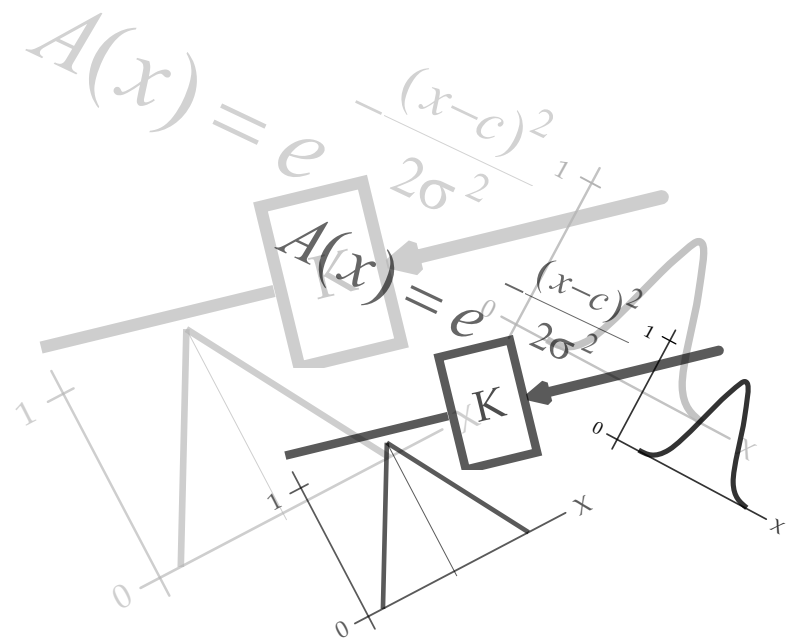


# CAPÍTULO 2

---

# CONTROL

---



# CONTROL

En este capítulo se presentan los procedimientos, fundamentos matemáticos y las teorías que se utilizarán para resolver el problema de control de el sistema del péndulo invertido con carro.

Este sistema es inestable en lazo abierto en uno de sus puntos de equilibrio, por lo tanto es necesario utilizar sistemas de control con realimentación de estados. Esta técnica nos proporciona varias ventajas, ya que permite ubicar los polos del sistema donde se produzca un mejor desempeño. Un procedimiento alternativo es el diseñar un control mediante optimización (conocido como LQR), en el cual se obtiene una matriz de ganancias de retroalimentación  $k$  tal que se minimice un índice de desempeño cuadrático.

Tanto el método de ubicación de polos, como el control óptimo cuadrático requieren la realimentación de todos los estados y el modelo matemático del sistema.

Por otro lado, el control difuso y sus fundamentos nos muestran una forma no convencional de controlar sistemas sin la necesidad de tener un modelo matemático, además de que su implementación nos permite imitar la experiencia humana o tratar de controlar sistemas con decisiones muy parecidas a las de un ser humano.

## 2.1 Diseño de controladores por realimentación de estados

El método de diseño de controladores en espacio de estados se basa en dos factores: El primero de ellos es obtener todas las mediciones de las variables del sistema, ya sea por sensores o estimando estos valores mediante observadores de estado. El segundo, por su parte es la ley de control. Al combinarse estos dos factores proporcionan una dinámica del sistema en lazo cerrado.

Es importante mencionar que el control por realimentación de estados, ya sea ubicación de polos o control óptimo cuadrático no son posibles si el sistema no es controlable.

Definiendo un sistema de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

$$y = Cx \quad (2.2)$$

Para cerrar el lazo de control, se propone el siguiente control realimentado

$$u = -k x + r(t) \quad (2.3)$$

Donde:

$x$  = variables de estado

$r(t)$  = señal de referencia

$k$  = matriz de ganancias de retroalimentación

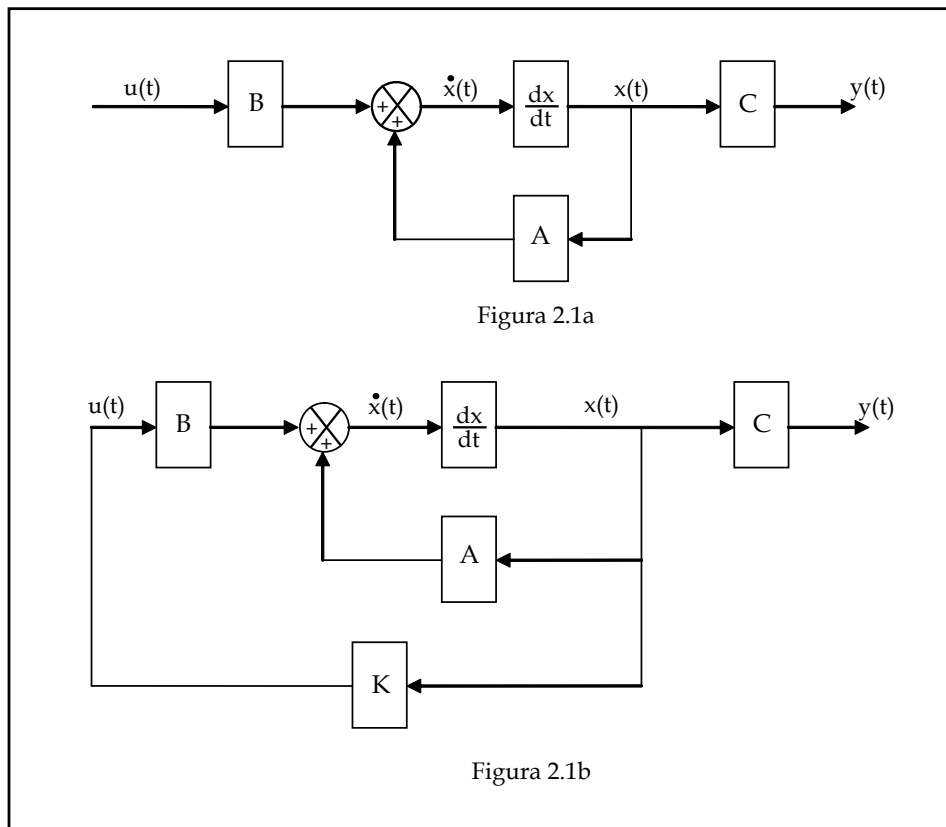
Sustituyendo la entrada  $u$  en la ecuación (2.1), tenemos que

$$\dot{x} = Ax + B(-k x + r(t)) \quad (2.4)$$

y reagrupando la ecuación (2.4), nos queda el sistema

$$\dot{x} = (A - B k)x + B r(t) \quad (2.5)$$

$$y = Cx \quad (2.6)$$



La figura 2.1a es un sistema en lazo abierto, la figura 2.1b es un sistema en lazo cerrado con realimentación de estados  $u = -kx$ .

