1. FUNDAMENTOS DE SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA

El estudio de los sistemas eléctricos de potencia está relacionado con la generación, distribución y utilización de la potencia eléctrica (fig. 1.1). La primera de estas (la generación de la potencia eléctrica) se refiere a la conversión de energía de una forma no eléctrica (como la térmica, hidráulica y solar) en energía eléctrica.

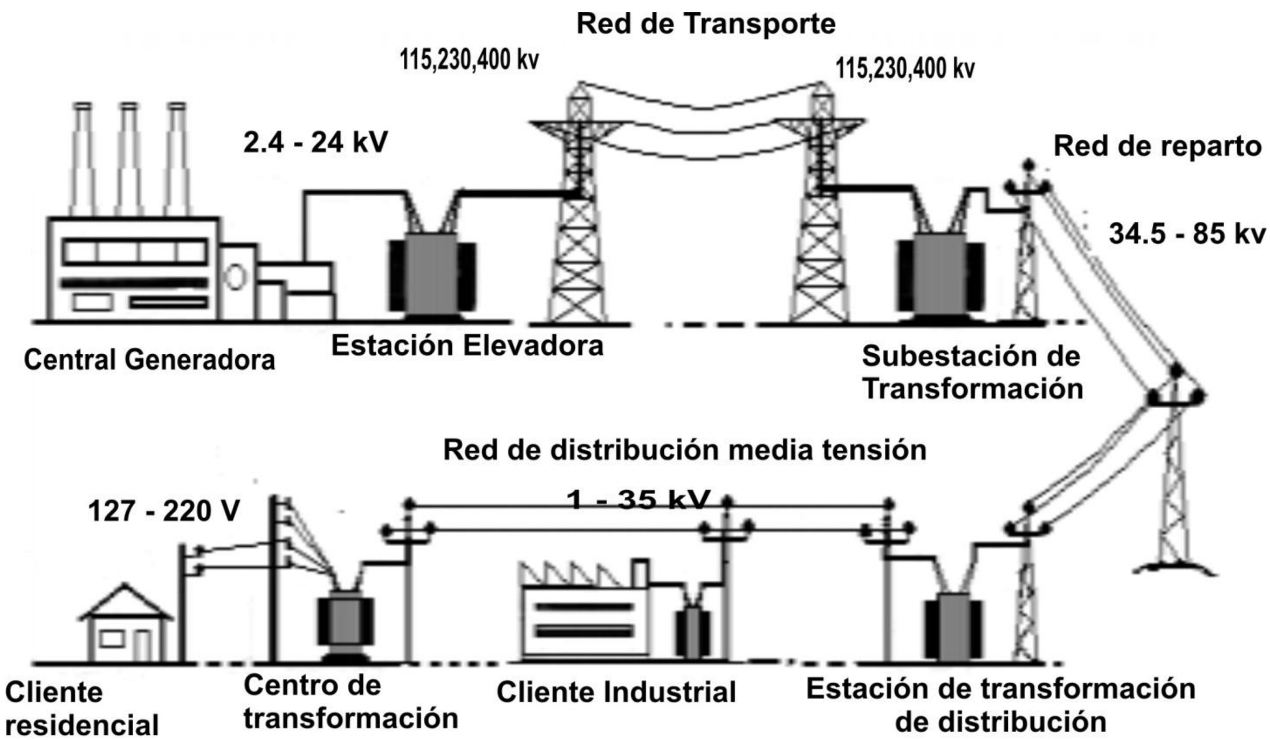


Figura 1.1 – Sistema eléctrico de potencia.

1.1 Energía y potencia

Es más fácil explicar para qué sirve la energía que tratar de definir su esencia. Quizás esa sea la causa por la cual la definición más breve y común establezca que la energía es todo aquello capaz de producir o realizar algún trabajo, lo cual en última instancia no es sino la expresión de una relación física.

La evolución de la humanidad ha estado ligada a la utilización de la energía en sus distintas formas. Sin lugar a dudas, el descubrimiento del fuego, su producción y control marcan el primer acontecimiento importante en la historia de la sociedad, que al correr de los siglos, cada vez que el hombre ha encontrado una nueva fuente de energía o creado un procedimiento distinto para aprovecharla, ha experimentado grandes avances.

El aprovechamiento de la fuerza de tracción de los animales permitió el desarrollo de la agricultura; fue así como algunos pueblos nómadas se asentaron y establecieron las bases para el surgimiento de las antiguas culturas. La utilización de la energía del viento mediante la invención de la vela dio un fuerte impulso a la navegación, al comercio y al intercambio de ideas y conocimientos entre los pueblos de la antigüedad.

El empleo de la energía cinética de las corrientes de agua en la rueda hidráulica, libero al hombre de cantidad de tareas que requerían gran esfuerzo físico y dio lugar a la creación de los primeros talleres y fabricas, remotos antecedentes de las modernas plantas industriales.

La invención de la máquina de vapor origino una verdadera revolución social y económica a fines del siglo XVIII y principios del XIX, propiciando la transición del trabajo artesanal a la producción masiva.

Existen otras fuentes de energía térmica naturales, la más importante de este tipo de energía es el sol. Si todos los combustibles disponibles se quemaran para proporcionar a la tierra el calor que diariamente recibe de este astro, en unos cuantos días se agotarían todas nuestras reservas. Los hidrocarburos y el carbón, que en última instancia son producto de la energía solar, siguen al sol en orden de importancia como fuentes de energía térmica, que liberan calor al quemarse. A pesar de que el carbón fue el primero que empleo el hombre, son el petróleo y el gas natural los que actualmente se encuentran en vías de desaparecer debido a su explotación exhaustiva. Las reservas detectadas apenas garantizan su disponibilidad hasta los primeros lustros del siglo XXI de acuerdo con las tasas actuales de incremento en su consumo.

