



**Universidad Nacional Autónoma de México**

**Programa de maestría y doctorado en Ingeniería**

**Ingeniería Eléctrica**

**Sistemas electrónicos**

---

*Estudio de un microacelerómetro realimentado con actuación  
electrostática y transducción SAW*

**TESIS**

Que para optar por el grado de:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

PRESENTA

**M.I. Jaime Octavio Guerra Pulido**

Tutor: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar (Facultad de Ingeniería, UNAM)

Comité tutorial: Dra. Lucía Medina Gómez (Facultad de ciencias, UNAM)

Dr. Guillermo Monsivais Galindo (Instituto de Física, UNAM)

México, D. F.,

2014



## **Jurado asignado**

Presidente: Dra. Lucía Medina Gómez

Secretario: Dr. Jorge Rodríguez Cuevas

1er. Vocal: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar

2do. Vocal: Dr. Guillermo Monsivais Galindo

3er. Vocal: Dr. Santiago Jesús Pérez Ruiz

---

Vo. Bo. Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar

Tutor

Esta tesis se realizó en el Departamento de Electrónica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, con el apoyo de los proyectos PAPIIT IN175103 e IN116014.



Con amor, para mis padres: Hortensia y Andrés.



*“El mal que existe en el mundo proviene casi siempre de la ignorancia, y la buena voluntad sin clarividencia puede ocasionar tantos desastres como la maldad. Los hombres son más bien buenos que malos, y, a decir verdad, no es esta la cuestión. Sólo que ignoran, más o menos, y a esto se lo llama virtud o vicio, el vicio más desesperado es el vicio de la ignorancia que cree saberlo todo y se autoriza entonces a matar. El alma del que mata es ciega y no hay verdadera bondad ni verdadero amor sin toda la clarividencia posible.”*

*La peste – Albert Camus*





## **Agradecimientos**

A la Universidad Nacional Autónoma de México por la oportunidad de cursar mis estudios desde el bachillerato hasta el doctorado y, además, porque a través de la Coordinación de Estudios de Posgrado (CEP-UNAM) recibí la beca que me permitió dedicarme al desarrollo de esta tesis y, por medio de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA), se brindaron los recursos económicos (proyectos PAPIIT IN175103 e IN116014 ) sin los cuales este trabajo no hubiera podido llevarse a cabo.

Aprovecho este espacio para agradecer a las personas quienes con su colaboración y soporte contribuyeron en el desarrollo de este trabajo de investigación. Al Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar por su disposición, consejo, ayuda y dirección. A la Dra. Lucía Medina Gómez y al Dr. Guillermo Monsivais Galindo por sus valiosos comentarios, su disposición y su paciencia. Al M.I. Roberto Tovar Medina, jefe del departamento de electrónica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, por todo el apoyo que nos brindó durante la realización del proyecto. Al Dr. Mathieu Hautefeuille por su ayuda en la realización de pruebas ópticas y de proximidad con la línea de retardo, por el interesante intercambio de ideas, sus comentarios y enseñanzas. A la Dra. Laura Adriana Oropeza Ramos por el entrenamiento recibido para utilizar el MSA de Polytec y su disposición para ayudar. Al Dr. Aleksander Martiniuk por haber realizado las mediciones de los parámetros S de la línea de retardo y del amplificador y por haber hecho las conexiones eléctricas entre la base y la línea de retardo. Al Dr. Jorge Rodríguez Cuevas y al Dr. Santiago Jesús Pérez Ruiz por sus comentarios y sugerencias sobre el proyecto presentado para el examen de candidatura y sobre esta tesis. Al Dr. José Ismael Martínez López representante en el SACC de los profesores del área de sistemas electrónicos. A la M.C. Adriana Tejada Cruz, del Instituto de Investigaciones en Materiales, por haber realizado e interpretado las pruebas de XRD y aclarar algunas dudas al respecto. Al Dr. Iván Meléndez Ortiz por haber realizado estudios para confirmar los resultados de XRD obtenidos en el IIM. Al Dr. Edgar Álvarez Zauco, de la Facultad de Ciencias de la UNAM, por haber realizado los estudios de AFM e interpretarlos para nosotros. A la M.C. Jaqueline R.D. Cañetas Ortega por los estudios de SEM. Al Dr. Jaime Moreno Pérez y al Instituto de Ingeniería de la UNAM por prestar el generador de funciones de RF utilizado en este trabajo. Al Ing. José Salvador Zamora Alarcón por su ayuda con el equipo para hacer mediciones eléctricas. Al Ing. Javier López Velazquez por su asistencia con los equipos de computo. Al Ing. Pedro D. González Osorio por su ayuda en el laboratorio y con el software Coventor. Al Ing. Ricardo Vázquez Larquet por haber construido para nosotros los cables para interconectar los dispositivos y los instrumentos. A Violeta Álvarez por su apoyo y comprensión.



# Resumen

---

El presente trabajo de tesis trata sobre una propuesta para diseñar y construir un microacelerómetro utilizando dos tipos de tecnologías: los dispositivos de ondas acústicas superficiales (SAW) y los sistemas microelectromecánicos (MEMS). En este caso se utilizó como dispositivo SAW una línea de retardo convencional y como microestructura una ménsula fabricada por medio de PolyMUMPS. La unión de ambos sistemas se logra porque el campo eléctrico asociado a las SAW que se propagan en un medio piezoeléctrico interactúa con la ménsula conductora y, como resultado, la velocidad de propagación de la SAW cambia dependiendo de la posición de la microestructura. Para comprender cada una de las partes que componen al sistema se hicieron estudios teóricos y experimentales del dispositivo SAW, de las ménsulas (MEMS) que lo conforman y de la forma en interactúan ambas.

El capítulo 2 trata sobre cómo se diseñó la línea de retardo SAW, sobre su caracterización por medio de AFM, SEM y XRD para determinar sus características físicas y su respuesta eléctrica a través de los parámetros  $S$ . Se obtuvieron los parámetros  $S$  y  $Y$  teóricos, se analizaron las diferencias y, después de haber ajustado la velocidad de propagación y el factor de atenuación de las SAW en el material, se encontró concordancia entre ambos. Después, se presenta el estudio de un amplificador diseñado con las características necesarias para que, al conectarlo entre ambas terminales de la línea de retardo, ésta y el amplificador conformen un oscilador. También, se presenta el análisis teórico de este circuito utilizando un programa computacional propio, que hace simulaciones tipo SPICE; se propuso un método para integrar, en las simulaciones electrónicas, a los dispositivos SAW si se conocen sus parámetros de admitancia ( $Y$ ).

El capítulo 3 se centra en el estudio de la microestructura propuesta como elemento inercial del microacelerómetro. Para modelar la actuación electrostática sobre la microestructura, el amortiguamiento debido a la película comprimida y los esfuerzos residuales presentes en la estructura, después de concluida la fabricación, se utilizó una forma modificada de la ecuación de Euler-Bernoulli. Se comprobó, por medio del método de elemento finito, que este modelo sirve, bajo determinadas circunstancias, para encontrar la deformación en la estructura. Se propuso un criterio para determinar si las estructuras se romperán cuando éstas sean liberadas. Además, las barras fabricadas se caracterizaron por medio de un analizador de microestructuras y se encontraron concordancias y diferencias que se analizan y discuten.

En el capítulo 4 se propone un modelo para comprender y simular la operación de los sistemas SAW-MEMS. Estos sistemas pueden funcionar de manera remota o local, es decir, en los primeros, la medición se hace por medios inalámbricos y, en los segundos, por medio de las variaciones en el cambio de la frecuencia de un circuito oscilador. Aquí se presenta

detalladamente la metodología para analizar estos dos tipos de sistemas. Se calcula teóricamente la respuesta de un microacelerómetro que ha sido reportado con anterioridad analizando la forma en que ocurren las reflexiones de las SAW en el dispositivo. Los resultados de este trabajo fueron publicados en los TUFFC de la IEEE. Para analizar los dispositivos SAW-MEMS locales, se propone un método, basado en el caso anterior, para comprender la transmisión de ondas en medios inhomogéneos; además, se comparan los resultados obtenidos con este método con aquellos obtenidos por medio de una estructura acústica multicapa y se encontró concordancia. Utilizando las simulaciones del capítulo 2, se presentan las simulaciones del oscilador cuando se hace variar la velocidad de las SAW.

Como resultado de este trabajo se demostró que es posible modelar, simular y fabricar dispositivos SAW y SAW-MEMS. Estos dispositivos podrían ser utilizados en la construcción de sensores diversos, en el área de comunicaciones y de procesamiento de señales.

# Abstract

---

This thesis discusses a proposal to design and build a micro-accelerometer using two types of technologies: surface acoustic wave (SAW) devices and microelectromechanical systems (MEMS). In this case, we used a conventional SAW delay line and a micro-cantilever manufactured using polyMUMPS. The union of the two systems is achieved because the electric field associated to the SAW propagating in a piezoelectric media interacts with the conductive cantilever and, as a result, the velocity of the SAW changes depending on the position of the microstructure. To understand each part of the system, theoretical and experimental studies of the SAW, the micro-cantilever and their interaction were made.

In chapter 2, we present the design of the SAW delay line and how it was characterized using AFM, SEM, XRD and measuring their S parameters. S and Y parameters were obtained theoretically and, after adjusting the wave velocity and the attenuation factor of the SAW, we found agreement between theory and experiment. Also, we present an amplifier designed to ensure oscillations when it is connected to SAW delay line. We made theoretical analysis of this circuit and using a proprietary computer program we obtained SPICE-like simulations of this circuit. Then, a method is proposed to integrate SAW devices in electronic simulations if their Y parameters are known. Micro-cantilevers were analyzed through the Euler-Bernoulli equation, finite element method and its response was measured experimentally. Finally, we discuss how both systems work together in order to measure acceleration and we present a numerical method to simulate the system response.

Chapter 3 focuses on the study of the microstructure given as micro-accelerometer inertial element. To model the electrostatic actuation, damping due to the squeeze film and residual stresses in the structure after completion of its fabrication, a modified form of the Euler-Bernoulli equation was used. It was found, by means of finite element method, that this model is useful under certain circumstances to find the deformation of the structure. A criterion was proposed to determine if the structures will be broken when they get freed. In addition, these structures were characterized by means of a microstructure analyzer. Concordances and differences were found, and they are analyzed and discussed.

Chapter 4 proposes a model to understand and simulate the operation of SAW-MEMS devices. These systems could operate locally or remotely: in the first case, the measurement is made by wireless means and , in the second case, by means of an oscillator circuit in which its frequency changes are measured. Herein, we present a detailed methodology to analyze these two types of systems. We calculate the response of a micro-accelerometer that has been reported previously by analyzing theoretically how the reflections of the SAW happen inside of the device. The results of this work were published in the IEEE TUFFC. Based on the previous case, we propose a method to find the response of local SAW-MEMS devices. This method considers an inhomogeneous propagation media. We

present an example and the results are compared with those obtained through a multilayer acoustic media, we found agreement between both. Using the program to simulate the oscillator of chapter 2, we present the response of the system when SAW velocity change.

As a result of this work, we showed that it is possible to model, simulate and fabricate SAW and SAW-MEMS devices. These devices could be used in sensing, communications and signal processing applications.

# Índice

---

Índice	15
1. Introducción	17
2. Dispositivos de ondas acústicas superficiales	
2.1 Antecedentes.....	21
2.1.1 Transductores interdigitales.....	22
2.2 Diseño de la línea de retardo .....	48
2.3 Caracterización de la línea de retardo.....	51
2.3.1 Difracción de rayos X.....	52
2.3.2 Microscopía electrónica de barrido .....	56
2.3.3 Microscopía de fuerza atómica.....	60
2.3.4 Medición de los parámetros S y Y de la línea de retardo .....	64
2.4 Modelado teórico de la línea de retardo .....	71
2.4.1 Cálculo de la matriz P de los transductores interdigitales .....	71
2.4.2 Modelo de la línea de retardo .....	76
2.4.3 Extracción de los parámetros Y de la línea de retardo .....	77
2.5 Comparación de los resultados teóricos y de los resultados experimentales .....	79
2.6 Circuito oscilador .....	84
2.6.1 El amplificador: diseño y simulación .....	85
2.6.2 Resultados teóricos del circuito oscilador .....	86
2.6.3 Resultados experimentales del circuito oscilador.....	99
2.6.4 Comparación de los resultados teóricos y de los experimentales.....	101
2.6.5 Demodulación de la señal.....	102
3. Sistemas microelectromecánicos	
3.1 Antecedentes.....	107
3.1.1 MEMS inerciales (iMEMS) .....	108
3.1.2 Modelado de un acelerómetro y su comportamiento dinámico.....	109
3.1.3 Barras.....	115
3.1.4 Actuación electrostática en MEMS .....	118

3.1.5 Amortiguamiento en los MEMS.....	124
3.1.6 Ruido y esfuerzos residuales en MEMS.....	135
3.1.7 Fabricación de las microestructuras .....	137
3.2 Microestructuras propuestas.....	139
3.2.1 Análisis de las barras .....	140
3.2.2 Resultados teóricos.....	143
3.2.3 Resultados experimentales .....	155
3.2.4 Discusión de resultados .....	159
4. Dispositivos SAW-MEMS	
4.1 Antecedentes.....	164
4.2 Interacción de ondas acústicas con una microestructura conductora .....	166
4.3 Estudio teórico del microacelerómetro SAW-MEMS remoto .....	174
4.4 Estudio de un microacelerómetro SAW-MEMS realimentado .....	181
4.5 Resultados y trabajo por realizar .....	183
5. Conclusiones	
6. Apéndices	



# 1. Introducción

---

El término de sistemas microelectromecánicos (MEMS) es ambiguo y no existe una definición única que sea aceptada por toda la comunidad que trabaja en el tema; sin embargo, se puede decir que son aquellos sistemas en los que, por lo menos, una de sus dimensiones tienen un tamaño micrométrico y, además, está involucrado en su operación algún fenómeno electromagnético, térmico, mecánico, óptico, acústico, químico, etc.<sup>1</sup> [1]

El origen de los MEMS se remonta al descubrimiento de los efectos piezoresistivos en el silicio y en el germanio [2]. Este descubrimiento permitió establecer un vínculo entre la electrónica y el sensado de variables mecánicas tales como la presión y la aceleración [3]. Algunos años después del trabajo de Smith [2], se publicaron diversas investigaciones en las cuales se trataba sobre si las tecnologías de semiconductores que habían hecho posible al transistor, podrían ser utilizadas para hacer sensores; sin embargo, no fue hasta principios de la década de los 60's cuando se dieron a conocer diversos trabajos de Bell Labs y de Honeywell donde presentaban los primeros sensores de presión piezoresistivos hechos en silicio [4]. Posteriormente, el desarrollo de los MEMS fue impulsado por el avance logrado en los métodos de fabricación de dispositivos semiconductores, por ejemplo: Nathanson *et al.* [5] desarrollaron en 1967 un transistor de compuerta resonante, el cual mostró la posibilidad de integrar estructuras mecánicas y electrónicas a través de estos procesos de fabricación. Durante la década de los 70's se desarrolló el micromaquinado volumétrico y éste se utilizó para construir sensores de presión y acelerómetros [6]. En el año de 1983 se desarrolló el esquema básico del micromaquinado superficial, en el cual se utilizan dos tipos de materiales en la fabricación de los dispositivos: estructurales y de sacrificio [7]. En los años siguientes se desarrollarían estas técnicas y darían lugar a procesos como PolyMUMPS. Sólo unos años después, en 1986, se desarrollaría la técnica de micromaquinado LIGA que sirve para hacer estructuras con una gran relación de aspecto [8]. En general, estos son algunos de los principales métodos convencionales para la fabricación de MEMS y, cada uno con sus respectivos desarrollos y mejoras, se siguen utilizando en la actualidad.

Los avances en la tecnología para la fabricación de los MEMS ha producido dispositivos más confiables, más pequeños, más baratos y cuyas aplicaciones se han extendido a diversas áreas en las que originalmente no se habían considerado. Según Fujita, la investigación en MEMS se ha desarrollado tal como se muestra en la figura 1.1 [9]. Actualmente, algunas de las aplicaciones en las que se utilizan los MEMS son: sensores de presión; acelerómetros; giroscopios; microbolómetros; micrófonos; sensores de flujo; sensores de gas; sensores de humedad y temperatura; dispositivos ópticos como

---

<sup>1</sup> Es importante distinguir entre los circuitos integrados, que a pesar de ser sistemas miniaturizados, no se les considera MEMS.

procesadores digitales de luz y visualizadores basados en MEMS; dispositivos de RF como microinterruptores, capacitores variables y resonadores, etc.

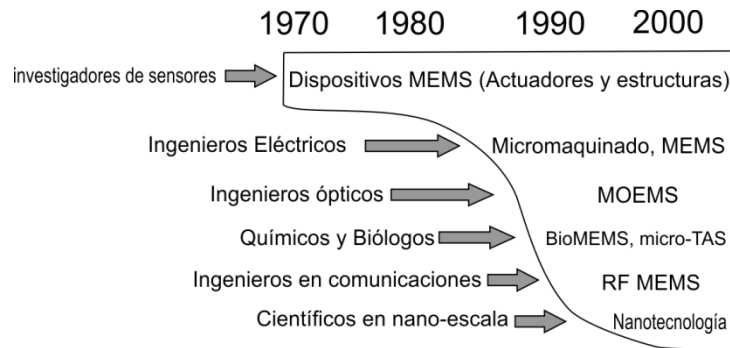


Figura 1.1. Desarrollo de la investigación de los MEMS a través del tiempo. [9]

A continuación, se tratarán algunos ejemplos que reflejan la importancia, el impacto y el crecimiento que han tenido los MEMS en diversas aplicaciones. Debido a las características de los sensores de presión MEMS, éstos han tenido una amplia aceptación en la industria, por ejemplo: en la industria automotriz se utilizan en los sistemas que se encargan de alimentar al motor, dar estabilidad al auto, controlar las emisiones y monitorear la presión de las llantas. Se espera que la comercialización de MEMS en el área automotriz alcance los \$1,260 millones de dólares, lo cual representa el 75% de las ventas totales de estos sensores y, además, es más de la mitad de lo que se estima que la industria automotriz gastará en sensores durante el 2013 (\$2,300 millones de dólares). Se espera que el mercado de los sensores de presión MEMS se amplíe extensamente cuando se haga más común en otras aplicaciones como en los teléfonos inteligentes. Durante el 2012, se consumieron 82 millones de estos dispositivos y se espera que aumente hasta llegar a 681 millones en el 2016. Por otro lado, en el año 2009 se comercializaron 433 millones de unidades y se espera que para el año 2016 se alcancen ventas de 4,650 millones de micrófonos MEMS, con un valor de mercado de más de \$1,000 millones de dólares.

Otro de los dispositivos que también han tenido mucha aceptación en el mercado son los microacelerómetros, los cuales, junto con los sensores de presión fueron de los primeros en ser fabricados. Actualmente, éstos se utilizan en la industria automotriz, en los sistemas de detección de impactos que se encargan de abrir las bolsas de aire, en los sistemas de estabilidad de los vehículos; en la industria de la telefonía y de la computación se utilizan para rotar automáticamente la pantalla o bien para detectar impactos de una computadora o cuando ésta se encuentra en caída libre y poder proteger los discos duros de las computadoras; incluso, se ha demostrado la utilidad de los acelerómetros en la ganadería, específicamente, se han utilizado para detectar el movimiento de vacas y determinar si se encuentran en celo [4]. Los ejemplos mencionados anteriormente presentan algunas de las posibles aplicaciones de la tecnología MEMS, de la cual se espera un crecimiento mayor en el futuro; entonces, se puede afirmar con seguridad que el mercado de los MEMS se

encuentra en crecimiento y, por esta razón, la investigación que se realiza sobre nuevos prototipos, métodos de fabricación, nuevas aplicaciones, sustentabilidad de esta tecnología queda plenamente justificada. Algunas de las tendencias actuales en los MEMS son: la integración de varios sensores en un sólo empaque, la disminución del tamaño y del consumo de energía, la integración de los sensores con circuitos electrónicos integrados, sólo por mencionar algunas. Eventualmente, la investigación en nuevas tecnologías podrá satisfacer estas expectativas.

En los MEMS se utiliza comúnmente la transducción piezoresistiva y capacitiva para convertir las variables físicas de interés en señales eléctricas, sin embargo, se han estudiado otros medios para lograrlo. En el caso de los acelerómetros, se han estudiado diversas alternativas como son: capacitivos no convencionales [10], piezoresistivos [11], piezoeléctricos [12], ópticos [13], térmicos [14, 15], de tunelaje [16] y de ondas acústicas superficiales (SAW) [17], entre otros. Sin embargo, como se explica con más detalle en el capítulo 3, los dispositivos que utilizan la transducción SAW no han sido estudiados extensivamente. Aunque la mayoría de estas nuevas propuestas aún son solamente prototipos, la investigación en estas áreas produce avances que en un futuro podrían mejorar los MEMS existentes, aumentar la comprensión sobre la forma en que operan estos sistemas, nuevas campos de investigación en temas relacionados, la manera de lograr que un prototipo propuesto se convierta en un dispositivo capaz de resolver una necesidad particular de la sociedad, entre otras.

Este trabajo parte de la suposición de que la transducción por medio de las SAW es efectiva y que con ésta pueden afrontarse algunas desventajas de los métodos convencionales, que son: para la transducción capacitiva, las fuerzas electrostáticas presentes en este sensado deben de compensarse con estructuras mecánicas más complejas o por medios electrónicos, las variaciones en las capacitancias son del orden de los femtofarads y las no-linealidades inherentes; en el caso de la transducción piezoresistiva, una mayor presencia de ruido que en la capacitiva, sensibilidad a algún posible esfuerzo mecánico presente durante su operación y sensibilidad a la temperatura, entre otras [18]. Además, se considera que por medio de la transducción SAW se podrían utilizar estructuras mecánicas simples y que esta combinación de tecnologías podría funcionar para hacer una línea completa de instrumentos y de otros dispositivos electrónicos. Para lograr verificar la suposición anterior, es necesario realizar un estudio profundo sobre este tipo de sistemas y alcanzar diversas metas en el camino. Las metas que se plantearon en el protocolo de investigación original fueron: profundizar en los conocimientos relacionados con el tema, establecer un modelo matemático que permita predecir el comportamiento del sistema, desarrollar las herramientas computacionales necesarias para la simulación del sistema, hacer un diseño de un microacelerómetro basado en el modelo planteado y, con base en el diseño propuesto, fabricar y caracterizar el instrumento. Entonces, el objetivo de este trabajo es: estudiar y

modelar los diferentes tipos de microacelerómetro SAW-MEMS y construir un microacelerómetro SAW-MEMS realimentado con actuación electrostática.

Para realizar la investigación se trabajará sobre una propuesta de un microacelerómetro y sobre otro que ha sido reportado previamente [17]. Ambos instrumentos tienen como principio de operación la relación entre la aceleración y la velocidad de las ondas superficiales que se logra a través de la deformación de una estructura MEMS conductora. Por medio de los cambios en la velocidad es posible medir la variable de interés tal como será descrito más adelante. Este trabajo está compuesto de cuatro capítulos principales. El capítulo 2 trata sobre los dispositivos SAW y la teoría que será utilizada para explicar la operación del dispositivo SAW; el diseño, fabricación y caracterización de dicho dispositivo; los resultados de la caracterización eléctrica de la línea de retardo y su comparación con aquellos obtenidos teóricamente y, además, un método para analizar este tipo de dispositivos cuando opera con circuitos electrónicos, de tal forma que se pueda realizar una simulación del dispositivo en el dominio del tiempo, lo cual, según nuestro conocimiento no ha sido realizada con anterioridad para este tipo de dispositivos. En el capítulo 3 se trata la teoría relacionada con los sistemas de medición inercial, la cual incluye la teoría de barras de Euler-Bernoulli y la teoría sobre el amortiguamiento por película comprimida presente en los MEMS; se propone como estructura conductora una estructura similar a una placa sujeta por dos extremos, mostrándose que una aproximación razonable es considerar esta estructura como si fuera un puente, para hacer su análisis considerando la teoría de Euler-Bernoulli y de elemento finito y, por último, se caracterizan los puentes fabricados. En el capítulo 4, se trata sobre ambas tecnologías operando en conjunto, se analizan ambos microacelerómetros y se presentan los resultados y, por último, en el capítulo 5 se discuten ampliamente los resultados obtenidos durante todo el trabajo y se habla acerca del trabajo que ha quedado pendiente y a desarrollar en el futuro.

Como resultado de este trabajo se ha publicado un artículo con arbitraje riguroso en una revista de circulación internacional, el cual se muestra al final en un apéndice. Sin embargo, por la extensión del trabajo realizado y por los resultados obtenidos no se descarta que, en un futuro, aquellas partes de esta tesis que aun no han sido difundidas como artículo y algunos posibles avances posteriores, encuentren cabida en alguna otra publicación.

## 2. Dispositivos de ondas acústicas superficiales

---

### 2.1 Antecedentes

En 1885, Lord Rayleigh propuso la existencia y la descripción matemática de ondas acústicas que pueden propagarse por la superficie libre de un semiplano compuesto de un material isotrópico homogéneo [19], sin embargo, no fue hasta principios de la década de los sesenta en que se sugirió que este tipo de ondas podrían ser útiles en el área de las comunicaciones y electrónica [20]. La principal característica de las ondas acústicas superficiales (SAW) es que el desplazamiento de las partículas decrece exponencialmente mientras más profundo se penetra en el material, es decir, estas ondas se propagan principalmente por la superficie del material y su amplitud de la onda decrece cuando se aleja de la superficie. En 1965, comenzó el estudio intensivo de los dispositivos SAW, cuando R.M. White y F.W. Voltmer [21] inventaron el transductor interdigital (IDT), el cual facilita la generación de SAW. En su forma más simple, este dispositivo está formado por un conjunto de electrodos en forma de barras paralelas, depositadas sobre un material piezoeléctrico, cuya polaridad se alterna. La polaridad alternante en los electrodos produce, debido a la propiedad piezoeléctrica del material, un esfuerzo sobre éste y, además, se produce una deformación; es así como se produce una SAW. En la actualidad se han identificado diferentes tipos de SAW, siendo algunas de estas: ondas Rayleigh, ondas Love, ondas Sezawa y ondas Bleustein-Gulyaev. Para una explicación más detallada de la teoría relacionada con los campos acústicos, con los tipos de ondas y sus características, se recomienda consultar la obra de B.A. Auld [22, 23]. Para profundizar en la historia de los dispositivos SAW se recomienda leer el trabajo de Morgan [24].

El interés por la aplicación de las ondas acústicas en sistemas electrónicos se debe a que: es posible convertir la energía eléctrica en acústica y viceversa con relativa facilidad, su fabricación es más simple que la de un circuito integrado, es posible interactuar con el campo eléctrico asociado a la onda acústica por medio de algún tipo de estructura externa y la velocidad de propagación es mucho menor que la velocidad de una onda electromagnética. En una SAW la velocidad típica de las ondas es alrededor de varios miles de metros por segundo, mientras que la velocidad de la luz es aproximadamente  $3 \times 10^8$  metros por segundo, es decir, la velocidad de la luz es mayor alrededor de  $1 \times 10^5$  veces. El hecho de que la velocidad de las SAW sea relativamente pequeña permite construir dispositivos que son más compactos que aquellos análogos que funcionan con ondas electromagnéticas y que operan a una misma frecuencia. Estas ventajas propiciaron la investigación sobre estos dispositivos. Varios años después de que los IDT fueran reportados por primera vez, ya se conocía una gran variedad de dispositivos SAW que podían operar satisfactoriamente [25, 26], siendo algunos de estos: líneas de retardo no

dispersivas, filtros pasobanda, compresores de pulsos, osciladores, resonadores, sensores, entre otros.

Para poder buscar nuevas aplicaciones y entender la forma en que los dispositivos SAW operan, fue necesario desarrollar una base teórica que permitiera predecir y entender el comportamiento de este tipo de dispositivos. A continuación se exponen brevemente los aspectos más relevantes sobre la teoría de los IDTs, con la finalidad de especificar claramente las bases sobre las cuales se fundamenta este trabajo.

### 2.1.1 Transductores interdigitales

Un IDT es un dispositivo complejo que, como ya se mencionó, está formado por un conjunto de electrodos dispuestos paralelamente uno con respecto a los otros sobre un sustrato piezoeléctrico. Los electrodos están formados básicamente por una película de titanio que sirve para garantizar la adherencia con el sustrato y, encima de ésta, una de aluminio. Algunos de estos electrodos están conectados a una fuente de voltaje y otros a la tierra del sistema, es decir, existe una diferencia de potencial entre ambos, que varía con el tiempo. Como se puede apreciar de la descripción de los IDTs, obtener un modelo matemático que considere los campos eléctricos y magnéticos variantes en el tiempo y en el espacio, de tal forma que se considere que por encima de ellos está el espacio vacío y, por debajo, un sustrato anisotrópico piezoeléctrico que se deforma en presencia del potencial eléctrico, y que en los electrodos existe una distribución de cargas eléctricas también variante en el tiempo y en el espacio, es un problema bastante complicado. Por esta razón es necesario realizar diversas simplificaciones al problema. La primera y, quizá la más importante, es considerar que los campos magnéticos son despreciables, lo cual quiere decir que el problema de los IDTs se reduce a un problema de tipo electrostático. Además, es posible considerar que el material del sustrato es un aislante homogéneo, anisotrópico y no piezoeléctrico [27, 28, 29] (Figura 2.1) y que los electrodos son infinitamente largos; entonces, el problema se convierte en bidimensional y su solución está dada por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + 2\varepsilon_{13} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0, \text{ para } x_3 < 0. \quad (2.1)$$

donde  $\Phi$  es el potencial eléctrico,  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de permitividad eléctrica y  $x_i$  son las coordenadas espaciales. Si para (2.1) se considera una solución armónica, en la que el potencial eléctrico varía en función de  $\exp(j\beta x_1)$ , donde  $\beta$  es el número angular de onda y es un número real, y desaparece cuando  $x_3 = -\infty$ ; entonces, una solución de (2.1) que satisface este requerimiento está dada por:

$$\tilde{\Phi}(x_1, x_3) = \exp\left[j\beta(x_1 - x_3 \varepsilon_{13}/\varepsilon_{33}) + |\beta| x_3 \varepsilon_p/\varepsilon_{33}\right], \text{ para } x_3 < 0, \quad (2.2)$$

donde

$$\varepsilon_p = \sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2} \quad (2.3)$$

y la tilde indica que corresponde a una solución armónica. Con la ecuación (2.2) es posible calcular la densidad de campo eléctrico ( $D$ ), cuya componente normal al plano está dada por:

$$\tilde{D}_3(x_1, x_3) = -\varepsilon_p |\beta| \tilde{\Phi}(x_1, x_3) \quad (2.4)$$

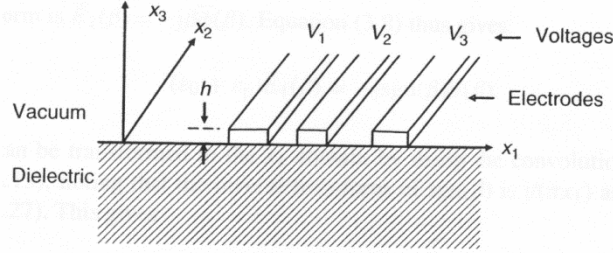


Figura 2.1. Representación gráfica de los IDTs sobre el material [20].

En la superficie dada por el plano  $x_3 = 0$ , para  $\tilde{D}_3(x_1, 0)$  corresponde un valor de densidad de carga eléctrica, del lado del dieléctrico, dado por la función:

$$\tilde{\sigma}_-(x_1) = -\tilde{D}_{3-} = \varepsilon_p |\beta| \tilde{\Phi}(x_1) \quad (2.5)$$

donde  $\tilde{\Phi}(x_1) \equiv \tilde{\Phi}(x_1, 0)$  es el potencial eléctrico en la superficie del material.

Si siguiendo un desarrollo similar para la región del espacio vacío ( $x_3 > 0$ ), en donde  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_0$  y  $\varepsilon_{13} = 0$ , la ecuación (2.1) se reduce a  $\nabla^2 \Phi = 0$  y, además,  $|\beta|$  debe ser reemplazada por  $-|\beta|$  en la ecuación (2.2). Para  $x_3 = 0$  el valor de  $\tilde{D}_3$  se denota como  $\tilde{D}_{3+}$  y la densidad de carga de los electrodos en el lado del espacio vacío es  $\tilde{\sigma}_+(x_1) = \tilde{D}_{3+} = \varepsilon_0 |\beta| \tilde{\Phi}(x_1)$ . Considerando la densidad de carga total como la suma de las densidades de carga en ambos lados de la frontera, ésta queda como:

$$\tilde{\sigma}(x_1) = \tilde{\sigma}_+(x_1) + \tilde{\sigma}_-(x_1) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_p) |\beta| \tilde{\Phi}(x_1) \quad (2.6)$$

A  $\varepsilon_0 + \varepsilon_p$  se le conoce como permitividad efectiva e indica el comportamiento eléctrico de la interface entre ambos medios.

Si ahora se considera que el material es, a diferencia del caso anterior, un material piezoeléctrico; entonces se puede demostrar que para este caso también existe una permitividad efectiva que está dada por [30]:

$$\varepsilon_s(\beta) = \frac{\tilde{D}_{3+} - \tilde{D}_{3-}}{|\beta| \tilde{\Phi}(x_1)} \quad (2.7)$$

Si la diferencia entre  $\tilde{D}_{3+}$  y  $\tilde{D}_{3-}$  no es nula, entonces, debe haber cargas eléctricas libres en la superficie del material, lo cual implica que sobre ésta deben existir electrodos y la densidad de carga eléctrica en ambos lados de la interfaz puede expresarse como:

$$\varepsilon_s(\beta) = \frac{\tilde{\sigma}(x_1)}{|\beta|\tilde{\phi}(x_1)} \quad (2.8)$$

Sin embargo, utilizando la transformada de Fourier en (2.8) es posible obtener una expresión más general de la permitividad efectiva:

$$\varepsilon_s(\beta) = \frac{\bar{\sigma}(\beta)}{|\beta|\bar{\phi}(\beta)} \quad (2.9)$$

donde  $\bar{\sigma}(\beta)$  y  $\bar{\phi}(\beta)$  son las transformadas de Fourier de  $\tilde{\sigma}(x_1)$  y  $\tilde{\phi}(x_1)$  respectivamente.

De acuerdo con Morgan [20], la permitividad efectiva es una herramienta poderosa que permite resolver problemas sobre arreglos de electrodos unidimensionales dispuestos sobre la superficie de un semiplano piezoeléctrico. Para variables que son proporcionales a  $\exp(j\omega t)$ , el potencial en la superficie  $\phi(x_1)$  y la densidad de carga eléctrica  $\sigma(x_1)$  están relacionadas por la permitividad efectiva y la solución se determina aplicando las condiciones de frontera adecuadas. Usualmente, para encontrar la solución  $\phi(x_1)$  debe especificarse dónde se encuentran ubicados los electrodos, mientras que  $\sigma(x_1)$  debe ser cero en todas aquellas regiones donde no haya electrodos. La excitación de ondas acústicas implícitamente está permitida por la definición de la permitividad efectiva. Esto incluye todas las formas de ondas acústicas que pudieran excitarse; por tanto, adicionalmente a las ondas de Rayleigh piezoeléctricas, la permitividad es apropiada para incluir efectos debidos a ondas pseudo-superficiales, ondas volumétricas y ondas Bleustein-Gulyaev. De hecho, muchas de las propiedades de las ondas en el material considerado pueden ser deducidas examinando la permitividad efectiva. Una limitación importante del método se debe a que se ha considerado que no existen fuerzas mecánicas en la interfaz. En la práctica, se debe procurar que los electrodos sean lo más ligeros posibles para que la carga mecánica de éstos en la superficie sea despreciable. Estas fuerzas mecánicas sobre la superficie hacen que los electrodos reflejen una porción de las ondas acústicas superficiales. Este efecto puede minimizarse si en lugar de utilizar transductores interdigitales compuestos por electrodos simples, es decir, una sola barra por electrodo, se utilizan electrodos dobles.

Generalmente, la permitividad efectiva es una función complicada de  $\beta$  y debe ser calculada numéricamente. Sin embargo, hay algunas propiedades que esta función debe de satisfacer, por ejemplo: la permitividad efectiva es simétrica, es decir  $\varepsilon_s(\beta) = \varepsilon_s(-\beta)$ . Además, se sabe que si  $\varepsilon_s(\beta)$  tiene una parte imaginaria, ésta está relacionada con la energía radiada hacia el medio en forma de ondas volumétricas.

De la expresión (2.9) se puede observar que para encontrar la densidad de carga presente en los electrodos es necesario conocer la permitividad efectiva del material. El potencial



eléctrico en la interfaz se conoce porque previamente se ha establecido la geometría y la polaridad de los electrodos. Por esta razón, se han propuesto algunos métodos para aproximar  $\varepsilon_s(\beta)$  [20, 27, 29, 30, 31, 32]. Por ejemplo: Ingerbrigsten [27] propone para la permitividad efectiva la siguiente expresión:

$$\varepsilon_s(\beta) \approx \varepsilon_\infty \frac{\beta^2 - k_f^2}{\beta^2 - k_m^2} \quad (2.10)$$

Donde  $\varepsilon_\infty \equiv \varepsilon_s(\infty) \approx \varepsilon_o + \varepsilon_p^T, \varepsilon_p^T$  está dada por la expresión (2.3), pero las constantes de permitividad eléctrica del material se midien bajo condiciones de esfuerzos constantes, y  $k_m$  y  $k_f$  son los números de onda del material cuando la superficie se encuentra metalizada o libre, respectivamente. Además, propone la siguiente constante:

$$\Gamma_s \approx \frac{1}{\varepsilon_\infty} \frac{v_f - v_m}{v_f} \quad (2.11)$$

donde

$$\frac{1}{\Gamma_s} = -k_f \left[ \frac{\partial \varepsilon_s(\beta)}{\partial \beta} \right]_{k_f} \quad (2.12)$$

y como se verá más adelante  $\Gamma_s$  está relacionada con la transducción electroacústica de los IDTs.

Otro método que se utiliza para determinar la permitividad efectiva es a través del cálculo de la función de Green. Este método se basa en la relación que existe entre la distribución de carga y el potencial eléctrico, la cual está dada por:

$$\bar{\phi}(\beta) = \bar{G}(\beta, \omega) \bar{\sigma}(\beta) \quad (2.13.a)$$

o en el dominio espacial:

$$\phi(x_1) = G(x_1, \omega) * \sigma(x_1) \quad (2.13.b)$$

donde el operador  $*$  denota la convolución y  $G$  es la función de Green que, de acuerdo a la ecuación (2.9), está dada por:

$$\bar{G}(\beta, \omega) = \frac{1}{|\beta| \varepsilon_s(\beta)} \quad (2.14)$$

Milsom *et al.* [30] han demostrado que la función de Green, para un IDT depositado sobre un material piezoeléctrico, puede estar compuesta por la suma de tres términos:  $G_s(x_1, \omega)$ , corresponde a la excitación de las ondas acústicas superficiales;  $G_e(x_1, \omega)$ , se debe a los efectos electrostáticos y,  $G_b(x_1, \omega)$ , a la excitación de ondas volumétricas. Entonces, es posible escribir la función de Green de la siguiente forma:

$$G(x_1, \omega) = G_e(x_1, \omega) + G_s(x_1, \omega) + G_b(x_1, \omega) \quad (2.15)$$

De acuerdo con Morgan [20] las componentes de la función de Green están dadas por:

$$G_e(x_1) = -\frac{\ln|x_1|}{\pi \varepsilon_\infty} \quad (2.16.a)$$

$$G_s(x_1, \omega) = j\Gamma_s \exp(-jk_f|x_1|) \quad (2.16.b)$$

El término correspondiente a la excitación de las ondas acústicas volumétricas  $G_b(x_1, \omega)$ , generalmente, no puede ser deducido analíticamente, sólo numéricamente. Sin embargo, en algunos dispositivos los efectos de las ondas volumétricas son pequeños en comparación de aquellos producidos por las SAW u ocurren a frecuencias distantes de la frecuencia de operación. En tales casos, es posible despreciar estos efectos.

Substituyendo (2.16) en (2.15), considerando que el término  $G_b(x_1, \omega)$  es despreciable, entonces, la función de Green queda como:

$$G(x_1, \omega) \approx -\frac{\ln|x_1|}{\pi \varepsilon_\infty} + j\Gamma_s \exp(-jk_f|x_1|) \quad (2.17)$$

Obteniendo la transformada de Fourier de (2.17), considerando (2.14) y con las condiciones impuestas por la función de la permitividad efectiva y las funciones de Green, se obtiene:

$$\Gamma_s = \frac{k_m^2 - k_f^2}{2\varepsilon_\infty k_m k_f} \approx \frac{1}{\varepsilon_\infty} \frac{v_f - v_m}{v_f} \equiv \frac{\Delta v / v_f}{\varepsilon_\infty} \quad (2.18)$$

donde las constantes  $v_f$  y  $v_m$  corresponden a las velocidades cuando la superficie del material piezoeléctrico se encuentra libre o metalizada, respectivamente. A la constante  $K^2$  se le conoce como constante de acoplamiento electromecánico y está dada por:

$$K^2 = 2\Delta v / v_f \quad (2.19)$$

Esta constante depende de cada material, su pureza, su cristalinidad y su orientación del material, entre otras cosas.

La ecuación (2.18) concuerda con (2.11), obtenida anteriormente. Además, es posible determinar la permitividad efectiva, la cual está dada por:

$$\varepsilon_s(\beta) = \varepsilon_\infty \frac{\beta^2 - k_f^2}{(|\beta| - k_m)(|\beta| + k_f^2/k_m)} \quad (2.20)$$

Debido a que  $\frac{k_f^2}{k_m} \approx k_m$ , (2.20) es casi idéntica que la aproximación de Ingebrigtsen (2.10).

Como se puede observar de la ecuación (2.18), un parámetro importante a considerar es el coeficiente de acoplamiento electromecánico el cual, como se puede apreciar en (2.19), está dado, principalmente, por la diferencia que existe entre las velocidades de propagación de

las ondas acústicas, cuando la superficie del sustrato, por el cual se propagan, está cortocircuitada y cuando ésta está libre de cualquier interacción eléctrica. En 1968 J.J. Campbell y W.R. Jones [33] propusieron un método que sirve para calcular numéricamente el coeficiente de acoplamiento electromecánico para un determinado material según la orientación de su red cristalina para ondas de Rayleigh. Durante el desarrollo de este trabajo, este método se utilizará como una forma de calcular las velocidades de propagación en los materiales que se han estudiado, por esta razón, a continuación se explica con más detalle en qué consiste este procedimiento. Supóngase que se tiene un sustrato, formado por un semiespacio, cuyas constantes elásticas ( $c_{ijkl}$ ), piezoeléctricas ( $e_{ijk}$ ), permitividad eléctrica ( $\epsilon_{ij}$ ) y densidad del material ( $\rho$ ) son conocidas; además, por encima del sustrato, a una altura  $h_s$ , se encuentra un plano conductor, tal como se muestra en la figura 2.2, de tal forma que se deben de satisfacer las siguientes ecuaciones :

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l \partial x_i} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

$$e_{kij} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l \partial x_i} - \epsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.23)$$

donde las ecuaciones (2.21) y (2.22) están definidas para el sustrato, es decir, para  $x_3 \geq 0$ , mientras que la ecuación (2.23) se debe de satisfacer en la región para la cual  $x_3 < 0$ . Además, como el método está hecho para ondas de Rayleigh, entonces, las ondas mecánicas que satisfacen las ecuaciones anteriores deben ser de la forma:

$$U_i = \beta_i e^{-\alpha \omega x_3 / v_s} e^{i\omega(t - x_1 / v_s)}; i = 1, 2, 3 \quad (2.24)$$

y la función de potencial eléctrico está dada por:

$$\varphi = \beta_4 e^{-\alpha \omega x_3 / v_s} e^{i\omega(t - x_1 / v_s)} \quad (2.25)$$

donde  $\beta_i$  es la magnitud de la onda  $U_i$ ,  $\beta_4$  es la magnitud de la función de potencial eléctrico,  $v_s$  es la velocidad de la onda,  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda y  $\alpha$  es un coeficiente de extinción de las ondas en la dirección  $x_3$ .

Substituyendo (2.24) y (2.25) en las ecuaciones (2.21) y (2.22) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales, homogéneo, en las incógnitas  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  y  $\beta_4$ . Para que haya una solución no trivial, el determinante de este sistema debe ser cero; entonces, se tiene:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

donde  $A_{11} = c_{55}\alpha^2 + 2c_{15}i\alpha - c_{11} + \rho v_s^2$ ,  $A_{12} = c_{45}\alpha^2 + (c_{14} + c_{56})i\alpha - c_{16}$ ,  $A_{13} = c_{35}\alpha^2 + (c_{13} + c_{55})i\alpha - c_{15}$ ,  $A_{14} = e_{35} + (e_{15} + e_{31})i\alpha - e_{11}$ ,  $A_{21} = c_{45}\alpha^2 + (c_{14} + c_{56})i\alpha - c_{16}$ ,  $A_{22} = c_{44}\alpha^2 + 2c_{46}i\alpha - c_{66} + \rho v_s^2$ ,  $A_{23} = c_{34}\alpha^2 + (c_{36} + c_{45})i\alpha - c_{56}$ ,  $A_{24} = e_{34} + (e_{14} + e_{36})i\alpha - e_{16}$ ,  $A_{24} = e_{34} + (e_{14} + e_{36})i\alpha - e_{16}$ ,  $A_{13} = c_{35}\alpha^2 + (c_{13} + c_{55})i\alpha - c_{15}$ ,  $A_{23} = c_{34}\alpha^2 + (c_{36} + c_{45})i\alpha - c_{56}$ ,  $A_{33} = c_{33}\alpha^2 + 2c_{35}i\alpha - c_{55} + \rho v_s^2$ ,  $A_{34} = e_{33} + (e_{13} + e_{35})i\alpha - e_{15}$ ,  $A_{41} = e_{35}\alpha^2 + (e_{15} + e_{31})i\alpha - e_{11}$ ,  $A_{42} = e_{34}\alpha^2 + (e_{14} + e_{36})i\alpha - e_{16}$ ,  $A_{43} = e_{33}\alpha^2 + (e_{13} + e_{35})i\alpha - e_{15}$  y  $A_{44} = -\varepsilon_{33}\alpha^2 - 2\varepsilon_{13}i\alpha + \varepsilon_{11}$ . Los índices de las constantes elásticas y piezoeléctricas pueden ser reducidos a una notación de sólo dos índices p y q ( $c_{ijkl} \rightarrow c_{pq}$  y  $e_{ijk} \rightarrow e_{ip}$ ), donde p y q pueden ser 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 y son equivalentes a 11, 22, 33, 23 ó 32, 13 ó 31 y 12 ó 21, respectivamente.

