



# **UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

***“ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS TÉRMICOS EN MATERIALES  
COMPUESTOS LAMINADOS”***

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

PRESENTA:

**JUAN JOSÉ DELFÍN VÁZQUEZ**

TUTORES

**DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS – FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DR. MARIO ACOSTA FLORES – FACULTAD DE INGENIERÍA**

MÉXICO, D. F. JUNIO 2014

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. José Roberto Zenit Camacho

Secretario: DR. Francisco Cuenca Jiménez

Vocal: DR. Jorge Carrera Bolaños

1 er. Suplente: DR. Mario Acosta Flores

2 d o. Suplente: DR. Eusebio Jiménez López

Lugar donde se realizó la tesis:

Posgrado en Ingeniería, Cd. Universitaria, México, D.F.

**TUTOR DE TESIS:**

**COTUTOR DE TESIS:**

NOMBRE

NOMBRE

DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS

DR. MARIO ACOSTA FLORES

-----  
**FIRMA**

-----  
**FIRMA**

## **DEDICATORIA ESPECIAL**

ESTE TRABAJO LO DEDICO DE FORMA ESPECIAL A MI AMIGO Y ASESOR, AL DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS, QUIEN CON SUS CONSEJOS, SABIDURÍA Y EXPERIENCIA, AH SIDO UN APOYO FUNDAMENTAL EN MI FORMACIÓN, ESTIMADO DR. CARRERA GRACIAS. A MI AMIGO EL DR. MARIO ACOSTA FLORES, QUIEN CON SUS CONOCIMIENTOS Y EXPERIENCIA COMO EXPERIMENTALISTA HA DIRIGIDO UNA PARTE FUNDAMENTAL DE ESTE TRABAJO. MARIO ERES UN DIGNO HEREDERO DEL DR. FERRER, MUCHAS GRACIAS.

A LOS DOS, MUCHAS GRACIAS DESDE LO MÁS PROFUNDO DE MI SER, EL APOYO QUE ME HAN BRINDADO ES AHORA CORONADO CON ESTE TRABAJO.

## **AGRADECIMIENTOS**

UN AGRADECIMIENTO ESPECIAL AL CREADOR, A DIOS, POR LA VIDA, POR MI FAMILIA, POR IMPULSARME A LLEGAR A ESTA IMPORTANTE META, GRACIAS DIOS, POR AYUDARME A CULMINAR ESTE DOCTORADO.

UN AGRADECIMIENTO ESPECIAL A MI ESPOSA LUPITA, QUIEN ADEMÁS DE COMPAÑERA, HA SIDO MI COPILOTO EN ESTE VUELO EMPRENDIDO. GRACIAS LUPITA POR TU PACIENCIA, RESPETO Y AMOR.

A LOS QUE HAN SIDO MIS MOTORES DE IMPULSO EN LA VIDA, A MIS HIJOS JUAN JOSÉ Y ELIZABETH, HAN SIDO UNA BENDICIÓN DE DIOS PARA NOSOTROS, GRACIAS A MIS NIETECITAS FERNANDITA Y CRISTINITA, A MI NIETO IAN SANTIAGO E IKER ALBERTO, GRACIAS A CRISTINA MI NUERA Y A SANTIAGO MI YERNO POR IMPULSARME.

A MI MADRE ROGELIA Y A MI PADRE LORENZO QUE NO ESTÁN EN ESTE PLANO, DONDE ESTÉN GRACIAS POR SER SU HIJO.

A MIS HERMANOS ROSA, GREGORIO, MARTINA, SILVIA, FELICITAS, ALEJANDRO, A SUS HERMOSAS FAMILIAS GRACIAS.

UN AGRADECIMIENTO MUY ESPECIAL A MI GRAN AMIGO EL DR. EUSEBIO JIMÉNEZ, ÉL ME IMPULSO A EMPRENDER ESTE CAMINO, PERO NO ME HA DEJADO DE LA MANO. MUCHAS GRACIAS EUSEBIO DE TODO CORAZÓN.

GRACIAS AL DR. RICARDO CHICUREL, POR SU INVALUABLE AYUDA.

GRACIAS A LUCY Y A SOCORRITO POR ESA AMISTAD Y ESE APOYO INCONDICIONAL, MI AGRADECIMIENTO Y RESPETO.

GRACIAS AL DR. LUIS FERRER, QUIEN FUE MI PRIMER TUTOR DE DOCTORADO Y CON QUIEN PASÉ RATOS AGRADABLES, DONDE QUIERA QUE ESTÉ ESTIMADO AMIGO MUCHAS GRACIAS.

GRACIAS A MI ALMA MATER LA UNAM, HA SIDO PARA MÍ UN PRIVILEGIO SER PARTE DE ELLA.

GRACIAS A ITESCA, A SUS DIRIGENTES, QUE HAN SIDO UN GRAN APOYO PARA ESTE SERVIDOR. MUY AGRADECIDO.

GRACIAS AL HERMANO FERNANDO DE ULSA NOROESTE, POR PERMITIRME DESARROLLAR PARTE DEL TRABAJO EXPERIMENTAL.

AL DR. JOSÉ ROBERTO ZENIT, POR SUS CONSEJOS Y APOYO.

GRACIAS AL DR. FRANCISCO CUENCA, POR SU AMISTAD Y APOYO.

# ÍNDICE

DEDICATORIA ESPECIAL .....	iii
AGRADECIMIENTOS .....	iv
ÍNDICE .....	v
GLOSARIO DE TÉRMINOS .....	viii
SIMBOLOGÍA .....	xi
RESUMEN .....	xiv
ABSTRACT .....	xv
INTRODUCCIÓN GENERAL .....	xvi
I.1 Antecedentes .....	xviii
I.1.1 Introducción .....	xviii
I.1.2 Materiales compuestos laminados .....	xix
I.1.3 Esfuerzos térmicos en materiales compuestos .....	xxi
I.1.3.1 Coeficientes de Expansión Térmica (CET) .....	xxii
I.1.3.2 Esfuerzos térmicos globales .....	xxiii
I.1.3.4 Esfuerzos térmicos interlaminares o locales .....	xxvi
I.1.4 Modelos utilizados para el análisis de esfuerzos térmicos .....	xxix
I.1.5 Extensómetros eléctricos para análisis experimental de esfuerzos--	xxxi
I.1.5.1 Técnicas experimentales generales para medir deformaciones ---	xxxi
I.1.5.2 Técnicas experimentales para medir deformaciones térmicas ----	xxxiii
I.1.5.3 Usos de técnica de extensometría eléctrica resistencia variable ---	xxxiii
I.2 El motivo de la investigación .....	xxxv
I.2.1 Conclusiones del estado del arte .....	xxxv
I.2.2 Motivos de la investigación .....	xxxvi
I.3 Preguntas de investigación .....	xxxvii
I.4 Objetivos .....	xxxvii
I.4.1 Objetivo general .....	xxxviii

I.4.2	Objetivos particulares -----	xxxviii
I.5	Estructura del trabajo de tesis -----	xxxviii
CAPÍTULO I	DEFINICIÓN DEL PROBLEMA -----	1
1.1	Definición del problema -----	1
1.2	Justificación -----	1
1.3	Restricciones -----	2
1.4	Hipótesis general -----	3
CAPÍTULO II	MARCO TEÓRICO -----	4
2.1	Modelo de la teoría de la elasticidad lineal -----	4
2.1.1	Introducción al modelo de la elasticidad -----	4
2.1.2	Modelo de esfuerzos -----	5
2.1.3	El modelo de deformaciones -----	6
2.1.4	Modelo constitutivo de la elasticidad -----	9
2.2	El principio de superposición -----	12
2.3	Teoría de láminas -----	17
2.3.1	Mecánica de láminas simétricas -----	18
2.3	Teoría de esfuerzos térmicos -----	20
2.3.1	Introducción -----	20
2.3.1	Deformación térmica -----	21
2.3.2	Deformaciones totales en un cuerpo cúbico -----	22
2.3.3	Deformaciones totales en un cuerpo plano (deformación plana) ----	22
2.3.4	Esfuerzos planos -----	22
2.3.5	Esfuerzos planos en materiales compuestos laminados simétricos	25
CAPÍTULO III	DESARROLLO DE MODELOS -----	29
3.1	Modelo de elasticidad lineal -----	30
3.2	Modelo constitutivo lineal de esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminados simétricos -----	30
3.2.1	Restricciones del modelo -----	31
3.2.2	Esfuerzos globales, problema térmico -----	33

3.2.3 Esfuerzos térmicos interlaminares -----	34
3.2.4 Aplicación del principio de superposición -----	38
3.2.5 Modelo general resultante -----	40
CAPÍTULO IV ECUACIONES PARA OBTENER ESFUERZOS TÉRMICOS	
Y CET EN COMPUESTOS c1 y c2 -----	42
4.1 Introducción -----	42
4.2 Ecuaciones para determinar esfuerzos térmicos -----	43
4.2.1 Para determinar esfuerzos térmicos interlaminares -----	43
4.2.2 Para determinar esfuerzos térmicos globales -----	46
4.2.3 Resumen ecuaciones de esfuerzos térmicos compuestos c1 y c2 ----	48
4.3 Ecuaciones para obtener CET de las capas en compuestos c1 y c2 ----	49
4.3.1 Para determinar $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ mediante esfuerzos térmicos en x -----	49
4.3.2 Para obtener $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ mediante esfuerzos térmicos en y -----	53
CAPÍTULO V ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS TÉRMICOS EN	
MATERIALES COMPUESTOS LAMINADOS METÁLICOS SIMÉTRICOS -----	
5.1 Introducción -----	54
5.2 Justificación de las pruebas experimentales -----	54
5.3 Pruebas experimentales en los compuestos c1 y c2 -----	56
5.3.1 Fabricación e instrumentación de probetas -----	56
5.3.3 Pruebas experimentales en especímenes -----	61
5.3.2 Pruebas experimentales en especímenes -----	61
5.3.2.1 Pruebas de tensión para determinar las constantes elásticas -----	61
5.3.2.2 Pruebas Térmicas para determinar CET de probetas individuales--	62
5.3.2.3 Pruebas térmicas para obtener deformaciones en compuestos	
c1 y c2 -----	63
5.3.2.4 Correcciones de deformaciones medidas en compuestos -----	64
5.4 Resultados de las pruebas experimentales en compuestos c1 y c2 ----	71
5.4.1 Cálculo de los CET $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ de las capas por método inverso -----	71
5.4.1.1 Resultados finales de los CET $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ promedio de las capas -----	74

5.4.1.2	Análisis de los Coeficientes de Expansión Térmica resultantes -----	74
5.4.2	Cálculo de los esfuerzos térmicos interlaminares y globales -----	75
5.4.2.1	Esfuerzos térmicos interlaminares y globales en compuesto c1 ----	77
5.4.2.2	Esfuerzos térmicos interlaminares y globales en compuesto c2 -----	78
5.4.3	Cálculo de los CET y esfuerzos térmicos interlaminares en las capas, mediante el software Maple 13 -----	79
5.4.3.1	Comparación de CET Maple 13, con CET experimentales -----	81
5.4.4	Cálculo de esfuerzos térmicos globales por software Maple 13 -----	82
5.5	Análisis de resultados -----	85
5.5.1	Respecto a los resultados para validación del modelo -----	85
5.5.2	Respecto aplicación del modelo en cálculo de esfuerzos térmicos -	85
5.5.3	Respecto a las figuras -----	87
CAPÍTULO VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES -----		88
6.1	Conclusiones -----	88
6.2	Recomendaciones -----	90
REFERENCIAS -----		91
APÉNDICE A CONCEPTOS TEÓRICOS -----		97
ANEXO B SISTEMA DE ECUACIONES PARA LA OBTENCIÓN DE LOS CET, PARA VALIDACIÓN DEL MODELO (MÉTODO INVERSO) -----		105
ANEXO C PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN, INSTRUMENTACIÓN DE PROBETAS Y PRUEBA DE INSTALACIÓN DE EXTENSÓMETROS -----		127
ANEXO D RESULTADO DE LAS PRUEBAS EXPERIMENTALES EN MATERIALES COMPUESTOS LAMINADOS METÁLICOS SIMÉTRICOS -----		153



## Glosario de términos

<b>Capa o lámina</b>	Componente de un material compuesto laminado.
<b>Capa isotrópica</b>	Capa de material homogéneo, continuo, con mismas propiedades en todas direcciones.
<b>Compuesto laminado</b>	Material constituido por un conjunto de capas.
<b>compuesto laminado Simétrico</b>	Laminado constituido por un grupo de capas que considera misma configuración en cada mitad de la lámina.
<b>Constantes efectivas o promedio</b>	Son el resultado de promediar las constantes de todas las capas que constituyen un material compuesto laminado.
<b>Ejes de simetría del laminado</b>	Son los ejes de simetría del laminado compuesto
<b>Esfuerzo térmico global</b>	Es el esfuerzo promedio que resulta de integrar los esfuerzos térmicos locales (longitudinales y transversales) de cada capa a través del espesor del compuesto laminado.
<b>Esfuerzo térmico global o promedio</b>	Es el esfuerzo promedio que resulta de integrar los esfuerzos térmicos locales (longitudinales y transversales) de cada capa a través del espesor del compuesto laminado.
<b>Esfuerzo térmico interlaminar</b>	Es el esfuerzo promedio que resulta de la integración de los esfuerzos a través de una capa o pliegue.
<b>Esfuerzo longitudinal</b>	Esfuerzo que tiene la misma dirección del eje longitudinal.
<b>Esfuerzo transversal</b>	Esfuerzo con dirección perpendicular al eje longitudinal.
<b>Estado de deformaciones homogéneas</b>	Es aquel estado de deformaciones que es igual para todos

<b>Estado de esfuerzos homogéneo</b>	Es aquel estado de esfuerzos que es igual para todos los puntos que constituyen el cuerpo en análisis.
<b>Interface</b>	Capa física que se forma entre los componentes de los materiales compuestos.
<b>Laminado isotrópico</b>	Es un compuesto que tiene propiedades elásticas promedio iguales en todas direcciones.
<b>Material compuesto</b>	Es un material que está formado de dos o más componentes en una escala macroscópica, distinguibles fácilmente y separables mecánicamente.
<b>Material compuesto laminado</b>	Es un material compuesto por dos o más capas o pliegues unidos por un medio.
<b>Modelo global</b>	Es el modelo analítico que considera un material compuesto como homogéneo.
<b>Modelo local</b>	Es el modelo analítico que considera sólo una capa homogénea, en un material compuesto.

## Simbología

$\sigma_{Gx}$ y $\sigma_{Gy}$	Esfuerzos térmicos globales longitudinal (en x) y transversal(en y)
$\sigma_{xAL}$ y $\sigma_{yAL}$	Esfuerzos térmicos interlaminares longitudinal y transversal respectivamente en una capa de aluminio.
$\sigma_{xAI}$ y $\sigma_{yAI}$	Esfuerzos térmicos interlaminares longitudinal y transversal respectivamente en una capa de acero inoxidable.
$\alpha_{AL}$	Coeficiente de expansión térmica de la capa de aluminio.
$\alpha_{AI}$	Coeficiente de expansión térmica capa de acero inoxidable.
$\varepsilon_T$	Deformación térmica.
$\sigma_{Lx}$ y $\sigma_{Ly}$	Esfuerzos interlaminares longitudinal y transversal.
$E_G$	Módulo de elasticidad o de Young global o del laminado.
$E_L$	Módulo de elasticidad o de Young local o de una capa.
$E_x$ y $E_y$	Módulo de elasticidad longitudinal y transversal.
$\nu_G$	Relación de Poisson global o del laminado.
$\nu_L$	Relación de Poisson local o de una capa del laminado.
$\nu_x$ y $\nu_y$	Relaciones de Poisson longitudinal y transversal.
$\alpha_G$	Coeficiente de expansión térmica promedio de la lámina.
$\alpha_L$	Coeficiente de expansión térmica local o de una capa del laminado.
$\alpha_n$	Coeficiente de expansión térmica del material de cada capa.
$\varepsilon_1^0$ y $\varepsilon_2^0$	Deformaciones homogéneas en las direcciones 1 y 2.
$A_{ij}$	Constantes equivalentes.
$A_T$	Constante equivalente térmica.
$h$	Es el espesor total del laminado.

$h_i$	Es espesor total de una capa.
$Q_{ij}$	Constantes de rigidez en dirección de los ejes principales 1 y 2 o en dirección de los ejes de simetría x, y.
$Q_T$	Constante de rigidez térmica.
$m$ y $n$	Son los cosenos directores.
$\eta_i$	Fracciones volumétricas.
$\sigma_{1i}$ y $\sigma_{2i}$	Esfuerzos interlaminares en las capas en direcciones 1 y 2.
$\sigma_{xn}$ y $\sigma_{yn}$	Son los esfuerzos térmicos interlaminares de la capa en las direcciones x, y.
$\varepsilon_x^0$ y $\varepsilon_y^0$	Son las deformaciones homogéneas longitudinal y transversal.
$\sigma_{xALc1}$ y $\sigma_{yALc1}$	Esfuerzos térmicos interlaminares longitudinal y transversal en una capa de aluminio del compuesto 1.
$\sigma_{xAIc1}$ y $\sigma_{yAIc1}$	Esfuerzos térmicos interlaminares longitudinal y transversal en una capa de acero inoxidable del compuesto 1.
$\sigma_{Gxc1}$ y $\sigma_{Gyc1}$	Esfuerzos térmicos globales longitudinal y transversal en el compuesto 1.
$E_{AL}$ y $E_{AI}$	Módulo de elasticidad del aluminio y del acero inoxidable.
$\nu_{AL}$ y $\nu_{AI}$	Relaciones de Poisson del aluminio y acero inoxidable.
$\varepsilon_{xc1}^0$ y $\varepsilon_{yc1}^0$	Deformaciones homogéneas longitudinal y transversal medidas en las fronteras del compuesto 1.
$\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$	Coeficiente de expansión térmica del aluminio y del acero inoxidable respectivamente.
$\Delta T_{c1}$	Cambio de temperatura en el compuesto 1.
$c1$	Material compuesto por dos capas de aluminio (AL) y una capa de acero inoxidable (AI), (AL-AI-AL).
$c2$	Material compuesto por dos capas de acero inoxidable (AI) y una capa de aluminio (AL), (AI-AL-AI).
$\eta_{ALc1}$	Fracción volumétrica de las capas de aluminio compuesto 1.

$\eta_{A1c1}$	Fracción volumétrica de las capas de acero inoxidable compuesto 1.
$\alpha_S$	Coefficiente de expansión térmica del material de prueba.
$\alpha_R$	Coefficiente de expansión térmica del material de referencia.
$\alpha_{SPxc1}$	Coefficiente de expansión térmica promedio longitudinal en el compuesto c1.
$\alpha_{SPyc1}$	Coefficiente de expansión térmica promedio transversal en el compuesto c1.
$\alpha_{SPc1}$	Coefficiente de expansión térmica promedio del compuesto c1.
$\alpha_{2024T3}$	Coefficiente de expansión térmica promedio del aluminio 2024-T3.
$\alpha_{espc1}$ y $\alpha_{espc2}$	Son los coeficientes de expansión térmica esperados en los compuestos c1 y c2
$\varepsilon_{T/O(G/S)}$	Deformación térmica medida por la galga en el material de prueba.
$\varepsilon_{T/O(G/R)}$	Deformación térmica medida por la galga en el material de referencia.
$\varepsilon_{Cxc1}$	Deformación corregida longitudinal del compuesto c1.
$\varepsilon_{Cyc1}$	Deformación corregida transversal del compuesto c1.

## Resumen

Debido a la importancia que tienen los materiales compuestos en la industria, en especial la aeronáutica, aeroespacial y automotriz, es necesario conocer el comportamiento mecánico, térmico, etc., en las diferentes condiciones de operación. En este trabajo de tesis se propone un modelo lineal simple, el cual es usado para analizar y determinar esfuerzos térmicos globales e interlaminares en materiales compuestos laminados metálicos simétricos. Para generar el modelo, se usó la teoría de la elasticidad lineal, la teoría clásica de láminas, la teoría de los esfuerzos térmicos y el principio de superposición. El modelo fue validado usando la técnica de extensometría eléctrica. Para realizar las pruebas mecánicas y térmicas, fueron usados e instrumentados seis especímenes individuales y dos materiales compuestos laminados metálicos simétricos uno c1 (AL-AI-AL) y otro c2 (AI-AL-AI). Para obtener las constantes elásticas y los Coeficientes de Expansión Térmica (CET) relacionados con las capas individuales, se llevó a cabo un proceso experimental. Los materiales compuestos estudiados fueron sometidos a cargas térmicas graduales y se midieron las deformaciones en las fronteras, mismas que fueron corregidas usando un procedimiento basado en recomendaciones del fabricante. Para validar el modelo matemático se usó un método inverso, el cual consistió en generar un sistema de ecuaciones en donde los CET fueron variables desconocidas.

Se calcularon los CET de cada capa y los resultados se compararon con los CET experimentales y los de la base de datos MatWeb, encontrándose que las diferencias no exceden el 10%. Estos resultados permitieron concluir que el proceso de validación del modelo fue satisfactorio, por lo que dicho modelo es consistente y confiable. Una vez validado el modelo, se procedió a determinar los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en los compuestos c1 y c2, y se compararon con los límites elásticos del aluminio y del acero inoxidable existentes en la literatura, para determinar su relevancia en ambos compuestos, encontrándose que al campo de temperatura al que se sometieron los compuestos estudiados en esta tesis, se encontró que los esfuerzos térmicos interlaminares generados no representan riesgo. Finalmente mediante el Software Maple 13 y utilizando las ecuaciones del modelo matemático se determinaron los CET de las capas, los esfuerzos térmicos interlaminares y globales, encontrándose que los CET resultantes en aluminio son del orden del 10% respecto los CET experimentales.

**Palabras clave:** Materiales compuestos, modelo matemático, esfuerzos térmicos interlaminares, esfuerzos térmicos globales, coeficientes de expansión térmica.

## Abstract

By the importance of composite materials in the industry especially aircraft, aerospace and automotive, it's necessary to know the mechanical and thermal behavior, so on, in different operating conditions. In this thesis work is proposed a linear simple model, which is used to analyze and determine interlaminar and global thermal stress in symmetric metallic laminated composites. The linear elasticity theory, the classical theory of plates, the theory of the thermal stress and the superposition principle were used to generate the model. The theoretical model was validated using the technique of electrical strain gauge. To perform the mechanical and thermal tests, were used and implemented six individual specimens and two symmetric laminated metallic composites one called c1 (AL-AL-AL) and another c2 (AL-AL-AL). To it obtain the elastic constant and thermal expansion coefficient (CET) related with the individual layers were obtained experimentally. The composites materials studied were subjected to gradual thermal loads and strains were measured at the borders, which were later corrected using the proposed procedure based to manufacturer's recommendation. To validate the mathematical model was used a reverse method, which consisted of generate an equations systems where the CET were the unknown variables.

The CET of each layers were calculates and the results were compared with the experimental and the data base MatWeb CET, finding that the differences do not exceed 10 %. These results allowed concluding that the process of model validation was successful, so it was determined that the model is consistent, and reliable. Once validated the model, it's proceeded to determine the interlaminar and global thermal stresses in composites c1 and c2, then were compared with the elastic limits of aluminum and stainless steel materials available in the literature, to determine its relevance in both composites, it was found that temperature field at which the composites studied were subjected in this thesis, the interlaminar thermal stress generated no pose risks. Finally, by mean the Maple 13 Software, and using the mathematics model equations, were determined the layers CET and the interlaminar and global thermal stresses, finding that the CET obtained in the aluminum layer are close to 10% respect to experimental CET.

**Key words:** Composites materials, mathematical model, interlaminar thermal stress, global thermal stress, thermal expansion coefficient

# INTRODUCCIÓN GENERAL

En muchas industrias, específicamente en la industria aeronáutica y automotriz, se utilizan una gran variedad de materiales metálicos y no metálicos, pero el uso de materiales compuestos en las últimas décadas ha aumentado en forma considerable desplazando principalmente a los materiales ferrosos que se caracterizan por su alto peso. De acuerdo con [1], el uso de materiales compuestos en la fabricación de aviones se ha incrementado. En las Figuras 1.1 y 1.2, se observan los porcentajes correspondientes a los materiales utilizados en la fabricación de aviones de Airbus.

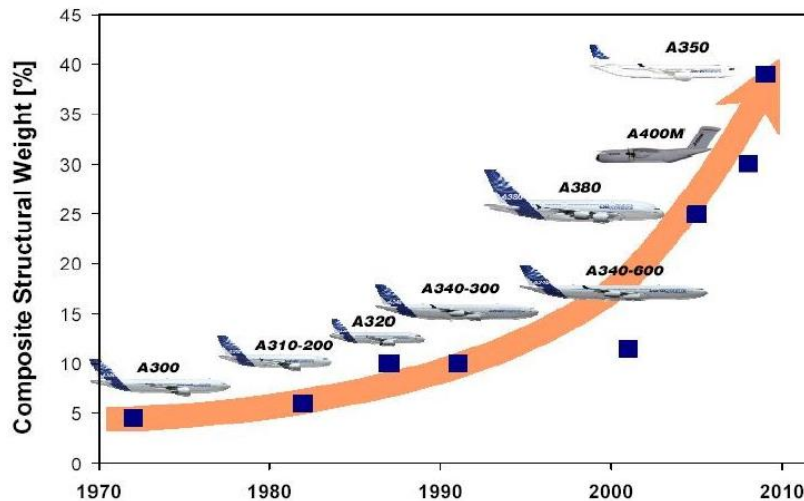


Figura 1.1. Evolución de los compuestos en la industria aeronáutica

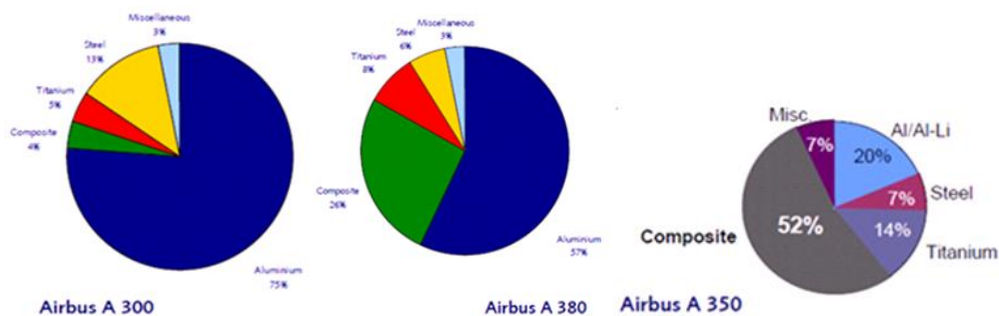


Figura 1.2. Porcentaje de materiales en la construcción de tres modelos de Airbus



Debido a la importancia de los materiales compuestos, el conocimiento de las propiedades mecánicas, térmicas, eléctricas, etc., así como también, de las cargas a que son sometidos, y de las deformaciones producidas, es primordial. Con el conocimiento de las propiedades, las cargas y las deformaciones, mediante los modelos matemáticos, se obtienen los esfuerzos que se producen en la superficie y en el interior.

Cuando un compuesto se somete a cargas mecánicas, térmicas, o la combinación de ambas, se generan esfuerzos termo-mecánicos a nivel global (en todo el compuesto), y a nivel local (entre las capas), los cuáles dependiendo de su magnitud pueden llegar a ser catastróficos. Es por eso que han sido de gran interés para los investigadores que trabajan sobre estos temas.

Recientemente en un trabajo desarrollado en [2], se analizaron experimentalmente esfuerzos globales e interlaminares en materiales compuestos laminados simétricos. Este tipo de análisis no se habían realizado con profundidad. También se desarrolló un modelo lineal simple para analizar experimentalmente los esfuerzos mecánicos en dichos materiales. Para ello, se utilizó la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable (strain gage). Fueron determinados en forma experimental esfuerzos globales y locales, y de esta forma, se pudo demostrar que el modelo propuesto en [2] es eficaz.

Para conocer el comportamiento mecánico y térmico de dichos materiales, es fundamental el análisis experimental de esfuerzos, pues la información que de él se obtiene, a partir de las mediciones experimentales son verídicas. Para llevar a cabo un eficiente análisis experimental de esfuerzos se requiere:

1. Conocimiento amplio del comportamiento mecánico y térmico de los materiales.
2. El dominio de la técnica experimental que se va a utilizar.

El presente trabajo de tesis doctoral trata el tema del análisis esfuerzos térmicos globales e interlaminares en compuestos laminados metálicos simétricos, libres de sollicitaciones mecánicas, pero sometidos estos a incrementos de temperatura superiores a la ambiente. Para efectuar el análisis térmico en estos materiales, es necesario generar modelos matemáticos que permitan determinar parámetros como los Coeficientes de Expansión Térmica (CET) y temperaturas, entre otros. Estos modelos deben ser validados tanto numéricamente como experimentalmente con la finalidad de demostrar su consistencia y representatividad. En este trabajo doctoral se usaron los resultados descritos en [2] y la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable (strain gage) para generar y validar un modelo que sirve para el análisis y cálculo de esfuerzos térmicos globales e interlaminares en compuestos laminados metálicos simétricos. Para validar el modelo se usará un método inverso que consiste en considerar como incógnita una de las constantes ya sea elástica o térmica [2].

En la siguiente sección se describirán los antecedentes relacionados con los esfuerzos térmicos globales e interlaminares, así como de los modelos que se están utilizando para el análisis de esfuerzos térmicos.

## **I.1 Antecedentes**

Se presenta en esta sección una revisión cronológica de trabajos de investigación publicados relacionados con el tema de la presente tesis doctoral. Se inicia con la descripción de los materiales compuestos laminados, después de coeficientes de expansión térmica, esfuerzos térmicos globales, esfuerzos térmicos interlaminares, modelos matemáticos usados para el análisis y, finalmente, con los métodos experimentales utilizados para analizar esfuerzos térmicos.

### **I.1.1 Introducción**

Desde el punto de vista mecánico la ventaja de utilizar materiales compuestos en vez de materiales metálicos son muchas, entre ellas, tienen menor densidad,

mayor resistencia a la corrosión, resistencia similar a los aceros, aluminio, etc. Por estas razones se ha estado desarrollando importante investigación al respecto. Los campos relacionados con el estudio de los materiales compuestos de mayor interés son:

1. El análisis de esfuerzos.
2. La obtención de propiedades mecánicas, térmicas, eléctricas, etc.
3. Los modelos matemáticos.
4. Los métodos computacionales.
5. Los métodos experimentales.

Estos últimos son fundamentales para el análisis de esfuerzos. De los métodos experimentales que son utilizados se pueden mencionar por ejemplo, la extensometría eléctrica de resistencia variable (Strain Gages), la fotoelasticidad, la Interferometría de Moiré, entre otros, pero la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable es de las más utilizadas para el análisis de esfuerzos [3].

La ventaja de los métodos experimentales respecto a los modelos matemáticos y métodos computacionales, es que, los datos obtenidos de ellos, son más verídicos pues involucran parámetros que llevan integrados el efecto de variables no controladas como defectos estructurales, defectos de pegado, no uniformidad de capas, etc., que no pueden ser incluidos en forma adecuada en los modelos matemáticos y los métodos computacionales [2]. Es por eso que, los métodos experimentales son apropiados para análisis de esfuerzos, para validar modelos, calibrar y evaluar la eficiencia de los métodos computacionales.

### **I.1.2 Materiales compuestos laminados**

Un material compuesto es aquel que está formado por dos o más componentes en una escala macroscópica, distinguibles físicamente y separables mecánicamente y con propiedades superiores a las de sus constituyentes (sinergia) [2].

La importancia de estos sobre todo en la Aeronáutica, es que se utilizan para reducir el peso, el consumo de combustible, la potencia y los gastos de operación. Estos materiales han ido desplazando a las aleaciones metálicas sobre todo a las ferrosas, pues algunos compuestos como los de fibra de carbono pueden soportar esfuerzos similares a los del acero, y su relación de peso respecto a estos es de 5/1 hasta de 2/1 respecto al aluminio [4].

Existen varias clasificaciones de los materiales compuestos, una de estas se observa en la Figura I.3, [5].

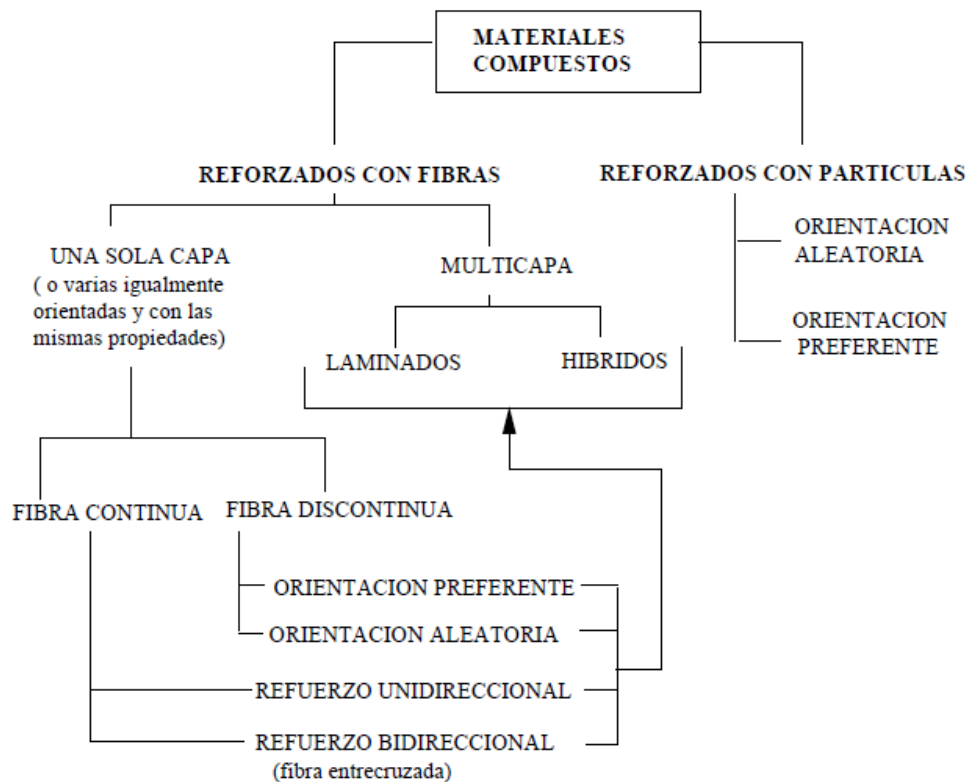
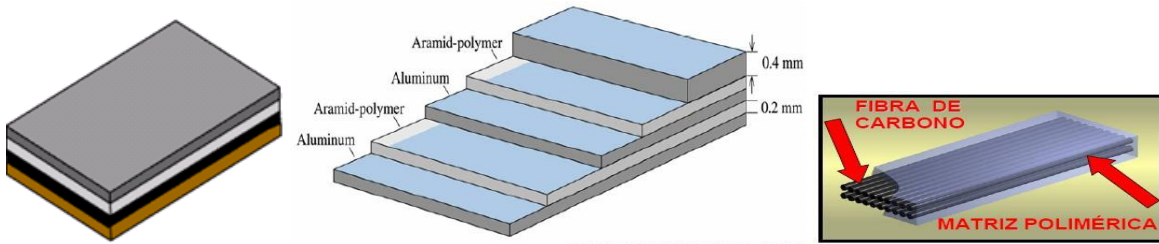


Figura I.3. Clasificación de los materiales compuestos

**Los Materiales Compuestos laminados (MCL)**, son materiales sándwich constituidos por capas delgadas unidas por un medio [6]. Los constituyentes pueden ser capas metálicas-metálicas, metálicas-no metálicas, metálicas-cerámicas, cerámicas-no metálicas, metálicas-cerámicas-no metálicas, no metálicas-no metálicas y pueden tener distintas configuraciones, (ver Figura I.4).



a) Laminado no metálico    b) Laminado metálico-no metálico    c) Laminado de fibra de carbono

Figura I.4. Materiales Compuestos Laminados

Estos compuestos pueden ser simétricos y no simétricos. Los compuestos laminados simétricos son aquellos constituidos por capas delgadas y que se considera que tiene la misma configuración en cada mitad de la lámina (ver Figura I.5) [2].



Figura I.5. Compuesto laminado metálico simétrico con capas isotrópicas

### I.1.3 Esfuerzos térmicos en materiales compuestos

A inicio de los años 60, por la necesidad de fabricar materiales ligeros y resistentes para los grandes programas aeroespaciales y de defensa, nacen los materiales compuestos [7], y nace también la investigación relacionada con el comportamiento mecánico, térmico, eléctrico, etc., de estos, siendo el pionero Nicholas J. Pagano; sus trabajos son usados en la actualidad por los analistas que participan en el diseño de estructuras de motores de cohetes, y en todos los campos de la industria donde se utilizan materiales compuestos [8]. Dentro de la investigación desarrollada por él, están los trabajos para determinar los esfuerzos que se producen en los materiales compuestos como consecuencia de la aplicación de cargas mecánicas o térmicas.

Las cargas térmicas en un material compuesto hacen que el material compuesto se dilate o expanda, es decir sufre una deformación térmica y, debido a que las capas que integran el compuesto tienen distinto Coeficiente de Expansión Térmica (CET), como consecuencia se originan los esfuerzos térmicos. La deformación térmica es el producto del aumento de temperatura que experimenta el material, por su coeficiente de expansión térmica.

Los esfuerzos térmicos dependen de los CET, del cambio de temperatura, de las constantes elásticas y de las restricciones impuestas en las fronteras del material compuesto, y pueden ser clasificados de la manera siguiente [2]:

- a) Esfuerzos térmicos globales
- b) Esfuerzos térmicos interlaminares

Los esfuerzos térmicos pueden ser definidos de la siguiente forma:

*El **esfuerzo térmico** es el esfuerzo que es inducido en un miembro estructural debido a un cambio de temperatura mientras el miembro está restringido [9].*

Para el análisis de esfuerzos los investigadores hacen uso de los modelos matemáticos, métodos computacionales y métodos experimentales. Los modelos pueden ser evaluados utilizando los métodos computacionales, los métodos experimentales, o ambos.

### **I.1.3.1 Coeficientes de Expansión Térmica (CET)**

En los materiales compuestos, los coeficientes de expansión térmica (CET), han sido determinados utilizando diversas herramientas experimentales y modelos matemáticos, por ejemplo, en 1968 [10], determinaron los CET en compuestos isotrópicos utilizando el principio de la energía, en 1970 [11], en forma teórica se determinaron las constantes elásticas, la conductividad térmica y los CET, de compuestos isotrópicos. También usando modelos de arreglos cuadrados y usando un dilatómetro en 1978 [12], se determinó el CET global, en un compuesto

unidireccional, con resultados muy parecidos a los de la literatura, en 1988 [13], se demostró que, en un *compuesto laminado simétrico*, la *expansión térmica lineal de cada lámina es invariante respecto a la orientación de la otra lámina*, y en 1989 [14], pudieron predecir los CET longitudinal y transversal en compuestos unidireccionales, mostrando consistencia con los datos experimentales existentes.

Algunos métodos experimentales específicos para determinar en forma simultánea el (CET),  $\alpha$  y los Módulos de Elasticidad E, son propuestos en [3]. En 1989 [15] se proporciona la teoría necesaria para obtener los CET utilizando la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable.

### **I.1.3.2 Esfuerzos térmicos globales**

El esfuerzo térmico global, es el esfuerzo térmico promedio que resulta de la integración de los esfuerzos térmicos locales (longitudinales y transversales) de cada capa a través de todo el espesor del laminado compuesto [2].

La investigación relacionada con los esfuerzos térmicos se ha llevado a cabo en forma paralela al desarrollo de los materiales compuestos, gran parte de los trabajos están relacionados con los esfuerzos térmicos globales, así por ejemplo, en 1968 [16] se evaluaron esfuerzos térmicos en la vecindad de partícula esférica incrustada en una matriz elástica en un flujo de calor estacionario, en 1979 [17] mediante una aproximación analítica similar a la teoría de juntas solapadas de Volkersen, se determinó la distribución de esfuerzos térmicos en el adhesivo que une las capas, en 1998 [18] se determinaron dichos esfuerzos usando FEM 3-D, en compuestos unidireccionales de fibra hexagonal.

En 2002 [19] se presentó una aproximación analítica para determinar esfuerzos y desplazamientos térmicos en condiciones de pandeo térmico a flujo de calor estable, en compuestos de aluminio y óxido de aluminio, en el mismo año en [20] se determinan los esfuerzos térmicos globales usando la ecuación de Navier para frontera plana en un cilindro hueco FMG (material funcionalmente clasificado),

asumiendo que la relación de Poisson y la temperatura varían en función del radio. También en 2002 [21] se analizan esfuerzos térmicos elasto-plásticos usando la teoría clásica de láminas en un laminado con matriz aluminio y fibras de acero simétrico con caras restringidas y temperatura uniforme, con un análisis similar se trabajó en 2004 [22] en un compuesto simétrico parecido al de [21], sólo que, el compuesto en contacto con dos placas calefactoras a temperaturas mayores a 550°C.

En 2005 [23] usando la aproximación multicapa, se determinaron desplazamientos y esfuerzos térmicos en cilindro (FMG) sometido a cargas termo-mecánicas, asumiendo propiedades homogéneas en cada capa, en 2008 [24] se desarrolló una aproximación basada en la teoría clásica de vigas para determinar esfuerzos térmicos en un material elástico lineal suponiendo una distribución lineal de la deformación en sección de cruce, y en 2009 [25] una nueva aproximación fue presentada y junto con la teoría clásica de láminas, fueron obtenidos estos esfuerzos en el plano y fuera del plano en placa laminada no simétrica. En 2008 [26] se midieron por termografía infrarroja en un compuesto reforzado, desplazamientos relacionados con pequeños cambios de temperatura debidos a cambios de carga, y utilizando el Análisis de Esfuerzos Termoelásticos (TSA), se determinaron los esfuerzos térmicos. En 2009 [27] se determina la distribución de esfuerzos térmicos en placas metálicas reforzadas con parche compuesto rectangular bajo la acción de cargas térmicas.

En 2011 [28] se desarrolló un proceso analítico utilizando las teorías de deformación cortante de alto orden, una función zig-zag y soluciones de Navier, para determinar las relaciones entre el esfuerzo térmico cortante transversal máximo  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ , y las coordenadas de espesor ( $z/h$ ) en un compuesto laminado de capas cruzadas restringido en un extremo, ese mismo año en [29] mediante el método del elemento finito (FEM), se hizo un análisis de esfuerzos térmicos en placas de circuitos impresos y mostraron que no sólo dependen de las diferencias en CET, sino que también, del contorno y del gradiente de temperatura en



dirección normal a la superficie. En 2012 [30] se propone una mejora para la teoría global local (GLT) que fue presentada en 1998 por Li y Lu, para obtener los esfuerzos térmicos cortantes, causantes de la delaminación en placas laminadas bajo cargas térmicas variando a través del espesor, la teoría fue evaluada comparándola con soluciones obtenidas en tres dimensiones.

En junio 2013 en [31] se presentan algunos resultados del modelado en dos dimensiones de problemas de esfuerzos térmicos en estructuras multicapa y conchas, se utilizó una teoría clásica refinada basada en Principio de Trabajo Virtual de Desplazamiento (PTVD) y teorías mixtas avanzadas basadas en el Teorema Variacional Mixto de Reissner (RMVT), las soluciones las comparan con resultados obtenidos por el Método de Ritz y Método del Elemento Finito, los resultados son parecidos. Finalmente en septiembre 2013 en [32], usando la teoría trigonométrica de deformación cortante, las ecuaciones y condiciones de frontera de la teoría de trabajo virtual, se obtienen esfuerzos cortantes térmicos, la teoría la validan comparando los resultados con los de la teoría clásica de placas y la teoría deformación cortante de primer orden. Los esfuerzos térmicos obtenidos son globales.

**Esfuerzos térmicos residuales.** Otra clase de esfuerzos que han sido investigados en forma global, son los esfuerzos térmicos residuales, trabajos relacionados con estos esfuerzos están, los llevados a cabo en 1992 por [33], donde mediante los parámetros Dundurs  $\alpha$  y  $\beta$ , examinaron la influencia de esfuerzos residuales en la propagación de grietas en un compuesto asumiendo fases elásticamente isotrópicas, en 2003 [34] se obtuvieron los componentes de esfuerzos residuales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ , en compuestos grafitados, en 2006 [35] se analizaron en compuestos laminados con fibras con distintas orientaciones, a temperatura cambiando en forma parabólica a lo largo del espesor. En 2007 [36] mediante el método de elemento finito multi-partícula (multi-particle finite element), se hizo un análisis de esfuerzos residuales globales en los bordes libres de un

compuesto laminado sometido a cargas térmicas y mecánicas combinadas, con este método se pueden predecir los esfuerzos interlaminares.

En 2011 [37] fueron determinados esfuerzos residuales usando el método del elemento finito y las relaciones teóricas básicas, en el dominio de una temperatura estacionaria para una estructura híbrida compuesta de fibra de carbón epoxi-metal. Finalmente en diciembre 2012 en [38], se evalúan esfuerzos residuales térmicos mediante una ecuación diferencial de cuarto orden en compuestos reforzados con fibra, entre otros.

#### **I.1.3.4 Esfuerzos térmicos interlaminares o locales**

Un esfuerzo interlaminar, es el esfuerzo térmico promedio que resulta de la integración de los esfuerzos térmicos a través de la capa o pliegue [2].

Los esfuerzos térmicos interlaminares, se han estudiado desde los años 70, por la necesidad de entender, cómo estos se generan internamente, en qué dirección actúan, y qué efectos tienen en el compuesto. El análisis de esfuerzos térmicos interlaminares en los materiales compuestos se ha direccionado a dos campos de trabajo:

- Esfuerzos térmicos interlaminares en borde libre
- Esfuerzos térmicos interlaminares a lo largo del espesor

##### **1) Esfuerzos térmicos interlaminares en borde libre**

Gran parte de los trabajos de investigación se ha concentrado en el análisis de esfuerzos térmicos interlaminares en borde libre, algunos de los trabajos relacionados con este campo se presentan a continuación:

Los primeros trabajos fueron los llevados a cabo en 1977 [39], donde se determinó la concentración de esfuerzos térmicos interlaminares en libre borde en

compuestos laminados con fibra sometidos a temperatura uniforme y utilizando la técnica de solución de Matriz Dispersa Avanzada; en 1998 [40], mediante el análisis del método del elemento finito tridimensional, fueron determinados esfuerzos en borde libre en compuestos laminados grafito-epoxi de distintas configuraciones para predecir el inicio de grieta, los resultados que obtuvo no fueron acertados pues consideró condiciones simétricas, las grietas iniciaron en el interior y en borde libre también.

En 2001 [41] se analizaron esfuerzos térmicos transitorios en una grieta en el borde libre de un material FMG, en 2003 [42] se determinaron esfuerzos térmicos en borde libre en cilindros FMG sometidos a calor intenso libres de tracción, luego en 2004 [43] son analizados en un compuesto laminado bimetálico de capas cruzadas sometido a tensión y temperatura asumiendo que se comporta como viga. En 2005 [44] fueron analizados esfuerzos térmicos interlaminares en borde libre en placas laminadas con número arbitrario de capas cruzadas sometidas a tracción y/o cargas térmicas usando una ecuación de estado para laminados, estos, son comparados con soluciones numéricas existentes y demostraron que la teoría proporciona resultados satisfactorios.

En 2006 en [45], se determinaron esfuerzos térmicos interlaminares transversales bajo la acción de cargas térmicas cíclicas en borde libre en un compuesto CFRP, los resultados los comparan con los obtenidos por FEM en 3D, esto resalta el significado del efecto de borde libre en el agrietamiento del compuesto. En 2010 en [46], se propone una solución analítica para pronosticar esfuerzos y desplazamientos térmicos en compuestos laminados simétricos sometidos a tracción y/o cargas térmicas, para esto, utilizan la teoría de placas laminadas, los resultados revelan que a pesar de que existe una relación compleja entre los CET y las constantes elásticas los resultados de esfuerzos en borde libre son congruentes.

Finalmente en junio 2013 en [47], presentan una solución analítica basada en el método tridimensional extendido multi-paso de Kantorovich sometido a pandeo,

torsión y cargas térmicas, para determinar con seguridad esfuerzos térmicos tridimensionales en el interior y en las fronteras (borde libre), se obtienen también esfuerzos interlaminares y esfuerzos térmicos cortantes, los resultados obtenidos son comparados con resultados obtenidos por elemento finito ABAQUS, y fueron congruentes.

## **2) Esfuerzos térmicos interlaminares a lo largo del espesor**

Para el análisis de estos esfuerzos en los materiales compuestos sometidos a diferentes condiciones de cargas térmicas y termomecánicas, se han estado utilizando: modelos matemáticos, métodos computacionales y métodos experimentales. Por ejemplo en 1995 en [48], se presentó un método aproximado basado en una representación de la función admisible de esfuerzo, para investigar los esfuerzos térmicos interlaminares en un compuesto de placas laminadas sometidos a cargas termomecánicas combinadas, los resultados se compararon con resultados previos obtenidos por elemento finito, demostrándose que, el método de aproximación propuesto eficiente, rápido y confiable. En 1997 [49] en un laminado anisotrópico multicapa, mediante el método de campo variacional se determinaron esfuerzos interlaminares bajo cargas de temperatura uniforme y no uniforme, encontrando, que estos desaparecen en la intersección de la interface con el borde libre a medida que la temperatura aumenta.

En 2003 [50] haciendo uso de la teoría de la elasticidad en dos dimensiones, el teorema variacional de energía y considerando a cada capa como una viga, se estimaron los esfuerzos térmicos en las intercaras en compuestos de tabletas de circuitos microelectrónicos para predecir delaminación, en [23] usando la aproximación multicapa, se determinaron esfuerzos térmicos interlaminares en un cilíndrico FMG en estudio. En 2007 en [36], mediante el método de elemento finito multi-partícula (multi-particle finite element), analizaron esfuerzos térmicos globales de un compuesto laminado sometido a cargas térmicas y mecánicas combinadas, con el método pudieron obtener los esfuerzos interlaminares, en [27] usando una solución analítica y la serie de Fourier, se determinan los esfuerzos

térmicos interlaminares en una placa metálica con parche compuesto y, en [29] obtienen esfuerzos térmicos globales e interlaminares mediante el método del elemento finito (FEM).

En 2012 en [30], se presentó una mejora a la Teoría Global-Local (GLT) para evaluar los esfuerzos cortantes interlaminares, los resultados se comparan con la teoría de elasticidad en tres dimensiones y con otras teorías, también en junio 2012 en [51], en un compuesto reforzado con fibras unidireccionales se evaluaron esfuerzos térmicos cortantes interlaminares basados en la mecánica de la fractura haciendo uso de una matriz escalonada y demostraron que estos esfuerzos decrecen con el incremento de contenido de fibra, los resultados que obtuvieron en forma experimental fueron similares.

Recientemente en febrero 2013 en [52], mediante un modelo analítico basado en la teoría de alto orden (HOSNT12) que incorpora las deformaciones térmicas cortante, normal y transversal, se analizan esfuerzos térmicos en láminas de capas cruzadas sometidas a gradientes térmicos a través del espesor, los esfuerzos obtenidos se compararon con los obtenidos con el modelo de elasticidad (3D) y modelos en 2D, los resultados mostraron consistencia. Finalmente en abril del 2013 [53] son evaluados esfuerzos térmicos interlaminares cortantes en nanotubos compuestos reforzados a nano-escala CFRP sin reforzar y reforzados, bajo cargas térmicas de choque utilizando un analizador dinámico mecánico y ciclos térmicos de +30 a -30°C bajo las mismas condiciones, encontrándose que los compuestos reforzados soportan esfuerzos térmicos interlaminares mayores a los no reforzados,

#### **I.1.4 Modelos utilizados para el análisis de esfuerzos térmicos**

Ante la necesidad de determinar los esfuerzos térmicos globales e interlaminares, así como los coeficientes de expansión térmica del material compuesto y de las capas que lo constituyen, los investigadores se han dado a la tarea de generar,

partiendo de los modelos matemáticos utilizados para los materiales simples, nuevos modelos que permitan llevar a cabo el análisis de estos esfuerzos.

Dentro de los trabajos en el desarrollo de modelos, están el de [39] en 1977, que generó un modelo basado en una técnica de solución avanzada de matriz dispersa para estudiar esfuerzos térmicos cerca del borde libre, en 1995 en [47], fue usado el modelo matemático complejo de Weber y Morton, para determinar esfuerzos mecánicos y térmicos interlaminares, cerca del borde libre en compuesto laminado, el modelo aporta soluciones exactas y los resultados se validaron con el Método de Elemento Finito. En 1997 [48] se utilizó una expansión polinomial de la función de esfuerzos y el principio de energía complementaria para obtener un modelo para determinar esfuerzos térmicos interlaminares en la vecindad del libre borde y se utilizó FEM para su validación, no se utilizó ningún método experimental.

En 2003 [49] mediante un modelo basados en la teoría de la elasticidad en dos dimensiones y el teorema variacional de energía, hicieron el análisis de esfuerzos térmicos en láminas de compuestos para circuitos microelectrónicos, en 2004 [43] se propusieron modelos matemáticos para determinar esfuerzos térmicos interlaminares en un compuesto de dos capas bajo dos condiciones, primero sin considerar deslizamiento entre capas y después considerando el deslizamiento, sólo propusieron los modelos pero no obtuvieron resultados numéricos, ni llevaron a cabo ninguna validación experimental. En 2007 [54] se desarrolló la teoría de esfuerzos termoelásticos en término de deformaciones en vez del esfuerzo pero, no utilizaron ninguna técnica experimental, tampoco método computacional para probar su teoría.

En 2011 [28] utilizan un modelo de desplazamiento de alto orden con la función zig-zag, en la investigación de esfuerzos térmicos interlaminares en un compuesto laminado restringido en un extremo. En 2012 en [37], mediante la teoría clásica de láminas y el método del elemento finito, determinaron en forma global esfuerzos térmicos en un compuesto híbrido de fibra de carbono, no se determinaron

esfuerzos interlaminares, también en 2012 en [30], en la evaluación de esfuerzos cortantes interlaminares se utilizó un modelo que es una mejora a la Teoría Global-Local (GLT), los resultados obtenidos fueron congruentes comparados con los de la teoría de elasticidad en tres dimensiones y con otras teorías, en el mismo año 2012 en [51] para evaluar los esfuerzos térmicos interlaminares cortantes, se utilizó la mecánica de la fractura y una matriz escalonada, los resultados fueron similares a los experimentales.

