

# Capítulo 6

## Simulaciones

### 6.1. Controlador de Dos Relevadores

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  del controlador (3.14) dependen del modelo linealizado de la planta. Al utilizar distintos métodos de linealización se tendrán cambios en los parámetros de este controlador controlador y consecuentemente también en la dinámica del sistema. Se analizarán los efectos de utilizar la linealización por el Jacobiano introducida en la sección 2.2 y la linealización por retroalimentación de la sección 3.2. En todas las simulaciones se obtienen las velocidades correspondientes utilizando el bloque diferenciador del Simulink de MATLAB.

#### 6.1.1. Linealización por Medio del Jacobiano

Se desean generar oscilaciones en el péndulo alrededor de  $q_1 = \pi$ . Previamente se linealizó el modelo matemático alrededor de este punto de equilibrio utilizando el Jacobiano y se demostró que éste es inestable. Por lo tanto, es necesario estabilizar el sistema alrededor de  $q_1 = \pi$  para poder aplicar la metodología del Capítulo 3. Considerando que

$$\tau = k_u u$$

donde  $k_u = 0.00494$  es la constante de proporcionalidad de control dada por el fabricante [1], la entrada de control entonces será

$$u = u_{2relay} + u_{estabilizante}$$

siendo  $u_{2relay}$  el controlador por dos relevadores (3.14) y  $u_{estabilizante}$  una retroalimentación de estados diseñada para ubicar los polos del sistema de manera deseada. Se propone

$$u_{estabilizante} = -Kx \quad (6.1)$$
$$K = \begin{bmatrix} -350.1746 & -39.7552 & -0.0702 & -0.0652 \end{bmatrix}$$

para obtener el sistema retroalimentado

$$\Sigma_J \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -300.99 & -42.982 & -0.076 & -0.07 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 69677.668 & 7919.283 & 13.99 & 12.982 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0812 \\ 0 \\ 199.2014 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

el cual se puede comprobar es estable y con polos

$$\lambda_{\Sigma_J} = \{-15, -9, -2, -4\}$$

Las oscilaciones se diseñarán para la primera componente de la salida

$$y_1 = q_1$$

es decir, la posición del péndulo. Tomando como parámetros deseados

$$\mathcal{A}_d = 0.2 [\text{rad}], \quad \Omega_d = 4\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (6.3)$$

se pueden calcular las ganancias correspondientes [Apéndice B],

$$\begin{aligned} c_1 &= 17.7622 \\ c_2 &= 43.1853 \end{aligned} \quad (6.4)$$

a partir del diagrama de Nyquist que se muestra en la Figura 6.1.

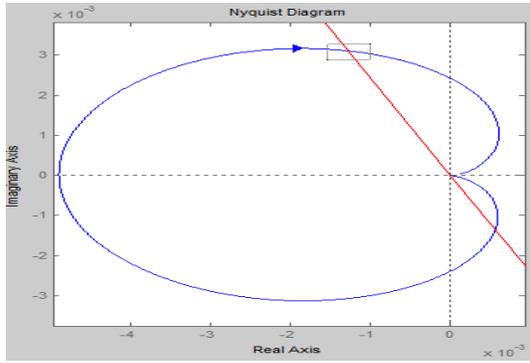
La evolución de la salida, cuando se retroalimentan el control estabilizante (6.1) junto con el controlador de dos relevadores con las ganancias (6.4) al modelo *no lineal* (2.27), se muestra en la Figura 6.2(a) para la condición inicial

$$x_0 = [3.0 \quad 1.0 \quad 0.0 \quad 0.0]'$$

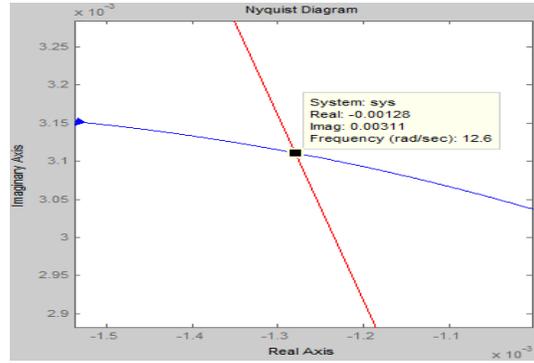
La oscilación resultante tiene como parámetros