Así mismo, los enormes avances de nuestra época han sido posibles, fundamentalmente, debido al uso de la energía eléctrica, al aprovechamiento del petróleo y más recientemente al empleo de la energía nuclear. A principios del siglo XX Albert Einstein, postulo que todo el universo es energía; que ésta y la materia son la misma cosa y que entre ambas existe una relación definida que puede expresarse en la formula $E = mc^2$ (en la que “E” es igual a la energía; “m” es la masa y “c” la velocidad de la luz). Gracias a esta propiedad, el hombre dispone hoy de una fuente importante de energía, que le permitiría a corto plazo sustituir y complementar a las otras fuentes.

Ahora bien dicho lo anterior podríamos decir que la energía de un cuerpo es su capacidad para realizar un trabajo. La energía tiene la misma unidad que el trabajo, aunque se usan algunas otras unidades para las diferentes formas de energía. Para la energía eléctrica la unidad fundamental es el watt por segundo (W * s), donde:

$$1\ W * s = 1\ J \tag{1.1}$$

Sin embargo, es más común que la energía eléctrica se mida en kilowatt horas (kWh).

Entonces:

$$1\ \text{kWh} = 3.6 \times 10^6\ \text{J} \qquad (1.2)$$

Las dos formas más importantes de la energía mecánica son la energía cinética y la energía potencial. Un cuerpo posee energía cinética (EC) en virtud de su movimiento, tal que un objeto de masa M (en kilogramos), que se mueve con una velocidad u (en metros por segundo), posee energía cinética determinada por:

$$EC = (1/2)\ Mu^2 \ \ \text{(en Joules)} \qquad (1.3)$$

Un cuerpo posee energía potencial (EP) en virtud de su posición. Por ejemplo, la energía potencial gravitacional resulta de la posición de un objeto en un campo gravitacional. Un cuerpo de masa M (en kilogramos), situado a una altura h (en metros), sobre la superficie de la tierra tiene una energía potencial gravitacional (EP) dada por:

$$EP = Mgh \ \ \text{(en joules)} \qquad (1.4)$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad, en metros por segundo cuadrado.

La energía térmica se mide generalmente en calorías (cal). Por definición, una caloría es la cantidad de calor requerida para elevar en un grado Celsius la temperatura de un gramo de agua a 15°C. Una cantidad más común es la kilocaloría (kcal). Experimentalmente, se ha encontrado que:

$$1\ \text{cal} = 4.186\ \text{J} \qquad (1.5)$$

Otra unidad más de energía térmica es la unidad térmica británica (BTU), la cual se relaciona con el joule y la caloría como sigue:

$$1\ \text{BTU} = 1.055 \times 10^3\ \text{J} = 0.252 \times 10^3\ \text{cal} \qquad (1.6)$$

Puesto que el joule y la caloría son unidades relativamente pequeñas, la energía térmica y la energía eléctrica se expresan en términos de la unidad térmica británica y el kilowatt hora (o en mega watt hora), respectivamente.

Una unidad más grande de energía es el quad, o sea las siglas de un cuatrillón en unidades térmicas británicas.

Las relaciones entre estas unidades son:

$$1\ \text{quad} = 10^{15}\ \text{Btu} = 1.055 \times 10^{18}\ \text{J} \qquad (1.7)$$

La POTENCIA se define como la razón del tiempo en que se realiza trabajo. En otras palabras, la potencia es la razón del cambio de energía en el tiempo. Así, la potencia instantánea p se puede calcular como:

$$p = \frac{dU}{dt} = \frac{dw}{dt} \qquad (1.8)$$

Donde U representa el trabajo y w la energía. La unidad de potencia del SI es el watt (W); un watt es el equivalente a un joule por segundo:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} \qquad (1.9)$$

Los múltiplos de watt usados comúnmente en ingeniería potencial son el kilowatt y el mega watt. Las especificaciones de la potencia (o salidas) de los motores eléctricos se expresan en caballos de fuerza (hp), donde:

$$1 \text{ hp} = 745.7 \text{ W} \qquad (1.10)$$

1.2 Potencia Eléctrica

En un circuito de corriente alterna, la tensión es una variable que es función del tiempo. La corriente también es una variable que es función del tiempo y depende del valor de la carga. En cada instante, el producto de la tensión por la corriente se llama potencia instantánea y está dada por la siguiente expresión:

$$P(t) = v(t)\, i(t) \qquad (1.11)$$

que permite conocer el valor instantáneo de la potencia que demanda la carga de un circuito de corriente alterna; sin embargo, en la práctica se trabaja con valores eficaces de tensión, corriente y potencia. A la potencia demandada por la componente resistiva de un circuito de corriente alterna se le conoce como potencia activa; a la demandada por la componente reactiva, como potencia reactiva, y a la suma vectorial de las dos, como potencia aparente. Debe tenerse presente que estas componentes no existen como entidades separadas, pero para fines de análisis es conveniente suponerlas así.

1.2.1 Potencia compleja

Para los circuitos que operan en estado estacionario sinusoidal, las potencias real y reactiva se calculan convenientemente a partir de la potencia compleja, la cual se define a continuación. Sea V = $V\angle\delta$ la tensión entre los extremos de un elemento de circuito, e I = $I\angle\beta$ la corriente que entra a ese elemento. Entonces la potencia compleja S es el producto de la tensión y el conjugado de la corriente:

$$S = VI^* = [V\angle\delta]\,[I\angle\beta]^* = VI\angle\delta-\beta$$

$$= VI\cos(\delta-\beta) + jVI\sin(\delta-\beta) \qquad (1.12)$$

En donde $(\delta - \beta)$ es el ángulo entre la tensión y la corriente. Esta ecuación se expresa como:

$$S = P + jQ \qquad (1.13)$$

La magnitud S = VI de la potencia compleja S se llama potencia aparente. Aun cuando tiene las mismas unidades de P y Q, por lo general se definen las unidades de la potencia aparente S como volt amperes o VA. La potencia real P se obtiene al multiplicar la potencia aparente S = VI por el factor de potencia f.p. = cos $(\delta - \beta)$.

