



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**HIDRAULICA - INGENIERIA CIVIL**

**MODELO NUMÉRICO PARA ESTIMAR EL CAUDAL DE AVENIDAS EN RÍOS**

**MODALIDAD DE GRADUACIÓN: TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**ING. MARVIN MONTOYA GAXIOLA**

**TUTOR PRINCIPAL:**  
**DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ**

**MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2014**

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Aparicio Mijares Francisco Javier

Secretario: Dr. García Villanueva Nahún Hamed

Vocal: Dr. Ariosto Aguilar Chávez

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Arroyo Correa Víctor Manuel

2<sup>do.</sup> Suplente: M.I. Pedroza González Edmundo

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería UNAM Campus Morelos IMTA

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Ariosto Aguilar Chávez

-----  
**FIRMA**

***MÉXICO, D. F. a 10 de julio del 2014***



**DEDICATORIA:**

Un agradecimiento al Dr. Ariosto Aguilar Chávez por dirigir y sustentar este documento, su invaluable apoyo, asesoría, dedicación, su amistad; sus observaciones críticas; por invertir su tiempo y conocimiento en este documento. Y un reconocimiento respetuoso a mí jurado por su disposición permanente, su asesoría, apoyo y dedicación, que permitió mejorar la calidad de este documento.

Jurado:

Dr. Aparicio Mijares Francisco Javier  
Dr. Arroyo Correa Víctor Manuel  
Dr. García Villanueva Nahún Hamed  
M.I. Pedroza González Edmundo

Al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
(IMTA)



## **Agradecimientos**

A mis padres:

Julio Montoya Sepúlveda

Luz Viceida Gaxiola Castro

A mis hermanas:

Dianey Montoya Gaxiola

Yoselin Montoya Gaxiola

Julissa Montoya Gaxiola

La presente Tesis está dedicada primeramente a Dios, ya que gracias a él he logrado concluir mi carrera, a mis padres, porque ellos siempre estuvieron a mi lado brindándome su apoyo, dedicación y sus consejos para hacer de mí una mejor persona, a mis hermanas y a mi novia por sus consejos, cariño y su apoyo cuando siempre lo necesito, a mis amigos, compañeros y todas aquellas personas que de una u otra manera ha contribuido para el logro de este objetivo.



## CONTENIDO

Resumen .....	1
1 Introducción .....	3
1.1 Objetivo del trabajo .....	6
2 Medición del flujo en estaciones de aforo .....	7
2.1 Estaciones de aforo .....	7
2.2 Técnicas de medición en la estimación del caudal .....	9
2.2.1 Método de área-velocidad .....	9
2.2.2 Método de sección pendiente para flujo permanente .....	16
2.2.3 Método de sección pendiente para flujo no permanente .....	23
2.2.4 Método hidrológico de Muskingum.....	25
2.2.5 Método de cambio de régimen .....	29
2.3 Equipos de medición .....	35
2.3.1 Equipos de medición de velocidad.....	35
2.3.2 Equipos de medición de nivel.....	38
3 Modelo para determinar el caudal .....	40
3.1 Metodología.....	40
3.2 Definición de estación de aforo para la medición de avenidas .....	40
3.3 Modelo no permanente para medición de caudal.....	42
3.4 Modelo basado en la curva de llenado de cauce (M-I) .....	46
3.5 Modelo en diferencias finitas (M-II).....	48
4 Pruebas numéricas .....	51
4.1. Condiciones de frontera para las pruebas transitorias .....	51
4.2 Prueba 1, flujo en un cauce de 2000 m de longitud.....	53
4.3 Prueba 2, aplicación a un canal de riego de 1000 m.....	60
4.4 Prueba 3, aplicación a un canal de riego de 400 m.....	67
4.5 Prueba 4, aplicación a un canal de riego de 100 m.....	74
5 Conclusiones y recomendaciones .....	83
Bibliografía.....	85
Anexo I Definiciones y nomenclatura .....	87



A1.1	Conceptos básicos .....	87
A1.2	Nomenclatura .....	94
Anexo 2	Determinación de caudal a flujo permanente .....	97
A2.1	Pruebas en flujo permanente .....	97
A2.1.1	Introducción .....	97
A2.1.2	Descripción general del canal en estudio para la prueba A.1.....	97
A2.1.3	Descripción general en estudio del río Amazonas para la simulación de la prueba A.2.....	103
A2.1.4	Conclusiones de las pruebas realizadas en flujo permanente .....	109
Anexo 3	Diseño del sistema de simulación de canales .....	110
A3.1	Alcance .....	110
A3.1.1	Esquema general del cauce.....	110
A3.1.2	Módulo de interpolación .....	112
A3.1.3	Módulo de cálculo de flujo espacialmente variado .....	114
A3.1.4	Cálculo del flujo espacialmente variado .....	115



## ÍNDICE DE LÁMINAS

Lámina 2.1 Aforo en canastas con el método de molinetes. ....	8
Lámina 2.2 Aforo en puentes peatonales con el método de molinetes.....	8
Lámina 2.3 Aforo con medidores ultrasónicos. ....	8
Lámina 2.4 Aforo con reglas graduadas.....	9
Lámina 2.5 Sección transversal de un canal o cauce.....	9
Lámina 2.6 Vector normal de flujo en una sección transversal .....	10
Lámina 2.7 Aplicación del método discreto de área-velocidad.....	10
Lámina 2.8 Diagrama de aplicación del método de sección promedio .....	15
Lámina 2.9 Diagrama de aplicación del método de sección media. ....	16
Lámina 2.10 Esquema de la ecuación de la energía en dos secciones de un canal.....	20
Lámina 2.11 Almacenamiento en prisma y cuña en un tramo de canal .....	27
Lámina 2.12 Hidrogramas de entrada y salida .....	29
Lámina 2.13 Curvas de referencia.....	29
Lámina 2.14 Perfil de caída en cambio de régimen en un canal.....	30
Lámina 2.15 Aforador de sección triangular .....	32
Lámina 2.16 Aforador de sección rectangular.....	32
Lámina 2.17Aforador de sección trapezial .....	32
Lámina 2.18 Aforador de garganta larga .....	33
Lámina 2.19 Canal de aforo Parshall con un caudal libre y un registrador de caudal.....	35
Lámina 2.20 Aforo con molinetes desde puentes o a directamente en el río .....	36
Lámina 2.21 Tipos de molinete usados para el aforo de acequias, diques y canales. a) De cazoletas. b) De hélice .....	36



Lámina 2.22 Aforo con velocímetro Doppler. ....	38
Lámina 2.23 Aforo con Perfilador acústicos de efecto Doppler montado en un barquito.....	38
Lámina 2.24 Esquema y muestra de la forma de instalación de estos equipos utilizados, cuando no hay elementos fijos en el cauce.....	39
Lámina 3.1 Medidor de nivel y sensor de nivel .....	41
Lámina 3.2 Esquemmatización del procedimiento de aforo con medidor de nivel.....	41
Lámina 3.3 Esquemmatización de sensor de nivel en canales .....	42
Lámina 3.4 Fotografía tomada de una avenida muy intensa en un cauce.....	42
Lámina 3.5 Curva de vaciado y llenado de un cauce durante una avenida .....	47
Lámina 4.1 Hidrograma de 450 m <sup>3</sup> /s para la prueba 1. ....	53
Lámina 4.2 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 1 y M-I, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-I. ....	54
Lámina 4.3 Error de M-I en la determinación del caudal en la prueba 1, en distintas ubicaciones del sensor. ....	54
Lámina 4.4 Error máximo absoluto (en %) de M-I para la prueba 1. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito. ....	55
Lámina 4.5 Relación entre el caudal real y estimado con M-I, para la prueba 1, en distintas ubicaciones del sensor.....	55
Lámina 4.6 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 1 y M-II, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-II. ....	56



Lámina 4.7 Error de M-II en la determinación del caudal en la prueba 1, en distintas ubicaciones del sensor. ....	56
Lámina 4.8 Error máximo absoluto en (%) M-II, para la prueba I. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito. ....	57
Lámina 4.9 Relación entre el caudal real y estimado con M-II, para la prueba 1, en distintas ubicaciones del sensor.....	57
Lámina 4.10 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para M-I, prueba 1. ....	58
Lámina 4.11 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para M-II, prueba 1. ....	59
Lámina 4.12 Error aleatorio con el modelo de ruido blanco $p \leq 0.66$ para el M-II, prueba 1.....	59
Lámina 4.13 Hidrograma unitario de $45 \text{ m}^3/\text{s}$ para la prueba 2. ....	60
Lámina 4.14 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 2 y M-I, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-I. ....	61
Lámina 4.15 Error de M-I en la determinación del caudal en la prueba 2, en distintas ubicaciones del sensor. ....	61
Lámina 4.16 Error máximo absoluto en (%) M-I para la prueba 2. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito. ....	62
Lámina 4.17 Relación entre el caudal real y estimado con M-I, para la prueba 2, en distintas ubicaciones del sensor. ....	62
Lámina 4.18 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 2 y M-II, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-II. ....	63



Lámina 4.19 Error de M-II en la determinación del caudal en la prueba 2, en distintas ubicaciones del sensor. ....	63
Lámina 4.20 Error máximo absoluto en (%) M-II, para la prueba 2. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito. ....	64
Lámina 4.21 Relación entre el caudal real y estimado con M-II, para la prueba 2, en distintas ubicaciones del sensor. ....	64
Lámina 4.22 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-I, prueba 2. ....	65
Lámina 4.23 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-II, prueba 2. ....	66
Lámina 4.24 Error aleatorio con el modelo de ruido blanco $p \leq 0.66$ para el M-II, prueba 2. ....	66
Lámina 4.25 Hidrograma unitario de $2.25 \text{ m}^3/\text{s}$ para la prueba 3 .....	67
Lámina 4.26 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 3 y M-I, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-I. ....	68
Lámina 4.27 Error de M-I en la determinación del caudal en la prueba 3, en distintas ubicaciones del sensor. ....	68
Lámina 4.28 Error máximo absoluto en (%) M-I, para la prueba 3. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito. ....	69
Lámina 4.29 Relación entre el caudal real y estimado con M-I, para la prueba 3, en distintas ubicaciones del sensor. ....	69
Lámina 4.30 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 3 y M-II, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-II. ....	70



Lámina 4.31 Error de M-II en la determinación del caudal en la prueba 3, en distintas ubicaciones del sensor. ....	70
Lámina 4.32 Error máximo absoluto en (%) M-II, para la prueba 3. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito. ....	71
Lámina 4.33 Relación entre el caudal real y estimado con M-II, para la prueba 3, en distintas ubicaciones del sensor. ....	71
Lámina 4.34 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-I, prueba 3. ....	72
Lámina 4.35 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-II, prueba 3. ....	73
Lámina 4.36 Error aleatorio con el modelo de ruido blanco $p \leq 0.66$ para el M-II, prueba 3. ....	73
Lámina 4.37 Hidrograma unitario de $2.25 \text{ m}^3/\text{s}$ para la prueba 4 .....	74
Lámina 4.38 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 4 y M-I, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-I. ....	75
Lámina 4.39 Error de M-I en la determinación del caudal en la prueba 4, en distintas ubicaciones del sensor. ....	75
Lámina 4.40 Error máximo absoluto en (%) M-I, para la prueba 4. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito. ....	76
Lámina 4.41 Relación entre el caudal real y estimado con M-I, para la prueba 4, en distintas ubicaciones del sensor. ....	76
Lámina 4.42 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 4 y M-II, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-II. ....	77



Lámina 4.43 Error de M-II en la determinación del caudal en la prueba 4, en distintas ubicaciones del sensor. ....	77
Lámina 4.44 Error máximo absoluto en (%) M-II, para la prueba 4. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito. ....	78
Lámina 4.45.....	78
Lámina 4.46 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-I, prueba 4. ....	79
Lámina 4.47 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-II, prueba 4. ....	80
Lámina 4.48 Error aleatorio con el modelo de ruido blanco $p \leq 0.66$ para el M-II, prueba 4.....	80
Lámina A.1.1 Esquemmatización del flujo no permanente.....	89
Lámina A.1.2 Perfil longitudinal de un canal, mostrando flujo no uniforme .....	89
Lámina A.1.3 Esquemmatización del flujo permanente .....	90
Lámina A.1.4 Flujo rápidamente variado .....	90
Lámina A.1.5 Perfil longitudinal de un canal, mostrando flujo uniforme .....	91
Lámina A.1.6 Flujo gradualmente variado .....	91
Lámina A.1.7 Elementos geométricos de un canal, sección transversal .....	93
Lámina A.2.1 Descripción del canal en estudio .....	98
Lámina A.2.2 Descripción de los aforos en el canal .....	98
Lámina A.2.3 Relación distancia-gasto para una discretización de 1.0 m, utilizando las tres ecuaciones, para perfil $m2$ .....	99
Lámina A.2.4 Relación distancia-error en gasto para una distancia de 1.0 m para los tres tipos de flujo.....	100
Lámina A.2.5 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 200 m para los tres tipos de perfiles de flujo.....	100



Lámina A.2.6	Relacion distancia-error en gasto para una distancias de 1.0 m para los tres tipos de flujo .....	101
Lámina A.2.7	Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 200 m para los tres tipos de perfiles de flujo.....	101
Lámina A.2.8	Relacion distancia-error en gasto para una distancia de 1.0 m para los tres tipos de flujo.....	102
Lámina A.2.9	Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 200 m para los tres tipos de perfiles de flujo.....	102
Lámina A.2.10	Descripción del canal en estudio del Río Amazonas ....	103
Lámina A.2.11	Descripción de los aforos en el Río Amazonas.....	104
Lámina A.2.12	Relación distancia-gasto para una discretización de 10 km, utilizando las tres ecuaciones, para perfil $m^2$ .....	105
Lámina A.2.13	Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 2.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo.....	105
Lámina A.2.14	Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 50 km para los tres tipos de perfiles de flujo.....	106
Lámina A.2.15	Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 2.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo.....	106
Lámina A.2.16	Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 2.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo.....	107
Lámina A.2.17	Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 2.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo.....	107
Lámina A.2.18	Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 50.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo....	108



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Recomendaciones para determinar el número de verticales en un canal .....	12
Tabla 2.2 Equipos acústicos Doppler para canales .....	37
Tabla 4.1. Ilustración de datos de las pruebas realizadas .....	51
Tabla 4.2. Modelos discretos en función del factor de peso temporal y espacial .....	52
Tabla 4.3 Resumen del error máximo en la estimación de caudal en la prueba 1.....	58
Tabla 4.4 Error máximo en la estimación de caudal en la prueba 2.....	65
Tabla 4.5 Error máximo en la estimación de caudal en la Prueba 3.....	72
Tabla 4.6 Error máximo en la estimación de caudal en la prueba 4.....	79
Tabla A.2.1 Diferencias de gastos para diferentes perfiles de flujo e intervalos usando las tres ecuaciones.....	108
Tabla A.2.2 Diferencias de gastos para diferentes perfiles de flujo e intervalos usando las tres ecuaciones.....	109



## RESUMEN

En los estudios hidrológicos y en la operación de las obras hidráulicas, uno de los datos esenciales es la determinación de los volúmenes de escurrimiento, ya sea para una condición de flujo diario normal, como en el caso cuando se presenta una avenida.

El volumen de escurrimiento en cauces naturales y canales se conoce como caudal o gasto volumétrico, se establece por el principio de conservación de masa y se define como el volumen que escurre en una sección del cauce por unidad de tiempo. En la práctica, la técnica para determinar el caudal o gasto volumétrico se conoce como *aforo de la corriente*, y el sitio de medición, como estación hidrométrica. En este documento, la definición de caudal es similar a la de gasto volumétrico (NOM-008-SCFI-2002).

En el presente trabajo de investigación se realizó un estudio para la determinación indirecta del caudal en ríos o canales, con la medición de nivel de la superficie libre del agua en dos secciones a lo largo del cauce. De este estudio se elaboró un procedimiento de cálculo diferente, aplicable a condiciones de flujo permanente y no permanente.

En la generación del nuevo procedimiento se revisaron las técnicas de sección pendiente ISO-1070 (1992) para la condición permanente, y se identificaron los principales parámetros que deben ser tomados en cuenta para estimar el caudal. A partir de esta revisión inicial, se realizó una propuesta metodológica para estimar el caudal en estado no permanente, que tomara en cuenta los cambios típicos asociados al tránsito de una avenida.

De esta manera, se desarrolló un modelo para estimar el caudal en flujo no permanente tomando las guías generales, como indica la norma ISO/TR-11627 (1998), pero incluyendo una extensión práctica de uso al considerar que las derivadas temporales y espaciales de la variación del nivel se pueden conocer *a priori* de manera *discreta*, esto se logra al medir en campo el tirante del agua con dos equipos de medición automática no intrusivos, como son los sensores de nivel, que operan con señales ultrasónicas o con radio frecuencia tipo radar.

Para resolver el modelo no permanente de cálculo de caudal se propusieron dos metodologías numéricas, la primera consiste en un análisis, de la curva de vaciado y llenado del cauce durante una avenida,



con la cual se considera que la derivada de área respecto al caudal, es la pendiente entre el origen (condición inicial para gasto base) y el punto máximo de la curva, que es la condición de valor máximo de área y caudal, y a esta metodología se le denominó M-I; y la segunda es una solución discreta del modelo no permanente con la técnica de diferencias finitas y se denomina como M-II.

Para evaluar teóricamente la confiabilidad en la estimación de caudal de M-I y M-II, se realizaron varias corridas numéricas, para diferentes tipos de cauces naturales y canales, con un modelo numérico que resuelve las ecuaciones conservativas de Saint-Venant en una dimensión para flujo a superficie libre (MNSV), este modelo tiene una aproximación de segundo orden para los términos no lineales (Aguilar, 2002).

Las pruebas numéricas con el MNSV consistieron en generar una avenida sobre el cauce y extraer la información de la variación del nivel en varios puntos a lo largo del mismo y con esta información de variación del nivel del agua se reconstituyeron los hidrogramas del tránsito de la avenida, con M-I y M-II. El error en la estimación del caudal se definió como la diferencia entre el hidrograma del MNSV y obtenido por M-I y M-II., estas diferencias definen el error sistemático del modelo no permanente con las metodologías de solución propuestas.

Para evaluar el error aleatorio de M-I y M-II se propuso adicionar, un ruido blanco aleatorio en los datos obtenidos del MNSV, o lo que representa las lecturas de los sensores de nivel que toman las medidas de las variaciones de nivel del agua en el cauce. Este ruido aleatorio representa el oleaje local del escurrimiento y la precisión del equipo de medición de nivel, con este proceso se intenta evaluar M-I y M-II a una condición más cercana a la realidad.

Los resultados de las pruebas numéricas indicaron que el M-I, es deficiente para canales grandes y tiene resultados aceptables para canales pequeños menores a 1.5 m metros de ancho (<12 % para una separación entre sensores menor a 32 m). En el caso del M-II, el error en el cálculo del caudal osciló entre 1 y 2 % para separación entre sensores menores a 10 m y este error fue incrementándose a medida que se separan los sensores de nivel, con un valor de 14 % para una distancia de 1400 m. Estos resultados indican que el procedimiento generado por el M-II, basado en la técnica de diferencias finitas, es factible de implementarse en campo para estimar avenidas en cauces naturales o canales, con una instrumentación relativamente sencilla y obteniéndose baja incertidumbre en la estimación del caudal.



## 1 INTRODUCCIÓN

La medición del gasto durante el tránsito de una avenida en un cauce es difícil de estimar por las características turbulentas del flujo. La práctica hidrométrica para estos eventos es medir el nivel del flujo en estado transitorio y determinar el gasto con un modelo a flujo permanente, este método se conoce como sección-pendiente con sus diferentes variantes.

En práctica, la técnica para determinación del caudal o gasto volumétrico se conoce como *aforo de la corriente*, y el sitio de medición, en donde se aplica la técnica se denomina como estación hidrométrica.

La definición de caudal o gasto volumétrico para un flujo incompresible en movimiento es el volumen que circula por una sección transversal en una unidad de tiempo [ $L^3T^{-1}$ ]. Las unidades de gasto en el sistema internacional son [ $m^3s^{-1}$ ] y las unidades derivadas ( $ls^{-1}$ ) litros por segundo; ( $m^3h^{-1}$ ) metros cúbicos por hora, o en sistema inglés (*cfs*) pies cúbicos por segundo. El concepto de caudal es similar a la definición de gasto volumétrico (NOM-008-SCFI-2002). En la práctica, la técnica para determinación del caudal se conoce como *aforo de la corriente*.

Los procedimientos para determinar el caudal en un cauce se pueden clasificar en dos grandes grupos: 1) los propuestos en las normas de aplicación estandarizada, por ejemplo normas ISO (International Organization for Standardization), ASTM (American Society for Testing and Materials), NOM (Norma Oficial Mexicana); y 2) los descritos en los libros de referencia técnica (Aparicio, 2001), (Chow, 1987) o en artículos especializados.

Dentro de los grupos de procedimientos se tiene otra clasificación que se relaciona al principio físico para medir el caudal, y son:

*Aforo volumétrico*, consiste en llenar un volumen conocido (tanque volumétrico) y medir el tiempo de llenado. Este método es el de aplicación más directa y se utiliza principalmente en laboratorio y para caudales pequeños. Existe una variante a este método, y consiste que en vez de medir el llenado del tanque, es pesar el tanque durante el llenado por unidad de tiempo, a este proceso se le conoce como método gravimétrico, y se considera cómo el de más alta precisión. No obstante el aforo volumétrico es el principio básico, su aplicación a un cauce natural o en un canal es muy complicado.

*Método de área-velocidad*, en este caso el caudal se determina por la multiplicación del área hidráulica de una sección transversal y la velocidad del flujo. En la práctica se considera un procedimiento discreto de



seccionamiento de la sección y en cada sección se debe estimar la velocidad promedio y la suma de los productos del área por la velocidad en cada sección discreta es el caudal, que circula por toda la sección. La norma estandarizada de este método es la ISO-748 (2007).

*Método de sección-pendiente*, bajo el principio de una ecuación de hidráulica de canales abiertos de esfuerzo cortante (modelo de Chezy o Chezy-Manning), y con los datos de la sección hidráulica, pendiente y rugosidad de fondo se está en condiciones de estimar el caudal, y la norma de referencia es la ISO-1070 (1992).

*Método de sección de control*, para un flujo a superficie libre y bajo el principio de la ecuación de energía se puede establecer la condición de energía mínima en una sección específica o de control. El principio de cambio de energía indica que aguas arriba de una sección de control se tiene una relación de unicidad entre el caudal y el nivel (ley de descarga), por ejemplo la caída en una cascada. La referencia estandarizada de una sección de control se clasifica en función de la forma geométrica del sistema de aforo (por ejemplo: aforadores Parshall, Venturi, SANIRII, garganta larga, etc.) y se tienen diferentes normas dependiendo de la forma geométrica del aforador.

Los métodos antes descritos, tienen una buena aplicación para una condición de flujo permanente y en algunos casos de flujo transitorio, como es durante el paso de una avenida, se pueden tener resultados no confiables debido a la característica turbulenta del flujo.

En este trabajo se hará un estudio intensivo en el método de aforo basado en el principio de *sección-pendiente*, pero se propone una modificación en la formulación y aplicación, de tal forma que, permita estimar el caudal durante el paso de una avenida, con características altamente turbulentas.

En este sentido, la norma ISO-1070 (1992) indica un procedimiento para medir el flujo para una condición permanente y para flujo uniforme o no uniforme. En el desarrollo del trabajo se manejará la misma condición permanente, pero se adiciona un estudio para una condición de flujo transitorio.

Para el estudio de flujo transitorio se utiliza un modelo numérico que soluciona las ecuaciones conservativas de Saint-Venant, con un esquema tipo caja no lineal con una actualización basada en el método Newton (MNSV) Aldama & Aguilar (1996). Este modelo fue adecuado en una plataforma de MatLab©, lo cual permitió trabajar diferentes condiciones de frontera e inicial, de un canal o un cauce natural. Con el manejo de esta plataforma las salidas numéricas se pudieron manipular con mayor facilidad.



El procedimiento de estimación del caudal para el flujo permanente y transitorio, consistió primero en definir una condición de flujo normalizado, posteriormente imponer en la frontera un hidrograma y mediante el MNSV se determinaron las variaciones del nivel en el cauce en forma transitoria, estos datos son el insumo para el modelo de estimación de caudal.

El modelo para estimar el caudal en este trabajo se fundamenta en las ecuaciones de Saint-Venant, y realiza una aproximación de las variables dependientes del nivel de la superficie libre del agua. El resultado de la aproximación es un Modelo Diferencial de Coeficientes Variables (MDCV) y dado que no tiene una solución exacta debido a la complejidad de las condiciones de frontera, se propusieron para su solución dos modelos discretos o aproximados:

**M-I:** Solución discreta de MDCV basada en un análisis entre la derivada temporal de área y de caudal, considerando que el valor máximo de caudal y área suceden al mismo tiempo (máximo valor de una avenida).

**M-II:** Solución discreta de MDCV por un método de diferencias finitas.

La construcción de M-I y M-II se presentan en el capítulo tres y las pruebas para diferentes escenarios se muestran en el capítulo cuatro. Adicional a las pruebas transitorias en el anexo dos se muestran algunos resultados para una condición de flujo permanente y que son una extensión de aplicar las recomendaciones de la norma ISO -1070 (1992).

Los resultados de M-II indican que es factible adecuar una estación de aforo con dos sensores de nivel de registro continuo, con lo cual se puede obtener las variaciones del caudal durante una avenida que escurre por el cauce. La precisión del M-II es muy aceptable e incluso si se tiene una avenida muy intensa se puede considerar que es un método de baja incertidumbre.



## **1.1 Objetivo del trabajo**

Desarrollar una metodología para la determinación de caudales en cauces naturales durante la ocurrencia de avenidas, considerando los efectos transitorios que se producen a lo largo del cauce para diferentes condiciones de flujo.

Desarrollar y evaluar un modelo continuo para estimar el caudal a partir de los datos de variación del nivel en dos secciones de un cauce. Este modelo está basado en las ecuaciones conservativas de Saint-Venant MDCV.

Aplicar los métodos hidrométricos en flujo permanente con la medición del nivel en dos secciones del río o canales y estimar su incertidumbre.



## 2 MEDICIÓN DEL FLUJO EN ESTACIONES DE AFORO

En este capítulo se presentan los principales métodos para determinar el caudal en un cauce natural. Debido a la gran cantidad de equipos e instrumentos de medición que existen y que se encuentran en el mercado, se mencionarán con mayor interés los que estén más relacionados con el objetivo del presente trabajo de investigación.

### 2.1 Estaciones de aforo

Una estación de aforo por lo regular, es el lugar en donde se cumplen las características necesarias para aplicar un método de aforo en forma confiable, precisa y sistemática. Por lo cual es importante, en primera instancia conocer y establecer el método de aforo y después los instrumentos y protocolos a seguir para que el sistema cumpla con los requisitos de medición.

La contabilidad de flujo se estima para un cierto intervalo conocido y los volúmenes de escurrimiento se determinan por el producto punto de la velocidad por el vector normal integrado sobre un intervalo de muestreo (Braithwaite, 2008).

Conforme al artículo 7, Fracción III de la Ley de Aguas Nacionales de México (LAN, 2004), se ha establecido la instalación de los dispositivos necesarios para la medición de la cantidad y calidad de las aguas nacionales y en general para medición del ciclo hidrológico es de utilidad pública.

En este sentido, existen más de 600 estaciones hidrométricas para medir el caudal en los canales y en los ríos principales del país. Entre los motivos para medir el caudal se pueden destacar los siguientes:

- ❖ Cuantificar los volúmenes y caudales que se deseen almacenar y controlar en las nuevas obras hidráulicas.
- ❖ Determinar las cantidades de agua disponible para diversos usos en las fuentes naturales y obras de abastecimiento.
- ❖ Cuantificar los volúmenes de agua a cobrar para diferentes usuarios incluyendo industrias, centrales hidroeléctricas, agricultores, etc.
- ❖ Operar la red de canales para suministrar los caudales requeridos en la zona de cultivo y satisfacer el caudal requerido por los usuarios.
- ❖ Diseñar obras hidráulicas y obras de construcción como puentes, pilas y túneles.



Lámina 2.1 Aforo en canastas con el método de molinetes.



Lámina 2.2 Aforo en puentes peatonales con el método de molinetes.



Lámina 2.3 Aforo con medidores ultrasónicos.



Lámina 2.4 Aforo con reglas graduadas.

## 2.2 Técnicas de medición en la estimación del caudal

### 2.2.1 Método de área-velocidad

En la hidráulica de canales el caudal se define como el volumen desplazado en una unidad de tiempo. Para la determinación del caudal en la práctica consiste en medir la cantidad de masa que circula en una sección transversal al flujo en una unidad de tiempo ISO-1070 (1992).

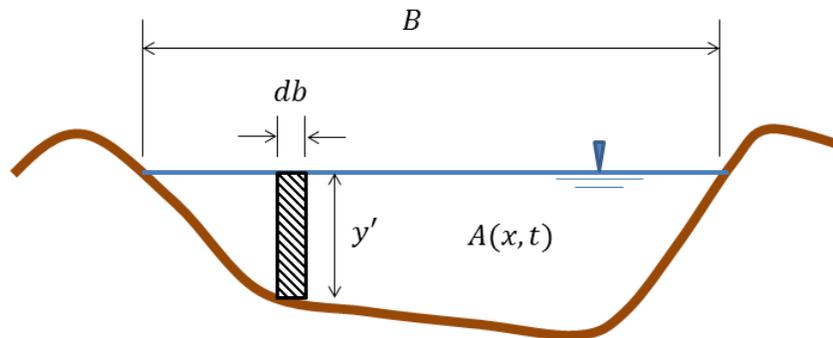


Lámina 2.5 Sección transversal de un canal o cauce

Para ampliar el análisis a toda el área transversal se establecen las siguientes definiciones de *área y caudal*:

$$A(x, t) \equiv \int_s dA = \int_0^B y db \quad (2.1)$$

Donde  $y(x, t)$  es el tirante,  $db$ , ancho diferencial,  $dA$ , diferencial de área,  $s$ , superficie de la sección transversal, y  $A(x, t)$ , área transversal de la sección.

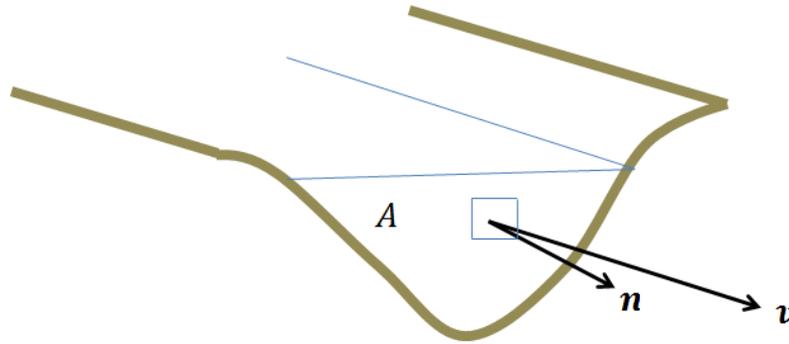


Lámina 2.6 Vector normal de flujo en una sección transversal

La cantidad de flujo que pasa por una sección, conocido como gasto o caudal se puede evaluar como:

$$Q(x, t) \equiv \int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dA \quad (2.2)$$

Donde  $\mathbf{q} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  es el vector velocidad,  $\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}$  vector normal a la sección y  $Q$  es el gasto o caudal en  $[L^3S^{-1}]$  o  $(m^3/s)$ .

Para la aplicación de la ecuación (2.2) en una estación de aforo se aplica una discretización en pequeñas secciones de área conocidas tal que,

$$Q = \sum_{i=1}^n U_i A_i = \sum_{i=1}^n U_i w_i d_i \quad (2.3)$$

Donde  $U_i$  velocidad media en el área discreta en  $(m/s)$ ,  $A_i$  área discreta  $(m^2)$ ,  $w_i$  ancho de sección discreta o dovela en  $(m)$ , y  $d_i$  profundidad o calado de la dovela en  $(m)$ .

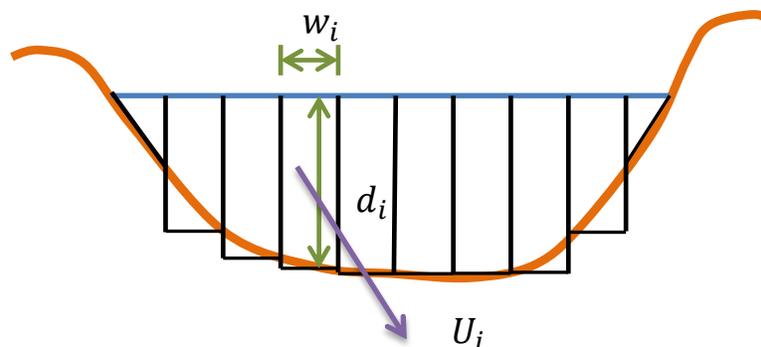


Lámina 2.7 Aplicación del método discreto de área-velocidad.



La norma de referencia para la aplicación del método de área-velocidad (ecuación 2.3) es la ISO-748 (2007), que especifica los métodos para la determinación de la velocidad y el área transversal para la determinación del flujo en canales abiertos. Esta norma cubre los métodos para medir las velocidades con molinetes o flotadores.

El sitio para aplicar el método en un cauce debe cumplir en lo más posible los siguientes requerimientos:

- ❖ El canal en el lugar de la medición debe ser recto, de sección transversal y pendiente constante, a fin de garantizar una distribución de velocidad uniforme.
- ❖ La orientación de flujo, para todos los puntos en cualquier vertical a través de la anchura, deben ser paralelos entre sí y formando un ángulo recto respecto a la sección de medición.
- ❖ El fondo y las márgenes del canal deben ser estables y bien definidas en todas las dovelas del flujo, con el fin de facilitar la medición exacta en la sección transversal, asegurar la uniformidad de las condiciones durante y entre las mediciones del caudal.
- ❖ Las curvas de distribución de las velocidades deben ser regulares en los planos vertical y horizontal de la medición.
- ❖ Se deben evitar los sitios en donde se visualicen vórtices, flujo inverso o zonas muertas.
- ❖ La sección de medición debe ser claramente visible en toda su anchura y despejada de árboles, plantas acuáticas u otros obstáculos.
- ❖ La medición del flujo desde puentes puede ser una manera conveniente y segura debido a la precisión que se puede lograr en la estimación de la anchura, profundidad y velocidad.
- ❖ La profundidad del agua en la sección debe ser suficiente en todas las etapas, para proporcionar la inmersión efectiva de molinete o flotador o lo que se va a utilizar.
- ❖ Si el sitio se va a establecer como una estación permanente, debe ser fácilmente accesible en todo momento, con todo equipo de medida necesario.

Para medir la velocidad con el método de área velocidad la ISO-748 recomienda diversos arreglos, que van desde medir en un solo punto en el vertical, hasta la determinación con más de 5 puntos. En el siguiente apartado se presenta un resumen de las recomendaciones de aplicación.



### 2.2.1.1 Número de verticales en la sección transversal

En la siguiente tabla se muestra el número específico de dovelas verticales (n) para canales pequeños (<5 m) ISO-748 (2007).

Ancho de canal	No. Verticales
Ancho del canal < 0,5 m	n = 5 a 6
Ancho del canal > 0,5 m y <1 m	n = 6 a 7
Ancho del canal > 1 m y <3 m	n = 7 a 12
Ancho del canal > 3 m y <5 m	n = 13 a 16
Ancho del canal > 5 m	n > 22

Tabla 2.1 Recomendaciones para determinar el número de verticales en un canal

Se recomienda para canales anchos mayores a >5 m, elegir un número de dovelas tal que el caudal circulante por cada una de ellas sea menor al 5 % del caudal global que circula por toda la sección transversal, y que en ningún caso se debe exceder del 10% del caudal total ISO-748 (2007).

### 2.2.1.2 Medición de la velocidad por dovela

La selección del método para determinar la velocidad depende de ciertos factores. Los cuales son: el tiempo disponible, el ancho de la sección, profundidad del canal, la forma del fondo en la sección de medición, tramo aguas arriba, variación de nivel, el grado de precisión deseada y el equipo a utilizar. Estos métodos se clasifican como sigue:

- Método de distribución de velocidad
- Método de reducción de puntos
- Método de integración

#### Método de distribución de velocidad

Usando este método, los valores de la velocidad se obtienen a partir de observaciones en diferentes puntos en la dovela, entre la superficie del agua y el lecho del canal. El número y el espaciamiento de los puntos deben elegirse de tal forma que permita definir con exactitud la distribución de la velocidad en cada dovela, con una diferencia en las lecturas entre dos puntos adyacentes de no más de 20% con respecto al valor más alto. Las observaciones de velocidad en cada posición se trazan gráficamente. La velocidad media en la dovela se puede obtener dividiendo



la anchura de la unidad de descarga por la profundidad total ISO-748 (2007).

### Método de reducción de puntos

Estos son menos estrictos que los métodos de exploración de todo el campo de velocidad, se utilizan con frecuencia por que requieren menos tiempo que el método de distribución de velocidad. Se basan, sin embargo, en perfiles teóricos de velocidad ISO-748 (2007).

El método de reducción de puntos se divide en otros métodos, que sirven para medir velocidad en un flujo de forma práctica, los cuales son:

- ❖ Medición en un punto.
- ❖ Medición en dos puntos.
- ❖ Medición en tres puntos.
- ❖ Medición en cinco puntos.
- ❖ Medición en seis puntos.

### Medición en un punto

La observación de la velocidad se hará en cada dovela, mediante la medición de la corriente del flujo a 0.6 de la profundidad por debajo de la superficie libre del agua. El valor observado se tomará como la velocidad media en la dovela.

$$\bar{U} = U_{0.6} \quad (2.4)$$

Dónde:  $U$  es la velocidad media en (m/s),  $U_{0.6}$  es la velocidad medida a 0.6 de profundidad total.

### Medición en dos puntos

Las observaciones de velocidad se harán en cada dovela mediante la medición de la corriente del flujo a 0.2 y 0.8 de la profundidad por debajo de la superficie libre del agua. El promedio de los dos valores se toma como la velocidad media en la dovela.

$$\bar{U} = \frac{U_{0.2} + U_{0.8}}{2} \quad (2.5)$$

Dónde:  $\bar{U}$ , es la velocidad media en (m/s),  $U_{0.2}$  y  $U_{0.8}$  es la velocidad medida a 0.2 y 0.8 de la profundidad total.



### Medición en tres puntos

Las observaciones de velocidad se harán en cada dovela mediante la medición de la corriente del flujo a 0.2, 0.6 y 0.8 de la profundidad por debajo de la superficie libre del agua. La velocidad media  $\bar{U}$  se puede obtener por la siguiente ecuación:

$$\bar{U} = 0.25(U_{0.2} + 2U_{0.6} + U_{0.8}) \quad (2.6)$$

Dónde:  $\bar{U}$ , es la velocidad media en (m/s),  $U_{0.2}$ ,  $U_{0.6}$  y  $U_{0.8}$  es la velocidad medida a 0.2, 0.6 y 0.8 de la profundidad total.

### Medición en cinco puntos

Las observaciones de la velocidad se realizan mediante la medición de la corriente del flujo a 0.2, 0.6 y 0.8 de la profundidad por debajo de la superficie libre del agua y tan cerca como sea posible de la superficie y la plantilla. La velocidad  $\bar{U}$  media puede ser determinada a partir de una representación gráfica del perfil de velocidad con un planímetro o partir de la ecuación siguiente:

$$\bar{U} = 0.1(U_{superficie} + 3U_{0.2} + 3U_{0.6} + 2U_{0.8} + U_{plantilla}) \quad (2.7)$$

Dónde:  $\bar{U}$ , es la velocidad media en (m/s),  $U_{superficie}$  es la velocidad medida en la superficie libre del agua,  $U_{0.2}$ ,  $U_{0.6}$ ,  $U_{0.8}$  es la velocidad medida a 0.2, 0.6 y 0.8 de la profundidad total y  $U_{plantilla}$  es la velocidad medida en la plantilla del canal.

### Medición en seis puntos

Las observaciones de la velocidad se realizan mediante la medición de la corriente del flujo, en cada dovela a 0.2, 0.4, 0.6 y 0.8 de la profundidad por debajo de la superficie libre del agua y tan cerca como sea posible de la superficie y la plantilla del canal.

$$U = 0.1(U_{superficie} + 2U_{0.2} + 2U_{0.4} + 2U_{0.6} + 2U_{0.8} + U_{plantilla}) \quad (2.8)$$

Dónde:  $\bar{U}$ , es la velocidad media en (m/s),  $U_{superficie}$  es la velocidad medida en la superficie libre del agua,  $U_{0.2}$ ,  $U_{0.4}$ ,  $U_{0.6}$ ,  $U_{0.8}$  es la velocidad medida a 0.2, 0.4, 0.6 y 0.8 de la profundidad total y  $U_{plantilla}$  es la velocidad medida en la plantilla del canal.



Método de integración

En este método, el medidor de la corriente del flujo está subiendo y bajando a través de toda la profundidad en cada dovela. La velocidad a la que se baja el instrumento de medición no deberá ser más de 5% de la velocidad media del agua y no debe en ningún caso superar los 0,04 m/s.

Dos ciclos completos se deberán efectuar en cada dovela y si los resultados difieren en más de 10 %, la operación (dos ciclos completos) debe repetirse hasta que resultados se obtengan dentro de este límite. El método de integración da buenos resultados, si el tiempo de medición permitido es suficientemente largo (60 s a 100 s) y no es recomendable utilizar este método a profundidades menores a un 1.0 m.

**2.2.1.3 Cálculo del caudal**

El método para determinar la velocidad media de la dovela en que se divide la sección transversal, se presentó en los apartados anteriores. En esta parte se presentarán los dos principales métodos aritméticos para integrar el caudal los cuales son:

Método de sección promedio

En este caso la sección se divide en un número de dovelas, como se muestra en la Lámina 2.8 y se calcula el caudal con la fórmula siguiente;

$$Q = \sum_{n=1}^N (b_{n+1} - b_n) \left( \frac{d_{n+1} + d_n}{2} \right) \left( \frac{U_{n+1} + U_n}{2} \right) \tag{2.9}$$

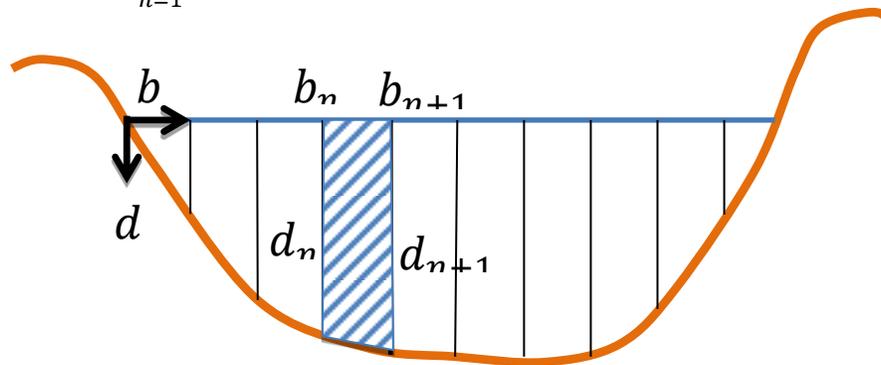


Lámina 2.8 Diagrama de aplicación del método de sección promedio

Método de sección media

En este caso la sección trasversal del cauce se divide en cierto número de dovelas, como se muestra en la Lámina 2.9 y se calcula el caudal con la fórmula siguiente;





En la instrumentación del tramo para aplicar el método de sección-pendiente se deben instalar medidores en las dos orillas del río, en al menos tres secciones. Los medidores se leerán desde una misma posición, de tal manera que se disminuyan los errores de lectura en cada medición, y en el caso manual el indicador de nivel se debe observar en forma continua durante un período mínimo de dos minutos o durante el período de una oscilación completa de la ola, se deben registrar las lecturas máximas, mínimas y promediadas ISO-1070 (1992).

La pendiente de la superficie libre del agua se estima a partir de las observaciones de los medidores de aguas arriba y aguas abajo para el tramo, y se recomienda tomar la lectura con mayor número de dígitos posibles que tenga el registrador de datos. Como mínimo se deben seleccionar tres secciones a lo largo de sitio seleccionado y deben ser claramente marcados por medio de pilares de mampostería fácilmente identificables. Las secciones se numerarán de tal manera que la sección aguas arriba se identifica como la sección 1 y la sección transversal adyacente aguas abajo se identifica como la sección 2, y así sucesivamente.

En ciertas ocasiones, se presentan crecientes en sitios donde no existe ningún tipo de instrumentación y cuya estimación se requiere para el diseño de estructuras hidráulicas tales como puentes, obras de desvío, etc. Las crecientes dejan huellas que permiten hacer una estimación aproximada del caudal determinando las propiedades geométricas de dos secciones diferentes, separadas una distancia  $L$  y el coeficiente de rugosidad en el tramo. La mayor fuente de incertidumbre de este método es la estimación confiable del coeficiente de incertidumbre de este método es la estimación confiable del coeficiente de rugosidad de Manning  $n$ .

#### **2.2.2.1 Determinación del caudal en tres o más secciones con flujo permanente**

Si en un tramo se definen tres o más secciones, la descarga se calcula para cada par de secciones adyacentes o subtramos, por ejemplo la primera con la segunda y la tercera con la segunda.

El caudal calculado es probable que sea diferente en cada subtramo y por lo tanto se puede tomar el promedio, entre los subtramos, con este procedimiento se busca que la ecuación de la energía se cumpla para todo el tramo.