$$\mathcal{A}_s = 0.2574 [\text{rad}], \quad \Omega_s = 3.3932\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (6.5)$$

los cuales validan la teoría planteada anteriormente a pesar de cierta discrepancia con los valores deseados. Si además se toma en cuenta la simetría de las oscilaciones generadas,

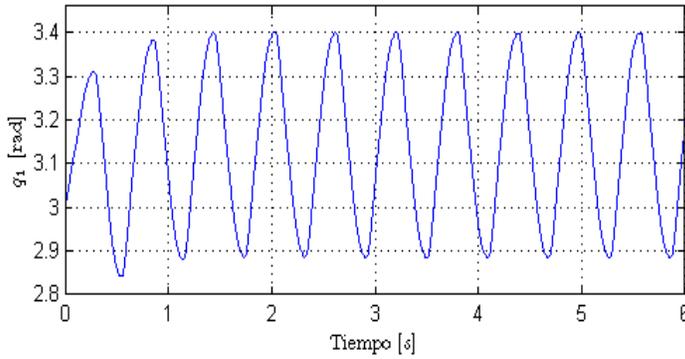


(a) Nyquist(azul) y Función Descriptiva(rojo)

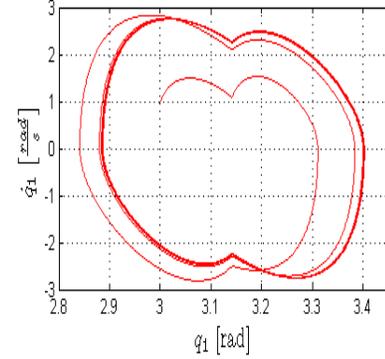


(b) Intersección: ecuación de balance armónico

Figura 6.1: Análisis en frecuencia de la oscilación deseada (6.3)



(a) Posición del péndulo en función del tiempo



(b) Ciclo límite del péndulo

Figura 6.2: Oscilación del péndulo con las ganancias (6.4)

como se aprecia en el ciclo límite de la Figura 6.2(b), se podría concluir prematuramente que basta con una linealización por medio del Jacobiano para obtener resultados aceptables; sin embargo, mientras más se incrementa  $\mathcal{A}_d$  más se aleja el sistema de la zona reducida de validez de esta linealización; la consecuencia es que no se puede garantizar un comportamiento adecuado para oscilaciones de alta amplitud. Por ejemplo, para una oscilación deseada

$$\mathcal{A}_d = 2 \text{ [rad]}, \quad \Omega_d = 4\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

la Figura 6.3 muestra un comportamiento irregular y poco simétrico comparado con el caso anterior de baja amplitud. Una razón de este mayor error en la señal deseada se debe a que la planta no se comporta como un filtro paso bajas para oscilaciones tan lentas como la de (6.3); la figura 6.4 muestra que la frecuencia de corte del sistema (6.2),  $\Sigma_J$ , es de alrededor de  $10 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$  por lo que la primera armónica de la oscilación deseada,