1.2.2 Potencia Real

La ecuación

$$p(t) = \underbrace{VI_R\{1 + \cos[2(\omega t + \delta)]\}}_{P_R} + \underbrace{VI_X \sin[2(\omega t + \delta)]}_{P_X} \qquad (1.14)$$

muestra que la potencia instantánea P_R (t) absorbida por la componente resistiva de la carga es una sinusoide de frecuencia doble con valor promedio P dado por:

$$P = VI_R = VI\cos(\delta - \beta) \qquad [W] \qquad (1.15)$$

A la potencia promedio P se le llama también potencia real o potencia activa. Los tres términos indican la misma cantidad P dada por (1.15).

El significado físico de la potencia real P se comprende con facilidad. La energía total absorbida por una carga durante un intervalo de tiempo T, consistente en un ciclo de la tensión sinusoidal, es PT watt-segundos (Ws). Durante un intervalo de tiempo de n ciclos, la energía absorbida es P(nT) watt-segundos, toda la cual es absorbida por la componente resistiva de la carga. Un medidor de kilowatt-horas está diseñado para medir la energía absorbida por una carga durante un intervalo de tiempo $(t_2 - t_1)$, el cual consta de un número entero de ciclos, al integrar la potencia real P sobre el intervalo de tiempo $(t_2 - t_1)$.

1.2.3 Potencia Reactiva

La potencia instantánea absorbida por la parte reactiva de la carga, dada por el componente P_X (t) en (1.14), es una sinusoide de frecuencia doble con valor promedio de cero y con amplitud Q dada por:

$$Q = VI_X = VI\sin(\delta - \beta) \qquad [var] \qquad (1.16)$$

Al término Q se le da el nombre de potencia reactiva. Aunque tiene las mismas unidades que la potencia real, lo usual es definir unidades para la potencia reactiva como volt-amperes reactivos, o var.

Q se refiere al valor máximo de la potencia instantánea absorbida por la componente reactiva de la carga. La potencia reactiva instantánea, dada por el segundo termino P_X (t) de (1.14), es positiva y negativa en forma alterna, y expresa el flujo reversible de energía que va hacia la componente reactiva de la carga y sale de ella. Q puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo de $(\delta - \beta)$ de la ecuación (1.16). La potencia reactiva Q es una cantidad útil cuando se describe la operación de los sistemas de potencia. Como un ejemplo, se puede usar capacitores en derivación en los sistemas de transmisión para entregar potencia reactiva e incrementar de este modo las magnitudes de la tensión durante los periodos de carga pesada.

1.3 Representación de líneas de transmisión

Para facilitar la realización de los cálculos relacionados con una línea de transmisión, podemos decir que la línea es aproximadamente una interconexión en serie – paralelo de los parámetros más relevantes. Una línea de transmisión corta en la cual los efectos en paralelo pueden ser despreciables, se representa mediante una resistencia concentrada en serie con una inductancia concentrada. Una línea de longitud media se representa con capacitores en paralelo concentrados localizados en puntos predeterminados a lo largo de un circuito en serie RL. (En la práctica, el efecto de la capacitancia total en una línea de longitud media se puede representar con uno o dos capacitores concentrados). Finalmente, una línea de transmisión larga se representa con parámetros distribuidos de manera uniforme. Además la rama en paralelo de una línea larga consta de capacitancias y conductancias distribuidas uniformemente a lo largo de la línea.

1.3.1 Línea de transmisión longitud corta

En líneas cortas (no más de 60 km de longitud y de voltajes no mayores de 40 kV, aproximadamente) la capacitancia de la línea puede generalmente despreciarse y entonces cada fase de la línea puede representarse por una impedancia en serie igual a la impedancia por unidad de longitud multiplicada por la longitud de la línea.

Supongamos una línea de transmisión trifásica simétrica en la que la capacitancia es despreciable. Un extremo de la línea está conectado a una fuente de fuerza electromotriz trifásica equilibrada y el otro extremo a una carga trifásica equilibrada, como se indica en la figura 1.2.

Cada fase de la figura 1.2 puede resolverse como un problema independiente y la simetría de la red hace evidente que las magnitudes de todas las cantidades eléctricas sean iguales en las tres fases. Si se resuelve la fase a considerándola como un circuito monofásico independiente, las cantidades correspondientes a las fases b y c están relacionadas con las cantidades de la fase a en la forma siguiente:

$$\widetilde{V_b} = \widetilde{V_a}\epsilon^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\widetilde{V_c} = \widetilde{V_a}\epsilon^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\widetilde{I_b} = \widetilde{I_a}\epsilon^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\widetilde{I_c} = \widetilde{I_a}\epsilon^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

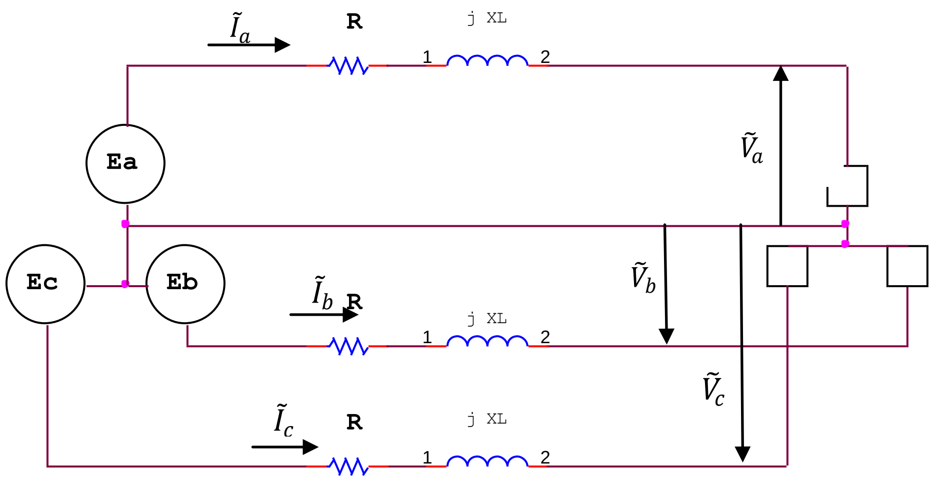


Figura1.2 – Circuito trifásico equilibrado

El circuito trifásico equilibrado de la figura 1.2 puede representarse mediante un circuito monofásico de fase a neutro, como el de la figura 1.3.

