



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL-ESTRUCTURAS**

**ESTIMACIÓN DEL NIVEL DE PRESFUERZO EN VIGAS DE CONCRETO  
PRESFORZADO A PARTIR DE SU FRECUENCIA NATURAL**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:  
FLORENTINO AVENDAÑO VÁSQUEZ

TUTOR PRINCIPAL:  
Dr. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ

MÉXICO, D.F., MAYO DE 2014



## JURADO ASIGNADO

Presidente:	Dr. ROBERTO GOMEZ MARTÍNEZ
Secretario:	Dr. OSCAR ALBERTO LÓPEZ BÁTIZ
Vocal:	Dr. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ
1 <sup>er</sup> Suplente:	Dr. ORLANDO JAVIER DÍAZ LÓPEZ
2 <sup>do</sup> Suplente:	M.I. JOSÉ CARLOS ARCE RIOBÓO

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

## **TUTOR DE TESIS:**

---

Dr. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ



## **RESUMEN**

Se propusieron dos ecuaciones, una que permite estimar la frecuencia natural de una viga de concreto presforzado a partir del nivel de presfuerzo, y otra, que partiendo de la frecuencia natural, proporciona la magnitud de la fuerza de presfuerzo. Se analizaron algunas propuestas y experimentos existentes en la literatura; los resultados de las pruebas indican que, por lo general, la frecuencia de vibración de una viga de concreto presforzado aumenta, si se incrementa la fuerza de presfuerzo. Además, se demostró que la rigidez a flexión perdida por la viga de concreto al comprimirse, es igual a la rigidez ganada por el acero de presfuerzo al tensarse, por lo que se descartó el fenómeno de ablandamiento por compresión, y se aceptó que la variación en la frecuencia natural, se debe al cierre o apertura de las microgrietas existentes en el concreto. Finalmente, las ecuaciones propuestas se probaron con vigas experimentadas por otros investigadores, y se discute acerca de sus ventajas y desventajas.



## **ABSTRACT**

Two equations are proposed, one related to the estimation of the natural frequency of a prestressed concrete beam, starting from the prestressing level, and a second one which starts with the natural frequency to determine the prestressing force magnitude. Some existing proposals and experiments presented in the literature were analyzed and the test results indicate that usually, the prestressed concrete beam vibration frequency increases if the prestressing force increases. Furthermore, it was shown that the loss of the bending stiffness in the compressed concrete beam, is equal to the gained stiffness by the tensioned prestressing steel; so that the phenomenon of softening compression, was discarded, and it was accepted that the variation in the vibration frequency is due to the closing or opening of existing microcracks in concrete. Finally, the proposed equations were tested with experimental beams by other researchers. And discusses their advantages and disadvantages.





## CONTENIDO

<b>RESUMEN .....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>vii</b>
<b>CONTENIDO .....</b>	<b>ix</b>
<b>CAPÍTULO 1 CONCRETO PRESFORZADO.....</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.2 EFECTOS DEL PRESFUERZO .....	1
1.2.1 Cargas equivalentes .....	1
<b>CAPÍTULO 2 PÉRDIDAS DE PRESFUERZO .....</b>	<b>3</b>
2.1 INTRODUCCIÓN.....	3
2.2 PÉRDIDAS INSTANTÁNEAS .....	3
2.2.1 Pérdida debido al acortamiento elástico del concreto .....	3
2.2.2 Pérdida debido al deslizamiento en los anclajes.....	3
2.2.3 Pérdida debido a la fricción .....	4
2.3 PÉRDIDAS DIFERIDAS.....	4
2.3.1 Pérdida debido a la contracción del concreto .....	4
2.3.2 Pérdida debido al flujo plástico .....	5
2.3.3 Pérdida debido a la relajación del acero de presfuerzo .....	5
2.4 MÉTODO DE LOS INCREMENTOS DE INTERVALOS DE TIEMPO PARA ESTIMAR PÉRDIDAS DE PRESFUERZO.....	6
2.4.1 Ejemplo de cálculo de pérdidas de presfuerzo en una viga postensada por el método de los incrementos de intervalos de tiempo.....	6
<b>CAPÍTULO 3 ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>19</b>
3.1 PROPUESTA DE SAIDII, DOUGLAS Y FENG .....	19
3.1.1 Conclusiones de Saidii et al.....	22
3.1.2 Comentarios a la propuesta de Saidii et al.....	22
3.2 PROPUESTA DE KIM, YUN, RYU y CHO.....	23
3.2.1 Comentarios a la propuesta de Kim et al.....	25
3.3 PROPUESTA DE ZHANG Y LI .....	26
3.3.1 Viga postensada con tendón lineal (POS-L).....	26

3.3.2	Viga pretensada con tendón lineal (PRE-L) .....	28
3.3.3	Viga postensada con tendón curvo (POS-C) .....	29
3.3.4	Comentarios a la propuesta de Zhang y Li .....	30
3.4	EXPERIMENTOS DE JAIN, MURTY Y KAMLE .....	30
3.4.1	Viga J1 .....	31
3.4.2	Viga J3 .....	32
3.4.3	Viga J4 .....	33
3.4.4	Puente viga-losa a escala. ....	34
3.4.5	Conclusiones de Jain et al. ....	36
3.4.6	Comentarios a la publicación de Jain et al. ....	36
<b>CAPÍTULO 4 DESARROLLO DE UNA NUEVA PROPUESTA .....</b>		<b>37</b>
4.1	Análisis de la viga de concreto sin considerar contacto con el acero de presfuerzo .....	38
4.2	Análisis del acero de presfuerzo sin considerar contacto con el concreto .....	39
4.3	Sistema concreto-acero de presfuerzo .....	40
4.4	Propuesta de rigidez efectiva a flexión de vigas de concreto presforzado .....	41
4.5	Cálculo de $k$ .....	43
<b>CAPÍTULO 5 VERIFICACIÓN DE LA VALIDEZ DE LAS ECUACIONES (4.16) y (4.18)</b> .....		<b>45</b>
5.1	Viga estudiada por Saidii et al. ....	45
5.2	Vigas estudiadas por Zhang y Li .....	46
5.2.1	Viga POS-L .....	46
5.2.2	Viga PRE-L .....	47
5.3	Vigas estudiadas por Jain et al. ....	48
5.3.1	Viga J1 .....	48
5.3.2	Viga J3 .....	49
5.3.3	Viga J4 .....	50
5.4	Viga del ejemplo 2.1 .....	51
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>		<b>53</b>
<b>REFERENCIAS .....</b>		<b>55</b>
<b>APÉNDICE A PROGRAMA DEFLEXIONES .....</b>		<b>57</b>
A.1	INTRODUCCIÓN .....	57
A.2	USO DEL PROGRAMA .....	57

A.3 ALGORITMO DEL PROGRAMA DEFLEXIONES.....	59
<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>65</b>



# CAPÍTULO 1

## CONCRETO PRESFORZADO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Un elemento de concreto presforzado, se puede definir como aquel al que, previo a la aplicación de fuerzas externas, se le introducen esfuerzos de magnitud y sentido contrario, a los que producirán las cargas que actúen sobre el elemento durante su vida útil.

Debido a que el concreto es un material poco resistente a los esfuerzos de tensión, el acero de presfuerzo, adiciona esfuerzo de compresión en la zona donde debido a las cargas externas, actuarán esfuerzos de tensión. Para esto, se necesita que los momentos flexionantes debido a las cargas, sean contrarios a los producidos por el acero de presfuerzo, lo cual se logra con una excentricidad adecuada de los torones.

### 1.2 EFECTOS DEL PRESFUERZO

Se puede entender el presfuerzo, como un medio para introducir cargas equivalentes en un elemento de concreto, con el fin de equilibrar los efectos producidos por las cargas externas, hasta el grado que se requiera (Nilson, 2001).

#### 1.2.1 Cargas equivalentes

Los elementos mecánicos producidos por el acero de presfuerzo, dependen de la magnitud de la fuerza aplicada, la excentricidad y la trayectoria de los tendones. Por lo tanto, cada perfil de acero de presfuerzo, puede ser sustituido por cargas equivalentes, que produzcan el mismo efecto.

Por ejemplo, en la figura 1.1a, un tendón de trayectoria lineal, con un ángulo de inclinación  $\theta$ , que ejerce una fuerza  $P$  en el centroide de la sección de concreto en los extremos, aplica una fuerza transversal  $2P \sin\theta$  en el centro del claro. En los anclajes, la fuerza de presfuerzo se puede dividir en dos componentes, la vertical es  $P \sin\theta$  y la horizontal es  $P \cos\theta$ . El diagrama de momento, corresponde a una viga simplemente apoyada, cargada en el centro del claro (Nilson, 2001).

La viga de la figura 1.1b, con un tendón curvo, está sometida a las componentes verticales y horizontales de la fuerza producida por el acero de presfuerzo. Un tendón de trayectoria parabólica, producirá los mismos efectos que los de una carga uniformemente distribuida en una viga simplemente apoyada (Nilson, 2001).

En la figura 1.1c, se observa una viga con acero de presfuerzo de trayectoria lineal y excentricidad constante, El perfil horizontal del tendón, hace que no se presenten componentes verticales. La carga equivalente es un par igual al momento  $Pe$  constante en toda la longitud, y una fuerza axial  $P$  de compresión (Nilson, 2001).

En la figura 1.1d, se muestra una viga con acero de presfuerzo de trayectoria parabólica, que no pasa por el centroide del concreto en los extremos del claro. La carga equivalente para este caso, es una carga uniformemente distribuida hacia arriba, más las fuerzas en los anclajes como se observa en la figura 1.1b, además de los momentos en los extremos  $M = Pe \cos\theta$  (Nilson, 2001).

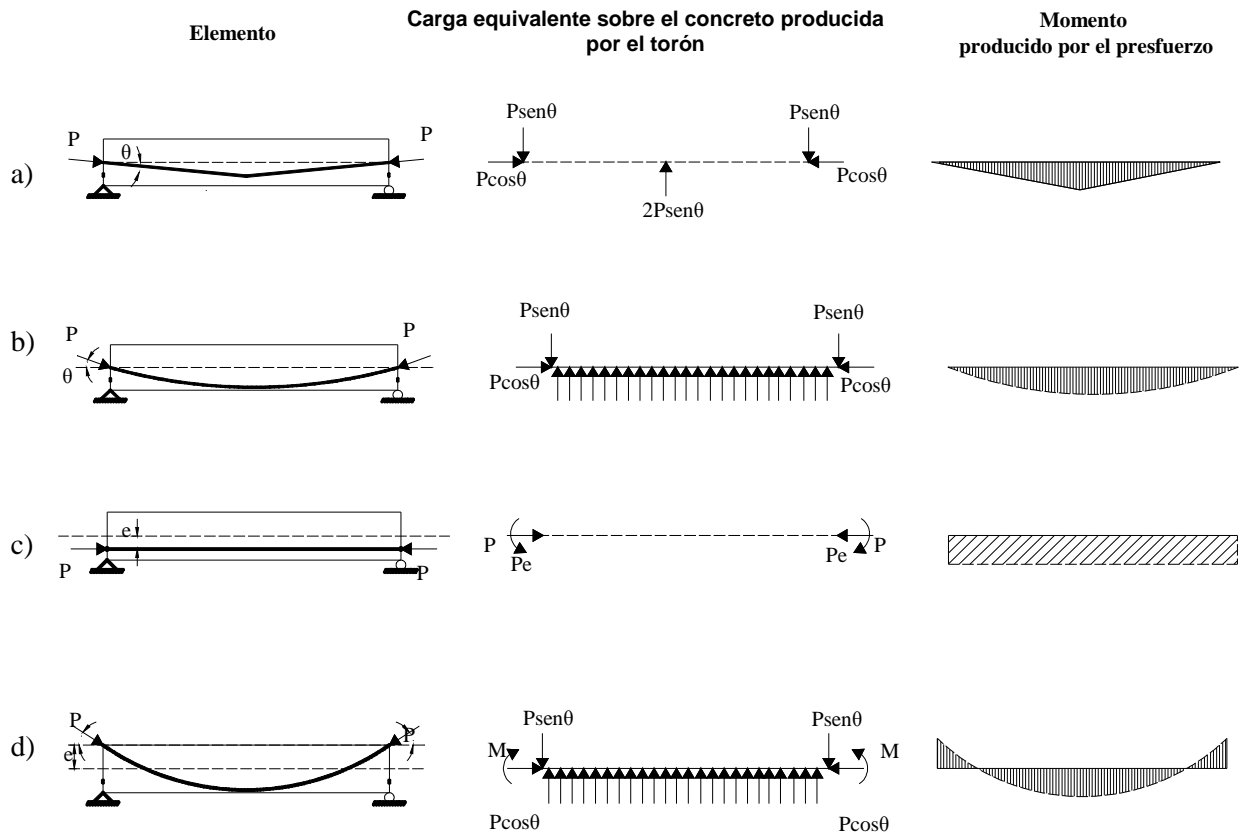


Figura 1.1 Cargas equivalentes y momentos producidos por los tendones de presfuerzo (Nilson, 2001)

## CAPÍTULO 2

### PÉRDIDAS DE PRESFUERZO

#### 2.1 INTRODUCCIÓN

Desde el momento en el que a una viga de concreto se le aplica presfuerzo, el concreto experimenta una pérdida del mismo, debido al acortamiento elástico. Además, las cuñas de anclaje se deforman, se acomodan o se deslizan. Todos estos aspectos producen pérdidas en las fuerzas de presfuerzo.

Además de las anteriores, durante la vida útil de un elemento presforzado, van apareciendo otros tipos de pérdidas debido a la contracción, flujo plástico del concreto y relajación del acero de presfuerzo.

Básicamente se suelen clasificar en dos tipos de pérdidas, las instantáneas y las diferidas. Las primeras son las que suceden en la etapa de transferencia, y las segundas ocurren en el transcurso del tiempo.

#### 2.2 PÉRDIDAS INSTANTÁNEAS

##### 2.2.1 Pérdida debido al acortamiento elástico del concreto

Cuando al concreto se le transfiere el presfuerzo, inmediatamente experimenta un cambio en su longitud que hace que el acero de presfuerzo tienda a recuperar su longitud inicial, ocasionando una pérdida de esfuerzo que se calcula como (Nilson, 2001):

$$\Delta f_{s,elástico} = E_{ps} \frac{f_c}{E_c} = n f_c \quad (2.1)$$

donde:

$f_c$  = esfuerzo en el concreto al mismo nivel del centroide del acero,

$E_{ps}$  = módulo de elasticidad del acero de presfuerzo

$E_c$  = el módulo de elasticidad del concreto, en el instante en que se aplica el presfuerzo.

En elementos postensados, la pérdida por acortamiento elástico es nula, si todos los torones se tensan a un mismo tiempo. Si el tensado se realiza por etapas, la pérdida de presfuerzo variará en cada una de ellas, siendo máxima en el primer torón tensado, y cero en el último (Nilson, 2001).

##### 2.2.2 Pérdida debido al deslizamiento en los anclajes

Los dispositivos de anclaje, son los encargados de transmitir los esfuerzos de los torones al elemento postensado. Durante este proceso, los torones presentarán un desplazamiento  $\Delta L$  hacia dentro, mientras que las cuñas se ajustan y el anclaje se deforma debido al esfuerzo al que es sometido. La magnitud del desplazamiento de las cuñas, varía según las características del dispositivo de anclaje usado, y de las técnicas de construcción. Una vez que se determine la magnitud  $\Delta L$ , la pérdida de esfuerzo se calcula a partir de (Nilson, 2001):

$$\Delta f_{s,deslizamiento} = \frac{\Delta L}{L} E_{ps} \quad (2.2)$$

donde:

$L$  = la longitud del torón

### 2.2.3 Pérdida debido a la fricción

Esta pérdida se presenta solo en elementos postensados. En la etapa en la que el acero de presfuerzo se tensa y se desliza a través del ducto, la fricción hace que la fuerza de tensión en el extremo anclado, sea menor que la tensión proporcionada por el gato hidráulico (Reinoso et al., 2000).

Las pérdidas debido a la fricción entre los ductos y el acero de presfuerzo, puede calcularse como (Reinoso et al., 2000):

$$\Delta f_R = f_{pj}(1 - e^{-(Kx + \mu\alpha)}) \quad (2.3)$$

donde:

$f_{pj}$  = esfuerzo en el acero al tensado

$e$  = base de logaritmos naturales

$x$  = longitud desde el extremo del gato hidráulico hasta el punto en consideración

$\alpha$  = cambio angular del tendón desde el extremo del gato hidráulico hasta el punto  $x$ , en radianes

$K$  = coeficiente de fricción secundario, o de deformación no intencional (1/m)

$\mu$  = coeficiente de fricción por curvatura intencional (1/rad)

## 2.3 PÉRDIDAS DIFERIDAS

### 2.3.1 Pérdida debido a la contracción del concreto

El Instituto del Concreto Presforzado de los Estados Unidos de América, estipula para condiciones normales, un valor medio para deformación última por contracción  $(\epsilon_{SH})_u = 820 \times 10^{-6}$  mm/mm (PCI, 1999). Si  $\epsilon_{SH}$  es la deformación por contracción después de los correspondientes ajustes por humedad relativa y de relación volumen-superficie  $V/S$ , la pérdida en presfuerzo en elementos pretensados es (Nawy, 2010):

$$\Delta f_{pSH} = \epsilon_{SH} E_{ps} \quad (2.4)$$

$\epsilon_{SH}$  se puede ajustar como una función del tiempo  $t$  en días, después de 7 días para curado húmedo y 3 días para curado con vapor (Nawy, 2010).

(a) Curado húmedo, después de 7 días:

$$(\epsilon_{SH})_t = \frac{t}{35+t} (\epsilon_{SH})_u \quad (2.5)$$

donde:

$(\epsilon_{SH})_u$  = deformación última por contracción

$t$  = tiempo en días después de que la contracción es considerada

(b) Curado con vapor, después de 1 a 3 días:

$$(\epsilon_{SH})_t = \frac{t}{55+t} (\epsilon_{SH})_u \quad (2.6)$$



### 2.3.2 Pérdida debido al flujo plástico

Cuando sobre un elemento de concreto actúa una carga continua a través del tiempo, este experimenta un aumento gradual de deformación, conocido como flujo plástico (González, 2005).

La deformación debida al flujo plástico depende de varios factores, tales como: la magnitud y duración de la carga aplicada, las propiedades del concreto incluyendo la proporción de la mezcla, condiciones de curado, la edad del elemento en su primera carga, y condiciones ambientales. Es factible relacionar la deformación por flujo plástico  $\varepsilon_{CR}$  con la deformación elástica  $\varepsilon_{EL}$  tal que un coeficiente de flujo plástico puede ser definido como (Nawy, 2010):

$$C_u = \frac{\varepsilon_{CR}}{\varepsilon_{EL}} \quad (2.7)$$

Entonces, el coeficiente de flujo plástico en un tiempo  $t$  en días puede ser definido como (Nawy, 2010):

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10+t^{0.60}} C_u \quad (2.8)$$

El valor de  $C_u$  se localiza en el intervalo entre 2 y 4, con una media de 2.35 para flujo plástico último. La pérdida por flujo plástico, se calcula como (Nawy, 2010):

$$\Delta f_{pCR} = C_t \frac{E_{ps}}{E_c} f_{cs} \quad (2.9)$$

donde:

$f_{cs}$  = esfuerzo en el concreto en el nivel del centroide del acero de presfuerzo.

### 2.3.3 Pérdida debido a la relajación del acero de presfuerzo

Este tipo de pérdida, puede darse desde antes de la etapa de transferencia del presfuerzo o después de ella, según sea el elemento pretensado ó postensado.

El acero al permanecer tensado se relaja y pierde presfuerzo. La magnitud del decremento en el presfuerzo depende no solamente de la duración de la fuerza sostenida, sino también de la relación  $f_{pi} / f_{py}$  (Nawy, 2010).

donde:

$f_{py}$  = esfuerzo a la fluencia del tendón

$f_{pi}$  = esfuerzo al que es sometido inicialmente el tendón

Si  $f_{pR}$  es el esfuerzo de presfuerzo que permanece en el acero después de la relajación, la ecuación (2.10) define  $f_{pR}$  para acero relevado de presfuerzo (Nawy, 2010).

$$\frac{f_{pR}}{f_{pi}} = 1 - \left( \frac{\log t_2 - \log t_1}{10} \right) \left( \frac{f_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right) \quad (2.10)$$

En esta ecuación,  $\log t$  en horas, es de base 10,  $f_{pi} / f_{py}$  debe ser mayor que 0.55. Además, para acero de baja relajación, el denominador del término logarítmico, es 45 en lugar de 10 (Nawy, 2010).

Si es necesario un análisis de pérdidas paso a paso, los incrementos de pérdidas en una etapa particular puede ser definido como (Nawy, 2010):

$$\Delta f_{pR} = f'_{pi} - \left( \frac{\log t_2 - \log t_1}{10} \right) \left( \frac{f'_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right) \quad (2.11)$$

donde:

$t_1$  = tiempo de comienzo del intervalo en horas

$t_2$  = tiempo de fin del intervalo en horas

## 2.4 MÉTODO DE LOS INCREMENTOS DE INTERVALOS DE TIEMPO PARA ESTIMAR PÉRDIDAS DE PRESFUERZO

El método de los incrementos de intervalos de tiempo, consiste en dividir la vida de la estructura, en intervalos de tiempo seleccionados con base en deformaciones límite específicas del concreto, tal como niveles de deformaciones unitarias  $\varepsilon_{c1} = 0.001$  y  $0.002$  cm/cm, y deformación última permisible  $\varepsilon_c = 0.003$  cm/cm. Para cada intervalo, se calculan las deflexiones, distribución de deformaciones, curvatura y fuerzas de presfuerzo, junto con los incrementos de pérdidas por contracción, flujo plástico, y relajación. El procedimiento se repite para cada intervalo incremental subsecuente, y para obtener la deflexión total diferida en una sección particular a lo largo del claro, se hace una integración o suma de los incrementos (Nawy, 2010).

La rotación total en el fin de un intervalo, puede calcularse como (Nawy, 2010):

$$\Phi_t = -\frac{P_i e_x}{E_c I_c} + \sum_0^t (P_{n-1} - P_n) \frac{e_x}{E_c I_c} - \sum_0^t (C_n - C_{n-1}) P_{n-1} \frac{e_x}{E_c I_c} \quad (2.12a)$$

donde:

$P_i$  = fuerza de presfuerzo inicial antes de las pérdidas

$e_x$  = excentricidad de tendón en alguna sección a lo largo del claro

Subíndice  $n-1$  = comienzo de un intervalo de tiempo particular

Subíndice  $n$  = fin del intervalo de tiempo

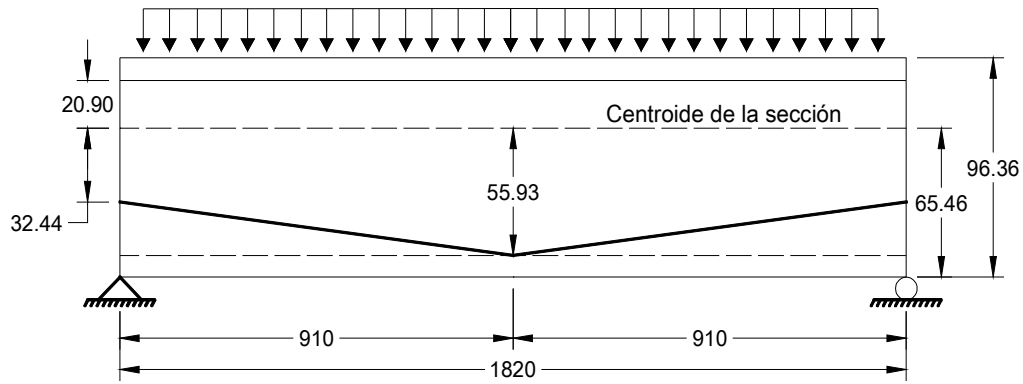
$C_{n-1}, C_n$  = coeficiente de flujo plástico en inicio y fin, respectivamente de un intervalo de tiempo particular

$P_n - P_{n-1}$  = pérdidas de presfuerzo en un intervalo de tiempo particular de todas las causas.