Si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces, el par de matriz  $(A-Bk, B)$  es controlable, lo que significa que bajo una realimentación de estados no se altera la controlabilidad del sistema y además los valores característicos de la matriz  $(A-Bk)$  pueden ser asignados en forma arbitraria, siempre y cuando los valores característicos complejos sean conjugados.

Si el sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  es controlable, puede ser transformado en una forma canónica mediante una transformación de similaridad  $T$ .

$$\bar{x} = Tx \quad (2.7), \quad \bar{A} = TAT^{-1} \quad (2.8), \quad \bar{B} = TB \quad (2.9)$$

Realizando la transformación:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \ggg \quad T \ggg \quad \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

y la entrada es  $u = -kx + r(t)$  cerrando el lazo de control.

Sustituyendo la entrada en el sistema transformado:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}(-kx + r(t)) \quad (2.10)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.10) la transformación de  $x = T^{-1}\bar{x}$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}(-kT^{-1}\bar{x} + r(t)) \quad (2.11)$$

Tomando a la transformación de  $\bar{k} = kT^{-1}$  tenemos:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}(-\bar{k}\bar{x} + r(t)) \quad (2.12)$$

Reagrupando la ecuación (2.12)

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} - \bar{B}\bar{k})\bar{x} + \bar{B}r(t) \quad (2.13)$$

los valores característicos de la matriz  $(\bar{A} - \bar{B}\bar{k})$

$$\lambda(\bar{A} - \bar{B}\bar{k}) = \lambda(TAT^{-1} - TBkT^{-1}) \quad (2.14)$$

$$= \lambda(T(A - Bk)T^{-1}) \quad (2.15)$$

por lo tanto

$$\lambda(\bar{A} - \bar{B}\bar{k}) = \lambda(A - Bk) \quad (2.16)$$

Los valores característicos son los mismos.

Gracias a la transformación en forma canónica es posible diseñar el polinomio característico de  $(\bar{A} - \bar{B}\bar{k})$ , con esto podemos encontrando los valores de  $k$  para colocar los valores característicos del sistema realimentado donde el diseñador desee.

Hay varias formas de encontrar los valores de la matriz de ganancias de retroalimentación  $k$  con la cual se logre llevar a los polos del sistema donde se dese, como la transformación canónica de controlador, mostrada a continuación.

Teniendo un sistema en variables de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.17)$$

Paso 1: Obtener la matriz de controlabilidad del sistema.

Paso 2: Obtener el rango de la matriz de controlabilidad.

- Si es de rango completo el sistema es controlable y se puede aplicar la técnica de control.
- Si no es de rango completo no se puede controlar completamente al sistema.

Paso 3: Si el sistema es controlable se transformará a su forma canónica de controlador.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \quad (2.18)$$

Paso 4: Se propone la entrada  $u = -\bar{k}\bar{x}$  para cerrar el lazo de control.

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} - \bar{B}\bar{k})\bar{x} \quad (2.19)$$

Paso 5: Se obtiene el polinomio característico de la matriz  $(\bar{A} - \bar{B}\bar{k})$ .

$$\Delta(\bar{A} - \bar{B}\bar{k}) = s^n + (\bar{k}_1 + \tau_1)s^{n-1} + \dots + (\bar{k}_{n-1} + \tau_{n-1})s + (\bar{k}_n + \tau_n) \quad (2.20)$$

donde  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n$  son los valores que se desean encontrar y  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  son constantes.

Paso 6: Diseñar el polinomio que contenga las raíces en los lugares donde se desean colocar los polos del sistema:

$$(s - \lambda_1) * (s - \lambda_2) * \dots * (s - \lambda_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (2.21)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son valores a donde se quieren llevar los polos del sistema, recordando que para que el sistema sea estable todos estos valores deben ser negativos en su parte real, y los valores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son los coeficientes del polinomio diseñado.

Paso 7: Igualar los coeficientes del polinomio de la matriz  $(\bar{A} - \bar{B}\bar{k})$  y del polinomio diseñado y posteriormente se despeja los valores de  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n$  de las "n" ecuaciones formadas:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{k}_1 + \tau_1 = \alpha_1 & & \bar{k}_1 = \alpha_1 - \tau_1 \\
 \bar{k}_2 + \tau_2 = \alpha_2 & \longrightarrow & \bar{k}_2 = \alpha_2 - \tau_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \bar{k}_n + \tau_n = \alpha_n & & \bar{k}_n = \alpha_n - \tau_n
 \end{array} \quad (2.22)$$

Paso 8: De los resultados de obtenidos en las ecuaciones, se formara una matriz de la forma:

$$\bar{k} = [\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \dots \quad \bar{k}_n] \quad (2.23)$$

esta matriz se debe transformar para obtener los valores de "k", ya que se transformo el sistema y se ha trabajado en su forma canónica de controlador. La ecuación (2.24) muestra la transformación a "k":

$$k = \bar{k} T \quad (2.24)$$

Recordemos que en el capítulo uno se mencionó como obtener la matriz inversa de transformación (ecuación 1.22), y de esta se puede obtener la matriz "T"

$$T = \text{inv}(T^{-1}) \quad (2.25)$$

Finalmente, se obtienen los valores de k con la ecuación (2.24), formando la matriz de ganancias de retroalimentación que logran ubicar los polos del sistema en los valores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Es importante mencionar que los valores de la matriz k no son valores únicos, ya que éstos dependen de la ubicación que se desee en el polinomio de diseño (2.21), el cual está directamente ligado al comportamiento que se quiere obtener en la respuesta del sistema, ya sea una respuesta amortiguada o no, o una respuesta rápida o lenta; por lo tanto, la elección de los polos en lazo cerrado esta comprometida con la velocidad de respuesta del vector de error, de la sensibilidad que tiene el sistema a perturbaciones y al ruido. Si se aumenta la velocidad de respuesta ante el error, generalmente se incrementan los efectos producidos por perturbaciones o por el ruido. En el caso de tener sistemas de orden mayor es complicado establecer una relación entre la ubicación de los polos de lazo cerrado y la dinámica del sistema. Por lo tanto, se desea minimizar una función de error, tomando en cuenta la energía requerida para controlar el sistema. Ambos factores son tomados en cuenta en el control óptimo cuadrático.