Recientemente en este año 2013, en febrero en [52], utilizan un modelo analítico basado en la teoría de alto orden HOSNT12, que incorpora las deformaciones térmicas cortante, normal y transversal, analizan esfuerzos térmicos en láminas de capas cruzadas sometidas a gradientes térmicos, los esfuerzos obtenidos se compararon con los obtenidos con modelo de elasticidad 3D y modelos en 2D mostrando consistencia. Finalmente en junio en [47], se presenta una solución analítica basada en el método tridimensional extendido multi-paso de Kantorovich, de un compuesto sometido a pandeo, torsión y cargas térmicas, para determinar con seguridad esfuerzos térmicos tridimensionales en el interior y en las fronteras (borde libre), se obtienen también esfuerzos interlaminares y esfuerzos térmicos cortantes, los resultados son comparados con los obtenidos por elemento finito ABAQUS.

### **I.1.5 Extensómetros eléctricos para análisis experimental de esfuerzos térmicos**

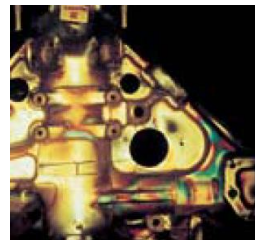
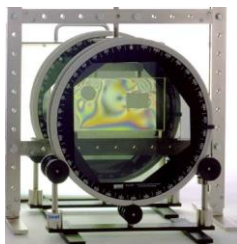
En esta sección se explican las razones por las cuáles la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable es utilizada en este trabajo de tesis.

#### **I.1.5.1 Técnicas experimentales generales para medir deformaciones**

Para llevar a cabo el análisis experimental de esfuerzos existen muchas técnicas experimentales, como se menciona en [55], hay métodos experimentales que proporcionan información de campo completo como los de fotoelasticidad, Moiré,

recubrimientos frágiles, etc, así como los que dan información de punto a punto como ópticos, acústicos, Strain Gages, etc. En [56], se menciona que las técnicas de medición de esfuerzos y deformaciones más utilizadas, como ejemplo de éstas se pueden mencionar las siguientes:

- a) Fotoelasticidad (ver Figura I.6), basada en el principio de birefringencia temporal derivada de los patrones de franja generados en componentes fotoelásticos mediante luz polarizada, es de *campo completo*, es un método directo y es portátil. Desventajas: requiere una fuente de luz, sólo opera entre un rango de temperatura de 0 a 60°C.
- b) Extensometría Eléctrica de Resistencia Variable (Strain Gages), (ver Figura I.7), es una técnica *punto a punto* derivada de los cambios en la resistencia de un material conductor que es estirado. *Ventajas*: es una tecnología madura, de bajo costo, disponible comercialmente, muy precisa (debajo de  $0.1 \mu\epsilon$ ), de pequeña masa y volumen, se puede monitorear a control remoto, puede medir a tensión y compresión, reutilizable, buena respuesta de frecuencia, fácil de pegar, se puede usar para amplia gama de materiales. *Desventajas*, no es de campo completo, requiere habilidades para instalar y para interpretar resultados, las deformaciones medidas son promedio, se requieren tres mediciones para el estado completo de esfuerzos, la elongación está limitada al 20% aproximado. Se aplica en análisis de esfuerzos de componentes de ingeniería y estructura, es un elemento sensor para muchos tipos de transductores.



a) Polariscopio de transmisión

b) Polariscopio de reflexión

Figura I.6. Equipo utilizado para la técnica de fotoelasticidad





a) Extensómetro eléctrico b) Probador de extensómetros c) Puente e Wheatstone P3-Strain

Figura I.7. Técnica de Extensometría Eléctrica de Resistencia Variable

### I.1.5.2 Técnicas experimentales para medir deformaciones térmicas

Para el análisis de esfuerzos térmicos en los materiales, es necesario medir las deformaciones que se generan como consecuencia de la expansión térmica del material, estas mediciones se hacen en la superficie. Algunas técnicas utilizadas para hacer mediciones son:

- a) La técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable.
- b) Interferometría patrón de manchas.
- c) TSA y Termografía Infrarroja [26].
- d) La Dilatometría usada en [11].
- e) La Microscopía Raman usada en [57] para determinar esfuerzos térmicos globales en materiales fibrosos.

### I.1.5.3 Usos de la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable

La técnica experimental de extensometría eléctrica de resistencia variable (strain gage), es utilizada para medir deformaciones en los compuestos sometidos a cargas mecánicas, térmicas o cargas combinadas térmicas-mecánicas, que se utilizan para determinar los esfuerzos térmicos. Las mediciones son llevadas a cabo mediante los extensómetros eléctricos de resistencia variable, como los mostrados en la Figura I.8.

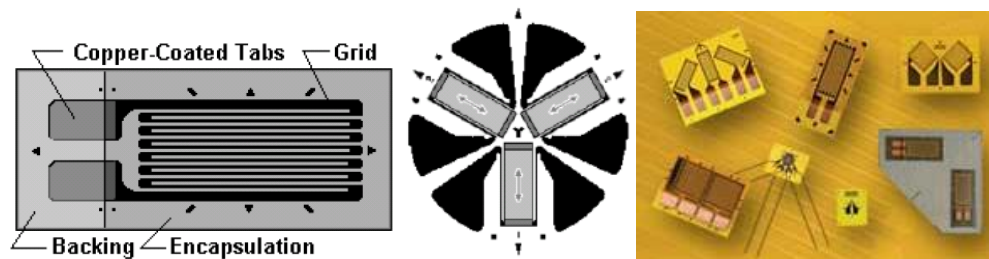


Figura 1.8. Extensómetros eléctricos usados en mediciones de deformación

Un extensómetro eléctrico de resistencia variable es un transductor que convierte una deformación mecánica en una correspondiente señal eléctrica [58].

El extensómetro es un sensor que mide deformaciones promedio puntuales donde se instrumenta, por lo que la información que puede obtenerse de ellos es real y pertenece únicamente al punto instrumentado [2]. Con la información proporcionada por los extensómetros sólo es posible determinar los valores de deformaciones o de esfuerzos en otros puntos de un elemento cuando se cuenta con un modelo matemático en el que se considera que la distribución de esfuerzos es homogénea o es lineal. No es posible conocer las deformaciones en otros puntos del elemento analizado cuando no se cumple con todas las condiciones anteriormente mencionadas [2].

Algunos trabajos donde se aplicó esta técnica son los siguientes: en 1989 en [59] se instrumentó con esta técnica, un cilindro de gas doméstico con una roseta de cinco extensómetros para medir las deformaciones del cilindro bajo presiones diferentes, en 2008 en [60], se determinó el estado biaxial de esfuerzos en compuestos reforzados con fibras longitudinales de vidrio. Una aplicación de rosetas 3D en una prótesis, para medir deformaciones es mostrada en 2009 en [56], entre otros. En 2010 en [2], se utilizó extensometría eléctrica de resistencia variable, para validar y mostrar la eficiencia de los modelos matemáticos desarrollados para el análisis experimental de esfuerzos en pruebas de tensión simple y de momentos en pruebas de flexión.

Las galgas extensométricas como se explica en [15] y en [2], son preferidas para medir las deformaciones que son utilizadas para determinar las constantes elásticas, los coeficientes de expansión térmica, los esfuerzos mecánicos y los esfuerzos térmicos, pues las otras técnicas que son usadas, son mas complejas y de mayor costo.

## **I.2 El motivo de la investigación**

En base a la investigación del estado del arte de la sección anterior, en esta sección se plantean los motivos de la investigación.

### **I.2.1 Conclusiones del estado del arte**

A partir de lo expuesto en el estado del arte, se generan las siguientes conclusiones:

1. Los modelos que son utilizados para el análisis de esfuerzos térmicos globales e interlaminares en materiales compuestos son complicados, de acuerdo con [28,30,37,39,42,47,48,49,48,50,51,52], esto es, no se cuenta con un modelo simple para el análisis.
2. Para validar los modelos, se están utilizando preferentemente el método del elemento finito [18,29,31,36,37,45,47,48], y los métodos experimentales que están utilizando para medir deformaciones, son la dilatometría [12], termografía infrarroja [26], Microscopía Raman [57], entre otros, estas técnicas sólo miden deformaciones en la superficie del compuesto y son costosas.
3. La técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable que se usa también en [12], a pesar de ser una técnica simple, de bajo costo y que aporta resultados confiables, de acuerdo a los trabajos consultados, casi no es utilizada para el análisis de esfuerzos térmicos. Se utiliza más cuando se trata de análisis de esfuerzos producidos por cargas mecánicas.

4. Los trabajos donde aplican la técnica de extensometría eléctrica de Resistencia Variable (StrainGage) se limitan a analizar un sólo punto instrumentado.
5. El análisis experimental de esfuerzos en el plano, a nivel global y local (interlaminares) se ha tratado poco [2].
6. La obtención experimental de propiedades elásticas de materiales compuestos laminados se realiza sólo a nivel global, efectivas [2, 63].
7. En base a los trabajos consultados, se observó que, para el análisis de esfuerzos térmicos interlaminares, existe una gran cantidad de trabajos dedicados a la obtención de estos en borde libre [39-47], y hay pocos trabajos que analizan éstos esfuerzos a lo largo del espesor [23, 27, 29, 30, 48-51].
8. Actualmente se tiene un método experimental sencillo para análisis sobre los efectos mecánicos que ocasiona una interface visiblemente inexistente entre las capas de una lámina [2]. *Pero no se tiene para el análisis experimental de esfuerzos térmicos.*
9. Hace falta un modelo simple que permita evaluar en forma eficiente mediante la extensometría eléctrica de resistencia variable, o alguna otra técnica, los esfuerzos térmicos globales e interlaminares en materiales compuestos laminados metálicos.

### **I.2.2 Motivos de la investigación**

En base a la investigación del estado del arte de la sección anterior, se plantean los motivos de la investigación para este trabajo doctoral, los cuales se resumen en los siguientes puntos:

- Un primer motivo para el desarrollo de la presente investigación, es que de acuerdo al estado del arte para el análisis de esfuerzos térmicos interlaminares y globales, los modelos utilizados son complicados, por lo

que uno de los objetivos es proponer un modelo lineal simple para el análisis de esfuerzos interlaminares.

- Un segundo motivo es utilizar el modelo desarrollado en esta investigación para manejar con más profundidad la conceptualización y el análisis de esfuerzos térmicos interlaminares y globales en forma experimental.
- Una tercera motivación es que, según el análisis hecho al estado del arte, la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable, es poco usada en el análisis de esfuerzos térmicos porque se requiere habilidad en la interpretación de los resultados. En esta investigación se usará dicha técnica para conocer sus particularidades y para validar el modelo matemático propuesto.

### **I.3 Preguntas de investigación**

Las motivaciones descritas anteriormente conducen a las interrogantes siguientes:

- 1) ¿Existe un modelo matemático simple, con el que es posible analizar esfuerzos térmicos interlaminares y globales?
- 2) ¿En caso de existir el modelo será posible validarlo con la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable?
- 3) ¿El modelo generado podrá facilitar el cálculo de los coeficientes de expansión térmica o es necesario usar un método adicional, como el método inverso?

### **I.4 Objetivos**

Los objetivos que se buscan en este trabajo de tesis son los siguientes:

#### **I.3.1 Objetivo general**

El objetivo general relacionado con el presente trabajo de tesis es el siguiente:

*Desarrollar y validar experimentalmente un modelo matemático simple, usando la teoría de la elasticidad lineal, la teoría clásica de láminas, la teoría de esfuerzos térmicos, y el principio de superposición, para analizar y determinar esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminados metálicos simétricos.*

### **I.3.2 Objetivos particulares**

- 1) Proponer un modelo analítico lineal para el análisis de esfuerzos térmicos globales e interlaminares en materiales compuestos laminados metálicos y simétricos.
- 2) Aplicar y/o desarrollar un método o procedimiento para validar el modelo analítico.
- 3) Fabricar dos tipos de materiales compuestos laminados y caracterizar los CET de los componentes.
- 4) Evaluar el modelo para determinar en forma experimental los esfuerzos térmicos locales o interlaminares y los coeficientes de expansión térmica usando la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable (strain gage).
- 5) Analizar los esfuerzos térmicos en el plano, tanto a nivel global (promedio) como local (interlaminares de las capas constituyentes isotrópicas).

### **I.4 Estructura del trabajo de tesis**

Esta tesis está estructurada de la manera siguiente:

En el capítulo 1, se define el problema general y las restricciones, y se formula una hipótesis y las premisas básicas, así como las consideraciones necesarias para el desarrollo y la sistematización de modelo matemático motivo de estudio.

En el capítulo 2, se describe el marco teórico relacionado con la teoría de la elasticidad, la teoría de láminas, la teoría de esfuerzos térmicos y el principio de superposición.

En el capítulo 3, se desarrolla el modelo matemático motivo de estudio en este trabajo de tesis. Para dicho desarrollo se usará el marco teórico descrito en el capítulo 2.

En el capítulo 4, partiendo del modelo desarrollado en el capítulo 3, se obtienen los sistemas de ecuaciones para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares y globales, y también, para validar el modelo, mediante un método inverso se obtienen los sistemas de ecuaciones particulares para determinar los Coeficientes de Expansión Térmica (CET) de las capas que constituyen los materiales compuestos en estudio.

En el capítulo 5, se describe el proceso experimental de las pruebas llevadas a cabo en seis probetas individuales y dos probetas compuestas construidas a base de capas isotrópicas. Dos probetas individuales se sometieron a tracción para obtener las constantes elásticas, cuatro probetas individuales se sometieron a temperatura uniforme para obtener los CET experimentales y, dos probetas compuestas que se sometieron a cambios de temperatura para obtener los esfuerzos térmicos. Los resultados fueron utilizados para mostrar el alcance del presente estudio. El análisis experimental de esfuerzos fue validado determinando los coeficientes de expansión térmica de las capas constituyentes, que se conocen pero que en los modelos se consideran desconocidas. Una vez validado el modelo se aplica para determinar los esfuerzos térmicos globales e interlaminares en los compuestos, finalmente se analizan los resultados.

En el capítulo 6, se presentan las conclusiones y las recomendaciones relacionadas con esta tesis.

En el Apéndice A, se presentan conceptos teóricos relacionados con esta tesis.

En el Anexo B, se muestra el proceso desarrollado a partir de un método inverso para obtener las ecuaciones particulares que son necesarias para determinar los CET de las capas de aluminio y de acero inoxidable que constituyen los compuestos en estudio.

En el Anexo C, se muestra el proceso seguido para construir e instrumentar los especímenes de prueba.

En el Anexo D, se muestra el proceso experimental llevado a cabo para obtener las constantes elásticas y los CET experimentales de dos probetas individuales, luego las pruebas térmicas en los compuestos c1 y c2 y, con los datos obtenidos se calcularon los CET de las capas y los esfuerzos térmicos interlaminares y globales. Finalmente el utilizó un Software Maple 13, para determinar los CET de las capas y los esfuerzos interlaminares utilizando el modelo.



# CAPÍTULO I

## Definición del Problema

En este capítulo se define el problema que motiva esta investigación doctoral, se describen las restricciones, se formula una hipótesis que guía a su solución y las premisas básicas.

### 1.1 Definición del problema

Se requiere desarrollar un modelo simple para analizar y evaluar esfuerzos térmicos interlaminares y globales en materiales compuestos laminados.

### 1.2 Justificación

La justificación del problema es la siguiente:

- a) Para analizar experimentalmente esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminados, los modelos que se están utilizando son de difícil aplicación [28,30,37,39,42,47,48,49,48,50,51,52].
- b) Gran parte de los trabajos de investigación se han concentrado en analizar esfuerzos térmicos interlaminares en el borde del material [39-47], hay pocos trabajos para el análisis de esfuerzos térmicos a través del espesor.
- c) En el análisis experimental que se ha llevado a cabo, sólo determinan esfuerzos globales [12, 26, 31, 57].
- d) No se encontraron trabajos que analicen mediante un modelo experimental y la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable, los esfuerzos térmicos interlaminares y su variación a través del espesor del espécimen.
- e) Para validar los modelos se ha estado utilizando el método del elemento finito (FEM) [18, 29, 31, 36, 37, 45, 47, 48], y en forma experimental han

estado utilizando para medir las deformaciones térmicas el dilatómetro [12], el interferómetro digital de patrón de manchas (Digital Speckle Pattern Interferometry), la Termografía Infrarroja [26], la Microscopía Raman [57], etc, las cuales son técnicas para medición de campo completo y son de alto costo.

### 1.3 Restricciones

El modelo de los materiales compuestos laminados simétricos en estudio tiene las siguientes restricciones:

- a) El modelado del comportamiento mecánico de los materiales compuestos laminados se lleva a cabo por ecuaciones lineales y cumple con las leyes fundamentales de la mecánica de los medios continuos, de la conservación de la masa y la energía, y las de transferencia de calor.
- b) El análisis es elástico-lineal.
- c) Las capas de la lámina son relativamente delgadas.
- d) El material compuesto laminado es simétrico.
- e) Se asume homogeneidad en cada capa o pliegue o grupo de capas.
- f) Los materiales que lo conforman son elástico-lineales.
- g) La unión entre las capas es perfecta.
- h) El problema tanto global como local es de esfuerzos planos.
- i) En los materiales compuestos se consideran dos niveles de esfuerzos, locales (por pliegue o por capa) y globales (por lámina).
- j) La temperatura es homogénea.
- k) La solución debe ser analítica-experimental.
- l) Los especímenes están libres de cargas mecánicas.
- m) No existen restricciones en las fronteras.

n) Se utilizará extensometría eléctrica de resistencia variable (strain gage).

#### 1.4 Hipótesis general

Las hipótesis que guían esta investigación son las siguientes:

*“Es posible desarrollar un modelo experimental simple mediante el cual se podrán determinar los esfuerzos térmicos y los coeficientes de expansión térmica en materiales compuestos laminados simétricos”.*

*“Mediante el uso del principio de superposición es posible plantear un modelo analítico lineal que informe sobre la distribución de esfuerzos térmicos en un compuesto laminado, si se considera como un conjunto constituido por: un problema global y conjunto de problemas locales de esfuerzos”.*

Con el modelo obtenido pueden ser determinados: a) los esfuerzos térmicos globales,  $\sigma_{Gx}$  y  $\sigma_{Gy}$ ; b) los esfuerzos interlaminares  $\sigma_{xAL}$ ,  $\sigma_{xAI}$ ,  $\sigma_{yAL}$  y  $\sigma_{yAI}$ , así como los coeficientes de expansión térmica  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ , de las capas que constituyen el compuesto.

# CAPÍTULO II

## Marco Teórico

En este capítulo se presenta el marco teórico necesario para generar los modelos relacionados con los esfuerzos térmicos globales e interlaminares en materiales compuestos laminados. Dicho marco teórico está conformado por: a) la teoría de la elasticidad lineal; b) la teoría clásica de láminas; c) la teoría de esfuerzos térmicos y d) el principio de superposición.

### 2.1 Modelo de la teoría de la elasticidad lineal

Se presenta en esta sección algunas consideraciones importantes relacionadas con la Teoría de la Elasticidad Lineal que es utilizada para generar los modelos que son necesarios para llevar a cabo el análisis experimental de esfuerzos térmicos interlaminares y globales, motivo de esta investigación doctoral.

#### 2.1.1 Introducción al modelo de la elasticidad

El modelo de la elasticidad lineal obedece las leyes fundamentales de la mecánica de los medios continuos: las leyes de Newton y las leyes de la conservación de la masa y la energía, y, posee las siguientes restricciones: el medio posee masa, es continuo, es lineal, es elástico- lineal y homogéneo [2, 61, 62].

El modelo de elasticidad lineal está relacionado con medios o cuerpos que tienen la propiedad de ser elásticos. Este modelo se encuentra conformado por el modelo de esfuerzos, el modelo de deformaciones, y por un modelo constitutivo (Ley generalizada de Hooke). Los sistemas de ecuaciones e incógnitas generadas constituyen un modelo generalizado de 15 ecuaciones en derivadas parciales y 15 incógnitas.

### 2.1.2 Modelo de esfuerzos

El modelo de esfuerzos es esencial para entender la teoría de la elasticidad lineal y sus vastas aplicaciones. Por ello, es necesario sistematizar dicho modelo y determinar las propiedades importantes.

**El problema de esfuerzos.** El problema de esfuerzos se puede sintetizar de la manera siguiente [61, 62]:

“Determinar un modelo que permita encontrar el estado de esfuerzos de un medio sometido a un sistema de solicitaciones o fuerzas”.

Las restricciones del problema son:

- 1) El medio posee masa
- 2) El medio es continuo

Otra consideración importante asociada con el problema de esfuerzos es la siguiente:

*“El análisis es realizado en una sola configuración del medio; es decir, en su configuración deformada”.*

Por otro lado, para poder realizar el análisis de esfuerzos y construir el modelo, es necesario formular una hipótesis. Dicha hipótesis es la siguiente:

*“Se puede analizar y modelar el estado de esfuerzos sobre todo el medio o una parte de él”.*

La sistematización del modelo de esfuerzos se puede consultar [62].

El modelo resultante es el siguiente:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Donde,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  son las componentes de esfuerzos normales y cortantes, respectivamente  $X, Y$  y  $Z$  son las intensidades fuerzas de cuerpo

El sistema de ecuaciones e incógnitas determinado en las expresiones (2.1) es de 3 ecuaciones y 6 incógnitas.

### 2.1.3 El modelo de deformaciones

El estudio de las deformaciones, es puramente geométrico y, en consecuencia, independiente del análisis de esfuerzos. Se presentan los conceptos y definiciones necesarios para formar la teoría y algunas consideraciones de interés. El objetivo es desarrollar, sistemáticamente, el modelo que permita determinar las deformaciones y desplazamientos asociadas con dos configuraciones de un medio. Dichas configuraciones son llamadas inicial y final, respectivamente. En síntesis, interesa conocer el número de ecuaciones e incógnitas asociadas con el modelo de las deformaciones, así como explicitar cada una de las consideraciones relacionadas con dicho modelo [61, 62].

**El problema de las deformaciones.** Considérese el siguiente problema:

*“Se requiere analizar y modelar los cambios de forma de un medio, así como los desplazamientos de los puntos que lo componen”*

Las restricciones fundamentales asociadas con el problema descrito anteriormente son:

- 1) El medio es continuo.
- 2) Los cambios de posición del medio son continuos.
- 3) Se estudian los cambios de posición solamente entre dos configuraciones asociadas con el medio: la configuración inicial y la configuración final.
- 4) No se considera en el análisis las trayectorias de los puntos desplazados del medio.

Obsérvese que una vez más, es necesario considerar al medio continuo, esto es, para utilizar la teoría de las funciones continuas con el propósito de analizar y modelar el problema de las deformaciones. Asimismo, no se toman en cuenta las trayectorias que describen los puntos desplazados del medio. Finalmente, los desplazamientos y deformaciones se estudiarán en dos configuraciones.

Considere ahora la siguiente hipótesis:

- 1) *Existe el problema de las deformaciones y su solución.*
- 2) *La solución del problema depende de una relación que permita modelar los cambios de forma.*
- 3) *La premisa es la siguiente:*

“El modelo de deformaciones se obtiene al analizar los cambios de posición relativa entre un punto genérico del medio y un punto asociado a una vecindad. Si el modelo existe, entonces es representativo de todas las parejas de puntos relacionadas con el medio”.

La sistematización del modelo de deformaciones se puede consultar en [62].

En síntesis, el modelo correspondiente de las seis expresiones de la relación *deformación-desplazamiento* a continuación se presentan, en forma equivalente, como:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Las seis ecuaciones anteriores representan las comúnmente conocidas como; *ecuaciones de compatibilidad*.

Las deformaciones correspondientes pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$\varepsilon_x = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_y = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_z = \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Donde  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  son las componentes de las deformaciones normales y angulares,  $u, v, w$  son los desplazamientos en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.

## 2.1.4 Modelo constitutivo de la elasticidad

El modelo constitutivo sobre medios elásticos se analiza utilizando para ello, el modelo general de esfuerzos y el modelo general de deformaciones, incluyendo además, dos restricciones adicionales, específicamente: homogeneidad e isotropía, obteniéndose con dicho análisis, un modelo representado por las ecuaciones constitutivas de elasticidad lineal para cuerpos homogéneos e isotrópicos, definiéndose para tal efecto, las constantes elásticas ya establecidas como propiedades físicas de diversos cuerpos, y determinadas mediante leyes experimentales.

### 1) Modelo constitutivo para un medio elástico y homogéneo

Un medio se dice *homogéneo* si sus propiedades mecánicas son las mismas en cada parte o punto del medio considerado. En otras palabras, las propiedades elásticas son independientes del marco de referencia. Las implicaciones matemáticas que se derivan de la homogeneidad son que las funciones lineales  $C_{11}, \dots, C_{66}$  son constantes.

Por otro lado, un cuerpo o medio es *isotrópico* si las deformaciones y los esfuerzos medidos en cualesquier dirección son equivalentes.

Así, sea  $O'x'y'z'$  un sistema ortogonal arbitrario y supóngase que se desean representar las deformaciones y los esfuerzos en dicho sistema. Entonces:

$$\underline{\sigma}' = \underline{R}' \cdot \underline{\varepsilon}' \quad (2.4)$$

Donde  $\underline{\sigma}'$  es el estado total de esfuerzos,  $\underline{R}'$  es el conjunto de constantes que representan las propiedades físicas y  $\underline{\varepsilon}'$  es el conjunto de deformaciones.

La ecuación (2.4) se representa como:

$$\{\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'}, \tau_{x'y'}, \tau_{y'z'}, \tau_{z'x'}\} = C_{ij} \{\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \varepsilon_{z'}, \gamma_{x'y'}, \gamma_{y'z'}, \gamma_{z'x'}\} \quad (2.5)$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Donde  $C_{ij}$  son las constantes elásticas, independientes tanto de los esfuerzos como de las deformaciones.

La forma explícita de la expresión (2.5) es la siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sigma_{x'} &= C_{11} \varepsilon_{x'} + C_{12} \varepsilon_{y'} + C_{13} \varepsilon_{z'} + C_{14} \gamma_{x'y'} + C_{15} \gamma_{y'z'} + C_{16} \gamma_{z'x'} & (2.7) \\ 2) \quad \sigma_{y'} &= C_{21} \varepsilon_{x'} + C_{22} \varepsilon_{y'} + C_{23} \varepsilon_{z'} + C_{24} \gamma_{x'y'} + C_{25} \gamma_{y'z'} + C_{26} \gamma_{z'x'} \\ 3) \quad \sigma_{z'} &= C_{31} \varepsilon_{x'} + C_{32} \varepsilon_{y'} + C_{33} \varepsilon_{z'} + C_{34} \gamma_{x'y'} + C_{35} \gamma_{y'z'} + C_{36} \gamma_{z'x'} \\ 4) \quad \tau_{x'y'} &= C_{41} \varepsilon_{x'} + C_{42} \varepsilon_{y'} + C_{43} \varepsilon_{z'} + C_{44} \gamma_{x'y'} + C_{45} \gamma_{y'z'} + C_{46} \gamma_{z'x'} \\ 5) \quad \tau_{y'z'} &= C_{51} \varepsilon_{x'} + C_{52} \varepsilon_{y'} + C_{53} \varepsilon_{z'} + C_{54} \gamma_{x'y'} + C_{55} \gamma_{y'z'} + C_{56} \gamma_{z'x'} \\ 6) \quad \tau_{z'x'} &= C_{61} \varepsilon_{x'} + C_{62} \varepsilon_{y'} + C_{63} \varepsilon_{z'} + C_{64} \gamma_{x'y'} + C_{65} \gamma_{y'z'} + C_{66} \gamma_{z'x'} \end{aligned}$$

Las expresiones (2.7) representan el modelo constitutivo.

## 2) Análisis de constantes en medio elástico, homogéneo e isotrópico

De acuerdo con [61, 62], y bajo análisis de la energía-deformación, las constantes elásticas relacionadas con cuerpos isótropos no son independientes. Considere ahora el siguiente problema:

*“Determinar las dos constantes elásticas independientes de un medio homogéneo e isotrópico”.*

El objetivo, al solucionar el problema antes planteado, es reducir el número de constantes elásticas de 36 a solamente 2 [62].

Las restricciones asociadas con el problema antes planteado, son:

- 1) El medio es isótropo.
- 2) El medio es homogéneo.

Finalmente, las ecuaciones constitutivas de la teoría de la elasticidad lineal restringidas a cuerpos homogéneos e isótropos, son representadas para las relaciones *esfuerzo-deformación* y *deformación-esfuerzo*, en función de las constantes  $E$  y  $\nu$ , son:

Para la relación *esfuerzo- deformación*:

$$1) \quad \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \quad (2.8)$$

$$2) \quad \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)]$$

$$3) \quad \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

$$4) \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$5) \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}$$

$$6) \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}$$

Para la relación *deformación-esfuerzo*:

$$1) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.9)$$

$$2) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$3) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$4) \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$5) \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}$$

$$6) \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}$$

## 2.2 El principio de superposición

El principio de superposición es explicado mediante el análisis descrito a continuación:

### 1) Deformaciones infinitesimales

El objetivo en esta sección es explicitar las consecuencias derivadas de asumir despreciables las potencias y productos de la serie de Taylor. Esta consideración

es otra restricción que se impone al modelado de deformaciones. Dicha restricción conduce a suponer deformaciones infinitesimales [62].

Es importante analizar y evaluar si el hecho de considerar deformaciones infinitesimales modificará la forma y estructura de las expresiones para el análisis de deformaciones alrededor de un punto correspondiente a una configuración  $A'$  ecuaciones (2.10) y (2.11).

$$1) \quad x' = U_{P_0} + \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{P_0} \right] x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{P_0} y + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{P_0} z \quad (2.10)$$

$$2) \quad y' = V_{P_0} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{P_0} x + \left[ 1 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{P_0} \right] y + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{P_0} z$$

$$3) \quad z' = W_{P_0} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{P_0} x + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{P_0} y + \left[ 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{P_0} \right] z$$

$$1) \quad \Delta x' = \Delta x \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{P_0} \right] + \Delta y \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{P_0} + \Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{P_0} \quad (2.11)$$

$$2) \quad \Delta y' = \Delta x \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{P_0} + \Delta y \left[ 1 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{P_0} \right] + \Delta z \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{P_0}$$

$$3) \quad \Delta z' = \Delta x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{P_0} + \Delta y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{P_0} + \Delta z \left[ 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{P_0} \right]$$

Para lograr tal propósito, considere el problema siguiente:

“Sea  $A$  la configuración inicial de un medio y  $A'$  la configuración final obtenida por la aplicación de un campo de desplazamientos. Determinar si el orden de aplicación de campos de desplazamientos afectan la configuración final de  $A'$ ”.

La hipótesis que será considerada es la siguiente:

“Cualesquier orden de aplicación de “ $n$ ” campos de desplazamientos sobre una configuración  $A$  de un medio generará una y sólo una configuración deformada  $A'$ ”

La hipótesis descrita anteriormente se puede interpretar de la manera siguiente:

No importa el orden de aplicación de “ $n$ ” campos de desplazamientos sobre una configuración  $A$ , siempre se obtendrá la misma configuración deformada o final. O, en forma equivalente, las configuraciones finales obtenidas bajo la aplicación de “ $n$ ” campos de desplazamientos en forma sucesiva son equivalentes.

Considere ahora la Figura 2.1. Obsérvese en dicha figura que un nuevo campo de desplazamientos es aplicado a  $A'$ . Y, en consecuencia, bajo tal aplicación se obtiene la configuración final  $A''$ . En otras palabras, primero se aplica el campo  $(u, v, w)$  sobre  $A$  y posteriormente el campo  $(u', v', w')$ .

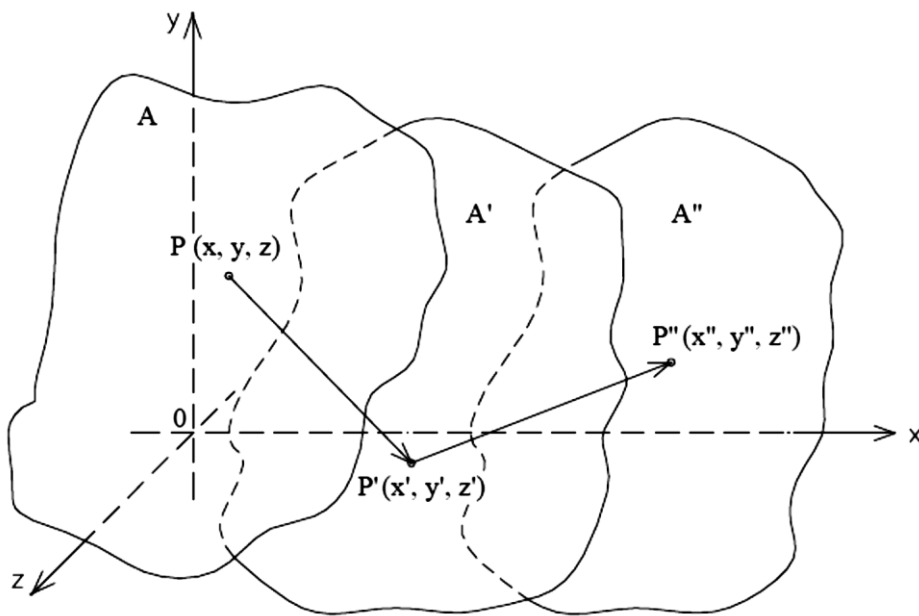


Figura 2.1. Dos transformaciones sucesivas aplicadas a la región  $A$

El nuevo campo de desplazamientos transforma los puntos  $P_0'$  y  $P'$  de  $A'$ , a  $P_0''$  y  $P''$  de  $A''$ . Por lo tanto, el modelo que permite determinar o modelar la configuración  $A''$  se obtiene al aplicar las expresiones (2.10); esto es:

$$1) \quad x'' = U'_{P'_0} + \left[ 1 + \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)_{P'_0} \right] x' + \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)_{P'_0} y' + \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)_{P'_0} z' \quad (2.12)$$

$$2) y'' = V'_{P'0} + \left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)_{P'0} x' + \left[1 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_{P'0}\right] y' + \left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)_{P'0} z'$$

$$3) z'' = W'_{P'0} + \left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)_{P'0} x' + \left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)_{P'0} y' + \left[1 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_{P'0}\right] z'$$

Puesto que las configuraciones  $A$ ,  $A'$ , y  $A''$  están relacionadas, entonces es posible representar las coordenadas del punto  $P''$  de  $A''$  en términos de las coordenadas del punto  $P$  de  $A$  (ver Figura 2.1). Esto es posible sustituir  $(x', y', z')$  de la ecuación (2.10), en las ecuaciones (2.12), y haciendo los desarrollos correspondientes se obtienen las siguientes expresiones:

$$1) x'' = U_{P_0} + U'_{P'_0} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_{P'_0}\right] x + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)_{P'_0}\right] y + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)_{P'_0}\right] z \quad (2.13)$$

$$2) y'' = V_{P_0} + V'_{P'_0} + \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)_{P'_0} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{P_0}\right] x + \left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_{P'_0}\right] y + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)_{P'_0}\right] z$$

$$3) z'' = W_{P_0} + W'_{P'_0} + \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)_{P'_0}\right] x + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)_{P'_0}\right] y + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{P_0} + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_{P'_0}\right] z$$

Las expresiones (2.13) han sido obtenidas considerando que los términos de orden superior han sido descartados. Como se puede observar las ecuaciones (2.13), conservan la forma y estructura de las ecuaciones (2.10).

Considere ahora que es cambiado el orden de aplicación de los cambios de desplazamientos; esto es, se invierte el desplazamiento, el campo  $(u', v', w')$  es aplicado a la región  $A$  seguido por la aplicación del campo  $(u, v, w)$ . Dicha aplicación producirá el punto  $P'''$  en una nueva región  $A'''$ . El modelo asociado en este orden de aplicación es el siguiente:

$$1) x''' = U'_{P'_0} + U_{P_0} + \left[ 1 + \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)_{P'_0} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{P_0} \right] x + \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)_{P'_0} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{P_0} \right] y + \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)_{P'_0} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{P_0} \right] z \quad (2.14)$$

$$2) y''' = V'_{P'_0} + V_{P_0} + \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{P_0} + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)_{P'_0} \right] x + \left[ 1 + \left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)_{P'_0} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{P_0} \right] y + \left[ \left( \frac{\partial v'}{\partial z} \right)_{P'_0} + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{P_0} \right] z$$

$$3) z''' = W'_{P'_0} + W_{P_0} + \left[ 1 + \left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)_{P'_0} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{P_0} \right] x + \left[ \left( \frac{\partial w'}{\partial y} \right)_{P'_0} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{P_0} \right] y + \left[ \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)_{P'_0} + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{P_0} \right] z$$

Obsérvese que, los modelos descritos en las expresiones (2.13) y (2.14) aunque están invertidos los componentes de transición  $U_{P_0}, V_{P_0}, W_{P_0}$  y  $U'_{P'_0}, V'_{P'_0}, W'_{P'_0}$ , así como las derivadas parciales dentro de los paréntesis cuadrados, son equivalentes. Esto implica que:

$$P'' = P'''$$

O, equivalentemente,

$$A'' = A'''$$

Y, en consecuencia, el orden de aplicación de los campos de desplazamiento no afecta o no tiene efecto sobre la configuración final. Por lo tanto, se puede concluir lo siguiente:

- 1) La hipótesis formulada fue satisfecha



2) Para que se pueda utilizar el concepto de deformaciones infinitesimales, es necesario que el orden de aplicación de los campos de desplazamientos no afecten la configuración final.

La propiedad demostrada en el análisis anteriormente descrito es llamada “Principio de superposición” [3].

Es posible afirmar que:

1) La estructura de las expresiones (2.10), (2.13) y (2.14) no cambian en forma y estructura al considerar deformaciones infinitesimales.

2) El concepto de linealidad queda asegurado al considerar pequeñas deformaciones. Cabe señalar que el modelo de superposición no es válido para analizar grandes deformaciones.

### **2.3 Teoría de láminas**

En esta sección se plantea *el método con el que se analizan actualmente materiales compuestos laminados*. Para simplificar el análisis se hacen las siguientes suposiciones: 1) la lámina es simétrica; 2) las deformaciones existentes en el plano  $\mathbf{z}$ , son constantes

La teoría clásica de láminas asume en el modelo mecánico lo siguiente [2, 63]:

- 1) La lámina es simétrica, por lo que las deformaciones y esfuerzos ocasionados por la flexión son eliminados experimentalmente.
- 2) La capa y la lámina obedecen a la ley de Hooke.
- 3) Cada capa de un material ortotrópico y su orientación en la lámina puede cambiar.

- 4) La unión entre capas es perfecta, infinitesimalmente delgada y no sufre deformación.
- 5) Como se supone un problema plano, las deformaciones normales al plano son muy pequeñas.
- 6) A nivel macroscópico la lámina es homogénea, elástica y lineal.

### 2.3.1 Mecánica de láminas simétricas

La suposición de que las deformaciones en el plano  $x, y$  son constantes, es válida cuando el espesor de la lámina es pequeño en comparación con el largo y el ancho de la misma. Si la lámina es simétrica, entonces [2, 63]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(z) &= \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2(z) &= \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3(z) &= \varepsilon_3^0\end{aligned}\tag{2.15}$$

El exponente cero (0) significa que las deformaciones en función de la dirección  $z$  son constantes.

La distribución de esfuerzos no es constante y varía de una capa (o grupo de capas) a capa (u otro grupo de capas). Si se hace un análisis global de la lámina es posible obtener las ecuaciones constitutivas en función de las propiedades y de la orientación de cada grupo de capas [2], para eso se partirá del concepto de esfuerzo promedio  $\sigma_i^-$ .

$$\begin{aligned}\sigma_1^- &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 dz \\ \sigma_2^- &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 dz \\ \sigma_6^- &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_6 dz\end{aligned}\tag{2.16}$$

Si los esfuerzos están definidos por las relaciones esfuerzo-deformación, entonces

$$\sigma_1 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 + Q_{16}\varepsilon_6 \quad (2.17)$$

$$\sigma_2 = Q_{21}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 + Q_{26}\varepsilon_6$$

$$\sigma_6 = Q_{61}\varepsilon_1 + Q_{62}\varepsilon_2 + Q_{66}\varepsilon_6$$

Si las deformaciones son consideradas constantes, las ecuaciones (2.16) se expresan como:

$$\sigma_1^- = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11}\varepsilon_1^0 + Q_{12}\varepsilon_2^0 + Q_{16}\varepsilon_6^0) dz \quad (2.18)$$

$$\sigma_2^- = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{21}\varepsilon_1^0 + Q_{22}\varepsilon_2^0 + Q_{26}\varepsilon_6^0) dz$$

$$\sigma_6^- = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{61}\varepsilon_1^0 + Q_{62}\varepsilon_2^0 + Q_{66}\varepsilon_6^0) dz$$

Como lo que varía de pliegue a pliegue son las constantes  $Q_s$ , se obtiene:

$$\sigma_1^- = \frac{1}{h} \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz \varepsilon_1^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz \varepsilon_2^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{16} dz \varepsilon_6^0 \right] \quad (2.19)$$

$$\sigma_2^- = \frac{1}{h} \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{21} dz \varepsilon_1^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} dz \varepsilon_2^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{26} dz \varepsilon_6^0 \right]$$

$$\sigma_6^- = \frac{1}{h} \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{61} dz \varepsilon_1^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{62} dz \varepsilon_2^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz \varepsilon_6^0 \right]$$

La expresión (2.17) se puede expresar en función de los módulos equivalentes los cuales son definidos en apéndice C, y en [2], de la forma siguiente:

$$\sigma_1^- = \frac{1}{h} [A_{11} \varepsilon_1^0 + A_{12} \varepsilon_2^0 + A_{61} \varepsilon_6^0] \quad (2.20)$$

$$\sigma_2^- = \frac{1}{h} [A_{21} \varepsilon_1^0 + A_{22} \varepsilon_2^0 + A_{62} \varepsilon_6^0]$$

$$\sigma_6^- = \frac{1}{h} [A_{61} \varepsilon_1^0 + A_{62} \varepsilon_2^0 + A_{66} \varepsilon_6^0]$$

Estas son las ecuaciones constitutivas o globales, donde los módulos equivalentes de una lámina multidireccional son el promedio aritmético de los módulos de rigidez individuales fuera de sus ejes de simetría de las capas o grupos de capas, ver apéndice C.

## 2.3 Teoría de esfuerzos térmicos

La teoría de esfuerzos térmicos es la encargada de estudiar las reacciones de los cuerpos que son sometidos a cargas térmicas, termo-mecánicas, con o sin restricciones.

### 2.3.1 Introducción

Cuando un cuerpo elástico que no está restringido y es sometido a incrementos o reducciones de temperatura uniforme, este se expande o se contrae. Esta expansión o contracción causa que un elemento cúbico permanezca cúbico, mientras experimenta cambios de longitud en cada uno de sus lados. Bajo estas condiciones no existen esfuerzos normales, ni esfuerzos cortantes, tampoco deformaciones cortantes [64]. Pero si:

- a) Si se calienta el cuerpo de tal forma que se produzca un campo de temperatura *no* uniforme.
- b) Si el material exhibe anisotropía y es sometido a temperatura uniforme.
- c) Si es restringido en sus fronteras y sometido a campos de temperatura uniforme o no uniforme.

Bajo las condiciones descritas anteriormente, las expansiones o contracciones térmicas *no se pueden* generar libremente y como consecuencia se generarán *esfuerzos térmicos*.

Un esfuerzo térmico, es el esfuerzo inducido en un cuerpo elástico debido a un cambio de temperatura bajo condiciones que impiden su libre expansión o contracción [64]. Su representación matemática es:

$$\sigma_j^T = \alpha_j E \Delta T \quad (2.21)$$

donde  $\sigma_j^T$  es el esfuerzo térmico,  $\alpha_j$  coeficiente de expansión térmica (CET),  $E$  es módulo de elasticidad y  $\Delta T$  es el cambio de temperatura.

Los efectos de tales esfuerzos térmicos pueden llegar a ser severos, especialmente dado que la mayoría de los medios ambientes están a menudo asociados con requerimientos de diseño donde se involucran estrictas restricciones inusuales en cuanto al peso y volumen. Esto aunque es especialmente cierto en aplicaciones aeroespaciales, también es de considerable importancia en aplicaciones automotrices, y en muchas aplicaciones cotidianas de diseño de máquinas.

### 2.3.1 Deformación térmica

La solución de problemas de esfuerzos térmicos, requiere la formulación de relaciones esfuerzo-deformación realizado por superposición de las deformaciones atribuidas al esfuerzo y que se deben a la temperatura. Para un *cambio en la temperatura*  $\Delta T(x, y)$ , el cambio de longitud,  $\delta L$ , de un pequeño elemento lineal de longitud  $L$  en un cuerpo no restringido es  $\delta L = \alpha L \Delta T$ . Aquí  $\alpha$ , usualmente es un número positivo, es llamado coeficiente de expansión térmica lineal [64]. La deformación térmica  $\varepsilon_T$  asociada con la expansión libre en un punto es entonces:

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T \quad (2.22)$$

Esta deformación térmica es similar en cada dirección.

### 2.3.2 Deformaciones totales en un cuerpo cúbico

Las deformaciones totales mecánicas y térmicas en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en un cuerpo cúbico  $\varepsilon_{tx}$ ,  $\varepsilon_{ty}$  y  $\varepsilon_{tz}$ , son obtenidas agregando a cada una de las deformaciones mecánicas  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$ , ecuación (2.9), la deformación la térmica  $\varepsilon_T$  obtenida en la ecuación (2.17), esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \varepsilon_{tx} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \\ 2) \quad \varepsilon_{ty} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \\ 3) \quad \varepsilon_{tz} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.3.3 Deformaciones totales en un cuerpo plano (deformación plana)

En un cuerpo plano, como una lámina, la expansión se genera en dos direcciones:  $x$ ,  $y$ . En la dirección  $z$ , que está relacionada con el espesor, las deformaciones son tan pequeñas en relación a lo ancho y la longitud, que se consideran despreciables, es decir  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , así como también los esfuerzos  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ . Por lo que las deformaciones relacionadas con un cuerpo plano son [64, 65]:

$$\begin{aligned} 1) \quad \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha\Delta T \\ 2) \quad \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha\Delta T \\ 3) \quad \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.24)$$

### 2.3.4 Esfuerzos planos

En esta sección, a partir de las deformaciones totales obtenidas en la sección 2.3.3, se obtienen los esfuerzos totales en las direcciones cartesianas  $x$ ,  $y$ . Estos esfuerzos están constituidos por los esfuerzos mecánicos y los esfuerzos térmicos

[64, 65]. Los esfuerzos totales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ , quedan expresados en términos de deformaciones y son obtenidos a partir de las ecuaciones (2.24).

Los esfuerzos totales  $\sigma_x$  se obtienen a partir de la ecuación (2.24, 1):

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y + E\alpha\Delta T$$

$$1) \sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y - E\alpha\Delta T$$

Como se observa  $\sigma_x$  no está en función exclusiva de las deformaciones, también está en función de  $\sigma_y$ .

Sustituyendo la expresión (1) en la expresión (2.24, 2), se obtiene  $\sigma_y$  que queda expresada en función de las deformaciones, las constantes elásticas, el coeficiente de expansión térmica y el cambio de temperatura.

Sustitución

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \nu(E\varepsilon_x + \nu\sigma_y - E\alpha\Delta T) \right) + \alpha\Delta T$$

Desarrollando la expresión y despejando  $\sigma_y$  se obtiene:

$$\sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)}{(1-\nu^2)} - \frac{E\alpha\Delta T(1+\nu)}{(1-\nu^2)}$$

Como  $(1 - \nu^2) = (1 - \nu)(1 + \nu)$ , entonces

$$2) \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{(1-\nu)}$$

La expresión (2) son los esfuerzos totales en las dirección y.

Los esfuerzos totales en la dirección x, se obtienen sustituyendo  $\sigma_y$  de la ecuación (2), en la ecuación (1)

$$\sigma_x = \varepsilon_x E + \nu \left( \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{(1-\nu)} \right) - E\alpha T$$

Al desarrollar, y reducir la expresión se obtiene:

$$3) \sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \frac{E\alpha T}{(1-\nu)}$$

El esfuerzo total en las direcciones x, y, llamado esfuerzo cortante, se obtiene a partir de la expresión (2.24, 3).

$$4) \tau_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu)} \gamma_{xy}$$

Como  $G = \frac{E}{2(1-\nu)}$  es el módulo de rigidez al cortante, entonces:

$$5) \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

En resumen

Los esfuerzos expresados en función de las deformaciones son:

$$1) \sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \frac{E\alpha T}{(1-\nu)} \quad (2.25)$$

$$2) \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{(1-\nu)}$$

$$3) \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Las ecuaciones (2.25), representan las relaciones modificadas de esfuerzo-deformación para esfuerzo plano [64, 65].



### 2.3.5 Esfuerzos planos en materiales compuestos laminados simétricos

De acuerdo con la teoría clásica de láminas utilizada para un compuesto laminado simétrico como el mostrado en la Figura 2.2, las relaciones de esfuerzo-deformación bajo una temperatura uniformemente distribuida a lo largo del espesor del compuesto sin restricciones mecánicas en las fronteras, pueden ser escritas como [66]:

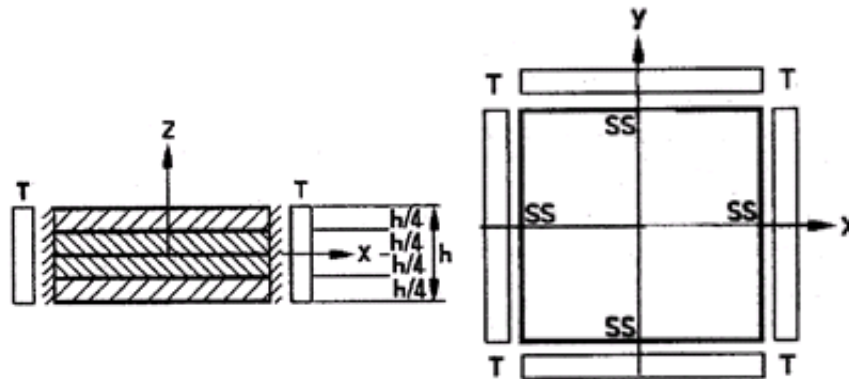


Figura 2.2. Compuesto simétrico de placas laminadas bajo carga térmica T, de espesor h, restringido en sus fronteras

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - [T^*] \Delta T \quad (2.26)$$

Aquí,

$$N_x = h\sigma_x^- \quad N_y = h\sigma_y^- \quad N_{xy} = h\sigma_{xy}^- \quad (2.27)$$

donde  $N_i$  son esfuerzos equivalentes, con unidades de fuerza por unidad de ancho y espesor (h), y  $\sigma_i^-$  son esfuerzos promedio [2, 64]. Además, las matrices [A] (módulos equivalentes) y  $[T^*]$  son:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[ (Q_{11})_j (\alpha_x)_j + (Q_{12})_j (\alpha_y)_j + (Q_{16})_j (\alpha_{xy})_j \right] (h_j - h_{j-1}) \\ [T^*] = & \sum_{j=1}^n \left[ (Q_{12})_j (\alpha_x)_j + (Q_{22})_j (\alpha_y)_j + (Q_{26})_j (\alpha_{xy})_j \right] (h_j - h_{j-1}) \\ & \sum_{j=1}^n \left[ (Q_{16})_j (\alpha_x)_j + (Q_{26})_j (\alpha_y)_j + (Q_{66})_j (\alpha_{xy})_j \right] (h_j - h_{j-1}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde  $Q_{11}, Q_{12}, Q_{16}, Q_{22}, Q_{26}$  y  $Q_{66}$  son constantes de rigidez en las direcciones principales,  $\alpha_x, \alpha_y$  y  $\alpha_{xy}$  son los coeficientes de expansión térmica en las direcciones de los ejes cartesianos y  $h$  es el espesor de las capas.

También,

$$\alpha_x = \alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta \quad (2.30)$$

$$\alpha_y = \alpha_1 \sin^2 \theta + \alpha_2 \cos^2 \theta$$

$$\alpha_{xy} = 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \theta \cos \theta$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los coeficientes de expansión térmica en las direcciones de los ejes principales del material. Por otro lado, en un compuesto laminado simétrico los esfuerzos equivalentes son cero, por lo que:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Por tanto, la expresión (2.26) queda expresada como:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_3^* \end{Bmatrix} \Delta T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

De acuerdo con [66], las deformaciones  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$  y  $\gamma_{xy}^0$  son obtenidas mediante las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{R_2 U_2 - R_3 U_1}{R_2^2 - R_1 R_3} \Delta T \quad ; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{R_2 U_2 - R_3 U_1}{R_2^2 - R_1 R_3} \Delta T \quad ; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{-T_3^* \Delta T + A_{16} \varepsilon_x^0 + A_{26} \varepsilon_y^0}{A_{66}} \Delta T \quad (2.33)$$

$$R_1 = A_{11} A_{66} - A_{16}^2 \quad R_2 = A_{12} A_{66} - A_{26}^2 \quad R_3 = A_{22} A_{66} - A_{26}^2$$

$$U_1 = -A_{16} T_3^* + A_{66} T_1^* \quad U_2 = -A_{26} T_3^* + A_{66} T_2^*$$

Los componentes en cada capa son obtenidos usando la relación esfuerzo-deformación como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Los componentes de esfuerzo en las direcciones principales del material pueden ser escritos usando la fórmula de transformación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Para el análisis de esfuerzos térmicos en compuestos laminado con fibra a temperaturas superiores a la ambiente, de acuerdo con [35], los esfuerzos térmicos para cada lámina o capa, en dirección de los ejes pueden ser determinados usando la ecuación matricial siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Los esfuerzos térmicos en el mismo compuesto para cada lámina en dirección de los ejes cartesianos, son determinados por medio de la expresión:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

## CAPÍTULO III

### Desarrollo de modelos

En este capítulo se presenta el desarrollo de los modelos usados para analizar experimentalmente esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminados simétricos. Los modelos se basan en el hecho de que las deformaciones en la frontera son conocidas y en la aplicación del principio de superposición. Con dichos modelos es posible determinar el estado de esfuerzos térmicos en un punto y su distribución a través del espesor de un compuesto laminado simétrico, así como los esfuerzos térmicos globales (promedio) y esfuerzos térmicos interlaminares (locales). Lo anterior es posible si son conocidas las propiedades elásticas y térmicas de las capas constituyentes. Los modelos de esfuerzos térmicos planteados analizan el problema total  $G + L$  como un conjunto de problemas, un problema global  $G$  de esfuerzos, y, un conjunto de problemas locales  $L$ , ver Figura 3.1. Los modelos se fundamentan en el modelo de la teoría de la elasticidad lineal, ver capítulo 2, sección 2.1, la teoría clásica de láminas compuestas, ver capítulo 2, sección (2.3), la teoría de esfuerzos térmicos ver sección (2.4) y el principio de superposición expresada en la sección 2.2, del capítulo 2.

