

Capítulo 3

Controlador de Estructuras Variables

3.1. Esquema General

El término “Sistema de Estructura Variable” (SEV) apareció por primera vez al final de los años 50’s. En esta época, el Dr. S. Emel’yanov publicó una propuesta novedosa de control donde las ganancias de retroalimentación podían tomar distintos valores constantes, dependiendo del estado del sistema. A través de una lógica de conmutación el sistema podía asumir el comportamiento de distintas estructuras lineales (de ahí el concepto de “estructuras variables”) y de esta manera adquiriría propiedades que no eran inherentes en cualquiera de las estructuras entre las cuales conmutaba, por ejemplo, estabilidad. A partir de este desarrollo teórico, el interés en esta área a generado nuevos resultados. Actualmente se puede encontrar, por ejemplo, una extensa literatura sobre el diseño de observadores basados en esta filosofía. Así también, se ha mostrado que es posible utilizar controladores discontinuos para generar oscilaciones periódicas [2]. Bajo esta motivación se abordará primero esta familia de controladores para cumplir con el objetivo general de inducir oscilaciones en la Rueda de Inercia.

Los controladores de estructura variable pueden provocar oscilaciones en un sistema a partir del contenido armónico de un relevador, el cual se puede describir por la función discontinua

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ 1 & \text{si } s > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Al introducir esta función en una ley de control, tomando en cuenta ciertos aspectos que se detallarán a continuación, se pueden provocar auto-oscilaciones de amplitud y frecuencia teóricamente arbitrarias. Cabe señalar la naturaleza no-lineal de (3.1). El

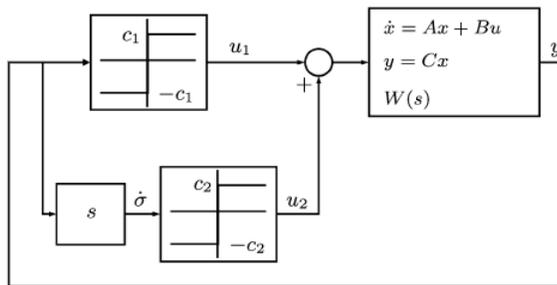


Figura 3.1: Esquema de control con dos relevadores para generar oscilaciones periódicas

fenómeno discontinuo es imposible de aproximar linealmente, lo cual motiva a reflexionar sobre las restricciones que impone trabajar únicamente con matemáticas lineales. Distintos dispositivos físicos, como transistores, y fenómenos cotidianos, como el proceso de caminar, tienen comportamientos que exigen el uso de control no-lineal y específicamente, de un control discontinuo.

La Figura 3.1 ilustra el esquema general de control que se implementará; éste consta de dos relevadores conectados en paralelo, los cuales dependen de la salida del sistema al que alimentan. El objetivo aquí es sintonizar las ganancias, c_1 y c_2 , de los relevadores para lograr las oscilaciones deseadas. Sin embargo, debido a que el análisis de este tipo de controladores se basa en la teoría de Función Descriptiva, no es posible trabajar con el modelo no-lineal (2.27) previamente obtenido para la Rueda de Inercia ya que, tal y como se muestra en la Figura 3.1, se requiere una planta lineal. Por lo tanto, el primer paso para poder implementar esta estrategia de control es obtener una linealización adecuada para el modelo (2.27).

3.2. Linealización por Retroalimentación

Como se mencionó previamente, la linealización del modelo de la Rueda de Inercia se puede llevar a cabo a través diversas metodologías. Para escoger un método de linealización adecuado es necesario considerar que la mayoría de las linealizaciones generan una *aproximación* de la verdadera dinámica del sistema que sólo es válida sobre una restringida región de operación. Cuando se linealizó el modelo de la rueda de inercia para determinar la estabilidad de los dos puntos de equilibrio el hecho de que se estaba utilizando una aproximación *local* era irrelevante; sólo se buscaba analizar la dinámica del sistema alrededor de esos dos puntos, no se requería conocer cómo se comportaba el sistema lejos de ellos, y por lo tanto en ese caso particular la linealización se justifica. Sin embargo, ahora se requiere generar oscilaciones de amplitud arbitraria en la totalidad del espacio de estados (por lo menos teóricamente), lo que descarta el uso de herramientas locales. Esto impone una fuerte restricción sobre la linealización

requerida: su validez debe ser *global*. Es aquí entonces donde se debe emplear el concepto de linealización por retroalimentación ya que éste representa una posible solución al problema de linealización global.

