ m	$\sigma = 0.45$ m	$\sigma = 0.40$ m
$\Delta_Y$	$\sigma = 0.18$ m	$\sigma = 0.22$ m	$\sigma = 0.20$ m	$\sigma = 0.34$ m	$\sigma = 0.26$ m
$\lambda_T$	$\sigma = 0.38$ m	-----	$\sigma = 0.40$ m	-----	$\sigma = 0.45$ m
$\sigma_X$	$\sigma = 0.24$ MPa	$\sigma = 0.24$ MPa	$\sigma = 0.16$ MPa	$\sigma = 0.16$ MPa	$\sigma = 0.20$ MPa
$\sigma_Y$	$\sigma = 0.22$ MPa	$\sigma = 0.22$ MPa	$\sigma = 0.24$ MPa	$\sigma = 0.22$ MPa	$\sigma = 0.26$ MPa
$\tau_{XY}$	$\sigma = 0.14$ MPa	$\sigma = 0.15$ MPa	$\sigma = 0.13$ MPa	$\sigma = 0.14$ MPa	$\sigma = 0.10$ MPa
$\sigma_1/\sigma_3$	$C_v = 0.34$	$C_v = 0.42$	$C_v = 0.30^*$	$C_v = 0.23$	$C_v = 0.40$

\* El valor indicado solo se presenta localmente sobre el talud de aguas arriba.

Los resultados mostrados en la tabla anterior y los discutidos en este inciso permiten resumir las siguientes observaciones:

- El efecto de reducción de varianza en todos los campos analizados es importante; sin embargo, en algunos casos tiende a reducir conforme aumenta el número de parámetros correlacionados.
- Para los valores esperados y parámetros de dispersión calculados en este análisis, el PEM presenta valores de incertidumbre ligeramente superiores a los del SMA, cuando los parámetros del modelo se consideraron independientes.
- Cuando se consideró una correlación positiva perfecta entre los parámetros  $K_i$  y  $K_{b_i}$  de cada uno de los materiales, al analizar los campos de desplazamientos los resultados con el MCSM fueron mayores a los del SMA, mientras que en los campos de esfuerzos los resultados coincidieron ampliamente.
- La incertidumbre en los campos de esfuerzos prácticamente se mantuvo al aumentar la correlación, solo varió apreciablemente la distribución de esa incertidumbre.
- El coeficiente de variación del esfuerzo vertical en los elementos contenidos en un plano horizontal, tiende a crecer conforme aumenta la carga sobre ese plano. Por otro lado, la evolución del coeficiente de variación del desplazamiento vertical bajo la misma condición depende, al parecer, de la compresibilidad de los materiales; es decir, entre mayor fue el desplazamiento hacia el final de la construcción el coeficiente de variación tendió a decrecer aún cuando las dispersiones iniciales en los materiales más compresibles fueron mayores.

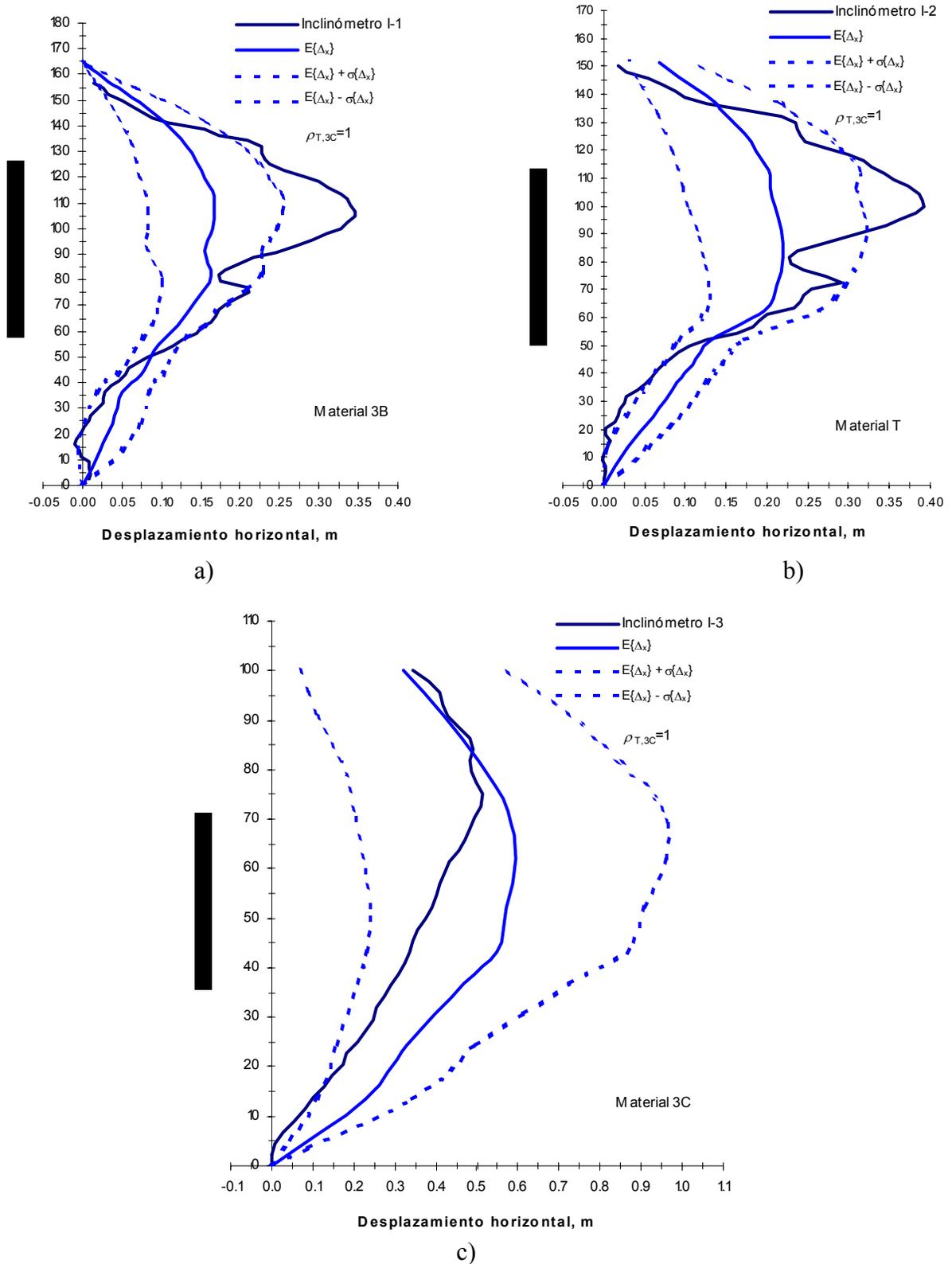
### 3.4 COMPARACIÓN ENTRE DESPLAZAMIENTOS MEDIDOS Y CALCULADOS.

Con los resultados del análisis estocástico es posible definir un intervalo de confianza para cualesquiera de las variables investigadas. El terraplén de la presa "Aguamilpa" fue instrumentado en tres secciones verticales paralelas al río (González *et al.*, 1993). En la *fig. A1.57* se muestra la localización de los inclinómetros y niveles hidráulicos de asentamientos instalados en la sección transversal máxima. Para registrar los desplazamientos horizontales y verticales en esa sección se instalaron tres inclinómetros. El primero (I-1) se localiza a 10 m hacia aguas arriba a partir del eje central de la presa. Este inclinómetro en toda su altura queda colocado en el material 3B y se empotra en el aluvi6n natural. El segundo inclin6metro (I-2), ubicado a 12 m hacia aguas abajo del eje central de la presa, atraviesa algunos metros del material 3C en la parte superior del terraplén, continua por el material T hasta empotrarse en el aluvi6n natural; mientras que el inclin6metro 3 (I-3), localizado 80 m hacia aguas abajo a partir del eje central de la presa, queda instalado en el material 3C y antes de empotrarse en el aluvi6n natural cruza algunos metros de la zona T en la parte inferior del terraplén. Los niveles hidráulicos situados en el terraplén permiten registrar los asentamientos a la ancho de la secci6n transversal máxima en tres niveles con distinta elevaci6n. En este inciso los registros de ambos tipos de instrumentos al final de la construcci6n se utilizan para confrontar los resultados del MEFÉ para los campos de desplazamientos horizontales y verticales.

#### 3.4.1 Desplazamientos horizontales.

Para ejemplificar una utilidad prÁctica del MEFÉ, en la *fig. 3.25* se han representado los registros de los desplazamientos horizontales en la direcci6n paralela al rÍo de cada uno de los tres inclin6metros colocados en cada uno de los tres principales materiales constitutivos del terraplén, junto con los valores esperados y un ancho de banda equivalente a una desviaci6n estÁndar ( $\pm \sigma \{\Delta_x\}$ ). Si se considera una distribuci6n normal para los desplazamientos horizontales, el ancho de banda representa los desplazamientos horizontales esperados con un 68% de probabilidad. Los resultados mostrados se obtuvieron con el MEFÉ bajo la hip6tesis de correlaci6n mencionada en el caso 3; es decir, se consider6 una correlaci6n positiva perfecta entre los parÁmetros de los materiales T y 3C. Esta hip6tesis es representativa del caso en que las dudas que se tienen en la definici6n de los parÁmetros de ambos materiales constitutivos sean del mismo tipo.

Los resultados que corresponden a los registros en los inclin6metros I-1 e I-2, colocados en los materiales 3B y T, respectivamente, prÁcticamente se sitúan dentro del intervalo estimado por el MEFÉ. Las diferencias observadas se podrÍa relacionar con el comportamiento anis6tropo de los materiales compactados. Es decir, mientras que este anÁlisis se ha realizado bajo la hip6tesis de comportamiento is6tropo, en el que el m6dulo de deformabilidad se ha definido bajo un trayectoria de carga vertical (od6metro), el valor representativo del m6dulo en el plano de ortotropía queda fuera del anÁlisis y sin duda influye al momento de confortar los resultados del anÁlisis con la instrumentaci6n. Se observa ademÁs que los valores máximos escapan del pron6stico. Se harÁ un comentario en el siguiente inciso que posiblemente explique esta discrepancia. En el caso del inclin6metro I-3 (material 3C), si bien el valor esperado se aproxima al registro, el ancho de banda obtenido por el MEFÉ sugiere que los parÁmetros de dispersi6n iniciales reales son algo inferiores (*véase el inciso 3.1.3.2*).



**Fig. 3.25** Comparación entre los desplazamientos horizontales medidos en inclinómetros y los que resultan del MEFE: a) Inclinómetro en el material 3B; b) Inclinómetro en el material T; c) Inclinómetro en el material 3C.

De las gráficas también se puede apreciar que si se deseara una estimación de los desplazamientos horizontales con una probabilidad de ocurrencia mayor, por ejemplo, con  $\pm 2\sigma\{\Delta_x\}$ , del lado mínimo de los desplazamientos ocurriría un cambio de signo lo que representaría que el desplazamiento podría ocurrir hacia aguas arriba. Una situación semejante podría no ser aceptable de acuerdo con la física del problema.

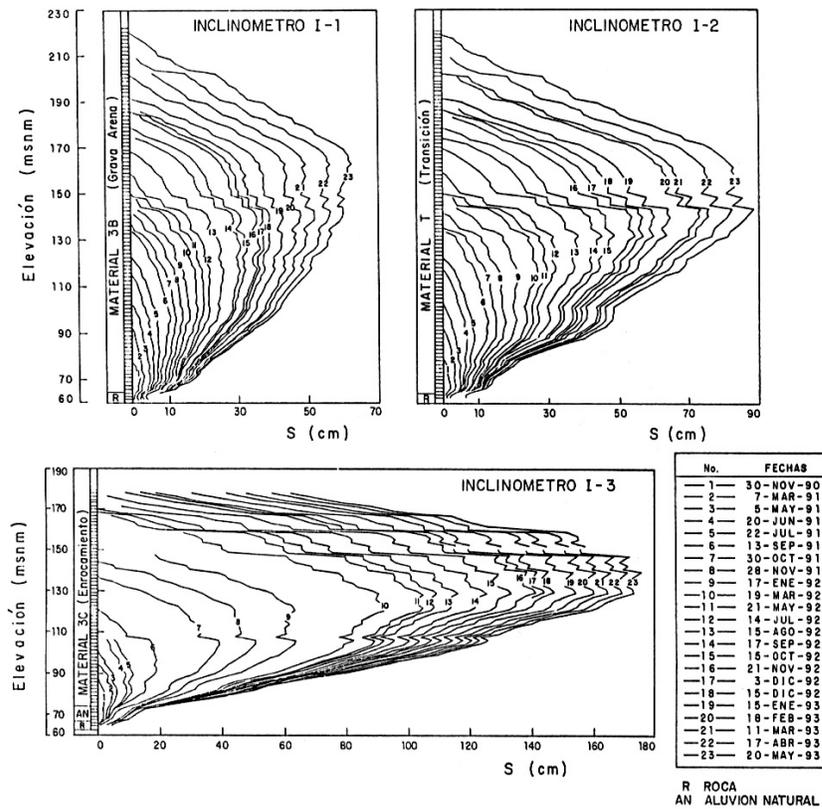
### 3.4.2 Desplazamientos verticales.

En este caso se cuenta con la evolución de los asentamientos medidos en inclinómetros y en los niveles hidráulicos conforme al crecimiento del terraplén. La *fig. 3.26* muestra los registros en cada uno de los inclinómetros. Aun cuando cada inclinómetro en gran parte de su altura prácticamente esta colocado en un mismo material (excepto al empotrarse en el aluvión natural), existe un corrimiento que indica un aumento brusco del asentamiento cuando el terraplén alcanza aprox. la cota 150; es decir, cuando el terraplén alcanza aproximadamente los 100 m de altura. La razón de este incremento del asentamiento se podría explicar por la inundación que sufrió el terraplén en Enero de 1992 (*Castro y Montañez, 1993*), cuando una creciente rebasó la ataguía de aguas arriba provocando que la compactación posterior se haya realizado sobre un material húmedo con una rotura de partículas seguramente mayor que en condiciones secas. En realidad la inundación ocurrió cuando el terraplén se encontraba en la cota 150, mientras que el corrimiento se observa aprox. en la cota 147; es decir, se podría interpretar que la inundación afecto una profundidad de aprox. 3 m. Esto podría explicar los máximos que se observan en las partes *a* y *b* de la *fig. 3.25*. El que el inclinómetro I-3 no haya registrado algún corrimiento no parece lógico. Sin embargo, como se puede apreciar en la *fig. 3.26* el material mas compresible (3C) fue mas sensible al acontecimiento que el material 3B, de mejor calidad y que contó con especificaciones de colocación por mucho, más estrictas (*véase la tabla 3.1*).

En las gráficas de la *fig. 3.27* se han representado los valores esperados junto con un ancho de banda de  $\pm\sigma\{\Delta_y\}$  de los desplazamientos verticales obtenidos con el MEFÉ, bajo la hipótesis de correlación en la que los parámetros de los materiales *T* y 3C se consideraron perfectamente correlacionados. Si bien la probabilidad de ocurrencia no se cumple a todos los niveles, los registros de inclinómetros prácticamente se sitúan dentro del intervalo pronosticado. Esto se debe a la representatividad del módulo de deformabilidad en la dirección vertical para los materiales 3B y *T*. Solo en el caso del material 3C la estimación es pobre; sin embargo, de acuerdo a los registros mostrados en la *fig. 3.26* fue el material más afectado por la inundación. En la parte *c* de la *fig. 3.27* se han representado los registros de inclinómetros y los resultados del MEFÉ para tres etapas de construcción; una antes de la inundación otra posterior y para el final de la construcción. El valor esperado del desplazamiento vertical es ligeramente inferior al registrado en el inclinómetro antes de la inundación, pero después de ella las diferencias son aún mas grandes y hacia el final de la construcción, cuando la parte superior del terraplén influye en esa zona, los asentamientos ocurren sobre un material mucho más compresible que el representado en el modelo.

Las gráficas de la *fig. 3.27* señalan anchos de banda más estrechos que los que resultaron en el caso de los desplazamientos horizontales, aun en el caso del material 3C en el que las dispersiones iniciales fueron elevadas (*véase la tabla 3.8*). Por lo tanto, al propagar la incertidumbre inicial en el análisis con elementos finitos el efecto de reducción de varianza es mas acentuado en el caso de los asentamientos que en el de los desplazamientos horizontales (*véase la tabla 3.10*). Esto se podría explicar observando que en el asentamiento tienden a participar los tres materiales, mientras que en el desplazamiento horizontal es mas acentuada la

influencia de la zona más compresible, donde participan un menor número de ellos, reduciendo así el efecto de reducción de varianza (véanse las figs. A1.1 a A1.6).



**Fig. 3.26 Evolución del desplazamiento vertical medido en inclinómetros conforme al crecimiento del terraplén.**

Finalmente, en la *fig. 3.28* se presentan los registros de los niveles hidráulicos de asentamientos localizados en tres elevaciones distintas junto con los valores esperados y las desviaciones estándar correspondientes a  $\pm \sigma\{\Delta_Y\}$ . La figura confirma la buena aproximación de los resultados del MEFE con excepción del nivel en donde ocurren los asentamientos máximos del terraplén, en los materiales *T* y *3C*. La configuración del asentamiento es semejante a la registrada con la salvedad de que la interacción real es más acentuada. La influencia de la inundación posiblemente explique estas discrepancias. Por lo que respecta al modelo de elementos finitos, en realidad, no se buscó representar la interacción entre los distintos materiales del terraplén mediante algún elemento especial, lo cual podría contribuir a mejorar la aproximación, con la dificultad asociada en la elección de parámetros materiales representativos del comportamiento en la interfaz.

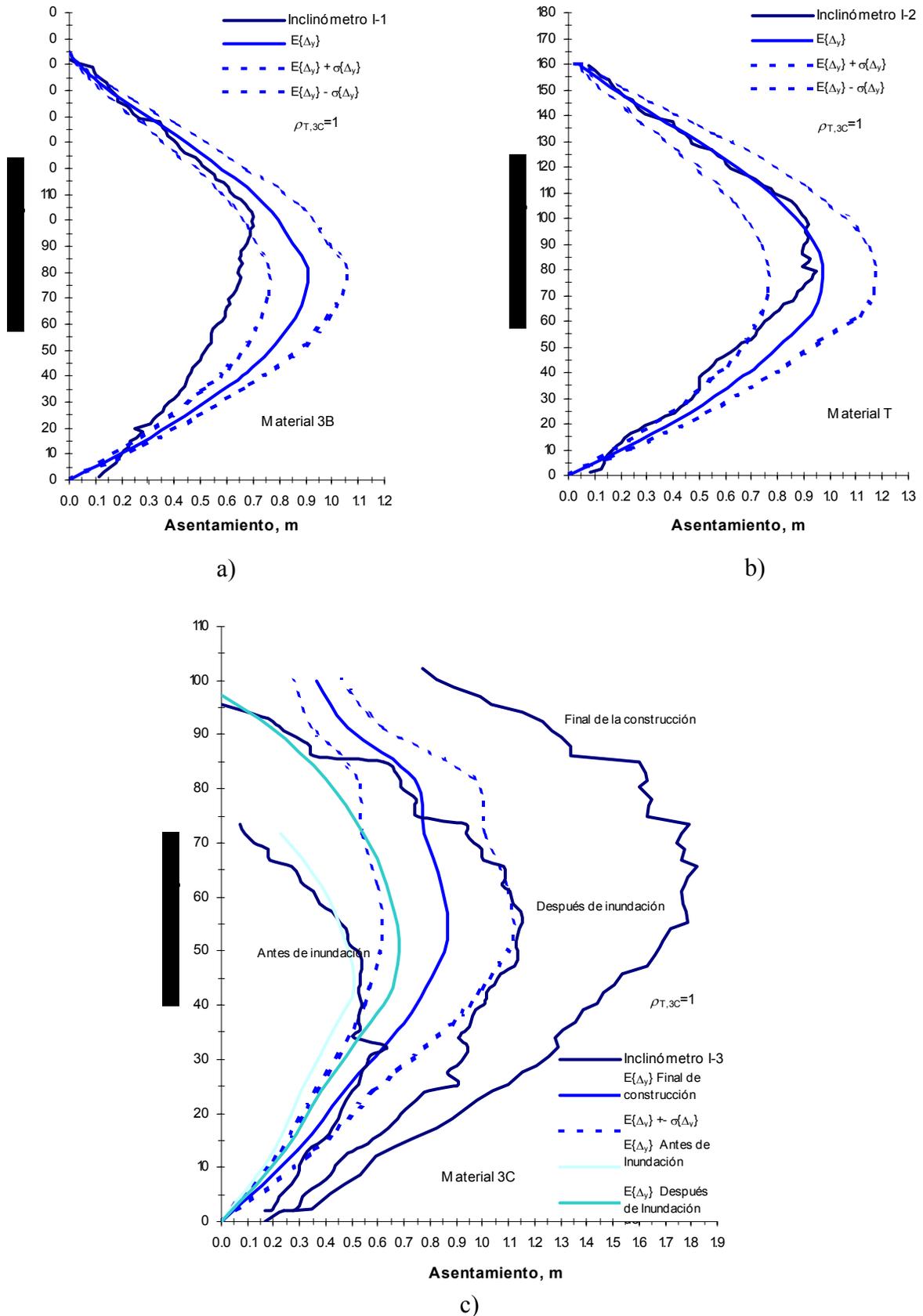
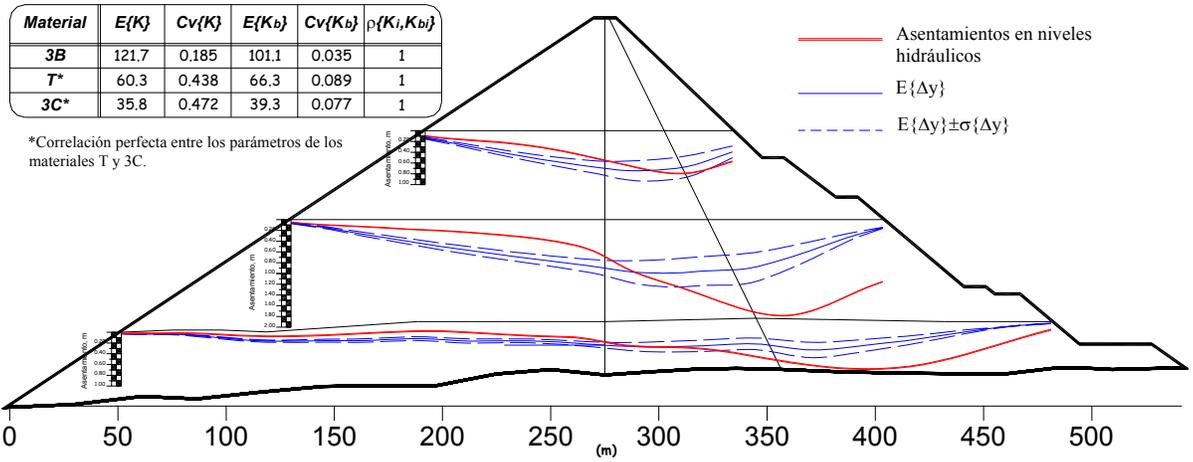


Fig. 3.27 Comparación entre los asentamientos medidos en inclinómetros y los que resultan del MEFE: a) Inclinómetro en el material 3B; b) Inclinómetro en el material T; c) Inclinómetro en el material 3C.



**Fig. 3.28 Comparación entre los asentamientos medidos en niveles hidráulicos y los que resultan del MEFE en tres niveles con distinta elevación.**

# Conclusiones

Se han enlistado las principales fuentes de incertidumbre involucradas en la modelación en geomecánica, y expuesto los formalismos basados en la teoría de la probabilidad que permiten representarlas. Asimismo, se discutieron las formulaciones basadas en las técnicas de perturbaciones y en los métodos de simulación con las técnicas de Monte Carlo, con el objeto de orientar la implementación de estas herramientas en la propagación de la incertidumbre en un análisis con elementos finitos.

Al tratamiento explícito de la incertidumbre en cualquier valor de entrada en un análisis con elementos finitos, se le conoce como método de los elementos finitos estocásticos (MEFE). El MEFE se ha utilizado en el análisis esfuerzo-deformación del proceso constructivo del terraplén de la presa “Aguamilpa”.

En la modelación de estructuras de tierra se suelen utilizar dos aproximaciones básicas para estimar las propiedades mecánicas de los materiales: realizando ensayos de campo y/o laboratorio con muestras representativas de los materiales del sitio, o estimando un intervalo de valores a partir de diversas experiencias previas. Esto muestra que la principal fuente de error involucrada en el modelado mecánico del problema, se debe a los errores aleatorios asociados a los ensayos y a los errores sistemáticos presentes tanto a las estimaciones parcialmente subjetivas, como en el empleo de correlaciones empíricas entre propiedades índice y mecánicas.

Antes de cualquier análisis probabilista es necesario definir el tipo de incertidumbre que se va a representar, debido a que la asignación de varianzas se tiene que realizar bajo un marco perfectamente definido. Por otro lado, la reflexión implícita en el modelado de las incertidumbres requiere además que se distingan las dudas de tipo determinista de las de tipo probabilista.

Este trabajo ha utilizado una metodología típica de evaluación de parámetros para el modelo constitutivo. Tanto el módulo de compresibilidad volumétrica medio como la relación de Poisson, que definen las propiedades mecánicas de cada uno de los principales materiales del cuerpo del terraplén, se han considerado como variables aleatorias que representan un campo aleatorio estimativo. Los posibles valores de estas propiedades definieron un intervalo de variación representativo de los enrocamientos. Estas incertidumbres iniciales se propagaron a

través de las funciones que definen los parámetros del modelo lineal en el programa determinista utilizado, para varias condiciones extremas de correlación. De esta manera se modelaron las incertidumbres en los parámetros del modelo constitutivo.

El MEFE permite evaluar la influencia de la incertidumbre en los parámetros materiales, sobre la confiabilidad de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, además de la incidencia relativa de los diferentes parámetros del modelo constitutivo sobre la precisión de los resultados. Esta última característica posiblemente sea la más útil y la que se pueda extender a otras aplicaciones prácticas. Este trabajo ha expuesto como implementar el MEFE para alcanzar estos objetivos.