### Conductor perfecto infinitesimalmente delgado

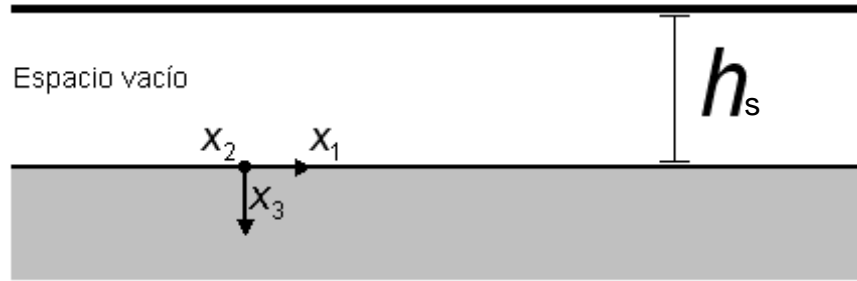


Figura 2.2. En gris, se muestra el semiplano formado por un material piezoeléctrico y, por encima de éste, a una distancia  $h_s$ , un plano conductor perfecto. Entre el plano conductor y el material hay espacio vacío.

Al calcular el determinante (2.26), el resultado es un polinomio de grado 8 en  $\alpha$ . Según el teorema fundamental del álgebra, este polinomio debe tener 8 raíces que, en el caso general, son complejas. Por esta razón, se obtienen 4 pares de raíces complejas y conjugadas. Los valores permitidos de  $\alpha$  son aquellos cuya parte real es positiva, porque la onda acústica debe desaparecer cuando  $x_3$  aumenta. Entonces, ahora se dispone de un conjunto de soluciones para  $x_3 \geq 0$ , dadas para los diferentes valores permitidos de  $\alpha$ , que tienen la siguiente forma:

$$U_i = \sum_{j=1}^4 A^{(j)} \beta_i^{(j)} e^{-\alpha^{(j)} \omega x_3 / v_s} e^{i\omega(t-x_1/v_s)} \quad (2.27)$$

y

$$\varphi = \sum_{j=1}^4 A^{(j)} \beta_4^{(j)} e^{-\alpha^{(j)} \omega x_3 / v_s} e^{i\omega(t-x_1/v_s)} \quad (2.28)$$

Además, para la región comprendida por  $-h_s \leq x_3 \leq 0$ , la función potencial que satisface la ecuación (2.23), la condición de continuidad en la frontera ( $x_3 = 0$ ) y que se hace cero en  $x_3 = -h_s$ , está dada por:

$$\varphi = \sum_{j=1}^4 A^{(j)} \beta_4^{(j)} \operatorname{csch}\left(\frac{\omega h}{v_s}\right) \sinh\left(\frac{\omega(x_3+h)}{v_s}\right) e^{i\omega(t-x_1/v_s)} \quad (2.29)$$

Por otro lado, en cada punto de la superficie del cristal se deben de satisfacer las condiciones mecánicas de frontera que son:

$$T_{3j} \Big|_{x_3=0} = c_{3jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{k3i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{x_3=0} = 0 \quad (2.30)$$

Además, dado que también debe satisfacerse la continuidad del desplazamiento eléctrico a través de la frontera, entonces:

$$D_3^+ = D_3^- \quad (2.31)$$

Substituyendo (2.27) y (2.28) en (2.30) y (2.31), se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\sum_{j=1}^4 \left[ \beta_1^{(j)} [ic_{15} + \alpha^{(j)} c_{55}] + \beta_2^{(j)} [ic_{56} + \alpha^{(j)} c_{45}] + \beta_3^{(j)} [ic_{55} + \alpha^{(j)} c_{35}] + \beta_4^{(j)} [ie_{15} + \alpha^{(j)} e_{35}] \right] A^{(j)} = 0 \quad (2.32)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left[ \beta_1^{(j)} [ic_{14} + \alpha^{(j)} c_{45}] + \beta_2^{(j)} [ic_{46} + \alpha^{(j)} c_{44}] + \beta_3^{(j)} [ic_{45} + \alpha^{(j)} c_{34}] + \beta_4^{(j)} [ie_{14} + \alpha^{(j)} e_{34}] \right] A^{(j)} = 0 \quad (2.33)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left[ \beta_1^{(j)} [ic_{13} + \alpha^{(j)} c_{33}] + \beta_2^{(j)} [ic_{36} + \alpha^{(j)} c_{34}] + \beta_3^{(j)} [ic_{35} + \alpha^{(j)} c_{33}] + \beta_4^{(j)} [ie_{13} + \alpha^{(j)} e_{33}] \right] A^{(j)} = 0 \quad (2.34)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left[ \beta_1^{(j)} [ie_{31} + \alpha^{(j)} e_{35}] + \beta_2^{(j)} [ie_{36} + \alpha^{(j)} e_{34}] + \beta_3^{(j)} [ie_{35} + \alpha^{(j)} e_{33}] - \beta_4^{(j)} \left[ i\varepsilon_{15} + \alpha^{(j)} \varepsilon_{35} + \varepsilon_0 \operatorname{coth}\left(\frac{\omega h_s}{v_s}\right) \right] \right] A^{(j)} = 0 \quad (2.35)$$

En el caso en que  $h_s = 0$ , la ecuación (2.35) debe reemplazarse por:

$$\sum_{j=1}^4 \beta_4^{(j)} A^{(j)} = 0 \quad (2.36)$$

De la misma forma que en el caso anterior, para que este sistema homogéneo tenga una solución no trivial es necesario que su determinante sea cero. Entonces, este determinante se convierte en la ecuación trascendente que se debe resolver para encontrar  $v_s$ . Además, con la solución de la velocidad es posible calcular las  $A^{(j)}$ . De esta forma se resuelve el problema y es posible encontrar una velocidad de propagación de las ondas acústicas superficiales en función de la altura a la cual se encuentra el plano conductor. Además, es

posible rotar las constantes elásticas, piezoelectricas y de permitividad eléctrica utilizando la siguiente matriz de rotación:

$$V = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_e)\cos(\gamma_e) - \sin(\alpha_e)\cos(\beta_e)\sin(\gamma_e) & \sin(\alpha_e)\cos(\gamma_e) + \cos(\alpha_e)\cos(\beta_e)\sin(\gamma_e) & \sin(\beta_e)\sin(\gamma_e) \\ -\cos(\alpha_e)\sin(\gamma_e) - \sin(\alpha_e)\cos(\beta_e)\cos(\gamma_e) & -\sin(\alpha_e)\sin(\gamma_e) + \cos(\alpha_e)\cos(\beta_e)\cos(\gamma_e) & \sin(\beta_e)\cos(\gamma_e) \\ \sin(\alpha_e)\cos(\beta_e) & -\cos(\alpha_e)\cos(\beta_e) & \cos(\beta_e) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

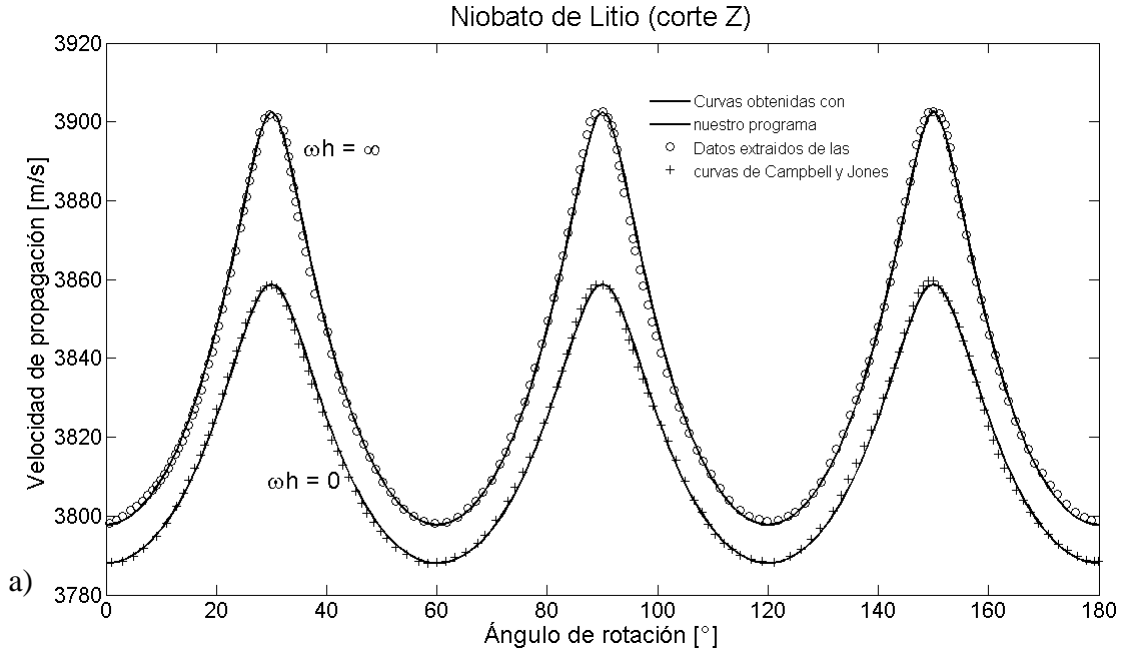
donde  $\alpha_e$ ,  $\beta_e$  y  $\gamma_e$  son los ángulos de Euler. Por ejemplo, para rotar las constantes elásticas, piezoelectricas y de permitividad eléctrica, respectivamente, se aplican las siguientes expresiones:

$$c'_{ijkl} = \sum_{r,s,t,u=1}^3 V_{ir}V_{js}V_{kt}V_{lu}c_{rstu} \quad (2.38)$$

$$e'_{ijk} = \sum_{r,s,t,u=1}^3 V_{ir}V_{js}V_{kt}e_{rst} \quad (2.39)$$

$$\varepsilon'_{ij} = \sum_{r,s=1}^3 V_{ir}V_{js}\varepsilon_{rs} \quad (2.40)$$

Un ejemplo de aplicar este método ha sido reportado por Campbell y Jones [33]. Como una forma de probar nuestro desarrollo del proceso en MATLAB, se repitió el trabajo realizado por Campbell y Jones y se obtuvieron los resultados mostrados en la figura 2.3. Para hacer una mejor comparación entre ambos resultados, se utilizó el programa *plotreader* [34] para extraer los puntos de la figura original como puntos coordinados y, de esta forma, sobreponerlos en la figura 2.3.



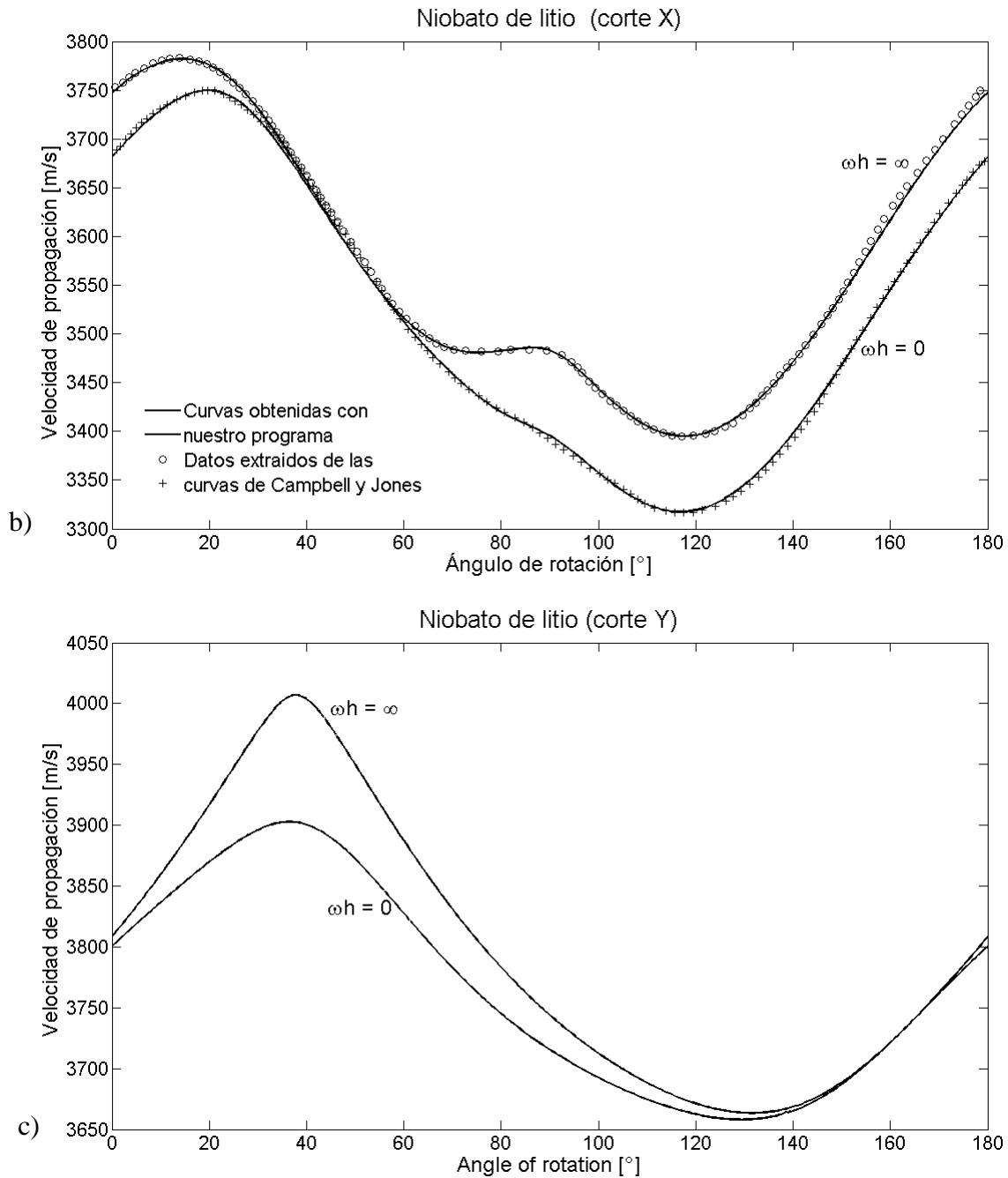


Figura 2.3. Curvas de velocidad de propagación a) corte Z, b) corte X y c) corte Y. Al producto  $\omega h$  se le conoce como frecuencia normalizada. El trazo superior corresponde a  $\omega h = \infty$ , es decir, la placa se encuentra a una distancia infinita. El trazo inferior corresponde al caso de  $\omega h = 0$ , cuando el plano conductor se encuentra sobre el sustrato. Las líneas continuas corresponden a los resultados obtenidos con el programa desarrollado en MATLAB, las marcas corresponden a los datos extraídos del trabajo de Campbell y Jones. [33]

Si se comparan los trazos de las figuras 2.3.a y 2.3.b se observa que ambas coinciden. Esto indica que los programas computacionales realizados para obtener la velocidad de propagación, basados en el método propuesto por Campbell y Jones [33], son satisfactorios. Durante algunas corridas que se realizaron con el método de Campbell y Jones se observó que para algunos materiales el método no converge, en este caso, no pueden propagarse ondas de Rayleigh bajo esas condiciones. Sin embargo, esto no significa que no exista algún tipo diferente de ondas acústicas superficiales. Además, Campbell y Jones también han estudiado sobre las pérdidas de energía acústica al encontrarse el substrato en contacto con algún fluido, mostrando que para el caso del aire estas pérdidas son despreciables [35]; este resultado justifica utilizar el método original en lugar de aquel otro que considera la presencia de un fluido.

Por otro lado, se ha demostrado que el método de Campbell y Jones puede extenderse al caso en el que la estructura por la cual se propagarán las ondas está compuesta de un substrato, piezoeléctrico o no piezoeléctrico, y una o más películas delgadas [36, 37, 38, 39] piezoeléctricas o no piezoeléctricas. Para este caso, las ondas que se propagan por este medio se vuelven dispersivas y aparecen varios modos de vibración (tipos de ondas). En la figura 2.4, se muestran las velocidades de propagación para cuatro modos<sup>2</sup> en una estructura formada por  $\text{LiNbO}_3$ /Diamante y se comparan con los datos extraídos de la figura reportada por Shikata et al. [39]. En este caso, se consideró que el niobato de litio tiene una orientación dada en ángulos de Euler de 30, 80 y 60; el diamante tiene una orientación (100)[001]. En la figura 2.4 se observa que los datos obtenidos son muy semejantes que aquellos reportados previamente.

Trabajar con una configuración de una o más películas y un substrato donde éstas se depositan, podría tener ventajas debido a que, dependiendo de los materiales utilizados, se pueden lograr velocidades de propagación más altas y coeficientes de acoplamiento electromecánicos más grandes; además, es posible trabajar con el modo 0 (ondas Rayleigh) o con un modo superior (ondas Sezawa). Esto resulta en dispositivos que trabajan a frecuencias más altas. Sin embargo, una clara desventaja es que la fabricación de este tipo de estructuras es más complicada porque se deben de caracterizar bien los procesos por medio de los cuales se fabrican las películas de cada uno de los materiales y se deben de obtener las constantes elásticas, piezoeléctricas y la permitividad eléctrica de cada uno de los materiales en películas.

---

<sup>2</sup> El modo cero se conoce como onda de Rayleigh y, en la figura 2.5, se encuentra más pegado a los ejes. A los modos superiores se les llama ondas Sezawa.



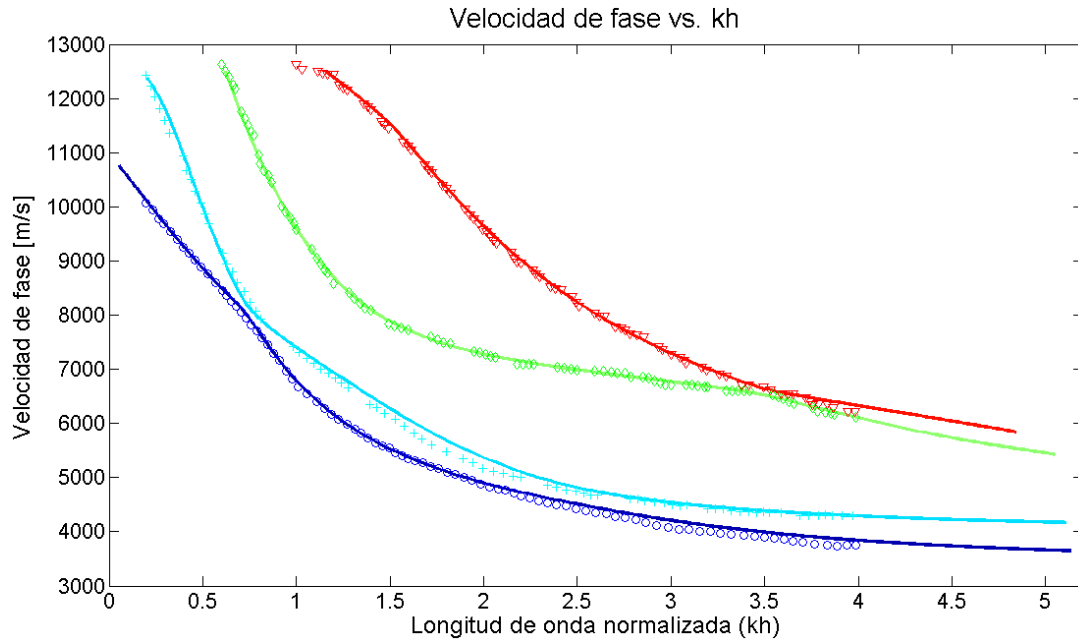


Figura 2.4. Resultados obtenidos con los programas computacionales desarrollados. Las marcas en la figura corresponden a los puntos extraídos de la figura de Shikata *et al.* [39]. Comparando ambos resultados, ambos son muy semejantes.

Ahora que se ha encontrado la forma de aproximar la permitividad efectiva del material y su relación con la función de Green, es indispensable encontrar la distribución de carga presente en los electrodos interdigitales. Para hacerlo se han propuesto diversos métodos, algunos basados en una aproximación quasi-estática (aproximación expuesta anteriormente) [20, 29, 32, 40, 41, 42, 43] o en otros autoconsistentes como, por ejemplo: Hartmann y Secret [28] proponen un método iterativo en el que por medio de la transformada de Fourier se relacionan el potencial eléctrico y el desplazamiento eléctrico y, conociendo este último encontrar la distribución de carga en la superficie; Biryukov y Polevoi [44] obtienen una solución polinomial donde los coeficientes deben ser determinados numéricamente; y el método numérico propuesto por Milsom [30], en el que se subdivide a cada electrodo para obtener la densidad de carga. Los métodos autoconsistentes son más exactos que los que se basan en una aproximación quasi-estática y, con ellos, es posible calcular la distribución de carga en transductores interdigitales con geometrías irregulares, sin embargo, estos son más complicados que los primeros y para geometrías regulares es posible encontrar su distribución de carga eléctrica por medio de expresiones matemáticas cerradas. Engan [41, 43] ha propuesto un método para calcular la densidad de carga eléctrica y la capacitancia por unidad de longitud para un periodo de un transductor interdigital simple que de acuerdo con Hashimoto [45] están dadas por:

$$q(x_1) = V \frac{c_s}{\sqrt{\cos(4\pi x_1/p_l) - \cos(2\pi w_e/p_l)}} \frac{2\sqrt{2}}{p_l P_{-1/2}\{\cos(2\pi w_e/p_l)\}} \quad (2.41)$$

y para cada periodo de un transductor interdigital con electrodos dobles:

$$q(x_1) = V \frac{C_s \cos(2\pi x_1/p_I)}{\sqrt{-\cos(8\pi x_1/p_I) - \cos(4\pi w_e/p_I)}} \frac{2}{p_I P_{-1/4}\{\cos(4\pi w_e/p_I)\}} \quad (2.42)$$

donde  $C_s$  es la capacitancia estática de periodo de un transductor interdigital y está dada por:

$$C_s = W_{idt} \varepsilon(\infty) \frac{P_{-1/2}\{\cos(2\pi w_e/p_I)\}}{P_{-1/2}\{\cos(-2\pi w_e/p_I)\}} \quad (2.43)$$

y para un periodo de un transductor interdigital con electrodos dobles, esta capacitancia está dada por:

$$C_s = \sqrt{2} W_{idt} \varepsilon(\infty) \frac{P_{-1/4}\{\cos(4\pi w_e/p_I)\}}{P_{-1/4}\{\cos(-4\pi w_e/p_I)\}} \quad (2.44)$$

donde  $W_{idt}$  es la apertura de un transductor interdigital,  $p_I$  es el periodo espacial de un transductor interdigital,  $w_e$  es el ancho de un sólo electrodo dentro de un periodo de un IDT y  $P_\nu(x)$  es la función de Legendre. Según Erdelyi [46], ésta última puede evaluarse usando una expansión de la forma:

$$P_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m, \text{ para } |x| \leq 1 \quad (2.45)$$

donde

$$a_m = \frac{(m-1-\nu)(m+\nu)(1-x)}{2m^2} a_{m-1} \quad (2.46)$$

y  $a_0 = 1$ .

Se sabe que para  $\nu = -1/2$ ,  $P_\nu(x)$  está relacionada con la integral elíptica por medio de la siguiente expresión:

$$P_{-1/2}(x) = 2 K(m)/\pi, \quad m = \sqrt{(1-x)/2} \quad (2.47)$$

donde  $K(m)$  es la integral elíptica completa de primer tipo. Por otro lado, la fórmula de Mehler-Dirichlet dice que:

$$P_\nu(\cos\Delta) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\exp[j(v+1/2)\phi]}{\sqrt{\cos\phi - \cos\Delta}} d\phi, \text{ para } 0 < \Delta < \pi \quad (2.48)$$

Entonces, las funciones de Legendre presentes en las ecuaciones (2.41) a la (2.44) pueden calcularse con (2.45) y (2.46) o con (2.48). Además, para (2.41) y (2.43) se puede utilizar (2.47). Como una alternativa a utilizar funciones de Legendre, Hartmann [47] ha propuesto algunas aproximaciones matemáticas para el cálculo de algunos parámetros importantes de los IDT's.

Una vez que se ha determinado la distribución de carga en el IDT, es posible calcular la corriente que entra al transductor. Supóngase que la densidad total de carga está dada por la suma:

$$\sigma(x, \omega) \approx \sigma_e(x, \omega) + \sigma_a(x, \omega) \quad (2.49)$$

donde  $\sigma_a(x, \omega)$  es una pequeña contribución debida al efecto piezoeléctrico en presencia de una onda acústica. El potencial en la superficie está dado por la ecuación (2.13.b) y substituyendo en ésta la ecuación (2.49), se tiene:

$$\phi(x) = [G_e(x, \omega) + G_s(x, \omega)] * \sigma_e(x) + [G_e(x, \omega) + G_s(x, \omega)] * \sigma_a(x) \quad (2.50)$$

Sin embargo, el término  $G_s(x, \omega) * \sigma_a(x)$  es pequeño y se puede despreciar, es decir:

$$\phi(x) = [G_e(x, \omega) + G_s(x, \omega)] * \sigma_e(x) + G_e(x, \omega) * \sigma_a(x) \quad (2.51)$$

Si por definición,  $\phi_e(x)$  está dado como:

$$\phi_e(x) = G_e(x, \omega) * \sigma_e(x) \quad (2.52)$$

y se sabe que en las regiones donde se encuentra presente un electrodo se debe satisfacer  $\phi(x) = \phi_e(x)$ ; entonces (2.51) se convierte en:

$$G_s(x, \omega) * \sigma_e(x) + G_e(x, \omega) * \sigma_a(x) = 0 \quad (2.53)$$

Entonces, el potencial debido a las ondas acústicas está dado por:

$$-\phi_a(x_j, \omega) = [G_e(x, \omega) * \sigma_a(x, \omega)]_{x_j} \quad (2.54)$$

Utilizando (2.54) es posible calcular  $\sigma_a(x)$  a partir de  $\sigma_e(x)$ . Conociendo ambas es posible calcular la corriente que entra a un electrodo n, que está dada por:

$$I_n = j\omega W \int_n [\sigma_e(x, \omega) + \sigma_a(x, \omega)] dx \quad (2.55)$$

Como puede observarse en (2.55), la corriente en los electrodos tiene dos componentes: una debida al término acústico y otra de origen electrostático.

Si la corriente total en el IDT es  $I_t$ , que es igual a la suma de las corrientes que entran a cada uno de los electrodos que forman el transductor, y  $V_t$  es el voltaje aplicado al transductor interdigital; entonces, la admitancia del dispositivo está dada por la relación  $Y_t = I_t/V_t$ . La admitancia del IDT puede expresarse como [47]:

$$Y_t(\omega) = G_a(\omega) + jB_a(\omega) + j\omega C_t \quad (2.56)$$

$C_t$  es la capacitancia del transductor,  $G_a(\omega)$  y  $B_a(\omega)$  son, respectivamente, la conductancia acústica y la susceptancia acústica del transductor. Estos términos son la parte real e

imaginaria de las contribuciones debidas a la densidad de carga  $\sigma_a(x, \omega)$ . Si a  $Y_t(\omega)$  se le aplica la transformada de Fourier inversa, entonces se obtiene una función  $y_t(t)$  que debe ser real. Por tanto,  $G_a(\omega)$  debe ser simétrica, es decir,  $G_a(\omega) = G_a(-\omega)$  y  $B_a(\omega)$  debe ser antisimétrica,  $-B_a(\omega) = B_a(-\omega)$ . Por definición, la corriente en el transductor interdigital debido a la carga  $\sigma_a(x, \omega)$  es:

$$I_a = [G_a(\omega) + jB_a(\omega)] V_t \quad (2.57)$$

y, además, se sabe que el potencial acústico  $\phi_a$  está dado por [20]:

$$\phi_a(x, \omega) = \frac{1}{2} j \Gamma_s e^{-jk_f x} [\bar{\sigma}_e(-k_f, \omega) + jF(-k_f)/\pi] + \frac{1}{2} j \Gamma_s e^{jk_f x} [\bar{\sigma}_e(k_f, \omega) - jF(k_f)/\pi] \quad (2.58)$$

donde la función  $F(\beta)$  está definida como:

$$F(\beta) = \bar{\sigma}_e(k_f, \omega) * \frac{\exp(-j\beta x)}{\beta} \quad (2.59)$$

Es posible demostrar que los términos  $\bar{\sigma}_e(\pm k_f, \omega)$  generan la conductancia acústica  $G_a(\omega)$  del transductor, mientras que los términos relacionados con  $F(\beta)$  son responsables de la susceptancia acústica  $B_a(\omega)$ . De acuerdo con Morgan [20], la conductancia acústica  $G_a(\omega)$  está dada por:

$$G_a(\omega) = \omega W_{idt} \Gamma_s |\bar{\rho}_e(k_f)|^2 \quad (2.60)$$

donde  $\bar{\rho}_e(\beta)$  es la transformada de Fourier de  $\rho_e(x)$  y está definida como:

$$\sigma_e(x) = V_t \rho_e(x) \quad (2.61)$$

La susceptancia acústica está dada por:

$$B_a(\omega) = -\frac{\omega W_{idt} \Gamma_s}{\pi} \left[ |\bar{\rho}_e(k_f)|^2 * \frac{1}{k_f} \right] \quad (2.62)$$

Por otro lado, se sabe que la transformada de Hilbert de una función se obtiene por medio de la convolución con  $1/\pi\omega$  y, además,  $k_f = \omega/v_m$ , entonces:

$$B_a(\omega) = G_a(\omega) * \frac{-1}{\pi\omega} \equiv -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_a(\omega')}{\pi(\omega-\omega')} d\omega' \quad (2.63)$$

Según Morgan [20], a pesar de que el resultado fue obtenido por medio de una aproximación electrostática, éste es en realidad mucho más general. La prueba general se basa en el hecho de que la relación entre  $I_t$  y  $V_t$  debe ser causal y, por tanto, la parte real e imaginaria de  $Y_t(\omega)$  están relacionadas a través de la transformada de Hilbert [48, 49]. Los resultados planteados anteriormente permiten formular un modelo del IDT, el cual se tratará en los párrafos siguientes.

A lo largo del tiempo se han propuesto diferentes modelos para los transductores interdigitales, algunos de ellos son: 1. el modelo de Mason [50, 51], que se muestra en la figura 2.5, y sus modificaciones para poder incluir algunos efectos de segundo orden, como reflexiones mecánicas, efectos de almacenamiento de energía, entre otros [52, 53]. 2. El modelo de funciones delta [54, 55], que consiste en considerar un impulso en cada electrodo o en cada borde de los electrodos (ver figura 2.6) y permite relacionar al transductor interdigital con un filtro transversal que utiliza como factor de peso la apertura de los transductores interdigitales [56, 57]; por lo tanto, con este método se pueden diseñar filtros pasivos SAW que tienen una respuesta en frecuencia bien determinada, utilizando las técnicas para diseño de filtros transversales si sólo uno de los dos transductores interdigitales está apodizado, si ambos lo están, entonces, es necesario hacer algunas consideraciones adicionales [20]. 3. La matriz P [58, 59, 20], que considera a un dispositivo acústico como un tripuerto formado por dos terminales acústicas y una eléctrica en donde las terminales acústicas están representadas por una matriz S de tamaño 2x2, el puerto eléctrico está determinado con una admitancia que relaciona la corriente y el voltaje y los otros elementos de esta matriz que son términos relacionados con la conversión de energía eléctrica en energía acústica y viceversa. 4. El modelo K es una variante del modelo anterior [60]. 5. El modelo de modos acoplados (COM), propuesto por Pierce [61], ha sido aplicado en diferentes áreas [62], como: óptica, microondas y dispositivos SAW [63, 64], entre otros. Este método es una herramienta matemática que sirve para la descripción de la propagación de ondas en sistemas acoplados, por esta razón, Suzuki *et al.* [65] y Haus [66] lo introdujeron al modelado de dispositivos SAW. Sin embargo, este modelo sólo es exacto si se conocen todos los parámetros COM, los cuales se determinan utilizando métodos como BEM (Boundary element method), FEM (Finite element method) o una combinación de ambos [67, 68, 69, 70, 71].

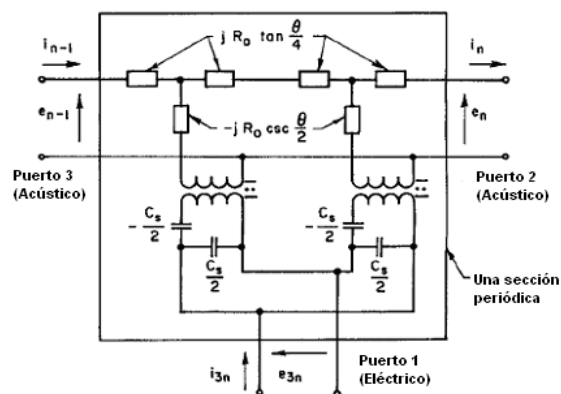


Figura 2.5. Circuito equivalente de Mason para un período de un transductor interdigital [51].

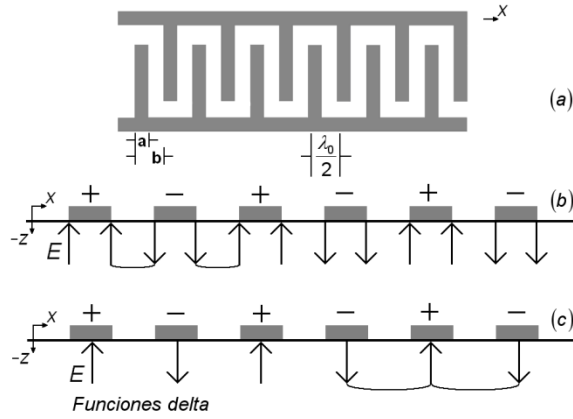


Figura 2.6. a) Representación sencilla de un transductor interdigital formado por electrodos simples. b) Funciones impulso ubicadas en cada uno de los bordes de los electrodos, dependiendo de la polaridad del electrodo es el sentido del impulso. c) Simplificación de b), utilizando una sola función impulso en lugar de dos. [54]

### Modelo de funciones delta

Según Tancrell y Holland [55], la función de transferencia de un dispositivo SAW, formado por dos transductores interdigitales, donde cada una de las funciones delta se ubican en los bordes de cada uno de los electrodos, tal como se muestra en la figura 2.6.b, siendo  $x_n$  y  $y_n$  las distancias desde el origen para las funciones impulso del primer y del segundo IDT, respectivamente, puede estimarse como:

$$H(f) = \frac{V_o(f)}{V_i(f)} = \sum_n \sum_m C_{nm} I_n I_m \exp\left(j(x_n - y_n) \frac{2\pi f}{v_f}\right) \quad (2.64)$$

donde los coeficientes  $I_n$  e  $I_m$  tienen una magnitud y fase proporcional al gradiente del campo eléctrico en cada uno de los bordes y  $C_{nm}$  es igual a  $C_{nm} = \min(a(x_n), b(x_n))$ .  $a(x_n)$  y  $b(x_n)$  son términos que indican la apertura de cada uno de los electrodos. La ecuación (2.64) corresponde al caso general, es decir, ambos transductores pueden estar o no apodizados. Sin embargo, dependiendo de la apertura de los IDT's, existen diversas simplificaciones para la ecuación (2.64), para mayores detalles se recomienda consultar [55, 54, 45].

### Ecuaciones *coupled-on-mode* (COM)

De acuerdo con Chen y Haus [72], las ecuaciones COM están dadas por:

$$\frac{dA_1}{dx} = -j\delta_f A_1(x) + c_{12} A_2(x) + \alpha_1 V(x) \quad (2.65.a)$$

$$\frac{dA_2}{dx} = -j\delta_f A_2(x) + c_{12}^* A_1(x) + \alpha_1^* V(x) \quad (2.65.b)$$

$$\frac{dI}{dx} = 2\alpha_1^* A_1(x) - 2\alpha_1 A_2(x) + j\omega CV(x) \quad (2.65.c)$$

donde  $A_1(x)$  y  $A_2(x)$  están definidos de tal manera que  $|A_n(x)|^2/2$  es la potencia de la onda acústica. A  $\delta_f$  se le conoce como parámetro de desafinación y está dado por:

$$\delta_f = k_e - m_g k_g \quad (2.66)$$

donde  $k_g$  es el número de onda a la frecuencia central. Debido a que el producto  $m_g k_g$  puede ser un armónico del número de onda  $k_g$ , entonces,  $m_g$  es un número entero. Para la frecuencia fundamental se tiene que:

$$k_g = \pi/p_l \quad (2.67)$$

Además,  $c_{12}$  es el coeficiente de reflexión de una tira metálica,  $\alpha_1$  es el coeficiente de transducción y \* indica complejo conjugado.

### Matriz P

La matriz P es una matriz de dispersión, modificada de tal manera que se incluyen los fenómenos de transducción, es decir, la conversión de energía eléctrica en acústica y viceversa y, además, incluye un término que es la admitancia del puerto eléctrico. La definición de esta matriz está dada por [58]:

$$\begin{bmatrix} A_{t1} \\ A_{t2} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ V \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

donde  $A_i$  son las ondas que inciden sobre ambos puertos acústicos,  $A_t$  son las ondas que se alejan de los puertos acústicos, V es el voltaje que se aplica sobre el puerto eléctrico e I es la corriente que entra a dicho puerto. Los subíndices 1 y 2 de  $A_i$  y de  $A_t$ , se refieren al puerto acústico 1 o al puerto acústico 2, tal como se aprecia en la figura 2.7.

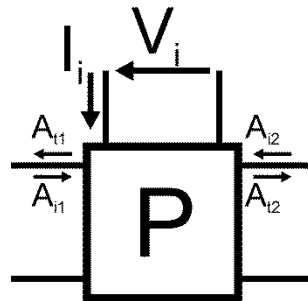


Figura 2.7. Representación de una matriz P, en la que se distinguen dos puertos acústicos y el puerto eléctrico.

Debido al carácter general de las matrices P y a que, como se verá más adelante, es posible obtener una matriz P teórica para los transductores interdigitales, es importante profundizar en el análisis de circuitos formados por diversas matrices P. A continuación se reproduce el método general para incorporar dispositivos acústicos desde un punto de vista eléctrico a través de la matriz de admitancias Y [73].

Supóngase un dispositivo SAW descrito mediante n matrices P, conectadas a través de sus puertos acústicos, tal como se muestra en la figura 2.8. Según la teoría del análisis de circuitos eléctricos, la definición de las corrientes que entran al sistema en cada uno de los n puertos en función del voltaje en cada uno de éstos está dada por:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \dots + Y_{1n}V_n \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \dots + Y_{2n}V_n \\ &\vdots \\ I_n &= Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + \dots + Y_{nn}V_n \end{aligned} \quad (2.69)$$

La ecuación (2.69) en forma matricial queda como:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

donde cada uno de los coeficientes de la matriz Y, puede calcularse de la siguiente forma:

$$Y_{ij} = \left. \frac{I_i}{V_j} \right|_{V_k=0} \quad \text{donde } k = 1, 2, \dots, n \text{ y } k \neq j \quad (2.71)$$

Se considera el siguiente procedimiento para obtener cada uno de los términos de la matriz Y del sistema.

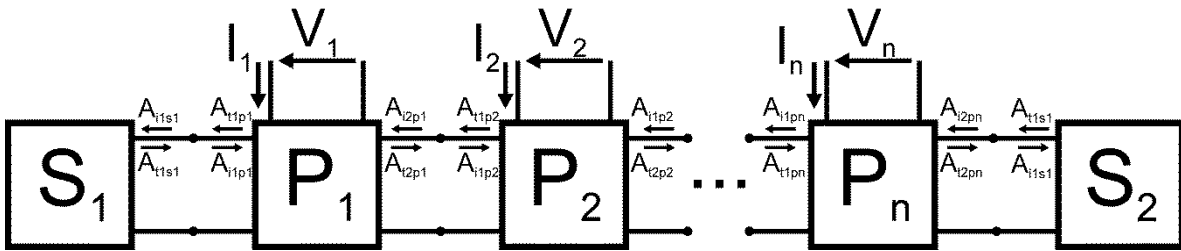


Figura 2.8. Esquema general de un dispositivo SAW.

*Caso I (i = j)*

Las expresiones para las matrices P conectadas en cascada han sido reportadas con anterioridad [74, 45]. Si se tienen dos matrices P<sub>A</sub> y P<sub>B</sub> conectadas en cascada, entonces, las expresiones completas para obtener una matriz P equivalente son:



$$P_{11} = P_{11}^A + P_{11}^B \left( \frac{P_{12}^A P_{21}^A}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \right) \quad (2.72.a)$$

$$P_{12} = \frac{P_{12}^A P_{12}^B}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \quad (2.72.b)$$

$$P_{13} = P_{13}^A + P_{12}^A \left( \frac{P_{13}^B + P_{23}^A P_{11}^B}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \right) \quad (2.72.c)$$

$$P_{21} = \frac{P_{21}^A P_{21}^B}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \quad (2.72.d)$$

$$P_{22} = P_{22}^B + P_{22}^A \left( \frac{P_{21}^B P_{12}^B}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \right) \quad (2.72.e)$$

$$P_{23} = P_{23}^B + P_{21}^B \left( \frac{P_{23}^A + P_{13}^B P_{22}^A}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \right) \quad (2.72.f)$$

$$P_{31} = P_{31}^A + P_{21}^A \left( \frac{P_{31}^B + P_{31}^A P_{11}^B}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \right) \quad (2.72.g)$$

$$P_{32} = P_{32}^B + P_{12}^B \left( \frac{P_{32}^A + P_{31}^B P_{22}^A}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \right) \quad (2.72.h)$$

$$P_{33} = P_{33}^A + P_{33}^B + \frac{P_{32}^A (P_{13}^B + P_{23}^A P_{11}^B) + P_{31}^B (P_{23}^A + P_{13}^B P_{22}^A)}{1 - P_{11}^B P_{22}^A} \quad (2.72.i)$$

Para calcular  $Y_{ii}$  para el circuito de la figura (2.8), puesto que todos los voltajes en los demás puertos eléctricos del resto de las matrices P son cero, entonces, las matrices que están alrededor de  $i$  deben reducirse utilizando las expresiones (2.72) hasta obtener un circuito equivalente tal como se muestra en la figura 2.9. De este modo  $Y_{ii}$  está dada por:

$$Y_{ii} = P_{31}^i k_1 + P_{32}^i k_2 + P_{33}^i \quad (2.73)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  están dadas por:

$$k_1 = \frac{P_{12}^i P_{23}^i r_1 r_2 - P_{13}^i r_1 (P_{22}^i r_2 - 1)}{(P_{11}^i r_1 - 1)(P_{22}^i r_2 - 1) - P_{21}^i P_{12}^i r_1 r_2} \quad (2.74)$$

y

$$k_2 = \frac{P_{21}^i P_{13}^i r_1 r_2 - P_{23}^i r_2 (P_{11}^i r_1 - 1)}{(P_{11}^i r_1 - 1)(P_{22}^i r_2 - 1) - P_{21}^i P_{12}^i r_1 r_2} \quad (2.75)$$

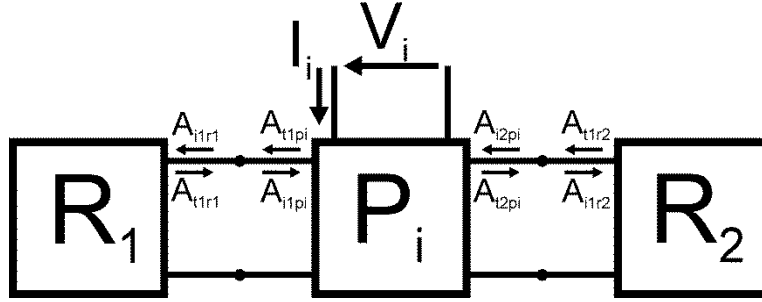


Figura 2.9. Circuito equivalente para el cálculo de  $Y_{ii}$ .

Debido a que todos los puertos eléctricos del dispositivo se encuentran cortocircuitados, no hay otras fuentes de ondas acústicas, sólo aquella descrita por la matriz  $P_i$ , entonces,  $A_{i2pi} = r_2 A_{t2pi}$  y  $A_{i1pi} = r_1 A_{t1pi}$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  son los coeficientes de reflexión ( $P_{11}$  o  $P_{22}$  según sea el caso) de las matrices equivalentes R1 y R2.  $k_1$  y  $k_2$  están relacionadas con la transducción de las ondas acústicas reflejadas por R1 y R2 hacia el puerto eléctrico, por medio de  $P_{31}^i$  y de  $P_{32}^i$ , respectivamente. Además, se puede demostrar que  $\lim_{r_1, r_2 \rightarrow 0} k_1 = 0$  y  $\lim_{r_1, r_2 \rightarrow 0} k_2 = 0$ , entonces,  $Y_{ii} = P_{33}^i$  si  $r_1, r_2 \rightarrow 0$ .