Primero, considérese el siguiente sistema no-lineal SISO de grado relativo ρ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones lo suficientemente suaves, es decir, con todas sus derivadas requeridas continuas, sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Este sistema se define como *linealizable por retroalimentación de estados* [6], o linealizable entrada-estado, si existe un difeomorfismo $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $D_z = T(D)$ contenga el origen y el cambio de variables

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ \hline h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1}h(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \hline \xi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

transforme el sistema (3.2) a la forma

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (3.4a)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_C \xi + \mathbf{B}_C \gamma(x) [u - \alpha(x)] \quad (3.4b)$$

$$y = \mathbf{C}_C \xi \quad (3.4c)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^\rho$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}$, el par $(\mathbf{A}_C, \mathbf{B}_C)$ es controlable, $(\mathbf{A}_C, \mathbf{B}_C, \mathbf{C}_C)$ es la representación en forma canónica de una cadena de ρ integradores dadas las identidades

$$\begin{aligned} f_0(\eta, \xi) &= \frac{\partial \eta}{\partial x} f(x)|_{x=T^{-1}(z)} \\ \gamma(x) &= L_g L_f^{\rho-1} h(x) \\ \alpha(x) &= -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \end{aligned}$$

para toda $x \in D$. La nueva estructura, (3.4), se conoce como forma normal y descompone al sistema en una parte externa ξ y una parte interna η . La idea posterior es eliminar las no-linealidades $\alpha(x)$ y $\gamma(x)$ de (3.4b) por medio de una retroalimentación que establece el control

$$u = \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)v$$

y de esta forma (3.4b) se obliga a asumir la dinámica lineal

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_C \xi + \mathbf{B}_C v$$

La ventaja adquirida es que ahora se pueden utilizar herramientas de la teoría de control de sistemas lineales para lograr que (3.4b) se comporte de la manera deseada, manipulando la ubicación de los polos de este nuevo sistema a través del control v . El punto importante es que las no-linealidades del sistema no se están aproximando, sino que se están cancelando por medio del control u . Mas aun, como el difeomorfismo (3.3) se define para toda $x \in D$, la linealización de (3.2) se sostiene en la totalidad del dominio D .

Por otro lado, un análisis de (3.4) permite ver que cuando $\xi = 0$ su estabilidad se puede ver comprometida por la dinámica interna (o dinámica cero)

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \tag{3.5}$$

aún a pesar de un exitoso control de (3.4b). La razón de esta problemática reside en que, *una vez que se linealiza el sistema*, (3.4b) ya no depende de x y la dinámica (3.4a), que se relacionaba con ξ a través de x , deja de estar acoplada a (3.4b) y por ende también al control v . Consecuentemente, (3.5) no es controlable a través de v . Para sistemas de fase mínima ($\rho = n$), la dimensión de la dinámica cero es nula y en este caso basta con un diseño apropiado de (3.4b) para controlar la dinámica completa del sistema. Sin embargo, para sistemas de fase no-mínima ($\rho < n$) es un requisito a priori que la dinámica cero sea estable, de lo contrario se tendrán problemas inevitables de inestabilidad.

Bajo las consideraciones anteriores, se prosigue a linealizar por retroalimentación de estados la dinámica no-lineal de la rueda de inercia. El punto de partida es buscar un difeomorfismo que transforme (2.21), o equivalentemente (2.22)-(2.23), a la forma (3.4b)-(3.4c), de tal manera que se elimine la dinámica cero. Dicho de otra manera, se busca un mapeo que lleve (2.21) a una estructura de fase mínima. Sin embargo, se puede probar que dicha transformación no existe para la Rueda de Inercia [Apéndice A], lo que es equivalente a decir que el sistema (2.21) es de fase no-mínima. Considerando el hecho de que es imposible eliminar la dinámica cero de la Rueda de Inercia, el nuevo objetivo entonces es minimizar la dimensión de esta dinámica indeseada para disminuir las probabilidades de inestabilidad en (3.4a).