Se ha observado que la incidencia del parámetro relacionado con las deformaciones volumétricas ( $K_b$ ) sobre ambos campos de desplazamientos, es parecida a la del parámetro relacionado con las deformaciones por cortante ( $K$ ). Esto también se presentó en los esfuerzos horizontales y en los cortantes, mientras que en los esfuerzos verticales y en la relación de esfuerzos principales se ha notado una insensibilidad a las dispersiones en el parámetro  $K_b$ .

Es destacable el efecto de reducción de varianza observado a través del coeficiente de variación en amplias zonas representativas del cuerpo del terraplén, es decir, lejos de los taludes y de las zonas en las que ocurren valores esperados pequeños, aun cuando se consideró una correlación positiva perfecta entre dos de los tres materiales. Este efecto es particularmente importante en los campos de esfuerzos.

Se ha encontrado que la distribución de la incertidumbre coincide en los pares de métodos utilizados, aunque se apreciaron algunas diferencias en las magnitudes máximas entre los métodos SMA y el PEM, y entre el SMA y el MCSM, principalmente en los campos de desplazamientos, en donde el modelo es más sensible a la ley constitutiva. Las ligeras diferencias observadas se podrían investigar variando el intervalo de separación entre los puntos discretos utilizados para el cálculo numérico de las derivadas parciales.

Es posible introducir un mayor grado de realismo en los análisis con el MEFE cuando se investiguen problemas particulares del comportamiento esfuerzo-deformación de las estructuras de tierra, como por ejemplo, el fenómeno de interacción entre los diferentes materiales de la cortina o la posición y extensión de las zonas de tensión y plastificación, por cuanto el MEFE permite definir intervalos de confianza para las deformaciones y los esfuerzos. Es verdad que la calidad de los resultados de un análisis estocástico dependerá de la representatividad de los momentos estadísticos del campo estimativo. Pero aun cuando estos parámetros se definan de manera parcialmente subjetiva o subjetiva, permiten discutir los resultados dentro de un marco de referencia en el cual se pueden detectar las zonas más sensibles a esas incertidumbres de las zonas con un comportamiento robusto.

La correlación entre las variables aleatorias definidas en distintos subdominios de un campo estimativo se establece a partir de las dudas que se tienen en cuanto a la medición y estimación de sus magnitudes esperadas, mientras que en la modelación por campos descriptivos de la variabilidad espacial se toma en cuenta explícitamente la estructura de correlación espacial de las propiedades aleatorias del medio.

Existen en la literatura diversas propuestas para modelar la variabilidad espacial en los análisis estocásticos con elementos finitos. Sin embargo, para implementar estas técnicas en los

problemas de geomecánica es importante tener presente que la existencia de datos en un subdominio dado colapsa la incertidumbre en los puntos vecinos a él. Por lo tanto, para asignar a elementos o grupos de elementos finitos los resultados directos de las mediciones se debería recurrir a las técnicas de estimación condicional. Por otro lado, debido a que la variabilidad espacial en los suelos es tridimensional, en rigor, los análisis con elementos finitos tendrían que realizarse en tres dimensiones.

Un inconveniente adicional en el modelado de las incertidumbres mediante campos aleatorios descriptivos se presenta en la configuración de la malla. En tanto que siempre será preferible que su configuración responda libremente a los intereses geométricos y mecánicos del problema, en estos casos las dimensiones de los elementos finitos no están exentas de la función de auto-correlación espacial.

Por otra parte, el PEM presenta la ventaja de no requerir el cálculo numérico de las derivadas parciales necesarias en los métodos de perturbaciones, sin embargo, la aplicabilidad del método original está restringida a un número reducido de variables aleatorias y a los casos en los que no todas sean correlacionadas. Esta última desventaja queda superada con el SMA, sin embargo, la técnica numérica para el cálculo de las derivadas parciales puede fallar localmente, cuando al nivel de un nudo o elemento la respuesta sea altamente no lineal.

Para el cálculo numérico de las derivadas parciales con la técnica del cociente polinomial se utilizaron cinco puntos discretos dentro de un intervalo de dos desviaciones estándar. Pero la técnica permite variar estas condiciones de cálculo. Convendría investigar estas opciones numéricas para verificar la aproximación que se logra en los cálculos.

La gran cantidad de cálculo involucrado en un análisis estocástico con el método de Monte Carlo posiblemente impida su aplicación en los análisis del procedimiento constructivo de presas de materiales compactados, principalmente por los objetivos que se persiguen en estos análisis. Por esta razón convendría explorar el intervalo de aplicabilidad real del SMA, realizando series de análisis paramétricos para coeficientes de variación y valores esperados crecientes, además de variar las condiciones de correlación.

Como parte complementaria del análisis esfuerzo-deformación del proceso constructivo de presas de tierra, se podría analizar la estabilidad de los taludes dentro de la estructura de los elementos finitos estocásticos y la teoría de la confiabilidad. Convendría definir la distribución de los cortantes máximos o bien, la de deformaciones principales mayores y observar la eventual formación de las superficies de deslizamiento en función del índice de confiabilidad.

**ANEXO 1. Figuras de los resultados del análisis estocástico.**

Material	$E\{K\}$	$E\{K_b\}$
3B	121.7	101.1
T	60.3	66.3
3C	35.8	39.3

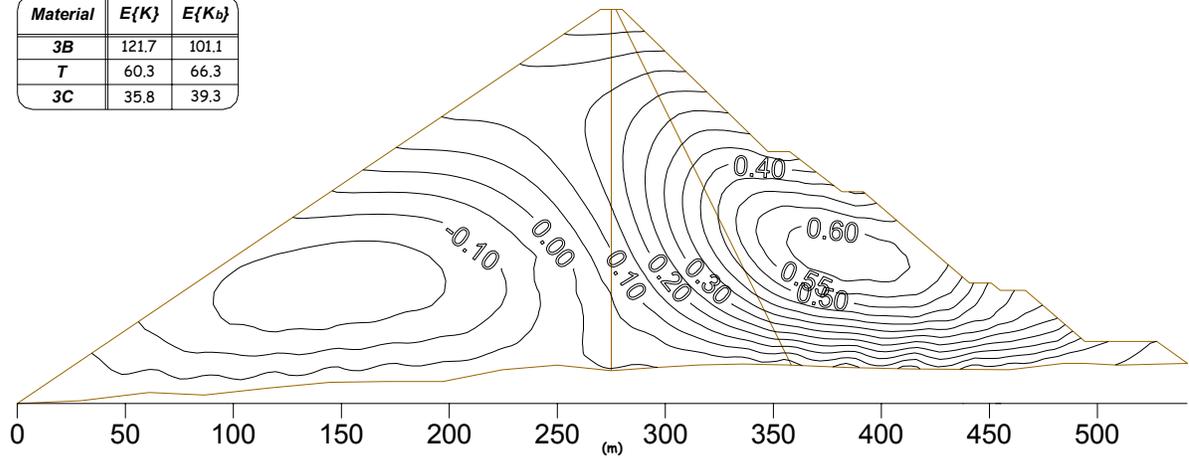


Fig. A1.1 Valor esperado del desplazamiento horizontal (m).

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0
T	60.3	0.438	66.3	0
3C	35.8	0.472	39.3	0

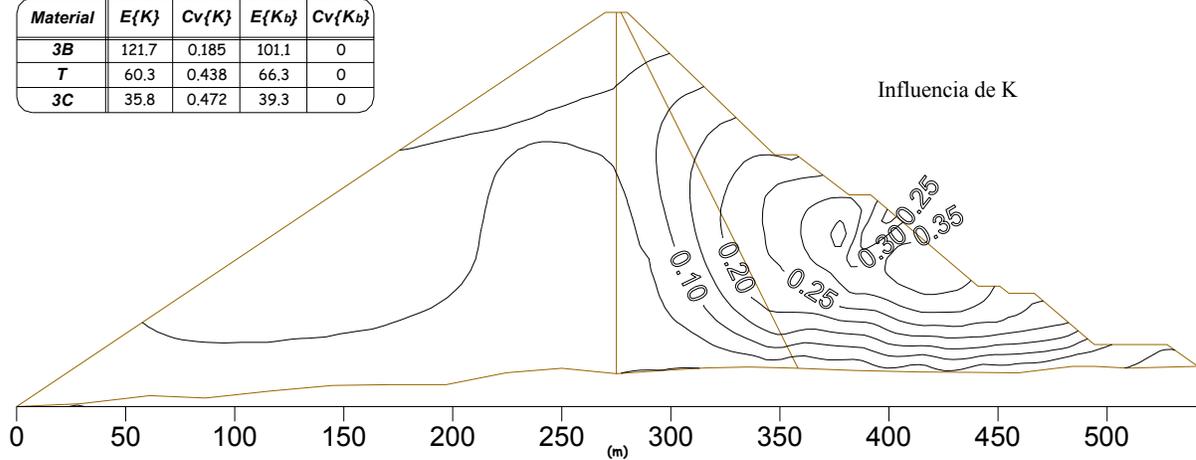


Fig. A1.2 Desviación estándar del desplazamiento horizontal (m). Influencia de  $K$ .

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$
3B	121.7	0	101.1	0.185
T	60.3	0	66.3	0.438
3C	35.8	0	39.3	0.472

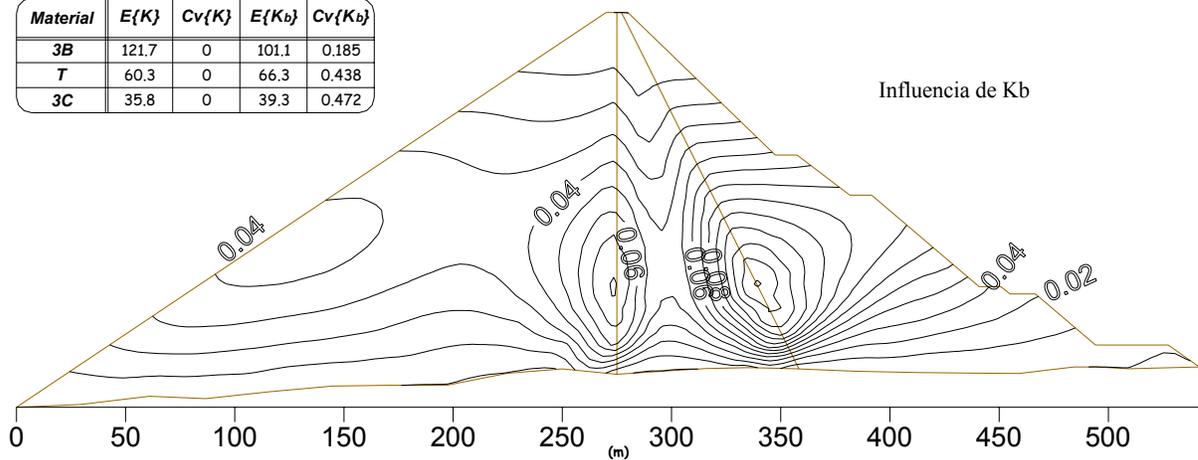


Fig. A1.3 Desviación estándar del desplazamiento horizontal (m). Influencia de  $K_b$ .

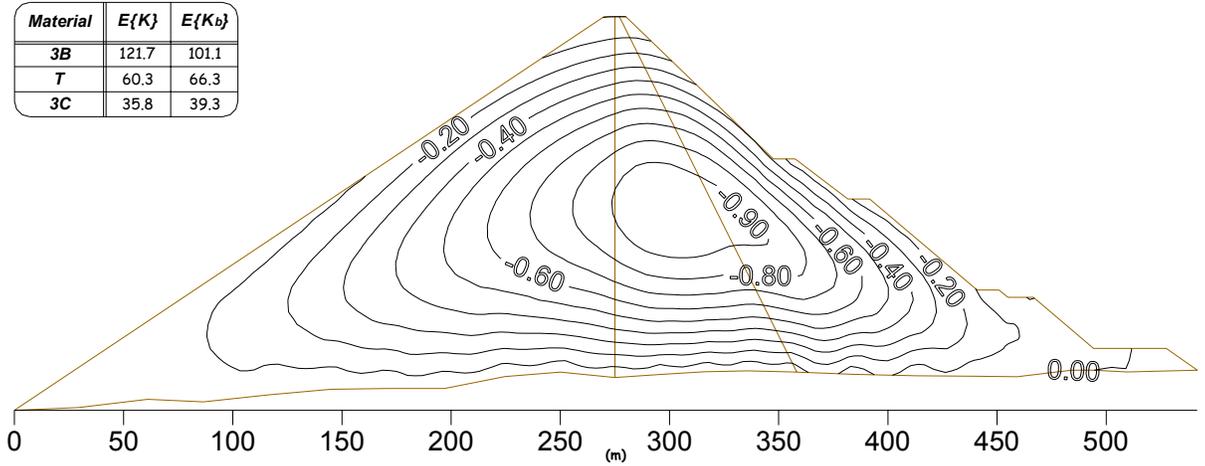


Fig. A1.4 Valor esperado del desplazamiento vertical (m).

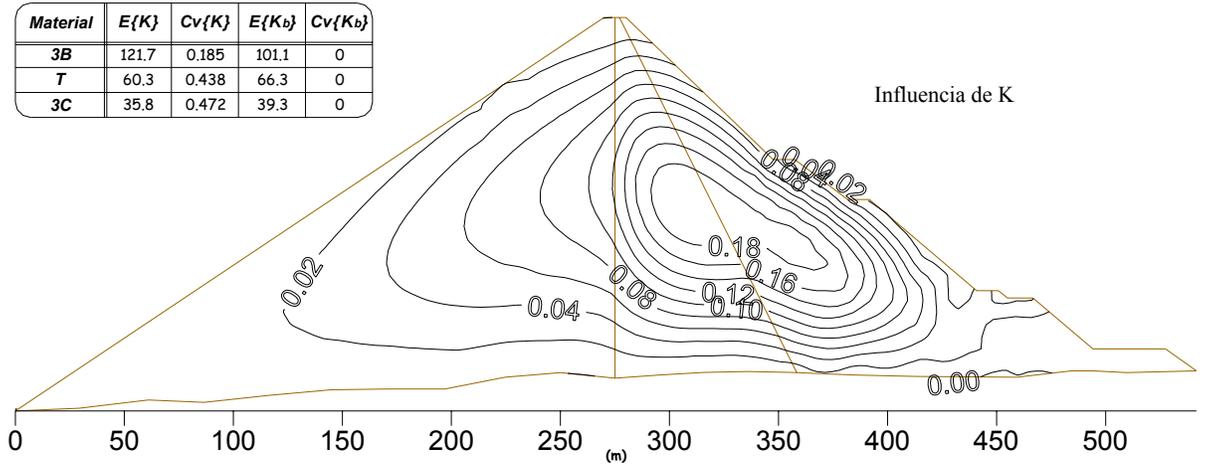


Fig. A1.5 Desviación estándar del desplazamiento vertical (m). Influencia de  $K$ .

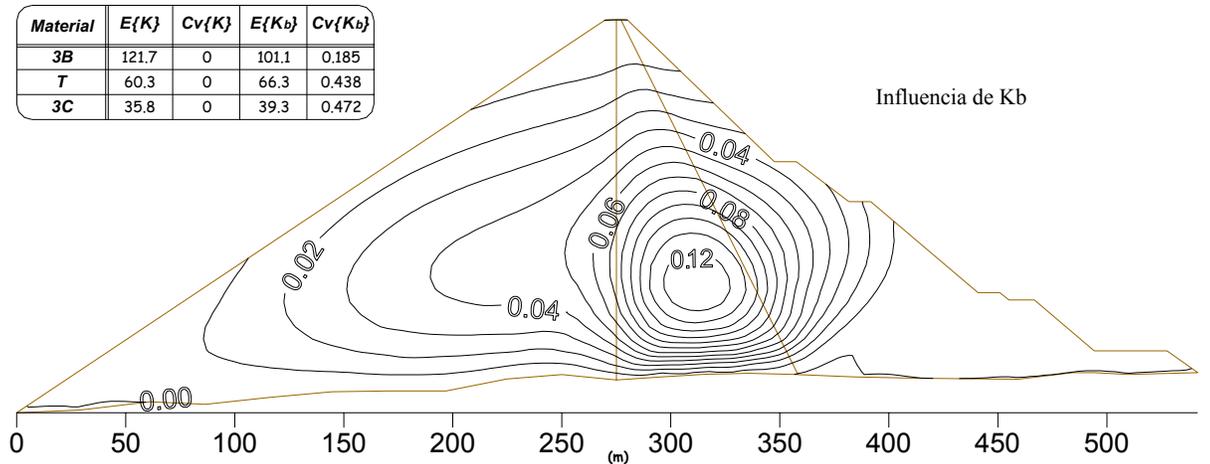


Fig. A1.6 Desviación estándar del desplazamiento vertical (m). Influencia de  $K_b$ .

Material	$E\{K\}$	$E\{K_b\}$
3B	121.7	101.1
T	60.3	66.3
3C	35.8	39.3

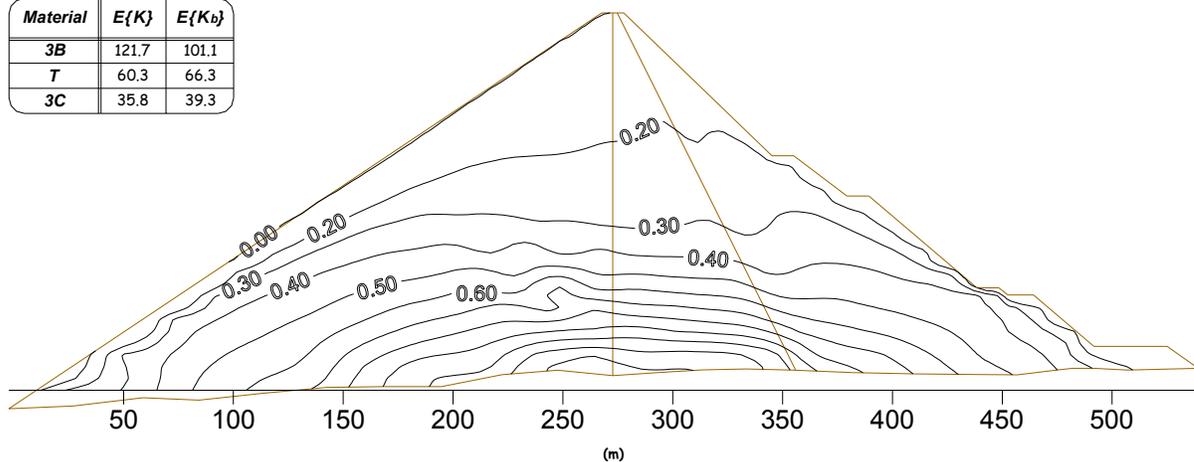


Fig. A1.7 Valor esperado del esfuerzo horizontal (MPa).

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0
T	60.3	0.438	66.3	0
3C	35.8	0.472	39.3	0

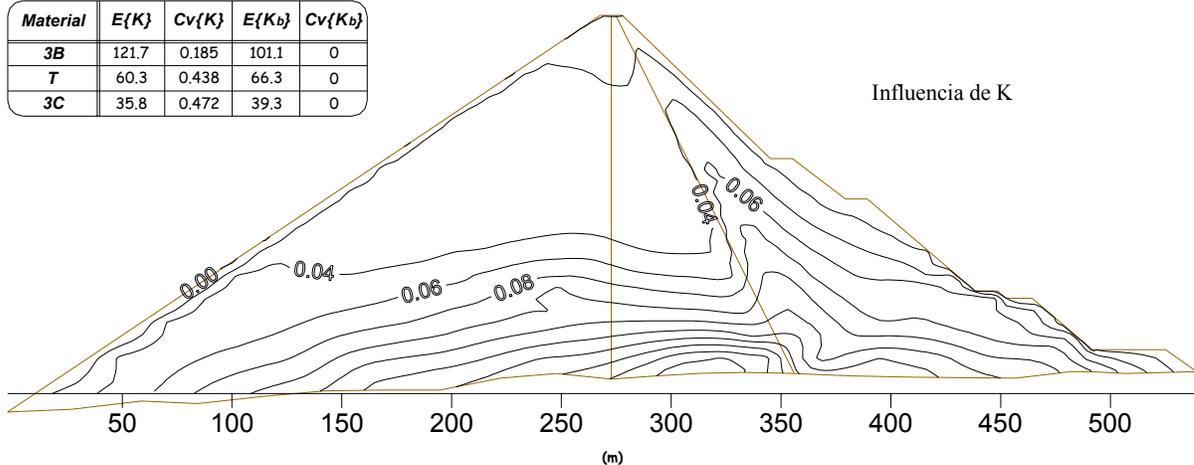


Fig. A1.8 Desviación estándar del esfuerzo horizontal (MPa). Influencia de  $K$ .

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$
3B	121.7	0	101.1	0.185
T	60.3	0	66.3	0.438
3C	35.8	0	39.3	0.472

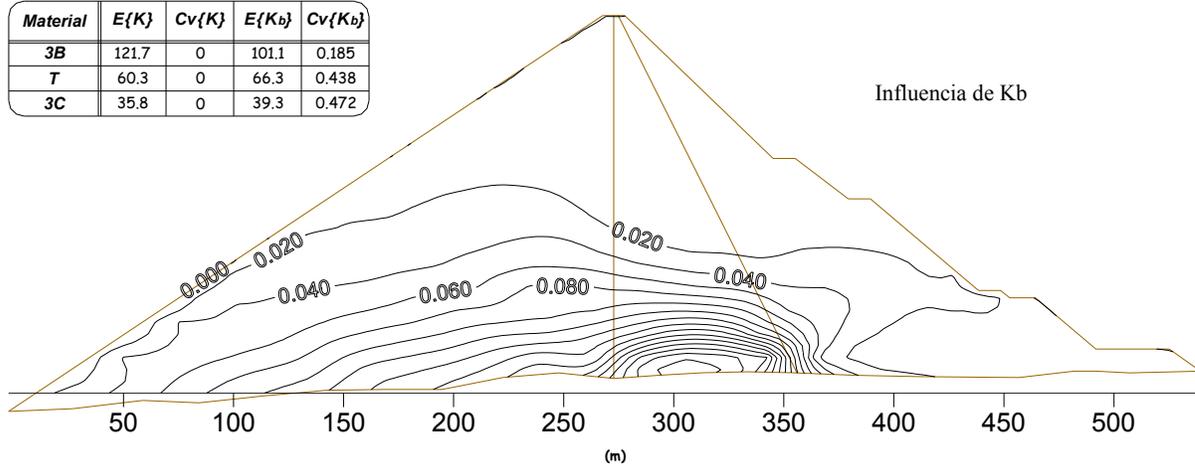


Fig. A1.9 Desviación estándar del esfuerzo horizontal (MPa). Influencia de  $K_b$ .

Material	$E\{K\}$	$E\{K_b\}$
3B	121.7	101.1
T	60.3	66.3
3C	35.8	39.3

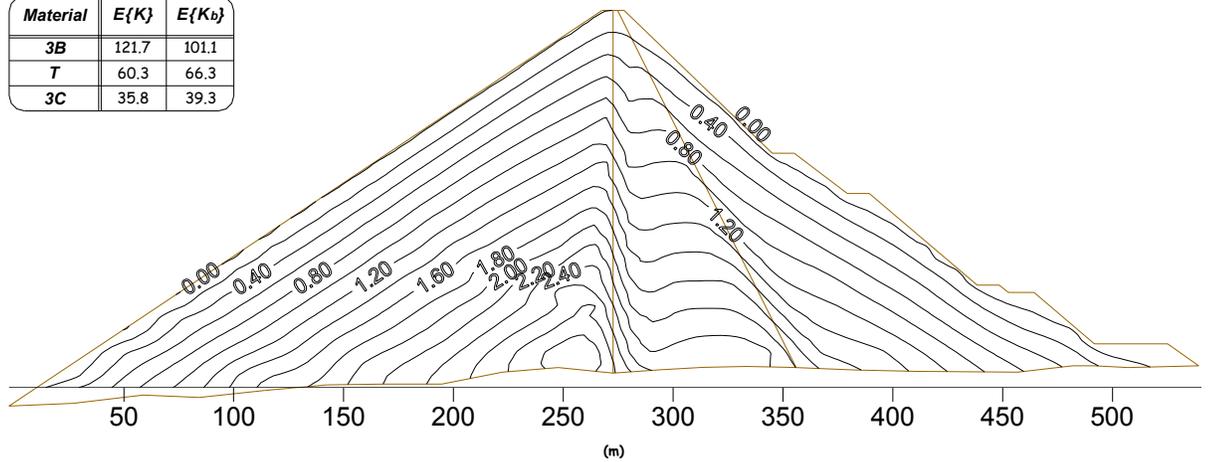


Fig. A1.10 Valor esperado del esfuerzo vertical (MPa).

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0
T	60.3	0.438	66.3	0
3C	35.8	0.472	39.3	0

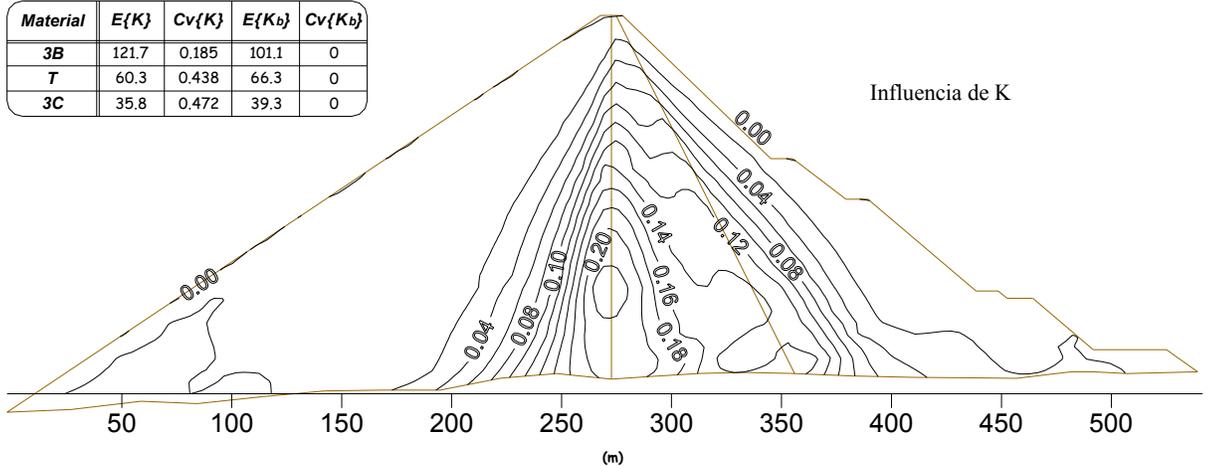


Fig. A1.11 Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Influencia de  $K$ .