## 2.2 Control óptimo cuadrado (LQR)

Este control está basado en índices de desempeño cuadrático. Minimizando una función de costo donde interviene el error del sistema y la energía necesaria para regularlo. Esto se obtiene definiendo a nuestro sistema en variables de estado como en la ecuación 2.1 y minimizando una función generalizada de costo [3], mostrada en la ecuación 2.26.

$$J = \int_0^T [\xi(t) - x(t)]^* Q [\xi(t) - x(t)] dt \quad (2.26)$$

Donde  $[\xi(t) - x(t)]$  representa el vector de error,  $x(t)$  son las mediciones de los estados y  $Q$  es una matriz real positiva definida o semidefinida. En un intervalo de tiempo de  $0 \leq t \leq T$ .

La energía es un aspecto que no debemos dejar de lado, ya que con ella realizaremos la acción de control. Considerando este factor evitaremos llevar a los sistemas físicos hasta una saturación, evitando que el control llegue a ser inoperante o lleguemos a dañar a los actuadores. Limitaremos al vector de control añadiendo un término cuadrático a la función de costo:

$$\int_0^T u^*(t) R u(t) dt \quad (2.27)$$

donde  $R$  es una matriz real positiva definida y  $k$  es una constante negativa, en un intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq T$ .

Al conjuntar las ecuaciones 2.26 y 2.27 se obtiene una ecuación que minimiza el error y dinamiza la energía de control, si el estado deseado  $\xi$  es el origen y el  $t \rightarrow \infty$ , la ecuación resultante nos queda de la siguiente manera:

$$J = \int_0^{\infty} [x^*(t) Q x(t) + u^*(t) R u(t)] dt \quad (2.28)$$

La selección de las matrices  $Q$  y  $R$  son arbitrarias tomando en cuenta las características de diseño de control previamente mencionadas.

### Problema de control óptimo

El problema de control óptimo consiste en controlar el sistema con ecuación:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.29)$$

cerrando el lazo de control con la entrada

$$u = -K x \quad (2.30)$$

donde se debe determinar la matriz K de modo que minimice el índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} [x^* Q x + u^* R u] dt \quad (2.31)$$

Sustituyendo la ecuación (2.30) en (2.29), se obtiene:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (2.32)$$

suponiendo que los polos de la matriz (A - Bk) son negativos en su parte real, y sustituimos la ec. (2.30) en (2.31):

$$J = \int_0^{\infty} [x^* Q x + x^* K^* R K x] dt = \int_0^{\infty} x^* (Q + K^* R K) x dt \quad (2.33)$$

igualando nuestra ecuación (2.33) con la ecuación de Lyapunov  $x^* P x$  donde P es una matriz positiva definida y real.

$$\int_0^{\infty} x^* (Q + K^* R K) x dt = x^* P x \quad (2.34)$$

$$x^* (Q + K^* R K) x = -\frac{d}{dt} (x^* P x) \quad (2.35)$$

$$x^* (Q + K^* R K) x = -\dot{x}^* P x - x^* P \dot{x} \quad (2.36)$$

sustituyendo (2.32) en (2.36)

$$x^* (Q + K^* R K) x = -x^* [(A - BK)^* P + P(A - BK)] x \quad (2.37)$$

$$-(Q + K^* R K) = (A - BK)^* P + P(A - BK) \quad (2.38)$$

De donde (A - BK) es una matriz estable, existe una matriz P positiva definida, que satisfaga la ecuación (2.38), para obtener la solución del problema de control y como R es real simétrica y positiva definida podemos reescribirla como:

$$R = T^* T \quad (2.39)$$

donde T es una matriz no singular. Sustituyendo la ecuación (2.39) en (2.38) la ecuación nos queda:

$$-(Q + K^* T^* T K) = (A - BK)^* P + P(A - BK) \quad (2.40)$$



$$(A - BK)^* P + P(A - BK) + (Q + K^* T^* T K) = 0 \quad (2.41)$$

Podemos representarlo como:

$$A^* P + PA + Q - PBR^{-1}B^* P + [TK - (T^*)^{-1}B^* P]^* [TK - (T^*)^{-1}B^* P] = 0 \quad (2.42)$$

Para minimizar el valor del índice de desempeño J respecto a K se requiere la minimización de  $x^* [TK - (T^*)^{-1}B^* P]^* [TK - (T^*)^{-1}B^* P] x$ . Esta ecuación no es negativa, por lo tanto, el mínimo se producirá en cero, con lo cual

$$TK - (T^*)^{-1}B^* P = 0 \quad (2.43)$$

$$TK = (T^*)^{-1}B^* P \quad (2.44)$$

$$K = T^{-1}(T^*)^{-1}B^* P \quad (2.45)$$

$$K = R^{-1}B^* P \quad (2.46)$$

La ecuación (2.46) nos da los valores de K óptimos, pero necesitamos a la matriz P para obtener estos valores, estos se obtiene de la solución de la ecuación matricial de Ricatti que se observa en la ecuación (2.47).

$$A^* P + PA + Q - PBR^{-1}B^* P = 0 \quad (2.47)$$

Finalmente el control en lazo cerrado obtenido es:

$$u(t) = -R^{-1}B^* P x(t) \quad (2.48)$$

El control obtenido con esta técnica es óptimo con respecto al criterio de minimización, el cual además brinda un control estable.

Esta técnica también se caracteriza por ser una función lineal de las variables de estado, y por necesidad es fundamental la realimentación de todas las variables, ya sea medidos o estimados mediante un observador.

## 2.3 SISTEMAS DIFUSOS

A lo largo de los años y con los grandes avances tecnológicos logrados, hemos deseado construir maquinas, sistemas o robots que puedan “pensar” o procesar información muy parecido a como lo hacen los humanos.