Recientemente se han logrado aportaciones teóricas que permiten encontrar una dinámica cero de dimensión lo más pequeña posible para ciertos tipos de sistemas mecánicos. En el caso particular de sistemas mecánicos simples¹ con un grado de subactuación en su variable cíclica y que no conservan su momento de inercia respecto a ésta, [7] presenta la formulación de un conjunto de salidas para generar un *sistema de fase mínima*

¹Un sistema se define como *simple* si su energía cinética es cuadrática en las velocidades y su energía potencial depende únicamente de las coordenadas generalizadas.

con una *dinámica cero exponencialmente estable de dimensión unitaria*. Estos resultados se pueden aplicar directamente a la Rueda de Inercia ya que pertenece a esta clase de mecanismos: tiene un grado de subactuación ($N = 2$ grados de libertad con $N - 1 = 1$ actuadores independientes de la variable cíclica q_1), es simple (debido a (2.9), (2.13)) y no conserva su momento angular respecto a q_1 (la dinámica se desenvuelve sobre un plano vertical y por lo tanto interviene la gravedad). Al aplicar los resultados de [7] se puede resolver el problema de reducir la dimensión de la dinámica cero de la Rueda de Inercia, ya que ésta será igual a uno, lo cual representa un resultado fundamental para el diseño de este controlador.

Como primer paso para implementar el algoritmo de [7] se requiere reescribir (2.22)-(2.23) en la forma matricial

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B\tau$$

donde $B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \end{bmatrix}^T$. Tomado $F(q, \dot{q}) \triangleq C(q, \dot{q})\dot{q} + G$, la dinámica de la rueda de inercia queda descrita por

$$\begin{aligned} D_{1,1}\ddot{q}_1 + D_{1,2}\ddot{q}_2 + F_1 &= 0 \\ D_{2,1}\ddot{q}_1 + D_{2,2}\ddot{q}_2 + F_2 &= \tau \end{aligned} \iff \begin{aligned} J_1\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 + h\text{sen}(q_1) &= 0 \\ J_2\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 &= \tau \end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\text{sen}(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir de esta transformación se puede definir entonces

$$\begin{aligned} \bar{D} &= D_{2,2} - \frac{D_{2,1}D_{1,2}}{D_{1,1}} = J_2 - J_1^{-1}J_2^2 \\ \bar{F} &= F_2 - \frac{D_{2,1}F_1}{D_{1,1}} = -J_1^{-1}J_2h\text{sen}(q_1) \\ R &= -\frac{F_1}{D_{1,1}} = -J_1^{-1}h\text{sen}(q_1) \end{aligned}$$

con el propósito de establecer la ley de retroalimentación

$$\begin{aligned} \tau &= \bar{D}v + \bar{F} \\ &= J_2(1 - J_1^{-1}J_2)v - J_1^{-1}J_2h\text{sen}(q_1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

que permite llevar el sistema (2.22)-(2.23) a su *forma normal*. Esta estructura particular se obtiene primero despejando \ddot{q}_1 de (2.22),

$$\ddot{q}_1 = -J_1^{-1}h\text{sen}(q_1) - J_1^{-1}J_2\ddot{q}_2 \quad (3.7)$$

y luego sustituyendo (3.6), (3.7) en (2.23) para obtener

$$\begin{aligned} J_2 \left(-J_1^{-1}J_2\ddot{q}_2 - J_1^{-1}h\text{sen}(q_1) \right) + J_2\ddot{q}_2 &= J_2 \left(1 - J_1^{-1}J_2 \right) v - J_1^{-1}J_2h\text{sen}(q_1) \\ J_2\ddot{q}_2 \left(-J_1^{-1}J_2 + 1 \right) &= J_2v \left(-J_1^{-1}J_2 + 1 \right) \\ v &= \ddot{q}_2 \end{aligned}$$

El sistema resultante de esta primera transformación,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -J_1^{-1}h\text{sen}(q_1) - J_1^{-1}J_2\ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 &= v \end{aligned}$$

es la forma normal de (2.22)-(2.23). Sin embargo esta forma no permite un diseño claro de un controlador; se requiere llegar a una estructura conformada por una cadena de integradores, de tal manera que (3.4) se satisfaga. Para esto se necesita definir la variable