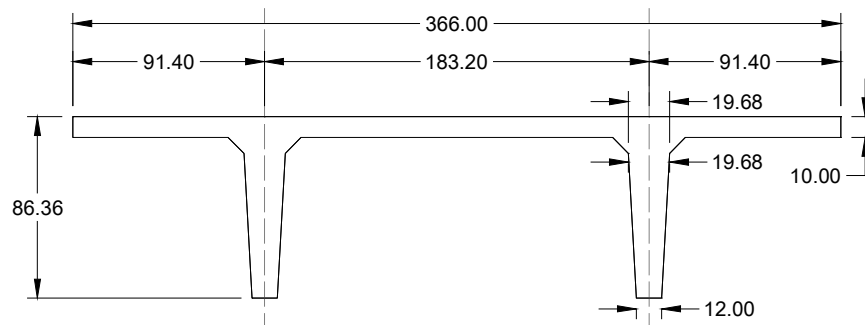
### 2.4.1 Ejemplo de cálculo de pérdidas de presfuerzo en una viga postensada por el método de los incrementos de intervalos de tiempo

#### Ejemplo 2.1 (Nawy, 2010)

Se evalúa la flecha y deflexión a largo plazo de la viga doble T que se presenta en la figura 2.1 por el método de los incrementos de los intervalos de tiempo, suponiendo que  $f_{pi} = 13,288.59$  kg/cm<sup>2</sup>, y que las pérdidas de presfuerzo son incrementalmente evaluadas en: la etapa de transferencia (7 días después del colado), 30 días después de la transferencia (terminación del montaje y aplicación de la carga muerta sobrepuesta), 90 días, y 5 años. Se supondrá que el coeficiente de flujo plástico último  $C_u = 2.35$  para el concreto y  $f_{py} = 16,171.3$  kg/cm<sup>2</sup> para el acero de presfuerzo usado en la viga. Se graficará la relación deflexión-tiempo para la viga, con un  $E_c = 283,349.3$  kg/cm<sup>2</sup> para todos los incrementos en esta solución, excepto en transferencia, donde  $f'_{ci} = 263.66$  kg/cm<sup>2</sup>. La viga es postensada. Se usará  $E_{ps} = 1,933,525$  kg/cm<sup>2</sup>. Los datos necesarios para este ejemplo se presentan en la tabla 2.1 (Nawy, 2010).



a) Elevación



b) Sección transversal

**Figura 2.1. Geometría de la viga del ejemplo 2.1 (Nawy, 2010)  
(acotaciones en cm)**

**Tabla 2.1. Propiedades geométricas y de material de la viga del ejemplo 2.1**

Propiedad	Notación	Cantidad	Unidad
Área de la sección gruesa	$A_c$	6,310	cm <sup>2</sup>
Momento de inercia de la sección gruesa	$I_c$	3,590,000	cm <sup>4</sup>
Distancia del centroide de la sección transversal a la fibra inferior	$Y_i$	65.46	cm
Distancia del centroide de la sección transversal a la fibra superior	$Y_s$	20.90	cm
Longitud del claro	$l$	1,820	cm
Excentricidad en el centro del claro	$e_c$	55.93	cm
Excentricidad en los extremos	$e_e$	32.43	cm
Resistencia a compresión del concreto	$f'_c$	350	kg/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de flujo plástico último	$C_u$	2.35	
Coefficiente que depende del curado del concreto (húmedo o vapor)	$\epsilon_{SH}$	0.0008	
Módulo de elasticidad del concreto	$E_c$	283,349.3	kg/cm <sup>2</sup>
Módulo de elasticidad del acero de presfuerzo	$E_{ps}$	1,933,525	kg/cm <sup>2</sup>
Resistencia a la ruptura del acero de presfuerzo	$f_{pu}$	18,987.19	kg/cm <sup>2</sup>
Esfuerzo a la fluencia del acero de presfuerzo	$f_{py}$	16,171.30	kg/cm <sup>2</sup>
Cantidad de torones	$NT$	16	
Área del torón	$A_t$	0.99	cm <sup>2</sup>
Peso propio	$W_d$	15.16	kg/cm
Sobrecarga muerta	$W_{sd}$	1.49	kg/cm
Carga viva	$W_l$	16.35	kg/cm

## Solución:

De manera ilustrativa se resuelve paso a paso el primer intervalo entre la etapa de transferencia y 30 días después. Los otros intervalos se resuelven de manera similar usando el programa en MATLAB que se anexa en el apéndice A.

En la tabla 2.2 se presentan las notaciones usadas en este ejemplo, y su respectiva descripción.

**Tabla 2.2. Notación usada en el ejemplo 2.1**

Notación	Descripción
$A_{ps}$	Área total de acero de presfuerzo
$C_t$	Coficiente por flujo plástico en un tiempo $t$ en días
$E_{ci}$	Módulo de elasticidad del concreto en transferencia
$f'_{ci}$	Resistencia a compresión del concreto en etapa de transferencia
$f_{bcc}$	Esfuerzo en el centroide del acero de presfuerzo (CL)
$f_{bec}$	Esfuerzo en el centroide del acero de presfuerzo (extremos)
$f_{i,pi}$	Esfuerzo en fibra inferior debido sólo a $P_i$ (en transferencia)
$f_{pi}$	Esfuerzo al que se somete el acero en transferencia
$f_{pR}$	Esfuerzo restante en el acero después de un intervalo de tiempo
$f_{s,pi}$	Esfuerzo en fibra superior debido sólo a $P_i$ (en transferencia)
$h$	Altura total de la sección
$P_i$	Fuerza de presfuerzo (en transferencia) sin considerar pérdidas
$R$	Relación de relajación
$S_i$	Módulo de sección inferior
$S_s$	Módulo de sección superior
$t_1$	Inicio del intervalo
$t_2$	Fin del intervalo
$\delta_d$	Deflexión por carga muerta (peso propio)
$\delta_{dt}$	Deflexión por carga muerta (peso propio) en el día del que se trate
$\Delta f_i$	Pérdida de esfuerzo en la fibra inferior
$\Delta f_{Rt}$	Pérdida de presfuerzo por relajación en el día para el que se calcula
$\Delta f^s$	Pérdida de esfuerzo en la fibra superior
$\Delta f_{Rt}$	Suma de pérdidas de presfuerzo en el acero en el día en cuestión
$\delta_i$	Deflexión debido al presfuerzo en etapa de transferencia
$\delta_l$	Deflexión por carga viva
$\delta_{net,t}$	Deflexión neta en el día para el que se calcula
$\delta_{Pt}$	Flecha debida solo al presfuerzo en el día que se trate
$\Delta Pt$	Pérdida de fuerza de presfuerzo
$\Delta R$	Incremento de $R$
$\delta_{sd}$	Deflexión por sobrecarga muerta
$\delta_{sdt}$	Deflexión por sobrecarga muerta en el día del que se trate
$\Delta \epsilon'_{CR}$	Incremento de $\epsilon'_{CR}$
$\Delta \epsilon_{ci}$	Pérdida de deformación en fibra inferior en CL
$\Delta \epsilon_{CR}$	Incremento de $\epsilon_{CR}$
$\Delta \epsilon_{CRci,net}$	Incremento de deformación unitaria neta en la fibra inferior por flujo plástico (CL)
$\Delta \epsilon_{CRci}$	Incremento de deformación en la fibra inferior por flujo plástico en $t_1$ (CL)
$\Delta \epsilon_{CRci,net}$	Incremento de deformación unitaria neta en la fibra inferior por flujo plástico (extremos)
$\Delta \epsilon_{CRci}$	Incremento de deformación en la fibra inferior por flujo plástico en $t_1$ (extremos)
$\Delta \epsilon^s_c$	Pérdida de deformación en fibra superior en CL
$\Delta \epsilon^s_{CRc}$	Incremento de deformación en la fibra superior por flujo plástico en $t_1$ (CL)
$\Delta \epsilon^s_{CRc,net}$	Incremento de deformación unitaria neta en la fibra superior por flujo plástico (CL)
$\Delta \epsilon^s_{CRc}$	Incremento de deformación en la fibra superior por flujo plástico en $t_1$ (extremos)
$\Delta \epsilon^s_{CRc,net}$	Incremento de deformación unitaria neta en la fibra superior por flujo plástico (extremos)
$\Delta \epsilon_{SH}$	Incremento de $\epsilon_{SH}$

$\Delta\Phi_{ct}$	Incremento de curvatura para $t_2$ (CL)
$\Delta\Phi_{et}$	Incremento de curvatura para $t_2$ (extremos)
$\mathcal{E}'_{cR,t}$	Deformación unitaria por flujo plástico por unidad de esfuerzo en un tiempo determinado
$\mathcal{E}_{bcc}$	Deformación unitaria en el centroide del acero de presfuerzo (CL)
$\mathcal{E}_{bec}$	Deformación unitaria en el centroide del acero de presfuerzo (extremos)
$\mathcal{E}_{cR}$	Deformación unitaria por flujo plástico
$\mathcal{E}_{i,c}$	Deformación unitaria en la sección inferior en transferencia en CL
$\mathcal{E}_{i,e}$	Deformación unitaria inferior en transferencia en extremos
$\mathcal{E}_{s,c}$	Deformación unitaria en la sección superior en transferencia en CL
$\mathcal{E}_{s,e}$	Deformación unitaria superior en transferencia en extremos
$\mathcal{E}_{SH,t}$	Deformación unitaria por contracción del concreto en un tiempo $t$ determinado
$\Phi_{ct}$	Relación de curvatura en centro de claro
$\Phi_{et}$	Relación de curvatura en apoyos
$\Phi_{Tct}$	Rotación total (CL) en un tiempo $t$ determinado
$\Phi_{Tet}$	Rotación total (extremos) en un tiempo $t$ determinado

### Esfuerzos, deformaciones unitarias y deflexiones en la etapa de transferencia del presfuerzo

$$E_{ci} = 15,112\sqrt{f'_{ci}} = 15,112\sqrt{263.66} = 245,382 \text{ kg/cm}^2$$

Para el ejemplo y la figura 2.1, los esfuerzos ( $\text{kg/cm}^2$ ) y deformaciones ( $\text{cm/cm}$ ) iniciales en las fibras extremas de la sección transversal para la viga en transferencia debido a la fuerza de presfuerzo  $P_i$  y  $P_i + W_d$ , se calcula como sigue:

Fuerza de presfuerzo inicial  $P_i$

$$P_i = (NT)(A_t)(f_{pi}) = (16)(0.99)(13,288.59) = 209,868 \text{ kg}$$

Módulos de sección inferior y superior

$$S_i = \frac{I_c}{Y_i} = \frac{3,590,000}{65.46} = 54,842.65 \text{ cm}^3 \quad S_s = \frac{I_c}{Y_s} = \frac{3,590,000}{20.90} = 171,770 \text{ cm}^3$$

$$h = Y_i + Y_s = 65.46 + 20.90 = 86.36 \text{ cm}$$

Esfuerzos debido a la fuerza de presfuerzo  $P_i$

Centro del claro:

$$f_{s,P_i} = -\frac{P_i}{Ac} + \frac{P_i e_c}{S_s} = -\frac{209,868}{6310} + \frac{209,868 \times 55.93}{171,770} = 35.08 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{i,P_i} = -\frac{P_i}{Ac} - \frac{P_i e_c}{S_i} = -\frac{209,868}{6310} - \frac{209,868 \times 55.93}{54,842.65} = -247.3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s,c} = \frac{f_{s,P_i}}{E_{ci}} = \frac{35.08}{245,382} = 144 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

$$\epsilon_{i,c} = \frac{f_{i,P_i}}{E_{ci}} = \frac{-247.3}{245,382} = -1010 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

Apoyos (extremos):

$$f_{s,P_i} = -\frac{P_i}{Ac} + \frac{P_i e_e}{S_s} = -\frac{209,868}{6310} + \frac{209,868 \times 32.43}{171,770} = 6.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{i,P_i} = -\frac{P_i}{Ac} - \frac{P_i e_e}{S_i} = -\frac{209,868}{6310} - \frac{209,868 \times 32.43}{54,842.65} = -157.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_{s,e} = \frac{f_{s,P_i}}{E_{ci}} = \frac{6.4}{245,382} = 26 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

$$\varepsilon_{i,e} = \frac{f_{i,P_i}}{E_{ci}} = \frac{-157.4}{245,382} = -642 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

Cálculo del giro:

$$\text{Centro del claro } \Phi_{ci} = \frac{\varepsilon_{i,c} - \varepsilon_{s,c}}{h} \frac{-1010 - 144}{86.36} \times 10^{-6} = -13.36 \times 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

$$\text{Apoyos } \Phi_{ei} = \frac{\varepsilon_{i,e} - \varepsilon_{s,e}}{h} \frac{-642 - 26}{86.36} \times 10^{-6} = -7.73 \times 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

Cálculo de las deflexiones debido al presfuerzo

$$\delta_i \uparrow = \Phi_c \left( \frac{l^2}{8} \right) + (\Phi_e - \Phi_c) \frac{l^2}{24}$$

$$\delta_i \uparrow = -13.36 \times 10^{-6} \left( \frac{1820^2}{8} \right) + (-7.73 \times 10^{-6} + 13.36 \times 10^{-6}) \frac{1820^2}{24}$$

$$\delta_i \uparrow = -13.36 \times 10^{-6} \left( \frac{1820^2}{8} \right) + (-7.73 \times 10^{-6} + 13.36 \times 10^{-6}) \frac{1820^2}{24} = -4.8 \text{ cm}$$

Deflexión debida al peso propio

$$\delta_D = \frac{5W_d l^4}{384E_{ci}I_c} = \frac{5 \times 15.16 \times 1820^4}{384 \times 245,382 \times 3,590,000} = 2.5 \text{ cm}$$

**Factores dependientes del tiempo**

a) *Flujo plástico*

De la ecuación (2.9),

$$\varepsilon_{CR} = \frac{c_t}{E_c} f_{cs} \quad (2.13)$$

De la ecuación (2.8),

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} C_u$$

Para 30 días después de la transferencia, de la ecuación (2.13):

$$\varepsilon'_{CR,t} = \frac{t^{0.60}}{10+t^{0.60}} C_u = \frac{30^{0.60}}{10+30^{0.60}} 2.35 = 0.36 \times 10^{-5} \text{ cm/cm por unidad de esfuerzo}$$

Las deformaciones unitarias por flujo plástico en otros intervalos, se calculan de manera similar

b) *Contracción del concreto*

De la ecuación (2.5)

$$\varepsilon_{SH,t} = \frac{t}{t + 35} \varepsilon_{SH}$$

donde:

$$\varepsilon_{SH} = 800 \times 10^{-6} \text{ cm/cm para concreto de curado húmedo}$$

Para 30 días después de la transferencia, el tiempo de contracción  $t=30$  días si la viga es postensada, y  $t=30 + 7 = 37$  días si es pretensada. Entonces,

$$\varepsilon_{SH,30} = \frac{30}{30 + 35} 800 \times 10^{-6} = 369 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

De manera similar,  $\varepsilon_{SH}$  puede ser calculado para todos los otros intervalos tabulados en la tabla 2.3.

c) *Relajación del acero de presfuerzo*

De la ecuación (2.10):

$$\frac{f_{pR}}{f_{pi}} = 1 - \left( \frac{\log t_2 - \log t_1}{10} \right) \left( \frac{f_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right)$$

Donde  $\log t$ , en horas, es de base 10,  $f_{pi}/f_{py}$  es mayor que 0.55, y  $f_{pR}$  es el esfuerzo restante en el acero después de los 30 días = 720 horas, después de ser aplicado el presfuerzo.

La relación de relajación está dada por:

$$R = 1 - \frac{f_{pR}}{f_{pi}} \tag{2.14}$$

De la ecuación (2.10) y (2.14), se tiene:

$$R = 1 - \frac{f_{pR}}{f_{pi}} = \left( \frac{\log 720 - 0}{10} \right) \left( \frac{13,288.59}{16,171.3} - 0.55 \right) = 0.078$$

La tabla 2.3 muestra los incrementos de los factores dependientes del tiempo, que intervienen en las pérdidas de presfuerzo en este ejemplo, para los tiempos 7, 30, 90, 365 días, y 5 años después de la transferencia.

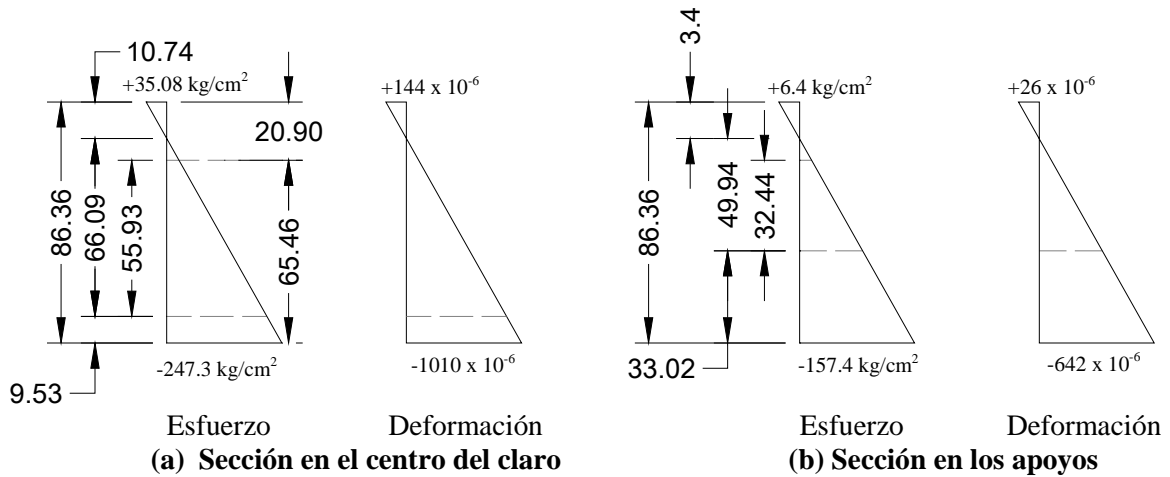
**Tabla 2.3. Incremento de factores de pérdidas diferidas de presfuerzo del ejemplo**

Tiempo	Flujo plástico x 10 <sup>-6</sup>		Contracción x 10 <sup>-6</sup>		Relajación	
Días	$\epsilon'_{CR,t}$	$\Delta\epsilon'_{CR}$	$\epsilon_{SH,t}$	$\Delta\epsilon_{SH}$	R	$\Delta R$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Transf. (7días)	0	0	133	133	0	0
30	3.61	3.61	369	236	0.0776	0.0776
90	4.96	1.35	576	207	0.0906	0.0130
365	6.43	1.47	730	154	0.1071	0.0165
5 años	7.46	1.03	785	55	0.1261	0.0190

**De la etapa de transferencia al montaje (fin del intervalo = 30 días)**

a) *Esfuerzos en las fibras de concreto en el nivel del centroide del acero de presfuerzo, para el cálculo del flujo plástico*

Las excentricidades de los tendones son  $e_c = 55.93$  cm y  $e_e = 32.44$  cm. En la figura 2.2 se muestran los esfuerzos instantáneos y la correspondiente deformación unitaria antes de las pérdidas de presfuerzo.



**Figura 2.2. Esfuerzos y deformaciones en transferencia debidos solamente al presfuerzo antes de las pérdidas.**

De la figura 2.2:

$$f_{bcc} = -247.3 \frac{66.09}{66.09 + 9.53} = -216.13 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{bcc} = \frac{f_{bcc}}{E_c} = -\frac{216.13}{283,349.3} = -764 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$



$$f_{bec} = -157.4 \frac{49.94}{49.94 + 33.02} = -94.75 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_{bcc} = \frac{f_{bcc}}{E_c} = -\frac{-94.75}{283,349.3} = -335 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

Incremento de deformación unitaria por flujo plástico

$$\Delta\varepsilon_{CR} = (\Delta\varepsilon'_{CR}) \text{ (esfuerzo } f, \text{ en el } cgs)$$

donde:

*cgs* = centroide del acero de presfuerzo

De la tabla 2.3,  $\Delta\varepsilon'_{CR} = 3.61 \times 10^{-6}$  cm/cm por unidad de esfuerzo. De esta manera:

$$\text{En centro del claro } \Delta\varepsilon_{CR} = \Delta\varepsilon'_{CR} \times f_{bcc} = 3.61 \times 10^{-6} (-216.13) = -782 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

$$\text{En los apoyos } \Delta\varepsilon_{CR} = \Delta\varepsilon'_{CR} \times f_{bec} = 3.61 \times 10^{-6} (-94.75) = -343 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

Incremento de deformación unitaria por contracción

$$\Delta\varepsilon_{SH} = 236 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

Pérdida de esfuerzo por relajación

$$\Delta f_{R30} = R \times f_{pi} = 0.0776 \times 13,288.59 = 1,031.2 \text{ kg/cm}^2$$

Suma de pérdidas de presfuerzo en el acero

$$\Delta f_T = (\Delta\varepsilon_{CR} + \Delta\varepsilon_{SH})E_{ps} + \Delta f_R$$

$$\text{En el centro del claro } \Delta f_{T30} = (782 + 236) \times 10^{-6} \times 1,933,525 + 1,031.2 = 2,999.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{En los apoyos } \Delta f_{T30} = (343 + 236) \times 10^{-6} \times 1,933,525 + 1,031.2 = 2,150.7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Aquí, se usa una media } \Delta f_{T30} = \frac{1}{2}(2,999.5 + 2,150.7) = 2,575 \text{ kg/cm}^2$$

b) Cambio correspondiente en esfuerzos y deformaciones en las fibras de concreto

$$\text{Fuerza de presfuerzo perdida } \Delta P_{30} = \Delta f_{T30} A_{ps} = 2,575 \times 16 \times 0.99 = 40,788 \text{ kg}$$

(i) Sección en el centro del claro

Fibra superior

$$\Delta f^s = -\frac{\Delta P_{30}}{A_c} + \frac{\Delta P_{30} \times e_c}{S_s} = -\frac{40,788}{6310} + \frac{40,788 \times 55.93}{171,770} = +6.82 \text{ kg/cm}^2 \text{ (T)}$$

$$\Delta \varepsilon_c^s = \frac{6.82}{283,349.3} = +24 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

Fibra inferior

$$\Delta f_i = -\frac{\Delta P_{30}}{A_c} - \frac{\Delta P_{30} \times e_c}{S_i} = -\frac{40,788}{6310} - \frac{40,788 \times 55.93}{54,842.65} = -48.06 \text{ kg/cm}^2 \text{ (T)}$$

$$\Delta \varepsilon_{ci} = \frac{-48.06}{283,349.3} = -169 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

(ii) Sección en los apoyos

$$\Delta f^s = -\frac{\Delta P_{30}}{A_c} + \frac{\Delta P_{30} \times e_e}{S_s} = -\frac{40,788}{6310} + \frac{40,788 \times 32.43}{171,770} = +1.24 \text{ kg/cm}^2 \text{ (T)}$$

$$\Delta \varepsilon_c^s = \frac{1.24}{283,349.3} = +4 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

$$\Delta f_i = -\frac{\Delta P_{30}}{A_c} - \frac{\Delta P_{30} \times e_e}{S_i} = -\frac{40,788}{6,310} - \frac{40,788 \times 32.43}{54,842.65} = -30.58 \text{ kg/cm}^2 \text{ (T)}$$

$$\Delta \varepsilon_{ci} = \frac{-30.58}{283,349.3} = -108 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

c) Deformaciones unitarias netas, curvaturas resultantes, y flechas

Deformación unitaria por flujo plástico (cm/cm)

(i) Deformación en fibras

Centro del claro:

$$\Delta \varepsilon_{CRC}^s = f_7^s \times \Delta \varepsilon'_{CR} = 35.08 \times 3.61 \times 10^{-6} = 127 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

$$\Delta \varepsilon_{CRci} = f_{7i} \times \Delta \varepsilon'_{CR} = -247.3 \times 3.61 \times 10^{-6} = -895 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

Apoyos:

$$\Delta \varepsilon_{CRE}^s = f_7^s \times \Delta \varepsilon'_{CR} = 6.4 \times 3.61 \times 10^{-6} = 23 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

$$\Delta \varepsilon_{CRci} = f_{7i} \times \Delta \varepsilon'_{CR} = -157.4 \times 3.61 \times 10^{-6} = -569 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}$$

Deformaciones netas (cm/cm)

$$\Delta_{net} \varepsilon_{CR} = \Delta \varepsilon_{CR} - \Delta \varepsilon_{ps}$$

donde:

$\Delta \varepsilon_{ps}$  = pérdida de deformación debido a la pérdida de presfuerzo  $\Delta f$  en la parte (b) de la solución.