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$
3B	121.7	0	101.1	0.185
T	60.3	0	66.3	0.438
3C	35.8	0	39.3	0.472

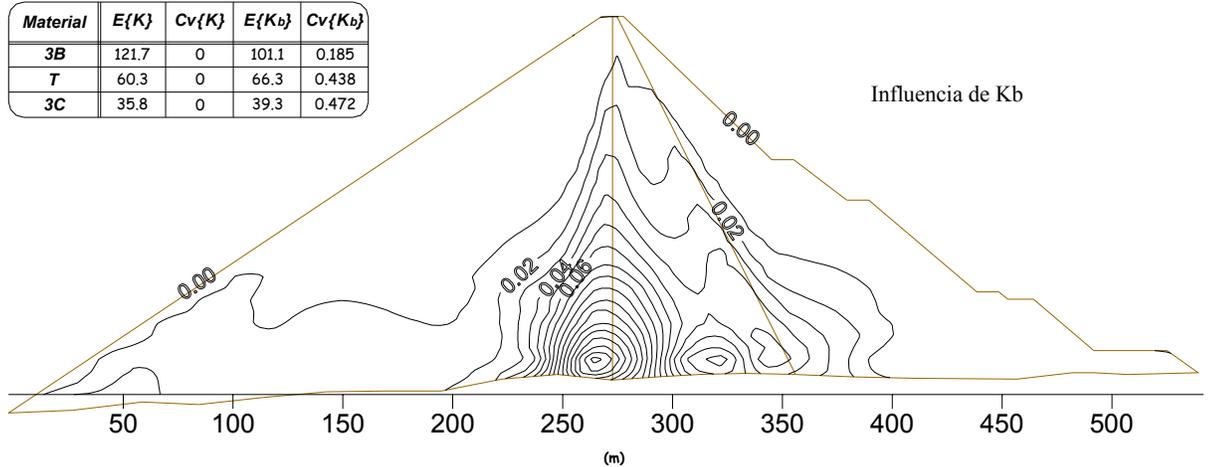


Fig. A1.12 Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Influencia de  $K_b$ .

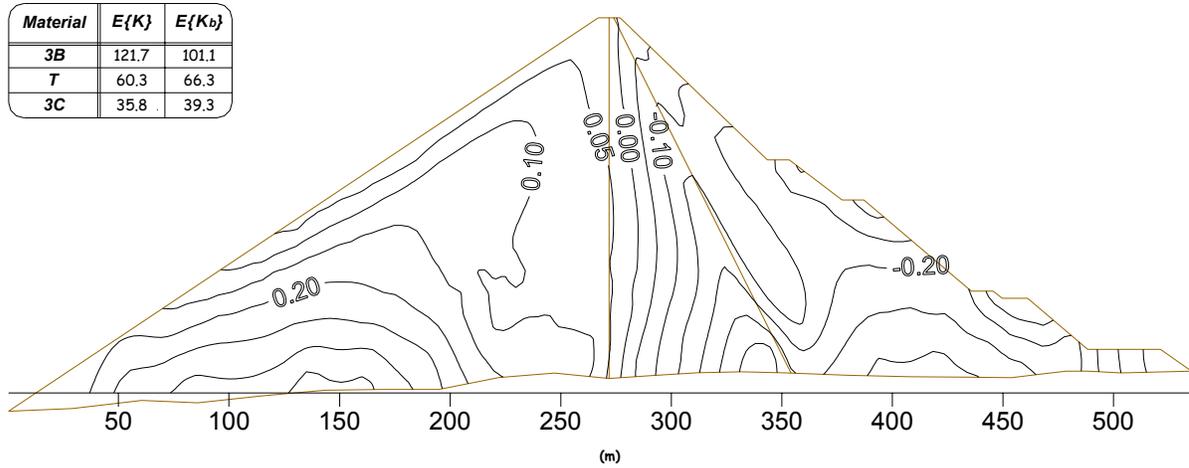


Fig. A1.13 Valor esperado del esfuerzo cortante (MPa).

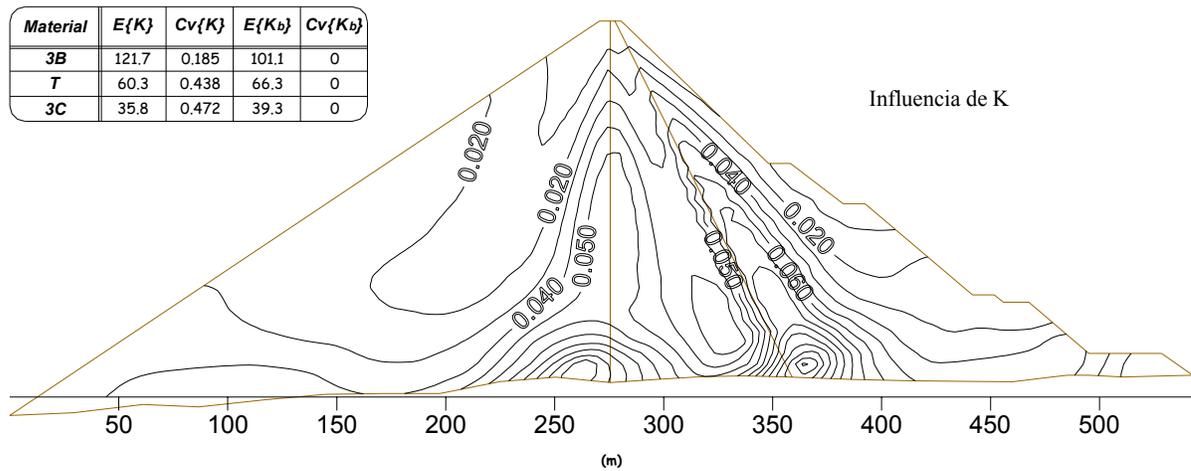


Fig. A1.14 Desviación estándar del esfuerzo cortante (MPa). Influencia de  $K$ .

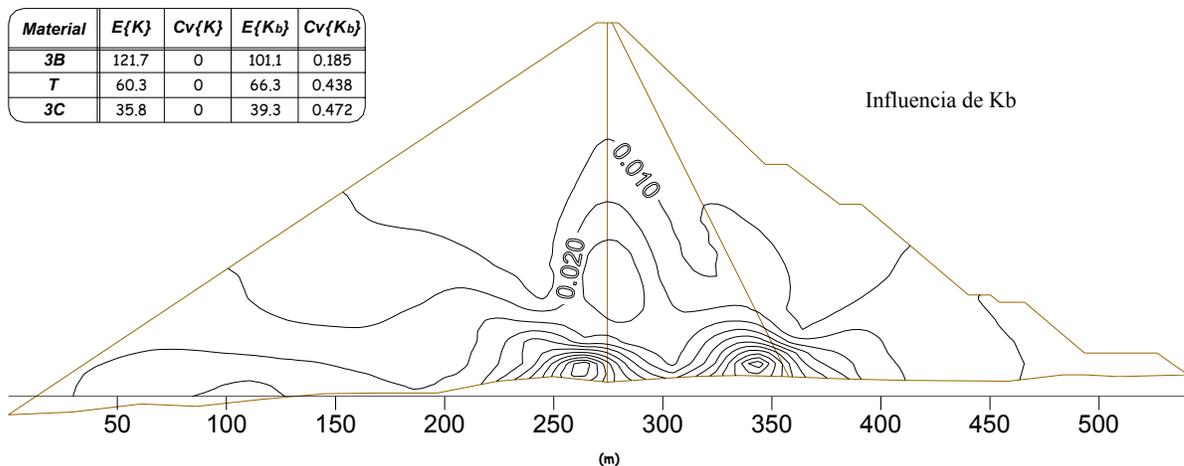


Fig. A1.15 Desviación estándar del esfuerzo cortante (MPa). Influencia de  $K_b$ .

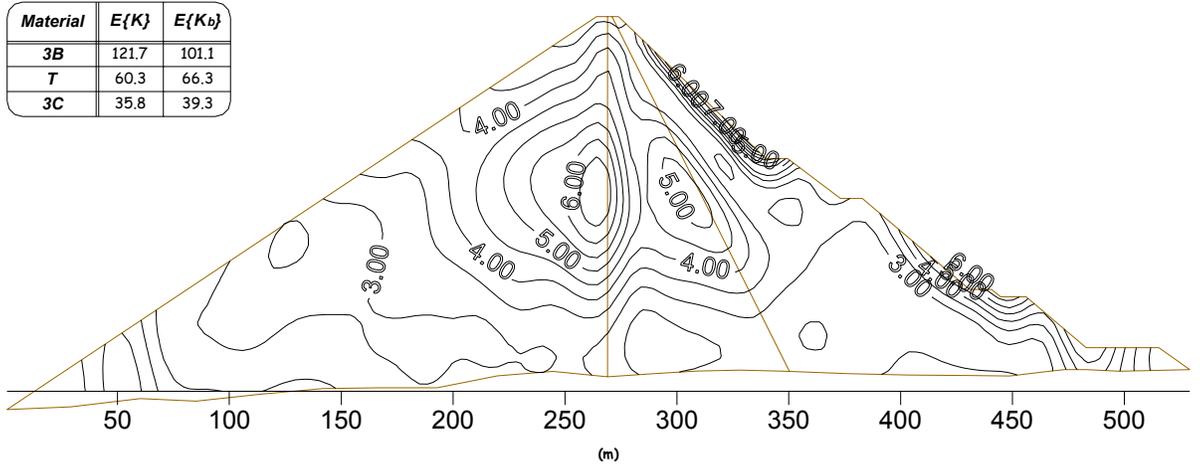


Fig. A1.16 Valor esperado de la relación de esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$ .

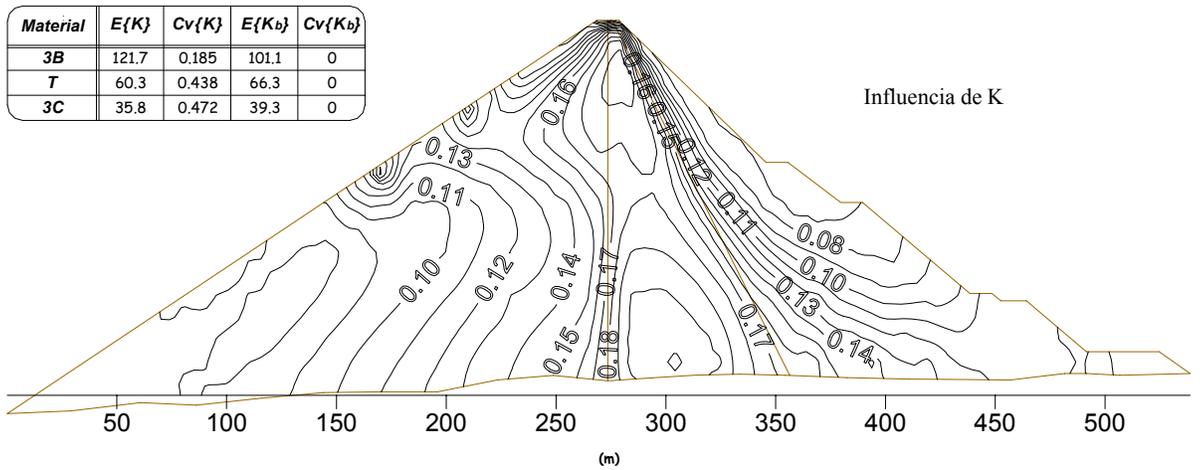


Fig. A1.17 Coeficiente de variación de la relación de esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$ . Influencia de  $K$ .

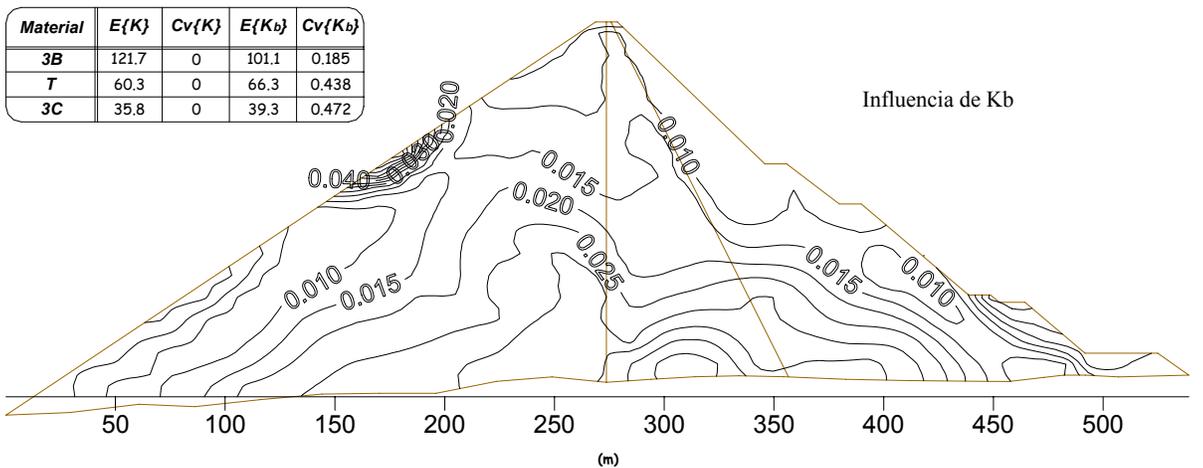


Fig. A1.18 Coeficiente de variación de la relación de esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$ . Influencia de  $K_b$ .

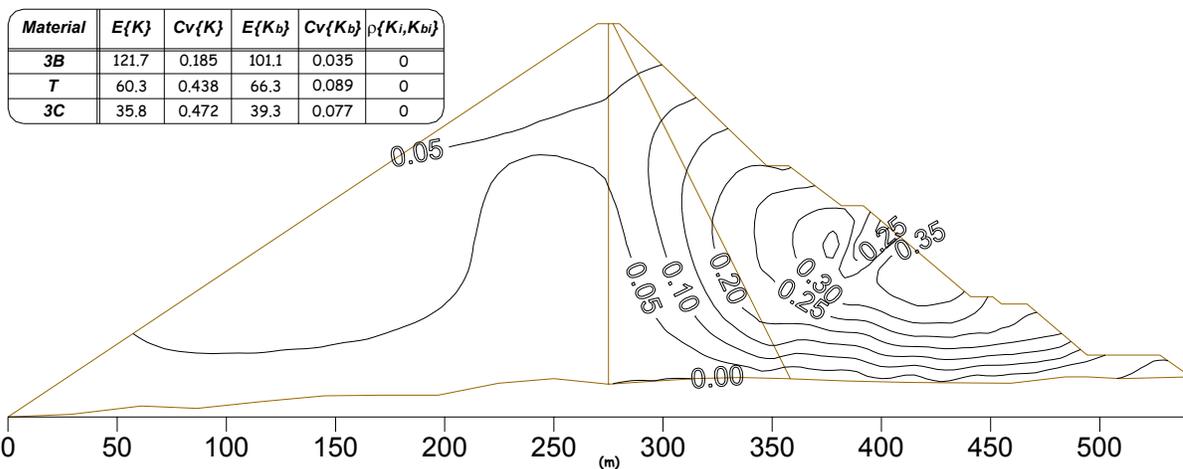


Fig. A1.19 Desviación estándar del desplazamiento horizontal (m). Materiales independientes (SMA).

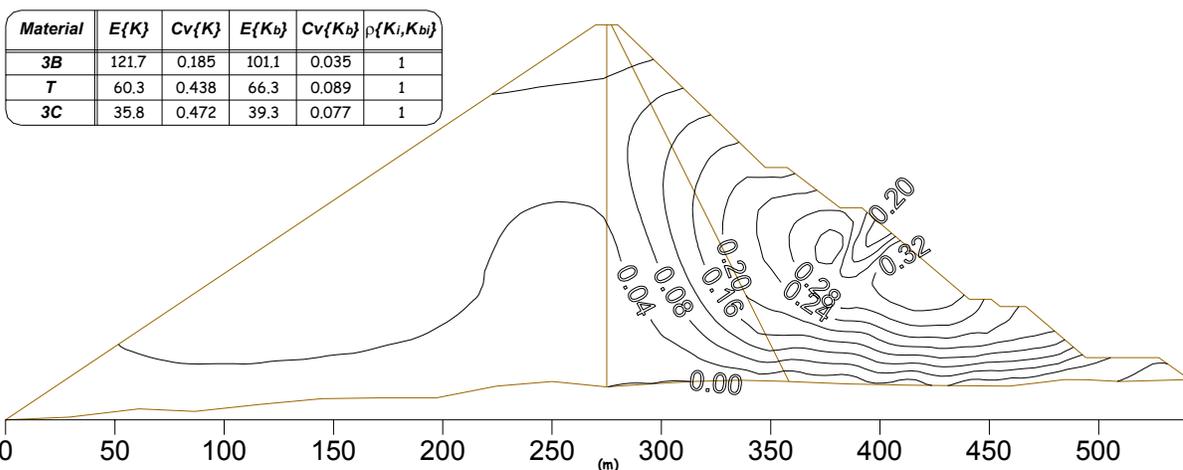


Fig. A1.20 Desviación estándar del desplazamiento horizontal (m). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$  (SMA).

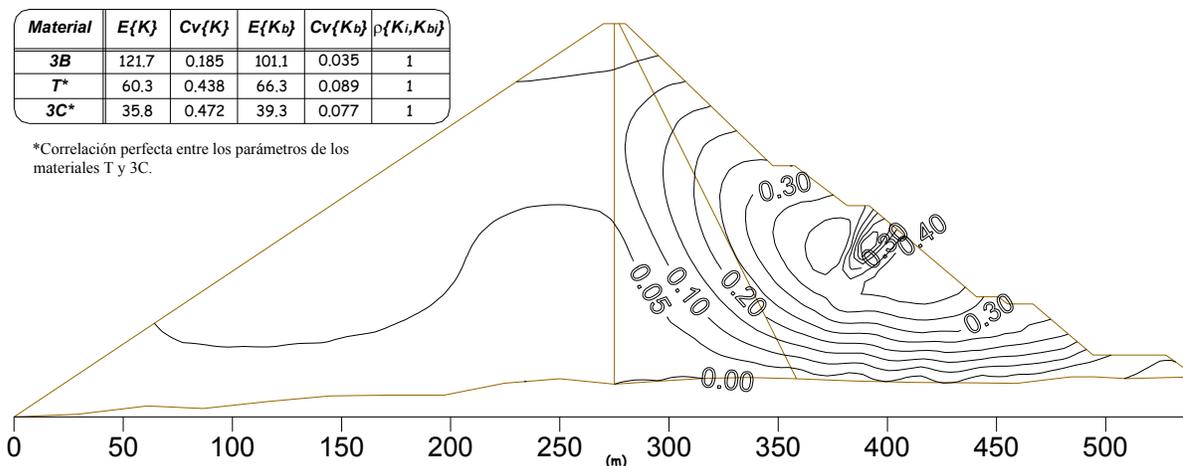
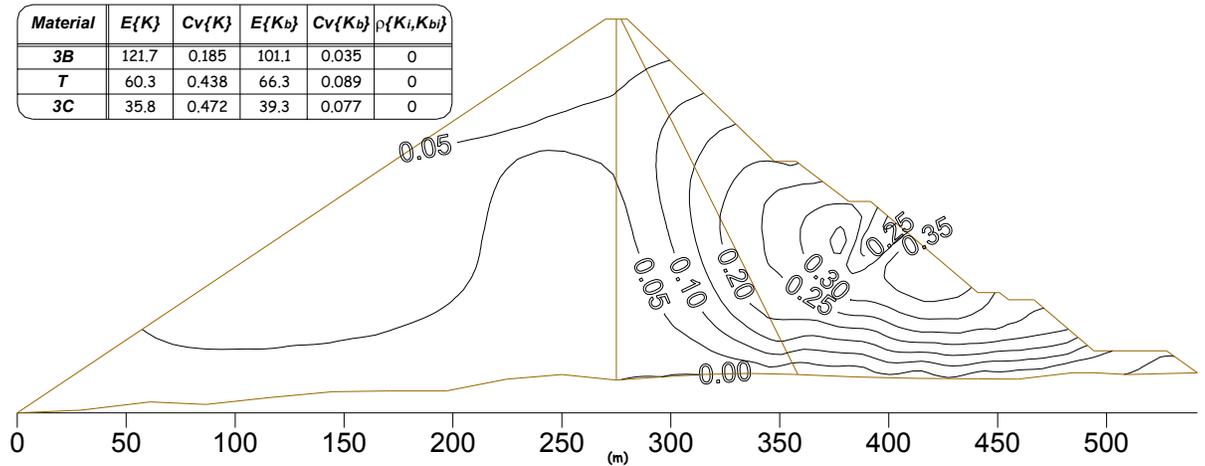
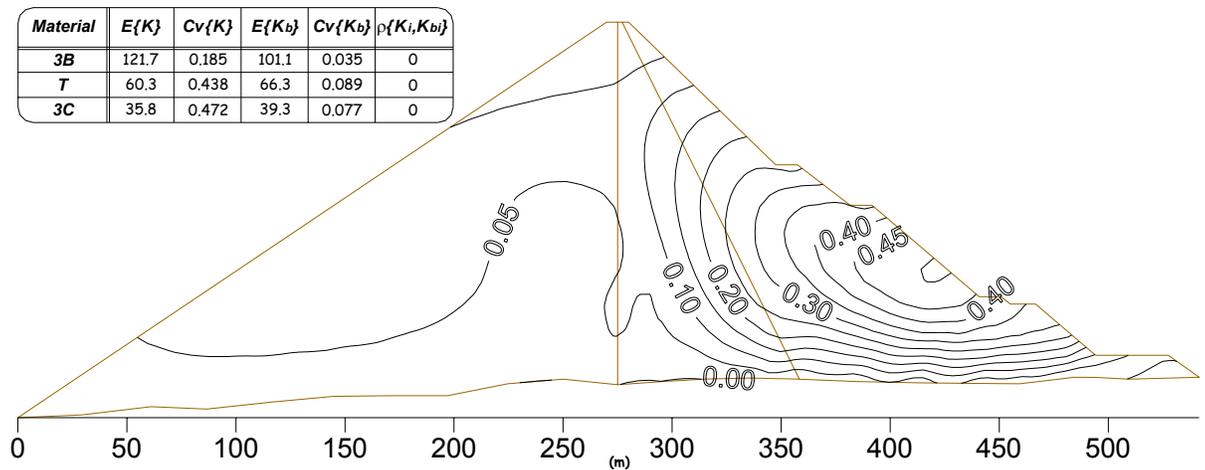


Fig. A1.21 Desviación estándar del desplazamiento horizontal (m). Correlación perfecta entre los materiales T y 3C (SMA).



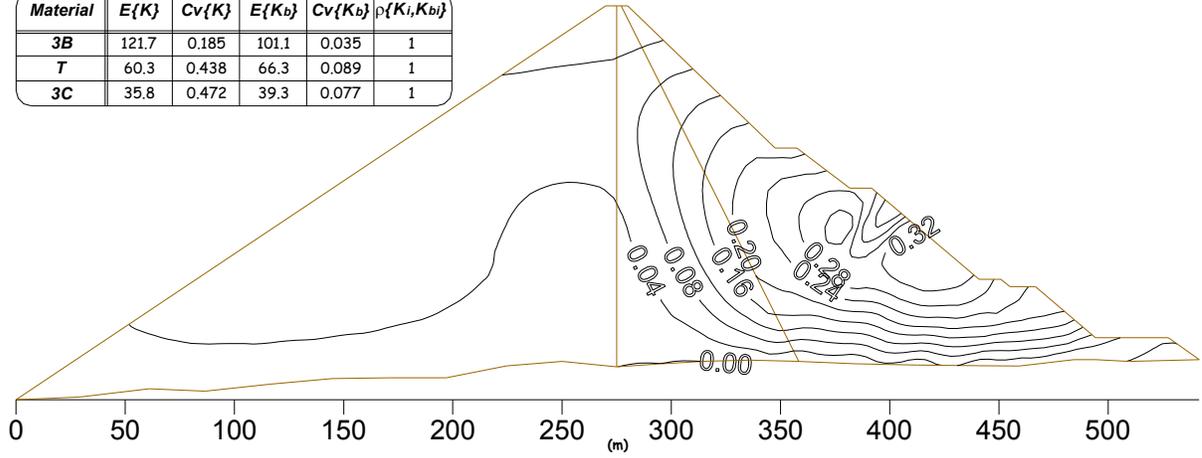
(a)



(b)

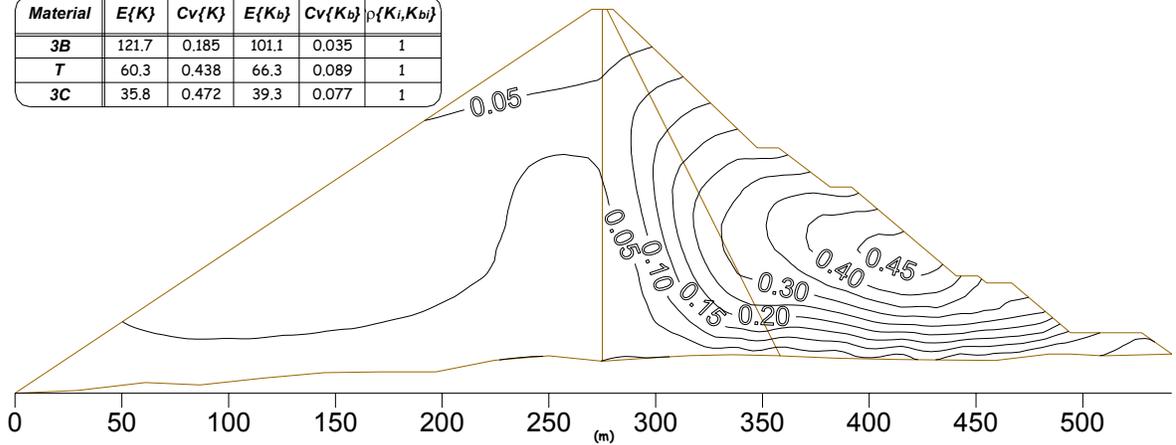
**Fig. A1.22 Desviación estándar del desplazamiento horizontal (m). Materiales independientes. Comparación entre: a) SMA y b) PEM.**

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1



(a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1



(a)

Fig. A1.23 Desviación estándar del desplazamiento horizontal (m). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{bi}$ . Comparación entre: a) SMA y b) MCSM.