Este cálculo suele ser un procedimiento de ensayo y error ISO-1070 (1992). La ecuación que se utiliza para la determinación del caudal en un tramos con tres secciones transversales es la siguiente:



$$Q = K_3(Z_1 - Z_2)^{1/2} \left\{ \frac{K_3}{K_2} \left( \frac{K_3}{K_1} L_{1-2} + L_{2-3} \right) + \frac{K_3^2}{2gA_3^2} \left[ -\alpha_1 \left( \frac{A_3}{A_1} \right)^2 (1 - K_{e\ 1-2}) + 1 - \alpha_2 \left( \frac{A_3}{A_2} \right)^2 (K_{e\ 2-3} - K_{e\ 1-2}) + \alpha_3 (1 - K_{e\ 2-3}) \right] \right\}^{-1/2} \quad (2.11)$$

$$K_1 = \frac{1}{n_1} A_1 R_{h1}^{2/3} \quad (2.12)$$

$$K_2 = \frac{1}{n_2} A_2 R_{h2}^{2/3} \quad (2.13)$$

$$K_3 = \frac{1}{n_3} A_3 R_{h3}^{2/3} \quad (2.14)$$

donde  $K_1, K_2, K_3$ , es el transporte o convección hacia aguas arriba o aguas debajo en la secciones transversales de estudio,  $K_e$  es el coeficiente de pérdida de energía,  $L_{1-2}$  es la longitud del tramo del canal que se está analizando,  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ , coeficientes de carga de velocidad,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $A_1, A_2$  y  $A_3$  son las areas de la secciones transversales que se estan analizando.

Esta norma deduce la ecuacion para el calculo del caudal para tres secciones transversales o más, para esta investigacion se dedujeron las ecuaciones para dos secciones, las cuales se pueden consultar en el anexo 2 del cuerpo de este documento.

### 2.2.2.2 Determinación del caudal con la ecuación de la energía

La condición de flujo permanente para estimar el caudal con la medición de los niveles del agua o la huella hidráulica es el método más usual y está descrito en forma extensa en la ISO-1070 (1992) o en las publicaciones de libros de hidrología clásicos (Aparicio, 2001 y French, 1995).

Este método requiere las características geométricas del cauce, como son área hidráulica, pendiente longitudinal y rugosidad. Con esta información y aplicando una ley de velocidad de esfuerzo cortante, como por ejemplo las ecuaciones de Chezy o Chezy-Manning es posible establecer el caudal medio que circula por la sección.



No obstante, en esta parte del trabajo se analizarán con detalle las diferentes relaciones para calcular el caudal en un tramo del cauce siguiendo lo indicado en la ISO-1070 (1992) y se adicionarán algunas variantes indicadas en los libros de hidráulica de canales (French, 1995 y Chow, 1987).

Sea la ecuación de la energía aplicada a dos secciones transversales de un cauce ISO-1070, (1992)

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + hf_{1-2} \quad (2.15)$$

De acuerdo con la ecuación de Manning, se define,

$$S_f = \frac{U^2 n^2}{Rh^{4/3}} = \frac{hf_{1-2}}{L_{1-2}} \quad (2.16)$$

Al despejar  $hf_{1-2}$  de la ecuación (2.16) resulta,

$$hf_{1-2} = \frac{U^2 n^2}{Rh^{4/3}} * L_{1-2} \quad (2.17)$$

donde:  $z_1, z_2$  es elevación de fondo del canal (m);  $y_1, y_2$  es el tirante del canal (m);  $\alpha_1, \alpha_2$  es el coeficiente de Coriolis (adimensional), el subíndice indica la sección de análisis ya sea 1 o 2, (ver lámina 2.10) ;  $n$  es la rugosidad de Manning para cada sección del canal ( $sm^{-1/3}$ );  $Rh$  es el radio hidráulico (m);  $L_{1,2}$  es la longitud entre la sección 1 y 2 (m);  $g$  es la aceleración de la gravedad ( $ms^{-2}$ );  $A_1$  y  $A_2$  áreas hidráulicas en las secciones transversales 1 y 2 ( $m^2$ );  $hf_{1,2}$  son las pérdidas por fricción de la sección uno a la dos (m).

Al reemplazar (2.17) en (2.15), se obtiene,

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \frac{U^2 n^2}{Rh^{4/3}} * L_{1-2} \quad (2.18)$$

Si  $Q$  es constante, y por continuidad  $V_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{A_{1,2}}$ , resulta

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{A_1^2 2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{Q^2}{A_2^2 2g} + \frac{Q^2 n^2}{A^2 Rh^{4/3}} * L_{1-2} \quad (2.19)$$

Finalmente, la ecuación de cálculo de caudal para esta condición es:



$$Q = \left[ \frac{(z_2 - z_1) + (y_2 - y_1)}{\frac{\alpha_1 A_2^2 2g - \alpha_2 A_1^2 2g}{4g^2 A_1^2 A_2^2} - L_{1-2} \frac{n^2}{\bar{A}^2 R h^{4/3}}} \right]^{1/2} \quad (2.20)$$

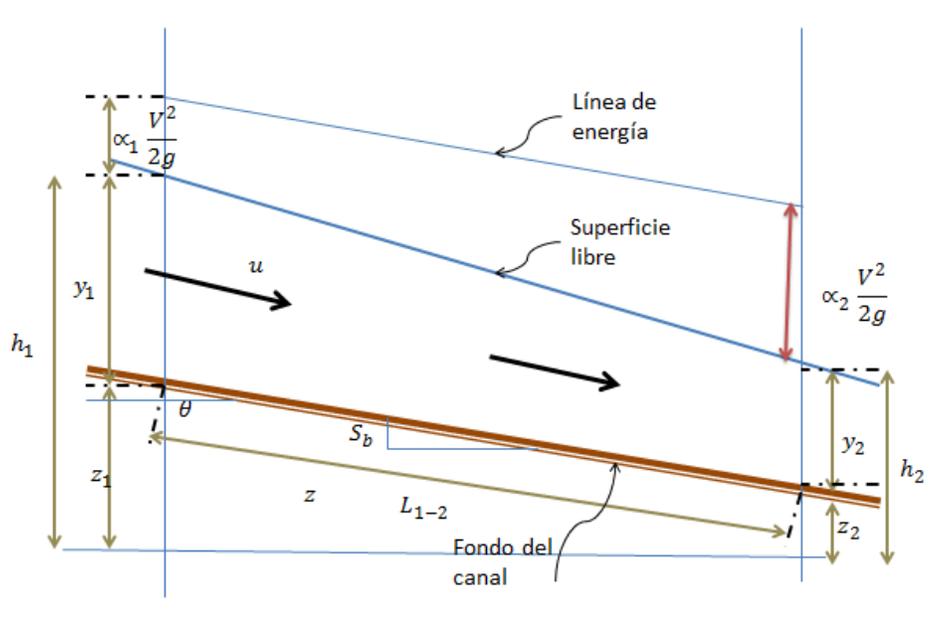


Lámina 2.10 Esquema de la ecuación de la energía en dos secciones de un canal.

### 2.2.2.3 Determinación del caudal con la ecuación de flujo gradualmente variado.

En este apartado se determinará el caudal que pasa entre dos secciones conocidas en un tramo del canal en una condición flujo no uniforme (Chow, 1987), por lo tanto se utilizará la ecuación de flujo gradualmente variado en un río o canal:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - F_r^2} \quad (2.21)$$

donde:

$$S_f = n^2 \frac{|Q|Q}{A^2 R h^{4/3}} \quad (2.22)$$

Donde  $n$ , es el coeficiente de Chezy-Manning. La ecuación anterior es una versión dimensionalmente no homogénea debido a que el coeficiente de



Manning tiene las dimensiones  $n (sm^{-1/3})$ <sup>1</sup>, para evaluar los efectos de fricción en las ecuaciones de Saint-Venant y será la forma de trabajar el término de fricción en todos los desarrollos que se realicen en este documento. El número de Froude ( $F_r$ ), se define como (French, 1995 y Chow, 1987).

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{g A^3} \quad (2.23)$$

Realizando una aproximación discreta de la ecuación (2.18)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta x} - S_f}{1 - F_r^2} \quad (2.24)$$

$$\Delta x S_f - \Delta y F_r^2 = \Delta z - \Delta y \quad (2.25)$$

Sustituyendo (2.22) y (2.23) en (2.25)

$$\Delta x \frac{n^2 Q^2}{A^2 R h^{\frac{4}{3}}} - \Delta y \frac{Q^2 B}{g A^3} = \Delta z - \Delta y \quad (2.26)$$

Despejando el gasto,  $Q$

$$Q = A * \sqrt{\frac{\Delta z - \Delta y}{\frac{n^2}{R h^{\frac{4}{3}}} \Delta x - \frac{B}{g A} \Delta y}} \quad (2.27)$$

Y  $\Delta z = z_i - z_{i+1} > 0$ ,  $\Delta y = y_{i+1} - y_i > 0$ ,  $\Delta x = x_{i+1} - x_i > 0$ , sustituyendo queda;

$$Q = A * \sqrt{\frac{(z_i - z_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)}{\frac{n_i^2}{R h_i^{\frac{4}{3}}} \Delta x'(i) - \frac{B_i}{g A_i} (y_{i+1} - y_i)}} \quad (2.28)$$

donde,  $Z_i$  es la elevación del fondo del canal en (m);  $Y_i$  es el tirante del canal en (m);  $\Delta x_i$  es el número de espacios de discretización a lo largo del canal en (m);  $n_i$  es la rugosidad de Manning para cada sección del canal en  $(sm^{-1/3})$ ;  $R h_i$  es el radio hidráulico en (m);  $B_i$  es el ancho del canal en (m);  $g$  es la aceleración de la gravedad en  $(ms^{-2})$ ;  $A_i$  es el área de la sección transversal ( $m^2$ ), y el subíndice es la sección de aplicación  $i = 1,2$ , para en caso del área, ancho y radio hidráulico sólo se utiliza el dato de una

<sup>1</sup> Donde  $n = \frac{ARh^{2/3}Sf^{1/2}}{Q} = [m^2][m^{2/3}][1][m^{-3}s^{-1}] = [sm^{-1/3}]$



sección por que para esta fórmula así se aplicaron las pruebas para verificar que tan exacta es la solución considerándolo de esa manera.

#### 2.2.2.4 Determinación de caudal con la ecuación de flujo gradualmente variado y sección promedio.

Para establecer con mayor detalle la variación del tirante en un punto intermedio entre dos secciones de medición, en esta parte se construirá un modelo más detallado que considere un promediado de las características hidráulicas, entonces las definiciones de área, ancho y radio hidráulico se evalúan de la forma siguiente:

Promedio de las áreas de la sección transversal 1 y 2:

$$\bar{A} = \frac{A_{i+1} + A_i}{2} \quad (2.29)$$

Promedio de los anchos de la sección transversal 1 y 2:

$$\bar{B} = \frac{B_{i+1} + B_i}{2} \quad (2.30)$$

Promedio de los radios hidráulicos de la sección transversal 1 y 2:

$$\bar{R}h = \frac{\left(\frac{A}{P}\right)_{i+1} + \left(\frac{A}{P}\right)_i}{2} \quad (2.31)$$

En donde  $i$  es la posición espacial de medición de los datos.

Considerando el mismo modelo de flujo gradualmente variado, la ecuación para determinar el caudal es,

$$Q = \bar{A}_i * \sqrt{\frac{(z_i - z_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)}{\frac{n_i^2}{\bar{R}h_i^{4/3}} \Delta_x(i) - \frac{\bar{B}_i}{g \bar{A}_i} (y_{i+1} - y_i)}} \quad (2.32)$$

donde,  $\bar{R}h_i$  es el promedio radio hidráulico entre la sección 1 y 2 en (m);  $\bar{B}_i$  es el promedio de los anchos entre la sección 1 y 2 del canal en (m);  $g$  es la aceleración de la gravedad en ( $ms^{-2}$ );  $\bar{A}_i$  es el promedio de las áreas de la sección transversal 1 y 2 en ( $m^2$ ).



### 2.2.3 Método de sección pendiente para flujo no permanente

La condición de estimación del caudal en una condición de flujo transitorio en ríos o canales es la parte principal de este trabajo y se tiene referencia o uso potencial como lo indica la ISO/TR 11627 (1998).

En esta referencia indica que es necesario por una parte contar con los registros continuos de nivel o hidráulicos en un tramo del canal y además construir un modelo de simulación numérica basado en las ecuaciones de Saint-Venant (MNSV).

#### 2.2.3.1 Ecuaciones fundamentales de flujo

Las bases para la derivación fundamental de las ecuaciones de flujo transitorio unidimensionales que rigen fueron investigadas por Coriolis, Boussinesq y Saint-Venant. Las ecuaciones que gobiernan son las expresiones unidimensionales promediadas en la sección transversal, conservación de masa o ecuación de continuidad ISO/TR 11627, (1998), y muestran a continuación:

- Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.33)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + gAS_f(A, Q; x, t) = 0 \quad (2.34)$$

donde  $x$  es la coordenada en el sentido horizontal y  $t$  el tiempo, como variables independientes;  $A(x, t)$  y  $Q(x, t)$ , el área y gasto respectivamente, como variables dependientes; además  $(x, t) \in \Omega = [0, L] \times [0, T]$  delimitan el espacio de solución;  $L$ , longitud de la conducción;  $T$ , tiempo final de solución;  $g$ , aceleración de la gravedad;  $h(A; x, t) = y(A; x, t) + z_b(x)$  la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia;  $y(A; x, t)$  elevación de la superficie libre del agua medida desde la plantilla del fondo del canal;  $z_b(x)$  la elevación de la plantilla del fondo del canal desde un nivel de referencia (para evaluar la pendiente del fondo se considera  $S_0 = \frac{\Delta z_b}{\Delta x}$ , y  $S_f(A, Q; x, t)$  la pendiente de fricción ecuación (2.35), (Aguilar, 2002).

Para la ecuación no dimensional de Chezy-Manning es similar para flujo permanente (2.22) y para condición transitoria se expresa de la manera siguiente:



$$S_f(A, Q; x, t) = \frac{n^2|Q|Q}{Rh(A; x, t)^{4/3}A^2} \quad (2.35)$$

Donde  $n$  es el coeficiente de Chezy-Manning.

La ecuación (2.35) será la forma de trabajar el término de fricción en todos los desarrollos que se realicen en este documento.

El sistema de ecuaciones (2.33) y (2.34) constituye un problema bien planteado<sup>2</sup> de valor inicial y de valores en la frontera, que está sujeto a las condiciones iniciales para  $A(x, 0) = A_0(x)$  y  $Q(x, 0) = Q_0(x)$ , y las condiciones de frontera se definen para flujo subcrítico y supercrítico como se describen en las ecuaciones (2.36) y (2.37), (2.38) y (2.39), respectivamente.

*Flujo subcrítico*

$$A(L, t) = f(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.36)$$

$$Q(0, t) = g(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.37)$$

*Flujo supercrítico*

$$A(0, t) = f(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.38)$$

$$Q(0, t) = g(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.39)$$

### 2.2.3.2 Modelos Linealizados

Los modelos linealizados se derivan de las ecuaciones (2.33) y (2.34) y se construyen con alguna hipótesis, y en algunos apartados que se indican en la ISO/TR 11627, (1998), en donde consideran lo siguiente:

- ❖ El término de aceleración (segundo término de izquierda a derecha) en la ecuación de momento (2.33) se considera despreciable.
- ❖ El área de sección transversal ( $A$ ) y la pendiente del fondo del canal ( $S_0$ ) son constantes.
- ❖ La pendiente de fricción  $S_f = f(y, z_b)$  se linealiza con respecto a la descarga y la profundidad.
- ❖ La onda de crecida tiene una forma sencilla que puedes ser descrita por una expresión analítica.

<sup>2</sup> Un problema bien planteado en el sentido de Hadamard consiste en tres puntos principales: 1. La solución debe existir aunque sea localmente, 2. Ser única y la solución debe depender de forma continua de los datos, y 3. Pequeñas variaciones en la frontera generan pequeñas variaciones en el dominio



### 2.2.3.3 Modelo de onda cinemática

El modelo de onda cinemática se deriva suponiendo que todos los términos en la ecuación de cantidad de movimiento son insignificantes, y sólo se considera la pendiente de fricción ( $S_f$ ) y la del fondo ( $S_0$ ), de modo que:

$$S_f = S_0 \quad (2.40)$$

Entonces el caudal se determina con sólo determinar el tirante normal

$$S_f(A, Q; x, t) = \frac{n^2 |Q| Q}{g Rh(A; x, t)^{4/3} A^2} = S_0 \quad (2.41)$$

$$Q = \frac{1}{n} ARh(A; x, t)^{2/3} S_0^{1/2} \quad (2.42)$$

Para esta condición es la aplicación directa de la ecuación de Chezy-Manning. En este caso se debe tener en cuenta que el canal no sufre remansos, cambios de sección y es lo suficientemente largo para establecer el flujo normalizado. Este método es similar a los planteados para flujo permanente y considera que se tiene flujo uniforme no permanente, lo anterior es una contradicción a la clasificación de flujos.

### 2.2.4 Método hidrológico de Muskingum

El método de Muskingum, es un método para calcular el hidrograma de una avenida en su tránsito por el cauce, teniendo en cuenta el efecto de laminación. En un tramo de un río o canal, durante el paso de una avenida, además del almacenamiento en prisma (almacenamiento por debajo de una superficie paralela a la solera del canal), existe un almacenamiento en cuña (*por encima del almacenamiento en prisma y limitado por la superficie libre del agua*), ver lámina 2.11.

Normalmente, el sitio donde se miden los escurrimientos o donde se encuentra una presa para control de inundaciones se localiza varios kilómetros aguas arriba del punto donde las avenidas pueden causar daños, debido a las condiciones topográficas y geológicas que deban existir para construir una presa o las que debe reunir el sitio para instalar una estimación hidrométrica (Aparicio, 2001).

Es necesario para ello contar con métodos que permitan conocer la variación de un hidrograma al recorrer un tramo de cauce, para poder determinar el efecto de presas reguladoras en tramos aguas abajo, para diseñar bordos de protección contra inundaciones, etc. La simulación de la



variación de un hidrograma al recorrer un cauce se conoce como *tránsito de avenidas en cauces*.

Este problema es similar al tránsito de avenidas en vasos en el sentido de que el río mismo es también una especie de almacenamiento alargado y que la solución se da por medio de la ecuación de continuidad y alguna relación entre almacenamiento y gasto de salida. Para calcular las avenidas en vasos se propone el método de Muskingum, este método fue presentado por primera vez en 1938. En la actualidad es un procedimiento muy utilizado para calcular el tránsito de una avenida por el cauce de una cuenca grande (Aparicio, 2001). Utiliza la ecuación de continuidad en su forma discreta:

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} \Delta_t - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \Delta_t = \Delta V \quad (2.43)$$

Y una relación algebraica entre el almacenamiento  $V$  en el tramo, en las entradas  $I$  y en las salidas  $O$  de la forma:

$$V = KO + Kx(I - O) = K[xI + (1 - x)O] \quad (2.44)$$

Donde  $K$  es una constante llamada *parámetro de almacenamiento* y  $x$  es un factor de peso que expresa la influencia relativa de las entradas y las salidas del almacenamiento en el tramo. Supone que el almacenamiento en un tramo de río se puede dividir en dos partes (ver lámina 2.11). El primero en un *almacenamiento en prisma*,  $KO$ , que depende solamente de las salidas y sería el único si el nivel de la superficie libre del agua fuera paralelo al fondo del río. Este almacenamiento se puede comparar con el que se tiene en el caso de un vaso, donde  $f$  indica alguna función. En el caso de cauces, se supone que la función  $f(0)$  es de la forma:

$$f(0) = KO \quad (2.45)$$

El otro tipo de almacenamiento, que en general no existe en el caso de vasos, llamado almacenamiento en cuña, se debe al efecto de la pendiente de la superficie libre del agua en el gasto. Esta pendiente depende tanto de las entradas como de las salidas, y en el método de Muskingum, el almacenamiento en cuña se toma como una función lineal de la diferencia de ambas:

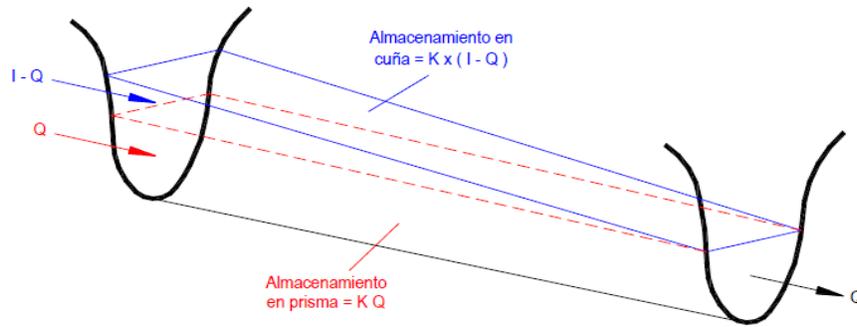


Lámina 2.11 Almacenamiento en prisma y cuña en un tramo de canal

$$V_c = f(I - O) = Kx(I - O) \quad (2.46)$$

De la ecuación de almacenamiento (2.44):

$$\Delta V = V_{i+1} - V_i = K[x(I_{i+1} - I_i) + (1 - x)(O_{i+1} - O_i)] \quad (2.47)$$

Sustituyendo la ecuación (2.46) en la (2.43) se tiene:

$$\frac{I_{i+1} + I_i}{2} \Delta t - \frac{O_{i+1} + O_i}{2} \Delta t = K[x(I_{i+1} - I_i) + (1 - x)(O_{i+1} - O_i)] \quad (2.48)$$

Despejando  $O_{i+1}$  de la ecuación (2.47) lo cual resulta:

$$O_{i+1} = \frac{Kx + \Delta t/2}{K(I - x) + \Delta t/2} I_i + \frac{\Delta t/2 - Kx}{K(I - x) + \Delta t/2} I_{i+1} + \frac{K(I - x) - \Delta t/2}{K(I - x) + \Delta t/2} O_i \quad (2.49)$$

O bien de la siguiente manera:

$$O_{i+1} = C_1 I_i + C_2 I_{i+1} + C_3 O_i \quad (2.50)$$

Donde:

$$C_1 = \frac{Kx + \Delta t/2}{\alpha}; C_2 = \frac{\Delta t/2 - Kx}{\alpha}; C_3 = \frac{K(I - x) - \Delta t/2}{\alpha};$$

$$\alpha = K(I - x) + \Delta t/2$$

Notese que  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$

Con la ecuación (2.50) es posible hacer el tránsito de cualquier avenida por el tramo dados  $\Delta t$  y los valores de  $K$  y  $x$ . Como en el caso del tránsito de avenidas en vasos, se recomienda que  $\Delta t < 0.1 tp$ . El parámetro  $K$  tiene



unidades de tiempo y su valor es aproximadamente igual al tiempo de viaje del pico de la avenida a lo largo del tramo:

$$K = \frac{L}{\omega} \quad (2.51)$$

donde  $L$ , es la longitud del tramo y  $\omega$ , es la velocidad promedio del pico de la avenida,  $\omega$  puede estimarse en función de la velocidad media del agua  $V$ , como:

$$\omega \approx 1.5 V \quad (2.52)$$

El parámetro  $x$  varía entre 0.0 y 0.5. Si  $x = 0.0$ , el volumen almacenado en el tramo es sólo función de la salida  $Q$  (ver ecuación 2.48), es decir, no existe almacenamiento de cuña y el tramo se comporta como un vaso. Si  $x = 0.5$ , las entradas y salidas tienen la misma importancia y no habría ningún abatimiento del pico. En términos muy generales, se puede decir que  $x$  se aproxima a 0.0 en cauces muy caudalosos y de pendiente pequeña, y a 0.5 en caso contrario. A falta de otros datos, es recomendable tomar  $x = 0.2$  como un valor medio.

Cuando se cuenta con por lo menos una avenida medida en ambos extremos del cauce, los parámetros  $K$  y  $x$  se estiman con mayor precisión mediante el siguiente razonamiento. Si se dibuja la ecuación 2.44 en una gráfica tomando  $V$  (Volumen de almacenamiento ( $m^3/s - día$ )) como ordenada en el eje  $y$  y  $(xI + (1 - x)Q)$  como abscisa en el eje  $x$ , se obtendrá una línea recta con pendiente  $K$ . Por otra parte, el volumen almacenado en el tramo hasta un tiempo  $t_0$  dado es el área acumulada entre el hidrograma de entrada y el de salida (véase lámina 2.12), es decir:

$$V = \int_0^{t_0} (I - Q) dt \quad (2.53)$$

Entonces, si se supone un valor  $x$ , se calcula  $[xI + (1 - x)Q]$  y el resultado se grafica contra volumen almacenado para tiempos  $(0 \leq t \leq t_0)$  (véase la lámina 2.12) y la gráfica tendrá que ser una línea recta de pendiente  $K$  si el valor supuesto  $x$  es el correcto. En caso contrario, es necesariamente suponer otro valor de  $x$  hasta que se obtenga aproximadamente una línea recta (ver lámina 2.13) (Aparicio, 2001).

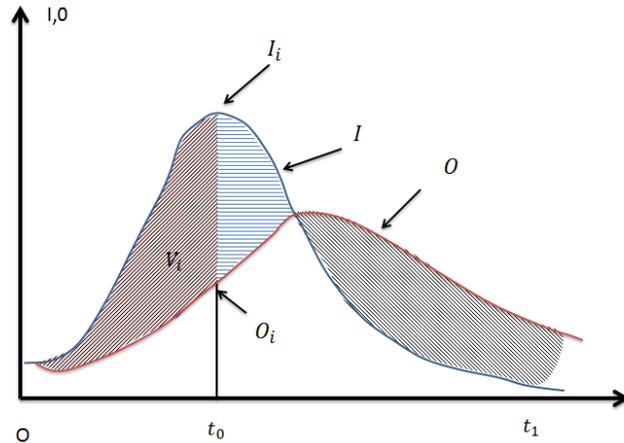


Lámina 2.12 Hidrogramas de entrada y salida

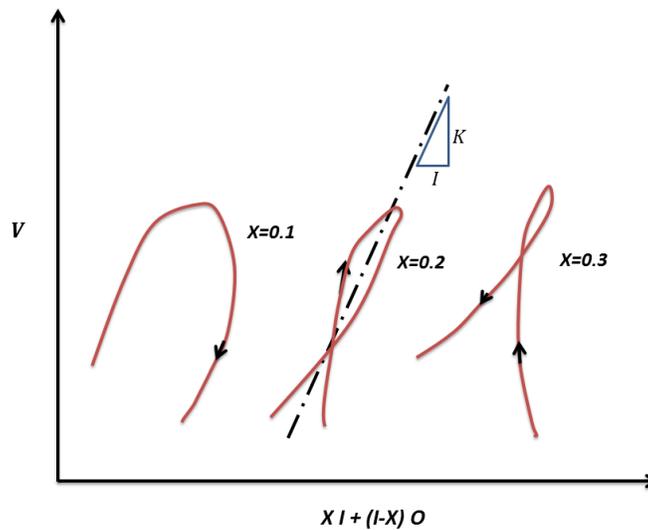


Lámina 2.13 Curvas de referencia

El método de Muskingum tiene muy buena aplicación y es de gran utilidad para el tránsito de avenidas en cauces y en vasos de almacenamiento, además es un método sencillo para calcular el hidrograma de una avenida en su tránsito por el cauce teniendo en cuenta el efecto de laminación, se tiene que tener como datos los volúmenes de entradas y salidas del vaso para poder obtener el hidrograma transitado por la avenida.

### 2.2.5 Método de cambio de régimen

Los métodos de cambio de régimen se aplican para un flujo a superficie libre y bajo el principio de la ecuación de la energía se puede establecer la condición de energía mínima en una sección específica o de control. El principio de energía mínima indica que aguas arriba de una sección de



control se tiene una relación de unicidad entre el caudal y el nivel (ley de descarga), por ejemplo la caída en una cascada. La referencia estandarizada de una sección de control se clasifica en función de la forma geométrica del sistema de aforo (por ejemplo: aforadores Parshall, Venturi, SANIRII, garganta larga, etc.) y se tiene diferentes normas dependiendo de la forma geométrica.

Entonces para construir la relación de cambio de régimen parte de la ecuación de la energía específica, aplicada en una sección antes de una caída (ver lámina 2.14),

$$E = y \cos\theta + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (2.54)$$

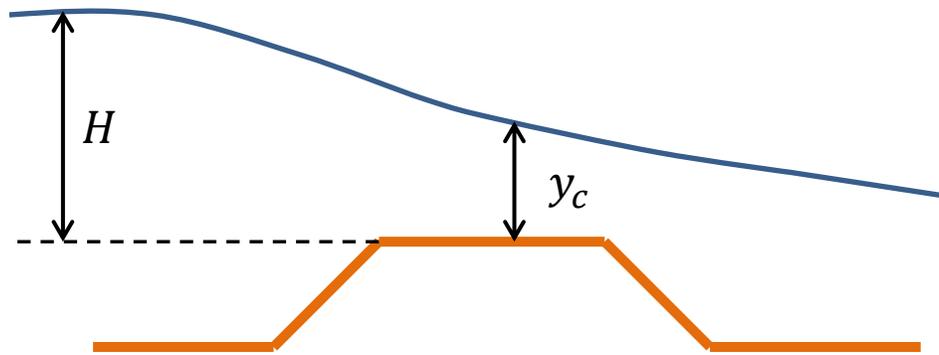


Lámina 2.14 Perfil de caída en cambio de régimen en un canal

En la ecuación anterior determina la energía mínima, tal que  $\frac{dE}{dy} = 0$  y desarrollado se tiene;

$$E = y \cos\theta + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (2.55)$$

Y por continuidad  $U = \frac{Q}{A}$ , resulta,

$$E = y \cos\theta + \alpha \frac{Q^2}{A^2 2g} \quad (2.56)$$

El valor de  $\theta$  corresponde al ángulo de inclinación del fondo de la sección respecto de la horizontal. Si  $\theta$  es pequeño  $\cos\theta = 1$ . Siendo  $A$  función únicamente del tirante, la energía específica lo es también y asumiendo que  $Q$  y  $\alpha$  es constante y la derivada con respecto a  $y$  de la ecuación 2.56.



$$\frac{dE}{dy} = y \cos\theta + \alpha \frac{Q^2}{A^2 2g} \quad (2.57)$$

Derivando y considerando  $\cos\theta = 1$ ,  $\alpha = 1$  y donde  $\frac{dA}{dy} = B$  resulta:

$$F_r = 2 \frac{Q^2}{A^3 2g} \frac{dA}{dy}$$

O también,

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{\frac{Ag}{B}}} \quad (2.58)$$

Entonces para el sitio donde  $F_r = 1$ , se tiene un solo tirante  $y_c$  (crítico) para un gasto dado. Extrapolando este resultado se dice que para una condición de cambio de régimen de flujo subcrítico ( $F_r < 1$ ) a flujo supercrítico ( $F_r > 1$ ) existe una sola relación unívoca entre el tirante y gasto, entonces se puede construir una ley de descarga para una estructura de cambio como,

$$Q \propto y \quad (2.59)$$

En forma específica dependiendo de la forma de la sección transversal y las características geométricas de la estructura de cambio de régimen, la ecuación (2.54) se reporta (Chow, 1987) como:

$$Q = Cd Cv b y^n \quad (2.60)$$

Donde  $Cd$ , coeficiente de gasto,  $Cv$  coeficiente sin dimensiones muy cercano a 1,  $b$  es el ancho del canal,  $y$  el tirante y  $n$  es un parámetro.

La forma geométrica de la sección transversal de cambio de régimen hace una clasificación de estas estructuras, que son también llamados vertedores. Los tipos de vertedores de cresta delgada más utilizadas en la medición del flujo en canales son:

- ❖ Vertedores de cresta delgada rectangulares con contracciones.
- ❖ Vertedores de cresta delgada rectangulares sin contracciones.
- ❖ Vertedores de cresta delgada con contracciones en forma trapezoidal (vertedores Cipolletti).
- ❖ Vertedores de cresta delgada triangulares.



Lámina 2.15 Aforador de sección triangular

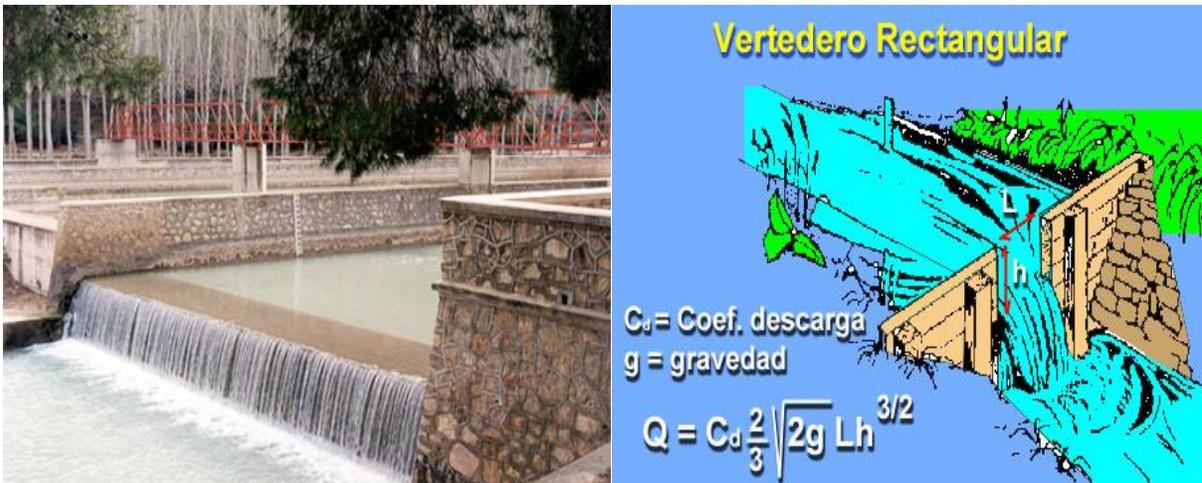


Lámina 2.16 Aforador de sección rectangular

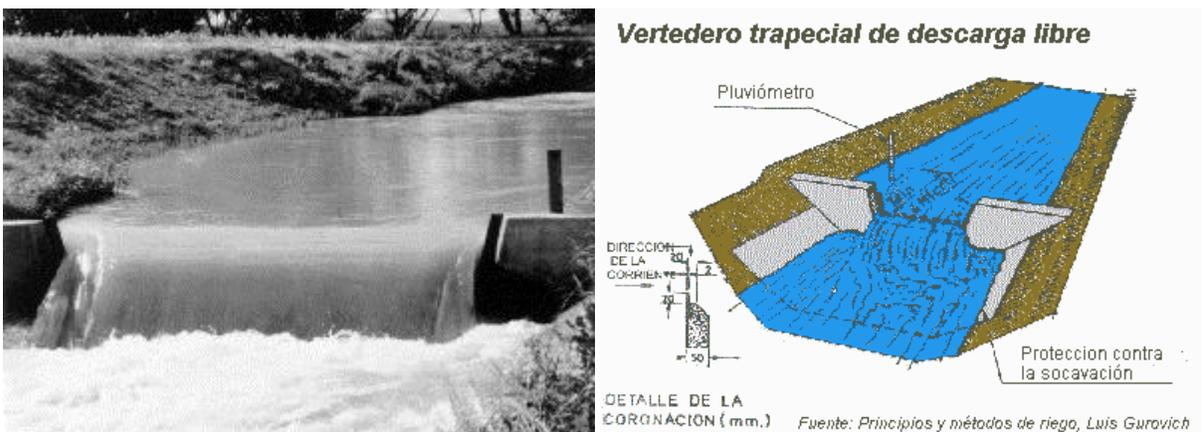


Lámina 2.17 Aforador de sección trapecial



Los vertedores de cresta ancha más usuales son aquellos que permiten el paso de los sedimentos y producen pequeñas caídas de carga, los más utilizados en canales y ríos son:

- ❖ Aforador de garganta larga
- ❖ Aforador Parshall

### Aforador de garganta larga

Cuenta con la ventaja de la factibilidad de su calibración analítica, por lo que no requiere de calibración en laboratorio o *in situ*, lo cual brinda también la posibilidad de hacer correcciones posteriores a la construcción de la estructura, lo que es útil en caso de sufrir alguna modificación al ser instalado (Martínez Austria & Castillo González, 1992).

Algunas de las siguientes ventajas de los aforadores de garganta larga respecto a otros y en particular a los aforadores sin garganta o de garganta corta se muestran a continuación:

- ❖ Si el régimen crítico se presenta en la garganta, es posible calcular una tabla de calibración con un error no mayor de 2% para cualquier combinación de garganta y canal de llegada prismático.
- ❖ La sección de la garganta puede diseñarse de tal manera que permita medir con exactitud el rango completo de caudales esperados.
- ❖ La pérdida de energía es mínima y le corresponde una relación única entre la carga hidráulica aguas arriba, medida respecto a la base de la garganta, y el gasto.
- ❖ La pérdida de energía puede estimarse con gran exactitud sobre cualquier canal.
- ❖ Se tiene pocos problemas con materiales flotantes, debido a que la transición de entrada es gradual y convergente.



Lámina 2.18 Aforador de garganta larga



Un aforador de garganta larga es básicamente una contracción construida dentro de un canal, donde se dan las condiciones hidráulicas para que se presente el flujo crítico en la garganta. Otra condición para que el aforador sea de garganta larga es que esta tenga una longitud mínima, para evitar curvaturas fuertes en el perfil hidráulico del flujo y en las líneas de corriente. Para que las líneas de flujo sean prácticamente paralelas en la garganta, el aforador no debe tener contracciones bruscas.

Hay varios tipos de aforadores de garganta larga. Tomando en cuenta su geometría se puede dividir en trapezoidales, rectangulares, triangulares y las combinaciones de los anteriores en el canal de aproximación y la garganta (Martínez Austria & Castillo González, 1992).

### Aforador Parshall

El aforador Parshall (Pedroza González, 2001) es una estructura hidráulica que permite medir la cantidad de agua que pasa por una sección de un canal, esto se puede medir por regletas graduadas, colocadas en el interior del equipo, obteniendo el resultado mediante fórmula matemática, o bien mediante unos sensores independientes al equipo colocados en la parte superior y el aforador Parshall consta de cuatro partes principales (Escalante Estrada, 2013):

- ❖ Transición de entrada.
- ❖ Sección convergente
- ❖ Garganta.
- ❖ Sección divergente.

En la transición de entrada, el piso se eleva sobre el fondo original del canal, con una pendiente suave y las paredes se van cerrando, ya sea en línea recta o circular. En la sección convergente, el fondo es horizontal y el ancho va disminuyendo. En la garganta se vuelve a bajar para terminar con otra pendiente ascendente en la sección divergente. En cualquier parte del aforador, desde el inicio de la transición de entrada hasta la salida, el aforador tiene una sección rectangular.

Junto a la estructura del aforador se tienen dos pozos laterales o tanques con la misma profundidad, o mayor, que la parte más baja del aforador. El agua que escurre por el aforador pasa a estos tanques por medio de unas perforaciones colocadas en la pared de la sección convergente y en la garganta. Fundamentalmente el aforador es una reducción de la sección que obliga al agua a elevarse o a “remansarse”, y volver a caer hasta la elevación que se tenía sin la presencia del aforador. En este proceso se presenta una aceleración del flujo que permite establecer una relación matemática entre la elevación del agua y el gasto, para condiciones de



descarga libre, todos se pueden representar matemáticamente con la siguiente ecuación (García Villanueva, 1998).

$$Q = C(H_a)^n \quad (2.61)$$

Donde  $Q$  es el gasto, para condiciones de descarga libre;  $H_a$  es la profundidad del agua en una ubicación determinada del aforador  $C$  y  $n$  son valores diferentes para cada tamaño de aforador. En función del tamaño del aforador las unidades de la ecuación anterior pueden ser en  $l/s$  o  $m^3/s$  para el gasto y en milímetros o metros para la profundidad  $H_a$ .

No sólo se instala en EDARS o ETAPS (Estaciones depuradoras o estaciones potabilizadoras), sino que también cuenta con aplicaciones en sectores diversos, como el de alimentación, donde resulta muy útil para calcular el flujo, el paso de los productos o el fluido en cualquier cantidad. Pero su uso más frecuente suele encontrarse en ríos, canales de irrigación y/o de desagüe, vertidos de fábricas, entre otros.

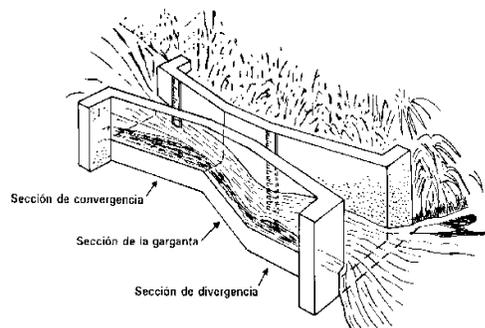


Lámina 2.19 Canal de aforo Parshall con un caudal libre y un registrador de caudal.

## 2.3 Equipos de medición

### 2.3.1 Equipos de medición de velocidad

#### Molinete mecánico

Es un instrumento de medición que funciona en estilos audífono o digitales, los medidores Price tipo AA ofrecen mediciones rápidas y precisas para todos los caudales menos para caudales muy pequeños. El audífono genera un "clic" en cada rotación o uno cada cinco rotaciones del eje, según la conexión de contacto seleccionada.

En la versión digital, una extensión nodal fraccionada entre un diodo emisor de luz y un foto receptor. El pulso es producido cuando la ranura se alinea con el LED y el fototransistor manda una señal al indicador



digital (modelo 1100), el cual convierte esta señal a una lectura directa de velocidad de corriente.

Cualquiera de los dos tipos se puede suspender desde un puente o un bote usando un cable de suspensión con un escandallo; o puede ser montado en una varilla de vadeo para arroyos poco profundos, diques o sistemas de aguas residuales.



Lámina 2.20 Aforo con molinetes desde puentes o a directamente en el río

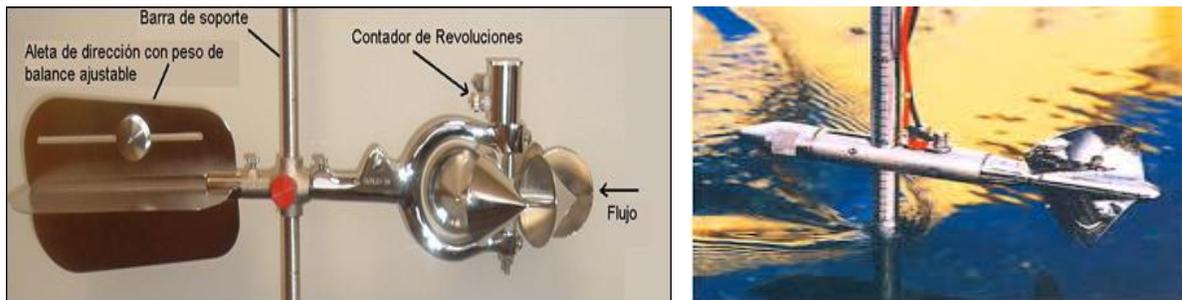


Lámina 2.21 Tipos de molinete usados para el aforo de acequias, diques y canales. a) De cazoletas. b) De hélice

### Velocímetros acústicos de efecto Doppler

Desde hace 20 años, se empezaron a usar equipos acústicos basados en el efecto Doppler<sup>3</sup> para aforar en canales mide las dos o tres componentes de la velocidad del agua según un plano horizontal, se utilizan en corrientes naturales y canales además pueden usarse para vadear, el instrumento calcula automáticamente el gasto, por lo que:

<sup>3</sup> Efecto Doppler.- Cuando un objeto emite un sonido con una cierta frecuencia y este se acerca, se percibe un sonido con una frecuencia mayor (más aguda); al revés, si el objeto se aleja, se percibe un sonido con una frecuencia menor (más grave).



Los equipos portátiles Velocímetro Doppler (VD y Perfilador Doppler (PD), son una alternativa al aforo clásico.

Los equipos fijos (AD) son una alternativa al aforo por medio de sistemas automáticos más clásicos (AGL o ATT).

TIPOS DE USO	TIPO DE TECNOLOGIA	ACRÓNIMO USADO
EQUIPOS PORTÁTILES	MEDIDOR PUNTUAL DE VELOCIDAD	VD VELOCIMETRO DOPPLER
	PERFILADOR DE VELOCIDAD	PD PERFILADOR DOPPLER
EQUIPOS FIJOS		AD AFORADOR DOPPLER

Tabla 2.2 Equipos acústicos Doppler para canales

Medición de la velocidad del agua, los equipos Doppler para aforar en canales cuentan con un arreglo de sensores de velocidad, que envían pulsos de sonido con una cierta frecuencia (ultrasónico) en el agua y miden la frecuencia del eco enviado por partículas que están normalmente presentes en suspensión en el agua y que se mueven con ella (Escalante Estrada, 2013).

1.- Los equipos Doppler asumen que la velocidad del agua es la de las partículas en suspensión que se mueven con ella.

- ❖ La señal acústica re-enviada por las partículas en suspensión es una señal bastante “ruidosa”. Se requieren sistemas sofisticados para procesarla.
- ❖ En la práctica, hay suficiente partículas en suspensión en el agua en los canales de riego.
- ❖ Al contrario de otros equipos que miden la velocidad del agua, los equipos Doppler pueden usarse en aguas con altas concentraciones de partículas en suspensión.

2.- La estimación de velocidad depende de la orientación del sensor de velocidad con respecto al flujo.

- ❖ Al contrario de otros equipos, los equipos Doppler son sensibles a la orientación del flujo.

- ❖ La mayoría de los equipos Doppler actuales cuentan con un arreglo de sensores de velocidad, que les permite determinar las componentes del flujo en 2 o 3 dimensiones del espacio. Para poder hacerlo deben ser orientados adecuadamente.

