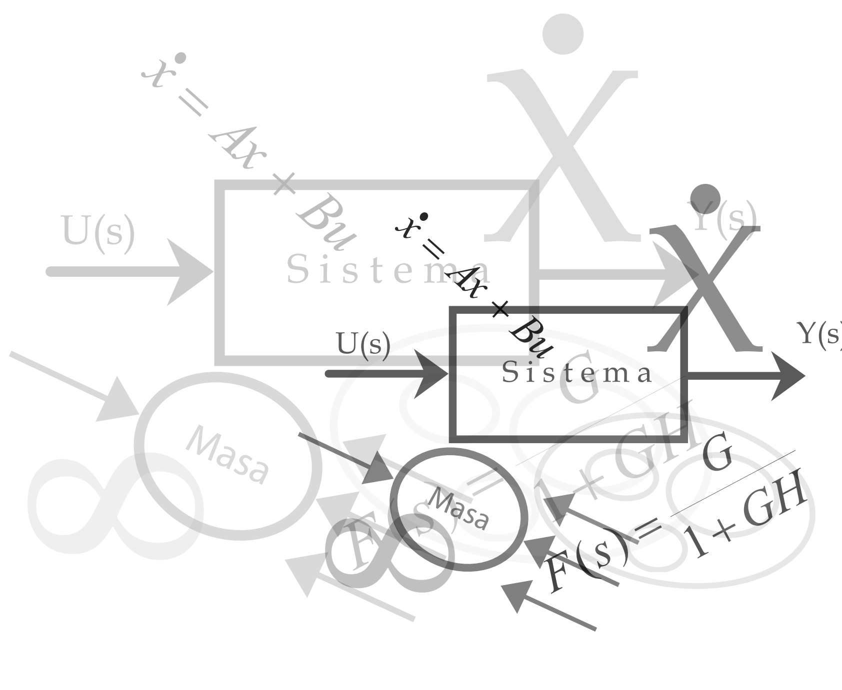
CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN



INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Desde hace mucho tiempo el hombre ha buscado la manera de controlar su entorno y manejarlo de acuerdo a sus necesidades tratando de facilitar su vida, inventando mecanismos que lograran abrir o cerrar enormes puertas, o abrir y cerrar flujos de agua para mantener controlado el líquido que llegaba hasta sus ciudades, etcétera. Con el paso del tiempo nuevos descubrimientos ayudaron a mejorar estos sistemas, y gracias al avance tecnológico, científico y al desarrollo matemático, se ha logrado controlar una gran cantidad de dispositivos y sistemas. Algunos ejemplos a nombrar son: el control automático de aviones, control de posicionamiento y direccionamiento de satélites, control de robots industriales, etc. Estos sistemas se siguen mejorando con nuevas tecnologías y técnicas de control.

El péndulo invertido es un mecanismo muy utilizado para realizar prácticas o proyectos de investigación, cuyo interés radica en regular la posición del péndulo en su punto de equilibrio inestable y presenta un buen reto de control, mezclando la interacción entre un sistema mecánico y electrónico.

Existen diferentes mecanismos para el péndulo invertido: un mecanismo utiliza un motor conectado a una banda dentada que mueve a la base del péndulo invertido. Otro dispositivo común es el compuesto por un carro que se mueve con un grado de libertad a lo largo de un eje y en la base del carro se encuentra una barra que tiene movimiento rotacional en el mismo sentido al eje del carro.

El péndulo invertido es un sistema no lineal e inestable, y al ser un sistema mécanico presenta propiedades generalmente no modeladas (como fricción seca) y en la parte electrónica se presentan zonas muertas que deben ser contempladas para su control.

Algunas técnicas de control necesitan forzosamente del modelo matemático del sistema en variables de estado o en su función de transferencia. En el caso en el cual no se cuenta con estos modelos se puede recurrir a estrategias que no lo requieran en forma explícita, como al control difuso, esta característica hace de este controlador una técnica interesante.