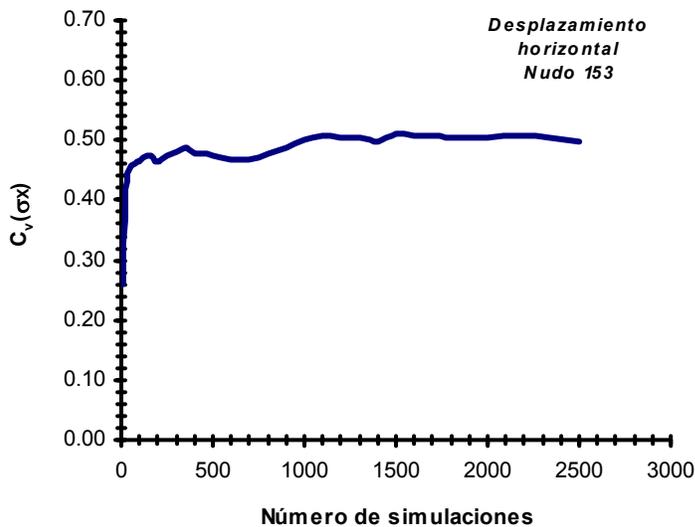


Fig. A1.24 Convergencia del desplazamiento horizontal.

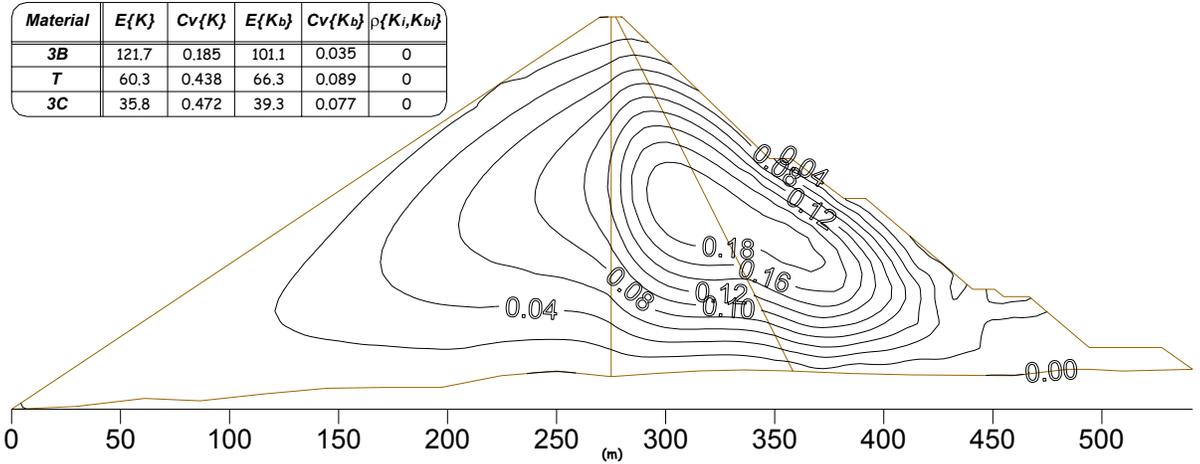


Fig. A1.25 Desviación estándar del desplazamiento vertical (m). Materiales independientes (SMA).

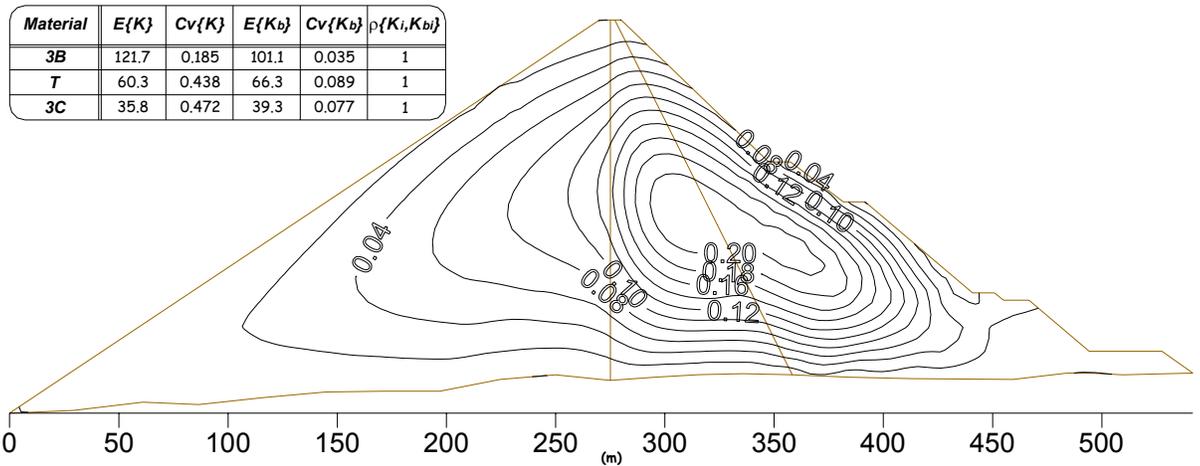


Fig. A1.26 Desviación estándar del desplazamiento vertical (m). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$  (SMA).

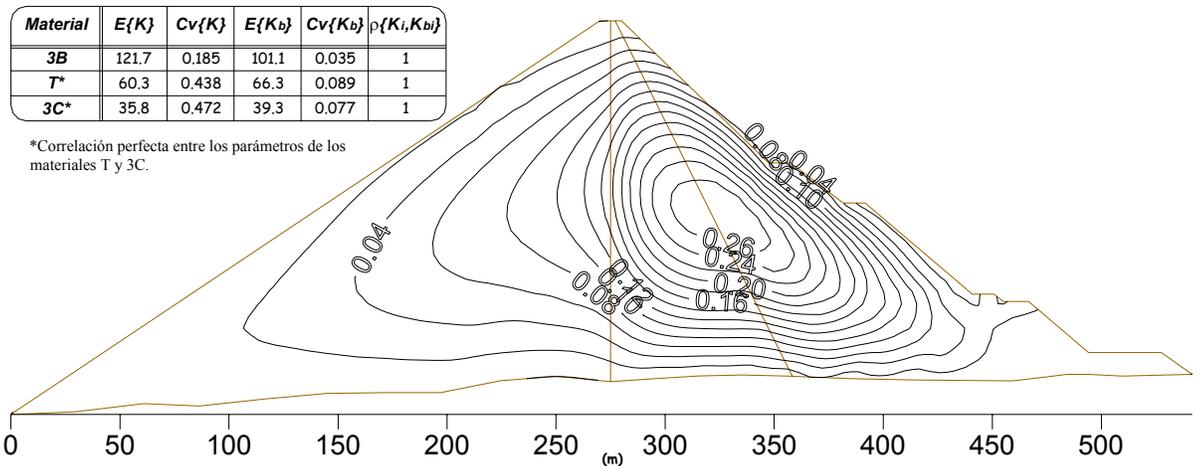
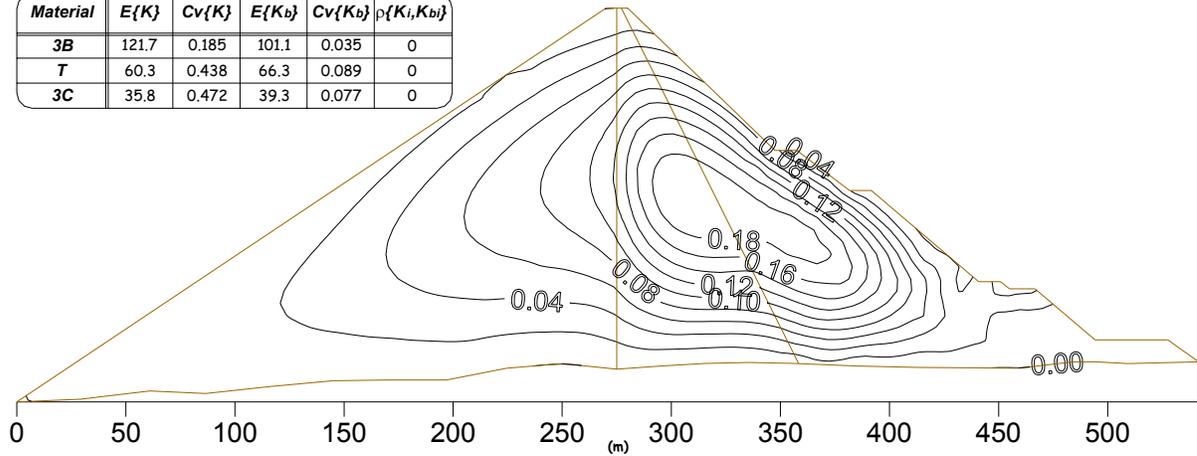


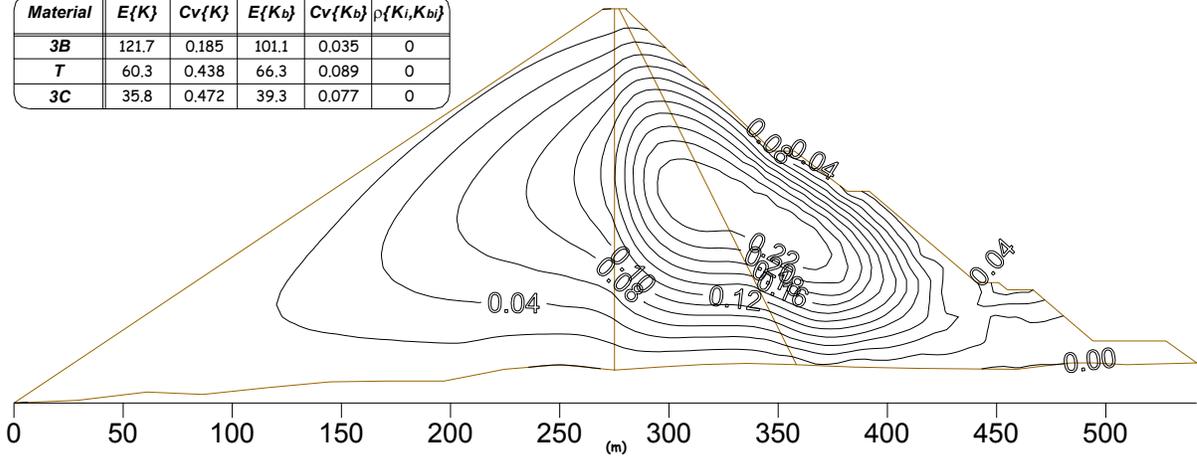
Fig. A1.27 Desviación estándar del desplazamiento vertical (m). Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C (SMA).

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bj}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0



(a)

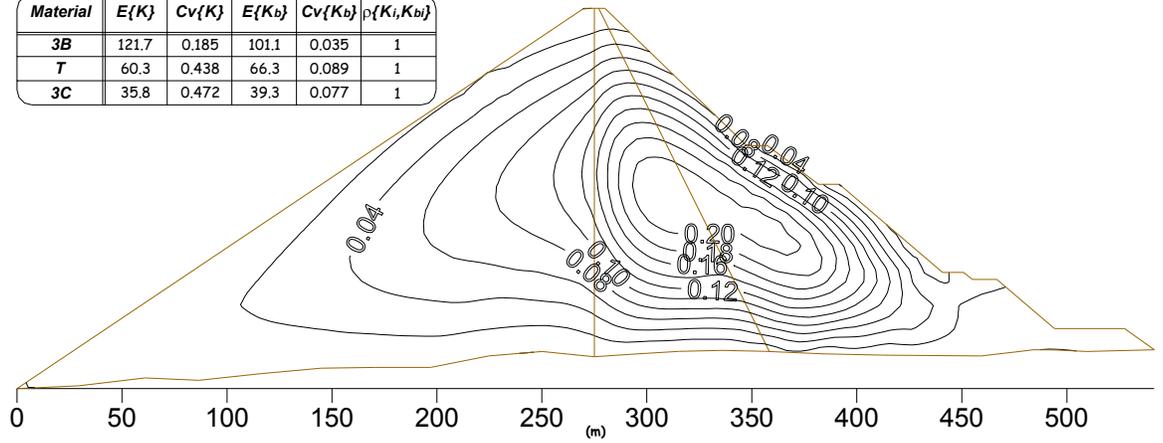
Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bj}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0



(b)

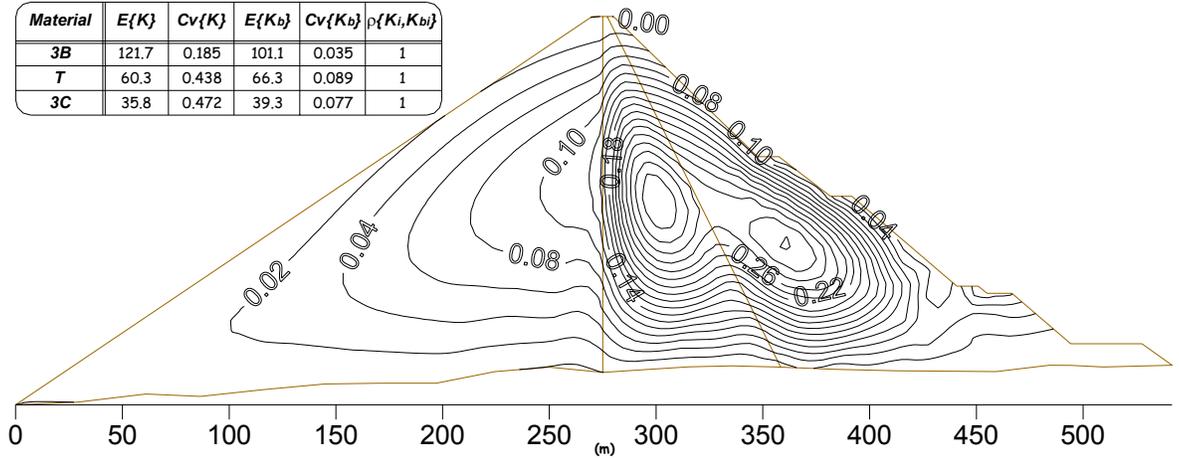
**Fig. A1.28 Desviación estándar del desplazamiento vertical (m). Materiales independientes. Comparación entre: a) SMA y b) PEM.**

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1



(a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1

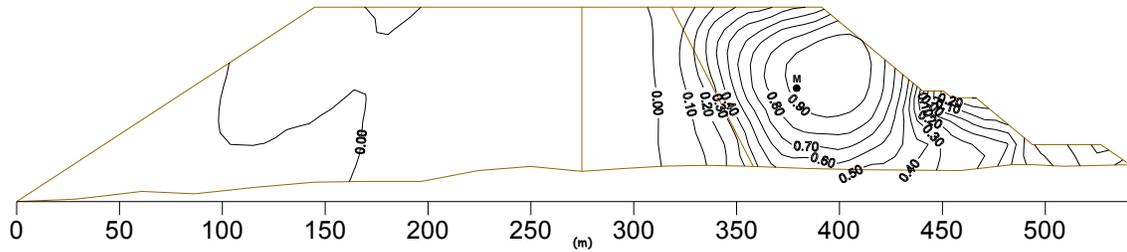


(b)

Fig. A1.29 Desviación estándar del desplazamiento vertical (m). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$ . Comparación entre: a) SMA y b) MCSM.

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0

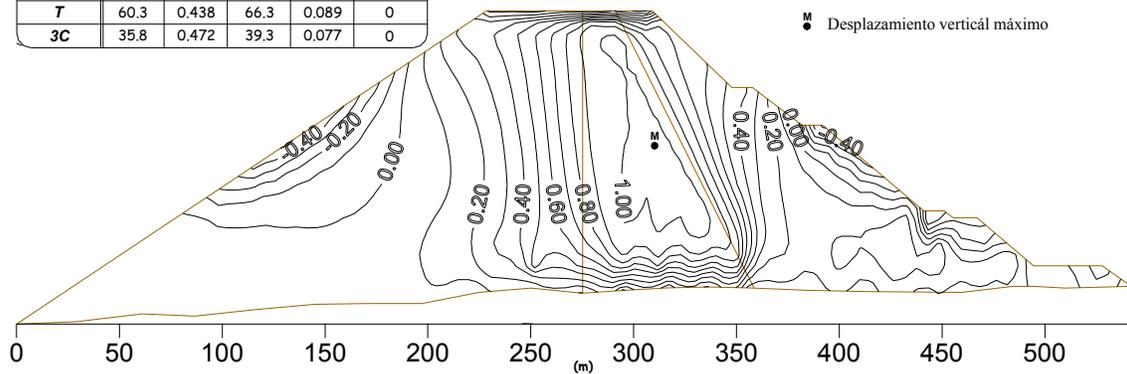
M ● Desplazamiento vertical máximo



(a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0

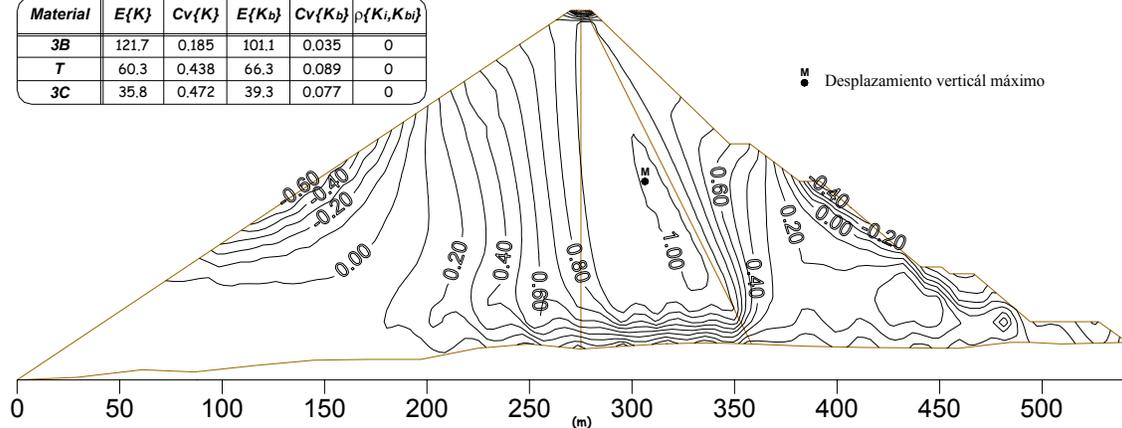
M ● Desplazamiento vertical máximo



(b)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0

M ● Desplazamiento vertical máximo



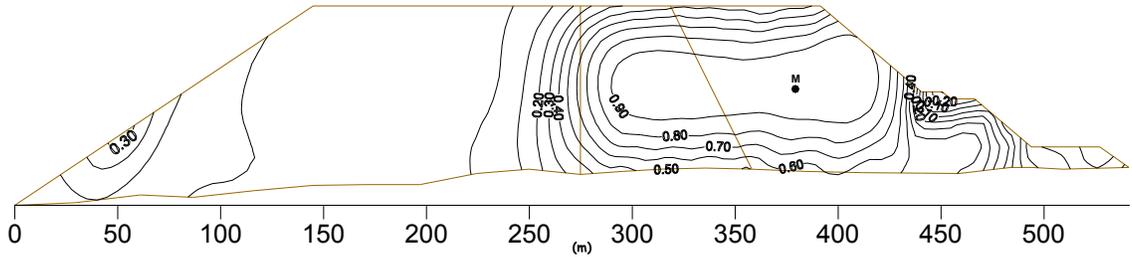
(c)

Fig. A1.30 Coeficiente de correlación entre el desplazamiento vertical máximo y el resto de los nudos para tres etapas de construcción. Materiales independientes: a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura; c) Final de la construcción.

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.

M ● Desplazamiento vertical máximo

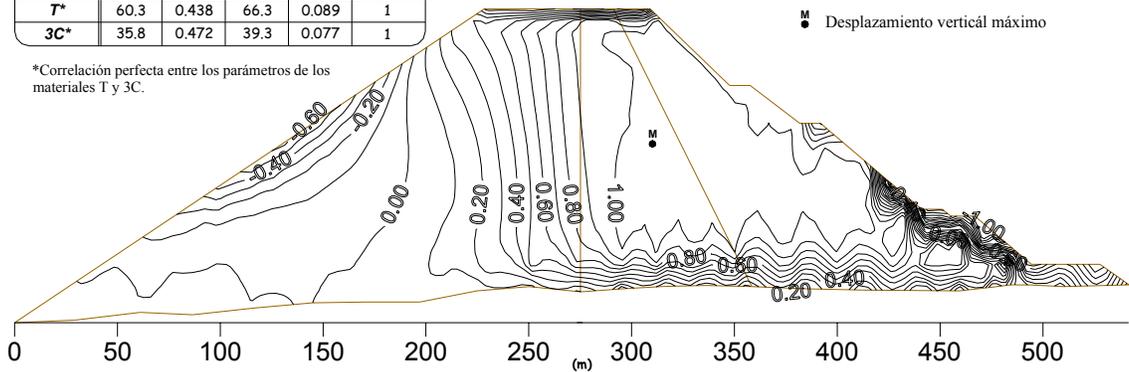


(a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.

M ● Desplazamiento vertical máximo

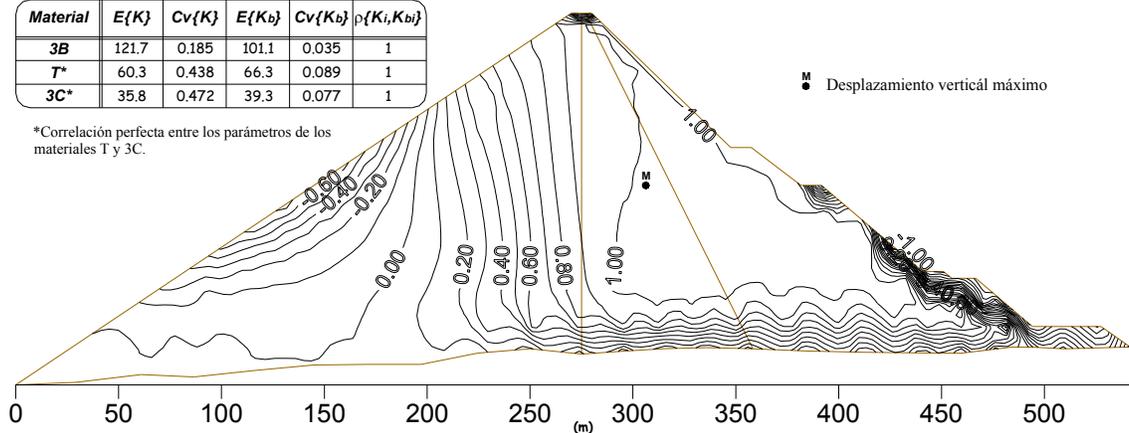


(b)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.

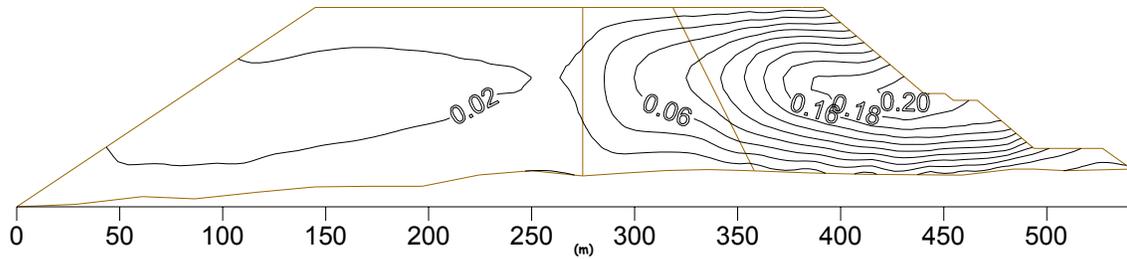
M ● Desplazamiento vertical máximo



(c)

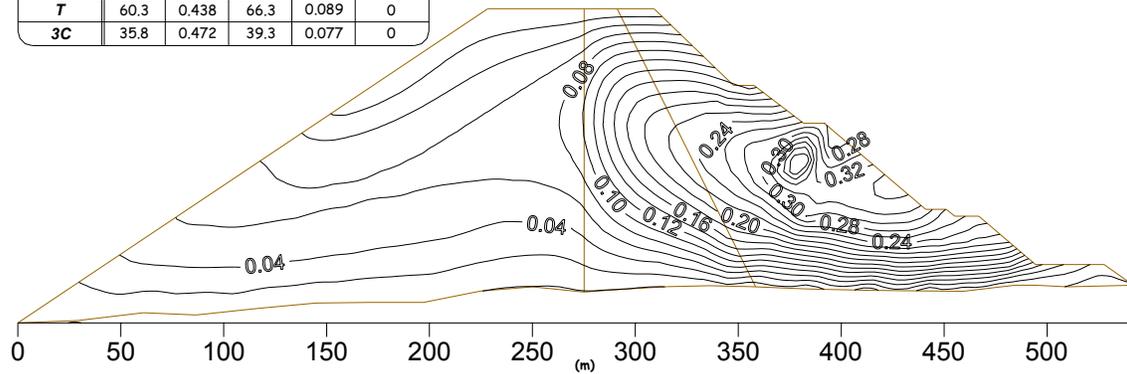
**Fig. A1.31 Coeficiente de correlación entre el desplazamiento vertical máximo y el resto de los nudos para tres etapas de construcción. Correlación entre materiales T y 3C : a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura; c) Final de la construcción.**

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0



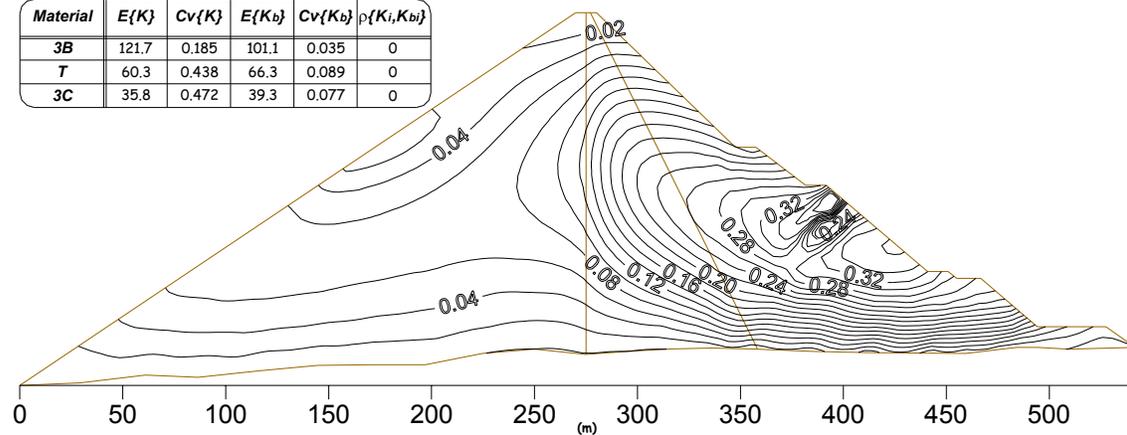
(a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0



(b)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0

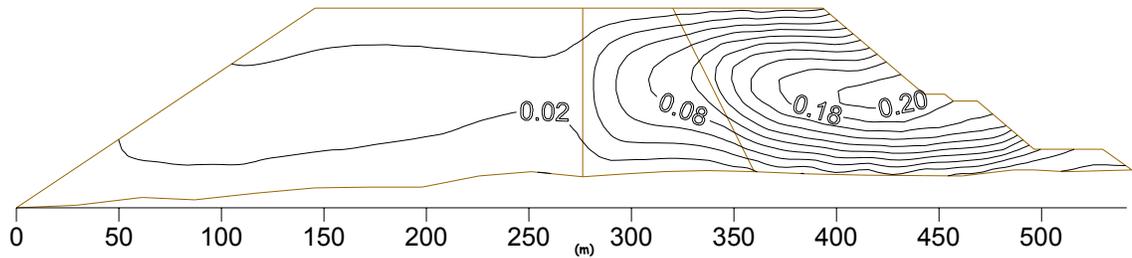


(c)

Fig. A1.32 Desviación estándar de la magnitud del desplazamiento total (m). Materiales independientes: a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura; c) Final de la construcción.