En el circuito equivalente de la figura 1.3, R es la resistencia efectiva en serie total de la línea, X_L es la reactancia inductiva en serie total de la línea, $\tilde{I}$ es la corriente de fase, $\widetilde{V_G}$ es el voltaje al neutro en el extremo generador de la línea y $\widetilde{V_R}$ es el voltaje al neutro en el extremo receptor de la línea.

Se define como dirección positiva de la corriente la indicada con una flecha en el circuito equivalente, o sea entrando en el extremo generador y saliendo en el extremo receptor.

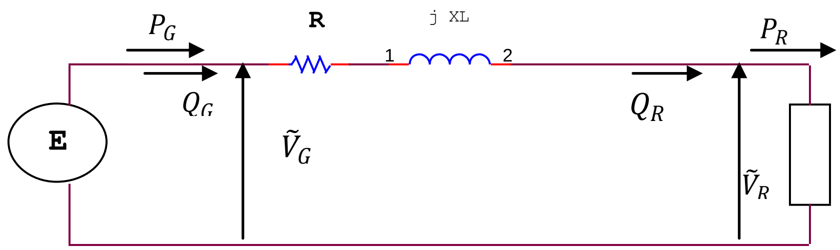


Figura 1.3 – Circuito monofásico de fase a neutro equivalente a una de las fases del circuito trifásico equilibrado de la figura 1.2

En el circuito de la figura 1.3 se verifica que

$$\widetilde{V_G} = \widetilde{V_R} + Z\tilde{I} \qquad (1.17)$$

Y como Z = R + jX_L

$$\widetilde{V_G} = \widetilde{V_R} + \tilde{I}(\mathrm{R} + \mathrm{jX_L}) \quad = \widetilde{V_R} + R\tilde{I} + \mathrm{jX_L}\tilde{I} \qquad (1.18)$$

El voltaje al neutro en el extremo generador de la línea es igual al voltaje al neutro en el extremo receptor de la línea más la caída de voltaje debida a la circulación de la corriente $\tilde{I}$ por la impedancia en serie de la línea, Z. Esta caída de voltaje puede descomponerse en dos componentes: una, en fase con la corriente debida a la resistencia, y otra, noventa grados adelantada con respecto a la corriente debida a la reactancia inductiva.

La potencia compleja por fase en el extremo receptor es

$$S_R = P_R + jQ_R = \widetilde{V_R}\widetilde{I^*} \qquad (1.19)$$

La potencia compleja por fase en el extremo generador es

$$S_G = P_G + jQ_G = \widetilde{V_G}\widetilde{I^*}$$

Se define como dirección positiva de circulación de potencia real y reactiva la dirección de circulación que coincide con la dirección de la corriente, o sea entrando en el extremo generador y saliendo en el extremo receptor.

Las pérdidas reales o perdidas por efecto joule, por fase, están dadas por la siguiente expresión:

$$P = P_G - P_R = RI^2 \qquad (1.20)$$

Las pérdidas reactivas están dadas por la siguiente expresión:

$$q = Q_G - Q_R = X_L I^2 \qquad (1.21)$$

La eficiencia η de la línea se define como el cociente de la potencia real que sale de la línea en el extremo receptor dividida por la potencia real que entra a la línea en el extremo generador.

$$\eta = \frac{P_R}{P_G} \tag{1.22}$$

$$\eta = \frac{P_R}{P_G + p}$$

$$\eta = \frac{P_G - p}{P_G} = 1 - \frac{p}{P_G}$$

Regulación de voltaje. Se define la regulación del voltaje de una línea como el porcentaje de aumento del voltaje receptor cuando se desconecta la carga plena, permaneciendo constante el voltaje generador y estando referido ese porcentaje de aumento al voltaje receptor con plena carga.

$$\%Reg = \frac{V_{R0} - V_R}{V_R} \times 100 \tag{1.23}$$

Donde

V_{R_0} módulo del voltaje en vacio en el extremo receptor

V_R módulo del voltaje a plena carga en el extremo receptor

En el caso de una línea corta, en la que se desprecia la capacitancia al neutro de la línea, el voltaje en vacío en el extremo receptor es igual al voltaje aplicado en el extremo generador. Para este caso, la expresión de la regulación queda en la siguiente forma:

$$\%Reg = \frac{V_G - V_R}{V_R} \times 100 \tag{1.24}$$

donde V_G es el módulo del voltaje en el extremo generador.

1.3.2 Línea de transmisión longitud media

En líneas de transmisión de longitud media (con longitudes comprendidas entre 60 km y 250 km y voltajes comprendidos entre 40 kV y 220 kV, aproximadamente) no se puede, en general despreciar la capacitancia al neutro de los conductores sin cometer un error excesivo, pero se tiene una buena aproximación si se representa la línea mediante un circuito equivalente monofásico, en el que la capacitancia al neutro de una fase se considere concentrada en uno o dos puntos.