1.2 Motivación y objetivo

El péndulo invertido es un sistema cuyo conocimiento permite ser extrapolado a otro tipo de problemas de control (como control de misiles o robots bípedos), motivo por el cual resulta de interés su análisis y diseño de esquemas de control que lo estabilicen.

El objetivo general del presente trabajo es el diseño e implementación de un control difuso para mantener en balance un péndulo invertido. Se aplicará una fuerza apropiada en la base, manteniendo a la barra en posición vertical en el punto de equilibrio inestable del sistema. En esta posición, cualquier perturbación puede desbalancear a la barra fácilmente, por lo cual es necesario un controlador que estabilice al sistema. Los objetivos particulares son:

1. Implementar el sistema mecánico y obtener mediciones con una tarjeta de adquisición de datos de bajo costo.

2. Identificar los parámetros del sistema y obtener el modelo matemático del péndulo invertido sobre el carro.

3. Controlar al sistema con tarjeta de bajo costo.

4. Probar dos técnicas de control (LQR y difuso "singleton") y analizar cuales son las ventajas y desventajas de cada controlador.

1.3 Estructura de la tesis

El trabajo está organizado en seis capítulos: el segundo capítulo muestra la parte teórica de la tesis y se describen de las técnicas de control que se utilizan para estabilizar al sistema. El tercer capítulo está dedicado a la descripción del sistema mecánico, del sistema electrónico y de la interfase utilizada para adquirir y mandar datos, finalizando con el diseño de los filtros y la identificación de los parámetros del sistema. El diseño de los controladores es abordado en el capítulo cuatro, donde se muestran las consideraciones tomadas para diseñar e implementar cada control. El capítulo cinco está dedicado a mostrar los resultados experimentales de la tesis. Finalmente, en el sexto capítulo se muestra la comparación entre las dos técnicas, observando las ventajas y desventajas de cada método y las conclusiones del trabajo.

1.4 Antecedentes

La ingeniería de control emplea los modelos matemáticos para poder describir su comportamiento y desempeño entrada-salida, y después proponer esquemas de control.

1.4.1 Sistemas

Podemos definir a un sistema como un conjunto de componentes que interactúan entre sí, el cual puede ser excitado por una entrada y como consecuencia obtendremos una salida. La planta o el sistema puede representarse por medio de un bloque (figura 1.1), y éste a su vez puede estar constituido por una serie de subsistemas que representarían a la misma planta.

Figura 1.1

Un ejemplo es un sistema de medición de temperatura, que puede ser representado en un solo bloque con una entrada y una salida, que a su vez se puede representar como una serie de subsistemas: un termómetro resistivo, un puente wheastone y un subsistema de medición (figura 1.2).

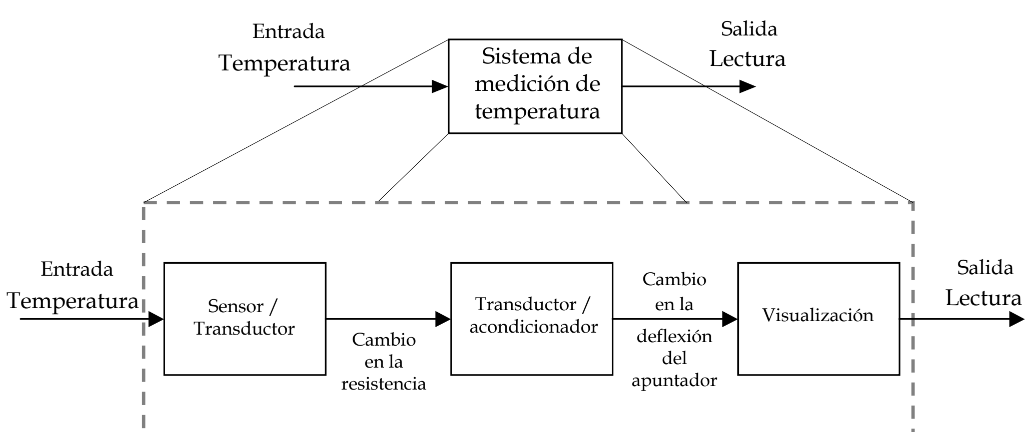


Figura 1.2

Estas dos representaciones muestran el mismo sistema, donde la representación depende de la complejidad del modelado del mismo, sin olvidar que el objetivo es encontrar una ecuación o representación matemática para evaluar su comportamiento.