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^N D_{0,i}\dot{q}_i \\ &= J_1\dot{q}_1 + J_2\dot{q}_2 \end{aligned}$$

la cual representa el momento generalizado conjugado respecto a q_1 . Derivando a σ respecto al tiempo

$$\dot{\sigma} = J_1\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2$$

e igualando con (2.22) se obtiene

$$\dot{\sigma} = -h\text{sen}(q_1) \quad (3.8)$$

Ahora es posible, a partir de (3.8), integrar (3.7) respecto al tiempo para obtener *la forma normal modificada*,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -h\text{sen}(q_1) \\ \dot{q}_1 &= J_1^{-1}\sigma - J_1^{-1}J_2\dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 &= v \end{aligned} \quad (3.9)$$

Una vez que se obtiene la forma normal modificada se debe buscar una función

$$p_1 : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$$

donde \mathcal{O} es un conjunto abierto, de tal manera que se pueda definir un difeomorfismo para mapear de (q_1, q_2) hacia (p_1, q_2) . Para el punto de equilibrio $(q_1^*, q_2^*) = (\pi, 0)$ se puede definir

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1 - q_1^* + \int_{q_2^*}^{q_2} \frac{D_{1,2}}{D_{1,1}} d\delta \\ &= q_1 - \pi + \int_0^{q_2} J_1^{-1} J_2 d\delta \\ &= q_1 - \pi + J_1^{-1} J_2 q_2 \end{aligned}$$

y a su derivada como

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\sigma}{D_{1,1}(q_2)} \\ &= J_1^{-1} \sigma \end{aligned}$$

con el objetivo de construir la salida

$$\begin{aligned} y = \zeta &= K p_1 + \sigma \\ &= K (q_1 - \pi + J_1^{-1} J_2 q_2) + J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

la cual se puede demostrar produce un sistema exponencialmente de fase mínima para una constante $K \in \mathbb{R}$. Para esto, se calculan las derivadas de la salida propuesta (3.10),

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= K \dot{p}_1 + \dot{\sigma} \\ &= K J_1^{-1} \sigma - h \text{sen}(q_1) \\ \ddot{\zeta} &= K J_1^{-1} \dot{\sigma} - \frac{d}{dt} (h \text{sen}(q_1)) \\ &= -K J_1^{-1} h \text{sen}(q_1) - h \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ &= -K J_1^{-1} h \text{sen}(q_1) - h \cos(q_1) (J_1^{-1} \sigma - J_1^{-1} J_2 \dot{q}_2) \\ \ddot{\zeta} &= -K J_1^{-1} h \frac{d}{dt} (\text{sen}(q_1)) - h \frac{d}{dt} (\cos(q_1)) (\dot{q}_1) - h \cos(q_1) (J_1^{-1} \dot{\sigma} - J_1^{-1} J_2 \ddot{q}_2) \\ &= -K J_1^{-1} h \cos(q_1) \dot{q}_1 + h \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 (\dot{q}_1) - h \cos(q_1) (J_1^{-1} \dot{\sigma} - J_1^{-1} J_2 \ddot{q}_2) \\ &= f_1(q_1, \dot{q}_1) + f_2(q_1) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} f_2(q_1) &= J_1^{-1} J_2 h \cos(q_1) \\ f_1(q_1, \dot{q}_1) &= J_1^{-1} h \cos(q_1) (h \text{sen}(q_1) - K \dot{q}_1) + h \text{sen}(q_1) \dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se puede observar que la señal de control v aparece hasta la tercera derivada (3.11) de la salida ζ , (3.10); esto quiere decir que el grado relativo del sistema es $\rho = 3$, y entonces se puede calcular la dimensión de la dinámica cero del sistema como

$$\begin{aligned}\dim(\dot{\eta}) &= \dim(f_\mu(x, \tau)) - \rho \\ &= 4 - 3 = 1\end{aligned}$$

demostrando así que la salida (3.10) produce una dinámica cero unidimensional.