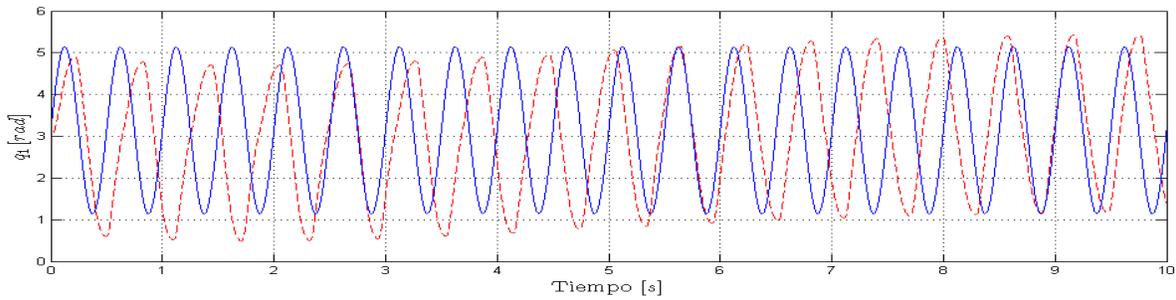


Figura 6.3: Oscilación deseada (azul) y simulada (roja punteada) si se incrementa  $\mathcal{A}_d$

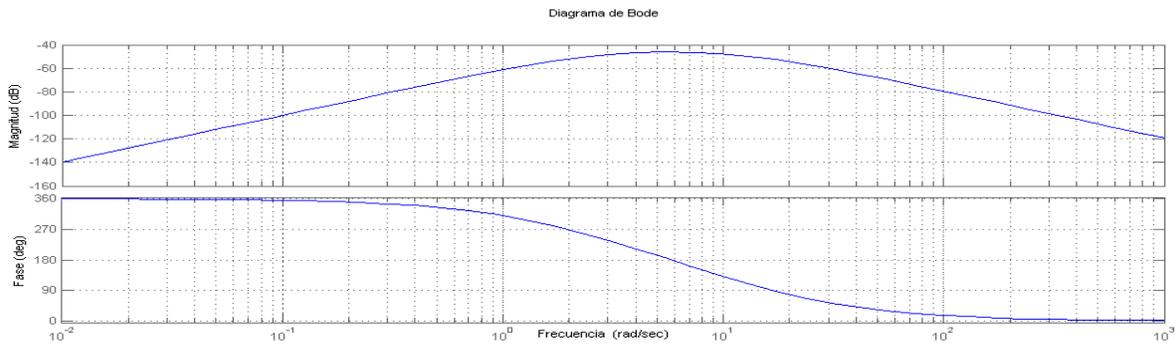


Figura 6.4: Diagrama de Bode para el sistema estabilizado y linealizado por el Jacobiano

de  $25.13 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ , no es filtrada adecuadamente. Sin embargo, esto no fue el caso para la oscilación de baja amplitud con la misma frecuencia por lo que se debe considerar adicionalmente el hecho de que la linealización por medio del Jacobiano tiene un región limitada de validez lo cual influirá fuertemente en el tipo de oscilaciones que se pueden generar. Estos puntos se visualizan mejor en la Tabla 6.1, la cual muestra la comparación de otras oscilaciones deseadas con sus respectivas simulaciones. Cabe mencionar otro resultado interesante de este controlador: la señal que genera el controlador de dos relevadores (3.14) es periódica y, tal como se muestra en la Figura 6.5, de la misma frecuencia que la frecuencia deseada  $\Omega_d$ .

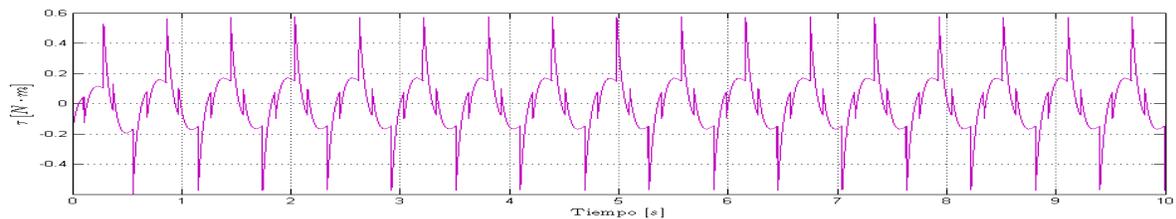


Figura 6.5: Par de control para generar la oscilación deseada (6.3)