Los sistemas pueden clasificarse por el tipo de componentes que interactúan en él (mecánicos, eléctricos, hidráulicos, térmicos e híbridos), los cuales funcionan como almacenadores o disipadores de energía.

ELEMENTOS DE MODELADO				
	Mecánico	Eléctrico	Hidráulico	Térmico
Almacenadores de energía	masa	capacitor	capacitancia hidráulica	capacitancia térmica
Almacenadores de energía	resorte	inductor	inertancia hidráulica	
Disipadores de energía	amortiguador	resistencia	resistencia hidráulica	resistencia térmica

Tabla 1.1

Cada elemento de modelado tiene una ecuación matemática que representa su comportamiento, la cual es empleada para obtener el modelo matemático del sistema utilizando ecuaciones diferenciales. La tabla 1.2 muestra las ecuaciones descriptivas de cada elemento.

Existen analogías entre los cuatro sistemas y es común encontrar representaciones de un sistema hidráulico, mecánico o térmico como un circuito eléctrico o viceversa. Esto puede ocurrir porque el modelo matemático describe un comportamiento a fin. Por ejemplo, la descarga de un capacitor, el enfriamiento de una papa caliente, el vaciado de un contenedor con agua a través de una llave o el amortiguamiento de un objeto, estos son sistemas diferentes en su naturaleza donde el modelo matemático y comportamiento energético es similar. El modelo nos pueda dar este tipo de información, de como actuará el sistema a diferentes entradas. Por este motivo, los modelos son muy importantes en el análisis y en el control de sistemas.

Elementos de modelado	Ecuaciones descriptivas	Constantes
resorte	$F = k \cdot x$	F : fuerza k : cte. del resorte m : masa c : cte. de amortigaumiento x : posición
masa	$F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$	
amortiguador	$F = c\dfrac{dx}{dt}$	
inductor	$i = \dfrac{1}{L}\int v\ dt$	i : corriente L : inductancia C : capacitancia R : resistencia v : tensión
capacitor	$i = C\dfrac{dv}{dt}$	
resistor	$i = \dfrac{v}{R}$	
inertancia hidráulica	$q = \dfrac{1}{L}\int (p_1 - p_2)\ dt$	q : flujo volumétrico L : inductancia hidráulica C : capacitancia hidráulica R : resistencia hidráulica p1 - p2 : diferencia de presión
capacitancia hidráulica	$q = C\dfrac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	
resistencia hidráulica	$q = \dfrac{(p_1 - p_2)}{R}$	
capacitancia térmica	$q_1 - q_2 = C\dfrac{dT}{dt}$	q : flujo de calor C : capacitancia térmica R : resistencia térmica T : temperatura
resistencia térmica	$q = \dfrac{(T_1 - T_2)}{R}$	

Tabla 1.2

1.4.2 Modelado

Un modelo matemático es el conjunto de expresiones matemáticas que resultan de traducir desde un lenguaje empírico a un lenguaje científico, generalmente basado en leyes físicas de los componentes de cada sistema y los conocimientos generales de la física (como las leyes de Newton, los principios de la termodinámica, las leyes de Kirchhoff, las leyes de conservación de la energía y la materia).

Los modelos matemáticos pueden tener distintas representaciones, ya sea mediante ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia, diagramas de bloques o variables de estado. Con cada representación podemos analizar al sistema más a fondo y observar su comportamiento por medio de simulaciones.