*Caso 2 ( $j = i + 1$ )*

Para este caso es necesario, utilizando las ecuaciones para matrices P en cascada, transformar el circuito de la figura 2.8 en el mostrado en la figura 2.10. Para lograr esto es necesario reducir todas las matrices que se encuentren a la izquierda de  $i$  y a la derecha de  $j$  utilizando recursivamente las expresiones (4). Una vez que se ha obtenido el circuito equivalente de la figura 2.9, es posible calcular  $Y_{ij}$  utilizando la expresión:

$$Y_{ij} = \frac{h_1 h_2 (h_3 P_{13}^j - P_{12}^j P_{23}^j) + h_4 (P_{12}^j P_{23}^j - h_3 P_{13}^j)}{h_1 h_3 - P_{21}^j P_{12}^j} \quad (2.76)$$

donde  $h_1, h_2, h_3$  y  $h_4$  están dadas por:

$$h_1 = P_{11}^j - \frac{1 - r_1 P_{11}^i}{P_{22}^i + r_1 (P_{21}^i P_{12}^i - P_{11}^i P_{22}^i)} \quad (2.77.a)$$

$$h_2 = P_{32}^i - \frac{P_{31}^i P_{22}^i}{P_{21}^i} \quad (2.77.b)$$

$$h_3 = P_{22}^j - \frac{1}{r_2} \quad (2.77.c)$$

$$h_4 = P_{11}^j P_{32}^i + \frac{P_{31}^i}{P_{21}^i} (1 - P_{11}^j P_{22}^i) \quad (2.77.d)$$

En el caso de que  $r_1, r_2 \rightarrow 0$ , se puede demostrar que:

$$\lim_{r_1, r_2 \rightarrow 0} Y_{ij} = \frac{P_{32}^i P_{13}^j}{1 - P_{11}^j P_{22}^i} \quad (2.78)$$

La ecuación (2.78) coincide con otro resultado menos general y que fue reportado con anterioridad [20]. Por otro lado, para calcular  $Y_{ji}$  se aplican las ecuaciones (2.76), (2.77) y (2.78) con las siguientes consideraciones: los superíndices  $i$  se reemplazan por  $j$  y viceversa; los subíndices 1 se reemplazan por 2 y viceversa; y los subíndices 3 se mantienen en su misma posición. En este caso es claro el efecto que tienen las reflexiones de las ondas acústicas sobre  $Y_{ij}$  y  $Y_{ji}$ .

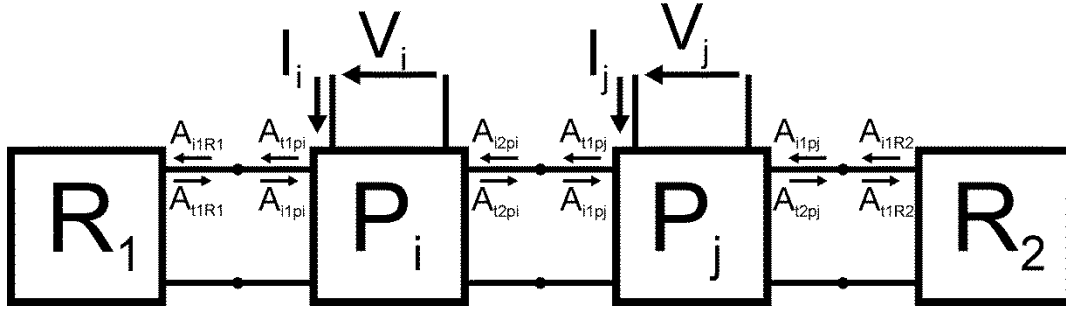


Figura 2.10. Circuito equivalente para el cálculo de  $Y_{ij}$  si  $j = i + 1$ .

*Caso 3 ( $j > i + 1$ )*

Este caso se presenta cuando entre los dos elementos que tienen los puertos eléctricos  $i$  y  $j$  de interés, hay una matriz  $P$  equivalente con su puerto eléctrico cortocircuitado, tal como se muestra en la figura 2.11. Una vez que el circuito de la figura 2.8 ha sido reducido, entonces, es posible calcular  $Y_{ij}$  según la siguiente expresión:

$$Y_{ij} = \frac{(m_1 m_2 - m_3)(P_{12}^j P_{23}^j - m_4)}{P_{21}^j P_{12}^j - m_2 m_4} \quad (2.79)$$

donde  $m_1, m_2, m_3$  y  $m_4$  están dadas por:

$$m_1 = m_6 P_{12}^k - \frac{m_5 P_{22}^k}{P_{21}^k} \quad (2.80.a)$$

$$m_2 = P_{11}^j + \frac{m_8}{m_7 P_{21}^k} \quad (2.80.b)$$

$$m_3 = m_1 P_{11}^j + \frac{m_5}{P_{21}^k} \quad (2.80.c)$$

$$m_4 = P_{22}^j - \frac{1}{r_2} \quad (2.80.d)$$

y

$$m_5 = m_6 P_{11}^k + \frac{P_{31}^i}{P_{21}^i} \quad (2.80.e)$$

$$m_6 = P_{32}^i - \frac{P_{31}^i P_{22}^i}{P_{21}^i} \quad (2.80.f)$$

$$m_7 = m_9 P_{12}^k - \frac{m_8 P_{22}^k}{P_{21}^k} \quad (2.80.g)$$

$$m_8 = m_9 P_{11}^k + \frac{m_{10}}{P_{21}^k} \quad (2.80.h)$$

$$m_9 = P_{12}^i - \frac{m_{10} P_{22}^i}{P_{21}^i} \quad (2.80.i)$$

$$m_{10} = P_{11}^i - \frac{1}{r_1} \quad (2.80.j)$$

Es importante hacer notar que para el cálculo de  $Y_{ij}$ , según la definición, debe cumplirse que  $V_i = 0$ , sin embargo, no es posible reducir la matriz  $i$  con las matrices  $P$  adyacentes ( $P_k$  o  $R_1$ ) debido a que la corriente que debe encontrarse es  $I_i$  y, si se hiciera la reducción de la matriz  $P_i$ , la corriente resultante sería la suma de las corrientes que fluyen a través de todos los puertos eléctricos que fueron reducidos. Por esta razón, es necesario incluir este caso en el método. Si se desea calcular  $Y_{ji}$ , se aplica el procedimiento indicado en el caso 2.

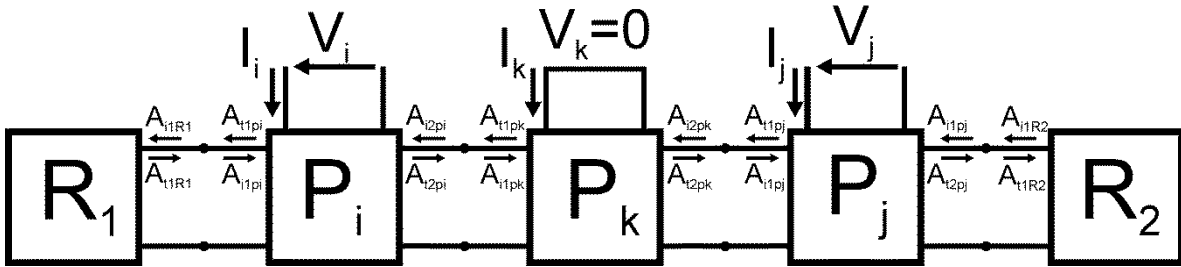


Figura 2.11. Circuito equivalente para el cálculo de  $Y_{ij}$  si  $j > i + 1$ .

A continuación se presentan algunas otras formas de conectar las matrices  $P$ , por ejemplo: se estudia la admitancia de entrada de una matriz  $P$  cuando, en el puerto eléctrico, se conecta otra matriz de impedancias; la forma en que la admitancia de entrada se modifica debido a las reflexiones (ondas acústicas que inciden sobre los puertos acústicos) y se analiza una configuración formada por dos matrices  $P$  cuyos puertos eléctricos están conectados.

*Conexión de una matriz  $Y$  al puerto eléctrico de una matriz  $P$ .*

Supongamos que se desea acoplar la terminal eléctrica de un dispositivo SAW, representado por una matriz  $P$ , a un circuito representado por una matriz  $Y$ , tal como se muestra en la figura 2.12. La admitancia de entrada del circuito está dada por:

$$Y_A = \frac{I_A}{V_A} = \frac{Y_{11}(Y_{22}+P_{33})-Y_{21}Y_{12}+Y_{11}(k_1P_{31}+k_2P_{32})}{Y_{22}+P_{33}+k_1P_{31}+k_2P_{32}} \quad (2.80)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  están dadas por las ecuaciones (2.74) y (2.75), respectivamente. Si  $r_1, r_2 \rightarrow 0$ , entonces:

$$\lim_{r_1, r_2 \rightarrow 0} Y_A = Y_{11} - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{22}+P_{33}} \quad (2.81)$$

Por otro lado, si se reduce el circuito de la figura 2.12 a uno como el de la figura 2.7; entonces, los coeficientes de la nueva matriz P están dados por:

$$P_{11} = P_{11}^i - \frac{P_{13}^i P_{31}^i}{Y_{22}+P_{33}^i} \quad (2.82.a)$$

$$P_{12} = P_{12}^i - \frac{P_{13}^i P_{32}^i}{Y_{22}+P_{33}^i} \quad (2.82.b)$$

$$P_{13} = l_1 P_{13}^i \quad (2.82.c)$$

$$P_{21} = P_{21}^i - \frac{P_{23}^i P_{31}^i}{Y_{22}+P_{33}^i} \quad (2.82.d)$$

$$P_{22} = P_{22}^i - \frac{P_{23}^i P_{32}^i}{Y_{22}+P_{33}^i} \quad (2.82.e)$$

$$P_{23} = l_1 P_{23}^i \quad (2.82.f)$$

$$P_{31} = l_2 P_{31}^i \quad (2.82.g)$$

$$P_{32} = l_2 P_{32}^i \quad (2.82.h)$$

$$P_{33} = Y_{11} - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{22}+P_{33}^i} \quad (2.82.i)$$

donde

$$l_1 = \frac{-Y_{12}}{Y_{22}+P_{33}^i} \quad (2.83)$$

$$l_2 = \frac{Y_{21}P_{33}^i}{Y_{22}(Y_{22}+P_{33}^i)} - \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad (2.84)$$

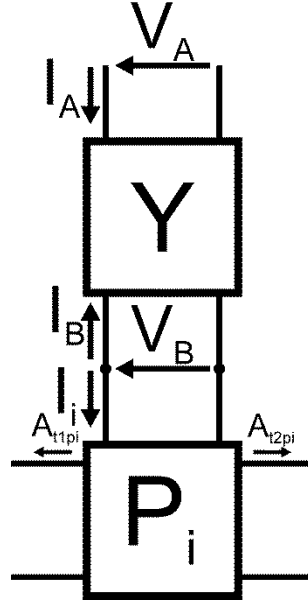


Figura 2.12. Acoplamiento del puerto eléctrico de una matriz P a un circuito de matriz Y.

*Conexión de dos matrices P por medio de sus puertos eléctricos*

Si se conectan los puertos eléctricos de dos matrices P, tal como se muestra en la figura 2.13 e inciden sobre los puertos acústicos de la matriz P\_B dos ondas A\_{i1B} y A\_{i2B}, entonces, las ondas acústicas que salen de la matriz P\_A están dadas por:

$$A_{t1A} = -\frac{P_{13}^A(P_{31}^B A_{i1B} + P_{32}^B A_{i2B})}{P_{33}^A + P_{33}^B} \quad (2.85)$$

$$A_{t2A} = -\frac{P_{23}^A(P_{31}^B A_{i1B} + P_{32}^B A_{i2B})}{P_{33}^A + P_{33}^B} \quad (2.86)$$

Anteriormente se mencionó que la matriz P es un modelo general y, por tanto, puede ser aplicada a dispositivos que puedan representarse con una terminal eléctrica y dos acústicas como los IDTs. Según Morgan [20], los elementos que conforman la matriz P que describe el comportamiento de un IDT sin pérdidas y no reflector<sup>3</sup> son:

$$P_{11} = P_{22} = 0 \quad (2.87.a)$$

$$P_{12} = P_{21} = \exp(-jkL_{idt}) \quad (2.87.b)$$

$$P_{13} = -P_{31}/2 = j\rho_e(k)\sqrt{\omega W_{idt}\Gamma_s/2} \exp(-jkL_{idt}/2) \quad (2.87.c)$$

$$P_{23} = -P_{32}/2 = j\rho_e(-k)\sqrt{\omega W_{idt}\Gamma_s/2} \exp(-jkL_{idt}/2) \quad (2.87.d)$$

<sup>3</sup> Un transductor interdigital no reflector es aquel que estando cortocircuitado no refleja las ondas acústicas que inciden sobre él.

$$P_{33} = Y_t(\omega) = G_a(\omega) + jB_a(\omega) + j\omega C_t \quad (2.87.e)$$

donde  $G_a(\omega)$  es la conductancia del IDT;  $B_a(\omega)$  es una parte de la susceptancia del IDT y, como ya se mencionó anteriormente, está relacionada, a través de la transformada de Hilbert, con  $G_a(\omega)$ ;  $C_t$  es la capacitancia del IDT;  $L_{idt}$  es la longitud del IDT; y  $\rho_e(k)$  es la transformada de Fourier de la distribución espacial de carga eléctrica cuando se aplica 1 [V] al IDT. Además, según Morgan [20], los coeficientes de la matriz P para un IDT uniforme están dados por:

$$P_{11} = -c_{12}^* \sin(sL_{idt})/D \quad (2.88.a)$$

$$P_{12} = P_{21} = s \exp(-jk_c L_{idt})/D \quad (2.88.b)$$

$$P_{22} = c_{12} \sin(sL_{idt}) \exp(-2jk_c L_{idt})/D \quad (2.89.c)$$

$$P_{31} = -2P_{13} = \{2\alpha_1^* \sin(sL_{idt}) - 2sK_2 [\cos(sL_{idt}) - 1]\}/D \quad (2.88.d)$$

$$P_{32} = -2P_{23} = \exp(-jk_c L_{idt}) \{-2\alpha_1 \sin(sL_{idt}) - 2sK_1 [\cos(sL_{idt}) - 1]\}/D \quad (2.88.e)$$

$$P_{33} = -K_1 P_{31} - K_2 P_{32} \exp(jk_c L_{idt}) + 2(\alpha_1^* K_1 - \alpha_1 K_2) L_{idt} + j\omega C_t \quad (2.88.f)$$

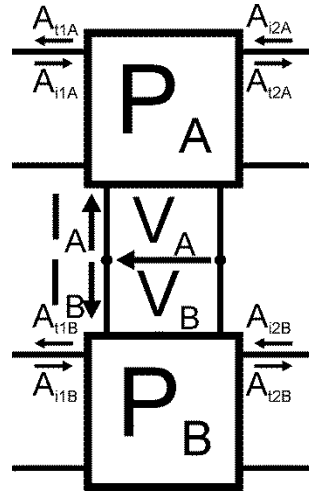


Figura 2.13. Conexión de dos matrices P a través de sus puertos eléctricos.

De acuerdo con Hashimoto [64], la dificultad de utilizar el modelo COM radica en que la estimación de los parámetros del modelo puede ser complicada e imprecisa, lo cual se debe a que éstos pueden variar según el método y las condiciones de fabricación. Por otra parte, debido a que hay muchas fluctuaciones en las condiciones que intervienen en el proceso de fabricación de un dispositivo SAW, el control de estos parámetros se dificulta, además, las simulaciones que se pueden hacer para estimarlos, podrían ser inexactas debido a que durante las simulaciones no hay manera de considerar todas las fluctuaciones presentes.

Entonces, lo que se hace comúnmente es fabricar primero el dispositivo y, después, calcular los parámetros del modelo COM.

## 2.2 Diseño de la línea de retardo

Una vez que se ha tratado muy brevemente la teoría referente a los dispositivos SAW, se explicarán las necesidades que deben resolverse con este dispositivo y, después, las consideraciones que se utilizaron para diseñar y fabricar la línea de retardo.

La línea de retardo se diseñó pensando en la aplicación final, es decir, en un microacelerómetro SAW-MEMS; por esta razón dicha línea debe trabajar a una frecuencia relativamente baja. Aquí se ha considerado que la altura a la que debe de colocarse la microestructura debe ser tal que modifique el campo eléctrico asociado a las ondas acústicas y, por tanto, cambie la velocidad de propagación de las ondas en la línea de retardo. En la figura 2.14, se muestra una curva de velocidad de propagación con respecto a la altura normalizada, calculada con el método de Campbell y Jones [33]. Diversos autores han medido las constantes elásticas, piezoeléctricas y de permitividad eléctrica del niobato de litio [75, 76, 77, 78, 79, 80]; sin embargo, para este trabajo se utilizaron aquellas obtenidas del trabajo de Smith y Welsh [76]. Se sabe que la frecuencia normalizada está definida como el producto de la frecuencia de la señal por la altura a la que se encuentra el plano conductor, entonces, para que haya un cambio suficiente para ser detectado es necesario trabajar en una región con una frecuencia normalizada menor a 100 [m/s]; este hecho limita la altura a la cual puede colocarse la microestructura. Por ejemplo, a 76 MHz, la altura de la microestructura es de aproximadamente 1.32  $\mu\text{m}$  para una frecuencia normalizada de 100 [m/s]. La solución a este problema es trabajar a una frecuencia relativamente baja, sin embargo, se sabe que la frecuencia principal de un transductor interdigital está dada por:

$$f = \frac{v_f}{\lambda_{saw}} \quad (2.89)$$

donde  $\lambda_{saw}$  es la longitud de onda de la SAW y  $v_f$  es la velocidad cuando la superficie está libre. Por otra parte, si se desea que éste opere en el tono fundamental, la longitud de onda puede considerarse como el periodo espacial del transductor interdigital. Entonces, de la expresión (2.89), puede observarse que a menor frecuencia de operación, mayor será el tamaño del transductor interdigital y, por tanto, el tamaño de la línea de retardo. Ahora se hace clara la existencia de un compromiso entre el tamaño del dispositivo y la altura a la cual se debe colocar la microestructura, estableciéndose que: si el dispositivo opera a frecuencias más altas, éste será más pequeño y la microestructura deberá colocarse más cerca de la superficie; por el contrario, si se opera a frecuencias bajas, el dispositivo será más grande y la distancia a la que se puede colocar la microestructura será mayor. Una limitación adicional, que debe de considerarse al diseñar la geometría, es que MEMSCAP



[81], la empresa con la que se fabricaron las microestructuras, puede cortar los dados de silicio donde se construyeron las microestructuras en cuadrados con dimensiones de 0.5 mm por lado. Entonces, la línea de retardo debe ser lo suficientemente larga para que el dado pueda colocarse sobre su superficie y, entonces, la microestructura pueda modificar el campo eléctrico asociado a las ondas acústicas.

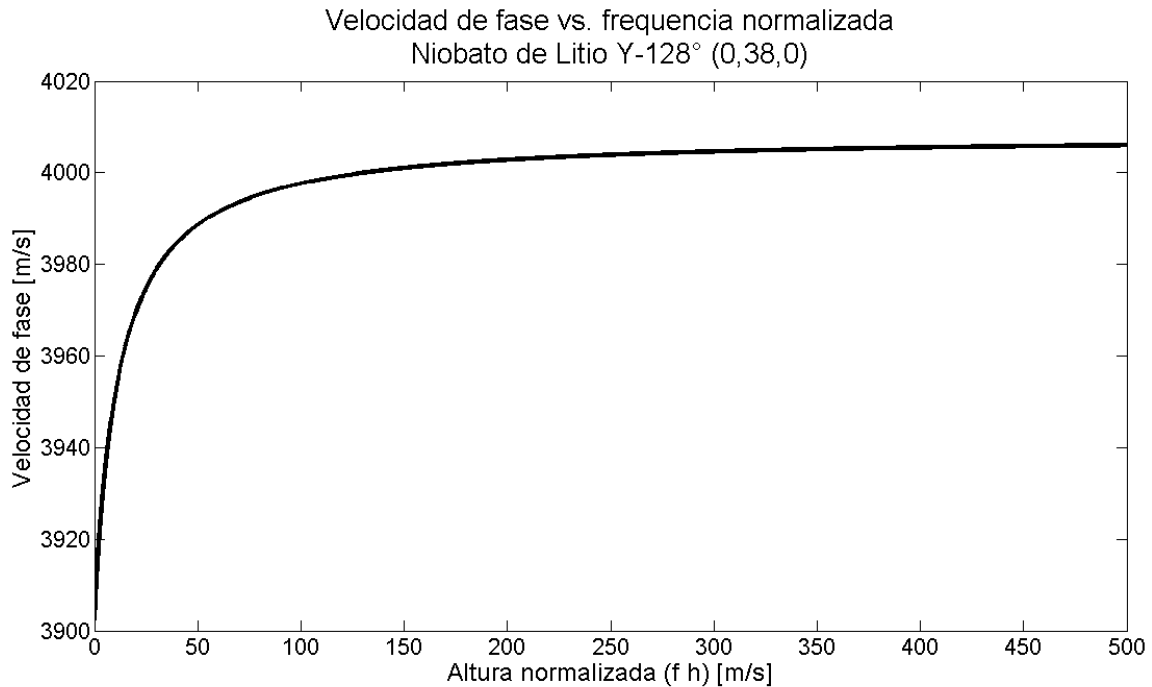


Figura 2.14. Curva de altura normalizada vs. velocidad de propagación para niobato de litio con una orientación cristalina de Y-128°.

De acuerdo con Zhang et al. [82], la orientación cristalina para la cual el niobato de litio tiene el mayor coeficiente de acoplamiento electromecánico está dada, en ángulos de Euler, por (0, 41.5, 0); sin embargo, no es posible encontrar obleas de niobato de litio con esta orientación cristalina. Comercialmente existen el niobato de litio en corte Y-128°, el cual es ampliamente utilizado en este tipo de aplicaciones y presenta los ángulos de Euler: (0, 38, 0). Según los resultados obtenidos teóricamente, la velocidad de propagación de las ondas acústicas cuando la superficie del niobato de litio Y-128° se encuentra metalizada es  $v_m = 3902.306 [m/s]$  y cuando ésta se encuentra libre es  $v_f = 4006.998 [m/s]$ . Utilizando la ecuación (2.19), el coeficiente de acoplamiento electromecánico para este material es  $K^2 = 0.05225$ . Esto hace al niobato de litio Y-128° un buen material para esta aplicación. Se estableció como frecuencia de operación del dispositivo los 76 MHz. Se sabe bien que los electrodos sencillos en un transductor interdigital producen reflexiones de las SAW debido a la carga mecánica (peso y esfuerzos residuales de las películas metálicas) de los electrodos sobre la superficie y una forma de reducir este inconveniente es utilizando electrodos dobles [20]; por esto, se seleccionaron electrodos dobles para los IDT's que

conforman la línea de retardo. Para una frecuencia de 76 MHz y una velocidad  $v_f$ , la longitud de onda es:  $\lambda_{saw} = 52.76 \mu m$  y, redondeando a la unidad, el periodo para un par de electrodos dobles es de  $p_{elec} = 53 \mu m$ . Por otro lado, se sabe que la relación de metalización, es decir, la relación que hay entre el ancho de los electrodos individuales y el espacio que hay entre cada uno, es importante porque esto determina la respuesta en frecuencia, en particular, el tipo de armónicos que el transductor genera [41, 83, 84, 85]. Para este caso se decidió utilizar una razón de metalización de 0.5, con la cual se sabe que el transductor interdigital de electrodos dobles responde a la frecuencia fundamental y al tercer armónico. Por otra parte, se sabe que mientras más pares de electrodos tenga un transductor interdigital su respuesta en frecuencia es más estrecha; por lo tanto, para que el IDT tuviera un ancho de banda de alrededor de 2 MHz, se utilizaron 40 pares de electrodos dobles. Además, se decidió fabricar, con la misma máscara, otras líneas de retardo sobre un sustrato Y-41°, cuyas obleas también están disponibles comercialmente y se utilizan comúnmente para la fabricación de dispositivos SAW. Se sabe que en este corte el tipo de ondas predominantes son *leaky* SAW, las cuales son ondas parecidas a las de Rayleigh con la diferencia de que no está confinada por completo en la superficie y penetra en el medio. Estas ondas presentan una mayor velocidad y un mayor acoplamiento electromecánico en comparación con las ondas de Rayleigh.

Adicionalmente, se agregaron electrodos para posar el dado sobre el cual se fabricó la microestructura, los cuales, por su geometría, no son acústicamente activos. Estos electrodos tienen una doble función: la primera es que, debido al grosor de la película que forma a estos electrodos, la microestructura no se encuentra en contacto directo con la superficie, es decir se encuentra suspendida sobre dicha superficie y, la segunda es que al establecer contactos eléctricos entre la microestructura y el sustrato, permiten actuar electrostáticamente con la barra. En la figura 2.15 se muestra una reproducción de la máscara que se dibujó para poder fabricar la línea de retardo.

El fabricante de la línea de retardo es una empresa alemana especializada en la fabricación de dispositivos SAW, llamada SAWComponents [86]. Se acordó con el fabricante que esta película metálica estaría compuesta por una capa de titanio con un espesor de 20 nm y otra capa de aluminio de 500 nm de espesor y, por último, se aplicaron técnicas convencionales de fotolitografía para reproducir el patrón de la figura 2.15 y hacer la máscara utilizada durante la fabricación. El fabricante caracterizó el espesor de las películas utilizando el equipo SPECTRO XLAB 2000 y sus resultados indican que la película depositada sobre la oblea con orientación Y-128° tiene un espesor de 528.6 nm y la oblea con orientación Y-41° tiene un espesor de 510.2 nm. Además, utilizaron un equipo  $\mu$ TEC 3000 para medir, por medios ópticos, el ancho de los electrodos y la distancia desde un electrodo hasta el otro, obteniendo la media y la desviación estándar, para los dispositivos SAW's fabricados con niobato de litio Y-128° y Y-41°, que se muestran en la tabla 2.1.

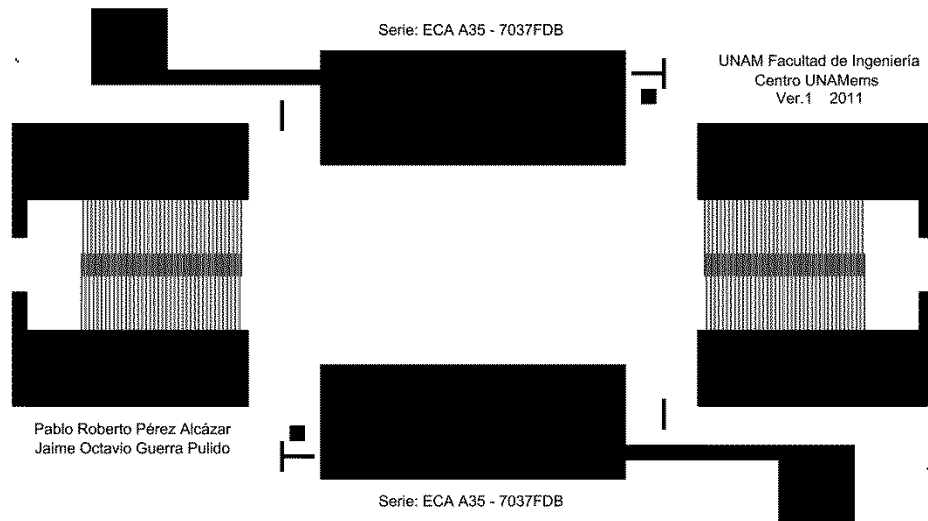


Figura 2.15. Mascara utilizada para la fabricación de la línea de retardo. La línea de retardo tiene forma de paralelogramo y las siguientes dimensiones: 1.6 cm de largo, 0.8 cm de ancho, 0.5 mm de espesor y 1.8 cm de extremo a extremo. En los extremos se pueden distinguir los IDT's y, en el centro, se encuentran los electrodos destinados al montaje del chip.

Material	Ancho de electrodos (Media [ $\mu\text{m}$ ], Desviación estándar [ $\mu\text{m}$ ])	Ancho de electrodos y hueco (Media [ $\mu\text{m}$ ], Desviación estándar [ $\mu\text{m}$ ])
Y-128°	(6.618, 0.027)	(13.251, 0.006)
Y-41°	(6.690, 0.026)	(13.251, 0.002)

Tabla 2.1. Media y desviación estándar de los anchos de los electrodos y del espacio entre ambos.

### 2.3 Caracterización de la línea de retardo

Después de la fabricación de un dispositivo es importante conocer sus propiedades, características y determinar si como resultado final se obtuvo un dispositivo apto para operar como se desea. Por esta razón fue necesario realizar diversas pruebas como: difracción de rayos X, microscopía electrónica de barrido (SEM), microscopía de fuerza atómica (AFM) y la medición de los parámetros S de la línea de retardo fabricada. A continuación se trata con mayor detalle sobre cada una de las pruebas y los resultados obtenidos. En las figuras 2.16 se observan algunas microfotografías obtenidas de los dispositivos fabricados.

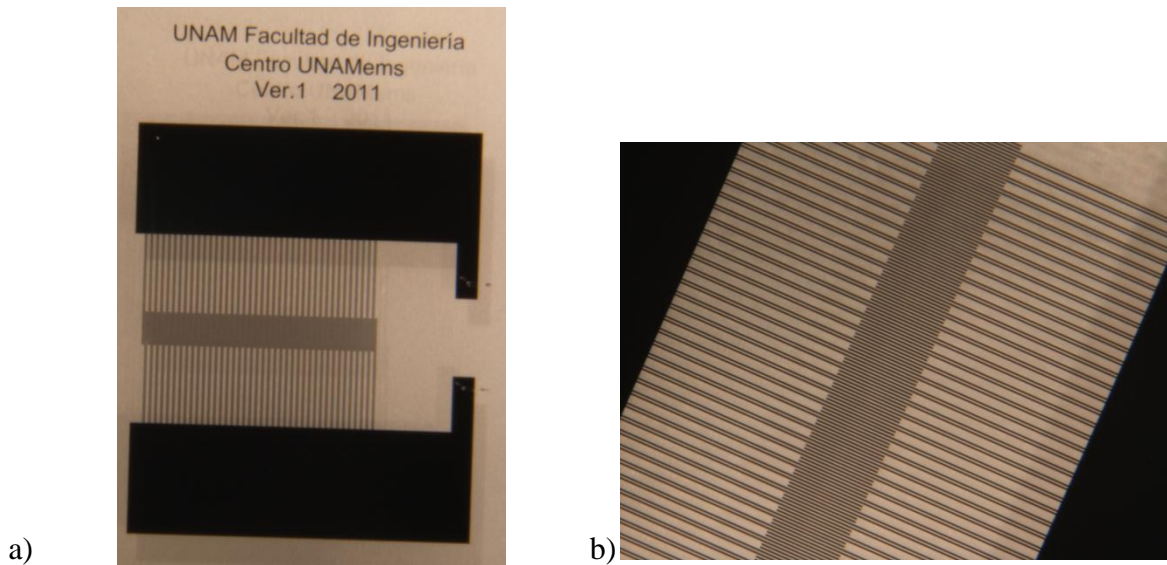


Figura 2.16. Microfotografías del dispositivo fabricado. a) Vista superior del transductor interdigital y b) acercamiento de los transductores interdigitales.

### 2.3.1 Difracción de rayos X

La técnica de difracción de rayos X permite estudiar y analizar materiales a través de los rayos X. Los rayos X interactúan con los átomos por que la longitud de onda de los rayos X es del mismo orden que los radios atómicos, entonces, cuando incide sobre un átomo un haz de rayos X, pueden suceder dos cosas: que algún electrón del átomo se desprenda o el rayo X se desvíe, es decir, se difracta. Por medio de la difracción de rayos X es posible conocer sobre la estructura cristalina del material en estudio. Para profundizar acerca de la difracción de rayos X y de sus técnicas se recomienda leer los libros de Klug y Alexander [87] y de Warren [88].

Los estudios de difracción de rayos X se realizaron en el Instituto de Investigaciones en Materiales de la Universidad Nacional Autónoma de México en el mes de agosto del año 2012. La M.C. Adriana Tejeda Cruz estuvo a cargo de los estudios y de elaborar el reporte con los resultados obtenidos de cada una de las pruebas. A continuación se hace una descripción de las pruebas realizadas, se reproducen las curvas obtenidas y se interpretan los resultados.

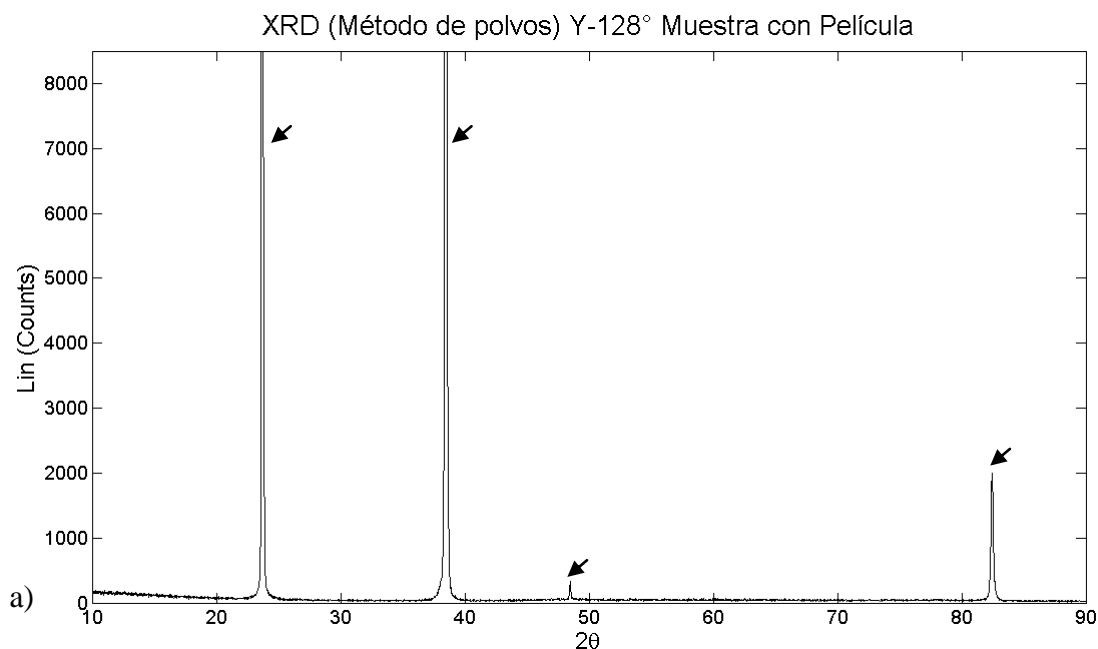
Se tomó como muestra un pedazo de un extremo de la oblea con orientación Y-128<sup>o4</sup>. En uno de sus lados, éste se encuentra cubierto por completo por la película metálica que en las líneas de retardo forma a los transductores interdigitales. En la otra cara de la muestra no hay ningún otro material presente. Se hicieron las pruebas en ambas caras de la muestra. Los métodos utilizados fueron: método de polvos y método de haz rasante.

<sup>4</sup> Se descartó utilizar la oblea con orientación Y-41° porque previamente se observó que ambos espectros son iguales.

Los equipos que se utilizaron son:

- Difractómetro de polvos Bruker D8 Advance con detector de área PSC-VANTEC-1, radiación  $\text{CuK}_{\alpha 1}$ , monocromador primario de Ge, con los *softwares*: Diffplus 2005, usando la base de datos ICDD PDF-2W 2009 (PDF, es el acrónimo de *Powder Diffraction File*).
- Difractómetro de polvos Siemens D500 adaptado a técnica de haz rasante con detector de centelleo, radiación  $\text{CuK}_{\alpha 1}$ , monocromador secundario de grafito, con los *softwares*: Diffplus 2005, usando la base de datos ICDD PDF-2 2009.

En las figuras 2.17 y 2.18 se muestran los resultados obtenidos para la muestra de niobato de litio con y sin película por los métodos de polvos y de haz rasante, respectivamente. En cada figura se señala a qué elemento corresponde cada una de las señales obtenidas.



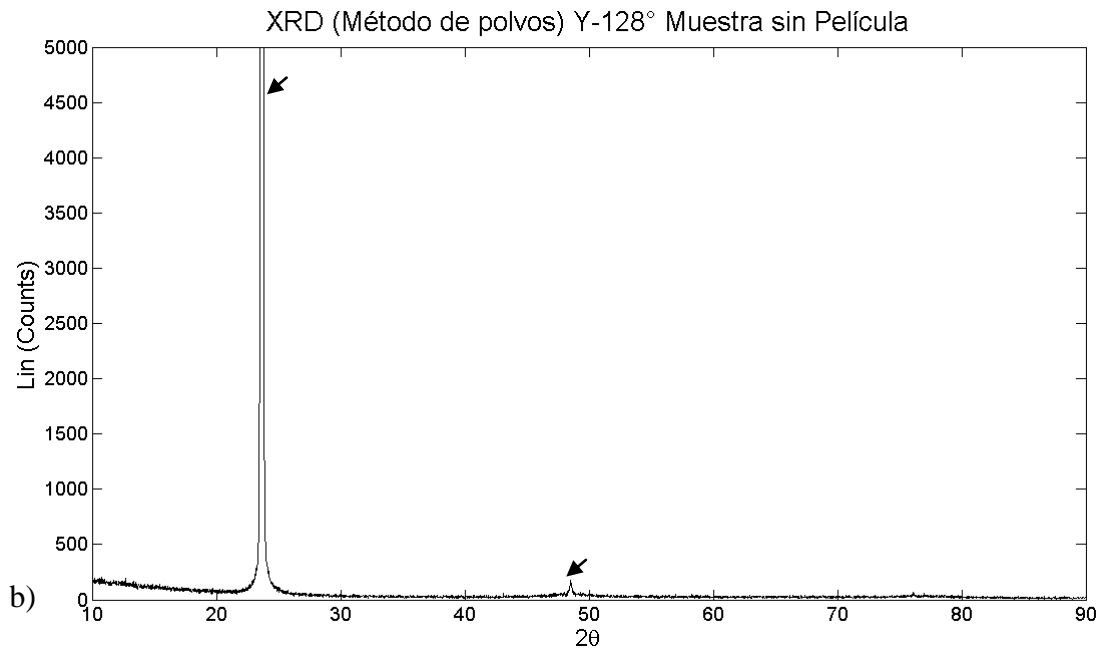
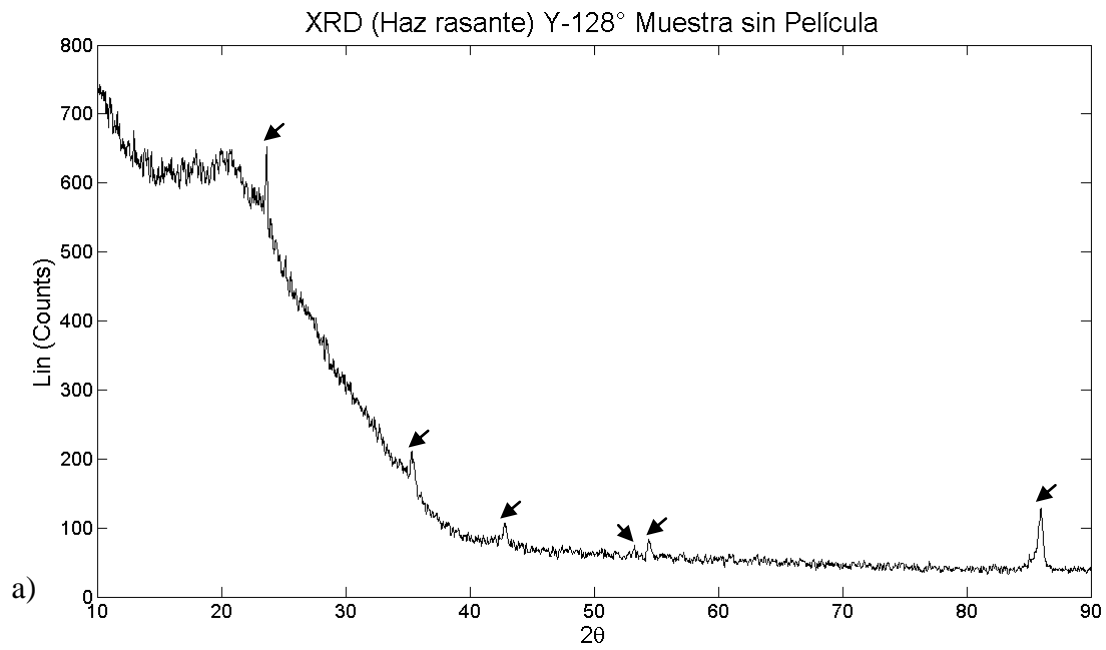


Figura 2.17. Resultados de la difracción de rayos X obtenidos por el método de polvos. a) con película y b) sin película.



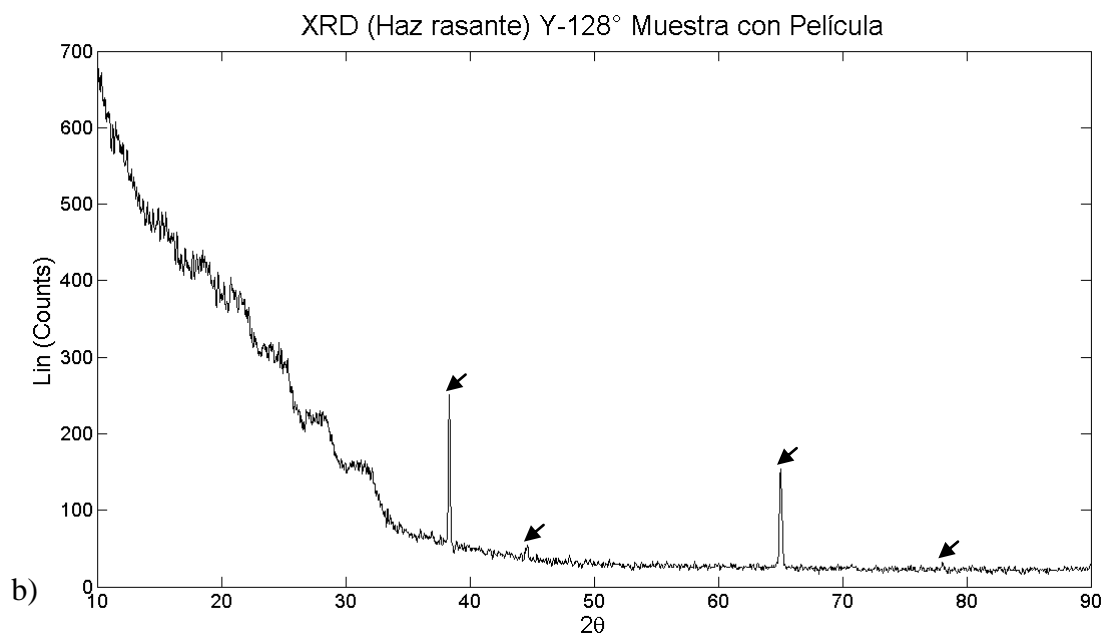


Figura 2.18. Resultados de la difracción de rayos X obtenidos por el método de haz rasante. a) con película y b) sin película.

En la tabla 2.2 se hace un resumen de los picos que se observan en las figuras 2.17 y 2.18.

$2\theta$ [°]	Figura 2.17.a	Figura 2.17.b	Figura 2.18.a	Figura 2.18.b	Observaciones
23.7	LNB (012)	LNB (012)	LNB (012)	-----	
34.8	-----	-----	LNB (110)	-----	
38.4	Al (111), Ti(110)		-----	Al (111), Ti(110)	
42.5	-----	-----	LNB (202)	-----	
44.74	-----	-----	-----	Al (200)	
48.5	LNB (024)	LNB (024)	-----	-----	
53.2	-----	-----	LNB (116)	-----	
54.8	-----	-----	LNB (211)	-----	*
65.1	-----	-----	-----	Al (220)	
78.2				Al (311)	
82.4	Al (222), Ti (220)	-----	-----	-----	
86.0	-----	-----	LNB (315)	-----	

Tabla 2.2. Resumen de los resultados obtenidos con XRD. Para aluminio se utilizó la abreviatura “Al”, para titanio “Ti” y para niobato de litio “LNB”. \*Esta señal se encuentra retrasada  $0.4^\circ$  del pico más cercano, sin embargo, no fue posible relacionarla con ningún otro material.

Después de haber analizado los resultados obtenidos y de haber identificado cada uno de los picos, se puede concluir que existe suficiente evidencia para asegurar que la muestra se encuentra formada por niobato de litio y una película de aluminio. Debido a que los picos ubicados a  $38.4^\circ$  y a  $82.4^\circ$  coinciden para el aluminio y el titanio y a que no se encontró

ninguna otra señal característica del titanio no se puede afirmar por este medio que este elemento se encuentra presente. Esto podría deberse a que el espesor de la película, que es de aproximadamente 20 nm, no es suficiente para difractar los rayos X con una intensidad tal para ser detectada. Por último, se observó una señal en  $54.4^\circ$  y, según la base de datos utilizada, el pico más cercano se encuentra en  $54.8^\circ$ , lo cual hace suponer que el pico en  $54.4^\circ$  corresponde a este último, además, no fue posible relacionarlo con algún otro material.

### 2.3.2 Microscopía electrónica de barrido

En la microscopía electrónica de barrido (SEM) se utiliza un haz de electrones para obtener una imagen de la superficie de una muestra. Se realizó la SEM sobre la línea de retardo con la finalidad de poder apreciar con mayor detalle los transductores interdigitales y medir los electrodos y los huecos entre cada uno de ellos. Para hacer la microscopía se utilizó un equipo JEOL JSM-5600LV que se encuentra en el Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se realizó la prueba sin ninguna preparación previa de la muestra. En la figura 2.19 se muestra una ampliación de los bordes de los electrodos interdigitales y la medición del ancho de los electrodos y del espacio entre ambos. En esta figura es posible distinguir los bordes rectos y bien definidos de los transductores.