Finalmente, sólo resta definir un control v que linealice el sistema (3.9). Si se cumple que la función $f_2(q_1)$ definida por (3.12) no es singular alrededor del punto de equilibrio $q_1^* = \pi$ entonces se puede proponer el control

$$v = f_2^{-1}(q_1) \left[u - a_0 \zeta - a_1 \dot{\zeta} - a_2 \ddot{\zeta} - f_1(q_1, \dot{q}_1) \right]$$

donde a_0, a_1, a_2 son constantes positivas, talque el modelo de la rueda de inercia quede linealizado por retroalimentación en términos de los estados

$$x_{lr} = \left[\zeta \quad \dot{\zeta} \quad \ddot{\zeta} \quad p_1 \right]^T$$

con la forma lineal clásica:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{lr} &= \mathbf{A}x_{lr} + \mathbf{B}u \\ y_{lr} &= \mathbf{C}x_{lr}\end{aligned}$$

que para el caso de la rueda de inercia sostiene $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$. Por lo tanto, el sistema linealizado por retroalimentación de estados queda como

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \dot{\zeta} \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & 0 \\ J_1^{-1} & 0 & 0 & -K J_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \zeta \\ p_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_{lr}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Logrado el objetivo de linealización se puede ahora utilizar un controlador discontinuo para diseñar una solución periódica para la salida $y(t)$ que permita flexibilidad en los parámetros, tanto de amplitud como de frecuencia, de dicha salida.

3.3. El Controlador de Dos Relevadores

3.3.1. Función Descriptiva

El controlador *two-relay*, o de dos relevadores, se define como

$$u = -c_1 \operatorname{sgn}(y) - c_2 \operatorname{sgn}(\dot{y})\tag{3.14}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Se puede observar que este control depende directamente de la salida $y(t)$ y de su respectiva derivada $\dot{y}(t)$, así como de los dos escalares c_1, c_2 . Debido a que la salida $y(t)$ y su derivada $\dot{y}(t)$ quedaron definidas a partir de la linealización exacta parcial, quedan entonces como parámetros libres de diseño las constantes c_1, c_2 . El propósito ahora es encontrar los valores de estos dos escalares de tal manera que la función escalar de salida $y(t)$ genere trayectorias periódicas con frecuencia Ω y amplitud \mathcal{A} deseadas, es decir su busca lograr que

$$y(t) = \mathcal{A} \text{sen}(\Omega t + \Phi) \quad (3.15)$$

considerando un posible desfaseamiento $\Phi \in \mathbb{R}$. Para cumplir este objetivo se emplearán resultados que se desprenden de la metodología de Función Descriptiva (DF por sus siglas en inglés). Esta herramienta matemática permite hacer un análisis en frecuencia de ciertos sistemas no-lineales a través del cual es posible determinar la existencia de ciclos límites. El concepto fundamental del cual se parte es que, a diferencia de sistemas lineales, una entrada senoidal de frecuencia ω y amplitud A no necesariamente produce una salida con frecuencia ω . Sin embargo, se puede intuir que la frecuencia de la salida del sistema no lineal debería de tener una relación con la frecuencia ω de la entrada y es precisamente esta dependencia la que expresa la Función Descriptiva:

$$\begin{aligned} N(A, \omega) &= \frac{p \exp(j(\omega t + \phi))}{A \exp(j\omega t)} = \frac{p}{A} e^{j\phi} \\ &= \frac{1}{A} (b_1 + ja_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

con $p = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, donde $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de Fourier de la *primera* componente armónica de la respuesta en frecuencia de la no-linealidad bajo consideración ante una entrada senoidal de amplitud A y frecuencia ω . Es cierto que la expansión *exacta* de cualquier señal periódica, con periodo $T = 2\pi$, es una suma *infinita* de armónicos,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \text{sen}(n\omega x)] \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(n\omega t) dt, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Sin embargo, se puede *aproximar* la serie de Fourier (3.17) de un relevador considerando únicamente la armónica fundamental ($n = 1$) y la componente de directa a_0 a partir de la siguiente suposición,

Suposición 3.1:

La dinámica de la planta lineal (3.13) filtra satisfactoriamente todas las frecuencias mayores a la frecuencia fundamental, ω .