En el año de 1965, el matemático Lotfi Asker Zadeh presentó la teoría de los conjuntos difusos (basada en la lógica difusa), con los que se da pauta a emular los procesos de pensamiento humanos. Mientras que en la lógica booleana se ofrece la posibilidad de elegir entre dos valores, cero o uno (apagado o prendido, verdadero o falso), la lógica difusa permite elegir un valor en un intervalo cerrado entre 0 y 1. Esto es mas parecido a la forma de razonar de un ser humano, ya que en cualquiera de nuestras actividades debemos tomar decisiones ya sea caminar, saltar, atarnos la agujetas o abrir un botella de agua. En este último ejemplo debemos pensar qué tanta fuerza debemos imprimir para abrir la botella: si está muy apretada, necesitaremos imprimir una mayor fuerza que si fuera una botella previamente abierta y cerrada ligeramente. En ambos casos, necesitamos aplicar una fuerza distinta, y esto dependerá de las condiciones a las que nos estemos enfrentando. De esta forma, si nuestra mente actuara como la lógica booleana, siempre abriríamos la botella con la misma fuerza.

Las reglas en las que se basa esta lógica emula las decisiones de un ser humano, por experiencia o sentido común la forma en la que actuamos es de la forma: “Si... entonces...”. Por ejemplo:

“Si se pone el color rojo en el semáforo entonces detendré el auto”

“Si el tapón de la botella está apretado entonces aplicaré mucha fuerza para hacer girar la tapa”

“Si el semáforo se puso en verde entonces comenzaré a acelerar mi automóvil”

Este tipo de razonamientos son la base del control difuso, en los cuales las variables del sistema serán medidas, y en función de estas mediciones se tomarán las decisiones correspondientes. Este proceso se muestra en la Fig. 2.2 mediante un esquema de bloques, donde:

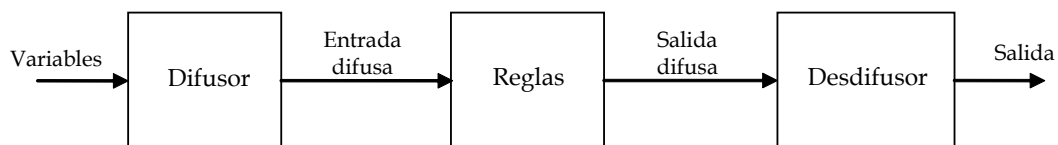


Figura 2.2

- Variables: Son las mediciones obtenidas mediante sensores u observadores. Estas pueden ser velocidades, fuerzas, voltajes, etc.
- Difusor: El difusor son conjuntos difusos o funciones de membresía, su función es la de convertir el valor de una variable en un valor difuso (grado de pertenencia de una variable a un conjunto difuso) que pueda ser procesado posteriormente.
- Entrada difusa: Es la variable de entrada en su valor difuso, y su valor oscila en el intervalo  $[0, 1]$ .
- Reglas difusas: Son el conjunto de reglas que describen la estrategia de control, basándose en la experiencia de un experto.
- Salida difusa: Es el resultado de las decisiones de las reglas difusas, valor difuso que se encuentra en el intervalo  $[0, 1]$ .
- Desdifusor: Es la metodología para convertir la salida difusa a una salida que pueda manipular el o los actuadores.
- Salida: Es el valor de un voltaje, fuerza, torque, etc., que logra controlar al sistema.

### 2.3.1 Conjuntos difusos

Un conjunto difuso se representa mediante una función  $A$  que mapea una variable  $X$  en un intervalo dado entre  $[0, 1]$ , también conocida como función de pertenencia en la forma:

$$A: X \rightarrow [0, 1]$$

Los beneficios de utilizar un conjunto difuso a diferencia de un conjunto booleano los podemos ver en el siguiente ejemplo: ¿Cuándo podemos considerar que una persona es alta?. Si utilizáramos un sistema booleano podríamos considerar a una persona alta a partir del metro ochenta, por lo tanto cualquier persona que supere esta altura es considerada alta. Sin embargo, una persona que tiene un centímetro menos a la altura establecida por el conjunto, queda definida como una persona de "estatura baja". Sin embargo, si se emplea un conjunto difuso una persona con un centímetro menor a un metro ochenta, es considerada alta en 0.98, lo que significaría alta en un 98% gracias a sus diferentes grados de pertenencia.

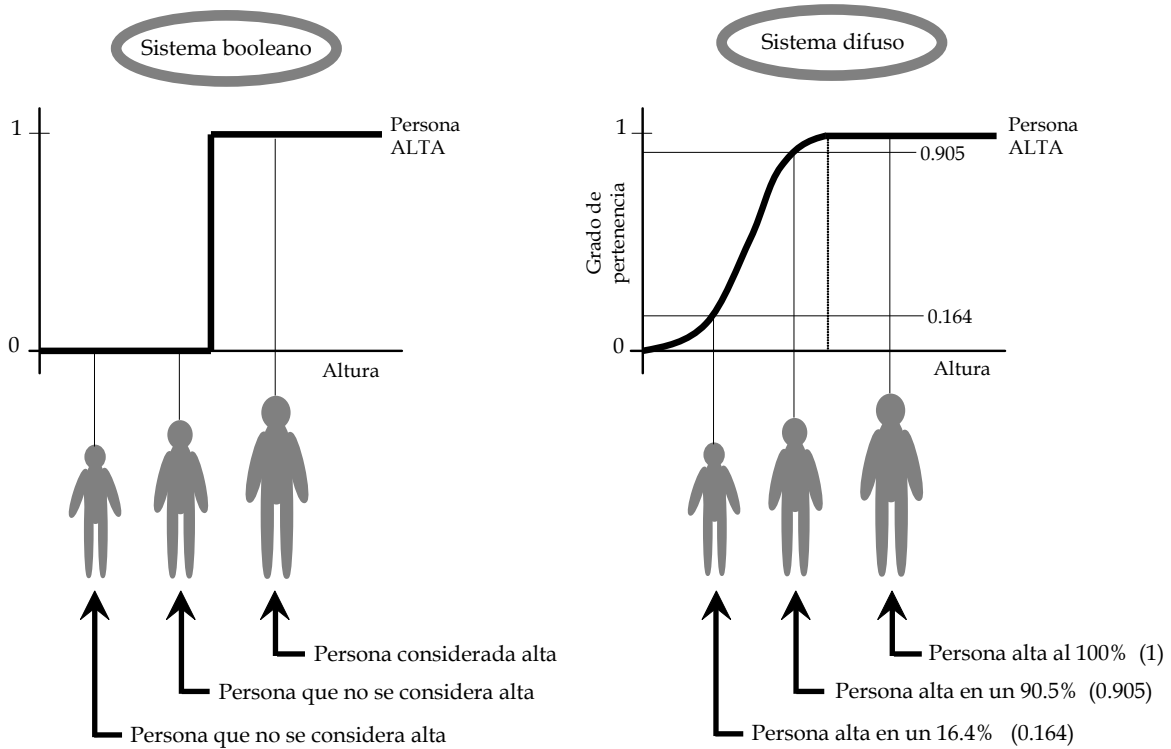


Figura 2.3

La figura 2.3 muestra la diferencia de ocupar la lógica booleana y la lógica difusa. En los dos se tienen a tres personas de diferentes alturas y son catalogadas si son altas o no y en qué grado pertenecerán a un conjunto. En el primer caso se puede observar que la clasificación es tajante: una persona es alta o no la es, mientras que mediante la lógica difusa el conjunto utilizado permite una mayor cantidad de grados de pertenencia, y por lo tanto las personas tienen diferente grado de pertenencia, en la cual se puede ser alto en mayor o menor medida.