El principio de superposición se aplica en los modelos propuestos por considerar que las ecuaciones analíticas que definen su comportamiento térmico y mecánico son lineales. Lo anterior permite descomponer un problema termo-mecánico en dos o más subproblemas y analizarlo como "superposición" o "suma" de estos [2].

Los modelos antes mencionados, son importantes porque con ellos, en forma experimental, es posible analizar esfuerzos térmicos en cualquier punto bajo condiciones de frontera de tensión, compresión o, por cargas térmicas, determinando no sólo el estado de esfuerzos térmicos promedio real de un punto instrumentado, sino también su variación a lo largo de todo el espesor.

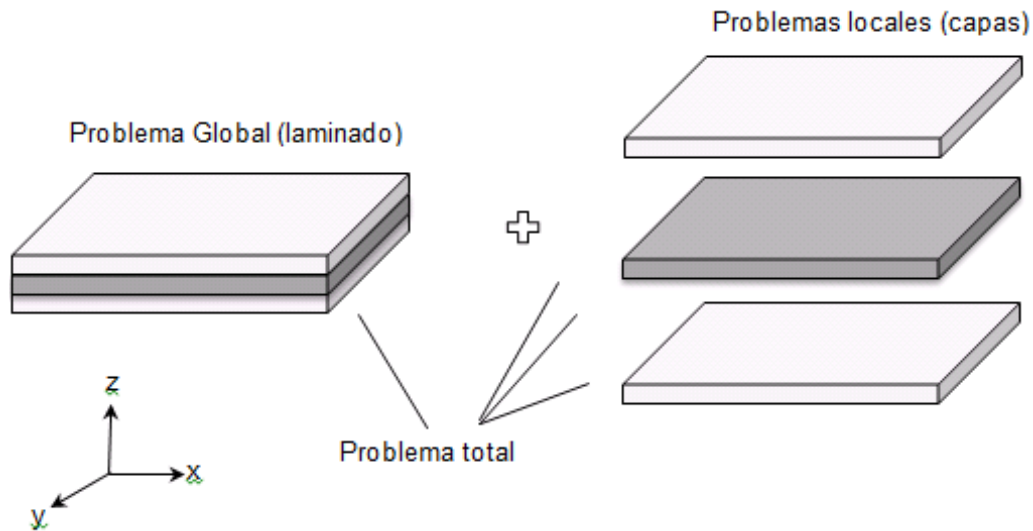


Figura 3.1. Modelo de esfuerzos térmicos para un material compuesto laminado isotrópico, conjunto constituido por un problema global de esfuerzos térmicos y un conjunto de problemas locales

El principio de superposición se aplica en los modelos propuestos por considerar que las ecuaciones que definen su comportamiento termo-mecánico son lineales. Lo anterior permite descomponer un problema mecánico en dos o más subproblemas y analizarlo como “superposición” o “suma” de estos [2].

### 3.1 Modelo de elasticidad lineal

El modelo constitutivo que será utilizado para llevar a cabo el análisis de esfuerzos térmicos en los materiales compuestos en estudio, se basa en el modelo de la teoría de elasticidad lineal y obedece las restricciones de la misma, las cuales son: el medio posee masa, es continuo, es lineal, es elástico - lineal y homogéneo [2].

### 3.2 Modelo constitutivo lineal de esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminados simétricos

El modelo de esfuerzos térmicos a utilizar en este estudio para una lámina compuesta sometida a cargas térmicas, es constitutivo y está basado en el principio de superposición, las teorías: de la elasticidad, clásica de láminas, la de

esfuerzos térmicos del capítulo 2 y, en la hipótesis de la sección 1.4, y con él es posible determinar:

- 1) La distribución de esfuerzos térmicos promedio globales  $\sigma_{Gx}$  y  $\sigma_{Gy}$
- 2) La distribución de esfuerzos térmicos locales a lo largo de todo el espesor, es decir, conocer los esfuerzos interlaminares (normales y transversales)  $\sigma_{Lx}$ ,  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{xy}$
- 3) Las propiedades elásticas, promedio de la lámina (Módulos de Young  $E_G$  y relación de Poisson  $\nu_G$ ) y de las componentes de la lámina (Módulos de Young  $E_L$ , y relación de Poisson  $\nu_L$ ), si estas son desconocidas, si son conocidos los esfuerzos térmicos globales y locales y los coeficientes de expansión térmica.
- 4) Las propiedades térmicas, promedio de la lámina (coeficiente de expansión térmica promedio de la lámina  $\alpha_G$ ) y de los componentes de la lámina (coeficiente de expansión térmica  $\alpha_L$ ), si son conocidos los esfuerzos globales e interlaminares y las propiedades elásticas.

### 3.2.1 Restricciones del modelo

Las restricciones impuestas al modelo se agrupan de la siguiente forma:

#### R1: De las capas constituyentes

- a) Las capas de la lámina son delgadas.
- b) El modelo mecánico (considerado así en la teoría clásica de láminas) considera que la unión entre capas es perfecta y los desplazamientos y deformaciones son continuos a través de la interface [2].
- c) El modelo es lineal y cumple con las restricciones de la teoría de la elasticidad, es decir: lineal, elástico-lineal, isotrópico, continuo y homogéneo.
- d) Los espesores de las capas son constantes a lo largo de toda la lámina.

## R2: De esfuerzos térmicos: problema global

- a) El modelo es lineal [61].
- b) El modelo considera que el estado de esfuerzos es homogéneo en todo el laminado y no considera efectos de borde.
- c) El problema es de esfuerzos planos.

## R3: De esfuerzos térmicos interlaminares: problema local

- a) En cada capa, el problema es de esfuerzos planos.
- b) No existen esfuerzos cortantes.
- d) Los esfuerzos globales normales  $\sigma_{Gx}$  y transversales  $\sigma_{Gy}$ , tienen una distribución promedio a través del espesor de la capa, ver Figura 3.2.

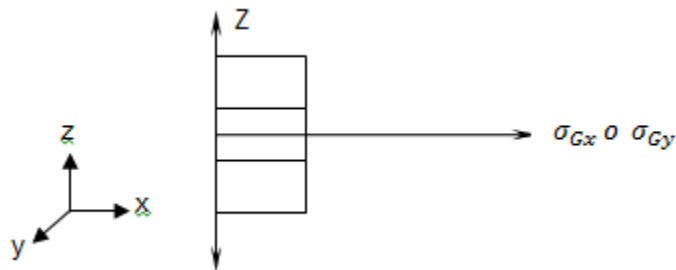


Figura 3.2. Distribución de esfuerzos térmicos interlaminares (locales) para un laminado de tres capas

## R4: Globales del material compuesto laminado metálico simétrico

- a) El laminado compuesto está constituido por capas homogéneas.
- b) La unión entre capas es perfecta.
- c) El espesor del compuesto laminado es homogéneo.



### 3.2.2 Esfuerzos globales: problema térmico

Se considerará en este trabajo el problema global como un compuesto laminado total, y su comportamiento es analizado como si se tratara de un material homogéneo e isotrópico [2]. Además, el comportamiento térmico es descrito considerando el problema de esfuerzos planos. El comportamiento termomecánico global de la lámina es el promedio del comportamiento termomecánico de todas las capas.

En una prueba térmica en un material compuesto laminado simétrico, el estado de esfuerzos térmicos es biaxial, ver Figura 3.3.

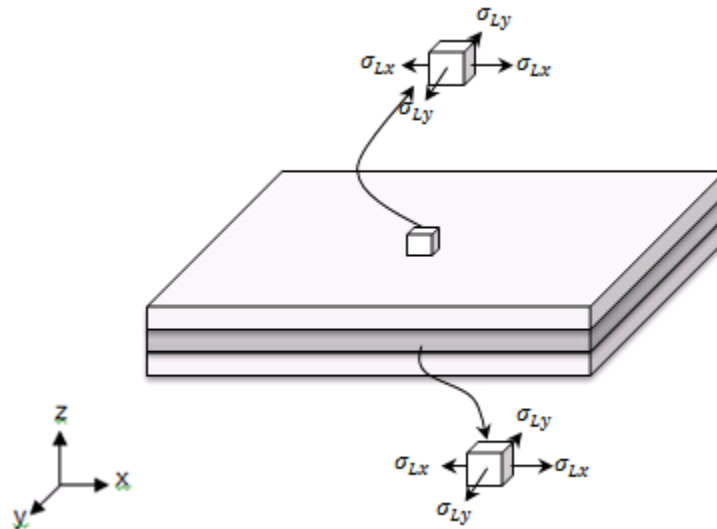


Figura 3.3. Modelo global: problema biaxial de esfuerzos térmicos en todos los puntos del laminado

Para el problema global de esfuerzos térmicos se asume que el estado de deformaciones queda representado por una deformación homogénea [67], por lo que las deformaciones en las direcciones principales 1 y 2,  $\varepsilon_1^0$  y  $\varepsilon_2^0$  son constantes en todos los puntos, esto es [2, 62]:

$$\varepsilon_1(z) = \varepsilon_1^0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_2(z) = \varepsilon_2^0$$

El exponente cero (0) significa que las deformaciones en función de la dirección  $z$  son constantes. En forma general se representan los esfuerzos térmicos globales promedio por las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\sigma_{G1} = \left(\frac{1}{h}\right)\{A_{11}\varepsilon_1^0 + A_{21}\varepsilon_2^0\} - A_T\alpha_n\Delta T \quad (3.2)$$

$$\sigma_{G2} = \left(\frac{1}{h}\right)\{A_{21}\varepsilon_1^0 + A_{22}\varepsilon_2^0\} - A_T\alpha_n\Delta T$$

donde en las direcciones 1 y 2,  $\sigma_{G1}$  y  $\sigma_{G2}$  son los esfuerzos térmicos globales promedio,  $h$  es el espesor de laminado, las  $A_{ij}$ , son constantes equivalentes que en promedio son función de las constantes elásticas y del espesor de la lámina,  $\varepsilon_1^0$  y  $\varepsilon_2^0$  son las deformaciones térmicas para un estado de deformaciones térmicas homogéneo,  $A_T$  es la constante equivalente térmica,  $\alpha_n$  es el coeficiente de expansión térmica del material y  $\Delta T$  es el cambio de temperatura.

### 3.2.3 Esfuerzos térmicos interlaminares

Si se considera que un material compuesto laminado está sujeto a cargas térmicas, al estado de esfuerzos térmicos en los puntos de cada capa (análisis local) [2], se le llamará estado de esfuerzos térmicos interlaminar y a los componentes de los esfuerzos; esfuerzos térmicos interlaminares ( $\sigma_{Lx}$  y  $\sigma_{Ly}$ ).

El estado de esfuerzos térmicos interlaminar y el nivel de esfuerzos térmicos ( $\sigma_{Lx}$  y  $\sigma_{Ly}$ ), para un compuesto sometido a cargas térmicas, es función del valor y de la diferencia entre las propiedades elásticas, de los coeficientes de expansión térmica de las capas constituyentes y de las condiciones de frontera. El estado de esfuerzos térmicos es triaxial, ver Figura (3.4).

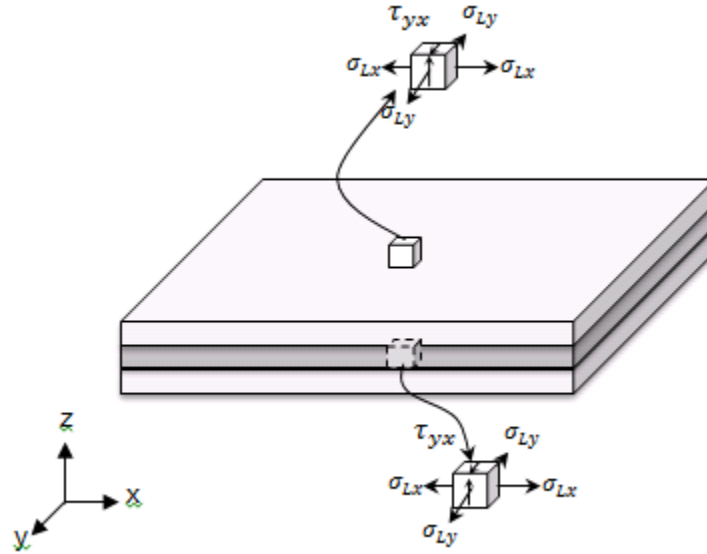


Figura 3.4. Modelo local: problema triaxial de esfuerzos en todos los puntos de la lámina

Los componentes de esfuerzos térmicos interlaminares son: longitudinal  $\sigma_{Lx}$  y transversal  $\sigma_{Ly}$ . La explicación de cómo se generan los esfuerzos antes mencionados es la siguiente: si se considera un material compuesto constituido por dos capas delgadas con diferentes coeficientes de expansión térmica, como el mostrado en la Figura 3.5a, suponiendo que las capas no están unidas, estas se pueden deformar libremente si fuesen sometidos a cargas térmicas sin existir restricciones en las fronteras, entonces el material de mayor coeficiente de expansión térmica presentaría mayor deformación en ambas direcciones como se observa en la Figura 3.5b. Si se considera ahora que existe una unión perfecta entre las capas, al aplicar las cargas térmicas, sin estar restringidas sus fronteras, entonces la deformación de cada capa será uniforme y similar en ambas direcciones  $x$  y  $y$ , pero, se generaran esfuerzos térmicos interlaminares entre una capa y otra. Lo anterior es cierto, solo si la temperatura en todo el compuesto es uniforme, el efecto se observa en la Figura 3.5c. Además, la distribución de esfuerzos térmicos longitudinal  $\sigma_{Lx}$  y transversal  $\sigma_{Ly}$ , a través del espesor de cada una de las capas es constante, ver Figura 3.6.

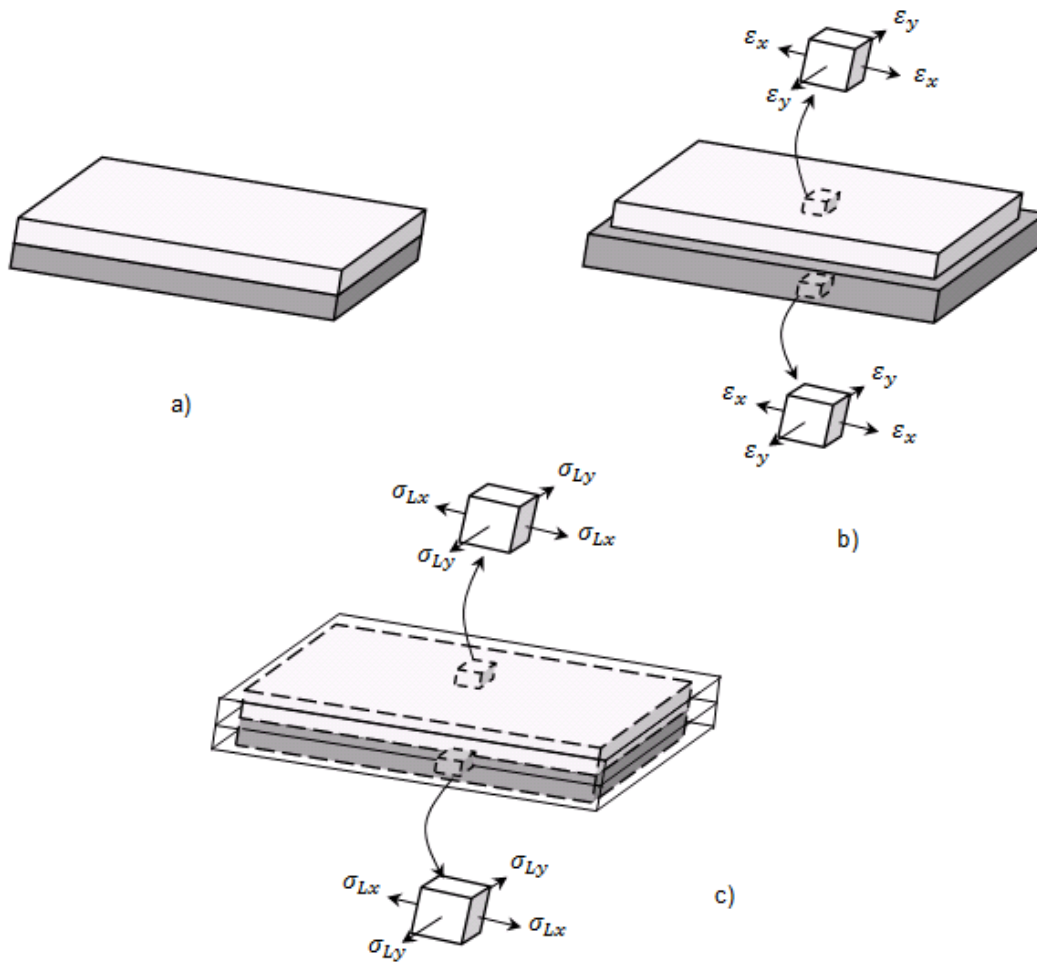


Figura 3.5. Origen de esfuerzos interlaminares en un problema de cargas térmicas por diferencia en los coeficientes de expansión térmica y de las constantes elásticas de sus componentes.

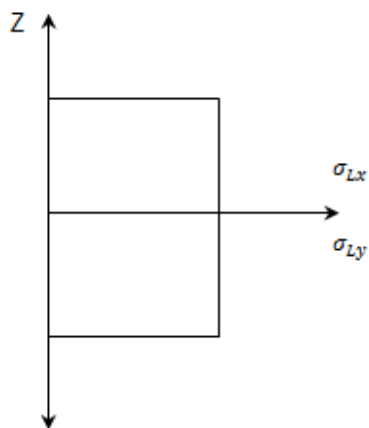


Figura 3.6. Distribución de esfuerzos interlaminares  $\sigma_{Lx}$  y  $\sigma_{Ly}$  a través de una capa

En general para el problema térmico, las ecuaciones constitutivas que analizan el problema en una dirección diferente de los ejes de simetría del laminado, ver capítulo 2, son las siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_{L1} &= Q_{11}\varepsilon_1^0 + Q_{12}\varepsilon_2^0 - Q_T\alpha_n\Delta T \\ \sigma_{L2} &= Q_{21}\varepsilon_1^0 + Q_{22}\varepsilon_2^0 - Q_T\alpha_n\Delta T\end{aligned}\quad (3.3)$$

donde  $\sigma_{L1i}$  y  $\sigma_{L2i}$  son esfuerzos térmicos interlaminares y  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{21}$  y  $Q_{22}$  son constantes de rigidez, ambos en las direcciones 1 y 2,  $Q_T$  es una constante de rigidez relacionada con la temperatura,  $\alpha_n$  es el CET de cada capa que constituye el compuesto,  $\varepsilon_1^0$  y  $\varepsilon_2^0$ , son las deformaciones homogéneas en las direcciones 1 y 2 y  $\Delta T$  es el incremento de temperatura que experimenta cada capa.

Las constantes de rigidez para cada capa constituyente en las direcciones arbitrarias 1 y 2 son  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ , y  $Q_{22}$ , mismas que se definen en función de las constantes de rigidez  $Q_{xx}$ ,  $Q_{xy}$  y  $Q_{yy}$  respecto a los ejes de simetría  $x$  y  $y$  de cada capa, como:

$$\begin{aligned}Q_{11} &= m^4Q_{xx} + 2m^2n^2Q_{xy} + n^4Q_{yy} \\ Q_{21} &= 2m^2n^2Q_{xx} + (m^4 + n^4)Q_{xy} + m^2n^2Q_{yy} \\ Q_{22} &= n^4Q_{xx} + m^2n^2Q_{xy} + m^4Q_{yy}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Nota: en la ecuación 3.3,  $Q_T$  es la constante de rigidez térmica y es la misma en todas direcciones.

Por otro lado, de acuerdo a la Figura 3.7, los cosenos directores  $m$  y  $n$ , se definen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}m &= \cos \theta \\ n &= \sin \theta\end{aligned}\quad (3.5)$$

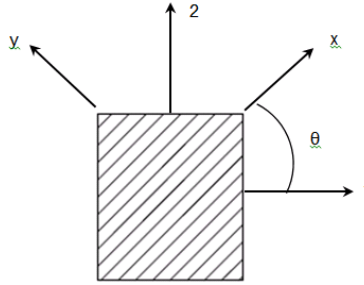


Figura 3.7. Ángulo  $\theta$  respecto a la orientación de las fibras o ejes principales

Las constantes de rigidez simétricas y la constante de rigidez térmica en función de las constantes elásticas de ingeniería, quedan definidas como sigue:

$$Q_{xx} = \frac{E_x}{(1-\nu_x\nu_y)} \quad (3.6)$$

$$Q_{yy} = \frac{E_y}{(1-\nu_x\nu_y)}$$

$$Q_{xy} = \frac{\nu_x E_x}{(1-\nu_x\nu_y)}$$

$$Q_T = \frac{E_x}{(1-\nu_x)} = \frac{E_y}{(1-\nu_y)}$$

Por otro lado, las relaciones  $E_x = E_y = E$  y  $\nu_x = \nu_y = \nu$ , se satisfacen para un material isotrópico sometido a cargas térmicas uniformes sin restricciones en las fronteras, por lo que las expresiones (3.6) toman la siguiente forma:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (3.7)$$

$$Q_{xy} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}$$

$$Q_T = \frac{\nu E}{(1-\nu)}$$

### 3.2.4 Aplicación del principio de superposición

Este principio aplica a los modelos propuestos ya que se consideran éstos como problemas lineales. Por lo tanto, el problema total puede ser sustituido por un

conjunto de problemas individuales y el estado de esfuerzos globales (promedio o totales)  $\sigma_{Gx}$  y  $\sigma_{Gy}$ , son la suma de los estados de esfuerzo locales o individuales, ver Figura 3.8, para un problema térmico. Esto es:

$$\begin{aligned}\sigma_{G1} &= \eta_I \sigma_{L1I} + \eta_{II} \sigma_{L1II} + \eta_{III} \sigma_{L1III} + \dots + \eta_i \sigma_{L1i} \\ \sigma_{G2} &= \eta_I \sigma_{L2I} + \eta_{II} \sigma_{L2II} + \eta_{III} \sigma_{L2III} + \dots + \eta_i \sigma_{L2i}\end{aligned}\quad (3.8)$$

donde  $\sigma_{G1}$ ,  $\sigma_{G2}$ , son los esfuerzos globales promedio y  $\sigma_{L1i}$ ,  $\sigma_{L2i}$ , los esfuerzos en cada capa, en las direcciones 1 y 2, y  $\eta_i$  son las fracciones volumétricas de las capas del laminado.

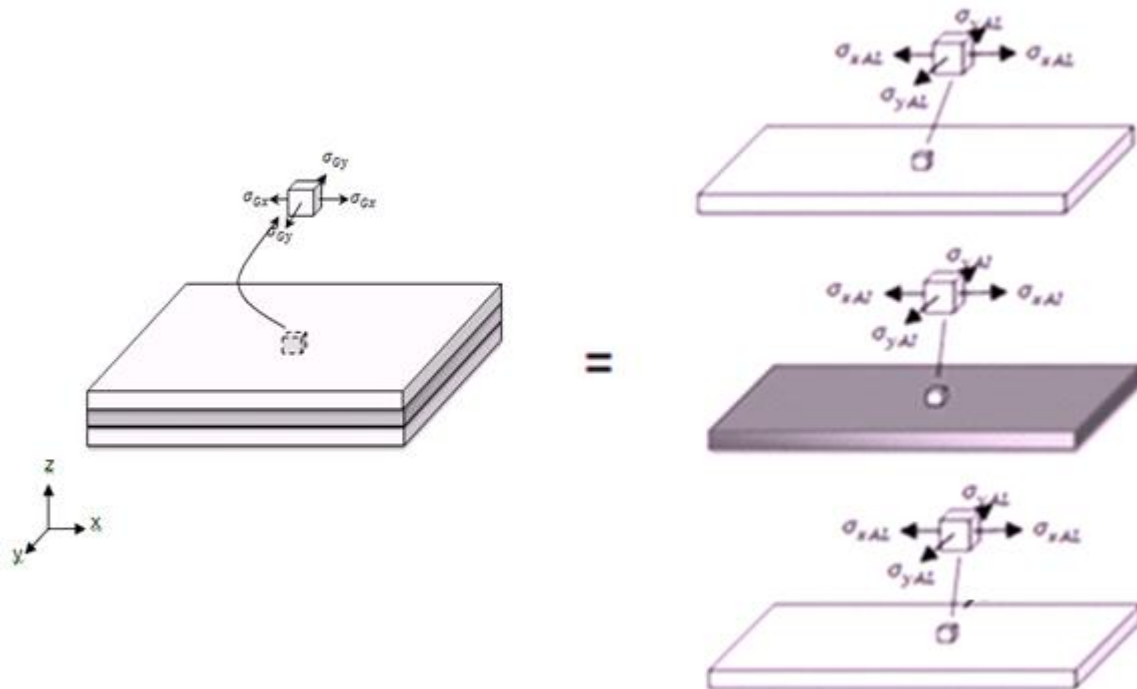


Figura 3.8 Modelo total real del problema de carga térmica pura

La fracción volumétrica ( $\eta$ ) es determinada de la manera siguiente:

$$\eta = \frac{h_i}{h} \quad (3.9)$$

$$1 = \eta_I + \eta_{II} + \eta_{III} + \dots + \eta_i$$

donde las  $\eta_i$  son las fracciones volumétricas correspondientes a las capas del compuesto,  $h$  es el espesor total del laminado y  $h_i$  son los espesores de las capas o grupos de capas constituyentes.

### 3.2.5 Modelo de esfuerzos térmicos resultante

El modelo constitutivo resultante considera un modelo global (compuesto laminado con propiedades elásticas y térmicas efectivas, promedio) y el conjunto de modelos locales, (capas de material continuo, homogéneo e isotrópico), ver Figura 3.9.

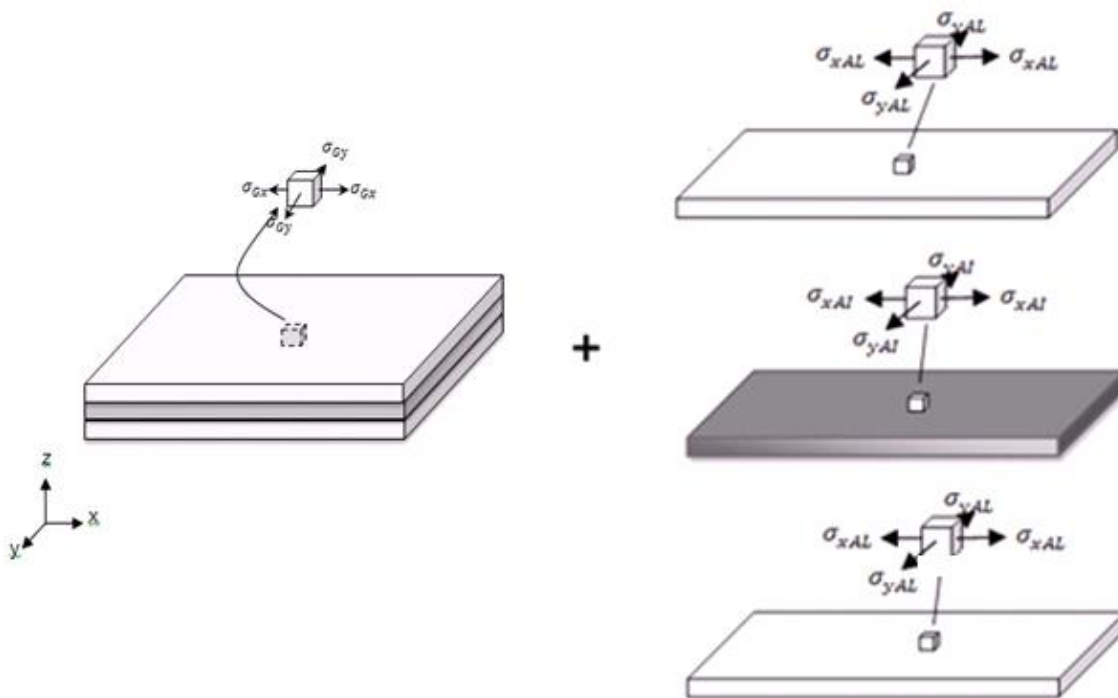


Figura 3.9 El Modelo constitutivo resultante

Por considerarse un estado de deformaciones homogéneo en las capas, los esfuerzos interlaminares  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ , no se toman en cuenta en el modelo local. Es importante notar que los esfuerzos térmicos que se consideran son únicamente los esfuerzos longitudinales  $\sigma_{Lx}$  y transversales  $\sigma_{Ly}$ , los cuáles se asumen que son homogéneos a través del espesor de las capas que integran el compuesto. Lo



anterior implica que el estado de esfuerzos térmicos interlaminar en todos los puntos de una capa es un estado de esfuerzos planos.

Por lo tanto, **las ecuaciones que definen el modelo propuesto en esta tesis** son:

$$\begin{aligned}\sigma_{L1i} &= Q_{11}\varepsilon_1^0 + Q_{12}\varepsilon_2^0 - Q_T\alpha_n\Delta T \\ \sigma_{L2i} &= Q_{21}\varepsilon_1^0 + Q_{22}\varepsilon_2^0 - Q_T\alpha_n\Delta T\end{aligned}\quad (3.10)$$

y

$$\begin{aligned}\sigma_{G1} &= \eta_I\sigma_{L1I} + \eta_{II}\sigma_{L1II} + \eta_{III}\sigma_{L1III} + \dots + \eta_i\sigma_{L1i} \\ \sigma_{G2} &= \eta_I\sigma_{L2I} + \eta_{II}\sigma_{L2II} + \eta_{III}\sigma_{L2III} + \dots + \eta_i\sigma_{L2i}\end{aligned}\quad (3.11)$$

## CAPÍTULO IV

### Ecuaciones para obtener esfuerzos térmicos y CET en compuestos c1 y c2

#### 4.1 Introducción

En este capítulo, los modelos desarrollados en el capítulo 3, son utilizados para generar las ecuaciones necesarias para determinar:

1. Los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en los compuestos en estudio.
2. Los CET de las capas de los compuestos usando un método inverso, esto es, para validar los modelos matemáticos propuestos.

Debido a que el número de ecuaciones que definen un compuesto (c1) son insuficientes para determinar el número de incógnitas, fue necesario considerar otro compuesto (c2), el cual fue construido con materiales similares al de las capas del compuesto c1, pero con distinta configuración. Los compuestos son:

- a) Un Compuesto Laminado Metálico Simétrico (CLMS) (AL-AI-AL), constituido por dos capas de aluminio (AL) y una capa intermedia de acero inoxidable (AI), llamado compuesto c1.
- b) Un segundo Compuesto Laminado Metálico Simétrico (CLMS) (AI-AL-AI), construido por dos capas de acero inoxidable (AI) y una capa intermedia de aluminio (AL), llamado compuesto (c2).

Los materiales de las capas de los compuestos son continuos, homogéneos, isotrópicos y linealmente elásticos.

Los compuestos son sometidos a cargas térmicas uniformes, no existen restricciones en las fronteras, ni solicitaciones mecánicas y las capas de cada compuesto son isotrópicas.

## 4.2 Ecuaciones generales para determinar esfuerzos térmicos

Utilizando los modelos de esfuerzos térmicos obtenidos en la sección 3.2 del capítulo 3, se generan las ecuaciones necesarias para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en los compuestos en estudio.

### 4.2.1 Ecuaciones para determinar esfuerzos térmicos interlaminares

Las ecuaciones constitutivas (3.10) [modelo constitutivo local], del capítulo 3, son utilizadas para generar las ecuaciones particulares para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares de las capas de aluminio (AL) y de acero inoxidable (AI) de los compuestos c1 y c2, éstas ecuaciones se reescriben a continuación:

$$\begin{aligned}\sigma_{1i} &= Q_{11}\varepsilon_1^0 + Q_{12}\varepsilon_2^0 - Q_T\alpha_n\Delta T \\ \sigma_{2i} &= Q_{21}\varepsilon_1^0 + Q_{22}\varepsilon_2^0 - Q_T\alpha_n\Delta T\end{aligned}\quad (4.1)$$

En las capas de los compuestos los ejes de principales 1 y 2, y los ejes de simetría x, y, son paralelos entre sí, entonces, el ángulo entre el eje de principal 1 y el eje de simetría x, es cero, por lo que:

$$Q_{11} = Q_{xx} \quad ; \quad Q_{21} = Q_{xy} \quad ; \quad Q_{22} = Q_{yy}$$

Las constantes de rigidez simétricas y la constante de rigidez térmica en función de las constantes elásticas de ingeniería, para un compuesto sometido sólo a cargas térmicas son reescritas a continuación:

$$\begin{aligned}Q_{xx} = Q_{yy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ Q_{xy} &= \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}\end{aligned}\quad (4.2)$$

De acuerdo con [63], la constante de rigidez térmica  $Q_T$  es la misma en todas direcciones y es obtenida sobre la base de las constantes elásticas mediante la siguiente expresión:

$$Q_T = \frac{E}{1-\nu} \quad (4.3)$$

Por otro lado, las deformaciones homogéneas  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ , de acuerdo con proceso utilizado en [62], se puede transformar en  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ , en base a las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 m^2 + \varepsilon_2 n^2 + \varepsilon_6 mn \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_1 n^2 + \varepsilon_2 m^2 - \varepsilon_6 mn$$

Debido a que se estableció que  $\theta = 0$ , las deformaciones son:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \quad ; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2$$

Por lo que de acuerdo a lo anterior, se puede decir que:

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_x^0 \quad ; \quad \varepsilon_2^0 = \varepsilon_y^0 \quad (4.5)$$

Por lo tanto, si  $\sigma_{L1i} = \sigma_{Lxn}$  y  $\sigma_{L2i} = \sigma_{Lyn}$ , entonces las ecuaciones (4.1) pueden ser expresadas como:

$$\sigma_{Lxn} = \frac{E_n}{1-\nu_n^2} (\varepsilon_x^0 + \nu_n \varepsilon_y^0) - \frac{E_n \alpha_n \Delta T}{1-\nu_n} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{Lyn} = \frac{E_n}{1-\nu_n^2} (\varepsilon_y^0 + \nu_n \varepsilon_x^0) - \frac{E_n \alpha_n \Delta T}{1-\nu_n}$$

Aquí, para cada n-capa,  $\sigma_{Lxn}$  y  $\sigma_{Lyn}$ , son los esfuerzos térmicos interlaminares de una capa cualquiera en direcciones de los ejes de simetría  $x$ , y  $y$ ,  $E_n, \nu_n$  son el módulo de elasticidad y la relación de Poisson de cada capa,  $\alpha_n$  el coeficiente de

expansión térmica de cada capa,  $\varepsilon_x^0$  y  $\varepsilon_y^0$  son las deformaciones homogéneas longitudinal y transversal medidas en la frontera un compuesto laminado y  $\Delta T$  es el cambio de temperatura.

Las ecuaciones (4.6), representan el conjunto de ecuaciones necesarias para determinar los esfuerzos interlaminares en las direcciones x, y, de cada capa que integra un material compuesto laminado isotrópico no definido.

### 1) Ecuaciones para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares en el compuesto c1

El conjunto de ecuaciones para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares en las capas del compuesto c1 (AL-AI-AL), se genera a partir de las ecuaciones (4.6), haciendo  $AL = n$  para la capa de aluminio y  $AI = n$  para la capa de acero inoxidable, estas son:

$$\begin{aligned}\sigma_{xALc1} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{xc1}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{yc1}^0) - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \\ \sigma_{yALc1} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{yc1}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{xc1}^0) - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \\ \sigma_{xAIc1} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{xc1}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{yc1}^0) - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \\ \sigma_{yAIc1} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{yc1}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{xc1}^0) - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Aquí,  $\sigma_{xALc1}, \sigma_{yALc1}, \sigma_{xAIc1}, \sigma_{yAIc1}$  en el compuesto c1 son los esfuerzos térmicos interlaminares longitudinales y transversales de las capas de aluminio y de acero inoxidable, respectivamente,  $\varepsilon_{xc1}^0$  y  $\varepsilon_{yc1}^0$ , son las deformaciones medidas en la frontera del compuesto,  $E_{AL}, E_{AI}, \nu_{AL}$  y  $\nu_{AI}$ , son los respectivos módulos de elasticidad y la relaciones de Poisson de las capas,  $\alpha_{AL}, \alpha_{AI}$  son los CET del aluminio y del acero inoxidable, y  $\Delta T_{c1}$  es el cambio de temperatura en el compuesto.

## 2) Ecuaciones para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares en el compuesto c2

De forma similar a 1), las ecuaciones para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares en las capas del compuesto c2 (Al-AL-Al), son:

$$\begin{aligned}\sigma_{xALc2} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{xc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{yc2}^0) - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \\ \sigma_{yALc2} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{yc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{xc2}^0) - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \\ \sigma_{yALc2} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{yc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{xc2}^0) - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \\ \sigma_{yAlc2} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{yc2}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{xc2}^0) - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}\end{aligned}\quad (4.8)$$

### 4.2.2 Ecuaciones para determinar esfuerzos térmicos globales

Las ecuaciones para determinar esfuerzos globales en los compuestos c1 y c2, son generadas a partir de las ecuaciones (3.11), del capítulo 3, que se reescriben a continuación:

$$\begin{aligned}\sigma_{G1} &= \eta_I \sigma_{1I} + \eta_{II} \sigma_{1II} + \eta_{III} \sigma_{1III} + \dots + \eta_i \sigma_{1i} \\ \sigma_{G2} &= \eta_I \sigma_{2I} + \eta_{II} \sigma_{2II} + \eta_{III} \sigma_{2III} + \dots + \eta_i \sigma_{2i}\end{aligned}\quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.9), representan el modelo global del compuesto.

Para el caso particular de un compuesto laminado metálico simétrico constituido por dos tipos de capas la ecuación (4.9) se reduce después del signo igual a sólo dos términos.

Considerando que los ejes principales, y los ejes de simetría son paralelos, se puede expresar que  $\sigma_{G1}$  y  $\sigma_{G2}$  son equivalentes a  $\sigma_{Gx}$  y  $\sigma_{Gy}$ , también  $\sigma_{1I} = \sigma_{xn1}$ ,

$\sigma_{1II} = \sigma_{xn2}$ ,  $\sigma_{2I} = \sigma_{yn1}$ ,  $\sigma_{2II} = \sigma_{yn2}$ ,  $\eta_I = \eta_{n1}$  y  $\eta_{II} = \eta_{n2}$ , por consiguiente, la ecuación (4.9), puede se transforma en:

$$\sigma_{Gx} = \eta_{n1}\sigma_{xn1} + \eta_{n2}\sigma_{xn2} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{Gy} = \eta_{n1}\sigma_{yn1} + \eta_{n2}\sigma_{yn2}$$

donde  $\sigma_{Gx}$  y  $\sigma_{Gy}$  son los esfuerzos globales en las direcciones x, y,  $\eta_{n1}$  es la fracción volumétrica relacionada con la o las capas 1,  $\eta_{n2}$  es respecto a la o las capas 2,  $\sigma_{xn1}$  y  $\sigma_{xn2}$  son los esfuerzos térmicos interlaminares en la dirección x (o normales),  $\sigma_{yn1}$ ,  $\sigma_{yn2}$  son esfuerzos térmicos interlaminares en la dirección y (o transversales), de las capas 1 y 2.

La ecuación (4.10) es utilizada para determinar los esfuerzos térmicos globales en un compuesto laminado simétrico cualquiera.

### 1) Ecuaciones para determinar esfuerzos térmicos globales en un compuesto c1

Las ecuaciones para determinar los esfuerzos térmicos globales para el compuesto c1 (AL-AI-AL), se basa en las ecuaciones (4.10) y en las siguientes consideraciones:  $\eta_{nALc1} = \eta_{n1}$ ,  $\eta_{nAIC1} = \eta_{n2}$ , y  $\sigma_{xALc1} = \sigma_{xn1}$ ,  $\sigma_{xAIC1} = \sigma_{xn2}$ , y que  $\sigma_{yALc1} = \sigma_{yn1}$ ,  $\sigma_{yAIC1} = \sigma_{yn2}$ . Las ecuaciones son:

$$\sigma_{Gxc1} = \eta_{ALc1}\sigma_{xALc1} + \eta_{AIC1}\sigma_{xAIC1} \quad (4.11)$$

$$\sigma_{Gyc1} = \eta_{ALc1}\sigma_{yALc1} + \eta_{AIC1}\sigma_{yAIC1}$$

Donde  $\sigma_{Gxc1}$ ,  $\sigma_{Gyc1}$  son los esfuerzos térmicos globales longitudinales y transversales,  $\eta_{ALc1}$ ,  $\eta_{AIC1}$  son las respectivas fracciones volumétrica del aluminio y del acero inoxidable,  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAIC1}$  son los esfuerzos térmicos interlaminares longitudinales en capas de aluminio y de acero inoxidable, y  $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{yAIC1}$  son los esfuerzos térmicos interlaminares transversales.

## 2) Ecuaciones para determinar esfuerzos térmicos globales en un compuesto c2

Considerando que:  $\eta_{nALc2} = \eta_{n1}$ ,  $\eta_{nAic2} = \eta_{n2}$ , y  $\sigma_{xALc2} = \sigma_{xn1}$ ,  $\sigma_{xAic2} = \sigma_{xn2}$ , y que  $\sigma_{yALc2} = \sigma_{yn1}$ ,  $\sigma_{yAic2} = \sigma_{yn2}$ , las ecuaciones (4.10) se transforman en:

$$\sigma_{Gxc2} = \eta_{ALc2}\sigma_{xALc2} + \eta_{Aic2}\sigma_{xAic2} \quad (4.12)$$

$$\sigma_{Gyc2} = \eta_{ALc2}\sigma_{yALc2} + \eta_{Aic2}\sigma_{yAic2}$$

### 4.2.3 Ecuaciones resultantes relacionadas con los compuestos c1 y c2

Para determinar los esfuerzos térmicos globales en los compuestos c1 y c2:

$$1) \sigma_{Gxc1} = \eta_{ALc1}\sigma_{xALc1} + \eta_{Aic1}\sigma_{xAic1} \quad (4.13)$$

$$2) \sigma_{Gyc1} = \eta_{ALc1}\sigma_{yALc1} + \eta_{Aic1}\sigma_{yAic1}$$

$$3) \sigma_{Gxc2} = \eta_{ALc2}\sigma_{xALc2} + \eta_{Aic2}\sigma_{xAic2}$$

$$4) \sigma_{Gyc2} = \eta_{ALc2}\sigma_{yALc2} + \eta_{Aic2}\sigma_{yAic2}$$

Para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares en los compuestos c1 y c2:

$$1) \sigma_{xALc1} = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{xc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{yc1}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \quad (4.14)$$

$$2) \sigma_{yALc1} = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{yc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{xc1}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}}$$

$$3) \sigma_{xAic1} = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{xc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{yc1}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}$$

$$4) \sigma_{yAic1} = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{yc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{xc1}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}$$

$$5) \sigma_{xALc2} = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{xc2}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{yc2}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}}$$

$$6) \sigma_{yALc2} = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{yc2}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{xc2}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}}$$

$$7) \sigma_{xAic2} = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{xc2}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{yc2}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$

$$8) \sigma_{yAic2} = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{yc2}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{xc2}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$



### 4.3 Ecuaciones para obtener CET de las capas en compuestos c1 y c2

En esta sección, partiendo de las ecuaciones (4.13) y (4.14), se lleva a cabo un desarrollo matemático para obtener las ecuaciones que son utilizadas para determinar los CET, de las capas de aluminio y del acero inoxidable de los compuestos c1 y c2, considerando estos como desconocidos. Para este fin, se utiliza un método inverso [2], y se consideran conocidas las constantes elásticas, las fracciones volumétricas, las deformaciones térmicas, las constantes elásticas y los cambios de temperatura.

En los compuestos c1 y c2, los esfuerzos térmicos globales longitudinales y transversales son cero, no existen restricciones, ni sollicitaciones mecánicas en las fronteras, esto es, son sometidos a temperatura uniforme.

Las ecuaciones para determinar los CET ( $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ ), de las capas de aluminio y acero inoxidable de los compuestos c1 y c2, son obtenidas de la manera siguiente:

- 1) Un conjunto de ecuaciones para determinar ( $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ ), es obtenido utilizando los componentes en x, de las ecuaciones (4.13) y (4.14).
- 2) Otro conjunto para determinar los mismos CET, es obtenido utilizando los componentes en y, de las ecuaciones (4.13) y (4.14).

#### 4.3.1 Ecuaciones para determinar $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ mediante esfuerzos térmicos en x

Para el desarrollo de las ecuaciones se utilizan las ecuaciones (4.13, 1 y 2) y (4.14, 1, 2, 3 y 4) de los compuestos c1 y c2, las cuales son expresadas en la forma siguiente:

$$1) 0 = \eta_{ALc1}\sigma_{xALc1} + \eta_{AIC1}\sigma_{xAIC1} \quad (4.15)$$

$$2) 0 = \eta_{ALc2}\sigma_{xALc2} + \eta_{AIC2}\sigma_{xAIC2}$$

$$1) \sigma_{xALc1} = A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc1}{1-\nu_{AL}} \quad (4.16)$$

$$2) \sigma_{xAIc1} = B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta Tc1}{1-\nu_{AI}}$$

$$3) \sigma_{xALc2} = C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc2}{1-\nu_{AL}}$$

$$4) \sigma_{xAIc2} = D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta Tc2}{1-\nu_{AI}}$$

Los módulos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$ , son determinados de la siguiente forma:

$$1) A = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{xc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{yc1}^0) \quad (4.17)$$

$$2) B = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{xc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{yc1}^0)$$

$$3) C = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{xc2}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{yc2}^0)$$

$$4) D = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{xc2}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{yc2}^0)$$

### 1) Ecuación para determinar el CET $\alpha_{AL}$ con esfuerzos en $x$

La ecuación para determinar el CET ( $\alpha_{AL}$ ) del aluminio se obtuvo mediante el siguiente proceso:

#### Paso 1

Se despejan  $\sigma_{xALc1}$  de la ecuación (4.15, 1) y  $\sigma_{xALc2}$  de la ecuación (4.15, 2).

$$1) \sigma_{xALc1} = -(\eta_{AIc1}\sigma_{xAIc1})/\eta_{ALc1}$$

$$2) \sigma_{xALc2} = -(\eta_{AIc2}\sigma_{xAIc2})/\eta_{ALc2}$$

#### Paso 2

Se igualan las ecuaciones (1) y (4.16, 1), y se despeja el esfuerzo interlaminar para la capa de acero inoxidable  $\sigma_{xAIc1}$ , del compuesto c1.

$$-(\eta_{AIc1}\sigma_{xAIc1})/\eta_{ALc1} = A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc1}{1-\nu_{AL}}$$

$$3) \sigma_{xAlc1} = - \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc1}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{Alc1}}$$

### Paso 3

Se igualan las ecuaciones (3) y (4.16, 2) y se despeja el CET del acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ).

$$- \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc1}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{Alc1}} = B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta Tc1}{1-\nu_{AI}}$$

Despejando el CET del acero inoxidable  $\alpha_{AI}$ , se obtiene:

$$4) \alpha_{AI} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta Tc1} \left\{ B + \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc1}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{Alc1}} \right\}$$

### Paso 4

Se igualan las ecuaciones (2) y (4.16, 3), y se despeja el esfuerzo interlaminar para la capa de acero inoxidable  $\sigma_{xAlc2}$ , del compuesto c2.

$$-(\eta_{Alc2}\sigma_{xAlc2})/\eta_{ALc2} = C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc2}{1-\nu_{AL}}$$

$$5) \sigma_{xAlc2} = - \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc2}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}}$$

### Paso 5

Se igualan las ecuaciones (5) y (4.16, 4) y se despeja el CET ( $\alpha_{AI}$ ).

$$- \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc2}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}} = D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta Tc2}{1-\nu_{AI}}$$

Despejando el CET del acero inoxidable  $\alpha_{AI}$ , se obtiene:

$$6) \alpha_{AI} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta Tc2} \left\{ D + \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc2}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}} \right\}$$

## Paso 6

Se igualan las expresiones (4) y (6), y se despeja el CET de la capa de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ), de los compuestos c1 y c2. Esto es:

$$\frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta Tc2} \left\{ D + \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc2}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right\} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta Tc1} \left\{ B + \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta Tc1}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right\}$$

Desarrollando y simplificando términos se obtiene el coeficiente de expansión térmica de aluminio.

$$\alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} - \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right)} \left\{ \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \frac{A}{\Delta Tc1} \right) - \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \frac{C}{\Delta Tc2} \right) + \frac{B}{\Delta Tc1} - \frac{D}{\Delta Tc2} \right\} \quad (4.18)$$

### 2) Ecuación para determinar el CET $\alpha_{AI}$ con esfuerzos en x

Para obtener la ecuación particular para determinar el CET del acero inoxidable, hay tres alternativas, dos de ellas consisten en sustituir la ecuación (4.18) en las ecuaciones (4) y (6), la otra es siguiendo un proceso parecido al inciso anterior, esto es, de las ecuaciones (4) y (6), en vez de despejar  $\alpha_{AI}$  se despeja  $\alpha_{AL}$ , ver desarrollo en Anexo B, las ecuaciones que se obtienen son:

$$7) \alpha_{AL} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta Tc1} \left\{ A - \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \left[ \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta Tc1}{1-\nu_{AI}} - B \right] \right\}$$

$$8) \alpha_{AL} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta Tc2} \left\{ C - \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta Tc2}{1-\nu_{AI}} - D \right] \right\}$$

Al igualarse (7) y (8), se obtiene la ecuación particular para determinar el CET de la capa de acero inoxidable  $\alpha_{AI}$ .

$$\alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} - \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right)} \left\{ \frac{D}{\Delta Tc2} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right) - \frac{B}{\Delta Tc1} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) + \frac{C}{\Delta Tc2} - \frac{A}{\Delta Tc1} \right\} \quad (4.18)$$

### 4.3.2 Ecuaciones para obtener $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ mediante esfuerzos térmicos en y

Las ecuaciones para obtener los Coeficientes de Expansión Térmica  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$  son obtenidas utilizando las ecuaciones (4.15, 3 y 4) y (4.16, 5, 6, 7 y 8) que corresponden a los componentes de los esfuerzos térmicos globales e interlaminares en dirección y.

Siguiendo un desarrollo similar al del inciso 4.3.1, que puede ser observado en el Anexo B, se obtienen los CET de la capa de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) y del acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ), los cuales son:

$$\alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{AIC2}} - \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{AIC1}} \right)} \left\{ \frac{G}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{AIC2}} \right) - \frac{E}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{AIC1}} \right) + \frac{H}{\Delta T_{C2}} - \frac{F}{\Delta T_{C1}} \right\} \quad (4.19)$$

$$\alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} - \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right)} \left\{ \frac{H}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) - \frac{F}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) + \frac{G}{\Delta T_{C2}} - \frac{E}{\Delta T_{C1}} \right\} \quad (4.20)$$

## **CAPÍTULO V**

### **Análisis experimental de esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminados metálicos simétricos**

#### **5.1 Introducción**

En este capítulo se describe el proceso utilizado para llevar a cabo el análisis experimental de esfuerzos térmicos. Se desarrolla una breve descripción acerca de la fabricación e instrumentación de los especímenes de prueba. Asimismo, se describen las pruebas experimentales llevadas a cabo en probetas individuales para determinar las constantes elásticas y los Coeficientes de Expansión Térmica (CET) de los materiales involucrados en la construcción de los materiales compuestos. También se describen las pruebas experimentales térmicas en los compuestos en estudio y se obtienen las deformaciones que luego se corrigen mediante un proceso utilizado en [75], además, se determinan los CET para validar el modelo propuesto. Una vez validado el modelo, se determinan los esfuerzos térmicos interlaminares y globales. Finalmente se analizan los resultados obtenidos. Este capítulo se divide en tres secciones las cuales se describen a continuación:

1. Pruebas experimentales en materiales compuestos laminados metálicos simétricos.
2. Resultados de las pruebas experimentales.
3. Análisis de resultados de las pruebas experimentales.

Los materiales laminados metálicos simétricos utilizados son los compuestos c1 y c2.

#### **5.2 Justificación de las pruebas experimentales**

Las pruebas experimentales son necesarias por los siguientes motivos:

1. Para validar y mostrar la eficacia de los modelos desarrollados.
2. Porque se requiere determinar las constantes experimentales elásticas, como el módulo de elasticidad, la relación de Poisson y los CET experimentales de los materiales (aluminio y acero inoxidable) de las capas de los compuestos utilizados.
3. Por ser necesario determinar por medio de un método inverso [2], los CET de las capas de los compuestos.
4. Para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares y globales, que están presentes en los compuestos en estudio.

El análisis experimental de esfuerzos y deformaciones realizado a materiales compuestos llevado a cabo en este trabajo de tesis, consiste en someter las probetas instrumentadas con extensómetros eléctricos de resistencia variable a un campo de temperaturas y, posteriormente, medir las deformaciones en las fronteras. Las deformaciones obtenidas deben ser corregidas y, en una segunda instancia, llevar a cabo los cálculos correspondientes. No existen, para el análisis experimental, restricciones en las fronteras ni sollicitaciones mecánicas en los compuestos estudiados.

Los materiales compuestos tienen diferente configuración (aunque los materiales de sus capas son iguales) cumpliendo de esta forma con el número suficiente de ecuaciones constitutivas independientes. La restricción que se debe de cumplir en cada prueba térmica es que las configuraciones de los laminados (probetas) generen ecuaciones linealmente independientes.

En las pruebas realizadas se debe garantizar un estado de esfuerzos térmicos global homogéneo en todos los puntos del espécimen, para poder cumplir con las restricciones de los modelos. Esto implica decir que la efectividad de los resultados experimentales depende del control de las variables que afectan el comportamiento térmico de las probetas durante la prueba.

Finalmente, se asumirá que las probetas fabricadas cumplen con las hipótesis y restricciones enunciadas en el capítulo 3, para el problema de cargas térmicas.

### **5.3 Pruebas experimentales en los compuestos c1 y c2**

En esta sección se hace una breve descripción del proceso llevado a cabo para fabricar e instrumentar los especímenes individuales y compuestos que son necesarios para llevar a cabo las pruebas experimentales. Una vez contruidos los especímenes, dos de ellos fueron sometidos a cargas de tensión. Posteriormente, fueron medidas las deformaciones en las fronteras y se obtuvieron las constantes elásticas experimentales módulo de elasticidad y relación de Poisson. Luego, un segundo par de especímenes fueron sometidos a cargas térmicas y con las deformaciones obtenidas, se determinaron los CET experimentales.