Adicionalmente, considerando la función de un relevador general con un escalamiento arbitrario $M \in \mathbb{R}$,

$$M \operatorname{sgn}(\cdot) \quad (3.18)$$

se cumple que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \operatorname{sgn}(t) dt = 0 \quad (3.19)$$

Por lo tanto, a partir de Suposición 3.1 y (3.19), se sostiene que (3.16) es una *aproximación* válida de la respuesta en frecuencia de un relevador.

En el caso específico del controlador de dos relevadores (3.14), se ha calculado la función descriptiva como [2]:

$$N(A, \omega) = \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt + j \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \operatorname{cos}(\omega t) dt$$

Esta formulación ciertamente resulta tediosa, pero se pueden utilizar propiedades del sistema para simplificar el cálculo involucrado. Específicamente, se puede aprovechar la estructura lineal de (3.13) para calcular la función descriptiva de la señal de control no-lineal, que tiene dos términos, haciendo uso del principio de superposición; es decir, se calculará la función descriptiva de cada relevador por separado y posteriormente se sumarán sus efectos individuales para calcular la función descriptiva del controlador (3.14). Considerando la simetría impar de la función (3.18) el coeficiente

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \operatorname{sgn}(t) \operatorname{cos}(\omega t) d(\omega t) = 0 \quad (3.20)$$

para los dos términos del control, ya que ambos son no-linealidades impares. Entonces en el caso de ambos relevadores la salida sólo involucra un coeficiente de Fourier, específicamente:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \operatorname{sgn}(t) \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} M \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} M \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.20), (3.21) en (3.16) se obtiene la Función Descriptiva de un relevador,

$$\begin{aligned} N_{\text{relay}}(A, M) &= \frac{1}{A} \left(\frac{4}{\pi} M + 0j \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{M}{A} \end{aligned}$$

De este último resultado se desprende una conclusión importante: *la Función Descriptiva de un relevador no depende de la frecuencia de la señal de excitación*. La única forma de modificar la respuesta en frecuencia de un relevador es manipulando la amplitud A de la señal de excitación y/o el factor de escalamiento M de dicho relevador.

Ahora ya es posible analizar los dos relevadores que comprenden este controlador. En el caso del primer relevador,

$$-c_1 \text{sgn}(y) \tag{3.22}$$

su señal de excitación es la señal $y(t)$, la cual tiene una amplitud A_1 y una frecuencia ω_1 asociadas. Por otro lado, el objetivo de control es lograr que esta señal $y(t)$, la salida de la planta lineal (3.13), se comporte de manera oscilatoria conforme a (3.15). Esto lleva a la siguiente relación,

$$A_1 = \mathcal{A}$$

Además, como el factor de escalamiento M_1 del primer relevador es

$$M_1 = c_1$$

entonces la Función Descriptiva del primer relevador (3.22) es

$$N_1 = \frac{4}{\pi} \frac{M_1}{A_1} = \frac{4}{\pi} \frac{c_1}{\mathcal{A}}$$

Semejantemente, para el segundo relevador

$$-c_2 \text{sgn}(\dot{y}) \tag{3.23}$$

su factor de escalamiento es

$$M_2 = c_2$$

y su señal de excitación es la derivada de la salida periódica deseada (3.15),

$$\frac{dy}{dt} = \Omega \mathcal{A} \cos(\Omega t + \Phi)$$

de donde se desprende que

$$A_2 = \Omega \mathcal{A}$$

y por lo tanto la Función Descriptiva asociada al segundo relevador (3.23) es

$$N_2 = \frac{4 M_2}{\pi \Omega \mathcal{A}} = \frac{4 c_2}{\pi A_2}$$

Adicionalmente se tiene que considerar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(s) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} &= s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) \end{aligned}$$

donde $y(0)$ es la condición inicial de $y(t)$ evaluada en $t = 0$ y $\mathcal{L}\{\cdot\}$ es la transformada de Laplace que mapea una relación en el dominio del tiempo hacia el dominio de la frecuencia compleja s . Para simplificar el análisis posterior se hace la siguiente consideración,

Suposición 3.2:

La condición inicial de la salida siempre es nula; esto es, $y(0) = 0$.