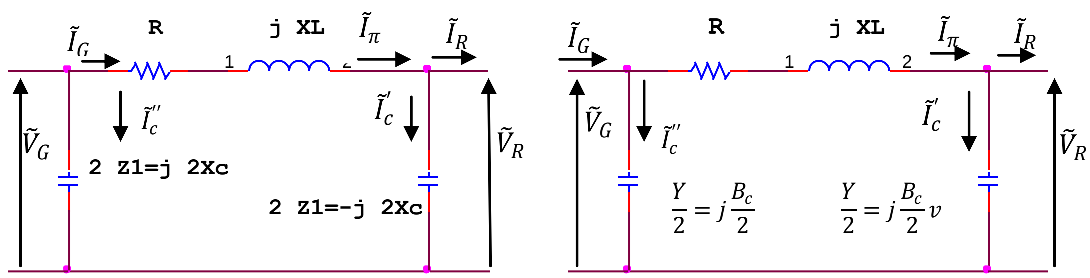
En cuanto a la resistencia de aislamiento puede, en general, considerarse como infinita, especialmente en las líneas aéreas.

Circuito Equivalente π

Si se considera la mitad de la capacitancia concentrada en cada extremo de la línea, el circuito equivalente queda como se indica en la figura 1.4. Este circuito se llama circuito equivalente π.

La impedancia $Z = R + jX_L \quad \Omega$

que aparece en serie en el circuito equivalente π es la impedancia total en serie de una fase.



(a) (b)

FIGURA 1.4 – Circuito equivalente π de una línea de transmisión.

Por tanto $$R = rl \quad \Omega$$

$$jX_L = jX_L l \quad \Omega$$

donde

r resistencia efectiva por unidad de longitud de una fase

jX_L reactancia inductiva por unidad de longitud de una fase

l longitud de la línea

El efecto capacitivo puede representarse mediante dos reactancias capacitivas en paralelo, como se indica en la figura 1.4a, o mediante dos susceptancias capacitivas en paralelo como se indica en la figura 1.4b.

Si $-jX_c$ es la impedancia capacitiva de una fase al neutro por unidad de longitud, la impedancia capacitiva total de una fase al neutro, Z_1, será

$$Z_1 = -jX_C = \frac{-jX_C}{l} \qquad \Omega$$

La impedancia capacitiva correspondiente a la mitad de la longitud de la línea, que es la que aparece en cada extremo del circuito equivalente de la figura 1.4a, es

$$\frac{-jX_C}{\frac{l}{2}} = -j2X_C \ \ \Omega = 2Z_1$$

En lugar de aparecer en el circuito equivalente la reactancia capacitiva en paralelo puede aparecer su reciproco, la susceptancia capacitiva en paralelo.

La susceptancia capacitiva por unidad de longitud jb es igual a:

$$jb = \frac{1}{-jX_C} \quad \mho$$

La susceptancia capacitiva para la longitud total de la línea es

$$Y = jB = jbl \qquad \mho$$

La susceptancia capacitiva para la mitad de la línea es

$$\frac{Y}{2} = j\frac{B}{2} = j\frac{l}{2} \qquad \mho$$

En el circuito equivalente π se define como dirección positiva de las corrientes, la dirección que entra en la línea en el extremo generador y que sale de la línea en el extremo receptor.

La dirección positiva de la circulación de potencia real y reactiva en cada extremo del circuito equivalente coincide con la dirección positiva de la corriente correspondiente.

Si se conocen el voltaje al neutro $\widetilde{V_R}$ y la corriente $\widetilde{I_R}$en el extremo receptor, pueden calcularse el voltaje al neutro $\widetilde{V_G}$ y la corriente $\widetilde{I_G}$ en el extremo generador mediante el circuito equivalente π de la figura 1.4 en la siguiente forma.

La corriente en el condensador del extremo receptor es

$$\widetilde{I_C} = \frac{\widetilde{V_R}}{-j2X_C}$$

o también

$$\widetilde{I'_C} = j\frac{B_C}{2}\tilde{V}_R$$

La corriente que circula por la impedancia en serie de la línea es

$$\tilde{I}_\pi = \tilde{I}_R + \widetilde{I'}_C$$

La caída de voltaje en la impedancia en serie es

$$\tilde{I}_\pi Z = \tilde{I}_\pi(R + jX_L)$$

El voltaje en el extremo generador es

$$\tilde{V}_G = \tilde{V}_R + \tilde{I}_\pi(R + jX_L)$$

La corriente en el condensador del extremo generador es

$$\tilde{I}''_C = \frac{\tilde{V}_G}{-j2X_C}$$

$$\tilde{I}''_C = -j\frac{B_C}{2}\widetilde{V_G}$$

La corriente en el extremo generador es

$$\tilde{I}_G = \tilde{I}_\pi + \tilde{I}''_C = \tilde{I}_R + \tilde{I}'_C + \tilde{I}''_C$$

La potencia compleja por fase en el extremo receptor es

$$S_R = P_R + jQ_R = \tilde{V}_R\tilde{I}_R^*$$

La compleja por fase en el extremo generador es

$$S_G = P_G + jQ_G = \tilde{V}_G\tilde{I}_G^*$$

Las pérdidas reales o perdidas por efecto Joule, por fase, están dadas por la siguiente expresión:

$$p = P_G - P_R = RI_\pi^2$$

Las perdidas reactivas, por fase, están dadas por la siguiente expresión:

$$q = Q_G - Q_R$$

La eficiencia de la línea es

$$\eta = \frac{P_R}{P_G} = \frac{P_R}{P_R + P} = \frac{P_G - P}{P_G} = 1 - \frac{P}{P_G}$$

Para calcular la regulación es necesario primero calcular el voltaje en vacio en el extremo receptor $\tilde{V}_R$, o sea, el voltaje que se tiene en el extremo receptor al desconectar la carga manteniendo constante el voltaje en el extremo generador.

En el circuito equivalente π de la figura 1.5, si no hay ninguna carga conectada en el extremo receptor, $\tilde{I}_R = 0$.