De la figura 2.3, se tiene lo siguiente:

Centro del claro:

$$\Delta\varepsilon_{CRC,net}^S = \Delta\varepsilon_{CRC}^S - \Delta\varepsilon_{psc}^S = (+127 - 24)10^{-6} \text{ cm/cm} = 103 \times 10^{-6}$$

$$\Delta\varepsilon_{CRc i,net} = \Delta\varepsilon_{CRci} - \Delta\varepsilon_{psci} = (-895 + 169)10^{-6} \text{ cm/cm} = -726 \times 10^{-6}$$

Apoyos:

$$\Delta\varepsilon_{CRe,net}^S = \Delta\varepsilon_{CRe}^S - \Delta\varepsilon_{pse}^S = (+23 - 4)10^{-6} \text{ cm/cm} = +19 \times 10^{-6}$$

$$\Delta\varepsilon_{CRe i,net} = \Delta\varepsilon_{CRei} - \Delta\varepsilon_{psei} = (-569 + 108)10^{-6} \text{ cm/cm} = -461 \times 10^{-6}$$

(ii) Curvaturas (rad/cm)

$\Delta\Phi_{30}$  es la curvatura adicional en el fin del intervalo de 30 días después de la transferencia, basada en las deformaciones unitarias netas, en otras palabras, es el incremento de curvatura para este intervalo.

En el centro del claro:

$$\Delta\Phi_{c30} = \frac{\Delta\varepsilon_{CRc i,net} - \Delta\varepsilon_{CRC,net}^S}{h} = \frac{(-726 - 103) \times 10^{-6}}{86.36} = 9.6 \times 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

En los apoyos:

$$\Delta\Phi_{e30} = \frac{\Delta\varepsilon_{CRe i,net} - \Delta\varepsilon_{CRe,net}^S}{h} = \frac{(-461 - 19) \times 10^{-6}}{86.36} = 5.4 \times 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

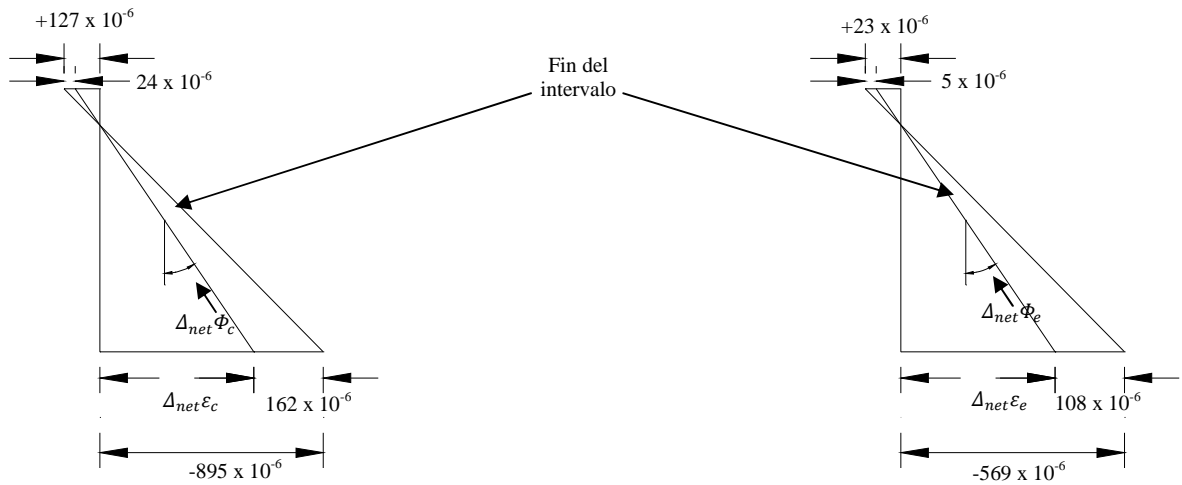


Figura 2.3 Deformación incremental por flujo plástico en 30 días en el ejemplo 2.1

(iii) *Curvatura total (rad/cm) y flecha*

De lo anterior,  $\Phi_{ci} = -13.36 \times 10^{-6}$  rad/cm y  $\Phi_{ei} = -7.73 \times 10^{-6}$  rad/cm. Entonces, la curvatura total en 30 días después de la transferencia es:

$$\Phi_T = \Phi_i + \Delta\Phi_{30}$$

En el centro del claro:

$$\Phi_{Tc30} = (-13.36 - 9.6) \times 10^{-6} = 23 \times 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

En los extremos:

$$\Phi_{Te30} = (-7.73 - 5.4) \times 10^{-6} = 13.3 \times 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

La deflexión debido al presfuerzo en el fin del intervalo de 30 días para tendón con trayectoria lineal es:

$$\delta_{P30} \uparrow = \Phi_{Tc30} \left( \frac{l^2}{8} \right) + (\Phi_{Te30} - \Phi_{Tc30}) \frac{l^2}{24}$$

$$\delta_{P30} \uparrow = 23 \times 10^{-6} \left( \frac{1820^2}{8} \right) + (13.3 - 23) \times 10^{-6} \times \frac{1820^2}{24} = 8.2 \text{ cm } \uparrow$$

*Deflexión a largo plazo debido a las cargas gravitacionales 30 días después de la transferencia.* Suponiendo que  $E_c = 283,349.3 \text{ kg/cm}^2$  es un valor aceptable en la práctica ingenieril para el módulo de elasticidad del concreto. Se tiene  $W_d = 15.16 \text{ kg/cm}$ . Entonces,

$$\delta_d = \frac{5Wl^4}{384E_c I_g} = 2.5 \text{ cm (obtenido anteriormente)}$$

$$W_{sd} = 1.49 \text{ kg/cm}$$

$$\delta_{sd} = \frac{5 \times 1.49 \times 1820^4}{384 \times 283,349.3 \times 3,590,000} = 0.21 \text{ cm}$$

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} C_u = \frac{30^{0.60}}{10 + 30^{0.60}} 2.35 = 1.02$$

( $C_t$  para  $W_{sd}$  en aproximadamente 15 días = 0.80)

$$\delta_{d30} = 2.5(1 + 1.02) = 5.1 \text{ cm}$$

$$\delta_{sd30} = 0.21(1 + 0.80) = 0.4 \text{ cm}$$

$$\delta_l = 0 \text{ (La viga se ocupó 90 días después de la transferencia)}$$

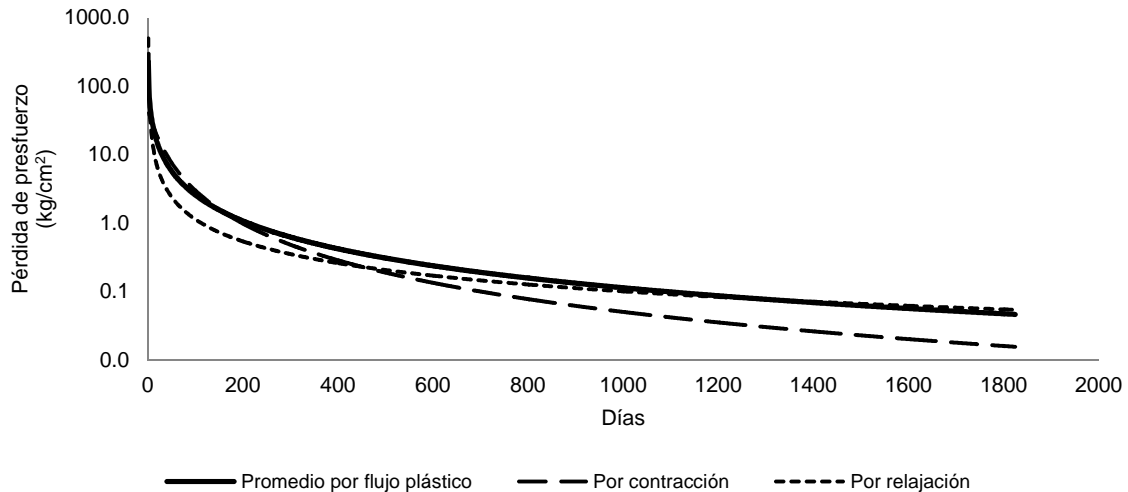
*Deflexión total debido a cargas gravitacionales = 5.1 + 0.4 + 0 = 5.5 cm ↓*

$$\delta_{net,30} = -8.2 \uparrow + 5.5 \downarrow = -2.7 \text{ cm } \uparrow \text{ (flexión hacia arriba)}$$

Las pérdidas de esfuerzo, deformaciones y deflexiones para los otros intervalos se calculan de manera similar. Para mayor facilidad en el cálculo de estas cantidades, se realizó un programa en MATLAB, que se anexa en el apéndice A.

A continuación se presentan las gráficas obtenidas con el programa “DEFLEXIONES” para el ejemplo 2.1. La duración de los intervalos de tiempo es de un día.

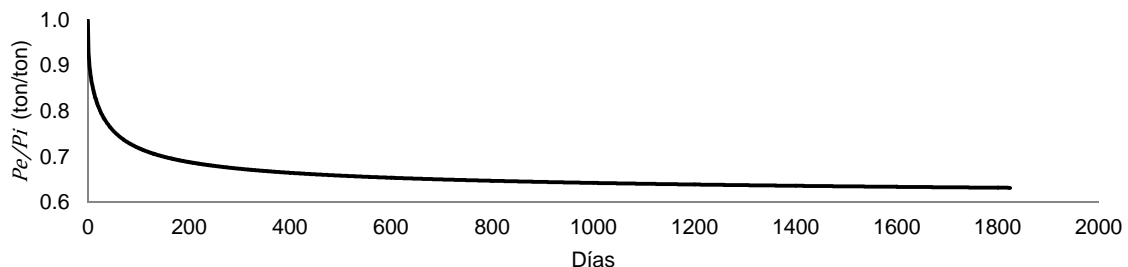
En la figura 2.4 se presentan la variación de las pérdidas dependientes del tiempo, debido a los tres factores principales que son: flujo plástico, contracción y relajación.



**Figura 2.4. Variación de las pérdidas de presfuerzo en función del tiempo para la viga del ejemplo 2.1**

En la figura 2.4 se puede observar que, las pérdidas de mayor magnitud se encuentran dentro del primer año de la vida de la estructura, después de este periodo, las pérdidas son mínimas. Durante los dos primeros años, las pérdidas por flujo plástico, fueron en promedio mayores que las causadas por la contracción y la relajación. Después de este lapso, la tendencia de pérdidas se vuelve asintótica, con un valor aproximado de 0.1 kg/cm<sup>2</sup> por día.

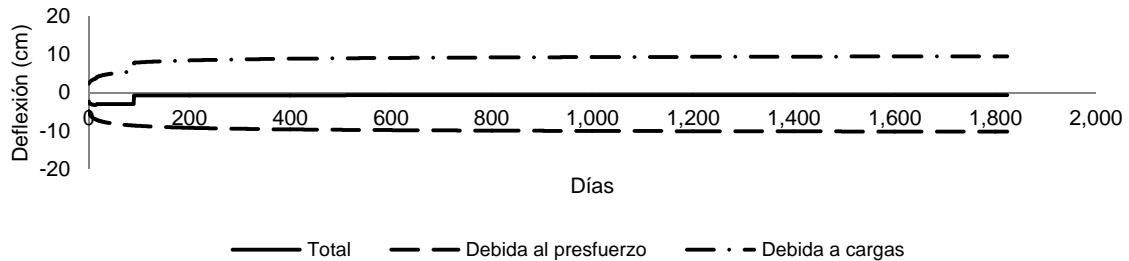
La relación entre la fuerza de presfuerzo efectivo  $P_e$  y la fuerza inicial  $P_i$  con respecto al tiempo, se presenta en la figura 2.5.



**Figura 2.5. Variación de la relación  $P_e/P_i$  en función del tiempo para la viga del ejemplo 2.1**

En la figura 2.5, se observa que para este ejemplo, se pierde aproximadamente un 30% de la fuerza en el primer año, y un 40 % después de los 5 años de vida de la estructura. Al igual que en la figura 2.4, después de los dos años, se observa un comportamiento asintótico.

En la figura 2.6 se presenta la deflexión hacia arriba (negativa) causada por el presfuerzo, la debida a las cargas (positiva), y la que resulta al sumar ambas cantidades.



**Figura 2.6. Deflexión debida al presfuerzo y las cargas para la viga del ejemplo 2.1**

En la figura 2.6 se observa un salto en las gráficas, debido a las cargas gravitacionales en el día 90 después de la transferencia, que es cuando comienza a actuar la carga viva. Además, se puede apreciar cómo la deflexión producida por las cargas, es contrarrestada por la debida al presfuerzo. Se aprecia también, que a pesar de las pérdidas, la deflexión debida al presfuerzo, es cada vez mayor, esto se debe principalmente al flujo plástico, que incrementa la deflexión causada por el presfuerzo. Como sucedió con las pérdidas de presfuerzo (figuras 2.4 y 2.5), después de dos años, en las gráficas se observa que la deflexión, tiene una tendencia asintótica.

De los resultados presentados anteriormente, se puede concluir que los principales cambios en las deflexiones y pérdidas de presfuerzo, se presentan durante los dos primeros años de la vida de una viga de concreto presforzado. Posterior a esta etapa, las pérdidas son mínimas, y el cambio en las deflexiones puede ser despreciable. Por lo tanto, es de esperarse que después de este periodo, suceda lo mismo con las frecuencias de vibración.

En el capítulo 5, se usará la relación  $P_e/P_i$  en función del tiempo (figura 2.5), para relacionar la pérdida de presfuerzo con la variación de la frecuencia natural de vibración de la viga del ejemplo 2.1.

## CAPÍTULO 3

### ESTADO DEL ARTE

Teóricamente, la presencia de una fuerza axial en una viga homogénea altera su frecuencia de vibración debido al efecto de ablandamiento por compresión, (Tse, 1978). Para una viga prismática simplemente apoyada, la solución de la ecuación de equilibrio dinámico, lleva a la ecuación (3.1) para calcular su frecuencia natural de vibración (Saidii et al., 1994).

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 * \frac{EI}{m} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 * \frac{N}{m} \quad (3.1)$$

donde:

$n$  = número de modo

$L$  = longitud del claro

$E$  = módulo de elasticidad

$N$  = fuerza de compresión axial (positiva)

$m$  = masa por unidad de longitud

$I$  = momento de inercia de la sección transversal

De acuerdo con la ecuación (3.1), el aumento de la fuerza de compresión disminuye la frecuencia.

Si se aplica la ecuación (3.1) a vigas de concreto presfuerzo, se puede obtener el nivel de la fuerza de presfuerzo  $N$  en la etapa de servicio de las mismas (Saidii et al., 1994).

Además de la propuesta de Saidii et al., (1994) existen los trabajos de investigadores como Jain et al., (2005), Kim et al., (2004), Zhang y Li, (2007), Breccolotti et al., (2009) y otros. Sin embargo, todos ellos presentan desventajas que los hacen poco útiles en la práctica ingenieril, por lo que es necesario modificarlos para hacerlos más precisos, y poder aplicarlos cuando se necesite conocer el presfuerzo que tiene una viga de concreto en servicio.

A continuación, se revisan algunas propuestas existentes para determinar la magnitud de la fuerza de presfuerzo en vigas de concreto a partir de la variación de su frecuencia natural de vibración.

#### 3.1 PROPUESTA DE SAIDII, DOUGLAS Y FENG

Saidii et al., (1994), estudiaron el efecto de la fuerza de presfuerzo existente en una viga de concreto, sobre su rigidez a flexión. Esto con base en la medición de las frecuencias de vibración de puentes de concreto presfuerzo y el uso de la ecuación (3.1).

Inicialmente, analizaron el puente Golden Valley (Saidii et al., 1992) que fue instrumentado durante su construcción, por lo que la fuerza de presfuerzo se obtuvo directamente del equipo de instrumentación.

Los datos de las pruebas dinámicas fueron obtenidos en los días 105, 202 y 455 después de la etapa de transferencia.

En la tabla 3.1 se presentan la fuerza de presfuerzo y las frecuencias de vibración medidas de los dos primeros modos de vibrar del puente Golden Valley. En ambos modos se aprecia que a menor presfuerzo, menor frecuencia, lo cual es contrario a lo que predice la ecuación (3.1).

**Tabla 3.1. Frecuencias de vibración del puente Golden Valley**

Día de prueba	Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia medida experimentalmente (Hz)	
		Modo 1	Modo 2
105	53492	2.028	7.59
202	51975	2.024	7.655
455	49440	2.011	7.063

Debido a esta discrepancia, Saidii et al., (1994), estudiaron un espécimen en el laboratorio. Las características del mismo se muestran en la Figura 3.1

En la tabla 3.2 se presentan las propiedades físicas y geométricas de la viga estudiada por Saidii et al., (1994).

**Tabla 3.2. Propiedades de la viga estudiada por Saidii et al., (1994)**

$A_c$ (m <sup>2</sup> )	$I$ (m <sup>4</sup> )	$L$ (m)	$m$ (kg/m)	$f'_c$ kg/cm <sup>2</sup>	$f'_c$ N/m <sup>2</sup>	$E_c$ N/m <sup>2</sup>
0.0129	0.00001734	3.66	31.96	207	20306700	21520000000

donde:

$A_c$  = área de la sección transversal

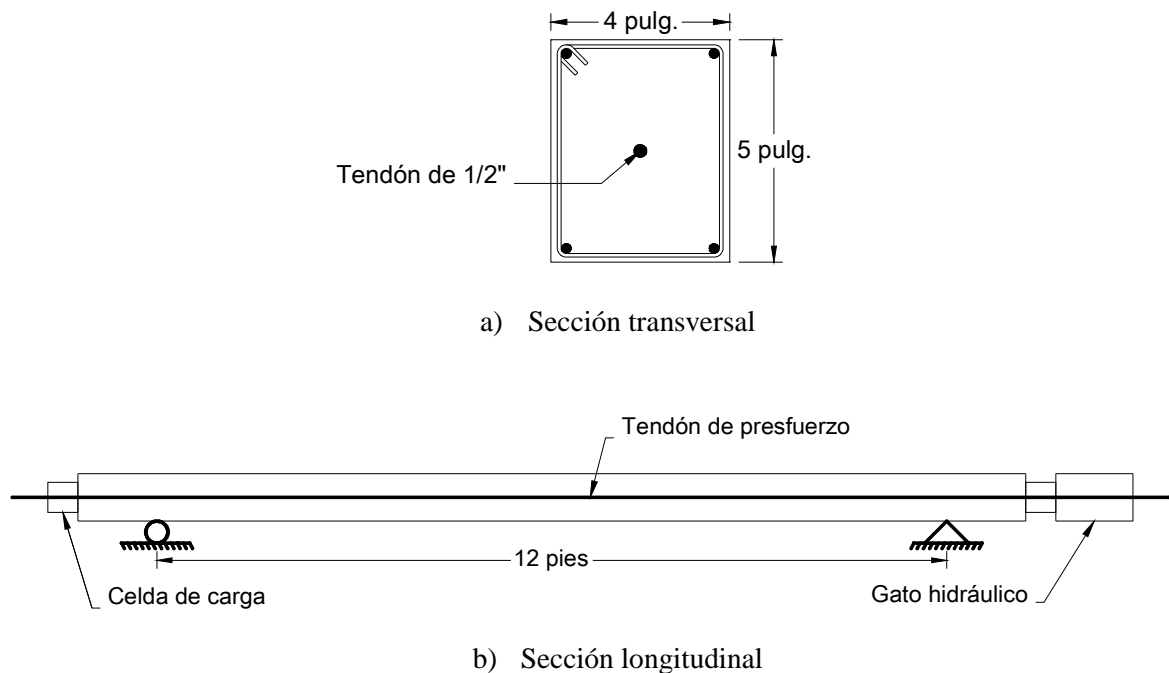
$I$  = momento de inercia

$L$  = longitud

$m$  = masa por unidad de longitud

$f'_c$  = resistencia a compresión del concreto

$E_c$  = módulo de elasticidad del concreto



**Figura 3.1. Geometría de la viga estudiada por Saidii et al., (1994)**



En la tabla 3.3 se presentan en la tercera columna, las frecuencias obtenidas experimentalmente; en la cuarta, las calculadas con la ecuación (3.1); y en la última, el error relativo entre ambos valores.

El experimento, consistió en aplicar secuencialmente distintos niveles de presfuerzo a la viga. Esto se hizo durante dos ciclos, en el primero, se fue aumentando la fuerza de presfuerzo, desde 0 hasta 132.8 kN, en el segundo, se disminuyó desde 131.4 hasta 15.71 kN, como se observa en la primera columna de la tabla 3.3. Para cada nivel de presfuerzo, se obtuvo la frecuencia de vibración de la siguiente manera: el espécimen se instrumentó con siete acelerómetros distribuidos uniformemente a lo largo de su longitud, que sirvieron para medir la respuesta de aceleración vertical de la viga, cuando se ponía en vibración libre causado con el impacto vertical de un martillo. Se usó la técnica de la transformada rápida de Fourier para el análisis de las frecuencias y amplitudes modales.

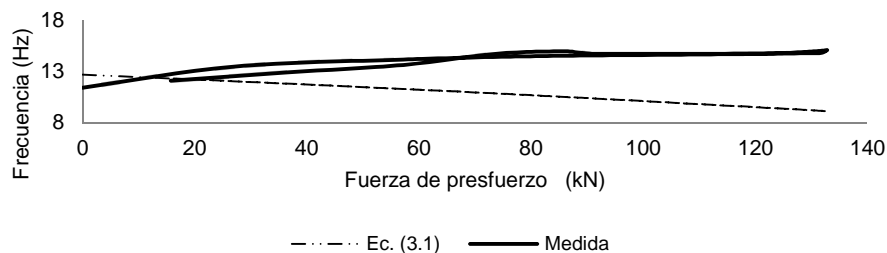
En todas las vigas que se analizan en esta tesis, se presta atención sólo al primer modo de vibrar de la viga.

En la tabla 3.3 se observa que, para esta viga, los errores relativos entre las frecuencias medidas y las calculadas con la ecuación (3.1), se incrementan conforme aumenta el presfuerzo, alcanzando un valor máximo de -39.54%; y, en prácticamente todos los casos, subestimando el valor de la frecuencia de vibración real.

**Tabla 3.3. Frecuencias medidas experimentalmente y calculadas con la ecuación (3.1), de la viga estudiada por Saidii et al., (1994)**

Ciclo de carga	Fuerza de presfuerzo (KN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo $\epsilon$ (%)
		Medida	Ec. (3.1)	
1	0	11.41	12.67	11.05
	27.05	13.47	12.03	-10.68
	57.24	14.15	11.28	-20.32
	81.81	14.49	10.62	-26.71
	121.46	14.72	9.47	-35.68
	130.91	14.97	9.17	-38.73
	132.80	15.07	9.11	-39.54
2	131.40	14.78	9.16	-38.05
	91.26	14.72	10.36	-29.64
	86.54	14.95	10.49	-29.84
	73.78	14.72	10.84	-26.37
	57.25	13.63	11.27	-17.28
	36.49	12.89	11.80	-8.45
	15.71	12.09	12.30	1.77

En la figura 3.2 se grafican los resultados de la tabla 3.3. Se puede observar que las frecuencias obtenidas experimentalmente, muestran una tendencia contraria a la calculada con la ecuación (3.1).