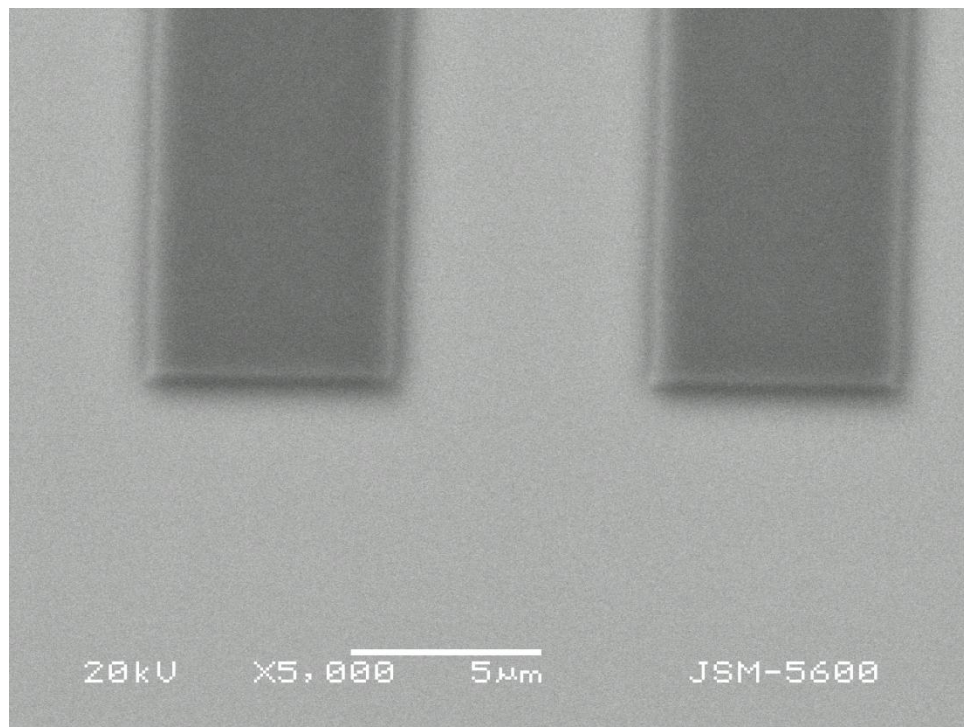


Figura 2.19. Vista superior de los bordes de los electrodos interdigitales.

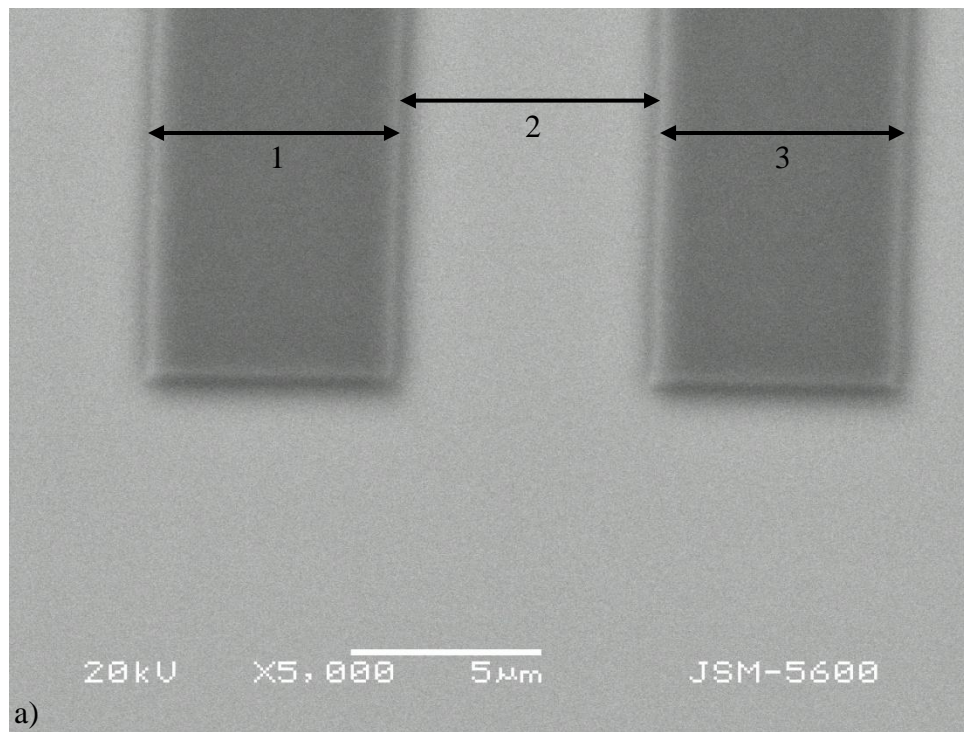
Utilizando este tipo de figuras es posible realizar mediciones aproximadas del ancho de los electrodos y de los huecos que hay entre ellas. Para realizar las mediciones sobre las figuras se utilizó el programa computacional ImageJ. Las mediciones se hacen obteniendo una



relación del número de píxeles con una longitud conocida y, después, midiendo el número de píxeles que forman el ancho de interés, así es posible obtener la magnitud de ésta. En las figuras 2.20 se muestran las imágenes con las mediciones realizadas sobre éstas. En la tabla 2.3 se muestran las mediciones obtenidas de las longitudes que se indican en las figuras 2.20. Un detalle importante que se aprecia en las figura 2.20.a es que los electrodos tienen un ancho menor que el hueco ubicado entre ellos.

Intervalo	Ancho [ $\mu\text{m}$ ]
1	6.415
2	6.72
3	6.429
4	6.539

Tabla 2.3. Anchos de los intervalos marcados en la figura 2.20.



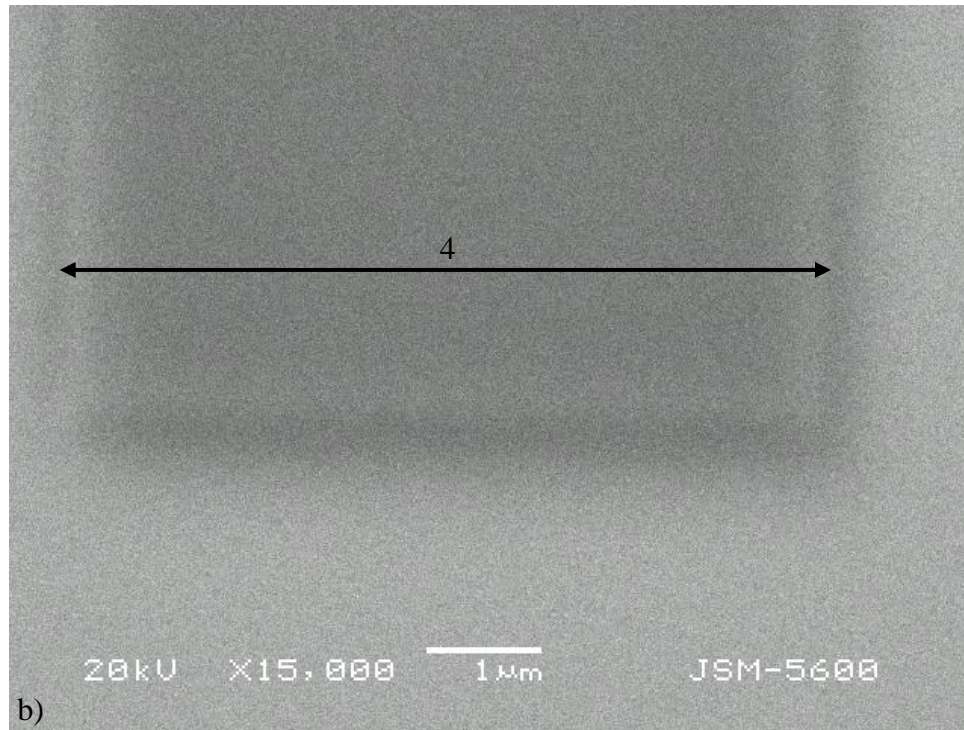


Figura 2.20. Mediciones de las longitudes de los electrodos que conforman al IDT.

El equipo JEOL JSM-5600 cuenta con la posibilidad de realizar estudios de espectrometría de dispersión de energía de rayos X (EXD). En la figura 2.21 se observan las regiones sobre las cuáles se hicieron los estudios de EXD. En las figuras 2.22 se muestran los resultados obtenidos con EXD. En la figura 2.22.a se muestran la EXD de la región marcada en la figura 2.21 con el número 1. En ella es posible observar que dicha región está compuesta principalmente de átomos de niobio y oxígeno, 2 de los 3 elementos que componen al niobato de litio. No se aprecia una señal debida al litio porque este elemento debería aparecer muy pegado al eje de las ordenadas y no es posible para el equipo distinguirlo por su baja energía. En la figura 2.22.b se aprecia el resultado de EXD para la región 3, distinguiéndose claramente que la película está formada de aluminio. En esta figura se alcanza a distinguir el niobio que se encuentra por debajo y una pequeña señal que corresponde al titanio. Este resultado y la figura 2.21 son las únicas evidencias que se encontraron de que durante la fabricación se utilizó el titanio como una capa previa a la de aluminio. En la figura 2.21 es posible observar que parece que el electrodo está formado por dos capas superpuestas y como se sabe cuál fue el método que se siguió para su fabricación (ver sección 2.2), lo cual indica que la capa de la región 2 podría ser la película de titanio y la película de la región 3 la capa de aluminio.

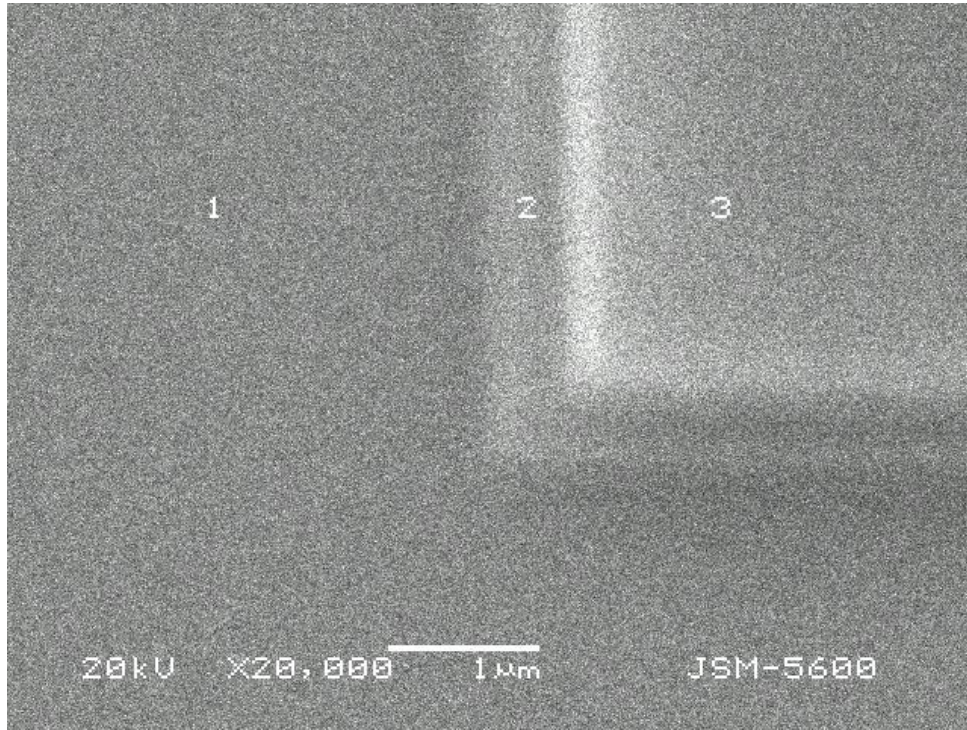


Figura 2.21. Diferentes regiones sobre las que se hicieron los estudios de EXD.



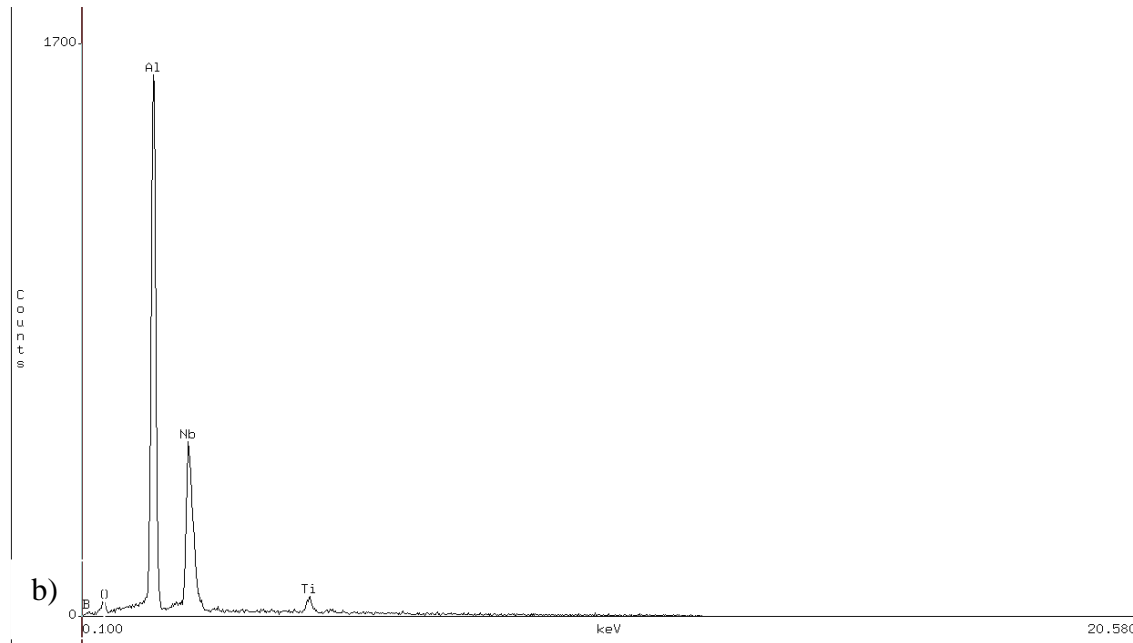


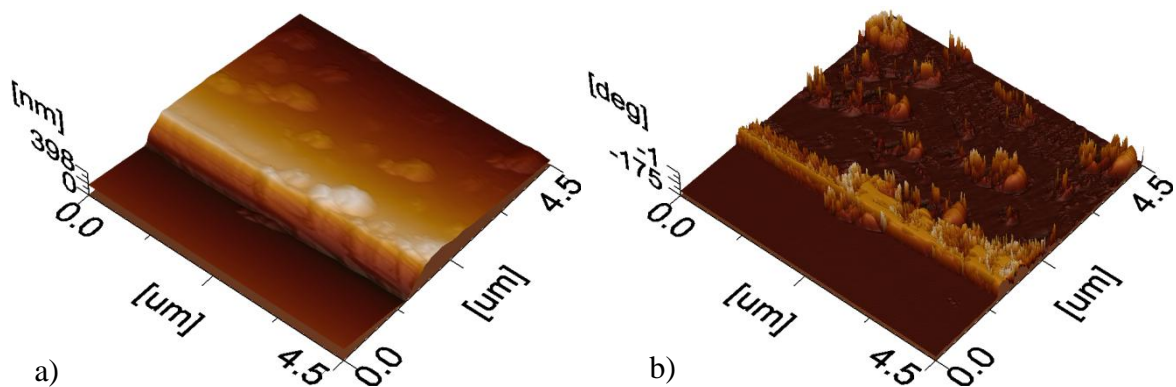
Figura 2.22. Resultados obtenidos con EXD de los elementos que se encuentran en la muestra. a) Resultados de la región marcada en la figura 2.21 como 1 y b) resultados de la región marcada en la figura 2.21 como 3.

### 2.3.3 Microscopía de fuerza atómica

La microscopía de fuerza atómica (AFM) es una técnica que permite medir directamente las fuerzas intermoleculares con resolución atómica. Básicamente, un sistema de AFM consiste de una punta de prueba sobre una microménsula que está montada sobre un actuador piezoeléctrico, un sistema para detectar el movimiento de la punta de prueba y la electrónica que se encarga del control de posición de la punta. Un equipo de AFM puede operar en dos configuraciones: malla abierta y malla cerrada. En malla abierta existen tres modos diferentes: modo de contacto, modo de no-contacto e intermitente (*tapping*). En el modo de no-contacto, la punta se encuentra vibrando a su frecuencia de resonancia o a una frecuencia cercana a ésta y la interacción eléctrica entre la punta y la muestra se mide con la desviación de la frecuencia de oscilación de la punta; en el modo de contacto, la punta toca la superficie de la muestra; y en el método intermitente se combinan ambas técnicas, es decir, en un instante de tiempo se aplica el modo de contacto y, en otro tiempo diferente, el de no-contacto. Algunas veces se prefieren las pruebas de no-contacto sobre aquellas donde hay contacto con la muestra porque en este último caso la muestra puede contaminar a la punta y, además, ésta se va degradando con mayor rapidez. Por otro lado, la operación en malla abierta puede presentar problemas, como un comportamiento caótico del sistema o una mala calibración del actuador piezoeléctrico, dando como resultado una imagen pobre. Por esta razón se han implementado los modos de operación en malla cerrada, donde el sistema de AFM puede operar en un modo de altura constante o fuerza constante. Para

profundizar acerca de esta técnica se recomienda leer el trabajo de Jalil y Laxminarayana [89] y el libro editado por Bellitto [90].

Las imágenes de AFM fueron obtenidas por el Dr. Edgar Álvarez Zauco de la Facultad de Ciencias de la UNAM, con un microscopio JEOL JSPM-5200 que se encuentra en el Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, operando en una configuración de malla cerrada, en un modo de fuerza constante. Las pruebas se realizaron sobre tres regiones diferentes: sobre los electrodos interdigitales, sobre la región de propagación de las SAW y sobre la película metálica, específicamente, los electrodos dispuestos para apoyar el dado con la microestructura. En las figuras 2.23, se muestran la topografía y la fase para dos electrodos interdigitales diferentes. En estas figuras se puede observar el borde de los electrodos que componen a los transductores interdigitales: en una de ellas la medición del perfil indica que la película tiene 398 nm y, en la otra, tiene un espesor de 419 nm. Además, en la figura 2.24 se muestra otra medición en un rango de mediciones de 0 a 78.8  $\mu\text{m}$  y, en ésta, se observa que la altura promedio de los electrodos es de 515 nm. Estos tres resultados sugieren que la película que forma a los electrodos no es uniforme. En las figuras 2.23.a y 2.25.c se distinguen dos regiones, una que se encuentra del lado izquierdo del escalón, correspondiente al niobato de litio, la cual no presenta rugosidades apreciables y, de las figuras 2.23.b y 2.23.d, se observa que es uniforme en la profundidad. En las figuras 2.23.a y 2.23.b, se puede observar del lado derecho del escalón la otra región, la cual corresponde a un electrodo del transductor interdigital. En dicha región se observa, en la superficie de la película, ligeras irregularidades que podrían deberse al proceso de fabricación de la película (*sputtering*), es decir, a la forma discontinua en que va depositándose el material sobre la superficie. En las figuras de fase, dichas irregularidades asociadas se deben a ligeras inhomogeneidades en la película. Sin embargo, donde se observa un cambio más abrupto en la fase es en el borde, lo cual podría deberse al grabado.



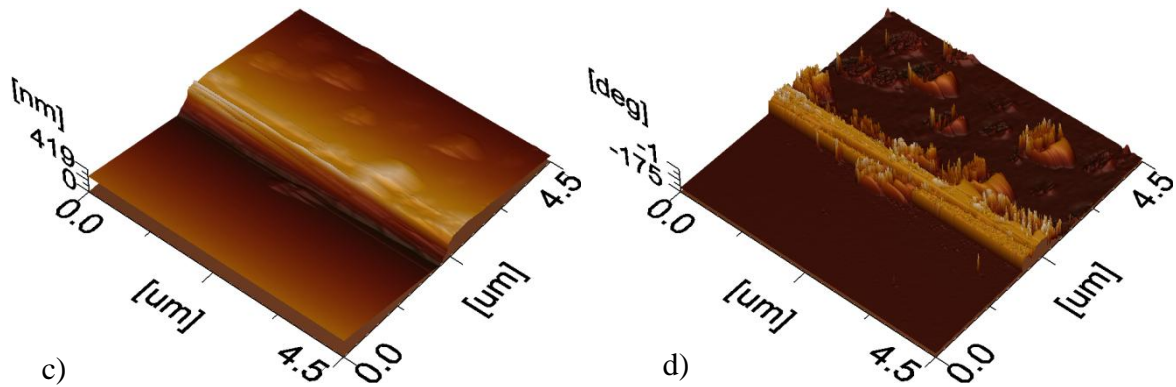


Figura 2.23. a) Topografía de uno de los electrodos de un transductores interdigital. b) Fase del electrodo del transductor de la figura a). c) Topografía de uno de los electrodos de un transductores interdigital. d) Fase del electrodo del transductor de la figura c).

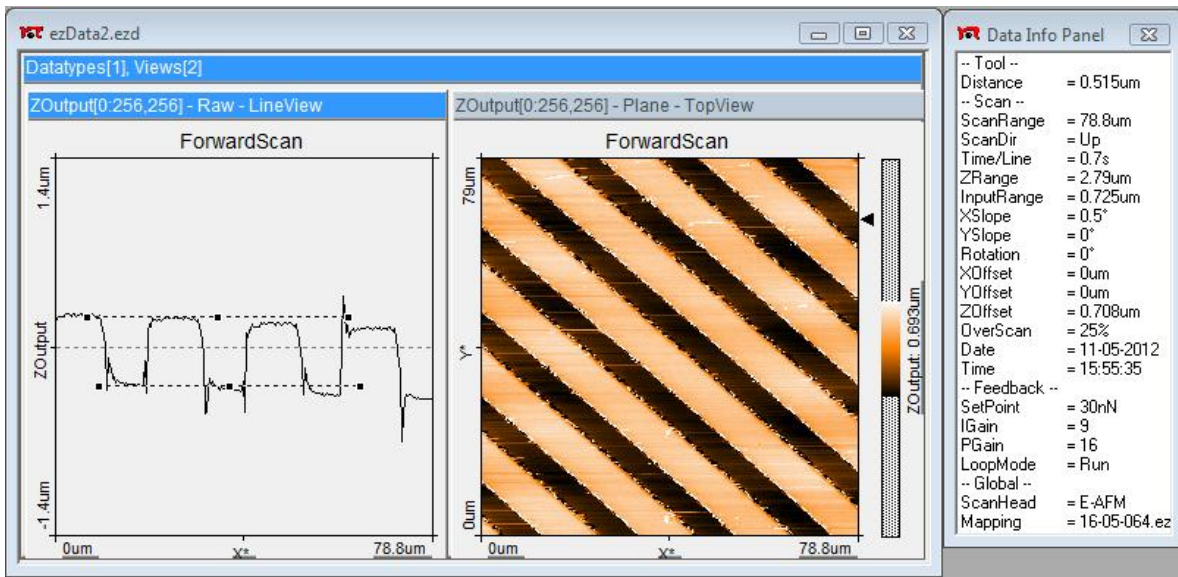


Figura 2.24. Medición de los electrodos en un rango amplio.

En las figuras 2.25 se muestran los resultados obtenidos para la región de propagación de las ondas acústicas (substrato). En estas figuras es posible observar que la superficie del cristal es muy plana y el material es homogéneo, no presenta defectos de consideración ni en la superficie ni por debajo de ésta. La rugosidad cuadrática media del substrato es de 9.82 nm y, entonces, el substrato cumple con los requerimientos necesarios para ser utilizado en dispositivos acústicos de SAW.

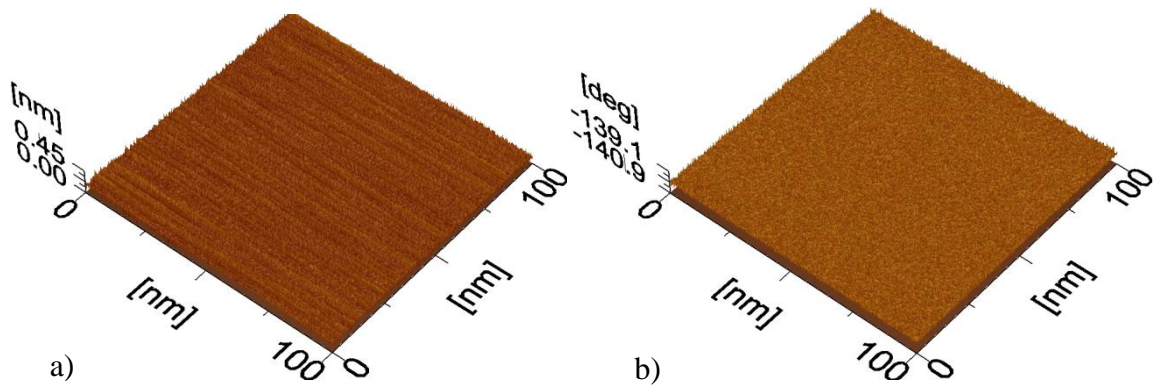


Figura 2.25. AFM del substrato de niobato de litio. a) Topografía y b) fase del substrato.

En las figuras 2.26 se muestran la topografía y la fase del AFM para la película metálica. En la figura 2.26.a es posible observar ciertas irregularidades en la superficie, con alturas que no superan los 38 nm. Esta información indica que es factible poner una estructura sobre este tipo de películas. Por otro lado, la figura 2.26.b indica que existen inhomogeneidades en la estructura de la película; sin embargo, por su tamaño, no son de consideración.

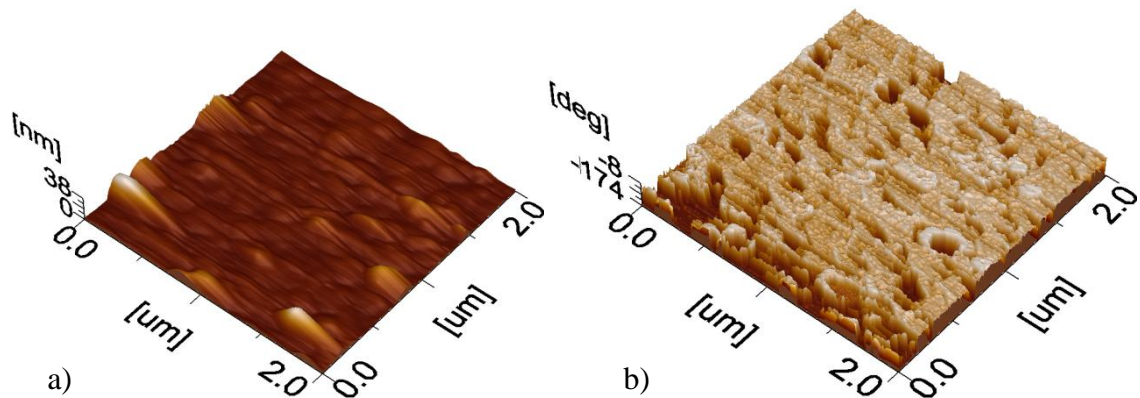


Figura 2.26. a) Topografía y b) fase de las películas metálicas.

A partir de los resultados de las pruebas de XRD, SEM, EXD y de AFM se puede concluir que el substrato está hecho por niobato de litio con una alta orientación cristalina y cumple con los requerimientos para aplicaciones acústicas. Se observó que las películas metálicas están formadas por aluminio y, en proporciones mucho menores que este último, por titanio. La topografía de las películas tiene ligeras irregularidades en la superficie y en el interior, sin embargo, éstas no son de consideración. El ancho de los transductores medidos con SEM presenta diferencias de 0.15  $\mu\text{m}$  con respecto las mediciones ópticas realizadas por el fabricante. Sin embargo, toda la evidencia recabada indica que el dispositivo está bien fabricado, es decir, se utilizaron los materiales acordados, la calidad del substrato es adecuada y el grabado es aceptable.

### 2.3.4 Medición de los parámetros S y Y de la línea de retardo

La matriz de dispersión (S) [91] relaciona las ondas de voltaje incidentes sobre los puertos con aquellas otras que salen de los puertos, tal como se muestra en la figura 2.27. Las ecuaciones que describen dichas relaciones se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}V_1^- &= S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+ \\V_2^- &= S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+\end{aligned}\quad (2.90)$$

donde  $V_i^+$  y  $V_i^-$  son las ondas de voltaje incidentes y las que se alejan del puerto  $i$ . El cálculo de los parámetros S se hace con las siguientes relaciones:

$$S_{ij} = \left. \frac{V_i^-}{V_j^+} \right|_{V_k^+ = 0} \quad \text{para } k \neq j \quad (2.91)$$

Comúnmente a  $S_{11}$  y a  $S_{22}$  se les conoce como coeficientes de reflexión de los puertos 1 y 2, respectivamente.  $S_{21}$  y  $S_{12}$  son los coeficientes de transmisión o también se les conoce como ganancia directa e inversa, respectivamente, para el caso de un amplificador. Para profundizar sobre esta matriz y algunos aspectos relacionados con ella se recomienda revisar el libro de Pozar [91].

Una vez que se han determinado algunas de las características físicas de las líneas de retardo, es importante conocer la forma en que éstas responden cuando se les aplica una diferencia de potencial entre cada una de sus terminales. Para lograrlo se obtuvieron, por medio de un analizador de redes E8361A, fabricado por Agilent Technologies, los parámetros S de las líneas de retardo. En las figura 2.27 y 2.28 se muestran las magnitudes de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{12}$  de la línea de retardo fabricada sobre niobato de litio Y-128° y de Y-41°, respectivamente. Los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{22}$  no se muestran porque la línea es simétrica y, por esta razón,  $S_{22}$  y  $S_{11}$  son prácticamente iguales y no se aprecian diferencias significativas; lo mismo ocurre para  $S_{21}$  y  $S_{12}$ .



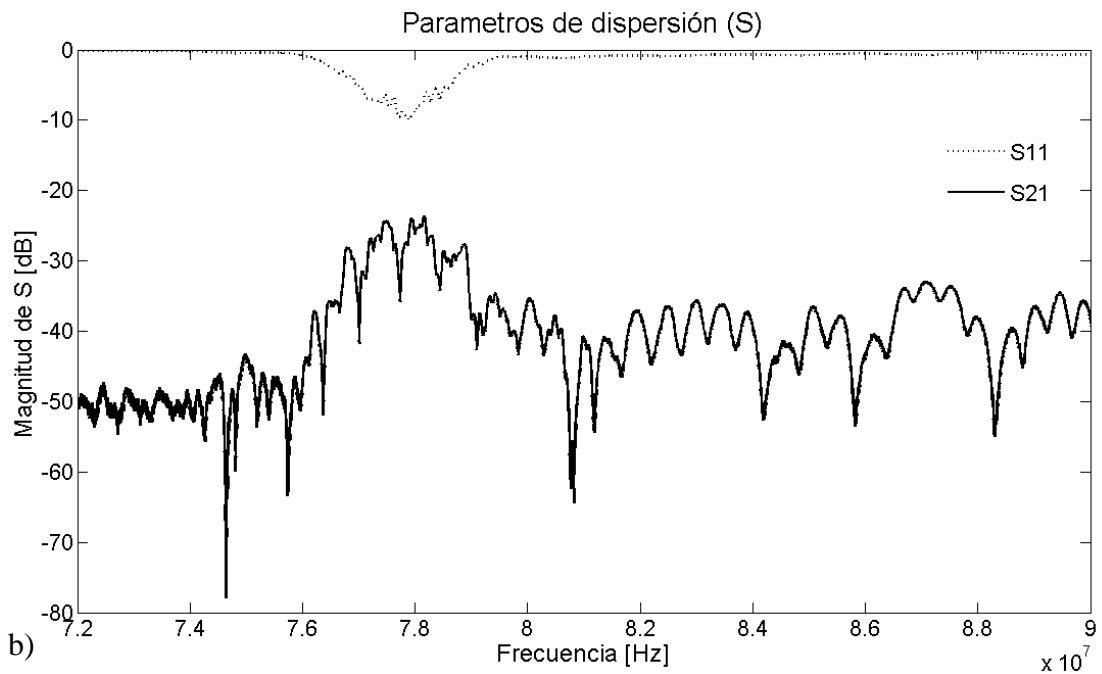
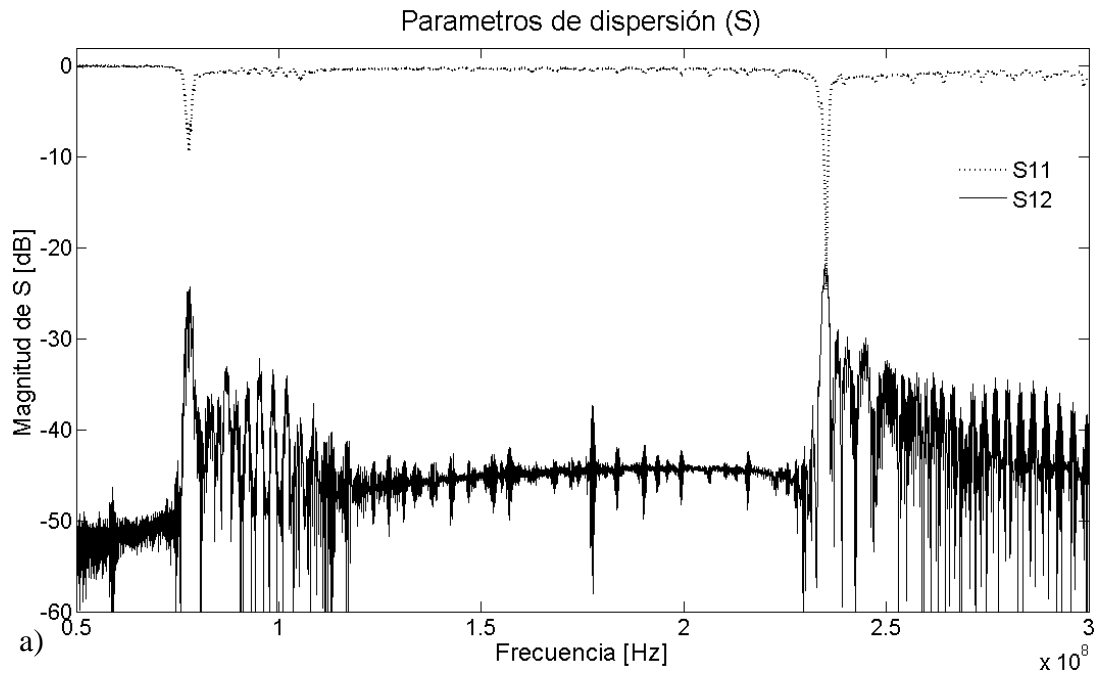


Figura 2.27. a) Magnitud de  $S_{11}$  y  $S_{21}$  y b) ampliación de la magnitud de  $S_{11}$  y  $S_{21}$  en el rango de interés para la línea de retardo fabricada sobre niobato de litio Y-128°.

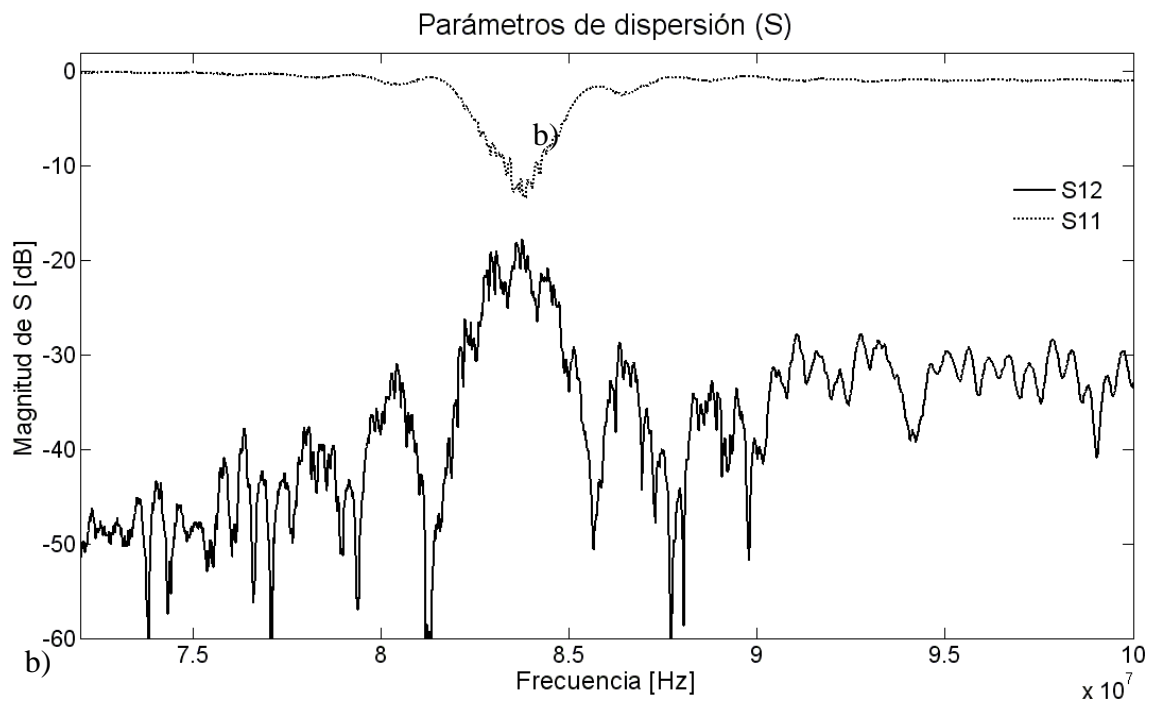
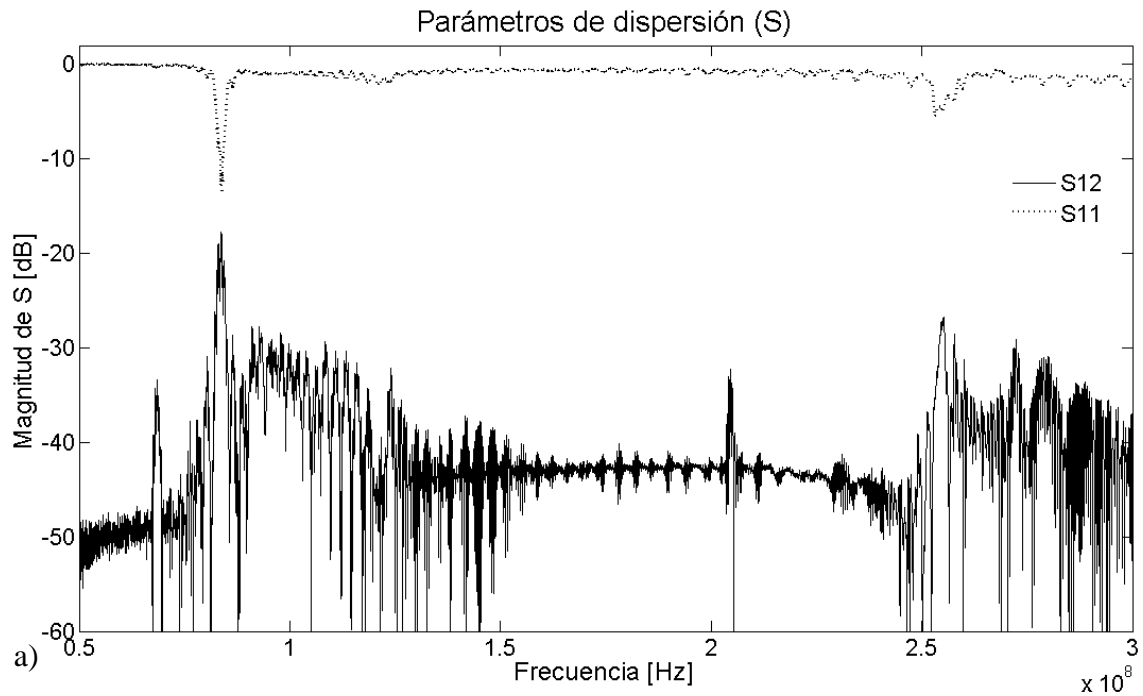
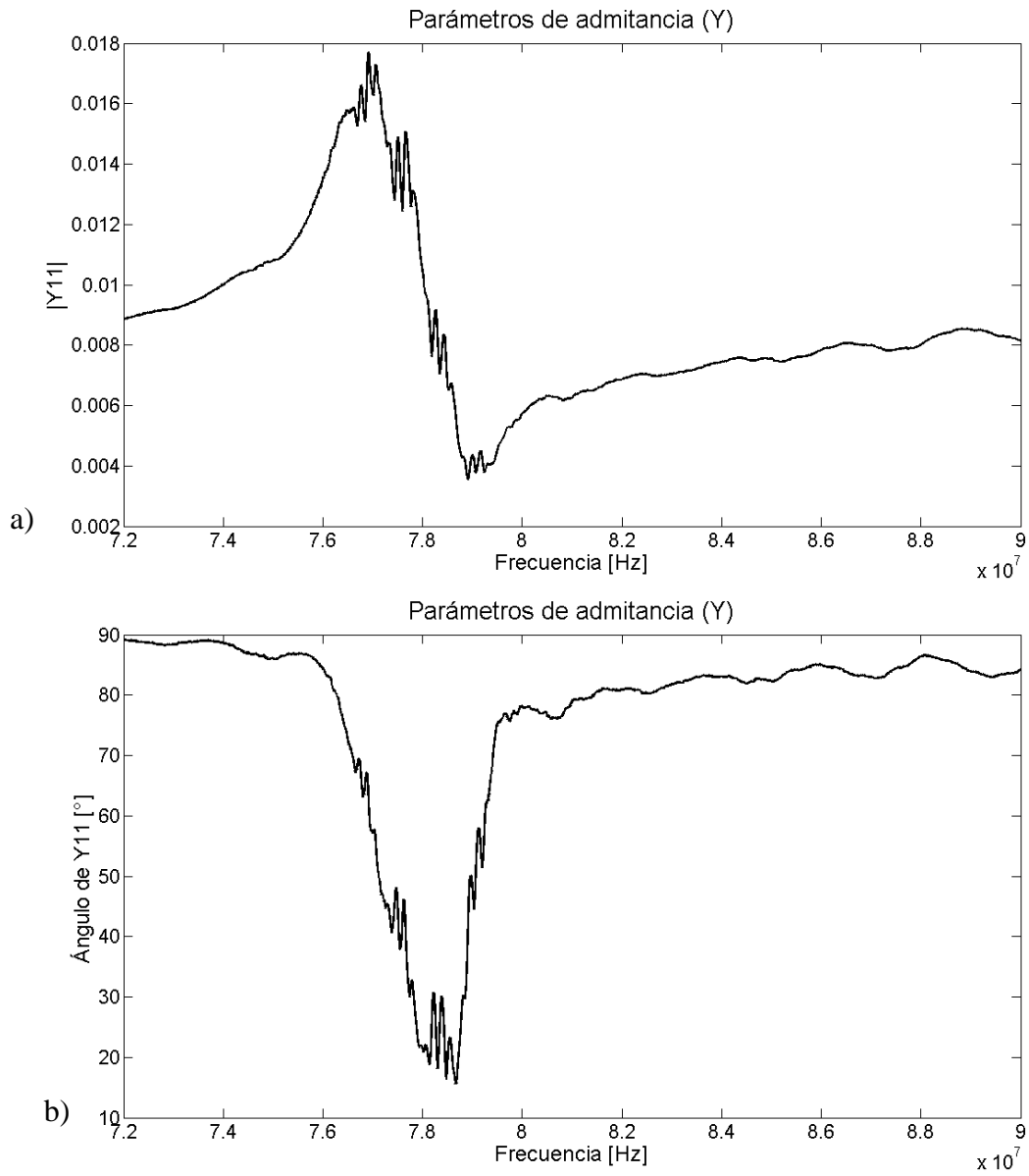


Figura 2.28. a) Magnitud de  $S_{11}$  y  $S_{12}$  y b) ampliación de la magnitud de  $S_{11}$  y  $S_{12}$  en el rango de interés para la línea de retardo fabricada sobre niobato de litio Y-41°.

La matriz  $S$  puede transformarse a matrices  $Z$ ,  $Y$ ,  $ABCD$ , etc. utilizando unas relaciones que han sido reportadas previamente [91, 92, 93], entonces, los parámetros  $S$  obtenidos experimentalmente pueden transformarse a parámetros  $Y$ . En las figuras 2.29 y 2.30 se

muestran la magnitud y el ángulo de la admitancia de las líneas de retardo fabricadas sobre niobato de litio Y-128° y Y-41°.