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

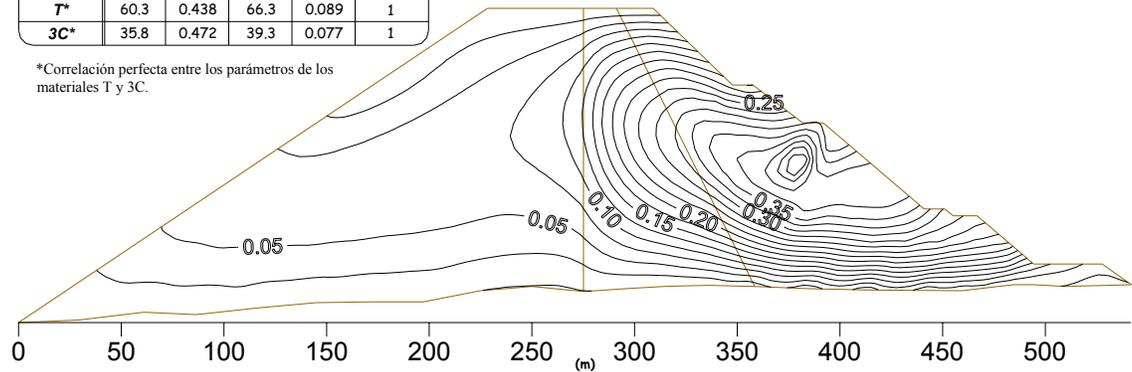
\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.



(a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

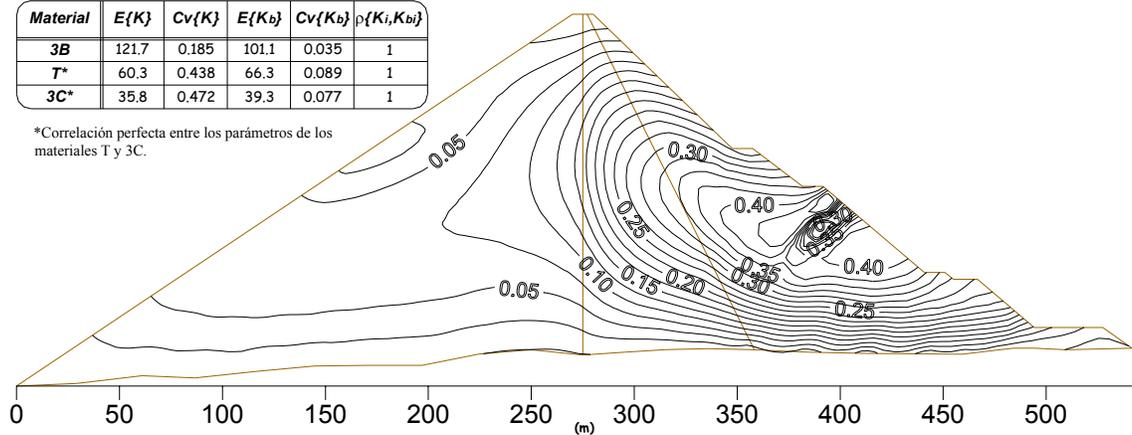
\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.



(b)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.



(c)

**Fig. A1.33** Desviación estándar de la magnitud del desplazamiento total (m). Correlación entre materiales T y 3C : a) Primer tercio de la altura; b) Segundo tercio de la altura; c) Final de la construcción.

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	0
T	60.3	0.438	66.3	0.089	0
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	0

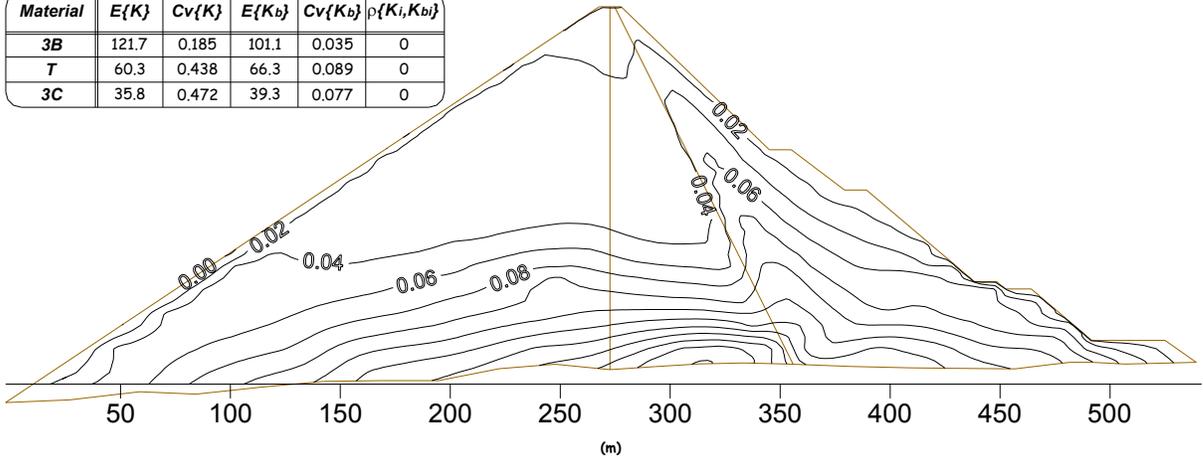


Fig. A1.34 Desviación estándar del esfuerzo horizontal (MPa). Materiales independientes (SMA).

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1

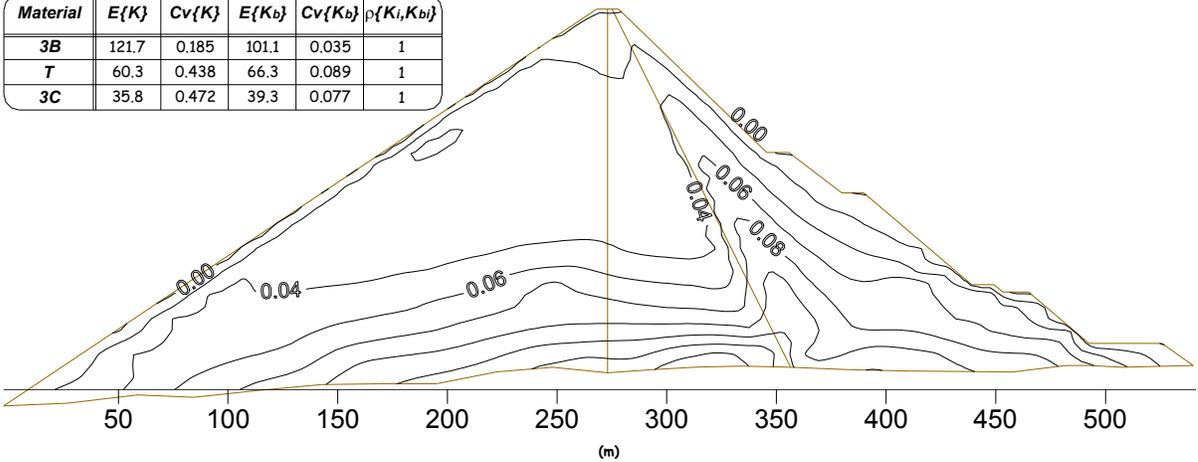


Fig. A1.35 Desviación estándar del esfuerzo horizontal (MPa). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$  (SMA).

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{b_i}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.

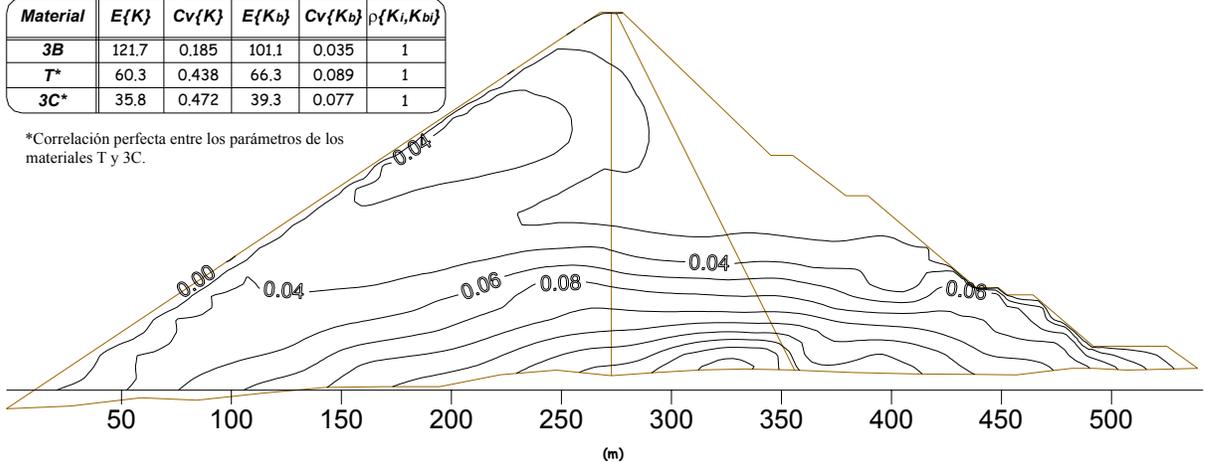
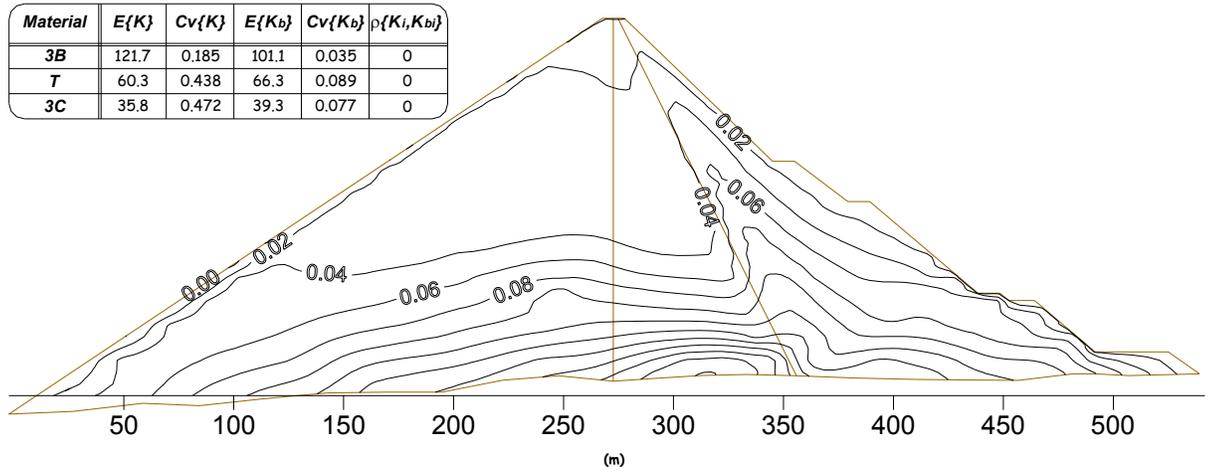
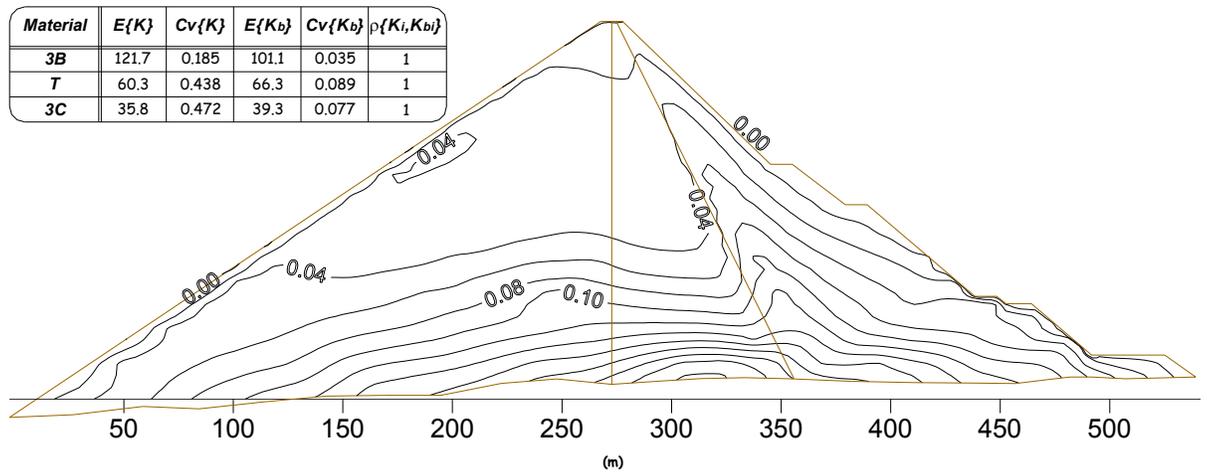


Fig. A1.36 Desviación estándar del esfuerzo horizontal (MPa). Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C (SMA).



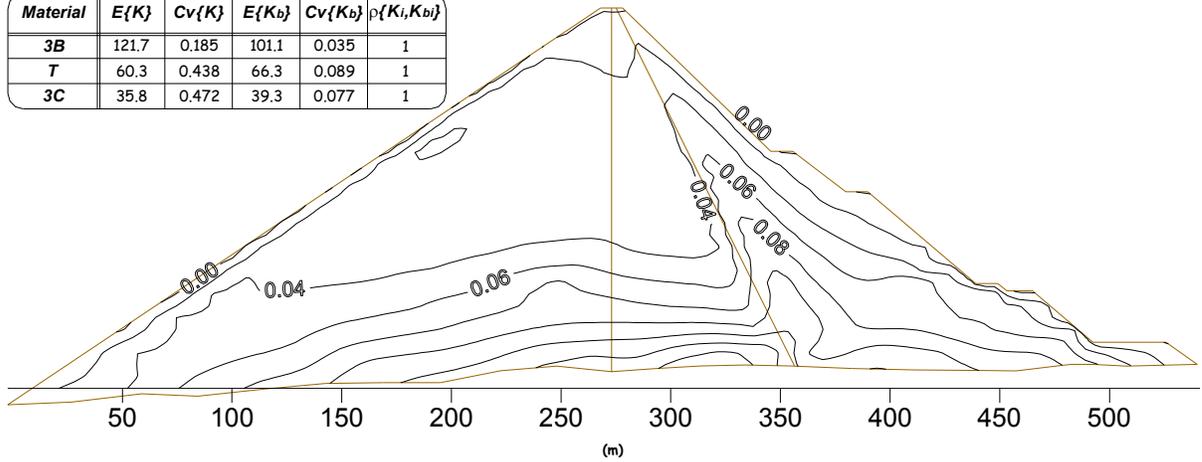
(a)



(b)

**Fig. A1.37** Desviación estándar del esfuerzo horizontal (MPa). Materiales independientes. Comparación entre: a) SMA y b) PEM.

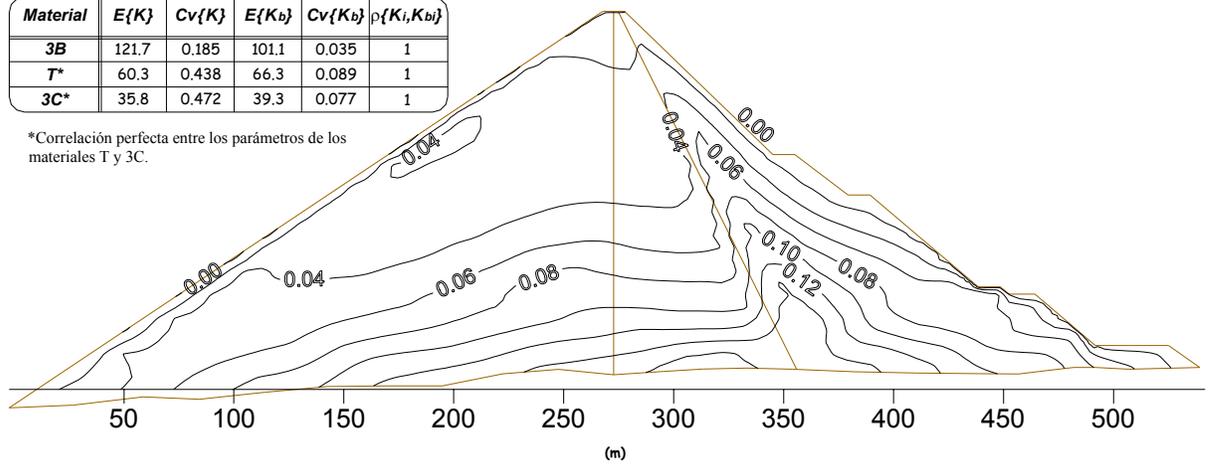
Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1



(a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.



(b)

Fig. A1.38 Desviación estándar del esfuerzo horizontal (MPa). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$ . Comparación entre: a) SMA y b) MCSM.

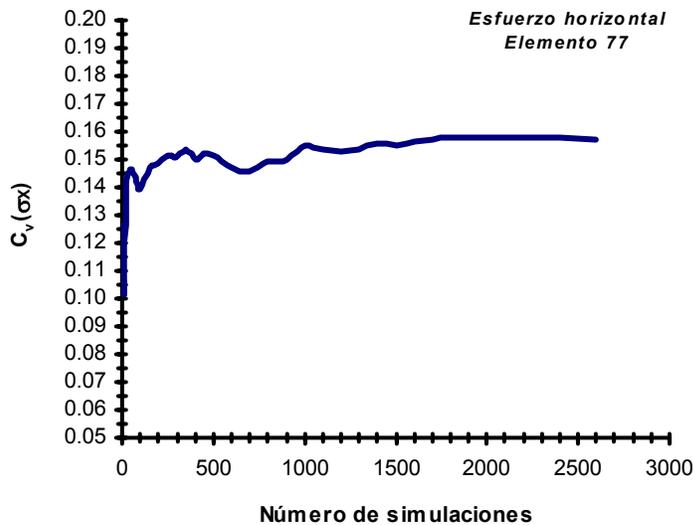


Fig. A1.39 Convergencia del esfuerzo horizontal.

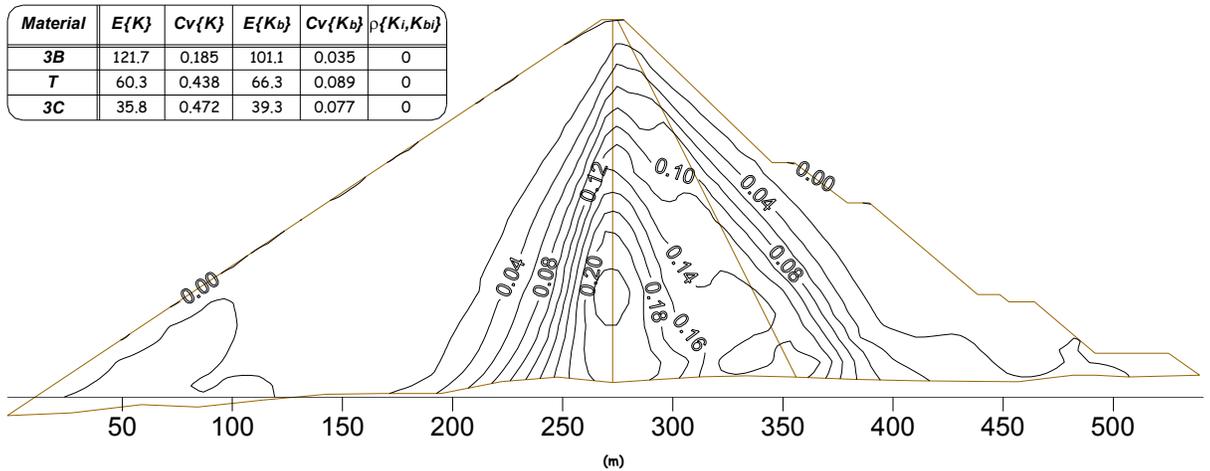


Fig. A1.40 Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Materiales independientes (SMA).

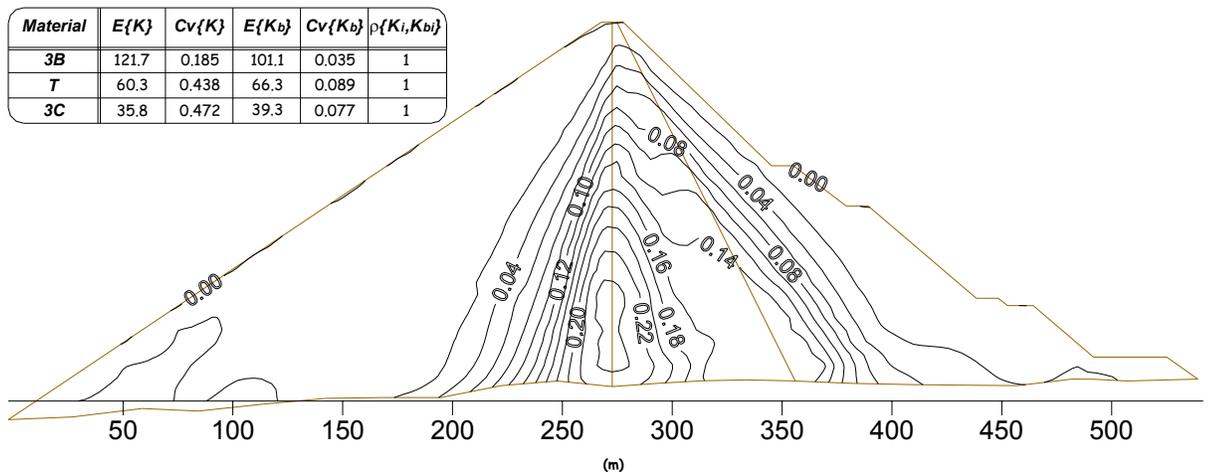


Fig. A1.41 Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$  (SMA).

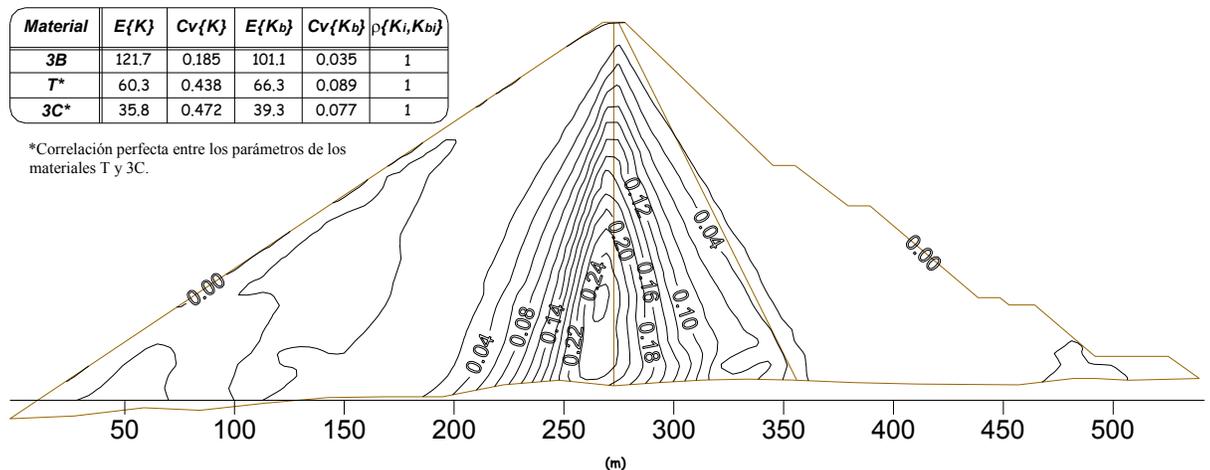
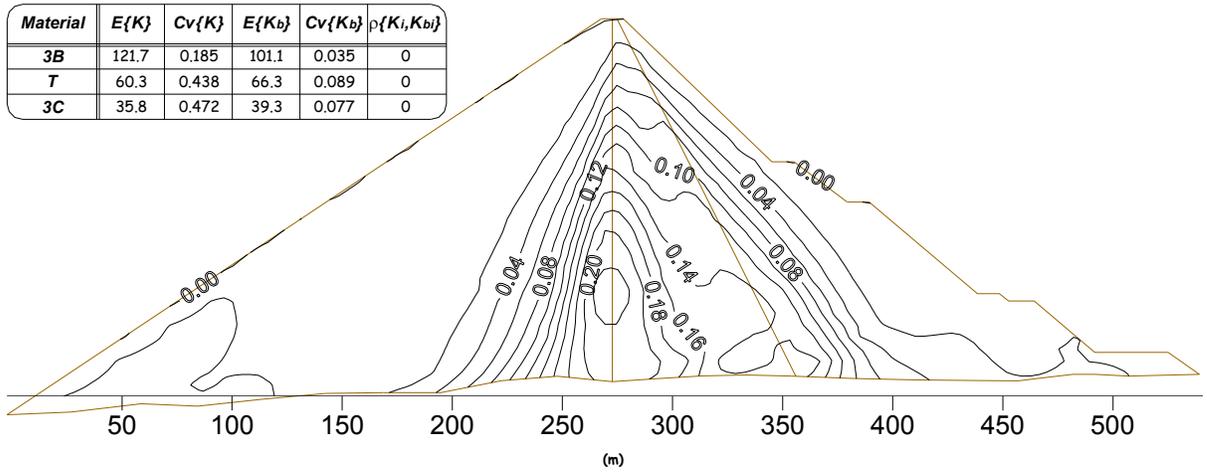
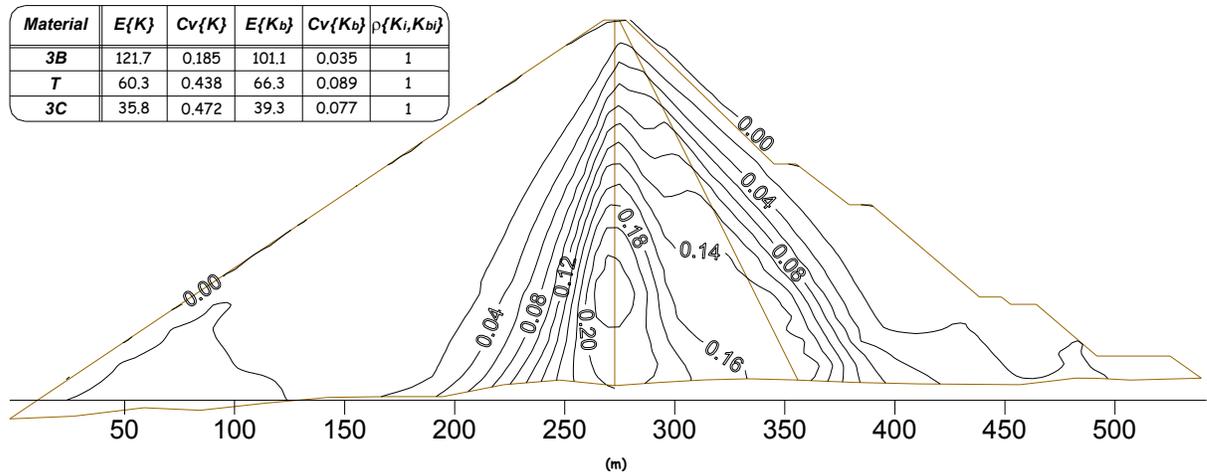


Fig. A1.42 Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C (SMA).