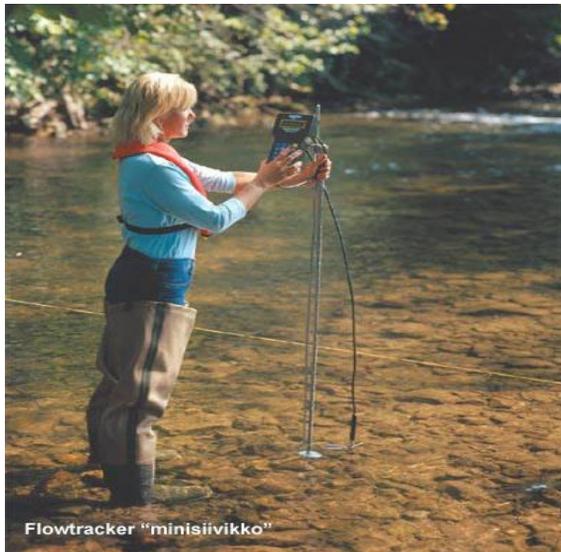


Lámina 2.22 Aforo con velocímetro Doppler.

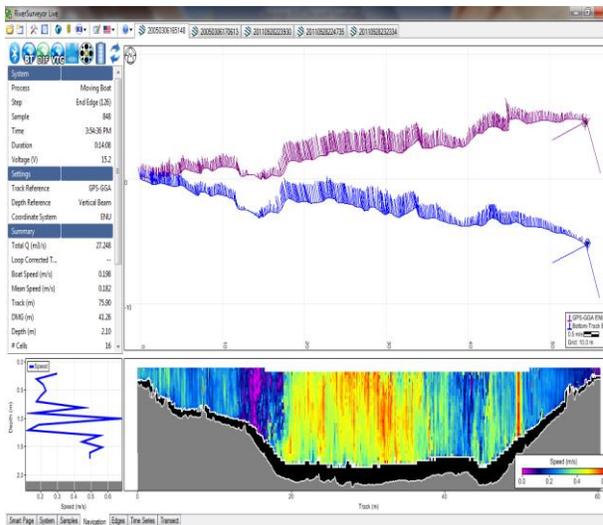


Lámina 2.23 Aforo con Perfilador acústicos de efecto Doppler montado en un barquito

### 2.3.2 Equipos de medición de nivel

El sensor de nivel de río es un instrumento que sirve para medir la profundidad del agua en ríos y lagos, especialmente útil durante la ocurrencia de crecidas e inundaciones. Si bien la idea de un instrumento



de medición para monitorear la profundidad del agua no es nuevo, el Sensor de Nivel de Río presenta características especialmente útiles para su uso en Sistemas de Alerta Temprana ante Inundaciones, en áreas con recursos limitados,( Anleu Fortuny, 2010). Las ventajas de los sensores de nivel en ríos son:

- ❖ Obtener datos de los niveles de los ríos en zonas de alto riesgo de una manera más rápida y económica.
- ❖ Evitar poner en riesgo la integridad del personal que realiza inspecciones visuales de los niveles de ríos.
- ❖ Tener un pronóstico más acertado.
- ❖ Poder contar con una alarma preventiva para la población localizada en las cercanías.

Estos sensores de nivel se colocan en las orillas de los ríos, una vez que se hace el proceso de selección del sitio de monitoreo procede a la instalación del sensor. Se requiere de mucho cuidado para su instalación, para fijar el sensor a una estructura fija (puede ser base de un puente, roca, muro o un árbol) lo más común es utilizar abrazaderas o anillos para su fijación, ( Anleu Fortuny, 2010).



Lámina 2.24 Esquema y muestra de la forma de instalación de estos equipos utilizados, cuando no hay elementos fijos en el cauce.



## 3 MODELO PARA DETERMINAR EL CAUDAL

### 3.1 Metodología

En el capítulo anterior se hizo una referencia a los diferentes métodos para estimar el caudal a flujo permanente ISO-1070, (1992) y de igual manera también se mencionaron los modelos a flujo transitorio ISO/TR 11627, (1998). Todos esos métodos requieren de los datos de variación de nivel en diferentes puntos a lo largo de un cauce.

En el caso del flujo no permanente los propuestas de aplicación son simplificadas (por ejemplo el método de Muskingum y onda cinemática), por lo cual considerando que las ecuaciones que definen el flujo en los cauces pueden resolverse de forma aproximada mediante programas de cómputo, en la presente investigación se propone una metodología para el cálculo en flujos transitorios durante la ocurrencia de avenidas en cauces. Los requerimientos de este modelo es la lectura continua del nivel en dos secciones transversales del canal o río a aforar.

Para prueba de esta metodología se aplica un modelo numérico basado en las ecuaciones generales de flujo a superficie libre, aproximadas mediante el esquema numérico.

### 3.2 Definición de estación de aforo para la medición de avenidas

Aforar indirectamente una corriente con dos sensores de nivel ubicados en los extremos de un tramo del río o canal en una sección constante, es parte de la estimación de la evaluación y cambios de los tirantes en ambos puntos durante una avenida, y con la aplicación de una serie de ecuaciones conocer el gasto del transitorio generado por la avenida en determinado periodo de tiempo.

Para realizar el aforo, el tramo del río debe ser recto, además no debe haber cambios bruscos en la pendiente del cauce, como puede ocurrir en los canales rocosos, o sea, el tramo debe estar libre de obstrucciones y ser lo más uniforme posible el tramo seleccionado.

Para realizar el aforo y aplicar hidrometría para la ejecución de las ecuaciones (2.20, 2.28 y 2.32) para flujo permanente ISO-1070, (1992) a flujo transitorio ISO/TR 11627 (1998), el procedimiento de aforo consiste en instalar dos sensores de nivel de registro continuo en las orillas del cauce, donde se estarán extrayendo los datos de forma continua, estos se colocaran en dos puntos del cauce tomando la numero uno, como la primera sección transversal y a una distancia deseada o propuesta considerarla como sección transversal dos a lo largo del cauce.



Lámina 3.1 Medidor de nivel y sensor de nivel



Lámina 3.2 Esquematización del procedimiento de aforo con medidor de nivel

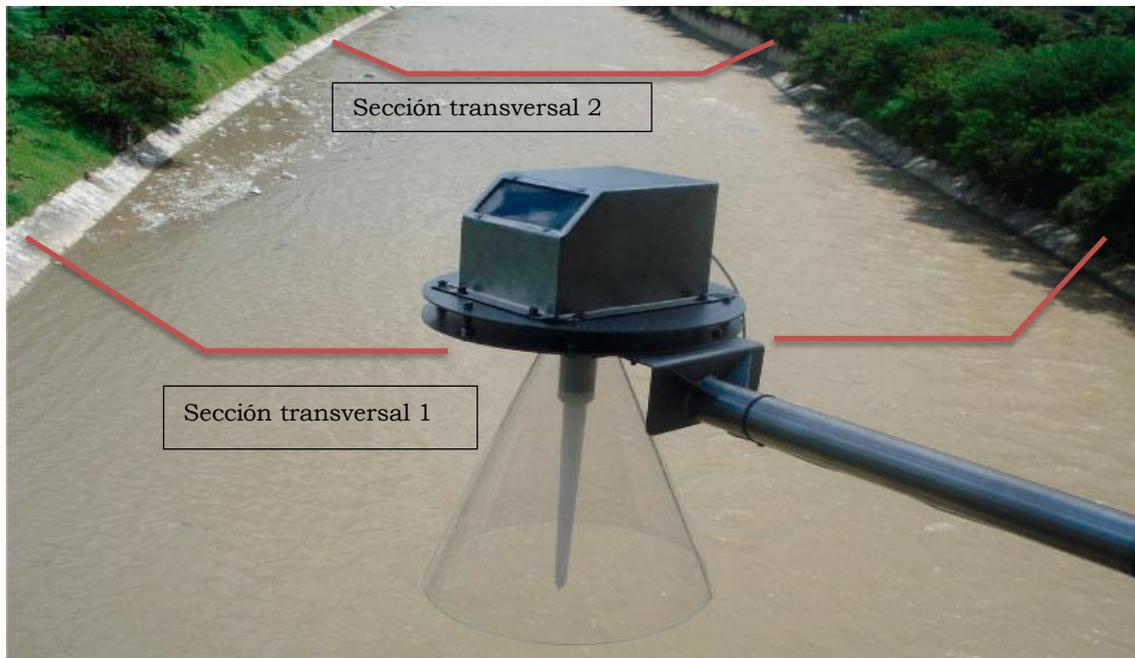


Lámina 3.3 Esquematización de sensor de nivel en canales



Lámina 3.4 Fotografía tomada de una avenida muy intensa en un cauce

### 3.3 Modelo no permanente para medición de caudal

Una alternativa para estimar el gasto en una condición de escurrimiento no permanente, consiste en medir los niveles de variación de la superficie libre del agua y reconstituir mediante un modelo numérico los valores del escurrimiento.

El modelo central de este trabajo, para reconstituir el escurrimiento, consiste en manejar las ecuaciones generales de flujo, con la siguiente condición inicial y de frontera:



1. Se conocen las características geométricas del cauce (dado nivel se puede saber el área, perímetro, radio hidráulico, pendiente y rugosidad).
2. Se definen dos puntos para medir el nivel en forma continua, la separación entre estos es conocida.
3. La condición inicial es un gasto a flujo permanente (gasto base) y con la variación temporal del nivel se determinan los hidrogramas.

El muestreo de los niveles se realizan con un intervalo de un segundo y los registros tienen una duración completa del paso de la avenida. Con las consideraciones antes mencionadas y tomando las ecuaciones conservativas de Saint-Venant, descritas en el apartado 2, se tiene,

- Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.28)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento o momentum

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + gAS_f(A, Q; x, t) = 0 \quad (2.29)$$

Desarrollando el término convectivo y el de carga hidráulica de la ecuación de momentum (2.29),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y + z) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - S_o \quad (3.2)$$

Sustituyendo (3.1) y (3.2) en (2.29),

$$M(A, Q) = \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} - gAS_o + gAS_f = 0 \quad (3.3)$$

Para la estimación de caudal se considera una evaluación de las derivadas parciales de área, nivel y términos independientes de área y radio hidráulico, con una propuesta en diferencias finitas promediadas en una caja (Aguilar-Chávez, 2002), entonces:



Discretización de la derivada temporal:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \equiv A_t \approx (1 - \Psi) \frac{A(x, t + \Delta_t) - A(x, t)}{\Delta_t} + (\Psi) \frac{A(x + \Delta_x, t + \Delta_t) - A(x + \Delta_x, t)}{\Delta_t} \quad (3.4)$$

donde  $\psi \in [0,1]$  es el factor de peso espacial

Discretización de las derivadas espaciales:

$$\frac{\partial A}{\partial x} \equiv A_x \approx (1 - \theta) \frac{A(x + \Delta_x, t) - A(x, t)}{\Delta_x} + (\theta) \frac{A(x + \Delta_x, t + \Delta_t) - A(x, t + \Delta_t)}{\Delta_x} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv y_x \approx (1 - \theta) \frac{y(x + \Delta_x, t) - y(x, t)}{\Delta_x} + (\theta) \frac{y(x + \Delta_x, t + \Delta_t) - y(x, t + \Delta_t)}{\Delta_x} \quad (3.6)$$

donde  $\theta \in [0,1]$  es el factor de peso temporal.

Discretización de los términos independientes:

$$A_m \approx (1 - \theta)[(1 - \Psi)A(x, t) + \Psi A(x + \Delta_x, t)] + \theta[(1 - \Psi)A(x, t + \Delta_t) + \Psi A(x + \Delta_x, t + \Delta_t)] \quad (3.7)$$

$$R_m = (1 - \theta)[(1 - \Psi)R(x, t) + \Psi R(x + \Delta_x, t)] + \theta[(1 - \Psi)R(x, t + \Delta_t) + \Psi R(x + \Delta_x, t + \Delta_t)] \quad (3.8)$$

donde  $A_m$ , es el área media, y  $R_m$  es radio hidráulico medio, ambos entre los dos sensores de nivel.

Para evaluar el término de fricción promediado en la caja de cálculo se utilizará la ecuación siguiente:

$$S_f = \frac{n^2 Q^2}{A_m^2 R_m^{4/3}} \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.4) en la ecuación de conservación de masa (2.28), se tiene,



$$A_t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Despejando  $A_t$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -A_t \quad (3.10)$$

La ecuación anterior establece el principio de conservación de masa y su variación espacial, y para este modelo se evalúa si se conoce la variación de los niveles en dos secciones conocidas, con la serie de registro de datos de nivel.

Con las relaciones de variación espacial y temporal de las características hidráulicas (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) y (3.9), sustituidas en la ecuación de cantidad de movimiento se tiene;

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A_m} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A_m^2} A_x + g A_m y_x - g A_m S_o + \frac{g A_m n^2}{A_m^2 R_h^{4/3}} Q^2 = 0 \quad (3.11)$$

Aplicando el principio de conservación de masa (3.10) en (3.11) en el segundo término, se obtiene lo siguiente relación;

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A_m} (-A_t) - \frac{Q^2}{A_m^2} A_x + g A_m y_x - g A_m S_o + \frac{g n^2}{A_m R_m^{4/3}} Q^2 = 0 \quad (3.12)$$

Esta ecuación indica la variación espacio temporal del gasto en el tramo en estudio  $Q = Q(x, t)$ .

Factorizando  $Q^2$  en (3.12) y considerando que la variación espacial del gasto se evalúa en un punto intermedio entre las secciones  $\delta \in [x, x + \Delta x]$ , entonces  $Q(t) = Q(\delta, t)$ , con lo cual esta variable estará fija en un punto. En las pruebas  $\delta$  es la mitad de la distancia entre los sensores.

Con la definición del punto de evaluación se obtiene de (3.12) una ecuación diferencial de coeficientes variables, entonces:

$$\frac{dQ}{dt} + Q \left[ -\frac{2A_t}{A_m} \right] + Q^2 \left[ -\frac{A_x}{A_m^2} + \frac{g n^2}{A_m R_m^{4/3}} \right] + g A_m (y_x - S_o) = 0 \quad (3.13)$$

Considerando las siguientes variables de simplificación,

$$\alpha_1 (\delta, t) = -\frac{A_x}{A_m^2} + \frac{g n^2}{A_m R_m^{4/3}} \quad (3.14)$$



$$\alpha_2 (\delta, t) = -\frac{2A_t}{A_m} \quad (3.15)$$

$$\alpha_3 (\delta, t) = g A_m (y_x - S_o) \quad (3.16)$$

Por lo tanto la ecuación a resolver es:

$$\frac{dQ}{dt} + \alpha_1 (\delta, t) Q^2 + \alpha_2 (\delta, t) Q + \alpha_3 (\delta, t) = 0 \quad (3.17)$$

La expresión (3.17) permite establecer la variación de los caudales en un punto intermedio de dos secciones transversales, y los datos de frontera son las variaciones del nivel de la superficie libre del agua. En lo subsecuente se referirá a este modelo como MDCV (Modelo Diferencial de Coeficientes Variables).

La solución exacta de la MDCV está en función de la variación temporal de los niveles entre dos puntos de medición, dado que es un modelo de disparo inicial. Pero los coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  dependen del tiempo, entonces se dice que están forma implícita en función del gasto circulante, por lo que su integración es muy compleja.

Para resolver la MDCV, en este trabajo, se propusieron dos metodologías discretas. La primera se fundamenta en la curvas de llenado y vaciado de un cauce durante el paso de un hidrograma y se denominó M-I y el segundo modelo es una solución discreta de la ecuación (3.17) por un método en diferencias finitas y se denota como M-II.

### 3.4 Modelo basado en la curva de llenado de cauce (M-I)

El modelo de solución M-I considera la variación de los volúmenes de llenado. Para una avenida el comportamiento de relación de área-caudal en un cauce está en función del llenado y vaciado del mismo, tal como se muestra en la figura 3.5.

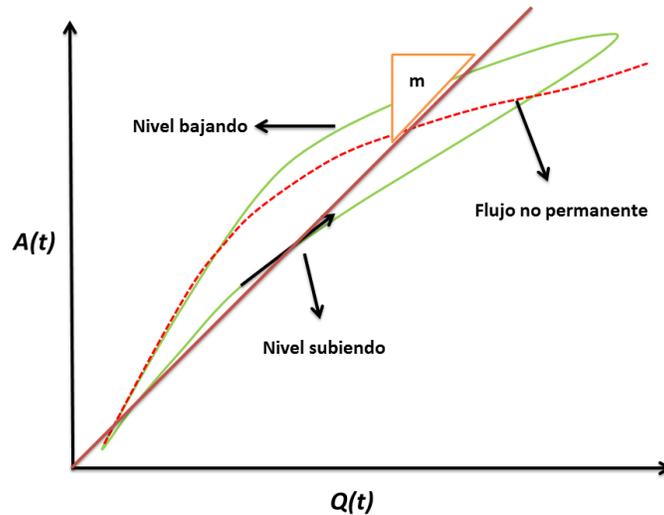


Lámina 3.5 Curva de vaciado y llenado de un cauce durante una avenida

Entonces se propone que la pendiente media de llenado es proporcional a una constante, entonces:

$$K_A \sim \frac{A}{Q} \quad (3.18)$$

Con esta relación se dice que la variación del caudal en el tiempo se puede calcular de la forma siguiente:

$$\frac{dQ}{dt} \approx K_A A_t \quad (3.19)$$

Donde  $K_A$  es la pendiente de la curva de llenado y vaciado provocada por la avenida (ver lámina 3.5)  $K_A = \frac{A_2 - A_1}{Q_2 - Q_1}$ .

Sustituyendo la ecuación (3.19) en la ecuación (3.17), se tiene:

$$K_A A_t + \alpha_1 Q^2 + \alpha_2 Q + \alpha_3 = 0$$

Finalmente, la ecuación para estimar el caudal por el M-I es la siguiente:

$$Q = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \pm \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha_3 + k A_t}{\alpha_1}} \quad (3.20)$$



Donde;

$$\alpha_1 = -\frac{A_x}{A_m^2} + \frac{gn^2}{A_m R_m^{4/3}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{2A_t}{A_m}$$

$$\alpha_3 = g A_m (y_x - S_o)$$

Este modelo se verificará su aplicación en las pruebas indicadas en el capítulo 4, y como se puede observar tiene cierta semejanza a los modelos de flujo permanente, pero tiene la particularidad de poder estimar los cambios en el llenado en el cauce, que se suceden cuando llega o pasa una avenida en el tramo de medición de niveles.

### 3.5 Modelo en diferencias finitas (M-II).

La simulación numérica de flujo en ríos, canales, lagos y bahías es una herramienta aplicada en la práctica de la ingeniería hidráulica. Así se tienen ejemplos de modelos unidimensionales aplicados en tuberías, canales, ríos y la propagación de la inundación en una llanura. Los modelos para describir el movimiento hidrodinámico en el cauce de un río, corrientes en un lago, laguna costera y la circulación de marea por efectos astronómicos en el mar y la zona (Aguilar, 2013).

Estos modelos son utilizados para describir el flujo en su estado permanente y transitorio. Los resultados son aplicados para diseñar obras hidráulicas, determinar los efectos de inundaciones, crecidas en ríos, etc.

Los modelos matemáticos unidimensionales y bidimensionales son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de valor inicial y condiciones en la frontera. La aplicaciones integrales de las ecuaciones son para en casos muy limitados y de difícil aplicación para el diseño de obras en la ingeniería (Aguilar, 2013).

Por lo tanto, en forma generalizada se aplican métodos de discretización numérica de las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones discretas se resuelven mediante una computadora digital. Los métodos más usuales son:

- ❖ Método de las características
- ❖ Método de diferencias finitas
- ❖ Método de elemento finito
- ❖ Método de volumen finito



Los cálculos de diferencias finitas es una técnica que permite analizar funciones diferenciables, con sólo la aplicación de operaciones aritméticas (acciones muy fáciles de aplicar con una computadora). El principio de aplicación está basado en la aplicación de una expansión en serie de Taylor.

Aplicando una solución por diferencias finitas a la ecuación (3.17)

$$Q = Q(\delta, t)$$

$$\frac{dQ}{dt} + \alpha_1(\delta, t)Q^2 + \alpha_2(\delta, t)Q + \alpha_3(\delta, t) = 0 \quad (3.21)$$

Aplicando una discretización temporal a todos los términos en la ecuación 3.21 se tiene,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} \quad (3.22)$$

$$Q = (1 - \psi)Q^{n+1} + \psi Q^n \quad (3.23)$$

$$\bar{\alpha}_1 = (1 - \psi) \alpha_1^{n+1} + \psi \alpha_1^n \quad (3.24)$$

$$\bar{\alpha}_2 = (1 - \psi) \alpha_2^{n+1} + \psi \alpha_2^n \quad (3.25)$$

$$\bar{\alpha}_3 = (1 - \psi) \alpha_3^{n+1} + \psi \alpha_3^n \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) y (3.26) en (3.21)

$$\begin{aligned} \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} = & [(1 - \psi) \alpha_1^{n+1} + \psi \alpha_1^n][(1 - \psi)Q^{n+1} + \psi Q^n]^2 \\ & + [(1 - \psi) \alpha_2^{n+1} + \psi \alpha_2^n][(1 - \psi)Q^{n+1} + \psi Q^n] \\ & + [(1 - \psi) \alpha_3^{n+1} + \psi \alpha_3^n] = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} Q^{n+1} - Q^n + \Delta_t \{ & \bar{\alpha}_1 [(1 - \psi)^2 (Q^{n+1})^2 + 2(1 - \psi)\psi Q^{n+1}Q^n + \psi^2 (Q^n)^2] \\ & + \bar{\alpha}_2 [(1 - \psi)Q^{n+1} + \psi Q^n] + \bar{\alpha}_3 \} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Q^{n+1})^2 [\Delta_t \bar{\alpha}_1 (1 - \psi)^2] + Q^{n+1} [1 + \Delta_t (2 \bar{\alpha}_1 (1 - \psi)\psi Q^2 + \bar{\alpha}_2 (1 - \psi))] - Q^n \\ + \Delta_t [\bar{\alpha}_1 \psi^2 (Q^n)^2 + \bar{\alpha}_2 \psi Q^n + \bar{\alpha}_3] = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Considerando las siguientes variables de simplificación:

$$\beta_1 = \Delta_t \bar{\alpha}_1 (1 - \psi)^2 \quad (3.29)$$



$$\beta_2 = 1 + \Delta t(1 - \psi)(2\bar{\alpha}_1\psi Q^n + \bar{\alpha}_2) \quad (3.30)$$

$$\beta_3 = -Q^n + \Delta_t[\bar{\alpha}_1\psi^2(Q^n)^2 + \bar{\alpha}_2\psi Q^n + \bar{\alpha}_3] \quad (3.31)$$

Por lo tanto:

$$(Q^{n+1})^2\beta_1 + Q^{n+1}\beta_2 + \beta_3 = 0$$

$$(Q^{n+1})^2 + Q^{n+1}\frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} = 0 \quad (3.32)$$

Por lo tanto la ecuación para el cálculo del flujo es:

$$Q^{n+1} = -\frac{\beta_2}{2\beta_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{2\beta_1}\right)^2 - \frac{\beta_3}{\beta_1}} \quad (3.33)$$

La prueba de M-I y M-II se muestran en el capítulo siguiente tomando en cuenta las condiciones de frontera con que fueron planteados. En las pruebas, la condición inicial es el flujo subcrítico permanente uniforme, y la condición de frontera izquierda es un hidrograma y para la frontera derecha es utilizó, ley de descarga. Se realizaron cuatro diferentes pruebas para distintos cauces naturales y canales de riego con diversos gastos en la condición inicial.



## 4 PRUEBAS NUMÉRICAS

Para la evaluación de los dos modelos que se han descrito en el capítulo anterior, se utilizó un modelo numérico que soluciona las ecuaciones conservativas de Saint-Venant (MNSV), con un esquema tipo caja no lineal con una actualización basada en el método de Newton (Aldama & Aguilar, 1996).

Este modelo fue adecuado en una plataforma de Matlab®, la cual permitió ajustar cualquier condición de frontera e inicial de un canal o un cauce natural, de igual forma las salidas numéricas se pudieron manipular con mayor facilidad. Cabe aclarar que esto no es parte del trabajo investigado, esto se realizó para modelar las pruebas y poder obtener los datos necesarios la aplicación de los modelos es por ello que no se asentó en el documento.

De este modelo se obtuvieron series de datos de variación temporal de los niveles del agua, desde una condición permanente hasta el paso del flujo transitorio, producto del hidrograma que consideró en la frontera izquierda

A continuación se muestra una tabla con los datos geométricos de los de los cauces que se utilizaron en las pruebas numéricas.

Escenario	Longitud (m)	Ancho (m)	Rugosidad (n)	Pendiente (S <sub>o</sub> )	Caudal(Q) (m <sup>3</sup> /s)	Tiempo de simulación (s)	Talud (m)	Courant (Cr)
<b>Rio</b>	2000	100	0.014	0.0001	300	480	1.5	1.0
<b>Canal de Riego</b>	1000	15	0.014	0.0001	30	250	1.5	1.0
<b>Canal de Riego</b>	400	1.5	0.014	0.0001	1.5	150	1.5	1.0
<b>Canal de Riego</b>	100	1.5	0.014	0.0001	1.5	150	1.5	1.0

Tabla 4.1. Ilustración de datos de las pruebas realizadas

### 4.1. Condiciones de frontera para las pruebas transitorias

Las pruebas se realizaron a diferentes intervalos de discretización y en el MNSV se consideró la condición menos difusiva que tiene para un número de Courant igual a 1.0.



En la aplicación de los modelos M-I y M-II se evaluaron diferentes condiciones de aproximación en la evaluación de las derivadas  $A_t$ ,  $A_x$ ,  $R_m$  y  $A_m$  (ecuaciones 3.4, 3.5 y 3.6), y estas se muestran en la tabla siguiente:

Modelo de discretización	Factor peso espacial ( $\psi$ )	Factor de peso temporal ( $\theta$ )
Box-Scheme	0.5	0.6
Crank-Nicolson	0.0	0.5
Explícito	0.0	0.0
Implícito	0.0	1.0

Tabla 4.2. Modelos discretos en función del factor de peso temporal y espacial

En las pruebas se verificaron las estimaciones de gasto con los cuatro métodos indicados en la tabla 4.2, con el fin de establecer la influencia del centrado de la derivada espacial y temporal en la estimación del gasto.

En la evaluación de los resultados se consideraron los siguientes criterios de error:

1. Error de medida, diferencia entre un valor medido de una magnitud y un valor de referencia.
2. Error sistemático de medida, componente del error de medida que, en mediciones repetidas, permanece constante o varía de manera predecible.
3. Error aleatorio, componente del error de medida que, en mediciones repetidas varía de manera impredecible.

Para evaluar el error aleatorio en las pruebas se adiciono un ruido blanco aleatorio a los datos obtenidos del MNSV. Con este procedimiento se evaluó el efecto local de variación de nivel, que durante el paso de una avenida es muy significativo, con lo cual se intenta adquirir un resultado lo más cercano a la realidad. El ruido blanco se generó con una serie de números aleatorios con media cero y una desviación estándar del tamaño de error de precisión del equipo para medir el nivel, entonces:

$$y_i = \hat{y}_i + \sigma x_i \tag{4.1}$$

donde  $y_i$  es el valor del nivel considerando la variabilidad en la estimación del nivel;  $\hat{y}_i$  es el valor de nivel determinado por el modelo de simulación MNSV;  $\sigma$  desviación estándar para representar la precisión del equipo de medición y  $x_i$  números aleatorios con media cero y desviación estándar 1, basado en una función de distribución normal. La ecuación 4.1, se aplicó a todos los datos que alimentan al M-I y M-II, en cada una de las pruebas.



A continuación se muestran los resultados donde se aplica el M-I, solución basada en un análisis entre la derivada temporal de área y de gasto, considerando que el valor máximo de caudal y área suceden al mismo tiempo (máxima valor de una avenida), ecuación (3.20) y el M-II, solución discreta de MDCV por un método de diferencias finitas ecuación (3.33) para la solución de flujos transitorios (crecientes de avenidas).

#### 4.2 Prueba 1, flujo en un cauce de 2000 m de longitud

Descripción del cauce:

Rio de sección transversal uniforme con una longitud de 2000 m, con un ancho de 100 m, rugosidad de Manning de 0.014, pendiente uniforme de 0.0001, talud de 1.5 m y conduce un caudal de 300 m<sup>3</sup>/s, con un tiempo de simulación de 480 s.

En la condición de frontera se utilizó el hidrograma con un caudal pico de 450 m<sup>3</sup>/s, como se muestra en la lámina 4.1.

Los resultados para esta prueba se muestran en las láminas 1-9, y 10-12, y en la tabla 4.3.

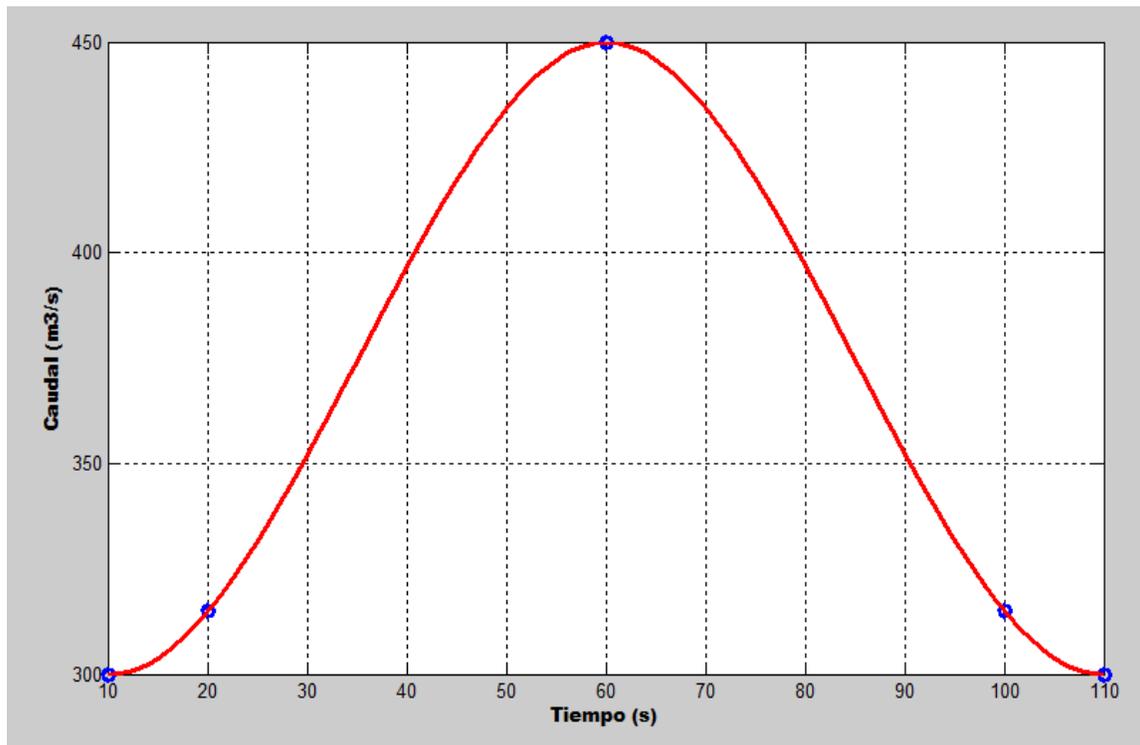


Lámina 4.1 Hidrograma de 450 m<sup>3</sup>/s para la prueba 1.

Estimación del caudal con M-I para la Prueba 1.

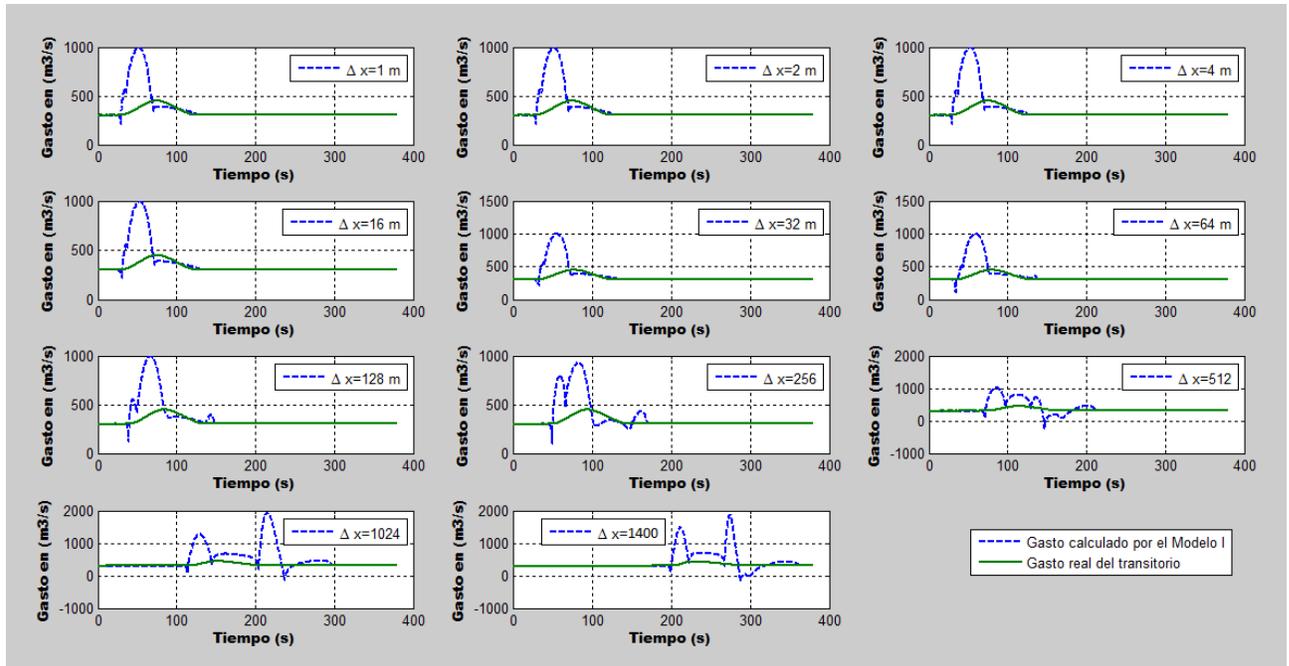


Lámina 4.2 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 1 y M-I, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-I.

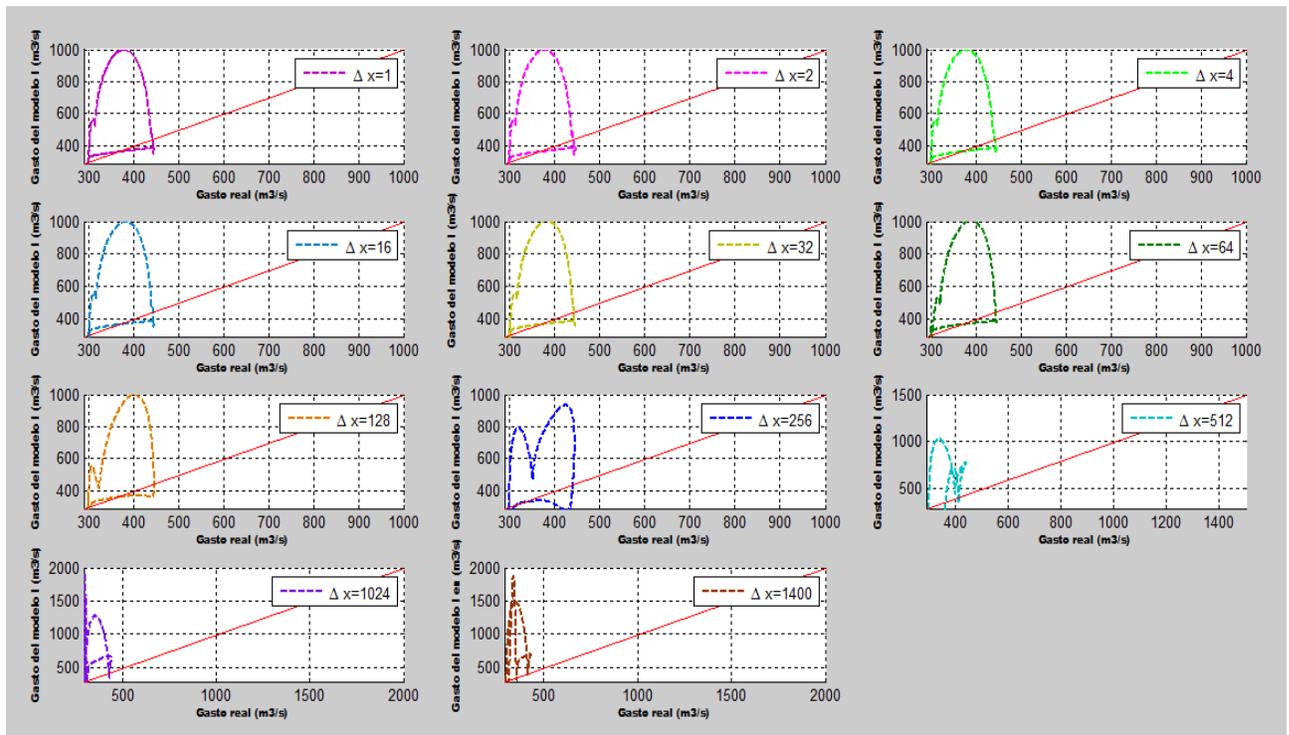


Lámina 4.3 Error de M-I en la determinación del caudal en la prueba 1, en distintas ubicaciones del sensor.

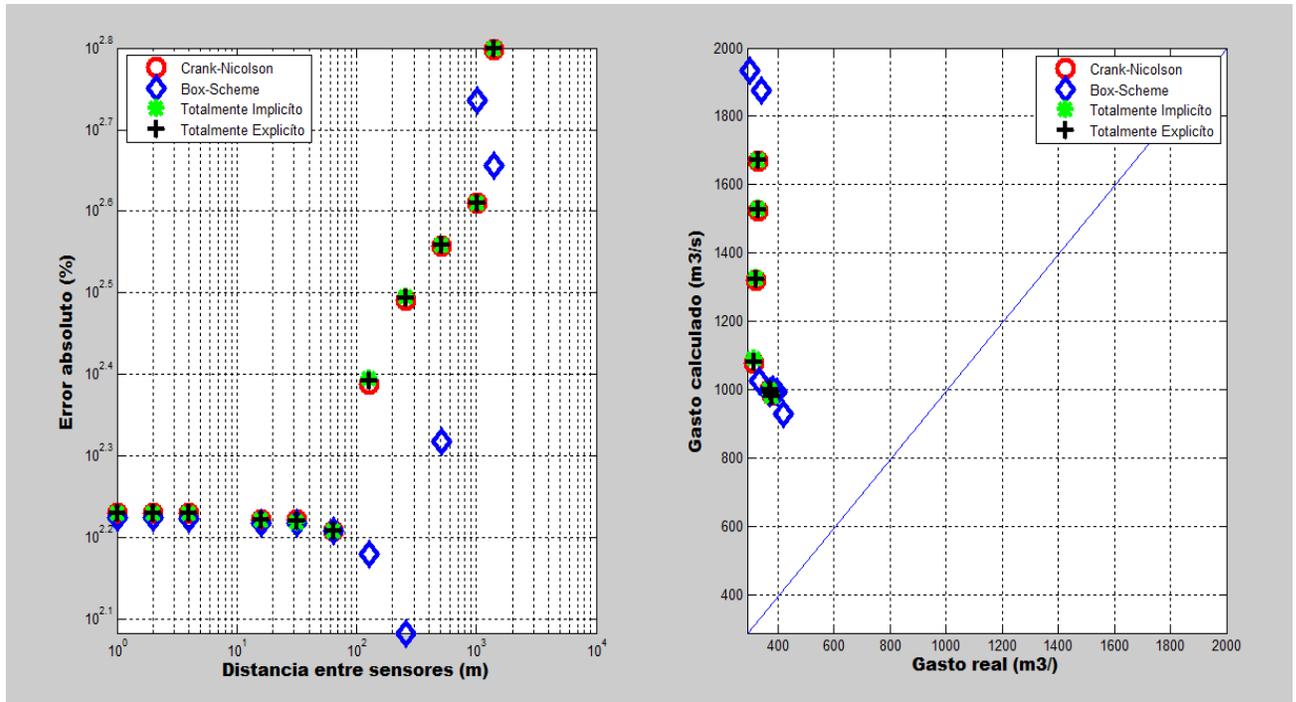


Lámina 4.4 Error máximo absoluto (en %) de M-I para la prueba 1. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito.

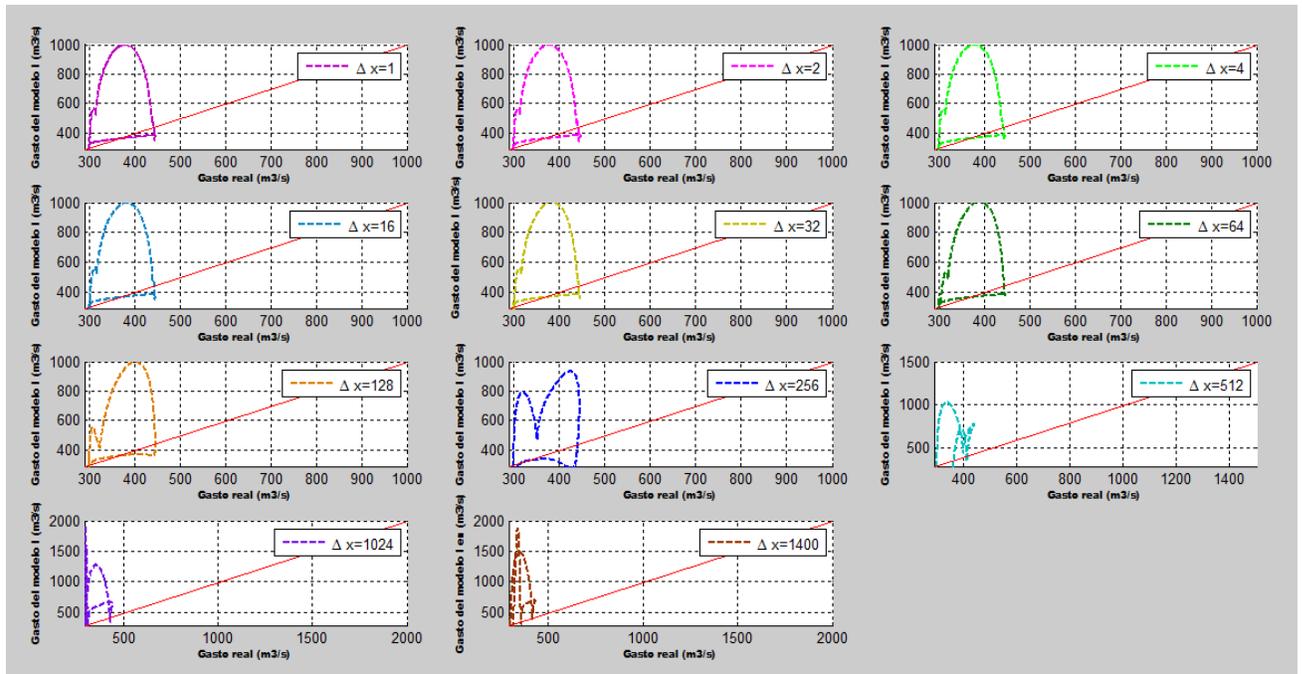


Lámina 4.5 Relación entre el caudal real y estimado con M-I, para la prueba 1, en distintas ubicaciones del sensor.



Resultados de la Prueba 1 para M-II.

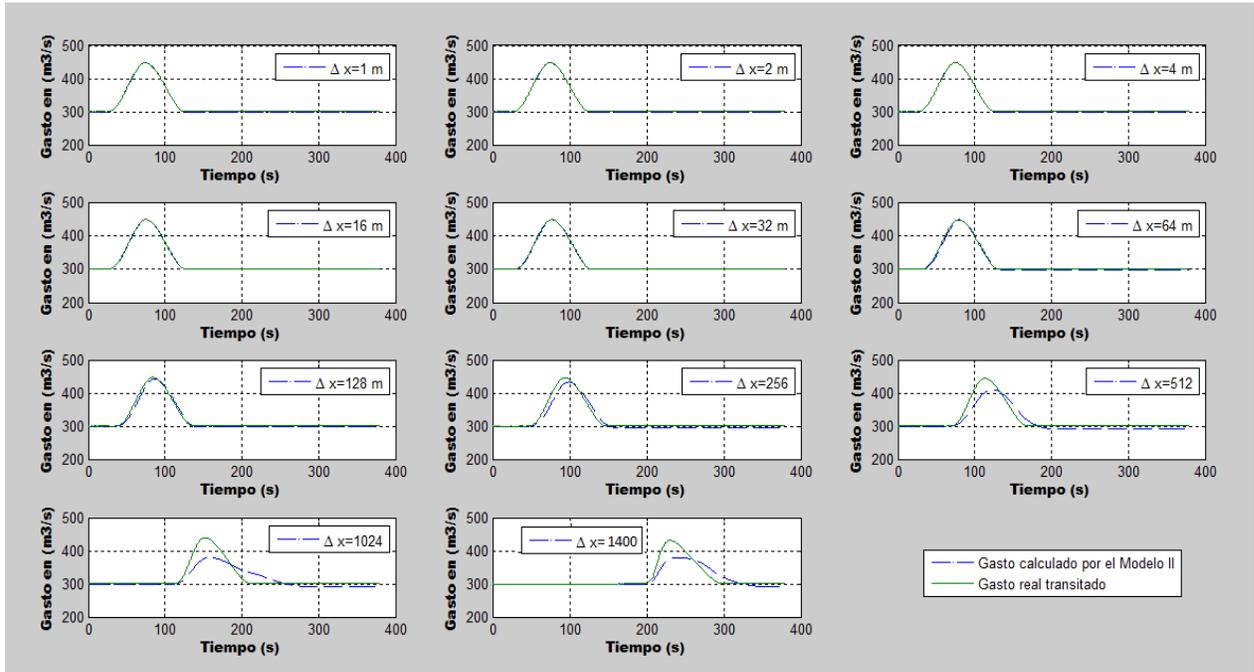


Lámina 4.6 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 1 y M-II, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-II.