1.4.2.1 Función de transferencia

La función de transferencia de un sistema es la relación entre la transformada de Laplace de la salida del sistema ec.(1.1), entre la transformada de Laplace de la variable de entrada, suponiendo que las condiciones iniciales son cero y que el sistema es lineal e invariante en el tiempo.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \qquad (1.1)$$

Donde:

$G(s)$ >>> Función de transferencia

$Y(s)$ >>> Transformada de Laplace de la salida del sistema

$U(s)$ >>> Transformada de Laplace del la entrada del sistema

Para obtener la función de transferencia de un sistema es necesario trasformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica utilizando la transformada de Laplace. Esto es, realizar un mapeo del dominio del tiempo al domino S.

Las ventajas que ofrece esta transformación es la de poder trabajar con ecuaciones algebraicas que facilitan su manipulación, además, es posible regresar al dominio del tiempo utilizando una transformación inversa llamada "*antitransformada de Laplace*", como se indica en la figura 1.4. Esto nos permite resolver ecuaciones diferenciales con mayor facilidad, llevando la ecuación del dominio del tiempo al de S, manipulando la ecuación algebraicamente para obtener la solución del sistema diferentes tipos de entradas y regresando del dominio S al dominio del tiempo nuevamente.

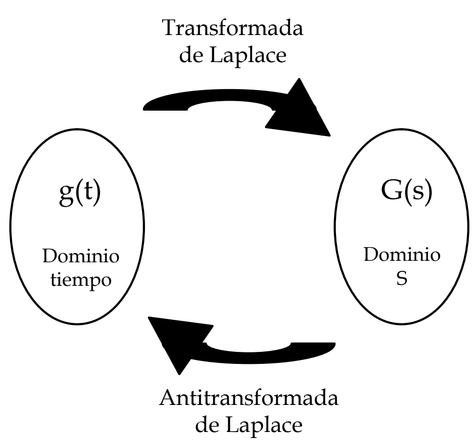


Figura 1.4

Estas no son las únicas ventajas de trabajar con la transformación en el dominio S, ya que el tener una función de transferencia nos permite analizar mas a fondo al sistema, además de poder observar la respuesta que tiene a diferentes entradas, se puede analizar su estabilidad. Esto significa que, al aplicar una entrada con magnitud finita, se espera que la respuesta tenga una salida de magnitud finita, es decir, a entradas acotadas, salidas acotadas. Si el sistema cumple con esto se dice que es BIBO[1] estable, pero si la salida comienza a crecer con el tiempo, el sistema es inestable.

Otra forma de analizar la estabilidad de un sistema se realiza encontrando las raíces del polinomio del denominador en la función de transferencia, conocidas como polos del sistema. Si algún valor de los polos es positivo en su parte real, el sistema es inestable; pero si todas los valores de los polos son negativos en su parte real, entonces el sistema es estable.

La función de transferencia en lazo cerrado G(s) de un sistema, se puede representar mediante

$$G(s) = \frac{K(s^m + a_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + a_1\, s + a_0)}{(s^n + b_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0)} \tag{1.2}$$

y, si las raíces del denominador y del numerador se establecen como

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ \ldots\ (s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\ \ldots\ (s+p_n)} \tag{1.3}$$

$z_1, z_2, \ \ldots\ , z_m$ >>> Ceros del sistema
$p_1, p_2, \ \ldots\ , p_n$ >>> Polos del sistema

La función de transferencia nos permite analizar la respuesta en estado estable de un sistema a diferentes frecuencias (respuesta en frecuencia). Los datos de la respuesta en frecuencia pueden arrojar información del ancho de banda del sistema, que se define como la banda de frecuencias en la cual la magnitud no cae por debajo de -3dB y también el pico de resonancia, que se define como el máximo valor de la magnitud y esta relacionado con el máximo sobrepaso del sistema.

1.4.2.2 Variables de estado

El modelado con función de transferencia, tiene un enfoque clásico, su análisis es sencillo y su representación es compacta, permitiendo analizar el transitorio fácilmente, sin embargo presenta la desventaja de: encontrarse en el dominio de la frecuencia, asi como no permitir modelar sistemas no

---

[1] Por sus siglas en ingles Bounded-Input Bounded-Output (Entrada acotada Salida acotada)

lineales, además de perder información y sólo es aplicable para sistemas con una entrada y una salida, lo que limita a la técnica para una gran cantidad de sistemas.