También se construyeron e instrumentaron dos compuesto laminados metálicos simétricos c1 y c2. En las pruebas experimentales térmicas se midieron las deformaciones. Estas fueron corregidas y, posteriormente se calcularon, primero mediante un método inverso, los CET de las capas de los compuestos, (los cuales se compararon con los CET experimentales y los de una base de datos) y, en segundo lugar, se calcularon los esfuerzos térmicos interlaminares y globales, además, se llevó a cabo un análisis de los resultados obtenidos. En el proceso experimental se utilizó la Técnica de Extensometría Eléctrica de Resistencia Variable (strain gage).

#### **5.3.1 Fabricación e instrumentación de probetas**

Para que se observe una diferencia considerable entre los esfuerzos térmicos interlaminares, se decidió usar materiales con una diferencia considerable en las propiedades elásticas y térmicas, por lo que, los materiales seleccionados son:

- a) Aluminio
- b) Acero Inoxidable



Se fabricaron e instrumentaron seis probetas o especímenes individuales y dos especímenes compuestos, ver Anexo C. Estos últimos están constituidos de la siguiente forma:

- 1) Compuesto laminado metálico simétrico, constituido por dos capas de aluminio (AL) y una capa intermedia de acero inoxidable (AI), cuya configuración es AL-AI-AL y es llamado compuesto c1.
- 2) Compuesto laminado metálico simétrico constituido por dos capas de acero inoxidable (AI) y una capa intermedia de aluminio (AL), cuya configuración es AI-AL-AI, y es llamado compuesto c2.

Los materiales y equipos, así como los procesos seguidos para fabricar e instrumentar las probetas, son mostrados en el Anexo C.

### **1) Fabricación de probetas simples**

Para realizar las pruebas experimentales se fabricaron en total doce probetas simples, de las cuales dos fueron utilizadas para obtener las constantes elásticas experimentales, cuatro para determinar los CET experimentales de los materiales, y seis para construir los compuestos c1 y c2. .

Las probetas se sometieron a un proceso de uniformizado y acabado (ver Anexo 2) y se dimensionaron con un vernier digital. En la Tabla 5.1 se presentan las dimensiones promedio y en la Figura 5.1 se observan dos probetas, una de acero inoxidable y otra de aluminio totalmente terminadas.

Tabla 5.1. Dimensiones promedio en mm de probetas terminadas (L longitud, A ancho, E espesor)

Material	Identificación	L	A	E
Aluminio	AL1	98.86	25.27	2.92
	AL2	98,92	25.27	2.92
	AL3	98.63	25.24	2.93
	AL4	99.00	25.25	2.94
Aluminio		153.5	25.35	2.93
Acero Inoxidable	AI1	99.46	25.34	2.83
	AI2	99.35	25.26	2.83
	AI3	99.02	25.35	2.86
	AI4	99.13	25.34	2.92
Acero Inox.		153.4	25.36	2.95
AL 2024-T3		72.00	30.95	0.635
ACERO 1018		153.25	38.00	6.22



Figura 5.1. Probetas de aluminio y acero inoxidable terminadas

## 2) Fabricación de materiales compuestos

En esta sección se presenta el proceso de fabricación de los materiales compuestos. Para el propósito de esta tesis, fueron dos materiales compuestos c1 y c2. La unión de las capas se llevó a cabo mediante el pegamento Devcon SPA Plasti-Alum, como se observa en la Figuras 5.2 a, y 5.2 b. Una vez construidas, se uniformizaron las superficies y las dimensiones finales se observan en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2. Dimensiones finales promedio en mm de probetas compuestas

COMPUESTO	L	A	E
AL-AI-AL (c1)	96.79	25.05	9.00
AI-AL-AI (c2)	96.20	25.01	9.05



a) Aplicación de capa de PlastiAlum

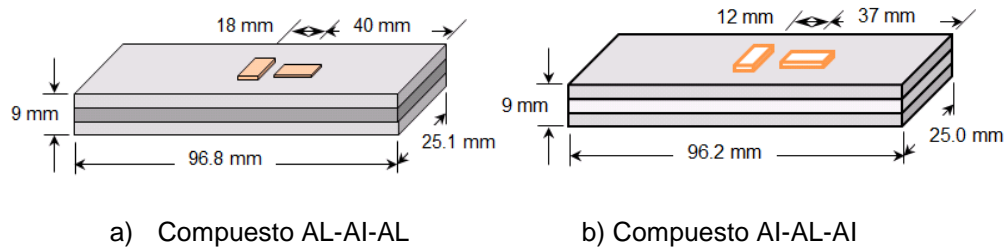


b) Aplicación de presión

Figura 5.2. Construcción de un material compuesto

### 3) Instrumentación de probetas y pruebas de instalación

En el proceso de instrumentación se siguieron los pasos recomendados en [68], para pegamento M-Bond 200 explicado en el Anexo C. El tipo de extensómetro eléctrico de resistencia variable seleccionado fue el EA-06-120LZ-120/E. Una vez unidos los extensómetros en las probetas se soldaron los conductores siguiendo el proceso sugerido por [69] el cual es mostrado en Anexo C. En la Figura 5.3 se observa la ubicación de las galgas en cada compuesto y en la Figura 5.4 se observan las probetas que fueron construidas e instrumentadas.



a) Compuesto AL-AI-AL

b) Compuesto AI-AL-AI

Figura 5.3. Dimensiones y ubicación de las galgas extensométricas en los compuestos



Figura 5.4. Probetas simples y compuestas terminadas e instrumentadas

Una vez instrumentadas las probetas, se llevaron a cabo las pruebas de la instalación utilizando el probador de galgas Model 1300 de Vishay [70]. Los resultados registrados (ver en la Tabla C.3 del Anexo C), demuestran que la instrumentación de las probetas fue realizada correctamente. En la Figura 5.5 se muestra la conexión de un extensómetro eléctrico de resistencia variable al probador.



Figura 5.5. Extensómetro conectado al Tester Model 1300 Vishay

### 5.3.2 Pruebas experimentales en especímenes

Una vez contruidos e instrumentados los especímenes de prueba, se procedió a llevar a cabo las pruebas experimentales correspondientes, las cuales fueron:

- a) Pruebas a tensión, realizadas para determinar las constantes elásticas experimentales (módulo de elasticidad  $E$  y relación de Poisson  $\nu$ ) de una probeta de aluminio y otra de acero inoxidable, de material similar a las capas de los compuestos.
- b) Pruebas térmicas llevadas a cabo para determinar los CET experimentales ( $\alpha_{AL}, \alpha_{AI}$ ), de una probeta de aluminio y de otra de acero inoxidable similares a las que integran los compuestos.
- c) Pruebas térmicas de los materiales compuestos c1 y c2, para determinar en forma inversa los CET de las capas y para calcular los esfuerzos térmicos interlaminares y globales.

#### 5.3.2.1 Pruebas de tensión para determinar las constantes elásticas

Para conocer las constantes elásticas experimentales (módulo de elasticidad y relación de Poisson) de los materiales utilizados para construir las capas de los compuestos, se llevaron a cabo las pruebas de tensión en una Máquina Universal State System Instron 22MF, de 98KN, en dos especímenes cuyas dimensiones en mm son 153.5 x 25.35 x 2.93, instrumentados cada uno con dos extensómetros EA-06-120LZ-120/E, uno longitudinal y otro transversal. Estos dos especímenes son de material similar al de las capas de los compuestos. Las pruebas se llevaron a cabo mediante la norma NMX-B-310-1981-SCFI [63], los resultados se muestran en la Tabla 5.3 que está en la siguiente sección. El proceso completo relacionado con estas pruebas se describe en el Anexo D.

### 5.3.2.2 Pruebas térmicas para determinar los CET de probetas individuales

Se llevaron a cabo pruebas térmicas experimentales en cuatro especímenes individuales (ver Anexo D). Para tal efecto, se usó una cámara térmica [71]. La conexión utilizada fue medio puente (ver Figura 5.6). Los especímenes que se muestran a continuación, se sometieron a cambios de temperatura controlados y se midieron las deformaciones en las fronteras:

- a) Una probeta de aluminio (AL), con CET desconocido.
- b) Una probeta de acero inoxidable (AI), de CET desconocido.
- c) Otra probeta de acero 1018, con CET conocido ( $\alpha_{1018} = 11 \mu\epsilon/^\circ C$ ).
- d) Otra probeta de aluminio 2024-T3, con CET conocido ( $\alpha_{2024} = 23.4 \mu\epsilon/^\circ C$ ).

Los dos primeros especímenes son llamados en el proceso experimental, *materiales de prueba*, que son similares a los de las capas utilizadas en la construcción de los compuestos c1 y c2, los dos últimos especímenes son llamados *materiales de referencia*.

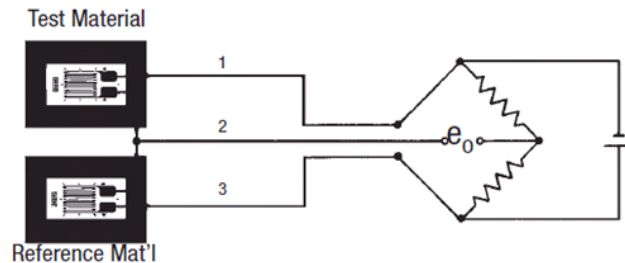


Figura 5.6. Circuitos para medición de coeficientes de expansión en galgas extensométricas de medio puente [71]

Con las deformaciones obtenidas se determinaron los CET experimentales. Los resultados se observan en la Tabla 5.3. En este caso particular el CET del acero inoxidable fue obtenido previamente en un proceso experimental reportado en [72].

Tabla 5.3. Datos experimentales de constantes elásticas y CET

Propiedades			Aluminio	Acero Inoxidable
Coeficiente de Expansión Térmica ( $\alpha_s$ ) $\mu\epsilon/^\circ C$			24.2	17.6
Módulo de elasticidad	E	Gap	70.1	202.4
Relación de Poisson	v		0.337	0.275

### 5.3.2.3 Pruebas térmicas para obtener deformaciones en compuestos c1 y c2

Los materiales compuestos c1 y c2 se colocaron dentro de la cámara térmica (ver Figura 5.7). Posteriormente, se hicieron las conexiones correspondientes al puente P3-Strain. La prueba se llevó a cabo aumentando la temperatura  $5^\circ C$  cada 20 minutos y el rango de temperatura fue de  $23.4$  a  $63.2^\circ C$ . También se conectó al puente la probeta de aluminio 2024-T3. Las deformaciones medidas se muestran en la Tabla 5.4. El tiempo que se muestra en la tabla es el tiempo en que permaneció sin variación la deformación medida.

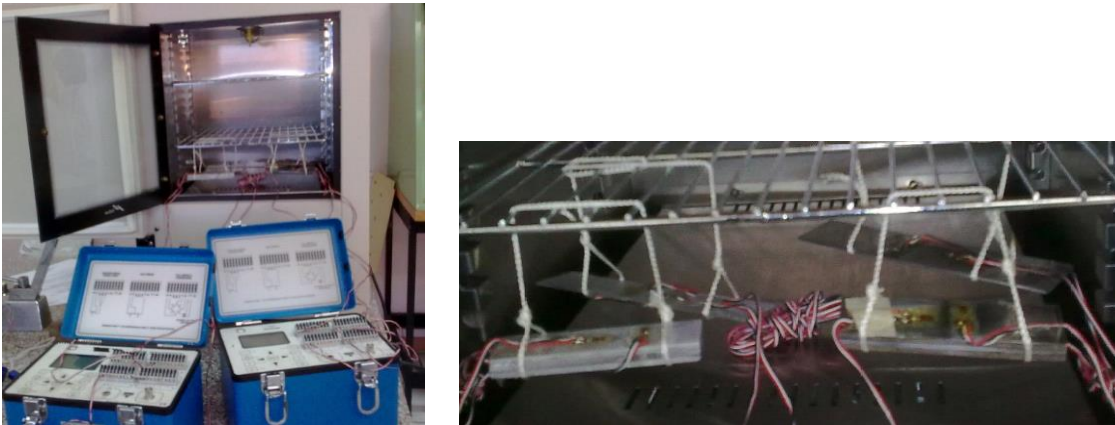


Figura 5.7. Probetas dentro de la cámara y conectadas al P3-Strain

Tabla 5.4. Datos experimentales obtenidos de la prueba de los compuestos

AJUSTE	TEMP	COMPUESTO AL-AI-AL		COMPUESTO AI-AL-AI		ALUMINIO 2024-T3	TIEMPO
°C	°C	$\varepsilon_{xc1}^0$ $\mu\epsilon$	$\varepsilon_{yc1}^0$ $\mu\epsilon$	$\varepsilon_{xc1}^0$ $\mu\epsilon$	$\varepsilon_{yc2}^0$ $\mu\epsilon$	$\varepsilon_x^0$ $\mu\epsilon$	Min
	23.4	0	0	0	0	0	
25	26.2	10	12	7	7	12	11
30	34.3	80	81	54	55	113	12
35	36.3	102	101	64	62	132	10
40	44.2	165	164	101	99	214	12
45	49	213	211	131	126	256	11
50	53	252	250	145	141	296	11
55	56.2	286	283	160	156		10
60	63.2	359	354	189	184		13
65	66.4	395	392	215	211		12

Aquí  $\varepsilon_{xc1}^0$  y  $\varepsilon_{yc1}^0$  son las deformaciones homogéneas medidas en las fronteras del compuesto c1,  $\varepsilon_{xc2}^0$  y  $\varepsilon_{yc2}^0$  son las deformaciones del compuesto c2 y  $\varepsilon_x^0$  es la deformación del espécimen aluminio 2024-T3. La unidad de medida son microdeformaciones ( $\epsilon$ ) y  $\mu\epsilon = 10^{-6}\epsilon$ .

#### 5.3.2.4 Corrección de las deformaciones medidas en los compuestos

Debido a que los cambios de temperatura modifican la resistencia de los extensómetros, los valores de las deformaciones se modifican [73], por lo tanto, es necesario corregir las deformaciones medidas en las fronteras de los compuestos.

Para realizar las correcciones se deben aplicar los pasos siguientes:

**Paso 1:** La temperatura y las deformaciones medidas deben ser expresadas en incrementos.

Para obtener los incrementos se toman como referencia la temperatura de 23.4°C y las deformaciones correspondientes  $\varepsilon_{xc1}^0 = \varepsilon_{yc1}^0 = \varepsilon_{xc2}^0 = \varepsilon_{yc2}^0 = \varepsilon_x^0 = 0$ . Los  $\Delta T$  y  $\Delta\epsilon$  resultantes se muestran en la Tabla 5.5. En la Figura 5.9 se muestran las



relaciones del cambio de temperatura contra el cambio de las deformaciones en los compuestos y en el material de referencia.

Las variables mostradas en la Tabla 5.5 se interpretan de la manera siguiente:  $\Delta \varepsilon_{xc1}^0$ ,  $\Delta \varepsilon_{yc1}^0$ ,  $\Delta \varepsilon_{xc2}^0$  y  $\Delta \varepsilon_{yc2}^0$  son los incrementos de las deformaciones térmicas de los compuestos c1 y c2, y  $\Delta \varepsilon_x^0$  representan los incrementos en el espécimen de aluminio 2024-T3, que es usado como referencia. El símbolo  $\mu\varepsilon = 10^{-6}\varepsilon$ .

Tabla 5.5. Incrementos de temperatura y deformaciones

TEMP.	COMPUESTO				MATERIAL
	AL-AI-AL		AI-AL-AI		AL 2024-T3
$\Delta T$	$\Delta \varepsilon_{xc1}^0$	$\Delta \varepsilon_{yc1}^0$	$\Delta \varepsilon_{xc2}^0$	$\Delta \varepsilon_{yc2}^0$	$\Delta \varepsilon_x^0$
°C	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$
2.8	11	12	7	7	12
10.9	80	81	54	53	113
12.9	100	100	65	64	132
20.8	165	164	110	109	214
25.6	213	211	131	129	256
29.6	253	251	145	142	296
32.8	290	287	160	157	
39.8	359	356	189	186	
43.0	395	392	203	198	

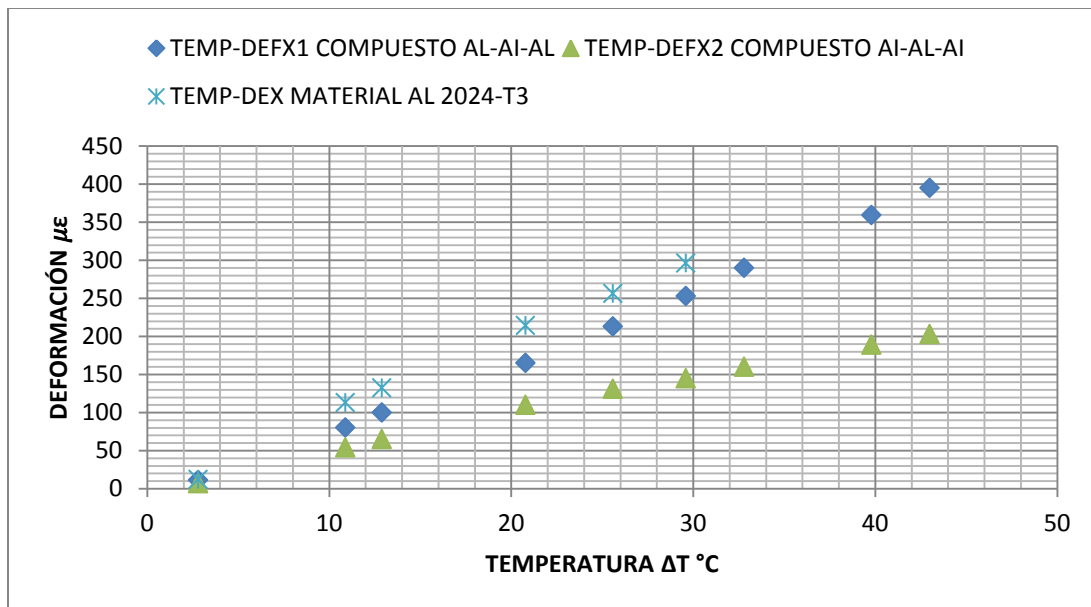


Figura 5.9. Relación  $\Delta T$ -deformaciones en x, compuestos c1, c2 y AL 2024-T3

De acuerdo a la figura anterior, DEFx1 es la deformación  $\Delta\varepsilon_{xc1}^0$  en el compuesto c1, DEFx2 es la deformación  $\Delta\varepsilon_{xc2}^0$  en el compuesto c2 y DEX es la deformación  $\Delta\varepsilon_x^0$  del aluminio AL 2024-T3. La gráfica correspondiente a las deformaciones en el eje y (o transversales), se observa en el Anexo D.

**Paso 2:** Se determinan los *CET promedio* de cada compuesto en estudio, cuyos símbolos son,  $\alpha_{SPc1}$  correspondiente al compuesto c1, y  $\alpha_{SPc2}$  al compuesto c2. Estos CET son determinados mediante la ecuación siguiente [71].

$$\alpha_S = \alpha_R + \frac{\varepsilon_{T/O(G/S)} - \varepsilon_{T/O(G/R)}}{\Delta T} \quad (5.1)$$

Aquí,  $\alpha_S$  es llamada CET del material de prueba,  $\alpha_R$  es el CET del material de referencia,  $\varepsilon_{T/O(G/S)}$  y  $\varepsilon_{T/O(G/R)}$  son las deformaciones térmicas medidas en los materiales de prueba y referencia, respectivamente,  $\Delta T$  es cambio de temperatura.

Sobre la base a la expresión (5.1), se generan las ecuaciones para obtener los CET promedio de los compuestos c1 y c2, bajo las siguientes consideraciones:

- a)  $\alpha_{SPxc1} = \alpha_S$ ,  $\alpha_{2024T3} = \alpha_R$ ,  $\Delta\varepsilon_{xc1}^0 = \varepsilon_{T/O(G/S)}$  y  $\Delta\varepsilon_x^0 = \varepsilon_{T/O(G/R)}$ .
- b)  $\alpha_{SPyc1} = \alpha_S$ ,  $\alpha_{2024T3} = \alpha_R$ ,  $\Delta\varepsilon_{yc1}^0 = \varepsilon_{T/O(G/S)}$  y  $\Delta\varepsilon_x^0 = \varepsilon_{T/O(G/R)}$ .
- c)  $\alpha_{SPxc2} = \alpha_S$ ,  $\alpha_{2024T3} = \alpha_R$ ,  $\Delta\varepsilon_{xc2}^0 = \varepsilon_{T/O(G/S)}$  y  $\Delta\varepsilon_x^0 = \varepsilon_{T/O(G/R)}$ .
- d)  $\alpha_{SPyc2} = \alpha_S$ ,  $\alpha_{2024T3} = \alpha_R$ ,  $\Delta\varepsilon_{yc2}^0 = \varepsilon_{T/O(G/S)}$  y  $\Delta\varepsilon_x^0 = \varepsilon_{T/O(G/R)}$ .

Las deformaciones longitudinales  $\Delta\varepsilon_x^0$  y las transversales  $\Delta\varepsilon_y^0$  en el material de referencia aluminio 2024-T3 son similares ( $\Delta\varepsilon_x^0 = \Delta\varepsilon_y^0$ ), por lo que las ecuaciones resultantes relacionadas con las cuatro consideraciones son:

- 1)  $\alpha_{SPxc1} = \alpha_{2024T3} + \frac{\Delta\varepsilon_{xc1}^0 - \Delta\varepsilon_x^0}{\Delta T_{c1}} \quad (5.2)$
- 2)  $\alpha_{SPyc1} = \alpha_{2024T3} + \frac{\Delta\varepsilon_{yc1}^0 - \Delta\varepsilon_x^0}{\Delta T_{c1}}$

$$3) \quad \alpha_{SPxc2} = \alpha_{2024T3} + \frac{\Delta\varepsilon_{xc2}^0 - \Delta\varepsilon_x^0}{\Delta T_{c2}}$$

$$4) \quad \alpha_{SPyc2} = \alpha_{2024T3} + \frac{\Delta\varepsilon_{yc2}^0 - \Delta\varepsilon_y^0}{\Delta T_{c2}}$$

Aquí,  $\alpha_{SPxc1}$  y  $\alpha_{SPyc1}$  son los respectivos CET promedio longitudinales y transversales del compuesto c1,  $\alpha_{SPxc2}$  y  $\alpha_{SPyc2}$  son los CET del compuesto c2 y  $\alpha_{2024T3}$  es el CET de espécimen aluminio 2024-T3, utilizado como referencia, además,  $\Delta\varepsilon_{xc1}^0$  y  $\Delta\varepsilon_{yc1}^0$  son los incrementos de las deformaciones en el compuesto c1,  $\Delta\varepsilon_{xc2}^0$  y  $\Delta\varepsilon_{yc2}^0$  son los incrementos en el compuesto c2,  $\Delta\varepsilon_x^0$  es el incremento de la deformación en el material de referencia y las  $\Delta T$  son los cambios de temperatura inducidos en los compuestos.

Cabe mencionar que con los datos de la Tabla 5.5, el CET del aluminio 2024-T3, cuyo valor es  $\alpha_{2024T3} = 23.4 \mu\varepsilon / ^\circ C$ , y mediante las ecuaciones (5.2), se calculan los CET promedio de los compuestos c1 y c2 que se registran en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6. CET promedio de los compuestos c1 y c2

	LONGITUDINALES		2024T3	CET PROM		TRANSVERSALES		CET PROM	
	c1	c2		c1	c2	c1	c2	c1	C2
$\Delta T$	$\Delta\varepsilon_{xc1}^0$	$\Delta\varepsilon_{xc2}^0$	$\Delta\varepsilon_R$	$\alpha_{SPxc1}$	$\alpha_{SPxc2}$	$\Delta\varepsilon_{yc1}^0$	$\Delta\varepsilon_{yc2}^0$	$\alpha_{SPyc1}$	$\alpha_{SPyc2}$
$^\circ C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon / ^\circ C$	$\mu\varepsilon / ^\circ C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon / ^\circ C$	$\mu\varepsilon / ^\circ C$
2.8	11	7	12	23.04	21.61	12	7	23.4	21.61
10.9	80	54	113	20.37	17.99	81	53	20.464	17.90
12.9	100	65	132	20.92	18.21	100	64	20.929	18.13
20.8	165	110	214	21.04	18.40	164	109	20.996	18.35
25.6	213	131	256	21.72	18.52	211	129	21.642	18.44
29.6	253	145	296	21.95	18.30	251	142	21.890	18.20
		SUMA		129.05	113.02			129.302	112.63
		CET PROMEDIO		21.51	18.84			21.55	18.77

De acuerdo con la Tabla 5.6 los CET promedio son, para el compuesto c1 y el compuesto c2, los siguientes:

$$\alpha_{SPc1} = \frac{\alpha_{SPxc1} + \alpha_{SPyc1}}{2} = 21.53 \mu\text{E}/\text{oC}$$

$$\alpha_{SPc2} = \frac{\alpha_{SPx21} + \alpha_{SPyc2}}{2} = 18.805 \mu\text{E}/\text{oC}$$

**Paso 3:** Se determinan los *CET esperados*. Estos son calculados por medio de la expresión (5.3), utilizando los CET experimentales de la Tabla 5.3 y las fracciones volumétricas de las capas de cada compuesto. Los CET obtenidos son comparados con los CET promedio obtenidos en el Paso 2.

$$\alpha_{espc1} = \eta_{ALc1}\alpha_{AL} + \eta_{Aic1}\alpha_{AI} \quad (5.3)$$

$$\alpha_{espc2} = \eta_{ALc2}\alpha_{AL} + \eta_{Aic2}\alpha_{AI}$$

De acuerdo con las expresiones (5.3),  $\alpha_{espc1}$  y  $\alpha_{espc2}$  son los CET esperados de los compuestos c1 y c2,  $\eta_{ALc1}$  y  $\eta_{Aic1}$  son las respectivas fracciones volumétricas del aluminio (AL) y del acero inoxidable (AI) del compuesto c1, respectivamente, y  $\eta_{ALc2}$  y  $\eta_{Aic2}$ , las fracciones volumétricas relacionadas con los compuestos c1 y c2.

Considerando que para el compuesto c1,  $\eta_{ALc1} = 2/3$ ,  $\eta_{Aic1} = 1/3$  y para el c2,  $\eta_{ALc2} = 1/3$ ,  $\eta_{Aic2} = 2/3$ , y que para ambos compuestos los CET experimentales son  $\alpha_{AL} = 24.2 \mu\text{E}/\text{oC}$ , y  $\alpha_{AI} = 17.6 \mu\text{E}/\text{oC}$ , los CET esperados son:

- 1) Para el compuesto c1 (AL-AI-AL) el CET esperado  $\alpha_{espc1}$  es:

$$\alpha_{espc1} = 22 \mu\text{E}/\text{oC}$$

- 2) Para el compuesto c2 (AI-AL-AI) el CET esperado  $\alpha_{espc2}$  es:

$$\alpha_{espc2} = 19.8 \mu\text{E}/\text{oC}$$

**Paso 4:** Comparar los CET promedio y los CET esperados.

Al comparar los CET promedio contra los esperados (ver Tabla 5.7), se observa que las desviaciones son menores al 10%, lo que indica que los CET promedio determinados son adecuados para el cálculo de las deformaciones corregidas.

Nota: para efectos de validar un resultado los rangos aceptables son aquellos los que comparados con valores conocidos y aceptados, son menores o iguales al 10% [2].

Tabla 5.7 Cuadro comparativo de los CET promedio y CET esperados

	CET PROMEDIO	CET ESPERADO	DIFERENCIA
Material	$\alpha_{SP}$	$\alpha_{esp}$	%
Compuesto c1	$21.53 \mu\epsilon / ^\circ C$	$22 \mu\epsilon / ^\circ C$	1.09
Compuesto c2	$18.81 \mu\epsilon / ^\circ C$	$19.8 \mu\epsilon / ^\circ C$	5.26

**Paso 5:** Una vez validados los CET promedio calculados en el Paso 2, se procede al cálculo de las deformaciones corregidas mediante las siguientes expresiones:

$$1) \quad \epsilon_{Cxc1} = \alpha_{SPxc1} * \Delta T \quad (5.4)$$

$$2) \quad \epsilon_{Cxc2} = \alpha_{SPxc2} * \Delta T$$

$$3) \quad \epsilon_{Cyc1} = \alpha_{SPyc1} * \Delta T$$

$$4) \quad \epsilon_{Cyc2} = \alpha_{SPyc2} * \Delta T$$

Aquí, para el compuesto c1,  $\epsilon_{Cxc1}$  y  $\epsilon_{Cyc1}$  son las respectivas deformaciones térmicas corregidas,  $\alpha_{SPxc1}$  y  $\alpha_{SPyc1}$  son los CET promedio longitudinales (x) y transversales (y). Para el compuesto c2,  $\epsilon_{Cxc2}$ ,  $\epsilon_{Cyc2}$  y  $\alpha_{SPxc2}$ ,  $\alpha_{SPyc2}$ , son las respectivas deformaciones térmicas corregidas y CET promedio longitudinales y transversales en el compuesto c2.

Con los datos de cambio de temperatura (considerando que  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$ ), los CET promedio descritos en la Tabla 5.6, y los cambios de temperatura, se determinan las deformaciones corregidas las cuales se muestran en la Tabla 5.8. Además, en la Figura 5.10 se observa la relación entre el cambio de temperatura y la deformación corregida en dirección x, de los compuestos c1 y c2. La gráfica respecto a los componentes en y, se observa en el Anexo D.

Tabla 5.8. Deformación corregida de los compuestos c1 y c2

	MATERIAL COMPUESTO C1 (AL-AI-AL)				MATERIAL COMPUESTO C2 (AI-AL-AI)			
	CET PROMEDIO		DEFORMACION CORREGIDA		CET PROMEDIO		DEFORMACIÓN CORREGIDA	
$\Delta T$	$\alpha_{SPxc1}$	$\alpha_{SPyc1}$	$\varepsilon_{Cyc1}^0$	$\varepsilon_{Cyc1}^0$	$\alpha_{SPxc1}$	$\alpha_{SPyc2}$	$\varepsilon_{Cxc2}^0$	$\varepsilon_{Cyc2}^0$
$^{\circ}C$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$
2.8	21.51	21.55	60.23	60.34	18.84	18.77	52.75	52.56
10.9	21.51	21.55	234.46	234.90	18.84	18.77	205.35	204.59
12.9	21.51	21.55	277.48	278.00	18.84	18.77	243.04	242.13
20.8	21.51	21.55	447.41	448.24	18.84	18.77	391.87	390.42
25.6	21.51	21.55	550.66	551.68	18.84	18.77	482.30	480.51
29.6	21.51	21.55	636.70	637.88	18.84	18.77	557.66	555.59

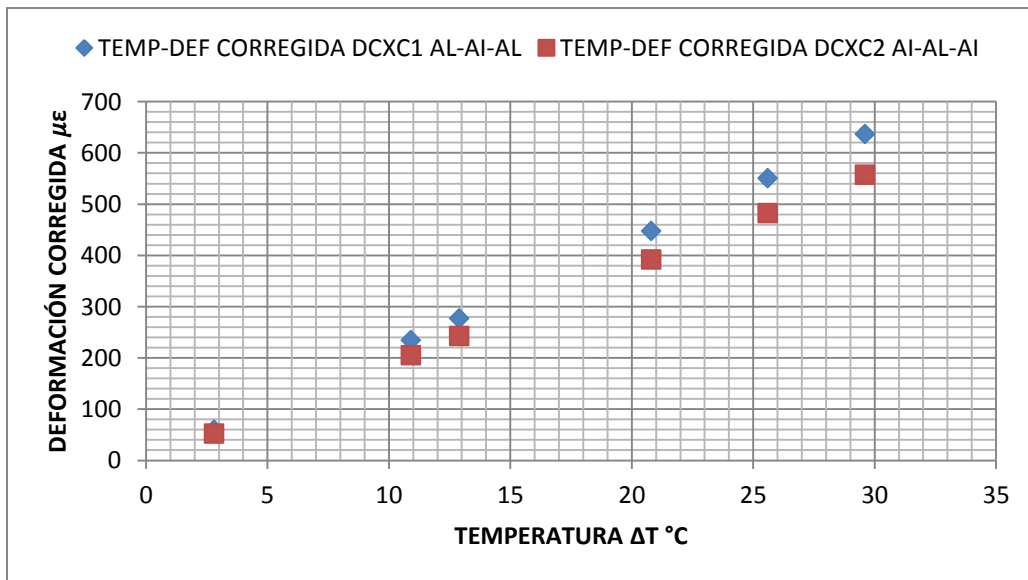


Figura 5.10. Relación entre cambio de temperatura y deformaciones corregidas en x, compuestos c1 y c2

#### 5.4 Resultados de las pruebas experimentales en los compuestos c1 y c2

En esta sección se realizan los cálculos necesarios para determinar:

1. Los Coeficientes de Expansión Térmica (CET) de las capas de aluminio y de acero inoxidable que integran los compuestos c1 y c2 usando el método

inverso. Se usarán las ecuaciones particulares de la sección 4.3, para poder validar el modelo matemático propuesto en esta tesis.

2. Una vez validado el modelo, se aplican las ecuaciones (4.17 y 4.18), desarrolladas en el capítulo 4, para obtener los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en las capas de los compuestos c1 y c2.

#### **5.4.1 Cálculo de los CET $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ de las capas por método inverso**

En esta sección se calculan mediante las ecuaciones particulares de la sección 4.3.3, los CET de las capas de aluminio y de acero inoxidable que integran los compuestos c1 y c2, los cuales se usan para validar el modelo propuesto en el capítulo 3.

Para determinar los CET, se utilizaron las deformaciones corregidas mostradas en la Tabla 5.8, los datos experimentales descritos en la Tabla 5.3 y las fracciones volumétricas de las capas que constituyen los compuestos. El proceso que se llevó a cabo fue el siguiente:

1. Con las ecuaciones obtenidas en 4.3.3, relacionadas con los esfuerzos térmicos en la dirección  $x$ , se calcularon los CET de las capas de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) y de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ).
2. Las ecuaciones obtenidas en 4.3.3 relacionadas con los esfuerzos térmicos en la dirección  $y$ , fueron usadas para calcular los CET de las capas de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) y de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ).

#### **1) Cálculo de los CET $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ de las capas con esfuerzos en dirección $x$**

Para el cálculo de los CET ( $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ ) y tomando como base los esfuerzos en dirección  $x$ , fueron utilizadas las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
1) \quad \alpha_{AI} &= \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{C2}} \left\{ D + \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{C2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{AIC2}} \right\} \\
2) \quad \alpha_{AL} &= \frac{1}{\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{AIC1}} - \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{AIC2}} \right)} \left\{ \frac{A}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{AIC1}} \right) - \frac{C}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{AIC2}} \right) + \frac{B}{\Delta T_{C1}} - \frac{D}{\Delta T_{C2}} \right\} \\
3) \quad \alpha_{AI} &= \frac{1}{\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{AIC2}} - \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{AIC1}} \right)} \left\{ \frac{D}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) - \frac{B}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) + \frac{C}{\Delta T_{C2}} - \frac{A}{\Delta T_{C1}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Los módulos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$ , son determinados utilizando las deformaciones corregidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
1) \quad A &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cyc1}^0) \\
2) \quad B &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cyc1}^0) \\
3) \quad C &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cyc2}^0) \\
4) \quad D &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cyc2}^0)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Los datos experimentales utilizados para el cálculo son los siguientes:

- a) Módulos de elasticidad:  $E_{AL} = 70.1 \text{ GPa}$ ,  $E_{AI} = 202.4 \text{ GPa}$ ,
- b) Relaciones de Poisson:  $\nu_{AL} = 0.337$ ,  $\nu_{AI} = 0.275$
- c) Fracciones volumétricas:  $\eta_{ALC1} = 2/3$ ,  $\eta_{AIC1} = 1/3$ ,  $\eta_{ALC2} = 1/3$ ,  $\eta_{AIC2} = 2/3$

Con las ecuaciones (5.5) y (5.6) y los datos experimentales descritos anteriormente, se calculan los CET de las capas de aluminio y de acero inoxidable en función de los esfuerzos térmicos en la dirección del eje  $x$ . Los resultados se muestran en la Tabla 5.9.



Tabla 5.9. CET de las capas de aluminio y acero inoxidable, con esfuerzos en x, Método Inverso

$\Delta T_1$	$\Delta T_2$	AL-AI-AL		AI-AL-AI		MÓDULOS				CET	CET	CET
°C	°C	$\epsilon_{x1p}$	$\epsilon_{y1p}$	$\epsilon_{x2p}$	$\epsilon_{y2p}$	A	B	C	D	$\alpha_{AL}$ $\mu\epsilon/^\circ C$	$\alpha_{AI}$ $\mu\epsilon/^\circ C$	$\alpha_{AI}$ $\mu\epsilon/^\circ C$
2.8	2.8	0.000065	0.000065	0.000061	0.000061	6786082	18254726	6365369.85	17123000.94	25.94	21.029	21.029
10.9	10.9	0.000222	0.000222	0.0001961	0.000196	23355817	62827720	20621189.9	55471506.34	25.31	16.796	16.796
12.9	12.9	0.00027	0.00027	0.0002349	0.000235	28383323	76351835	24702094.6	66449239.93	26.55	16.825	16.825
20.8	20.8	0.000438	0.000438	0.0003827	0.000383	46038495	123844679	40253707	108283458.7	26.53	17.062	17.062
SUMA										104.3	71.71	71.71
PROMEDIO										26.08	17.928	17.928

## 2) Cálculo de los CET $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ de las capas, con esfuerzos en y

El cálculo de los CET  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$  correspondientes a los esfuerzos en dirección y, se llevan a cabo usando las expresiones siguientes:

$$1) \alpha_{AI} = \frac{1}{\left(\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}}\right)} \left[ \frac{H}{\Delta T_{c2}} + \left( \frac{G}{\Delta T_{c2}} - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{1-\nu_{AL}} \right) \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) \right] \quad (5.7)$$

$$2) \alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} - \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right)} \left\{ \frac{G}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{E}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) + \frac{H}{\Delta T_{c2}} - \frac{F}{\Delta T_{c1}} \right\}$$

$$3) \alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} - \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right)} \left\{ \frac{H}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right) - \frac{F}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) + \frac{G}{\Delta T_{c2}} - \frac{E}{\Delta T_{c1}} \right\}$$

Los módulos  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , y  $H$ , son determinados de la siguiente forma

$$1) E = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\epsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AL}\epsilon_{Cxc1}^0) \quad (5.8)$$

$$2) F = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\epsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AI}\epsilon_{Cxc1}^0)$$

$$3) G = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\epsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AL}\epsilon_{Cxc2}^0)$$

$$4) H = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\epsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AI}\epsilon_{Cxc2}^0)$$

Con las ecuaciones (5.7) y (5.8) y los datos experimentales descritos en la sección anterior, se calculan los CET de las capas de aluminio y de acero inoxidable en

función de los esfuerzos térmicos en la dirección del eje  $y$ . Los resultados se muestran en la Tabla 5.10.

Tabla 5.10. CET de las capas de aluminio y acero inoxidable, con esfuerzos en  $y$ , Método Inverso

$\Delta T_1$	$\Delta T_2$	AL-AI-AL		AI-AL-AI		MÓDULOS				CET	CET	CET
$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	$\epsilon_{x1}$	$\epsilon_{y1}$	$\epsilon_{x2}$	$\epsilon_{y2}$	E	F	G	H	$\alpha_{AL}$ $\mu\epsilon/^{\circ}\text{C}$	$\alpha_{AI}$ $\mu\epsilon/^{\circ}\text{C}$	$\alpha_{AI}$ $\mu\epsilon/^{\circ}\text{C}$
2.8	2.8	0.000064	0.000064	0.000061	0.000061	6786082	18254726	6365369.9	17123000.9	25.94	21.029	21.029
10.9	10.9	0.000222	0.000222	0.0001961	0.000196	23355817	62827720	20621189.9	55471506.3	25.31	16.796	16.796
12.9	12.9	0.00027	0.00027	0.0002349	0.000235	28383323	76351835	24702094.6	66449239.9	26.55	16.825	16.825
20.8	20.8	0.000438	0.000438	0.0003827	0.000383	46038495	123844679	40253707	108283458.7	26.53	17.062	17.062
SUMA										104.3	71.71	71.71
PROMEDIO										26.08	17.928	17.928

#### 5.4.1.1 Resultados finales de los CET $\alpha_{AL}$ y $\alpha_{AI}$ promedio de las capas

Los valores finales de los CET promedio descritos en las Tablas 5.9, y 5.10, se observan en la Tabla 5.11.

Tabla 5.11. CET resultantes para las capas de aluminio y acero inoxidable Método Inverso

TABLA	CET capas de aluminio y acero inoxidable Método Inverso	CET PROMEDIO	
		$\alpha_{AL} (\mu\epsilon/^{\circ}\text{C})$	$\alpha_{AI} (\mu\epsilon/^{\circ}\text{C})$
5.9	Considerando esfuerzos en $x$	26.08	17.928
5.10	Considerando esfuerzos en $y$	26.08	17.928
	Suma	52.19	35.856
	CET finales	26.08	17.928

#### 5.4.1.2 Análisis de los Coeficientes de Expansión Térmica resultantes

Para estar en condiciones de validar el modelo matemático utilizado en este trabajo de tesis, en la Tabla 5.12 se establece una comparación entre los CET obtenidos por el Método Inverso, los experimentales de la Tabla 5.3 y los de la base de datos MatWeb [74].

Tabla 5.12. Comparativo Método Inverso respecto datos experimentales y la base de datos MatWeb

CET	MÉTODO			DIFERENCIA		POCENTAJE %	
	M. I.	Exp.	MW	Exp.	MW	Exp.	MW
$\alpha_{AL}$ ( $\mu\epsilon/^\circ C$ )	26.08	24.2	23.4	1.88	2.68	7.76	11.45
$\alpha_{AI}$ ( $\mu\epsilon/^\circ C$ )	17.928	17.6	17.3	0.328	0.628	1.86	3.63

Los resultados anteriores demuestran que el modelo propuesto para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares y globales es válido y adecuado, dado que, con respecto a los CET experimentales el porcentaje de diferencia es menor del 10% [2].

#### 5.4.2 Cálculo de esfuerzos térmicos interlaminares y globales

Debido a que el modelo propuesto en esta tesis ha sido validado en la sección anterior y que es adecuado para el análisis de esfuerzos térmicos, el modelo se aplica para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en los compuestos en estudio, los cuales son:

- a) Compuesto Laminado Metálico Simétrico c1 (AL-AI-AL)
- b) Compuesto Laminado Metálico Simétrico c2 (AI-AL-AI)

El cálculo de los esfuerzos térmicos globales e interlaminares en los compuestos c1 y c2, se lleva a cabo utilizando las ecuaciones (4.17) y (4.18) del capítulo 4, que son reescritas a continuación:

$$1) \sigma_{Gxc1} = \eta_{ALc1}\sigma_{xALc1} + \eta_{AIC1}\sigma_{xAIC1} \quad (5.9)$$

$$2) \sigma_{Gxc2} = \eta_{ALc2}\sigma_{xALc2} + \eta_{AIC2}\sigma_{xAIC2}$$

$$3) \sigma_{Gyc1} = \eta_{ALc1}\sigma_{yALc1} + \eta_{AIC1}\sigma_{yAIC1}$$

$$4) \sigma_{Gyc2} = \eta_{ALc2}\sigma_{yALc2} + \eta_{AIC2}\sigma_{yAIC2}$$

$$1) \sigma_{xALc1} = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\epsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AL}\epsilon_{Cyc1}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \sigma_{xAIc1} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cyc1}^0) - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \\
3) \quad \sigma_{xALc2} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cyc2}^0) - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \\
4) \quad \sigma_{xAIc2} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cyc2}^0) - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \\
5) \quad \sigma_{yALc1} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cxc1}^0) - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \\
6) \quad \sigma_{yAIc1} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cxc1}^0) - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \\
7) \quad \sigma_{yALc2} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cxc2}^0) - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \\
8) \quad \sigma_{yAIc2} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cxc2}^0) - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}
\end{aligned}$$

Para efectos de probar la utilidad de los sistemas de ecuaciones (5.9) y (5.10), la restricción de que los esfuerzos globales longitudinales y transversales son cero, no se considera.

Para determinar los esfuerzos térmicos con las ecuaciones (5.9) y (5.10) se van a utilizar las constantes experimentales elásticas (módulo de elasticidad y relación de Poisson) y térmicas (Coeficiente de Expansión Térmica) descritas en la Tabla 5.3, los cambios de temperatura y deformaciones corregidas registrados en la Tabla 5.8, así como las fracciones volumétricas descritas en la sección 5.3.1.1.

Debido a que los compuestos mencionados sólo están sometidos a cargas térmicas, entonces *los esfuerzos globales deben ser cero*.

Primero se determinan los esfuerzos térmicos interlaminares globales en el compuesto c1, y después Los esfuerzos térmicos en el compuesto c2.

#### 5.4.2.1 Esfuerzos térmicos interlaminares y globales en compuesto c1

Los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAIc1}$ ,  $\sigma_{yALc1}$  y  $\sigma_{yAIc1}$ , así como los globales  $\sigma_{Gxc1}$  y  $\sigma_{Gyc1}$ , que se producen en el compuesto c1, son obtenidos por medio de las expresiones (5.10, 1, 2, 5, 6) y (5.9 1, 3), respectivamente, utilizando

los datos experimentales de la Tabla 5.3, las fracciones volumétricas ( $\eta_{ALc1} = 2/3, \eta_{Aic1} = 1/3$ ), los cambios de temperatura y de las deformaciones corregidas de la Tabla 5.8. Los resultados se muestran en la Tabla 5.13. En la Figura 5.11 se muestran las relaciones de los cambios de temperatura ( $\Delta T$ ) y los esfuerzos térmicos interlaminares ( $\sigma_{xALc1}, \sigma_{xAic1}$ ) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  del compuesto c1. La Figura que relaciona los cambios de temperatura con los esfuerzos interlaminares ( $\sigma_{yALc1}, \sigma_{yAic1}$ ) y globales  $\sigma_{Gyc1}$  del mismo compuesto, es similar, ver Anexo D.

Tabla 5.14. Esfuerzos térmicos Interlaminares y globales calculados para el compuesto c1

$\Delta T$	$\varepsilon^0_{Cxc1}$	$\varepsilon^0_{Cyc1}$	$\sigma_{xALc1}$	$\sigma_{yALc1}$	$\sigma_{xAic1}$	$\sigma_{yAic1}$	$\sigma_{Gxc1}$	$\sigma_{Gyc1}$
°C	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.8	60.2	60.3	-0.797	-0.791	3.060	3.076	0.489	0.498
10.9	234.4	235.9	-3.066	-2.988	11.992	12.231	1.953	2.085
12.9	277.5	278.0	-3.653	-3.627	14.141	14.220	2.278	2.322
20.8	447.4	448.3	-5.893	-5.846	22.795	22.938	3.670	3.749
25.6	550.6	551.7	-7.258	-7.200	28.042	28.217	4.509	4.606
29.6	636.6	637.9	-8.394	-8.326	32.416	32.623	5.209	5.324

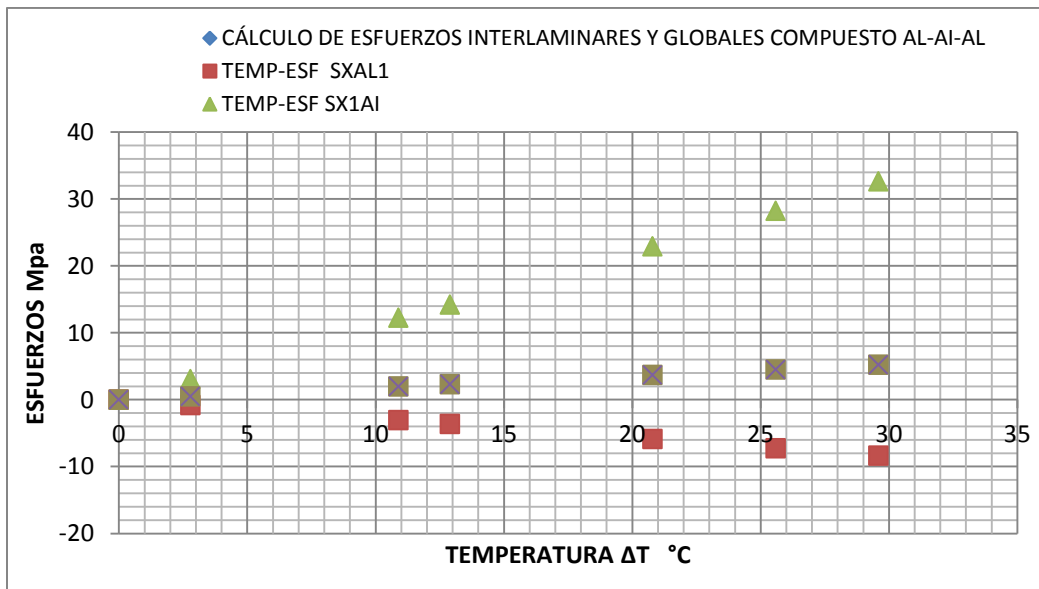


Figura 5.11. Relación entre la temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$  (SXAL1),  $\sigma_{xAic1}$  (SXAI1) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  (SGX1)

### 5.4.2.2 Esfuerzos térmicos interlaminares y globales en compuesto c2

Los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{xAIc2}$ ,  $\sigma_{yALc2}$  y  $\sigma_{yAIc2}$ , así como los globales  $\sigma_{Gxc2}$  y  $\sigma_{Gyc2}$ , generados en el compuesto c2, se calculan mediante las expresiones (5.10, 3, 4, 7, 8) y (5.9, 2, 4), respectivamente, utilizando para este propósito, los datos experimentales de la Tabla 5.3, las fracciones volumétricas ( $\eta_{ALc2} = 1/3, \eta_{AIc2} = 2/3$ ), los cambios de temperatura y de las deformaciones corregidas de la Tabla 5.8. Los resultados se muestran en la Tabla 5.15.

En las Figuras 5.12, se muestran las relaciones de los cambios de temperatura ( $\Delta T$ ) y los esfuerzos térmicos interlaminares ( $\sigma_{xALc2}$  y  $\sigma_{xAIc2}$ ) y globales  $\sigma_{Gxc2}$  del compuesto c1 (AL-AI-AL). En el Anexo D está la Figura D.7, que relaciona los esfuerzos interlaminares ( $\sigma_{yALc2}$  y  $\sigma_{yAIc2}$ ) y globales  $\sigma_{Gyc2}$  con la temperatura.

Tabla 5.15. Esfuerzos térmicos Interlaminares y globales calculados compuesto c2

$\Delta T$ °C	$\varepsilon^0_{Cxc2}$ $\mu\varepsilon$	$\varepsilon^0_{Cyc2}$ $\mu\varepsilon$	$\sigma_{xALc2}$ MPa	$\sigma_{yALc2}$ MPa	$\sigma_{xAIc2}$ MPa	$\sigma_{yAIc2}$ MPa	$\sigma_{Gxc2}$ MPa	$\sigma_{Gyc2}$ MPa
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.8	52.7	52.6	-1.595	-1.600	0.950	0.934	0.102	0.090
10.9	205.3	204.6	-6.202	-6.239	3.722	3.610	0.414	0.327
12.9	243.0	242.2	-7.336	-7.378	4.415	4.288	0.498	0.399
20.8	391.8	390.4	-11.833	-11.906	7.108	6.885	0.794	0.622
25.6	482.2	480.5	-14.564	-14.653	8.745	8.475	0.975	0.766
29.6	557.6	555.6	-16.835	-16.940	10.125	9.807	1.139	0.892

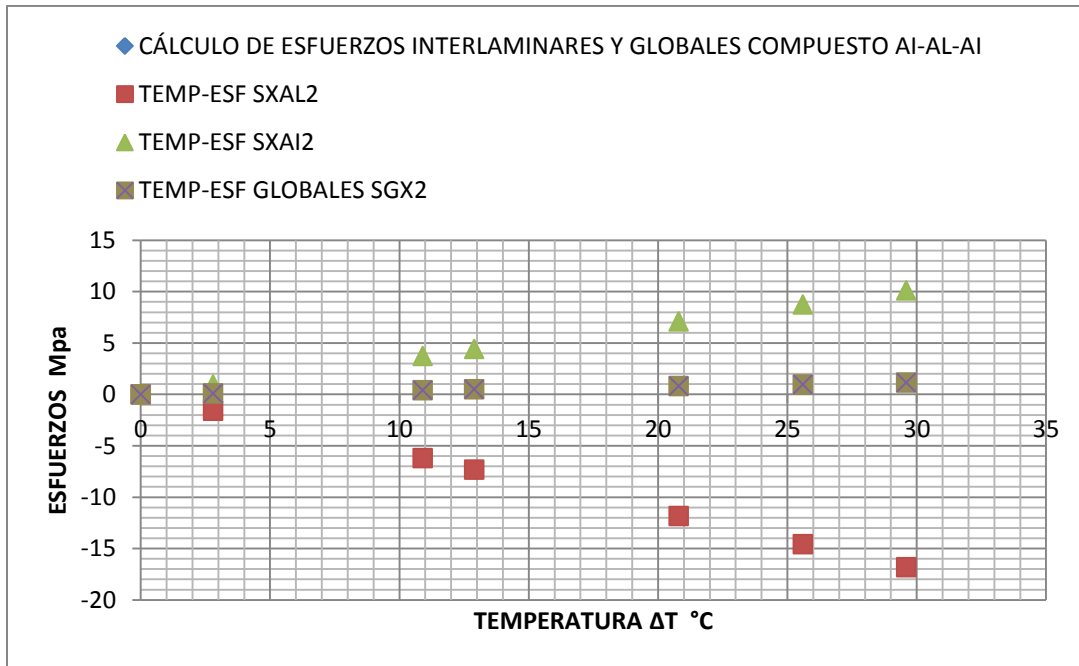


Figura 5.12. Relación entre la temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xAL2}$  (SXAL2),  $\sigma_{xAI2}$  (SXAI2) y globales  $\sigma_{Gxc2}$  (SGX2)

### 5.4.3 Cálculo de los CET y esfuerzos térmicos interlaminares mediante el software Maple 13

Otra forma de validar y demostrar la eficacia del modelo propuesto en esta tesis, es determinando en forma simultánea, mediante un software, los CET ( $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ ), de las capas de los compuestos c1 y c2, los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{xAIc1}$  y  $\sigma_{yAIc1}$ , del compuesto c1, y  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{yALc2}$  y  $\sigma_{xAIc2}$  del compuesto c2 [75]. El software utilizado en esta tesis es el Software Maple 13. Las ecuaciones utilizadas para este fin, son las (5.9) y (5.10). Además, se utilizan también los datos experimentales mostrados en la Tabla 5.3, los cambios de temperaturas y deformaciones corregidas de la Tabla 5.8, y las fracciones volumétricas utilizadas en la sección 5.3.2. El proceso de cálculo se llevó a cabo de la siguiente manera:

- 1) Primero se determinan  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ , así como  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAIc1}$  y  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{xAIc2}$ .