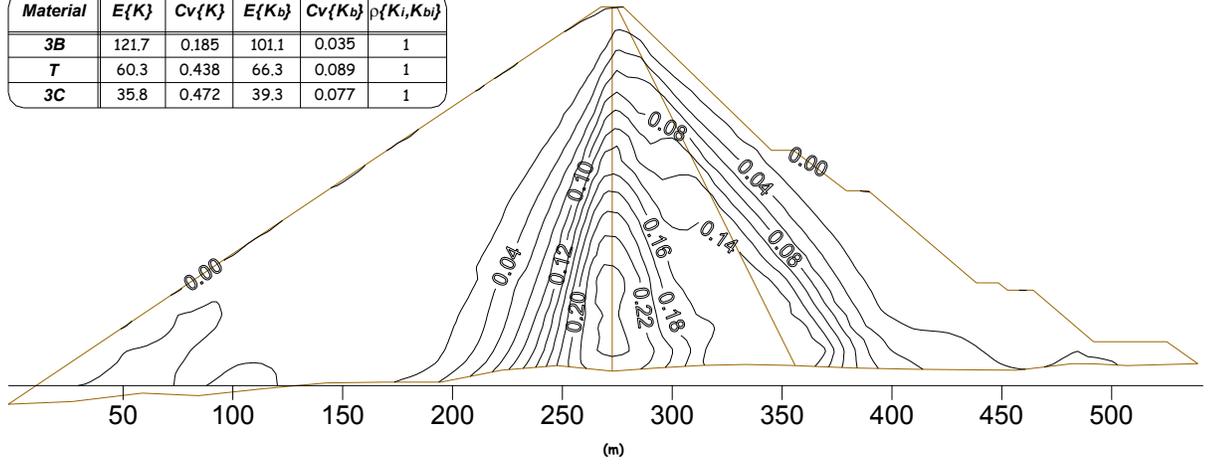
(a)



(b)

Fig. A1.43 Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Materiales independientes. Comparación entre: a) SMA y b) PEM.

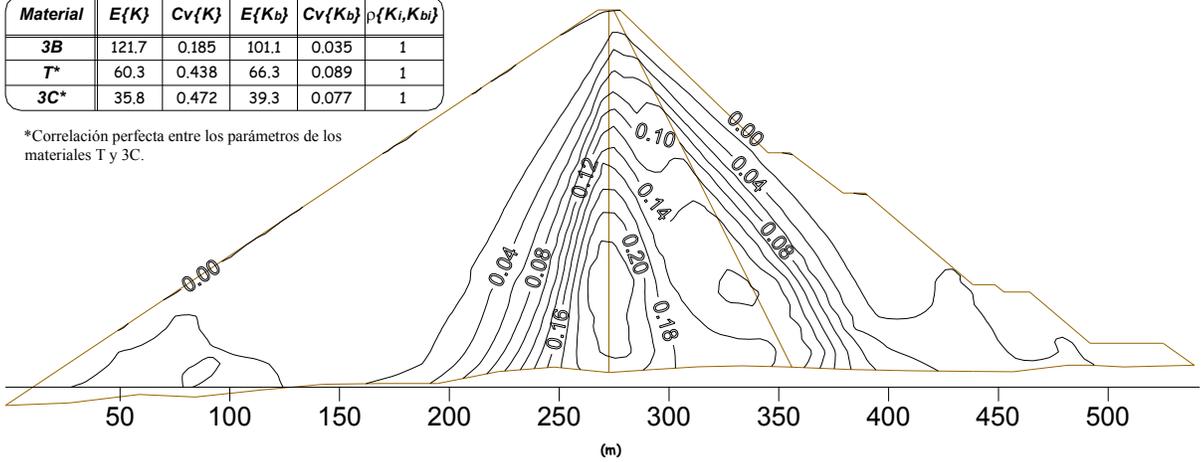
Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C	35.8	0.472	39.3	0.077	1



(a)

Material	$E\{K\}$	$Cv\{K\}$	$E\{K_b\}$	$Cv\{K_b\}$	$\rho\{K_i, K_{bi}\}$
3B	121.7	0.185	101.1	0.035	1
T*	60.3	0.438	66.3	0.089	1
3C*	35.8	0.472	39.3	0.077	1

\*Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C.



(b)

Fig. A1.44 Desviación estándar del esfuerzo vertical (MPa). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$ . Comparación entre: a) SMA y b) MCSM.

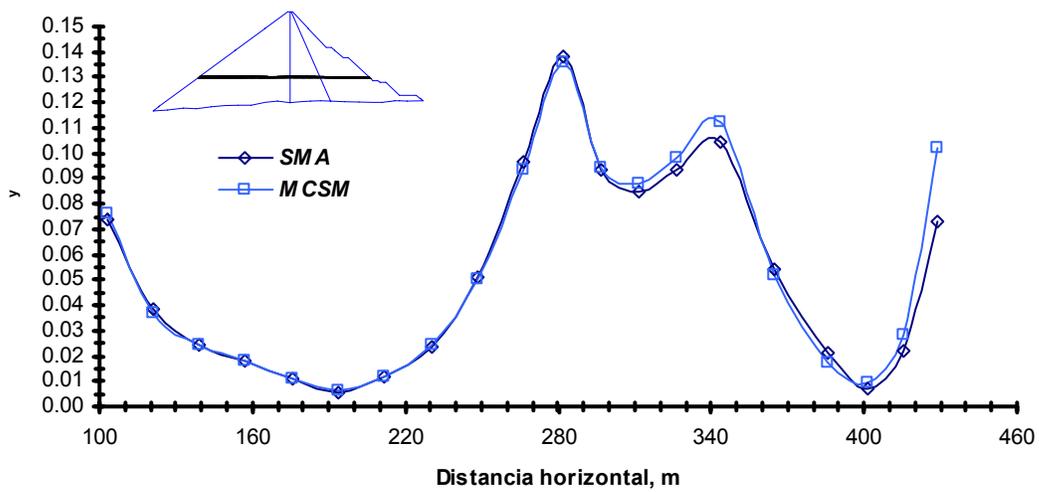
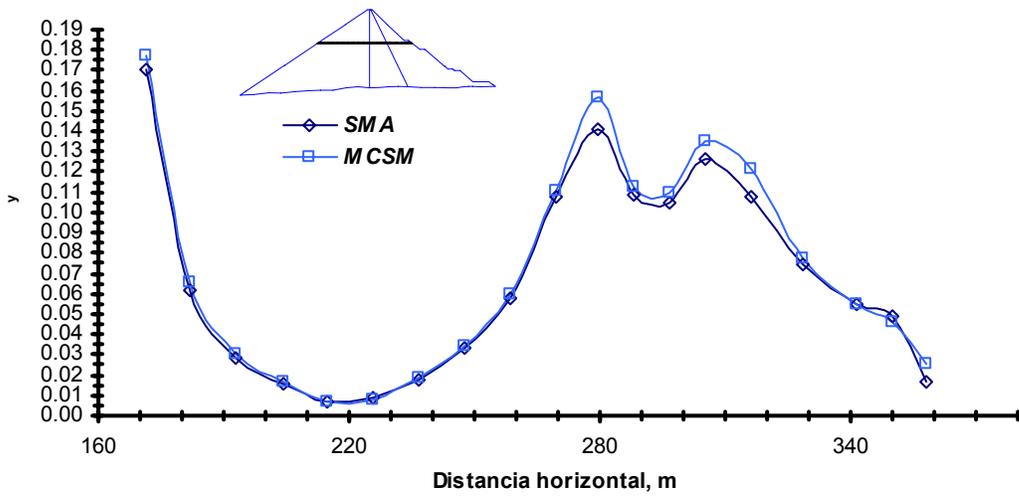
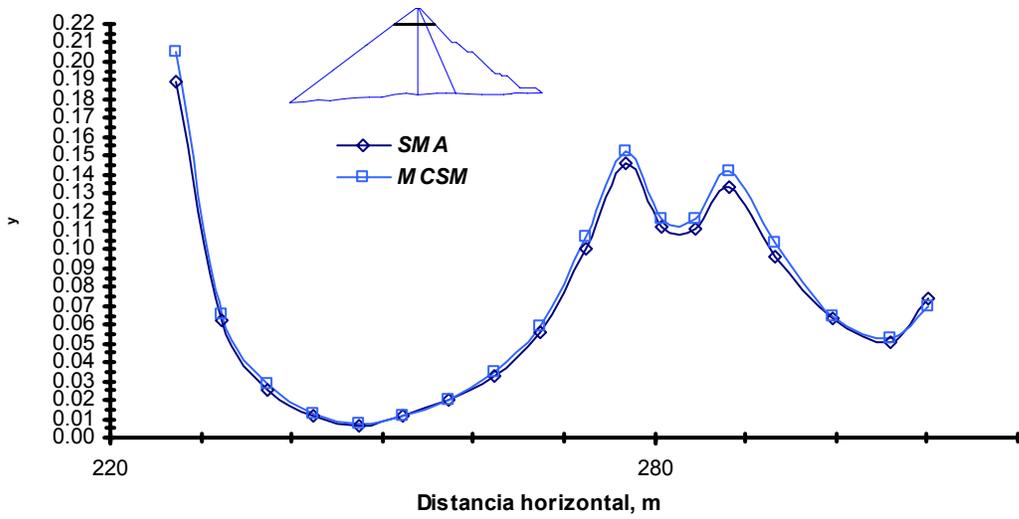


Fig. A1.45 Coeficiente de variación del esfuerzo vertical en planos horizontales con distinta elevación. Comparación entre el (SMA) y el (MCSM).

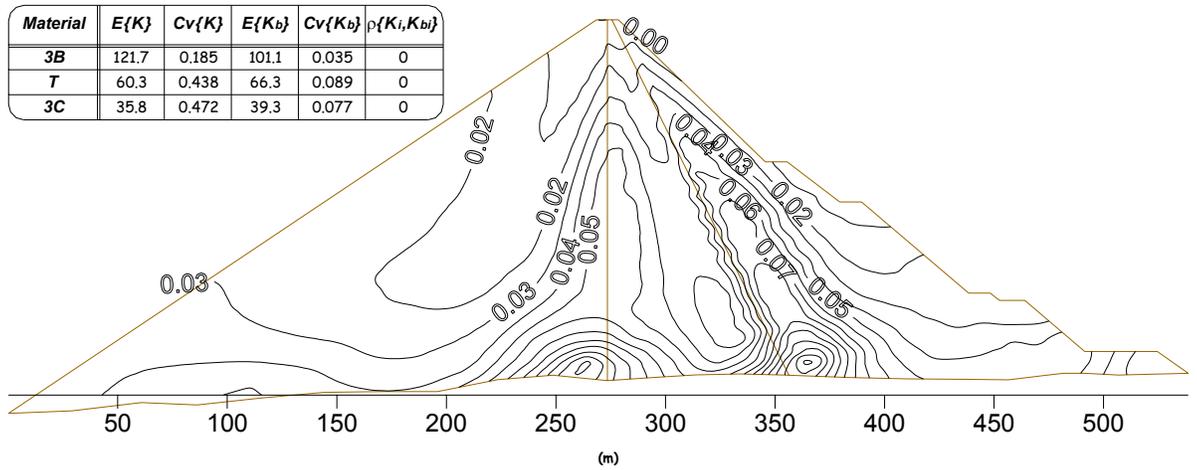


Fig. A1.46 Desviación estándar del esfuerzo cortante (MPa). Materiales independientes (SMA).

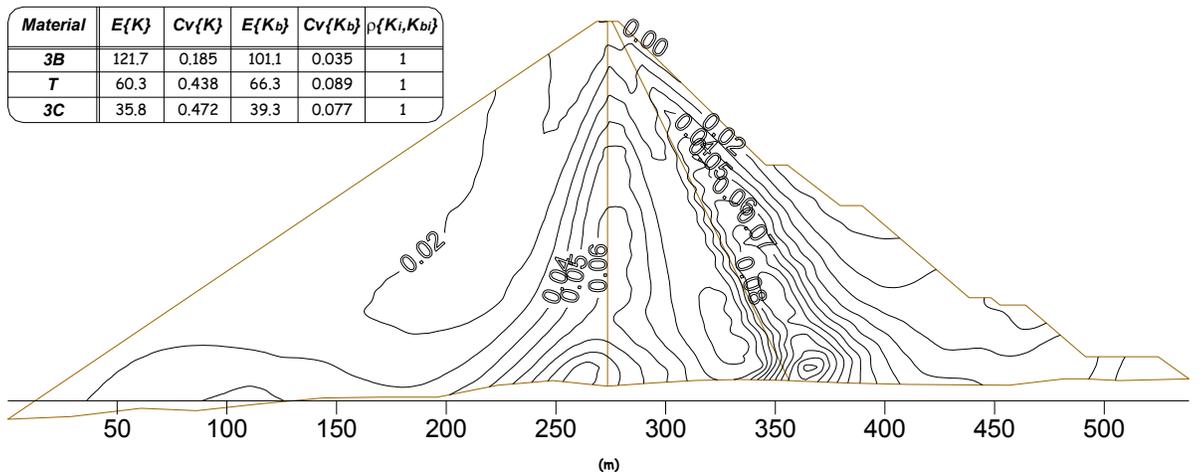


Fig. A1.47 Desviación estándar del esfuerzo cortante (MPa). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{bi}$  (SMA).

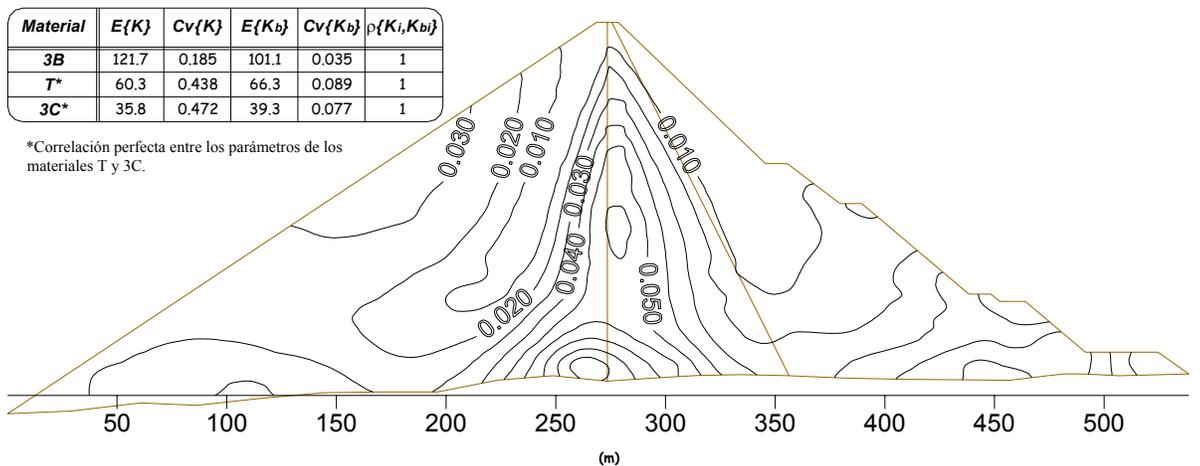
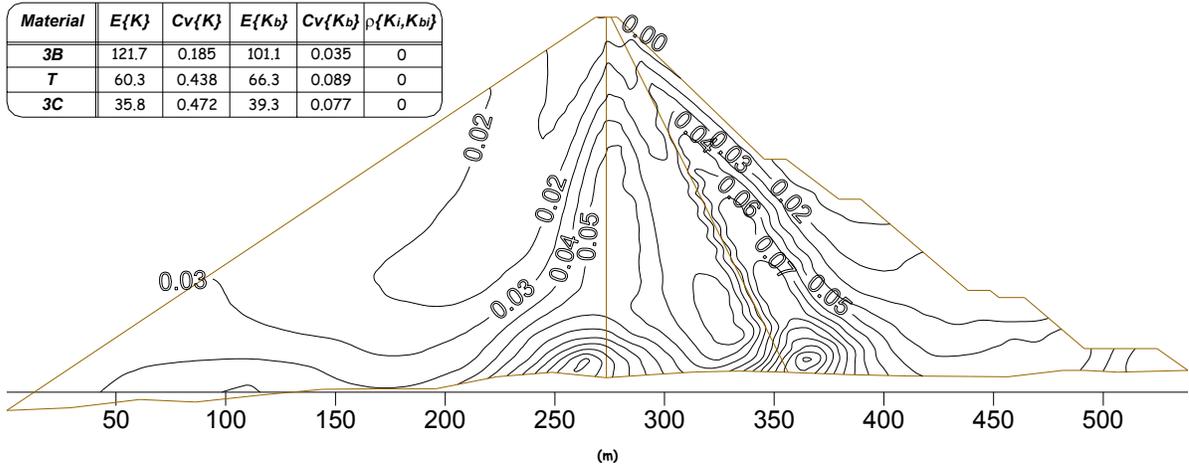
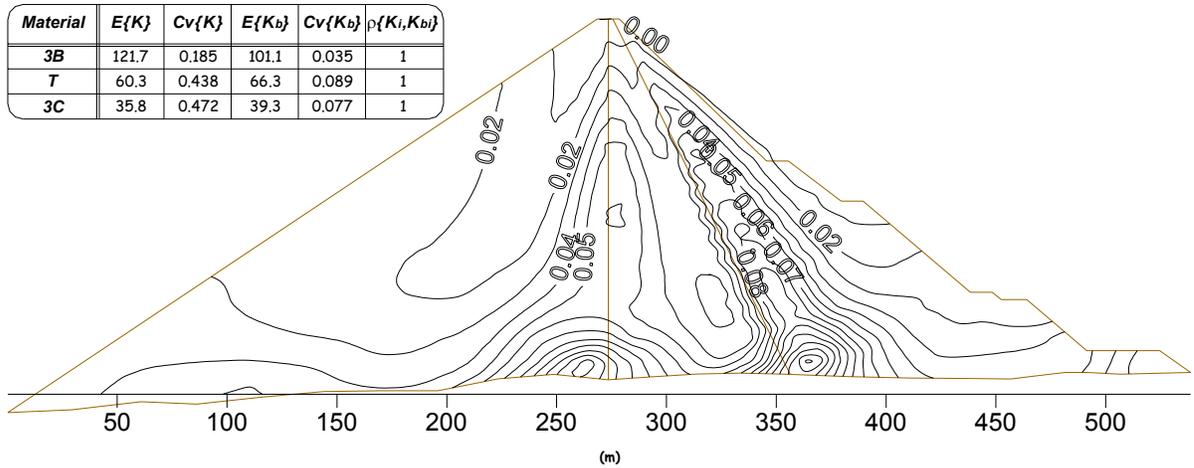


Fig. A1.48 Desviación estándar del esfuerzo cortante (MPa). Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C (SMA).



(a)



(b)

**Fig. A1.49** Desviación estándar del esfuerzo cortante (MPa). Materiales independientes. Comparación entre: a) SMA y b) PEM.

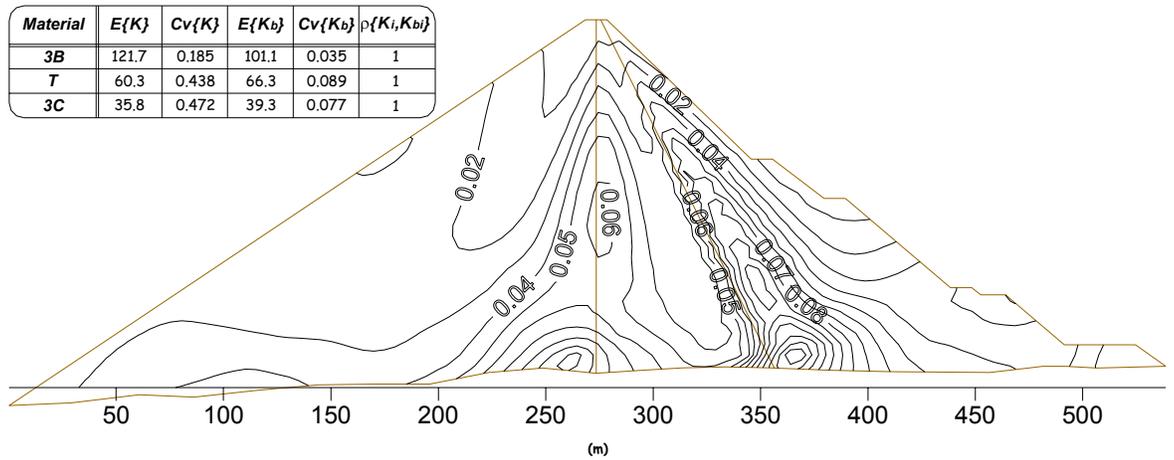
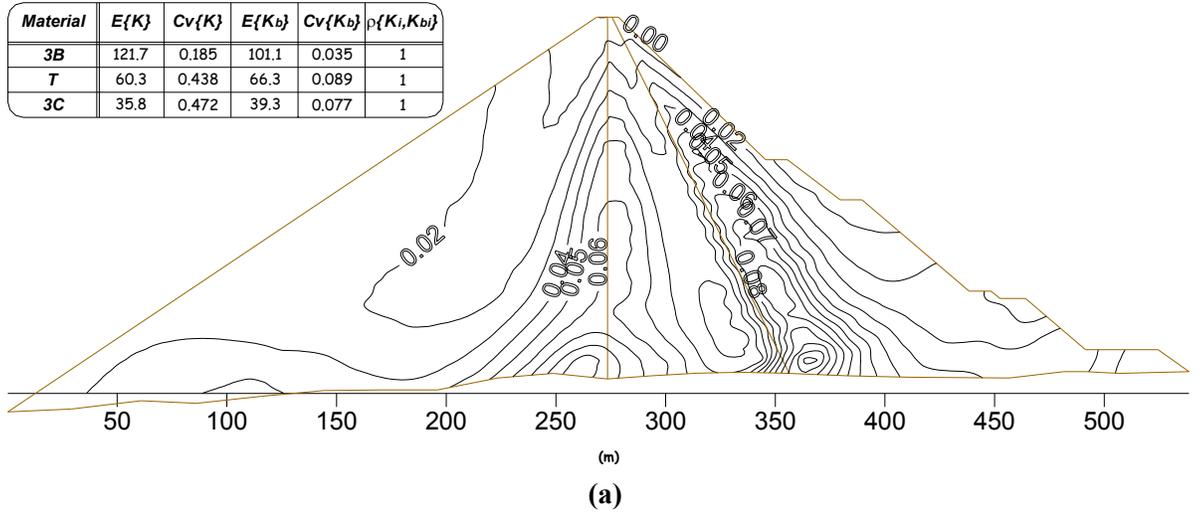


Fig. A1.50 Desviación estándar del esfuerzo cortante (MPa). Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$ . Comparación entre: a) SMA y b) MCSM.

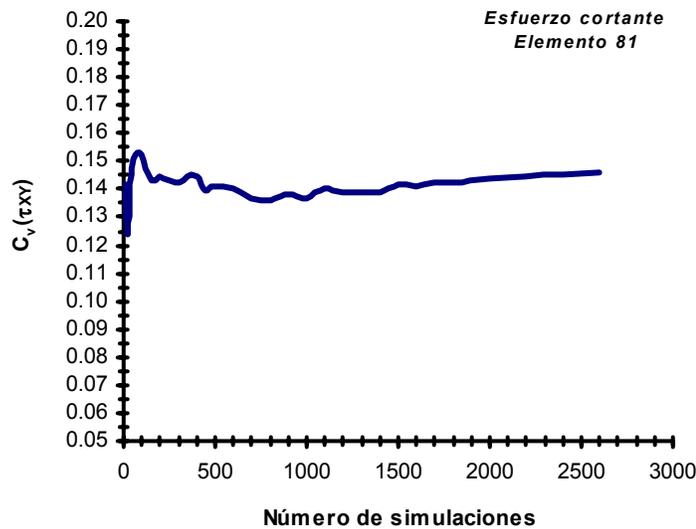


Fig. A1. 51 Convergencia del esfuerzo cortante.