**Figura 3.2. Variación de la frecuencia de vibración con el nivel de presfuerzo, de la viga estudiada por Saidii et al., (1994)**

### 3.1.1 Conclusiones de Saidii et al.

Al aumentar la rigidez de la viga, aumenta la frecuencia de vibración medida, debido a que las microgrietas producidas en su momento debido a la contracción del concreto se cierran y viceversa.

Al sustituir las frecuencias de vibración medidas experimentalmente, en la ecuación (3.1), es posible encontrar el valor de la rigidez a flexión efectiva de la viga, para cada una de sus frecuencias de vibración. Posteriormente, haciendo un análisis de regresión lineal se obtiene la ecuación (3.2) para calcular la rigidez a flexión efectiva  $(EI)_e$  de traveses sometidos a una fuerza de presfuerzo  $N$ .

$$(EI)_e = \left(1 + 1.75 \frac{N}{f'cA_c}\right) E_c I \quad (3.2)$$

Al sustituir  $(EI)_e$  en lugar de  $EI$  en la ecuación (3.1), Saidii et al., (1994), obtuvieron una nueva propuesta para calcular la frecuencia de vibración en función de la fuerza de presfuerzo, de una viga de concreto presforzado.

En la tabla 3.4 se presentan las frecuencias de vibración medidas, y las calculadas con la propuesta de Saidii et al., (1994). Se observa que en esta nueva propuesta, las frecuencias de vibración calculadas, aumentan conforme se incrementa el presfuerzo, como sucede con las medidas experimentalmente. Además, los errores relativos son menores a los mostrados en la tabla 3.3.

**Tabla 3.4. Frecuencias calculadas con la ecuación (3.1), con la ecuación propuesta por Saidii et al., (1994) y medidas experimentalmente**

Ciclo de carga	Fuerza de presfuerzo (KN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo $\epsilon$ (%)
		Medida	Saidii et al.	
1	0	11.41	12.67	11.05
	27.05	13.47	13.28	-1.40
	57.24	14.15	13.93	-1.54
	81.81	14.49	14.44	-0.34
	121.46	14.72	15.23	3.43
	130.91	14.97	15.41	2.91
	132.80	15.07	15.44	2.47
2	131.40	14.78	15.42	4.30
	91.26	14.72	14.63	-0.60
	86.54	14.95	14.54	-2.77
	73.78	14.72	14.28	-3.01
	57.25	13.63	13.93	2.22
	36.49	12.89	13.49	4.64
	15.71	12.09	13.03	7.77

### 3.1.2 Comentarios a la propuesta de Saidii et al.

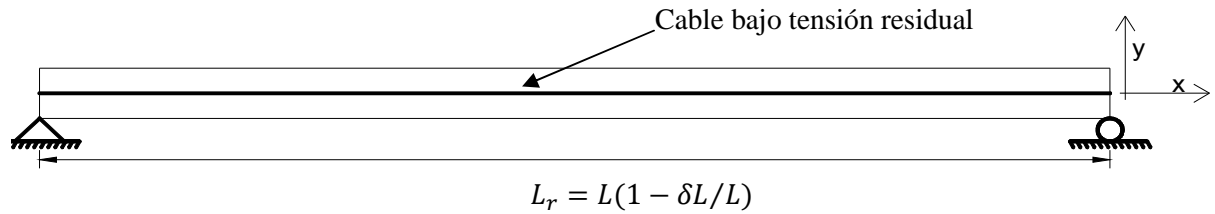
Los resultados calculados con la ecuación (3.1) usando la rigidez a flexión efectiva de la viga, se ajustan bastante bien a los obtenidos experimentalmente. Sin embargo cuando la fuerza de presfuerzo es cero, ya existe una diferencia entre la frecuencia medida y la calculada, misma que se observa en todos los experimentos que se mencionan en esta tesis. Se necesita también un valor de  $(EI)_e$  diferente a  $EI$  cuando  $N=0$ .

Por otro lado, Saidii et al., (1994), no consideraron la viga como un sistema concreto-acero de presfuerzo, donde se tendría un concreto que pierde rigidez por el fenómeno de ablandamiento por compresión y un torón que gana rigidez a la flexión debido al aumento en su tensión. Como se verá más adelante, la propuesta de Saidii et al., (1994), sólo funciona para esta viga, pero no para las otras que aquí se estudian.

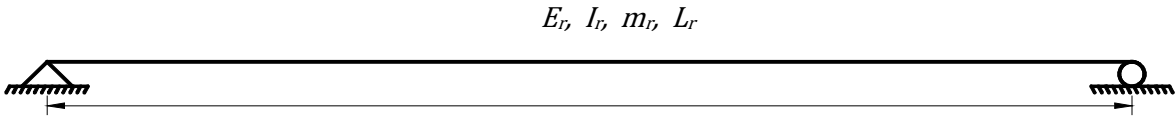
### 3.2 PROPUESTA DE KIM, YUN, RYU y CHO

Kim et al., (2004), presentan un modelo analítico formulado para identificar la pérdida de presfuerzo en vigas de concreto presforzado a partir de su frecuencia natural. Para probarlo, el método propuesto se aplicó a la viga estudiada por Saidii et al., (1994).

Kim et al., (2004), suponen que la estructura está en compresión axial debido al presfuerzo aplicado en los anclajes de los extremos. Entonces, se puede modelar la viga que es inicialmente deformada en compresión como una viga equivalente (deformada). En la estructura deformada, la longitud  $L$  pasa a ser  $L_r$ , donde  $L > L_r$ , como se aprecia en la fig 3.3.



(a) Viga de concreto presforzado bajo deformación inicial



(b) Viga de rigidez a flexión equivalente

**Fig 3.3. Idealización de una viga de concreto presforzado (Kim et al., 2004)**

La ecuación diferencial de equilibrio dinámico de la viga ahora queda expresada por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E_r I_r \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m_r \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3)$$

donde:

$$E_r I_r = E_c I_c + E_s I_s \quad (3.4.a)$$

$$m_r = \rho_c A_c + \rho_s A_s \quad (3.4.b)$$

$m_r$  = masa por unidad de longitud de la viga compuesta

$E_r I_r$  = rigidez a flexión de la sección transversal de la viga compuesta

$\rho_c$  = peso volumétrico del concreto

$\rho_s$  = peso volumétrico del acero de presfuerzo

$A_c$  = área de la sección transversal de la viga de concreto

$E_s I_s$  = rigidez a la flexión del acero de presfuerzo

$E_c I_c$  = rigidez a la flexión del concreto

Ahora, de acuerdo con Kim et al., (2004), la frecuencia natural del  $n$ -ésimo modo de vibrar de un cable sometido a tensión, está dada por la ecuación (3.5).

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L_r}\right)^2 \frac{N}{\rho_s A_s} \quad (3.5)$$

donde:

$L_r$  = longitud de la viga debido a la fuerza de presfuerzo  $N$ .

Suponiendo que existe una viga equivalente al cable sometido a tensión con respecto a sus características dinámicas, como se muestra en la figura 3.3b, la frecuencia natural para el  $n$ -ésimo modo de vibrar de la viga equivalente está dada por la ecuación (3.6).

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L_r}\right)^4 \frac{E_s I_s}{\rho_s A_s} \quad (3.6)$$

Igualando la ecuación (3.5) con la (3.6):

$$E_s I_s = \left(\frac{L_r}{n\pi}\right)^2 N \quad (3.7)$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.4.a) se obtiene:

$$E_r I_r = E_c I_c + \left(\frac{L_r}{n\pi}\right)^2 N \quad (3.8)$$

De donde Kim et al., (2004), obtuvieron una nueva ecuación para calcular la frecuencia en el  $n$ -ésimo modo de vibrar de una viga de concreto presforzado, esto es:

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L_r}\right)^4 * \frac{E_c I_c}{m_r} + \left(\frac{L_r}{n\pi}\right)^2 * N \quad (3.9)$$

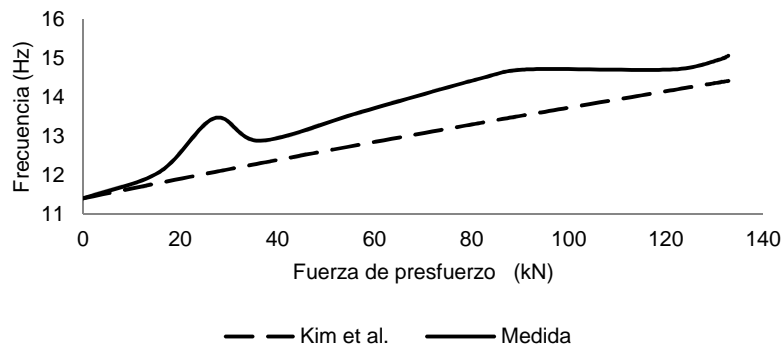
Para verificar esta ecuación, Kim et al., (2004) usaron la viga estudiada por Saidii et al., (1994). Los resultados que obtuvieron se muestran en la tabla 3.5, donde la ecuación (3.9) se debe multiplicar por un factor igual a 0.81 para que sus resultados coincidan.

En la tabla 3.5 se observa que, los errores relativos varían entre 0.01% y -10.28%. Para esta viga, la ecuación (3.9) propuesta por Kim et al., (2004), subestima la frecuencia de vibración, excepto cuando  $N = 0$ .

Por otro lado, la pendiente de la recta obtenida con la ecuación (3.9), mostrada en la figura 3.4, se asemeja de forma aceptable a la de los resultados reales. Produciendo errores relativos, prácticamente menores del 10%.

**Tabla 3.5. Frecuencias de vibración reales de la viga estudiada por Saidii et al., (1994), y calculadas con la ec. (3.9) propuesta por Kim et al., (2004)**

Fuerza de presfuerzo (KN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo ε (%)
	Medida	Kim et al.	
0	11.41	11.41	0.01
15.71	12.09	11.81	-2.34
27.05	13.47	12.09	-10.28
36.49	12.89	12.31	-4.48
57.25	13.63	12.80	-6.11
81.81	14.49	13.35	-7.89
91.26	14.72	13.55	-7.92
121.46	14.72	14.19	-3.59
130.91	14.97	14.39	-3.90
132.80	15.07	14.42	-4.28



**Fig 3.4. Frecuencia de vibración de la viga estudiada por Saidii et al., (1994), debido a su nivel de presfuerzo**

### 3.2.1 Comentarios a la propuesta de Kim et al.

Kim et al., (2004), dan un paso más adelante que Saidii et al., (1994), y proponen tratar la viga como un sistema concreto-acero de presfuerzo. Para esto, en la ecuación (3.1) sustituyen  $EI$  por  $E_r I_r$ , con lo que se incluye el acero de presfuerzo.

En resumen, respecto a la ecuación (3.9) propuesta por Kim et al., (2004) para calcular la frecuencia de vibración de una viga de concreto presforzado, se puede decir lo siguiente:

En el planteamiento se eliminó el fenómeno de ablandamiento por compresión y se substituyó sólo por uno de los efectos que produce el presfuerzo, el acortamiento. Al hacer esto, cuando el cambio de longitud es despreciable, el fenómeno de ablandamiento por compresión desaparece; además, le agregan a la viga de concreto, la rigidez ganada por el acero de presfuerzo. Como en el experimento de Saidii et al., (1994) el acortamiento es despreciable, la propuesta hecha por Kim et al., (2004) da los mismos resultados que la ecuación (3.1) donde el signo negativo se convierte en positivo, es decir:

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 * \frac{EI}{m} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 * \frac{N}{m} \tag{3.10}$$

Donde el primer término de la misma, es la frecuencia natural de vibración de la viga sin ser afectada por una fuerza axial; el segundo, es equivalente al incremento debido a la rigidez ganada por el acero de presfuerzo.

Otra observación es que, Kim et al., (2004), ajustaron su propuesta para que el valor de la frecuencia natural de vibración cuando  $N = 0$ , produjera resultados similares a los obtenidos experimentalmente, sin explicación del factor que usaron. Los errores relativos para la viga a la que se aplicó la propuesta, no excedieron el -10.28%. Sin embargo, al igual que la propuesta de Saidii et al., (1994), la ecuación (3.9) no es de aplicación general como se demuestra más adelante.

### 3.3 PROPUESTA DE ZHANG Y LI

Zhang y Li, (2007), fabricaron cinco vigas de concreto presforzado. Tres pretensadas, cada una con diferente nivel de presfuerzo, y dos postensadas. Una con trayectoria lineal de los torones y otra con trayectoria curva.

En esta tesis, las vigas estudiadas por Zhang y Li, (2007), se denominan como PRE-L, POS-L y POS-C de acuerdo con que si es pretensada (PRE), postensada (POS), con presfuerzo de trayectoria lineal (-L), o curvo (-C), como se muestra en la figura 3.5.

Para el cálculo de las frecuencias de vibración, se empleó la ecuación (3.11) (Zhang y Li, 2007):

$$\rho^2 I_c \frac{2}{E_c} \omega_n^4 - \left( \rho A_c + 3 \rho I_c \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) \omega_n^2 + \left( E_c I_c + \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 N \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 N = 0 \quad (3.11)$$

donde:

$\rho$  = masa por unidad de volumen del concreto

Al obtener las raíces del polinomio (3.11) y eliminar números negativos, se puede obtener la frecuencia natural de vibración.]

#### 3.3.1 Viga postensada con tendón lineal (POS-L)

En el trabajo de Zhang y Li, (2007), se maneja el sistema de postensado sin adherencia entre el concreto y el torón. Lo anterior permitió que el presfuerzo se pudiera manejar de la forma en que mejor se podía aprovechar la viga. Los datos de este elemento se presentan en la tabla 3.6.

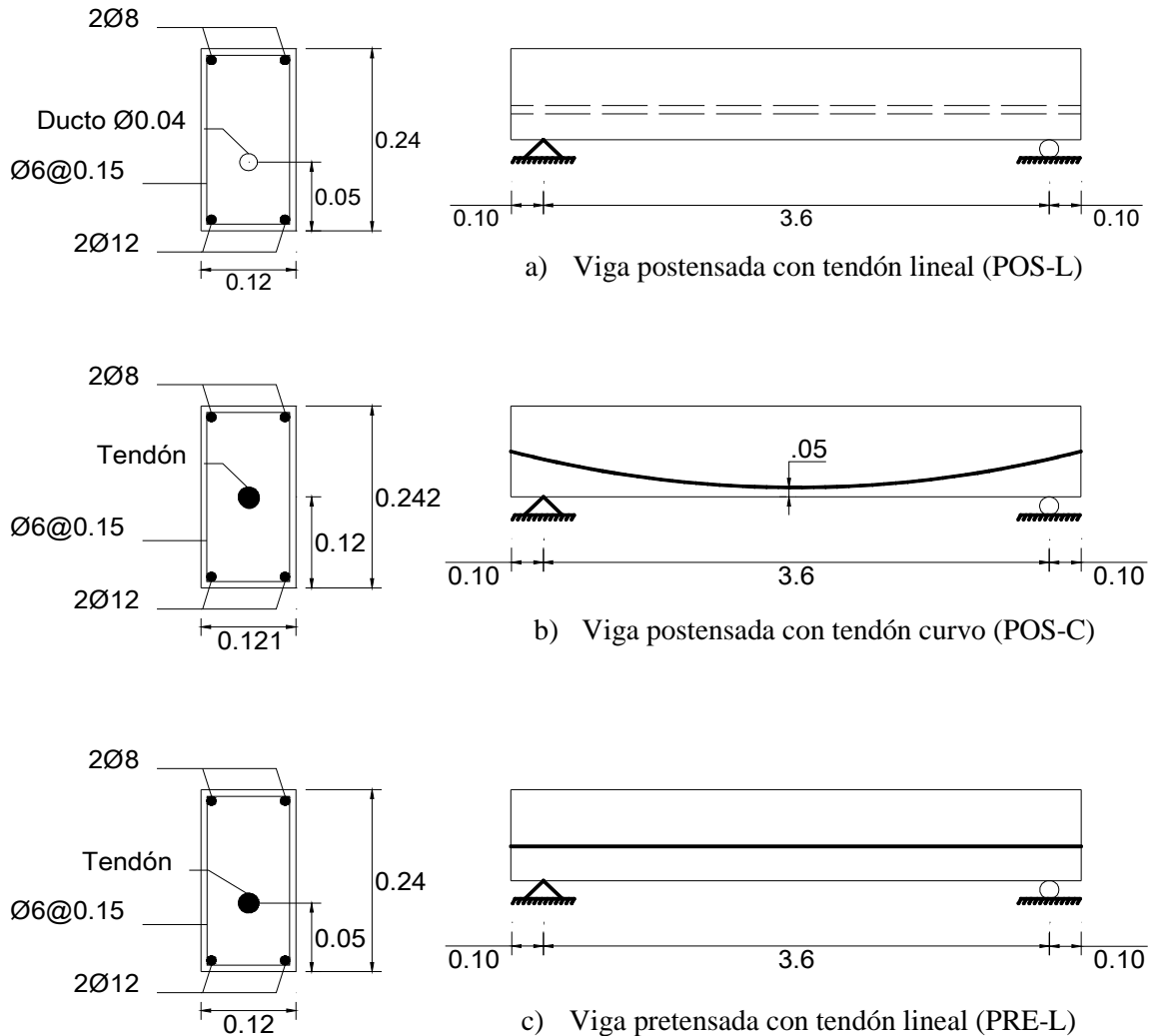
**Tabla 3.6. Datos de la viga POS-L estudiada por Zhang y Li, (2007)**

$A_c$ (m <sup>2</sup> )	$I$ (m <sup>4</sup> )	$L$ (m)	$m$ (kg/m)	$f_c$ kg/cm <sup>2</sup>	$f_c$ N/m <sup>2</sup>	$E_c$ N/m <sup>2</sup>
0.0288	0.00013824	3.7	70.117	460.6	45184860	3.256E+10

En la tabla 3.7 se presentan los resultados calculados analíticamente empleando las ecuaciones propuestas por Kim et al., (2004), Saidii et al., (1994), y Zhang y Li, (2007) y los obtenidos experimentalmente.

En la tabla 3.7 se observa que, los resultados de la ecuación (3.11) propuesta por Zhang y Li, (2007), presentan los errores relativos de menor magnitud, los cuales son menores que 2%.

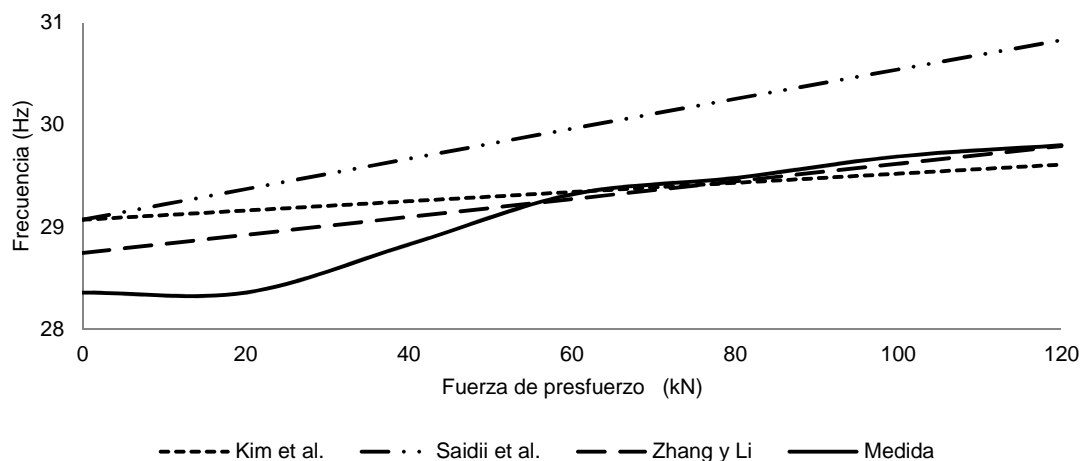
En la figura 3.6, se grafican los resultados de la tabla 3.7. Se observa que los resultados obtenidos con la propuesta de Zhang y Li, (2007), se acercan más a los valores de la frecuencia natural de vibración de la viga, aún cuando el valor de la fuerza de presfuerzo es igual a cero. Sin embargo, la sobrestima en un 1.37%.



**Fig 3.5. Geometría de las vigas estudiadas por Zhang y Li, (2007) (acotaciones en cm)**

**Tabla 3.7. Frecuencias de vibración de la viga POS-L estudiada por Zhang y Li, (2007)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Medida	Frecuencia (Hz)			Error relativo $\epsilon$ (%)		
		Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li
0	28.36	29.07	29.07	28.75	2.51	2.51	1.37
20	28.36	29.16	29.37	28.92	2.83	3.57	1.99
40	28.83	29.25	29.67	29.10	1.47	2.91	0.93
60	29.32	29.34	29.96	29.27	0.08	2.19	-0.16
80	29.48	29.43	30.25	29.45	-0.16	2.62	-0.11
100	29.69	29.52	30.54	29.62	-0.57	2.87	-0.24
120	29.80	29.61	30.83	29.79	-0.63	3.44	-0.03



**Figura 3.6. Frecuencia de vibración en función del presfuerzo de la viga POS-L, estudiada por Zhang y Li, (2007)**

### 3.3.2 Viga pretensada con tendón lineal (PRE-L)

Realmente fueron tres vigas para este experimento, sólo que la naturaleza del pretensado, hace que el acero de presfuerzo quede totalmente adherido al concreto y por lo tanto no se pueda hacer variar la fuerza en los torones. Entonces, tres vigas con las mismas características geométricas y de material, pero con diferente nivel de presfuerzo, forman la pieza que se examina en este apartado.

Los datos de la viga son los mismos que la anterior analizada en la sección 3.3.1.

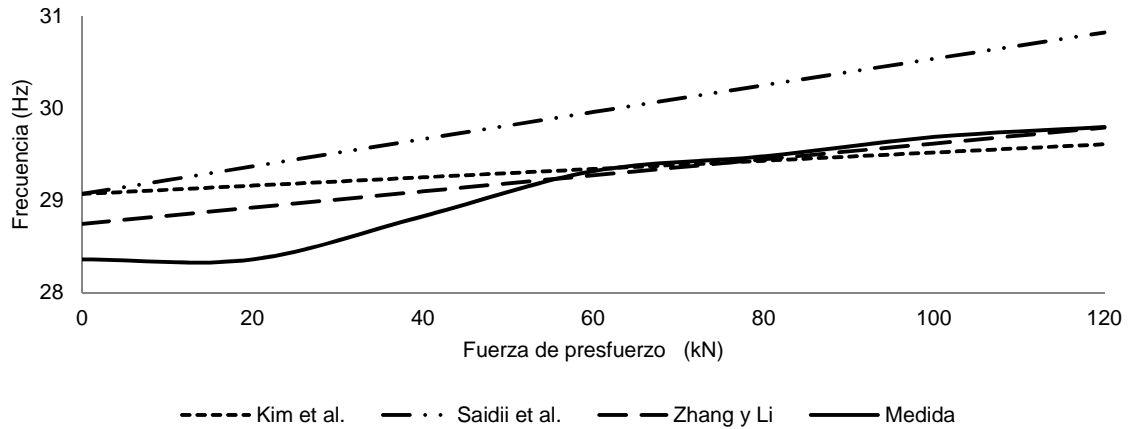
En la tabla 3.8 se presenta el cambio que sufre la frecuencia natural debido a la variación del presfuerzo. También se presentan los resultados calculados empleando las ecuaciones propuestas por Kim et al., (2004), Saidii et al., (1994), y Zhang y Li, (2007). Se observa que la ecuación (3.11) propuesta por Zhang y Li, (2007), es la que proporciona los errores relativos de menor magnitud, los cuales son inferiores al 2%.

En la figura 3.7, se grafican los resultados de la tabla 3.8. Se observa que la propuesta de Zhang y Li, (2007), es la única que proporciona un valor de frecuencia natural igual al 99% del calculado analíticamente cuando  $N=0$ , esto le da una ventaja respecto a las otras, ya que como se ha visto en las vigas analizadas previamente en este capítulo, la frecuencia real, es menor a la calculada con la ecuación (3.1), cuando no existe presfuerzo.