2) Después se determinan  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ , así como  $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{yAlc1}$  y  $\sigma_{yALc2}$ ,  $\sigma_{yAlc2}$ .

### 1) Cálculo de los CET y esfuerzos térmicos interlaminares en x

Utilizando las ecuaciones (5.11 1, 2), y las ecuaciones (5.12 1, 2, 3, 4), en la dirección x, se obtuvieron mediante Maple 13 (ver Anexo 3), los CET  $\alpha_{AL}$  de una capa de aluminio y  $\alpha_{AI}$  de una capa de acero inoxidable, los esfuerzos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAlc1}$  del compuesto c1, y  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{xAlc2}$  del compuesto c2, ver Tabla 5.16.

Tabla 5.16 Esfuerzos térmicos interlaminares y CETs en dirección x, en compuestos c1 y c2

$\Delta T$	$\epsilon_{Cxc1}^0$	$\epsilon_{Cyc1}^0$	$\alpha_{AL}$	$\alpha_{AI}$	$\sigma_{xAlc1}$	$\sigma_{xAlc2}$	$\sigma_{xALc1}$	$\sigma_{xALc2}$
°C	$\mu\epsilon$	$\mu\epsilon$	$\mu\epsilon/^\circ C$	$\mu\epsilon/^\circ C$	MPa	MPa	MPa	MPa
2.8	60.2	60.3	27.15	17.23	3.34	1.23	-1.67	-2.47
10,9	234.4	234.4	27.22	17.23	13.01	4.84	-6.55	-9.68
12.9	277.5	278	27.17	17.24	15.40	5.69	-7.70	-11.38
20.8	447.4	448.3	27.17	17.24	24.84	9.18	-12.42	-18.36
25.6	550.6	551.7	27.16	17.24	30.56	11.29	-15.28	-22.58
29.6	636.6	637.9	27.16	17.24	35.30	13.04	-17.65	-26.09
SUMA			163.03	103.42				
PROMEDIO			27.17	17.236				

### 2) CET y esfuerzos térmicos interlaminares con esfuerzos en y

Se obtuvieron con Maple 13 (ver Anexo 4), los CET  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$  de las capas, los esfuerzos interlaminares  $\sigma_{yALc1}$  y  $\sigma_{yAlc1}$  del compuesto c1, así como  $\sigma_{yALc2}$  y  $\sigma_{yAlc2}$  del compuesto c2. Fueron utilizadas para este propósito, las expresiones (5.11 3, 4), y las expresiones (5.12 5, 6, 7, 8) correspondientes a los esfuerzos térmicos en dirección y. La información de los CET calculados se muestra en la Tabla 5.17.



Tabla 5.17 Esfuerzos térmicos interlaminares y CET calculados en dirección y, compuestos c1 y c2

$\Delta T$	$\varepsilon_{cxc1}^0$	$\varepsilon_{cyc1}^0$	$\alpha_{AL}$	$\alpha_{AI}$	$\sigma_{yAlc1}$	$\sigma_{yAlc2}$	$\sigma_{yALc1}$	$\sigma_{yALc2}$
$^{\circ}C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	MPa	MPa	MPa	MPa
2.8	60.2	60.3	27.25	17.19	3.39	1.25	-1.69	-2.50
10,9	234.4	234.4	27.52	17.13	13.64	5.04	-6.82	10.07
12.9	277.5	278	27.30	17.18	15.72	5.81	-7.86	-11.61
20.8	447.4	448.3	27.32	17.17	25.41	9.38	-12.70	-18.76
25.6	550.6	551.7	27.31	17.17	31.24	11.54	-15.62	-23.08
29.6	636.6	637.9	27.31	17.17	36.11	13.34	-18.06	-26.67
SUMA			164.01	103.01				
PROMEDIO			27.33	17.17				

#### 5.4.3.1 Comparación de los CET de Maple 13, con los CET experimentales

Los promedios de los CET del aluminio y del acero inoxidable mostrados en las Tablas 5.16 y 5.17, se concentran en la Tabla 5.18:

Tabla 5.18. CET promedio por Maple 13

TABLA	$\alpha_{AL} \mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\alpha_{AI} \mu\varepsilon/^{\circ}C$
5.16	27.17	17.24
5.17	27.33	17.17
SUMA	54.50	34.38
PROMEDIO	27.25	17.19

Estos CET obtenidos por Maple 13 son comparados con los CET experimentales de la Tabla 5.3, las diferencias se observan en la Tabla 5.19.

Tabla 5.19. Comparación CET Maple 13, respecto CET experimentales y de MatWeb

CET	MÉTODO		DIFERENCIA	POCENTAJE %
	Maple 13	Exp.	Exp.	Exp.
$\alpha_{AL} (\mu\varepsilon/^{\circ}C)$	27.25	24.2	3,05	11.19
$\alpha_{AI} (\mu\varepsilon/^{\circ}C)$	17.19	17.6	-0.41	-2.38

Como se observa en la Tabla 5.19, las diferencias en porcentaje para el aluminio es un poco mayor del 10%, mientras que para el acero inoxidable es menor que 10%.

#### 5.4.4 Cálculo de esfuerzos térmicos globales por software Maple 13

Los esfuerzos térmicos globales en los compuestos c1 y c2, se determinan con la ecuación (5.9), y tomando en cuenta los datos mostrados en las Tablas 5.16 y 5.17, relacionados con el cambio de temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares obtenidos mediante Maple 13. Lo anterior es con la finalidad de mostrar que las ecuaciones resultantes de la aplicación del modelo son adecuadas en el cálculo de esfuerzos térmicos globales. El proceso se lleva a cabo de la forma siguiente:

- 1) Se determinan los esfuerzos térmicos globales en el compuesto c1.
- 2) Se determinan los esfuerzos térmicos globales en el compuesto c2.

##### 1) Cálculo por Maple 13 de esfuerzos térmicos globales en compuesto c1

Para determinar en el compuesto c1 los esfuerzos térmicos globales se utilizan las expresiones (5.9, 1, 2), que se describen a continuación:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sigma_{Gxc1} &= \eta_{ALc1}\sigma_{xALc1} + \eta_{Aic1}\sigma_{xAic1} & (5.11) \\
 2) \quad \sigma_{Gyc1} &= \eta_{ALc1}\sigma_{yALc1} + \eta_{Aic1}\sigma_{yAic1}
 \end{aligned}$$

Los esfuerzos térmicos globales del compuesto c1 se muestran en la Tabla 5.20 y en la Figura 5.13 se muestran la relación cambios de temperatura ( $\Delta T$ ) contra esfuerzos térmicos interlaminares ( $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAic1}$ ) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  del compuesto c1 (ver en Anexo D relación contra esfuerzos térmicos globales en y).

Tabla 5.20. Esfuerzos térmicos globales en el compuesto c1 (Maple 13)

$\Delta T$	$\sigma_{xALc1}$	$\sigma_{yALc1}$	$\sigma_{xAIc1}$	$\sigma_{yAIc1}$	$\sigma_{Gxc1}$	$\sigma_{Gyc1}$
°C	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
2.8	-1.67	-1.69	3.34	3.39	0.000	0.003
10.9	-6.55	-6.82	13.01	13.64	-0.030	0.000
12.9	-7.70	-7.86	15.40	15.72	0.000	0.000
20.8	-12.42	-12.70	24.84	25.41	0.000	0.003
25.6	-15.28	-15.62	30.56	31.24	0.000	0.000
29.6	-17.65	-18.06	35.30	36.11	0.000	-0.003

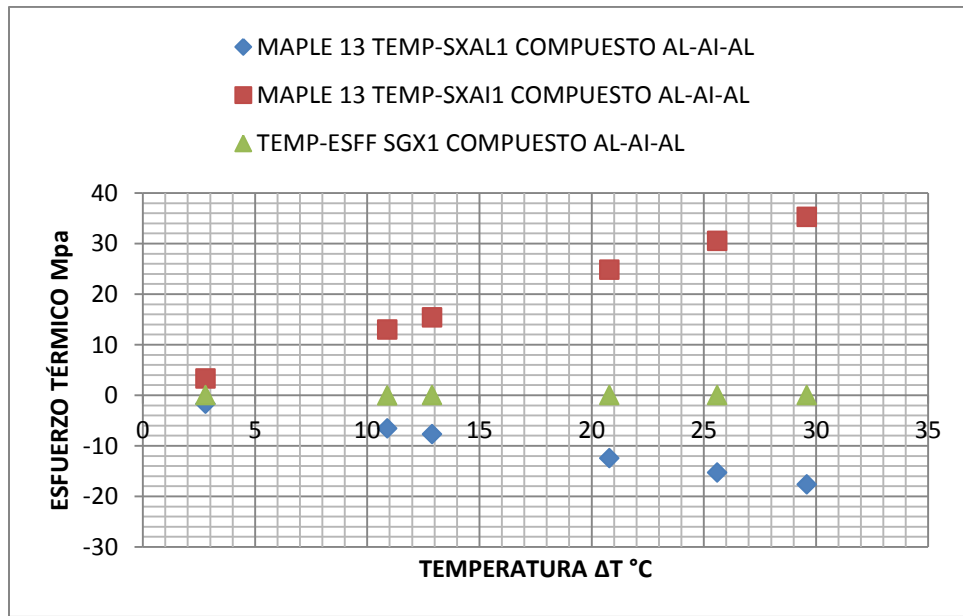


Figura 5.13. Relación entre la temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$  (SXAL1),  $\sigma_{xAIc1}$  (SXAI1) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  (SGX1)

## 2) Cálculo por Maple 13 de esfuerzos térmicos globales en compuesto c2

Para determinar en el compuesto c2 los esfuerzos térmicos globales, se utilizan las expresiones 5.9, 3, 4, las cuales se reescriben a continuación:

$$1) \sigma_{Gxc2} = \eta_{ALc2}\sigma_{xALc2} + \eta_{AIc2}\sigma_{xAIc2} \quad (5.12)$$

$$2) \sigma_{Gyc2} = \eta_{ALc2}\sigma_{yALc2} + \eta_{AIc2}\sigma_{yAIc2}$$

En la Tabla 5.21, se muestran los esfuerzos térmicos globales calculados relacionados con el compuesto c2 y en las Figura 5.14 se muestran las relaciones  $\Delta T - (\sigma_{xALc2}, \sigma_{xAIc2})$  y  $\Delta T - \sigma_{Gxc2}$ . En el Anexo D, se muestra la Figura D.10b que relaciona  $\Delta T - (\sigma_{yALc2}, \sigma_{yAIc2})$  y  $\Delta T - \sigma_{Gyc2}$ .

Tabla 5.21. Esfuerzos térmicos globales resultantes en el compuesto c2 (Maple 13)

$\Delta T$	$\sigma_{xALc2}$	$\sigma_{yALc2}$	$\sigma_{xAIc2}$	$\sigma_{yAIc2}$	$\sigma_{Gxc2}$	$\sigma_{Gyc2}$
°C	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
2.8	-2.17	-2.50	1.23	1.25	0.097	0.000
10.9	-9.68	-10.07	4.84	5.04	0.000	0.003
12.9	-11.38	-11.61	5.69	5.81	0.000	0.003
20.8	-18.36	-18.76	9.18	9.38	0.000	0.000
25.6	-22.58	-23.08	11.29	11.54	0.000	0.000
29.6	-26.09	-26.67	13.04	13.34	-0.003	0.003

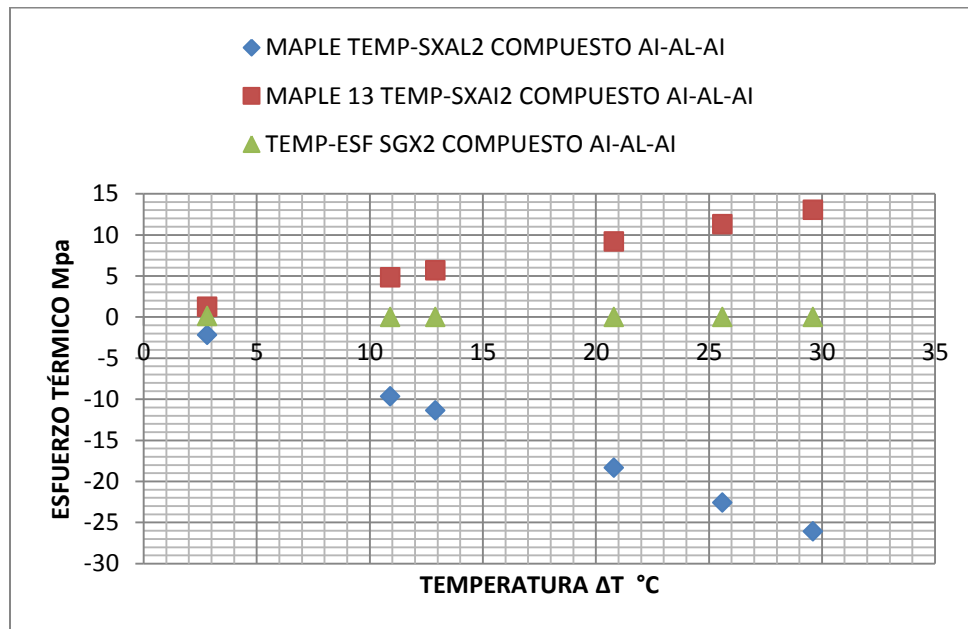


Figura 5.14. Relación entre la temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc2}$  (SXAL2),  $\sigma_{xAIc2}$  (SXAI2) y globales  $\sigma_{Gxc2}$  (SGX2)

## 5.5 Análisis de resultados

Los resultados obtenidos en este trabajo son analizados a continuación:

### 5.5.1 Respecto a los resultados para la validación del modelo

- 1) Al comparar los CET  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$  de la Tabla 5.12 obtenidos por el método inverso contra los CET experimentales, la diferencia no excede del 10%, mientras que, con respecto al CET de MatWeb, el CET  $\alpha_{AL}$  método inverso es 1.45% mayor del 10%, pero con respecto a los CET  $\alpha_{AI}$  la diferencia es menor del 10%.
- 2) Los CET obtenidos con el software Maple 13, al compararlos contra los CET experimentales, se encontró que en el aluminio es un poco mayor del 10%, mientras que el del acero inoxidable la desviación es mucho menor del 10%.

*Esto demuestra que el modelo matemático propuesto para determinar los esfuerzos térmicos globales e interlaminares, además de que es un modelo sencillo, es adecuado, aporta resultados confiables y es fácil de utilizar.*

### 5.5.2 Respecto a la aplicación del modelo en el cálculo de esfuerzos térmicos

Al aplicar el modelo representado por las ecuaciones particulares 5.9 y 5.10, se encontró que:

- 1) Los esfuerzos globales máximos obtenidos fueron: 1)  $\sigma_{Gyc1} = 5.324 \text{ MPa}$  en el compuesto c1 y 2) para el compuesto c2, el máximo esfuerzo fue  $\sigma_{Gxc2} = 1.139 \text{ Mpa}$ . Como se puede observar sus valores son pequeños sobre todo en el compuesto c2. La diferencia respecto a cero que se presenta, es porque, para el cálculo de esfuerzos térmicos interlaminares y globales, se utilizaron los CET experimentales y no los CET obtenidos por el método inverso.

- 2) Los esfuerzos térmicos globales máximos obtenidos por medio de los datos del software Maple 13 son: 1) para el compuesto c1,  $\sigma_{Gx1} = \sigma_{Gy1} = 0.003 MPa$  y 2) para el compuesto c2 fue  $\sigma_{Gxc2} = 0.097 MPa$ . Como se puede notar los valores casi son cero, esto es porque con Maple 13 en el cálculo de los esfuerzos térmicos interlaminares, están involucrados los CET de las capas de aluminio y acero inoxidable que resultaron del mismo Maple 13. Aquí se cumple la condición de que los esfuerzos térmicos globales en compuestos sometidos a cargas térmicas uniformes, *son cero*.
- 3) En la Tabla 5.4 se pueden observar algunas diferencias que se presentan en las mediciones entre las deformaciones longitudinales y transversales las cuales son consecuencia de que hay ligeras variaciones en la resistencia de los extensómetros, aunque pertenezcan al mismo lote.
- 4) Los esfuerzos térmicos interlaminares máximos calculados utilizando los datos experimentales de las constantes elásticas y de los CET del aluminio y acero inoxidable Tabla 5.5, fueron:
- En el compuesto c1 el esfuerzo térmico interlaminar máximo fue de  $\sigma_{xALc1} = -8.394 MPa$  en la capa de aluminio. Este dato representa en promedio el 25.7 % de los del acero inoxidable cuyo valor es  $\sigma_{yAic1} = 32.633 MPa$ . En este compuesto las capas de aluminio están a compresión mientras que la del acero inoxidable están a tensión.
  - En el compuesto c2 los esfuerzos térmicos interlaminares fueron,  $\sigma_{yALc2} = -16.940 MPa$  para la capa de aluminio y son 67.3% mayores que el acero inoxidable el cual fue de  $\sigma_{xAic2} = 10.125 MPa$ . En este compuesto también la capa de aluminio está a compresión mientras que las capas de acero inoxidable están a tensión.
- 5) Los esfuerzos térmicos interlaminares máximos calculados por Maple 13 fueron:

- Para el compuesto c1 en las capas de aluminio el esfuerzo térmico interlaminar máximo es  $\sigma_{xALc1} = -18.06 \text{ MPa}$  y en la de acero inoxidable es de  $\sigma_{yAlc1} = 36.11 \text{ MPa}$ . Los esfuerzos en el aluminio representan el 50% de los esfuerzos en el acero inoxidable.
- Para el compuesto c2 los esfuerzos fueron  $\sigma_{yAL2} = -26.67 \text{ MPa}$ , y  $\sigma_{yAl2} = -13.34 \text{ MPa}$ . Los esfuerzos en el aluminio fueron el doble de los de acero inoxidable.
- Comparando los esfuerzos térmicos interlaminares máximos obtenidos con las constantes experimentales (método directo) y con Maple 13, (ver Tabla 5.22), se observa que en las capas de aluminio en los dos compuestos, los valores obtenidos por Maple 13 son mayores un 53% y un 35%, mientras que en las capas de acero inoxidable en ambos compuestos tienen valores aproximados.

Tabla 5.22. Comparativo esfuerzos térmicos interlaminares método directo – Maple 13

Compuesto	Esfuerzos térmicos interlaminares			
	c1 (AL-AI-AL)		c2 (AI-AL-AI)	
Método	AL	AI	AL	AI
Directo MPa	-8.394	37.623	-16.94	10.125
Maple 13 MPa	-18.06	36.11	-26.07	13.34
Diferencia	-9.666	-1.513	-9.13	3.215
% respecto Maple 13	53.52	-4.19	35.02	24.10

### 5.5.3 Respecto a las figuras

Las relaciones cambio de temperatura – deformación mostradas en la Figura 5.9 y las relaciones cambio de temperatura – esfuerzos térmicos interlaminares y cambio de temperatura – esfuerzos térmicos globales mostradas en las Figuras 5.19 a la 5.24, muestran un comportamiento lineal.

## CAPÍTULO VI

### Conclusiones y recomendaciones

Se presentan en este capítulo las conclusiones y recomendaciones relacionadas con el tema de tesis.

#### 6.1 Conclusiones

A través del presente trabajo de tesis fueron alcanzados los objetivos siguientes:

- 1) Fue desarrollado y validado experimentalmente un modelo analítico lineal simple con el cual se pueden analizar y determinar los esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminados simétricos. Se utilizaron la teoría de elasticidad, la teoría clásica de láminas y esfuerzos térmicos, así como con el principio de superposición para el desarrollo del modelo, por lo que es posible concluir que el objetivo principal de este trabajo de tesis fue alcanzado en forma satisfactoria.
- 2) Se determinaron en forma experimental los esfuerzos térmicos locales o interlaminares y los coeficientes de expansión térmica de los materiales compuestos en estudio, usando la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable (strain gage).
- 3) Fueron analizados y evaluados los esfuerzos térmicos en el plano, tanto a nivel global (promedio) como local (interlaminares) en las capas constituyentes isotrópicas relacionados con los materiales compuestos en estudio.
- 4) Se desarrolló y probó un procedimiento para validar en forma experimental el modelo matemático generado en esta tesis.
- 5) Fueron calculados los Coeficientes de Expansión Térmica relacionados con los materiales que conforman el compuesto estudiado, usando Extensometría Eléctrica.



- 6) Se midieron las deformaciones térmicas en las capas de los materiales compuestos analizados usando Extensometría Eléctrica.

Las conclusiones derivadas de este trabajo de tesis se resumen en los siguientes puntos:

- 1) Con la premisa de que el problema de este proyecto es lineal, aplicando el principio de superposición se pudo desarrollar el modelo matemático motivo de estudio, por lo que la hipótesis considerada contribuyó a la búsqueda de la solución del problema.
- 2) Los esfuerzos térmicos interlaminares y globales obtenidos con el modelo matemático son confiables puesto que dicho modelo fue previamente validado usando el método inverso propuesto en [2]. Los CET de las capas de los compuestos c1 y c2 fueron calculados con dicho método y se compararon éstos contra los CET obtenidos experimentalmente, siendo la diferencia porcentual menor del 10%.
- 3) El modelo matemático desarrollado en esta tesis además de ser un modelo simple, es consistente y confiable y puede ser fácilmente utilizado para análisis de esfuerzos térmicos interlaminares y globales en materiales compuestos laminados simétricos. Esta característica de fácil uso del modelo lo diferencia de otros modelos descritos en el estado del arte.
- 4) Al considerar que el estado de deformaciones es homogéneo a través del espesor del compuesto, fue posible aplicar la técnica de extensometría de resistencia variable, lo que permitió evaluar experimentalmente el modelo matemático, como lo mostraron los resultados, ver Tablas 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14. Se ha demostrado la utilidad de dicha técnica en el análisis y cálculo de los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en materiales compuestos laminados metálicos simétricos.
- 5) El modelo matemático propuesto, ver ecuaciones (3.10) y (3.11) también puede ser utilizado para analizar esfuerzos térmicos en compuestos

laminados simétricos isotrópicos sometidos a cargas combinadas termo-mecánicas, y para analizar esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminado simétricos ortotrópicos. Las limitaciones del modelo son: si se quiere analizar esfuerzos en compuestos no simétricos, el modelo local está incompleto, pues se involucra un problema de flexión.

- 6) El modelo desarrollado puede ser usado para la validación de soluciones numéricas, pues es confiable y práctico en el análisis y cálculo de los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en materiales compuestos laminados metálicos simétricos.

## **6.2 Recomendaciones**

Posibles trabajos de investigación derivados de esta de tesis son los siguientes:

- 1) Ampliar la aplicación del modelo a materiales compuestos laminados simétricos ortotrópicos.
- 2) Utilizar el análisis experimental de esfuerzos térmicos como herramienta fundamental en la investigación, desarrollo y aplicación en materiales compuestos.
- 3) Desarrollar un modelo que permita evaluar en forma experimental los esfuerzos termo-mecánicos en compuestos laminados simétricos sometidos a torsión

## Referencias

- [1] José G. Sánchez, “*Materiales Compuestos en la Industria Aeronáutica-AIRBUS*”, Octubre 2009 CIST, Airbus España.
- [2] Mario Acosta Flores, “*Análisis Experimental de Esfuerzos en Materiales Compuestos*”, Tesis Doctoral en Ingeniería Mecánica, UNAM, 2010
- [3] James W. Dally, William F. Riley, “*Experimental Stress Analysis, College House Enterprises Knoxville, Tennessee*”, Fourth Edition, (2005)
- [4] Sanjay K Mazumdar, “*Composites manufacturing: materials, products, and process*”, CRC PRESS, ISBN-0-8439-0585-3, 2001
- [5] Federico Carballo, José Cañas, Juan C. Marín, “*Introducción al Análisis y Diseño con Materiales Compuestos*”, Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Universidad de Sevilla, España, 2006.
- [6] O. O. Ochoa, J. N. “*Finite Element Analysis of Composite Laminates*”, Texas A&M University, USA, Published by Kluwer Academic Publisher, 1992, Netherlands.
- [7] Alejandro Manzano Ramírez, “*Materiales compuestos, los materiales del siglo XXI*”. [www.qro.cinvestav.mx/DocsWeb/minisitios/.../MaterialesComp.pdf](http://www.qro.cinvestav.mx/DocsWeb/minisitios/.../MaterialesComp.pdf)
- [8] J. N Reddy, “*Mechanics of Composite Materials*”, “Selection works of Nicholas Pagano”, Solids Mechanics and its Applications, Kluwer Academics Publisher, ISBN 0-7923-3041-2, 1994
- [9] Ibrahim A. Asskaf, “*Rods: Thermal Stress and Stress Concentration*”, McGraw Hill, Third Edition, Chapter 2.10, 2.18, Lectures, Spring 2003.
- [10] R. A. Schapery, “Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles”, doi: 10.1177/002199836800200308 Journal of Composite Materials July 1968 vol. 2 no. 3 380-404
- [11] Bernard Budiansky, “Thermal and Thermoelastic Properties of Isotropic Composites” doi: 10.1177/002199837000400301 Journal of Composite Materials July 1970 vol. 4 no. 3 286-295
- [12] Takashi Ishikawa, Kazuo Koyama, Shigeo Kobayashi, “*Thermal Expansion Coefficients of Unidirectional Composites*”, doi: 10.1177/002199837801200204 Journal of Composite Materials July 1978 vol. 12 no. 2 153-168
- [13] Robert C. Wetherhold, Christopher S. Boss “Transverse Thermal Expansion Coefficients for Composite Laminates” doi: 10.1177/002199838802200902 Journal of Composite Materials September 1988 vol. 22 no. 9 812-817
- [14] David E. Bowles, Stephen S. Tompkins “*Prediction of Coefficients of Thermal Expansion for Unidirectional Composites*”, doi: 10.1177/002

- 199838902300405 Journal of Composite Materials April 1989 vol. 23 no. 4 370-388
- [15] Micro-Measurements, Tech Note TN-504, "Strain Gage Thermal Output and Gage Factor Variation with Temperature", 1989.
- [16] T.R. Tauchert, "*Thermal Stresses at Spherical Inclusions in Uniform Heat Flow*", doi: 10.1177/002199836800200408 Journal of Composite Materials October 1968 vol. 2 no. 4 478-486
- [17] W. T. Chen, C. W. Nelson, "*Thermal Stress in Bonded Joints*", IBM J. RES. DEVELOP. VOL. 23 NO. 2 MARCH 1979
- [18] Ali Abedian "*Thermal Stress Analysis of Unidirectional Fiber Reinforced Composites*" PhD Thesis 1998, Department of Mechanical Engineering, University of Saskatchewan, Saskatoon, Saskatchewan
- [19] D. P. H. Hasselman "*Effect of Thermal Conductivity Mismatch on the Thermal Stresses in a Dispersed Phase-Continuous Matrix Composite Material Undergoing Steady-State Heat Flow*", doi: 10.1177/0021998302036013576 Journal of Composite Materials July 2002 vol. 36 no. 13 1605-1613.
- [20] M. Jabbaria, S. Sohrabpourb, M.R. Eslami, "*Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads*", ELSEVIER, International Journal of Pressure Vessels and Piping 79 (2002) 493–497, PII: S0 30 8 -0 16 1 (0 2) 00 0 43 -1
- [21] Onur Sayman, SuÈmeyra Sayman "*Thermal Elastic-Plastic Stress Analysis of Symetric Aluminum Metal-Matrix Composite Laminated Plates Under Uniformly Distributed Temperature*", Journal of Thermal Stresses Volume 25, Issue 4, 2002, DOI:10.1080/014957302753505013
- [22] Numan Behlul Bektas, "*Thermal Elastic-Plastic Stress Analysis of Steel Woven Reinforced Aluminum Meta–Matrix Composite Laminated Plates*", Journal of Thermal Stresses, 27: 917–929, 2004 Taylor & Francis Inc. ISSN: 0149-5739 print/1521-074X online. DOI: 10.1080/01495730490440136
- [23] Z.S. Shao, "*Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length*", International Journal of Pressure Vessels and Piping 82 (2005) 155–163, doi:10.1016/j.ijpvp.2004.09.007
- [24] N. Carbajal, G. Vargas, A. Arrese, F. Mujika "*Analysis of Thermal Stresses in Unsymmetric Cross-ply Composite Strips*", doi: 10.1177/0021998308091735 Journal of Composite Materials June 2008 vol. 42 no. 12 1247-1266

- [25] G. Vargas, A. Arrese, N. Carbajal, F. Mujika “*Analysis of In-plane and Out-of-plane Thermo-mechanical Stresses in Un-symmetric Cross-ply Curved Laminated Strips*”, Published online before print August 17, 2009, doi: 10.1177/0021998309345321 Journal of Composite Materials December 2009 vol. 43 no. 25 3157-3184
- [26] S. Sambasivam, S. Quinn, and J.M. Dulieu-Barton, “*Thermoelastic Stress Analysis of Holes in Laminated Composite Materials*”, Proceedings of the XIth International Congress and Exposition, June 2-5, 2008 Orlando, Florida USA, ©2008 Society for Experimental Mechanics Inc.
- [27] Deheeger, A., Mathias, J.D.Grédiac, M. “*A closed-form solution for the thermal stress distribution in rectangular metal/composite bonded joints*”, International Journal of Adhesion & Adhesives; Jul 2009, Vol. 29 Issue 5, p515-524, 10p
- [28] T. Dharma Raju and J. Suresh Kumar, “*Thermal analysis of Composite Laminated Plates using Higher-order shear deformation theory with Zig-Zag Function*”, Int. J. Sci. Emerging Tech. Vol-2 No. 2 November, 2011, International Journal of Science & Emerging Technologies, IJSET, E-ISSN: 2048 – 8688
- [29] Oldrich Suba, Libuse Sykorova, “*Transient of Thermal Stresses in Printed Circuit Boards*”, INTERNATIONAL JOURNAL OF MECHANICS, Issue 3, Volume 5, 2011, Research Plan No. MSM 7088352102 and by the European Regional Development Fund under the project CEBIA-Tech No. CZ.1.05/2.1.00/03.0089
- [30] J. K. Nath and S. Kapuria, “*Improved global-local theory for laminated plates under thermal load with actual temperature profile*”, Journal of Thermal Stresses, Special Issue: February 2012, pages 169-191, Taylor & Francis. DOI:10.1080/01495739.2012.637805.
- [31] Erasmo Carrera, María Cinefra, Fiorenso A. Fazzolari, “*Some results of thermal stress of layered plates and shells by using unified formulation*”, Journal of Thermal Stress, Volume 36, ISSUE, 2013, ISSUE Special: 10th International Congress on Thermal Stress, Nanjing, China, may 31- june 4, 2013, page 589, 625, DOI: 10.1080/01495739.2013.784122
- [32] Yuwaraj Marotrao G., Sanjay Kantrao K, “*Thermal Flexural analysis of cross-ply laminated plates using trigonometric shear deformation theory*”, Latin American Journal of Solids and Structures, vol. 10, no. 5 Rio de Janeiro, Sept. 2013, doi: 10.1590/S1679-7825013000500008, ISSN 1679-7825
- [33] S. Schmauder, M. Meyer “*Influence of Thermal Residual Stresses on the Interface Crack*”, Finite Elements in Engineering Applications 1992, p. 149 - 174, © 1992 INTES GmbH Stuttgart

- [34] Onur Sayman, Çinar Yeni, Evren Toygar, Mehmet Şenel, “*Thermal Residual Stresses in Aluminum Metal-Matrix Antisymmetric Laminated Plates Under Uniform Temperature Distribution*”, doi: 10.1177/0731684403022010004 Journal of Reinforced Plastics and Composites July 2003 vol. 22 no. 10 913-926
- [35] Ayse Ondurucu, Muzaffer Topcu “*Thermal Residual Stresses in Simply Supported Thermoplastic Laminated Plates under a Parabolic Temperature Distribution*”, doi: 10.1177/0892705706055449 Journal of Thermoplastic Composite Materials March 2006 vol. 19 no. 2 155-171
- [36] Viet-Tung Nguyen, Jean-Francois Caron “*Finite element analysis of free-edge stresses in composite laminates under mechanical and thermal loading*”, PII: S0266-3538(07)00439-3, DOI: 10.1016/j.compscitech.2007.10.055, Reference: CSTE 3888 2007
- [37] Radoljub P. Tomic, Aleksandar S. Sedmak, Dobrivoje M. Catil, Marko V. Milos, and Zoran Stefanovi, “*Thermal Stress Analysis of a Fiber-Epoxy Composite Material*”, THERMAL SCIENCE, Year 2011, Vol. 15, No. 2, pp. 559-563 559, UDC: 547-311:539.434:536.24 DOI: 10.2298/TSC1102559T
- [38] D. Y. Liu y W. Q. Chen, “*Thermal stress analysis of a trilayer film/substrate system weak interfaces*”, Volume 43, ISSUE 8, Pages 3445-3452, December 2012, SciVerse, ScienceDirect, ELSEVIER
- [39] A.S.D. Wang, Frank W. Crossman, “*Edge Effects on Thermally Induced Stresses in Composite Laminates*”, doi: 10.1177/002199837701100305 Journal of Composite Materials July 1977 vol. 11 no. 3 300-312
- [40] O. Hayden Griffin JR “*Three Dimensional Thermal Stresses in Angle-Ply Composite Laminates*”, doi: 10.1177/002199838802200104 Journal of Composite Materials January 1988 vol. 22 no. 1 53-70
- [41] Z. H. Jin and Glaucio H. Paulino, “*Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material, International Journal of Fracture*” 107: 73–98, 2001. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [42] K.M. Liew, S. Kitipornchai, X.Z. Zhang, C.W. Lim, “*Analysis of the thermal stress behavior of functionally graded hollow circular cylinders, International Journal of Solids and Structures*”, 40 (2003) 2355–2380, doi:10.1016/S0020-7683(03)00061-1
- [43] Ahmad T. Abawi “*The Bending of Bonded Layers Due to Thermal Stress*”, oct. 2004, Hughes Research Laboratories
- [44] Daxu Zhang, Jinqiao Ye, y Hong Yu Sheng, “*Free-edge and ply cracking effect in cross-ply laminated composites under uniform extension and*

- thermal loading*”, Composite Structure, 76 (2006), 314-325, ELSEVIER SCIENCE DIRECT, doi:10.1016/j.compstruct.2005.04.021
- [45] M. C. Lafarie-Frenot, N. Q. Ho, “*Influence of free-edge interlaminar stress on damage process in CFRP laminated under thermal cycling conditions*”, Composites Science and Technology 2006|66|10|1354-1365, CEON BIBLIOTEKA NAUKI
- [46] Andrew Ritchey y Johnathan Eugene Goodsell, “*Free edge approximation for the angle-ply laminate*” Purdue University, version 1.1, 09 Apr. 2010, doi: 10.4321/D3VM42X2H
- [47] Atieh Andakhshideh, Masoud Tahani: “*Free-edge stress analysis of general rectangular composite laminates under bending, torsion and thermal loads*”, European Journal of Mechanics - A/Solids, 25 June 2013, ELSEVIER.
- [48] T. Kim, S. N. Atluri, “*Analysis of edge stresses in composite laminates under combined thermo-mechanical loading, using a complementary energy approach*”, Computational Mechanics 16 (1995) 83-97 © Springer-Verlag 1995
- [49] Wan-Lee Yin “*The Effect of Temperature Gradient on the Free-Edge Interlaminar Stresses in Multi-Layered Structures*”, doi: 10.1177/002199839703102403 Journal of Composite Materials December 1997 vol. 31 no. 24 2460-2477
- [50] Yujun Wen, Cemal Basaran, “*Thermomechanical Stress Analysis of Multi-Layered Electronic Packaging*”, DOI: 10.1115/1.1535446, 134 Vol. 125, MARCH 2003 Copyright © 2003 by ASME Transactions of the ASME
- [51] Dong-Joo Li, Igor Paley, “*Simple model to predict the interlaminar shear strengt of laminate composites*”, Journal of Compsite Materials. June 2012 Vol 46 no. 11 pages 1357-1365, doi: 10.1177/0021998311418547.
- [52] Tarun Kant, S. M. Shiyekar, “*An assessment of a higher order theory for composite laminates subjected to thermal gradient*”, Volume 96, February 2013, pages 698-707, ELSEVIER
- [53] G. Gkikas, D. D. Douka, N. M. Barkoula and A. S. Paipetis, “*Interlaminar shear strength and thermo-mechanical properties of nano-enhanced composite materials under thermal shock*”, Proc. SPIE 8689, Behavior and Mechanics of Multifunctional Materials and Composites 2013, 86891Q (April 3, 2013); doi:10.1117/12.2009974; San Diego California, SPIE Library.
- [54] T R Emery, J M Dulieu-Barton, J S Earl and P R Cunningham, “*A Generalized Approach to the Calibration of Orthotropic Materials for*

*Thermoelastic Stress Analysis*", Composites Science and Technology 68, 3-4 (2009) 743" DOI : 10.1016/j. compscitech.2007.09.002

- [55] R. Torres-Martínez, E. D. Carro-Hernández, R. Espinoza-Bustos, J. A. Huerta-Ruelas, "*El Análisis Experimental de Esfuerzos en la Optimización de Diseños Mecánicos*", *Tecnolog@* Vol. 1, No. 3, sept-dic/2008 © 2007 CICATA-Querétaro-IPN. ISSN en trámite. México
- [56] J. Eaton-Evans, J.M. Dulieu-Barton, y R.L. Burguete, "*Modern Stress and Strain Analysis: A State of the Art Guide to Measurement Techniques*", Eureka magazine, 2009.
- [57] G. Anagnostopoulos, J. Parthenios, y C. Galiotis, "*Thermal stress development in fibrous composites*", *Materials Letters*, vol. 62, 2007, págs. 341–345.
- [58] Thecnology "*Meassurement of Force, Torque, and other Mechanical Variables with Strain Gage*",  
<http://www.measurementsgroup.com/guide/ta/msg/msg.htm> [2/16/2001]
- [59] Rodolfo Andres Wong, "*Instrumentación Y Pruebas Para Determinar Esfuerzos en Recipiente de Gas uno Domestico*", Tesis de ingeniería Mecánica, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, Ecuador, 1989
- [60] Luis Mailly and Su Su Wang, "*Recent Development of Planar Cruciform Experiment on Biaxial Tensile Deformation and Failure of Unidirectional Glass/Epoxy Composite*", *Journal of Composite Materials* July 2008 vol. 42 no. 13 1359-1379, doi: 10.1177/0021998308092203
- [61] Durelli, A. J., Phillips, E. A., and Tsao, C. H., "*Introduction To The Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain*", McGraw-Hill Book Company, Inc. (1958).
- [62] Rivera López Rolando E., "*Algunas Consideraciones Sobre la Teoría de la Elasticidad Lineal*", Tesis de Maestría, UNAM, 2006
- [63] Mario Acosta Flores, "*Obtención Experimental de las Propiedades Mecánicas de un Material Compuesto Laminar*", DEPFI.- Tesis de Maestría.- UNAM.-1998
- [64] Ugural, A. C., and Fenster, S. K., "*Advanced Strength and Applied Elasticity*", 3rd ed., Prentice Hall PTR, Upper Saddle, New Jersey (1995).
- [65] Bruno A. Boley and Jerome H. Weiner, "*Theory of Thermal Stresses*", DOVER PUBLICATIONS, INC. Mineola, New York, 1997
- [66] Onur Sayman, Sümeira Sayman, "*Thermal Elastic-Plastic Stress Analysis on Simply Supported Aluminum Metal-Matrix Composite Laminated Plates*"



doi: 10.1177/0731684402021004255 Journal of Reinforced Plastics and Composites March 2002 vol. 21 no. 4 375-386

- [67] Morton E. Gurtin (1981) *"An Introduction to Continuum Mechanics"*. New York. Academic Press.
- [68] Vishay Micro-Measurements, *"Strain Gage Installations with M-Bond 200 Adhesive"*, Instruction Bulletin B-127-14, 17/01/2005.
- [69] Vishay Micro-Measurements, *"Leadwire Attachment Techniques for obtaining Maximum Fatigue Life of Strain Gages"*, Technical Note 604, Strain Gage an Instrument, 12-11-2010.
- [70] Vishay Micro-Measurements, Gage Installation Tester Model 1300, Document Number: 11301, Revision: 28-Jun-10.
- [71] Micro-Measurements, Tech Note TN-513-4, *"Measurement of Thermal Expansion Coefficient Using Strain Gages"*.
- [72] Delfín J., Carrera J., Acosta M., Jiménez E., Tzab J.,García E., Gamboa I. *"Didactic cooling machine development for deformations measuring in simple structures"*, Paper 52, International Conference on Engineering Education and Research 2013 1 July - 5 July 2013, Marrakesh, ISBN : 978-9954-9091-2-6
- [73] Micro-Measurement Tech Note TN-504-1, *"Strain Gage Thermal Output and Gage Factor Variación with Temperature"*, Document Number 11054, Review Juñy 11, 2012.
- [74] MatWeb Material Property Data, <http://www.matweb.com/>
- [75] Delfín Juan, Carrera Jorge, Acosta Mario, Jiménez Eusebio, *"Interlaminar Thermal Stress Analysis in Symmetric Composite Laminated Metallic"*, IJMRA, IJESM, ISSN: 2320-0294, Volume 3, Issue 1, March 2014

# APÉNDICE A

## Conceptos teóricos

### A.1 Antecedentes

se analizan en este apéndice conceptos importantes para este trabajo de tesis; tales como: material compuesto, estado de esfuerzos, principio de superposición, propiedades globales y locales, la teoría clásica de láminas, teoría de esfuerzos térmicos, la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable y su aplicación en materiales compuestos, etc.

### A.2 Definición de material compuesto

Un material compuesto es aquel que está formado por dos o más componentes en una escala macroscópica, distinguibles físicamente y separables mecánicamente, y con propiedades superiores a las de sus constituyentes (sinergia) [2].

Estos materiales nacen de la necesidad de obtener materiales que combinen propiedades de los cerámicos, los plásticos, los metales, etc. de manera tal, que sea posible manipular las propiedades del material, variando aspectos como son: la rigidez, la resistencia a la fatiga, la resistencia a la corrosión, la resistencia a la abrasión, la reducción de peso, la capacidad de trabajo a altas y bajas temperaturas, etc.

Algunas de las aplicaciones de los materiales compuestos que se pueden encontrar actualmente son:

1. En la industria naval: hélices, navíos, submarinos, depósitos de agua y combustible, ductos de ventilación, boyas, etc.
2. En la industria militar y aeroespacial: cohetes, hélices de aviones y helicópteros, recipientes a presión, naves de desembarque, etc.
3. En la industria automotriz: partes de carrocería de automóviles, camiones y ómnibus, para-golpes, tableros de instrumentos, revestimientos internos, etc.

4. En la industria civil: perfiles estructurales, pisos, paneles y placas divisorias, hormigón armado, hormigón con fibras, refuerzos estructurales, etc.

5. En la industria del deporte: cascos, esquís, raquetas de tenis, palos de golf más largos y esbeltos, piscinas, arcos y flechas, bicicletas, cañas de pesca, etc.

Los materiales compuestos pueden ser clasificados en tres grupos: los reforzados con partículas, los reforzados con fibras (de vidrio, de carbono, kevlar, etc.), y los estructurales (tipo sándwich). Dentro de los reforzados con fibra, están los compuestos laminados que de acuerdo con [6], son materiales sándwich constituidos por capas delgadas y unidas por un medio. En la figura A.1 se muestran las diversas configuraciones de fibras y en la A.2, cintas unidireccionales de fibras de kevlar, carbono, y de vidrio, y en la figura A.3 se muestran compuestos laminados.

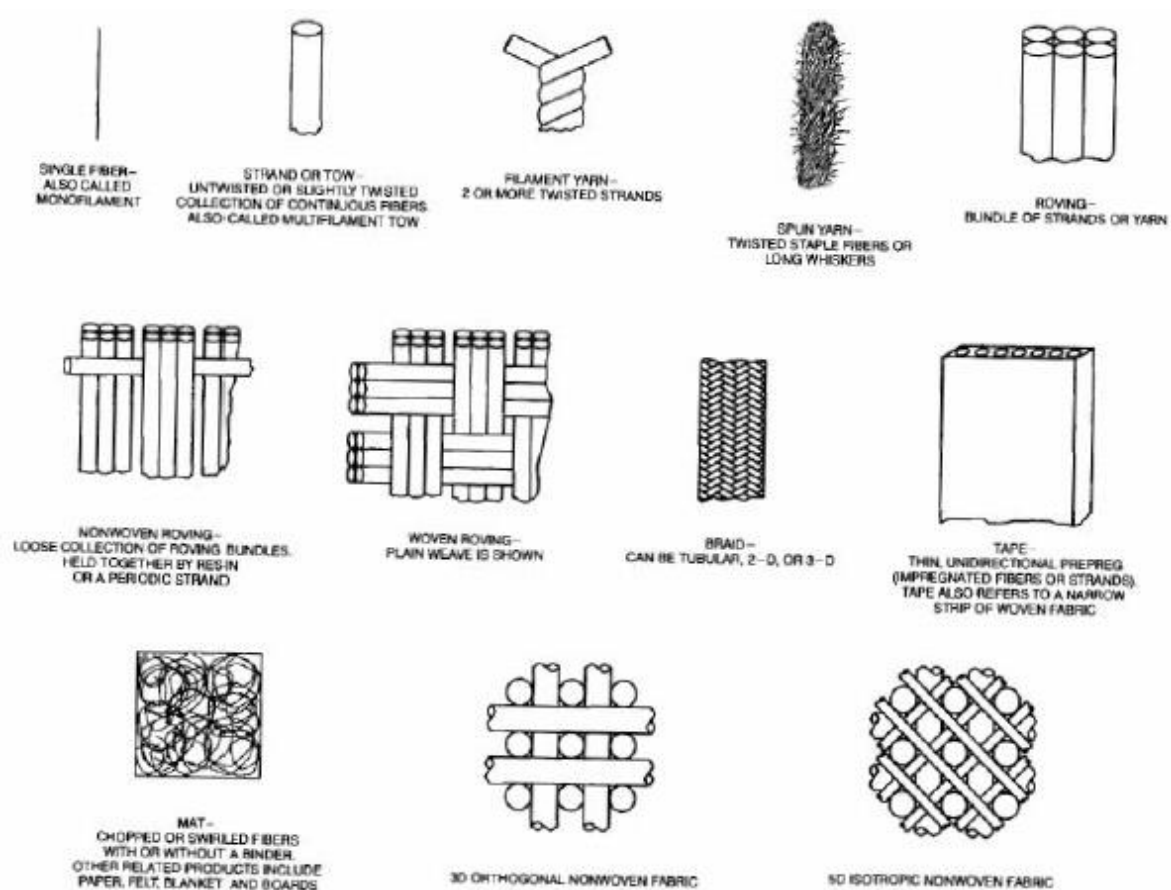
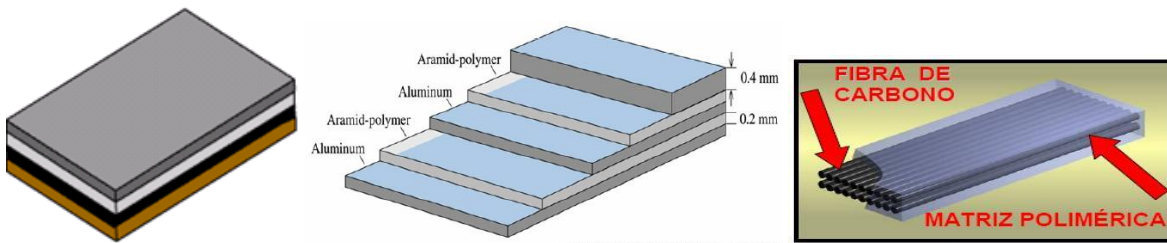


Figura A.1. Diversas configuraciones y empaquetamiento de fibras. Fuente: Acosta [2]



Figura A.2. Cintillas unidireccionales usadas en la fabricación de compuestos [1]



a) Laminado no metálico    b) laminado metálico-no metálico    c) laminado de fibra de carbono

Figura A.2 Materiales Compuestos Laminados

### A.3 Principio de Superposición

El principio de superposición permite descomponer un problema mecánico en dos o más subproblemas, siempre y cuando las ecuaciones que definan su comportamiento mecánico sean lineales [2].

### A.4 Estado de esfuerzos en un punto

Son los esfuerzos actuando en todos los planos o los componentes de esfuerzos en planos que coinciden. Por ejemplo los esfuerzos  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ , actuando con respecto al sistema x, y, z, (ecuaciones de transformación de esfuerzos)

## A.5 Análisis de esfuerzos térmicos

En este trabajo el análisis de esfuerzos térmicos en materiales compuestos implicará, tres niveles de esfuerzos; globales (por lámina), interlaminares (por pliegue o capa) y puntuales. Ver figura A.1.

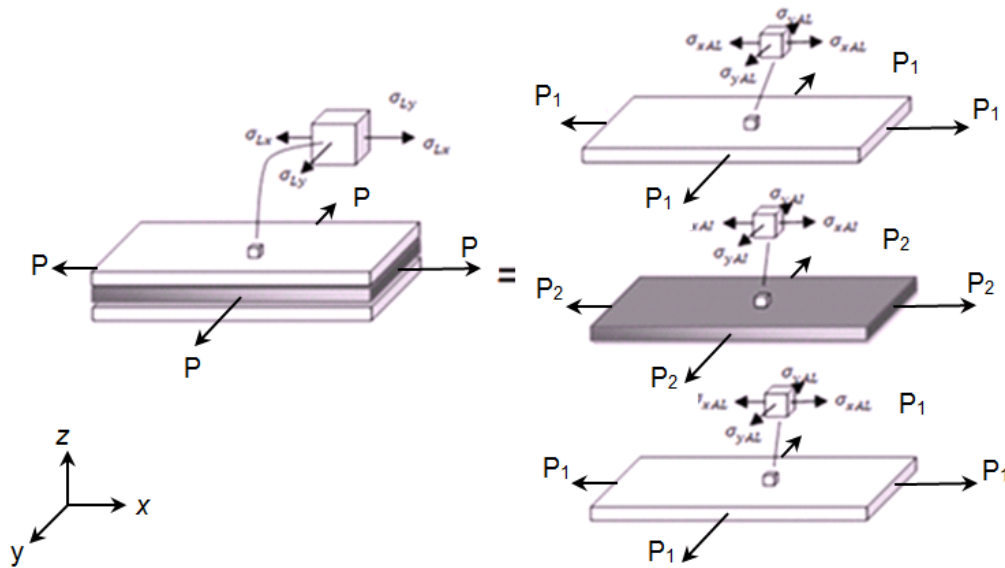


Figura A.1. Esfuerzos térmicos globales (por lámina) e interlaminares (por pliegue o capa)

Los **esfuerzos térmicos globales** son el resultado promedio de la integración de esfuerzos térmicos locales (longitudinales y transversales) de cada capa a través de todo el espesor del laminado compuesto.

A nivel local los **esfuerzos térmicos interlaminares** (normales y transversales por pliegue o capa) son resultado de la integración de esfuerzos térmicos a través de la capa o pliegue.

**Esfuerzos térmicos interlaminares puntuales** son aquellos que se determinan en cualquier punto del laminado compuesto, los cuales son función de los modelos planteados en este trabajo.

## **A.6 Propiedades térmicas y mecánicas globales y locales de un compuesto laminado**

El coeficiente de expansión térmica (CET), se puede clasificar en global y local, estos son definidos de la forma siguiente.

Los CET globales (promedio o efectivas), son aquellos coeficientes que se determinan a partir de los CET individuales de las capas que constituyen los compuestos, estos CET, en el caso de un material homogéneo isotrópico, no dependen de la dirección, pero si dependen del número de capas.

Los CET locales, son los CET de cada una de las capas que constituyen el compuesto

En un compuesto laminado las propiedades elásticas globales (promedio o efectivas) se determinan a partir de las propiedades elásticas de cada una de las capas, del número de capas con la misma dirección, de las dimensiones, posición de los grupos de capas del laminado.

Las propiedades elásticas de las capas o locales, en el caso de un compuesto isotrópico, dependen del tipo de material del que está hecho la capa, en el caso de un material ortotrópico, dependen del conocimiento de las propiedades elásticas de la matriz y de las fibras de refuerzo, también influyen otros factores como el proceso de fabricación, de la unión entre capas, etc,. Dichos factores hacen que la determinación experimental tanto de las propiedades elásticas globales como la de las capas (locales) sea importante, sobre todo si éstas se requieren para llevar a cabo análisis numéricos o experimentales del comportamiento mecánico de un compuesto laminado y se quieren resultados más precisos [2].

## **A.7 Interface**

La interface es una capa física que se forma entre las capas componentes de los materiales compuestos, se considera que ésta se produce por la unión en los compuestos (por pegamento, fusión metálica o de resina, etc., defectos de manufactura) o por la unión entre materiales con propiedades mecánicas diferentes [2].

## **A.8 Extensometría eléctrica de resistencia variable**

Es una de las técnicas más usadas para el análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos [2]. Buenos resultados en materiales compuestos pueden ser obtenidos si se combina y aplica en forma eficiente, un modelo mecánico representativo, y el uso del método científico como herramienta para el entendimiento de los problemas mecánicos a resolver y como guía para la obtención de su solución, y, la técnica de extensometría eléctrica que proporcione la información útil necesaria para la obtención de resultados.

La selección del extensómetro y del quipo a utilizar en las pruebas, el uso de factores de compensación debido a los errores, y el manejo de resultados dependen directamente del tipo de problema a resolver.

## **A.9 La técnica de extensometría eléctrica en el análisis de esfuerzos en materiales compuestos**

Los extensómetros eléctricos de resistencia variable son sensores que miden deformaciones promedio puntuales donde se instrumentan, por lo que la información que puede obtenerse de ellos es real y pertenece únicamente al punto instrumentado. Con la información proporcionada por los extensómetros sólo es posible determinar los valores de deformaciones o de esfuerzos en otros puntos de un elemento cuando se cuenta con un modelo matemático en el que se considera que la distribución de esfuerzos es homogénea y es lineal. No es

posible conocer las deformaciones en otros puntos del elemento analizado cuando no se cumple con todos los puntos anteriormente mencionados.

En este trabajo se presentan un modelo con los que es posible analizar experimentalmente el comportamiento térmico interlaminar y global, utilizando la técnica de extensometría eléctrica, en problemas carga térmica pura en materiales compuestos laminados. En ellos se considera distribución de esfuerzos homogénea y lineal.