Los conjuntos difusos suelen representarse mediante diferentes funciones, las cuales se muestran en la figura 2.4.

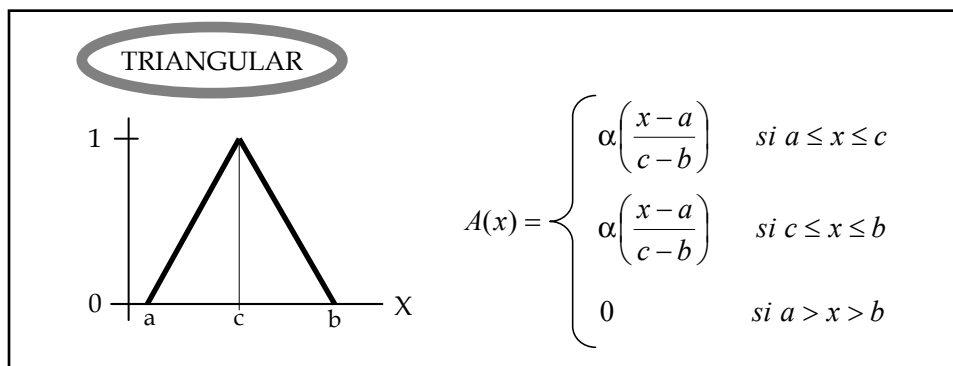


Figura 2.4a Conjunto difuso triangular

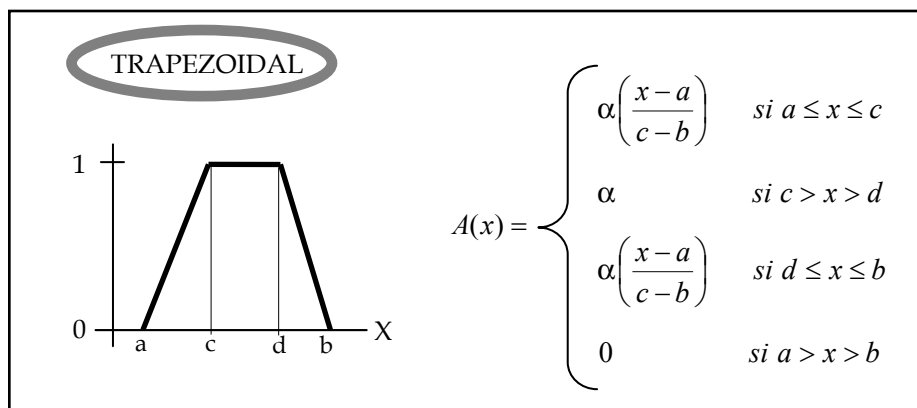


Figura 2.4b Conjunto difuso trapezoidal

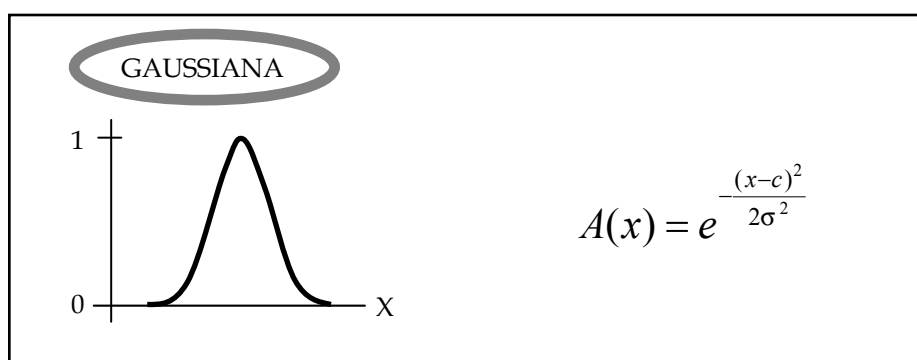


Figura 2.4c Conjunto difuso gaussiano

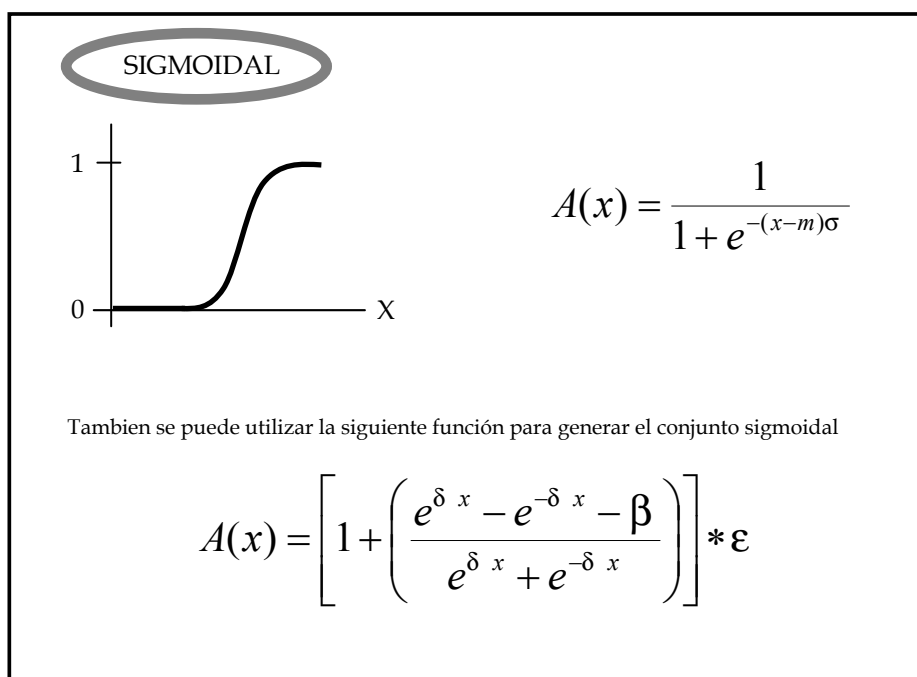


Figura 2.4d Conjunto difuso sigmoideal

### 2.3.2 Operaciones con conjuntos difusos

Existen tres operaciones que se pueden utilizar en los conjuntos difusos y estas son similares a los que se utilizan con los conjuntos booleanos (intersección, unión y complemento o negación). Estos operadores son llamados conectores difusos u operadores de agregación, aunque también es común llamarlos normas-T.