**Tabla 3.8. Frecuencia de vibración en función de la fuerza de presfuerzo en la viga PRE-L estudiada por Zhang y Li, (2007)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)				Error relativo $\epsilon$ (%)		
	Medida	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li
0	28.36	29.07	29.07	28.75	2.51	2.51	1.37
20	28.36	29.16	29.37	28.92	2.83	3.57	1.99
40	28.83	29.25	29.67	29.10	1.47	2.91	0.93
60	29.32	29.34	29.96	29.27	0.08	2.19	-0.16
80	29.48	29.43	30.25	29.45	-0.16	2.62	-0.11
100	29.69	29.52	30.54	29.62	-0.57	2.87	-0.24
120	29.80	29.61	30.83	29.79	-0.63	3.44	-0.03





**Figura 3.7. Frecuencia de vibración en función del presfuerzo de la viga PRE-L, estudiada por Zhang y Li, (2007)**

### 3.3.3 Viga postensada con tendón curvo (POS-C)

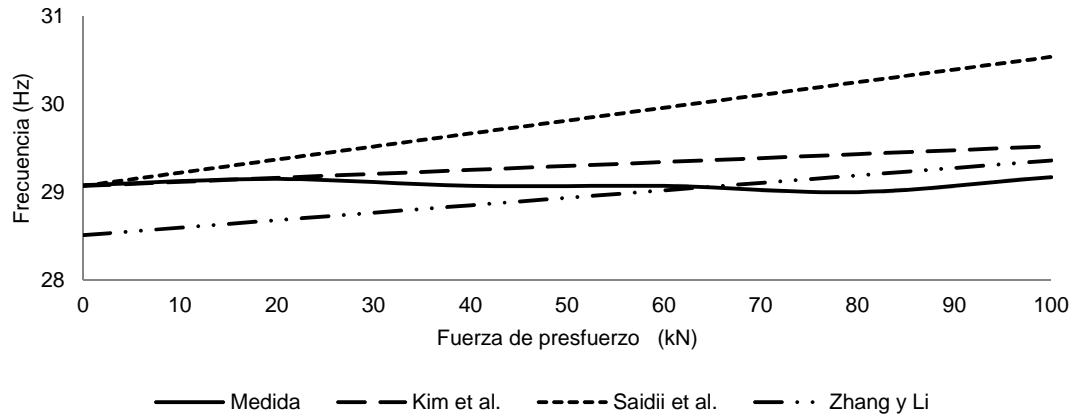
A diferencia de las anteriores, esta pieza es con tendón de trayectoria curva, los datos son los que se presentan en la tabla 3.5.

En la tabla 3.9 se presentan las frecuencias de vibración reales de la viga POS-C para cada nivel de presfuerzo, así como las calculadas empleando las ecuaciones propuestas por Kim et al., (2004), Saidii et al., (1994), y Zhang y Li, (2007). Se observa que para este caso, la propuesta de Kim et al., (2004), es la que proporciona los errores relativos de menor magnitud. Por otro lado, el error relativo entre la frecuencia medida y la calculada con la ecuación (3.11), cuando  $N=0$ , es de -1.96%, por lo que para este caso, la propuesta de Zhang y Li, (2007), subestima la magnitud de la frecuencia de vibración real, cuando no existe presfuerzo.

En la figura 3.8 se grafican los resultados de la tabla 3.9. Se puede observar que la frecuencia de vibración, permanece casi constante, con variaciones inferiores al 0.3%, respecto al valor de esta magnitud cuando  $N=0$ .

**Tabla 3.9. Frecuencia de vibración en función de la fuerza de presfuerzo de la viga POS-C estudiada por Zhang y Li, (2007)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)				Error relativo $\epsilon$ (%)		
	Medida	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li
0	29.08	29.07	29.07	28.51	-0.03	-0.03	-1.96
20	29.15	29.16	29.37	28.68	0.04	0.76	-1.61
40	29.07	29.25	29.67	28.85	0.63	2.06	-0.76
60	29.07	29.34	29.96	29.02	0.94	3.07	-0.17
80	29.00	29.43	30.25	29.19	1.49	4.32	0.66
100	29.17	29.52	30.54	29.36	1.21	4.70	0.65



**Figura 3.8. Frecuencia de vibración en función del presfuerzo de la viga POS-C, estudiada por Zhang y Li, (2007)**

### 3.3.4 Comentarios a la propuesta de Zhang y Li

La ecuación (3.11), propuesta por Zhang y Li, (2007), es la que proporciona errores relativos menores al 1.96% para vigas postensadas o pretensadas con tendón lineal. Comparada con la de Kim et al., (2004) y Saidii et al., (1994), es la única para la que cuando  $N = 0$ , la frecuencia natural de la viga es menor a la calculada con la ecuación (3.1), lo que la hace más realista, como se verá en las vigas analizadas posteriormente.

Aunque la ecuación (3.11), fue la que presentó los menores errores relativos, no funcionó en la viga de tendón curvo, donde la frecuencia medida experimentalmente, casi se mantiene constante. Esto se puede deber a que la componente horizontal de la fuerza de presfuerzo, varía a lo largo del acero de presfuerzo.

## 3.4 EXPERIMENTOS DE JAIN, MURTY Y KAMLE

En su estudio, Jain et al., (2005), llevaron a cabo un análisis experimental para determinar el efecto del agrietamiento y pérdida de presfuerzo de las vigas de concreto sobre su frecuencia natural. Mencionan que el cambio en la frecuencia natural de vibración de una viga presforzada, se debe al cambio en su rigidez porque las grietas se cierran o se abren de acuerdo con que si la magnitud de la fuerza de presfuerzo aumenta o disminuye, y que no se debe al fenómeno de ablandamiento por compresión.

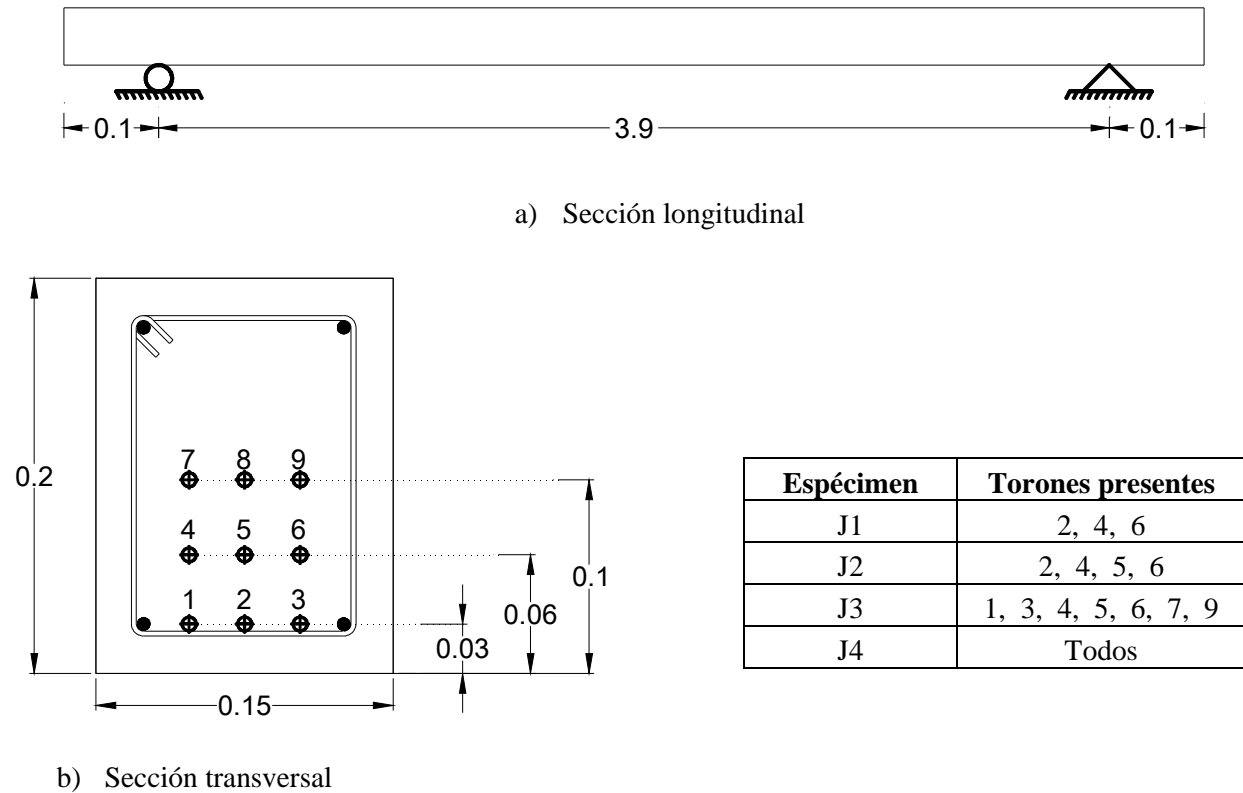
Por lo anterior, la frecuencia natural de vibración está dada sólo por la ecuación (Jain et al., 2005):

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 * \frac{EI}{m}} \quad (3.12)$$

Jain et al., (2005) mencionan que existe una seria dificultad para evaluar valores de módulos de elasticidad del concreto y el momento de inercia de la sección, incluso bajo condiciones ideales. Concluyen que no es posible calcular exactamente el valor de la frecuencia natural de vibración.

Fabricaron cuatro vigas (J1, J2, J3 y J4) con la misma geometría, siendo diferentes solamente en la cantidad de presfuerzo. En cada una de ellas se hicieron varios ciclos de tensado y destensado de los torones. También se les aplicó una carga vertical con la intención de agrietarlas y observar la variación de las frecuencias. En la presente tesis sólo se incluye el proceso de tensado y destensado. Se omiten los resultados de la viga J2 debido a que fue agrietada intencionalmente antes de aplicarle presfuerzo.

La geometría de las vigas se presenta en la figura 3.9.



**Figura 3.9. Dimensiones de las vigas J1, J2, J3 y J4 estudiadas por Jain et al., (2005).**

### 3.4.1 Viga J1

En la tabla 3.10 se presentan los datos de la viga J1

**Tabla 3.10. Datos de la viga J1, estudiada por Jain et al., (2005)**

Ac (m <sup>2</sup> )	I (m <sup>4</sup> )	L (m)	m (kg/m)	f'c (kg/cm <sup>2</sup> )	f'c (N/m <sup>2</sup> )	E <sub>c</sub> (N/m <sup>2</sup> )
0.03	0.0001	4	74.71	485	47578500	3.93E+10

La experimentación con esta viga, se desarrolló en tres ciclos, en el primero, se varió la fuerza de presfuerzo desde 0 hasta 120 kN, en el segundo fue de 120 a 0 kN, y en el tercero de 0 a 120 kN.

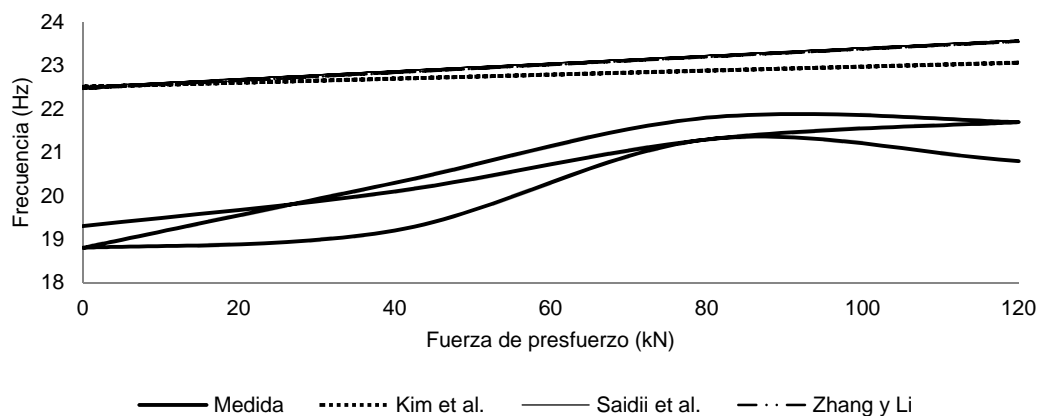
En la tabla 3.11 se presentan la frecuencias de vibración reales de la viga J1 para cada nivel de presfuerzo, así como las calculadas empleando las ecuaciones propuestas por Kim et al., (2004), Saidii et al., (1994), y Zhang y Li, (2007). Se observa que para este caso, la propuesta de Kim et al., (2004), es la que proporciona los errores relativos de menor magnitud (entre 5% y 19.77%). Por otro lado, el error relativo entre la frecuencia medida y la calculada cuando  $N=0$ , es mayor al 16%, por lo que las propuestas que se analizan en este capítulo, sobrestiman la magnitud de la frecuencia de vibración real de una viga cuando no existe presfuerzo.

En la figura 3.10 se grafican los resultados de la tabla 3.10. Se puede observar que la pendiente de la recta obtenida con los resultados de la propuesta de Zhang y Li, (2007) se asemeja a la de los resultados

experimentales. Además, se observa que para un mismo nivel de presfuerzo, puede existir una frecuencia de vibración diferente.

**Tabla 3.11. Frecuencias de vibración reales y calculadas de la viga J1, estudiada por Jain et al., (2005)**

Ciclo de carga	Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)				Error relativo $\epsilon$ (%)		
		Medida	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li
1	0	19.30	22.52	22.52	22.47	16.67	16.67	16.43
	40	20.10	22.70	22.88	22.84	12.95	13.83	13.63
	80	21.30	22.89	23.24	23.20	7.46	9.10	8.92
	120	21.70	23.07	23.59	23.56	6.33	8.71	8.56
2	120	21.70	23.07	23.59	23.56	6.33	8.71	8.56
	80	21.80	22.89	23.24	23.20	5.00	6.60	6.43
	40	20.30	22.70	22.88	22.84	11.84	12.71	12.51
	0	18.80	22.52	22.52	22.47	19.77	19.77	19.53
3	0	18.80	22.52	22.52	22.47	19.77	19.77	19.53
	40	19.20	22.70	22.88	22.84	18.25	19.17	18.95
	80	21.30	22.89	23.24	23.20	7.46	9.10	8.92
	120	20.80	23.07	23.59	23.56	10.93	13.42	13.26



**Figura 3.10. Frecuencia en función de la fuerza de presfuerzo de la viga J1, estudiada por Jain et al., (2005)**

### 3.4.2 Viga J3

Los datos de este elemento se presentan en la tabla 3.12.

**Tabla 3.12. Datos de la viga J3, estudiada por Jain et al., (2005)**

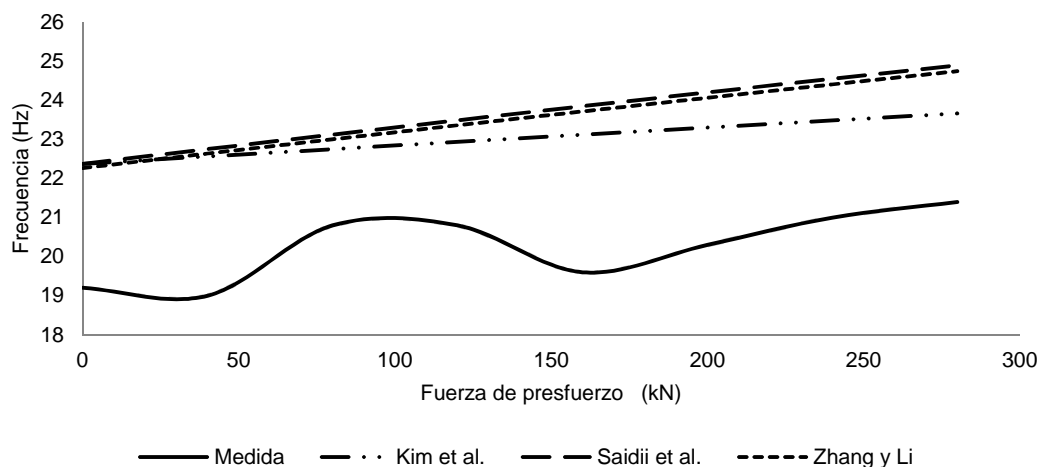
Ac (m <sup>2</sup> )	I (m <sup>4</sup> )	L (m)	m (kg/m)	f'c kg/cm <sup>2</sup>	f'c N/m <sup>2</sup>	E <sub>c</sub> N/m <sup>2</sup>
0.03	0.0001	4	74.29	467.9	45900990	3.86E+10

En la tabla 3.13 se presentan la frecuencias de vibración reales de la viga J3 para cada nivel de presfuerzo, así como las calculadas empleando las ecuaciones propuestas por Kim et al., (2004), Saidii et al., (1994), y Zhang y Li, (2007). Se observa que, como en el caso anterior, la propuesta de Kim et al., (2004), es la que proporciona los errores relativos de menor magnitud (entre 9.39% y 18.77%). Además, el error relativo entre la frecuencia medida y la calculada cuando  $N=0$ , es mayor al 15%, por lo que las propuestas que se analizan en este capítulo, sobrestiman la magnitud de la frecuencia de vibración real de una viga cuando no existe presfuerzo.

**Tabla 3.13. Frecuencias calculadas analíticamente, y reales de la viga J3, estudiada por Jain et al., (2005)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)				Error relativo $\epsilon$ (%)		
	Medida	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li
0	19.20	22.38	22.38	22.27	16.55	16.55	15.99
40	19.00	22.57	22.76	22.64	18.77	19.76	19.16
80	20.80	22.75	23.13	23.01	9.39	11.19	10.61
120	20.80	22.94	23.49	23.37	10.28	12.94	12.33
160	19.60	23.12	23.85	23.72	17.98	21.70	21.02
200	20.30	23.31	24.21	24.07	14.81	19.25	18.56
240	21.00	23.49	24.56	24.41	11.85	16.94	16.25
280	21.40	23.67	24.90	24.75	10.60	16.36	15.66

En la figura 3.11, se grafican los resultados de la tabla 3.12. Se puede observar que, un aumento en la fuerza de presfuerzo, no siempre significa un incremento en la frecuencia de vibración.



**Figura 3.11. Frecuencia de vibración en función de la fuerza de presfuerzo de la viga J1, estudiada por Jain et al., (2005)**

### 3.4.3 Viga J4

Los datos de esta viga se presentan en la tabla 3.13

**Tabla 3.14. Datos de la viga J4, estudiada por Jain et al., (2005)**

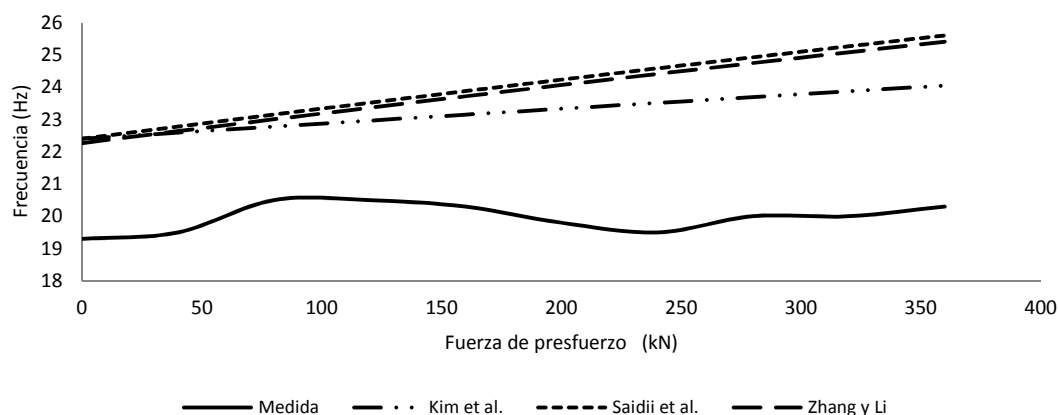
Ac (m <sup>2</sup> )	I (m <sup>4</sup> )	L (m)	m (kg/m)	f'c kg/cm <sup>2</sup>	f'c N/m <sup>2</sup>	E <sub>c</sub> N/m <sup>2</sup>
0.03	0.0001	4	74.12	467.9	45900990	3.86E+10

En la tabla 3.14 se presentan la frecuencias de vibración reales de la viga J4 para cada nivel de presfuerzo, así como las calculadas empleando las ecuaciones propuestas por Kim et al., (2004), Saidii et al., (1994), y Zhang y Li, (2007). Se observa que, al igual que en el caso anterior, la propuesta de Kim et al., (2004), es la que proporciona los errores relativos de menor magnitud (entre 11.12% y 20.59%). Por otro lado, el error relativo entre la frecuencia medida y la calculada cuando  $N = 0$ , es mayor al 15%, por lo que nuevamente se demuestra que, las propuestas que se analizan en este capítulo, sobrestiman la magnitud de la frecuencia de vibración real de una viga cuando no existe presfuerzo.

**Tabla 3.15. Frecuencias calculadas analíticamente, y reales de la viga J4, estudiada por Jain et al., (2005)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)				Error relativo $\epsilon$ (%)		
	Medida	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li
0	19.30	22.40	22.40	22.27	16.08	16.08	15.39
40	19.50	22.59	22.78	22.64	15.86	16.83	16.11
80	20.50	22.78	23.15	23.01	11.12	12.95	12.23
120	20.50	22.97	23.52	23.37	12.03	14.73	13.98
160	20.30	23.15	23.88	23.72	14.04	17.64	16.84
200	19.80	23.33	24.24	24.07	17.85	22.40	21.56
240	19.50	23.52	24.59	24.41	20.59	26.08	25.19
280	20.00	23.70	24.93	24.75	18.48	24.65	23.75
320	20.00	23.87	25.27	25.09	19.37	26.35	25.43
360	20.30	24.05	25.61	25.42	18.48	26.14	25.20

En la figura 3.12 se grafican los resultados de la tabla 3.15. Se observa que las frecuencias de vibración reales no coinciden con las calculadas, localizándose el error principal en el punto donde parten las propuestas previamente estudiadas.



**Figura 3.12. Frecuencia de vibración debido a la fuerza de presfuerzo de la viga J4, estudiada por Jain et al., (2005)**

### 3.4.4 Puente viga-losa a escala.

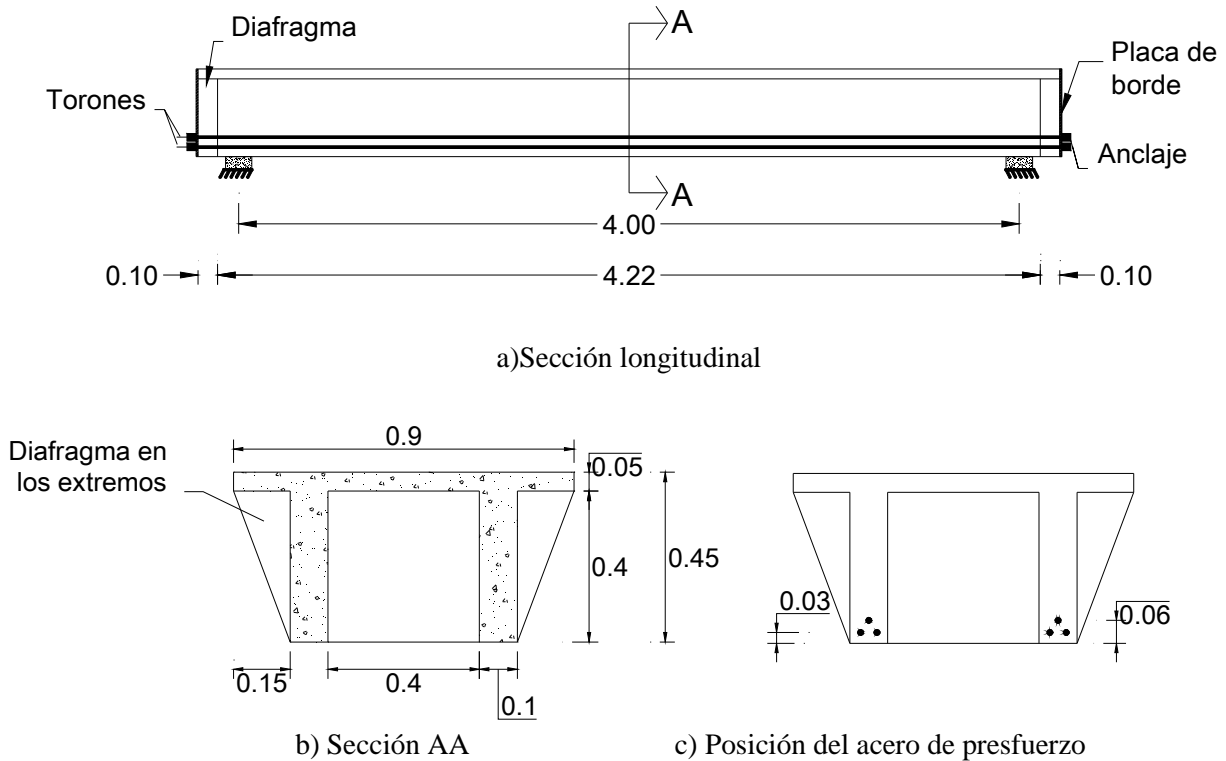
Además de las vigas anteriores, Jain et al., (2005), fabricaron un modelo a escala 1 a 5, de 4 m de claro, de un puente viga-losa de 20 m de longitud. Se omite el detalle del acero de refuerzo ordinario, la geometría y ubicación del acero de presfuerzo se presenta en la figura 3.13.