$\mathcal{A}_d[\text{rad}]$	$\Omega_d \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$c_1$	$c_2$	$\mathcal{A}_s[\text{rad}]$	$\Omega_s \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$
0.2	$4\pi$	17.7622	43.1853	0.2574	$3.3932\pi$
0.2	$8\pi$	-50.3169	103.7481	0.2496	$5.6921\pi$
0.2	$12\pi$	-164.8970	160.4536	0.2084	$10.1652\pi$
2	$4\pi$	177.6221	431.8525	2.1461	$3.3970\pi$
2	$8\pi$	-503.1685	1037.48	2.1836	$6.1381\pi$
2	$12\pi$	-1648.97	1604.5364	1.993	$10.5541\pi$

Tabla 6.1: Parámetros del controlador de dos relevadores calculados para  $\Sigma_J$

### 6.1.2. Linealización por Retroalimentación

La validez global de la linealización por retroalimentación obtenida para la Rueda de Inercia permite, teóricamente, generar oscilaciones de mayor amplitud a comparación de la linealización por el Jacobiano. Sin embargo, la salida linealizante en este caso es la función

$$\zeta = K \left( q_1 - \pi + J_1^{-1} J_2 q_2 \right) + J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2$$

por lo que no es posible diseñar una oscilación directamente para el péndulo ya que  $\zeta$  depende de todo el espacio de estados y no sólo de  $q_1$ . No obstante,  $q_1$  también tiene un comportamiento oscilatorio de la misma frecuencia a la que oscila  $\zeta$  [2]. Es decir,

$$\Omega_{q_1} \rightarrow \Omega_\zeta$$

Consecuentemente, se puede diseñar una oscilación para  $q_1$  indirectamente a través de  $\zeta$  asignando a esta última la frecuencia deseada del péndulo,

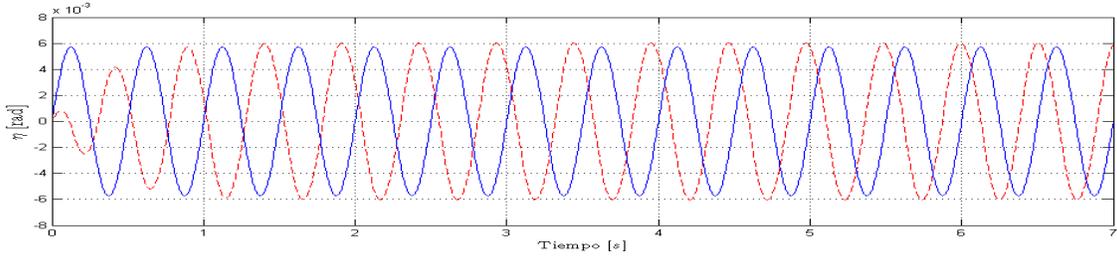
$$\Omega_{\zeta_d} \triangleq \Omega_{q_{1d}} \tag{6.6}$$

Para ejemplificar lo anterior se utiliza el sistema

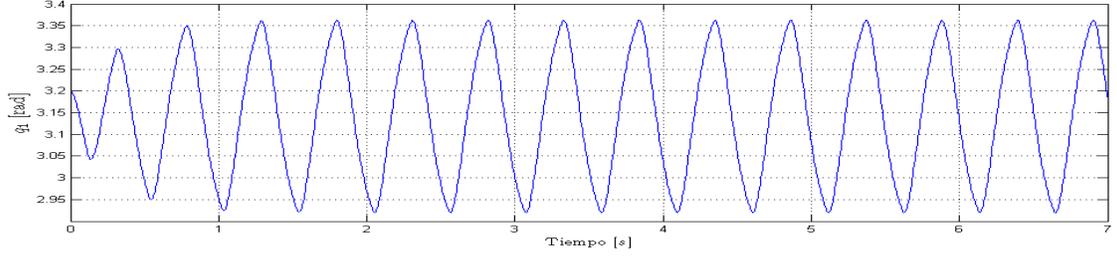
$$\Sigma_{FBL} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \dddot{\zeta} \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -350 & -155 & -22 & 0 \\ 218.824 & 0 & 0 & -0.02188 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ p_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \dddot{\zeta} \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

el cual se obtiene al introducir los parámetros  $a_0 = 350$ ,  $a_1 = 155$ ,  $a_2 = 22$ ,  $K = 0.0001$  en (3.13), y se analiza el comportamiento de este sistema para

$$\mathcal{A}_{q_{1d}} = 0.2 [\text{rad}], \quad \Omega_{\zeta_d} = 4\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \tag{6.7}$$



