Apéndices

Apéndice A

Linealización Exacta: Condiciones Suficientes y Necesarias

Para establecer la existencia del difeomorfismo (3.3) que lleve el sistema (2.21) a la forma normal (3.4) se deben satisfacer las siguientes dos condiciones suficientes y necesarias [6, Teorema 13.2]

- $$\text{rank}\left(\left[g(x), ad_f g(x), \ldots, ad_f^{n-1} g(x)\right]\right) = n \quad \forall x \in D_o. \tag{A.1}$$
- La distribución
$$\Delta\left(x\right) = \text{span}\left\{g(x), ad_f g(x), \ldots, ad_f^{n-2} g(x)\right\} \tag{A.2}$$
es involutiva sobre el espacio D_o.

Para verificar la condición (A.1), primero se desprende de (2.27) que $n = 4$ y

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \begin{bmatrix} x_2 & -78.0291\text{sen}\left(x_1\right) & x_4 & 78.0291\text{sen}\left(x_1\right) \end{bmatrix}^T, \\ g\left(x\right) &= \begin{bmatrix} 0 & -219.9180 & 0 & 40298.4720 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Calculando los paréntesis de Lie requeridos,

$$\begin{aligned} ad_f g = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -78.0291\cos\left(x_1\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 78.0291\cos\left(x_1\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -219.9180 \\ 0 \\ 40298.4720 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 219.9180 \\ 0 \\ -40298.4720 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$ad_f^2 g = [f, ad_f g] = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -78.0291\cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 78.0291\cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 219.9180 \\ 0 \\ -40298.4720 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 17160\cos(x_1) \\ 0 \\ -17160\cos(x_1) \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$$ad_f^3 g = \begin{bmatrix} 0 \\ -17160\mathrm{sen}(x_1)\, x_2 \\ 0 \\ 17160\mathrm{sen}(x_1)\, x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17160\cos(x_1) \\ 0 \\ -17160\cos(x_1) \\ 0 \end{bmatrix} = 1760 \begin{bmatrix} -\cos(x_1) \\ -\mathrm{sen}(x_1)\, x_2 \\ \cos(x_1) \\ \mathrm{sen}(x_1)\, x_2 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Agrupando $g(x)$, (A.3), (A.4) y (A.5) se obtiene que

$$\mathrm{rank}\left(1760 \begin{bmatrix} 0 & 0.0128 & 0 & -\cos(x_1) \\ -0.0128 & 0 & \cos(x_1) & -\mathrm{sen}(x_1)\, x_2 \\ 0 & -2.3484 & 0 & \cos(x_1) \\ 2.3484 & 0 & -\cos(x_1) & \mathrm{sen}(x_1)\, x_2 \end{bmatrix} \right) = 4$$

con lo que se cumple (A.1). Posteriormente se define la distribución

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \mathrm{span}\left\{ \left[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \right] \right\} \\ &= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0128 \\ 0 \\ 2.3484 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0128 \\ 0 \\ -2.3484 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(x_1) \\ 0 \\ -\cos(x_1) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

y se verifica si

$$\dim\Big(\Delta(x)\Big) = n - 1 = 3$$

Sin embargo, $\Delta(x)$ no es una distribución involutiva ya que

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}\left[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, [\Delta_2, \Delta_3] \right] &= \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0.0128 & 0 & 0.0128\mathrm{sen}(x_1) \\ -0.0128 & 0 & \cos(x_1) & 0 \\ 0 & -2.3484 & 0 & -0.0128\mathrm{sen}(x_1) \\ 2.3484 & 0 & -\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \\ &= 4 \neq 3 \end{aligned}$$

con lo que se concluye que (A.2) no se satisface. Por lo tanto, no existe un difeomorfismo que permita linealizar exactamente al sistema (2.27).