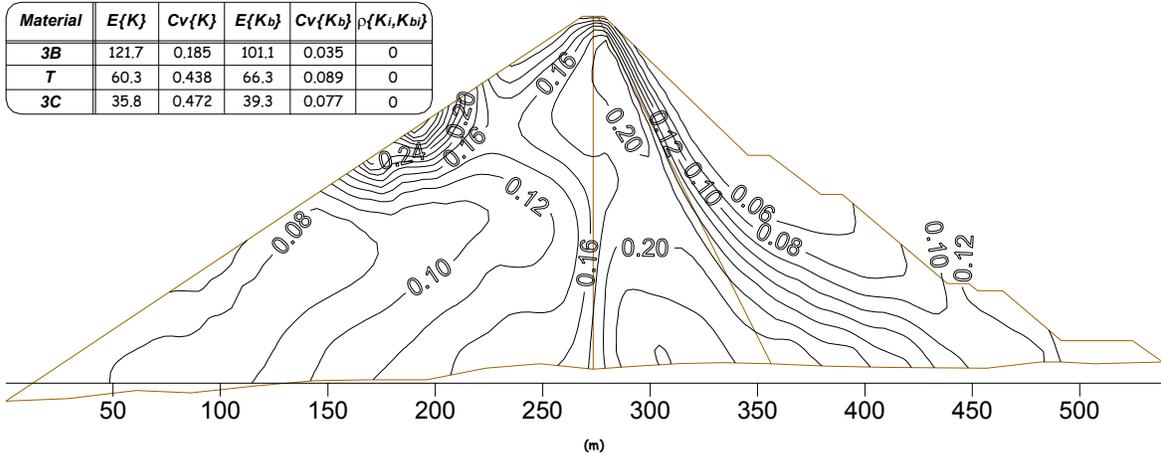


Fig. A1.52 Coeficiente de variación de la relación de esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$ . Materiales independientes (SMA).

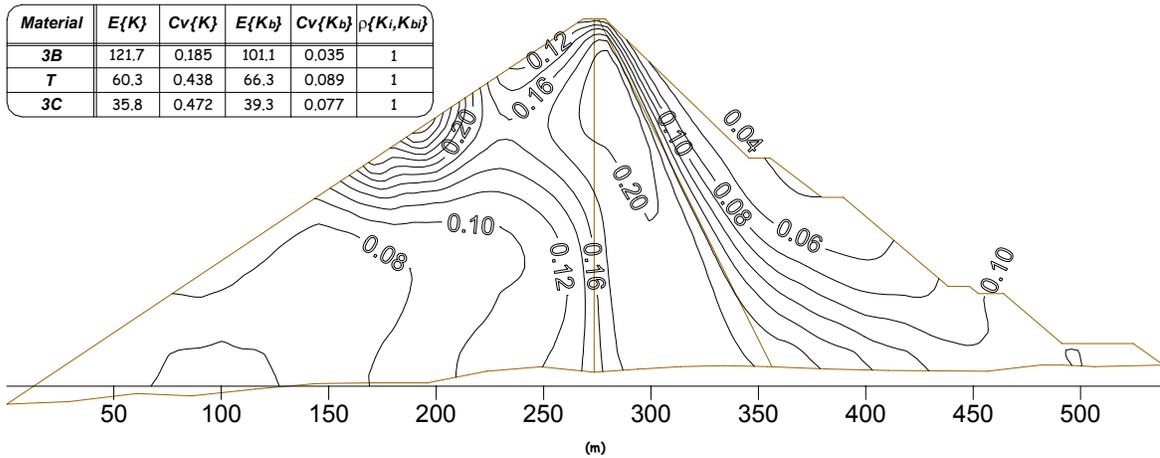


Fig. A1.53 Coeficiente de variación de la relación entre esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$ . Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{b_i}$  (SMA).

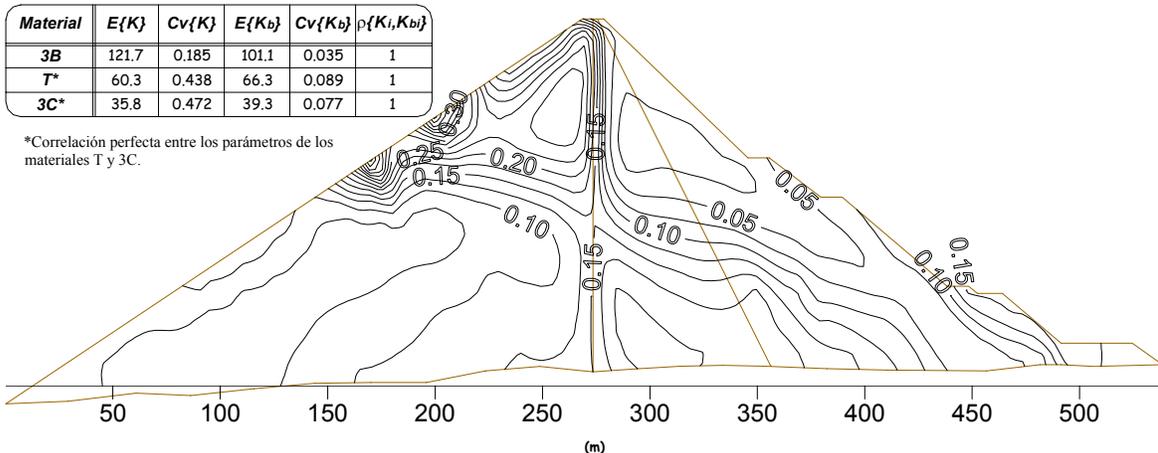
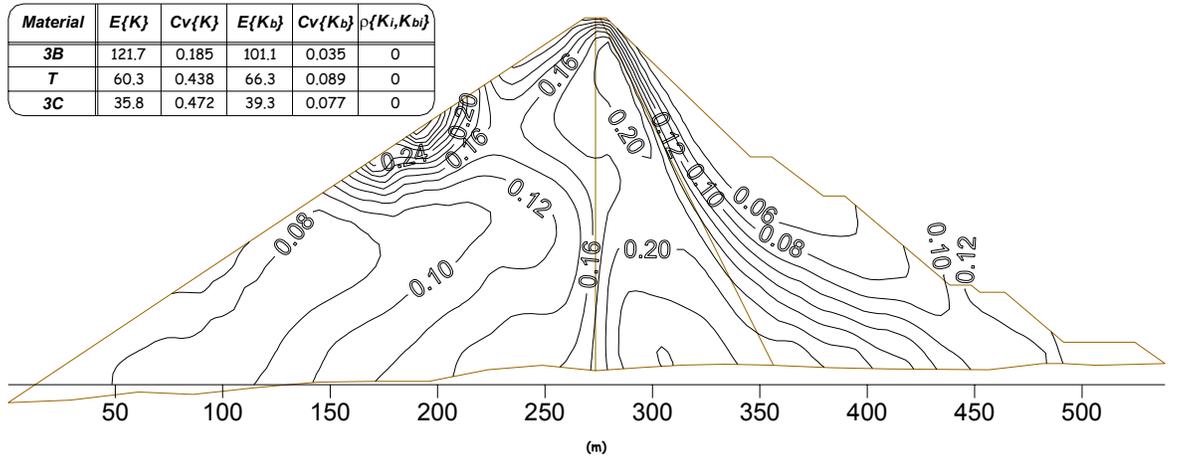
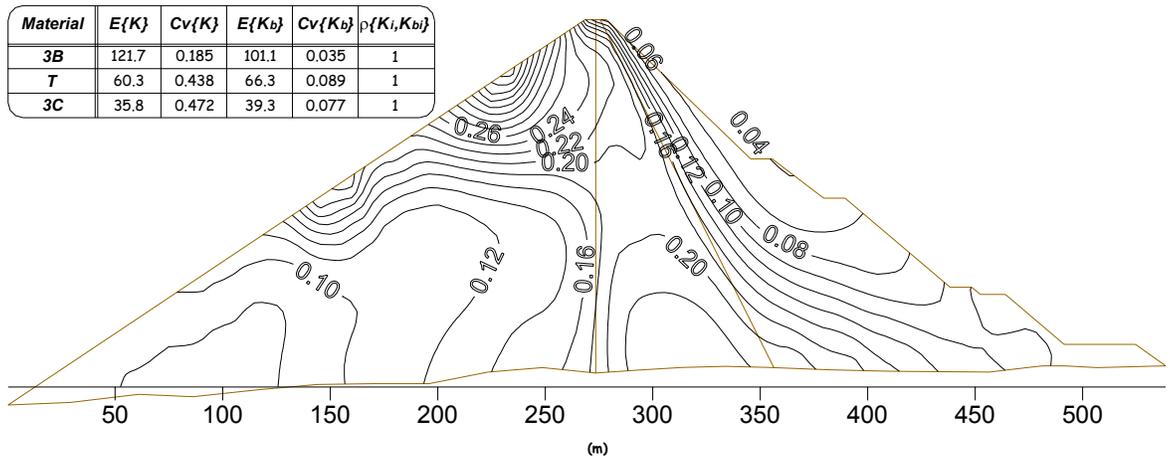


Fig. A1.54 Coeficiente de variación de la relación de esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$ . Correlación perfecta entre los parámetros de los materiales T y 3C (SMA).

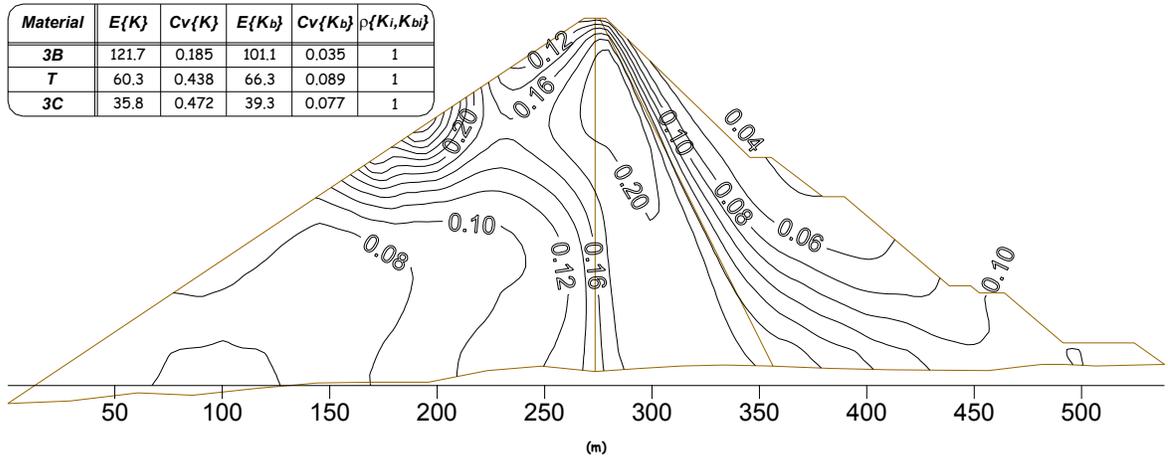


(a)

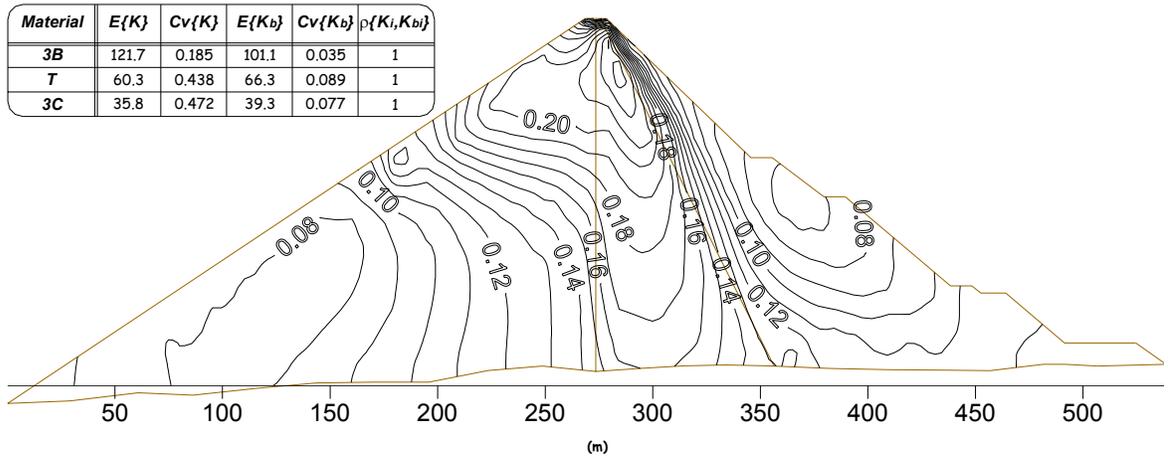


(b)

Fig. A1.55 Coeficiente de variación de la relación entre esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$  . Materiales independientes. Comparación entre: a) SMA y b) PEM.



(a)



(b)

Fig. A1.56 Coeficiente de variación de la relación entre esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$ . Correlación perfecta entre los  $K_i$  y  $K_{bi}$ . Comparación entre: a) SMA y b) MCSM.

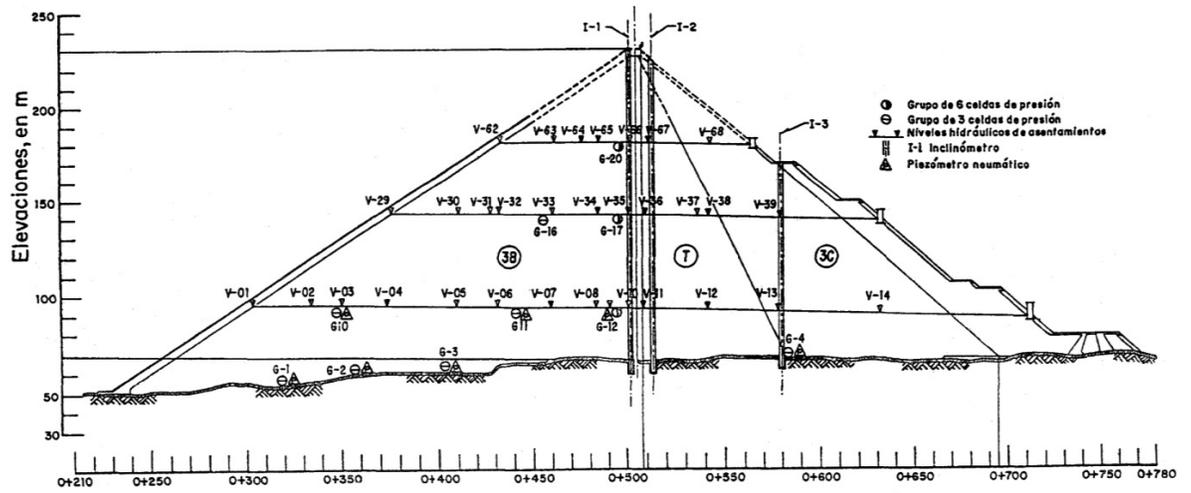


Fig. A1.57 Ubicación de inclinómetros y niveles hidráulicos de asentamientos en la sección transversal máxima.

## ANEXO 2. Justificación del modelo constitutivo lineal.

En varias presas construidas en México (*Alberro et al., 1998*), se instalaron grupos de seis celdas de presión total, un piezómetro y seis extensómetros en direcciones paralelas y linealmente independientes, para definir durante la construcción, el estado tridimensional de esfuerzos efectivos y deformaciones en varios puntos del cuerpo de las diferentes cortinas.

Los extensómetros instalados en cada grupo según seis direcciones ( $i = 1$  a  $6$ ) registraron el alargamiento o acortamiento  $\varepsilon_i$  en cada dirección. Si los cosenos directores en cada dirección  $i$  están dados por  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  en el sistema de ejes  $oxyz$ , entonces:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x \alpha_i^2 + \varepsilon_y \beta_i^2 + \varepsilon_z \gamma_i^2 + 2\varepsilon_{xy} \alpha_i \beta_i + 2\varepsilon_{xz} \alpha_i \gamma_i + 2\varepsilon_{xy} \gamma_i \beta_i \quad (\text{A2.1})$$

De esta manera, se definieron seis magnitudes  $\varepsilon_i$  registradas en seis direcciones diferentes que permitieron establecer un sistema de seis ecuaciones lineales no homogéneas. De la solución de este sistema se obtuvieron los componentes del tensor de deformación  $\underline{\underline{D}}$ , definido como:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{A2.2})$$

Para definir los esfuerzos principales efectivos se construyo en forma idéntica el sistema de ecuaciones simultáneas, a partir de los registros de las celdas de presión y del piezómetro.

Resolviendo el sistema se definieron los valores del tensor de esfuerzos:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{A2.3})$$

Utilizando los dos tensores y manteniendo el sistema general de referencia, se obtuvieron las magnitudes y direcciones de las deformaciones principales  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  y de los esfuerzos efectivos principales  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ . Conocidas las magnitudes de las deformaciones y esfuerzos efectivos principales, se obtuvieron los esfuerzos y deformaciones en el plano octahédrico, dados como:

$$\begin{aligned} \sigma'_{oct} &= \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) \\ \varepsilon_{oct} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \left[ (\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 \right]^{1/2} \\ \gamma_{oct} &= \frac{1}{3} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

De esta manera se observó la variación de los esfuerzos efectivos octaédricos  $(\sigma'_{oct}, \tau_{oct})$  vs las deformaciones octaédricas  $(\varepsilon_{oct}, \gamma_{oct})$  actuantes en los diferentes materiales constitutivos, durante la construcción de las cortinas.

Del análisis de los resultados de la instrumentación se destacaron las siguientes observaciones:

- Durante la construcción se presenta giros en las direcciones principales de esfuerzos y deformaciones.
- La relación de esfuerzos principales efectivos  $\sigma'_1/\sigma'_3$  es prácticamente constante durante la etapa constructiva (*fig. A2.1a*).
- Las gráficas de los esfuerzos efectivos octaédricos  $(\sigma'_{oct}, \tau_{oct})$  vs las deformaciones octaédricas  $(\varepsilon_{oct}, \gamma_{oct})$  actuantes en los diferentes materiales constitutivos de las cortinas, mostraron una variación lineal (*figs. A1.1b y c*).

La última observación anterior permitió definir, en primera aproximación, que para cada material se podía escribir que:

$$\sigma'_{oct} = K\varepsilon_{oct} \quad \tau_{oct} = G\gamma_{oct} \quad (\text{A2.5})$$

Donde  $G$ , representa al módulo de rigidez y  $K$ , al coeficiente de deformabilidad volumétrica; ambos están dados por las expresiones:

$$K = \frac{E}{1 - 2\nu} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A2.6})$$

Por lo tanto, a partir de las *ecs.* A2.6, se concluyó que los diferentes materiales del cuerpo de la cortina se asemejan con un comportamiento lineal, con un módulo de deformabilidad  $E$  y una relación de Poisson  $\nu$ , constantes durante toda la etapa constructiva.

Trayectorias de esfuerzos semejantes a las observadas durante la construcción de las diferentes cortinas se inducen durante las pruebas de placa confinada en los terraplenes de prueba y en laboratorio, durante las pruebas en odómetro. Los valores obtenidos del módulo de deformabilidad  $E$ , mediante los grupos de instrumentos fueron comparados con los que se obtuvieron mediante pruebas de placa confinada y en odómetro, además, con los que se calcularon a partir de las lecturas en inclinómetros y niveles hidráulicos, encontrándose una satisfactoria coincidencia (*Alberro et al., 1998*).

Las anteriores observaciones coinciden cualitativamente con las de otros trabajos. Anteriormente, *Charles (1976)* examinó las trayectorias de esfuerzos que ocurrían durante la etapa constructiva en varias presas de materiales compactados. Encontró que la relación de esfuerzos  $\sigma'_1/\sigma'_3$  variaba dentro de un intervalo pequeño durante la etapa constructiva, aun para grandes incrementos en el esfuerzo efectivo medio  $p = 1/3(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)$ .

*Charles* realizó ensayos de compresión triaxial CD para diferentes relaciones de esfuerzos  $\sigma'_1/\sigma'_3 = cte$ , con muestras de un enrocamiento con granulometría trasladada con tamaño máximo de 9.5 mm, en especímenes de 76 mm de diámetro y 160 mm de altura; además de ensayos en odómetro con medición del esfuerzo lateral.

Encontró que las pruebas en compresión unidimensional interpretadas con la teoría elástica daban predicciones razonables del comportamiento  $\varepsilon_{vol} - p$  y  $\varepsilon_3/\varepsilon_1 - \sigma_1/\sigma_3$ , para un amplio intervalo de relaciones de esfuerzos  $\sigma'_1/\sigma'_3 = cte$  y aún en algunos casos en donde las trayectorias se desviaban, ya sea por incremento de  $\sigma'_1/\sigma'_3$  manteniendo  $\sigma'_3 = cte$ , o disminuyendo la relación de esfuerzos haciendo  $\sigma'_1 = cte$ .

De esta manera mostró que los módulos de deformabilidad “elásticos” definidos a partir de ensayos de compresión unidimensional, daban predicciones útiles de las deformaciones para trayectorias de esfuerzos comprendidas en un amplio intervalo de relación de esfuerzos  $\sigma'_1/\sigma'_3$  constantes.

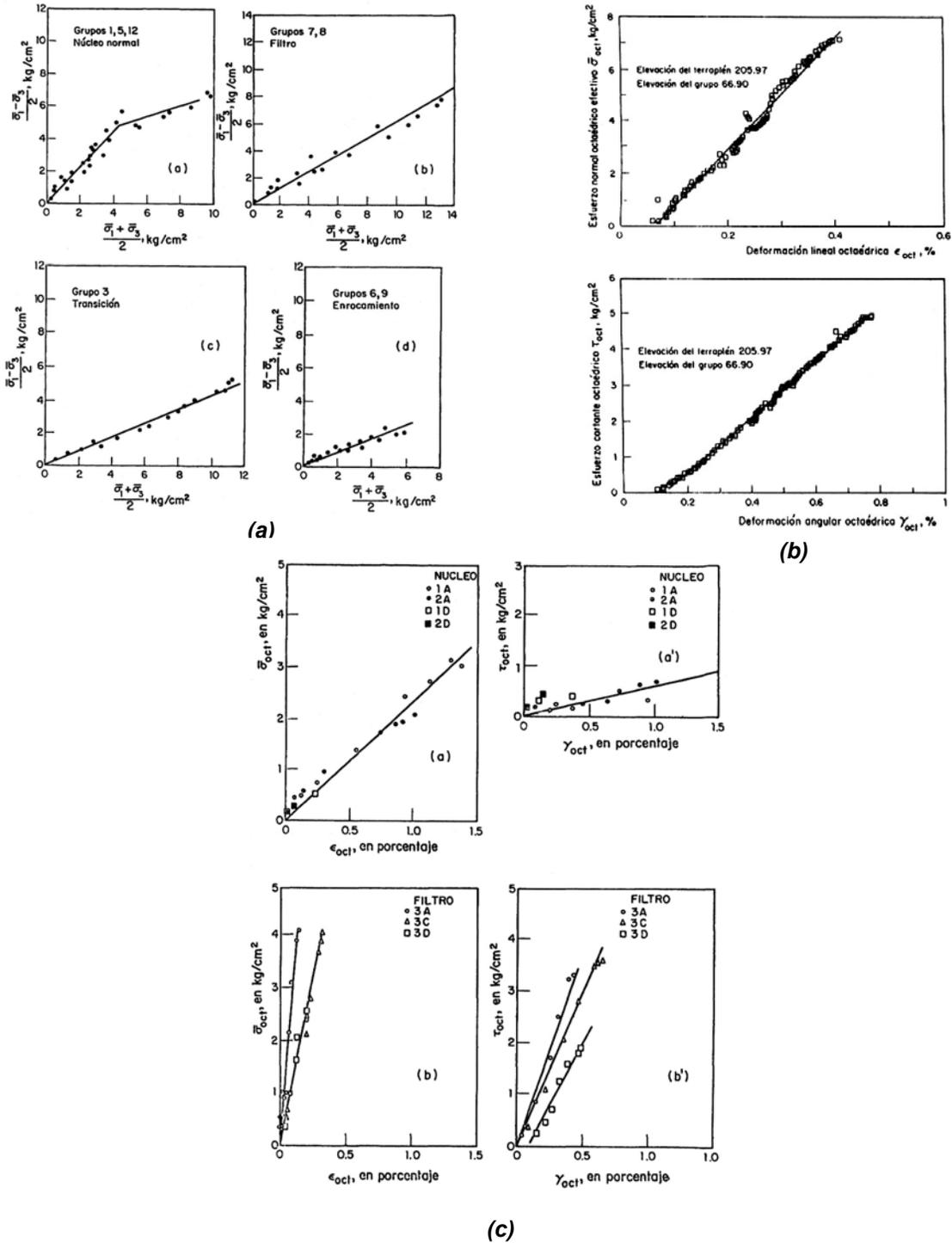


Fig. A1.1 Resultados de los grupos de instrumentos. a) Trayectorias de esfuerzos Presa “El Caracol”. Esfuerzos efectivos octaédricos vs deformaciones octaédricas; b) Presa “Aguamilpa”; c) Presa “Peñitas”.

### ANEXO 3. El modelo constitutivo en el programa FEADM84.

De entre los modelos no-lineales, el mayormente aceptado en la modelación de estructuras de tierra ha sido el de *Kondner (1963)*, quien propuso que la curva esfuerzo desviador-deformación axial en pruebas de compresión en cámara triaxial se puede representar mediante una hipérbola:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon_1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}} \quad (\text{A3.1})$$

En la cual;  $E_i$ , es el módulo elástico tangente inicial y  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ , el valor asintótico del esfuerzo desviador en el espacio *esfuerzo desviador-deformación axial*, el cual siempre es mayor que la resistencia a la compresión,  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ .

Se han realizado ligeras modificaciones a la formulación del modelo original con la intención de sistematizar su uso en los análisis no lineales, en particular con el programa de elementos finitos FEADAM84 (*Duncan et al., 1980*). La variación del módulo elástico tangente inicial,  $E_i$ , con la presión de confinamiento  $\sigma_3$ , se ha representado por una ecuación exponencial de la siguiente forma (*Jambu, 1963*):

$$E_i = KP_a \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (\text{A3.2})$$

Donde;  $K$  y  $n$  son parámetros determinados experimentalmente y  $P_a$ , el valor de la presión

atmosférica ingresada en las mismas unidades que  $E_i$ .