### **A.10 Teoría clásica de láminas**

La teoría clásica de láminas es base para el desarrollo de este trabajo, lo relacionado con los problemas de tensión simple o de carga térmica pura, se puede consultar en [64], y en los trabajos de tesis de maestría y doctorado [2] y [63]



## ANEXO B

### Sistema de ecuaciones para la obtención de los CET, para validación del modelo (Método Inverso)

#### B.1 Introducción

Se lleva a cabo en este anexo un desarrollo matemático con el fin de obtener las ecuaciones necesarias para la obtención de los coeficientes de expansión térmica (CET) de las capas que constituyen los compuestos c1 (AL-AI-AL) y c2 (AI-AL-AI) utilizados en este trabajo de tesis.

##### B.1.1 Antecedentes

En este trabajo de tesis se propone un modelo matemático lineal simple para llevar a cabo el análisis experimental de esfuerzos térmicos en materiales compuestos laminados metálicos simétricos. El modelo se aplicó y se generó un sistema de ecuaciones particulares, relacionadas con un compuesto laminado y con las capas que lo constituyen, para conocer si el modelo aporta resultados correctos, es necesario comparar sus resultados, con los obtenidos por otros modelos que determinen los mismos esfuerzos o en su defecto, también puede ser validado por medio de un método computacional como el método del elemento finito. Otra forma de validar el modelo es, utilizando un *método inverso propuesto* en [2], para *generar un sistema de ecuaciones* que permitan determinar los coeficientes de expansión térmica de las capas que constituyen los compuestos c1 y c2, esto es,  $\alpha_{AL}$  del aluminio (AL) y  $\alpha_{AI}$  del acero inoxidable (AI), considerando que estos se desconocen, una vez obtenidos se comparan con los CET obtenidos en forma experimental y con los que aparecen en la base de datos MatWeb [73].

##### B.1.2 Definición del problema

Se requiere validar el modelo lineal simple que se propone en el capítulo IV, para llevar a cabo el análisis experimental de esfuerzos térmicos globales e interlaminares en materiales compuestos laminados metálicos simétricos.

### **B.1.3 Objetivos**

**Objetivo general:** validar el modelo lineal simple propuesto en el capítulo IV, para poder llevar a cabo en forma confiable, el análisis de esfuerzos térmicos en compuestos laminados metálicos simétricos.

**Objetivo específico:** utilizando el método inverso [2], encontrar un sistema de ecuaciones basadas en el modelo propuesto, para determinar los coeficientes de expansión térmica (CET) de las capas que constituyen el compuesto, que permitirán dar validez al modelo.

### **B.1.4 Alcances**

Para obtener las ecuaciones que permitan conocer los CET de las capas, se construirán basados en el modelo, dos sistemas de ecuaciones relacionadas: una con el compuesto laminado simétrico c1, constituido de la forma siguiente, dos capas de aluminio y una capa intermedia de acero inoxidable (AL-AI-AL), y, otro compuesto laminado metálico simétrico c2, constituido por dos capas de acero inoxidable y una capa intermedia de aluminio (AI-AL-AI). A partir de los dos sistemas de ecuaciones se obtendrán mediante el método inverso los conjuntos de ecuaciones necesarios para determinar los CET ( $\alpha_{AL}, \alpha_{AI}$ ) de las capas que constituyen los compuestos.

### **B.1.5 Condiciones de frontera**

1. Los esfuerzos térmicos globales longitudinales y transversales son cero.
2. Sólo existen cargas térmicas.

## **B.2 Sistemas de ecuaciones relacionadas con los compuestos c1 y c2**

En esta sección son formulados, basados en el modelo propuesto, dos sistemas de ecuaciones relacionados con los dos compuestos mencionados: uno para el análisis de los esfuerzos térmicos globales y el otro, para el análisis de esfuerzos térmicos interlaminares de las capas que constituyen los compuestos. Los sistemas de ecuaciones formulados son los siguientes:

### B.2.1 Sistema de ecuaciones para el análisis de esfuerzos globales

Para el análisis de esfuerzos térmicos globales el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sigma_{Gxc1} &= 0 = \eta_{ALc1}\sigma_{xALc1} + \eta_{Aic1}\sigma_{xAic1} & (B.1) \\
 2) \quad \sigma_{Gxc2} &= 0 = \eta_{ALc2}\sigma_{xALc2} + \eta_{Aic2}\sigma_{xAic2} \\
 3) \quad \sigma_{Gyc1} &= 0 = \eta_{ALc1}\sigma_{yALc1} + \eta_{Aic1}\sigma_{yAic1} \\
 4) \quad \sigma_{Gyc2} &= 0 = \eta_{ALc2}\sigma_{yALc2} + \eta_{Aic2}\sigma_{yAic2}
 \end{aligned}$$

### B.2.2 Sistema de ecuaciones para análisis de esfuerzos térmicos interlaminares

El sistema de ecuaciones formuladas a partir del modelo, para el análisis de esfuerzos térmicos interlaminares, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sigma_{xALc1} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cyc1}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} & (B.2) \\
 2) \quad \sigma_{xAic1} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cyc1}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \\
 3) \quad \sigma_{xALc2} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cyc2}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \\
 4) \quad \sigma_{xAic2} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cyc2}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \\
 5) \quad \sigma_{yALc1} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cxc1}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \\
 6) \quad \sigma_{yAic1} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cxc1}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \\
 7) \quad \sigma_{yALc2} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cxc2}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}}
 \end{aligned}$$

$$8) \sigma_{yAlc2} = \frac{E_{Al}}{1-\nu_{Al}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{Al}\varepsilon_{Cxc2}^0) - \frac{E_{Al}\alpha_{Al}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{Al}}$$

donde  $\sigma_{Gxc1}$ ,  $\sigma_{Gyc1}$ , y  $\sigma_{Gxc2}$ ,  $\sigma_{Gyc2}$ , son los esfuerzos globales promedio en x, y, de los compuestos AL-AI-AL (c1), AI-AL-AI (c2),  $\eta_{ALc1}$ ,  $\eta_{Alc1}$  son las fracciones volumétricas de las capas de aluminio y acero inoxidable en el compuesto c1, y  $\eta_{ALc2}$ ,  $\eta_{Alc2}$  lo son del compuesto c2,  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{xAlc1}$ ,  $\sigma_{yAlc1}$ , son esfuerzos interlaminares en direcciones x, y, de las capas de aluminio y acero inoxidable del compuesto c1,  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{yALc2}$ ,  $\sigma_{xAlc2}$ ,  $\sigma_{yAlc2}$ , lo son del compuesto c2,  $\varepsilon_{Cxc1}^0$ ,  $\varepsilon_{Cyc1}^0$ ,  $\varepsilon_{Cxc2}^0$  y  $\varepsilon_{Cyc2}^0$  son las deformaciones corregidas longitudinales y transversales de los compuestos c1 y c2,  $E_{AL}$ ,  $\nu_{AL}$ ,  $\alpha_{AL}$ , y  $E_{Al}$ ,  $\nu_{Al}$ ,  $\alpha_{Al}$  son las constantes elásticas (módulo de elasticidad y relación de Poisson) y coeficiente de expansión térmica de las capas de aluminio, y acero inoxidable respectivamente y,  $\Delta T_{c1}$  y  $\Delta T_{c2}$  son los cambios de temperatura en los compuestos c1 y c2.

### **B.3 Obtención de las ecuaciones para obtener los CET de las capas AL y AI, usando el método inverso**

Los sistemas de ecuaciones necesarios para obtener los Coeficientes de Expansión Térmica (CET) de las capas que constituyen los materiales compuestos, son generados a partir de las ecuaciones (B.1) y (B.2).

En el proceso inverso se consideran conocidos los esfuerzos térmicos interlaminares, las constantes elásticas, las deformaciones corregidas, las fracciones volumétricas y los cambios de temperaturas, y son considerados desconocidos los coeficientes de expansión térmica de las capas de los compuestos.

Las ecuaciones para determinar los CET ( $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{Al}$ ), de las capas de aluminio y acero inoxidable de los compuestos c1 y c2, son obtenidas de la manera siguiente:

- 1) Un conjunto de ecuaciones para determinar ( $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ ), es obtenido utilizando los componentes en  $x$ , de las ecuaciones (4.13) y (4.14).
- 2) Otro conjunto para determinar los mismos CET, es obtenido utilizando los componentes en  $y$ , de las ecuaciones (4.13) y (4.14).

### **B.3.1 Ecuaciones para obtener los CET de las capas AL y AI, considerando los componentes de esfuerzos en $x$**

Se generan aquí las ecuaciones necesarias para determinar de forma inversa los CET del aluminio y del acero inoxidable.

#### **Objetivo**

El objetivo que se persigue en esta sección es el siguiente:

Desarrollar mediante los componentes en  $x$  de los esfuerzos, las ecuaciones que permitan obtener los CET de las capas, mediante el método inverso.

Las ecuaciones utilizadas relacionadas con los componentes en  $x$  de los esfuerzos para obtener los CET de las capas son:

$$1) \quad 0 = \eta_{ALc1}\sigma_{xALc1} + \eta_{AI1}\sigma_{xAIc1} \quad (B.3)$$

$$2) \quad 0 = \eta_{ALc2}\sigma_{xALc2} + \eta_{AI2}\sigma_{xAIc2}$$

$$1) \quad \sigma_{xALc1} = A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}}$$

$$2) \quad \sigma_{xAIc1} = B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}$$

$$3) \quad \sigma_{xALc2} = C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}}$$

$$4) \quad \sigma_{xAIc2} = D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$

Los módulos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$ , son determinados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
1) \quad A &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cyc1}^0) \\
2) \quad B &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cyc1}^0) \\
3) \quad C &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cyc2}^0) \\
4) \quad D &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cyc2}^0)
\end{aligned}
\tag{B.5}$$

### B.3.1.1 Ecuación para determinar el CET $\alpha_{AL}$ , mediante componentes de esfuerzos térmicos en x

Se generan las ecuaciones necesarias para determinar de forma inversa los CET del aluminio y del acero inoxidable de los compuestos c1 y c2, tomando como base las ecuaciones (B.3, 1 y 2) y (B.4, 1, 2, 3 y 4)

El proceso seguido para obtener la ecuación particular para obtener  $\alpha_{AL}$ , se lleva a cabo en tres etapas, estas son:

**Primera etapa:** se encuentra la ecuación para determinar  $\alpha_{AI}$  en función de  $\alpha_{AL}$ , para el compuesto c1.

**Segunda:** se encuentra la ecuación para determinar  $\alpha_{AI}$  en función de  $\alpha_{AL}$ , para el compuesto c2.

**Tercera:** se igualan los  $\alpha_{AI}$  de las etapas anteriores y se obtiene la ecuación para determinar  $\alpha_{AL}$ .

#### Primera etapa

En esta etapa se obtiene la ecuación para determinar  $\alpha_{AI}$  en función de  $\alpha_{AL}$ , para el compuesto c1.

## Paso 1

Se despejan los esfuerzos térmicos interlaminares de la capa de aluminio del compuesto c1 ( $\sigma_{xALc1}$ ) de la ecuación B.3.1, y del compuesto c2 ( $\sigma_{xALc2}$ ) de la ecuación B.3.2

$$1) \sigma_{xALc1} = -(\eta_{AIC1}\sigma_{xAIC1})/\eta_{ALc1}$$

$$2) \sigma_{xALc2} = -(\eta_{AIC2}\sigma_{xAIC2})/\eta_{ALc2}$$

## Paso 2

Se igualan las ecuaciones (1) y la ecuación (B.4, 1), y se despeja el esfuerzo interlaminar para la capa de acero inoxidable  $\sigma_{xAIC1}$ , del compuesto c1.

$$-(\eta_{AIC1}\sigma_{xAIC1})/\eta_{ALc1} = A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}}$$

$$3) \sigma_{xAIC1} = -\left[A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}}\right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}}$$

## Paso 3

Se igualan las ecuaciones (3) y (B.4.2, 2) y se despeja el CET del acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ).

$$\sigma_{xAIC1} = B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \quad (\text{B.4.2})$$

$$-\left[A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}}\right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} = B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}$$

$$\frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} = B + \left[A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}}\right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}}$$

Despejando el CET del acero inoxidable  $\alpha_{AI}$ , se obtiene:

$$4) \alpha_{AI} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c1}} \left\{ B + \left[A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}}\right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right\}$$

## Segunda etapa

Se encuentra la ecuación para determinar  $\alpha_{AI}$  en función de  $\alpha_{AL}$ , para el compuesto c2.

### Paso 4

Se igualan las ecuaciones (1.b) y la ecuación (B.4, 3), y se despeja el esfuerzo interlaminar para la capa de acero inoxidable  $\sigma_{xAIc2}$ , del compuesto c2.

$$\sigma_{xALc2} = -(\eta_{AIc2}\sigma_{xAIc2})/\eta_{ALc2} \quad (1, b) \quad ; \quad \sigma_{xALc2} = C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \quad (F.B, 3)$$

$$-(\eta_{AIc2}\sigma_{xAIc2})/\eta_{ALc2} = C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}}$$

$$4) \quad \sigma_{xAIc2} = - \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}}$$

### Paso 5

Se igualan las ecuaciones (5) y (B.4, 4) y se despeja el CET del acero inoxidable

$$\sigma_{xAIc2} = D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \quad (B.4, 4)$$

$$- \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} = D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$

Despejando el CET del acero inoxidable  $\alpha_{AI}$ , se obtiene:

$$5) \quad \alpha_{AI} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c2}} \left\{ D + \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right\}$$

## Tercera etapa

Se obtiene la ecuación para determinar el CET de la capa de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) de los compuestos c1 y c2.



## Paso 6

Se igualan las expresiones (4) y (6), y se despeja el CET de la capa de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ), de los compuestos c1 y c2.

$$\frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c2}} \left\{ D + \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right\} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c1}} \left\{ B + \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right\}$$

Se elimina el término  $\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}}$

$$\frac{1}{\Delta T_{c2}} \left\{ D + \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right\} = \left( \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \right) \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c1}} \left\{ B + \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right\}$$

$$\left\{ D + \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right\} \frac{1}{\Delta T_{c2}} = \frac{1}{\Delta T_{c1}} \left\{ B + \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right\}$$

Se multiplican por el recíproco del cambio de temperatura los términos dentro de los corchetes.

$$\frac{D}{\Delta T_{c2}} + \frac{C}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{1}{\Delta T_{c2}} \right) \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right) = \frac{B}{\Delta T_{c1}} + \frac{A}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{(1-\nu_{AL})\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right)$$

$$\frac{D}{\Delta T_{c2}} + \frac{C}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right) = \frac{B}{\Delta T_{c1}} + \frac{A}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right)$$

$$\frac{D}{\Delta T_{c2}} + \frac{C}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right) = \frac{B}{\Delta T_{c1}} + \frac{A}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right)$$

Términos con  $\alpha_{AL}$  del lado izquierdo del signo igual

$$\frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right) = \frac{B}{\Delta T_{c1}} + \frac{A}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) - \frac{D}{\Delta T_{c2}} - \frac{C}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right)$$

$$\alpha_{AL} \left[ \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} - \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right) \right] = \frac{B}{\Delta T_{c1}} + \frac{A}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) - \frac{D}{\Delta T_{c2}} - \frac{C}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIC2}} \right)$$

Se despeja el Coeficiente de Expansión Térmica (CET) de la capa aluminio

$$\alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{Alc1}} - \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{Alc2}} \right)} \left\{ \frac{B}{\Delta T_{c1}} + \frac{A}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{Alc1}} \right) - \frac{D}{\Delta T_{c2}} - \frac{C}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{Alc2}} \right) \right\}$$

Reordenando la expresión anterior, la ecuación resultante para determinar el CET de la capa de aluminio

$$\alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{Alc1}} - \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{Alc2}} \right)} \left\{ \frac{A}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{Alc1}} \right) + \frac{B}{\Delta T_{c1}} - \frac{C}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{Alc2}} \right) - \frac{D}{\Delta T_{c2}} \right\} \quad (B.5)$$

### B.3.1.2 Proceso seguido para obtener la ecuación particular para obtener el CET del aluminio ( $\alpha_{Al}$ ), con esfuerzos en el eje x

El proceso seguido para obtener la ecuación particular para obtener  $\alpha_{Al}$  en función de las constantes elásticas, las fracciones volumétricas, las deformaciones y los cambios de temperatura, también consta de tres etapas y contiene los siguientes pasos:

#### Primera etapa

Se obtiene el CET de la capa de aluminio  $\alpha_{AL}$  del compuesto c1, en función de  $\alpha_{Al}$

#### Paso 1

Se igualan las ecuaciones (3) y (B.4.2, 2) y se despeja el CET del aluminio ( $\alpha_{AL}$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{xAlc1} &= B - \frac{E_{Al}\alpha_{Al}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{Al}} \quad (B.4.2) \quad 3) \quad \sigma_{xAlc1} = - \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{Alc1}} \\ - \left[ A - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{Alc1}} &= B - \frac{E_{Al}\alpha_{Al}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{Al}} \\ \left[ -A + \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{Alc1}} &= B - \frac{E_{Al}\alpha_{Al}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{Al}} \\ -A + \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} &= \frac{\eta_{Alc1}}{\eta_{ALC1}} \left[ B - \frac{E_{Al}\alpha_{Al}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{Al}} \right] \\ \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} &= A + \frac{\eta_{Alc1}}{\eta_{ALC1}} \left[ B - \frac{E_{Al}\alpha_{Al}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{Al}} \right] \end{aligned}$$

Despejando  $\alpha_{AL}$  de la expresión anterior

$$6) \alpha_{AL} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c1}} \left\{ A + \frac{\eta_{Alc1}}{\eta_{ALc1}} \left[ B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

### Segunda etapa

Se obtiene el CET de la capa de aluminio  $\alpha_{AL}$  del compuesto c2, en función de  $\alpha_{AI}$

#### Paso 2

Se igualan las ecuaciones (4) y (B.4.4) y se despeja el CET del aluminio ( $\alpha_{AL}$ )

$$\sigma_{xAlc2} = - \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}} \quad (4) \quad \sigma_{xAlc2} = D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \quad (B.4, 4)$$

$$- \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}} = D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$

Despejando el CET del acero inoxidable  $\alpha_{AL}$ , se obtiene:

$$- \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] = \frac{\eta_{Alc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right]$$

$$-C + \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} = \frac{\eta_{Alc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right]$$

$$\frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} = C + \frac{\eta_{Alc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right]$$

Despejando  $\alpha_{AL}$  de la expresión anterior

$$7) \alpha_{AL} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c2}} \left\{ C + \frac{\eta_{Alc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

### Tercera etapa

Se obtiene la ecuación para determinar el CET de la capa de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ) de los compuestos c1 y c2

#### Paso 3

Se igualan las expresiones (6) y (7) y se despeja el CET del acero inoxidable:

$$\frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c1}} \left\{ A + \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \left[ B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c2}} \left\{ C + \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

Se elimina el término  $\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}}$

$$\frac{1}{\Delta T_{c1}} \left\{ A + \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \left[ B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\} = \left( \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \right) \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c2}} \left\{ C + \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

$$\frac{1}{\Delta T_{c1}} \left\{ A + \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \left[ B - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\} = \frac{1}{\Delta T_{c2}} \left\{ C + \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ D - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

Se multiplican los términos de los corchetes por los correspondientes recíprocos del cambio de temperatura.

$$\frac{A}{\Delta T_{c1}} + \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \left[ \frac{B}{\Delta T_{c1}} - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \right] = \frac{C}{\Delta T_{c2}} + \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ \frac{D}{\Delta T_{c2}} - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \right]$$

$$\frac{A}{\Delta T_{c1}} + \frac{B}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) = \frac{C}{\Delta T_{c2}} + \frac{D}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right)$$

Términos con  $\alpha_{AI}$  del lado izquierdo del signo igual.

$$\frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) = -\frac{A}{\Delta T_{c1}} - \frac{B}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) + \frac{C}{\Delta T_{c2}} + \frac{D}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right)$$

$$\frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} - \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) = -\frac{A}{\Delta T_{c1}} - \frac{B}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) + \frac{C}{\Delta T_{c2}} + \frac{D}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right)$$

Despejando el CET de la capa de acero inoxidable  $\alpha_{AI}$

$$\alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} - \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right)} \left\{ -\frac{A}{\Delta T_{c1}} - \frac{B}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) + \frac{C}{\Delta T_{c2}} + \frac{D}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) \right\}$$

Reordenando el término del lado derecho de la ecuación, finalmente se obtiene:

$$\alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} - \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right)} \left\{ \frac{D}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) - \frac{B}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) - \frac{A}{\Delta T_{c1}} + \frac{C}{\Delta T_{c2}} \right\} \quad (B.6)$$

### B.3.2 Ecuaciones para obtener los CET de las capas AL y AI, considerando los componentes de esfuerzos en y

Se generan aquí las ecuaciones necesarias para determinar de forma inversa los CET del aluminio y del acero inoxidable, utilizando los componentes en y de los esfuerzos térmicos globales ecuaciones (B.1, 3, 4) y de los esfuerzos térmicos interlaminares (B.2, 5, 6, 7, 8).

#### Objetivo

Desarrollar mediante los componentes en y de los esfuerzos térmicos, las ecuaciones que permitan obtener los CET de las capas que integran los compuestos c1 y c2, mediante el método inverso.

$$1) \quad 0 = \eta_{ALC1} \sigma_{yALC1} + \eta_{AIC1} \sigma_{yAIC1} \quad (B.8)$$

$$2) \quad 0 = \eta_{ALC2} \sigma_{yALC2} + \eta_{AIC2} \sigma_{yAIC2}$$

$$1) \quad \sigma_{yALC1} = E - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \quad (B.9)$$

$$2) \quad \sigma_{yAIC1} = F - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}$$

$$3) \quad \sigma_{yALC2} = G - \frac{E_{AL} \alpha_{AL} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}}$$

$$4) \quad \sigma_{yAIC2} = H - \frac{E_{AI} \alpha_{AI} \Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$

Los módulos  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , y  $H$ , son determinados de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 1) \quad E &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cxc1}^0) \\ 2) \quad F &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cxc1}^0) \\ 3) \quad G &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{Cxc2}^0) \\ 4) \quad H &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{Cxc2}^0) \end{aligned} \quad (B.10)$$

### B.3.2.1 Ecuación para determinar el CET $\alpha_{AL}$ , mediante componentes de esfuerzos térmicos en y

El proceso seguido para obtener la ecuación particular para obtener  $\alpha_{AL}$  en función de las constantes elásticas, las fracciones volumétricas, las deformaciones y los cambios de temperatura.

Este proceso se lleva a cabo en tres etapas:

**Primera etapa:** se encuentra la ecuación para determinar  $\alpha_{AI}$  en función de  $\alpha_{AL}$ , para el compuesto c1.

**Segunda:** se encuentra la ecuación para determinar  $\alpha_{AI}$  en función de  $\alpha_{AL}$ , para el compuesto c2.

**Tercera:** se igualan los  $\alpha_{AI}$  de las etapas anteriores y se obtiene la ecuación para determinar  $\alpha_{AL}$ .

Los pasos necesarios para este proceso son:

#### Primera etapa

Se obtiene el CET de la capa de aluminio  $\alpha_{AI}$  del compuesto c1, en función de  $\alpha_{AL}$ .

### Paso 1

Se despejan los esfuerzos térmicos interlaminares de la capa de acero inoxidable  $\sigma_{yALc1}$  de la ecuación (B.8, 1), del compuesto c1 y el del compuesto c2  $\sigma_{yALc2}$  de las ecuaciones (B.8, 2)

$$8) \sigma_{yALc1} = -\sigma_{yAic1} \left( \frac{\eta_{Aic1}}{\eta_{ALc1}} \right)$$

$$9) \sigma_{yALc2} = -\sigma_{yAic2} \left( \frac{\eta_{Aic2}}{\eta_{ALc2}} \right)$$

### Paso 2

Se igualan las ecuaciones (8) y B.9, 1), y se despeja el esfuerzo térmico interlaminar  $\sigma_{yALc1}$  del compuesto 1.

$$\sigma_{yALc1} = E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \quad (B.9, 1)$$

$$-\sigma_{yAic1} \left( \frac{\eta_{Aic1}}{\eta_{ALc1}} \right) = E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}}$$

Despejando  $\sigma_{yAic1}$

$$10) \sigma_{yAic1} = - \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{Aic1}} \right)$$

### Paso 3

Se iguala la expresión (10) con la expresión (B.9.2), y se despeja el CET del acero inoxidable  $\alpha_{AI}$

$$\sigma_{yAic1} = F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \quad (B.9.2)$$

$$- \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) = F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}$$

Desarrollando la expresión

$$-E \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) + \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) = F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}$$

$$\frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} = F + E \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right)$$

Despejando  $\alpha_{AI}$  de la expresión anterior

$$11) \alpha_{AI} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c1}} \left\{ F + \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIC1}} \right) \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \right\}$$

### Segunda etapa

Se obtiene el CET de la capa de acero inoxidable  $\alpha_{AI}$  del compuesto c2, en función de  $\alpha_{AL}$

#### Paso 4

Se igualan las expresiones (9) y (B.9, 3), correspondientes a los esfuerzos interlaminares del aluminio en la dirección y, para después despejar el esfuerzo interlaminar en la capa de acero inoxidable en la dirección y ( $\sigma_{yAIC2}$ ) del compuesto c2.

$$\sigma_{yALc2} = -\sigma_{yAIC2} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALc2}} \right) \quad (9) \quad \sigma_{yALc2} = G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \quad (B.9, 3)$$

$$-\sigma_{yAIC2} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALc2}} \right) = G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}}$$

Se despeja  $\sigma_{yAIC2}$



$$12) \sigma_{yAlc2} = -\frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}} \left[ G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right]$$

### Paso 5

Se igualan las expresiones (12) y la (B.9, 4), correspondientes a los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{yAlc2}$  en el compuesto c2, y se despeja el CET de la capa de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ )

$$\sigma_{yAlc2} = H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \quad (\text{B.9, 4})$$

$$-\frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}} \left[ G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] = H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$

$$\frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} = H + \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}} \left[ G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right]$$

Despejando  $\alpha_{AI}$

$$13) \alpha_{AI} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c2}} \left\{ H + \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Alc2}} \right) \left[ G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \right\}$$

### Tercera etapa

Se obtiene la ecuación para determinar el CET de la capa de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) de los compuestos c1 y c2

### Paso 6

Se igualan las expresiones (11) y (13) para obtener el CET de la capa de acero inoxidable de los compuestos c1 y c2.

$$\alpha_{AI} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c1}} \left\{ F + \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{Alc1}} \right) \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \right\} \quad (11)$$

$$\frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c1}} \left\{ F + \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \right\} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c2}} \left\{ H + \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \left[ G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \right\}$$

$$\frac{1}{\Delta T_{c1}} \left\{ F + \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \right] \right\} = \left( \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \right) \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c2}} \left\{ H + \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \left[ G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \right\}$$

Eliminando el término  $\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}}$

$$\frac{1}{\Delta T_{c1}} \left\{ F + E \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) \right\} = \frac{1}{\Delta T_{c2}} \left\{ H + G \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) \right\}$$

Multiplicando por el recíproco del cambio de temperatura los términos del interior de los paréntesis.

$$\frac{F}{\Delta T_{c1}} + \frac{E}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{(1-\nu_{AL})\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) = \frac{H}{\Delta T_{c2}} + \frac{G}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{(1-\nu_{AL})\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right)$$

$$\frac{F}{\Delta T_{c1}} + \frac{E}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) = \frac{H}{\Delta T_{c2}} + \frac{G}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right)$$

Ordenando la expresión anterior, términos con  $\alpha_{AL}$  a la izquierda del signo igual

$$\frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) = \frac{H}{\Delta T_{c2}} + \frac{G}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{F}{\Delta T_{c1}} - \frac{E}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right)$$

$$\frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} - \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) = \frac{H}{\Delta T_{c2}} + \frac{G}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{F}{\Delta T_{c1}} - \frac{E}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right)$$

Despejando el CET de la capa de aluminio  $\alpha_{AL}$

$$\alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}}{(1-\nu_{AL})} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} - \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right)} \left\{ \frac{H}{\Delta T_{c2}} + \frac{G}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{F}{\Delta T_{c1}} - \frac{E}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) \right\}$$

Reordenando términos, la ecuación para determinar el Coeficiente de Expansión Térmica de la capa de aluminio para los compuestos c1 y c2, es:

$$\alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}(\eta_{ALC2} - \eta_{ALC1})}{1 - \nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{AIC2}} \right)} \left\{ \frac{G}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{ALC2}}{\eta_{AIC2}} \right) - \frac{E}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{AIC1}} \right) + \frac{H}{\Delta T_{C2}} - \frac{F}{\Delta T_{C1}} \right\} \quad (B.8)$$

### B.3.2.2 Ecuación para determinar el CET $\alpha_{AI}$ , mediante componentes de esfuerzos térmicos en y

El proceso seguido para obtener la ecuación particular para determinar  $\alpha_{AI}$  en función de las constantes elásticas, las fracciones volumétricas, las deformaciones y los cambios de temperatura.

En forma similar al inciso anterior, el proceso consta de tres etapas y seis pasos.

#### Primera etapa

Se obtiene el CET de la capa de aluminio  $\alpha_{AL}$  del compuesto c1, en función de  $\alpha_{AI}$

#### Paso 1

Se igualan la expresiones (10) y (B.9.2), y se despeja el CET del aluminio para el compuesto c1, en función de  $\alpha_{AI}$ .

$$\sigma_{yAIC1} = - \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{C1}}{1 - \nu_{AL}} \right] \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{AIC1}} \right) \quad (10) \quad \sigma_{yAIC1} = F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{C1}}{1 - \nu_{AI}} \quad (B.9.2)$$

$$- \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{C1}}{1 - \nu_{AL}} \right] \left( \frac{\eta_{ALC1}}{\eta_{AIC1}} \right) = F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{C1}}{1 - \nu_{AI}}$$

$$- \left[ E - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{C1}}{1 - \nu_{AL}} \right] = \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) \left[ F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{C1}}{1 - \nu_{AI}} \right]$$

$$-E + \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{C1}}{1 - \nu_{AL}} = \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) \left[ F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{C1}}{1 - \nu_{AI}} \right]$$

Reordenando la expresión, término con  $\alpha_{AL}$  a la izquierda del signo igual

$$\frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} = E + \left(\frac{\eta_{Alc1}}{\eta_{ALc1}}\right) \left[F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}\right]$$

Despejando el CET de la capa de aluminio  $\alpha_{AL}$  en función de  $\alpha_{AI}$

$$14) \alpha_{AL} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c1}} \left\{ E + \left(\frac{\eta_{Alc1}}{\eta_{ALc1}}\right) \left[F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}\right] \right\}$$

### Segunda etapa

Se obtiene el CET de la capa de aluminio  $\alpha_{AL}$  del compuesto c2, en función de  $\alpha_{AI}$

#### Paso 2

Se igualan las expresiones (12) y la (B.9, 4), correspondientes a los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{yAic2}$  en el compuesto c2, y se despeja el CET de la capa de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ )

$$\sigma_{yAic2} = -\frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Aic2}} \left[ G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \quad (12) \quad \sigma_{yAic2} = H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \quad (B.9, 4)$$

$$-\frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{Aic2}} \left[ G - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] = H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$

$$-G + \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} = \frac{\eta_{Aic2}}{\eta_{ALc2}} \left[ H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right]$$

Reordenando la expresión, término con  $\alpha_{AL}$  a la izquierda del signo igual

$$\frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} = G + \frac{\eta_{Aic2}}{\eta_{ALc2}} \left[ H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right]$$

Despejando el CET del aluminio

$$15) \alpha_{AL} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c2}} \left\{ G + \frac{\eta_{Aic2}}{\eta_{ALc2}} \left[ H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

### Tercera etapa

Ecuación para determinar el CET de la capa de acero inoxidable de los compuestos c1 y c2

#### Paso 3

Se igualan las expresiones para determinar  $\alpha_{AL}$  del compuesto c1 (13) y del compuesto c2 (14), y se determina el CET de la capa de acero inoxidable  $\alpha_{AI}$

$$\alpha_{AL} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c1}} \left\{ E + \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) \left[ F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\} \quad (13)$$

$$\frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c1}} \left\{ E + \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) \left[ F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\} = \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c2}} \left\{ G + \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

Eliminando  $\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}}$  de la expresión

$$\frac{1}{\Delta T_{c1}} \left\{ E + \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) \left[ F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\} = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{1-\nu_{AL}}{E_{AL}\Delta T_{c2}} \right) \left\{ G + \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

$$\frac{1}{\Delta T_{c1}} \left\{ E + \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) \left[ F - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\} = \frac{1}{\Delta T_{c2}} \left\{ G + \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \left[ H - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \right] \right\}$$

Multiplicando por los recíprocos de temperatura los términos dentro de los corchetes.

$$\frac{E}{\Delta T_{c1}} + \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) \left[ \frac{F}{\Delta T_{c1}} - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{(1-\nu_{AI})\Delta T_{c1}} \right] = \frac{G}{\Delta T_{c2}} + \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right) \left[ \frac{H}{\Delta T_{c2}} - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{(1-\nu_{AI})\Delta T_{c2}} \right]$$

Desarrollando la expresión anterior

$$\frac{E}{\Delta T_{c1}} + \frac{F}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) = \frac{G}{\Delta T_{c2}} + \frac{H}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right)$$

Términos con  $\alpha_{AI}$  a la izquierda del signo igual

$$\frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{(1-\nu_{AI})} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) = \frac{G}{\Delta T_{C2}} + \frac{H}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) - \frac{E}{\Delta T_{C1}} - \frac{F}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right)$$

$$\frac{E_{AI}\alpha_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} - \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) = \frac{G}{\Delta T_{C2}} + \frac{H}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) - \frac{E}{\Delta T_{C1}} - \frac{F}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right)$$

Despejando el CET de la capa de acero inoxidable  $\alpha_{AI}$

$$\alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} - \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right)} \left\{ \frac{G}{\Delta T_{C2}} + \frac{H}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) - \frac{E}{\Delta T_{C1}} - \frac{F}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) \right\}$$

Ordenando la expresión se obtiene la ecuación para determinar el CET de la capa de acero inoxidable.

$$\alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} - \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right)} \left\{ \frac{H}{\Delta T_{C2}} \left( \frac{\eta_{AIC2}}{\eta_{ALC2}} \right) - \frac{F}{\Delta T_{C1}} \left( \frac{\eta_{AIC1}}{\eta_{ALC1}} \right) + \frac{G}{\Delta T_{C2}} - \frac{E}{\Delta T_{C1}} \right\} \quad (B.9)$$

## ANEXO C

### PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN, INSTRUMENTACIÓN DE PROBETAS Y PRUEBA DE INSTALACIÓN DE EXTENSÓMETROS

#### Introducción

Para llevar a cabo las pruebas experimentales necesarias para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares y globales, así como, para determinar los coeficientes de expansión térmica para la validación de los modelos, se construyeron e instrumentaron probetas de diversos materiales mediante los siguientes procesos:

- a) Proceso de construcción de probetas.
- b) Proceso de instrumentación con extensómetros eléctricos de resistencia variable (strain gages) de las probetas construidas.

#### C.1 Proceso de construcción de probetas

Para la construcción de probetas utilizadas en las pruebas experimentales, el proceso fue el siguiente:

##### C.1.1 Selección y adquisición de los materiales

Para efecto de que la diferencia entre los esfuerzos térmicos entre una capa y otra sea notable en las pruebas experimentales, se tomó la decisión de utilizar materiales metálicos con diferencia considerable en sus coeficientes de expansión térmica, por lo que los materiales seleccionados son el acero inoxidable 604 al cual se le llamará acero inoxidable (AL) y, aluminio el 6063 al cual se le llamará aluminio (AL), de fácil adquisición en el mercado. Se adquirieron también de otros dos materiales, uno de acero al carbono 1018, y el otro un aluminio 2024-T3 que se utilizaron como referencia, en los procesos de obtención experimental de los

coeficientes de expansión térmica del aluminio y el acero inoxidable. De estos materiales, el aluminio 2024-T3 fue donado por una empresa que vende materiales normados para la aviación, y se conoce con certeza los coeficientes de expansión térmica.

La Tabla C.1 muestra los tipos de materiales adquiridos en el comercio local y donados por una empresa, se muestra también las dimensiones originales.

Tabla C.1. Materiales adquiridos para la fabricación de probetas

No	Material	Unid	Cant.	Dimensiones	
1	Aluminio 6063	Pza	1	(3.175 x 25.4x1200)mm	Solera
2	Acero Inoxidable 304	Pza	1	(3.175 x 25.4x1200)mm	Solera
3	Aluminio 2024-T3	Pza	1	(0.025x127x 254)mm	Lámina
4	Acero 1018	Pza	1	(3.175 x 25.4x500)mm	Solera

### C.1.2 Fabricación de probetas simples y compuestas

Las probetas construidas para las pruebas experimentales, fueron:

- a) Dos probetas, una de aluminio y la otra de acero inoxidable, respetando la norma NMX-B-310-1981-SCFI, para las pruebas de tensión. Esto por la necesidad de conocer las constantes elásticas individuales específicamente el módulo de elasticidad (E) y la relación de Poisson ( $\nu$ ).
- b) Diez probetas, cuatro de aluminio y cuatro de acero inoxidable, una de acero 1018, y una de aluminio 2024-T3, todas respetando la recomendación de MM TN-513-4 [69], para la obtención de los coeficientes de expansión térmica, y para el análisis de esfuerzos térmicos.

El proceso seguido para la fabricación de probetas simples y compuestas, consta de los siguientes pasos:

- 1) Corte de los materiales.
- 2) Uniformizado y acabado superficial.



- 3) Dimensionado de probetas después del acabado.
- 4) Construcción de las probetas compuestas.
- 5) Uniformizado de superficies de las probetas compuestas.

## 1. Corte de los materiales para construir las probetas

Para evitar generar esfuerzos residuales en los materiales, se tomó la decisión de hacer cortes alternados de 5 mm, utilizando segueta de diente fino. El procedimiento utilizado para el corte de las probetas fue el siguiente:

- a) Se marcó con lápiz 4H la línea de corte.
- b) Se montó la solera en el tornillo de banco utilizando tiras de plásticos de las dimensiones de las mordazas para no marcar el material en la zona de contacto.
- c) Se cortó cada probeta de la siguiente forma:
  1. Se marcó con lápiz 4H el aluminio, y bolígrafo azul el acero inoxidable, la solera (a lo ancho) a cada 5 mm (ver Figura C.1).

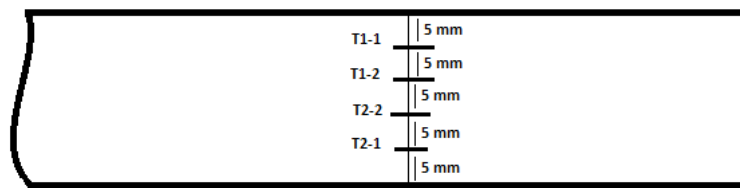


Figura C.1 Trazos para efectuar los cortes en cada probeta

2. A cada marca de la Figura C.1 le asignó un código de control.
3. Se ajustó la solera al tornillo de banco mediante dos láminas de plástico para evitar marcas en el material.
4. Se cortó cada solera de la forma siguiente:
  - **Primer corte** a 5 mm desde la superficie hasta T1-1.
  - Desmontaje, giro de 180° y montaje en el tornillo de banco.

- **Segundo corte** a 5 mm desde la superficie hasta T2-1.
- Desmontaje, giro de 180° y montaje.
- **Tercer corte** a 5 mm de profundidad desde T1-1 hasta T1-2.
- **Cuarto corte** a 5 mm de profundidad desde T2-1 hasta T2.2
- **Quinto y último corte** desde T1-2 hasta T2-2.
- Desmontaje de la probeta

Se cronometró el tiempo de cada corte (ver Tabla C.2). Las probetas cortadas se observan en la Figura C.2, y se midieron los valores iniciales y finales de temperatura.

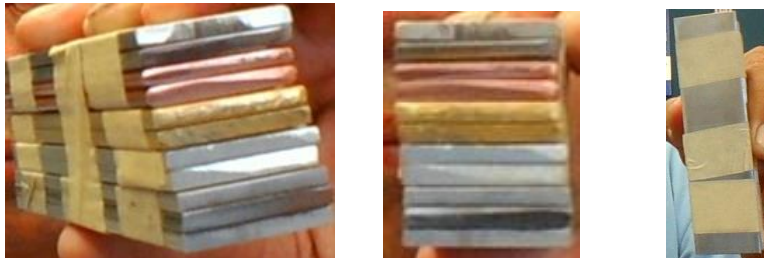


Figura C.2 Probetas obtenidas del proceso de corte

Tabla C.2 Resultados del proceso experimental de corte de probetas

Aluminio 6063						Acexo Inox 304					
Corte	T. I. °C	Tiempo Seg.	V (mm/seg)	T. F. °C	$\Delta T$ °C	Corte	T. I. °C	Tiempo Seg.	V (mm/seg)	T. F. °C	$\Delta T$ °C
T1-1	22	12.45	0.402	26	4	T1-1	22	42.8	0.117	28	6
T2-1	22	10.66	0.469	26	4	T2-1	21.5	20.38	0.245	27.5	6
T1-2	22	11.04	0.453	26	4	T1-2	22	37.37	0.134	27	6
T2-2	22	13.95	0.358	25.5	3.5	T2-2	21.5	20.97	0.238	27.5	6
T2-2, T1-2	22	20.97	0.238	22.5	0.5	T2-2-T1-2	21.5	11.16	0.448	27.5	6

Se puede observar de acuerdo a la Tabla C.2, lo siguiente:

- La temperatura máxima alcanzada en el proceso de corte del aluminio fue de 4°C, mientras que en el acero inoxidable de 6°C.

- Los incrementos de temperatura y velocidades de corte en el aluminio fueron menores que en el acero inoxidable.
- En el acero inoxidable el cambio de temperatura no mostró sensibilidad a la velocidad de corte.

Debido a que la máxima temperatura alcanzada fue de 27.5°C, se concluye que el material no sufre modificación en su estructura cristalina y, por tanto, que no se generan esfuerzos residuales.

La cantidad de probetas y sus dimensiones después del proceso de corte se muestran en la Tabla C.3

Tabla C.3. Dimensiones de las probetas obtenidas en el proceso de corte

Probeta	Dimensiones en mm	Cantidad
Aluminio 6063 (AL)	3.175 x 25.4 x 144	1
Aluminio 6063 (AL)	3.175 x 25.4 x 100	4
Acero inoxidable 304 (AI)	3.175 x 25.4 x 147	1
Acero inoxidable 304(AI)	3.175 x 25.4 x 100	4
Acero 1018	6.25 x 38X154	1
Aluminio 2024-T3	0.635 x 31 x 72	1
Total		12

## 2. Uniformizado y acabado superficial

Para este proceso se utilizó un cristal plano de 6x148x200 mm, lijas de diferentes medidas agua y estopa. La probeta se colocó sobre la superficie del vidrio y se procedió a lijar las superficies.

- **Uniformizado**

Para uniformizar las superficies de cada probeta, se utilizaron lijas de carburo de silicio de grano fino 220 y extrafino 320, marca FANDELI ANSI-600, ver Tabla C.4.

- **Acabado superficial**

El acabo superficial tiene la función de generar una superficie brillante (a espejo) y lograr las caras paralelas en las probetas. Este proceso se lleva a cabo con lija para agua de carburo de silicio de grano superfino 400, (Tabla C.4).

Tabla C.4. Información general de lijas para agua FANDELI

<b>HOJAS AGUA</b> <b>Producto A-99</b> <b>ANSI &gt; 600 a 220</b>	Código	Grado	mm	Pulgadas	Caja	Empaque
	00044*	600	230 x 280	9 x 11	500	50
	00043*	500	230 x 280	9 x 11	500	50
	00042*	400	230 x 280	9 x 11	500	50
	00041*	360	230 x 280	9 x 11	500	50
	00040*	320	230 x 280	9 x 11	500	50
	00039*	280	230 x 280	9 x 11	500	50
	00038*	240	230 x 280	9 x 11	500	50
	00037*	220	230 x 280	9 x 11	500	50

Es importante hacer notar que durante el proceso no se generó calentamiento.

El tiempo aproximado utilizado para llevar a cabo el acabado superficial fue de 30 horas de trabajo. En la Figura C.3 se muestran dos probetas terminadas.



Figura C.3. Probetas de aluminio 6063 y acero inoxidable 304 terminadas

### 3. Dimensionado de probetas después del acabado

Después del proceso de acabado superficial, se llevó a cabo el dimensionamiento en milímetros (mm) de cada probeta (ver Tabla C.5), utilizando un medidor vernier digital marca Mitutoyo CO CE Modelo CO-6 CS. El dimensionado final de cada probeta individual, se llevó a cabo con el siguiente proceso:

- a) Mediciones de longitud se hicieron dos, una en cada extremo y se le llamó L1 y L2, Figura C.4.
- b) Mediciones de lo ancho se hicieron tres, una en cada extremo A1, A3, y una en el centro A2.
- c) Mediciones del espesor se hicieron tres, una en cada extremo E1, E3, y una en el centro E2.

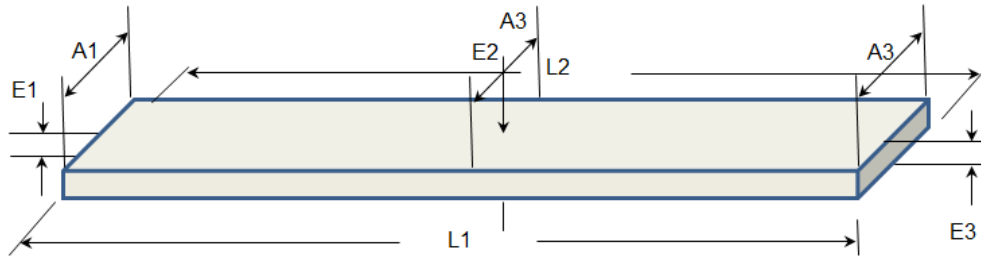


Figura C.4. Código de identificación en probeta

Las dimensiones finales de cada probeta se muestran en la Tabla C.5:

Tabla C.5. Dimensiones en mm de probetas después del acabado superficial

Material	Identificación	L1	L2	A1	A2	A3	E1	E2	E3
Aluminio	AL1	98.88	98.84	25.28	25.27	25.29	2.93	2.91	2.92
	AL2	98,93	98.91	25.28	25.26	25.27	2.93	2.92	2.92
	AL3	98.46	98.80	25.23	25.25	25.24	2.94	2.94	2.91
	AL4	99.00	99.01	25.26	25.25	25.26	2.94	2.92	2.92
	AL5	143.72	143.71	25.36	25.38	25.36	143.2	143.1	143.2
Acero Inoxidable	AI1	99.46	99.47	25.34	25.34	25.36	2.85	2.81	2.85
	AI2	99.34	99.36	25.25	25.27	25.36	2.84	2.79	2.86
	AI3	99.00	99.05	25.35	25.36	25.36	2.89	2.85	2.84
	AI4	99.16	99.10	25.33	25.35	25.34	2.87	2.96	2.95
	AI5	146.68	146.69	25.37	25.35	25.36	2.96	2.98	2.97
AL 2024-T4		72.00	71.98	30.90	31	30.93	0.635	0.635	0.635
ACERO 1018		153.25	153.25	38.00	38.00	38.00	6.23	6.21	6.22

#### 4. Construcción de las probetas compuestas

Se construyeron dos materiales compuestos, un compuesto c1, con las probetas individuales de aluminio AL1 y AL2, y la probeta de acero inoxidable AL3, y un compuesto c2, con las probetas de acero inoxidable AI1 y AI2, y la probeta de aluminio AL3, para utilizarse en las pruebas experimentales, ver Tabla C.6.

Tabla C.6 Probetas utilizadas en pruebas experimentales preliminares

Probeta	Identificación	Materiales
1	c1 (AL-AI-AL)	Aluminio – Acero Inoxidable – Aluminio
2	c2 (AI-AL-AI)	Acero inoxidable-Aluminio-Acero Inoxidable

En la construcción de las probetas compuestas usadas para unir las capas, se utilizó el producto DEVCON SPA-5 denominado PlastiAlum, Figura C.5, que es un adhesivo epóxico con carga de aluminio, producto es de color aluminio que fija en 5 minutos y pega en 1 hora, es multiusos, pega; aluminio, acero, etc.

En el proceso de unión se siguieron las recomendaciones del fabricante del adhesivo Devcon SPA-5 PlastiAlum, esto es:

**Paso 1:** Limpie y seque completamente la zona con acetona o algún otro desengrasante o solvente, secar las superficies a unir. Se limpió con desengrasante CSM-2 Micro Measurement (ver Figura C.6), y limpió con gasa.



Figura C.5. Adhesivo rápido Devcon SPA-5 PlastiAlum

Figura C.6. Desengrasante CSM-2

**Paso 2:** Cortar las puntas de la jeringa Dev-Tube, y suministrar porciones iguales de resina y endurecedor.

**Paso 3:** Mezclar hasta obtener un producto homogéneo. Una vez mezclado, se cuenta con 5 minutos si la temperatura es menor de 24°C, para hacer la aplicación.

**Paso 4:** El producto se aplica inmediatamente en las superficies que van a ser unidas, ver Figura C.7, y sostener presionado el material por unos minutos.



Figura C.7. Aplicación de capa de PlastiAlum

En este caso, las probetas compuestas se presionaron con una prensa C de 2", (ver Figura C.8). El tiempo de secado que se les dió fue de 18 horas y se obtuvo unión correcta.



Figura C.8. Opresores usados en el prensado de materiales compuestos

## 5. Uniformizado de superficies de las probetas compuestas

Una vez construidos los materiales compuestos, se observó que las caras no estaban uniformes por las siguientes razones:

- a) Las dimensiones de las probetas tienen pequeñas diferencias
- b) Al aplicar la presión con las pinzas de presión y la prensa C, hubo un ligero desplazamiento entre las superficies unidas con el pegamento, y eso originó que las caras no quedarán perfectamente alineadas.

Para uniformizar las caras de los compuestos se llevo a cabo un proceso similar al mostrado en el punto número 2.

El tiempo aproximado para uniformizar las superficies fue de 40 horas. Las dimensiones finales de las probetas se observan en la Tabla C.7:

Tabla C.7. Dimensiones finales en mm de probetas compuestas

Identificación	L1	L2	A1	A2	A3	E1	E2	E3
C1 (AL-AI-AL)	96.78	96.80	25.10	25.05	25.20	9.00	9.00	9.00
C2 (AI-AL-AI)	96.22	96.17	25.00	25.02	24.98	9.03	9.06	9.05

## **C.2 Proceso de instrumentación de las probetas con galgas extensométricas**

Los compuestos c1 (AL-AI-AL) y c2 (AI-AL-AI), una vez construidos, se instrumentaron utilizando la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable. Cada probeta se instrumentó con tres extensómetros, dos en una cara (uno longitudinal y otro transversal), y uno longitudinal en la cara opuesta.

### **C.2.1 Materiales y equipos utilizados**

Para instrumentar las probetas se utilizó el siguiente material y equipo:

- 1) Galga extensométrica de 13mm x 6mm para propósito general marca VISHAY, EA-06-120LZ-120/E
- 2) Bondable Terminals CPF-75C M-Line
- 3) Drafting Tap PDT-1 6600



- 4) Gage Instalation Tape PCT-2M 310009
- 5) Desengrasante CSM-2 marca MM
- 6) Catalistyst - C 200
- 7) Alcohol isopropílico GC-6
- 8) Acondicionador de metal MCA
- 9) M-PREP Neutralizer 5A
- 10) Gasa
- 11) Cristal de 6x148x200 mm
- 12) Bastoncillos de punta de algodón
- 13) Tabletas de madera
- 14) Soldadura de estaño de 0.5 mm, 361A-20R-25
- 15) Alambre magneto de cobre de 0.17mm
- 16) Cables 326-DFV, (rojo-negro-blanco), Micro-Measurement.
- 17) Pegamento MBOND 200
- 18) Cinta Mylar MJG-2
- 19) Lijas 320 y 400
- 20) Pinzas de presión de 2.5 a 3.5 N/cm<sup>2</sup>
- 21) 1.0 m de cable eléctrico
- 22) Lápiz de punta semidura 4H
- 23) Plancha de plástico de 2.5 mm de espesor y del tamaño de la galga
- 24) Recubrimiento Polyuretane Coating M-COAT A
- 25) Cautín eléctrico de punta plana
- 26) Gage Instalation Tester 1300 VISHAY

### **C.2.2 Proceso de pegado de galga extensométrica de propósito general**

El proceso de pegado de galga extensométrica que se utilizó fue el sugerido por VISHAY, y es relativo al pegamento M-BOND 200. Este es un adhesivo del tipo cianocrilato, que puede ser usado para pruebas hasta el orden de 30,000 microdeformaciones, en estudios de fatiga, para ensayos extremos entre +95°C y -185°C en un ciclo único. El rango normal de temperatura de trabajo es de -30°C a

+65°C, es compatible con todas las galgas extensométricas y la mayoría de materiales de estructuras mecánicas [70]. El proceso es el siguiente:

**Paso 1:** Desengrasar la zona con disolvente CSM-1 desengrasante o Alcohol Isopropílico GC-6 y gasas como se muestra en la Figura C.9.

Se usó en este caso el disolvente CSM-1.



Figura C.9. Proceso de limpieza zona de la galga

**Paso 2:** Lijado, marcado y neutralizado de la superficie, este paso se llevó a cabo mediante las siguientes etapas:

1. Lijado de la zona de instalación: se inició con lija para agua 220, luego con 320, y el acabado se dio con lija 400, se utilizó acondicionador de metal MCA.
2. Secado de la superficie con gasa limpia en una dirección, una gasa por pasada, repitiendo la operación hasta que la gasa no se manche (limpia), ver Figura C.10.
3. Se marcan los ejes de posicionamiento (longitudinal y transversal), de los extensómetros, el aluminio se marca con lápiz 4H, y el acero con bolígrafo.
4. Se limpian los residuos de carbón o tinta en una sola dirección con bastoncillos de punta de algodón y neutralizador 5A (uno por pasada), hasta que el bastón aparezca limpio (sin residuos) y la superficie esté seca, ver Figura C.11.

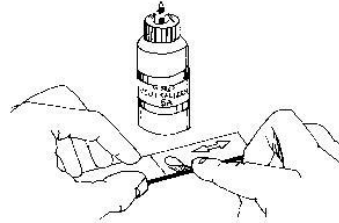
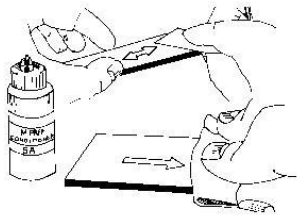


Figura C.10. Limpieza con gasas    Figura C.11. Limpieza con bastoncillos y neutralizador

**Paso 3:** Inmediatamente después humedecer la superficie con el Neutralizador 5A ver Figura C.12, y con gasa secar la superficie siempre de una sola pasada. No frotar la superficie para evitar depósitos de contaminantes.