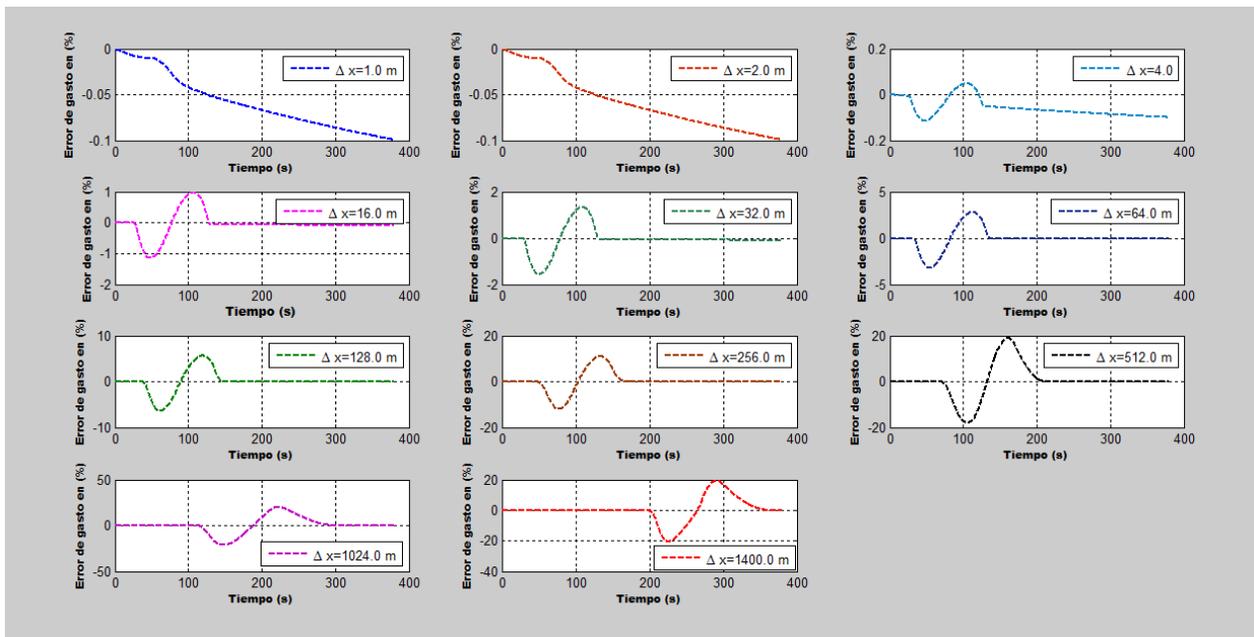


Lámina 4.7 Error de M-II en la determinación del caudal en la prueba 1, en distintas ubicaciones del sensor.

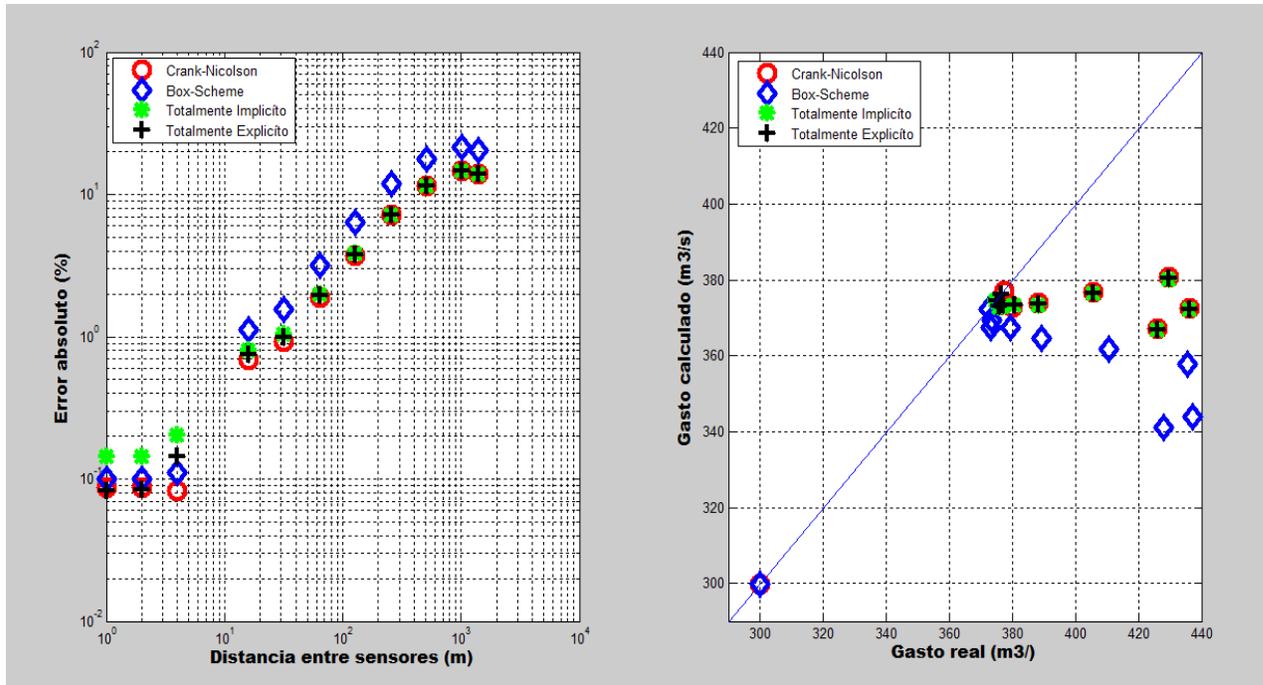


Lámina 4.8 Error máximo absoluto en (%) M-II, para la prueba I. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Implícito y los puntos negros por el método Explícito.

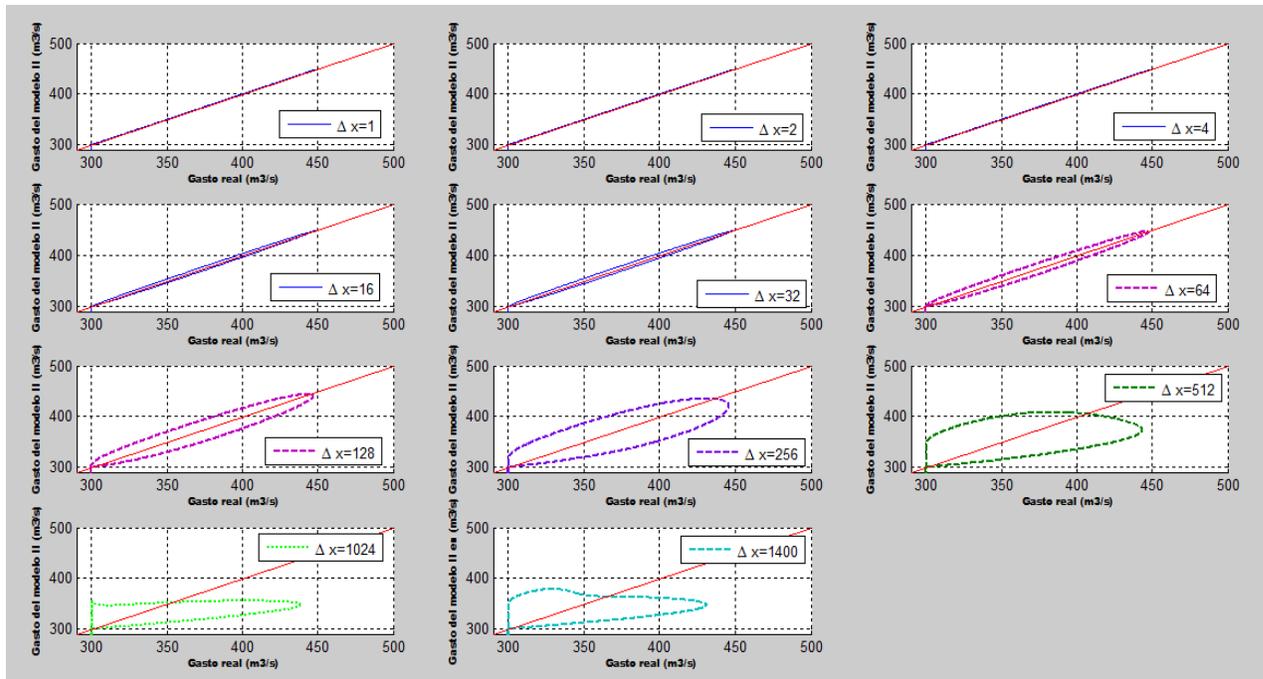


Lámina 4.9 Relación entre el caudal real y estimado con M-II, para la prueba 1, en distintas ubicaciones del sensor.



$\Delta x$ (m)	Error entre caudal real MNSV y estimado (%)							
	Box-Scheme		Crank-Nicolson		Totalmente Explicito		Totalmente Implícito	
	M-I	M-II	M-I	M-II	M-I	M-II	M-I	M-II
1	167.59	0.09	169.83	0.08	169.71	0.14	169.95	0.08
2	167.67	0.09	169.9	0.08	169.78	0.14	170.02	0.08
4	167.32	0.11	169.72	0.14	169.59	0.2	169.83	0.8
16	165.23	1.12	166.52	0.76	166.38	0.8	166.65	0.8
32	165.31	1.55	166.24	0.99	165.74	1.04	166.38	0.93
64	161.68	3.15	161.45	1.94	161.29	2	161.62	1.89
128	151.24	6.31	246.55	3.8	248.04	3.86	244.67	3.74
256	121.07	11.93	311.27	7.19	312.38	7.24	310.16	7.13
512	207.62	17.85	361.52	11.45	362.15	11.48	360.88	11.42
1024	544.43	21.38	407.39	14.05	407.72	14.67	407.05	14.63
1400	453.59	20.29	629.82	13.89	631.31	13.91	628.35	13.87

Tabla 4.3 Resumen del error máximo en la estimación de caudal en la prueba 1.

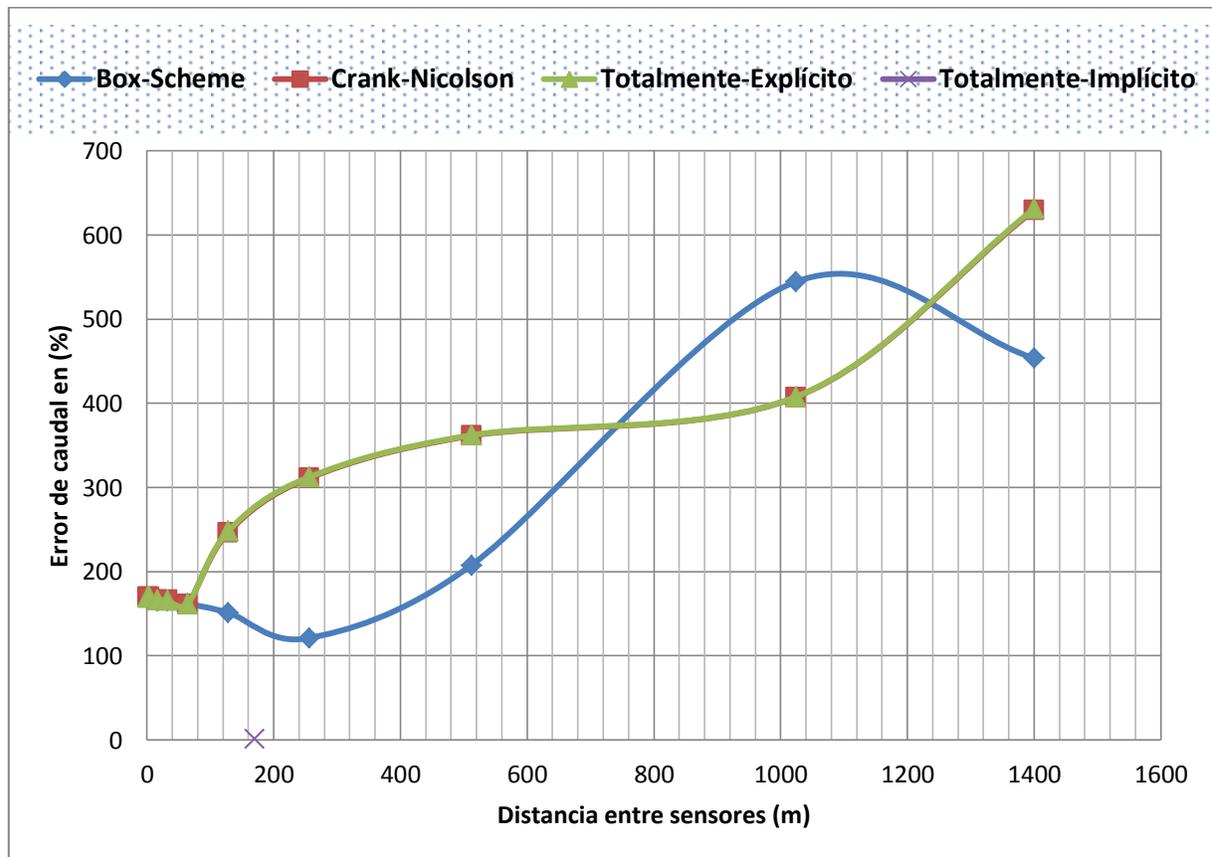


Lámina 4.10 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para M-I, prueba 1.

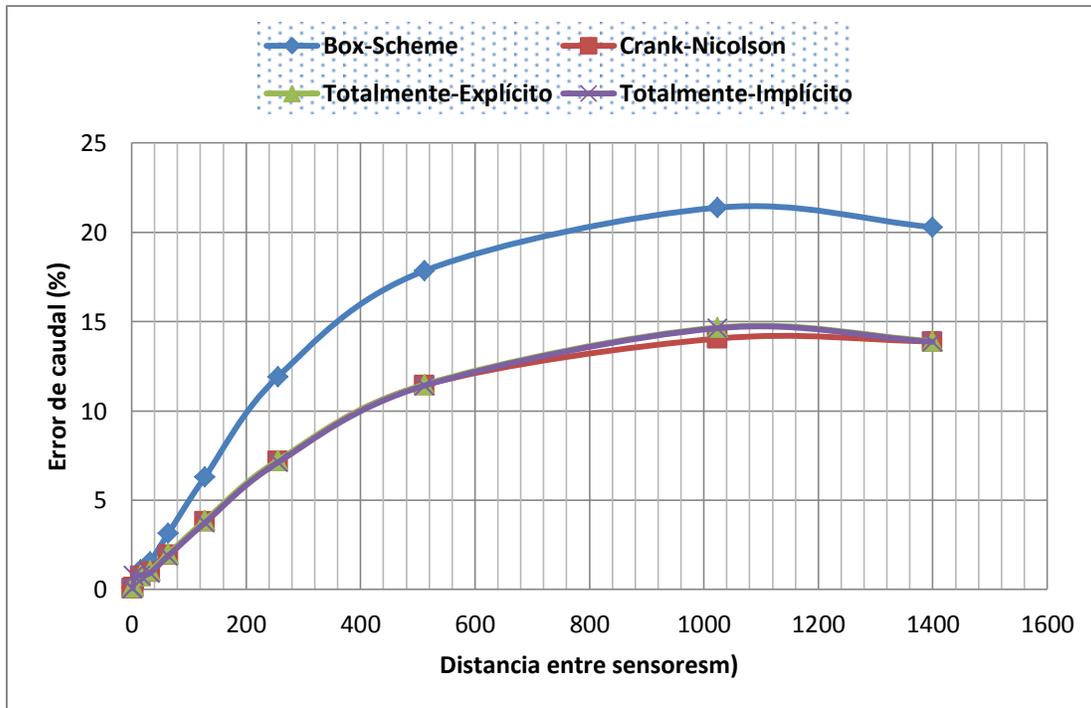


Lámina 4.11 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para M-II, prueba 1.

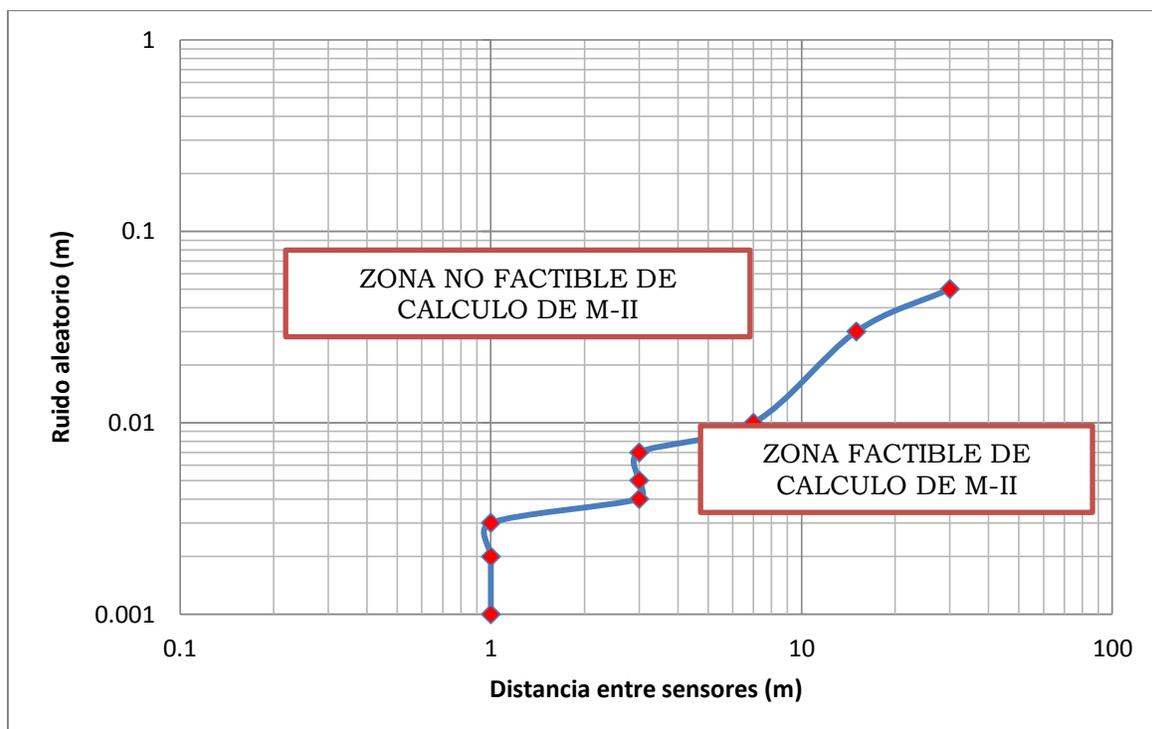


Lámina 4.12 Error aleatorio con el modelo de ruido blanco  $p \leq 0.66$  para el M-II, prueba 1.



### 4.3 Prueba 2, aplicación a un canal de riego de 1000 m

#### Descripción del canal

Canal trapecial de riego, sección transversal uniforme con una longitud de 1000 m, el cual se subdivide en cinco tramos de 200 m, contiene un ancho de 15 m, rugosidad de Manning de 0.014, pendiente uniforme de 0.0001 y conduce un caudal de  $30 \text{ m}^3/\text{s}$ , con un tiempo de simulación de 150 s y Courant de 1.

Se utilizó el siguiente hidrograma unitario de entrada de  $45 \text{ m}^3/\text{s}$  de caudal pico.

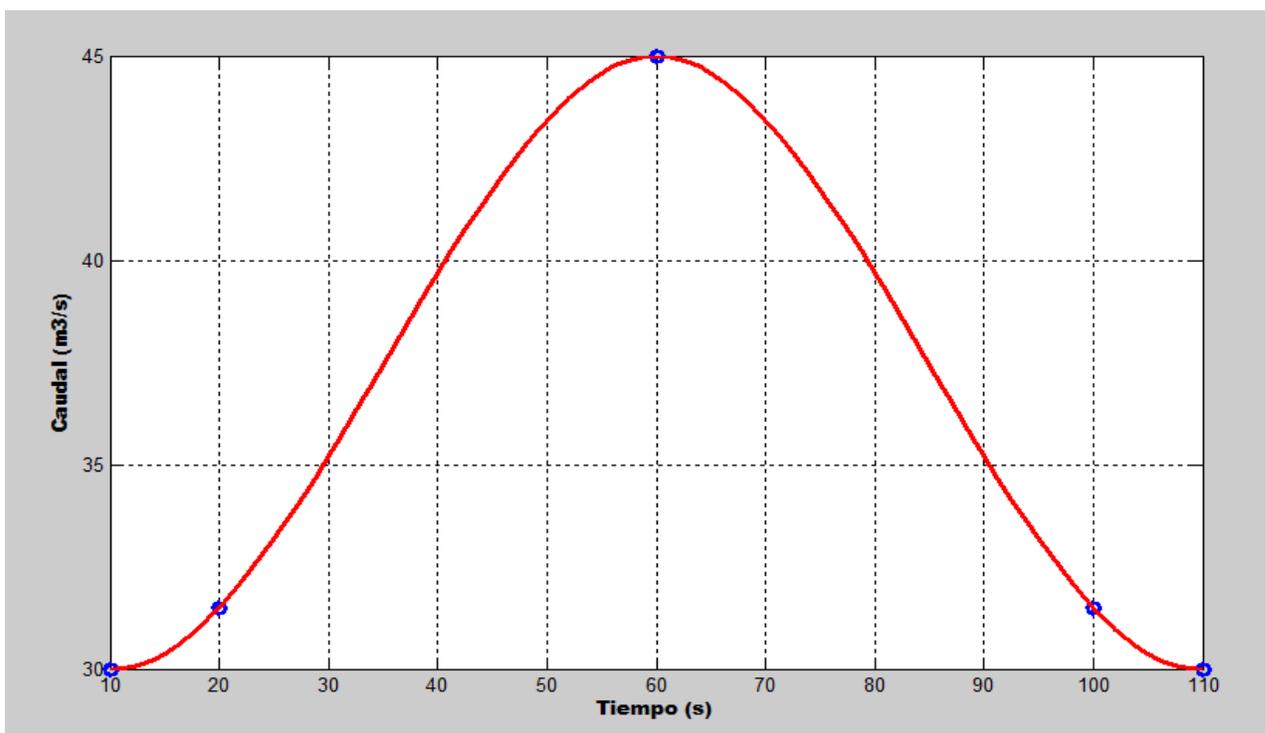


Lámina 4.13 Hidrograma unitario de  $45 \text{ m}^3/\text{s}$  para la prueba 2.

Resultados de la Prueba 2 para el M-I.

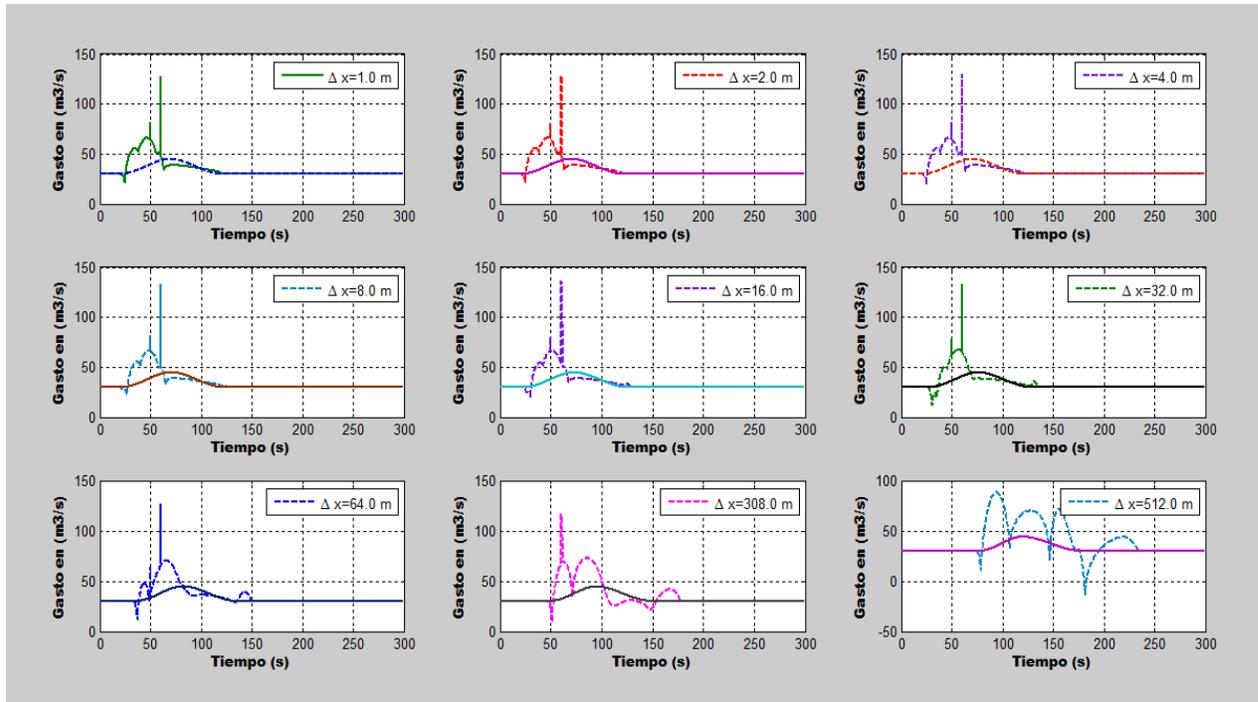


Lámina 4.14 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 2 y M-I, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-I.

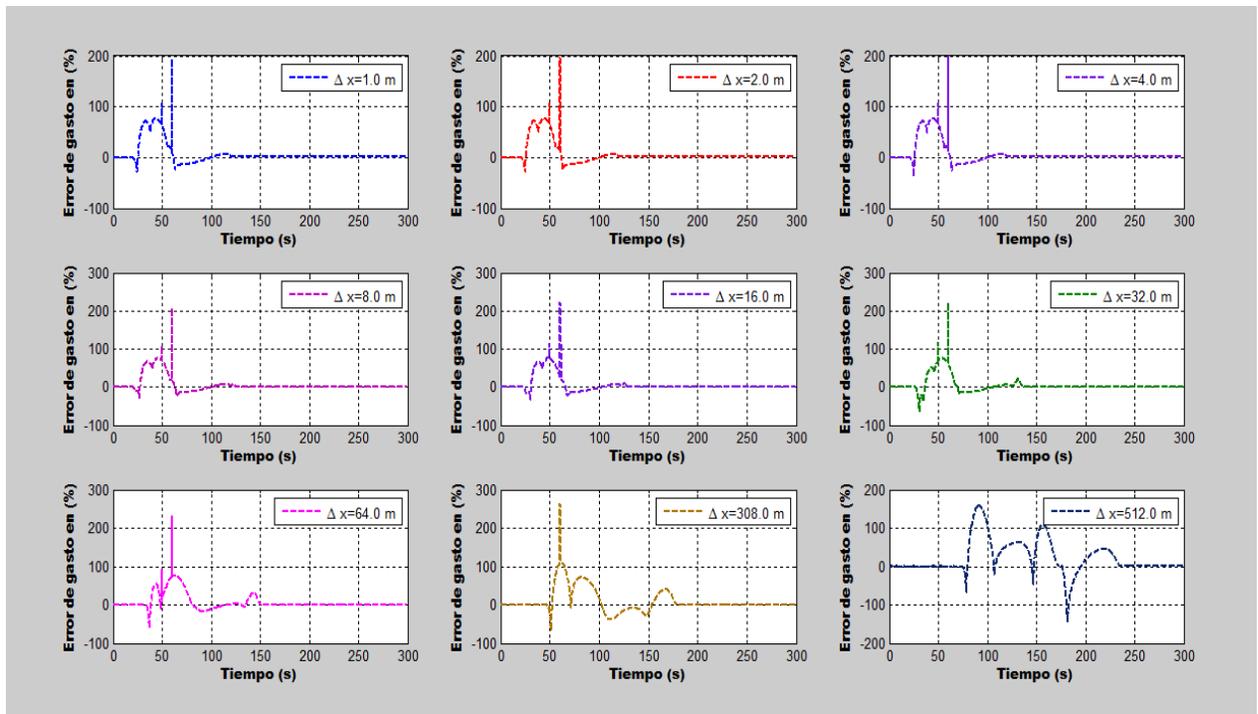


Lámina 4.15 Error de M-I en la determinación del caudal en la prueba 2, en distintas ubicaciones del sensor.

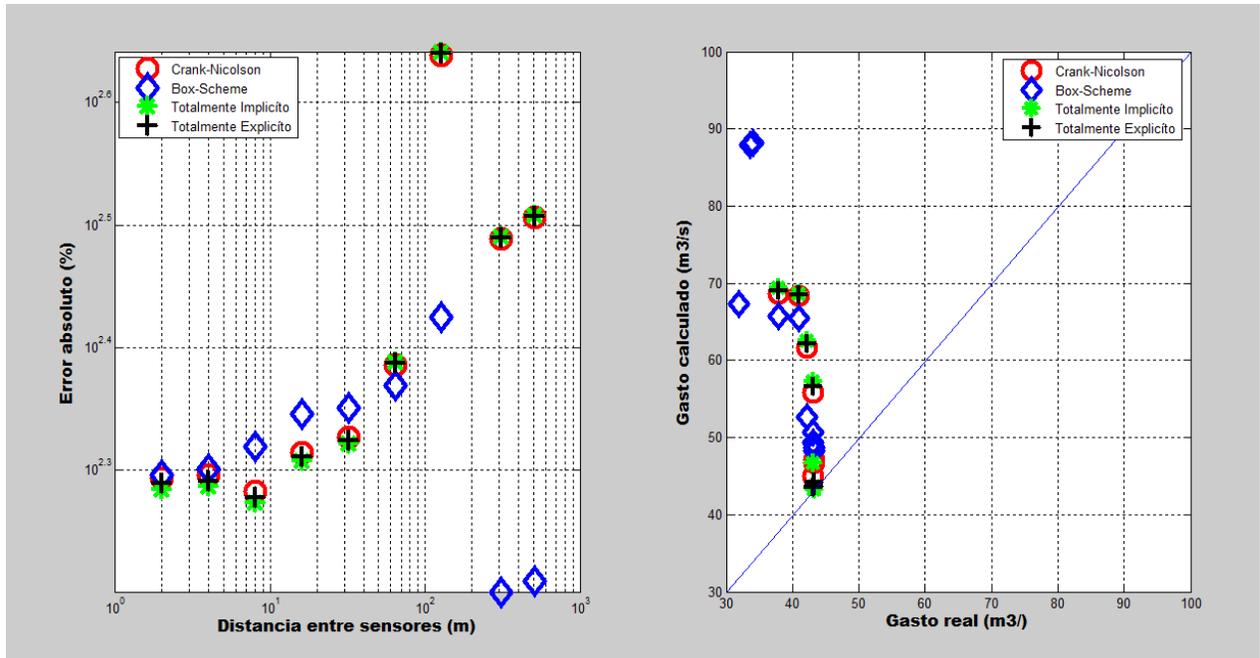


Lámina 4.16 Error máximo absoluto en (%) M-I para la prueba 2. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito.

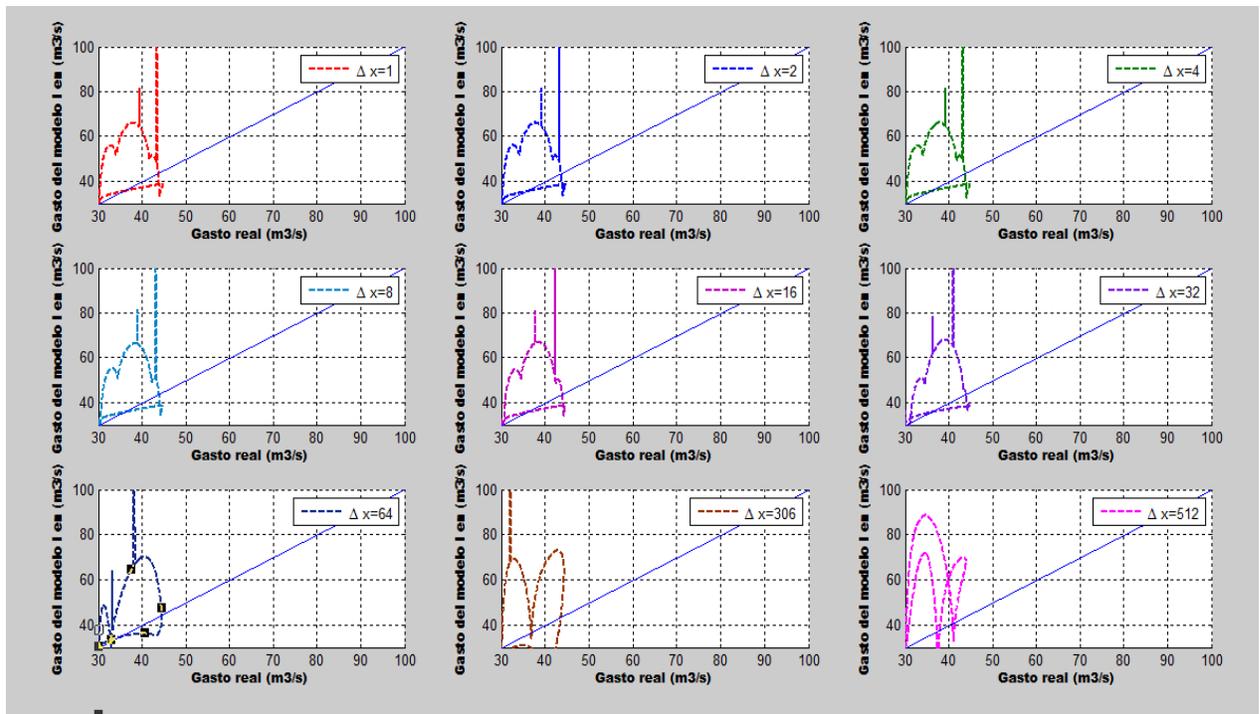


Lámina 4.17 Relación entre el caudal real y estimado con M-I, para la prueba 2, en distintas ubicaciones del sensor.



Resultados de la Prueba 1 para el M-II.

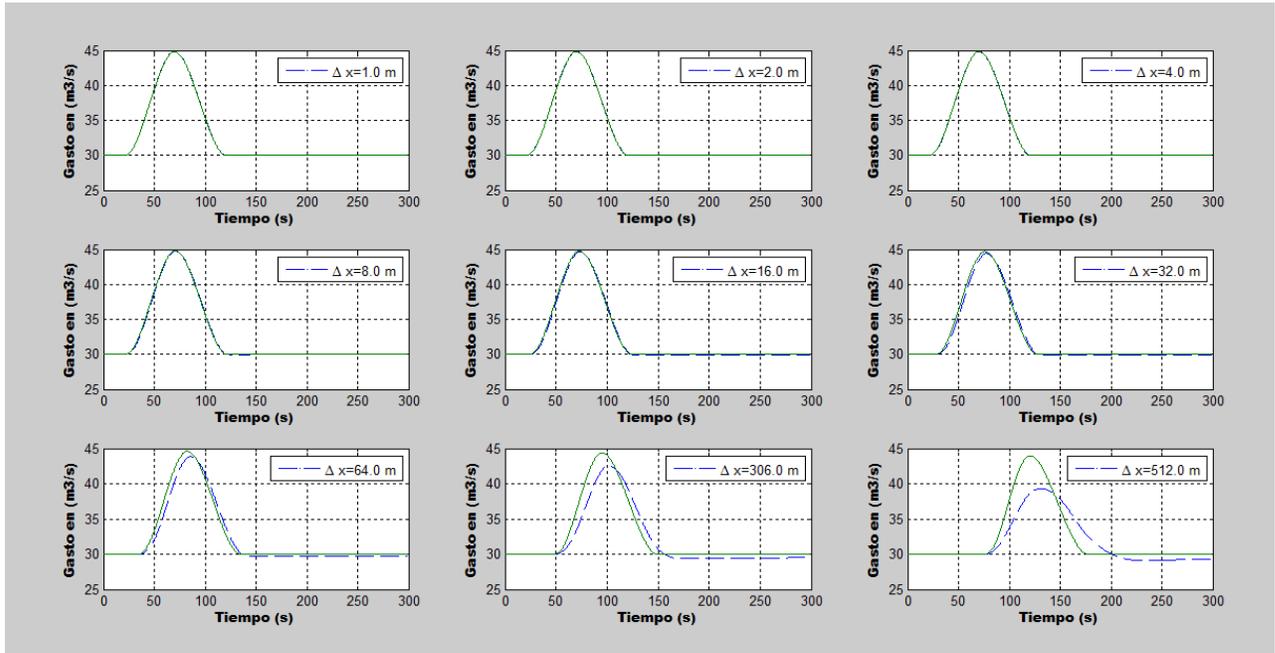


Lámina 4.18 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 2 y M-II, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-II.

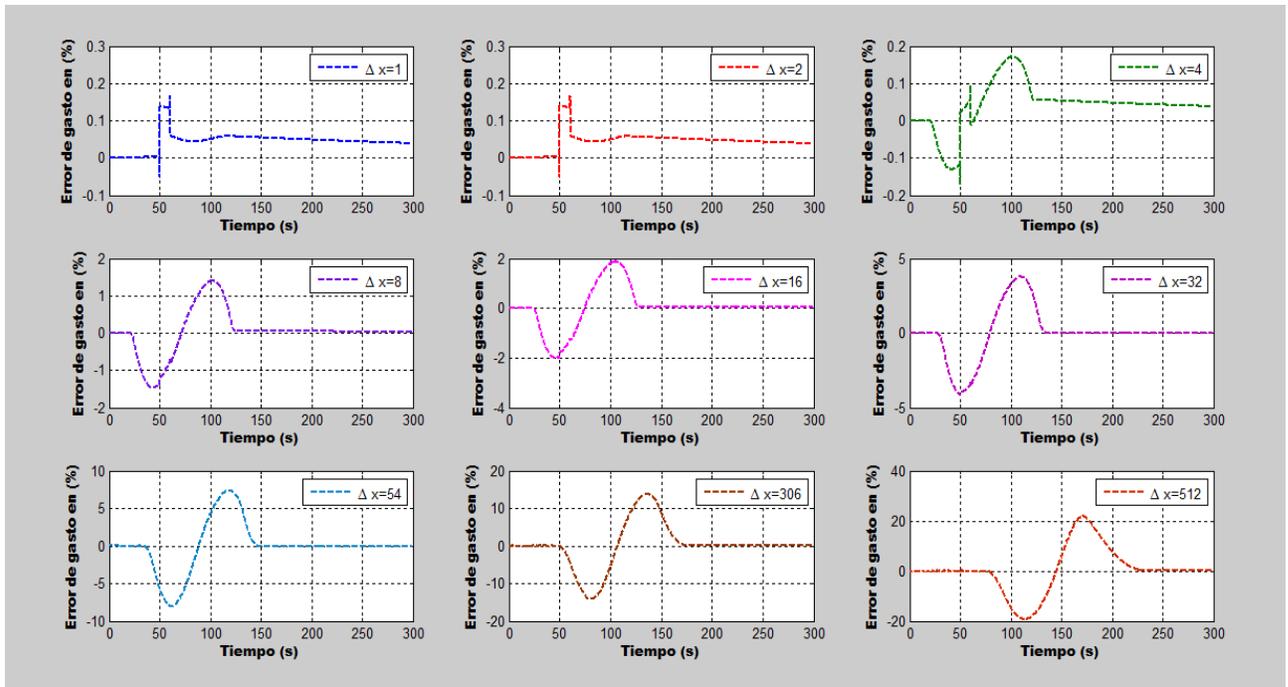


Lámina 4.19 Error de M-II en la determinación del caudal en la prueba 2, en distintas ubicaciones del sensor.

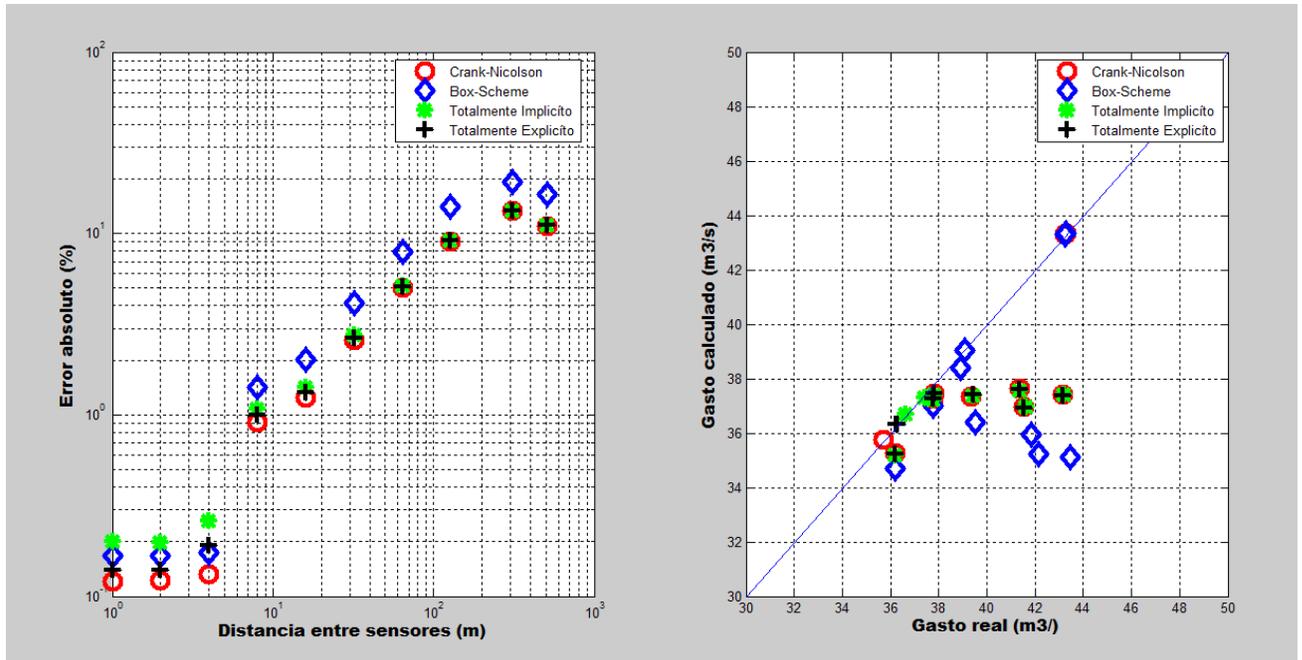


Lámina 4.20 Error máximo absoluto en (%) M-II, para la prueba 2. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito.

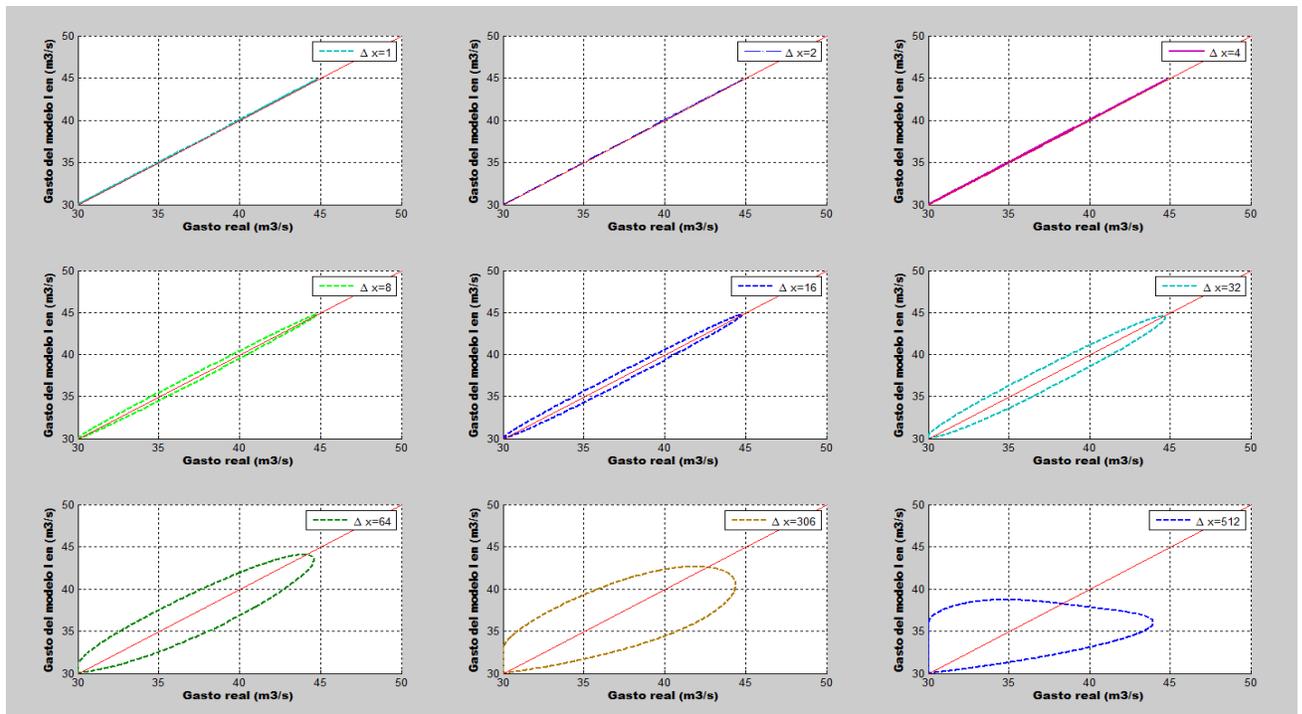


Lámina 4.21 Relación entre el caudal real y estimado con M-II, para la prueba 2, en distintas ubicaciones del sensor.



Delta x (m)	Error entre caudal real MNSV y estimado (%)							
	Box-Scheme		Crank-Nicolson		Totalmente Explícito		Totalmente Implícito	
	M-I	M-II	M-I	M-II	M-I	M-II	M-I	M-II
1	190.53	0.16	192.67	0.13	195.73	0.19	194.81	0.12
2	192.51	0.16	194.63	0.14	197.64	0.19	196.74	0.12
4	193.44	0.17	195.52	0.19	200.17	0.26	197.74	0.13
8	187.69	1.41	189.64	0.99	208.45	1.07	191.59	0.91
16	202.98	2.00	204.61	1.33	221.64	1.41	206.25	1.25
32	209.97	4.14	211.60	2.66	224.37	2.74	212.03	2.58
64	244.16	7.95	243.97	5.09	233.84	5.17	243.22	5.03
306	437.77	14.08	436.29	9.09	265.79	9.16	434.82	9.03
512	309.28	19.21	308.79	13.35	158.83	13.36	308.29	13.31

Tabla 4.4 Error máximo en la estimación de caudal en la prueba 2.