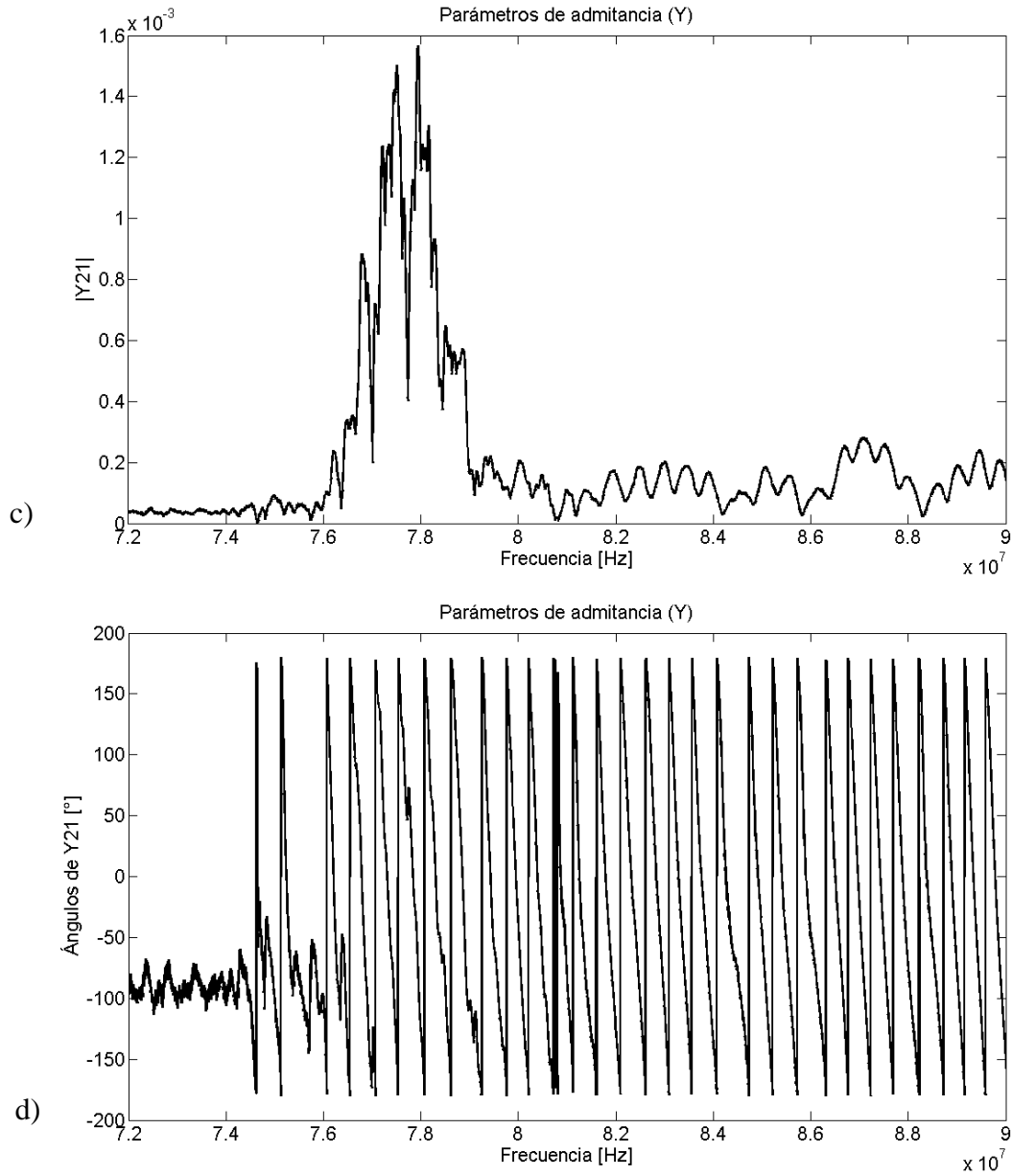
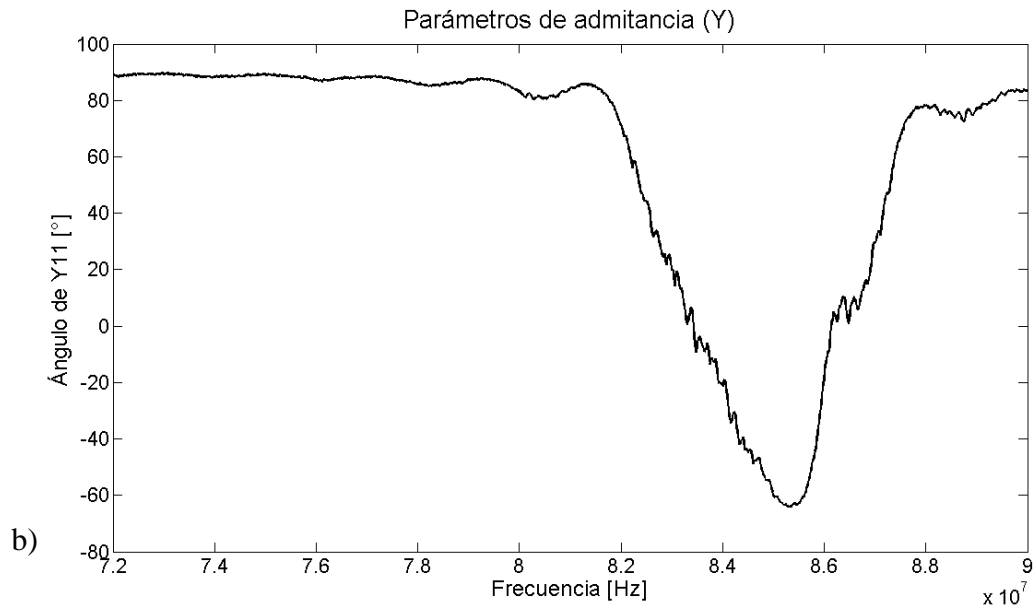
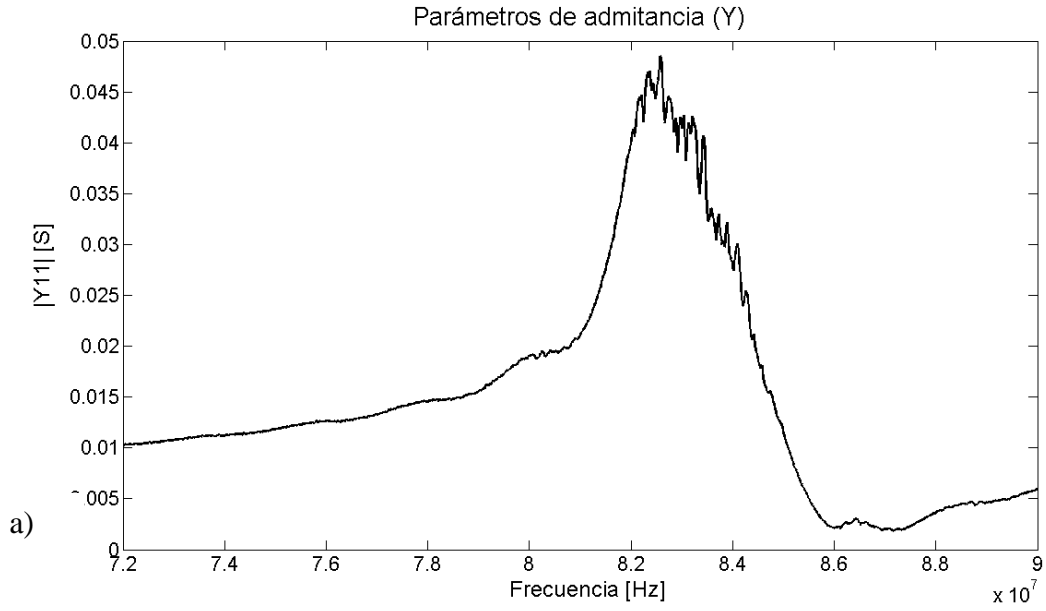


Figura 2.29. a) Magnitud y b) fase de los parámetros de admitancia  $Y_{11}$ ; c) magnitud y d) fase de  $Y_{21}$  para la línea de retardo fabricada sobre niobato de litio Y-128°.



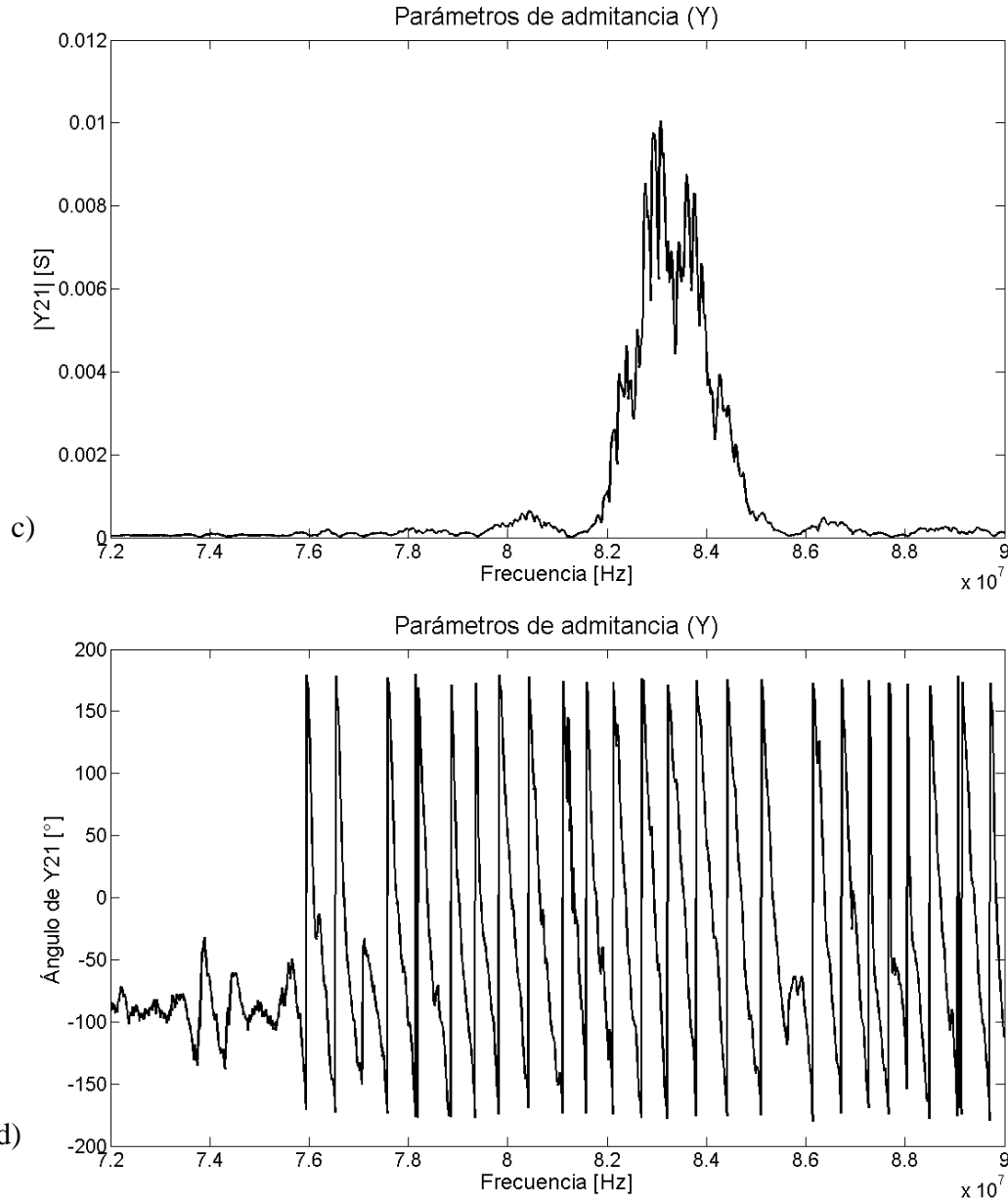


Figura 2.30. a) Magnitud y b) fase de los parámetros de admitancia  $Y_{11}$ ; c) magnitud y d) fase de  $Y_{21}$  para la línea de retardo fabricada sobre niobato de litio Y-41°.

Se sabe que cuando el transductor interdigital está operando a una frecuencia que no es cercana a la central, la admitancia es principalmente capacitiva. Para el IDT fabricado sobre el sustrato de niobato de litio Y-128°, la capacitancia se calcula como el inverso del producto de  $Y_{21}$  por la frecuencia angular  $\omega$ , luego, promediando en un rango desde 90 MHz hasta 100 MHz se obtiene 15.41 pF. En la siguiente sección se obtienen los parámetros teóricos de la admitancia (Y) de la línea de retardo.

## **2.4 Modelado teórico de la línea de retardo**

Para corroborar que el comportamiento experimental de la línea de retardo se asemeja al teórico, es necesario hacer el análisis de ésta. Este apartado se subdivide en tres secciones, en las cuales se hace dicho tratamiento. En la primera se obtiene la distribución de carga del transductor y se calcula la matriz P considerando las expresiones para transductores interdigitales no reflectivos (ecuaciones 2.87); en la segunda se trata sobre la forma en que la línea de retardo fue simulada y, por último, se presentan los parámetros Y de la línea de retardo.

### **2.4.1 Cálculo de la matriz P de los transductores interdigitales**

Para calcular la matriz P de los transductores interdigitales se utilizó la teoría expuesta en la sección 2.1.1, en particular, las ecuaciones (2.87). Según éstas, es necesario conocer la distribución de carga en el IDT y, para aproximarla, se utilizó la ecuación (2.42); para el cálculo de la capacitancia se utilizó la ecuación (2.44). Es importante señalar que en esta aproximación se desprecian los efectos en los bordes del IDT, es decir, las expresiones (2.41) y (2.42) consideran, en su deducción, que el arreglo que forma al IDT es infinito; sin embargo, en la práctica esto no ocurre y cuando uno se aproxima a los electrodos ubicados en los bodes del IDT, la distribución de carga se modifica cambiando su forma y disminuyendo en magnitud. No obstante, como una primera aproximación al problema, se decidió aceptar estas concesiones, ya que los resultados obtenidos experimental y teóricamente son, como se podrá observar más adelante, similares. En las figuras 2.31 se muestra la distribución de carga aproximada para los transductores depositados sobre un substrato Y-128° y una ampliación de ésta.

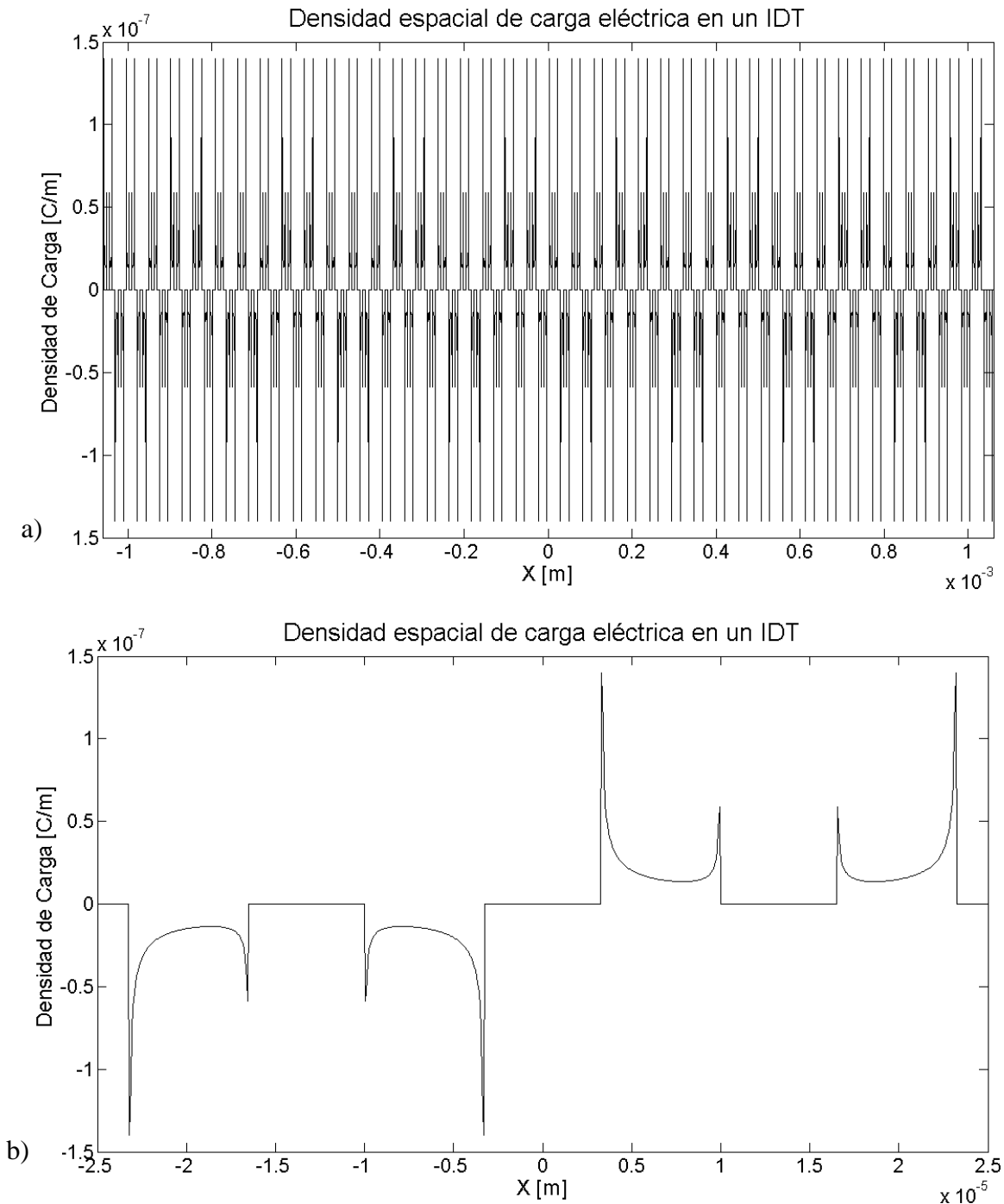


Figura 2.31. a) Distribución de carga eléctrica en los 40 pares de electrodos dobles y b) distribución de carga eléctrica en un par de electrodos dobles.

Una vez que se ha determinado la densidad de carga eléctrica  $\rho_e(x)$  es posible obtener  $\rho_e(k)$ , por medio de la transformada de Fourier, la cual, se aproxima numericamente utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT). Sin embargo, la FFT directamente no proporciona una magnitud adecuada para  $\rho_e(k)$  y, por esta razón, se debe de emplear un



criterio para normalizarla, ya que de otro modo, los valores de admitancia obtenidos varían dependiendo del número de puntos utilizados en el cálculo de la FFT, lo cual, provoca un error. A continuación, se hace un desarrollo de este criterio. Considérese una función  $\psi(x)$  cualquiera, cuya integral definida en el intervalo  $[a, b]$  está dada por:

$$P_s = \int_a^b \psi(x) dx \quad (2.92)$$

y su transformada de Fourier es:

$$\hat{\psi}(k) = \mathcal{F}\{\psi(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx \quad (2.93)$$

Ahora, calculando la transformada de Fourier de (2.92):

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_s e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b \psi(x) dx e^{-ikx} dx. \quad (2.94)$$

Haciendo un cambio de variable sobre el lado derecho de (2.94) y, por el teorema de Fubini, es posible cambiar el orden de integración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_s e^{-ikx} dx = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx dx \quad (2.95)$$

Sin embargo, se sabe que  $P_s$  es una constante por (2.92) y, además, por (2.93), entonces:

$$P_s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \int_a^b \hat{\psi}(k) dx \quad (2.96)$$

Debido a que  $\hat{\psi}(k)$  es independiente de  $x$ :

$$P_s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = (b - a) \hat{\psi}(k) \quad (2.97)$$

Se sabe que la transformada de Fourier de una constante es [94]:

$$\mathcal{F}\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-ikx} dx = 2\pi A \delta(k) \quad (2.98)$$

Aplicando (2.98) sobre (2.97):

$$2\pi P_s \delta(k) = (b - a) \hat{\psi}(k) \quad (2.99)$$

Integrando (2.99) desde  $-\infty$  a  $\infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi P_s \delta(k) dk = (b - a) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k) dk \quad (2.100)$$

Por la propiedad de muestreo de la función impulso se tiene que:

$$P_s = \frac{(b-a)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k) dk \quad (2.101)$$

Substituyendo (2.92) en (2.101):

$$\int_a^b \psi(x) dx = \frac{(b-a)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) dk \quad (2.102)$$

Si  $\psi(x) = \sigma_e(x)V(x)$ , entonces, la carga total ( $Q_t$ ) en los electrodos está dada por:

$$Q_t = \int_a^b \psi(x) dx \quad (2.103)$$

Además, se sabe que la energía almacenada en un capacitor está dada por:

$$E_{cap} = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.104)$$

y si la transformada de Fourier de  $\psi(x)$  sin normalizar ( $\widehat{\psi}'(k)$ ) es:

$$\widehat{\psi}(k) = \alpha \widehat{\psi}'(k) \quad (2.105)$$

donde  $\alpha$  es una constante de proporcionalidad. Entonces, el criterio para normalizar  $\widehat{\psi}'(k)$  es:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2C_{idt}} \left( \int_a^b \psi(x) dx \right)^2}{\left( \frac{(b-a)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}'(k) dk \right)^2}} \quad (2.106)$$

Si  $|V(x)| = 1$ , entonces,  $\sigma_e(k) = \rho_e(k)$ . Conociendo  $\rho_e(k)$  y el coeficiente de acoplamiento electromecánico, entonces, utilizando las ecuaciones (2.87), es posible calcular cada uno de los coeficientes de la matriz P de un IDT no reflectivo. Para obtener la admitancia del transductor interdigital a través (2.56), se calculó la conductancia acústica con (2.60) y, debido a la relación (2.63), es posible conocer la susceptancia acústica. En la figura 2.32 se muestra la magnitud del coeficiente  $P_{13}$ , del cual se debe señalar que es igual a la magnitud de  $P_{23}$ . En esta figura se observa que la frecuencia fundamental a la cual el transductor convierte una onda acústica incidente en una corriente eléctrica ocurre a los 75.62 MHz y, además, se puede observar la presencia de un tercer armónico ubicado en 226.8 MHz. La figura 2.32 muestra claramente que el IDT presenta una mejor respuesta para el tercer armónico que para la frecuencia fundamental. Como ya se mencionó anteriormente, esto es característico de los transductores dobles utilizados en la construcción del transductor. En las figuras 2.33 se muestran la magnitud y la fase de la admitancia del transductor interdigital ( $P_{33}$ ). De las figuras 2.33 se puede concluir que el transductor interdigital se comporta como un capacitor en todas aquellas frecuencias para las que no hay transducción acústica, sin embargo, cuando la hay, la susceptancia y la conductancia de origen acústico no son despreciables y cambia la admitancia del transductor hasta que su parte imaginaria casi se hace nula; sin embargo, en todo el rango de operación considerado, la admitancia del IDT es capacitiva. En la figura 2.34 se muestra la conductancia  $G_a(\omega)$  y la susceptancia  $B_a(\omega)$  del IDT.

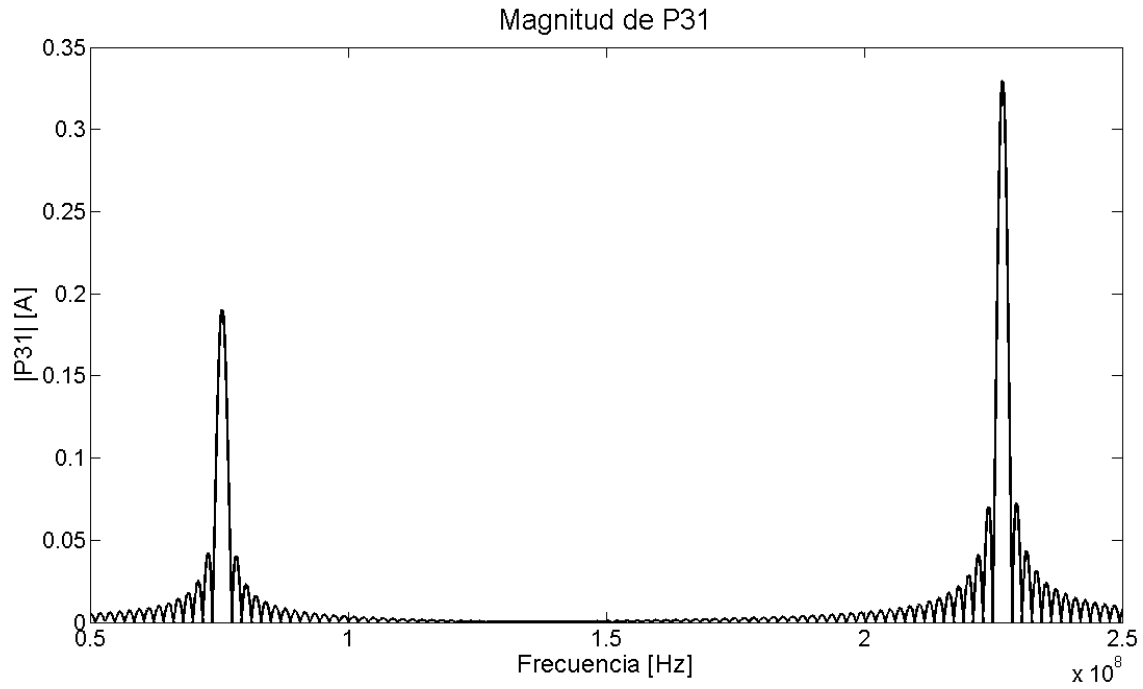
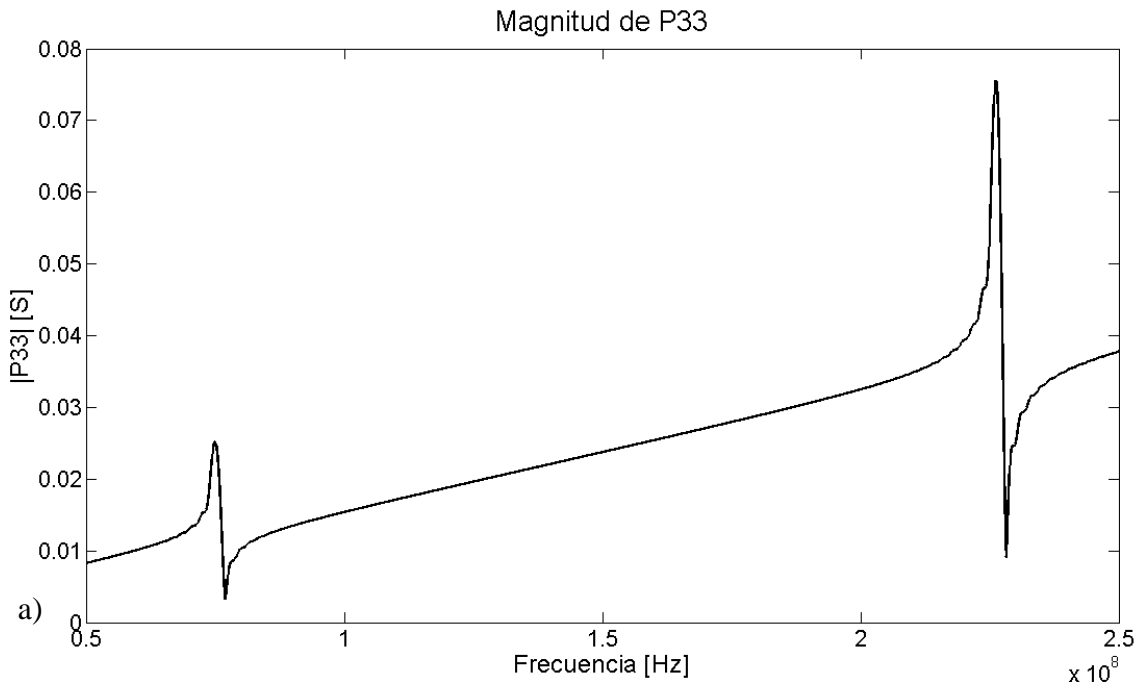


Figura 2.32. Magnitud de  $P_{13}$ .



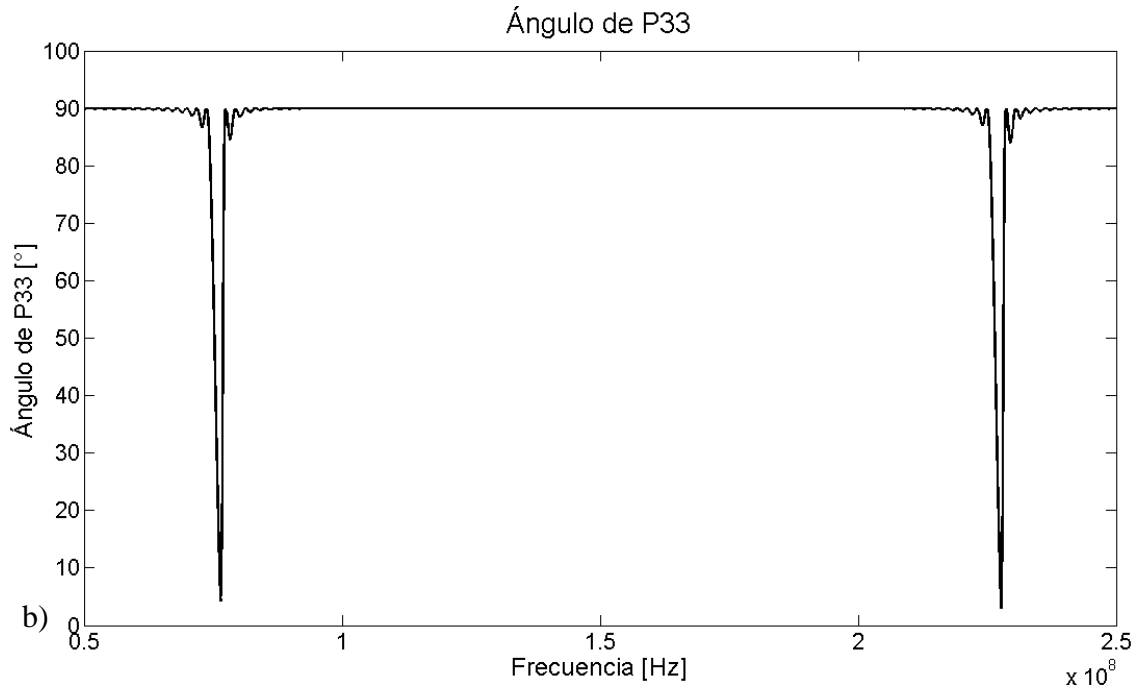


Figura 2.33. a) Magnitud y b) fase de la admitancia del transductor interdigital.

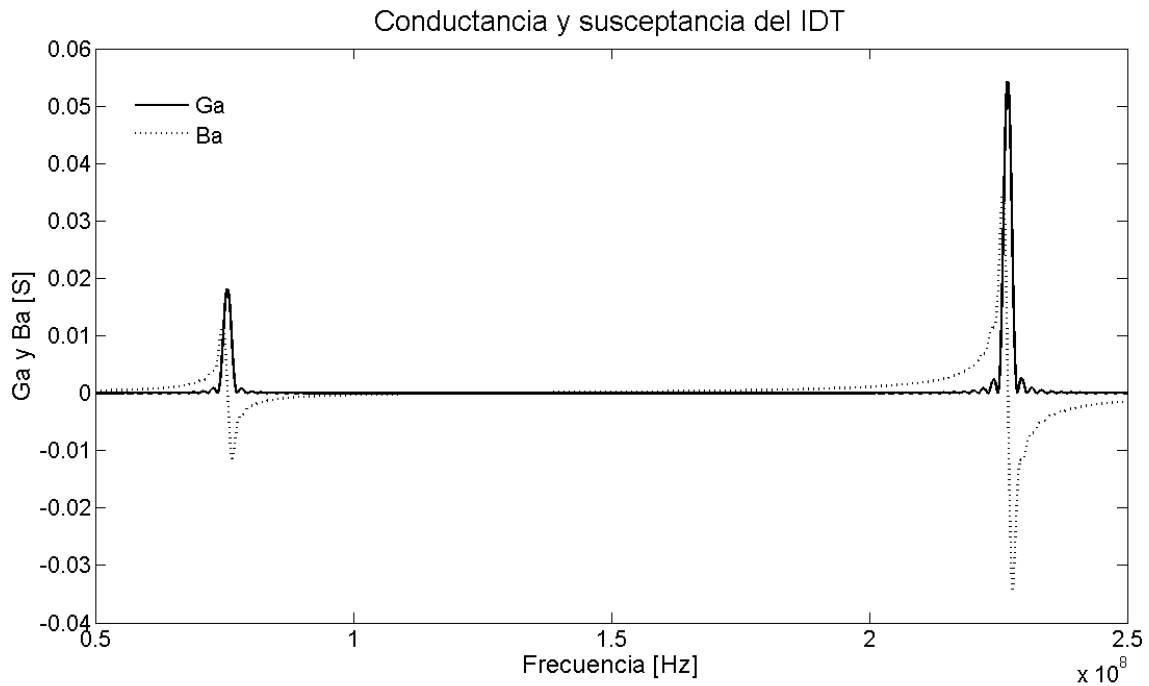


Figura 2.34.  $G_a(\omega)$  y  $B_a(\omega)$  del IDT.

### 2.4.2 Modelo de la línea de retardo

La línea de retardo está compuesta por dos transductores interdigitales y una región de propagación de las ondas acústicas superficiales. En la figura 2.35 se muestra un diagrama

esquemático de la línea de retardo. En esta figura se puede observar una región de propagación de las ondas ( $S_{DL}$ ), que a su vez puede ser dividida en tres secciones, las cuales son: una que corresponde a la región de propagación localizada por debajo de la microestructura y, las otras dos, son aquellas regiones que hay desde la microestructura hasta el IDT más cercano. Al determinar las matrices P de cada una de estas regiones se considera que, debido a que ambos transductores interdigitales son iguales, basta con calcular la matriz P de uno de ellos, la cual se mostró en la sección anterior, y que las regiones de propagación de las ondas acústicas pueden modelarse como matrices P donde  $P_{13}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{31}$ ,  $P_{32}$  y  $P_{33}$  son iguales a cero, es decir, los únicos elementos que son diferentes de cero son  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{21}$  y  $P_{22}$ . Si se supone que no hay reflexiones en esta región, entonces, estos coeficientes pueden calcularse con (2.87.a) y (2.87.b).

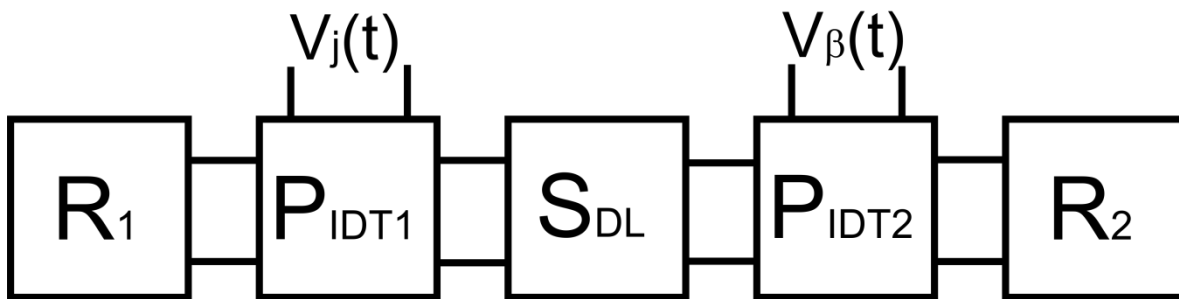


Figura 2.35. Diagrama esquemático de la línea de retardo.  $P_{IDT1}$  y  $P_{IDT2}$  representan a los transductores interdigitales,  $S_{DL}$  representa la región entre ambos transductores donde se propagan las ondas acústicas y  $R_1$  y  $R_2$  representan un elemento reflector más allá de los transductores.

### 2.4.3 Extracción de los parámetros Y de la línea de retardo

Después de haber calculado cada una de las matrices P que componen a la línea de retardo, es necesario representar la línea de retardo mediante matrices P equivalentes utilizando recursivamente las ecuaciones (2.72), hasta obtener un circuito como el de la figura 2.10. En este caso, se despreciaron las reflexiones en los bordes y, por esta razón, los coeficientes de reflexión de  $R_1$  y  $R_2$  de la figura 2.10 son iguales a cero. Además, se verificó que efectivamente las reflexiones de los bordes fueran despreciables. Esto se hizo aplicando cera alrededor de una línea de retardo y, después, se midieron sus parámetros de dispersión y no se observó ningún cambio en ellos.

Una vez que se ha obtenido el circuito equivalente, como el de la figura 2.10, se aplica el procedimiento descrito en la subsección intitulada “Matriz P” en la sección 2.1 (Antecedentes); específicamente, se utilizaron las expresiones (2.73) hasta la (2.77). Debido a que no hay reflexiones en los bordes,  $k_1$  y  $k_2$  son iguales a cero y, por tanto,  $Y_{11} = P_{33}^{IDT}$ . En las figuras 2.33 se muestran la magnitud y la fase de la admitancia  $Y_{11}$  de la línea de retardo y, en las figuras 2.36, se muestran la magnitud y la fase de la admitancia  $Y_{21}$  de la

línea de retardo. Es importante señalar que debido a que el dispositivo es simétrico se cumple que  $Y_{11} = Y_{22}$  y  $Y_{12} = Y_{21}$ .

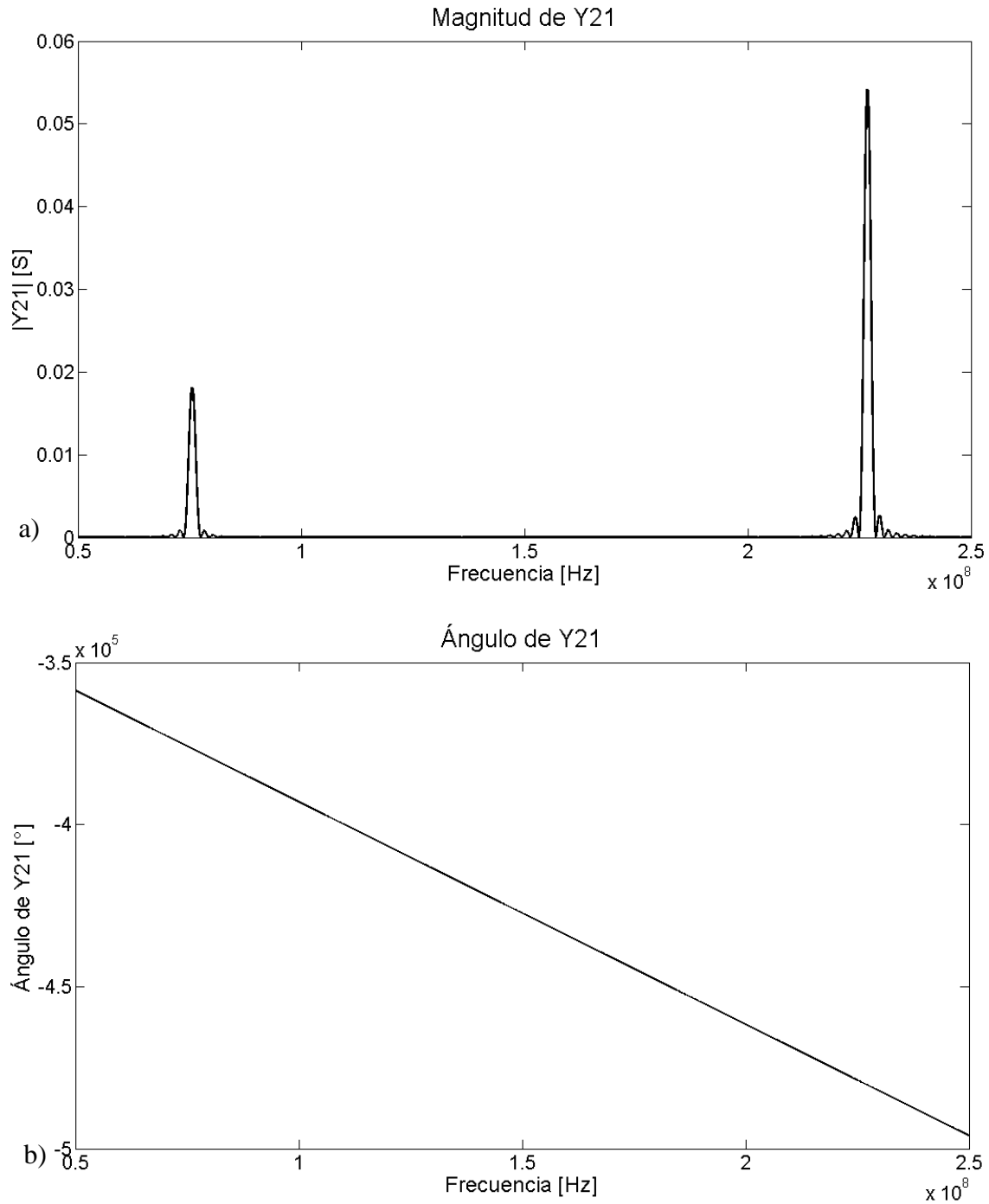


Figura 2.36. a) Magnitud y b) fase de  $Y_{21}$ .

## 2.5 Comparación de los resultados teóricos y de los resultados experimentales

Para saber que tanto se ajusta el modelo propuesto al comportamiento de la línea de retardo fabricada es necesario dedicar una sección para discutir acerca de sus similitudes y de sus diferencias y las causas de éstas. Para poder apreciar mejor los resultados mostrados en las figuras, en esta sección, solamente nos referiremos al comportamiento alrededor de la frecuencia fundamental de operación de la línea de retardo; sin embargo, lo que aplica para la frecuencia fundamental, también, aplica para el tercer armónico. En las figuras 2.37 y 2.38 se comparan las admitancias  $Y_{11}$  y  $Y_{21}$  obtenidas teórica y experimentalmente.

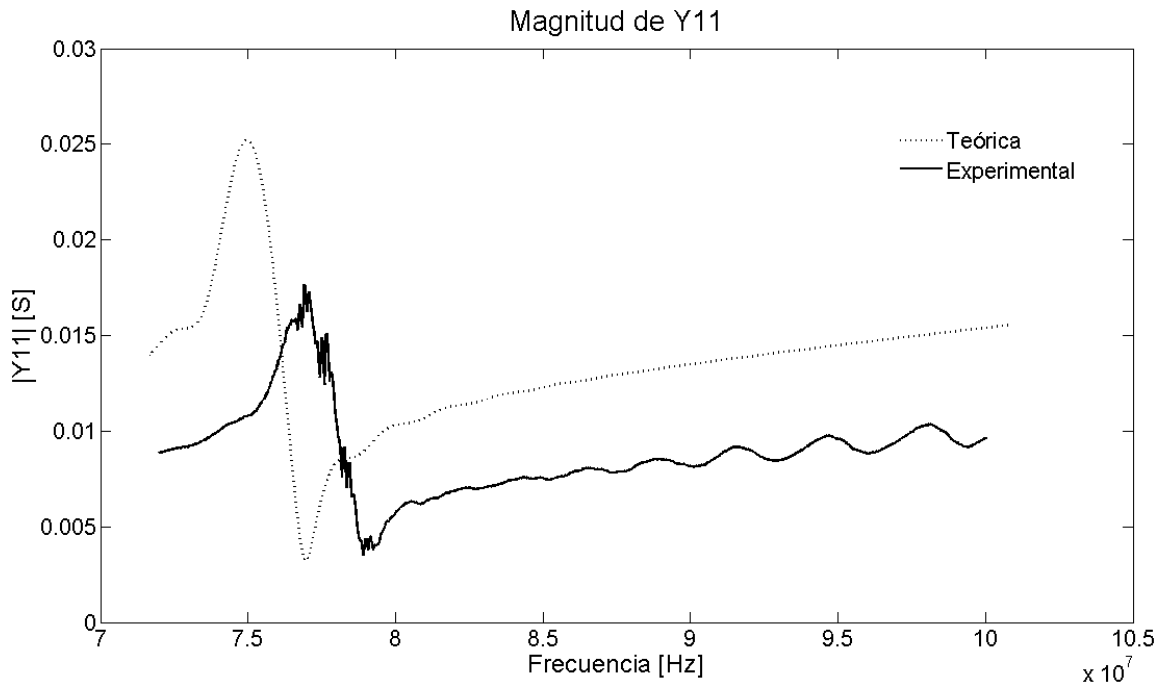


Figura 2.37. Admitancia  $Y_{11}$  teórica y experimental.

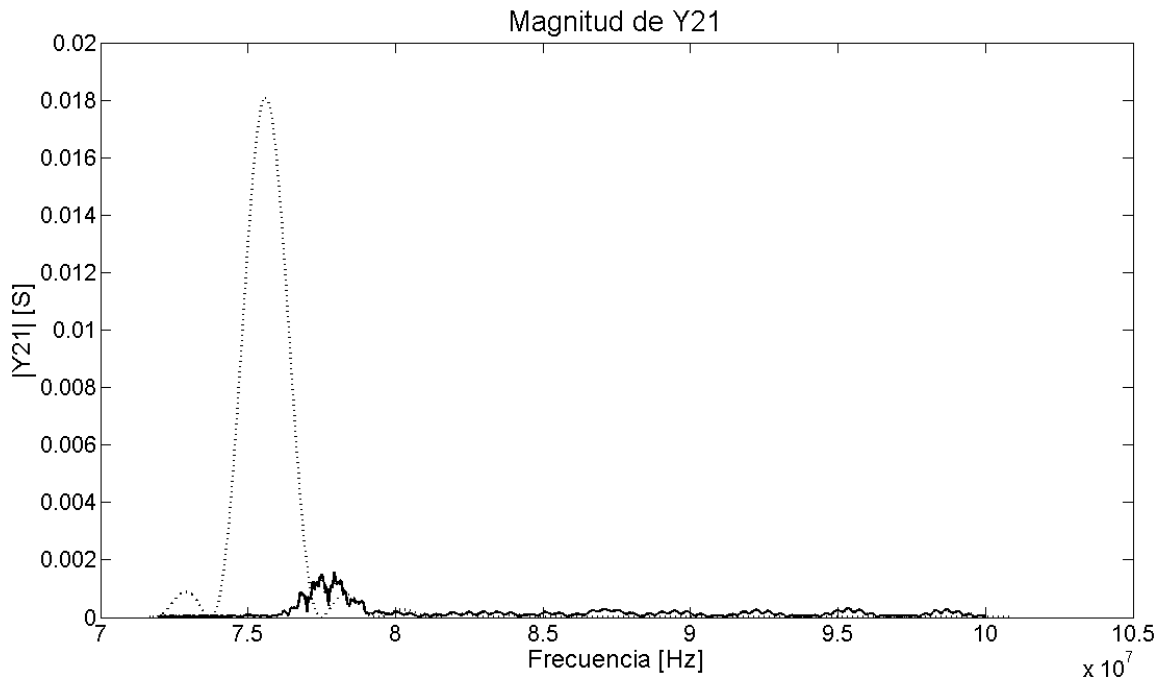


Figura 2.38. Admitancia  $Y_{21}$  teórica y experimental.

En las figuras 2.37 y 2.38 se observa que en ambos casos las admitancias experimentales son más pequeñas que aquellas teóricas y, además, se encuentran corridas hacia la derecha 2 MHz aproximadamente. A continuación se discutirá acerca de las causas de estas diferencias.