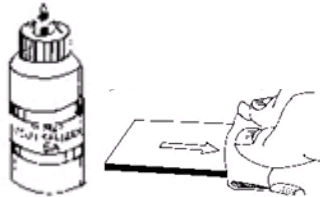


Figura C.12. Proceso de humedecido con Neutralizador 5A y gasas

**Paso 4:** Sacar con ayuda de una pinza el extensómetro y las terminales de su estuche, colocarlas a una distancia aproximada de 1.5 mm, sobre un cristal previamente limpiado con disolvente CSM-1 o alcohol isopropílico GC-6 y gasas. Luego se coloca sobre el conjunto galga-terminal, una cinta autoadhesiva Micro Measurements PCT-2a de 10 a 15 cm en forma longitudinal, y se libera el conjunto lavantando la cinta de un extremo un ángulo pequeño menor de  $45^\circ$  como se muestra en la Figura C.13.

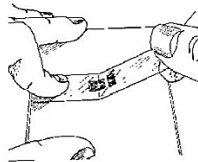


Figura C.13. Levantado de cinta a un ángulo menor de  $45^\circ$

**Paso 5:** Se colocan la galga y las terminales sobre los ejes trazados Figura C.14. Los triángulos de alineamiento de la rejilla deben coincidir con las marcas de posicionamiento, si es necesario, repetir la operación levantando la cinta hasta que quede posicionada correctamente. Una vez posicionada, presionar la cinta sobre la probeta. La cinta PTC-2A impide la contaminación de la superficie limpia.

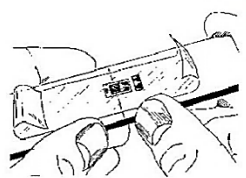


Figura C.14. Proceso de colocación de cinta-galga-terminales en la probeta

**Paso 6:** Se levanta nuevamente la cinta del otro extremo un ángulo aproximado de 45° (ver Figura C.15a), hasta liberar la galga y las terminales un espacio de aproximadamente 10 mm y se dobla la cinta hasta dejar la galga y terminales en posición horizontal respecto a la superficie de la probeta Figura C.15b.



a) Liberación de la galga y terminales    b) posición horizontal galga y terminales

Figura C.15. Liberación galga-terminal para aplicar el pegamento

En la Figura C.16, se observa la posición de la galga y de las terminales una probeta de aluminio 6063.



Figura C.16. Posición horizontal en probeta de aluminio 6063

**Paso 7:** Para acelerar el proceso de endurecimiento del pegamento, si es necesario, se aplica una capa fina y uniforme de catalizador sobre el extensómetro y terminales como se observa en la Figura C.17. El pincel debe escurrirse aproximadamente 10 veces en el borde del frasco del catalizador antes de aplicarse. Dejar un minuto al aire libre en ambiente normal 24 °C y entre 30 y 65% de humedad relativa. En la Figura C.18 se aprecia la aplicación del catalizador Catalistyst C-200.

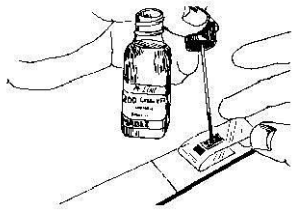


Figura C.17. Aplicación del catalizador



Figura C.18. Aplicación del Catalistyst C-200

**Nota:** Las tres operaciones siguientes se deben realizar en el orden indicado y con una duración de 3 a 5 segundos. Se sugiere leer las operaciones 8, 9 y 10 antes de proceder al pegado.

**Paso 8:** Levantar el extremo libre de la cinta adhesiva y, manteniéndola en dicha posición, aplicar una o dos gotas de adhesivo M-Bond 200 en el borde del pliegue formado por la cinta con la superficie de la probeta (ver Figura C.19) y a unos 10 – 15 mm de la zona de asentamiento final de la galga. Esto garantiza que la polimerización local no ocasione un pegado de capa desigual.

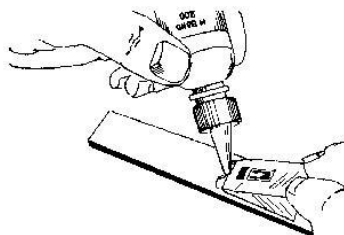


Figura C.19. Forma correcta de aplicación de adhesivo M-Bond 200

**Paso 9:** Rotar la cinta adhesiva un ángulo de 30° de tal forma que la galga se encuentre casi vertical a su posición final, luego manteniendo la cinta rígida. Para obtener una capa uniforme y óptimas prestaciones de pegado, con los dedos y una gasa, se presiona lenta pero firmemente en un solo movimiento el conjunto galga/terminal (Figura C.20), para ponerlo en contacto con la superficie de la probeta.

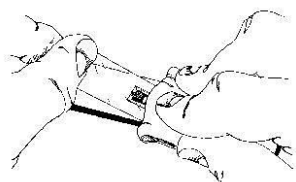


Figura C.20. Presión para obtener capa uniforme de adhesivo

**Paso 10** *Inmediatamente después*, se aplica una presión con el dedo pulgar encima de la galga y las terminales (Figura C.21). Se mantiene esta presión durante un minuto. En condiciones de baja humedad relativa (<30%) o con temperatura ambiente inferior a 20 °C, esta presión debe prolongarse por varios minutos. En el caso de usar galgas de grandes dimensiones o de encontrarse con superficies curvas, ejemplo ranuras, puede ser ventajoso usar pastillas de presión durante la operación. El tiempo de aplicación de la presión debe ser mayor dada la falta de <<la temperatura del dedo>>, que facilita la velocidad de polimerización. Esperar dos minutos o más antes de levantar la cinta adhesiva.

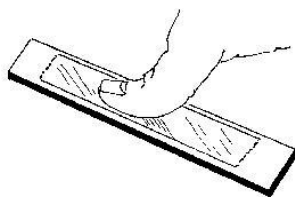
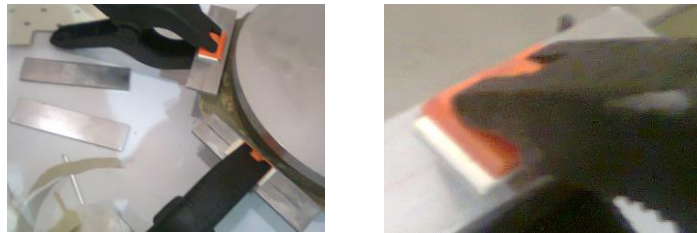


Figura C.21. Presión con el dedo pulgar sobre la galga y las terminales

En las probetas que se instrumentaron para el trabajo, la presión hecha mediante una pinza de presión como se muestra en la Figura C.22, y un mantuvo por una hora.



Fotografía C.22. Aplicación de presión a la galga y terminales mediante pinza de presión

**Paso 11:** Soltar la cinta volviéndola directamente sobre sí misma despegándola lenta y firmemente de la superficie (Figura C.23). Esta técnica impide el posible desprendimiento de la rejilla de la galga y de las terminales.

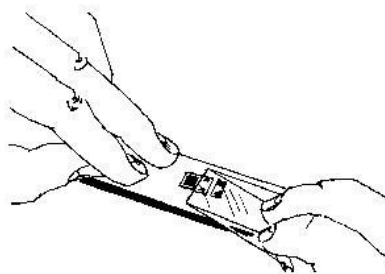


Figura C.23. Proceso de despegado de la cinta

### **C.2.3 Proceso para soldar los conductores a la galga extensométrica y terminales**

Después del proceso de pegado, el proceso utilizado para soldar los cables en las terminales de las galgas o en las terminales especiales CPF-75C M-Line, fue hecho siguiendo las recomendaciones de Vishay [71], el proceso fue:

**Paso 1 Lijado de terminales para eliminar barniz:** Eliminar cuidadosamente con lija 320 o 400 el barniz que cubre las terminales de la galga y las terminales CPF-75C M-Line.

**Paso 2 Preparación para conectar terminales de la galga a terminales CPF-75C:** Cortar dos tramos de aproximadamente 20 mm, de cable magneto de 0.17 mm de diámetro y eliminar el barniz de cada extremo con lija o con navaja afilada con mucho cuidado.

**Paso 3 Soldar los extremos de los tramos alambres magneto a las terminales:** Con cautín de punta plana (Figura C.24), soldar los extremos con un ángulo aproximado de 30°, como se muestra en la Figura C.25. La temperatura generada debe fundir la soldadura de estaño de 0.5 mm 361A-20R-25, y el cautín no debe hacer contacto con la terminal de la galga por más de un segundo. Este paso es ejecutado de la siguiente forma:

1. Recubrir las terminales con soldadura para tener mejor transferencia de calor y una soldadura rápida y nítida. La soldadura debe formar un pequeño montículo como el observado en la Figura C.24. Deben evitarse soldaduras opacas y picos.
2. Si se usan galgas extensométricas no encapsuladas, antes de soldar debe cubrirse el área de la galga con cinta adhesiva, dejando expuestas a soldar, la mitad de las terminales de la galga como se muestra en la figura C.25.
3. Una vez que los promontorios de soldadura estén hechos, proceder a soldar los extremos de los tramos de los alambres magneto, colocándolos en los promontorios y aplicando calor y presión al mismo tiempo hasta lograr que cada extremo quede embebido en la soldadura.



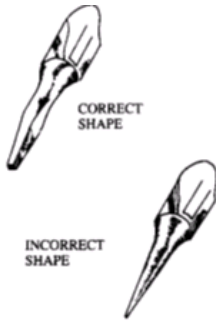


Figura C.23. Tipo de punta de cautín

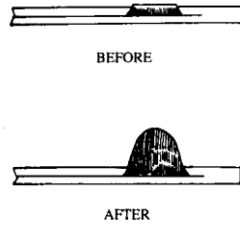


Figura C.24. Montículo

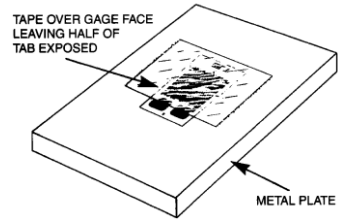


Figura C.25, Protección con cinta

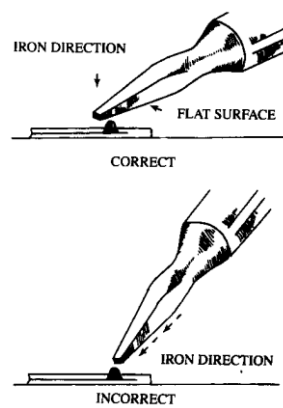


Figura C.26. Forma correcta de soldar

**Paso 4 Soldadura de los conductores a las terminales:** Los cables usados son el tipo 326-DFV de Vishay MM, formado por tres conductores (rojo, blanco, negro). Para efectuar la soldadura de estos se efectuaron los siguientes pasos:

1. Eliminar el forro de plástico en el extremo de cada cable un tramo aproximado de 5 mm, previamente se despegan los 3 cables una distancia adecuada.
2. El extremo de cada cable se coloca en la parte superior del promontorio de soldadura y se le aplica calor y presión con el cautín hasta lograr que el conductor quede totalmente sumergido como se muestra en la Figura C.27. El cautín se coloca en un ángulo de 30°, la punta del cable y la soldadura debe tener un aspecto suave y brillante.

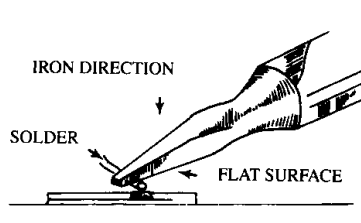
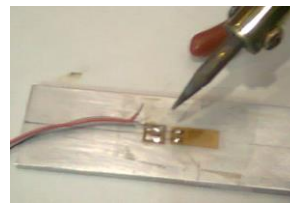


Figura E.27. Colocación del cauterio a 30° para soldar conductores en galgas

En las Figuras C.28a y C.28b se observa como fueron soldados los conductores eléctricos a las terminales de una probeta de acero inoxidable.



a) Soldadura en proceso    b) Cable soldado

Figura E.28. Soldadura de cables en terminales de probeta de acero inoxidable

Los cables se sueldan a las terminales de la siguiente forma:

- a) Los cables blanco y negro se unen en un extremo y se suelda a una terminal ver Figura C.28b.
- b) El cable rojo a la otra terminal, en la Figura C.29, se observa como quedaron soldados los cables a las terminales.

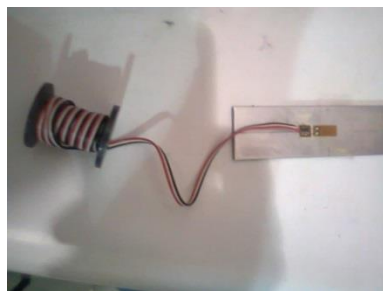


Figura C.29. Cables soldados en sus respectivas terminales

### C.3 Pruebas de resistencia a galgas extensométricas instaladas en probetas

Para tener la seguridad de que la instrumentación de las probetas está bien hecha, se hacen pruebas con el Gage Instalation Tester 1300 de VISHAY, Micro-Measurement [72].

#### C.3.1 Recomendaciones para las pruebas

Los extensómetros más comunes tienen valores nominales de  $120\Omega$ ,  $350\Omega$  y  $1000\Omega$ . Es de suma importancia que el extensómetro sea el recomendado y esté firmemente unido a la probeta para que el esfuerzo sea transferido en forma adecuada desde la pieza a través del adhesivo y el material de respaldo hasta la misma grilla metálica.

En estos trabajos experimentales se instalaron en las probetas extensómetros de propósito general marca VISHAY, EA-06-120LZ-120/E, con resistencia de  $120\Omega$ .

Para hacer las pruebas de resistencia se utilizó Tester 1300 mostrado en la Figura C.30. Es un instrumento compacto de baterías, usado para verificar la calidad de la instalación eléctrica del extensómetro, antes de ponerlas en servicio.



Figura C.30. Gage Instalation Tester Model 1300 de VISHAY, Micro-Measurement

Con este medidor se pueden ejecutar las siguientes acciones:

- a) Lectura con el botón oprimido
- b) Lecturas de resistencia de aislamiento (fugas) a 20,000 M $\Omega$  con 15Vdc.
- c) Medición de la desviación de precisión estándar de la resistencia de la galga instalada en la escala de 5%.
- d) Medición de la desviación de precisión estándar de la resistencia de la galga instalada en la escala de 1%.
- e) Escala en ohm para detectar instalaciones dudosas.
- f) Verificar el circuito completo de la galga.

### **C.3.2 Procedimiento para la prueba de extensómetros**

Para la prueba se usa el siguiente procedimiento:

1. Se conectan los cables al Gage Instalation Tester Model 1300, cable rojo a terminal roja, negro con negro, el cable blanco se conecta de acuerdo con la resistencia de la galga. Para otros valores usar DEXT y hacer la conexión apropiada entre los postes EXT y REF.
1. Presionar BATT: para saber si es necesario remplazar la batería.
2. Presionar  $\Omega$ : mostrará la medida nominal de resistencia de galga (120, 350).
3. Presionar modo de desviación  $\pm 5\%$  (respecto a resistencia de galga), su rango de seguridad es 0.2%  $\Delta R$  (2 graduaciones de medición).
4. Presionar modo de desviación  $\pm 1\%$  (respecto a resistencia de galga), rango de seguridad 0.04% (2 graduaciones de medición).

Se tiene una excitación 1.0 Vdc por galga.

5. Presionar MEG  $\Omega$ : el medidor mostrará la resistencia de aislamiento entre la galga y el espécimen.

Algunas fuentes de variaciones de la resistencia de aislamiento y cambio de la resistencia de galga son:

- a) La resistencia de aislamiento deberá exceder de 20,000 M $\Omega$ , para la lámina de la galga extensométrica cuando se instala bajo condiciones de laboratorio. Un valor de 10,000 M $\Omega$ , podría ser considerado mínimo. Una lectura por debajo de este valor indica materia extraña atrapada, humedad, flujo residual o parte de atrás de la galga dañada por la soldadura, así como evaporación incompleta del solvente en la cubierta.
- b) Deterioro de la resistencia de aislamiento con el tiempo puede ser indicativo de una inapropiada aplicación de capa protectora M-COAT A.
- c) En temperaturas de prueba más altas, particularmente por encima de +300°F (+150°C) es normal esperar valores más bajos, 10 M $\Omega$  es el valor mínimo aceptable.
- d) Cambios en resistencia de galga durante la instalación normalmente no debería exceder de 0.5% cuando se usan adhesivos que curan a temperatura ambiente. Cambios en la resistencia por encima de 0.5%, generalmente indican un daño a la galga, debido a manejo inadecuado o defectos de estampado. Sin embargo las galgas extensométricas instaladas con adhesivos de alta temperatura de curado, pueden presentar cambios más grandes en la resistencia debido a que el adhesivo aumenta su rigidez. Esos cambios pueden variar dependiendo de la temperatura específica de curado y los materiales en cuestión. los cambios nunca deberían exceder al 2% y deberían ser uniformes entre el rango de 0 y 0.5%.

### **C.3.3 Pruebas de instalación de las galgas instaladas en las probetas**

Una vez instrumentadas las probetas, se llevaron a cabo las mediciones de resistencia en base al proceso recomendado en el manual Gage Instalation Tester Model 1300 de VISHAY [72].

Cada galga se conectó Tester 1300, de acuerdo a indicaciones, como se observa en la Figura C.31.



Figura C.31. Galga instalada en probeta conectada al Tester Model 1300

Se llevaron a cabo las pruebas y los resultados se muestran en la Tabla C.8.

Tabla C.8. Mediciones de resistencia en galgas extensométricas instaladas en probetas

	Acción Presionar	Aluminio 6063 AL	Acero inox. 304 AI	Probeta c1 (AL-AI-AL)		Probeta c2 (AI-AL-AI)	
				GL	GT	GL	GT
1	BATT	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	Ω	120	120	120	120	120	120
3	Desviación 5%	0.2	0.2	0.15	0.18	0.2	0.12
4	Desviación 1%	0.013	0.0185	0.0175	0.018	0.0185	0.016
5	MEG Ω	∞	∞	∞	∞	∞	∞

#### C.4 Recubrimientos de protección de la galga extensométrica

La instalación completa debe protegerse mediante recubrimientos especializados. El tipo y técnica de recubrimiento depende de la aplicación y el ambiente de uso del sensor. En general se requiere de al menos un barniz protector y podría llegar a requerirse una capa de silicón o cera para protección mecánica y contra humedad respectivamente.

Para aplicar el recubrimiento de protección es necesario hacer lo siguiente:

- a) Limpieza e inspección de las juntas soldadas. Después de concluir la operación de soldado, es importantísimo que todos los residuos sean completamente removidos con RSK Rosin Solvent. Limpie a conciencia el área entera de la instalación con una aplicación generosa de Rosin Solvent y una brocha blanda hasta eliminar flujos residuales y manchas, y secar el área con gasa.
- b) Aplicación de la cubierta protectora. Una vez que está limpia y seca el área de la galga, aplicar dos capas de recubrimiento a base de Polyuretane Coating M-COAT A (ver Figura C.32), con diferencia de una hora después la última capa. El espesor de cada capa mide entre 0.1 y 0.25 mm. El Poliuretane Coating M-COAT A [76], es un solvente delgado de propósito general para uso de laboratorio, que seca al aire, tiene buena flexibilidad y puede ser removido si es necesario con M-LINE Rosin Solvent o tolueno.



Figura E.32. Recubrimiento Poliuretane Coating M-COAT A

## C.5 Conclusiones de las pruebas

1. El valor de la resistencia de aislamiento de infinito ( $\infty$ ) indica que el aislamiento entre la galga y el material base (la probeta), es adecuado ya que su valor es mayor de 20,000M $\Omega$ .
2. La resistencia de la galga en todas fue de 120 ohm que es la correcta.
3. En las mediciones de desviación en 5% todas las galgas cumplen con el rango de seguridad de 0.2%.

4. En las mediciones de desviación en 1% todas las galgas cumplen con el rango de seguridad de 0.04%.

En síntesis las galgas extensométricas quedaron bien instaladas.

En la Figura C.33 se observan cinco probetas debidamente instrumentadas.

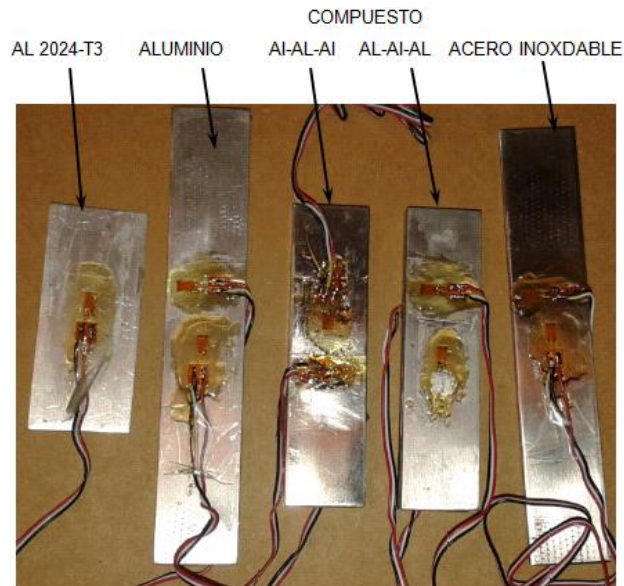


Figura C.33. Probetas individuales y compuestas instrumentadas con extensómetros



## ANEXO D

### **Resultados de las pruebas experimentales en materiales compuestos laminados metálicos simétricos**

Este anexo se informa del proceso seguido para obtener los resultados a partir de las pruebas experimentales y está constituido de la siguiente forma:

- 1) Primero se informa como fueron obtenidos las constantes elásticas (módulo de elasticidad y relación de Poisson) y los Coeficientes de Expansión Térmica (CET) de las probetas individuales de aluminio (AL) y de acero inoxidable (AI) que son de material similar a los de las capas que constituyen los compuestos c1 (AL-AI-AL) y c2 (AI-AL-AI).
- 2) Se describe el proceso de cómo se llevaron a cabo las pruebas experimentales térmicas en los materiales compuestos c1 y c2 y cuáles fueron las deformaciones resultantes, también de cómo estas fueron corregidas.
- 3) Se determinan los CET de las capas de los compuestos c1 y c2, utilizando las ecuaciones resultantes de un método inverso [2], y se comparan con los CET experimentales de las probetas individuales y con los de una base de datos. Esto se hizo para validar el modelo matemático propuesto en el trabajo de tesis.
- 4) Ya con el modelo matemático validado, se calculan con las ecuaciones resultantes del modelo, los esfuerzos térmicos interlaminares y globales.
- 5) Finalmente se utiliza el software Maple 13 para que mediante los sistemas de ecuaciones correspondientes a dos compuestos c1 y c2 se determinen en forma simultánea los CET y los esfuerzos térmicos interlaminares de las capas de aluminio y el acero inoxidables que integran los compuestos.

## D.1 Pruebas experimentales en probetas individuales y compuestos

En esta sección se informa sobre las pruebas experimentales llevadas a cabo en los especímenes individuales y los resultados obtenidos. Las pruebas experimentales fueron las siguientes:

- 6 Pruebas a tensión para determinar las constantes elásticas (módulo de elasticidad  $E$  y relación de Poisson  $\nu$ ) de una probeta de aluminio y otra de acero inoxidable similares a las de las capas que constituyen los compuestos.
- 7 Pruebas térmicas para determinar los CET de una probeta de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) y de una probeta de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ), similares a las capas que integran los compuestos.
- 8 Pruebas térmicas para analizar esfuerzos en probetas compuestas c1 y c2.

### D.1.1 Pruebas a tensión para determinar las constantes elásticas

Las pruebas de tensión fueron llevadas a cabo en el laboratorio de ITESCA, y se utilizaron los siguientes equipos y materiales.

- Máquina Universal State System Instron 22MF, 22, 000 lb<sub>f</sub> (98KN).
- Puente de Wheatstone, Model P3 Strain Indicator and Recorded, Vishay.
- Vernier digital marca Minutoyo.
- Lap-Top
- Probeta de aluminio cuya dimensión en milímetros es 153.5 x 25.35 x 2.93, instrumentada con dos extensómetros EA-06-120LZ-120/E, uno longitudinal y otro transversal.
- Probeta de acero inoxidable con dimensiones en milímetros de 153.5 x 25.35 x 2.93, instrumentado de forma similar a la de aluminio.

Las pruebas se llevaron a cabo mediante la norma NMX-B-310-1981-SCFI [70], los resultados relacionados con las constantes elásticas (módulo de elasticidad  $E$

y de la relación de Poisson  $\nu$ ) se muestran en la Tabla D.1 para el aluminio y, en la Tabla D.2 para el acero inoxidable. Las Figuras D.1 y D.2, muestran las relaciones entre el esfuerzo aplicado y las deformaciones longitudinales y transversales.

Las ecuaciones utilizadas en los cálculos son las siguientes:

Para calcular el esfuerzo: 
$$\sigma = P/A \quad (D.1)$$

Para calcular el módulo de elasticidad: 
$$E = \sigma/\varepsilon \quad (D.2)$$

Para la relación de Poisson: 
$$\nu = -\varepsilon_T/\varepsilon_L \quad (D.3)$$

Aquí,  $\sigma$  es el esfuerzo,  $P$  es la carga aplicada,  $A$  es el área de sección transversal,  $E$  es el módulo de elasticidad o módulo de Young,  $\varepsilon$  es deformación,  $\nu$  es la relación de Poisson,  $\varepsilon_T$  deformación transversal y  $\varepsilon_L$  es deformación longitudinal.

Tabla D.1. Determinación del módulo de elasticidad y la relación de Poisson del aluminio

PROBETA DE ALUMINIO						
$A = b \times a = (2.526 \times 0.292) \text{cm}^2 = 0.73759 \text{cm}^2 = 7.3759 \times 10^{-5} \text{m}^2$						
	CARGA	ESFUERZO	Def. Long.	Def. Trans	Mod. Young	R. Poisson
	N	Mpa	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	E en GPa	$\nu$
1	254	3.44	49.00	-17	7.02E+01	0.347
2	269	3.64	52.00	-18	7.01E+01	0.346
3	368	4.99	71.00	-24	7.02E+01	0.338
4	470	6.37	91.00	-30	7.00E+01	0.330
5	574	7.78	111.00	-37	7.01E+01	0.333
6	756	10.24	146.00	-49	7.01E+01	0.336
7	857	11.61	166.00	-56	6.99E+01	0.337
8	961	13.02	186.00	-63	7.00E+01	0.339
9	1150	15.58	222.00	-75	7.02E+01	0.338
10	1371	18.57	265.00	-88	7.01E+01	0.332
11	1553	21.04	300.00	-101	7.01E+01	0.337
12	1720	23.30	332.00	-114	7.02E+01	0.343
13	1921	26.02	370.00	-122	7.03E+01	0.330
SUMA					9.12E+02	4.385
PROMEDIO					7.01E+01	0.337

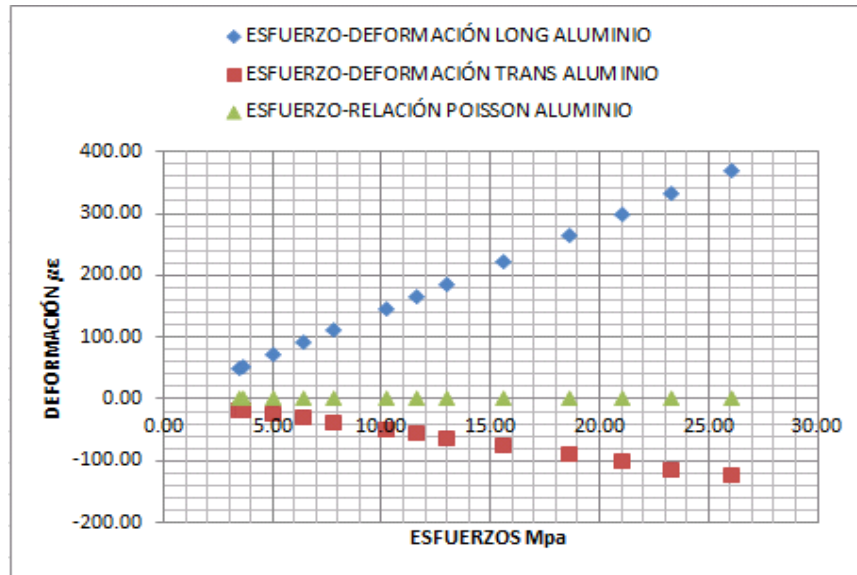


Figura D.1. Relación esfuerzo-deformación probeta aluminio

Tabla D.2. Determinación del módulo de elasticidad y la relación de Poisson del aluminio

ACERO INOXIDABLE							
$A = b \times a = \times (2.526 \times 0.292) \text{cm}^2 = 0.73759 \text{cm}^2 = 7.3759 \times 10^{-5} \text{m}^2$							
	Carga	Esfuerzo $\sigma$	Esfuerzo $\sigma$	Def Long	Módulo de Young	Def Trans	Relación de
	N	Pa	Mpa	$\mu\epsilon$	Gap	$\mu\epsilon$	Poisson $\nu$
1	1450	19600359.13	19.60	97	202.1	-27	0.2784
2	1580	21412115.46	21.43	106	202.2	-29	0.2736
3	1680	22767312.64	22.77	113	201.5	-31	0.2743
4	1790	24258029.54	24.26	119	203.8	-33	0.2773
5	1910	25884266.16	25.88	128	202.2	-35	0.2734
6	2020	27374983.06	27.37	136	201.3	-37	0.2721
7	2130	28865699.96	28.87	143	201.9	-39	0.2727
8	2260	30627456.29	30.63	151	202.8	-41	0.2715
9	2390	32389212.63	32.39	159	203.7	-44	0.2767
10	2490	33744409.81	33.74	167	202.1	-46	0.2754
11	2620	35506166.15	35.51	175	202.9	-48	0.2743
12	2760	37403442.20	37.40	185	202.2	-51	0.2757
13	2850	38623119.66	38.62	192	201.2	-53	0.2760
14	2990	40520395.72	40.52	199	203.6	-55	0.2764
		Sumatoria			2833.4		3.8479
		Valores promedio			202.4		0.2748

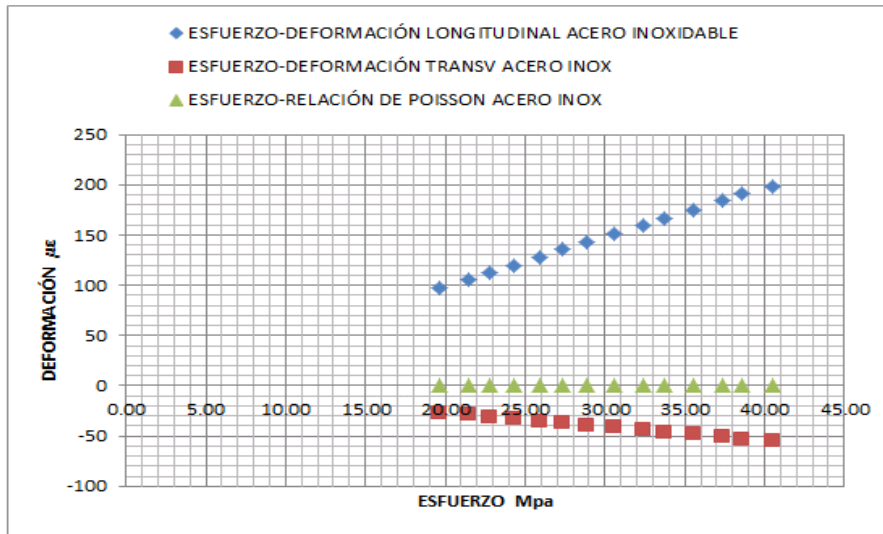


Figura D.2. Relación esfuerzo-deformación probeta acero inoxidable

### D.1.2 Pruebas térmicas para determinar los CET de una capa de aluminio y una de acero inoxidable

Para determinar los coeficientes de expansión térmica de las capas de aluminio y acero inoxidable que constituyen los compuestos c1 y c2, se sometieron a cargas térmicas cuatro probetas individuales una de aluminio y una de acero inoxidable similares a las que constituyen las capas de los compuestos, de las cuales se desconocen los coeficientes de expansión térmica, una más de acero 1018, y otra de aluminio 2024-T3, ambas con CET conocido ( $\alpha_{1018} = 11 \mu\epsilon/^\circ C$ ,  $\alpha_{2024} = 23.4 \mu\epsilon/^\circ C$ ), las cuales son llamadas materiales de referencia. Las conexiones de los extensómetros entre el material de referencia y el de prueba fueron de medio puente como se observa en la Figura D.3.

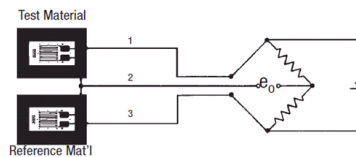


Figura D.3. Circuitos para medición de coeficientes de expansión en galgas extensométricas de medio puente [71]

Los equipos utilizados en esta prueba son:

- Cámara térmica Marca Felisa rango de 0 a 80°C, 120 volts, 60 Hz.
- Termómetro digital rango de -50 a 150°C.
- Puente de Wheatstone P3-Strain.
- Lap-Top

La norma utilizada para la prueba es la TN-513-4 [71], este proceso fue usado en [72] para obtener el CET del acero inoxidable a temperaturas menores de cero grados.

Para obtener el CET de las probetas de aluminio y de acero inoxidable se usa la expresión siguiente [71]:

$$\alpha_S = \alpha_R + \frac{\varepsilon_{T/O(G/S)} - \varepsilon_{T/O(G/R)}}{\Delta T} \quad (D.4)$$

Aquí  $\alpha_S$  es el CET material de prueba,  $\alpha_R$  es el CET del material de referencia,  $\varepsilon_{T/O(G/S)}$  deformación térmica en material de prueba,  $\varepsilon_{T/O(G/R)}$  es deformación térmica en el material de referencia y  $\Delta T$  es el cambio de temperatura.

Los CET de las probetas de aluminio y de acero inoxidable calculado mediante la expresión (D.4) y con las siguientes consideraciones:

1. Para la probeta de aluminio,  $\alpha_S = \alpha_{AL}$ ,  $\alpha_R = \alpha_{2024}$ ,  $\varepsilon_{T/O(G/S)} = \varepsilon_{AL}$  y  $\varepsilon_{T/O(G/R)} = \varepsilon_{2024}$ .
2. Para la probeta de acero inoxidable,  $\alpha_S = \alpha_{AI}$ ,  $\alpha_R = \alpha_{2024}$ ,  $\varepsilon_{T/O(G/S)} = \varepsilon_{AI}$  y  $\varepsilon_{T/O(G/R)} = \varepsilon_{1018}$ .

Los resultados obtenidos están registrados en las Tablas D.3 y D.4.

Tabla D.3. CET del aluminio

TEMP.	$\Delta T$	$\Delta \epsilon$	$\alpha_s$
°C	°C	Mε	με/°C
28.4	0	0	
30.2	1.8	8	27.64
37.8	9.4	9	24.16
44.6	16.2	17	24.25
45.0	16.6	18	24.28
46.0	17.6	19	24.28
		SUMA	96.97
		PROM	24.24

Tabla D.4. CET probeta de acero inoxidable

TEMP.	$\Delta T$	$\Delta \epsilon$	$\alpha_s$
°C	°C	με	με/°C
28.3	0	0	0
30.3	2	27	24.500
34.0	5.7	48	19.421
36.8	8.5	57	17.706
45.4	17.1	112	17.550
45.7	17.4	114	17.552
			52.808
			17.603

Aquí  $\Delta \epsilon$  es la diferencia entre la deformación del material de prueba y la deformación del material de referencia y es un valor leído directamente del P3 Strain, resultado de la conexión de medio puente, es decir:

$$\Delta \epsilon = \epsilon_{T/O(G/S)} - \epsilon_{T/O(G/R)}$$

### D.1.3 Resumen de las pruebas mecánicas y térmicas

Los resultados de las pruebas de tensión y térmica son resumidos en la Tabla D.5.

Tabla D.5. Datos experimentales de constantes elásticas y CET

Propiedades	Aluminio	Acero Inoxidable
Coefficiente de Expansión Térmica ( $\alpha_s$ ) με/°C	24.2	17.6
Módulo de elasticidad E GPa	70.1	202.4
Relación de Poisson v	0.337	0.275

## D.2 Pruebas térmicas en los materiales compuestos c1 y c2

Las pruebas térmicas consistieron en someter a los compuestos c1 y c2 a temperaturas superiores a la del medio ambiente, tomar lecturas de las deformaciones longitudinales y transversales y, finalmente, mediante un proceso propuesto, proceder a la corrección de éstas.

## D.2.1 Pruebas térmicas experimentales para obtener las deformaciones

Se instalaron los compuestos c1 y c2, y dentro de la cámara térmica (ver Figura D.4) y se conectaron los cables de los extensómetros al puente de wheatstone P3-Strain y se inició la prueba. La temperatura de inicio fue 23.4°C incrementando la temperatura 5°C cada 20 minutos y el rango de temperatura fue de 23.4 a 63.2°C. También se conectó al puente la probeta de aluminio 2024-T3. Las deformaciones medidas se muestran en la Tabla D.6. El tiempo que aparece en la tabla es el tiempo en que permaneció sin variación la deformación medida.

Tabla D.6. Datos experimentales obtenidos de la prueba de los compuestos

AJUSTE °C	TEMP °C	COMPUESTO AL-AI-AL		COMPUESTO AI-AL-AI		ALUMINIO 2024-T3	TIEMPO Min
		$\varepsilon_{xc1}^0$ $\mu\text{E}$	$\varepsilon_{yc1}^0$ $\mu\text{E}$	$\varepsilon_{xc1}^0$ $\mu\text{E}$	$\varepsilon_{yc2}^0$ $\mu\text{E}$	$\varepsilon_x$ $\mu\text{E}$	
	23.4	0	0	0	0	0	
25	26.2	10	12	7	7	12	11
30	34.3	80	81	54	55	113	12
35	36.3	102	101	64	62	132	10
40	44.2	165	164	101	99	214	12
45	49	213	211	131	126	256	11
50	53	252	250	145	141	296	11
55	56.2	286	283	160	156		10
60	63.2	359	354	189	184		13
65	66.4	395	392	215	211		12



Figura D.4. Probetas dentro de la cámara y conectadas al P3-Strain



## D.2.2 Corrección de las deformaciones medidas en los compuestos c1 y c2

Para determinar los CET de las capas, así como los esfuerzos térmicos interlaminares y globales de los compuestos c1 y c2, se corrigieron de acuerdo con la norma [73], los valores de las deformaciones producidas por la modificación de la resistencia de los extensómetros debida a los cambios de temperatura. Para lograr esto, se expresaron en términos de incrementos, tanto la temperatura como las deformaciones medidas. En este caso la temperatura de referencia fue 23.4°C y las deformaciones correspondientes  $\varepsilon_{xc1}^0 = \varepsilon_{yc1}^0 = \varepsilon_{xc2}^0 = \varepsilon_{yc2}^0 = 0$ , los datos relacionados con los dos compuestos y con el aluminio 2024-T3, utilizado como referencia, se muestran en la Tabla D.7, y en la Figura D.5, se muestran las relaciones del cambio de temperatura  $\Delta T$  y las deformaciones en los compuestos y el material de referencia.

Tabla D.7. Incrementos de temperatura y deformaciones

TEMP.	COMPUESTO				MATERIAL
	AL-AI-AL		AI-AL-AI		AL 2024-T3
$\Delta T$	$\varepsilon_{xc1}^0$	$\varepsilon_{yc1}^0$	$\varepsilon_{xc2}^0$	$\varepsilon_{yc2}^0$	$\varepsilon_x$
°C	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$
2.8	11	12	7	7	12
10.9	80	81	54	53	113
12.9	100	100	65	64	132
20.8	165	164	110	109	214
25.6	213	211	131	129	256
29.6	253	251	145	142	296
32.8	290	287	160	157	
39.8	359	356	189	186	
43.0	395	392	203	198	

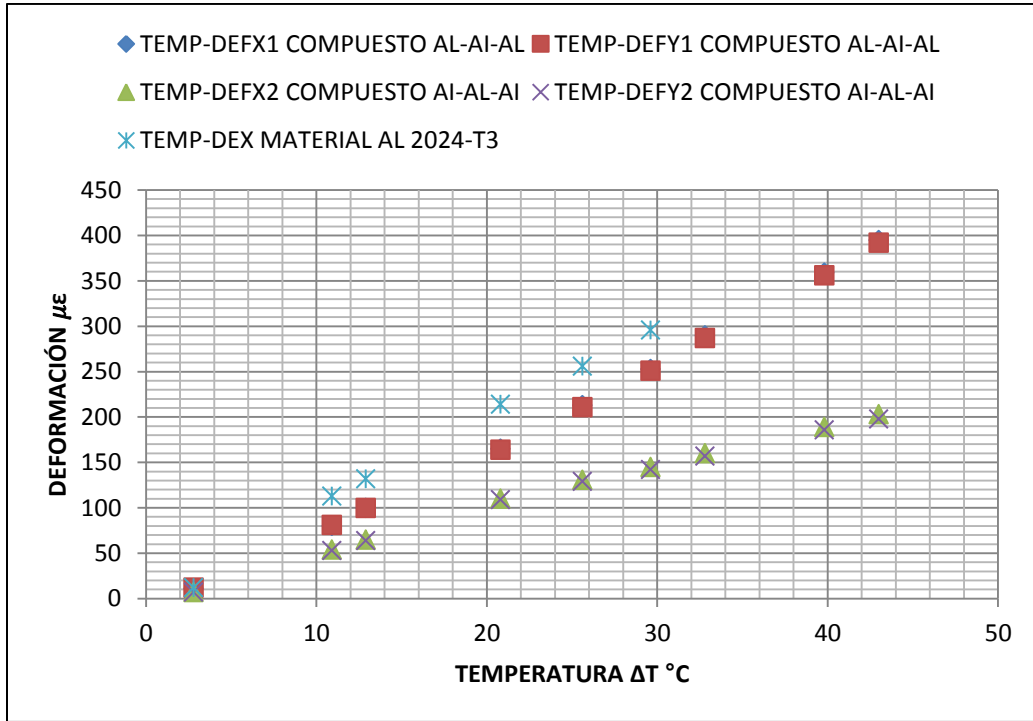


Figura D.5. Relación  $\Delta T$ -deformaciones compuestos c1, c2 y AL 2024-T3

El procedimiento llevado a cabo para la corrección de las deformaciones es el siguiente:

1. Conocidos los incrementos de temperatura  $\Delta T$ , las deformaciones en las fronteras (ver Tabla D.7) y el CET del material de referencia aluminio 2024-T3 ( $\alpha_R$ ), se determinan los CET promedio de los compuestos AL-AI-AL ( $\alpha_{SP1}$ ) y AI-AL-AI ( $\alpha_{SP2}$ ), respectivamente. La ecuación general para obtener CET para materiales de prueba es de acuerdo con [71], la siguiente:

$$\alpha_S = \alpha_R + \frac{\varepsilon_{T/O(G/S)} - \varepsilon_{T/O(G/R)}}{\Delta T} \quad (D.4)$$

Aquí,  $\alpha_S$  es el CET del material de prueba (de cada compuesto),  $\alpha_R$  es el CET del material de referencia (aluminio 2024-T3), y su valor es  $23.4 \mu\epsilon/^\circ C$ ,  $\varepsilon_{T/O(G/S)}$  y  $\varepsilon_{T/O(G/R)}$  son las deformaciones térmicas medidas en los

materiales de prueba y referencia respectivamente,  $\Delta T$  es cambio de temperatura.

Para determinar los CET promedio de los compuestos c1 (AL-AI-AL), y c2 (AI-AL-AI), la expresión (D.5) es equivalente a:

$$\begin{aligned}\alpha_{SPxc1} &= \alpha_R + \frac{\varepsilon_{xc1}^0 - \varepsilon_R}{\Delta T_{c1}} \\ \alpha_{SPxc2} &= \alpha_R + \frac{\varepsilon_{xc2}^0 - \varepsilon_R}{\Delta T_{c2}} \\ \alpha_{SPyc1} &= \alpha_R + \frac{\varepsilon_{yc1}^0 - \varepsilon_R}{\Delta T_{c1}} \\ \alpha_{SPyc2} &= \alpha_R + \frac{\varepsilon_{yc2}^0 - \varepsilon_R}{\Delta T_{c2}}\end{aligned}\tag{D.5}$$

donde  $\varepsilon_{xc1}^0, \varepsilon_{yc1}^0$  y  $\varepsilon_{xc2}^0, \varepsilon_{yc2}^0$  son las deformaciones térmicas longitudinales y transversales respectivamente medidas en los compuestos c1 y c2 respectivamente. Los CET promedio se observan en las Tablas D.7 y D.8.

2. Se determinan los CET esperados,  $\alpha_{espc1}$  y  $\alpha_{espc2}$ , para compararlos con los CET promedio de cada compuesto mediante las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}\alpha_{espc1} &= \eta_{ALc1}\alpha_{AL} + \eta_{AIc1}\alpha_{AI} \\ \alpha_{espc2} &= \eta_{ALc2}\alpha_{AL} + \eta_{AIc2}\alpha_{AI}\end{aligned}\tag{D.6}$$

Aquí, para el cálculo se consideran los CET obtenidos experimentalmente ( $\alpha_{AL} = 24.2 \mu\text{E}/^\circ\text{C}$  y  $\alpha_{AI} = 17.6 \mu\text{E}/^\circ\text{C}$ , y las fracciones volumétricas ( $\eta_{ALc1} = \eta_{AIc2} = 2/3, \eta_{AIc1} = \eta_{ALc2} = 1/3$ ))

Por lo que los CET esperados en los compuestos c1 y c2, son:

$$\alpha_{espc1} = 22 \mu\text{E}/^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad \alpha_{espc2} = 19.8 \mu\text{E}/^\circ\text{C}$$

3. Una vez comparados los CET promedio con los esperados, y si éstos tienen valores cercanos, con los CET promedio ( $\alpha_{SPxc1}, \alpha_{SPxc2}$ ), y los cambios de temperatura  $\Delta T$  conocidos, mediante las expresiones (D.7), se

obtienen las deformaciones corregidas  $\varepsilon_{Cxc1}, \varepsilon_{Cxc2}, \varepsilon_{Cyc1}, \varepsilon_{Cyc2}$ , para cada compuesto (ver Tablas D.8 y D.9).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Cxc1} &= \alpha_{SPxc1} * \Delta T \\ \varepsilon_{Cxc2} &= \alpha_{SPxc2} * \Delta T \\ \varepsilon_{Cyc1} &= \alpha_{SPyc1} * \Delta T \\ \varepsilon_{Cyc2} &= \alpha_{SPyc2} * \Delta T\end{aligned}\tag{D.8}$$

Dado que  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$

Tabla D.8. CET promedio y deformación corregida en x, de los compuestos c1 y c2

$\Delta T$	AL-AI-AL	AI-AL-AI	AL 2024T3	AL-AI-AL	AI-AL-AI	DEFORMACIÓN CORREGIDA	
	$\varepsilon_{xc1}^0$	$\varepsilon_{xc2}^0$	$\varepsilon_R$	$\alpha_{SPxc1}$	$\alpha_{SPxc2}$	$\varepsilon_{Cxc1}^0$	$\varepsilon_{Cxc2}^0$
$^{\circ}C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$
2.8	11	7	12	23.04	21.614	60.2	52.7
10.9	80	54	113	20.37	17.99	234.4	205.3
12.9	100	65	132	20.92	18.21	277.5	243.0
20.8	165	110	214	21.04	18.40	447.4	391.8
25.6	213	131	256	21.72	18.52	550.6	482.2
29.6	253	145	296	21.95	18.30	636.6	557.6
		SUMA		129.05	113.02		
		PROMEDIO		21.508	18.84		

Tabla D.9. CET promedio y deformación corregida en y, de los compuestos c1 y c2

$\Delta T$	AL-AI-AL	AI-AL-AI	AL 2024T3	AL-AI-AL	AI-AL-AI	DEFORMACIÓN CORREGIDA	
	$\varepsilon_{yc1}^0$	$\varepsilon_{yc2}^0$	$\varepsilon_R$	$\alpha_{SPyc1}$	$\alpha_{SPyc2}$	$\varepsilon_{Cyc1}^0$	$\varepsilon_{Cyc2}^0$
$^{\circ}C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon/^{\circ}C$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$
2.8	12	7	12	23.4	21.614	60.3	52.6
10.9	81	53	113	20.464	17.895	234.4	204.6
12.9	100	64	132	20.919	18.129	277.8	242.2
20.8	164	109	214	20.996	18.352	448.3	390.4
25.6	211	129	256	21.642	18.439	551.7	480.5
29.6	251	142	296	21.890	18.197	637.9	555.6
			SUMA	129.302	112.627		
			PROMEDIO	21.550	18.771		

### D.3 Cálculo de los CET de las capas de aluminio y acero inoxidable por método inverso para validación del modelo

En esta sección se calculan por el método inverso [2], los coeficientes de expansión térmica de las capas de aluminio y de acero inoxidable que integran los compuestos c1 y c2, que sirven para validar en modelo propuesto en esta tesis. Las ecuaciones que van a ser utilizadas se desarrollaron en el capítulo 4. El proceso que se siguió fue:

3. Se calcularon los CET de las capas de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) y de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ), con las ecuaciones obtenidas en el Anexo B, relacionadas con los esfuerzos térmicos en la dirección x.
4. Cálculo de los CET de las capas de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) y de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ), con las ecuaciones obtenidas en el Anexo B, relacionadas con los esfuerzos térmicos en la dirección y.

#### D.3.1 Cálculo de los CET de las capas de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) y de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ), con esfuerzos térmicos en dirección x

Para el cálculo de los CET  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ , en base a los esfuerzos en dirección x, las expresiones utilizadas fueron:

$$1) \alpha_{AI} = \frac{1-\nu_{AI}}{E_{AI}\Delta T_{c2}} \left\{ D + \left[ C - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \right] \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right\} \quad (D.9)$$

$$2) \alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} - \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right)} \left\{ \frac{A}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) - \frac{C}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) + \frac{B}{\Delta T_{c1}} - \frac{D}{\Delta T_{c2}} \right\}$$

$$3) \alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} - \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right)} \left\{ \frac{D}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right) - \frac{B}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) + \frac{C}{\Delta T_{c2}} - \frac{A}{\Delta T_{c1}} \right\}$$

Los módulos A, B, C, y D, son determinados de la siguiente forma:

$$1) A = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{xc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{yc1}^0) \quad (D.10)$$

$$2) B = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{xc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{yc1}^0)$$

$$3) C = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{xc2}^0 + \nu_{AL} \varepsilon_{yc2}^0)$$

$$4) D = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{xc2}^0 + \nu_{AI} \varepsilon_{yc2}^0)$$

Los datos experimentales utilizados para el cálculo son:

d) Módulos de elasticidad  $E_{AL} = 70.1 \text{ GPa}$ ,  $E_{AI} = 202.4 \text{ GPa}$ ,

e) Relaciones de Poisson  $\nu_{AL} = 0.337$ ,  $\nu_{AI} = 0.275$

f) Fracciones volumétricas  $\eta_{ALc1} = 2/3$ ,  $\eta_{AIc1} = 1/3$ ,  $\eta_{ALc2} = 1/3$ ,  $\eta_{AIc2} = 2/3$

Aplicando los datos experimentales y las ecuaciones (D.9) y (D.10), se calculan los CET de las capas de aluminio y de acero inoxidable en función de los esfuerzos térmicos en la dirección del eje  $x$ , y los resultados se registran en la Tabla D.10.

Tabla D.10. CET de las capas de aluminio y acero inoxidable, con esfuerzos en x, Método Inverso

$\Delta T1$		$\Delta T2$		AL-AI-AL		AI-AL-AI		MÓDULOS				CET	CET	CET
$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	$\varepsilon_{x1p}$	$\varepsilon_{y1p}$	$\varepsilon_{x2p}$	$\varepsilon_{y2p}$	A	B	C	D	$\alpha_{AL}$ $\mu\text{E}/^{\circ}\text{C}$	$\alpha_{AI}$ $\mu\text{E}/^{\circ}\text{C}$	$\alpha_{AI}$ $\mu\text{E}/^{\circ}\text{C}$		
2.8	2.8	0.000065	0.000065	0.000061	0.000061	6786082	18254726	6365369.85	17123000.94	25.94	21.029	21.029		
10.9	10.9	0.000222	0.000222	0.0001961	0.000196	23355817	62827720	20621189.9	55471506.34	25.31	16.796	16.796		
12.9	12.9	0.00027	0.00027	0.0002349	0.000235	28383323	76351835	24702094.6	66449239.93	26.55	16.825	16.825		
20.8	20.8	0.000438	0.000438	0.0003827	0.000383	46038495	123844679	40253707	108283458.7	26.53	17.062	17.062		
SUMA										104.3	71.71	71.71		
PROMEDIO										26.08	17.928	17.928		

### D.3.2 Cálculo de los CET de las capas de aluminio ( $\alpha_{AL}$ ) y de acero inoxidable ( $\alpha_{AI}$ ), con esfuerzos en y

Para el cálculo de los CET  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ , en base a los esfuerzos en dirección y, las expresiones utilizadas fueron:

$$1) \alpha_{AI} = \frac{1}{\left(\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}}\right)} \left[ \frac{F}{\Delta T_{c1}} + \left( \frac{E}{\Delta T_{c1}} - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}}{1-\nu_{AL}} \right) \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) \right] \quad (D.11)$$

$$2) \alpha_{AL} = \frac{1}{\frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} - \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right)} \left\{ \frac{G}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} \right) - \frac{E}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right) + \frac{H}{\Delta T_{c2}} - \frac{F}{\Delta T_{c1}} \right\}$$

$$3) \alpha_{AI} = \frac{1}{\frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}} \left( \frac{\eta_{ALc2}}{\eta_{AIc2}} - \frac{\eta_{ALc1}}{\eta_{AIc1}} \right)} \left\{ \frac{H}{\Delta T_{c2}} \left( \frac{\eta_{AIc2}}{\eta_{ALc2}} \right) - \frac{F}{\Delta T_{c1}} \left( \frac{\eta_{AIc1}}{\eta_{ALc1}} \right) + \frac{G}{\Delta T_{c2}} - \frac{E}{\Delta T_{c1}} \right\}$$

Los módulos  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , y  $H$ , son determinados de la siguiente forma

$$1) E = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cxc1}^0) \quad (D.12)$$

$$2) F = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cxc1}^0)$$

$$3) G = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cxc2}^0)$$

$$4) H = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cxc2}^0)$$

Aplicando los datos experimentales de la sección D.2.1, y las ecuaciones (D.11) y (D.12), se calculan los CET de las capas de aluminio y de acero inoxidable en función de los esfuerzos térmicos en la dirección del eje  $y$ , los resultados se registran en la Tabla D.11.