Las variables de estado son el conjunto de variables linealmente independientes entre sí que permiten conocer al resto de las variables del sistema, se utilizan operaciones algebraicas, llamadas ecuaciones de estado, que son el conjunto de n-ecuaciones diferenciales de primer orden compuestas por las variables de estado del sistema.

Las ecuaciones de estado con "n" variables de estado, "m" entradas y "z" salidas se representan de la siguiente manera:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1m}u_m \quad (1.4)$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \ldots + b_{2m}u_m \quad (1.5)$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \ldots + b_{nm}u_m \quad (1.6)$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \ldots + d_{1m}u_m \quad (1.7)$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \ldots + d_{2m}u_m \quad (1.8)$$

$$\vdots$$

$$y_z = c_{z1}x_1 + c_{z2}x_2 + \ldots + c_{zn}x_n + d_{z1}u_1 + d_{z2}u_2 + \ldots + d_{zm}u_m \quad (1.9)$$

Pero una representación más sencilla en su forma matricial para sistemas lineales es:

$$\dot{x} = A\ x + B\ u \quad (1.10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$y = C\ x + D\ u \quad (1.11)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{z1} & c_{z2} & \cdots & c_{zn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{z1} & d_{z2} & \cdots & d_{zm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x + D\,u \end{aligned}}$$

Donde:
A – Matriz del sistema
B – Matriz de entradas
C – Matriz de salidas
D – Matriz de alimentación directa

Cuando se desea modelar por este método se deben de elegir variables que sean linealmente independientes, donde el número de estas variables dependerá del orden del sistema, por lo tanto, el mínimo de variables de estado a elegir será el mismo número del orden mencionado.

Algunas recomendaciones para la elección de variables de estado en circuitos eléctricos es tomar a los voltajes de los capacitores y a las corrientes de los inductores. En el caso de tener sistemas mecánicos, las variables de estado recomendables son la posición, la velocidad y la aceleración, esto también aplica en sistemas mecánicos rotacionales. Para elegir variables en sistemas hidráulicos, la mejor opción son los cambios de presión y el flujo.

El modelado con variables de estado es una técnica con una enfoque moderno y avanzado, basada en el dominio del tiempo y permite obtener un mayor conocimiento del interior del sistema, modelar sistemas no lineales y variantes en el tiempo, así como con varias entradas y varias salidas. Sin embargo, modelar un sistema de este modo provoca una pérdida de sencillez en el estudio de la respuesta en tiempo, en particular sobre el desempeño del comportamiento transitorio.

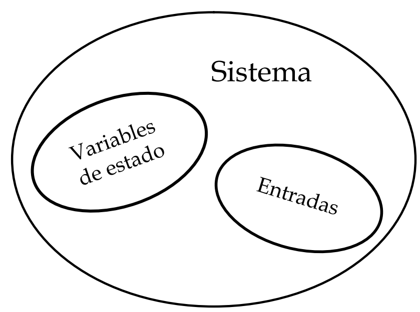


Figura 1.5 Las variables de estado son un conjunto del sistema

Existe una relación entre el modelo con variables de estado y la función de transferencia, de esta forma se pueden analizar la estabilidad del sistema y la respuesta en frecuencia de una manera sencilla.

$$H(s) = C(SI - A)^{-1} B \tag{1.12}$$

$$H(s) = \frac{C \cdot adj(SI - A) \cdot B}{\det(SI - A)} \tag{1.13}$$

Utilizando la ecuación (1.13) los polos del sistema son los valores de S que tienen solución a la ecuación

$$\det(SI - A) = 0 \qquad (1.14)$$

que corresponden con los valores característicos de la matriz A.