De esta manera se llega finalmente a la Función Descriptiva del controlador de dos relevadores,

$$\begin{aligned} N_u(\mathcal{A}) &= N_1 + sN_2 \\ &= \frac{4c_1}{\pi \mathcal{A}} + s \frac{4c_2}{\pi \Omega \mathcal{A}} \end{aligned}$$

la cual, debido al hecho que $s = j\omega$ en el análisis de frecuencia de oscilaciones, se reduce a

$$N_u(\mathcal{A}) = \frac{4}{\pi \mathcal{A}} (c_1 + jc_2) \tag{3.24}$$

3.3.2. Ajuste de los Parámetros del Controlador

Una vez definida la Función Descriptiva (3.24) del controlador de dos relevadores (3.14) se prosigue a determinar los valores de los parámetros c_1, c_2 que garanticen la existencia de un ciclo límite para la salida $y(t)$ de tal manera que (3.15) se cumpla. Para esto se utilizará el Método de Balance Armónico, el cual dicta la existencia de un ciclo límite si se cumple la ecuación de balance armónico,

$$W(j\Omega) = \frac{-1}{N_u(\mathcal{A})} \tag{3.25}$$

donde $W(s)$ es la gráfica de Nyquist que se desprende de la función de transferencia del sistema linealizado (3.13),

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.26)$$

Esta ecuación se cumple en el punto donde la función $-N^{-1}(\mathcal{A})$ interseca la traza de Nyquist (3.26) evaluada en la frecuencia Ω . Se puede encontrar un valor aproximado de los parámetros c_1 y c_2 tomando en cuenta que la función $-N^{-1}(\mathcal{A})$ representa una línea recta cuya pendiente *depende proporcionalmente* de la taza c_2/c_1 ya que si ésta se fija entonces (3.25) se determina unívocamente. En resumen, el procedimiento para ajustar c_1 y c_2 es el siguiente:

- a) Identificar el cuadrante en la traza de Nyquist donde se ubica la frecuencia deseada, i.e., Ω puede pertenecer a cualquiera de estos conjuntos:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{\Omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\Omega)\} > 0, \text{Im}\{W(j\Omega)\} \geq 0\} \\ Q_2 &= \{\Omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\Omega)\} \leq 0, \text{Im}\{W(j\Omega)\} \geq 0\} \\ Q_3 &= \{\Omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\Omega)\} \leq 0, \text{Im}\{W(j\Omega)\} < 0\} \\ Q_4 &= \{\Omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\Omega)\} > 0, \text{Im}\{W(j\Omega)\} < 0\} \end{aligned}$$

- b) Se fija la taza

$$\xi = \frac{c_2}{c_1} = -\frac{\text{Im}\{W(j\Omega)\}}{\text{Re}\{W(j\Omega)\}}$$

- c) Se utiliza el concepto de fasores para representar al control (3.14) como la suma de dos vectores gitorios. Se sustituye (3.24) en (3.25) para obtener

$$\begin{aligned} W(j\Omega) &= -\frac{\pi\mathcal{A}}{4(c_1 + jc_2)} \\ |W(j\Omega)| &= \mathcal{A}\frac{\pi}{4|c_1 + jc_2|} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Finalmente se despeja \mathcal{A} de (3.27) y se obtiene que la amplitud \mathcal{A} y la frecuencia Ω de las oscilaciones deseadas se relacionan con los parámetros c_1 y c_2 a través de

$$\mathcal{A} = \frac{4}{\pi} \left| W(j\Omega) \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \right|$$

Por lo tanto, se pueden calcular los valores de c_1, c_2 como:

$$\begin{aligned} c_1 &= \begin{cases} \frac{\pi}{4} \frac{\mathcal{A}}{|W(j\Omega)|} (\sqrt{1 + \xi^2})^{-1} & \text{si } \Omega \in Q_2 \cup Q_3 \\ -\frac{\pi}{4} \frac{\mathcal{A}}{|W(j\Omega)|} (\sqrt{1 + \xi^2})^{-1} & \text{en cualquier otra región} \end{cases} \\ c_2 &= \xi \cdot c_1 \end{aligned}$$