Tabla D.11. CET de las capas de aluminio y acero inoxidable, con esfuerzos en  $y$ , método inverso

$\Delta T1$	$\Delta T2$	AL-AI-AL		AI-AL-AI		MÓDULOS				CET	CET	CET
		$\varepsilon_{x1}$	$\varepsilon_{y1}$	$\varepsilon_{x2}$	$\varepsilon_{y2}$	E	F	G	H	$\alpha_{AL}$ $\mu\varepsilon/^\circ C$	$\alpha_{AI}$ $\mu\varepsilon/^\circ C$	$\alpha_{AI}$ $\mu\varepsilon/^\circ C$
2.8	2.8	0.000064	0.000064	0.000061	0.000061	6786082	18254726	6365369.9	17123000.9	25.94	21.029	21.029
10.9	10.9	0.000222	0.000222	0.0001961	0.000196	23355817	62827720	20621189.9	55471506.3	25.31	16.796	16.796
12.9	12.9	0.00027	0.00027	0.0002349	0.000235	28383323	76351835	24702094.6	66449239.9	26.55	16.825	16.825
20.8	20.8	0.000438	0.000438	0.0003827	0.000383	46038495	123844679	40253707	108283458.7	26.53	17.062	17.062
SUMA										104.3	71.71	71.71
PROMEDIO										26.08	17.928	17.928

### D.3.3 Valores finales de los CET de las capas de aluminio $\alpha_{AL}$ y acero inoxidable $\alpha_{AI}$

Para determinar los valores finales de los CET de las capas de aluminio  $\alpha_{AL}$  y de acero inoxidable  $\alpha_{AI}$ , se suman los CET obtenidos utilizando los componentes de esfuerzo en dirección x, de la Tabla D.10, y los obtenidos mediante los componentes de esfuerzo en dirección y, de la Tabla D.11, y se promedian. Los resultados se observan en la Tabla D.12.

Tabla D.12. CET resultantes para las capas de aluminio y acero inoxidable: método inverso

TABLA	CET capas de aluminio y acero inoxidable Método Inverso	CET PROMEDIO	
		$\alpha_{AL}$ ( $\mu\epsilon/^\circ C$ )	$\alpha_{AI}$ ( $\mu\epsilon/^\circ C$ )
D.10	Considerando esfuerzos en x	26.08	17.928
D.11	Considerando esfuerzos en y	26.08	17.928
	Suma	52.19	35.856
	CET finales	26.08	17.928

### D.3.4 Comparación de los CET MI, contra CET experimentales y de MatWeb

Para estar en condiciones de validar el modelo matemático utilizado en este trabajo de tesis, en la Tabla D.13 se establece una comparación entre los CET obtenidos por el Método Inverso, los experimentales de la Tabla D.5 y los de la base de datos MatWeb [74].

Tabla D.13. Cuadro comparativo método inverso respecto datos experimentales y base de datos MatWeb

CET	MÉTODO			DIFERENCIA		POCENTAJE %	
	M. I.	Exp.	MW	Exp.	MW	Exp.	MW
$\alpha_{AL}$ ( $\mu\epsilon/^\circ C$ )	26.08	24.2	23.4	1.88	2.68	7.76	11.45
$\alpha_{AI}$ ( $\mu\epsilon/^\circ C$ )	17.928	17.6	17.3	0.328	0.628	1.86	3.63

*Los resultados anteriores demuestran que el modelo propuesto para determinar los esfuerzos térmicos interlaminares y globales es válido y adecuado, dado que,*



con respecto a los CET experimentales el porcentaje de diferencia es menor del 10%.

#### D.4 Cálculo de los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en materiales compuestos laminados metálicos simétricos

Debido a que el modelo propuesto ha sido validado en la sección anterior, y que es adecuado para el análisis de esfuerzos térmicos, en materiales compuestos laminados metálicos simétrico, el siguiente paso es determinar éstos, en los compuestos en estudio. Estos compuestos como se mencionó previamente son:

- c) Compuesto laminado metálico simétrico c1 (AL-AI-AL)
- d) Compuesto laminado metálico simétrico c2 (AI-AL-AI)

El cálculo de esfuerzos térmicos globales e interlaminares en los compuestos c1 y c2, se lleva a cabo utilizando las ecuaciones 4.17 y 4.18 del capítulo 4, que son reescritas en este Anexo a continuación:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sigma_{Gxc1} &= \eta_{ALc1}\sigma_{xALc1} + \eta_{AIC1}\sigma_{xAIC1} & (D.12) \\
 2) \quad \sigma_{Gxc2} &= \eta_{ALc2}\sigma_{xALc2} + \eta_{AIC2}\sigma_{xAIC2} \\
 3) \quad \sigma_{Gyc1} &= \eta_{ALc1}\sigma_{yALc1} + \eta_{AIC1}\sigma_{yAIC1} \\
 4) \quad \sigma_{Gyc2} &= \eta_{ALc2}\sigma_{yALc2} + \eta_{AIC2}\sigma_{yAIC2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sigma_{xALc1} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cyc1}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} & (D.13) \\
 2) \quad \sigma_{xAIC1} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cyc1}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}} \\
 3) \quad \sigma_{xALc2} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cyc2}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}} \\
 4) \quad \sigma_{xAIC2} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cxc2}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cyc2}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}} \\
 5) \quad \sigma_{yALc1} &= \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cxc1}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AL}} \\
 6) \quad \sigma_{yAIC1} &= \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc1}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cxc1}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c1}}{1-\nu_{AI}}
 \end{aligned}$$

$$7) \sigma_{yALc2} = \frac{E_{AL}}{1-\nu_{AL}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AL}\varepsilon_{Cxc2}^0) - \frac{E_{AL}\alpha_{AL}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AL}}$$

$$8) \sigma_{yAic2} = \frac{E_{AI}}{1-\nu_{AI}^2} (\varepsilon_{Cyc2}^0 + \nu_{AI}\varepsilon_{Cxc2}^0) - \frac{E_{AI}\alpha_{AI}\Delta T_{c2}}{1-\nu_{AI}}$$

Para el cálculo se utilizan las constantes experimentales elásticas (módulo de elasticidad y relación de Poisson) y térmicas (Coeficiente de Expansión Térmica) de las probetas individuales registradas en la Tabla D.5, las deformaciones corregidas registradas en las Tablas D.9 y D.10, las fracciones volumétricas registradas en la sección D.3.1, y los cambios de temperatura.

Debido a que los compuestos mencionados no están restringidos mecánicamente en sus fronteras, ni están sometidos a cargas mecánicas, es decir, solo están sometidos a cargas térmicas, *los esfuerzos globales deben ser cero.*

En el proceso se calculan:

1. Los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en el compuesto c1.
2. Los esfuerzos térmicos interlaminares y globales en el compuesto c2.

#### **D.4.1 Cálculo de esfuerzos térmicos interlaminares y globales en el compuesto c1**

Los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}, \sigma_{xAic1}, \sigma_{yALc1}, \sigma_{yAic1}$ , y globales  $\sigma_{Gxc1}, \sigma_{Gyc1}$ , que se generan en el compuesto c1, son obtenidos mediante las expresiones (D.13, 1, 2, 3 y 4) y (D.12, 1 y 2), respectivamente, con los datos experimentales de la Tabla D.5, las fracciones volumétricas ( $\eta_{ALc1} = 2/3, \eta_{Aic1} = 1/3$ ), los cambios de temperatura y de las deformaciones corregidas (Tablas D.8 y D.9). Los resultados se muestran en la Tabla D.14.

En las Figura D.6 se muestran las relaciones de los cambios de temperatura ( $\Delta T$ ) y los esfuerzos térmicos interlaminares ( $\sigma_{xALc1}, \sigma_{xAic1}$ ) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  del

compuesto c1, y en la Figura D.7 las relaciones con los esfuerzos interlaminares ( $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{yAlc1}$ ) y globales  $\sigma_{Gyc1}$  del mismo compuesto.

Tabla D.14. Esfuerzos térmicos interlaminares y globales calculados para compuesto c1

$\Delta T$	$\varepsilon^0_{Cxc1}$	$\varepsilon^0_{Cyc1}$	$\sigma_{xALc1}$	$\sigma_{yALc1}$	$\sigma_{xAlc1}$	$\sigma_{yAlc1}$	$\sigma_{Gxc1}$	$\sigma_{Gyc1}$
°C	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.8	60.2	60.3	-0.797	-0.791	3.060	3.076	0.489	0.498
10.9	234.4	235.9	-3.066	-2.988	11.992	12.231	1.953	2.085
12.9	277.5	278.0	-3.653	-3.627	14.141	14.220	2.278	2.322
20.8	447.4	448.3	-5.893	-5.846	22.795	22.938	3.670	3.749
25.6	550.6	551.7	-7.258	-7.200	28.042	28.217	4.509	4.606
29.6	636.6	637.9	-8.394	-8.326	32.416	32.623	5.209	5.324

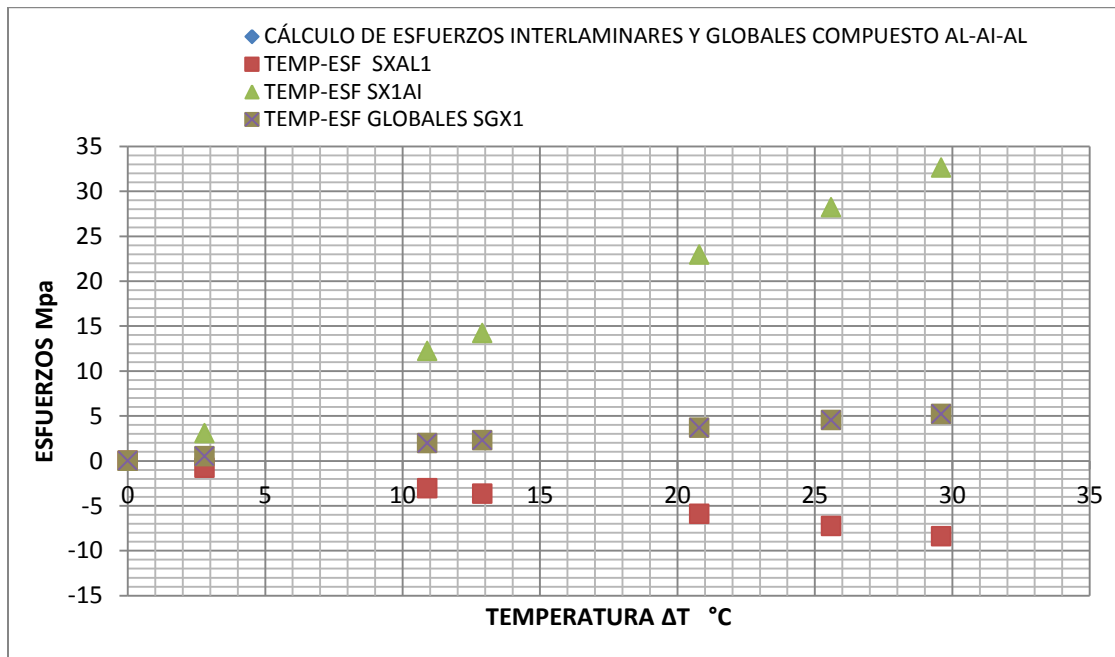


Figura D.6. Relación entre la temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$  (SXAL1),  $\sigma_{xAlc1}$  (SXAI1) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  (SGX1)

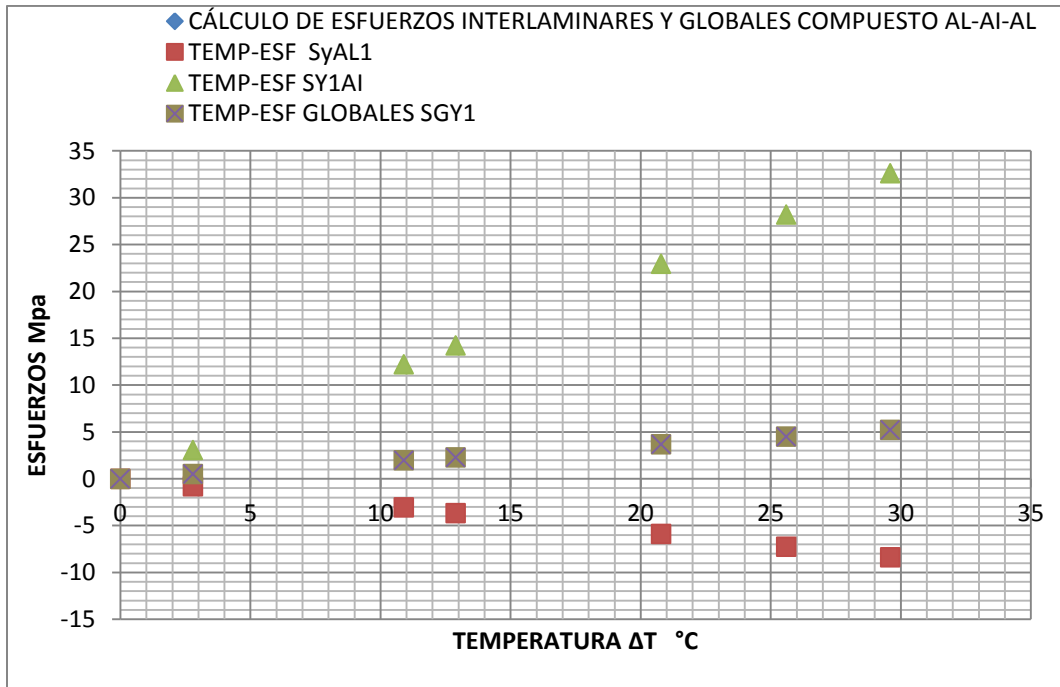


Figura D.7. Relación entre la temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{yALc1}$  (SYAL1),  $\sigma_{yAic1}$  (SYAI1) y globales  $\sigma_{Gyc1}$  (SGY1)

#### D.4.2 Cálculo de esfuerzos térmicos interlaminares y globales en el compuesto c2 (AI-AL-AI)

Los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc2}, \sigma_{xAic2}, \sigma_{yALc2}, \sigma_{yAic2}$ , y globales  $\sigma_{Gxc2}, \sigma_{Gyc2}$ , generados en el compuesto c2, se calculan con los datos de la Tabla D.5, las fracciones volumétricas ( $\eta_{ALc2} = 1/3, \eta_{Aic2} = 2/3$ ), los cambios de temperatura y de las deformaciones corregidas (Tablas D.8 y D.9). Los resultados se muestran en la Tabla D.15.

En las Figuras D.8 se muestran las relaciones de los cambios de temperatura ( $\Delta T$ ) y los esfuerzos térmicos interlaminares ( $\sigma_{xALc2}, \sigma_{xAic2}$ ) y globales  $\sigma_{Gxc2}$  del compuesto c1 (AL-AI-AL), y en la Figura D.9 las relaciones con los esfuerzos interlaminares ( $\sigma_{yALc2}, \sigma_{yAic2}$ ) y globales  $\sigma_{Gyc2}$  del mismo compuesto.

Tabla D.15. Esfuerzos térmicos interlaminares y globales calculados compuesto c2

$\Delta T$	$\varepsilon^0_{Cxc2}$	$\varepsilon^0_{Cyc2}$	$\sigma_{xALc2}$	$\sigma_{yALc2}$	$\sigma_{xAIc2}$	$\sigma_{yAIc2}$	$\sigma_{Gxc2}$	$\sigma_{Gyc2}$
°C	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.8	52.7	52.6	-1.595	-1.600	0.950	0.934	0.102	0.090
10.9	205.3	204.6	-6.202	-6.239	3.722	3.610	0.414	0.327
12.9	243.0	242.2	-7.336	-7.378	4.415	4.288	0.498	0.399
20.8	391.8	390.4	-11.833	-11.906	7.108	6.885	0.794	0.622
25.6	482.2	480.5	-14.564	-14.653	8.745	8.475	0.975	0.766
29.6	557.6	555.6	-16.835	-16.940	10.125	9.807	1.139	0.892

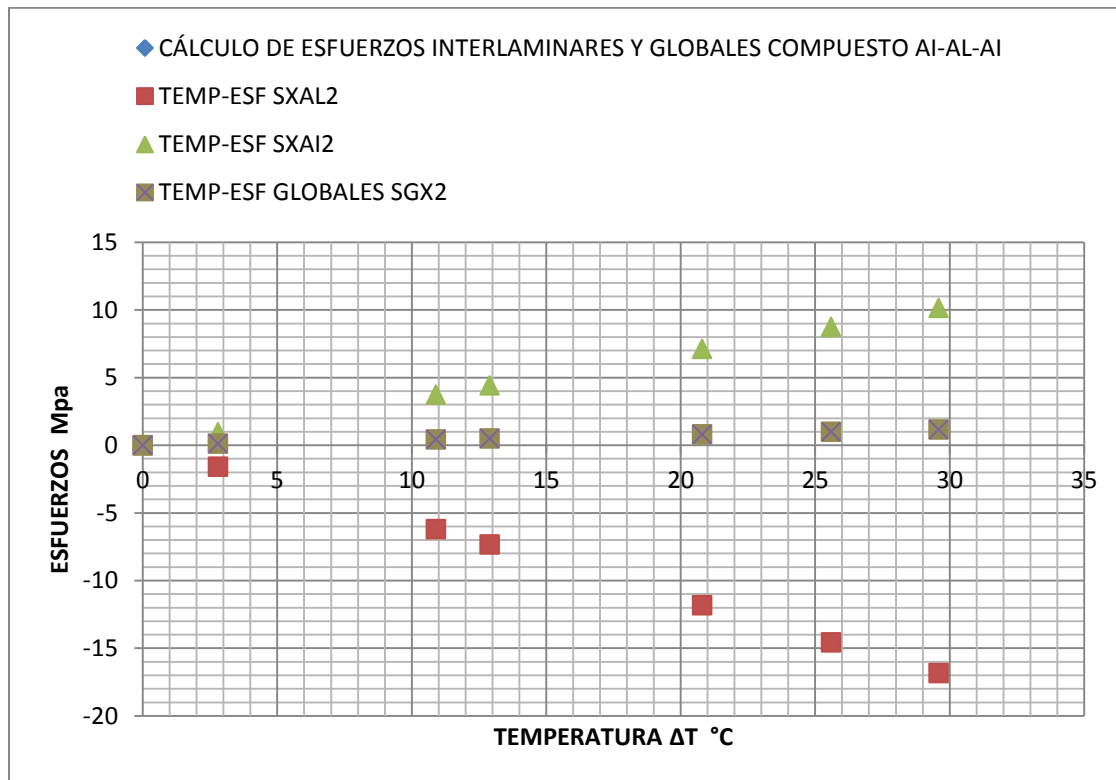


Figura D.8. Relación entre la temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xAL2}$  (SXAL2),  $\sigma_{xAIc2}$  (SXAI2) y globales  $\sigma_{Gxc2}$  (SGX2)

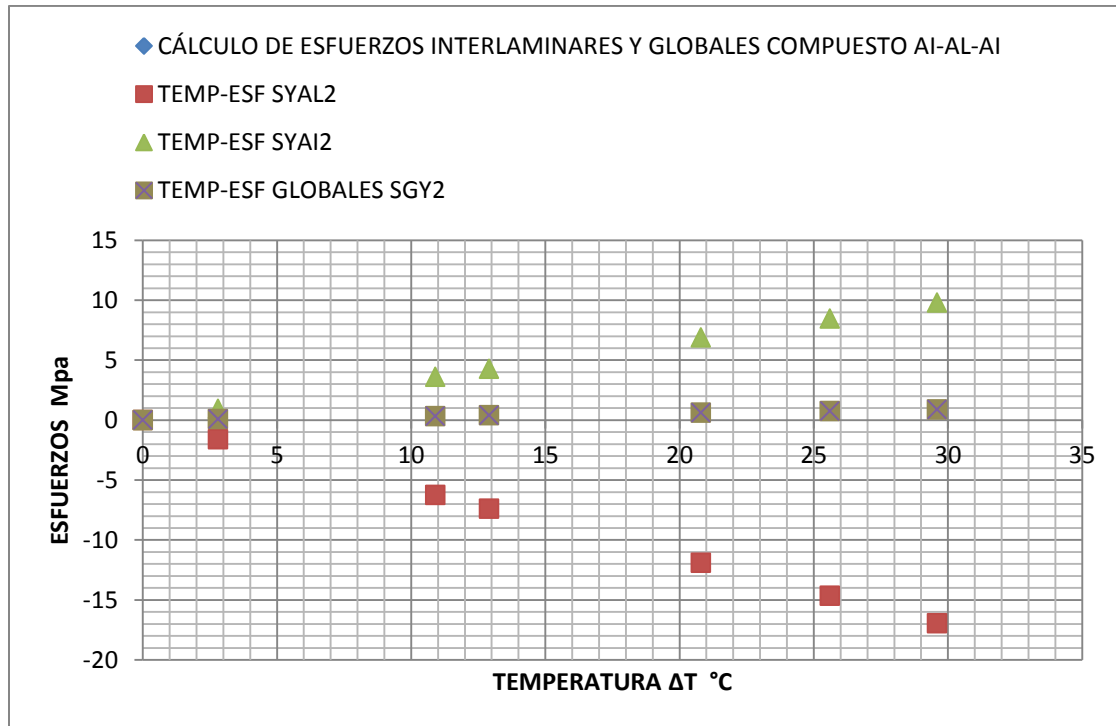


Figura D.9. Relación entre la temperatura y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{yAL21}$  (SYAL2),  $\sigma_{yAic2}$  (SYAI2) y globales  $\sigma_{Gy2}$  (SGY2)

### D.5 Cálculo en los compuestos c1 y c2, de los CET y cálculo de esfuerzos térmicos interlaminares, mediante el software Maple 13

Otra forma de validar y demostrar la eficiencia del modelo propuesto, es determinando en forma simultánea mediante un software los CET ( $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ ), de las capas de los compuestos c1 y c2, y los esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{xAIc1}$ ,  $\sigma_{yAic1}$ , del compuesto c1, y  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{yALc2}$ ,  $\sigma_{xAIc2}$ , del compuesto c2. El software utilizado en esta tesis para este propósito, es el Software Maple 13. Las ecuaciones y datos utilizados para alimentar el Software Maple 13, son los sistemas de ecuaciones (D.12) y (D.13), las constantes experimentales de la Tabla D.5, las temperaturas y deformaciones corregidas de las Tablas D.8 y D.9, y las fracciones volumétricas utilizadas en la sección D.3.1, y el cálculo simultáneo mediante Maple 13, se llevó a cabo de la siguiente forma:

- 1) Primero se determinan  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ , así como  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAIc1}$  y  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{xAIc2}$ , utilizando los componentes en x de los esfuerzos térmicos globales ecuación (D.12) e interlaminares ecuación (D.13).
- 2) Después se determinan  $\alpha_{AL}$  y  $\alpha_{AI}$ , así como  $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{yAIc1}$  y  $\sigma_{yALc2}$ ,  $\sigma_{yAIc2}$ , mediante los componentes en y de las ecuaciones (D.12) y (D.13)

### D.5.1 Cálculo simultáneo por Maple 13 de los CET y los esfuerzos térmicos interlaminares en dirección del eje x, de las capas de los compuestos c1 y c2

Utilizando las ecuaciones (D.12, 1, 2), y las ecuaciones (D.13, 1, 2, 3, 4), esfuerzos en la dirección x, se obtienen mediante Maple 13, los CET de las capas de aluminio y de acero inoxidable. Esto es:

```

> CÁLCULO DE COEFICIENTES DE EXPANSIÓN TÉRMICA Y DE ESFUERZOS
INTERLAMINARES O LOCALES EN DIRECCIÓN x
CÁLCULO DE3 COEFICIENTES EXPANSIÓN TÉRMICA Y ESFUERZOS INTERLAMINARES O LOCALES (1)
> restart :
> SGX1 := 0 : SGX2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 2.3 : DT2 := 2.3 : DX1 := 0.0000602 : DX2 := 0.0000527 : DY1 := 0.0000603 : DY2
:= 0.0000526 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
>
> eqns := { 0 = -SGX1 + NAL1 * SXAL1 + NAI1 * SXAI1, 0 = -SGX2 + NAL2 * SXAL2 + NAI2 * SXAI2,
0 = -SXAL1 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DX1 + VAL * DY1) - ( EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL) ),
0 =
-SXAI1 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DX1 + VAI * DY1) - ( EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI) ),
0 =
-SXAL2 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DX2 + VAL * DY2) - ( EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL) ),
0 =
-SXAI2 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DX2 + VAI * DY2) - ( EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI) ) } :
> solve(eqns, {SXAL1, SXAI1, SXAL2, SXAI2, CEAL, CEAL});
{CEAI = 0.00001723488003, CEAL = 0.00002714996079, SXAI1 = 3.339992117 106, SXAI2 = 1.234156277 106, SXAL1 =
-1.669996059 106, SXAL2 = -2.468312555 106} (2)

```

CÁLCULO DE<sup>3</sup> COEFICIENTES EXPANSIÓN TÉRMICA Y ESFUERZOS INTERLAMINARES O LOCALES (3)

> restart :  
 > SGX1 := 0 : SGX2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1  
 := 10.9 : DT2 := 10.9 : DX1 := 0.0002344 : DX2 := 0.0002053 : DY1 := 0.0002359 : DY2  
 := 0.0002046 : NAL1 :=  $\frac{2}{3}$  : NAI1 :=  $\frac{1}{3}$  : NAL2 :=  $\frac{1}{3}$  : NAI2 :=  $\frac{2}{3}$  :

> eqns := { 0 = -SGX1 + NAL1 \* SXAL1 + NAI1 \* SXAI1, 0 = -SGX2 + NAL2 \* SXAL2 + NAI2 \* SXAI2,  

$$0 = -SXAL1 + \left( \frac{EAL}{(1 - (VAL * VAL))} \right) * (DX1 + VAL * DY1) - \left( \frac{EAL * CEAL * DT1}{(1 - VAL)} \right), \quad 0 =$$

$$= -SXAI1 + \left( \frac{EAI}{(1 - (VAI * VAI))} \right) * (DX1 + VAI * DY1) - \left( \frac{EAI * CEAI * DT1}{(1 - VAI)} \right), \quad 0 =$$

$$-SXAL2 + \left( \frac{EAL}{(1 - (VAL * VAL))} \right) * (DX2 + VAL * DY2) - \left( \frac{EAL * CEAL * DT2}{(1 - VAL)} \right), \quad 0 =$$

$$-SXAI2 + \left( \frac{EAI}{(1 - (VAI * VAI))} \right) * (DX2 + VAI * DY2) - \left( \frac{EAI * CEAI * DT2}{(1 - VAI)} \right) } :$$

> solve(eqns, {SXAL1, SXAI1, SXAL2, SXAI2, CEAL, CEAI});  
 {CEAI = 0.00001722967323, CEAL = 0.00002722217848, SXAI1 = 1.309879513 10<sup>7</sup>, SXAI2 = 4.842407837 10<sup>6</sup>, SXAL1 =  
 -6.549397563 10<sup>6</sup>, SXAL2 = -9.684815673 10<sup>6</sup>}

> restart :  
 > SGX1 := 0 : SGX2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1  
 := 12.9 : DT2 := 12.9 : DX1 := 0.0002775 : DX2 := 0.000243 : DY1 := 0.000278 : DY2  
 := 0.0002422 : NAL1 :=  $\frac{2}{3}$  : NAI1 :=  $\frac{1}{3}$  : NAL2 :=  $\frac{1}{3}$  : NAI2 :=  $\frac{2}{3}$  :

> eqns := { 0 = -SGX1 + NAL1 \* SXAL1 + NAI1 \* SXAI1, 0 = -SGX2 + NAL2 \* SXAL2 + NAI2 \* SXAI2,  

$$0 = -SXAL1 + \left( \frac{EAL}{(1 - (VAL * VAL))} \right) * (DX1 + VAL * DY1) - \left( \frac{EAL * CEAL * DT1}{(1 - VAL)} \right), \quad 0 =$$

$$= -SXAI1 + \left( \frac{EAI}{(1 - (VAI * VAI))} \right) * (DX1 + VAI * DY1) - \left( \frac{EAI * CEAI * DT1}{(1 - VAI)} \right), \quad 0 =$$

$$-SXAL2 + \left( \frac{EAL}{(1 - (VAL * VAL))} \right) * (DX2 + VAL * DY2) - \left( \frac{EAL * CEAL * DT2}{(1 - VAL)} \right), \quad 0 =$$

$$-SXAI2 + \left( \frac{EAI}{(1 - (VAI * VAI))} \right) * (DX2 + VAI * DY2) - \left( \frac{EAI * CEAI * DT2}{(1 - VAI)} \right) } :$$

> solve(eqns, {SXAL1, SXAI1, SXAL2, SXAI2, CEAL, CEAI});  
 {CEAI = 0.00001724344322, CEAL = 0.00002716726950, SXAI1 = 1.540122338 10<sup>7</sup>, SXAI2 = 5.691497350 10<sup>6</sup>, SXAL1 =  
 -7.700611690 10<sup>6</sup>, SXAL2 = -1.138299470 10<sup>7</sup>}

> restart :  
 > SGX1 := 0 : SGX2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1  
 := 20.8 : DT2 := 20.8 : DX1 := 0.0004474 : DX2 := 0.0003918 : DY1 := 0.0004483 : DY2  
 := 0.0003904 : NAL1 :=  $\frac{2}{3}$  : NAI1 :=  $\frac{1}{3}$  : NAL2 :=  $\frac{1}{3}$  : NAI2 :=  $\frac{2}{3}$  :

> eqns := { 0 = -SGX1 + NAL1 \* SXAL1 + NAI1 \* SXAI1, 0 = -SGX2 + NAL2 \* SXAL2 + NAI2 \* SXAI2,  

$$0 = -SXAL1 + \left( \frac{EAL}{(1 - (VAL * VAL))} \right) * (DX1 + VAL * DY1) - \left( \frac{EAL * CEAL * DT1}{(1 - VAL)} \right), \quad 0 =$$

$$= -SXAI1 + \left( \frac{EAI}{(1 - (VAI * VAI))} \right) * (DX1 + VAI * DY1) - \left( \frac{EAI * CEAI * DT1}{(1 - VAI)} \right), \quad 0 =$$

$$-SXAL2 + \left( \frac{EAL}{(1 - (VAL * VAL))} \right) * (DX2 + VAL * DY2) - \left( \frac{EAL * CEAL * DT2}{(1 - VAL)} \right), \quad 0 =$$

$$-SXAI2 + \left( \frac{EAI}{(1 - (VAI * VAI))} \right) * (DX2 + VAI * DY2) - \left( \frac{EAI * CEAI * DT2}{(1 - VAI)} \right) } :$$

> solve(eqns, {SXAL1, SXAI1, SXAL2, SXAI2, CEAL, CEAI});  
 {CEAI = 0.00001724108841, CEAL = 0.00002716812961, SXAI1 = 2.484061581 10<sup>7</sup>, SXAI2 = 9.180138213 10<sup>6</sup>, SXAL1 =  
 -1.242030791 10<sup>7</sup>, SXAL2 = -1.836027643 10<sup>7</sup>}



```

> restart :
> SGX1 := 0 : SGX2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 25.6 : DT2 := 25.6 : DX1 := 0.0005506 : DX2 := 0.0004822 : DY1 := 0.0005517 : DY2
:= 0.0004805 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
>
> eqns := { 0 = -SGX1 + NAL1 * SXAL1 + NAI1 * SXAI1, 0 = -SGX2 + NAL2 * SXAL2 + NAI2 * SXAI2,
0 = -SXAL1 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DX1 + VAL * DY1) - ( EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL) ), 0 =
= -SXAI1 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DX1 + VAI * DY1) - ( EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI) ), 0 =
-SXAL2 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DX2 + VAL * DY2) - ( EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL) ), 0 =
-SXAI2 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DX2 + VAI * DY2) - ( EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI) ) } :
> solve(eqns, {SXAL1, SXAI1, SXAL2, SXAI2, CEAL, CEAI});
{CEAI = 0.00001724154889, CEAL = 0.00002716317735, SXAI1 = 3.055642666 10^7, SXAI2 = 1.129243526 10^7, SXAL1 =
-1.527821333 10^7, SXAL2 = -2.258487052 10^7}

```

(8)

```

> restart :
> SGX1 := 0 : SGX2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 29.6 : DT2 := 29.6 : DX1 := 0.0006366 : DX2 := 0.0005576 : DY1 := 0.0006379 : DY2
:= 0.0005556 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
>
> eqns := { 0 = -SGX1 + NAL1 * SXAL1 + NAI1 * SXAI1, 0 = -SGX2 + NAL2 * SXAL2 + NAI2 * SXAI2,
0 = -SXAL1 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DX1 + VAL * DY1) - ( EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL) ), 0 =
= -SXAI1 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DX1 + VAI * DY1) - ( EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI) ), 0 =
-SXAL2 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DX2 + VAL * DY2) - ( EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL) ), 0 =
-SXAI2 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DX2 + VAI * DY2) - ( EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI) ) } :
> solve(eqns, {SXAL1, SXAI1, SXAL2, SXAI2, CEAL, CEAI});
{CEAI = 0.00001724464430, CEAL = 0.00002715715132, SXAI1 = 3.529825874 10^7, SXAI2 = 1.304493294 10^7, SXAL1 =
-1.764912937 10^7, SXAL2 = -2.608986588 10^7}

```

(9)

La Tabla D.17 muestra los valores de  $\alpha_{AL}$  de una capa de aluminio y  $\alpha_{AI}$  de una capa de acero inoxidable, así como de los esfuerzos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAIc1}$  del compuesto c1, y  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{xAIc2}$  del compuesto c2.

Tabla D.17. Esfuerzos térmicos interlaminares y CETs en dirección x, en compuestos c1 y c2 por Maple 13

$\Delta T$	$\varepsilon_{Cxc1}^0$	$\varepsilon_{Cyc1}^0$	$\alpha_{AL}$	$\alpha_{AI}$	$\sigma_{xAIc1}$	$\sigma_{xAIc2}$	$\sigma_{xALc1}$	$\sigma_{xALc2}$
°C	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon/^\circ C$	$\mu\varepsilon/^\circ C$	MPa	MPa	MPa	MPa
2.8	60.2	60.3	27.15	17.23	3.34	1.23	-1.67	-2.47
10,9	234.4	234.4	27.22	17.23	13.01	4.84	-6.55	-9.68
12.9	277.5	278	27.17	17.24	15.40	5.69	-7.70	-11.38
20.8	447.4	448.3	27.17	17.24	24.84	9.18	-12.42	-18.36
25.6	550.6	551.7	27.16	17.24	30.56	11.29	-15.28	-22.58
29.6	636.6	637.9	27.16	17.24	35.30	13.04	-17.65	-26.09
SUMA			163.03	103.42				
PROMEDIO			27.17	17.24				

### D.5.2 Cálculo simultáneo por Maple 13 de los CET y los esfuerzos térmicos interlaminares en dirección del eje y, de las capas de los compuestos c1 y c2

Utilizando las ecuaciones (D.12, 2, 3), y las ecuaciones (D.13, 5, 6, 7, 8), en la dirección y, se obtienen mediante Maple 13, los CET  $\alpha_{AL}$  de una capa de aluminio y  $\alpha_{AI}$  de una capa de acero inoxidable, los esfuerzos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAIc1}$  del compuesto c1, y  $\sigma_{xALc2}$ ,  $\sigma_{xAIc2}$  del compuesto c2. Esto es:

```

>
> CÁLCULO DE COEFICIENTES DE EXPANSIÓN TÉRMICA Y DE ESFUERZOS
INTERLAMINARES O LOCALES EN DIRECCIÓN y
CÁLCULO DE3 COEFICIENTES EXPANSIÓN TÉRMICA Y ESFUERZOS INTERLAMINARES O LOCALES (10)
> restart :
> SGY1 := 0 : SGY2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 2.8 : DT2 := 2.8 : DX1 := 0.0000602 : DX2 := 0.0000527 : DY1 := 0.0000603 : DY2
:= 0.0000526 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
>
> eqns := { 0 = -SGY1 + NAL1 * SYAL1 + NAI1 * SYAI1, 0 = -SGY2 + NAL2 * SYAL2 + NAI2 * SYAI2,
0 = -SYAL1 + ( (EAL / (1 - (VAL * VAL))) * (DY1 + VAL * DX1) - (EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL)) ),
0 = -SYAI1 + ( (EAI / (1 - (VAI * VAI))) * (DY1 + VAI * DX1) - (EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI)) ),
0 = -SYAL2
+ ( (EAL / (1 - (VAL * VAL))) * (DY2 + VAL * DX2) - (EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL)) ),
0 = -SYAI2
+ ( (EAI / (1 - (VAI * VAI))) * (DY2 + VAI * DX2) - (EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI)) ) } :
> solve(eqns, {SYAL1, SYAI1, SYAL2, SYAI2, CEAL, CEAI}) :
{CEAI = 0.00001719208991, CEAL = 0.00002725097298, SYAI1 = 3.389314919 106, SYAI2 = 1.251730059 106, SYAL1 =
-1.694657460 106, SYAL2 = -2.503460119 106} (11)

```

CÁLCULO DE<sup>3</sup> COEFICIENTES EXPANSIÓN TÉRMICA Y ESFUERZOS INTERLAMINARES O LOCALES (12)

```

> restart :
> SGY1 := 0 : SGY2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 10.9 : DT2 := 10.9 : DX1 := 0.0002344 : DX2 := 0.0002053 : DY1 := 0.0002359 : DY2
:= 0.0002046 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
>
> eqns := { 0 = -SGY1 + NAL1 * SYAL1 + NAI1 * SYAI1, 0 = -SGY2 + NAL2 * SYAL2 + NAI2 * SYAI2,
0 = -SYAL1 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY1 + VAL * DX1) - ( EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL) ), 0
= -SYAI1 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY1 + VAI * DX1) - ( EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI) ), 0 = -SYAL2
+ ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY2 + VAL * DX2) - ( EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL) ), 0 = -SYAI2
+ ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY2 + VAI * DX2) - ( EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI) ) } :
> solve(eqns, {SYAL1, SYAI1, SYAL2, SYAI2, CEAL, CEAI});
{CEAI = 0.00001712962879, CEAL = 0.00002752580507, SYAI1 = 1.364134595 107, SYAI2 = 5.035719437 106, SYAL1 =
-6.820672973 106, SYAL2 = -1.007143887 107}

```

(13)

```

> restart :
> SGY1 := 0 : SGY2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 12.9 : DT2 := 12.9 : DX1 := 0.0002775 : DX2 := 0.000243 : DY1 := 0.000278 : DY2
:= 0.0002422 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
>
> eqns := { 0 = -SGY1 + NAL1 * SYAL1 + NAI1 * SYAI1, 0 = -SGY2 + NAL2 * SYAL2 + NAI2 * SYAI2,
0 = -SYAL1 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY1 + VAL * DX1) - ( EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL) ), 0
= -SYAI1 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY1 + VAI * DX1) - ( EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI) ), 0 = -SYAL2
+ ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY2 + VAL * DX2) - ( EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL) ), 0 = -SYAI2
+ ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY2 + VAI * DX2) - ( EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI) ) } :
> solve(eqns, {SYAL1, SYAI1, SYAL2, SYAI2, CEAL, CEAI});
{CEAI = 0.00001717646073, CEAL = 0.00002730401669, SYAI1 = 1.572182159 107, SYAI2 = 5.805726933 106, SYAL1 =
-7.860910797 106, SYAL2 = -1.161145387 107}

```

(15)

```

> restart :
> SGY1 := 0 : SGY2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 20.8 : DT2 := 20.8 : DX1 := 0.0004474 : DX2 := 0.0003918 : DY1 := 0.0004483 : DY2
:= 0.0003904 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
>
> eqns := { 0 = -SGY1 + NAL1 * SYAL1 + NAI1 * SYAI1, 0 = -SGY2 + NAL2 * SYAL2 + NAI2 * SYAI2,
0 = -SYAL1 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY1 + VAL * DX1) - ( EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL) ), 0
= -SYAI1 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY1 + VAI * DX1) - ( EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI) ), 0 = -SYAL2
+ ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY2 + VAL * DX2) - ( EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL) ), 0 = -SYAI2
+ ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY2 + VAI * DX2) - ( EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI) ) } :
> solve(eqns, {SYAL1, SYAI1, SYAL2, SYAI2, CEAL, CEAI});
{CEAI = 0.00001716801157, CEAL = 0.00002731854406, SYAI1 = 2.540782799 107, SYAI2 = 9.382236693 106, SYAL1 =
-1.270391400 107, SYAL2 = -1.876447339 107}

```

(16)

```

> restart :
> SGY1 := 0 : SGY2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 25.6 : DT2 := 25.6 : DX1 := 0.0005506 : DX2 := 0.0004822 : DY1 := 0.0005517 : DY2
:= 0.0004805 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
> eqns := { 0 = -SGY1 + NAL1 * SYAL1 + NAI1 * SYAI1, 0 = -SGY2 + NAL2 * SYAL2 + NAI2 * SYAI2,
0 = -SYAL1 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY1 + VAL * DX1) - ( EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL) ),
0 = -SYAI1 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY1 + VAI * DX1) - ( EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI) ),
+ ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY2 + VAL * DX2) - ( EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL) ),
0 = -SYAL2
+ ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY2 + VAI * DX2) - ( EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI) ) } :
> solve(eqns, {SYAL1, SYAI1, SYAL2, SYAI2, CEAL, CEAI});
{CEAI = 0.00001716936293, CEAL = 0.00002731204110, SYAI1 = 3.124694591 10^7, SYAI2 = 1.153846821 10^7, SYAL1 =
-1.562347296 10^7, SYAL2 = -2.307693643 10^7} (18)
> restart :
> SGY1 := 0 : SGY2 := 0 : VAL := 0.337 : VAI := 0.275 : EAL := 0.701e11 : EAI := 0.2024e12 : DT1
:= 29.6 : DT2 := 29.6 : DX1 := 0.0006366 : DX2 := 0.0005576 : DY1 := 0.0006379 : DY2
:= 0.0005556 : NAL1 := 2/3 : NAI1 := 1/3 : NAL2 := 1/3 : NAI2 := 2/3 :
> eqns := { 0 = -SGY1 + NAL1 * SYAL1 + NAI1 * SYAI1, 0 = -SGY2 + NAL2 * SYAL2 + NAI2 * SYAI2,
0 = -SYAL1 + ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY1 + VAL * DX1) - ( EAL * CEAL * DT1 / (1 - VAL) ),
0 = -SYAI1 + ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY1 + VAI * DX1) - ( EAI * CEAI * DT1 / (1 - VAI) ),
+ ( EAL / (1 - (VAL * VAL)) ) * (DY2 + VAL * DX2) - ( EAL * CEAL * DT2 / (1 - VAL) ),
0 = -SYAL2
+ ( EAI / (1 - (VAI * VAI)) ) * (DY2 + VAI * DX2) - ( EAI * CEAI * DT2 / (1 - VAI) ) } :
> solve(eqns, {SYAL1, SYAI1, SYAL2, SYAI2, CEAL, CEAI});
{CEAI = 0.00001717113340, CEAL = 0.00002730894871, SYAI1 = 3.611208493 10^7, SYAI2 = 1.333490033 10^7, SYAL1 =
-1.805604247 10^7, SYAL2 = -2.666980067 10^7} (19)

```

La Tabla D.18 muestra los valores de  $\alpha_{AL}$  de una capa de aluminio y  $\alpha_{AI}$  de una capa de acero inoxidable, así como de los esfuerzos interlaminares  $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{yAIC1}$  del compuesto c1, y  $\sigma_{yALc2}$ ,  $\sigma_{yAIC2}$  del compuesto c2.

Tabla D.18. Esfuerzos térmicos interlaminares y CETs en dirección y, en compuestos c1 y c2

$\Delta T$	$\varepsilon_{Cxc1}^0$	$\varepsilon_{Cyc1}^0$	$\alpha_{AL}$	$\alpha_{AI}$	$\sigma_{yAIC1}$	$\sigma_{yAIC2}$	$\sigma_{yALc1}$	$\sigma_{yALc2}$
°C	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon$	$\mu\varepsilon/^\circ C$	$\mu\varepsilon/^\circ C$	MPa	MPa	MPa	MPa
2.8	60.2	60.3	27.25	17.19	3.39	1.25	-1.69	-2.50
10.9	234.4	234.4	27.52	17.13	13.64	5.04	-6.82	10.07
12.9	277.5	278	27.30	17.18	15.72	5.81	-7.86	-11.61
20.8	447.4	448.3	27.32	17.17	25.41	9.38	-12.70	-18.76
25.6	550.6	551.7	27.31	17.17	31.24	11.54	-15.62	-23.08
29.6	636.6	637.9	27.31	17.17	36.11	13.34	-18.06	-23.08
SUMA			164.01	103.01				
PROMEDIO			27.33	17.17				

### D.5.3 Valores promedio de los CET y comparación con CET experimentales

Los valores promedio de los CET de las capas de aluminio y de acero inoxidable obtenidos mediante Maple 13, son determinados en esta sección y registrados en la Tabla D.19.

Tabla D.19. CET promedio por Maple 13

TABLA	$\alpha_{AL} \mu\epsilon / ^\circ C$	$\alpha_{AI} \mu\epsilon / ^\circ C$
5.15	27.17	17.24
5.16	27.33	17.17
SUMA	54.50	34.38
PROMEDIO	27.25	17.19

En la Tabla D.20 se establece una comparación entre los CET obtenidos por maple 13 y los CET obtenidos experimentalmente y los de la base de datos MatWeb.

Tabla D.20. Comparación CET Maple 13, respecto CET experimentales y de MatWeb

CET	MÉTODO			DIFERENCIA		POCENTAJE %	
	Maple 13	Exp.	MW	Exp.	MW	Exp.	MW
$\alpha_{AL} (\mu\epsilon / ^\circ C)$	27.25	24.2	23.4	3,05	3.85	11.19	14.13
$\alpha_{AI} (\mu\epsilon / ^\circ C)$	17.19	17.6	17.3	-0.41	-0.11	-2.38	-0.64

Como se puede observar los valores obtenidos por Maple 13, comparándolos respecto a los CET experimentales, el CET del aluminio está ligeramente arriba del 10%, mientras que para el CET del acero inoxidable es mucho menor del 10%.

### D.5.4 Cálculo de esfuerzos térmicos globales con datos resultantes del software Maple 13

En esta sección se calculan los esfuerzos térmicos globales en los dos compuestos laminados metálicos (c1 y c2), con los datos de esfuerzos térmicos

interlaminares relacionados con los incrementos de temperatura, que fueron obtenidos en las Tablas D.17 y D.18, por medio de software Maple 13. Lo anterior es con el fin de mostrar que las ecuaciones resultantes de la aplicación del modelo son eficaces en el cálculo de esfuerzos térmicos globales.

Debido a que los compuestos mencionados no están restringidos mecánicamente, ni están sometidos a cargas mecánicas en sus fronteras, y sólo están sometidos a cargas térmicas, *los esfuerzos térmicos globales deben ser cero.*

El cálculo de los esfuerzos térmicos globales, en los compuestos c1 y c2, utilizando los datos de los esfuerzos térmicos interlaminares registrados en las Tablas D.17 y D.18, obtenidos por medio del software Maple 13, se lleva a cabo primero determinando:

- 3) Los esfuerzos térmicos globales en el compuesto c1.
- 4) Los esfuerzos térmicos globales en el compuesto c2.

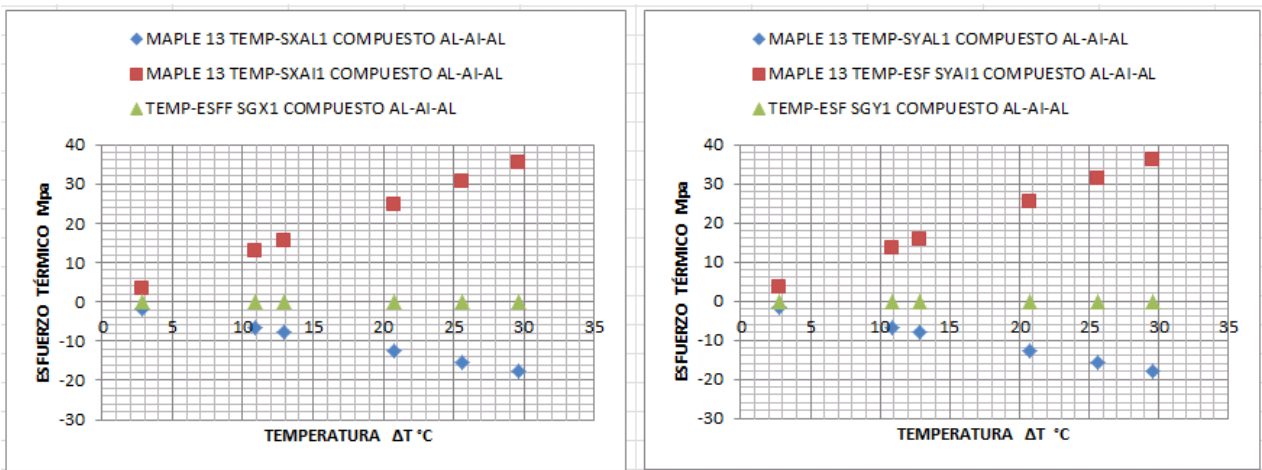
Las ecuaciones utilizadas para este fin, son las ecuaciones 5.9.

#### **D.5.4.1 Cálculo de esfuerzos térmicos globales en el compuesto c1, con datos de Maple 13**

Para determinar en el compuesto c1, los esfuerzos térmicos globales, se utilizan las expresiones (D.12, 1, 3). Los esfuerzos térmicos globales calculados por este medio, relacionados con el compuesto c1, se registran en la Tabla D.21, en la Figura D.10a, se muestran las relaciones de los cambios de temperatura ( $\Delta T$ ) y los esfuerzos térmicos interlaminares ( $\sigma_{xALc1}$ ,  $\sigma_{xAIc1}$ ) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  del compuesto c1, y en la Figura D.10b, las relaciones cambio de temperatura ( $\Delta T$ ) con los esfuerzos térmicos interlaminares ( $\sigma_{yALc1}$ ,  $\sigma_{yAIc1}$ ) y globales  $\sigma_{Gyc1}$  del mismo compuesto.

Tabla D.21. Esfuerzos térmicos globales resultantes en el compuesto c1 (Maple 13)

$\Delta T$	$\sigma_{xALc1}$	$\sigma_{yALc1}$	$\sigma_{xAIc1}$	$\sigma_{yAIc1}$	$\sigma_{Gxc1}$	$\sigma_{Gyc1}$
°C	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
2.8	-1.67	-1.69	3.34	3.39	0.000	0.003
10.9	-6.55	-6.82	13.01	13.64	-0.030	0.000
12.9	-7.70	-7.86	15.40	15.72	0.000	0.000
20.8	-12.42	-12.70	24.84	25.41	0.000	0.003
25.6	-15.28	-15.62	30.56	31.24	0.000	0.000
29.6	-17.65	-18.06	35.30	36.11	0.000	-0.003



a)

b)

Figura D.10. Relación cambio de temperatura contra esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$  (SXAL1),  $\sigma_{xAIc1}$  (SXAI1) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  (SGX1) (a), y contra esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{yALc1}$  (SYAL1),  $\sigma_{yAIc1}$  (SYAI1) y globales  $\sigma_{Gyc1}$  (SGY1) (b)

#### D.5.4.2 Cálculo de esfuerzos térmicos globales en el compuesto c2, con datos de Maple 13

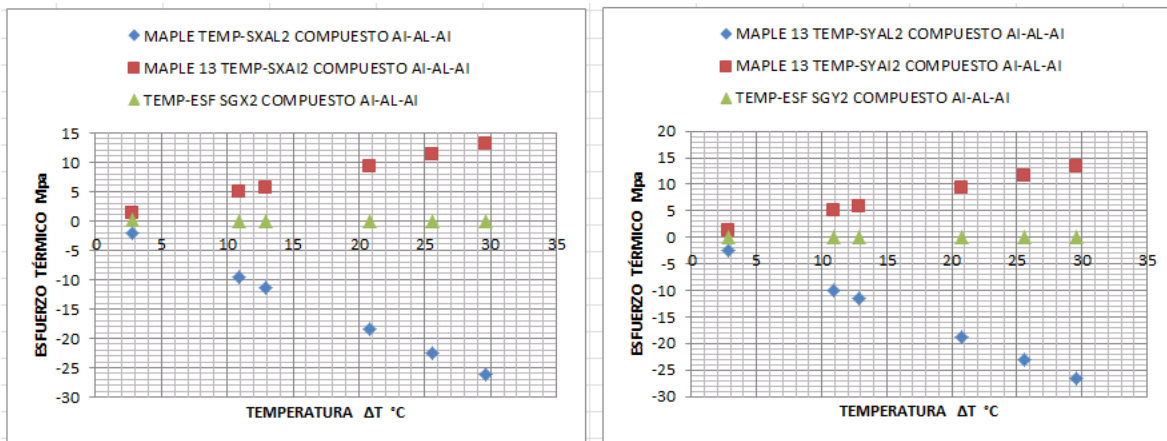
Para determinar en el compuesto c2, los esfuerzos térmicos globales, se utilizan las expresiones (D.12, 2, 4).

En la Tabla D.22 se registran los esfuerzos térmicos globales calculados relacionados con el compuesto c2, y en las Figura D.11a, se muestran las

relaciones  $\Delta T - (\sigma_{xALc2}, \sigma_{xAIc2})$  y  $\Delta T - \sigma_{Gxc2}$ , y en la Figura D.11b, las relaciones  $\Delta T - (\sigma_{yALc2}, \sigma_{yAIc2})$  y  $\Delta T - \sigma_{Gyc2}$ , ambas relaciones son del compuesto c2.

Tabla D.22. Esfuerzos térmicos globales resultantes en el compuesto c2 (Maple 13)

$\Delta T$	$\sigma_{xALc2}$	$\sigma_{yALc2}$	$\sigma_{xAIc2}$	$\sigma_{yAIc2}$	$\sigma_{Gxc2}$	$\sigma_{Gyc2}$
°C	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
2.8	-2.17	-2.50	1.23	1.25	0.097	0.000
10.9	-9.68	-10.07	4.84	5.04	0.000	0.003
12.9	-11.38	-11.61	5.69	5.81	0.000	0.003
20.8	-18.36	-18.76	9.18	9.38	0.000	0.000
25.6	-22.58	-23.08	11.29	11.54	0.000	0.000
29.6	-26.09	-26.67	13.04	13.34	-0.003	0.003



a)

b)

Figura D.11. Relación cambio de temperatura contra esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{xALc1}$  (SXAL1),  $\sigma_{xAIc1}$  (SXAI1) y globales  $\sigma_{Gxc1}$  (SGX1) (a), y contra esfuerzos térmicos interlaminares  $\sigma_{yALc1}$  (SYAL1),  $\sigma_{yAIc1}$  (SYAI1) y globales  $\sigma_{Gyc1}$  (SGY1) (b)