Intersección (AND) 

---

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = \min\{A(x), B(x)\}$$

$$(A \cap B)(x) = \max\{A(x) + B(x) - 1, 0\}$$
(2.49)

Unión (OR) 

---

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

$$(A \cup B)(x) = \min\{A(x) + B(x), 1\}$$
(2.50)

Complemento (NOT) 

---

$$(X - A)(x) = 1 - A(x) = (1 - A(x)^a)^{\frac{1}{a}} \simeq \frac{1-x}{1+(a-1)x} \quad a > 0$$
(2.51)

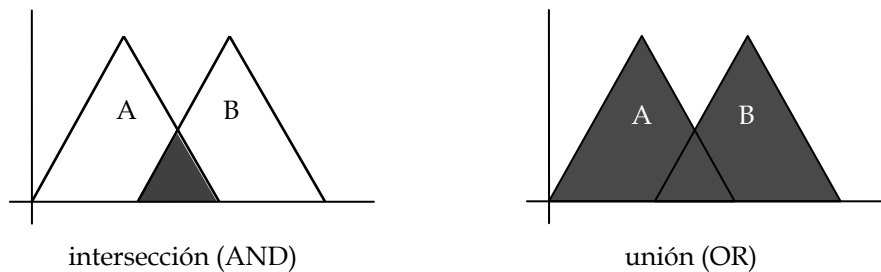


Figura 2.5 Operaciones con conjuntos difusos, intersección y unión.

Estos son los tres operadores de agregación para los conjuntos difusos.

Una definición que corresponde a una generalización para la unión (OR) es la conorma-t [6]. Esta es una operación binaria  $*$  :  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  que satisface para toda  $x, y, z \in [0,1]$ .

La conorma-t cumple con la propiedad de conmutatividad, asociatividad.

### 2.3.3 Combinación de reglas difusas

Como ya se había comentado, las reglas usadas como base de los sistemas difusos se expresan generalmente de la forma "Si  $x$  es  $A$ , entonces  $y$  es  $B$ ", donde  $A$  y  $B$  son conjuntos difusos, " $x$ " es la entrada del sistema y la salida esta representada por " $y$ ". Existen varios mecanismos que interpretan una colección de reglas difusas de la forma:

$$\text{Si } x \text{ es } A_i \text{ entonces } y \text{ es } B_i, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (2.52)$$

Estos son tres modelos comúnmente utilizados para la interpretación de reglas difusas, también son llamados métodos de inferencia.

#### 2.3.3.1 Modelo de Mamdani

En el modelo de Mamdani, tanto la parte de difusión como en la parte de activación se manejan conjuntos difusos, por lo tanto, las reglas tienen la forma

$$R_i : \quad \text{Si } x \text{ es } A_i \text{ entonces } y \text{ es } B_i, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (2.53)$$

donde  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  son las entradas del sistema, " $y$ " es la salida del sistema, y los conjuntos  $A_{ik}$  pertenecen a cada entrada del sistema  $x_k$  y según la regla  $R_i$  le pertenecerá un conjunto  $B_i$  y " $n$ " es el número de reglas. La forma expandida de las reglas se muestra en la ecuación (2.54).

$$R(x_1, x_2, \dots, x_k, y) = \bigvee_{i=1}^n (A_{i1}(x_1) \wedge A_{i2}(x_2) \wedge \dots \wedge A_{ik}(x_k) \wedge B_i(y)) \quad (2.54)$$

$$\bigvee_{i=1}^n A_i(X) = A_{i1}(x_1) \wedge A_{i2}(x_2) \wedge \dots \wedge A_{ik}(x_k) \quad (2.55)$$

El peso o la fuerza de la regla  $R_i$ , se determina mediante la ecuación (2.55), donde cada uno de estos valores activará al conjunto  $B_i$ , según el peso de cada regla. Para realizar esta activación se utiliza la norma-t

$$R_{i,x}(y) = A_i(X) \wedge B_i(y) \quad (2.56)$$

Cuando se obtuvieron todos los valores de cada una de las reglas se deben agregar o acumular todos los resultados, aplicando la conorma-t

$$R(y) = \bigvee_{i=1}^n R_i(y) \quad (2.57)$$

Cuando se obtiene la acumulación es necesaria la desdifusión para obtener el valor de salida “y”. Existen varias técnicas para obtener este valor de salida, entre las cuales se encuentra el cálculo del centroide del conjunto acumulado, con la coordenada en el eje “y” del centroide correspondiente al valor final de salida  $y_f$ , mediante:

$$y_f(x) = \frac{\int y R(y) dy}{\int R(y) dy} \quad (2.58)$$

Para las reglas de conocimiento y los conjuntos difusos de entrada y salida mostrados en la figura 2.6 y cuyo proceso se ilustra en la figura 2.7.

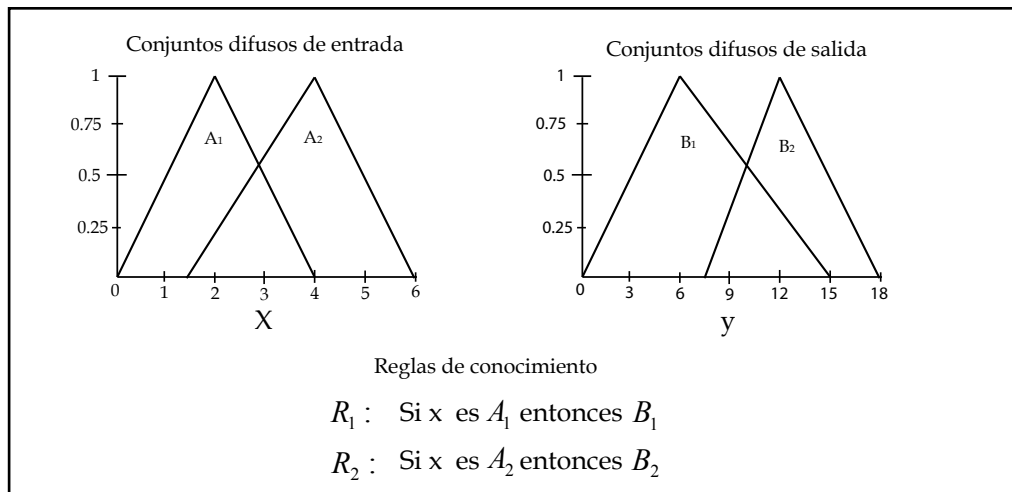


figura 2.6

### 2.3.3.2 Modelo de Larsen

Este modelo sigue un patrón muy similar al modelo de Mamdani, con cambios en la activación de los conjuntos difusos de salida. En este caso, la norma-t empleada es