Apéndice B

Código Programable Auxiliar

CÓDIGO PARA CALCULAR LAS GANANCIAS c_1, c_2 *DEL CONTROLADOR DE DOS RELEVADORES LINEALIZANDO CON EL JACOBIANO*

```
%parámetros del artículo
J1=4.59695e-3;
J2=2.495e-5;
h=0.35481;
fs2=0;
fs1=0;

%punto de equilibrio
q1_eq=pi;

%matrices de estados
A=[0,1,0,0;h*cos(q1_eq)/(J2-J1),-fs1/(J1-J2),0,fs2/(J1-J2);0,0,0,1;
h*cos(q1_eq)/(J1-J2) fs1/(J1-J2) 0 -fs2/(J2-J2^2*J1^-1)];
B=[0;1/(J2-J1);0;1/(J2-J2^2*J1^-1)]*0.0049431;
C=[1 0 0 0];
sys=ss(A,B,C,0);

polos=[-15,-9,-2,-4];K=place(A,B,polos);

res = 0.001;
w=[0:res:100];
t=[-1:0.001:1];
sys=ss(A-B*K,B,C,0);
figure
[re,im]=nyquist(sys,w);
```

```
nyquist(sys,w)
v=[1.2*min(re) 1.2*max(re) 1.2*min(im) 1.2*max(im)];
axis(v);
frec = 4*pi;
A1 = 0.2;
ohm = floor(frec/res) + 1;
im1=im(ohm);
re1=re(ohm);
xi=-im1/re1;
mag1=abs(re1 + 1i*im1);
if (re1>0)
    c1=-(pi/4)*(A1/mag1)*((sqrt(1+xi^2))^-1)
else
    c1=(pi/4)*(A1/mag1)*((sqrt(1+xi^2))^-1)
end
c2=xi*c1
hold on
plot(t, -(c2/c1)*t,'red');
negNinv=(pi*A1/4)*((-c1+1i*c2)/(c1^2+c2^2))
```

CÓDIGO PARA CALCULAR LAS GANANCIAS c_1, c_2 DEL CONTROLADOR DE DOS RELEVADORES UTILIZANDO LA LINEALIZACIÓN POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS

```
%parámetros del fabricante
J1 = 4.569882400731e-3;
J2 = 2.495255578125e-5;
h = 0.036169947240676*9.81;

%constantes de linealización
K=1e-4;
a0=350;
a1=155;
a2=22;

A=[0 1 0 0;0 0 1 0;-a0 -a1 -a2 0;1/J1 0 0 -K/J1];
B=[0 0 1 0]';
C=[1 0 0 0];
res = input('Resolución para el barrido de frecuencia: ');
w=[0:res:100];
```

```
t=[-1:0.001:1];
sys=ss(A,B,C,0);
[num,den]=ss2tf(A,B,C,0);
figure
[re,im]=nyquist(sys,w);
plot(re(:),im(:));
nyquist(sys,w)
v=[-2 5 -3 3]*1e-3;
axis(v);
frec = input('Frecuencia[rad/s]: ');
Ar=input('Amplitud de q_1[rad]: ');;
A1=((Ar*h)/frec)*(sqrt(1-K/(J1^2*frec^2+K^2)))^-1
ohm = floor(frec/res) + 1;
im1=im(ohm);
re1=re(ohm);
xi1=-im1/re1
mag1=abs(re1 + 1i*im1)
if (re1>0)
    c1_1=-(pi/4)*(A1/mag1)*((sqrt(1+xi1^2))^-1)
else
    c1_1=(pi/4)*(A1/mag1)*((sqrt(1+xi1^2))^-1)
end
c2_1=xi1*c1_1
hold on
plot(t, -(c2_1/c1_1)*t,'red');
negNinv=(pi*A1/4)*((-c1_1+1i*c2_1)/(c1_1^2+c2_1^2))
```

CÓDIGO PARA CALCULAR LA GANANCIA k DEL CONTROLADOR POR RESTRICCIOONES HOLONÓMICAS VIRTUALES

```
J1=4.5721e-3; J2=2.495e-5; h=0.35481;
q1bar=pi;
A=0.2;
Omega = 2; %en Hertz

T=1/Omega;
F=@(x)(abs(cos(x)-cos(q1bar-A))).^(-0.5);
C = quadgk(F,q1bar-A,q1bar+A,'RelTol',3e-14);
k=(-((T^2*h)/(2*C^2))-J1)/J2
```