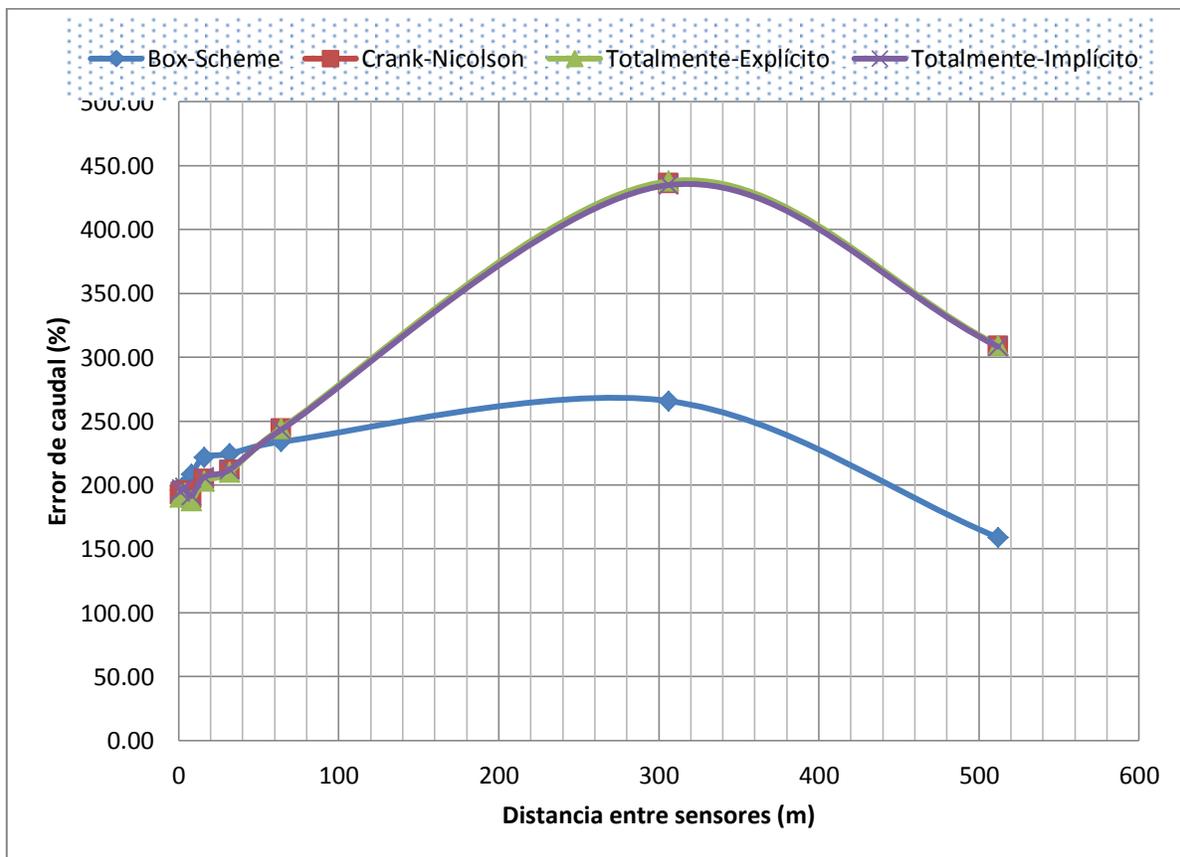


Lámina 4.22 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-I, prueba 2.

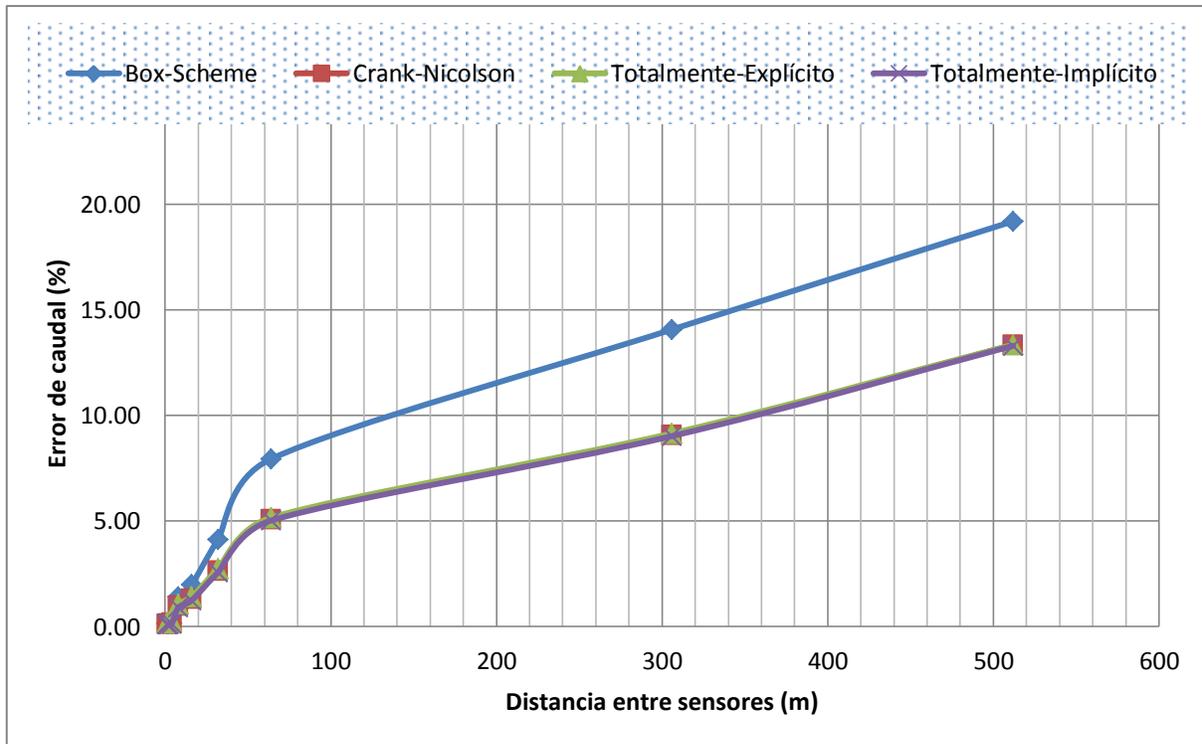


Lámina 4.23 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-II, prueba 2.

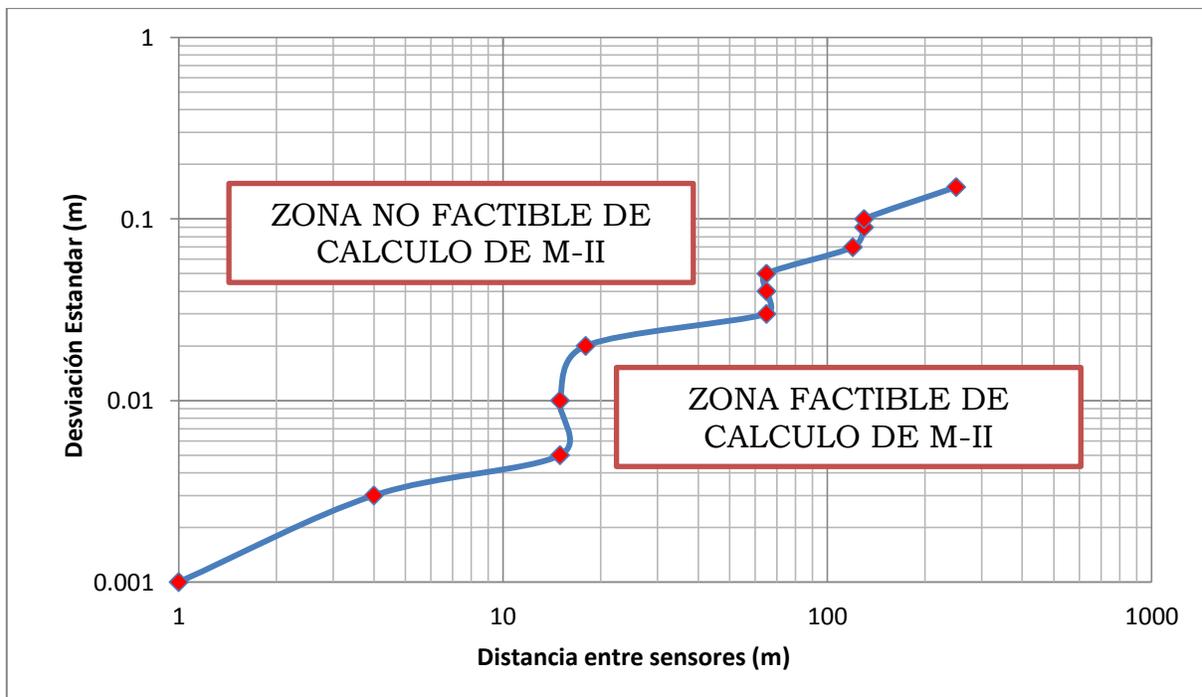


Lámina 4.24 Error aleatorio con el modelo de ruido blanco  $p \leq 0.66$  para el M-II, prueba 2.



#### 4.4 Prueba 3, aplicación a un canal de riego de 400 m

##### Descripción del canal

Canal trapecial de riego, sección transversal uniforme con una longitud de 400 m, contiene un ancho de 1.5 m, rugosidad de Manning de 0.014, pendiente uniforme de 0.0001 y conduce un caudal de 1.5 m<sup>3</sup>/s, con un tiempo de simulación de 150 s.

Se utilizó el siguiente hidrograma unitario de entrada de 2.25 m<sup>3</sup>/s de caudal pico.

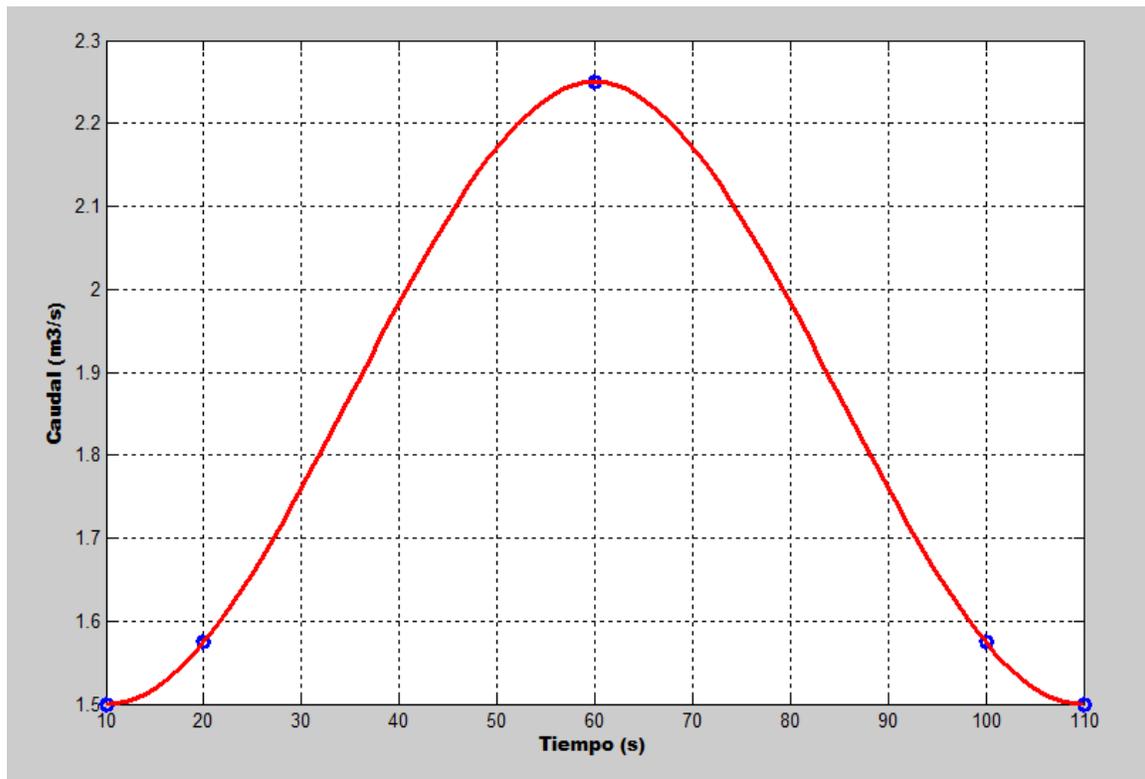


Lámina 4.25 Hidrograma unitario de 2.25 m<sup>3</sup>/s para la prueba 3



Resultados de la Prueba 3 para el M-I.

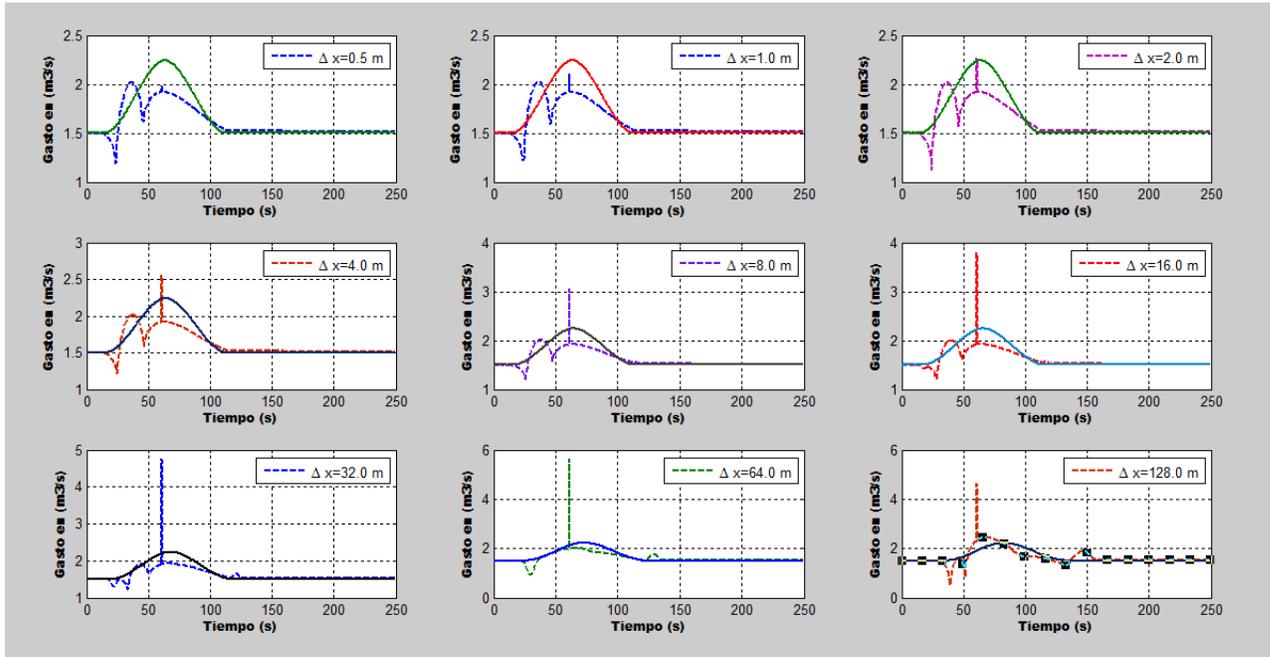


Lámina 4.26 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 3 y M-I, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-I.

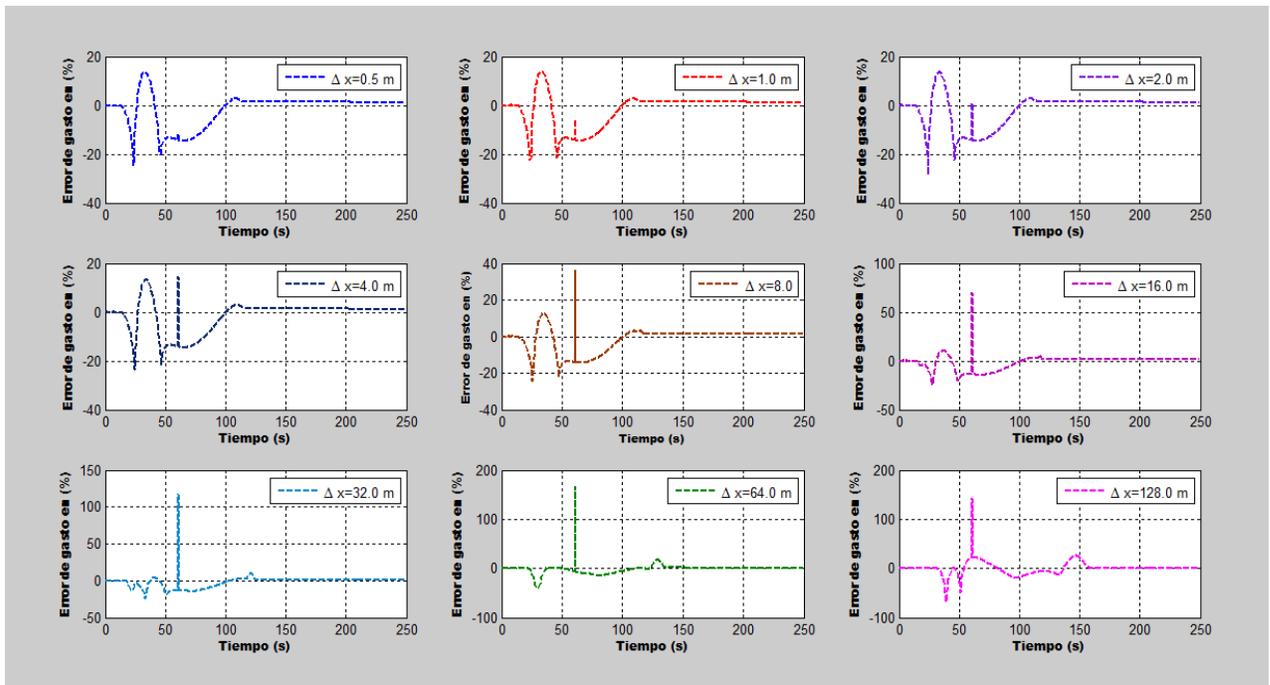


Lámina 4.27 Error de M-I en la determinación del caudal en la prueba 3, en distintas ubicaciones del sensor.

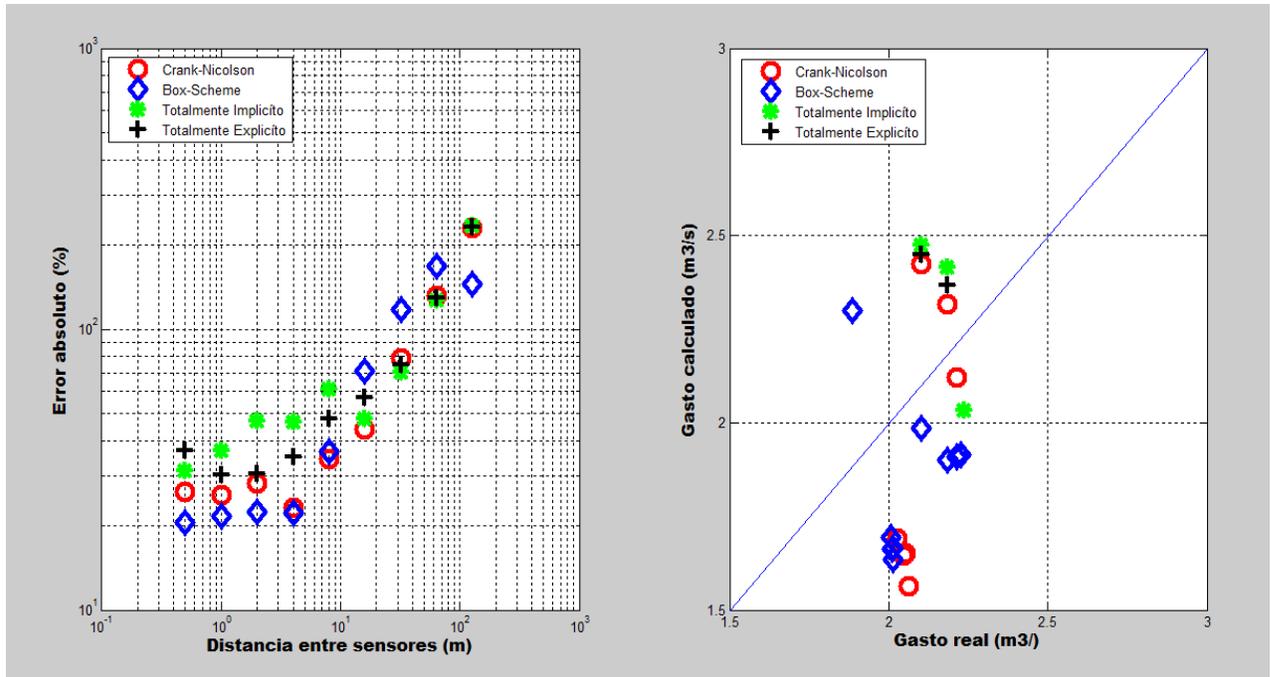


Lámina 4.28 Error máximo absoluto en (%) M-I, para la prueba 3. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito.

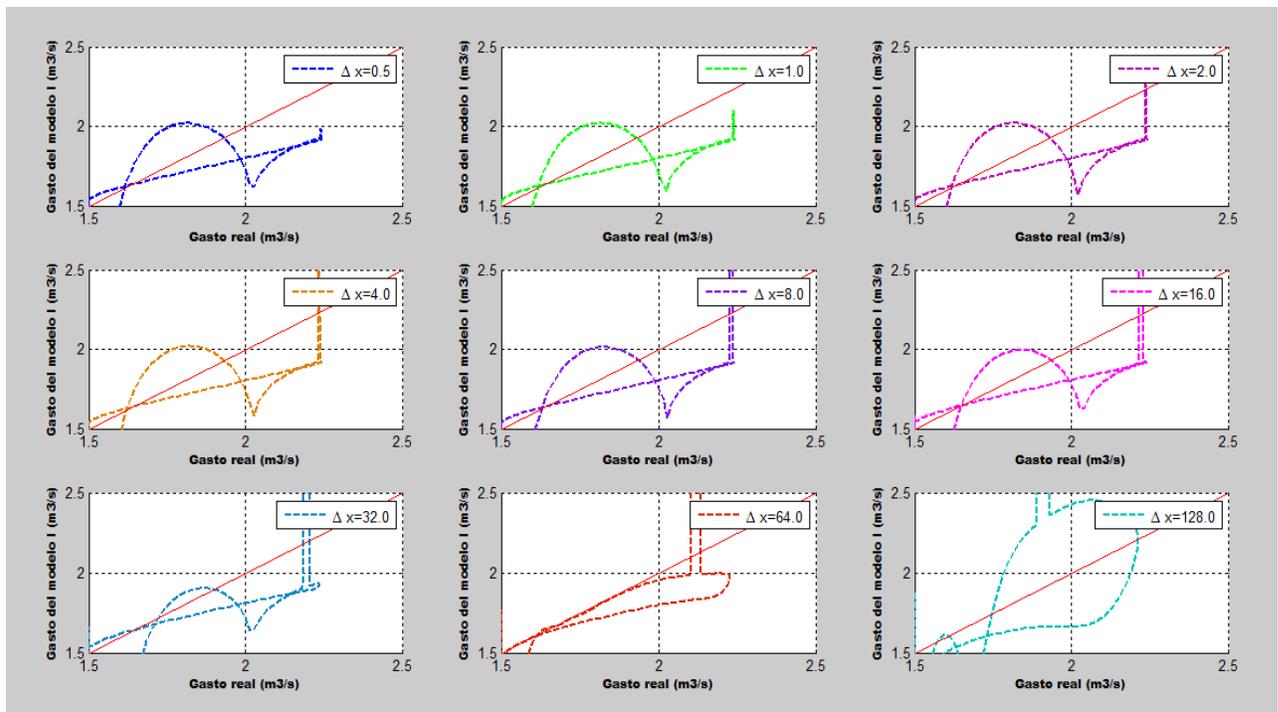


Lámina 4.29 Relación entre el caudal real y estimado con M-I, para la prueba 3, en distintas ubicaciones del sensor.



Resultados de la Prueba 3 para el M-II.

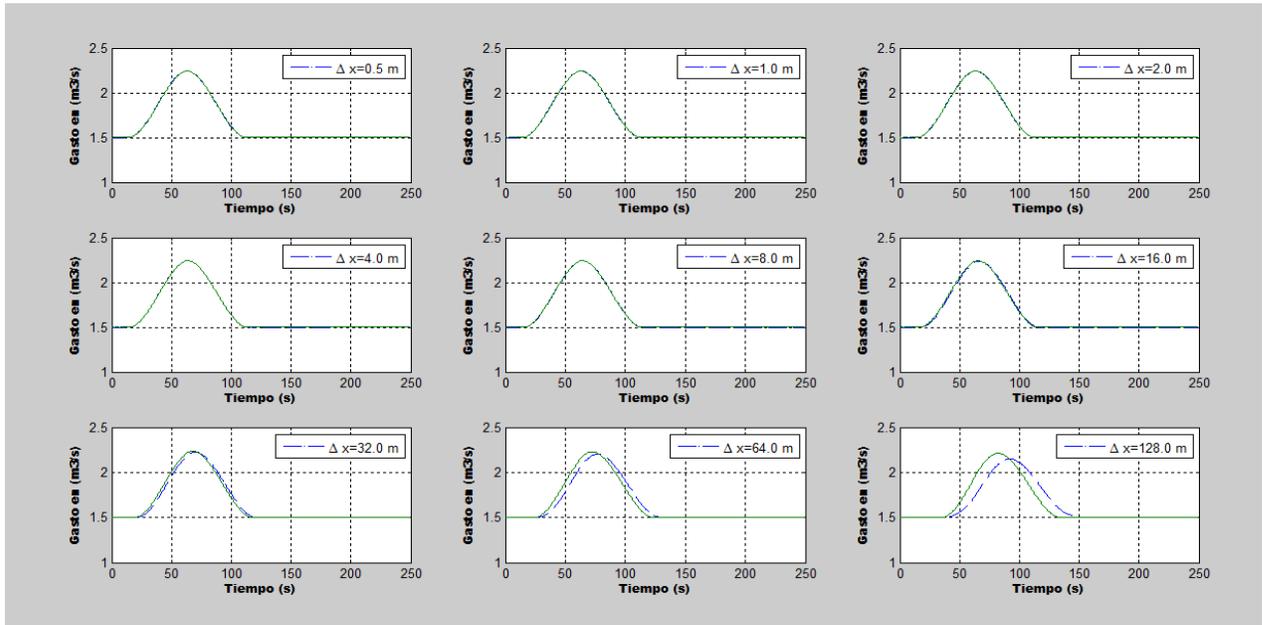


Lámina 4.30 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 3 y M-II, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-II.

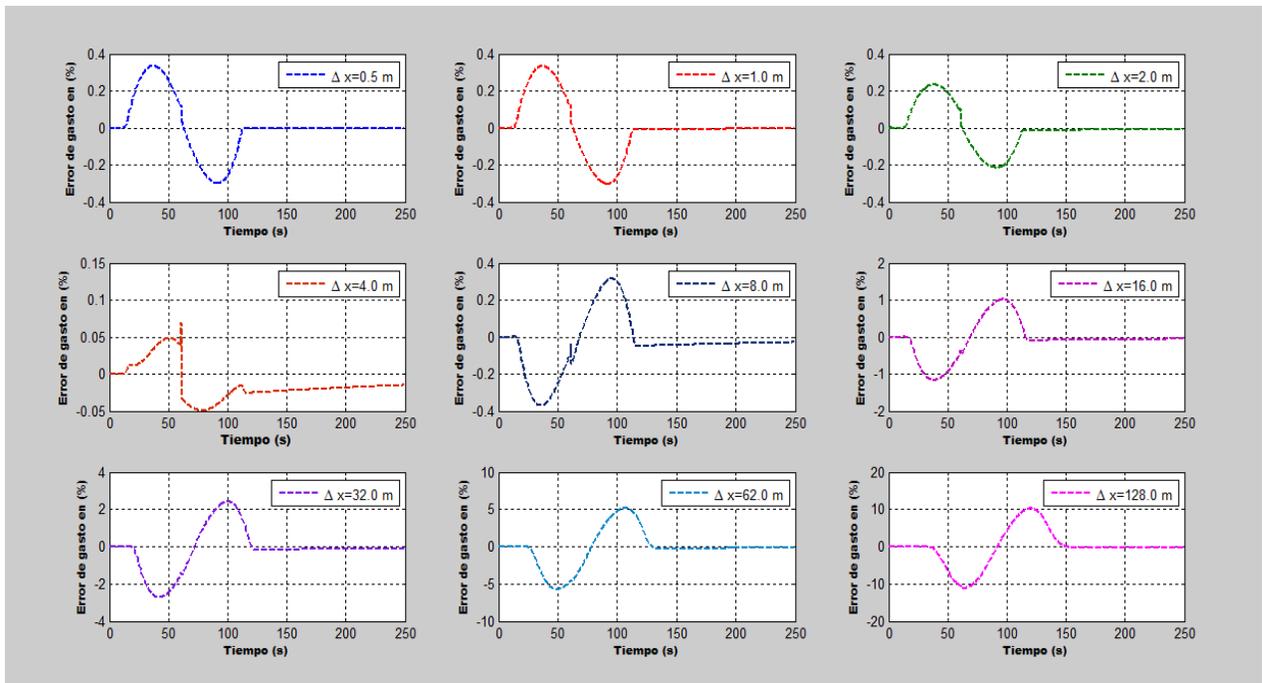


Lámina 4.31 Error de M-II en la determinación del caudal en la prueba 3, en distintas ubicaciones del sensor.

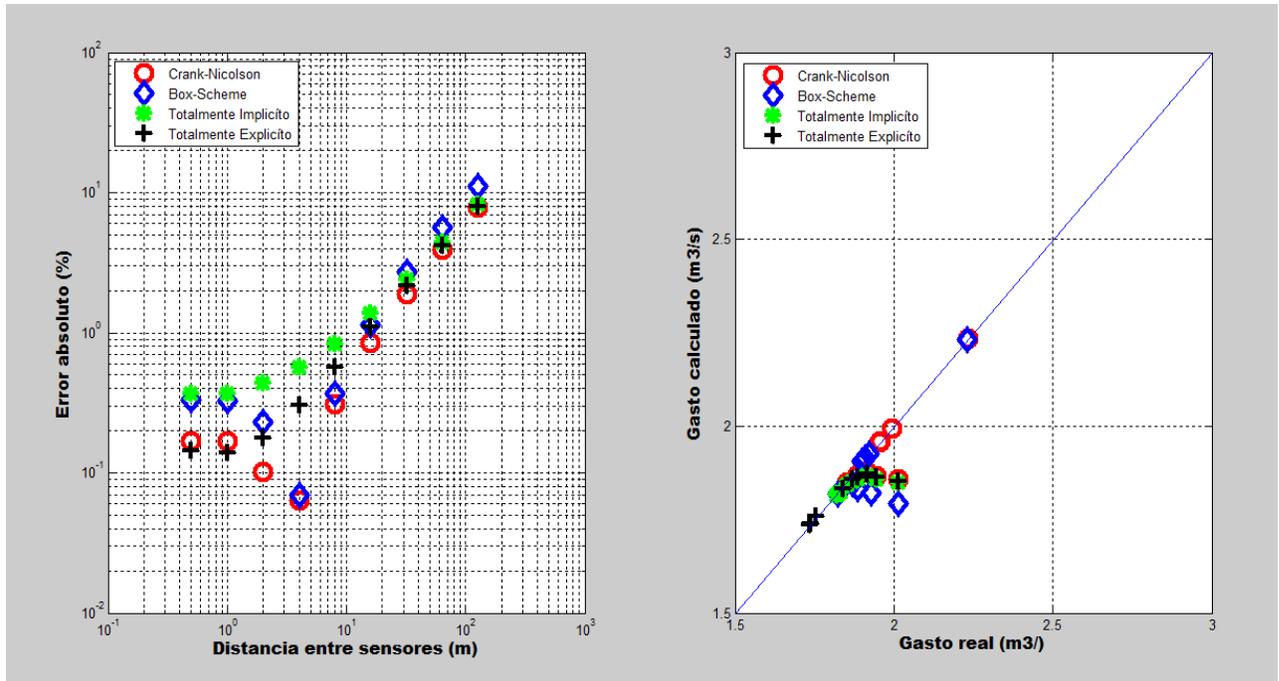


Lámina 4.32 Error máximo absoluto en (%) M-II, para la prueba 3. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito.

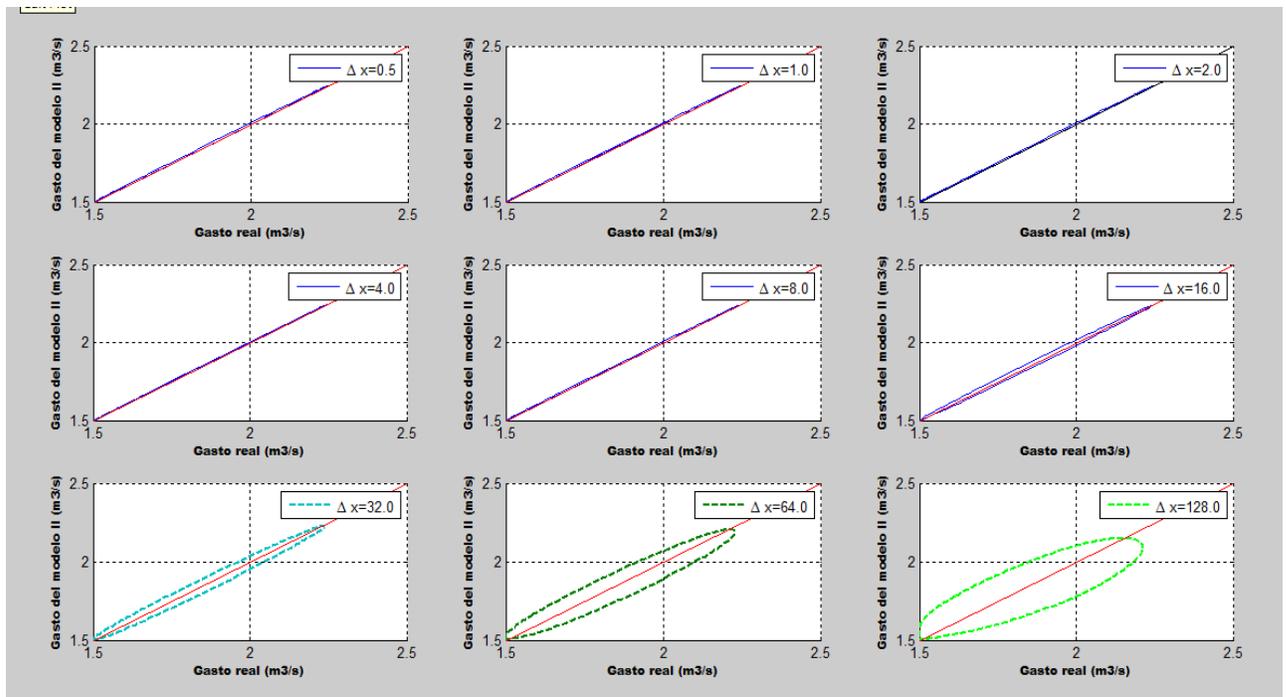


Lámina 4.33 Relación entre el caudal real y estimado con M-II, para la prueba 3, en distintas ubicaciones del sensor.



$\Delta x$ (m)	Error entre caudal real MNSV y estimado (%)							
	Box-Scheme		Crank-Nicolson		Totalmente Explicito		Totalmente Implícito	
	M-I	M-II	M-I	M-II	M-I	M-II	M-I	M-II
0.5	20.41	0.33	36.83	0.14	31.28	0.37	26.44	0.16
1	21.61	0.32	30.37	0.13	37.04	0.36	25.57	0.17
2	22.41	0.23	30.58	0.18	47.20	0.44	28.35	0.10
4	22.05	0.07	35.22	0.30	46.81	0.57	23.21	0.06
8	36.55	0.37	47.95	0.57	61.10	0.84	34.55	0.31
16	70.65	1.14	57.29	1.11	47.88	1.37	44.16	0.84
32	117.37	2.69	74.62	2.15	70.11	2.41	79.03	1.89
64	167.33	5.65	128.86	4.17	126.60	4.42	131.10	3.92
128	144.29	11.11	230.99	8.03	232.99	8.25	228.99	7.80

Tabla 4.5 Error máximo en la estimación de caudal en la Prueba 3.

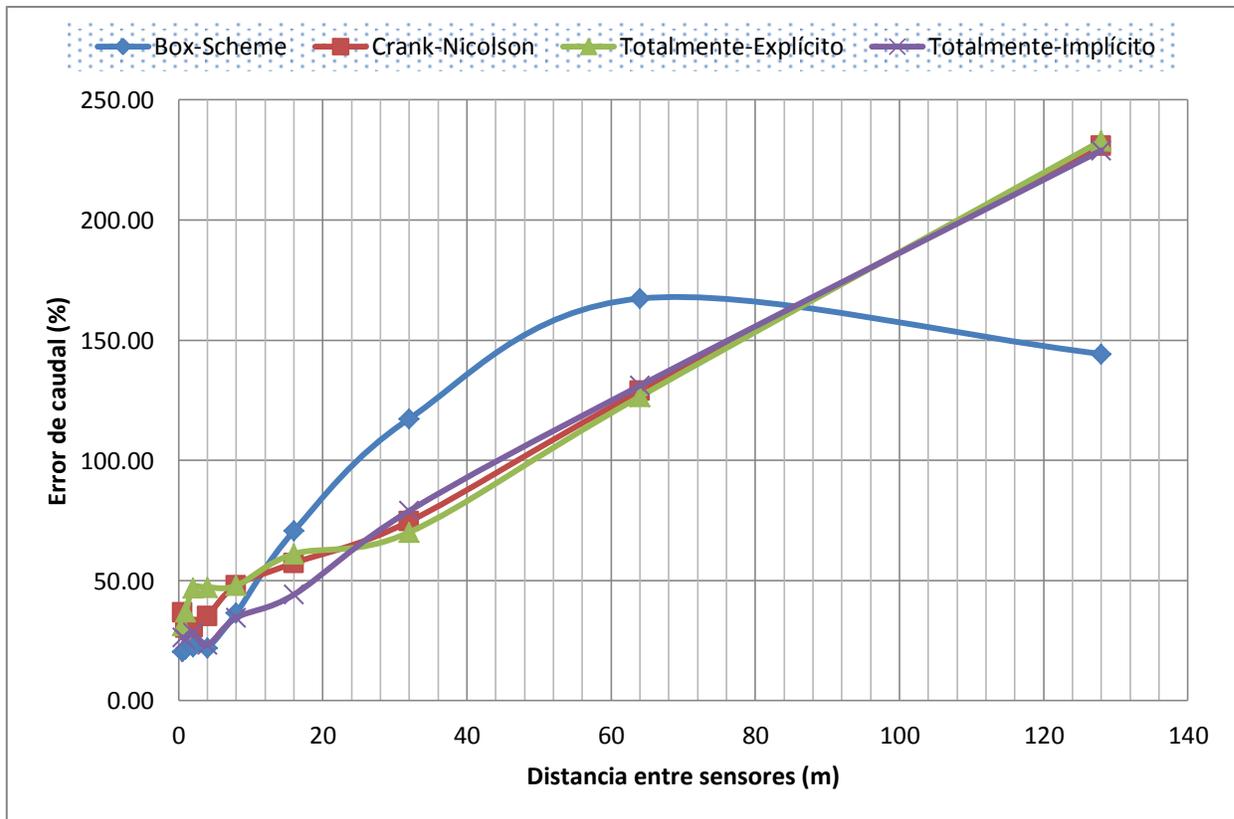


Lámina 4.34 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-I, prueba 3.

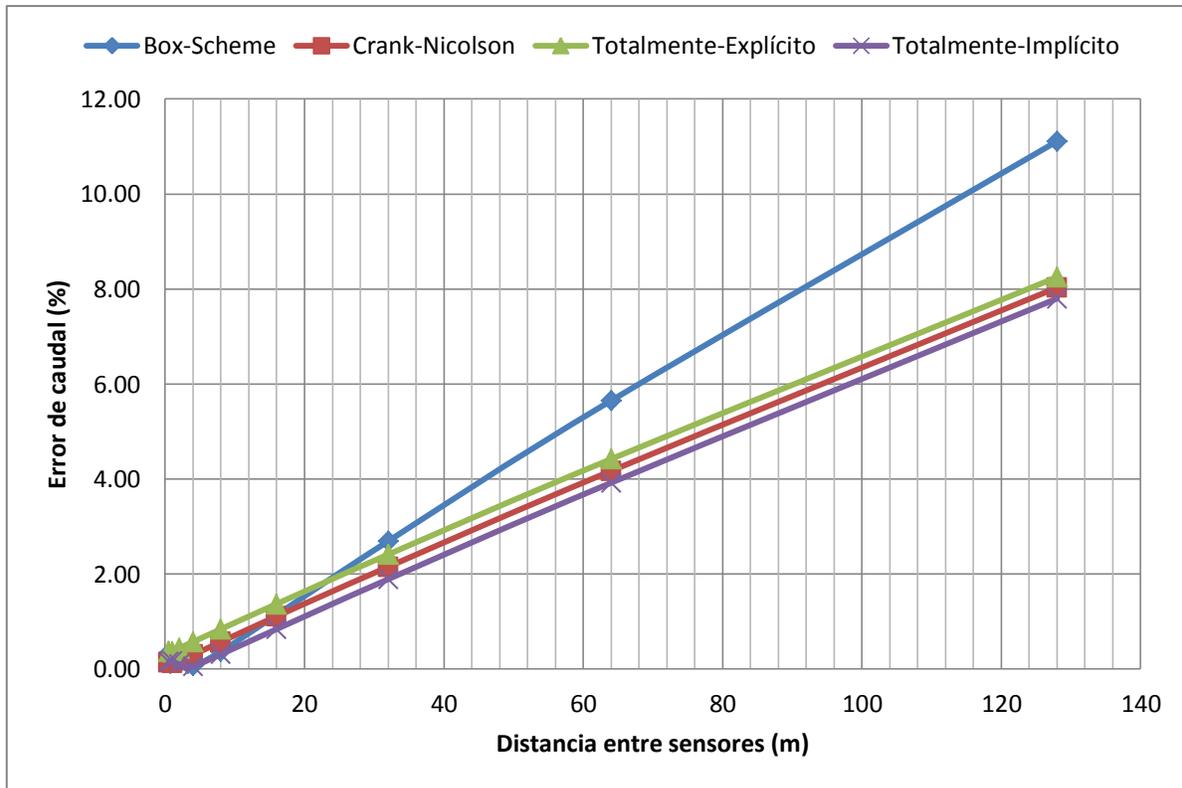


Lámina 4.35 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-II, prueba 3.

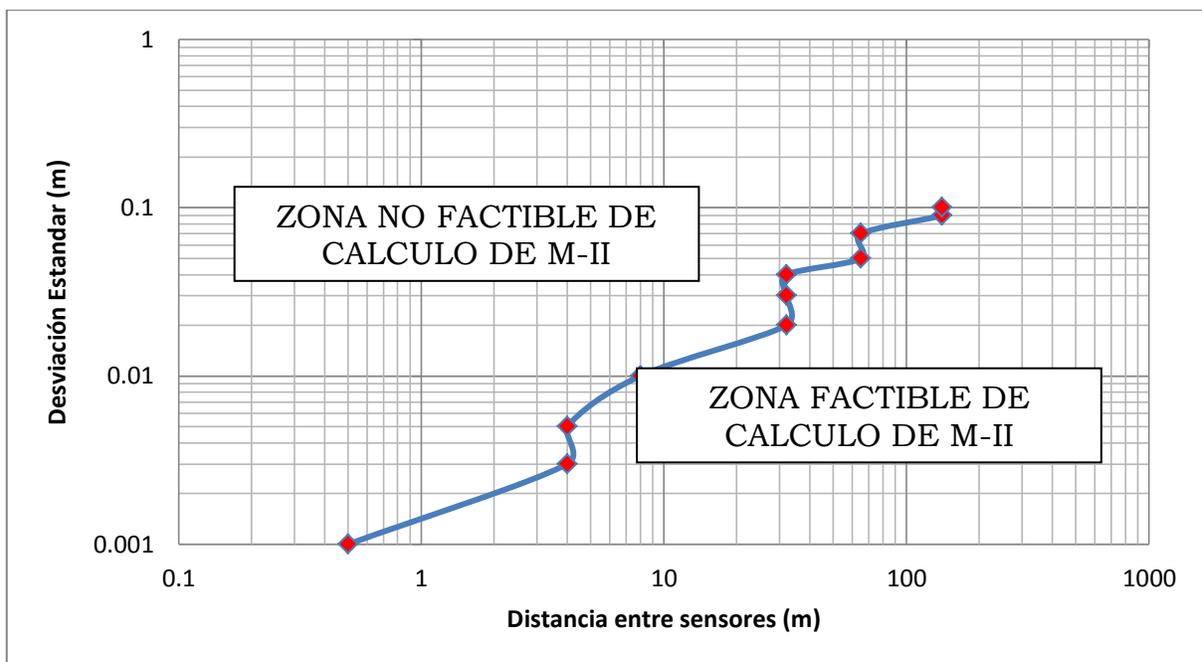


Lámina 4.36 Error aleatorio con el modelo de ruido blanco  $p \leq 0.66$  para el M-II, prueba 3.



#### 4.5 Prueba 4, aplicación a un canal de riego de 100 m

##### Descripción del canal

Canal trapecial de sección transversal uniforme con una longitud de 100 m, contiene un ancho de 1.5 m, rugosidad de Manning de 0.014, pendiente uniforme de 0.001, talud de 1.5 m y conduce un caudal de 1.5 m<sup>3</sup>/s, con un tiempo de simulación de 150 s.