(a) Oscilación deseada de la salida  $\zeta$  (azul) y simulada (roja punteada)



(b) Oscilación asociada del péndulo

Figura 6.6: Relación entre la oscilación de la salida  $\zeta$  y la del péndulo

Se debe diseñar una oscilación correspondiente en  $\zeta$  que logre este comportamiento deseado en  $q_1$ ; a partir de (6.6) se obtiene

$$\Omega_{\zeta_d} = \Omega_{q_{1d}} = 4\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Por otro lado, la amplitud deseada de  $\zeta$  se calcula a partir de [2]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\zeta_d} &= \frac{\mathcal{A}_{q_{1d}} h}{\Omega_d \sqrt{1 - \frac{K}{J^2 \Omega^2 + K^2}}} \\ &= 0.0057349 \end{aligned}$$

Una vez calculados los parámetros deseados de  $\zeta$  se calculan [Apéndice B]

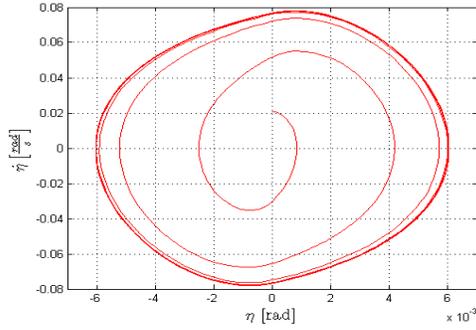
$$\begin{aligned} c_1 &= 14.0705 \\ c_2 &= 0.16438 \end{aligned}$$

y se introducen en el modelo con linealización por retroalimentación con condiciones iniciales

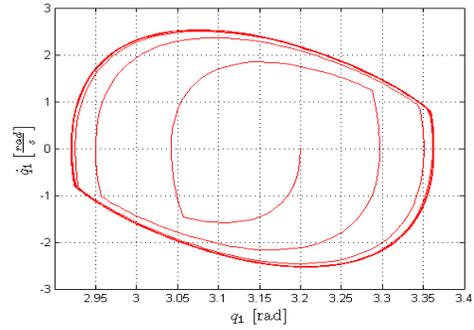
$$x_0 = [3.2 \quad 0.001 \quad 0.0 \quad 0.0]'$$

A partir de la trayectoria resultante de  $\zeta$  que se presenta en la Figura 6.6(a) se obtiene

$$\mathcal{A}_{\zeta_s} = 0.00602 \text{ [rad]}, \quad \mathcal{A}_{q_{1s}} = 0.2211 \text{ [rad]} \quad (6.8)$$



(a) Ciclo límite de la salida  $\zeta$



(b) Ciclo límite irregular del péndulo

Figura 6.7: Diferencia geométrica entre los ciclos límites del sistema

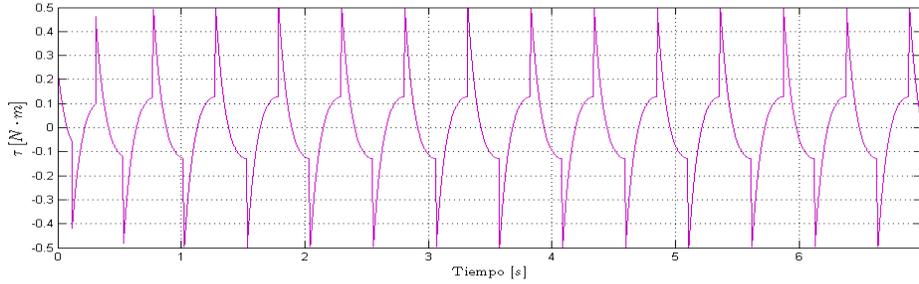


Figura 6.8: Señal periódica del controlador por dos relevadores

Adicionalmente se puede observar en la Figura 6.6(b) que los comportamientos del péndulo y de  $\zeta$  de hecho sí obedecen la condición (6.6) puesto que