Con un voltaje $\tilde{V}_G$ aplicado en el extremo del generador, la corriente que circula por la impedancia en serie de la línea es

$$I_0 = \frac{\tilde{V}_G}{R + jX_L - j2X_C}$$

El voltaje en vacio en el extremo receptor es

$$\tilde{V}_{R_0} = -j2X_C\tilde{I}_0$$

La regulación de voltaje de la línea es

$$\%Reg = \frac{V_{R_0} - V_R}{V_R} \times 100$$

Circuito equivalente T

Se puede también representar una línea de longitud media con un circuito equivalente como el que se muestra en la figura 1.5 y que se llama circuito equivalente T.

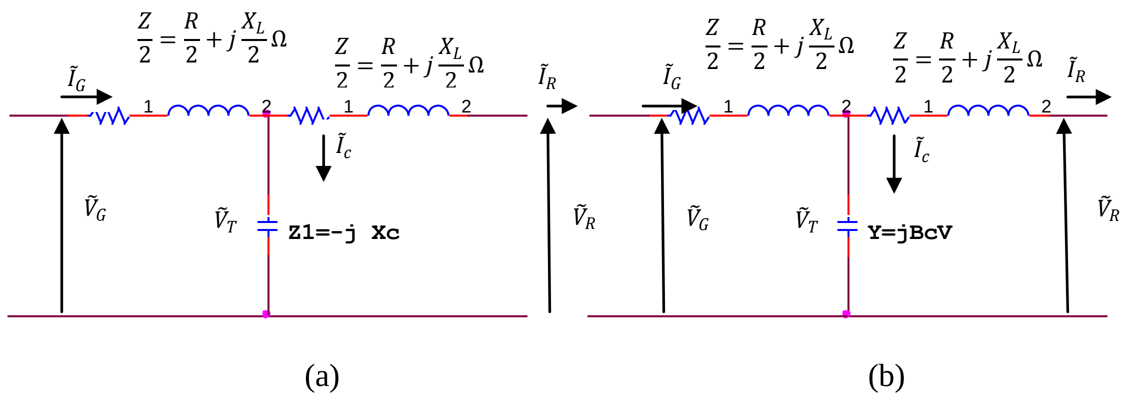


Figura 1.5 – Circuito equivalente T de una línea de transmisión

En este circuito se considera toda la capacitancia al neutro de una fase de la línea concentrada en el centro de la línea. A un lado y a otro de esta capacitancia se considera la mitad de la impedancia en serie.

Si se conocen el voltaje al neutro $\tilde{V}_R$ y la corriente $\tilde{I}_R$ en el extremo receptor, pueden calcularse el voltaje al neutro $\tilde{V}_G$ y la corriente $\tilde{I}_G$ en el extremo generador mediante el circuito equivalente T, como se muestra enseguida.

La caída de voltaje en la primera mitad del circuito equivalente T es

$$\tilde{I}_R\left[\frac{R}{2} + j\frac{X_L}{2}\right]$$

El voltaje en el centro del circuito equivalente T es

$$\tilde{V}_T = \tilde{V}_R + \tilde{I}_R\left[\frac{R}{2} + j\frac{X_L}{2}\right]$$

La corriente que toma el condensador es

$$\tilde{I}_C = \frac{\tilde{V}_T}{-jX_C}$$

O también

$$\tilde{I}_C = jB_C\tilde{V}_T$$

La corriente en el extremo generador es

$$\tilde{I}_G = \tilde{I}_R + \tilde{I}_C$$

La caída de voltaje en la segunda mitad del circuito equivalente T es

$$\tilde{I}_G = \left[\frac{R}{2} + j\frac{X_L}{2}\right]$$

El voltaje al neutro en el generador es

$$\tilde{V}_G = \tilde{V}_T + \tilde{I}_G\left[\frac{R}{2} + j\frac{X_L}{2}\right]$$

$$\tilde{V}_G = \tilde{V}_R + \tilde{I}_R\left[\frac{R}{2} + j\frac{X_L}{2}\right] + \tilde{I}_G\left[\frac{R}{2} + j\frac{X_L}{2}\right]$$

La potencia compleja por fase en el extremo receptor es

$$S_R = P_R + jQ_R = \tilde{V}_R\tilde{I}_R^*$$

La potencia compleja por fase en el extremo generador es

$$S_G = P_G + jQ_G = \tilde{V}_G\tilde{I}_G^*$$

Las pérdidas reales o perdidas por efecto Joule, por fase, están dadas por

$$P = P_G - P_R = \frac{R}{2}(I_R^2 + I_G^2)$$

Las pérdidas reactivas por fase están dadas por

$$q = Q_G - Q_R$$

La eficiencia de la línea es

$$\eta = \frac{P_R}{P_G} = \frac{P_R}{P_R + p} = \frac{P_G - p}{P_G} = 1 - \frac{p}{P_G}$$

Para calcular la regulación es necesario primero calcular el voltaje en vacio en el extremo receptor $\tilde{V}_{R_0}$.

Si no hay ninguna carga conectada en el extremo receptor, $\tilde{I}_R = 0$

Con un voltaje $\tilde{V}_G$ aplicado en el extremo generador, la corriente que circula por la impedancia en serie de la línea es

$$I_0 = \frac{V_G}{\frac{R}{2} + j\frac{X_L}{2} - jX_C}$$

El voltaje en vacio en el extremo receptor es

$$\tilde{V}_{R_0} = -jX_c\tilde{I}_0$$

La regulación de voltaje de la línea es

$$\%Reg. = \frac{V_{R_0} - V_R}{V_R} \times 100$$

1.3.3 Línea de transmisión longitud larga

En la figura 1.6 se representa una sección de longitud infinitesimal de una línea de transmisión larga, para la que se requiere considerar los parámetros eléctricos distribuidos a lo largo de la línea.