Para el siguiente resultado de cálculos se utilizó el siguiente hidrograma unitario de entrada de 2.25 m<sup>3</sup>/s de caudal pico.

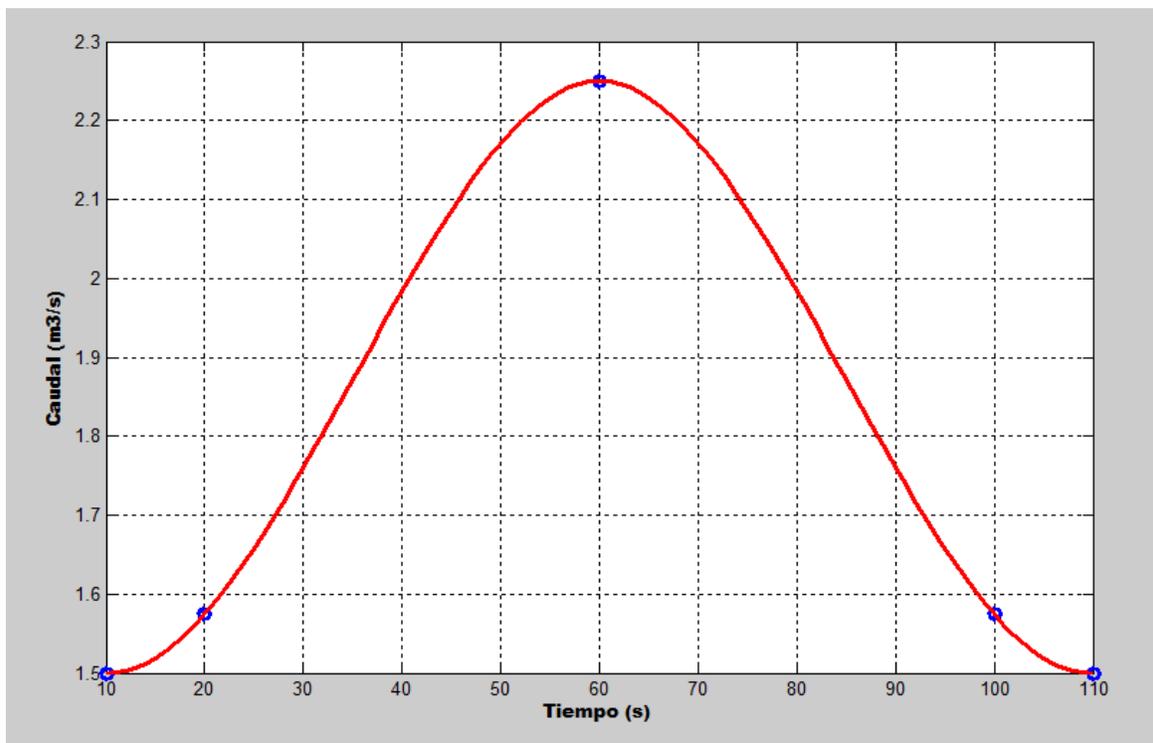


Lámina 4.37 Hidrograma unitario de 2.25 m<sup>3</sup>/s para la prueba 4



Resultados de la Prueba 4 para el M-I.

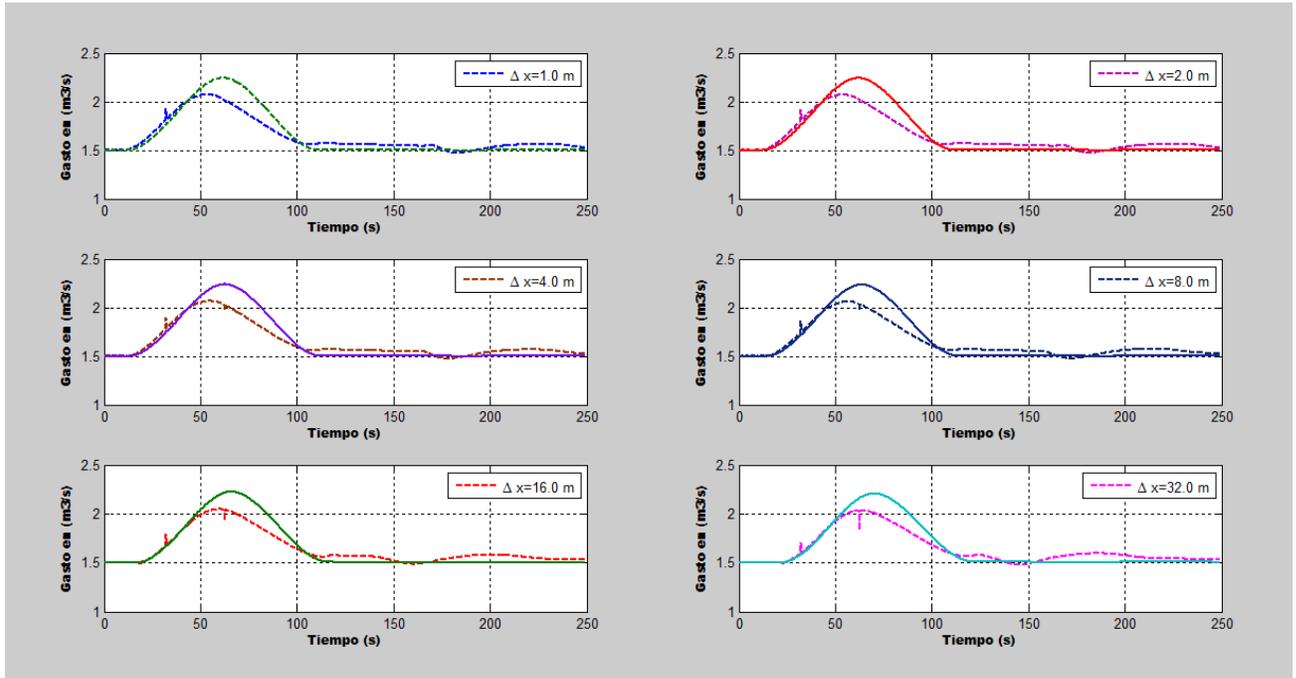


Lámina 4.38 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 4 y M-I, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-I.

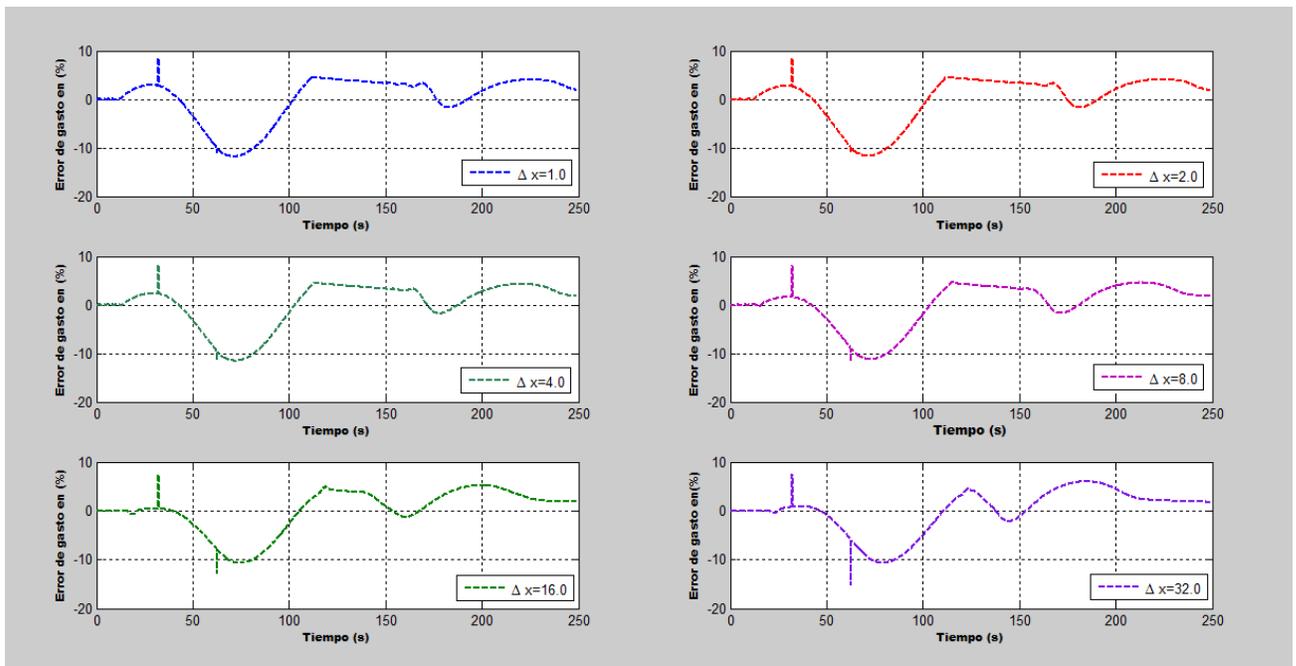


Lámina 4.39 Error de M-I en la determinación del caudal en la prueba 4, en distintas ubicaciones del sensor.

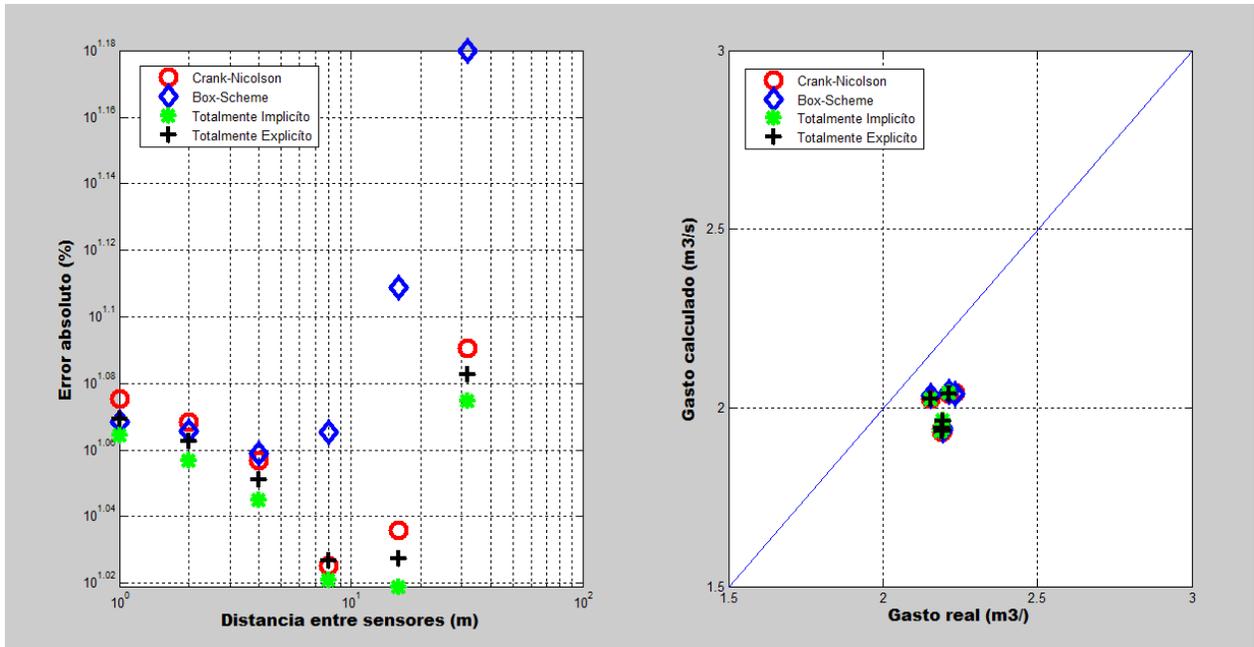


Lámina 4.40 Error máximo absoluto en (%) M-I, para la prueba 4. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito.

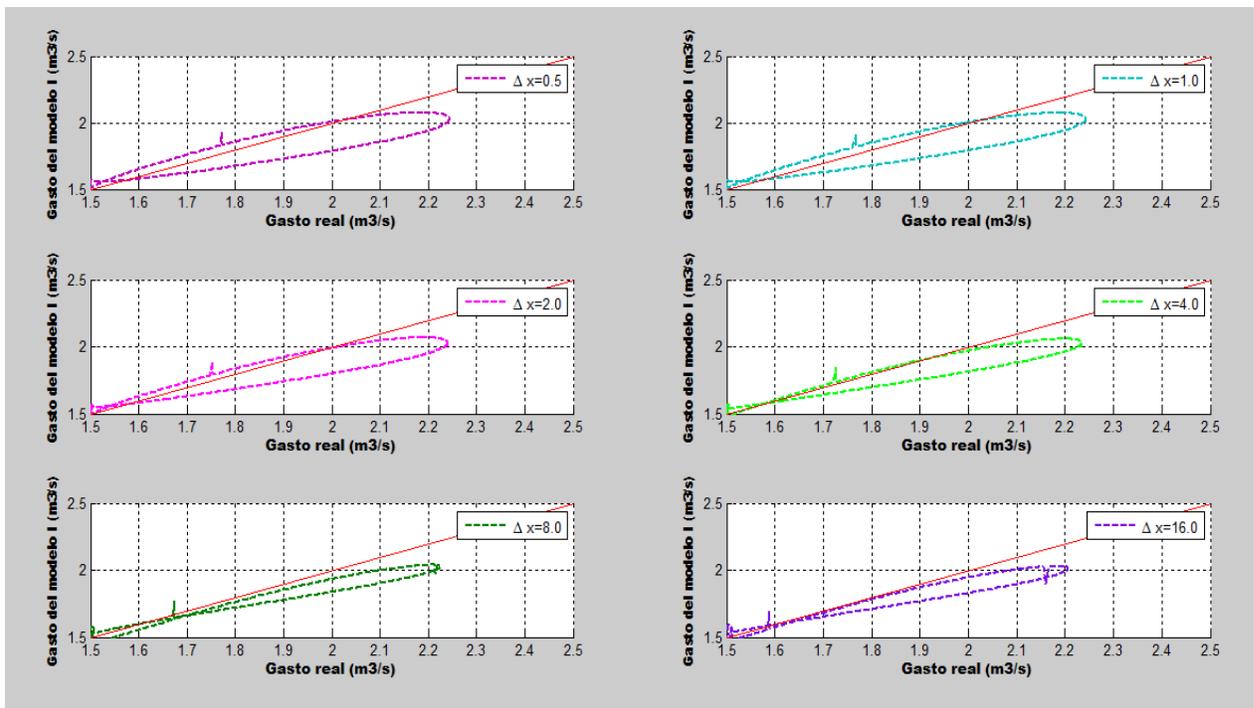


Lámina 4.41 Relación entre el caudal real y estimado con M-I, para la prueba 4, en distintas ubicaciones del sensor.



Resultados de la Prueba 4 para el M-II

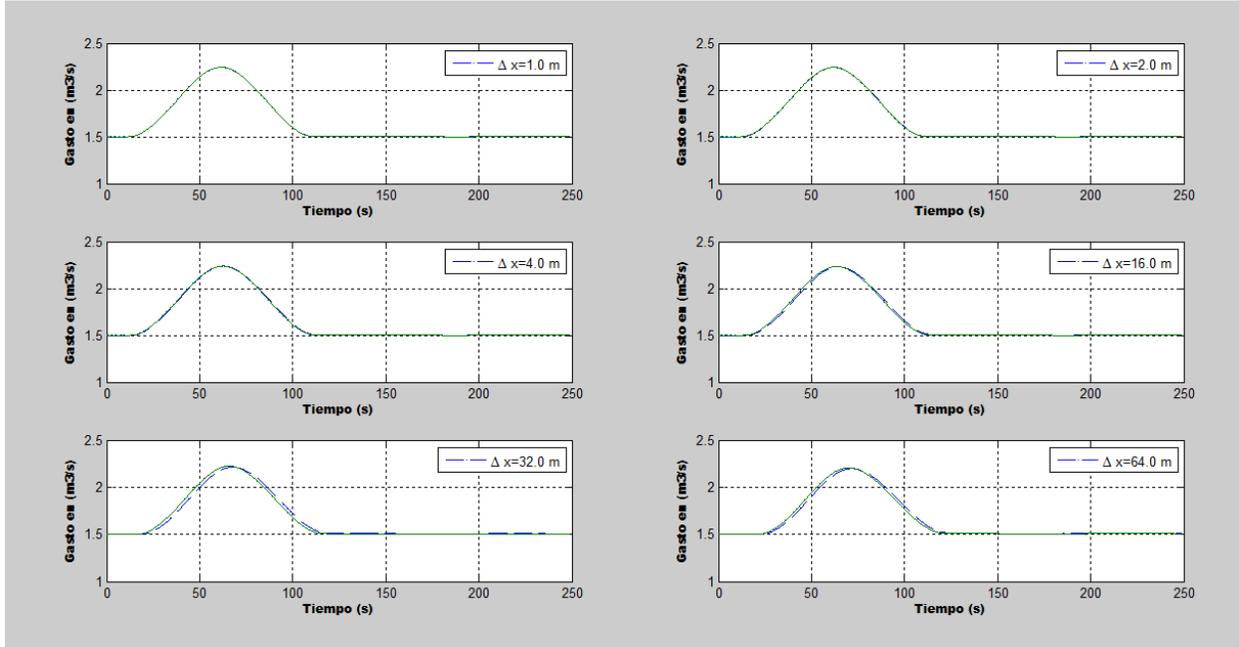


Lámina 4.42 Comparación entre caudal real y estimado para la prueba 4 y M-II, con distintas separaciones en la ubicación del sensor. La línea continua es el caudal real obtenido del MNSV y la punteada es lo estimado con M-II.

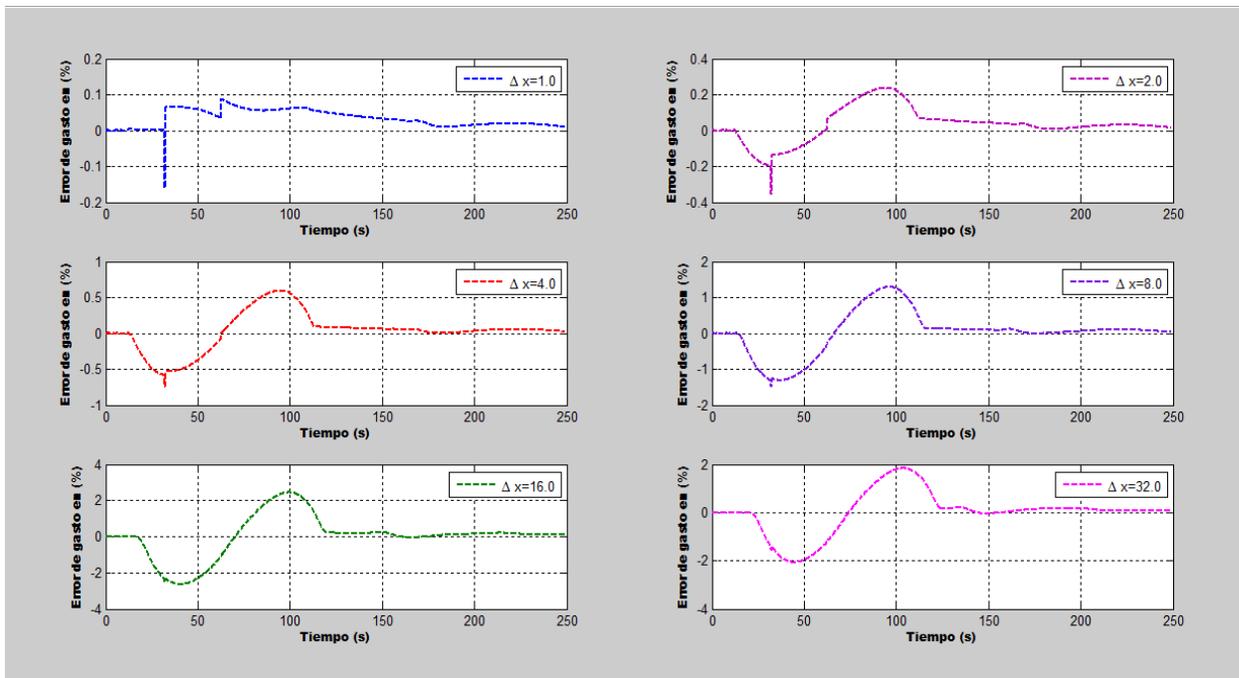


Lámina 4.43 Error de M-II en la determinación del caudal en la prueba 4, en distintas ubicaciones del sensor.

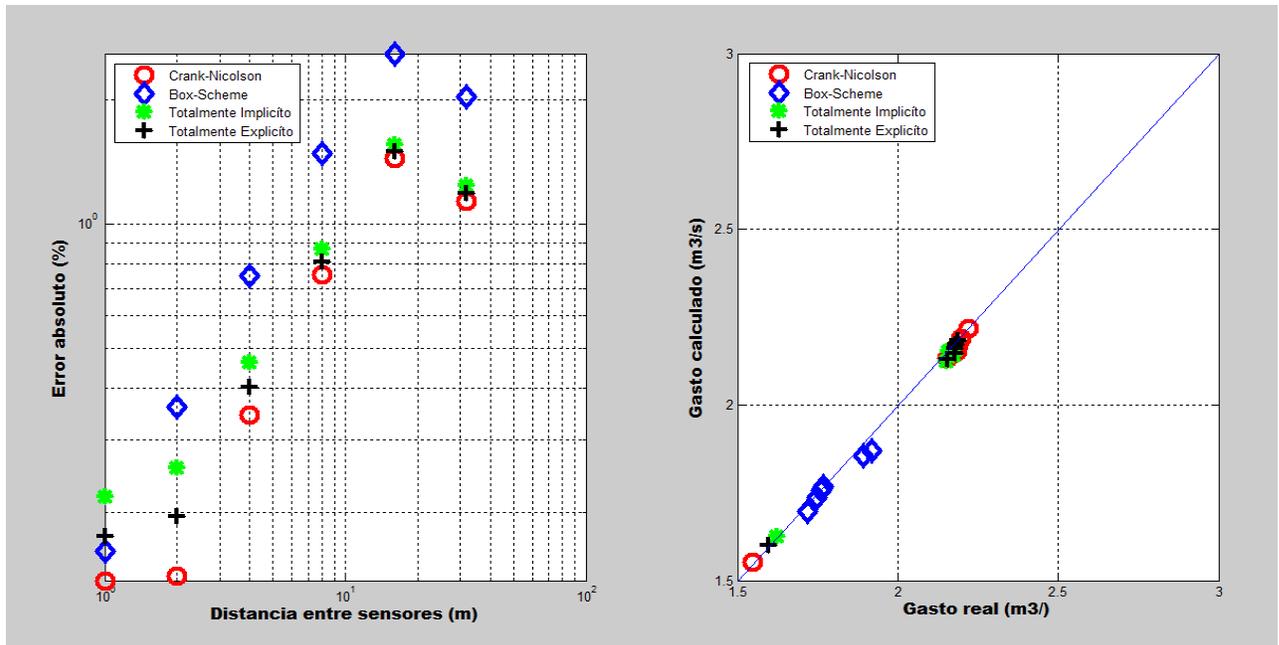


Lámina 4.44 Error máximo absoluto en (%) M-II, para la prueba 4. Los puntos azules es por el método de Box-Scheme, los rojos por el método de Crank-Nicolson, los verdes por el método Explícito y los puntos negros por el método Implícito.

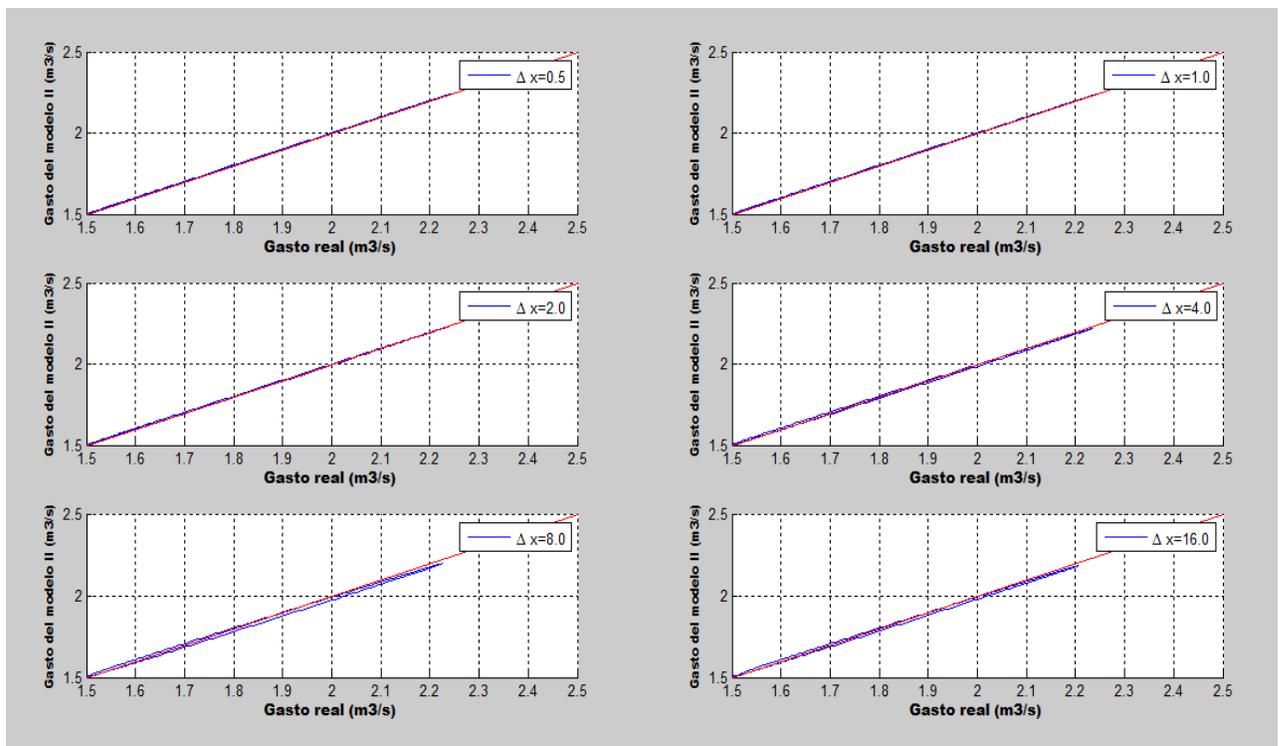


Lámina 4.45 Relación entre el caudal real y estimado con M-II, para la prueba 4, en distintas ubicaciones del sensor.



Delta x (m)	Error entre caudal real MNSV y estimado (%)							
	Box-Scheme		Crank-Nicolson		Totalmente Explicito		Totalmente Implícito	
	M-I	M-II	M-I	M-II	M-I	M-II	M-I	M-II
<b>1</b>	11.71	0.16	11.73	0.17	11.59	0.22	11.89	0.13
<b>2</b>	11.63	0.36	11.55	0.19	11.39	0.22	11.70	0.14
<b>4</b>	11.45	0.75	11.24	0.40	11.09	0.46	11.40	0.34
<b>8</b>	11.62	1.48	10.63	0.81	10.49	0.86	10.59	0.75
<b>16</b>	12.85	2.59	10.65	1.50	10.44	1.55	10.86	1.44
<b>32</b>	15.14	2.03	12.04	1.19	11.88	1.25	12.82	1.13

Tabla 4.6 Error máximo en la estimación de caudal en la prueba 4.

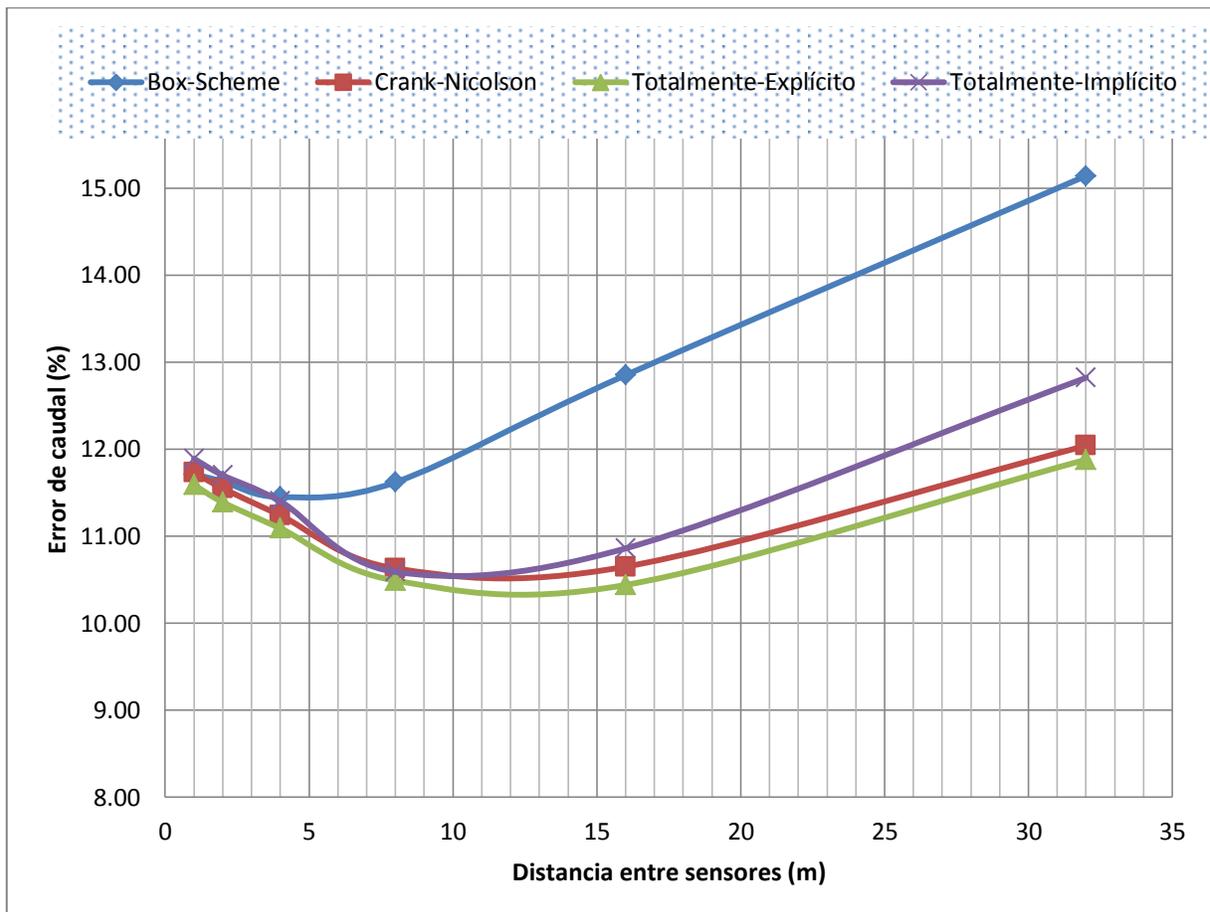


Lámina 4.46 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-I, prueba 4.

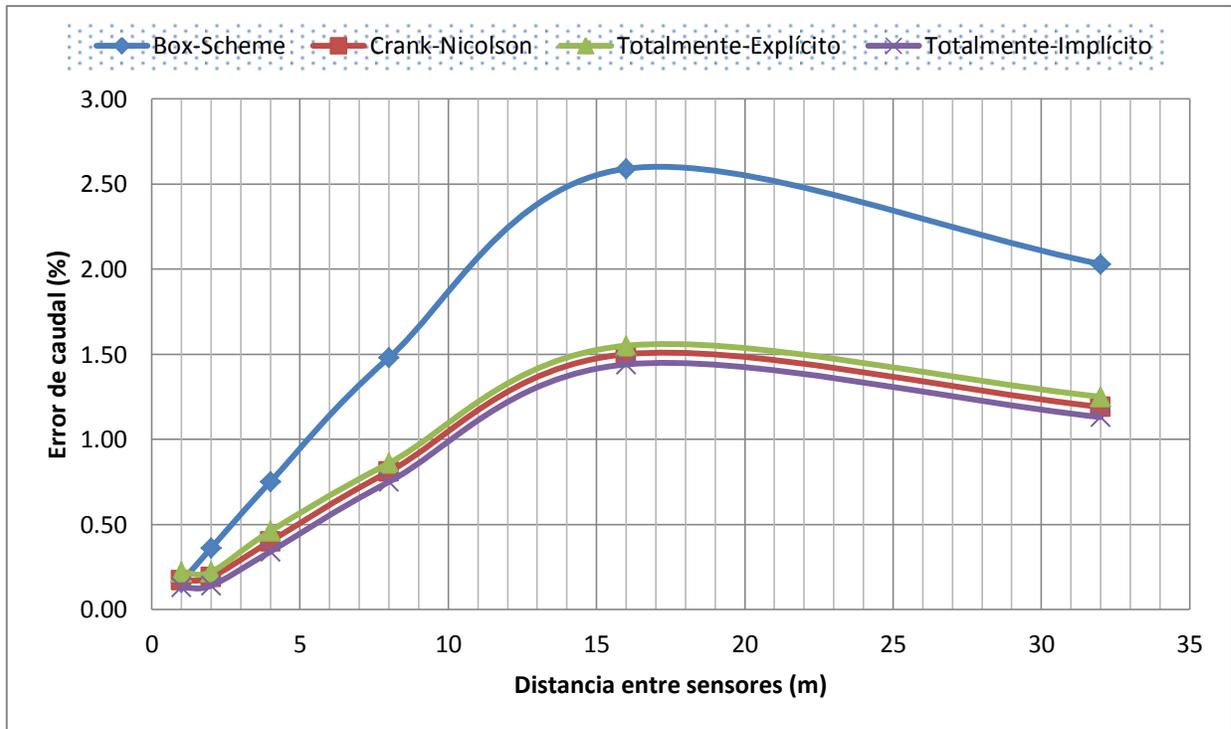


Lámina 4.47 Diferencias de caudal por los cuatro métodos de discretización para el M-II, prueba 4.

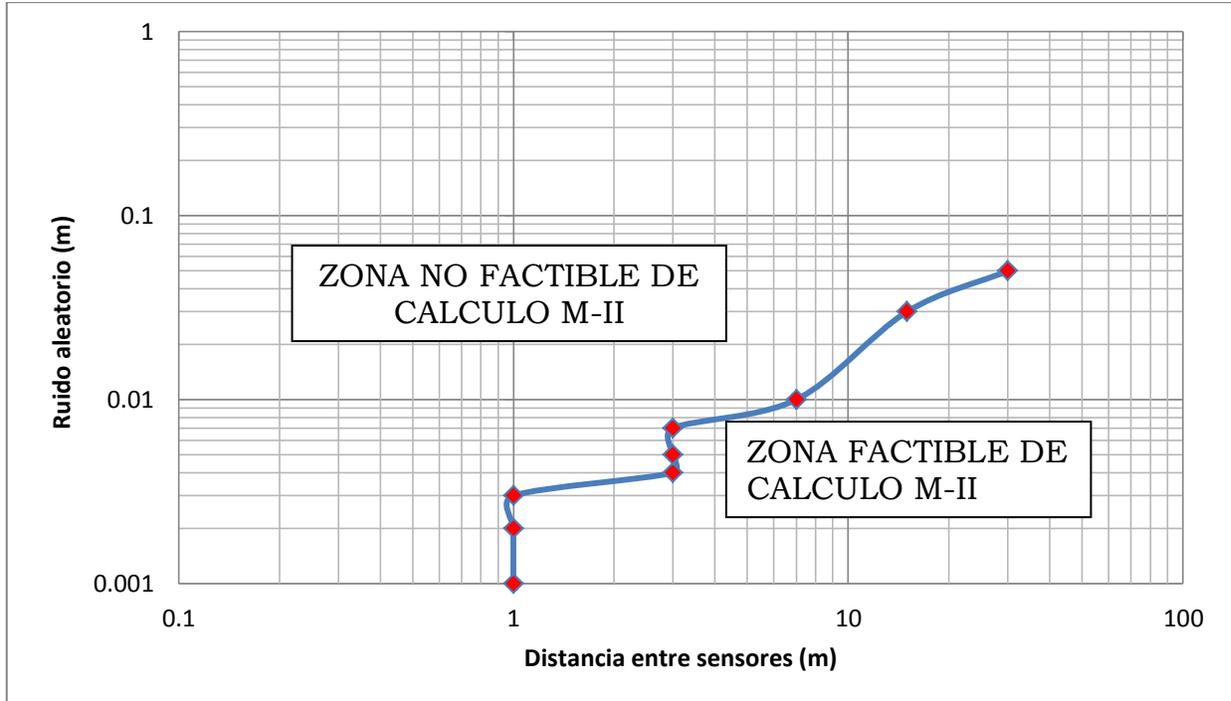


Lámina 4.48 Error aleatorio con el modelo de ruido blanco  $p \leq 0.66$  para el M-II, prueba 4.



Para evaluar los M-I y M-II, como parte de la investigación se realizaron cuatro pruebas, la primera se realizó para un tramo de un cauce y las otras tres pruebas se realizaron para tramos de unos canales de riego, todas estas pruebas son teóricas. En esta parte sólo se explicaran las láminas y tablas para la primera prueba, ya que para las demás pruebas es prácticamente lo mismo.

En la lámina 4.1 se muestra el hidrograma de entrada al cauce con un gasto pico de  $450 \text{ m}^3/\text{s}$ . En la lámina 4.2 se muestran los hidrogramas calculado por el modelo I y el introducido al programa de  $450 \text{ m}^3/\text{s}$ , la línea discontinua de color azul es el calculado por el modelo y la línea verde continua es el real transitado por el cauce. Esto se ejecutó para diferentes distancias entre sensores de nivel, lo cual se puede observar que a mayor distancia el error se incrementa. En la lámina 4.3 se observa el error que se obtuvo al restar el hidrograma ejecutado por el modelo y el hidrograma real introducido al programa.

En la lámina 4.4, la imagen de la izquierda de la misma lámina se da a conocer el porcentaje máximo absoluto del caudal estimado, lo cual se demuestra que a mayor distancia de sensor a sensor el error se incrementa y la imagen que se muestra a la derecha de esa misma lámina, sirve para mostrar que distancia entre los sensores tienden a la línea de  $45^\circ$ , todas aquellas distancias entre sensores que tienden a esa línea son los que tienen una buena aplicación, y su error es muy poco comparado con el real y los ejemplos que se alejan de esa línea indican lo contrario.

La lamina 4.5 muestra las curvas de llenado de cada distancia de los sensores de nivel, todas las curvas que se apegan a las líneas de  $45^\circ$  significa que tiene un buen grado de precisión al caudal estimado. La lámina 4.10 se da a conocer que parámetros de factor de peso temporal y espacial para diferentes métodos y saber cuáles son los más adecuados para obtener un error de gasto menor, como se muestra en la tabla 4.2.

La tabla 4.2 (Prueba no.1) muestra las diferencias de error que se obtuvo al estimar el caudal por los métodos M-I y M-II, y además indica los errores que se obtiene al usar los diferentes parámetros de peso espacial y temporal.

En la lámina 4.12 se da a conocer el efecto del ruido blanco aleatorio, lo cual permite establecer la distancia mínima que el modelo M-II acepta para la estimación del gasto, con un señal ruidosa que tiene una desviación estándar en la medición del nivel. Por ejemplo si el medidor de nivel tiene una desviación de 10 cm, la distancia mínima para poder estimar el gasto con M-II es 115 m.



Como se puede observar las curvas de llenado calculadas en estas pruebas, son mejores para M-II, basado en diferencias finitas. Por lo tanto, esto demuestra que este modelo es una técnica factible de implementarse en campo, y es sencilla ya que sólo consiste en instalar dos sensores de nivel de registro continuo y con esos datos se conoce el gasto.



## 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo, el procedimiento de estimación de caudal para flujo transitorio consistió en conocer la variación del nivel en el cauce para un hidrograma conocido y, con estos datos se aplica una formulación discreta basada en las ecuaciones completas de Saint-Venant.

Una vez planteado el modelo para estimar el caudal con la Ecuación Diferencial de Coeficientes Variables (MDCV), se simularon estas cuatro pruebas mediante un cálculo numérico (MNSV), y se obtuvieron los niveles en dos secciones del cauce a diferentes distancias con dos sensores de nivel. Para esto se aplicó un simulador numérico que resuelve las ecuaciones completas de Saint-Venant. La MDCV se resolvió en forma discreta y se definieron los modelos M-I y M-II. Para verificar su capacidad de predicción se realizaron una serie de pruebas.

Una vez concluidas las pruebas se pudo observar que:

- Para cauces caudalosos de grandes dimensiones como lo es la prueba 1, el M-II arroja un error en la estimación de caudal de hasta de 15 % para una distancia de 1400 m entre sensores (Tabla 4.2, prueba 1) para un caudal pico de 450 m<sup>3</sup>/s por el método de Implícito, de lo cual el M-I obtuvo un error de caudal de 545 % (Tabla 4.2) por el método de Explícito, por lo que este modelo no funciona para canales y/o cauces muy caudalosos.
- Como se puede observar en la prueba 4 para canales y/o cauces de pequeñas dimensiones con poco caudal, los resultados de M-I son más aceptables en el error de la estimación de caudal, por ejemplo para la prueba 4 que tiene un caudal pico de 2.25 m<sup>3</sup>/s para una distancia entre sensores de 32 m, se obtuvo un error máximo absoluto de 11 % (Lamina 4.40), para el M-II se obtuvo un error máximo absoluto de 1.6 % (Lamina 4.44), no obstante la mejoría de M-I en la estimación, el M-II sigue siendo muy preciso para canales chicos. Resultados similares se obtuvieron para un canal de 1000 m y 400m de longitud.

Además los escenarios de prueba se realizaron, verificaciones, para diferentes parámetros ( $\Psi$  y  $\theta$ ), ya que varían ( $\Psi = [0,1]$  y  $\theta = [0,1]$ ) dependiendo del método a usar (ver tabla 4.2). Para la prueba 1, se observó que para cauces muy grandes el M-I por el método de Box-Scheme



con  $\psi = 0.5$  y  $\theta = 0.6$  es el que menos error arroja en la estimación de caudal (lámina 4.10) y para el M-II los métodos de Crank-Nicolson, Totalmente explícito y Totalmente Implícito ( $\Psi = 0.5, 0.0, 0.0$  y  $\theta = 0.0, 0.0, 1.0$ ) son los que dan menos error en el caudal (lámina 4.11). Para la prueba 4 que consiste en cauces pequeños el M-I para el método de Box-Scheme ( $\Psi = 0.5$  y  $\theta = 0.6$ ), es el que más precisión tiene comparado con los otros métodos (lámina 4.46) y para el M-II sucede lo mismo (lámina 4.47).

Para evaluar la sensibilidad del modelo, en las pruebas se aplicó un ruido blanco aleatorio (ver lámina 4.10 y 4.19), se observó que para cauces grandes y ruidos mayores a 10 mm, es recomendable que los sensores de nivel estén separados a no menos de 20 metros, y canales pequeños con errores no mayores a 4 mm se pueden instalar a cada metro. Los resultados obtenidos con el M-II indican que es muy factible adecuar una estación de aforo con dos sensores de nivel de registro continuo, con lo cual se pueden obtener las avenidas que escurren por el cauce.

Se pudo demostrar que la precisión del M-II es muy aceptable e incluso, si se tiene una avenida muy intensa se puede considerar que es un método muy bueno y se pueden estimar avenidas muy fuertes con baja estimación en el caudal comparándolo con el M-I. Los resultados de las pruebas numéricas indicaron que el M-I es deficiente para canales grandes y se puede considerar eficiente para canales pequeños, en el caso del M-II el error en el cálculo del caudal osciló entre 1 a 2% para distancias cortas menores a 10 m y este fue incrementándose a medida que se separan los sensores de nivel.

Es importante hacer notar que los ejemplos aquí presentados son teóricos y una aplicación con una instrumentación es un tema de estudio que puede realizar posteriormente y sale de los alcances planteados en este trabajo. Es probable que los resultados de la metodología presentada varíen al aplicarse a casos reales, ya que las condiciones suelen ser muy diferentes de los casos teóricos, ya que es difícil controlar y medir todas las variables que intervienen en el fenómeno de flujo en cauces naturales.



## BIBLIOGRAFÍA

- Anleu Fortuny, Rafael Ignacio. *Manual para la fabricación, instalación y operación del sensor de nivel de Río*. Guatemala: Secretaría Ejecutiva de CONRED, 2010.
- Aguilar-Chávez, Ariosto. *Apuntes de clase de fenómenos transitorios*. Jiutepec, Morelos: UNAM, 2013.
- . *Propiedades de propagación de esquemas numéricos para la simulación de flujos a superficie libre*. México DF: Tesis de Doctorado, Facultad de Ingeniería UNAM, 2002.
- Aldama, Alvaro y Ariosto Aguilar. «Stability analysis of a general Preissmann Scheme.» Brebia. *Comp. Methods in Water Res. XI*. UK: Computational Mechanics Publications, 1996. 37-44.
- Aparicio, Javier. *Hidrología de Superficie*. México D.F.: Limusa, 2001.
- Ayuso Muñoz, José Luis. *Métodos de cálculo usuales en el diseño de canales y embalses en cuencas pequeñas*. Cordoba: Servicio de Publicaciones E.T.S.L, 1990.
- Braithwaite, Orlando Jermaine. *Evaluación de Técnicas y Métodos para Aforar Canales*. Jiutepec, Mor.: Tesis de Maestría, Facultad de ingeniería UNAM., 2008.
- Briones Sánchez, Gregorio y Ingacio Garcia Casillas. *Aforo del Agua*. Mexico: Trillas, S.A. de S.V., 2008.
- Burden R., L. y J. Faires D. *Analisis Numérico*. Mexico, D.F.: Iberoamericana, S.A. de C.V., 1985.
- Clemmens A., J y A Replogle J. *Aforadores de caudal para canales abiertos*. Netherlands, 1986.
- Cunge J., A. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Londres: Pitman Publishing Limited, 1964.
- Chapra, S., C. y R. Canale. P. *Metodos Numéricos para Ingenieros*. Mexico D.F.: Mc. Grall-Hill/Interamericana de México, S.A de C.V., 1989.
- Chow, Ven Te. *Open Channel Flow*. Nueva York: Mc. Grall Hill, 1987.
- Escalante Estrada, Mauricio. *Hidrometría Ultrasonica. Aforadores Doppler y tiempo de Tavesía*. Jiutepec, Morelos: UNAM, 2013.
- Estrada Gutiérrez, Guadalupe. *Manuel de Hidraulica de Canales*. Culiacan, Sin.: UAS, CU., 2005.
- French, Richard. *Open Channel Hydraulics*. Nueva York: Mc. Grall Hill, 1985.
- García Hernandez, Feliciano. *Estimación de Gasto en Cauces Naturales durante la Ocurrencia de Avenidas*. Jiutepec, Mor.: Tesis de Mestría, Facultad de Ingeniería, UNAM., 2005.
- García Villanueva, Nahúm Hamed. *Estructuras fluidicas para la automatización de canales*. Mexico: Subcoordinacion del IMTA, 1998.
- Heras, Rafael. *Manual de hidrología*. Madrid: Cemtro de Estudios Hidrograficos, 1970.