Para el caso de la admitancia  $Y_{11}$ , existen dos diferencias fundamentales: la primera, está relacionada con la magnitud de la admitancia y, la segunda, con el corrimiento en la frecuencia del dispositivo. La variación en la magnitud de  $Y_{11}$  puede deberse a una variación en la capacitancia de los transductores interdigitales debida a la variación en los anchos de los electrodos que conforman a los IDT's. En la figura 2.39 se muestra la capacitancia normalizada de un transductor interdigital contra la relación de aspecto de los electrodos dobles calculada con la ecuación (2.43). En la figura 2.39 se puede observar que para variaciones del 5 % en la relación de aspecto de los electrodos que forman al IDT, la capacitancia disminuye en un 50%. Según los resultados obtenidos por medio de SEM, el ancho de los electrodos no es igual al espacio que hay entre ellos y, por esta razón, la relación de aspecto no es 1 como idealmente se propuso. A partir de la información contenida en la tabla 2.3, la relación que existe entre el ancho de los electrodos (mediciones 1, 3 y 4) y el ancho del espacio entre dos electrodos sucesivos (medición 2) se muestra en la tabla 2.4; en la cual también se presenta la capacitancia normalizada que le corresponde a cada uno de las relaciones de aspecto calculadas.



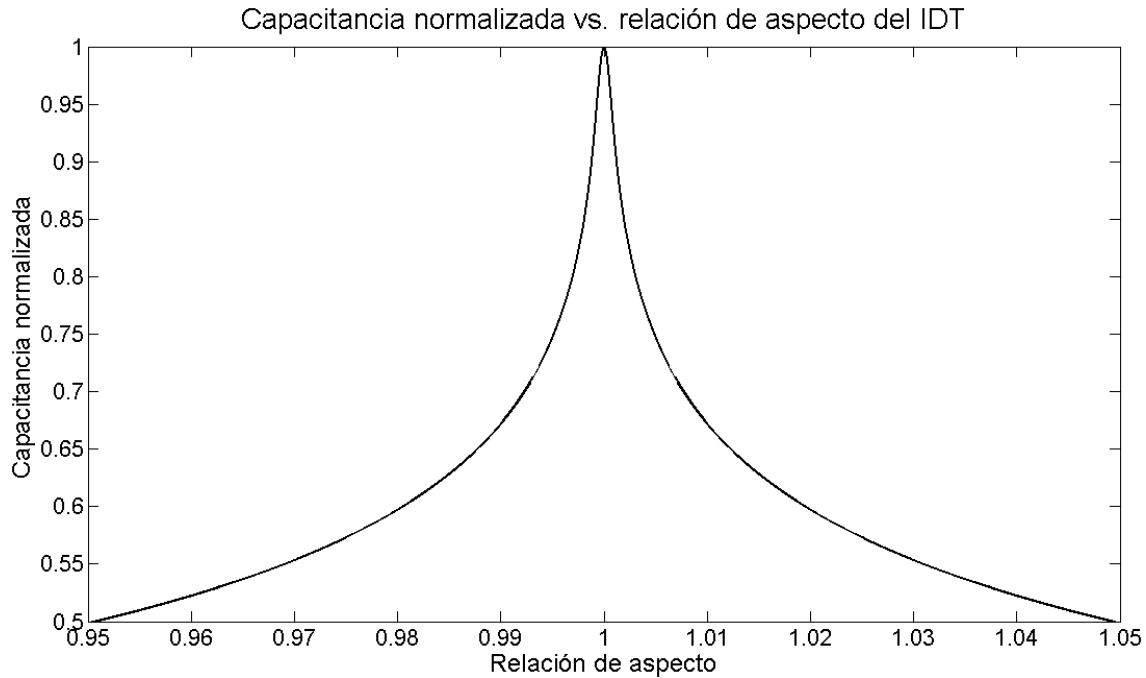


Figura 2.39. Capacitancia normalizada vs. relación de aspecto de los electrodos y los huecos que forman a un transductor interdigital.

Intervalos considerados	Relación	Capacitancia normalizada
1 entre 2	0.9546	0.5088
3 entre 2	0.9567	0.5139
4 entre 2	0.9731	0.5653

Tabla 2.4. Relación de aspecto medida por SEM y las capacitancias normalizadas correspondientes.

En la figura 2.40 se muestran los valores de las admitancias  $Y_{11}$  para relaciones de aspecto que aproximan a las que se muestran en la tabla 2.4 y la medida experimentalmente. Los resultados obtenidos por medio de SEM indican que los electrodos y los huecos entre dos electrodos no son iguales, tal como se propuso en el diseño; por otro lado, las gráficas presentadas en la figura 2.40 también indican que la relación de aspecto sí cambió durante la fabricación. Por otra parte, ajustando la capacitancia del IDT por medio de las capacitancias normalizadas obtenidas a partir de las medidas hechas con SEM, tampoco se logra la coincidencia con la  $Y_{11}$  medida experimentalmente. Lo anterior podría deberse a que en las micrografías es difícil distinguir los bordes de los electrodos o, a que, en realidad, los bordes de los electrodos tienen una pendiente finita y, por tanto, no tienen una discontinuidad tal como se ha supuesto teóricamente. A pesar de que se encontró una forma de ajustar la amplitud de  $Y_{11}$ , este resultado aún se encuentra desplazado con respecto a la  $Y_{11}$  obtenida experimentalmente. Esta variación se puede deber a dos factores: el diseño no fue transferido con el mismo tamaño hacia el substrato, es decir, durante el proceso de fabricación se redujeron las dimensiones originales al momento de hacer el grabado; o, la

otra posibilidad, que la velocidad de propagación de las ondas no es igual a la calculada teóricamente por que las constantes elásticas, piezoeléctricas y la permitividad eléctrica del material pudieron cambiar debido al proceso de fabricación del substrato o a los errores experimentales al obtener dichas constantes. En la figura 2.41 se muestra la admitancia  $Y_{11}$  ajustada en su frecuencia de operación y en su amplitud, con respecto a la experimental.

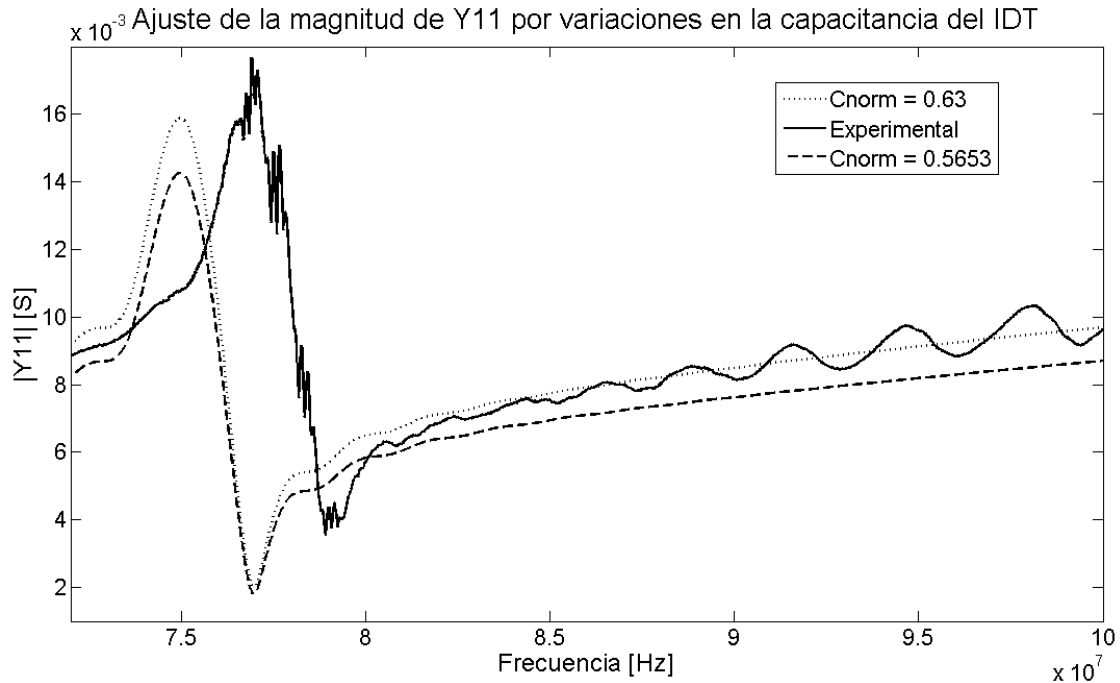


Figura 2.40. Comparación de las admitancias  $Y_{11}$  ajustadas y la admitancia obtenida experimentalmente.

Después de haber analizado los resultados, se comprueba que existen diferentes factores que afectan el desempeño de una línea de retardo SAW y que no se pueden conocer *a priori*; sin embargo, no es aventurado decir que la teoría puede ajustarse para obtener simulaciones más aproximadas a la operación del dispositivo analizado. Otras diferencias notables entre ambas admitancias son los rizos que aparecen en la curva experimental de  $Y_{11}$ , los cuales podrían deberse a efectos de segundo orden como reflexiones de origen mecánico en los electrodos, difracción de ondas o interferencia de las ondas acústicas. Queda pendiente determinar las causas exactas de este comportamiento. En la figura 2.42 se muestra  $Y_{21}$  ajustada para las mismas condiciones que se aplicaron al coeficiente  $Y_{11}$  que se muestra en la figura 2.41.

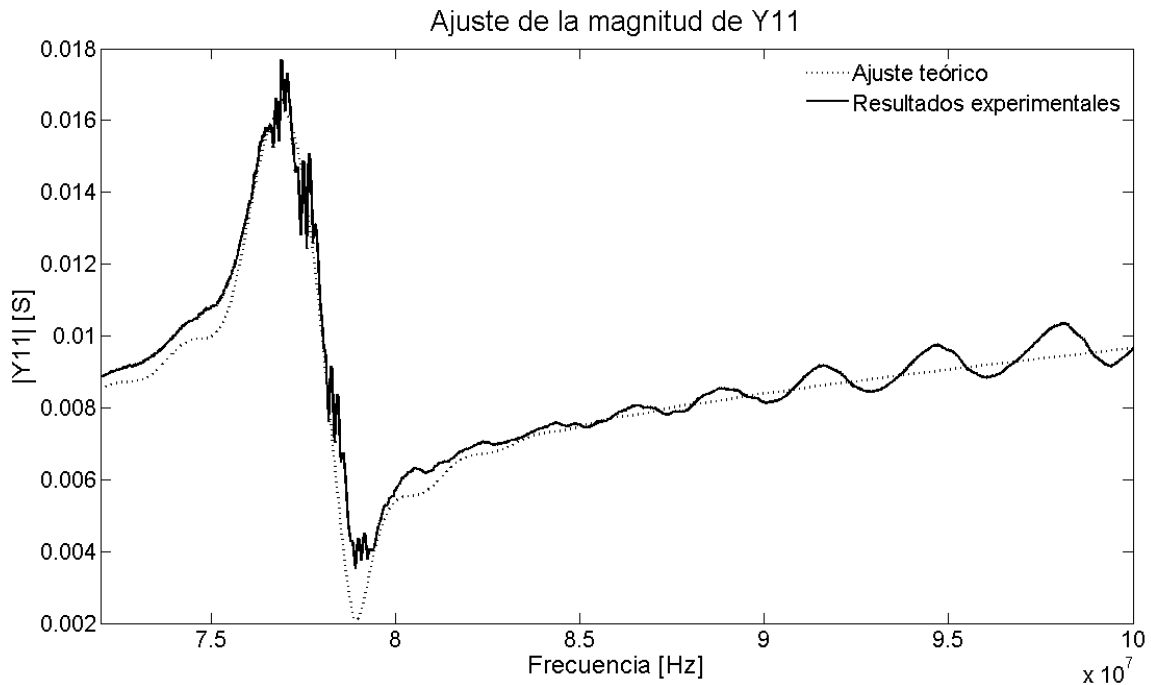


Figura 2.41.  $Y_{11}$  ajustada en amplitud y frecuencia de operación.

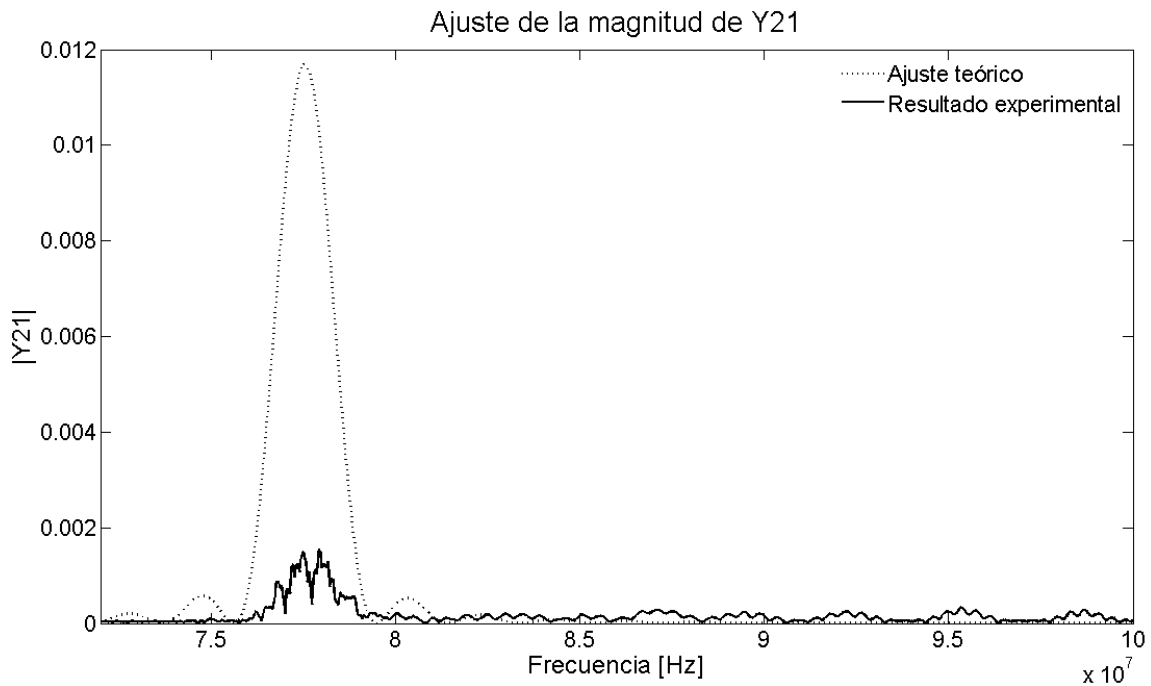


Figura 2.42.  $Y_{21}$  ajustada en amplitud y frecuencia de operación.

Mientras que las admitancias  $Y_{11}$  teóricas y experimentales, que se muestran en la figura 2.41, se asemejan en amplitud y en frecuencia, las admitancias  $Y_{21}$  obtenidas difieren significativamente en su magnitud. La admitancia calculada teóricamente es aproximadamente 7.8 veces más grande en comparación de aquella experimental. Estas

diferencias pueden deberse a dos factores que no han sido considerados en el cálculo teórico para  $Y_{21}$  de la figura 2.42: el primero es la atenuación por el material de las ondas acústicas durante la propagación, el cual se puede incluir en el modelo considerando, en la matriz P de la región de propagación de las ondas acústicas, un número de onda complejo. El segundo, es la difracción de las ondas. En los análisis previos se consideró que las ondas acústicas son ondas planas, sin embargo, según Hashimoto [64] existen dos regiones donde el frente de onda cambia: la región de Fresnel, donde las ondas pueden considerarse planas, y la región de Fraunhofer, donde el frente de onda se vuelve circular. La distancia ( $x_c$ ) desde la fuente y hasta donde ocurre la transición de ambas regiones está dada por:

$$x_c = (1 + \gamma_a)W_{idt}^2/\lambda_{saw} \quad (2.107)$$

donde  $\gamma_a$  es un factor relacionado con la anisotropía del material. Para un material isotrópico,  $\gamma_a$  es cero. Considerando  $W_{idt}$  de  $300 \mu m$  y  $\lambda_{saw}$  de  $53 \mu m$ , se obtiene que la distancia crítica  $x_c > 1.6981 mm$ . Sin embargo, para que la distancia crítica fuera mayor que la distancia entre ambos IDT's,  $\gamma_a$  debería ser mayor de 9. Se buscó en la literatura la constante  $\gamma_a$  y la constante de atenuación para el niobato de litio Y-128°, sin embargo, no fue posible hallar ambas constantes. Debido a que no se dispone de información suficiente no es posible determinar cuál de los dos efectos es el que predomina en el dispositivo.

## 2.6 Circuito oscilador

Como ya se mencionó, para medir la aceleración, se ha propuesto un circuito oscilador cuya frecuencia varíe en función de la posición de la masa inercial, es decir, es necesario construir un oscilador variable que dependa de la señal de interés. Por esta razón, primero es necesario disponer de un oscilador y, luego, hacer variar la frecuencia dependiendo de la variable a medir. Comúnmente, un circuito oscilador senoidal está formado por tres componentes [95]: un amplificador, una red selectiva en la frecuencia y un limitador de amplitud. Como ya ha sido demostrado que la línea de retardo es selectiva en el dominio de la frecuencia, para poder formar un oscilador fue necesario hacer un amplificador y, es común, utilizar los mecanismos propios de los dispositivos electrónicos utilizados en la construcción del amplificador para limitar la ganancia del amplificador y, por tanto, la amplitud de la señal de salida del oscilador. Por esta razón, para construir un oscilador con la línea de retardo se necesita solamente un amplificador. En esta sección se trata sobre el amplificador utilizado para construir el circuito oscilador, los resultados obtenidos teórica y experimentalmente, las diferencias y similitudes encontradas entre ambos resultados y, además, los circuitos electrónicos utilizados para la demodulación de la señal de aceleración.

### 2.6.1 El amplificador: diseño y simulación

Como dispositivo amplificador se consideraron diversas posibilidades, las cuales se mencionan brevemente a continuación, antes de presentar el amplificador que fue utilizado finalmente.

Como primera alternativa se implementó un circuito amplificador que apareció reportado en [96] y cuyo diagrama se muestra en la figura 2.43. A pesar de amplificar alrededor de las frecuencias de interés, la ganancia del amplificador con carga no es suficiente para que el circuito funcione como oscilador. Además, se intentó hacer el oscilador utilizando dos amplificadores diseñados y construidos por Minicircuits [97]: uno con número de serie ZX60-6013E+ y otro con número de serie ZX60-3018G+. El amplificador con terminación 6013E+ es un amplificador con un rango de operación desde 20 MHz hasta 6 GHz y con una ganancia máxima 16.2 dB, mientras que el 3018G+ tiene un rango de operación desde 20 hasta 3 GHz y una ganancia máxima de 22.8 dB. Se comprobó experimentalmente que al conectar cualquiera de los dos amplificadores a cualquiera de las dos líneas de retardo (Y-128° y Y-41°) los circuitos no oscilan en ninguno de los casos.

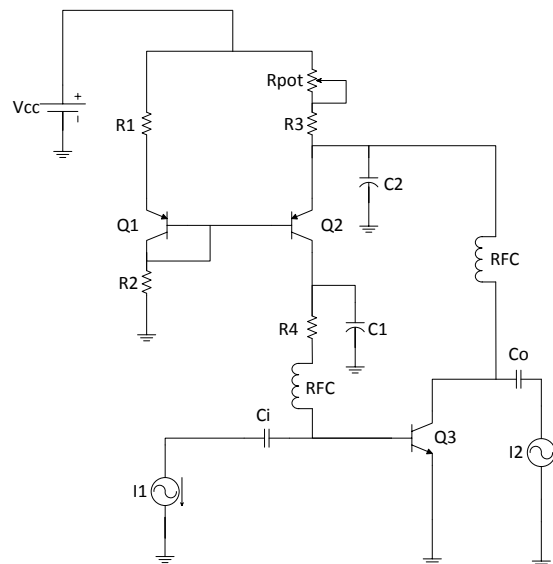


Figura 2.43. Primer circuito oscilador utilizado durante las pruebas. I1 e I2 representan las fuentes de entrada y la carga del circuito.

Como ninguna de las opciones anteriores fue satisfactoria, se modificó el circuito de la figura 2.43 para convertirlo en un amplificador de 3 etapas cuyo diagrama se muestra en la figura 2.44. Este amplificador modificado consta de dos etapas de emisor común y una de colector común. La idea de las dos etapas de emisor común es darle una ganancia de voltaje elevada al amplificador y, con la última etapa, manejar una baja impedancia a la salida del amplificador para minimizar la caída en la ganancia de tensión del amplificador. A continuación se muestran los resultados teóricos obtenidos del amplificador y del oscilador.

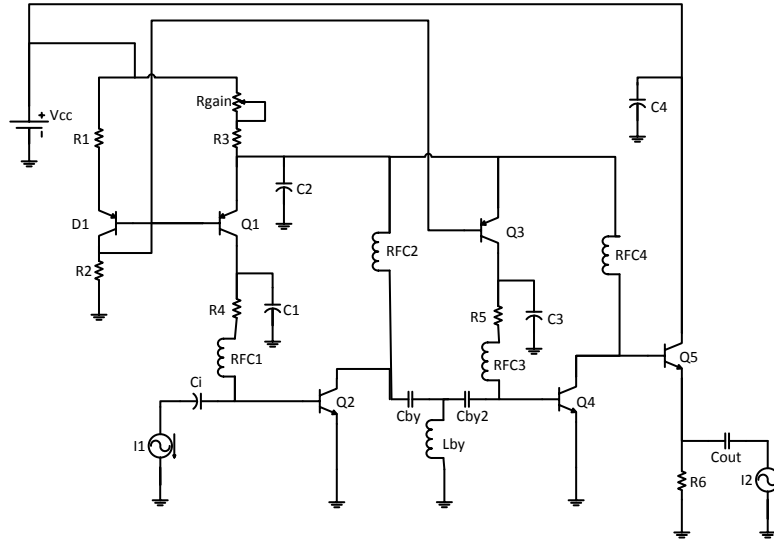


Figura 2.44. Diagrama del amplificador utilizado en el oscilador.

### 2.6.2 Resultados teóricos del circuito oscilador

Para determinar el comportamiento teórico del amplificador utilizado, es necesario establecer un modelo para cada uno de los elementos del circuito. El modelo del transistor de juntura bipolar (TBJ) que se utilizó durante las simulaciones del circuito es el mismo que se utiliza actualmente en SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuits Emphasis*) [98, 99, 100, 101] y, también, en otros programas basados en éste como: Pspice, Hspice, Tina, etc. Este modelo fue propuesto por Gummel y Poon [102] como una mejora al modelo de Ebers-Moll [103], el cual carece de una representación adecuada de algunos efectos de segundo orden, como aquellos presentes a bajas corrientes y a altos niveles de inyección [101]. Los efectos a bajas corrientes se manifiestan como una corriente adicional en la base del transistor debido a un fenómeno de recombinación, lo cual produce que la ganancia de corriente sea menor que la esperada. Los efectos debidos a altos niveles de inyección también provocan una reducción de la ganancia de corriente y, además, un aumento en el tiempo de tránsito en directa y en inversa. Debido a que este modelo es más completo y, actualmente, sigue siendo un estándar para la simulación de circuitos con TBJ's se decidió utilizarlo. En la figura 2.45 se muestra un diagrama del modelo de un TBJ tipo NPN donde  $r_b$ ,  $r_e$ ,  $r_c$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ ,  $C_{be}$  y  $C_{bc}$  son las resistencias de la base, del emisor, del colector, la corriente que entra por la base, la corriente que entra por el colector, la capacitancia entre la base y el emisor y la capacitancia entre la base y el colector, respectivamente.

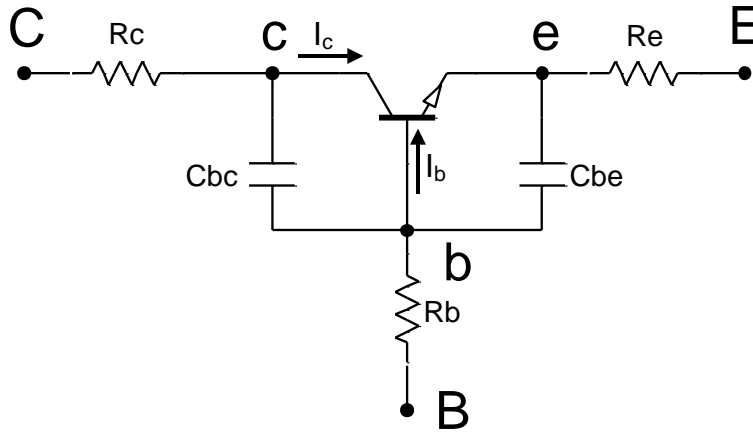


Figura 2.45. Modelo a señal grande de Gummel y Poon de un TBJ.

De acuerdo con el modelo de Gummel y Poon, la corriente de base y la corriente de colector están dadas por:

$$I_b = \frac{I_s}{\beta_F} \left( \exp\left(\frac{V_{be}}{N_f V_t}\right) - 1 \right) + I_{se} \left( \exp\left(\frac{V_{be}}{N_e V_t}\right) - 1 \right) + \frac{I_s}{\beta_R} \left( \exp\left(\frac{V_{bc}}{N_r V_t}\right) - 1 \right) + I_{sc} \left( \exp\left(\frac{V_{bc}}{N_c V_t}\right) - 1 \right) \quad (2.108)$$

$$I_c = \frac{I_s}{Q_B} \left( \exp\left(\frac{V_{be}}{N_f V_t}\right) - \exp\left(\frac{V_{bc}}{N_r V_t}\right) \right) - \frac{I_s}{\beta_R} \left( \exp\left(\frac{V_{bc}}{N_r V_t}\right) - 1 \right) - I_{sc} \left( \exp\left(\frac{V_{bc}}{N_c V_t}\right) - 1 \right) \quad (2.109)$$

Donde  $Q_B$  representa la carga total normalizada de los portadores mayoritarios en la base y está dada por:

$$Q_B = \frac{Q_1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4Q_2}) \quad (2.110)$$

$Q_1$  y  $Q_2$  están dadas por:

$$Q_1 = \left( 1 - \frac{V_{bc}}{V_a} - \frac{V_{be}}{V_{ar}} \right)^{-1} \quad (2.111)$$

$$Q_2 = \frac{I_s}{I_k} \left( \exp\left(\frac{V_{bc}}{N_f V_t}\right) - 1 \right) + \frac{I_s}{I_{kr}} \left( \exp\left(\frac{V_{bc}}{N_c V_t}\right) - 1 \right) \quad (2.112)$$

Las capacitancias variables de las uniones base-colector y base-emisor están dadas por:

$$C_{be} = \frac{\tau_F I_s}{V_t} \exp\left(\frac{V_{be}}{V_t}\right) + C_{jeo} \left( 1 - \frac{V_{be}}{V_{je}} \right)^{-M_e} \quad (2.113.a)$$

$$C_{bc} = \frac{\tau_R I_s}{V_t} \exp\left(\frac{V_{bc}}{V_t}\right) + C_{jco} \left(1 - \frac{V_{bc}}{V_{jc}}\right)^{-M_c} \quad (2.113.b)$$

$r_c$ ,  $r_e$ ,  $r_b$ ,  $I_s$ ,  $I_k$ ,  $I_{kr}$ ,  $I_{se}$ ,  $I_{sc}$ ,  $\beta_F$ ,  $\beta_R$ ,  $N_e$ ,  $N_c$ ,  $N_f$ ,  $N_r$ ,  $V_a$ ,  $V_{ar}$ ,  $\tau_F$ ,  $\tau_R$ ,  $V_{jc}$ ,  $V_{je}$ ,  $M_e$  y  $M_c$  son parámetros del modelo y su nombre y significado puede ser consultado en [100, 101].  $V_t$  es el voltaje térmico y está dado por:

$$V_t = \frac{q_e T}{k_b} \quad (2.114)$$

donde  $q_e$  es la carga del electrón, T es la temperatura en Kelvin y  $k_b$  es la constante de Boltzmann.

En la figura 2.46 se muestra el modelo del amplificador que resulta de substituir los TBJ's de la figura 2.44 por el modelo que se muestra en la figura 2.45 y que deberá ser resuelto numéricamente para obtener los resultados teóricos del sistema.

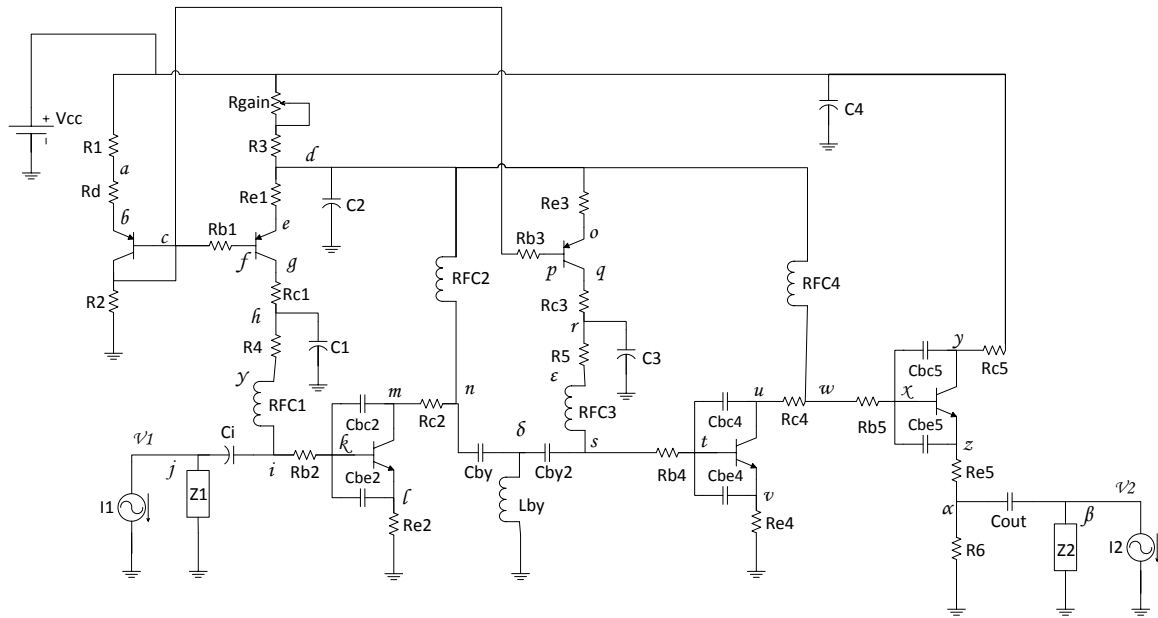


Figura 2.46. Modelo completo del amplificador y la designación que se realizó de cada uno de los nodos del circuito. Z1 y Z2 representan algún circuito de acoplamiento que pudiera colocarse entre ambas etapas<sup>5</sup>.

Para las resistencias se utilizó la ley de Ohm como la relación entre el voltaje y la corriente que circula a través ellas:

$$V_R = R I_R \quad (2.115)$$

<sup>5</sup> Se omitieron los capacitores de las uniones base-emisor y base-colector de los transistores PNP del circuito porque la función de estos transistores es polarizar a los transistores NPN y, por esta razón, no operan en alta frecuencia y sus capacitancias son poco relevantes para el comportamiento del circuito.



donde R es el valor de la resistencia. Para calcular la corriente que circula a través de un capacitor constante se utilizó:

$$I_c = C \frac{dV_c}{dt} \quad (2.116)$$

donde C es la capacitancia y V<sub>c</sub> es el voltaje en el capacitor. Para calcular la corriente que circula por un inductor constante se utilizó la siguiente ecuación:

$$I_L = \frac{1}{L} \int V_L dt \quad (2.117)$$

donde L es la inductancia y V<sub>L</sub> es el voltaje en el inductor. Sin embargo, para poder realizar la simulación numérica es necesario convertir las ecuaciones diferenciales e integrales de cada uno de los modelos de los elementos en ecuaciones en diferencias finitas. Los coeficientes de las diferencias finitas que se utilizan para aproximar las derivadas y un método para calcularlos se pueden consultar en el libro de Fornberg [104]. En la tabla 2.5 se reproducen los coeficientes para aproximar la derivadas hacia atrás dependiendo de la precisión deseada, es decir, del número de elementos considerados en la diferencia finita.

Precisión	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
1	1	-1							
2	3/2	-2	1/2						
3	11/6	-3	3/2	-1/3					
4	25/12	-4	3	-4/3	1/4				
5	137/60	-5	5	-10/3	5/4	-1/5			
6	49/20	-6	15/2	-20/3	15/4	-6/5	1/6		
7	363/140	-7	21/2	-35/3	35/4	-21/5	7/6	-1/7	
8	761/280	-8	14	-56/3	35/2	-56/5	14/3	-8/7	1/8

Tabla 2.5. Coeficientes para aproximar la 1<sup>era</sup> derivada hacia atrás a través de una diferencia finita<sup>6</sup>.

Para obtener las corrientes en los inductores es necesario calcular la integral de la ecuación 2.117. Dicha integral se aproximó utilizando un método trapezoidal, es decir, la integral definida está dada por:

$$\int_0^{t_o} V(t) dt = \int_0^{\Delta t} V(t) dt + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} V(t) dt + \dots + \int_{t_o-\Delta t}^{t_o} V(t) dt \quad (2.118)$$

donde

$$\int_0^{\Delta t} V(t) dt \approx \frac{\Delta t(V(\Delta t)+V(0))}{2} \quad (2.119)$$

<sup>6</sup> Durante las simulaciones del sistema se observó que, si se utilizan aproximaciones mayores al 4to orden, el error en la aproximación de la derivada se incrementa debido a errores por truncamiento y precisión del formato numérico utilizado en los cálculos. Además, se recomienda obtener el mínimo común denominador de las fracciones y así calcular los coeficientes presentados en la tabla 2.5, con la finalidad de hacer el menor número de divisiones y, de esta forma, reducir el error numérico.

Una vez que se ha planteado la forma de obtener las ecuaciones en diferencias que permitirán simular el circuito, es momento de escribir las ecuaciones de Kirchoff que describen el comportamiento del circuito. Es común que el análisis de los circuitos electrónicos se haga en dos etapas: un análisis en corriente directa (DC) y otro en corriente alterna (AC). Para el análisis de DC la corriente que circula a través de los capacitores es cero y el voltaje entre las terminales de los inductores es cero (Para el análisis realizado se consideró que las resistencias, los capacitores y los inductores son ideales y no presentan efectos parásitos, sin embargo estos se podrían incluir estableciendo un modelo no ideal para cada uno de ellos). A continuación se presentan, como un extracto del código, las ecuaciones utilizadas para obtener el voltaje de DC en cada uno de los nodos:

$$\begin{aligned}
 &Fu(A,1)=(V_{cc}-V_{ADC})/R1-I_{dDC}; & (2.120) \\
 &Fu(B,1)=(V_{ADC}-V_{BDC})/R_d-I_{dDC}; \\
 &Fu(C,1)=I_{dDC}+I_{b1DC}+I_{b3DC}-V_{CDC}/R2; \\
 &Fu(D,1)=(V_{cc}-V_{DDC})/R3-(I_{b1DC}+I_{c1DC})-I_{c2DC}-(I_{b3DC}+I_{c3DC})-I_{c4DC}-I_{b5DC}; \\
 &Fu(E,1)=(V_{DDC}-V_{EDC})/R_{e1}-I_{b1DC}-I_{c1DC}; \\
 &Fu(F,1)=(V_{FDC}-V_{CDC})/R_{b1}-I_{b1DC}; \\
 &Fu(H,1)=I_{c1DC}-((V_{HDC}-V_{GamDC})/R4); \\
 &Fu(G,1)=I_{c1DC}-(V_{GDC}-V_{HDC})/R_{c1}; \\
 &Fu(Gamma,1)=V_{GamDC}-V_{IDC}; \\
 &Fu(I,1)=I_{c1DC}-((V_{IDC}-V_{KDC})/R_{b2}); \\
 &Fu(K,1)=(V_{IDC}-V_{KDC})/R_{b2}-I_{b2DC}; \\
 &Fu(L,1)=I_{b2DC}+I_{c2DC}-V_{LDC}/R_{e2}; \\
 &Fu(N,1)=V_{NDC}-V_{DDC}; \\
 &Fu(M,1)=(V_{NDC}-V_{MDC})/R_{c2}-I_{c2DC}; \\
 &Fu(O,1)=(V_{DDC}-V_{ODC})/R_{e3}-I_{b3DC}-I_{c3DC}; \\
 &Fu(P,1)=(V_{PDC}-V_{CDC})/R_{b3}-I_{b3DC}; \\
 &Fu(R,1)=I_{c3DC}-(V_{RDC}-V_{EpsDC})/R5; \\
 &Fu(Q,1)=I_{c3DC}-(V_{QDC}-V_{RDC})/R_{c3}; \\
 &Fu(Epsilon,1)=V_{EpsDC}-V_{SDC}; \\
 &Fu(S,1)=I_{c3DC}-(V_{SDC}-V_{TDC})/R_{b4}; \\
 &Fu(T,1)=(V_{SDC}-V_{TDC})/R_{b4}-I_{b4DC}; \\
 &Fu(U,1)=(V_{WDC}-V_{UDC})/R_{c4}-I_{c4DC}; \\
 &Fu(V,1)=I_{c4DC}+I_{b4DC}-V_{VDC}/R_{e4}; \\
 &Fu(W,1)=V_{WDC}-V_{DDC}; \\
 &Fu(X,1)=(V_{WDC}-V_{XDC})/R_{b5}-I_{b5DC}; \\
 &Fu(Y,1)=(V_{cc}-V_{YDC})/R_{c5}-I_{c5DC}; \\
 &Fu(Alfa,1)=I_{b5DC}+I_{c5DC}-V_{AlfDC}/R6; \\
 &Fu(Z,1)=I_{b5DC}+I_{c5DC}-(V_{ZDC}-V_{AlfDC})/R_{e5};
 \end{aligned}$$

donde  $V_{cc}$  se refiere a la tensión de la fuente de voltaje y la terminación DC hace referencia a que son las ecuaciones y los voltajes de nodo para el análisis de DC. El sistema

de ecuaciones no lineales ( $F_u$ ) se debe hacer cero para obtener los voltajes de cada uno de los nodos y, además, es importante recordar que las corrientes de base y de colector son funciones de los voltajes de base, de emisor y de colector. Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales se utilizó una extensión del método de Newton [105, 106]:

$$\hat{x}^{n+1} = \hat{x}^n - J_{F_u}^{-1} F_u(\hat{x}^n) \quad (2.121)$$

donde  $\hat{x}$  es el vector de voltajes de nodo,  $F_u(\hat{x})$  es el sistema de ecuaciones no lineales del circuito electrónico y  $J_{F_u}^{-1}$  es la inversa de la matriz jacobiana de  $F_u$ . Al resolver las ecuaciones (2.120) con las siguientes resistencias:  $R_1 = R_2 = 1.2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = R_5 = 4.7 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 150 \text{ }\Omega$  y  $R_6 = 5.6 \text{ k}\Omega$  y los modelos de SPICE de los TBJ's BF959 para los transistores tipo NPN y BC557A para los transistores PNP que se muestran en el apéndice A, los voltajes de DC de cada nodo que se obtuvieron se muestran en la tabla 2.6. Además, en esta misma tabla se comparan los resultados obtenidos con el programa desarrollado en Matlab contra aquellos obtenidos con un programa comercial basado en SPICE. Se puede observar que el mayor error corresponde a la corriente de la base de los transistores Q1 y Q3, sin embargo, la diferencia relativa entre los resultados obtenidos con nuestro programa y el SPICE fue menor al 0.05% para todos los casos. Las diferencias relativas que se muestran en la tabla 2.6 fueron calculadas como:

$$\%DR = 2 \left| \frac{V_{Matlab} - V_{SPICE}}{V_{Matlab} + V_{SPICE}} \right| \quad (2.122)$$

Nodo	Matlab [V]	SPICE [V]	DR [%]
A	6.3424	6.3439	0.0236
B	6.3373	-----	-----
C	5.6608	5.6593	0.0265
D	6.2656	6.2641	0.0239
E	6.2624	-----	-----
F	5.6608	-----	-----
G	2.0647	-----	-----
H	2.0645	2.0650	0.0242
$\gamma$	0.7329	0.7328	0.0136
I	0.7329	0.7328	0.0136
J	0	0	-----
K	0.7300	-----	-----
L	0.0058	-----	-----
M	6.2468	-----	-----
N	6.2656	6.2641	0.0239
O	6.2654	-----	-----
P	5.6608	-----	-----
Q	2.0647	-----	-----
R	2.0645	2.065	0.0242
$\varepsilon$	0.7329	0.7328	0.0136

S	0.7329	0.7328	0.0136
T	0.7300	-----	-----
U	6.2468	-----	-----
V	0.0058	-----	-----
W	6.2656	6.2641	0.0239
X	6.2655	-----	-----
Y	11.9990	-----	-----
Z	5.6239	-----	-----
$\alpha$	5.6235	5.6221	0.0249
$\beta$	0	0	-----
$\delta$	0	0	-----
Corrientes			
Id1	4.7146 mA	4.7133 mA	0.0276
Ib1	1.3518 $\mu$ A	1.3524 $\mu$ A	0.0444
Ib2	283.3355 $\mu$ A	283.4365 $\mu$ A	0.0356
Ib3	1.3518 $\mu$ A	1.3524 $\mu$ A	0.0444
Ib4	283.3355 $\mu$ A	283.4365 $\mu$ A	0.0356
Ib5	13.4813 $\mu$ A	13.4776 $\mu$ A	0.0274
Ic1	283.3355 $\mu$ A	283.4365 $\mu$ A	0.0356
Ic2	18.8232 mA	18.8283 mA	0.0271
Ic3	283.3355 $\mu$ A	283.4365 $\mu$ A	0.0356
Ic4	18.8232 mA	18.8283 mA	0.0271
Ic5	990.7311 $\mu$ A	990.4630 $\mu$ A	0.0271

Tabla 2.6. Resultados del análisis de DC obtenidos con el método implementado en Matlab, con un programa comercial basado en SPICE y el porcentaje de error.

Una vez que se ha determinado el punto de operación del amplificador, a continuación se muestran las ecuaciones que describen el comportamiento de éste en AC:

$$\begin{aligned}
 Fu(A,1) &= -1/R1 * VAt - Id\_ + Id\_DC; & (2.122) \\
 Fu(B,1) &= -Id\_ + (VAt - VBt) / Rd + Id\_DC; \\
 Fu(C,1) &= (Ib1 - Ib1DC) + (Id\_ - Id\_DC) + (Ib3 - Ib3DC) - (VCt) / R2; \\
 Fu(D,1) &= (Ib1DC - Ib1) + (Ic1DC - Ic1) + (Ib3DC - Ib3) + (Ic3DC - Ic3) - VDt / R3 - C2 * DVDt - \\
 & 1 / LRFC2 * (intnum(VDt, VDant(1), dt, cont) - intnum(VNt, VNant(1), dt, cont) + intVD - intVN) - \\
 & 1 / LRFC4 * (intnum(VDt, VDant(1), dt, cont) - intnum(VWt, VWant(1), dt, cont) + intVD - intVW); \\
 Fu(E,1) &= (Ib1DC - Ib1) + (Ic1DC - Ic1) + (VDt - VEt) / Re1; \\
 Fu(F,1) &= Ib1DC - Ib1 + (VFt - VCt) / Rb1; \\
 Fu(H,1) &= Ic1 - Ic1DC - (VHt - VGammt) / R4 - C1 * DVHt; \\
 Fu(G,1) &= Ic1 - Ic1DC - (VGt - VHt) / Rc1; \\
 Fu(Gamma,1) &= ((VHt - VGammt) / R4) - 1 / LRFC1 * (intnum(VGammt, VGammant(1), dt, cont) - \\
 & intnum(VIt, VIant(1), dt, cont) + intVGamm - intVI); \\
 Fu(I,1) &= Ci * (DVJt - DVI) + (Ib2DC - Ib2) - CBCt2 * (DVKt - DVMt) - CBET2 * (DVKt - \\
 & DVLt) + 1 / LRFC1 * (intnum(VGammt, VGammant(1), dt, cont) - \\
 & intnum(VIt, VIant(1), dt, cont) + intVGamm - intVI); \\
 Fu(K,1) &= (Ib2DC - Ib2) + (VIt - VKt) / Rb2 - CBCt2 * (DVKt - DVMt) - CBET2 * (DVKt - DVLt);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Fu(L,1) &= (Ic2 - Ic2DC) + (Ib2 - Ib2DC) + CBEt2 * (DVKt - DVLt) - VLt / Re2; \\
Fu(N,1) &= (Ic2DC - Ic2) + 1 / LRFC2 * (\text{intnum}(VDt, VDant(1), dt, cont) - \\
&\text{intnum}(VNt, VNant(1), dt, cont) + \text{int}VD - \text{int}VN) - Cby * (DVNt - DVDeltat) + CBCt2 * (DVKt - \\
&DVMt); \\
Fu(M,1) &= (Ic2DC - Ic2) + CBCt2 * (DVKt - DVMt) + (VNt - VMt) / Rc2; \\
Fu(O,1) &= (Ib3DC - Ib3) + (Ic3DC - Ic3) + (VDt - VOt) / Re3; \\
Fu(P,1) &= (Ib3DC - Ib3) + (VPt - VCt) / Rb3; \\
Fu(R,1) &= Ic3 - Ic3DC - (VRt - VEpst) / R5 - C3 * DVRt; \\
Fu(Q,1) &= Ic3 - Ic3DC - (VQt - VRt) / Rc3; \\
Fu(Epsilon,1) &= (VRt - VEpst) / R5 - 1 / LRFC3 * (\text{intnum}(VEpst, VEpsant(1), dt, cont) - \\
&\text{intnum}(VSt, VSant(1), dt, cont) + \text{int}VEps - \text{int}VS); \\
Fu(S,1) &= Cby2 * (DVDeltat - DVSt) + (Ib4DC - Ib4) - CBCt4 * (DVTt - DVUt) - CBEt4 * (DVTt - \\
&DVVt) + 1 / LRFC3 * (\text{intnum}(VEpst, VEpsant(1), dt, cont) - \\
&\text{intnum}(VSt, VSant(1), dt, cont) + \text{int}VEps - \text{int}VS); \\
Fu(T,1) &= (Ib4DC - Ib4) + (VSt - VTt) / Rb4 - CBCt4 * (DVTt - DVUt) - CBEt4 * (DVTt - DVVt); \\
Fu(U,1) &= (Ic4DC - Ic4) + CBCt4 * (DVTt - DVUt) + (VWt - VUt) / Rc4; \\
Fu(V,1) &= (Ic4 - Ic4DC) + (Ib4 - Ib4DC) + CBEt4 * (DVTt - DVVt) - VVt / Re4; \\
Fu(W,1) &= (Ic4DC - Ic4) + (Ib5DC - Ib5) + CBCt4 * (DVTt - \\
&DVUt) + 1 / LRFC4 * (\text{intnum}(VDt, VDant(1), dt, cont) - \text{intnum}(VWt, VWant(1), dt, cont) + \text{int}VD - \\
&\text{int}VW) - CBEt5 * (DVXt - DVZt) - CBCt5 * (DVXt - DVYt); \\
Fu(X,1) &= (Ib5DC - Ib5) + (VWt - VXt) / Rb5 - CBEt5 * (DVXt - DVZt) - CBCt5 * (DVXt - DVYt); \\
Fu(Y,1) &= (Ic5DC - Ic5) + CBCt5 * (DVXt - DVYt) - VYt / Rc5; \\
Fu(Alfa,1) &= (Ib5 - Ib5DC) + (Ic5 - Ic5DC) - VALft / R6 + CBEt5 * (DVXt - DVZt) - Co * (DVALft - \\
&DVBett); \\
Fu(Z,1) &= (Ib5 - Ib5DC) + (Ic5 - Ic5DC) + CBEt5 * (DVXt - DVZt) - (VZt - VALft) / Re5; \\
Fu(J,1) &= I1t - Ci * (DVJt - DVIIt) - VJt / RZ1 - 1 / LZ1 * (\text{intnum}(VJt, VJant(1), dt, cont) + \text{int}VJ) - \\
&CZ1 * DVJt; \\
Fu(Beta,1) &= -I2t + Co * (DVALft - DVBett) - VBetat / RZ2 - \\
&1 / LZ2 * (\text{intnum}(VBetat, VBetaant(1), dt, cont) + \text{int}VBetat) - CZ2 * DVBett; \\
Fu(Delta,1) &= Cby * (DVNt - DVDeltat) - Cby2 * (DVDeltat - DVSt) - \\
&(1 / Lby) * (\text{intnum}(VDeltat, VDeltaant(1), dt, cont) + \text{int}VDeltat);
\end{aligned}$$

donde “ $\text{intnum}(Vt, Vant, dt, cont) + \text{int}V$ ” representa la integral del voltaje de algún nodo que está denotado por alguna literal mayúscula, “ $DVnodot$ ” se refiere a la derivada del voltaje de algún nodo, las corrientes marcadas con DC se refieren a las corrientes de DC que entran a la base o al colector de alguno de los transistores y aquellas corrientes que no incluyen la etiqueta “DC” se refieren a las corrientes de AC. Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales se utilizó el método de Newton (2.121). En la figura 2.47 se comparan la simulación en AC obtenida con Matlab y con el programa comercial en SPICE.