Los datos de este modelo se muestran en la tabla 3.16.

**Tabla 3.16. Datos del modelo a escala, estudiado por Jain et al., (2005)**

Ac (m <sup>2</sup> )	I (m <sup>4</sup> )	L (m)	m (kg/m)	f <sub>c</sub> kg/cm <sup>2</sup>	f <sub>c</sub> N/m <sup>2</sup>	E <sub>c</sub> N/m <sup>2</sup>
0.12477	0.00252050	4	311.90	493.4	48402540	3.97E+10

La experimentación con esta viga, se desarrolló en dos ciclos, en el primero, se aumentó gradualmente la fuerza de presfuerzo, desde 0 hasta 240 kN, y en el segundo, se fue disminuyendo, hasta eliminarla.



**Figura 3.13. Geometría del modelo de un puente a escala 1 a 5 estudiado por Jain et al., (2005)**

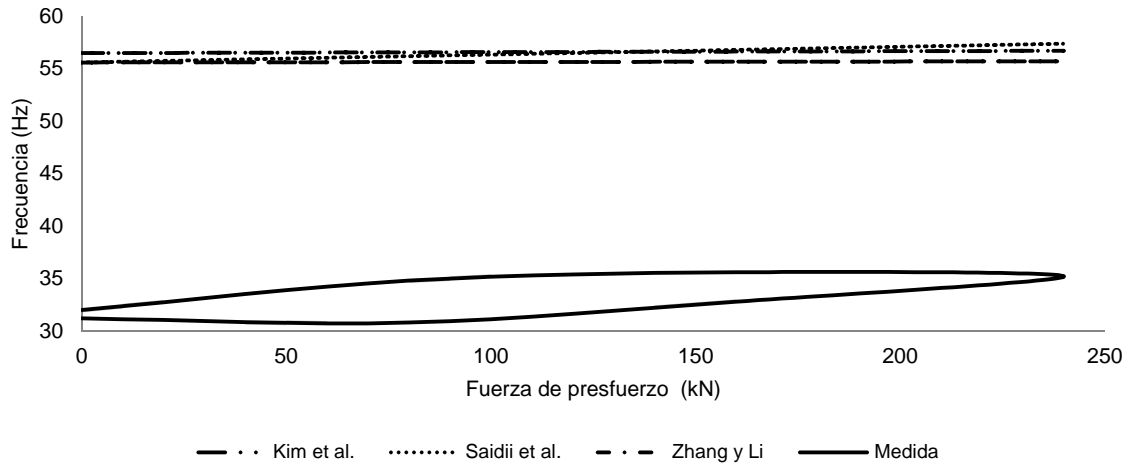
En la tabla 3.17 se presentan la fuerza de presfuerzo, las frecuencias de vibración medidas experimentalmente, y las calculadas de acuerdo con las propuestas mencionadas en este capítulo.

En la tabla 3.17 se observa que, la propuesta de Kim et al., (2005), es la que proporciona los errores relativos de menor magnitud (entre 56.41% y 80.67%). Sin embargo, todas sobrestiman el valor de la frecuencia natural de vibración en más del 56%. Además, en este modelo, los errores fueron mucho más grandes que en las vigas rectangulares estudiadas anteriormente en este capítulo.

En la figura 3.14 se grafican los resultados de la tabla 3.16. Se observa que, para un mismo nivel de presfuerzo, pueden existir diferentes frecuencias de vibración.

**Tabla 3.17. Frecuencias calculadas analíticamente, y reales del modelo a escala, estudiado por Jain et al., (2005)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)				Error relativo $\epsilon$ (%)		
	Medida	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li	Kim et al.	Saidii et al.	Zhang y Li
0	32.00	55.61	55.61	56.50	73.77	73.77	76.57
80	34.80	55.64	56.21	56.58	59.90	61.53	62.58
160	35.60	55.68	56.81	56.65	56.41	59.58	59.13
240	35.20	55.72	57.40	56.72	58.30	63.08	61.14
160	32.80	55.68	56.81	56.65	69.76	73.20	72.71
80	30.80	55.64	56.21	56.58	80.67	82.51	83.69
0	31.20	55.61	55.61	56.50	78.23	78.23	81.10



**Figura 3.14. Frecuencia en función de la fuerza de presfuerzo del modelo a escala, estudiada por Jain et al., (2005)**

### 3.4.5 Conclusiones de Jain et al.

La estimación teórica de la frecuencia de vibración es razonablemente buena para vigas rectangulares, no lo es para el caso del modelo a escala del puente estudiado.

No hay ablandamiento por compresión como se reporta en alguna literatura.

El aumento de la fuerza de presfuerzo, en general, incrementa la frecuencia de vibración de la viga. Este hecho se puede deber a que el incremento de la fuerza de presfuerzo cierra las micro-grietas presentes en el concreto.

Debido al agrietamiento en vigas no presforzadas, se presenta una significativa reducción en la frecuencia natural. Sin embargo, la presencia de la fuerza de presfuerzo puede cerrar estas grietas y restaurar la frecuencia natural de la viga.

### 3.4.6 Comentarios a la publicación de Jain et al.

No se propuso ninguna ecuación para predecir la variación de la frecuencia natural. Los autores concluyen que no es posible hallar una solución analítica, ya que la variación depende de las grietas, las cuales se abren o se cierran de acuerdo con la variación del presfuerzo. La experimentación sirvió para poner a prueba las tres principales propuestas que pueden ser las más representativas. Ninguna de ellas pudo predecir la variación de la frecuencia natural. La propuesta de Zhang y Li, (2007) podría servir, siempre y cuando, sea capaz de predecir la frecuencia de vibración de la viga cuando  $N=0$ .

Los resultados en el puente a escala presentan los mayores errores. Esto indica que se pueden cometer errores más grandes en las vigas que se encuentran bajo condiciones de servicio. Otra vez, el reto principal a vencer es la predicción de la frecuencia natural de vibración de la viga sin presfuerzo.



## CAPÍTULO 4

### DESARROLLO DE UNA NUEVA PROPUESTA

Como pudo apreciarse en el capítulo anterior, aún existe desacuerdo respecto a si existe o no el fenómeno de ablandamiento por compresión en vigas de concreto presforzado. De las propuestas aquí revisadas, ninguna es de aplicación general, ya que como se observó, la propuesta de Saidii et al., (1994), es la mejor en la propia viga estudiada por Saidii et al., la de Zhang y Li, (2007), funciona para sus propias vigas aquí analizadas, y la propuesta de Kim et al., (2005), fue la que proporcionó los errores relativos de menor magnitud en las vigas experimentadas por Jain et al., (2005).

En este capítulo se desarrolla una nueva propuesta a partir de un análisis detallado de la viga que Saidii et al., (1994) probaron experimentalmente. Se analiza la viga como un sistema compuesto por un concreto que se comprime y una cuerda (torón) que se tensa.

Utilizando la ecuación (3.1), la frecuencia natural de vibración  $\omega_n$  en función de la fuerza de presfuerzo  $N$  queda:

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{E_c I_c}{\mu_s + \mu_c} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{N}{\mu_s + \mu_c}} \quad (4.1)$$

donde:

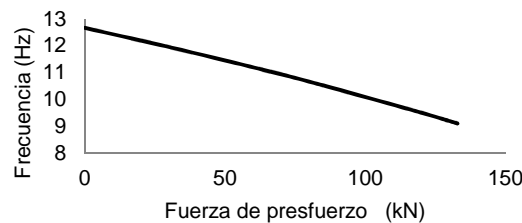
$\mu_c$  = masa por unidad de longitud del concreto

$\mu_s$  = masa por unidad de longitud del acero

Ahora, dividiendo la ecuación (4.1) entre  $2\pi$  para obtener la frecuencia en Hz.

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (4.2)$$

En la figura 4.1 se presenta la gráfica de la ecuación (4.2).



**Figura 4.1. Frecuencia de una viga de concreto donde se acepta el ablandamiento por compresión debido a la fuerza del presfuerzo**

La Fig. 4.1 muestra que, a mayor magnitud de la fuerza de presfuerzo, menor valor de la frecuencia. Sin embargo, en los experimentos sucede lo contrario. ¿A qué se debe? La ecuación (3.1) fue obtenida haciendo suposiciones de un material perfectamente elástico, e isótropo. Con ella se obtiene la carga crítica de pandeo de columnas de acero, que es cuando la raíz cuadrada da como resultado 0. La viga en cuestión consiste de una viga de concreto que se comprime, y una cuerda que se tensa con el presfuerzo.

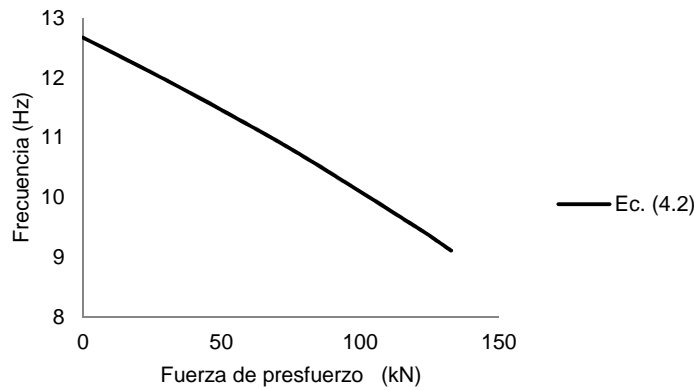
Analizando por separado cada uno de estos elementos, se tiene lo siguiente:

#### 4.1 Análisis de la viga de concreto sin considerar contacto con el acero de presfuerzo

De acuerdo con la ecuación (4.2), para una viga, la frecuencia de vibración en función de una fuerza axial en compresión, está dada por:

$$f_c = \frac{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{E_c I_c}{\mu_c} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{N}{\mu_c}}}{2\pi} \quad (4.3)$$

Graficando la ecuación( 4.3), se obtiene la figura 4.2. En ella se observa que a mayor fuerza de presfuerzo, menor frecuencia de vibración, lo cual sucedería si el concreto fuera un material isótropo y elástico.



**Fig 4.2. Frecuencia de vibración de una viga de concreto sometida a una carga axial que la comprime longitudinalmente**

Ahora, la frecuencia natural de vibración de un sistema, en radianes por segundo, está dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (4.4)$$

donde:

$K$  = rigidez del sistema

$M$  = masa del sistema

A partir de la ecuación (4.4) y (3.1), se obtiene la ecuación (4.5) que expresa la rigidez de la viga de concreto en función de la fuerza de presfuerzo  $N$ .

$$K_c = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 E_c I_c L - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 N L \quad (4.5)$$

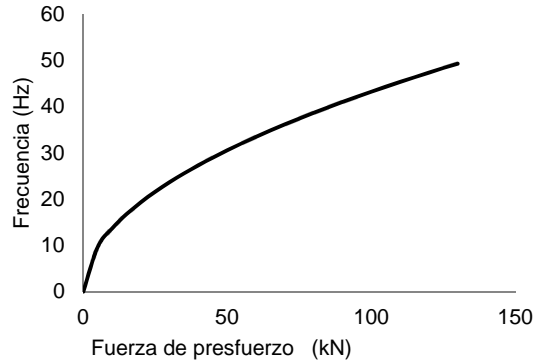
Donde se observa que la rigidez  $K$  de la viga disminuye a medida que aumenta la fuerza de presfuerzo. Esto sucede sólo si el material es perfectamente elástico y el torón no se mueve en conjunto con la viga presforzada.

## 4.2 Análisis del acero de presfuerzo sin considerar contacto con el concreto

De acuerdo con Sears et al., (2009), la frecuencia de vibración  $f_s$  de una cuerda, debida a una fuerza  $N$  que la tensa está dada por la ecuación (4.6), cuya gráfica correspondiente se muestra en la figura 4.3.

$$f_s = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{N}{\mu_s}} \quad (4.6)$$

En la figura 4.3 se observa la variación de la frecuencia de la cuerda (torón). Contrario a lo que sucede con la viga de concreto, a mayor fuerza de presfuerzo, mayor frecuencia.



**Fig. 4.3. Frecuencia de vibración  $f_s$  en el acero de presfuerzo debido a una fuerza axial que lo tensa**

Haciendo las operaciones necesarias para obtener la rigidez a partir de la ecuación de la frecuencia de vibración, se tiene:

$$\omega_s = f_s 2\pi = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{N}{\mu_s}} \quad (4.7)$$

donde:

$\omega_s$  = frecuencia natural de vibración del acero de presfuerzo, en rad/s

Elevando la ecuación (4.7) al cuadrado se obtiene:

$$\omega_s^2 = \frac{n^2 \pi^2 N}{L^2 \mu_s} = \frac{n^2 \pi^2}{m_s L} N = \frac{n^2 \pi^2 N}{m_s} \quad (4.8)$$

donde:

$m_s$  = masa del acero de presfuerzo.

De la ecuación (4.4), la rigidez del cable en función de la fuerza de presfuerzo está dada por:

$$K_s = \frac{n^2 \pi^2 N}{L} \quad (4.9)$$

### 4.3 Sistema concreto-acero de presfuerzo

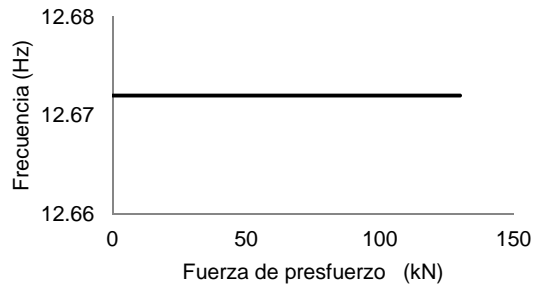
A partir del análisis efectuado en la sección 4.1 y 4.2 se tomará la rigidez del concreto (ec. 4.5) y la del torón (ec. 4.9) para formar una sola y tratar a la viga como un sistema. Esto es debido a que en la práctica, sea que el torón esté adherido o no al concreto, existe un contacto entre ambos elementos a menos que el presfuerzo sea externo, lo cual sale del alcance de esta tesis. Así:

$$\text{frecuencia en Hz del sistema} = \frac{\sqrt{\frac{\text{rigidez del concreto} + \text{rigidez del torón}}{\text{masa total}}}}{2\pi} \quad (4.10)$$

Asignando valores, se obtiene la ecuación para calcular la frecuencia de vibración del sistema en Hz:

$$f_{sist} = \frac{\sqrt{\frac{K_c + K_s}{(\mu_s + \mu_c)L}}}{2\pi} \quad (4.11)$$

La ecuación (4.11) incluye ambas rigideces y su gráfica se presenta en la fig 4.4.



**Fig 4.4. Frecuencia de vibración en función de la fuerza de presfuerzo, de la viga estudiada por Saidii et al., (1994), vista como un sistema concreto-acero de presfuerzo**

Como se observa en la figura 4.4, el valor de la frecuencia de vibración de la viga se mantiene constante. Esto indica que la rigidez ganada por el cable de acero al tensarse, puede ser equivalente a la pérdida por la viga de concreto al comprimirse.

A continuación se justifica por qué ocurre lo anterior.

La ecuación (4.5) expresa la rigidez del concreto en función de la fuerza de presfuerzo. Al extraer de la rigidez del concreto la cantidad que se pierde por la fuerza de presfuerzo, se obtiene:

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 NL = \frac{(n\pi)^2}{L} N \quad (4.12)$$

Lo cual es equivalente a la rigidez  $K_s$  ganada por el torón al tensarse, ec. (4.9).

Al sumar ambas rigideces, ecs. (4.9) y (4.12), estos términos se anulan y sólo queda la frecuencia natural de la viga.

Ahora la pregunta es: ¿Por qué se incrementa la frecuencia de vibración de una viga de concreto presforzado al aumentar la fuerza de presfuerzo?

De acuerdo con la ec. (3.1), la frecuencia natural de vibración de una viga cuando  $N=0$ , está dada por:

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 * \frac{EI}{m} \quad (4.13)$$

Por lo tanto, el aumento de la frecuencia natural de vibración se debe a la variación de los siguientes parámetros:

a) masa por unidad de longitud  $m$  de la viga

Esta cantidad aumenta o disminuye de acuerdo a la longitud.

b) Longitud  $L$

La disminución de la longitud debido al presfuerzo incrementa el valor de la frecuencia, o viceversa.

c) Rigidez a la flexión  $EI$

Debido a que las micro-grietas se abren o cierran de acuerdo con el presfuerzo, la rigidez a flexión también se modifica.

Despreciando la variación de  $L$  y  $m$ , el cambio en la frecuencia de vibración de una viga de concreto presforzado se puede atribuir sólo a la variación de  $EI$ .

#### 4.4 Propuesta de rigidez efectiva a flexión de vigas de concreto presforzado

Una vez demostrado que el efecto de ablandamiento por compresión no se presenta en vigas de concreto presforzado con acero de presfuerzo interno, y que el aumento en la frecuencia se debe a la variación de las propiedades físicas del concreto. Del experimento de Saidii et al., (1994), se desarrolla una nueva ecuación para calcular la rigidez efectiva a flexión.

Para obtener la rigidez efectiva  $(EI)_e$  que varía de acuerdo con el nivel de presfuerzo, de cada frecuencia obtenida del experimento de Saidii et al., (1994), se despejó  $EI$  de la ecuación (4.13). En la tabla 4.1 se presentan los resultados obtenidos.

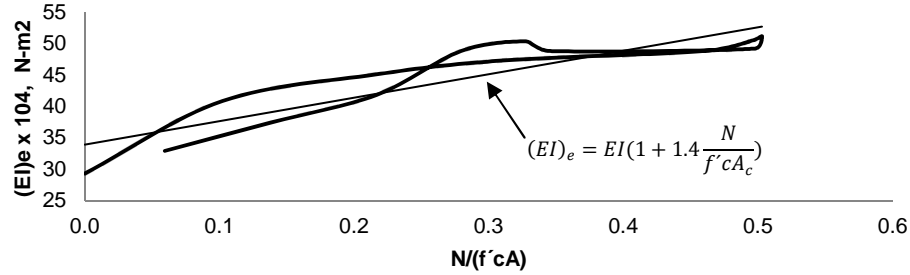
**Tabla 4.1. Frecuencias de vibración medidas, relación de compresión y rigidez efectiva de la viga estudiada por Saidii et al., (1994)**

Ciclo de carga	Fuerza axial (N)	frecuencia medida (Hz)	N/(f <sup>2</sup> cA)	(EI) <sub>e</sub> x 10 <sup>4</sup> N-m <sup>2</sup>
1	0	11.41	0	29.32
	27045	13.47	0.10	40.87
	57240	14.15	0.22	45.10
	81810	14.49	0.31	47.29
	121455	14.72	0.46	48.80
	130905	14.97	0.50	50.47
	132795	15.07	0.50	51.15
2	131400	14.78	0.50	49.20
	91260	14.72	0.35	48.80
	86535	14.95	0.33	50.34
	73782	14.72	0.28	48.80
	57254	13.63	0.22	41.84
	36486	12.89	0.14	37.42
	15714	12.09	0.06	32.92

En la tabla 4.1 se observa que, la rigidez a flexión efectiva  $(EI)_e$ , aumenta si se incrementa el presfuerzo; para una fuerza de 27,045 N, corresponde una  $(EI)_e$  de 40.87 x 10<sup>4</sup> N-m<sup>2</sup>, y para 132,795 N, la  $(EI)_e$  se

incrementa a  $51.15 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ , por lo que para este caso, se requiere un aumento del 391% de la fuerza de presfuerzo, para aumentar la frecuencia de vibración en un 25%.

De los resultados que se presentan en la tabla 4.2, se obtuvo la figura 4.5, de la que se origina la ecuación (4.14).



**Fig. 4.5. Variación de la rigidez en función de la relación de compresión, de la viga estudiada por Saidii et al., (1994)**

$$(EI)_e = EI(1 + 1.4 \frac{N}{f'cA_c}) \quad (4.14)$$

Al sustituir la ec. (4.14) en la (4.13) en lugar de  $EI$ , además de introducir un factor  $k$ , se obtiene:

$$\omega = k \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{(EI)_e}{\mu_c + \mu_s}} \quad \text{en rad/s} \quad (4.15)$$

$$f = k \frac{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{(EI)_e}{\mu_c + \mu_s}}}{2\pi} \quad \text{en Hz} \quad (4.16)$$

donde:

$k$  = cociente de la frecuencia natural de vibración experimental, entre la frecuencia calculada con la ecuación (3.1), cuando  $N=0$ .

El factor  $k$ , sirve para ajustar la frecuencia de vibración de una viga sin presfuerzo, calculada con la ecuación (3.1); ya que como se vio en el capítulo anterior, la frecuencia de vibración experimental, por lo general es menor que la calculada. La sección 4.5, trata con mayor detalle el cálculo de este factor.

Al despejar  $(EI)_e$  de la ecuación (4.16)

$$(EI)_e = \left(\frac{2fL^2}{kn^2\pi}\right)^2 (\mu_c + \mu_s) \quad (4.17)$$

La ecuación (4.17) representa la rigidez a flexión, de una viga de concreto presfuerzo, en función de la frecuencia de vibración  $f$ .

Igualando la ecuación (4.17) con la (4.14), se llega a la ecuación (4.18), para calcular la fuerza de presfuerzo efectiva  $N_{ef}$  en una viga de concreto presfuerzo, a partir de su frecuencia de vibración  $f$ .

$$N_{ef} = \left[ \frac{\left(\frac{2fL^2}{kn^2\pi}\right)^2 (\mu_c + \mu_s)}{1.4EI} - \frac{5}{7} \right] (f'c A_c) \quad (4.18)$$

## 4.5 Cálculo de $k$

En esta sección, se calcula el factor  $k$  mencionado en el apartado 4.4, a partir de una muestra compuesta de 15 vigas experimentadas por otros investigadores. De las vigas sin presfuerzo, se calculó  $k$  (cociente de la frecuencia real entre la teórica calculada con la ecuación (3.1), y posteriormente, se obtuvo un promedio. Este último valor, puede utilizarse en la ecuación (4.18), cuando se desconozca la frecuencia de vibración de una viga, antes del presfuerzo.

Como se observó en las vigas estudiadas en esta tesis, la mayoría presenta una frecuencia de vibración real menor a la calculada usando la ecuación (3.1), cuando la fuerza de presfuerzo  $N=0$ .

En la tabla 5.7 se presentan las propiedades de 15 vigas a las que se les calculó su frecuencia de vibración con la ecuación (3.1), y también se obtuvo este valor, mediante experimentación. Aunque en algunos casos no se trató de vigas presforzadas, los resultados son útiles debido a que el factor  $k$ , no depende del presfuerzo.

En la tabla 5.7 se observa que, para las vigas analizadas,  $0.76 < k < 1.07$ . Además, el promedio de la última columna de la tabla 5.7, que corresponde al factor  $k$ , es 0.9. Por lo que se puede concluir que, si se desconoce la frecuencia de vibración real de una viga sin presfuerzo, esta puede suponerse igual al 90% de la calculada con la ecuación (3.1). Este valor no se usa en esta tesis, debido a que todas las vigas aquí tratadas, se les calculó y midió su frecuencia antes de someterlas al presfuerzo. Sin embargo, puede ser útil cuando se quiera emplear la ecuación (4.18) para vigas en servicio, a las que por lo general, se les desconoce su frecuencia de vibración antes del presfuerzo.