$$\Omega_{\zeta_s} = \Omega_{q_{1_s}} = 3.9216\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (6.9)$$

con lo cual se demuestra que *el diseño de oscilaciones es mucho más preciso para la linealización por retroalimentación que para la linealización por el Jacobiano.*

No obstante, existe una diferencia importante entre el comportamiento oscilatorio de  $\zeta$  y el de  $q_1$ ; el primero responde, por lo menos teóricamente, a una forma senoidal mientras que el segundo carece de esta propiedad a pesar de ser periódico. Esto se puede apreciar visualmente en los ciclos límites de  $\zeta$  y  $q_1$  que se muestran en la Figura 6.7(a) y 6.7(b) respectivamente; el primero es más suave y circular. Por lo tanto, si se desea que el comportamiento del péndulo sea simplemente periódico entonces este método de diseño funciona perfectamente de lo contrario se deben buscar alternativas de diseño.

Nuevamente, la señal de control que excita al sistema  $\Sigma_{FBL}$  es periódica y se puede observar, Figura 6.8, satisface la relación

$$\Omega_u \rightarrow \Omega_\zeta$$

Por último, en la Tabla 6.2 se presentan los datos de las simulaciones correspondientes de esta sección.

$\mathcal{A}_{\zeta_d}$ [rad]	$\mathcal{A}_{q_{1_d}}$ [rad]	$\Omega_d$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	$c_1$	$c_2$	$\mathcal{A}_{\zeta_s}$ [rad]	$\mathcal{A}_{q_{1_s}}$ [rad]	$\Omega_s$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
0.005735	0.2	$4\pi$	14.0705	0.1644	0.00602	0.2211	$3.9216\pi$
0.002834	0.2	$8\pi$	30.1541	26.665	0.002851	0.1969	$7.9723\pi$
0.001886	0.2	$12\pi$	45.786	70.6929	0.00198	0.1884	$12.142\pi$
0.057349	2	$4\pi$	140.7051	1.64384	0.058273	2.1942	$3.9873\pi$
0.028344	2	$8\pi$	301.5414	266.6529	0.028792	2.131	$8.063\pi$
0.03132	2	$12\pi$	457.8591	706.9287	0.0308	2.077	$12.0604\pi$

Tabla 6.2: Oscilaciones en el sistema linealizado por retroalimentación

## 6.2. Controlador por Restricciones Holonómicas

El primer paso para implementar el controlador por restricciones holonómicas virtuales es generar la solución *periódica* de la ecuación de Riccati (4.25). La periodicidad de esta ecuación, y por lo tanto de las trayectorias del sistema, depende de las condiciones iniciales que se le asignen a  $\mathbf{R}(t)$ ; para una cierta oscilación deseada de  $q_1$  existe un único conjunto de condiciones iniciales que garantizan las estabilidad orbital del sistema retroalimentado bajo la ley de control (4.26).

Supóngase que se desea obtener la siguiente oscilación del péndulo:

$$\mathcal{A}_d = 2 \text{ [rad]}, \quad \Omega_d = 4\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Introduciendo estos datos en (4.17) se obtiene [Apéndice B]

$$k = -234.2444$$

Este valor de  $k$  junto con la dinámica proyectada (4.13) permiten definir la trayectoria deseada  $q_{1_*}(t)$  del péndulo

$$\ddot{q}_{1_*} = -\frac{h}{(J_1 + kJ_2)} \text{sen}(q_{1_*}) \quad (6.10)$$

Resolviendo el sistema se obtiene  $\dot{q}_{1_*}(t)$  y utiliza como entrada para el sistema