- ISO 9826. *Measurement of liquid flow in open channels - Parshall and SANIIRI flumes*. Suiza: International Organization for Standardization, 1992.
- ISO/TR 11627. *Measurement of liquid flow in open channels - Computing stream flow using and unsteady flow model*. Suiza: International Organization for Standardization, 1998.
- ISO-1070. *Liquid flow measurement in open channels -- Slope area method*. Suiza: International Organization for Standardization, 1992.
- ISO-748. *Hidrometry - Measurement of liquid flow in open channels using current-meters or floats*. Suiza: International Organization for Standardization, 2007.
- Kosuth P., y otros. *Sea-Tide effects on flows in the lower reaches of the Amazon River*. Brazilia D.F.: Process. 23, pp. 3141-3150., 2009.
- LAN. *Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales, Ley de Aguas Nacionales, artículo 7, fracción III*. México: Diario Oficial de la Federación, 2004.
- Martínez Austria, Polioptro y Jorge Castillo González. *Diseño de aforadores de garganta larga*. Mexico: Subcoordinación, IMTA., 1992.
- NOM-008-SCFI-2002. *Sistema General de Unidades de Medida*. México, 2002.
- OMM-No.49. *Reglamento Técnico*. Ginebra-Suiza: Volumen III, Hidrología, 2006.
- Orlando Braithwaite, Jermaine. *Evaluación de Técnicas y Métodos para Aforar Canales*. Jiutepec, Mor.: Tesis de Maestría, Facultad de ingeniería UNAM., 2008.
- Pedroza González, Edmundo. *Canal Parshall*. Jiutepec, Mor.: CONAGUA, 2001.
- Reyes P. *Hidrología e hidráulica, flujo de agua en tuberías*. Los Mochis, Sin.: UDLM, 2003.
- Ruíz Cortez, Rodolfo. *Hidráulica de Canales*. Culiacan Sin.: Limusa, 1987.
- Sotelo Avila, Gilberto. *Hidráulica de Canales*. Mexico: UNAM, 2008.
- Sotelo, Ávila Gilverto. *Hidráulica General*. Mexico D.F.: Limusa, 1994.
- Stelkoff, Theodor. *One-Dimensional Equations of Open Channel Flow; Journal of the hydraulics division*. Estados Unidos: Proceedings of the American Society of civil Engineers; May, 1969., 1969.
- Yevjevich M., Vujica. *Unsteady Flow in Open Channels*. Colorado USA.: Fort Collins, 1975.



## Anexo I Definiciones y nomenclatura

### A1.1 Conceptos básicos

- *Ancho de superficie libre*: Es el ancho  $T$  de la sección del canal, medido al nivel de la superficie libre.
- *Área hidráulica*: Es el área  $A$  ocupada por el flujo en la sección del canal.
- *Balance hidrológico*. Evaluación de la cantidad de agua que se hace fundándose en el principio de que, durante cierto intervalo de tiempo, el aumento total de agua en determinada zona de captación o masa de agua ha de ser igual a la pérdida de agua más el cambio total de volumen del agua embalsada en la cuenca de captación.
- *Caída*. Diferencia de elevación de la superficie del agua entre dos puntos de un curso de agua en un momento determinado(OMM-No.49).
- *Canal*: Es un conducto natural o artificial por donde fluye un líquido valiéndose únicamente de la acción de la fuerza de gravedad.
- *Canal de descarga*. Cauce artificial de forma y dimensiones claramente especificadas que se pueden utilizar para la medición del caudal.
- *Caudal afluente lateral*. Caudal de agua que afluye a un río, lago o en embalse a lo largo de cualquier tramo de la parte de la cuenca adyacente a ese tramo.
- *Caudal*. Volumen de agua que pasa a través de una sección transversal en una unidad de tiempo.
- *Celeridad*. Velocidad de propagación de ondas.
- *Coefficientes de Boussinesq*: El coeficiente de Boussinesq, cuantifica la desviación de velocidad en cualquier punto de una sección transversal de distribución uniforme de la velocidad, en la misma sección transversal. El coeficiente de Boussinesq varía generalmente entre 1.01 y 1.12 para los canales prismáticos bastante rectos: Los coeficientes son más pequeños para canales grandes y profundos, que para canales pequeños (ISO 11627: 1998).
- *Condiciones de Courant*: La condición usual para la estabilidad numérica de la formulación explícita de un esquema numérico que requiere que la relación de la velocidad de propagación de perturbación a la de una señal numérica, no debe exceder de la unidad.
- *Condiciones límites*: Una condición de contorno, es una condición que una variable dependiente de un ecuación diferencial debe satisfacer lo largo del límite del dominio del modelo.
- *Corriente crítica*. Flujo en que el número de Froude es igual a la unidad. En esta condición la celeridad de las pequeñas perturbaciones es igual a la media de la velocidad del flujo.



- *Corriente de densidad.* Fenómeno de flujo por gravedad de un líquido con relación a otro líquido, o de un flujo relativo dentro de un medio líquido debido a una diferencia de densidad.
- *Corriente subcrítico.* Corriente en la que el número de Froude es inferior a la unidad y las perturbaciones superficiales se desplazan aguas arriba y aguas abajo.
- *Corriente supercrítica.* Corriente en la que el número de Froude es superior a la unidad y las perturbaciones superficiales se desplazan aguas abajo.
- *Cota de referencia.* Marca permanente, natural o artificial, que tiene un punto de cota conocida respecto de un origen adoptado.
- *Crecida repentina.* Crecida de breve duración con un caudal de punta relativamente alto, en la que el intervalo entre el acontecimiento causante observable y la inundación es inferior de seis a cuatro horas.

Donde  $y_1 = y_2, V_1 = V_2, S_o = S_w = S_f$

- *El agua:* Es un recurso natural y es fuente de vida, su distribución irregular tanto en el tiempo como en el espacio, están sometido a una combinación de factores naturales (variabilidad climática) y el crecimiento poblacional, los que ejercen presión sobre los recursos hídricos: contaminando, ocupando áreas marginales, deforestando, entre otras actividades antropogénicas, cambiando de esta manera la funcionalidad de la cuenca hidrográfica. De continuar con estos patrones de comportamiento estaríamos encaminados en los próximos años a una escasez del agua.
- *Error sistemático* Es la diferencia entre el promedio observado de las mediciones y el valor verdadero (Reyes P.).
- *Estación hidrométrica.* Estación en el cual se obtienen datos del agua, en los ríos, lagos y embalses, de uno o varios de los elementos siguientes: niveles, flujo de las corrientes, transporte y depósito de sedimentos, temperatura del agua y otras propiedades físicas del agua, como propiedades químicas del agua.
- *Explícito de diferencias finitas (esquema numérico):* Los esquemas numéricos explícitos transforman la ecuaciones diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, en donde las incógnitas se pueden resolver directamente (o de forma explícita) sin cálculos iterativos. Esquemas explícitos son generalmente inestables y son aplicables a una condición de Courant con paso de tiempo pequeño..
- *Filtración.* Proceso por el que un líquido atraviesa un medio filtrante para eliminar las materias en suspensión o coloidales.
- *Flujo en un canal:* Se produce principalmente, por la acción de la fuerza de gravedad y se caracteriza por que se expone una superficie libre a la presión atmosférica, siendo el fluido siempre un líquido, por lo general agua(Sotelo Avila).El movimiento de un líquido a superficie libre se ve



afectado por las mismas fuerzas que intervienen en el flujo dentro de un tubo, a saber:

- La fuerza de gravedad, como la más importante en el movimiento.
- La fuerza de resistencia ocasionada en las fronteras rígidas por la fricción y la naturaleza casi siempre turbulenta del flujo.
- La fuerza de tensión superficial, consecuencia directa de la superficie libre.
- La fuerza debida a la viscosidad del líquido, de poca importancia si el flujo es turbulento.
- A éstas agregan, excepcionalmente, las siguientes:
- La fuerza producida por la presión que se ejerce sobre las fronteras del canal, particularmente en las zonas donde cambia su geometría.
- Las fuerzas ocasionales debidas al movimiento del sedimento arrastrado.
- *Flujo no permanente*: Flujo en el cual las características hidráulicas cambian en el tiempo, es decir:  $\left(\frac{dv}{dt}\right) \neq 0$ .

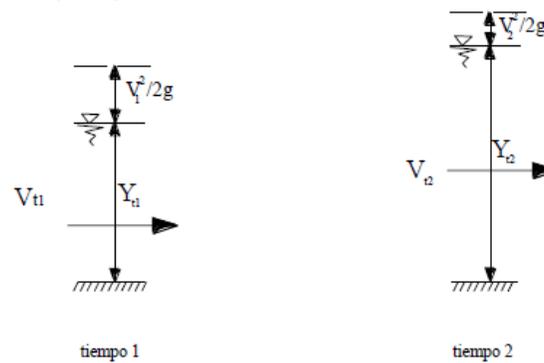


Lámina A.1.1 Esquematzación del flujo no permanente

- *Flujo no uniforme*: Es aquel en el cual las características hidráulicas cambian entre dos secciones, es decir:  $\left(\frac{dv}{dx}\right) \neq 0$  donde:  $y_1 \neq y_2, V_1 \neq V_2, S_o \neq S_w \neq S_f$ .

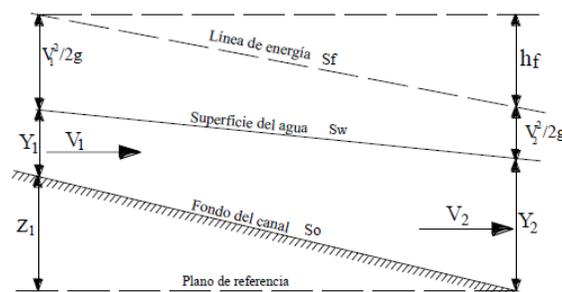


Lámina A.1.2 Perfil longitudinal de un canal, mostrando flujo no uniforme



- **Flujo permanente:** Es aquel en el que tomando como criterio el tiempo, las características hidráulicas permanecen constantes, es decir:  $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$  donde:  $y_1 = y_2$  y  $V_1 = V_2$   $T_1 = T_2$ .

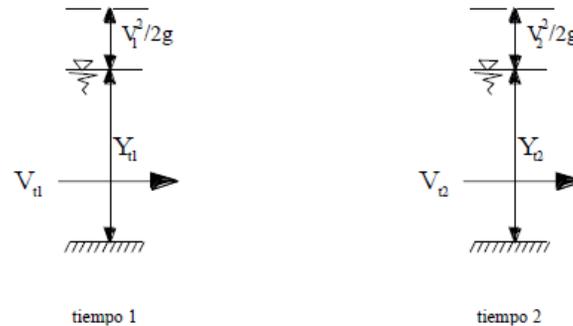


Lámina A.1.3 Esquematación del flujo permanente

- **Flujo rápidamente variado:** Flujo en el cual las características hidráulicas cambian rápidamente, en un espacio relativamente corto (Estrada Gutiérrez).

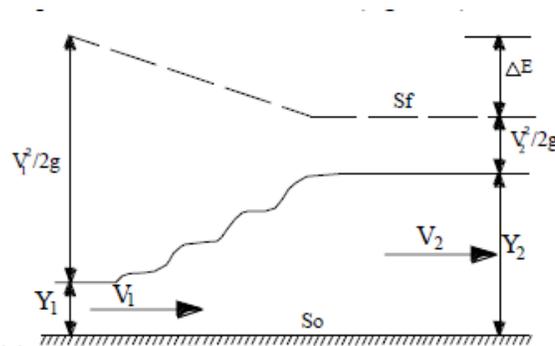


Lámina A.1.4 Flujo rápidamente variado

- **Flujo transitorio:** Un flujo transitorio presenta cambios en sus características a lo largo del tiempo para el cual se analiza el comportamiento del canal. Las características del flujo son función del tiempo.
- **Flujo uniforme:** El flujo uniforme (Estrada Gutiérrez), es aquel que tomando como criterio el espacio, las características hidráulicas no cambian entre dos secciones separadas una distancia "X", es decir:  $\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$ .

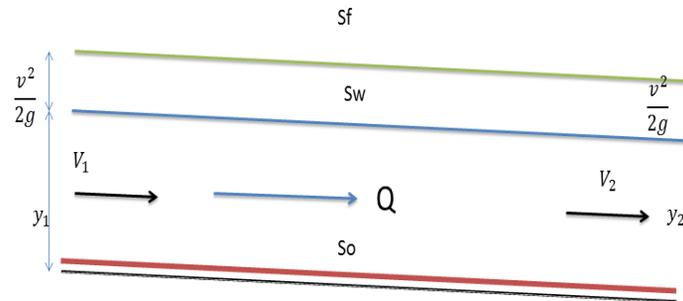


Lámina A.1.5 Perfil longitudinal de un canal, mostrando flujo uniforme

- *Gradualmente-Variado, Flujo no uniforme:* Generalmente flujo no uniforme en el que no hay cambios abruptos en la profundidad a lo largo del eje longitudinal de la canal, y en el que la profundidad (y la velocidad y descarga) cambian con el tiempo (Estrada Gutiérrez).

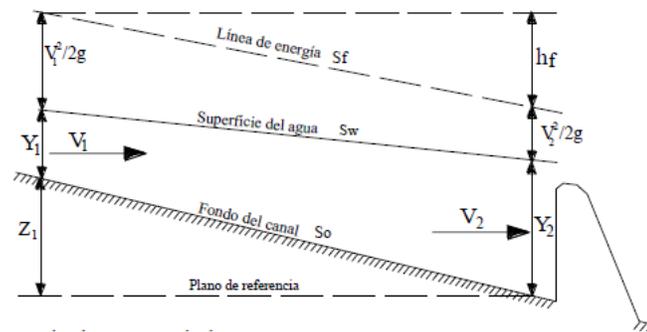


Lámina A.1.6 Flujo gradualmente variado

- *Hidrograma:* Es un gráfico que muestra la variación en el tiempo de alguna información hidrológica contra caudal en una avenida.
- *Hidrometría:* La palabra hidrometría proviene del griego Hidro que significa 'agua' y - metría que significa 'medición'. Por lo tanto la hidrometría es la ciencia que trata de la medición y análisis del agua incluyendo métodos, técnicas e instrumentos utilizados en Hidrología.
- *Implícito de diferencias finitas (esquema numérico):* Esquemas numéricos implícitos es convertir cualquiera de las ecuaciones características o las ecuaciones que deben regir a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de la que las incógnitas deben ser resueltas iterativamente.
- *Incertidumbre.* Intervalo dentro del cual cabe esperar que se sitúe el valor verdadero de una cantidad con una probabilidad.
- *Linealidad:* Es la diferencia en los valores real y observado, a través del rango de operación esperado del equipo.
- *Método de características:* El método de las características es una aproximación matemática para la solución de problemas de valor límite,



mediante la transformación de las ecuaciones en derivadas parciales originales que representan el sistema físico en ecuaciones características correspondientes. Las ecuaciones características, se resuelven ya sea utilizando métodos de diferencias finitas explícitas o implícitas.

- *Molinete*. Instrumento para medir la velocidad del agua en un punto.
- *Nivel de referencia*. Distancia vertical del cero de una escala con relación a una cota determinada.
- *Nivel del agua*. Distancia vertical de la superficie del agua de una corriente, lago, o embalse con relación a una cota determinada.
- *Numero de Froude*: Es un numero adimensional que nos indica el régimen en el que se encuentra un fluido en el interior de un canal.
- *Perímetro mojado*: Es la longitud  $P$  de la línea de contacto entre el agua y las paredes del canal, es decir, no incluye a la superficie libre.
- *Puntos de Control*. Son los lugares donde se registran los caudales de agua que circulan por una sección hidráulica que pueden ser: estaciones hidrométricas, estructuras hidráulicas, compuertas, caídas, vertederos, medidores Parshall, etc.
- *Radio hidráulico*: Es el cociente  $R_h$  del área hidráulica y el perímetro mojado  $R_h = A/p$ .
- *Red Hidrométrica*. Es el conjunto de puntos de control ubicados estratégicamente en el sistema de riego
- *Red Hidrométrica*. La red Hidrométrica es el conjunto de puntos de medición que se tiene dentro de un sistema de riego. Los puntos de medición deben ser adecuadamente ubicados a fin de determinar el caudal que circula en toda la red hidráulica.
- *Repetibilidad*: Es la variación de las mediciones obtenidas con un instrumento de medición, cuando es utilizado varias veces por un operador, al mismo tiempo que mide las mismas características en una misma parte (Reyes P.).
- *Reproducibilidad*: Es la variación, entre promedios de las mediciones hechas por diferentes operadores que utilizan un mismo instrumento de medición cuando miden las mismas características en una misma parte (Reyes P.).
- *Sección transversal*. Sección de una corriente que forma ángulo recto con la dirección principal (media) de la corriente.
- *Sistema Hidrométrico*. Es el conjunto de actividades y procedimientos que permiten conocer los caudales de agua que circulan en los cauces de los ríos y canales de un sistema de riego, con el fin de registrar, procesar y programar la distribución del agua. El sistema hidrométrico tiene como soporte físico la red hidrométrica.



- **Superficie libre:** Se considera como la intercara entre dos fluidos: el superior, que es aire estacionario o en movimiento, y le inferior, que usualmente es agua en movimiento.
- **Talud:** Designa la inclinación de las paredes de la sección y corresponde a la distancia  $k$  recorrida horizontalmente desde un punto sobre la pared, para ascender la unidad de longitud a otro punto sobre la misma.

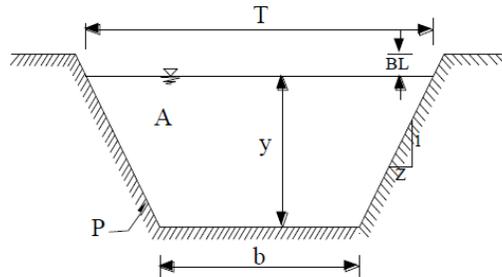


Lámina A.1.7 Elementos geométricos de un canal, sección transversal

- **Tirante medio o tirante hidráulico:** ES la relación  $Y$  entre el área hidráulica y el ancho de la superficie libre  $Y = A/T$
- **Tirante:** Es la distancia  $y$  perpendicular a la plantilla, medida desde el punto más bajo de la sección hasta la superficie libre del agua. Es decir, es normal a la coordenada  $x$ .
- **Tramo de medición.** Tramo de un canal abierto seleccionado para medir el caudal.
- **Tramo.** Parte de un cauce abierto, comprendida entre dos secciones transversales determinadas.
- **Tránsito de avenida:** Es un cambio rápido del gasto que cruza un río o una presa. Dicho cambio es casi siempre debido a una tormenta. Originando con ello un hidrograma donde claramente está definido una rama ascendente, un pico y una rama descendente.
- **Velocidad crítica.** 1.- Velocidad de la corriente crítica de un canal. 2.- Velocidad a la que la corriente cambia para pasar del régimen subcrítico al supercrítico y viceversa.
- **Vertedero con orificio.** Vertedero de pared delgada, cualquiera que sea su forma, que produce contracciones laterales.
- **Vertedero de contracción.** Vertedero de cresta ancha cuyo perfil es triangular en un plano vertical a la dirección de la corriente.
- **Vertedero de cresta ancha.** Vertedero en que la cresta no se extiende a toda la anchura del canal.
- **Vertedero de pared delgada.** Vertedero de pared vertical y de cresta delgada que al ser atravesada por el agua hace saltar la lámina vertiente de forma claramente perceptible.



- *Vertedero de perfil triangular.* Vertedero de cresta ancha cuyo perfil es triangular en un plano vertical a la dirección de la corriente.
- *Vertedero sumergido.* Vertedero en el que el nivel de aguas abajo queda afectado por el nivel de aguas arriba.
- *Vertedero.* Estructura de rebosamiento que se puede utilizar para controlar el nivel del agua o para medir el caudal o para medir el caudal o para ambas cosas.
- *Viscosidad.* Propiedad de un fluido para resistir el esfuerzo cortante producido por gradientes de velocidad. Se expresa por lo general en forma de coeficientes.
- *Zona de inundación.* Terreno adyacente y casi al mismo nivel del cauce del curso del agua, que solo se inunda cuando el caudal excede la capacidad del cauce.

## A1.2 Nomenclatura

$Z_i$  Es la elevación del fondo del canal en (m).

$Y_i$  Es el tirante del canal en (m).

$\Delta x_i$  Es el número de espacios de discretización a lo largo del canal en (m)

$n_i$  Es la rugosidad de Manning para cada sección del canal en  $\left(\frac{s}{m^{1/3}}\right)$ ;

$Rh_i$  Es el radio hidráulico en (m);

$B_i$  Es el ancho del canal en (m);

$g$  Es la aceleración de la gravedad en  $(ms^{-2})$ ;

$A_i$  Es el área de la sección transversal ( $m^2$ ), y el subíndice es la sección de aplicación  $i = 1, 2$ , pero en caso del área y ancho sólo se utiliza el dato de una sección.

$\bar{R}h_m$  Es el promedio radio hidráulico entre la sección 1 y 2 en (m), (ecuación 3.8).

$\bar{B}_m$  Es el promedio de los anchos entre la sección 1 y 2 del canal en (m).

$\bar{A}_m$  Es el promedio de las áreas de la sección transversal 1 y 2 en ( $m^2$ ), (ecuación 3.7).

$x$  es la coordenada en el sentido horizontal.



$t$  el tiempo como variables independientes.

$A(x, t)$  y  $Q(x, t)$  el área y el gasto respectivamente como variables dependientes.

$q(x, t)$  es la entrada o salida de masa perpendicular al eje longitudinal del canal.

$h(A; x, t)$  es la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia.

$y(A; x, t)$  es la elevación de la superficie libre del agua medida desde la plantilla del fondo del canal.

$z_b(x)$  la elevación de la plantilla del fondo del canal desde un nivel de referencia.

$S_f(A, Q; x, t)$  es la pendiente de fricción,  $\alpha$  un parámetro adimensional aproximadamente igual a 17/100 (Aldama y Ocón, 1998)

$K_s$  la rugosidad absoluta del fondo,

$R(A; x, t) = A/P(A; x, t)$  es el radio hidráulico

$P(A; x, t)$  el perímetro mojado.

$S_b(x)$  es la pendiente longitudinal del fondo del canal.

$B(A; x, t)$  es el ancho de la superficie del agua en la sección transversal  $\Delta x = L / J \Delta t = T / N$  y  $J$  y  $N$  son números enteros e indican la cantidad de intervalos computacionales de discretización espacial y temporal respectivamente, de forma que  $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j \Delta x, n \Delta t)$  y el conjunto de puntos de los subíndices  $J$  se agrupan en el vector  $J \Omega$ .

$\theta \in [1, 0]$ , es el factor de peso temporal.

$\Psi \in [1, 0]$ , es el factor de peso espacial.

$A^{n+1, m}$  y  $Q^{n+1, m}$  es el vector de valores de área y gasto respectivamente en el dominio de solución

$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, E_1$  y  $E_2$  son constantes para la iteración  $m$

$Q$  Es el caudal, y varía con  $x$  y  $t$ ;



- $u^i$  Es la velocidad de flujo lateral componente longitudinal, y varía con  $x$  y  $t$
- $x$  Es la posición longitudinal a lo largo del eje del canal;
- $z$  Es el flujo de la profundidad, y varía con  $x$  y  $t$
- $y_i$  es el valor del nivel considerando la variabilidad en la estimación del nivel
- $\hat{y}_i$  es el valor de nivel determinado por el modelo de simulación MNSV
- $\sigma$  desviación estándar para representar la precisión del equipo de medición
- $x_i$  números aleatorios con media cero y desviación estándar 1



## ANEXO 2 DETERMINACIÓN DE CAUDAL A FLUJO PERMANENTE

### A2.1 Pruebas en flujo permanente

#### A2.1.1 Introducción

La finalidad de las pruebas de flujo permanente, es demostrar el uso de las ecuaciones de la norma ISO-1070,1992, deducida con la ecuación de la energía, y con las ecuaciones de Saint-Venant conservativas para la simulación de perfiles de flujo en canales y verificar si cumplen el gasto para diferentes intervalos de discretización o longitudes  $\Delta x$ .

En este apartado se realizaron dos pruebas, la primera a intervalos de discretización de 1.0 m hasta de 200 m para realizar la hidrometría en dos secciones en un tramo de canal de dos kilómetros y la otra prueba número dos consiste en intervalos de discretización de 2 km hasta de 50 km, esta prueba se aplicó a un tramo del Río Amazonas con una longitud de 200 km (considerando que el río que se utilizó para esta prueba, es considerando las características del río de Amazonas, lo cual es para fines académicos). En este anexo se muestran los resultados de las pruebas realizadas aplicando las formulas antes mencionadas.

Además en este ámbito se propuso realizar diferentes pruebas, con diferentes gastos y realizando hidrometría a diferentes distancias, cuyo objetivo es calcular la pérdida de gasto y calcular el porcentaje de error en gasto perdido para diferentes tipos de flujo (*flujo uniforme, flujo M1 y flujo M2*) al utilizar cada método propuesto antes mencionado, para la utilización a casos reales.

Además se presentarán los resultados de las gráficas obtenidas con la norma ISO-1070,1992, ecuaciones de Saint.-Venant conservativas y Saint-Venant conservativas con promedio en las dos secciones transversales para las dos pruebas realizadas.

**Nota:** La ecuación de la norma ISO-1070,1992, esta deducida para tres secciones transversales, para este trabajo se dedujo para dos secciones transversales, para estos fines se utilizaron las formulas (2.20, 2.28 y 2.32), además en estas pruebas de flujo permanente se realizaron dos pruebas en cauces las cuales son independientes de las pruebas de flujo transitorio.

#### A2.1.2 Descripción general del canal en estudio para la prueba A.1.

Para llevar a cabo la simulación de la prueba A.1, se utilizó un canal trapecial de sección transversal uniforme con una longitud de 2000 m, el cual se subdivide en cinco tramos de 400 m, contiene un ancho de 100 m,

rugosidad de Manning de 0.014, pendiente uniforme de 0.0001 y conduce un gasto de  $300 \text{ m}^3/\text{s}$ , como se muestra en la siguiente lamina.



Lámina A.2.1 Descripción del canal en estudio

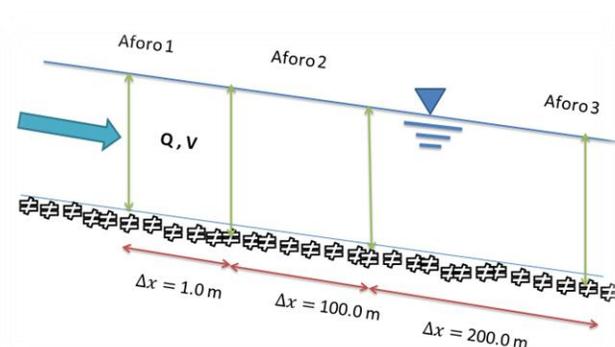


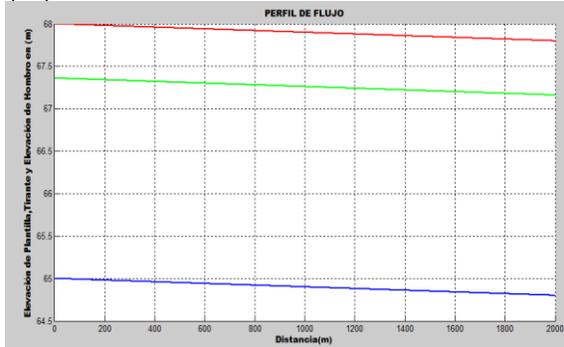
Lámina A.2.2 Descripción de los aforos en el canal

La prueba A.1, se basa en la utilización de la norma ISO 1070 (ISO-1070, 1992), ecuación de conservación de masa de Saint-Venant, deducida con la ecuación diferencial ordinaria de Flujo Gradualmente Variado, y Saint-Venant pero utilizando el área, perímetro y radio hidráulico promedio de dos secciones transversales. Para el cálculo del gasto en el canal de estudio descrito anteriormente, se emplearon las ecuaciones presentadas a continuación.

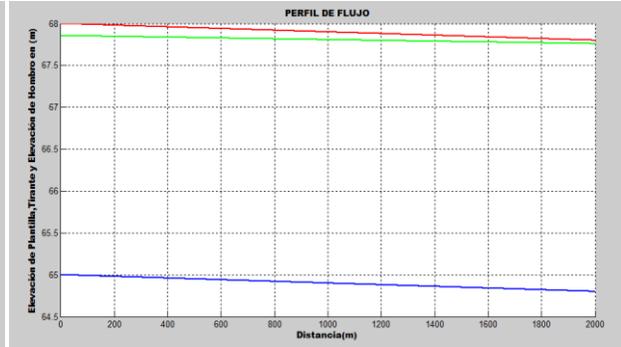
Las características hidráulicas de la sección transversal que se utilizaron para esta simulación en este caso los tirantes, para un perfil de flujo uniforme ( $y_n = 2.3606 \text{ m}$ ,  $y_f = 2.3606 \text{ m}$ ,  $y_c = 0.9670 \text{ m}$ ), para perfil de flujo m1, ( $y_n = 2.3606 \text{ m}$ ,  $y_f = 2.9606 \text{ m}$ ,  $y_c = 0.9670 \text{ m}$ ), para perfil de flujo m2,



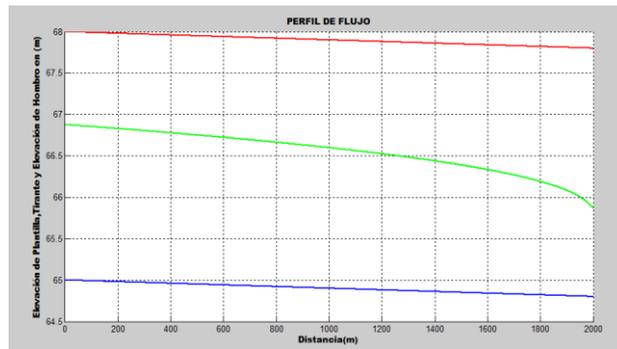
( $y_n = 2.3606\text{ m}$ ,  $y_f = 1.0606\text{ m}$ ,  $y_c = 0.9670\text{ m}$ ). Utilizando cada una de las fórmulas para flujo uniforme, que se mencionaron antes. Donde;  $y_n$  es el tirante normal (m);  $y_f$  es el tirante arbitrario (m);  $y_c$  es el tirante crítico (m).



Perfil de flujo uniforme



Perfil de flujo M1



Perfil de flujo M2

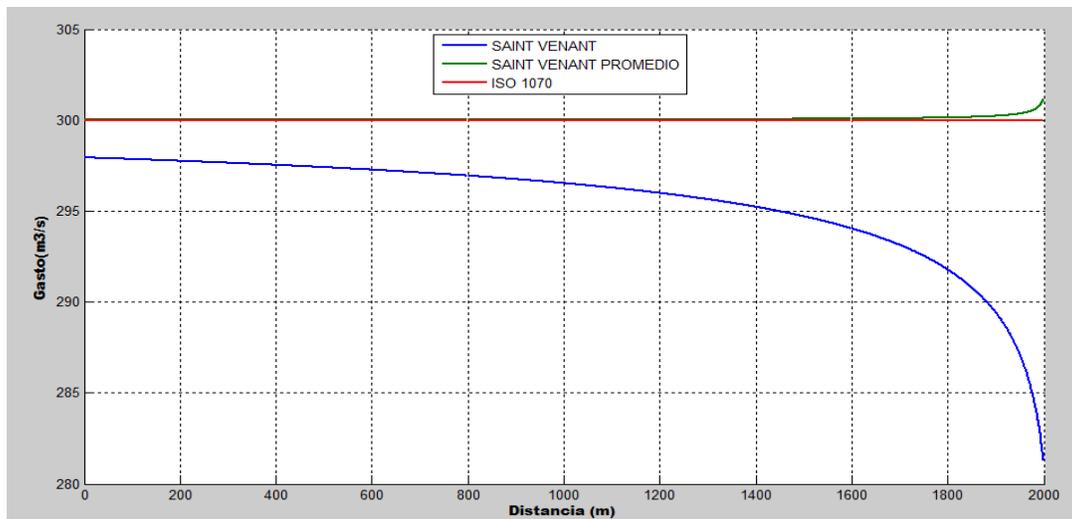


Lámina A.2.3 Relación distancia-gasto para una discretización de 1.0 m, utilizando las tres ecuaciones, para perfil  $m_2$



Para un  $\Delta x = 1.0 \text{ m}$  utilizando la norma ISO-1070,1992 (Ecuación. 2.20)

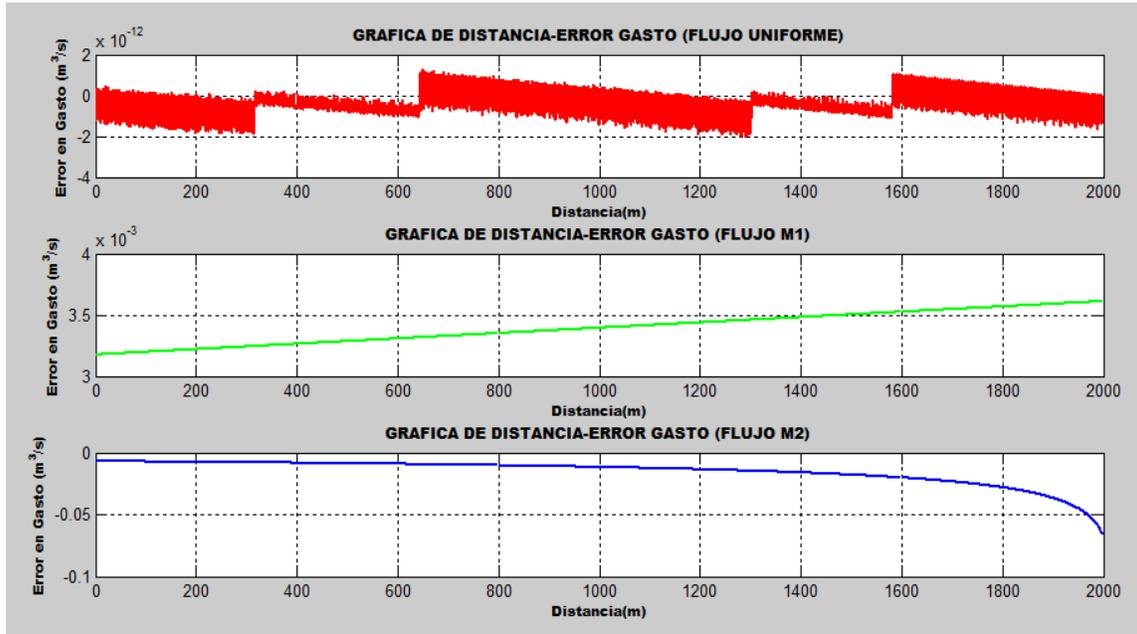


Lámina A.2.4 Relación distancia-error en gasto para una distancia de 1.0 m para los tres tipos de flujo

Para un  $\Delta x = 200.0 \text{ m}$  utilizando la norma ISO-1070,1992 (Ecuación. 2.20)

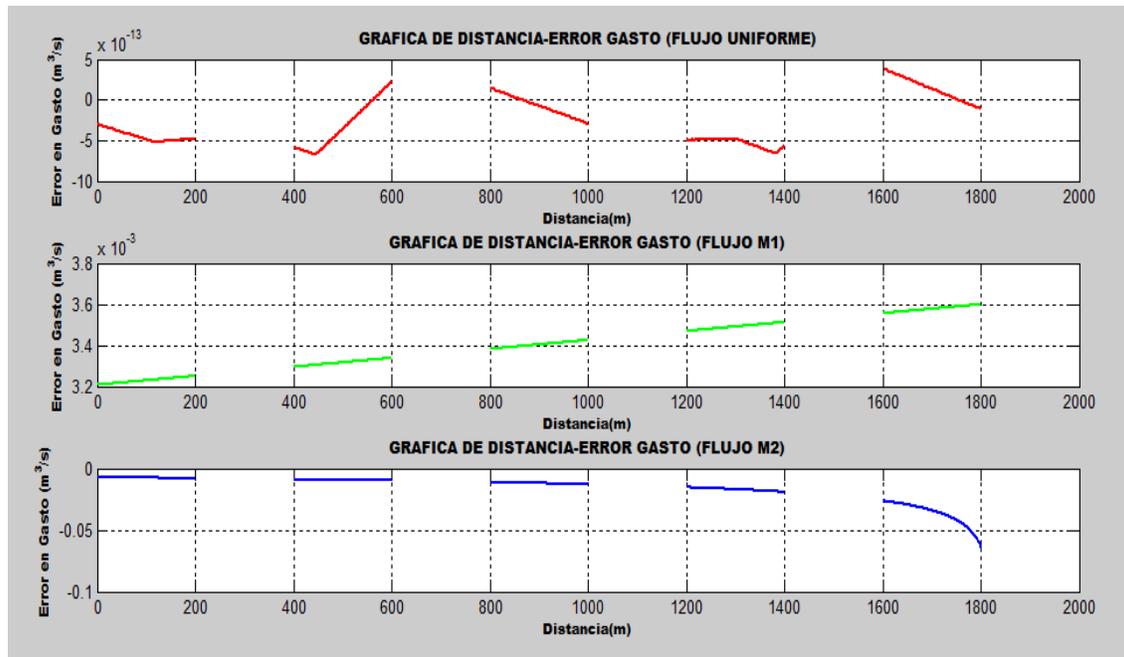


Lámina A.2.5 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 200 m para los tres tipos de perfiles de flujo



Para un  $\Delta x = 1.0$  m utilizando la ecuación de flujo gradualmente variado (Ecuación. 2.28)

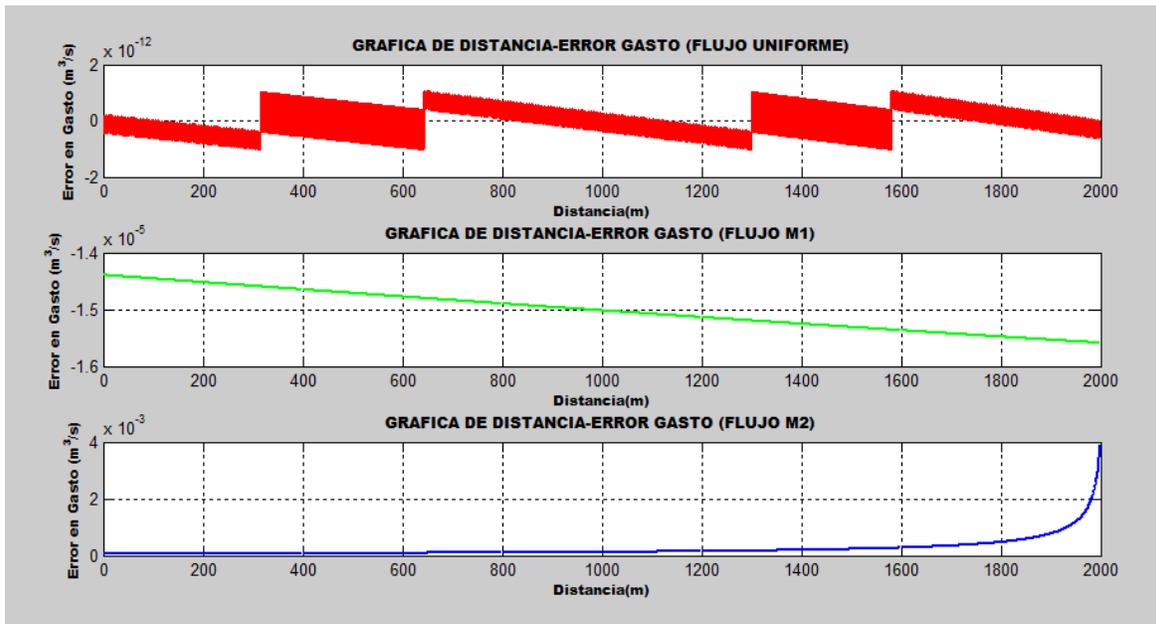


Lámina A.2.6 Relación distancia-error en gasto para una distancias de 1.0 m para los tres tipos de flujo

Para un  $\Delta x = 200.0$  m utilizando la ecuación de flujo gradualmente variado (Ecuación. 2.28)

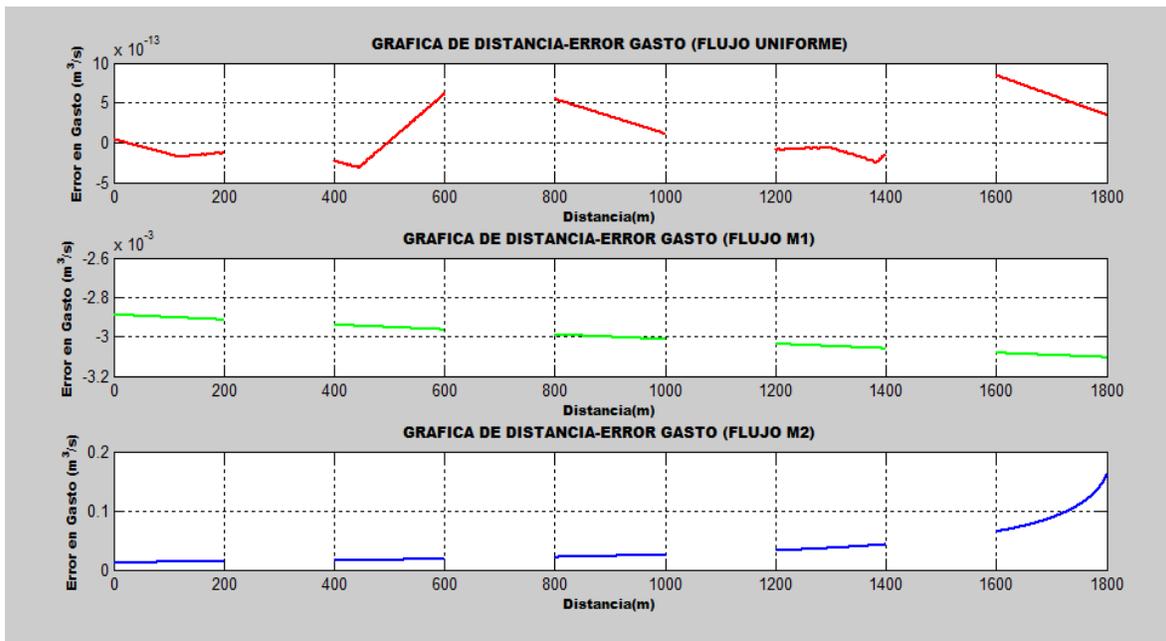


Lámina A.2.7 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 200 m para los tres tipos de perfiles de flujo



Para un  $\Delta x = 1.0$  m utilizando la ecuación de flujo gradualmente variado promedio (Ecuación. 2.32)

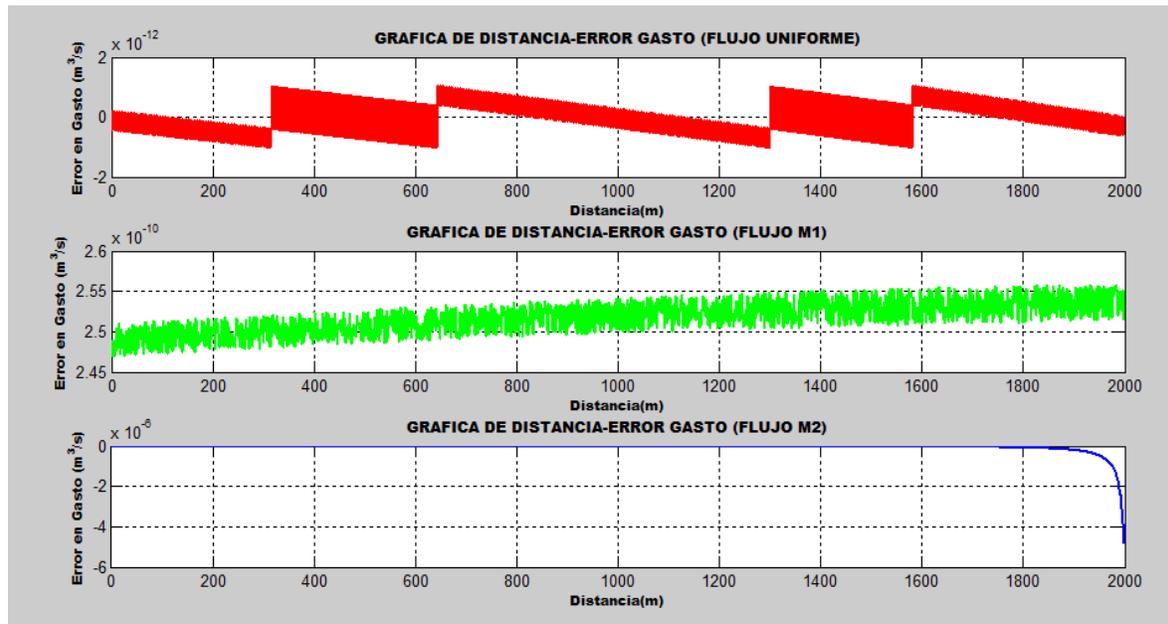


Lámina A.2.8 Relación distancia-error en gasto para una distancia de 1.0 m para los tres tipos de flujo

Para un  $\Delta x = 200.0$  m utilizando la ecuación de flujo gradualmente variado promedio (Ecuación. 2.32)

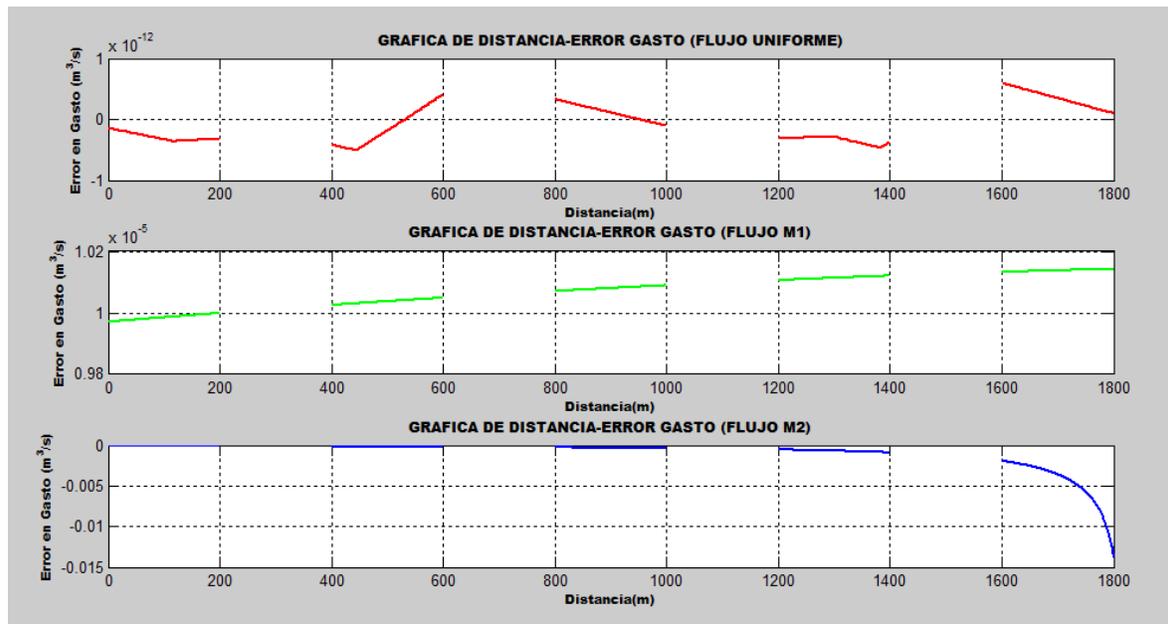


Lámina A.2.9 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 200 m para los tres tipos de perfiles de flujo



Para la prueba A.1 se realizaron distintos ensayos, así como para distintos tipos de flujo, utilizando diferentes gastos, distancias de hidrometría entre dos secciones transversales, longitud de canal, rugosidades y pendientes, capaces de demostrar cada una de estas ecuaciones y saber su exactitud de cálculo.