**Tabla 5.7 Frecuencias de vigas de concreto sin presfuerzo, medidas experimentalmente y calculadas con la ecuación (3.1).**

Referencia	Geometría de la viga			E (x 10 <sup>6</sup> ) N/m <sup>2</sup>	Frecuencias		$k$
	Ancho (m)	Peralte (m)	Long. (m)		medida (Hz)	Ec. (1.1) (Hz)	
Saidii et al., (1994)	0.10	0.12	3.66	21520	11.41	12.67	0.90
Vázquez et al., (2004)	0.10	0.13	1.37	15025	83.5	78.03	1.07
Zhang y Li, (2007)	0.12	0.24	3.6	32560	28.36	29.07	0.98
	0.12	0.24	3.6	32560	29.08	29.07	1.00
Ercoli et al., (2007)	0.15	0.30	3	15696	37.23	38.61	0.96
	0.15	0.30	3	18676	36.11	42.11	0.86
	0.15	0.30	3	18676	36.11	42.11	0.86
	0.15	0.30	3	16540	37.1	39.63	0.94
Xiong y Zhang, (2008)	0.07	0.14	3	30000	21	24.91	0.84
	0.07	0.14	3	30000	20.02	24.91	0.80
	0.07	0.14	3	30000	19.04	24.91	0.76
Ortega et al., (2010)	0.08	0.16	1	20601	164	175.92	0.93
	0.08	0.16	1	20601	157	175.92	0.89
	0.08	0.16	1	20601	179	175.92	1.02
	0.08	0.16	1	20601	188	175.92	1.07





## CAPÍTULO 5

### VERIFICACIÓN DE LA VALIDEZ DE LAS ECUACIONES (4.16) y (4.18)

#### 5.1 Viga estudiada por Saidii et al.

En la tabla 5.1 se presentan los resultados del cálculo de las frecuencias de vibración  $f$  obtenidas con la ec. (4.16), y las medidas experimentalmente, así como el error relativo entre ambos valores.

*Tabla 5.1. Variación de la frecuencia de la viga estudiada por Saidii et al., (1994) en función de la fuerza de presfuerzo.*

Ciclo de carga	Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo $\varepsilon$ (%)
		medida	Ec. (4.16) <sup>1</sup>	
1	0	11.41	11.40	-0.06
	27	13.47	12.20	-9.44
	57	14.15	13.03	-7.91
	82	14.49	13.67	-5.66
	121	14.72	14.64	-0.53
	131	14.97	14.86	-0.70
	133	15.07	14.91	-1.07
2	131	14.78	14.88	0.65
	91	14.72	13.91	-5.52
	87	14.95	13.79	-7.76
	74	14.72	13.46	-8.53
	57	13.63	13.03	-4.40
	36	12.89	12.46	-3.30
	16	12.09	11.87	-1.80

<sup>1</sup>  $k = 0.9$

En la tabla 5.1 se observa que el error relativo de mayor magnitud es de -9.44%, y el mínimo es de -0.06%; el error relativo disminuye cuando la fuerza aumenta, sin embargo, como se verá más adelante, esta tendencia no es general.

En la tabla 5.2 se presentan los resultados del cálculo de la fuerza de presfuerzo efectiva, usando la ecuación (4.18), y el error relativo respecto a la fuerza axial real, que actúa sobre la viga estudiada por Saidii et al., (1994).

En la tabla 5.2 se observa que el error relativo de mayor magnitud es de 173.66%, y el mínimo es de 2.70%. Los errores relativos menores se encuentran en las fuerzas de mayor magnitud.

De acuerdo con la tabla 2.1, las frecuencias correspondientes a las fuerzas de presfuerzo 27 kN y 133 kN, son 12.20 Hz y 14.91 Hz, respectivamente, por lo que se requiere un aumento del 392.6% en la fuerza de presfuerzo, para incrementar en un 22.2%, la frecuencia natural. Esto hace que un error de menor magnitud en la predicción de la frecuencia natural a través de la fuerza de presfuerzo, sea de magnitud mayor, en la predicción de la fuerza de presfuerzo a través de la frecuencia natural, como se observa en la tabla 5.2

**Tabla 5.2. Valores de  $N_{ef}$  obtenidos con la ecuación (4.18) y  $N$  real, de la viga estudiada por Saidii et al., (1994)**

Ciclo de carga	Fuerza de presfuerzo (kN)		Error relativo $\epsilon$ (%)
	N	$N_{ef}$	
1	0	0.24	
	27	74.01	173.66
	57	101.04	76.53
	82	115.06	40.64
	121	124.73	2.70
	131	135.42	3.45
	133	139.74	5.23
2	131	127.28	-3.14
	91	124.73	36.68
	87	134.55	55.49
	74	124.73	69.05
	57	80.25	40.17
	36	52.00	42.53
	16	23.24	47.88

## 5.2 Vigas estudiadas por Zhang y Li

### 5.2.1 Viga POS-L

En la tabla 5.3 se presentan las frecuencias de la viga postensada con presfuerzo de trayectoria lineal y excentricidad constante, estudiada por Zhang y Li, (2007); calculadas con la ecuación (4.16) y obtenidas experimentalmente, así como el error relativo entre ambos valores.

**Tabla 5.3. Frecuencias de vibración reales y calculadas con la ecuación (4.16) de la viga POS-L, estudiada por Zhang y Li, (2007)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo $\epsilon$ (%)
	medida	Ec. (4.16) <sup>1</sup>	
0	28.36	28.34	-0.05
20	28.36	28.65	1.01
40	28.83	28.95	0.41
60	29.32	29.24	-0.26
80	29.48	29.54	0.20
100	29.69	29.83	0.47
120	29.80	30.12	1.07

$$^1 k = 0.975$$

En la tabla 5.3 se observa que el error relativo de mayor magnitud es de 1.07%, y el mínimo es de -0.05%, lo que indica que la ecuación (4.16) proporciona valores cercanos a los reales.

En la tabla 5.4 se presenta en la segunda columna, la fuerza de presfuerzo efectiva, calculada con la ecuación (4.18), y en la tercera, la fuerza axial real, que actúa sobre la viga estudiada por Zhang y Li, (2007).

En la tabla 5.4 se observa que el error relativo de mayor magnitud es de -94.91%, y el mínimo es de -5.04%. Esto indica que la ecuación (4.18), no proporciona valores aproximados a los reales, lo cual la hace poco útil para fines prácticos.

**Tabla 5.4. Valores de  $N_{ef}$  obtenidos con la ecuación (4.18) y  $N$  real de la viga POS-L, estudiada por Zhang y Li, (2007)**

Fuerza de presfuerzo (kN)		Error relativo $\epsilon$ (%)
N	$N_{ef}$	
0	1.02	
20	1.02	-94.91
40	32.12	-19.71
60	65.08	8.47
80	75.97	-5.04
100	90.34	-9.66
120	97.91	-18.40

Al igual que en la viga anterior analizada, existen errores relativos de mayor magnitud en el cálculo de la fuerza de presfuerzo a través de la frecuencia de vibración.

### 5.2.2 Viga PRE-L

En la tabla 5.5 se presentan las frecuencias de vibración reales, además de las calculadas con la ecuación (4.16) de la viga pretensada, estudiada por Zhang y Li, (2007). El error relativo entre estos valores se presenta en la cuarta columna.

**Tabla 5.5. Frecuencias de la viga PRE-L, estudiada por Zhang y Li, (2007)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo $\epsilon$ (%)
	medida	Ec. (4.16) <sup>1</sup>	
0	28.00	28.00	-0.02
60	28.34	28.89	1.92
80	29.33	29.18	-0.53
100	29.44	29.46	0.08

$$^1 k = 0.963$$

En la tabla 5.5 se puede observar que el error relativo de mayor magnitud es de 1.92%, y el mínimo es de -0.02%. Esto hace que los valores proporcionados por la ecuación (4.16) puedan ser aceptables para fines prácticos.

En la tabla 5.6 se presentan los resultados del cálculo de la fuerza de presfuerzo efectiva, con la ecuación (4.18), y la fuerza axial real, que actúa sobre la viga estudiada por Zhang y Li, (2007).

**Tabla 5.6. Valores de  $N_{ef}$  obtenidos con la ecuación (4.18) y  $N$  real de la viga PRE-L, estudiada por Zhang y Li, (2007)**

Fuerza de presfuerzo (kN)		Error relativo $\epsilon$ (%)
N	$N_{ef}$	
0	0.29	
60	23.01	-61.65
80	90.72	13.40
100	98.39	-1.61

En la tabla 5.6 se observa que, los errores relativos entre la fuerza axial real  $N$  y la fuerza efectiva  $N_{ef}$  calculada usando la ecuación (3.18), se obtienen errores relativos de hasta un -61.65%. Este error no es constante para todas las etapas de tensado del acero de presfuerzo, sino que disminuye conforme aumenta la fuerza de presfuerzo.

Como sucedió con las vigas analizadas anteriormente en este capítulo, se observa que existe mayor error relativo en el cálculo de la fuerza de presfuerzo a través de la frecuencia de vibración, que en sentido contrario.

### 5.3 Vigas estudiadas por Jain et al.

#### 5.3.1 Viga J1

En la tabla 5.7 se muestran las frecuencias reales y las obtenidas con la ecuación (4.16), de la viga J1 estudiada por Jain et al., (2005), así como el error relativo entre ambos valores.

**Tabla 5.7. Frecuencias reales y calculadas de la viga J1, estudiada por Jain et al., (2005)**

Ciclo de carga	Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo $\epsilon$ (%)
		medida	Ec. (4.16) <sup>1</sup>	
1	0	19.30	19.30	
	40	20.10	19.67	-2.11
	80	21.30	20.04	-5.90
	120	21.70	20.40	-5.97
2	120	21.70	20.40	-5.97
	80	21.80	20.04	-8.06
	40	20.30	19.67	-3.08
	0	18.80	19.30	2.66
3	0	18.80	19.30	2.66
	40	19.20	19.67	2.47
	80	21.30	20.04	-5.90
	120	20.80	20.40	-1.90

<sup>1</sup>  $k=1$

En la tabla 5.7 se observa que el error relativo de mayor magnitud es de -8.06% y el mínimo es de -1.9%.

La ecuación (4.16), indica que la frecuencia de vibración disminuye si lo mismo sucede con la fuerza de presfuerzo. Sin embargo, en los experimentos esto no siempre sucede. Como se muestra en el segundo ciclo de la viga J1, que cuando la fuerza disminuyó de 120 kN a 80 kN, la frecuencia de vibración aumentó, contrario a lo que predice la ecuación (4.16).

En la tabla 5.8 se presentan los resultados del cálculo de la fuerza de presfuerzo efectiva, con la ecuación (4.18), y los errores relativos respecto a la fuerza axial real, que actúa sobre la viga J1 estudiada por Jain et al., (2005).

De acuerdo con la tabla 5.8, en este caso se puede concluir, que los errores relativos al calcular la fuerza de presfuerzo a través de la frecuencia de vibración, usando la ecuación (4.18), pueden alcanzar valores de hasta un 250%. En esta viga, los errores relativos no son menores para fuerzas de presfuerzo mayores, como sucedió con algunas vigas analizadas previamente en este capítulo.

**Tabla 5.8. Valores de  $N_{ef}$  obtenidos con la ecuación (4.18) y  $N$  real de la viga J2, estudiada por Jain et al., (2005)**

Ciclo de carga	Fuerza de presfuerzo (kN)		Error relativo $\epsilon$ (%)
	N	$N_{ef}$	
1	0	0.00	
	40	86.27	115.68
	80	222.25	177.81
	120	269.33	124.44
2	120	269.33	124.44
	80	281.24	251.55
	40	108.39	170.97
	0	-52.14	
3	0	-52.14	
	40	-10.54	-126.34
	80	222.25	177.81
	120	164.64	37.20

### 5.3.2 Viga J3

En la tabla 5.9 se presentan las frecuencias reales y las obtenidas con la ecuación (4.16), de la viga J3, estudiada por Jain et al., (2005), así como el error relativo entre ambos valores.

**Tabla 5.9. Frecuencias reales y calculadas de la viga J3, estudiada por Jain et al., (2005)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo $\epsilon$ (%)
	medida	Ec. (4.16) <sup>1</sup>	
0	19.20	19.20	0.00
40	19.00	19.59	3.09
80	20.80	19.97	-4.01
120	20.80	20.34	-2.22
160	19.60	20.70	5.63
200	20.30	21.06	3.75
240	21.00	21.41	1.97
280	21.40	21.76	1.69

<sup>1</sup>  $k=1$

En la tabla 5.9 se observa que el error relativo de mayor magnitud es de 5.63% y el mínimo es de 0%. Como en las vigas analizadas anteriormente, la ecuación (4.16) proporciona valores cercanos a los reales.

En la tabla 5.10 se presentan los resultados del cálculo de la fuerza de presfuerzo efectiva, utilizando la ecuación (4.18), y se compara con la fuerza axial real, que actúa sobre la viga J3, estudiada por Jain et al., (2005).

Los valores de la tercera columna en la tabla 5.10, son muy grandes comparados con los de la tabla 5.9, lo cual hace que la ecuación (4.18) no sea práctica, debido a que los errores relativos van desde -14.89% a -150.96%. Sin embargo, como en algunas vigas analizadas previamente en este capítulo, el error relativo tiende a disminuir conforme aumenta la fuerza de presfuerzo.

**Tabla 5.10. Valores de  $N_{ef}$  obtenidos con la ecuación (4.18) y  $N$  real de la viga J3, estudiada por Jain et al., (2005)**

Fuerza de presfuerzo (kN)		Error relativo $\epsilon$ (%)
N	$N_{ef}$	
0	0.00	
40	-20.38	-150.96
80	170.76	113.45
120	170.76	42.30
160	41.41	-74.12
200	115.93	-42.03
240	193.07	-19.55
280	238.32	-14.89

### 5.3.3 Viga J4

En la tabla 5.11 se presentan las frecuencias reales y las obtenidas con la ecuación (4.16), de la viga J4, estudiada por Jain et al., (2005), así como el error relativo entre ambos valores.

**Tabla 5.11. Frecuencias reales y calculadas de la viga J4, estudiada por Jain et al., (2005)**

Fuerza de presfuerzo (kN)	Frecuencia (Hz)		Error relativo $\epsilon$ (%)
	medida	Ec. (4.16) <sup>1</sup>	
0	19.30	19.30	0.00
40	19.50	19.69	0.97
80	20.50	20.07	-2.10
120	20.50	20.44	-0.28
160	20.30	20.81	2.52
200	19.80	21.17	6.93
240	19.50	21.53	10.39
280	20.00	21.88	9.38
320	20.00	22.22	11.09
360	20.30	22.56	11.12

<sup>1</sup>  $k=1$

En la tabla 5.11 se observa que el error relativo de mayor magnitud es de 11.12% y el mínimo es de 0%. Para esta viga, los errores de mayor magnitud se localizan en las fuerzas de presfuerzo mayores, contrario a lo que sucede con las vigas analizadas anteriormente en este capítulo. Se puede observar también, que la frecuencia de vibración no siempre aumenta cuando se incrementa el presfuerzo, en unas veces disminuye, y en otras se mantiene constante.

En la tabla 5.12 se presentan los resultados del cálculo de la fuerza de presfuerzo efectiva, utilizando la ecuación (4.18), y la fuerza axial real, que actúa sobre la viga J4 estudiada por Jain et al., (2005).

En la tabla 5.12 se observa que, los errores relativos son variables, y no tienen una tendencia uniforme de acuerdo con la fuerza de presfuerzo, estos varían desde 5.10%, hasta -91.46%.

De acuerdo con los resultados mostrados en las tablas 5.11 y 5.12, se observa que, existen errores relativos de menor magnitud en el cálculo de la frecuencia de vibración a través de la fuerza de presfuerzo, que en sentido contrario.

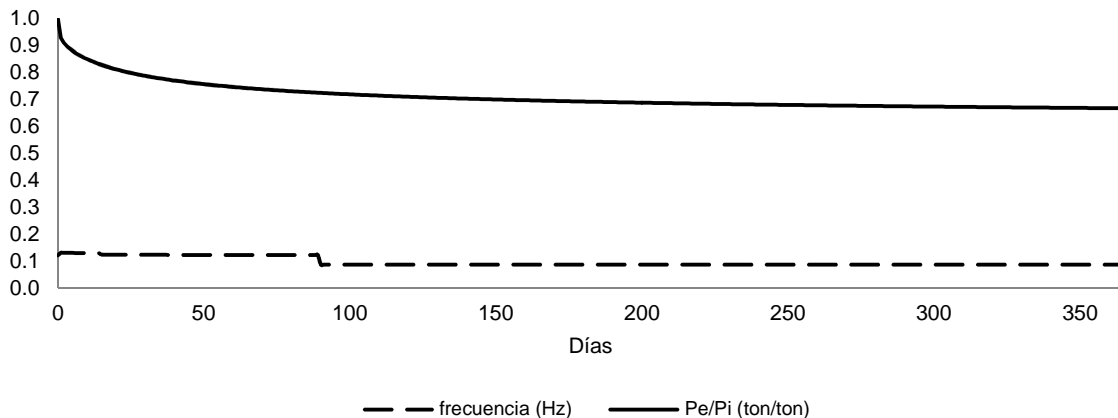
**Tabla 5.12. Valores de  $N_{ef}$  obtenidos con la ecuación (4.18) y  $N$  real de la viga J4, estudiada por Jain et al., (2005)**

Fuerza de presfuerzo (kN)		Error relativo $\epsilon$ (%)
N	$N_{ef}$	
0	0.00	
40	20.49	-48.77
80	126.11	57.64
120	126.11	5.10
160	104.57	-34.65
200	51.62	-74.19
240	20.49	-91.46
280	72.64	-74.06
320	72.64	-77.30
360	104.57	-70.95

#### 5.4 Viga del ejemplo 2.1

De la viga estudiada en el ejemplo 2.1, se desconocen las frecuencias reales de vibración. Sin embargo, las pérdidas se acercan a los que experimenta una viga en servicio. Por lo tanto, se utiliza la fuerza de presfuerzo efectiva  $P_e$  en esta viga, para calcular con la ecuación (4.16), la variación de la frecuencia natural de vibración  $f$ , en función del tiempo.

En la figura 5.1 se presentan dos gráficas, una corresponde a la variación a través del tiempo de la relación entre la fuerza de presfuerzo efectiva  $P_e$  y la inicial  $P_i$ , y la otra, a la frecuencia de vibración, calculada con la ecuación (4.16).



**Figura 5.1 Variación de la frecuencia de vibración y la relación  $P_e/P_i$  en función del tiempo**

En la figura 5.1 se observan dos saltos importantes, uno a los quince días y otro a los noventa, que es cuando se adiciona a la estructura, la sobrecarga muerta y la carga viva respectivamente. Además, se puede apreciar que la frecuencia de vibración permanece casi constante si la masa no cambia.

De acuerdo con la figura 5.1, se puede concluir que la fuerza de presfuerzo no afecta de manera significativa la frecuencia de vibración. Los principales cambios en esta cantidad, se deben principalmente a las alteraciones en la masa.





## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se propusieron y evaluaron dos ecuaciones, una para calcular la frecuencia natural de vibración de una viga a partir de su nivel de presfuerzo, y otra, para estimar la fuerza de presfuerzo a partir de la frecuencia natural de vibración, de una viga de concreto presforzado.

De acuerdo con los resultados obtenidos de los ejemplos estudiados en este trabajo, se tienen las siguientes conclusiones para las vigas analizadas:

- La ecuación para calcular la frecuencia de vibración, en función de la fuerza de presfuerzo en una viga de concreto presforzado, proporciona resultados cercanos a los reales, con errores relativos inferiores al 10%, lo que la hace útil en los casos en que se desee conocer la frecuencia de vibración que tendrá una viga de concreto presforzado durante su vida útil.
- Con la ecuación para calcular la fuerza de presfuerzo en función de la frecuencia de vibración en una viga de concreto presforzado, se obtienen errores de hasta el 200%, esto se puede deber a que el concreto no es un material 100% elástico e isótropo, y que un aumento en el presfuerzo en una viga real, no siempre significa un aumento en la rigidez a flexión. Incluso, para un mismo nivel de presfuerzo, se pueden obtener frecuencias distintas, aún tratándose del mismo modo de vibrar.
- La frecuencia de vibración de una viga de concreto presforzado, se ve más afectada por los cambios en la masa, que por la variación de la fuerza de presfuerzo.
- La pérdida de rigidez a flexión en una viga de concreto presforzado, debido a una fuerza de compresión, es compensada por la rigidez ganada por el acero de presfuerzo al tensarse.
- El aumento de rigidez en una viga de concreto debido al presfuerzo, se debe a que las microgrietas existentes en el concreto, se cierran.

Debido a que los modelos analizados en el presente trabajo fueron vigas fabricadas en laboratorio, se recomienda que se obtengan datos de vigas en servicio o coladas en una planta de prefabricados. Esto servirá para aceptar o mejorar lo propuesto en este trabajo, y de ser factible, aplicarla en la práctica ingenieril.



## REFERENCIAS

- Breccolotti, M., Ubertini, F., y Venanzi, I., (2009), "Natural frequencies of prestressed concrete beams: theoretical prediction and numerical validation", Proceedings of the XIX Aimeta Conference, Ancona, Italia, pp. 14-17.
- Cecilio V., (2013), "Estimación indirecta del nivel de presfuerzo en vigas presforzadas en servicio", tesis de maestría en ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- Clough, R.W. y Penzien, J., (1993), "Dynamic of structures", McGraw Hill, EUA.
- Dall'Asta, A. y Dezi, L., (1996), "Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges – Discussion", Journal of Structural Engineering, Vol. 122, No. 4, p. 458.
- Ercoli et al., "Evaluación del comportamiento de vigas de hormigón armado reforzado con fibras utilizando técnicas dinámicas no destructivas", [en línea]. Actualizada: 26 octubre 2007. [Fecha de consulta: 20 diciembre 2013]. Disponible en: <http://www.ndt.net/article/panndt2007/papers/75.pdf>.
- González, O. M. y Robles, F., (2005), "Aspectos fundamentales de concreto reforzado", Editorial Limusa, cuarta edición, México.
- Jain, S. K., Murty, C. V. R. y Kamle S., "Experimental Study on natural frequency of prestressed concrete beams", [en línea]. Actualizada: 08 agosto 2005. [Fecha de consulta: 05 noviembre 2013]. Disponible en: [http://home.iitk.ac.in/~skjain/RDSO/Rdso\\_paper.PDF](http://home.iitk.ac.in/~skjain/RDSO/Rdso_paper.PDF)
- Kim, J. T., Yun, C. B., Ryu, Y. S. y Cho, H. M., (2004), "Identification of prestress-loss in PSC beams using modal information", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 17, no. 3-4, pp. 467–482.
- Nawy, E. G., (2010), "Prestressed concrete: a fundamental approach", Prentice Hall, Upper Saddle River, fifth edition, New Jersey, EUA.
- Nilson, A. H., (2001), "Diseño de estructuras de concreto", McGraw Hill, duodécima edición, Colombia.
- Ortega, N., Moro, J., Meneses, R. y Aveldaño, R., (2010), "Comportamiento dinámico de vigas de hormigón reciclado con sus armaduras corroídas", [en línea]. Actualizada: 2010. [Fecha de consulta: 05 diciembre 2013]. Disponible en: [http://www.edutecne.utn.edu.ar/cinpar\\_2010/Topico%201/CINPAR%20085.pdf](http://www.edutecne.utn.edu.ar/cinpar_2010/Topico%201/CINPAR%20085.pdf).
- Prestressed Concrete Institute, (1999), "PCI Design Handbook", fifth edition. Chicago, EUA.
- Reinoso, E., Rodríguez, M. y Betancourt, R. (2000), "Manual de diseño de estructuras prefabricadas y presforzadas", ANIPPAC, México.
- Saiidi, M., Douglas, B. y Feng, S., (1994), "Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 7, pp. 2233-2241.
- Saiidi, M., y Hutchens, E., (1992), "A study of prestress changes in a post-tensioned bridge during the first 30 months", Rep. No. CCEER-92-3, Civ. Engrg. Dept., Univ. of Nevada, Reno, Nev. EUA.
- Sears, F., Zemansky, W., Young, H. y Freedman R., (2009), "Física Universitaria", Pearson educación, vol. 1, duodécima edición, México.