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{G} & (\mathbf{A} + \delta\mathbf{I}_3)' \\ \mathbf{A} + \delta\mathbf{I}_3 & \mathbf{B}(t) * \mathbf{B}(t)' \end{bmatrix} Z \quad (6.11)$$

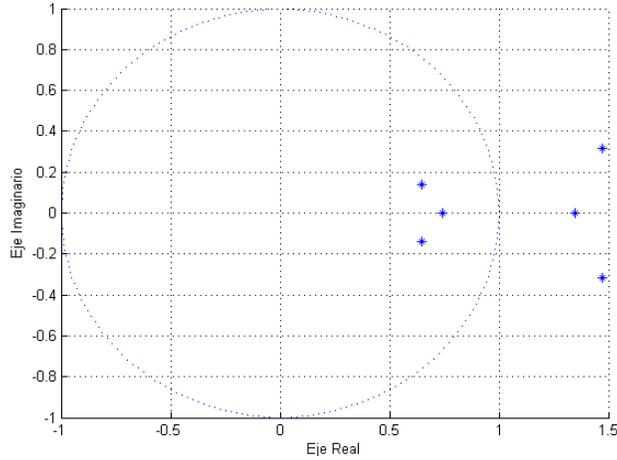


Figura 6.9: Distribución de los valores propios bajo el complemento de Schur

donde  $\mathbf{I}_n, \mathbf{O}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son una matriz identidad y de ceros respectivamente, se propone

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

y el resto de los parámetros se definen en (4.24).

Se prosigue a encontrar  $Z(t_f)$ , donde  $t_f = \Omega_d^{-1}$ , considerando como condiciones iniciales

$$Z(0) = \mathbf{I}_6$$

En el caso del ejemplo,

$$Z(0.5) = \begin{bmatrix} 1.3499 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.3485 & 0.6809 & 0.0000 & -0.0211 & 0.1402 \\ -0.0000 & -0.0105 & 1.3835 & 0.0000 & -0.1149 & 0.5127 \\ 0.5075 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7408 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2537 & 0.0701 & 0.0000 & 0.7396 & 0.0105 \\ -0.0000 & -0.0574 & 0.1176 & 0.0000 & -0.3748 & 0.7683 \end{bmatrix}$$

Ahora se utiliza el complemento de Schur para ordenar los valores propios de  $Z(0.5)$  dentro del círculo unitario, Figura 6.9, y así recuperar el subespacio estable invariante del kernel de  $Z(0.5)$  para poder encontrar la condición inicial de (4.25),

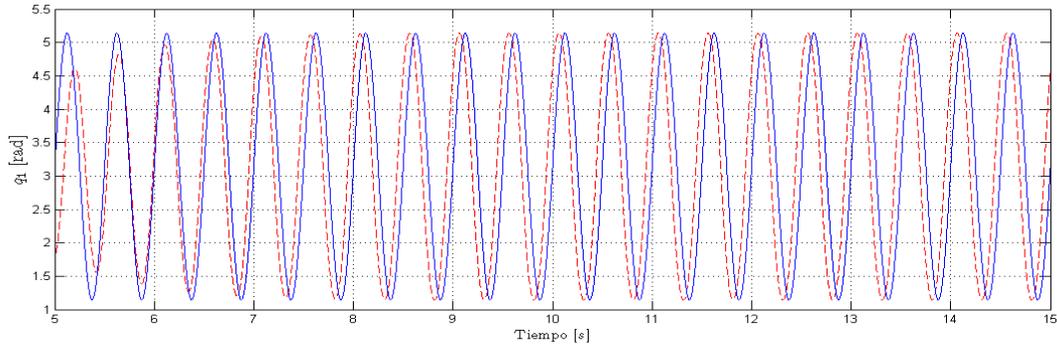


Figura 6.10: Oscilación deseada (azul) vs. oscilación diseñada (roja punteada)

$$Z_o = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.3507 & -0.3285 \\ -0.0000 & 0.1720 & 0.5297 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.8769 & 0.0146 \\ 0.0000 & 0.2802 & -0.7819 \end{bmatrix}$$