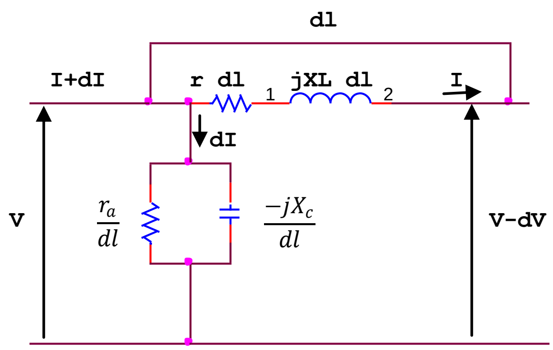


Figura 1.6 – Representación de una sección infinitesimal de una línea

Sean

r resistencia efectiva por unidad de longitud

X_L reactancia inductiva por unidad de longitud

$Z = r + jX_L$ impedancia en serie por unidad de longitud

r_a resistencia de aislamiento por unidad de longitud

X_c reactancia capacitiva por unidad de longitud

$z_1 = \frac{-jX_C r_a}{r_a - jX_C} = \frac{1}{y}$ impedancia en paralelo por unidad de longitud

y admitancia en paralelo por unidad de longitud

dl longitud del tramo diferencial de línea

zdl impedancia en serie del tramo de la línea de longitud dl

$\frac{z_1}{dl}$ impedancia en paralelo del tramo de línea de longitud dl

En el circuito de la figura 1.6 se verifica que

$$d\tilde{V} = \tilde{I}z\,dl \quad \therefore \quad \frac{d\tilde{V}}{dl} = \tilde{I}z \tag{1.25}$$

$$d\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{z_1}\,dl \quad \therefore \quad \frac{d\tilde{I}}{dl} = \frac{\tilde{V}}{z_1} \tag{1.26}$$

Derivando las ecuaciones 1.25 y 1.26 con respecto a ι

$$\frac{d^2\tilde{V}}{dl^2} = \frac{d\tilde{I}}{dl}z \tag{1.27}$$

$$\frac{d^2\tilde{I}}{dl^2} = \frac{d\tilde{V}}{dl} \times \frac{1}{z_1} \tag{1.28}$$

Sustituyendo 1.26 en 1.27 y 1.25 en 1.28

$$\frac{d^2\tilde{V}}{dl^2} = \frac{z}{z_1}\tilde{V} \tag{1.29}$$

$$\frac{d^2\tilde{I}}{dl^2} = \frac{z}{z_1}\tilde{I} \tag{1.30}$$

Procedemos ahora a resolver estas ecuaciones diferenciales de segundo orden. (Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas).

Notamos en 1.29 que la segunda derivada de la función es igual a la función multiplicada por una constante. La función que tiene esta propiedad es una función exponencial de la forma

$$\tilde{V} = K \in^{ml} \tag{1.31}$$

Donde k y m son constantes

$$\frac{d\tilde{V}}{dl} = Km \in^{ml}$$

$$\frac{d^2\tilde{V}}{dl^2} = Km^2 \in^{ml} = m^2\tilde{V} \tag{1.32}$$

De la ecuación 1.31 y de la 1.29

$$\frac{z}{z_1}\tilde{V} = m^2\tilde{V}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{z}{z_1}} \tag{1.33}$$

Sustituyendo el valor de m dado por la ecuación 1.33 en la ecuación 1.31

$$\tilde{V} = K \in^{\pm\sqrt{\frac{z}{z_1}}l}$$

Se obtendrán dos soluciones, una considerando el signo más y otra considerando el signo menos.

La solución general será, por tanto,

$$\tilde{V} = K_1 \in^{\sqrt{\frac{z}{z_1}}l} + K_2 \in^{-\sqrt{\frac{z}{z_1}}l} \tag{1.34}$$

Según la ecuación de Euler

$$\frac{\in^X + \in^{-X}}{2} = \cosh X$$

$$\frac{\in^X - \in^{-X}}{2} = \sinh X$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores

$$\in^X = \cosh X + \sinh X$$

Restando la segunda ecuación de la primera

$$\in^{-X} = \cosh X - \sinh X$$

Por tanto, la ecuación 1.34 puede escribirse como

$$\tilde{V} = (K_1 + K_2)\cosh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l + (K_1 - K_2)\sinh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l \tag{1.35}$$

Derivando la ecuación 1.35 con respecto a l

$$\frac{d\tilde{V}}{dl} = (K_1 + K_2)\sqrt{\frac{z}{z_1}}\sinh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l + (K_1 - K_2)\sqrt{\frac{z}{z_1}}\cosh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l$$

Pero $\frac{d\tilde{V}}{dl} = \tilde{I}z$, por tanto,

$$\tilde{I} = \frac{1}{Z}\left[(K_1 + K_2)\sqrt{\frac{z}{z_1}}\sinh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l + (K_1 - K_2)\sqrt{\frac{z}{z_1}}\cosh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l\right]$$

$$\tilde{I} = \left[(K_1 + K_2)\frac{1}{\sqrt{zz_1}}\sinh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l + (K_1 - K_2)\frac{1}{\sqrt{zz_1}}\cosh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l\right] \qquad (1.36)$$

Las constantes K_1 y K_2 pueden calcularse como se describe enseguida.