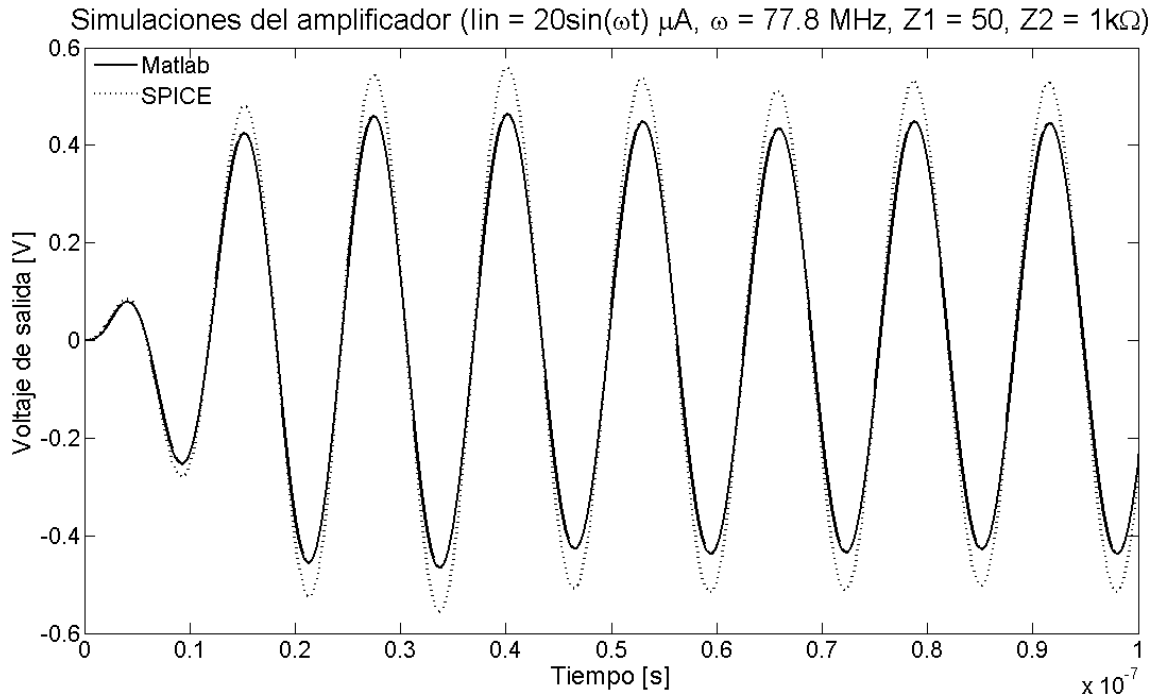


Figura 2.47. Comparación en AC de las simulaciones hechas con el programa desarrollado en Matlab y con aquel programa comercial basado en SPICE.

En la figura 2.47 se aprecia una diferencia en la amplitud entre ambas simulaciones, la cual se debe principalmente a la forma en que se calcula la capacitancia de las uniones de los transistores; sin embargo, con el programa de Matlab, las capacitancias se calcularon según se indica en [98], la cual es una forma simplificada de la forma en que se indica en [101]. Se observó que cuando estas capacitancias son muy pequeñas o nulas, las diferencias entre ambos trazos se hacen mucho menores.

La simulación del amplificador realimentado con la línea de retardo SAW, que se describió en la sección 2.2, requiere de ciertas consideraciones adicionales y, por esta razón, no es inmediata y, hasta donde se tiene conocimiento, la simulación en el dominio del tiempo de dispositivos SAW y circuitos electrónicos no ha sido reportada en la literatura. A continuación se describe el método empleado y, después, se presentan los resultados de las simulaciones del amplificador con la línea de retardo.

Puesto que no hay algún circuito adicional entre la línea de retardo y el amplificador, los voltajes en los nodos  $j$  y  $\beta$  son las diferencias de potencial que hay entre las terminales de la línea de retardo y, es a través de ellos, como se hace la unión entre ambos sistemas durante las simulaciones. Lo primero que debe observarse es que ahora las fuentes de corriente conectadas al amplificador son fuentes de corriente dependientes del voltaje en los nodos  $j$  y  $\beta$  y, por esta razón,  $\frac{\partial I_1}{\partial v_j}$ ,  $\frac{\partial I_1}{\partial v_\beta}$ ,  $\frac{\partial I_2}{\partial v_j}$  y  $\frac{\partial I_2}{\partial v_\beta}$  son diferentes de cero y, por tanto, es necesario incluir estas derivadas en el jacobiano de las ecuaciones que describen al sistema.

A continuación se describe la forma de calcularlas. La corriente que entra a un bipuerto, según sus parámetros de admitancias, está dada por la ecuación (2.69), para  $n = 2$ , donde  $I$ ,  $V$  y  $Y$  se encuentran en el dominio de la frecuencia, entonces, se puede demostrar que:

$$\frac{\partial I_1(V_1, V_2, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega Y_{11}(\omega) V_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega Y_{12}(\omega) V_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.123.a)$$

y

$$\frac{\partial I_2(V_1, V_2, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega Y_{21}(\omega) V_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega Y_{22}(\omega) V_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.123.b)$$

Por otro lado, por la regla de la cadena para funciones multivariable se tiene:

$$\frac{\partial I_1(V_1, V_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial I_1}{\partial V_1} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial I_1}{\partial V_2} \frac{\partial V_2}{\partial t} \quad (2.124.a)$$

$$\frac{\partial I_2(V_1, V_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial I_2}{\partial V_1} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial I_2}{\partial V_2} \frac{\partial V_2}{\partial t} \quad (2.124.b)$$

Para obtener  $\frac{\partial I_1}{\partial V_1}$ ,  $\frac{\partial I_1}{\partial V_2}$ ,  $\frac{\partial I_2}{\partial V_1}$  y  $\frac{\partial I_2}{\partial V_2}$ , basta comparar las ecuaciones (2.123.a) con (2.124.a) y (2.123.b) con (2.124.b), así las derivadas quedan como:

$$\frac{\partial I_1}{\partial V_1} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega Y_{11}(\omega) V_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega}{\frac{\partial V_1}{\partial t}} \quad (2.125.a)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial V_2} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega Y_{12}(\omega) V_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega}{\frac{\partial V_2}{\partial t}} \quad (2.125.b)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial V_1} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega Y_{21}(\omega) V_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega}{\frac{\partial V_1}{\partial t}} \quad (2.125.c)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial V_2} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega Y_{22}(\omega) V_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega}{\frac{\partial V_2}{\partial t}} \quad (2.125.d)$$

Entonces, el único requisito para poder aplicar el método descrito por las ecuaciones (2.123) a (2.125), para la simulación del sistema, es la existencia de la transformada de Fourier de  $V_j(t)$  y  $V_\beta(t)$ . A continuación, se presenta un ejemplo de aplicación del método propuesto: Si  $V_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}$  y  $V_2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i\omega_m t}$ , se desea encontrar  $\frac{\partial I_1}{\partial V_1}$  y  $\frac{\partial I_1}{\partial V_2}$ .

Para resolver el problema, lo primero que debe hacerse es calcular las transformadas de Fourier de  $V_1(t)$  y de  $V_2(t)$ , las cuales son:

$$V_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi C_n \delta(\omega - \omega_n) \quad (2.126)$$

y

$$V_2(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi C_m \delta(\omega - \omega_m) \quad (2.127)$$

Por otro lado, aplicando la ecuación (2.123), junto con (2.126) y (2.127), y resolviendo las integrales, se tiene que:

$$\frac{\partial I_1(t)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\omega_n Y_{11}(\omega_n) C_n e^{i\omega_n t} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i\omega_m Y_{12}(\omega_m) C_m e^{i\omega_m t} \quad (2.128)$$

Por otro lado, las derivadas  $\frac{\partial V_1(t)}{\partial t}$  y  $\frac{\partial V_2(t)}{\partial t}$  están dadas por:

$$\frac{\partial V_1(t)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\omega_n C_n e^{i\omega_n t} \quad (2.129)$$

y

$$\frac{\partial V_2(t)}{\partial t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i\omega_m C_m e^{i\omega_m t} \quad (2.130)$$

De acuerdo con la ecuación (2.125) se tiene que:

$$\frac{\partial I_1}{\partial V_1} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} i\omega_n Y_{11}(\omega_n) C_n e^{i\omega_n t}}{\frac{\partial V_1(t)}{\partial t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{11}(\omega_n) \quad (2.131)$$

y

$$\frac{\partial I_1}{\partial V_2} = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} i\omega_m Y_{12}(\omega_m) C_m e^{i\omega_m t}}{\frac{\partial V_2(t)}{\partial t}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_{12}(\omega_m) \quad (2.132)$$

Por la definición de las funciones  $V_1(t)$  y  $V_2(t)$ , éstas están expresadas como una serie compleja de Fourier y, por tanto, representan una señal periódica compleja o real. Sin embargo, las ecuaciones (2.131) y (2.132) sugieren que las derivadas de las corrientes que entran a la línea de retardo son complejas, incluso si la función de entrada es real. El hecho de tener una derivada compleja hace que la solución de las ecuaciones (2.122) sea compleja. Por último, cabe mencionar que debido a que las transformadas de Fourier son estimadas numéricamente a través de la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés), fue necesario expresar los voltajes  $V_j$  y  $V_\beta$  como vectores con una longitud determinada, donde el tiempo cero está centrado. En la figura 2.48 se muestra el resultado obtenido de la simulación del sistema utilizando el programa desarrollado en Matlab y los parámetros de admitancias obtenidos teóricamente para la línea de Y-128° y que se muestran en las figuras 2.41 y 2.42.



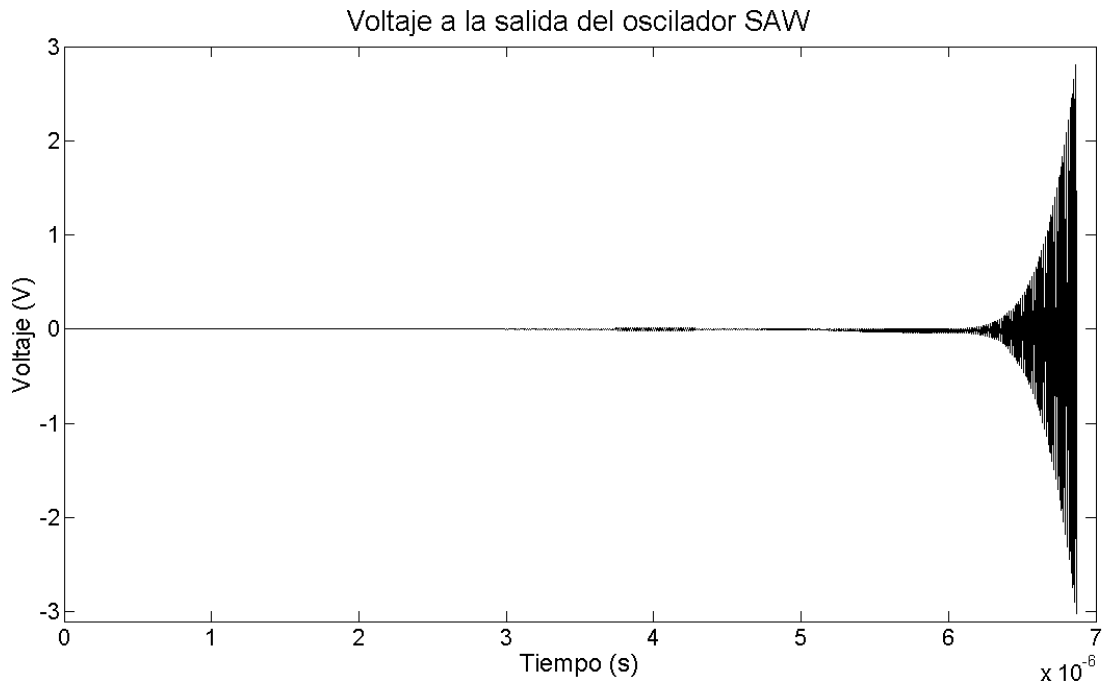


Figura 2.48. Simulación del circuito oscilador formado por el amplificador y la línea de retardo.

Debido a la escala no es posible apreciar con claridad la forma del trazo en las regiones más importantes de la simulación por lo cual, a continuación, se presentan algunas ampliaciones de unas regiones de interés. En la figura 2.49 se muestra la respuesta al impulso del sistema ( $0 \leq t \leq 0.2 \mu s$ ) y, se compara con aquella para el caso del amplificador cuando se le aplica el mismo impulso de corriente y, en lugar de la línea de retardo, se le han conectado a la entrada y a la salida resistencias de  $50\Omega$ . En esta figura es posible observar que ambos trazos son similares, sin embargo, cuando se conecta la línea de retardo se observan rizados adicionales. En la figura 2.50 se muestra la salida del oscilador en el intervalo de tiempo de  $6.5 \mu s \leq t \leq 6.85 \mu s$ . Después de haber medido la frecuencia de la señal de salida en varios periodos y obteniendo un promedio, se determinó que la frecuencia de oscilación del circuito es de: 77.5069 MHz. Esta medición de frecuencia no se pudo hacer por medio de la FFT porque el número de puntos es relativamente pequeño y no permite obtener un espectro con una buena resolución. Lo que se hizo para obtener la frecuencia fue medir, por medio de interpolaciones lineales, el tiempo desde un cruce por cero hasta el siguiente en cada ciclo.

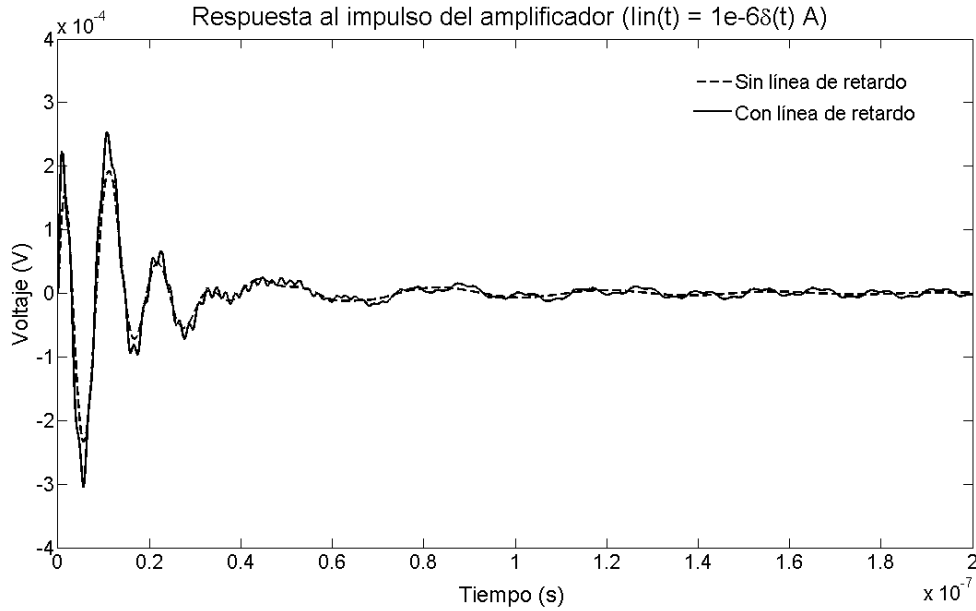


Figura 2.49. Respuesta al impulso del oscilador.

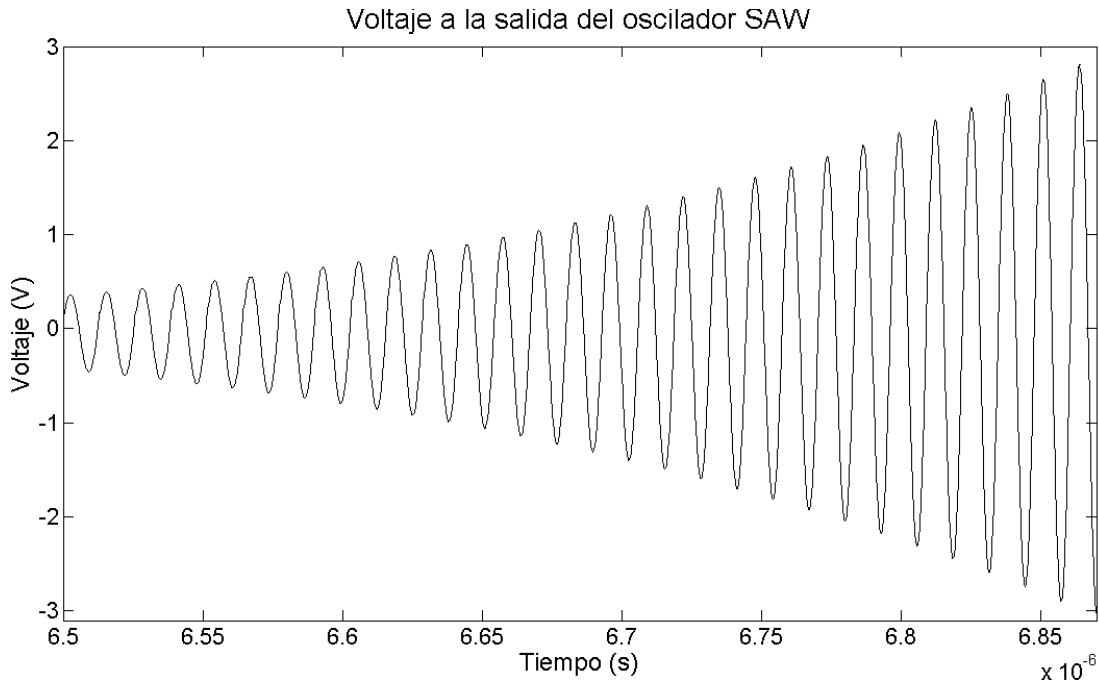


Figura 2.50. Acercamiento de la señal de salida en el oscilador.

Después de revisar los datos de la figura 2.48, se determinó el momento para el cual la señal que ha viajado por la línea de retardo realimenta al amplificador y hace que la señal de salida crezca significativamente, siendo éste de aproximadamente a los 2.74  $\mu\text{s}$ ; sin embargo, alrededor de los 2.1  $\mu\text{s}$  se observa que la forma de las oscilaciones propias del circuito cambian. Estos resultados se muestra en la figura 2.51.

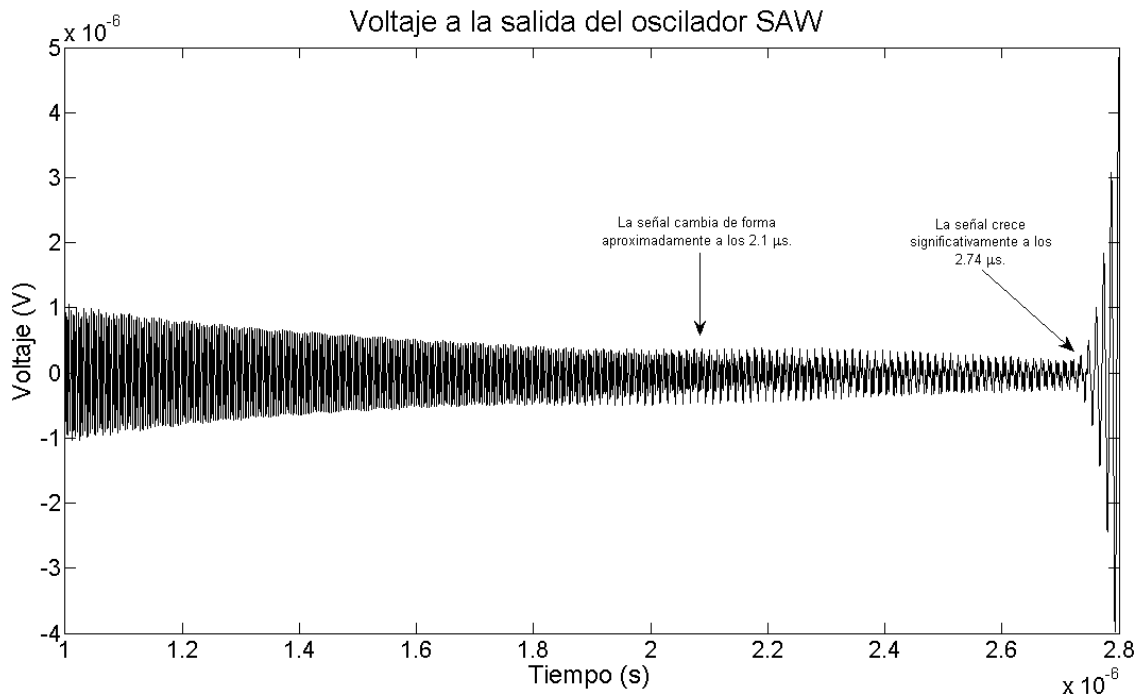


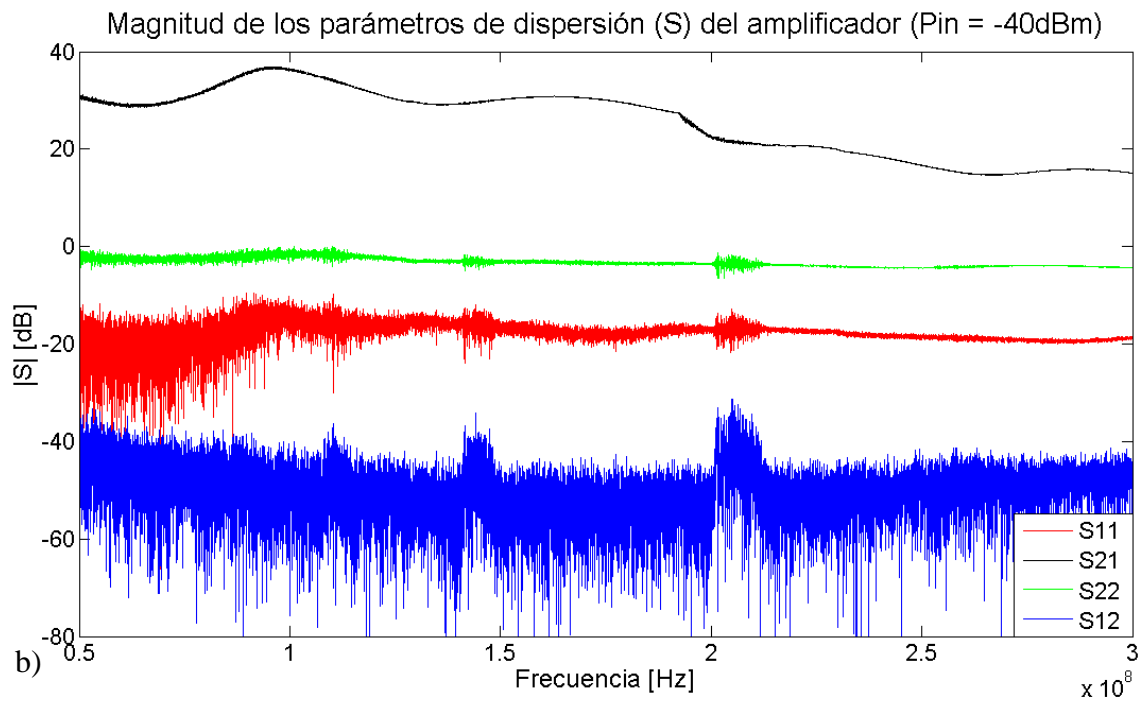
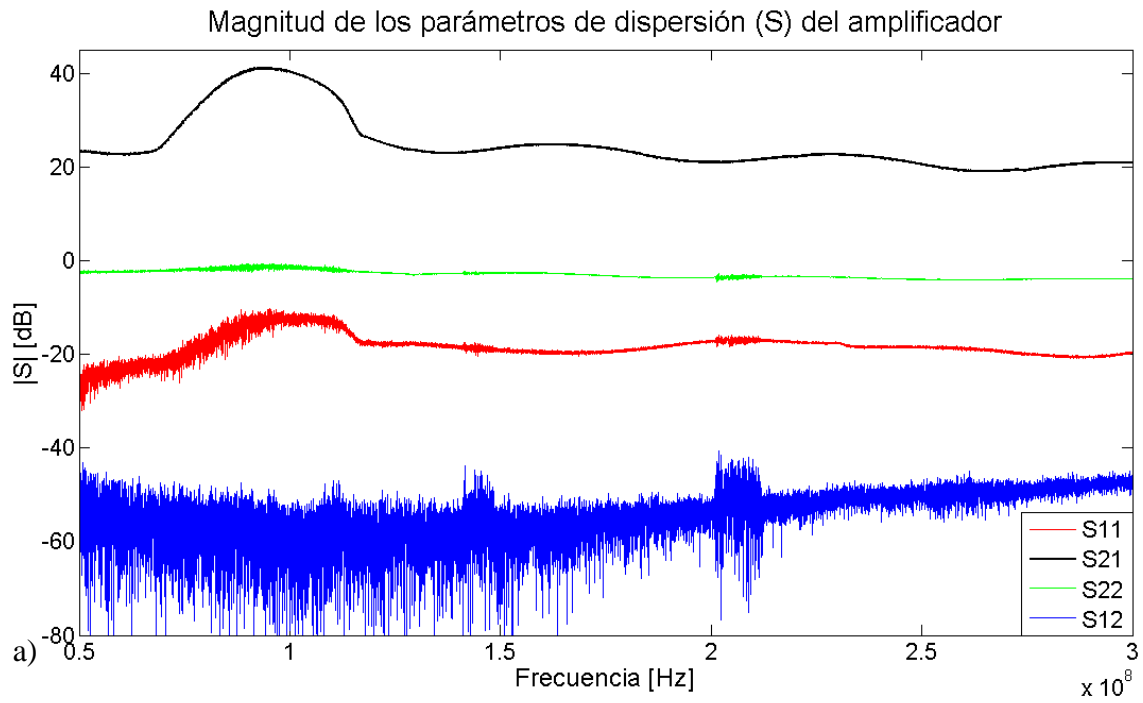
Figura 2.51. Simulación del momento en que el amplificador es realimentado por la línea de retardo.

En la siguiente sección se describe la caracterización que se realizó con el amplificador, y el experimento realizado con el oscilador y se reportan los resultados experimentales más significativos.

### 2.6.3 Resultados experimentales del circuito oscilador

Para caracterizar el circuito amplificador, cuyo diagrama se muestra en la figura 2.44, se midieron sus parámetros S (Figuras 2.52) para diferentes potencias eléctricas (-30 dBm y -40 dBm). La ganancia del amplificador ( $S_{21}$ ) varía dependiendo de la potencia de entrada, sin embargo, ésta se encuentra por encima de los 40 dB con una carga a la salida de  $50 \Omega$ . Este hecho confirma que el amplificador es capaz de mantener una ganancia elevada para valores de carga relativamente bajos y, además, es capaz de mantener su ganancia a la frecuencia del primer armónico de la línea de retardo.

Para hacer el circuito oscilador basta con conectar alguna de las dos líneas de retardo fabricadas entre la entrada y la salida del amplificador y, para observar la señal del oscilador, es necesario conectar un osciloscopio. En la figura 2.53 se muestra la señal de salida obtenida con un osciloscopio Agilent. En esta figura es posible observar que el sistema oscila a una frecuencia aproximada de 77.52 MHz cuando se le conecta la línea de retardo cuya orientación cristalina es  $Y-128^\circ$ . Aunque no se muestra la figura correspondiente, para la línea de retardo con orientación  $Y-41^\circ$  se obtuvo una frecuencia de oscilación de 82 MHz.



Figuras 2.52. a) Parámetros de dispersión para una señal con una potencia de -30 dBm y b) con una potencia de -40 dBm.

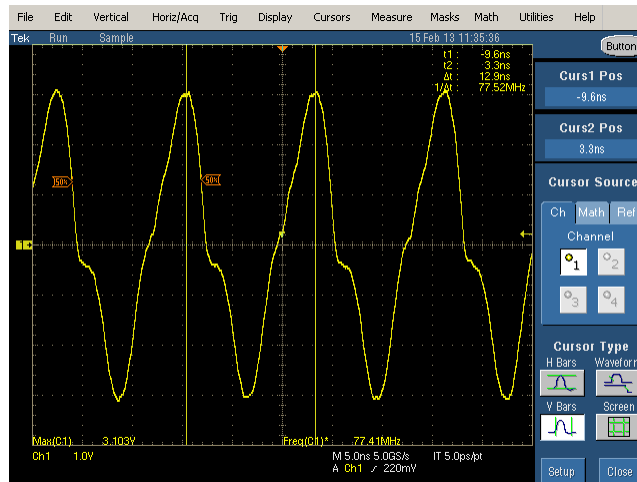


Figura 2.53. Oscilograma obtenido del circuito oscilador.

#### 2.6.4 Comparación de los resultados teóricos y de los experimentales

A lo largo de esta sección se muestran las semejanzas y las diferencias que existen entre los resultados obtenidos por medio de la simulación y de la experimentación. Lo primero que hay que notar a favor de las simulaciones es que la frecuencia de oscilación simulada y obtenida experimentalmente son de 77.5069 MHz y 77.52 MHz, respectivamente. El error entre ambos resultados es del 0.0169%. En la figura 2.54 se muestra el coeficiente  $S_{21}$  en el dominio del tiempo<sup>7</sup>. Con esta información es posible medir el retardo de las ondas acústicas y, conociendo la distribución geométrica de la línea de retardo, la velocidad de las ondas acústicas. Según los datos experimentales, el tiempo de retardo de la línea es de aproximadamente 2.3  $\mu$ s. Por otro lado, se sabe que entre ambos centros de los electrodos interdigitales hay una distancia de 9.46 mm, entonces, la velocidad de las ondas es de 4113 m/s. Este resultado apoya la hipótesis de que el desplazamiento en la frecuencia del oscilador de 75 MHz, como se había diseñado, hasta 77.5 MHz se debe a que la velocidad de las ondas no es igual a la calculada teóricamente por medio del método de Campbell y Jones debido a que las constantes elásticas del material son diferentes a las que se utilizaron durante los cálculos teóricos. El retardo marcado en la figura 2.54 en 2.9  $\mu$ s es aproximadamente el tiempo que tardan las SAW en llegar desde un extremo del IDT hasta el otro. Según, los resultados obtenidos con la simulación del oscilador, los efectos de la realimentación a través de la línea de retardo son notorios hasta los 2.74  $\mu$ s, este tiempo se encuentra dentro del rango de 2.3 a 2.9  $\mu$ s que corresponde con el tiempo para el cual las SAW transitan a través de los electrodos interdigitales por primera vez. Aunque parece haber una diferencia de aproximadamente 0.44  $\mu$ s entre el tiempo de retardo simulado y experimental, es posible que las ondas llegarán antes de 2.74  $\mu$ s pero que sus efectos fueran pequeños para verse reflejados en la salida del amplificador.

<sup>7</sup> Es importante recordar que los parámetros S se miden en el dominio de la frecuencia y, por medio de la transformada rápida de Fourier inversa se obtienen en el dominio del tiempo.

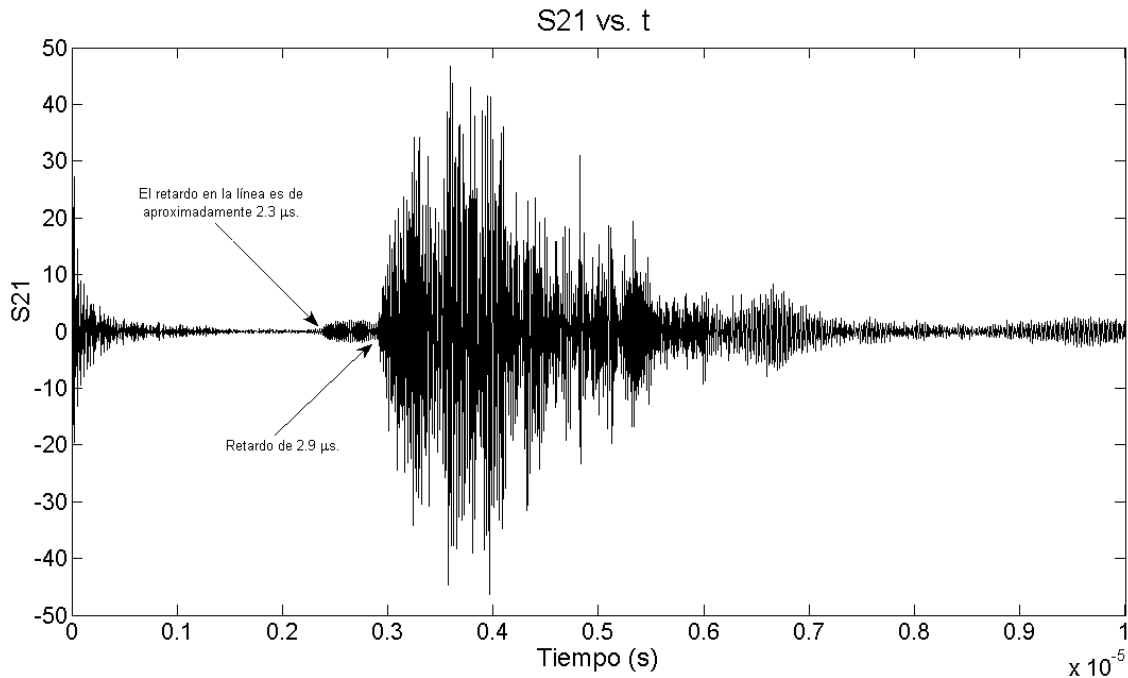


Figura 2.54. Parámetro S21 de la línea de retardo Y-128° en el dominio del tiempo. En esta figura se observa el tiempo que tardan en viajar de un extremo al otro las SAW.

Una diferencia que se observó entre la señal de salida que se midió y la simulada es la forma. Mientras que la señal simulada se parece más a una senoidal, la señal experimental presenta claras distorsiones cercanas al cruce por cero.

### 2.6.5 Demodulación de la señal

En las secciones anteriores se ha mostrado cómo el amplificador propuesto en 2.6.1 funciona como un oscilador cuando se le conecta la línea de retardo. Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, la intención de tener un oscilador con la línea de retardo es poder medir alguna variable de interés que produzca variaciones en la frecuencia de oscilación del circuito, que en este caso es la aceleración. Entonces, la señal de interés quedará modulada en la frecuencia y hace necesario contar con un circuito electrónico que permita extraer la señal de interés. Para lograr la demodulación de la señal del oscilador variable construido se utilizó un demodulador superheterodino [95]. El circuito utilizado está compuesto por diferentes etapas: el oscilador SAW, un mezclador ZAD-1-1+ fabricado por Minicircuits [97], un filtro pasobajas, una etapa de acondicionamiento de señal y una etapa que convierte la frecuencia de la señal a voltaje, la cual está compuesto por un PLL (*Phase Locked Loop*) [107, 108]. En la figura 2.55 se muestra el diagrama de bloques del demodulador. Como oscilador local se utilizó un generador de funciones HP modelo 8648A.

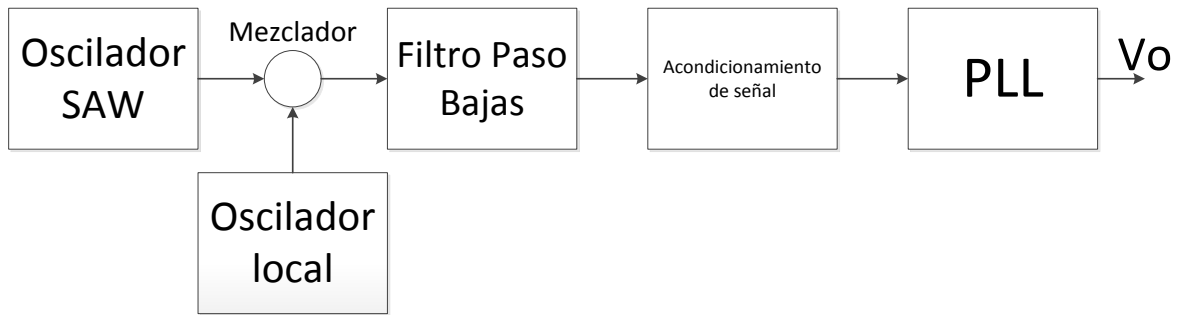


Figura 2.55. Diagrama a bloques del demodulador utilizado.

En la etapa de filtrado se utilizó un filtro pasobajas de octavo orden construido con 4 filtros activos iguales, en una topología Sallen Key [109] y conectados en cascada. El filtro fue diseñado para tener una respuesta plana en la banda de paso. En la figura 2.56 se muestra el diagrama de un sólo filtro Sallen Key. Según un análisis hecho en Tina del filtro de octavo grado (4 filtros Sallen Key de la figura 2.56 en cascada), la frecuencia de corte se encuentra alrededor de los 80 kHz, la banda de paso es plana hasta los 50 kHz y la ganancia del filtro de aproximadamente 15 dB.

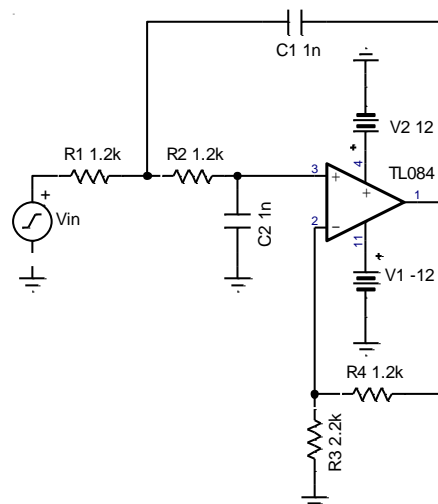


Figura 2.56. Diagrama electrónico del filtro Sallen Key de segundo orden.

Para el acondicionamiento de señal, se utilizó un PLL digital que trabaja con una entrada al PLL pulsada entre 0 y 12 Volts. Por esta razón, como etapa previa al PLL se utilizó un comparador. En la figura 2.57 se muestra el diagrama de este circuito.

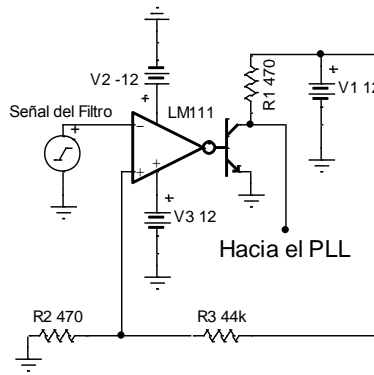


Figura 2.57. Diagrama del comparador utilizado.

Como convertidor de voltaje a frecuencia se utilizó un PLL NE564 conectado como demodulador de FM. En la figura 2.58 de esta sección se reproduce el diagrama del circuito tal como aparece en la hoja de especificaciones del fabricante [110]. Se ajustó el circuito para que el oscilador controlado por voltaje del PLL, oscilara libremente a aproximadamente 13.5 kHz.

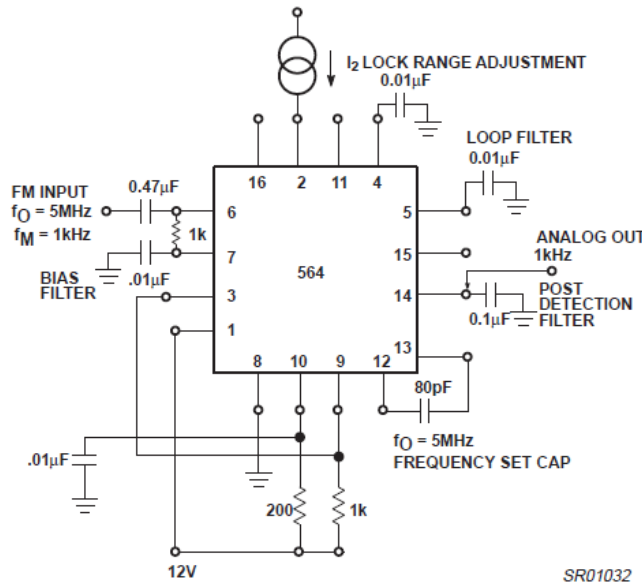


Figura 2.58. Demodulador de FM con un NE564N.

Para caracterizar el sistema electrónico descrito anteriormente se le aplicó a la entrada una señal senoidal a diferentes frecuencias y se midió el voltaje a la salida del PLL. Después de repetir las mediciones 5 veces, se obtuvo el promedio de los datos y éstos se presentan en la figura 2.59; además, se incluye el ajuste lineal de dichos datos, el cual mostró un coeficiente de correlación lineal cercano a uno. Para todos los casos, la desviación estándar de los datos fue menor a 0.02 V.



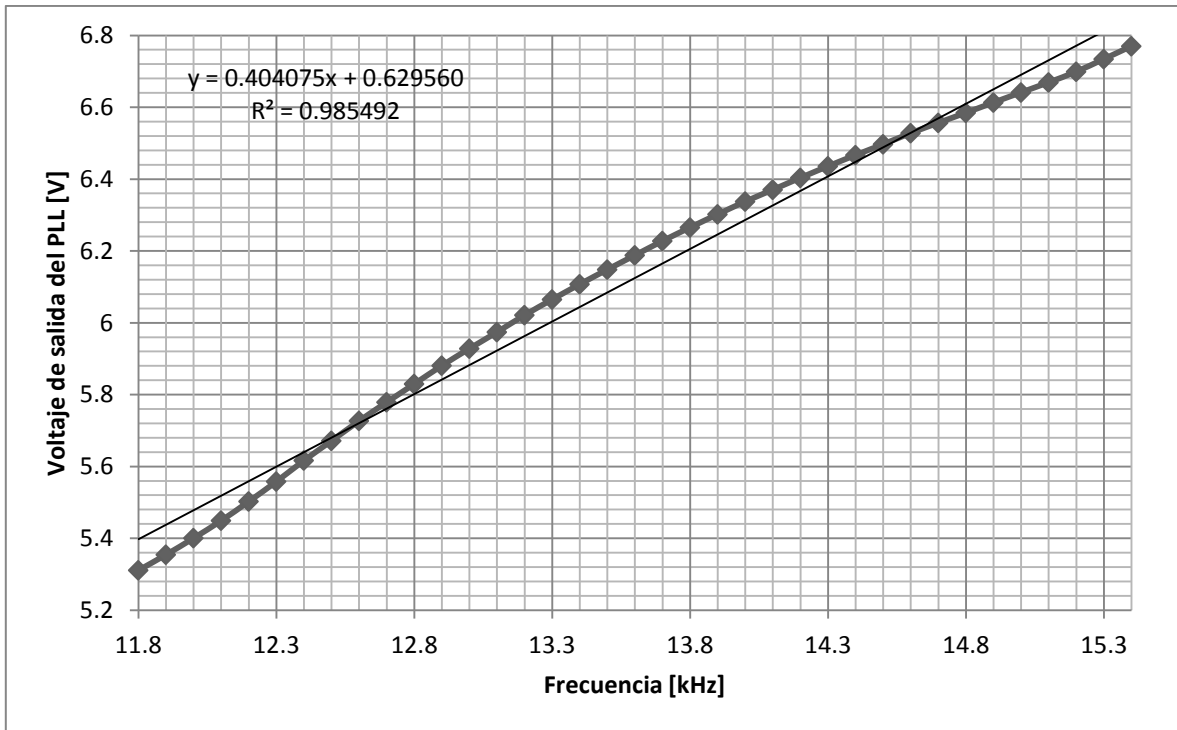


Figura 2.59. Caracterización del circuito demodulador de FM.