Esta condición inicial única permite generar una solución periódica para  $\mathbf{R}(t)$  la cual posibilita la implementación del controlador por restricciones holonómicas virtuales (4.26). En la Figura 6.10 se muestra el resultado de la implementación del controlador (4.26) para este ejemplo con condiciones iniciales

$$x_o = [\pi \ 0 \ 0.0 \ 0.0]'$$

Una característica importante de este controlador es que la salida que genera para  $q_1$  tiene una forma senoidal, Figura 6.10, lo cual puede ser un requisito imprescindible de diseño como se mencionó anteriormente. También se muestra en la Figura 6.12 que, como era de esperar, la señal de control es nuevamente periódica y de la misma frecuencia que la de la oscilación deseada. Finalmente la Tabla 6.3 exhibe diversos datos de simulación para validar la efectividad de este controlador.

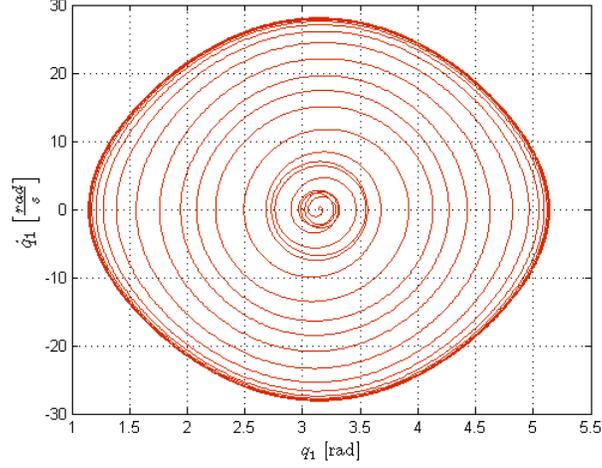


Figura 6.11: Ciclo límite circular generado con el control por restricciones holonómicas

$\mathcal{A}_d$ [rad]	$\Omega_d$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	$k$	$\mathcal{A}_s$ [rad]	$\Omega_s$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
0.2	$4\pi$	-272.8554	0.199997	$4.00\pi$
0.2	$8\pi$	-205.6517	0.1999997	$8.00\pi$
0.2	$12\pi$	-193.2066	0.200003	$12.0008\pi$
2	$4\pi$	-234.2444	1.9999	$4.0005\pi$
2	$8\pi$	-195.999	1.999958	$8.0089\pi$
2	$12\pi$	-188.9165	1.99979	$12.012\pi$

Tabla 6.3: Parámetros del controlador por restricciones holonómicas virtuales

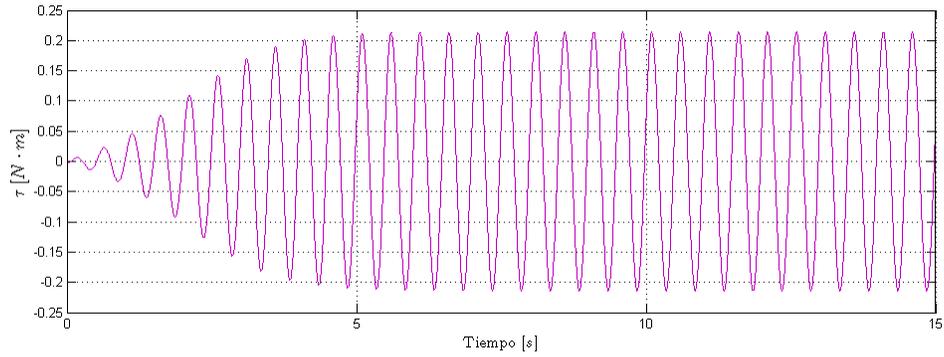


Figura 6.12: Señal de control periódica para el controlador por restricciones holonómicas para generar la oscilación deseada (6.3)