Tse, F. S., Morse, I.E., y Hinkle, R. T., (1978), "Mechanicals vibrations: theory and applications". Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., EUA.

Vázquez, D. E., Suárez, L. E., y López, R., (2004), "Identificación de daños en vigas de hormigón experimentales y analíticas utilizando metodologías modales", Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil, Vol. 4, No. 2, pp. 183-199.

Xiong, H. y Zhang, Y., (2008), "Experimental and theoretical analysis on the natural frequency of external prestressed concrete beams", Journal of Chongqing University (English Edition) [ISSN 1671-8224], Vol. 7, No. 4, pp. 317-323, China.

Zhang, Y. y Li, R., (2007), "Natural Frequency of Full-Prestressed Concrete Beam", Transactions of Tianjin University, ISSN 1006-4982, Vol. 13, No. 5. pp. 354-359, China.

## APÉNDICE A

### PROGRAMA DEFLEXIONES

#### A.1 INTRODUCCIÓN

Para calcular las pérdidas de presfuerzo en una viga de concreto presforzado a través del método de los incrementos de intervalos de tiempo, se elaboró un programa en MATLAB. Después de calcular las pérdidas, a través del mismo programa, se obtienen deformaciones, rotaciones, deflexiones y la variación del presfuerzo efectivo a través del tiempo.

El programa está hecho para hacer cálculos en intervalos consecutivos de igual duración. Sin embargo, si se requiere de intervalos de duración variable como 20, 50, 300 días, se debe modificar el vector tiempo. Además, está limitado para vigas simplemente apoyadas, con tendones de trayectoria lineal no engrasados ó enductados.

#### A.2 USO DEL PROGRAMA

Para usar este programa se deben seguir los siguientes pasos:

1. Contar con los 3 archivos que se incluyen en el CD anexo a esta tesis, que son: DATOS.xls, RESULTADOS.xls y DEFLEXIONES.m.
2. Abrir el archivo en Excel que lleva por nombre “DATOS.xls”, introducir en la segunda columna las cantidades correspondientes que indica la primera columna, guardar y cerrar el archivo.
3. Abrir el archivo en MATLAB titulado: “DEFLEXIONES”, presionar F5, y el programa proporcionará los resultados en un archivo en Excel de nombre: “RESULTADOS.xls”
4. Abrir “RESULTADOS.xls” para observar lo que proporciona el programa, al final aparecen unas gráficas que muestran relaciones de: pérdida de presfuerzo-tiempo,  $P_e/P_i$ -tiempo, deflexión-tiempo y  $P_e$ -tiempo.

La notación usada en el archivo “RESULTADOS.xls”, es la misma que se usa en el programa y que se presenta en la tabla A.1.

**Tabla A.1. Notación usada en el programa DEFLEXIONES**

Notación	Descripción
Ac	Área de la sección gruesa
Aps	Área total del acero de presfuerzo
At	Área del torón
Ct2	Factor para carga muerta
Ctsd	Factor para sobrecarga muerta
Cu	Coefficiente de flujo plástico último
dD	Deflexión por carga muerta
deCRc	Incremento de deformación por flujo plástico en CL
deCRE	Incremento de deformación por flujo plástico en extremos
deic	Pérdida de deformación en fibra inferior debido a la pérdida de presfuerzo en el intervalo anterior (CL)
deiCRc	Incremento de deformación en la fibra inferior por flujo plástico en el inicio del intervalo (CL)
deiCRcnet	Incremento de deformación unitaria neta en la fibra inferior por flujo plástico (CL)

deiCRe	Incremento de deformación en la fibra inferior por flujo plástico en el inicio del intervalo (EXTREMOS)
deiCRenet	Incremento de deformación unitaria neta en la fibra inferior por flujo plástico (EXTREMOS)
deie	Pérdida de deformación en fibra inferior debido a la pérdida de presfuerzo en el intervalo anterior (Extremos)
deltat	Duración de los intervalos en días
depCR	Variación de epCR en el intervalo
desc	Pérdida de deformación en fibra superior debido a la pérdida en el intervalo anterior (CL)
desCRc	Incremento de deformación en la fibra superior por flujo plástico en el inicio del intervalo (CL)
desCRcnet	Incremento de deformación unitaria neta en la fibra superior por flujo plástico (CL)
desCRe	Incremento de deformación en la fibra superior por flujo plástico en el inicio del intervalo (EXTREMOS)
desCRenet	Incremento de deformación unitaria neta en la fibra superior por flujo plástico (EXTREMOS)
dese	Pérdida de deformación en fibra superior debido a la pérdida de presfuerzo en el intervalo anterior (Extremos)
deSH	Variación de eSH en el intervalo
dfic	Pérdida de esfuerzo en la fibra inferior (CL)
dFict2	Incremento de curvatura para el fin del intervalo (CL)
dfie	Pérdida de esfuerzo en la fibra inferior (Extremos)
dFiet2	Incremento de curvatura para el fin del intervalo (EXTREMOS)
dfRt	Pérdida de presfuerzo por relajación
dfsc	Pérdida de esfuerzo en la fibra superior en el CL
dfse	Pérdida de esfuerzo en la fibra superior (Extremos)
dfSH	vector de pérdidas de esfuerzo por contracción
dft	Media de pérdida de presfuerzo (en el intervalo)
dftc	Pérdida total de presfuerzo en el acero en CL (en el intervalo)
dfte	Pérdida total de presfuerzo en el acero en extremos (en el intervalo)
dG	Deflexión por cargas gravitacionales
dl	Deflexión por carga viva
dNETA	Deflexión neta al fin del intervalo
dpt	Cambio en la fuerza de presfuerzo
dR	Variación de R en el intervalo
dSD	Deflexión por sobrecarga muerta
dt2	Flecha debida al presfuerzo, con todo y pérdidas en el fin del intervalo
e	Excentricidad promedio
ebcc	Deformación unitaria en el centroide del acero de presfuerzo (CL)
ebec	Deformación unitaria en el centroide del acero de presfuerzo (EXTREMOS)
ec	Excentricidad en centro del claro
E	Módulo de elasticidad del concreto
Ec	Módulo de elasticidad del concreto después de la transferencia
Eci	Módulo de elasticidad del concreto en transferencia
eCR	Deformación unitaria por flujo plástico por unidad de esfuerzo en flujo plástico último
ee	Excentricidad del acero de presfuerzo en los apoyos (extremos)
eic	Deformación unitaria inferior en transferencia en CL
eie	Deformación unitaria inferior en transferencia en extremos
epCRt	eCR en función del tiempo
Eps	Módulo de elasticidad del acero de presfuerzo
esc	Deformación unitaria superior en transferencia en CL
ese	Deformación unitaria superior en transferencia en extremos
eSH	Coefficiente que depende del curado del concreto (humedad o vapor)
eSHt	Deformación unitaria por acortamiento del concreto en un tiempo determinado
fbcc	Esfuerzo en el centroide del acero de presfuerzo (CL)
fbec	Esfuerzo en el centroide del acero de presfuerzo (EXTREMOS)
fici	Relación de curvatura en centro de claro
fiei	Relación de curvatura en apoyos
fipi	Esfuerzo en fibra inferior debido solo a Pi (en transferencia)
Fitct2	Rotación total (CL) al finalizar el intervalo
fite	Esfuerzo inferior en transferencia
Fitet2	Rotación total (EXTREMOS) al finalizar el intervalo
fp	presfuerzo en tonos al inicio del intervalo

fpc	Resistencia a compresión del concreto
fpci	Resistencia a compresión del concreto en etapa de transferencia
fpi	Esfuerzo al que se somete el acero en transferencia
fpu	Resistencia a la ruptura del acero de presfuerzo
fpv	Esfuerzo de fluencia del acero de presfuerzo
fspi	Esfuerzo en fibra superior debido solo a Pi (en transferencia)
fste	Esfuerzo superior en transferencia
h	Altura total de la sección
Ic	Momento de Inercia de la sección gruesa
l	Longitud del claro en cm
N	Número de intervalos
NT	Cantidad de torones
P	Vector de fuerza en los tendones
Pe	Vector de Fuerza efectiva
Pef	Vector de presfuerzo efectivo
Pepi	Pe/Pi
Pi	Fuerza de presfuerzo (en transferencia) sin considerar pérdidas
R	Relación de pérdida de presfuerzo
Si	Módulo de sección inferior
Ss	Módulo de sección superior
t	Vector tiempo
tf	días transcurridos entre el colado de la viga y la transferencia
tl	tiempo en días a partir del cual actúa WI (Después de la transferencia)
tsd	tiempo en días a partir del cual actúa Wsd (Después de la transferencia)
Wd	peso propio
WI	carga viva
Wsd	sobrecarga muerta
Yi	Distancia del centroide de la sección transversal a la fibra inferior
Ys	Distancia del centroide de la sección transversal a la fibra superior

---

### A.3 ALGORITMO DEL PROGRAMA DEFLEXIONES

```

clc
clear all
%Lectura de datos de un archivo de Excel con el nombre DATOS
DAT=xlsread('DATOS','B2:B24');
Ac=DAT(1,1);Ic=DAT(2,1);Yi=DAT(3,1);Ys=DAT(4,1);l=DAT(5,1);
Wd=DAT(6,1);Wsd=DAT(7,1);Wl=DAT(8,1);ec=DAT(9,1);ee=DAT(10,1);
fpc=DAT(11,1);Cu=DAT(12,1);eSH=DAT(13,1);Eps=DAT(14,1);
fpu=DAT(15,1);fpv=DAT(16,1);NT=DAT(17,1);At=DAT(18,1);
tf=DAT(19,1);tsd=DAT(20,1);tl=DAT(21,1);N=DAT(22,1); deltat=DAT(23,1);
%Formación del vector t (tiempo)
for i=1:N
    if i==1
        t(i,1)=0; %transferencia
    else
        t(i,1)=t(i-1,1)+deltat;
    end
end
%
%Cálculos previos a la solución
h=Yi+Ys; %Altura total de la sección
Si=Ic/Yi; Ss=Ic/Ys; %Módulos de sección inferior y superior
e=(2*ec+ee)/3; %excentricidad promedio
%Resistencia a compresión del concreto en transferencia

```

```

fpci=0.75*fpc;
%Módulo de elasticidad del concreto
Ec=15146*fpc^.5;      Eci=15112*fpci^.5;
%Área total del acero de presfuerzo
Aps=NT*At;
fpi=0.7*fpu;
%-----
%Fuerza de presfuerzo (en transferencia) sin considerar pérdidas
Pi=NT*At*fpi;
%-----

                                % S O L U C I Ó N
% FACTORES QUE DEPENDEN DEL TIEMPO
eCR=Cu/Ec;
for i=1:N
    if i==1
        epCRt(i,1)=0;           %Flujo plástico
        depCR(i,1)=0;
        eSHt(i,1)=tf/(tf+35)*eSH; %Contracción
        deSH(i,1)=eSHt(i,1);
        R(i,1)=0;               %Relajación
        dR(i,1)=0;
    else
        epCRt(i,1)=eCR*(t(i)^0.60/(10+t(i)^0.60));
        depCR(i,1)=epCRt(i,1)-epCRt(i-1,1);
        eSHt(i,1)=(t(i,1))/(t(i,1)+35)*eSH;
        deSH(i,1)=eSHt(i,1)-eSHt(i-1,1);
        R(i,1)=(log10((t(i,1)-0)*24))/10*(max(fpi/fpy,0.55001)-0.55);
        dR(i,1)=R(i,1)-R(i-1,1);
    end
end
%-----
for i=1:N
    if i==1
        P(i,1)=Pi;      %Vector de fuerza de presfuerzo
        E=Eci;
    else
        P(i,1)=P(i-1,1)-dpt(i-1,1);
        E=Ec;
    end
end
%CÁLCULO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES UNITARIAS EN FIBRA SUPERIOR E
%INFERIOR (CL)
fsp(i,1)=-P(i,1)/Ac+P(i,1)*ec/Ss;
fip(i,1)=-P(i,1)/Ac-P(i,1)*ec/Si;
esc(i,1)=fsp(i,1)/E;
eic(i,1)=fip(i,1)/E;
%-----
%CÁLCULO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES UNITARIAS EN FIBRA SUPERIOR E
%INFERIOR (EXTREMOS)
fste(i,1)=-P(i,1)/Ac+P(i,1)*ee/Ss;
fite(i,1)=-P(i,1)/Ac-P(i,1)*ee/Si;
ese(i,1)=fste(i,1)/E;
eie(i,1)=fite(i,1)/E;
%-----
%RELACIÓN DE CURVATURA
%En centro del claro
Fici(i,1)=(eic(i,1)-esc(i,1))/h;

```



```

%En apoyos
Fiei(i,1)=(eie(i,1)-ese(i,1))/h;

%ETAPA 2
% a)Esfuerzo en el nivel del centroide del acero de presfuerzo (CL)
fbcc(i,1)=-((Ys+ec)*(fsp(i,1)-fipi(i,1))/(Yi+Ys)-fsp(i,1));
%Deformación unitaria en el centroide del acero de presfuerzo (CL)
ebcc(i,1)=fbcc(i,1)/E;
%Esfuerzo en el nivel del centroide del acero de presfuerzo (EXTREMOS)
fbec(i,1)=-((Ys+ee)*(fste(i,1)-fite(i,1))/(Yi+Ys)-fste(i,1));
%Deformación unitaria en el centroide del acero de presfuerzo (EXTREMOS)
ebec(i,1)=fbec(i,1)/E;
%INCREMENTO DE DEFORMACIÓN POR FLUJO PLÁSTICO
%-----CENTRO DEL CLARO
deCRc(i,1)=depCR(i,1)*fbcc(i,1);
%-----EXTREMOS
deCRE(i,1)=depCR(i,1)*fbec(i,1);
%Pérdida de presfuerzo por relajación
if i==1
    fp(i,1)=fpi;
else
    fp(i,1)=fp(i-1,1)-dft(i-1,1);
end
dfRt(i,1)=dR(i,1)*fp(i,1);
%Pérdida total de presfuerzo en el acero en CL y extremos
if i==1
    dftc(i,1)=(abs(deCRc(i,1))+0)*Eps+dfRt(i,1);
    dfte(i,1)=(abs(deCRE(i,1))+0)*Eps+dfRt(i,1);
else
    dftc(i,1)=(abs(deCRc(i,1))+abs(deSH(i,1)))*Eps+dfRt(i,1);
    dfte(i,1)=(abs(deCRE(i,1))+abs(deSH(i,1)))*Eps+dfRt(i,1);
end
% Media de pérdida de presfuerzo
dft(i,1)=(dftc(i,1)+dfte(i,1))/2;
%Fuerza perdida en los torones
dpt(i,1)=dft(i,1)*Aps;
% b) CAMBIOS (DECREMENTOS) EN ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN LAS FIBRAS DE
%CONCRETO DEBIDO A LA PÉRDIDA DE PRESFUERZO
%-----CENTRO DEL CLARO
dfsc(i,1)=-dpt(i,1)/Ac+dpt(i,1)*ec/Ss;
desc(i,1)=dfsc(i,1)/E;
dfic(i,1)=-dpt(i,1)/Ac-dpt(i,1)*ec/Si;
deic(i,1)=dfic(i,1)/E;
%-----EXTREMOS
dfse(i,1)=-dpt(i,1)/Ac+dpt(i,1)*ee/Ss;
dese(i,1)=dfse(i,1)/E;
dfie(i,1)=-dpt(i,1)/Ac-dpt(i,1)*ee/Si;
deie(i,1)=dfie(i,1)/E;
%-----
% c) SUMA DE DEFORMACIONES, CURVATURA RESULTANTE Y FLECHA NETA POR FLUJO
%PLÁSTICO.
% i) Deformación en las fibras superior e inferior por flujo plástico en t1
%-----CENTRO DEL CLARO
desCRc(i,1)=fsp(i,1)*depCR(i,1);
deiCRc(i,1)=fipi(i,1)*depCR(i,1);
%-----EXTREMOS
desCRE(i,1)=fste(i,1)*depCR(i,1);

```

```

deiCre(i,1)=fite(i,1)*depCR(i,1);
%-----Deformación unitaria neta (Pi y pérdidas)
%-----CENTRO DEL CLARO
%SUPERIOR
desCRcnet(i,1)=desCRc(i,1)-desc(i,1);
%INFERIOR
deiCRcnet(i,1)=deiCRc(i,1)-deic(i,1);
%-----EXTREMOS
%SUPERIOR
desCReNet(i,1)=desCRe(i,1)-dese(i,1);
%INFERIOR
deiCReNet(i,1)=deiCRe(i,1)-deie(i,1);

%-----
%ii) CÁLCULO DE CURVATURA (DECREMENTO)
%CENTRO DEL CLARO
dFict2(i,1)=(deiCRcnet(i,1)-desCRcnet(i,1))/h;
%EXTREMOS
dFiet2(i,1)=(deiCReNet(i,1)-desCReNet(i,1))/h;
%iii) CURVATURA TOTAL Y FLECHA (CURVATURA DEBIDA A PI MÁS EL DECREMENTO)
if i==1
    %CENTRO DEL CLARO
    Fitct2(i,1)=Fici(i,1)+dFict2(i,1);
    %EXTREMOS
    Fitet2(i,1)=Fiei(i,1)+dFiet2(i,1);
else
    %CENTRO DEL CLARO
    Fitct2(i,1)=Fitct2(i-1,1)+dFict2(i,1);
    %EXTREMOS
    Fitet2(i,1)=Fitet2(i-1,1)+dFiet2(i,1);
end
%APLICACIÓN DE FÓRMULA PARA OBTENER LA FLECHA
dt2(i,1)=Fitct2(i,1)*(l^2/8)+(Fitet2(i,1)-Fitct2(i,1))*l^2/24;
% d) Deflexiones a largo plazo debido a las cargas gravitacionales en t2
%-----FACTORES
%Factor para carga muerta
Ct2(i,1)=t(i,1)^0.60/(10+t(i,1)^0.60)*Cu;
%-----DEFLEXIONES
%Deflexión por carga muerta a largo plazo
dD(i,1)=5*Wd*l^4/(384*E*Ic)*(1+Ct2(i,1));
%Deflexión por sobrecarga muerta a largo plazo
if tsd<=t(i,1)
    CtSD(i,1)=(t(i,1)-tsd)^0.60/(10+(t(i,1)-tsd)^0.60)*Cu;
    dSD(i,1)=5*Wsd*l^4/(384*E*Ic)*(1+CtSD(i,1));
else dSD(i,1)=0;
end
%Deflexión por carga viva
if tl<=t(i,1)
    dl(i,1)=5*Wl*l^4/(384*E*Ic);
else
    dl(i,1)=0;
end
%Deflexión total debido a las cargas gravitacionales
dG(i,1)=dD(i,1)+dSD(i,1)+dl(i,1);
%-----
%DEFLEXIÓN NETA
dNETA(i,1)=dt2(i,1)+dG(i,1);

```

```

end
%-----

%Creación del vector de Fuerza efectiva
for i=1:N
    if i==1
        Pe(i,1)=Pi;
    elseif i<N
        Pe(i,1)=P(i+1);
    else
        Pe(N,1)=P(N,1)-dpt(N,1);
    end
    Pepi(i,1)=Pe(i,1)/Pi;
end
%Creación del vector de pérdidas de esfuerzo por contracción.
for i=1:N
    if i==1
        dfSH(i,1)=0;
    else
        dfSH(i,1)=deSH(i,1)*Eps;
    end
end
%OBTENCION APROXIMADA DEL PRESFUERZO EFECTIVO SEGUN CECILIO (2013)(MODIFICADO)
deltaPi=l^2*e*Pi/(8*Eci*Ic);
for i=1:N
    if i==1
        E=Eci;
    else
        E=Ec;
    end

    if t(i,1)<tsd
Pef(i,1)=8*E*Ic/(l^2*e*(2+Ct2(i,1)))*(2*5*Wd*1^4/(384*E*Ic)*(1+Ct2(i,1))...
        -2*dNETA(i,1)-deltaPi*Ct2(i,1));
    elseif t(i,1)<t1
Pef(i,1)=8*E*Ic/(l^2*e*(2+Ct2(i,1)))*(2*5*Wd*1^4/(384*E*Ic)*(1+Ct2(i,1))+2*5*W
sd*1^4/(384*E*Ic)*(1+Ct2(i-1,1)))...
        -2*dNETA(i,1)-deltaPi*Ct2(i,1));
    else
Pef(i,1)=8*E*Ic/(l^2*e*(2+Ct2(i,1)))*(2*5*Wd*1^4/(384*E*Ic)*(1+Ct2(i,1))+2*5*W
sd*1^4/(384*E*Ic)*(1+Ct2(i-1,1))+2*d1(i,1))...
        -2*dNETA(i,1)-deltaPi*Ct2(i,1));
    end
end
%OBTENCION APROXIMADA DEL PRESFUERZO EFECTIVO SEGUN CECILIO (2013), (SIN
MODIFICAR)
Cf=2.4;
deltaPi=l^2*e*Pi/(8*Eci*Ic);
for i=1:N
    if t(i,1)<tsd
        Pefv(i,1)=8*Ec*Ic/(l^2*e*(2+Cf))*(2*5*Wd*1^4/(384*Ec*Ic)*(1+Cf)...
            -2*dNETA(i,1)-deltaPi*Cf);
    elseif t(i,1)<t1

```

```

Pefv(i,1)=8*Ec*Ic/(1^2*e*(2+Cf))*(2*5*Wd*1^4/(384*Ec*Ic)*(1+Cf)+2*5*Wsd*1^4/(3
84*Ec*Ic)*(1+Cf)...
    -2*dNETA(i,1)-deltaPi*Cf);
    else
Pefv(i,1)=8*Ec*Ic/(1^2*e*(2+Cf))*(2*5*Wd*1^4/(384*Ec*Ic)*(1+Cf)+2*5*Wsd*1^4/(3
84*Ec*Ic)*(1+Cf)+2*d1(i,1)...
    -2*dNETA(i,1)-deltaPi*Cf);
    end
end
end

%EXPORTACION DE RESULTADOS
Vf=[t Pe/1000 Pef/1000 Pepi fspi fipi fste fite abs(deCRc*Eps)
abs(deCRE*Eps)...
    abs(deCRc+deCRE)*Eps/2 dfSH dfRt dft dfsc...
    dfic dfse dfie desc*10^6 deic*10^6 dese*10^6 deie*10^6 ...
    desCRcnet*10^6 deiCRcnet*10^6 desCrenet*10^6 deiCrenet*10^6 ...
    dFict2*10^6 dFiet2*10^6 Fitct2*10^6 Fitet2*10^6 dt2 dG dNETA abs(dNETA)
Pefv/1000];
xlswrite('RESULTADOS',Vf,'Hojal','C9:AK1833')

```

## AGRADECIMIENTOS

A *Dios*, por todo.

A mis *padres*, por darme la vida.

A la *UNAM*, una gran escuela.

Al *CONACYT*, por la beca brindada durante mis estudios de maestría.

A mis *amigos*, por su gran apoyo incondicional.

A mis *profesores*, por el conocimiento brindado

A mi tutor, el *Dr. José Alberto Escobar Sánchez*, no tengo palabras para describir el apoyo brindado, una gran persona a quien le debo respeto y admiración, gracias Dr.

A mi hija *Dulce Avendaño Flores*, un día podrás leer estas letras y quizás no leas todo el contenido, pero debes saber que muchas veces fuiste mi motivo para terminar la maestría. Gracias por ser parte de mi vida.

A la *sociedad* en general, porque soy el resultado de una compleja ecuación social.