### A2.1.3 Descripción general en estudio del río Amazonas para la simulación de la prueba A.2.

El río Amazonas, es el río más caudaloso del mundo. Según estudios realizados en 2007 y 2008 también es de mayor longitud. Contiene mucha más agua que el Río Nilo, el Río Yangtze y el Río Misisipi juntos, además se supone que posee cerca de una quinta parte del agua dulce corriente del planeta.

El ancho del Amazonas es entre 1.6 y 10 kilómetros en su etapa baja, pero se expande durante la temporada húmeda hasta 48 kilómetros o más. El río entra en el Océano Atlántico en un amplio estuario con 240 kilómetros de ancho. Su anchura es variable, dependiendo de las crecientes, que en algunas partes llegan a inundar entre 20 y 50 km a ambos Lados.

Para el estudio de esta prueba para llevar acabo la simulación, se utilizó un tramo del Rio Amazonas de sección transversal uniforme con una longitud de 200 km, el cual se subdivide en dos tramos de 100 km, contiene un ancho de 3 km, rugosidad de Manning de 0.030, considerando corrientes en planicie, para cauces limpios, sin deslaves ni estancamientos profundos, con tirantes profundos, pendiente uniforme de 0.0001 y considerando un gasto de 100,000 m<sup>3</sup>/s.



Lámina A.2.10 Descripción del canal en estudio del Río Amazonas

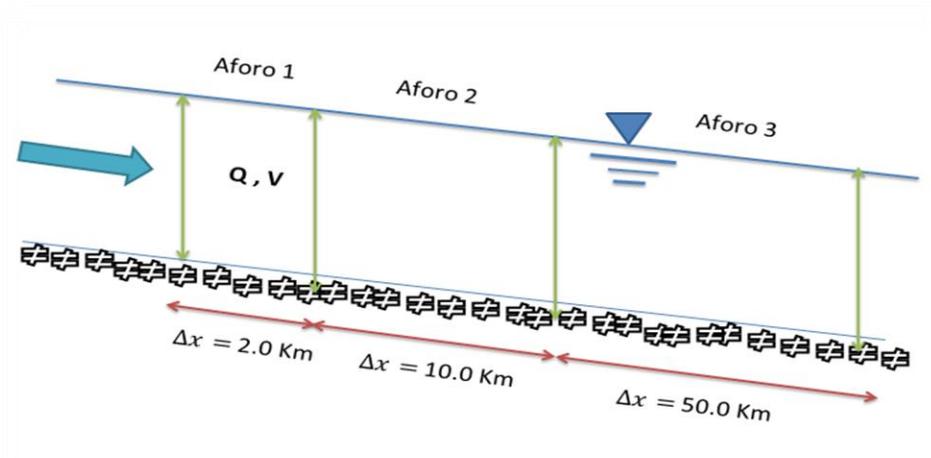
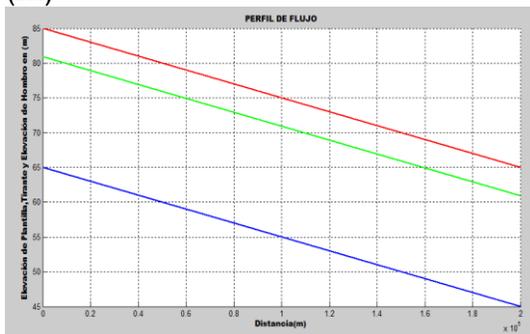
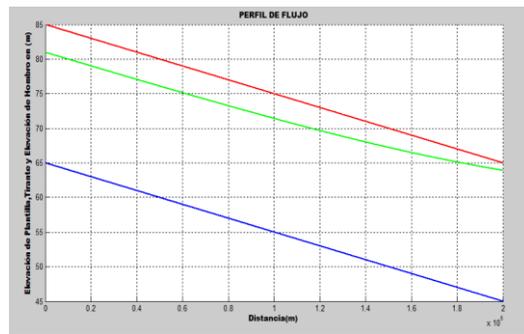


Lámina A.2.11 Descripción de los aforos en el Río Amazonas.

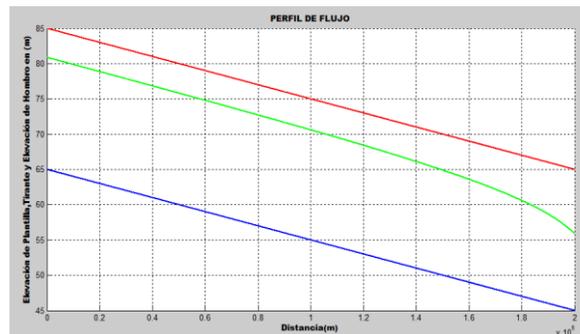
Las características hidráulicas de la sección transversal que se utilizaron para esta simulación en este caso los tirantes, para un perfil de flujo uniforme, ( $y_n = 15.9160\text{ m}$ ,  $y_f = 15.9160\text{ m}$ ,  $y_c = 4.8383\text{ m}$ ), para perfil de flujo m1, ( $y_n = 15.9160\text{ m}$ ,  $y_f = 18.9160\text{ m}$ ,  $y_c = 4.8383\text{ m}$ ), para perfil de flujo m2, ( $y_n = 15.9160\text{ m}$ ,  $y_f = 10.9160\text{ m}$ ,  $y_c = 4.8383\text{ m}$ ). Utilizando cada una de las fórmulas para flujo uniforme, que se mencionaron antes. Donde;  $y_n$  es el tirante normal (m);  $y_f$  es el tirante arbitrario (m);  $y_c$  es el tirante crítico (m).



Perfil de flujo uniforme



Perfil de flujo M1



Perfil de flujo M2

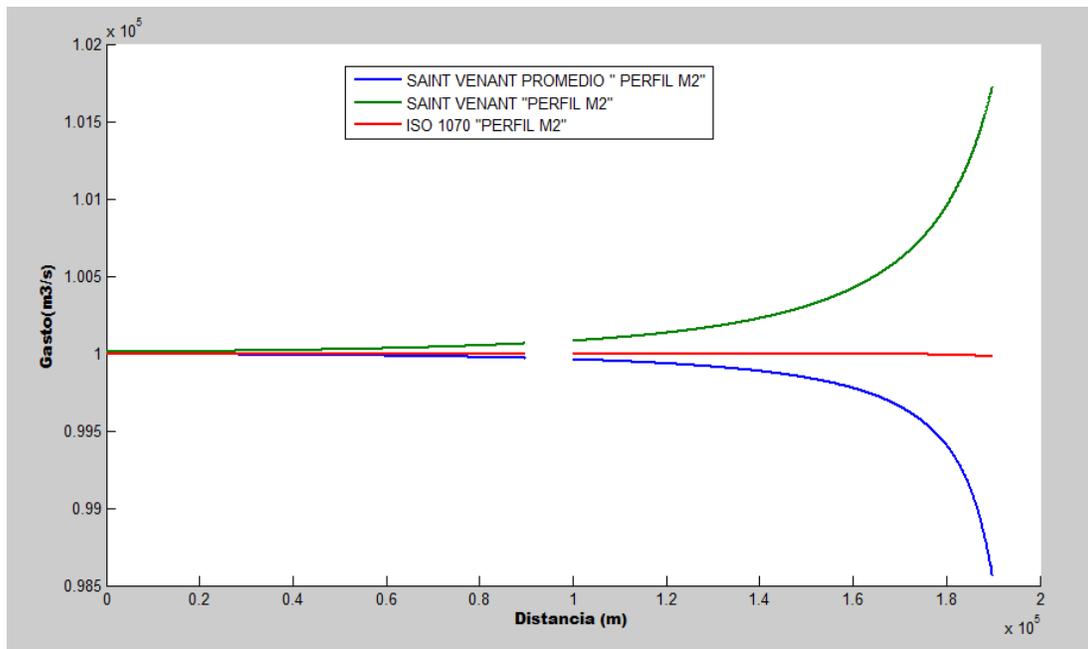


Lámina A.2.12 Relación distancia-gasto para una discretización de 10 km, utilizando las tres ecuaciones, para perfil  $m_2$

Para un  $\Delta x = 2.0$  km utilizando la norma ISO-1070, 1992 (Ecuación. 2.20)

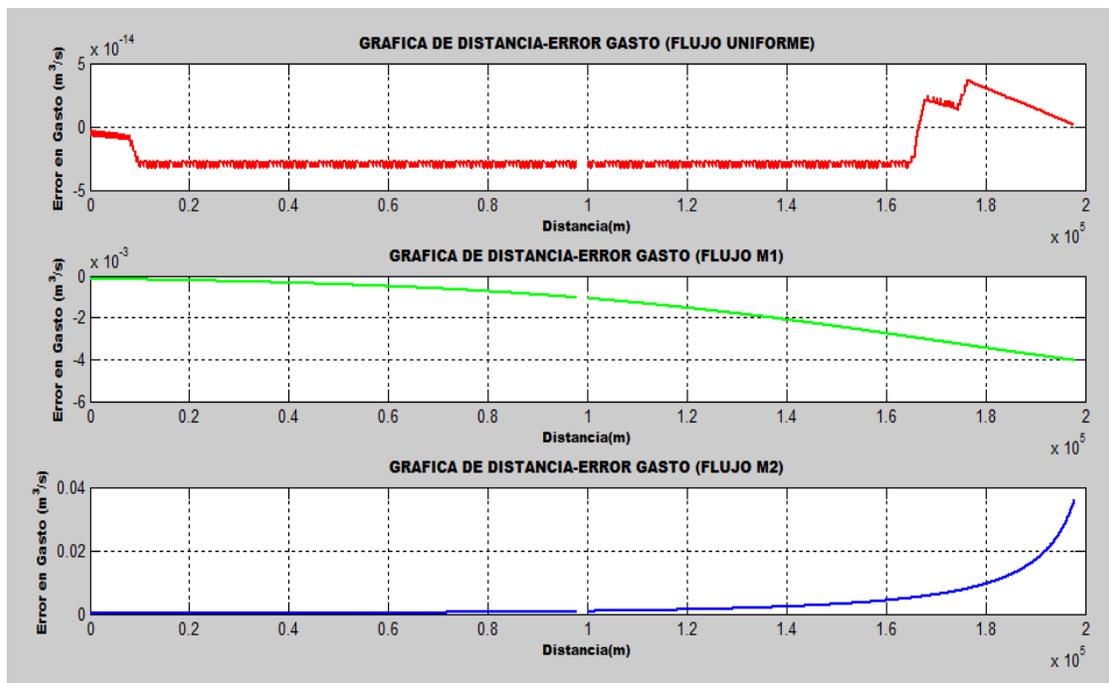


Lámina A.2.13 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 2.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo.



Para un  $\Delta x = 50.0$  km utilizando la norma ISO-1070,1992 (Ecuación. 2.20)

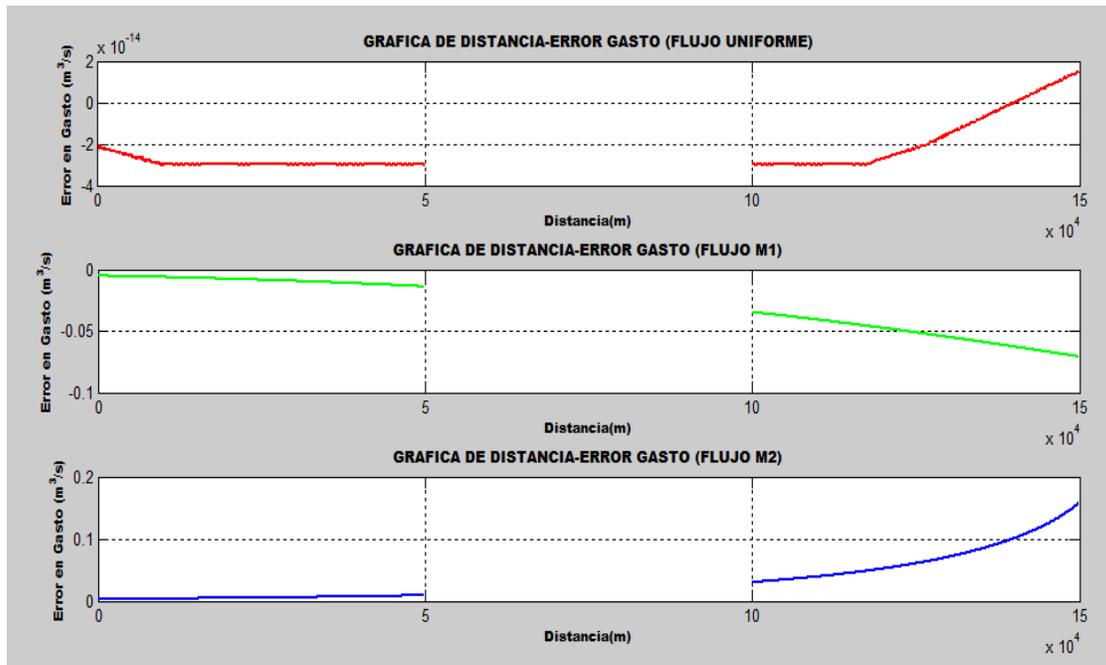


Lámina A.2.14 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 50 km para los tres tipos de perfiles de flujo.

Para un  $\Delta x = 2.0$  km utilizando la ecuación de flujo gradualmente variado (Ecuación. 2.28)

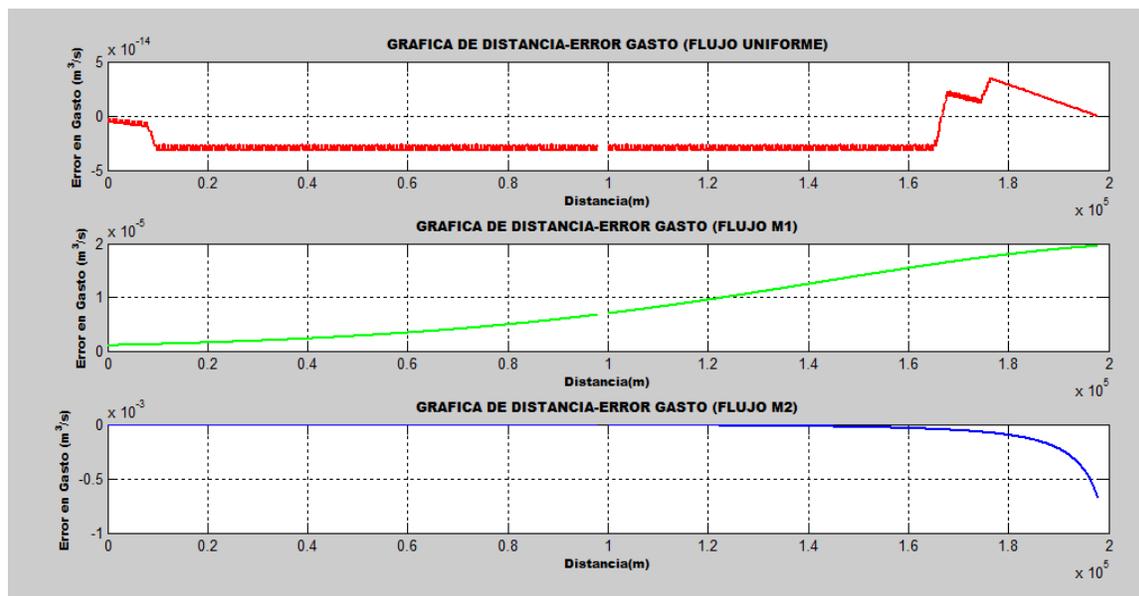


Lámina A.2.15 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 2.0 km para los tres tipos de flujo



Para un  $\Delta x = 50.0$  km utilizando la ecuación de flujo gradualmente variado (Ecuación. 2.28).

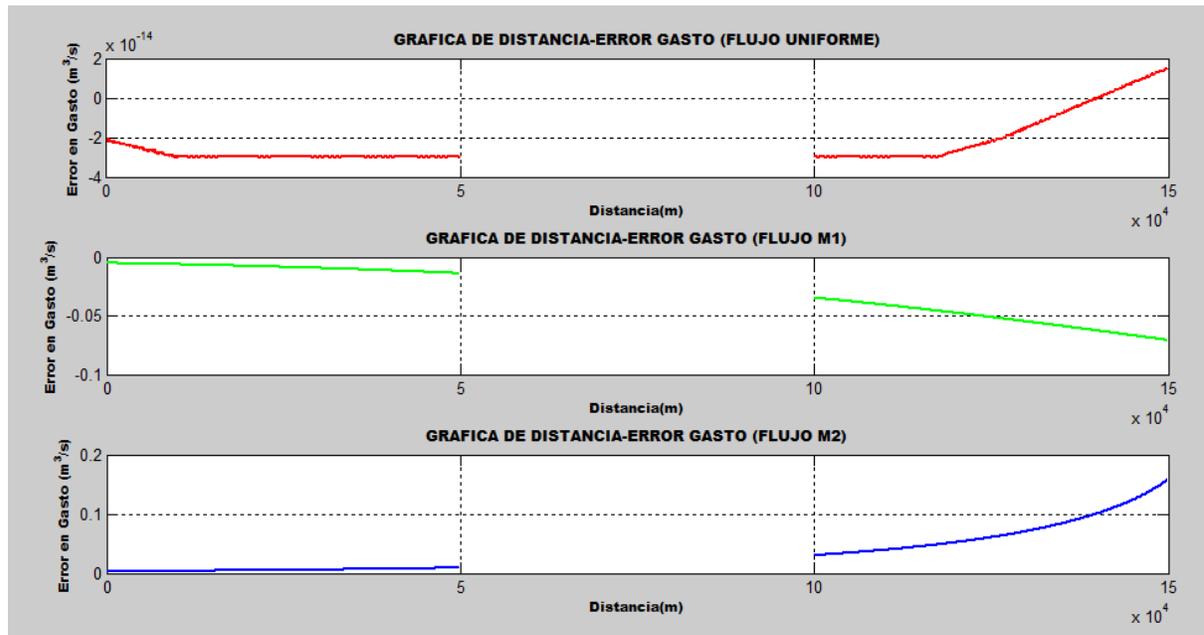


Lámina A.2.16 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 2.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo

Para un  $\Delta x = 2.0$  km utilizando la ecuación de flujo gradualmente variado promedio (Ecuación. 2.32)

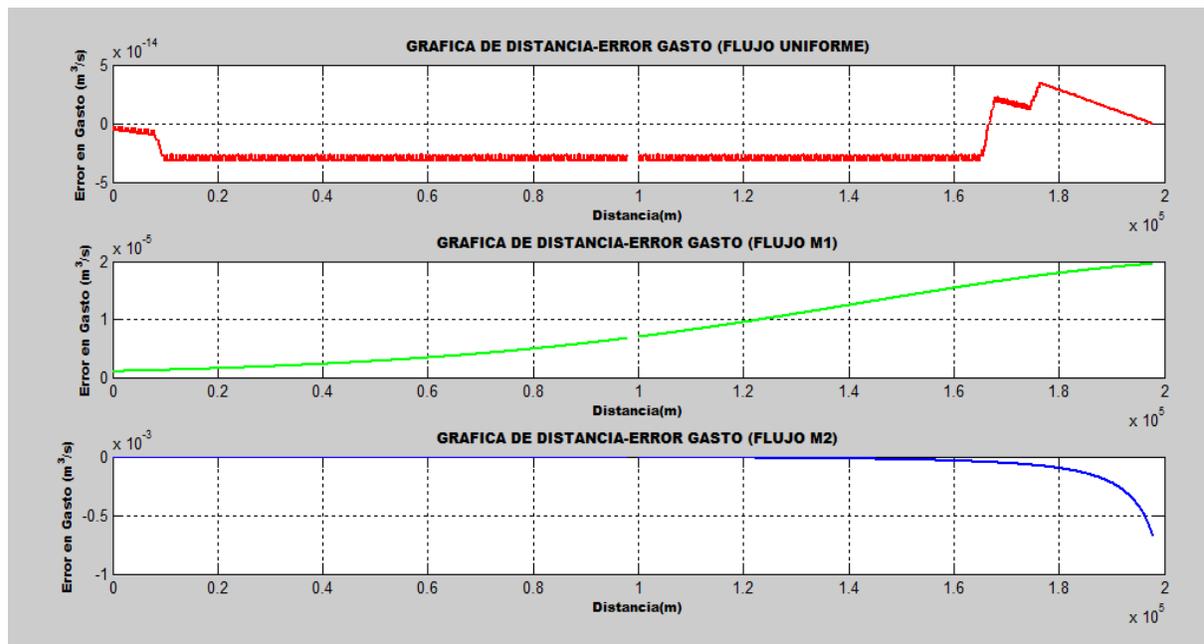


Lámina A.2.17 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 2.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo.



Para un  $\Delta x = 50.0$  km utilizando la ecuación de flujo gradualmente variado promedio (Ecuación. 2.32)

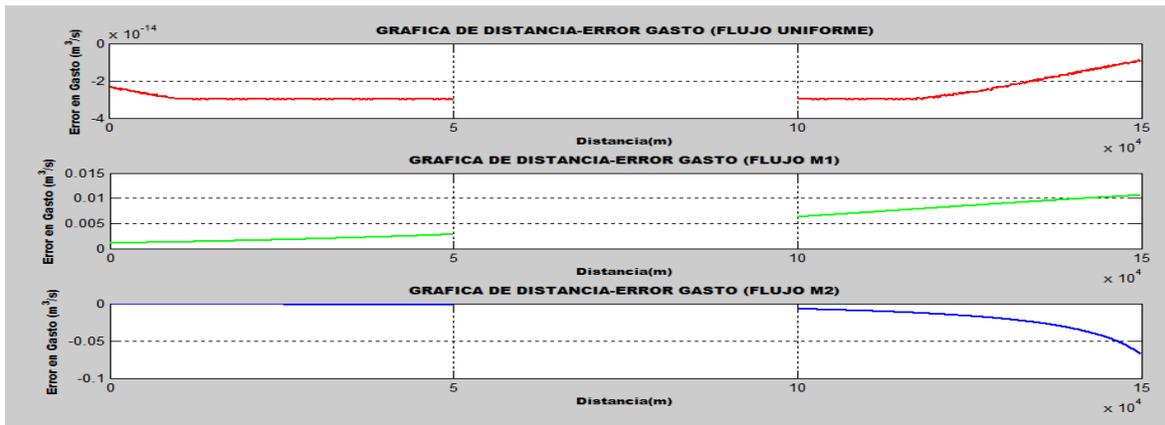


Lámina A.2.18 Relación distancia-error en gasto, para una discretización de 50.0 km para los tres tipos de perfiles de flujo

Para la prueba A.2 se realizó una sola simulación, donde se obtuvieron graficas como, distancia-error de gasto, distancia-gasto y distancia-tirante, donde se realizaron los mismos procedimientos que en la prueba A.1. En las siguientes tablas se resumen los datos que se obtuvieron realizando estas dos:

En esta tabla e muestran los errores que se obtuvieron al usar diferentes longitudes de medición de aforos para los diferentes tipos de flujo, usando la ecuación de la energía de la norma (ISO-1070,1992), Saint-Venant conservativa y la de Saint-Venant conservativa usando el área, perímetro y radio hidráulico como promedios entre las dos secciones. Aplicado a un tramo de canal de 2000 metros.

Delta X (M)	ERROR EN GASTO PARA DIFERENTES PERFILES DE FLUJO								
	Ecuación de la energía			Gradualmente variado			Gradualmente variado promedio		
	Flujo uniforme	Flujo M1	Flujo M2	Flujo uniforme	Flujo M1	Flujo M2	Flujo uniforme	Flujo M1	Flujo M2
1	< 1 X 10 <sup>-12</sup>	<-3 X 10 <sup>-3</sup>	-0.01 a - 0.07	< 1 10 <sup>-12</sup>	< 1.5 X 10 <sup>-3</sup>	< 4 X 10 <sup>-3</sup>	< 1 X 10 <sup>-12</sup>	< 2.5 X 10 <sup>-10</sup>	< 5 X 10 <sup>-6</sup>
100	< .5 X 10 <sup>-12</sup>	< 4 X 10 <sup>-3</sup>	< 7 X 10 <sup>-2</sup>	< 1 X 10 <sup>-12</sup>	< 1.5 X 10 <sup>-3</sup>	< 104 X 10 <sup>-2</sup>	< 1 X 10 <sup>-12</sup>	< -2 X 10 <sup>-6</sup>	< 8 X 10 <sup>-3</sup>
200	< .5 X 10 <sup>-12</sup>	< 4 X 10 <sup>-3</sup>	< 7 X 10 <sup>-2</sup>	< 6 X 10 <sup>-12</sup>	< 3 X 10 <sup>-3</sup>	< 0.15 X 10 <sup>-2</sup>	< 0.5 X 10 <sup>-12</sup>	< 1 X 10 <sup>-5</sup>	< 0.15 X 10 <sup>-1</sup>

Tabla A.2.1 Diferencias de gastos para diferentes perfiles de flujo e intervalos usando las tres ecuaciones



En esta tabla se muestran los errores que se obtuvieron al usar diferentes longitudes de medición de aforos para los diferentes tipos de flujo usando la ecuación de la energía de la norma ISO 1070 (ISO-1070, 1992), Saint-Venant conservativa y la de Saint-Venant conservativa usando el área, perímetro y radio hidráulico como promedios entre las dos secciones. Aplicado a un tramo del Rio Amazonas de 200 kilómetros.

Delta X (M)	ERROR EN GASTO PARA DIFERENTES PERFILES DE FLUJO								
	Ecuación de la energía			Gradualmente variado			Gradualmente variado promedio		
	Flujo uniforme	Flujo M1	Flujo M2	Flujo uniforme	Flujo M1	Flujo M2	Flujo uniforme	Flujo M1	Flujo M2
<b>1</b>	$< 4 \times 10^{-14}$	$< 1.5 \times 10^{-3}$	$< 7 \times 10^{-3}$	$< 4 \times 10^{-14}$	$< 1.5 \times 10^{-3}$	$< 35 \times 10^{-3}$	$< 3.5 \times 10^{-14}$	$< 2 \times 10^{-3}$	$< 0.7 \times 10^{-3}$
<b>100</b>	$< 3 \times 10^{-14}$	$< 2 \times 10^{-3}$	$< 15 \times 10^{-2}$	$< 4 \times 10^{-14}$	$< 18 \times 10^{-2}$	$< 0.1 \times 10^{-2}$	$< 3.5 \times 10^{-14}$	$< 5 \times 10^{-4}$	$< 8 \times 10^{-3}$
<b>200</b>	$< -1 \times 10^{-14}$	$< 2 \times 10^{-3}$	$< 7 \times 10^{-2}$	$< 1.5 \times 10^{-14}$	$< 7 \times 10^{-2}$	$< 0.15 \times 10^{-2}$	$< -1 \times 10^{-14}$	$< 10 \times 10^{-2}$	$< 0.55 \times 10^{-2}$

Tabla A.2.2 Diferencias de gastos para diferentes perfiles de flujo e intervalos usando las tres ecuaciones.

#### A2.1.4 Conclusiones de las pruebas realizadas en flujo permanente

A través de estas pruebas realizadas para flujo uniforme o permanente, se obtuvieron resultados capaces de representar las diferencias que se tiene en flujo (gasto) al aplicar la ISO-1070,1992 y las ecuaciones de flujo espacialmente variado. A continuación se muestran las conclusiones que se obtuvieron para cada una de las pruebas:

Para la prueba A.1 y A. 2 se puede observar en la tabla A.2.1 y A.2.2, la ecuación de flujo espacialmente variado, tomando las secciones aguas arriba y aguas abajo como promedio, formula (2.32), es la que menos error de flujo se tiene, comparándola con las otras ecuaciones, además se puede concluir, que no existe mucha diferencia si se realizan hidrometrías con discretizaciones grandes o pequeños, el error es relativamente muy poco.

Otro punto importante que se observó en estas simulaciones, en la lámina A.2.7, calculado el perfil  $m_1$  y  $m_2$  con la ecuación de flujo gradualmente variado, ecuación (2.28), el perfil da inverso, se debe a que las características hidráulicas del canal se toman en un solo punto (*solamente se considera la sección transversal la uno o la dos*), lo cual no calcula el gasto a la mitad como lo hace la ecuación (2.28), que considera las características hidráulicas como promedio en las dos secciones.



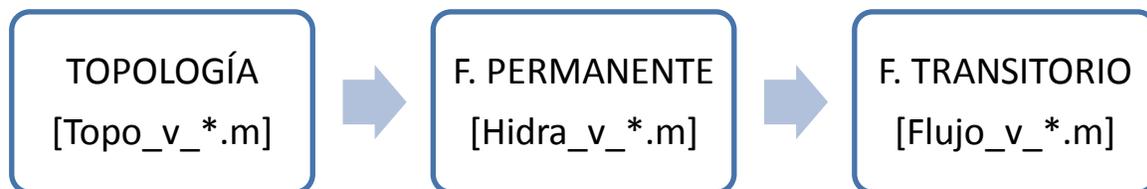
Para las pruebas simuladas, se realizaron diferentes tipos de gráficas para observar su comportamiento hidráulico y observar cómo se comportaba el error en el gasto utilizando cada una de las ecuaciones y poder obtener una conclusión más detallada, las gráficas que se obtuvieron fueron, distancia-error en gasto, distancia-gasto y distancia-tirante, las cuales no se implementaron en el trabajo por el tamaño del cuerpo del documento que se pidió.

## ANEXO 3 DISEÑO DEL SISTEMA DE SIMULACIÓN DE CANALES

### A3.1 Alcance

Modelo en 1-D con las ecuaciones de Saint-Venant, solución a flujo permanente y transitorio.

SECUENCIA GENERAL



Módulos independientes

La información se maneja con una estructura

Base de datos

#### A3.1.1 Esquema general del cauce

1 Módulo de Topología

Tramo es la ubicación de dos secciones transversales conocidas del canal.

[Variable]: tramo = número de tramos

Cada tramo x, puede tener varias secciones

[Variable]: secciones [ i , ] = j

i = 1 : tramo y j es el número de secciones en el tramo

Objetivo

Determinar las siguientes características:

ÁREA HIDRÁULICA

PERÍMETRO MOJADO

ANCHO DE LA SUPERFICIE

PENDIENTE TOPOGRÁFICA

Datos para cada sección:



## TOPOGRAFÍA

Cadenamiento (m)

Elevación del fondo de la sección (m)

Elevación del hombro (m)

Geometría:

Tipo de sección

Trapezoidal [1]

Circular [2]

Herradura [3]

Medio punto [4]

Irregular [5]

Elev\_fondo [ i , j ]

Elev\_hombro [ i , j ]

Cadenamiento [ i , j ]

Tipo\_seccion [ i , j ]

Datos de geometría por tipo de sección

Si Tipo\_seccion ( ) == 1

Base

Talud

Si Tipo\_sección ( ) == 2,3

Diámetro

Si Tipo\_sección ( ) == 4

Diámetro

Ancho

Si Tipo\_sección ( ) == 5

Máximo número de segmentos: 10 valores

Ancho [ i = 1 : N ]

Elevación [ i = 1 : N ]

Variable geométrica por sección

geo [ i , j , k ] = [ 1:21 ]

Para el caso con más datos:

geo ( i , j , 1 ) = Número de secciones

geo ( i , j , 1 ) = Ancho 1

geo ( i , j , 1 ) = Ancho 10

geo ( i , j , 1 ) = Elevación 1

geo ( i , j , 1 ) = Elevación 10

Resumen del módulo

Topología. Tramo



```
Secciones(1:tramo) *Máximo 10
Elev_fondo(tramo,10)
Elev_hombro(tramo,10)
Cadenamiento(tramo,10)
Tipo_sección(tramo,10)
geo(tramo,10,21)
dx(tramo)
```

ESTRUCTURA: geometría.mat

Para generar el archivo geometría.mat, se tiene como ejemplo el código [Geo\_v\_1\_0.m]

### A3.1.2 Módulo de interpolación

Con los datos topológicos y definidos en el archivo geometría.mat, se procede a generar los coeficientes de interpolación.

Variables de ingreso de datos [geometría.mat]:

```
% nombre      tipo , referencia
% geo.Nom_canal ;char , nombre del canal
% geo.ntramo   ;int  , número de tramos
% geo.secciones ;int  , número de secciones por tramo
% geo.Elev_fondo ;float , elevación del fondo de cada sección
% geo.Elev_hombro ;float , elevación del hombro de cada sección
% geo.cadenamiento;float , ubicación longitudinal de la sección
% geo.tipo_seccion;int  , tipo de sección
% geo.geo      ;float , características geométrica de cada sección
% geo.ax       ;float , discretización espacial
%-----
```

Variables de cálculo de interpolación

El procedimiento de cálculo es generar los ajustes de la curva de área, perímetro y ancho en cada tramo y para sección definida geo.secciones, entonces las matrices de cálculo intermedio son:

```
% Variables de polinomios de interpolación para cada tramo y sección
% topo.area_s ;float, coeficientes de ajuste para área por sección
% topo.ancho_s ;float, coeficientes de ajuste para ancho por sección
% topo.per_s ;float, coeficientes de ajuste para perímetro por sección
% topo.area_i ;float, coeficientes de ajuste para área interpolada
% topo.ancho_i ;float, coeficientes de ajuste para ancho interpolada
% topo.per_i ;float, coeficientes de ajuste para perímetro interpolada
```



Una vez conocidos los coeficientes geométricos se procede a generar los coeficientes que definirán las características geométricas, en las secciones intermedias o se puede decir como interpoladas.

El algoritmo es el siguiente:

- a) Definición del índice de cadenamamiento, entonces se tiene
- |              |                               |
|--------------|-------------------------------|
| i=1: tramo   | número de tramo               |
| j=1: sección | número de secciones por tramo |
| ax (i)       | espaciamiento en cada tramos  |
| L (i)        | longitud de cada tramo        |
- b) Con estas variables se construirá el índice de cada sección de interpolación por tramo, entonces

$$k (i=1:ntramo) = (cad\_final - cad\_inicial) / ax$$

nota: k debe ser un número entero

Las variables de guardado global de datos para utilizarse por los códigos de cálculo numérico son:

hidra.ntramo	= geo.ntramo	[número de tramos]
hidra.N_Stramo	= zeros(1, hidra.ntramo)	[número de secciones por tramo]

Entonces se tienen las matrices de guardado de datos de área, ancho, perímetro, cadenamamiento, elevación de fondo y elevación del hombro. El tamaño de estos arreglos es [hidra.ntramo]x[valor máximo de hidra.N\_Stramo], en sí tiene un tercera dimensión en los arreglos, las es tamaño 5 en las características topológicas y de orden 1 para las demás variables.

hidra.area_s	= zeros(5, hidra.ntramo, max(hidra.N_Stramo))	[coeficientes de área]
hidra.ancho_s	= zeros(5, hidra.ntramo, max(hidra.N_Stramo))	[coeficientes de ancho]
hidra.per_s	= zeros(5, hidra.ntramo, max(hidra.N_Stramo))	[coeficientes de perímetro]
hidra.x	= zeros(hidra.ntramo, max(hidra.N_Stramo))	[cadenamiento]
hidra.z	= zeros(hidra.ntramo, max(hidra.N_Stramo))	[elevación del fondo]
hidra.hombro	= zeros(hidra.ntramo, max(hidra.N_Stramo))	[elevación del hombro]

Todos los valores se guardan en un archivo Dat\_hidra\_xxx.mat y solo se debe incluir la matriz hidra.



### A3.1.3 Módulo de cálculo de flujo espacialmente variado

Datos de ingreso:

Lectura del archivo `Dat_hidra_xxx.mat`, generado con el código `Topo_v_1_0.m`, adicionalmente se ingresaran las condiciones de flujo para cada tramo:

Las matrices de datos de condiciones de flujo son:

Tipo de régimen de flujo de análisis de flujo

Variable: `hidra.Tregimen[a]` ; subcrítico =1 y supercrítico =2

Gasto en cada tramo

Variable: `hidra.q=zeros(itera, hidra.ntramo,max(hidra.N_Stramo))`

El gasto en la primera sección del primer tramo `hidra.q(1,1,1)` , es el gasto de ingreso al sistema.

La variable `itera`, es la condición de variación de gasto para flujo no permanente y de cálculo de las iteraciones no lineales, pero en la condición inicial sólo se harán cálculos para `itera=1`, pero se dejará definido ya que arreglo de datos `hidra.xxx` se utilizará en cálculo de flujo no permanente.

Gasto lateral en cada tramo

Variable: `hidra.q_lat=zeros(hidra.ntramo,max(hidra.N_Stramo))`

Para fines de congruencia en el manejo de los datos el gasto lateral en la primera sección de cada tramo deberá ser nulo, si el flujo de salida es puntual (flujo de salida de un río o un canal lateral), entonces se especifica como flujo lateral repartido un incremento de distancia discreto `dx`.

Nivel del flujo

Para condición de flujo subcrítico se debe definir el nivel del agua aguas abajo y esta debe cumplir que no se tenga cambio de régimen. Con el fin de tener un modelo versátil se propone que aguas abajo en la última sección se tenga una condición de descarga con una ley de Carga Gasto.

Variable: `hidra.nivel_descarga=[a,b,c]`,

Si `a=1`; es una ley con nivel mínimo para gasto nulo (coeficiente `b`) y una variación lineal para gasto mayor que cero (coeficiente `c`),

Si `a=2`; es una ley con una condición de frontera de flujo (coeficiente `b`) con un nivel definido para la condición inicial y luego adicionar el número de valores de promediado en la sección final (coeficiente `c`), se recomienda dar un valor `c=2` (modelo con diferencia centrada)

Tirante y área

Variable de nivel y área en toda la región de flujo

Variables: `hidra.a=zeros(itera, hidra.ntramo,max(hidra.N_Stramo))`

`hidra.y=zeros(itera, hidra.ntramo,max(hidra.N_Stramo))`



### A3.1.4 Cálculo del flujo espacialmente variado

Sea el sistema de ecuaciones de Saint-Venant de conservación de masa (2.33) y de cantidad de movimiento (2.34):

Para la condición inicial  $t = 0$ , las ecuaciones (2.27) y (2.28) se expresan como:

$$L(A, Q; x, 0) = 0 + \frac{dQ}{dx} = q(x, t) \quad (2.33)$$

$$M(A, Q; x, 0) = \frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{dh(A; x, t)}{dx} + gAS_f(A, Q; x, 0) = 0 \quad (2.34)$$

Siendo:

$$h(A; x, 0) = y(A; x, 0) + z_b(x) \quad (A3.1)$$

$$S_f(A, Q; x, 0) = \alpha \left[ \frac{K_s}{R(A; x, t)} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{|Q|Q}{R(A; x, t)A^2g} \quad (A3:2)$$

Para evaluar el término que contiene el nivel de la superficie libre del agua como se define en la ecuación (A3.1), la variación espacial del nivel de la superficie libre del agua en (2.28), se puede escribir de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dh(A; x)}{dx} &= \frac{d}{dx} [y(A; x, t) + z_b(x)] = \frac{dy(A; x, t)}{dx} + \frac{dz_b(x)}{dx} \\ \frac{dh}{dx} &= \frac{dy}{dx} - S_b \end{aligned} \quad (A3.3)$$

Donde  $S_b(x)$  es la pendiente longitudinal del fondo del canal.

Entonces, sustituyendo la ecuación (A3.3) en la ecuación de cantidad de movimiento para condición inicial (2.34) y agrupando, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} M_o(A, Q; x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left( \frac{dy}{dx} - S_b \right) + gAS_f(A, Q; x) = 0 \\ M_o(A, Q; x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{dy}{dx} + gA(S_f - S_b) = 0 \end{aligned} \quad (A3.4)$$



En la ecuación (2.33) se determina el ingreso (extracción) lateral, tal que:

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (\text{A3.5})$$

Integrando se obtiene:

$$Q_2 - Q_1 = \int_1^2 q(x) dx \quad (\text{A3.6})$$

Para evaluar la variación de la cantidad de movimiento, desarrollaremos la derivada del término convectivo de la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2AQ \frac{dQ}{dx} - Q^2 \frac{dA}{dx}}{A^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA}{dx} \quad (\text{A3.7})$$

Sustituyendo (A3.7), en la ecuación (A3.4):

$$M_o(A, Q; x) = \frac{2Q}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA}{dx} + gA \frac{dy}{dx} + gA(S_f - S_b) = 0 \quad (\text{A3.8})$$

Considerando al tirante como la nueva variable independiente del sistema  $y(x)$  en lugar del área, esta última quedará entonces en función del tirante, tal que  $A(y; x)$  y aplicando la regla de la cadena sobre el término diferencial donde está contenida el área, desarrollamos la ecuación (A3.8):

$$M(Q, y; x) = \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A(y, x)}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA(S_f - S_b) = 0$$

$$M(Q, y; x) = \frac{2Q}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} + gA \frac{dy}{dx} + gA(S_f - S_b) = 0 \quad (\text{A3.9})$$

Considerando que:

$$B(A; x, t) = \frac{dA}{dy} \quad (\text{A3.10})$$

Donde  $B(A; x, 0)$  es el ancho de la superficie del agua en la sección transversal y  $S_b(x)$  la pendiente longitudinal del fondo del canal; sustituimos en (A3.9) la ecuación (A3.5), la (A3.10) y multiplicando por el



término  $gA$  cada elemento, construimos la ecuación que define la condición inicial de flujo:

$$\frac{2Q}{gA^2}q - \frac{Q^2B}{gA^3} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + S_f - S_b = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{Q^2B}{gA^3} \right) = S_b - S_f - \frac{2Q}{gA^2}q$$

$$\frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{Q^2}{A^2g \frac{A}{B}} \right) = S_b - S_f - \frac{2Q}{gA^2}q$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_b - S_f - \frac{2Q}{gA^2}q}{\left( 1 - \frac{Q^2}{A^2g \frac{A}{B}} \right)}$$

(A3.11)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_b - S_f - \frac{2Q}{gA^2}q}{(1 - Fr^2)}$$

Siendo  $Fr$  por definición es el Número de Froude:

$$Fr = \frac{Q}{A\sqrt{g \frac{A}{B}}}$$

(A3.12)

La ecuación (A3.11) representa la condición inicial de las ecuaciones de Saint-Venant y también se le conoce como la ecuación de Flujo Espacialmente Variado. En caso de no existir ingreso o extracción lateral, es decir  $q = 0$ , la condición inicial se define como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_b - S_f}{(1 - Fr^2)}$$

(A3.13)

La ecuación anterior es una diferencial ordinaria de Flujo Gradualmente Variado y se aplicó en la generación de la condición inicial del modelo MNSV en todas las pruebas de este trabajo.

Modelo de flujo a superficie libre no lineal

El modelo numérico de solución de la ecuaciones discretas de Saint-Venant se describen en el documento (Aguilar-Chávez, 2002).