La influencia del esfuerzo de confinamiento,  $\sigma_3$ , sobre la resistencia al esfuerzo cortante de falla,  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ , se toma en cuenta utilizando el criterio de falla de *Morh-Coulom*:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (\text{A3.3})$$

En el cual;  $c$  y  $\phi$ , son respectivamente, la resistencia al corte no drenada y el ángulo de fricción interna.

Con base en el modelo de *Kondner* y en las consideraciones anteriores, se llega a la siguiente expresión para el módulo elástico tangencial,  $E_t$  (*Duncan and Chang, 1970*):

$$E_t = \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \sin \phi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi} \right]^2 KPa \left( \frac{\sigma_3}{Pa} \right)^n \quad (\text{A3.4})$$

En la cual;  $R_f$ , es la relación de esfuerzos de falla dada por:

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} < 1 \quad (\text{A3.5})$$

En forma análoga al tramo de carga, el valor del módulo elástico en descarga-recarga,  $E_{ur}$ , se relaciona con el esfuerzo de confinamiento mediante una relación semejante a la ecuación A3.2:

$$E_{ur} = K_{ur} Pa \left( \frac{\sigma_3}{Pa} \right)^n \quad (\text{A3.6})$$

En donde;  $K_{ur}$ , es el módulo de descarga-recarga.

Asimismo, la variación del módulo elástico de compresibilidad volumétrica,  $B^1$ , se aproxima mediante la siguiente ecuación exponencial en función del esfuerzo confinante:

$$B = K_b Pa \left( \frac{\sigma_3}{Pa} \right)^m \quad (\text{A3.7})$$

Siendo;  $K_b$  y  $m$ , el módulo volumétrico y su exponente, respectivamente; ambos son adimensionales.

La variación del ángulo de fricción interna,  $\phi$ , con la presión de confinamiento se

---

<sup>1</sup>  $B = E/3(1 - 2\nu)$

considera que varía conforme a la ecuación:

$$\phi = \phi_0 - \Delta\phi \text{Log}_{10} \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right) \quad (\text{A3.8})$$

Donde;  $\phi_0$ , es el valor de,  $\phi$ , para  $\sigma_3 = P_a$  y  $\Delta\phi$ , la reducción en,  $\phi$ , para un decremento en un ciclo logarítmico de  $\sigma_3$ . La expresión A3.8 supone que la envolvente de falla parte en el origen del espacio *esfuerzo desviador-deformación axial*.

La tabla A3.1 muestra un resumen del total de parámetros del modelo hiperbólico y una breve explicación de su función. Para poder representar la dependencia de los módulos  $E$  y  $B$  con el nivel de esfuerzos, se requieren definir por lo menos siete de los nueve parámetros del modelo. Sin embargo, si se acepta una independencia en el nivel de esfuerzos (comportamiento lineal), el modelo queda descrito únicamente a través de los parámetros  $K$  y  $K_b$  (ecs. A3.2 y A3.7) haciendo  $n = 0$  y  $m = 0$ , respectivamente.

Tabla A3.1 Parámetros y sus funciones en el modelo hiperbólico.

Parámetro	Nombre	Función
$K, K_{ur}$	Módulos para el comportamiento en carga primaria y en descarga-recarga, respectivamente.	Relacionan $E_i$ y $E_{ur}$ con $\sigma_3$
$n$	Módulo exponencial.	
$c$	Resistencia al corte en condiciones no drenadas.	
$\phi, \Delta\phi$	Ángulo de fricción interna del suelo y su decremento conforme aumenta el esfuerzo de confinamiento, respectivamente.	Relacionan $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ con $\sigma_3$
$R_f$	Relación de esfuerzos en la falla.	Relaciona $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ con $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$
$K_b$	Módulo volumétrico.	Valor de $B/P_a$ en $\sigma_3 = P_a$
$m$	Módulo exponencial volumétrico.	Variación $B/P_a$ en un incremento de un ciclo log. en $\sigma_3$

El modelo hiperbólico se ha utilizado extensamente en el análisis con elementos finitos de diferentes problemas geotécnicos, particularmente en terraplenes, por lo que se ha logrado acumular cierta experiencia en cuanto a la respuesta del modelo y al orden de magnitud de los parámetros para diversas muestras de suelos. Las principales características de interés práctico que del modelo *Hiperbólico* se pueden esperar se resumen como sigue (Duncan et al., 1980):

- El modelo es útil en la predicción de deformaciones en terraplenes cuyo factor de seguridad indica una clara estabilidad, es decir, es adecuado para el análisis de esfuerzos y deformaciones antes de la falla.

- El modelo no puede representar los cambios de volumen asociados al cambio en los esfuerzos cortantes y siempre indicará compresión.
- Los parámetros no representan propiedades fundamentales del suelo, son coeficientes empíricos que representan su comportamiento bajo un limitado intervalo de condiciones; por lo que su determinación experimental tendrá que ser representativa de las condiciones de campo que se deseen modelar.

Con base en el análisis de los resultados experimentales efectuados con el modelo *Hiperbólico*, *Dolezalova et al. (1994)* concluyen que el modelo es capaz de representar con suficiente aproximación el decremento de rigidez asociado al incremento del nivel de esfuerzos cortantes (carga), pero no el marcado efecto de endurecimiento relativo al decremento del nivel de esfuerzos cortantes (descarga).

## REFERENCIAS.

Alberro, A. J., (1990), "Utilidad y limitaciones de la modelación numérica en geotecnia", *Proc. de la mesa redonda sobre leyes constitutivas y modelación numérica en mecánica de suelos*, Alternativas tecnológicas 34, Academia Mexicana de Ingeniería, CONACYT, México, D.F.

Alberro, A. J. y Gaziev, B. E., (2002), "Resistencia y deformabilidad de los enrocamientos", *XX Reunión Nacional de Mecánica de Suelos*, Oaxaca, México, pp. 95-108.

Alberro, A. J., et al. (1998), "Deformabilidad in situ de los materiales constitutivos de varias presas de tierra y enrocamiento", *Series del Instituto de Ingeniería*, N° 604, UNAM, México.

Araujo, J. M. and Awruch, A. M., (1994), "On stochastic finite elements for structural analysis", *Computers and structures*, Vol. 52, N° 3, pp.461-469.

Auvinet, G., (1986), "Aplicación de la teoría de conjuntos borrosos en ingeniería civil", *Memoria de examen predoctoral*, DEPMI, UNAM, México.

Auvinet, G., Mellah R. and Masrouri F., (2000), "Stochastic finite element analyses in geomechanics", *Proc. of the ICASP8 Conference*, Melchers and Stewart eds, Sydney, Australia, pp. 79-85.

Auvinet, G., Mellah R., Masrouri F. et Rodriguez, J. F., (2001), "La méthode des éléments finis stochastiques en géotechnique", *Revue Française de Géotechnique*, N° 93, Paris, France.

Auvinet, G. (2002), "Incertidumbre en geotecnia", *Proc. de la Décimo sexta Conferencia Nabor Carrillo*, SMMS, Querétaro, México, pp. 1-58.

Bathe, K. J., (1982), "Finite elements procedures in engineering analysis", *Prentice-Hall Inc.*, Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 194-298.

Benjamin, R. J. and Cornell, A. C., (1970), "Probability, statistics and decision for civil engineers", *Mc-Graww Hill*, pp. 297-301.

Bittnar, Z. and Sejnoha, J., (1996), "Numerical methods in structural mechanics", *ASCE Press*, Thomas Telford.

Bolle, A., (1988), "Approche probabiliste en mécanique des sols avec prise en compte de la variabilité spatiale", *Thèse de Doctorat à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, N<sup>o</sup> 743, France, 265 pp.

Bouayed, A., (1997), "Modélisation stochastique par éléments finis en géomécanique", *Thèse de Doctorat*, ENSG, INPL, Nancy, France, 157 pp.

Cambou, B., (1974), "Método del elemento finito. Análisis de incertidumbre de primer orden", *Publicación N<sup>o</sup> 339 del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, 88 pag. (Dir. G. Auvinet).

Castro, J. and Montañez, L. E., (1993), "Behavior of Aguamilpa dam and diversion works during the January 1992 floods", *International symposium on high earth-rockfill dams*, Vol. 2, Pekin, China, pp. 697-715.

Charles, J. A., (1976), "The use of one-dimensional compression test and elastic theory in predicting deformations of rockfill embankments", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 13, N<sup>o</sup> 3, August, pp.189–200.

Christian, J. and Baecher, G., (2002), "The point-estimate method with large numbers of variables", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, (26), pp.1515–1529.

Chowdhury, R. N. and Xu, D. W., (1993) "Rational polynomial technique in slope reliability analysis", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 119, (12), pp.1910-1928.

Clough, W. R. and Woodward, J. R., (1967) "Analysis of embankment stresses and deformations", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 93, SM4, pp.529-548.

Cornell, A. C., (1971), "First order uncertainty analysis of soil deformation and stability", *Proc. First International Conference on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering*, Hong Kong, pp. 130-141.

Ditlevsen, O. and Madsen, H. O., (1996), "Structural reliability methods", *John Wiley and Sons*.

Dolezalova, M., Venclik, P. and Zemanova, V., (1994), "Stress paths analysis of geotechnical structures", *Proc. of Conf. on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, Smith Ed, Balkema, Rotterdam, pp. 263-270.

Duncan, J. M. and Chang, C. Y., (1970). "Nonlinear analysis of stress and strain in soils," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 96, No. SM5, 1629-1653.

Duncan, J. M., Byrne, P., Wong, K. S. and Mabry, P., (1980). "Strength, stress-strain and bulk modulus parameters for finite element analyses of stresses and movements in soil masses," Report No. UCB/GT/80-01, *Department of Civil Engineering*, University of California, Berkeley.

Duncan, J. M., Seed, R. B., Wong, K. S. and Ozawa, Y., (1984). "FEADAM84: A computer program for finite element analysis of dams," Geotechnical Engineering, Research Report No. SU/GT/84-03, *Department of Civil Engineering*, Stanford University, 70 p.

Ghanem, R. and Kruger, R., (1996), "Numerical solution of spectral stochastic finite element systems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 129, No. 3, pp. 289-303.

Ghanem, R. and Spanos, P., (1991), "Stochastic finite elements-A spectral approach", *Springer, Berlin*.

González, V. F., Chávez, R. L. y Ramírez, R. F., (1993), "Proyecto hidroeléctrico Aguamilpa, Nay.", Séptimo informe de instrumentación a consultores, reporte no. 841.01-26/93, *Departamento de Instrumentación*, CFE, México.

Goodman, R. E., Taylor, R. L. and Brekke, T. L., (1968), "A model for the mechanics of jointed rock," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 94, No. SM3, pp. 637-659.

Hisada, T. and Nakagiri, S., (1985), "Role of stochastic finite element method in structural safety and reliability", *Proc. of 4<sup>th</sup> Int. Conf. On Struct. Safety and Reliability*, Kobe, Japan, Vol. I, pp. 385-394.

Jambu, N., (1963), "Soil compressibility as determined by odometer and triaxial test", *Proc. of Eur. Conf. Soil Mech. Found. Eng.*, Vol. 1, pp. 259-263.

Kleiber, M. and Duong, H. T., (1992), "The stochastic finite element method: Basic perturbation technique and computer implementation", *John Wiley and Sons*.

Kondner, R. L., (1963). "Hyperbolic stress-strain response: Cohesive soils," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 89, No. SM1, pp. 115-143.

Kondner, R. L. and Zelasko, J. S., (1963). "A hyperbolic stress-strain formulation for sands", *Proc. of the 2nd Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, Sao Paulo, Brazil, July, pp. 289-324.

Liu, W. K., Mani, A. and Belytschko, T., (1987), "Finite elements methods in probabilistic mechanics", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 2, No. 4, pp. 201-213.

Liu, W. K., Besterfield, G. H., and Belytschko, T., (1988), "Variational approach to probabilistic finite elements", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 12, pp. 2115-2133.

Louault, B., (1997), "Approche probabiliste de l'évaluation des zones de tension dans les barrages en terre et en enrochement", *Mémoire de fin d'études*, CUST, Clermont Ferrand, France.

Marsal, R. J., et al. (1965), "Research on the behavior of granular soils and rockfill samples", *CFE Publication*, México, D.F., pp. 76.

Marsal, R. J., (1972), "Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas", Publicación No. 306, *Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, pp. 102.

Matheron, G., (1971), "La théorie des variables régionalisées et ses applications", *Ecole Nationale Supérieure des Mines*, Fasc. 5, Paris, France.

Mellah, R., (1999), "Modélisation stochastique par éléments finis en élasto-plasticité appliquée à la géomécanique", *Thèse de Doctorat*, ENSG, INPL, Nancy, France, 160 pp.

Montañez, L. E., (1991a), "Proyecto hidroeléctrico Aguamilpa, Estudios para la junta perimetral", Mesa redonda en homenaje al Prof. Raúl J. Marsal, *SMMS*, México, pp. 31-45.

Montañez, L. E., (1991b), "Properties of the Aguamilpa dam alluvial materials", *IX Congreso Panamericano de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones*, Vol. 3, pp. 1245-1255, Viña del Mar, Chile.

Montañez, L. E., Hacelas, J. E. and Castro J., (1993), "Design of Aguamilpa dam", *International Symposium on High Earth-Rockfill Dams*, Pekin, China, pp. 337-364.

Mood, A. and Graybill, F., (1963), "Introduction to the theory of statistics", *McGraw Hill*.

Nayfeh, A. H., (1981), "Introduction to perturbation techniques", *John Wiley*, New York.

Nechnech, (1994), "Etude fiabiliste des murs de soutènement", *Mémoire de DEA*, ENSG, INPL, Nancy, France, 59 pp.

Orlandi, S., (1996), "Método del elemento finito estocástico en geotecnia: Análisis no lineal", *Tesis de Maestría en Ingeniería (Mecánica de Suelos)*, DEPMI, UNAM, México, 81 pag.

Papoulis, A., (1984), "Probability, random variables and stochastic processes", *Mc Graw-Hill*.

Pérez-Duarte, A., (2000), "Modélisation stochastique de la construction des barrages en terre en anisotropie", *Mémoire de fin d'études*, Ecole Polytechnique, Paris.

Rao, S. S., (1992), "*Reliability-based design*", McGraw-Hill Inc., USA.

Rosenblueth, E., (1975), "Point estimates for probability moments", *Proc. Nat. Acad. Sciences*, USA, Vol. 72, October, pp. 3812-3814.

Rubinstein, R. Y., (1981), "*Simulation and the Monte Carlo method*", John Wiley and Sons, New York, USA.

Sherard, J. L. and Cooke, J. B., (1987), "Concrete-face rockfill dam: II Design", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 10, pp. 1113-1132.

Spanos, P. D. and Ghanem, R., (1989), "Stochastic finite element expansion for random media", *Journal Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 5, pp. 1035-1053.

Sudren, B. and Der Kiureghian, A., (2000). "Stochastic finite element methods and reliability," Report No. UCB/SEMM-2000/08, *Department of Civil Engineering*, University of California, Berkeley.

Vanmarcke, H. E., (1983), "Random fields: Analysis and synthesis", *The MIT Press*.

Vanmarcke, E., Shinozuka, M., Nakagiri, S., Schueller, G. I. and Grigoriu, M., (1986), "Random fields and stochastic finite elements", *Structural Safety*, (3), pp. 143-166.

Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty, W. and Ghaboussi, J., (1973), "Incompatible displacement models", in *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, (Fenves S.J., Perrone N., Robinson J. and Schnobrich W. C., eds), Academic Press, Inc., New York.

Yamasaki, F., Shinozuka, M. and Dasgupta, G., (1988) "Neumann expansion for stochastic finite element analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, N<sup>o</sup>. 8, pp. 1335-1354.

# Nomenclatura

$a_1, a_2, \dots, a_m$ ;	Coefficientes de la fracción polinomial necesarios para el cálculo numérico de las derivadas parciales.
$B$ ;	Módulo elástico de compresibilidad volumétrica.
$E$ y $\nu$ ;	Módulo de deformabilidad y relación de Poisson.
$f_V(v)$ ;	Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua $V$ .
$F_V(v)$ ;	Función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua $V$ .
$H$ ;	Altura del terraplén.
$H_{\alpha_k}$ ;	Polinomio unidimensional de <i>Hermite</i> asociado a la secuencia $\alpha_k$ .
$K$ y $K_b$ ;	Parámetros del modelo constitutivo lineal.
$m_v$ ;	Coefficiente de compresibilidad volumétrica obtenido mediante odómetro.
$\tilde{m}_v$ ;	Coefficiente de compresibilidad volumétrica medio representativo dentro del nivel de esfuerzos $0.1 \leq \tilde{m}_v \leq 1$ MPa.
$n$ ;	Número de simulaciones necesarias en el método de Monte Carlo.
$P_a$ ;	Presión atmosférica.
$P_+$ y $P_-$ ;	Probabilidades correspondientes a la variable aleatoria $V$ en $v_-$ y $v_+$ , respectivamente.
$\mathbf{U}(\theta)$ ;	Vector aleatorio de desplazamientos nodales en el cual cada componente $u^i(\theta)$ es una variable aleatoria por determinar en el método del elemento finito estocástico espectral.
$\mathbf{u}(x, \theta)$ ;	Campo de desplazamientos nodales. $\theta \in \Theta$ , representa un resultado del total de resultados posibles del experimento que conforman el espacio muestral $\Theta$ en el método del elemento finito estocástico espectral.
$V(X, \theta)$ ;	Representación de un campo aleatorio en el método del elemento finito estocástico espectral.
$v_-$ y $v_+$ ;	Valores de la variable aleatoria $v$ localizados antes y después de su valor medio, $\mu_v$ .
$U = g(V)$ ;	Variable aleatoria $U$ en función de otra variable aleatoria $V$ .
$u^0$ ;	Aproximación puntual de la densidad de probabilidad de la función $U = f(V)$ , definida por los valores $u_+$ y $u_-$ , y sus probabilidades.

$u_+$ y $u_-$ ;	Valores de la función $U = f(V)$ evaluada en $v_+$ y $v_-$ .
$C_v(K)$ ;	Coefficiente de variación del parámetro $K$ del modelo lineal.
$C_v(K_b)$ ;	Coefficiente de variación del parámetro $K_b$ del modelo lineal.
$C_v(M_{oc})$ ;	Coefficiente de variación del inverso del módulo de compresibilidad volumétrica.
$C_v(V)$ ;	Coefficiente de variación de la variable aleatoria $V$ .
$C_{VV}(X_1, X_2)$ ;	Función de Auto-covarianza del campo aleatorio $V(X)$ .
$C_v(\Delta_Y)$ ;	Coefficiente de variación del desplazamiento vertical máximo.
$C_v(\nu)$ ;	Coefficiente de variación de la relación de Poisson.
$Cov(V_k, V_l)$ ;	Covarianza entre dos elementos cualesquiera del vector de variables aleatorias $\bar{\mathbf{V}}$ .
$E\{g(V_1, V_2, \dots, V_n)\}$ ;	Valor esperado de una función $Y = g(V_1, V_2, \dots, V_n)$ de $n$ variables aleatorias $v_i$ .
$E\{K\}$ ;	Valor esperado del parámetro $K$ del modelo lineal.
$E\{K_b\}$ ;	Valor esperado del parámetro $K_b$ del modelo lineal.
$E\{M_{oc}\}$ ;	Valor esperado del inverso del módulo de compresibilidad volumétrica.
$E\{V\} = \mu_V$ ;	Esperanza o valor medio de la variable aleatoria $V$ .
$E\{\bar{\mathbf{V}}\} = \bar{\mu}_{\bar{\mathbf{V}}}$ ;	Esperanza de un vector $\bar{\mathbf{V}}$ de $n$ variables aleatorias $V_1, V_2, \dots, V_n$ .
$E\{V_\Omega\}$ ;	Valor esperado de una propiedad $V$ definida en el dominio $\Omega$ .
$E\{V_2 V_1\}$ ;	Esperanza condicional de $V_2$ dado que se conoce la variable $V_1$ .
$E\{\Delta_Y\}$ ;	Valor esperado del desplazamiento vertical.
$E\{\nu\}$ ;	Valor esperado de la relación de Poisson.
$\{\bar{\mathbf{F}}\}$ ;	Vector de cargas.
$[K]$ ;	Matriz de rigidez.
$[K^0]$ ;	Matriz de rigidez evaluada en el valor esperado de las propiedades aleatorias.
$[K^I]$ y $[K^{II}]$ ;	Primera y segunda derivada de la matriz de rigidez con respecto a los parámetros aleatorios, respectivamente.

$\bar{\mathbf{N}}(X)$ ;	Vector que contiene a las funciones $N_i$ necesarias para la discretización del campo aleatorio $V(X)$ .
$R_{VV}(X_1, X_2)$ ;	Función de auto-correlación del campo aleatorio $V(X)$ .
$T_{VV}$ ;	Matriz de covarianza de un vector aleatorio de $n$ elementos, $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
$T_{\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}}$ ;	Matriz de covarianza del vector de variables aleatorias discretizadas.
$\{\bar{\mathbf{U}}\}$ ;	Vector de desplazamientos nodales.
$V(X)$ ;	Representación general de un campo aleatorio descriptivo de la variabilidad espacial.
$\bar{\mathbf{V}}$ ;	Vector que contiene a las variables aleatorias obtenidas por la discretización del campo aleatorio $V(X)$ .
$Var[g(V_1, V_2, \dots, V_n)]$ ;	Varianza de una función $Y = g(V_1, V_2, \dots, V_n)$ de $n$ variables aleatorias.
$Var[V]$ o $\sigma_V^2$ ;	Varianza de una variable aleatoria $V$ .
$Var[V_\Omega]$ ;	Varianza de una propiedad $V$ definida en el dominio $\Omega$ .
$Var[V_2 V_1]$ ;	Varianza condicional de $V_2$ dado que se conoce la variable $V_1$ .
$\beta_1$ ;	Coefficiente de asimetría.
$\Gamma_p(\xi_1, \dots, \xi_M)$ ;	Caos homogéneo de dimensión $M$ y orden $p$ .
$\Delta_X$ ;	Campo de desplazamientos horizontales.
$\Delta_Y$ ;	Campo de desplazamientos verticales.
$\delta$ ;	Margen de error deseado para la estimación del valor medio de una muestra de dimensión finita.
$\delta_{ij}$ ;	Delta de Kronecker.
$\{\varepsilon^0\}$ ;	Vector de deformaciones obtenido para el valor esperado de las propiedades aleatorias.
$\{\varepsilon^I\}$ y $\{\varepsilon^{II}\}$ ;	Primera y segunda derivada del vector de deformaciones con respecto a los parámetros aleatorios, respectivamente.
$\lambda_T$ ;	Campo de desplazamientos totales.
$\bar{\mu}_{\bar{\mathbf{V}}}$ ;	Vector que contiene los valores medios de las variables aleatorias discretizadas.
$\mu_{V(X)}$ ;	Esperanza matemática del campo aleatorio $V(X)$ .

$v_c$ ;	Función de la relación de Poisson.
$\xi_i(\theta)$ ;	Conjunto de variables aleatorias ortogonales.
$\rho_{ij}$ ;	Coefficiente de correlación entre las variables aleatorias $x_i$ y $x_j$ .
$\rho_{K,K_b}$ ;	Coefficiente de correlación entre los parámetros $K$ y $K_b$ del modelo lineal.
$\rho_{T,3C}$ ;	Coefficiente de correlación entre los parámetros $K$ y $K_b$ de los materiales en las zonas $T$ y $3C$ del terraplén.
$\rho_{VV}$ ;	Matriz de correlación de un vector aleatorio de $n$ elementos, $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
$\rho_{VV}(X_1, X_2)$ ;	Coefficiente de auto-correlación entre las variables $X_1$ y $X_2$ del campo aleatorio $V(X)$ .
$\rho_{V_k V_l}$ ;	Coefficiente de correlación lineal entre las variables aleatorias $V_k$ y $V_l$ .
$\sigma_V$ ;	Desviación estándar de la variable aleatoria $V$ .
$\sigma_{\Delta X}$	Desviación estándar del desplazamiento horizontal.
$\sigma_{\Delta Y}$	Desviación estándar del desplazamiento vertical.
$\sigma_{V(X)}^2$ ;	Varianza del campo aleatorio $V(X)$ .
$\sigma_X$ ;	Campo de esfuerzos horizontales.
$\sigma_Y$ ;	Campo de esfuerzos verticales.
$\sigma_1/\sigma_3$ ;	Campo de la relación entre esfuerzos principales.
$\left\{ \overline{\sigma}^{e0} \right\}$ ;	Vector de esfuerzos al nivel del elemento obtenido para el valor esperado de las propiedades aleatorias.
$\left\{ \overline{\sigma}^{eI} \right\}$ y $\left\{ \overline{\sigma}^{eII} \right\}$	Primera y segunda derivada del vector de esfuerzos al nivel del elemento con respecto a los parámetros aleatorios, respectivamente.
$\tau_{XY}$ ;	Campo de esfuerzos cortantes.
$\varphi_i(X)$ y $\lambda_i$ ;	Funciones propias y valores propios, respectivamente, de una ecuación integral que contiene a la función de covarianza $C_{VV}(X_1, X_2)$ como el Kernel.
$\psi_{i,\alpha}(\theta)$ ;	Polinomio multidimensional de <i>Hermite</i> asociado con las secuencias $(\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha})$ .
$\left\{ \Psi_j \left( \left\{ \xi_k(\theta) \right\}_{k=1}^M \right) \right\}$ ;	Espacio de variables aleatorias denominado caos polinomial.

- $\Omega$  ; Representa un subdominio (segmento, superficie, volumen) en el cual se define alguna propiedad física o mecánica del medio.
- $\frac{\partial \{\bar{U}\}}{\partial v_i} / E$  ; Derivada del vector de desplazamientos con respecto a  $v_i$ , evaluada para el valor esperado de la variable aleatoria  $v_i$ .
- $3B, T$  y  $3C$  ; Simbología en la zonificación principal del cuerpo del terraplén en una presa de enrocamiento con cara de concreto.