$$R_{i,x}(y) = A_i(X) * B_i(y) \quad (2.59)$$

donde se realiza una multiplicación de los valores obtenidos en la difusión de  $A_i(X)$  y se multiplican por los conjuntos difusos  $B_i(y)$  como lo indican las reglas. El resultado de esta etapa se muestra en la figura 2.7, donde también se muestran los procesos de agregación y la desdifusión que son iguales al modelo de Mamdani.

En la figura 2.8 se muestra el proceso del modelo de Larsen utilizando los conjuntos y las reglas de conocimiento de la figura 2.6, donde además se aprecian las diferencias que se presentan respecto al modelo de Mamdani.



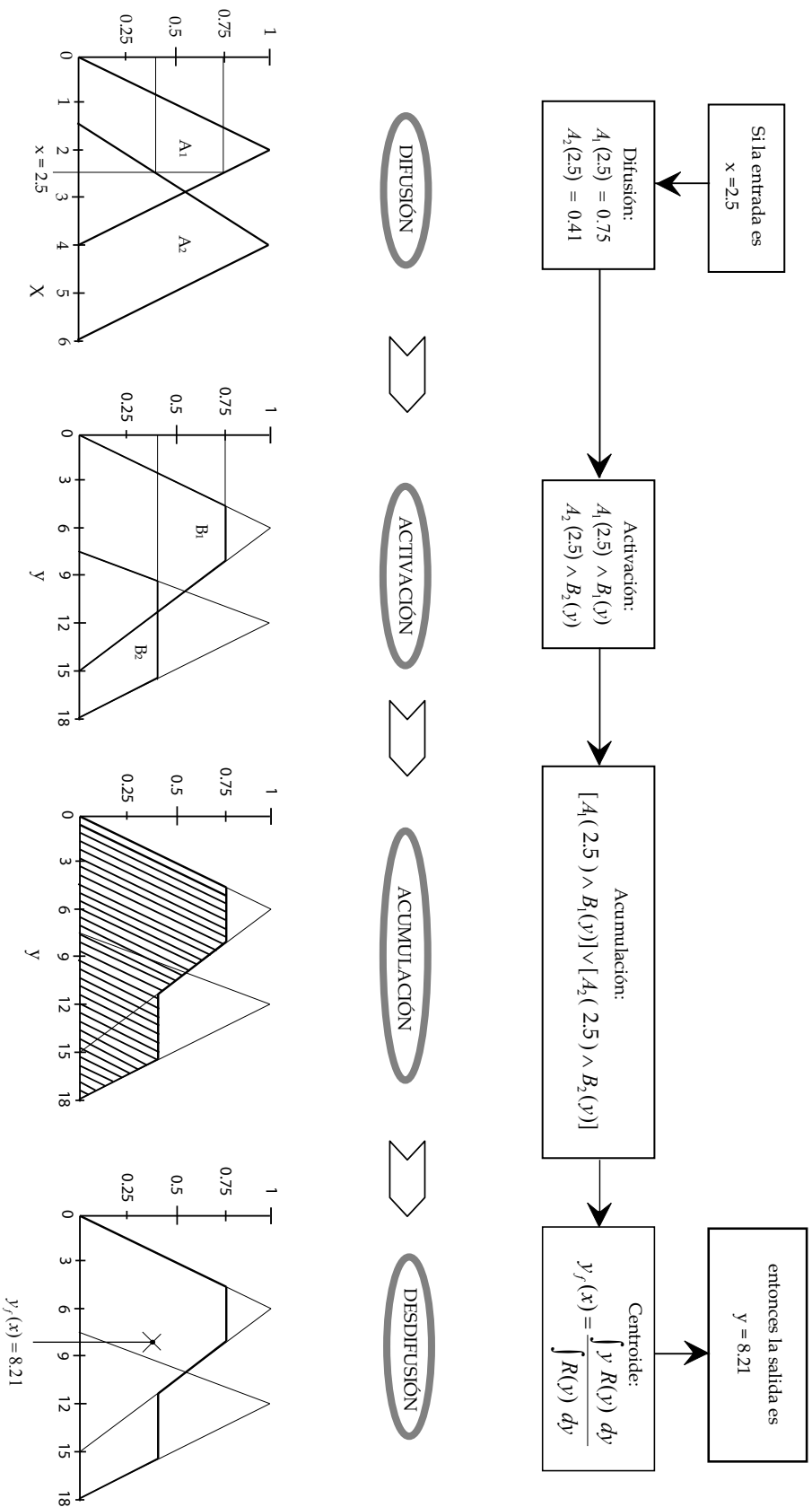


figura 2.7 Modelo de mandani

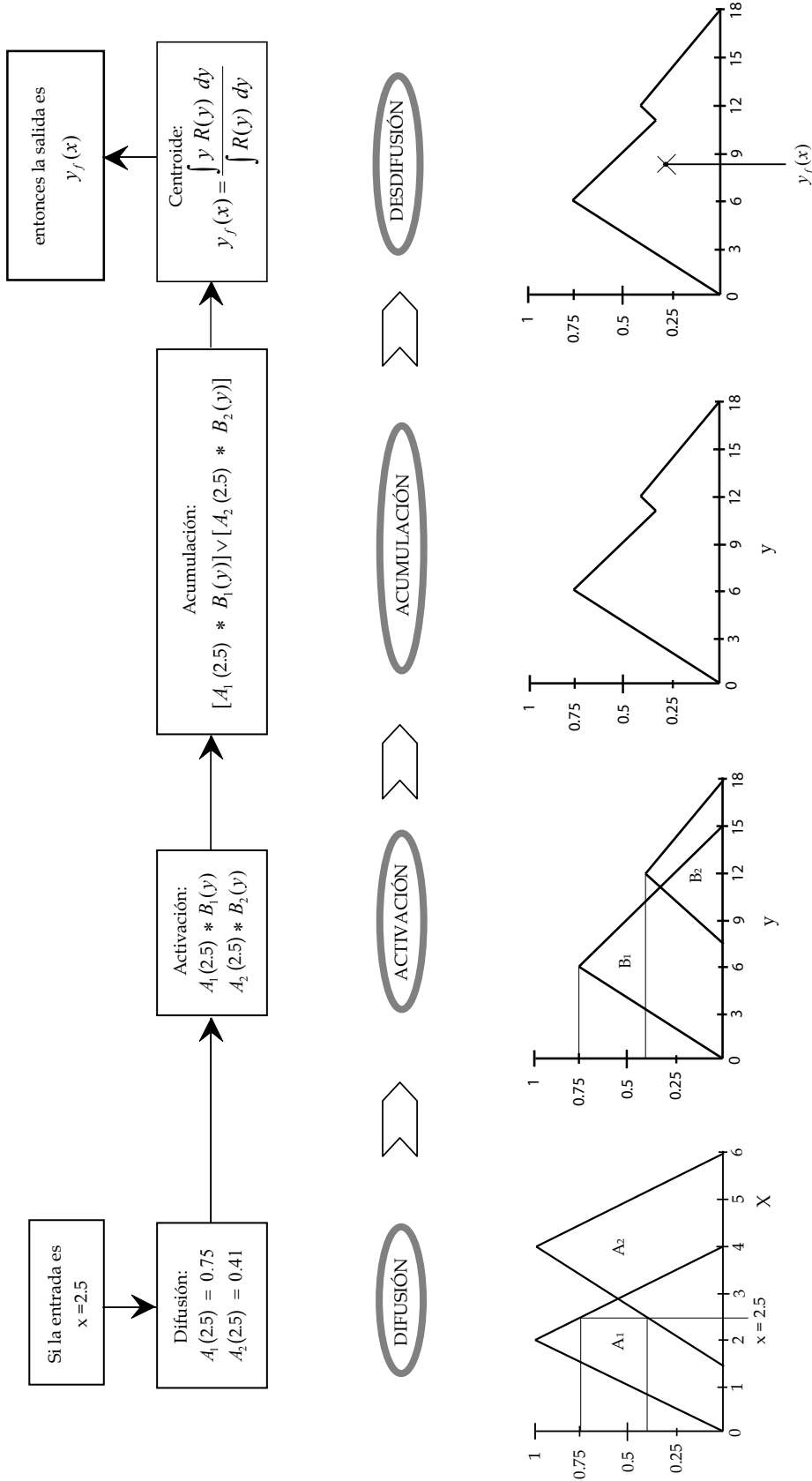


figura 2.8 Modelo de larsen

### 2.3.3.3 Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

Este sistema utiliza conjuntos difusos en la entrada para realizar la *fuzzificación*, la cual se realiza de la misma manera que en los modelos anteriores. En este caso, la parte consecuente a las reglas utiliza ecuaciones que están en función de las variables de entrada del sistema y las reglas de este modelo tienen la forma

$$R_i : \text{Si } x_1 \text{ es } A_{i1} \text{ y } x_2 \text{ es } A_{i2} \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } A_{in} \text{ entonces } y = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.60)$$

y el proceso de agregación se realiza de la misma manera que el modelo de Larsen o de Mamdani, pero la forma de obtener el valor final (desdifusión o *desfuzzificación*) se obtiene con la ecuación

$$y_f = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(X) * A_i(X)}{\sum_{i=1}^n A_i(X)} \quad (2.61)$$

donde n son el número de reglas y X corresponde a las variables del sistema.

### 2.3.3.4 Sistema difuso tipo singleton

Existe un caso especial que se deriva del modelo TSK, ya que las funciones se eligen como valores constantes de altura unitaria, con valor en el resto del eje nulo. De esta forma, se puede obtener un promedio ponderado como método de desdifusión para encontrar el valor de salida. La figura 2.8 muestra la función conocida como Singleton.