Y los ceros del sistema se obtienen con la solución de la ecuación

$$C \cdot adj(SI - A)B = 0 \qquad (1.15)$$

Las ecuaciones (1.14 y 1.15) solo aplican para sistemas lineales, la ecuación en variables de estado para sistemas no lineales es:

$$\dot{x} = f(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, u) \qquad (1.16)$$

Como ya se mencionó anteriormente, el tener un modelo matemático con variables de estado nos ofrece un mayor conocimiento del sistema y es posible realizar varios análisis como la estabilidad BIBO, la estabilidad interna, la controlabilidad y la observabilidad del sistema.

La estabilidad BIBO nos ofrece el conocimiento de la respuesta forzada del sistema al aplicar una entrada acotada, mientras que la estabilidad interna del sistema nos muestra su comportamiento sin excitación, lo que facilita el análisis de la estabilidad en sus puntos de equilibrio.

La estabilidad BIBO esta ligada con los valores característicos de la matriz del sistema, por lo que si todos sus valores son negativos en su parte real, entonces el sistema es estable. Mientras que en la estabilidad interna se utiliza el método directo de Lyapunov para encontrar la estabilidad del punto o de los puntos de equilibrio del sistema.

Otros análisis interesantes que se pueden obtener con el modelo matemático en variables de estado son la controlabilidad y la observabilidad del sistema. A grandes rasgos, y sin estudiar a fondo estos temas se presentará la idea general.

1.4.3 Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad presentados por Kalman juegan un papel importante en aspectos teóricos y prácticos del control moderno. La controlabilidad orienta al diseñador sobre la posible existencia de una entrada u(t), que estabilice al sistema. Por su parte, la observabilidad indica si es posible reconstruir a los estados del sistema mediante la medición de la entrada u(t) y la salida y(t) en un tiempo finito.

Empleando estos conceptos y el modelo matemático del sistema, se espera que el péndulo invertido cumpla con ser un sistema controlable y observable, aunque se cuenten con sensores que midan los estados del sistema y no sea necesario una técnica de observación de los estados.

Un sistema se dice que es *controlable* cuando es posible llevar a los estados desde una condición inicial en tiempo cero hasta cualquier condición final en un tiempo finito con una entrada en el sistema u(t); en caso contrario se dice que el sistema es no controlable.

La matriz de controlabilidad se obtiene:

$$C_{ctr} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \tag{1.17}$$

Si la matriz de controlabilidad C_{ctr} es de rango completo entonces el sistema es controlable.

$$\rho(C_{ctr}) = n \tag{1.18}$$

Un sistema es *observable* si es posible determinar los estados x(t) a partir de la medición de la salida y(t) y de la entrada u(t) en un intervalo de tiempo finito.

La matriz de Observabilidad se obtiene:

$$\theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

Si la matriz de observabilidad θ, es de rango completo, el sistema es observable.

$$\rho(\theta) = n \tag{1.20}$$

1.4.4 Forma canónica del controlador

Dado el sistema:

$$\dot{x} = A\,x + B\,u \tag{1.21}$$

$$y = C\,x \tag{1.22}$$

Cuya función de transferencia es

$$H(s)=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\beta_2 s^{n-2}+\beta_3 s^{n-3}+\ \dots\ +\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\alpha_2 s^{n-2}+\ \dots\ +\alpha_{n-1}s+\alpha_n} \qquad (1.23)$$

Si el sistema es controlable y dim(u) = 1, entonces, se puede transformar el sistema, definiendo la matriz de transformación, como:

$$T^{-1}=[B \quad AB \ \dots\ A^{n-1}B]\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.24)$$

y la forma canónica de controlador es

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\,\bar{x}+\bar{B}\,u \qquad (1.25)$$

$$\bar{y}=\bar{C}\,\bar{x} \qquad (1.26)$$

Donde:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.27)$$

$$\bar{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.28) \qquad\qquad \bar{C}=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n] \qquad (1.29)$$

De esta manera se obtiene la forma canónica de controlador.

En este capítulo se abordaron temas importantes que serán útiles en los siguientes, las bases teóricas son esenciales para fundamentar este trabajo.

En el siguiente capítulo se abordaran las teorías que sustentan a los controladores que serán implementados en este trabajo para manipular al péndulo invertido con carro.