Si la distancia l se mide a partir del extremo receptor de la línea, como se indica en la figura 1.7, para $l = 0$ las ecuaciones 1.35 y 1.36 quedan

$$\tilde{V}_R = (K_1 + K_2)$$

$$\tilde{I}_R = (K_1 - K_2)\frac{1}{\sqrt{zz_1}} \quad \therefore (K_1 - K_2) = \tilde{I}_R\sqrt{zz_1}$$

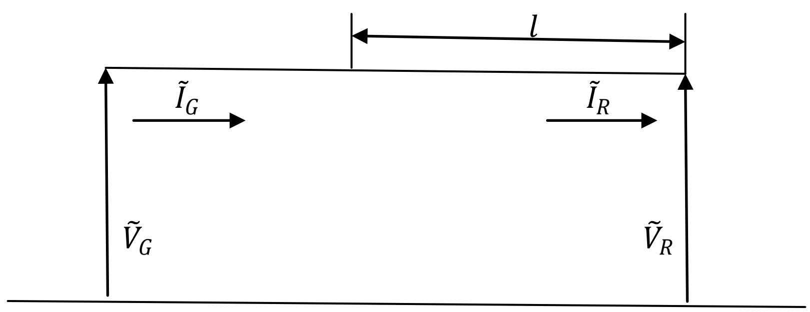


Figura 1.7

Sustituyendo estos valores de ($K_1 + K_2$) y (K_1 - K_2) en las ecuaciones 1.35 y 1.36.

$$\tilde{V} = \tilde{V}_R\cosh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l + \tilde{I}_R\sqrt{zz_1}\sinh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l \qquad (1.37a)$$

$$\tilde{I} = \tilde{I}_R\cosh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l + \tilde{V}_R\frac{1}{\sqrt{zz_1}}\sinh\sqrt{\frac{z}{z_1}}\,l \qquad (1.38a)$$

Las ecuaciones 1.37a y 1.38a dan el valor del voltaje y la corriente en un punto de la línea a una distancia l del extremo receptor, en función de la línea, voltaje y corriente en el extremo receptor.

Las ecuaciones anteriores pueden también escribirse utilizando la admitancia en paralelo de la línea por unidad de longitud, en lugar de la impedancia en paralelo por unidad de longitud y recordando que

$$y = \frac{1}{z_1}$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_R = \cosh \sqrt{zy}\, l + \tilde{I}_R \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh \sqrt{zy}\, l \qquad (1.37b)$$

$$\tilde{I} = \tilde{I}_R = \cosh \sqrt{zy}\, l + \tilde{V}_R \sqrt{\frac{y}{z}} \sinh \sqrt{zy}\, l \qquad (1.38b)$$

El término $$\sqrt{zz_1} = \sqrt{\frac{z}{y}} = z_c$$

Se llama impedancia característica de la línea.

Si se desprecia la resistencia en serie de la línea y se considera infinita la resistencia de aislamiento

$$z_c = \sqrt{zz_1} = \sqrt{jx_L(-jx_c)}$$

$$z_c = \sqrt{(j2\pi fL)\left(-j\frac{1}{2\pi fC}\right)}$$

$$z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Puede verse que haciendo las simplificaciones antes citadas z_c es función únicamente de la inductancia y la capacitancia de la línea y tiene las dimensiones de una resistencia.

El término $$\sqrt{\frac{z}{z_1}} = \sqrt{zy} = \gamma$$

se llama constante de propagación. Es un número complejo y podemos representar su parte real y su parte imaginaria en la siguiente forma:

$$\gamma = a + j\beta$$

La parte real a se llama constante de atenuación y la parte imaginaria β se llama constante de fase. La razón de estas denominaciones se explica a continuación.

Las ecuaciones 1.37 y 1.38 pueden expresarse en forma exponencial, haciendo uso de la ecuación de Euler

$$\cosh \gamma\, l = \frac{\epsilon^{\gamma l} + \epsilon^{-\gamma l}}{2}$$

$$\sinh \gamma\, l = \frac{\epsilon^{\gamma l} - \epsilon^{-\gamma l}}{2}$$

Sustituyendo las expresiones de $\cosh \gamma\, l$ y $\sinh \gamma\, l$en las ecuaciones 1.37a y 1.38a

$$\tilde{V} = \tilde{V}_R \frac{\epsilon^{\gamma l} + \epsilon^{-\gamma l}}{2} + \tilde{I}_R z_c \frac{\epsilon^{\gamma l} - \epsilon^{-\gamma l}}{2}$$

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{V}_R + \tilde{I}_R z_c}{2} \epsilon^{\gamma l} + \frac{\tilde{V}_R - \tilde{I}_R z_c}{2} \epsilon^{-\gamma l} \qquad (1.39)$$

$$\tilde{I} = \tilde{I}_R \frac{\epsilon^{\gamma l} + \epsilon^{-\gamma l}}{2} + \tilde{V}_R \frac{1}{z_c} \frac{\epsilon^{\gamma l} - \epsilon^{-\gamma l}}{2}$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{I}_R + \tilde{V}_R \frac{1}{z_c}}{2} \epsilon^{\gamma l} + \frac{\tilde{I}_R - \tilde{V}_R \frac{1}{z_c}}{2} \epsilon^{-\gamma l} \qquad (1.40)$$

Expresando la constante de propagación en forma compleja

$$\gamma = a + j$$

$$\epsilon^{\gamma l} = \epsilon^{(a + j\beta)l} = \epsilon^{al} \times \epsilon^{j\gamma l}$$

$$\epsilon^{-al} = \epsilon^{-(a + j\beta)l} = \epsilon^{-al} \times \in^{-j\beta l}$$

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{V}_R + \tilde{I}_R z_c}{2} \epsilon^{al} \times \epsilon^{j\beta l} + \frac{\tilde{V}_R - \tilde{I}_R z_c}{2} \epsilon^{-al} \times \epsilon^{-j\beta l} \qquad (1.41)$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{I}_R + \tilde{V}_R \frac{1}{z_c}}{2} \epsilon^{al} \times \epsilon^{j\beta l} + \frac{\tilde{I}_R - \tilde{V}_R \frac{1}{z_c}}{2} \epsilon^{-al} \times \epsilon^{-j\beta l} \qquad (1.42)$$

En las ecuaciones 1.41 y 1.42 puede verse que la parte real de la constante de propagación γ, o sea, la constante de atenuación a, afecta únicamente a la magnitud del voltaje y de la corriente a lo largo de la línea, mientras que la parte imaginaria de γ, o sea $j\beta$, produce una variación del ángulo de fase.