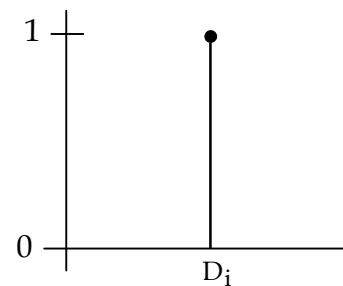


figura 2.8 Función Singleton

Las reglas son:

$$R_i : \text{Si } x_1 \text{ es } A_{i1} \text{ y } x_2 \text{ es } A_{i2} \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } A_{in} \text{ entonces } y \text{ es } D_i. \quad (2.62)$$

donde  $D_i$  es el valor en el que se encuentra la función Singleton en el eje y.

El proceso de difusión es el mismo que en los modelos anteriores, la activación utiliza la norma-t

$$R_{i,x}(y) = A_i(X) * D_i \quad (2.63)$$

y la desdifusión utiliza el promedio ponderado para obtener la salida final, la ecuación (2.64) muestra la forma de obtener este promedio.

$$y_f = \frac{\sum_{i=1}^n A_i(x) * D_i}{\sum_{i=1}^n A_i(x)} \quad (2.64)$$

Existen diferentes representaciones de conjuntos difusos y modelos de combinación de reglas difusas y formas de desdifusión, con las cuales se puede atacar un problema de control. En primer lugar, todos los valores de nuestras variables deben pasar por un *difusor*, el cual convertirá el valor medido por los sensores a un valor difuso, comprendido entre cero y uno. Después, esta información será usada por un conjunto de reglas de la forma “Si... entonces...” las cuales darán un valor de salida. Finalmente, el desdifusor convertirá el valor de salida difuso a un valor que podrá realizar la acción de control, ya sea un voltaje, una fuerza, etc. De esta manera, los sistemas difusos pueden ser implementados como controladores, lo que da la oportunidad de poder emular el conocimiento de un experto con base en los métodos de difusión, las reglas y la desdifusión. La ventajas y desventajas serán abordadas mediante una comparación entre la implementación de un control LQR y un control difuso.

Estas son las bases teóricas con las que nos apoyaremos en la implementación del control del péndulo invertido, en el siguiente capítulo abordamos la descripción del sistema físico y la identificación paramétrica con fines de simulación.