Durante este capítulo se trató sobre el análisis y el diseño de cada una de las partes que componen al oscilador, es decir, se revisó la teoría básica de los dispositivos de ondas acústicas superficiales, se mostró el diseño que se realizó para la construcción de la línea de retardo; se presentaron los resultados de la caracterización de la línea de retardo por medio de AFM, XRD, SEM, entre otras; se obtuvieron los parámetros de dispersión y de admitancias de la línea de retardo y se compararon contra aquellos obtenidos teóricamente; se explicaron las posibles causas de las diferencias entre los parámetros obtenidos teórica y experimentalmente; se mostró el procedimiento que se siguió para hacer las simulaciones del amplificador propuesto y su enlace con la línea de retardo para hacer las simulaciones del oscilador en el dominio del tiempo y, por último, se describió y caracterizó el circuito demodulador empleado para convertir las variaciones de frecuencia del oscilador en una señal en banda base. Estos resultados habrán de retomarse en el capítulo 4 para tratar sobre la combinación de los dispositivos SAW con los MEMS.



# 3. Sistemas Microelectromecánicos

---

## 3.1 Antecedentes

A pesar de que no existe una definición aceptada convencionalmente, los sistemas microelectromecánicos (MEMS) poseen ciertas características distintivas: son sistemas embebidos miniaturizados en los que hay uno o más componentes y/o estructuras micromaquinadas [111]; las dimensiones de estas estructuras se encuentran en un rango micrométrico (desde 1  $\mu\text{m}$  a 1mm, usualmente 1  $\mu\text{m}$  a 100  $\mu\text{m}$ ); *electro* sugiere la presencia de dispositivos electrónicos, eléctricos o ambos, es decir, un fenómeno de tipo eléctrico con el que funciona el sistema; aunque el nombre sugiere que estos dispositivos tienen una parte mecánica, estos sistemas pueden tenerla o no y, en general, se utilizan como sensores o actuadores aunque se suele incluir partes de procesamiento de señales, control, etc. y, en aquellos MEMS que han resultado más exitosos, se ha tratado de cambiar el paradigma sobre el funcionamiento del dispositivo y, no solamente, en hacerlos más pequeños [1]. En los MEMS, actualmente, intervienen fenómenos térmicos, eléctricos, magnéticos, inerciales, ópticos, de microfluídica, de presión, etc. y algunas de sus principales aplicaciones son: el sensado de presión, de aceleración o velocidad angular, de campo magnético, en interruptores de RF, resonadores y detectores biomédicos [93]. Entonces, el término MEMS es un tanto ambiguo e incluye un gran conjunto de sistemas en los que intervienen una gran variedad de fenómenos físicos, por esta razón, se considera que los MEMS son un conjunto de herramientas, un producto físico y una metodología para hacer algo [111].

Según Bao [18], la historia de los MEMS comienza en 1954 cuando C.S. Smith descubrió la piezoresistencia en germanio y silicio, es decir, se observó que la resistencia de un filamento de germanio o silicio cambia cuando éste se somete a un esfuerzo mecánico. El efecto de la piezoresistencia es similar a aquel observado en un metal cuando éste se somete a un esfuerzo, sin embargo, existen diferencias fundamentales entre ambos fenómenos: en el metal, la variación en la resistencia se debe a la deformación geométrica mientras que la piezoresistencia es una variación en la resistencia del material; para el caso del metal, el efecto isotrópico mientras que en el caso de la piezoresistencia es anisotrópico y éste puede ser hasta dos órdenes de magnitud mayor en comparación con aquel observado en la deformación en el metal. Esto hizo que se buscara incorporar este fenómeno para hacer sensores, especialmente, reemplazar aquellos que se habían construido hasta entonces a partir de la deformación en el metal. Así fue cómo surgió el piezoresistor y éste fue aplicado como un sensor mecánico. Durante la década de los 60's, la tecnología del silicio se desarrolló rápidamente y debido a sus propiedades fue que se decidió utilizarlo en aplicaciones mecánicas. Fue así que se logró realizar un sensor de presión formado por una membrana de silicio a la cual, previamente, se le habían fabricado piezoresistores y,

después, la membrana fue unida a un soporte hecho de vidrio. De esta forma, el silicio fue usado en una misma aplicación como material sensible y pieza mecánica. Después de haber logrado realizar sensores de presión utilizando silicio como medio mecánico y los piezoresistores como elementos sensibles; no fue hasta finales de los 70's cuando se pudo realizar un microacelerómetro siguiendo el mismo principio, debido a que presenta una estructura mecánica más compleja. Un hecho que facilitó su construcción fue el grabado anisotrópico sobre silicio, desarrollado a mediados de la década de los setenta.

Durante estas últimas décadas la tecnología MEMS ha seguido desarrollándose en diferentes ejes: los materiales utilizados en los MEMS, los métodos de fabricación, los métodos para hacer la transducción de las señales de interés, la electrónica necesaria para operar con los MEMS, los tipos de estructuras utilizadas y sus aplicaciones, la resolución de la litografía, entre otras. La fabricación de MEMS es compleja y, normalmente, para lograr construir estos dispositivos se elaboran procesos. Éstos están formados por diferentes etapas y, en cada una de ellas, se realiza alguna acción como depositar una capa, hacer un grabado, dopar el material, crecer una película de óxido, etcétera. Como referencia de los métodos más importantes en MEMS y sus principales características se recomienda revisar el libro de Madou [112]. Para realizar las microestructuras utilizadas durante el desarrollo de este trabajo, se empleó un proceso comercial y materiales convencionales, de los cuales se hará referencia brevemente al inicio de la próxima sección. Como lectura sobre la historia de los MEMS, su fabricación y sus aplicaciones en un contexto general se recomienda [113].

Por otro lado, la transducción de la señal deseada se ha hecho, como ya se mencionó, a través medios piezoresistivos, sin embargo, se han utilizado algunas otras formas, por ejemplo: la transducción capacitiva y la transducción piezoeléctrica, sólo por mencionar las más usuales; pero existen otras formas que serán ejemplificadas más adelante, específicamente la transducción por medio de las ondas acústicas superficiales, sobre la cual se tratará en el capítulo 4. Entonces a lo largo de este capítulo se trata acerca de las microestructuras propuestas y su descripción matemática para, en el capítulo siguiente, explicar la interacción que existe entre los dispositivos SAW y las estructuras micromecánicas propuestas para formar, en conjunto, un microacelerómetro.

### **3.1.1 MEMS inerciales (iMEMS)**

Los iMEMS pueden dividirse en dos grandes grupos: los acelerómetros y los giroscopios [114]. Los primeros se utilizan para medir la aceleración de un cuerpo y los otros para medir la velocidad angular a la que gira un cuerpo. Debido a que este trabajo se realizó pensando en estudiar un tipo particular de microacelerómetro, a partir de este momento sólo nos referiremos a los acelerómetros. Algunas de las características de los microacelerómetros son:

- Dentro de un rango de medición, la señal de salida debe ser una estimación lineal de la señal de entrada dada por  $Y_{out} = S(X_{in} - X_0)$ , donde  $S$  es una constante de proporcionalidad y  $X_0$  es el *offset*, al cual, se le conoce como *bias*.
- La señal de salida debe ser una “buena” estimación de la señal de entrada, es decir, el instrumento debe ser capaz de medirla con una alta resolución dentro del rango de medición y del ancho de banda característico del instrumento. Usualmente, la resolución se expresa como la densidad espectral del instrumento ( $g/\sqrt{Hz}$ ) y ésta es igual a la densidad de ruido.
- En el caso de no haber una señal de entrada, la señal de salida debe permanecer por debajo de un límite predefinido cercano a cero.
- La señal de salida debe ser inmune a cualquier otra aceleración lineal o angular fuera de la dirección de medición del instrumento.
- Debe ser inmune a las variaciones de la temperatura.

### 3.1.2 Modelado de un acelerómetro y su comportamiento dinámico

Los sensores inerciales aprovechan las fuerzas inerciales que actúan sobre un objeto para determinar su comportamiento dinámico. De acuerdo con Kempe [114] un sensor inercial es un observador que se encuentra dentro de una carcasa aislada, el cual determina los cambios de posición de la carcasa con respecto a un sistema de referencia inercial externo.

Según Thompson [115], los elementos básicos que permiten modelar de manera concentrada a muchos sistemas de medición de vibraciones son: una masa, un resorte y un amortiguador. La fuerza en un resorte está dada en función del desplazamiento de éste desde una posición de reposo y, si se supone que la función matemática que expresa la relación entre fuerza y desplazamiento es derivable, entonces, ésta puede expresarse como una serie de McLaurin:

$$F_k(x) = F_k(0) + \frac{dF_k(0)}{dx} \frac{x}{1!} + \frac{d^2F_k(0)}{dx^2} \frac{x^2}{2!} + \frac{d^3F_k(0)}{dx^3} \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (3.1)$$

donde  $F_k(0)$  podría representar, sólo en combinación con otro elemento, una fuerza inicial del resorte del sistema en una determinada condición de equilibrio;  $\frac{dF_k(0)}{dx} = k_1$  es el primer término de la serie que expresa la relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento, comúnmente, se le conoce como ley de Hooke. Los términos pares de la serie comúnmente no se utilizan puesto que, normalmente, se desea que la función  $F_k(x)$  sea impar, es decir, que para un desplazamiento positivo el resorte tenga una fuerza positiva y, para uno negativo, ésta sea negativa. Sin embargo, no se descarta, por ejemplo, una relación cuadrática donde  $k_2$  se encuentre definida por intervalos, en donde si  $x < 0$  entonces  $k_2 < 0$ . El término cúbico se utiliza comúnmente para modelar un resorte que no obedece la ley de Hooke dada únicamente por el término lineal. Un ejemplo del uso de un término cúbico es la ecuación de Duffing [116] que se utiliza para modelar un oscilador no lineal y

cuya solución puede ser caótica. La relación entre la velocidad de un cuerpo y la fuerza de amortiguamiento en un sistema, en algunos casos, podría expresarse de manera similar a la ecuación (3.1) y en otros ni siquiera tener una solución matemática cerrada, entonces, también existen relaciones no lineales de amortiguamiento. Aunque estos fenómenos podrían presentarse en cierto tipos de iMEMS, este enfoque conduce a modelos mecánicos no lineales que están por encima de lo que se pretende con esta tesis. Por esta razón, a pesar de que los MEMS pueden ser sistemas sumamente complejos, este trabajo se limitará a considerar solamente relaciones mecánicas lineales. En la figura 3.1 se muestra la representación del modelo masa, resorte y amortiguador montados sobre la carcasa que servirá para estimar los parámetros fundamentales en este tipo de instrumentos. Dependiendo del rango de frecuencias de la señal con la que se excita el instrumento, es posible registrar el desplazamiento, la velocidad o la aceleración a partir del desplazamiento relativo de la masa con respecto a la carcasa en la que está contenido el instrumento. El comportamiento de este sistema está dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -c \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) - k(x - y) \quad (3.2)$$

donde  $x$  y  $y$  son los desplazamientos de la masa sísmica y de la carcasa, respectivamente, y ambos son medidos con respecto de un sistema de referencia inercial. El movimiento relativo de la masa  $m$  con respecto a la carcasa que la soporta está dada por:

$$z = x - y \quad (3.3)$$

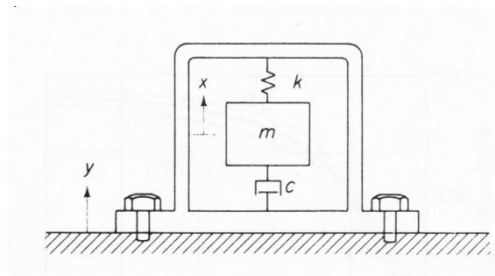


Figura 3.1. Sistema masa, resorte y amortiguador.

Si se asume que el movimiento del cuerpo es senoidal  $y = Y_o \sin(\omega t)$ . Se obtiene la ecuación:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} + kz = m\omega^2 Y_o \sin(\omega t) \quad (3.4)$$

La solución en estado estable de la ecuación diferencial (3.4) es de la forma:

$$z = Z_o \sin(\omega t - \phi_z) \quad (3.5)$$

Donde  $Z_o$  está dada por:

$$Z_o = \frac{m\omega^2 Y_o}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{Y_o \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (3.6.a)$$

y

$$\tan \phi_z = \frac{\omega c}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.6.b)$$

Donde  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento y está dado por:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (3.7)$$

y  $\omega_n$  es la frecuencia natural de oscilación del sistema y está dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.8)$$

De las expresiones (3.6) se observa que la relación  $\frac{\omega}{\omega_n}$  y el factor de amortiguamiento  $\zeta$  son los principales parámetros de los cuales depende el comportamiento del sistema. En las figuras 3.2 se muestran la respuesta en magnitud y en fase de un instrumento de medición de vibraciones de este tipo. Debido a que  $x$  y  $y$  se relacionan a través de  $z$ , el sistema se encuentra totalmente determinado y es posible conocer cada uno de los desplazamientos para cada instante de tiempo.

Un sismómetro y un acelerómetro se pueden modelar de la misma manera; sin embargo, la principal diferencia entre estos dos instrumentos es la relación  $\frac{\omega}{\omega_n}$  para la cual trabajan. Para un sismómetro la frecuencia natural es baja en comparación de la frecuencia de la vibración ( $\omega$ ), por esta razón, la relación  $\frac{\omega}{\omega_n}$  se vuelve un número grande y, el desplazamiento relativo  $Z_o$  se aproxima a  $Y_o$  sin importar el valor del amortiguamiento  $\zeta$ . Entonces, la masa  $m$  permanece estacionaria mientras que la carcasa y la base que sostiene a ésta se mueven. Una desventaja de estos instrumentos es el gran tamaño relativo de la masa.

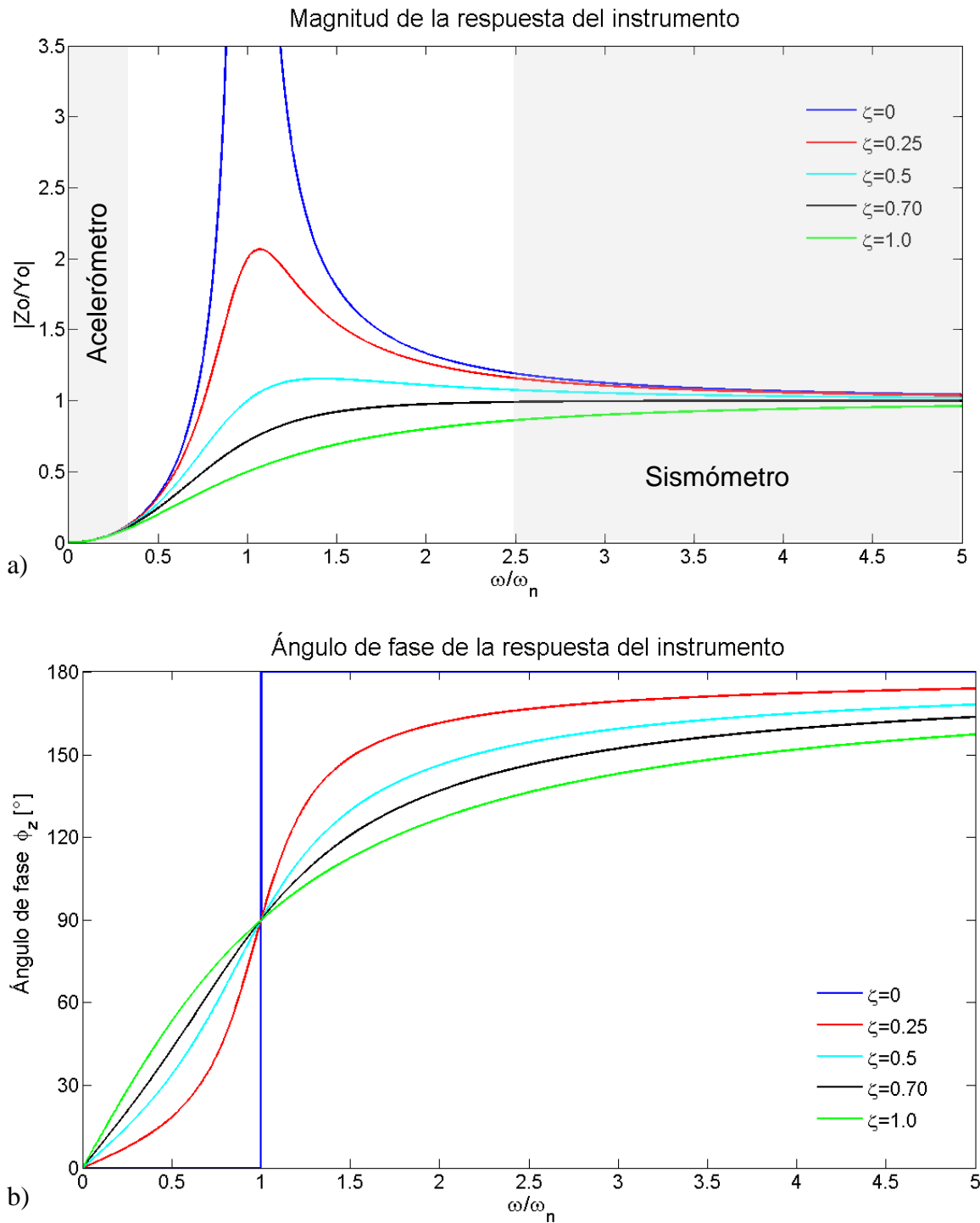


Figura 3.2. a) Magnitud y b) fase de la respuesta del instrumento para diferentes valores de  $\zeta$ .

En el caso de un acelerómetro, la frecuencia natural del sistema ( $\omega_n$ ) es alta comparada con la de la vibración que se va a medir. El instrumento registra aceleración, tal como se puede concluir al examinar el denominador de la expresión (3.6.a):



$$\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

el cual se aproxima a la unidad cuando  $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 0$ , entonces

$$Z_o = \frac{\omega^2 Y_o}{\omega_n^2} = \frac{\text{aceleración}}{\omega_n^2} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, Z es proporcional a la aceleración del movimiento que se desea medir por un factor de  $\frac{1}{\omega_n^2}$ . El rango útil de un acelerómetro se obtiene de graficar:

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (3.10)$$

En la figura 3.3 se observa el rango de operación de un acelerómetro para diferentes factores de amortiguamiento. Para el caso en que el amortiguamiento es nulo  $\zeta = 0$ , su rango de operación es muy limitado. Para una  $\zeta = 0.70$ , el rango de frecuencias útiles es de  $0 \leq \omega/\omega_n \leq 0.20$  con un error máximo menor al 0.1%, en el mejor de los casos. El caso cuando  $\zeta = 0.70$  no sólo extiende el rango de operación de un acelerómetro sino que, también, evita la distorsión de fase para formas de onda complejas. La distorsión de fase también desaparece cuando  $\zeta = 0$ , sin embargo, a diferencia del caso cuando  $\zeta = 0.70$ , el rango de operación como acelerómetro es mucho más limitado. Una posible solución a este problema es construir un sistema con una frecuencia natural relativamente muy grande, sin embargo, esto acarrea otro problema, debido a que la magnitud de la señal es inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia natural. Por ejemplo, un instrumento con una frecuencia natural de 100 Hz tendrá un rango de frecuencias de 0 a 20 Hz si  $\zeta = 0.70$ . El diseñador debe prestar especial interés en  $\zeta$  y en  $\omega_n$  según la aplicación que se le dará al acelerómetro y el método de transducción de la señal mecánica en eléctrica.

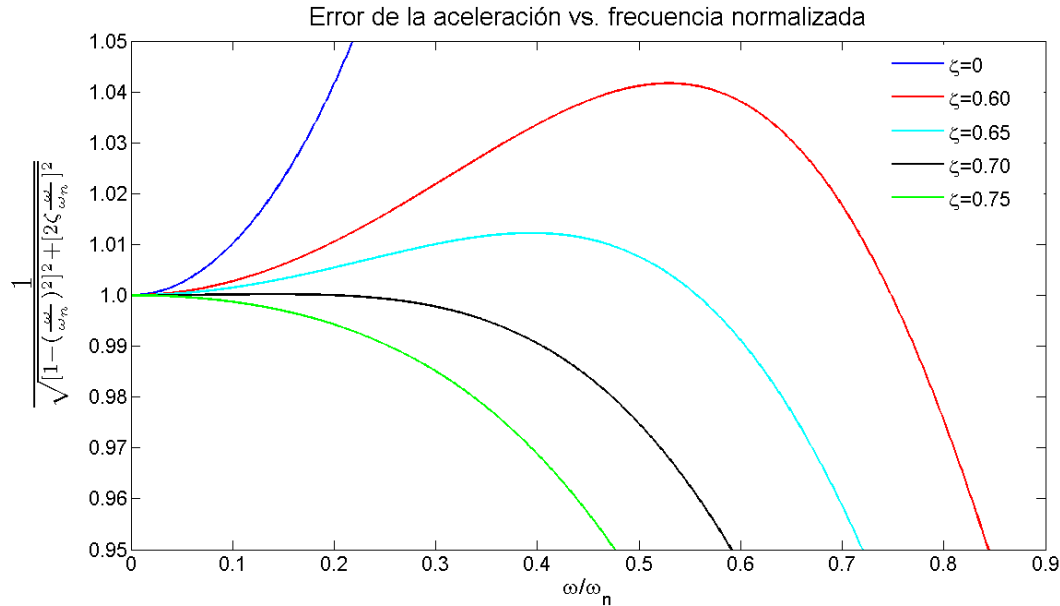


Figura 3.3. Error de la aceleración contra la frecuencia para diferentes valores de  $\zeta$ .

En la actualidad existen muchos tipos de acelerómetros. Los acelerómetros más comunes son aquellos que se basan en la medición del desplazamiento relativo de la masa sísmica para medir aceleraciones de baja frecuencia. Sin embargo, existe una variante de este tipo de acelerómetros, que es más preciso, y es aquel en el cual la masa sísmica se encuentra servocontrolada para tener un desplazamiento relativo nulo. La fuerza necesaria para lograr mantener en equilibrio al sistema es una medición indirecta de la aceleración.

En esta sección nos hemos referido a tres elementos principales: una masa, un resorte y un amortiguador y la forma en que con ellos se pueden modelar los sismómetros y los acelerómetros, sin embargo, en un sistema mecánico real la masa tiene un volumen y una geometría determinada, la materia es flexible y disipa energía, es decir, una estructura mecánica presenta los tres elementos que mencionamos anteriormente y, además, no siempre es posible considerar la masa, el resorte y el amortiguador como elementos concentrados sino como elementos distribuidos a lo largo de una estructura y, por esta razón, antes de aplicar el modelo visto es necesario estudiar cómo afecta la geometría de la estructura en dichos parámetros.

La geometría de una estructura está determinada por muchos factores, por ejemplo: la función que desempeñará, la dirección y la magnitud del desplazamiento, el amortiguamiento, su frecuencia natural, el tamaño deseado, entre otras. Entonces si se desea que la frecuencia natural de una estructura sea grande, es común que se reduzcan sus dimensiones y, además, la tendencia a la miniaturización de los sistemas, han dado como resultado la aplicación de los MEMS para la medición de vibraciones. En el área de los MEMS, se utilizan estructuras mecánicas simples como base para construirlos, en las

secciones siguientes se tratará un poco de un tipo de estas estructuras como son las barras. Además, se tratará de la actuación electrostática y del amortiguamiento en este tipo de estructuras.

### 3.1.3 Barras

Los MEMS están formados principalmente por dos tipos de estructuras básicas o bloques básicos funcionales: las barras y las placas. Dependiendo de las características que tengan se les asignan nombres específicos, por ejemplo: según el tipo de apoyos, una barra fija en uno de sus dos extremos se le conoce como ménsula (o en inglés *cantilever*) o si la barra se encuentra fija en sus dos extremos se les llama puente.

Dependiendo de la longitud de las barras, hay diversas teorías para explicar los mecanismos que intervienen en el movimiento y la deformación de ellas cuando están sometidas a diversos tipos de fuerzas externas. Estas teorías son: la teoría de barras de Euler-Bernoulli, la teoría de Timoshenko, la teoría de barras de Rayleigh y la teoría de cortante. Han *et al.* [117] hacen una breve descripción de cada uno de estos métodos y, además, explican qué tipos de efectos se consideran en cada una de las teorías (ver la tabla 3.1). Para leer sobre las deducciones de los métodos de Euler-Bernoulli, Rayleigh y Timoshenko se recomienda el libro de Rao [118].

Modelo de barras	Momento de flexión	Desplazamiento lateral	Deformación por cortante	Inercia rotacional
Euler-Bernoulli	X	X		
Rayleigh	X	X		X
Cortante	X	X	X	
Timoshenko	X	X	X	X

Tabla 3.1. Efectos que incluyen cada una de las principales teorías de barras.

A pesar de que la teoría de Timoshenko es la más completa de las 4 es, también, la más compleja. Por esta razón, antes de seleccionar una para trabajar con ella, es necesario hacer las siguientes consideraciones: es muy conocido que la teoría de Euler-Bernoulli se emplea comúnmente para vigas largas (dominadas por flexión), mientras que la teoría de Timoshenko se emplea para vigas cortas (dominadas por el cortante) [119]. Las barras dominadas por flexión son aquellas que por construcción son delgadas, un criterio comúnmente utilizado para considerar a una barra como delgada es que su longitud sea mucho mayor (por lo menos 10 veces) que su espesor, y que los desplazamientos de la estructura sean menores que el espesor de la viga [118]. Otras características adicionales de estas barras son: no se aplican esfuerzos cortantes sobre ellas; los esfuerzos aplicados se encuentran uniformemente distribuidos sobre la estructura y, por esta razón, la sección transversal de la barra no tiende a girar. Bajo estas consideraciones se decidió utilizar el modelo de barras de Euler-Bernoulli y, a continuación, se tratará brevemente sobre esta teoría.

De acuerdo con Rao [118], la ecuación diferencial de movimiento para la vibración transversal en una barra larga (ecuación de Euler-Bernoulli) está dada por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (3.11)$$

Donde  $w(x,t)$  es la función de deformación de la barra o función de forma,  $E$  es el módulo de Young,  $I$  es el momento de inercia de área de la sección transversal de la barra,  $\rho$  es la densidad del material,  $A$  es el área de la sección transversal de la barra y  $f(x,t)$  es la fuerza aplicada sobre la barra por unidad de longitud.

Además, Rao [118] hace un análisis de la solución de la vibración libre de diferentes tipos de barras ( $f(x,t) = 0$ ). Si se considera que el material es homogéneo a lo largo de la barra, utilizando el método de separación de variables sobre  $w(x,t)$  se tiene:

$$w(x,t) = W(x)T(t) \quad (3.12)$$

De esta forma la ecuación (3.11) puede escribirse como dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3.13.a)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.13.b)$$

donde

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (3.14)$$

La solución de la ecuación (3.13.b) está dada por:

$$T(t) = A_T \cos(\omega t) + B_T \sin(\omega t) \quad (3.14)$$

donde  $A_T$  y  $B_T$  son unas constantes que dependen de las condiciones iniciales. Por otro lado, se puede demostrar que la solución de la ecuación (3.13.a) está dada por:

$$W(x) = C_{W1}(\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)) + C_{W2}(\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)) + C_{W3}(\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)) + C_{W4}(\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)) \quad (3.16)$$

donde  $C_{W1}$ ,  $C_{W2}$ ,  $C_{W3}$  y  $C_{W4}$  dependen de las condiciones de frontera y la frecuencia natural de la barra está dada por:

$$\omega = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (3.17)$$

Las condiciones de frontera para una barra fija por sus dos extremos son:

$$W(0) = 0 \quad (3.18.a)$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = 0 \quad (3.18.b)$$

$$W(l) = 0 \quad (3.18.c)$$

$$\frac{dW}{dx}(l) = 0 \quad (3.18.d)$$

Aplicando las condiciones (3.18.c) y (3.18.d) a (3.16) se tiene:

$$C_{W2}(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)) + C_{W4}(\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)) = 0 \quad (3.19.a)$$

$$-C_{W2}(\sin(\beta l) + \sinh(\beta l)) + C_{W4}(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)) = 0 \quad (3.19.b)$$

Las ecuaciones (3.19) forman un sistema de ecuaciones homogéneo con  $C_{W2}$  y  $C_{W4}$  como incógnitas. Para encontrar las soluciones no triviales de este sistema de ecuaciones es necesario que el determinante del sistema sea cero, así se obtiene una nueva ecuación igualada a cero que está dada por:

$$(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l))^2 + (\sin^2(\beta l) - \sinh^2(\beta l)) = 0 \quad (3.20)$$

Simplificando la ecuación (3.20) se obtiene la ecuación que determina la frecuencia de los modos de vibración de la estructura:

$$\cos(\beta l)\cosh(\beta l) - 1 = 0 \quad (3.21)$$

Por otro lado, despejando  $C_{W4}$  de (3.19.a) se tiene:

$$C_{W4} = -C_{W2} \frac{\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)}{\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)} \quad (3.22)$$

Substituyendo (3.22) en (3.16) y considerando que para este caso  $C_{W1} = C_{W3} = 0$ , la función de forma para el modo n está dada por:

$$W_n(x) = C_{Wn} \left[ (\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)) - \frac{\cos(\beta_n l) - \cosh(\beta_n l)}{\sin(\beta_n l) - \sinh(\beta_n l)} (\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x)) \right] \quad (3.23)$$

donde  $\beta_n l$  es la n-ésima solución de la ecuación trascendental (3.21) y, entonces, el n-ésimo modo de vibración puede expresarse como:

$$w_n(x, t) = W_n(x)(A_{Tn} \cos(\omega_n t) + B_{Tn} \sin(\omega_n t)) \quad (3.24)$$

y la solución para el caso de vibración libre de la barra es:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) \quad (3.25)$$

Por ejemplo, en la tabla 3.2 se muestra las soluciones de la ecuación (3.21) para los cuatro primeros modos de vibración de una ménsula.

n	$\beta_n l$
1	4.7300
2	7.8532
3	10.9956
4	14.1372

Tabla 3.2.  $\beta_n l$  para los cuatro primeros modos de vibración de una ménsula.

En las páginas anteriores se consideró el caso de vibración libre de la barra ( $f(x, t) = 0$ ), sin embargo, comúnmente la barra se encuentra sometida a algún tipo de fuerza externa, tal como su peso. Si se considera que la barra tiene una sección transversal uniforme, el material con el cual está construida es homogéneo y se encuentra sometida a la acción de su propio peso en condiciones cuasiestáticas; entonces, se puede simplificar la ecuación (3.11), quedando como:

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = f(x) \quad (3.26)$$

y

$$f(x) = \frac{m_b g}{l} \quad (3.27)$$

donde  $m_b$  es la masa de la barra,  $g$  es la aceleración gravitatoria y  $l$  es la longitud de la estructura. Aplicando las condiciones de frontera dadas por (3.18), la solución de (3.26) es [18]:

$$w(x) = \frac{m_b g}{24EI} x^2 (l - x^2) \quad (3.28)$$

Si se conoce la función de forma para los modos de vibración de la estructura, otra posible forma de estimar la frecuencia a la cual ocurren los modos de vibración de la estructura es mediante el método de Rayleigh-Ritz [18, 118]. Debido a que la función de forma (3.28) es una solución muy limitada de la ecuación (3.11) porque, como se verá más adelante, es común que la barra se encuentre sometida a diversas fuerzas, además de su peso, y si se desea una descripción dinámica de la barra, la solución (3.28) no es válida. A continuación se tratará sobre otros tipos de fuerzas que pueden actuar en los micropuentes y, en la sección 3.2.1, se tratará sobre el modelo de la barra cuando se consideran todas estas fuerzas.

### 3.1.4 Actuación electrostática en MEMS

Un capacitor de placas planas, paralelas, con área igual a  $A_c$ , una distancia entre placas  $d_c$  y el material que se encuentra entre ambas placas tiene una permitividad eléctrica  $\epsilon_c$ , la capacitancia está dada por:

$$C = \alpha_f \frac{\epsilon_c A_c}{d_c} \quad (3.29)$$

donde  $\alpha_f$  es un término que considera los efectos de acumulación adicional de carga en los bordes de las placas. A pesar de la complejidad de este fenómeno, se han hecho diferentes estudios para modelarlo matemáticamente [120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127]. Leus y Elata hicieron un reporte técnico donde resumen estos resultados y los comparan [128]. Según sus propios resultados, hay varios modelos cuyo error relativo comparado con los resultados obtenidos por medio de elemento finito es menor al 1% y estos son: la ecuación propuesta por Palmer [120], el modelo propuesto por Chang [123] y una propuesta que ellos mismos hacen [128]. La ecuación propuesta por Palmer [120] tiene la ventaja de que es relativamente simple, sin embargo, al despreciar el espesor de las placas, entonces, el error de esta expresión podría aumentar cuando el espesor de las placas es considerable, esta ecuación está dada por:

$$\frac{C}{l} = \frac{\varepsilon_c w_c}{d_c} \left[ 1 + \frac{d_c}{\pi w_c} + \frac{d_c}{\pi w_c} \ln \left( \frac{2\pi w_c}{d_c} \right) \right] \quad (3.30)$$

donde  $w_c$  es el ancho de las placas,  $l$  es la longitud de la placa y  $A_c = lw_c$ . El modelo de Chang está dado por las siguientes expresiones:

$$\frac{C}{l} = \frac{2\varepsilon_c}{\pi} \ln \left( \frac{2R_b}{R_a} \right) \quad (3.31.a)$$

donde

$$\ln(R_a) = -1 - \frac{\pi w_c}{2d_c} - \frac{p+1}{\sqrt{p}} \operatorname{atanh} \left( \frac{1}{\sqrt{p}} \right) - \ln \left( \frac{p-1}{4p} \right) \quad (3.31.b)$$

y

$$R_b = \eta_c + \frac{p+1}{2} \ln \Delta_c \quad (3.31.c)$$

donde

$$\eta_c = \sqrt{p} \left\{ \frac{\pi w_c}{2d_c} + \frac{p+1}{2\sqrt{p}} \left( 1 + \ln \left( \frac{4}{p-1} \right) \right) - 2 \operatorname{atanh} \left( \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \right\} \quad (3.31.d)$$

$$\Delta_c = \max(\eta_c, p) \quad (3.31.e)$$

$$p = 2B^2 - 1 + \sqrt{(2B^2 - 1)^2 - 1} \quad (3.31.f)$$

$$B = 1 + \frac{t_c}{d_c} \quad (3.31.g)$$

donde  $t_c$  es el espesor de las placas que forman al capacitor. La expresión empírica propuesta por Leus y Elata [128], está basada en una combinación de dos modelos: la ecuación de Palmer [120] y la ecuación propuesta por Yang [122] y recomendada por Bao [18]. Esta última ecuación está dada por:

$$\frac{C}{l} = \frac{\varepsilon_c w_c}{d_c} \left[ 1 + \frac{2d_c}{\pi w_c} \ln \left( \frac{\pi w_c}{d_c} \right) + \frac{2d_c}{\pi w_c} \ln \left( 1 + \frac{2t_c}{d_c} + 2\sqrt{\frac{t_c}{d_c} + \frac{t_c^2}{d_c^2}} \right) \right] \quad (3.32)$$

Sin embargo, según Leus y Elata [128], el error relativo de (3.32) es mayor al 10% y por esta razón consideraron necesario ajustar la ecuación. Se puede observar que el primer término de la sumatoria de (3.32) corresponde al caso del capacitor de placas planas, el segundo términos corresponde al doble del resultado obtenido por Elliott [121] y, por esta razón Leus y Elata [128] consideran que los efectos en los bordes son el doble y esta es la causa de la inexactitud, y el tercer término es propio de esta solución. Sin embargo, se ha demostrado que la ecuación de Palmer [120] es más exacta que la de Elliott [121] y su propuesta consiste en reemplazar los dos primeros términos de la sumatoria por la sumatoria de la ecuación (3.30) y el tercer término de la suma de (3.32) dividirlo entre 2, haciendo esto la nueva ecuación queda como:

$$\frac{C}{l} = \frac{\varepsilon_c w_c}{d_c} \left[ 1 + \frac{d_c}{\pi w_c} + \frac{d_c}{\pi w_c} \ln \left( \frac{2\pi w_c}{d_c} \right) + \frac{d_c}{\pi w_c} \ln \left( 1 + \frac{2t_c}{d_c} + 2\sqrt{\frac{t_c}{d_c} + \frac{t_c^2}{d_c^2}} \right) \right] \quad (3.33)$$

Según [128], la ecuación (3.33) tiene un error relativo menor al 0.3% comparado contra aquellos resultados obtenidos por elemento finito. A lo largo de este trabajo se decidió utilizar las ecuaciones (3.30) cuando el ancho de la placa sea despreciable y (3.33) cuando éste no lo sea.

Cuando entre ambas terminales de un capacitor se le aplica un potencial eléctrico, en una placa habrá una carga  $Q$  y, en la otra placa,  $-Q$  y por tanto, entre ambas existe un campo eléctrico y, entonces, hay una fuerza entre ambas placas, sin embargo, es común considerar que ambas placas se encuentran fijas y, por esta razón, esta fuerza se desprecia comúnmente en los textos clásicos de electromagnetismo. Pero si uno de los electrodos es móvil, entonces, éste se moverá. A continuación se trata sobre la teoría básica de la actuación electrostática.

Se puede demostrar fácilmente que la energía almacenada en un capacitor está dada por:

$$E_C(V, d_c) = \frac{1}{2} C(d_c) V^2 \quad (3.34)$$

Donde  $V$  es el voltaje entre ambas terminales, o bien, la energía almacenada en un capacitor también puede ser expresada en términos de la carga presente:

$$E_C(Q, d_c) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(d_c)} \quad (3.35)$$

Sin embargo se sabe, por la definición de trabajo, que:

$$E_W = F d \quad (3.36)$$



donde el trabajo  $E_W$  es el resultado de aplicar una fuerza  $F$  a lo largo de una distancia  $d$ . Entonces, la fuerza entre ambos electrodos de un capacitor está dado por:

$$E_C(V, d_c) = F_V(V, d_c) d_c \quad (3.37)$$

o bien,

$$E_C(Q, d_c) = F_Q(Q, d_c) d_c \quad (3.38)$$

donde  $F_V(V, d_c)$  y  $F_Q(Q, d_c)$  son las fuerzas electrostáticas en el capacitor en función del voltaje o la carga, respectivamente. Igualando (3.34) con (3.37) y (3.35) con (3.38) y substituyendo (3.29), se tiene que las fuerzas electrostáticas en un capacitor son:

$$F_V(V, d_c) = \frac{\alpha_f \epsilon_c A_c}{2d_c^2} V^2 \quad (3.39)$$

y

$$F_Q(Q, d_c) = \frac{Q^2}{2\alpha_f \epsilon_c A_c} \quad (3.40)$$

Para leer sobre una deducción más rigurosa de las fuerzas electrostáticas en capacitores con una placa móvil se recomienda leer los libros de Senturia [1] y de Bao [18].

Las ecuaciones (3.39) y (3.40) indican que existen dos formas de actuación electrostática: actuación por voltaje y actuación por corriente. La actuación por voltaje se caracteriza por mantener bien determinada la diferencia de potencial entre ambos electrodos a pesar de que la placa pudiera desplazarse y, como puede verse en (3.39), la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las placas, lo cual produce un efecto que comúnmente se conoce como *pull-in* [18].

Si se considera una masa actuada electrostáticamente por voltaje, ubicada en una posición de reposo  $d_o$  y sujeta por un resorte lineal, entonces la ecuación de equilibrio está dada por:

$$F_T = \frac{\alpha_f \epsilon_c A_c}{2(d_o - x)^2} V^2 - k_m x = 0 \quad (3.41)$$

donde  $k_m$  es una constante de resorte. Normalizando la ecuación (3.41) se tiene:

$$\frac{R_k}{\left(1 - \frac{x}{d_o}\right)^2} - \frac{x}{d_o} = 0 \quad (3.42)$$

donde  $R_k$  es una constante dada por:

$$R_k = \frac{\alpha_f \epsilon_c A_c}{2k_m d_o^3} V^2 \quad (3.43)$$

En la figura 3.4 se grafican las fuerzas electrostática y elástica normalizadas, distinguiéndose en ella, dos puntos de equilibrio (a y b), correspondientes a la intersección de ambas curvas. El punto más cercano al origen (a) es una solución estable de (3.41), es decir, si el desplazamiento es menor que (b), el sistema tenderá a regresar a la posición (a) por que la fuerza de resorte es mayor, sin embargo, si el desplazamiento es mayor que (b), la fuerza electrostática es mayor que la fuerza del resorte y la placa móvil se moverá hasta que ambas placas se junten. Matemáticamente, la condición de estabilidad está dada por:

$$\frac{\partial F_T}{\partial x} < 0 \quad (3.44)$$

Derivando (3.41):

$$\frac{\alpha_f \epsilon_c A_c}{(d_o - x)^3} V^2 - k_m < 0 \quad (3.45)$$

Resolviendo la desigualdad (3.45) se tiene:

$$x < \frac{d_o}{3} \quad (3.46)$$

Este resultado indica que el desplazamiento de la microestructura se encuentra balanceado cuando éste es menor que un tercio del distancia original del capacitor. Este resultado es importante, porque esta condición limita drásticamente el rango de la actuación electrostática por voltaje y, dependiendo del tipo de estructura, si el límite se sobrepasa podría ocurrir que la pieza se destruya o que ambas placas queden adheridas. Para estudiar los efectos de la actuación electrostática sobre diferentes configuraciones se recomienda leer el artículo de Bao *et al* [129]. Para profundizar sobre la respuesta dinámica de un sistema masa, resorte y amortiguador y sobre la importancia de la fuente en el fenómeno del pull-in se recomienda leer el trabajo de Castañer y Senturia [130].

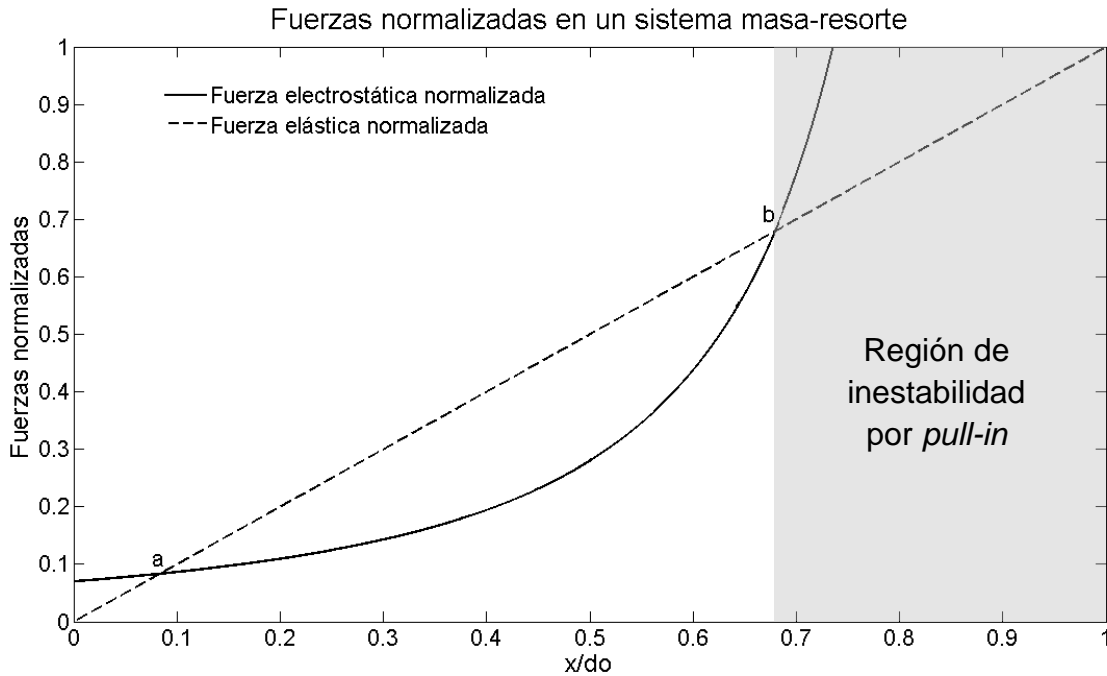


Figura 3.4. Fuerza elástica y electrostática en un sistema masa-resorte actuado por voltaje ( $R_k = 0.07$ ).

La otra forma de realizar la actuación electrostática es por medio del control de la carga presente en el capacitor. Según la ecuación (3.40), en la actuación electrostática por corriente, la fuerza electrostática es independiente del desplazamiento de la placa móvil. Este hecho es importante porque en este caso no se presenta el fenómeno del *pull-in* y, por tanto, el rango de desplazamiento se incrementa considerablemente. Esta forma de actuación puede aumentar considerablemente el rango de movimiento de la placa móvil sin que esta colapse, pero un factor que afecta considerablemente este rango son las capacitancias parásitas [131, 132]. Sin embargo, para hacer la actuación electrostática por medio de corriente es necesario disponer de un circuito electrónico específicamente diseñado para llevar la carga al capacitor. Durante el desarrollo de estos estudios se realizó un circuito electrónico, capaz de funcionar como una fuente de corriente bidireccional pulsada o continua, y un control, formado por un microcontrolador y varios amplificadores de instrumentación. Este circuito demostró ser capaz de mantener constante la carga en un capacitor. En la figura 3.5 se muestra el diagrama de las fuentes de corriente pulsadas, el cual es una variante del reportado por Nadal-Guardia *et al.* con anterioridad [132, 133].

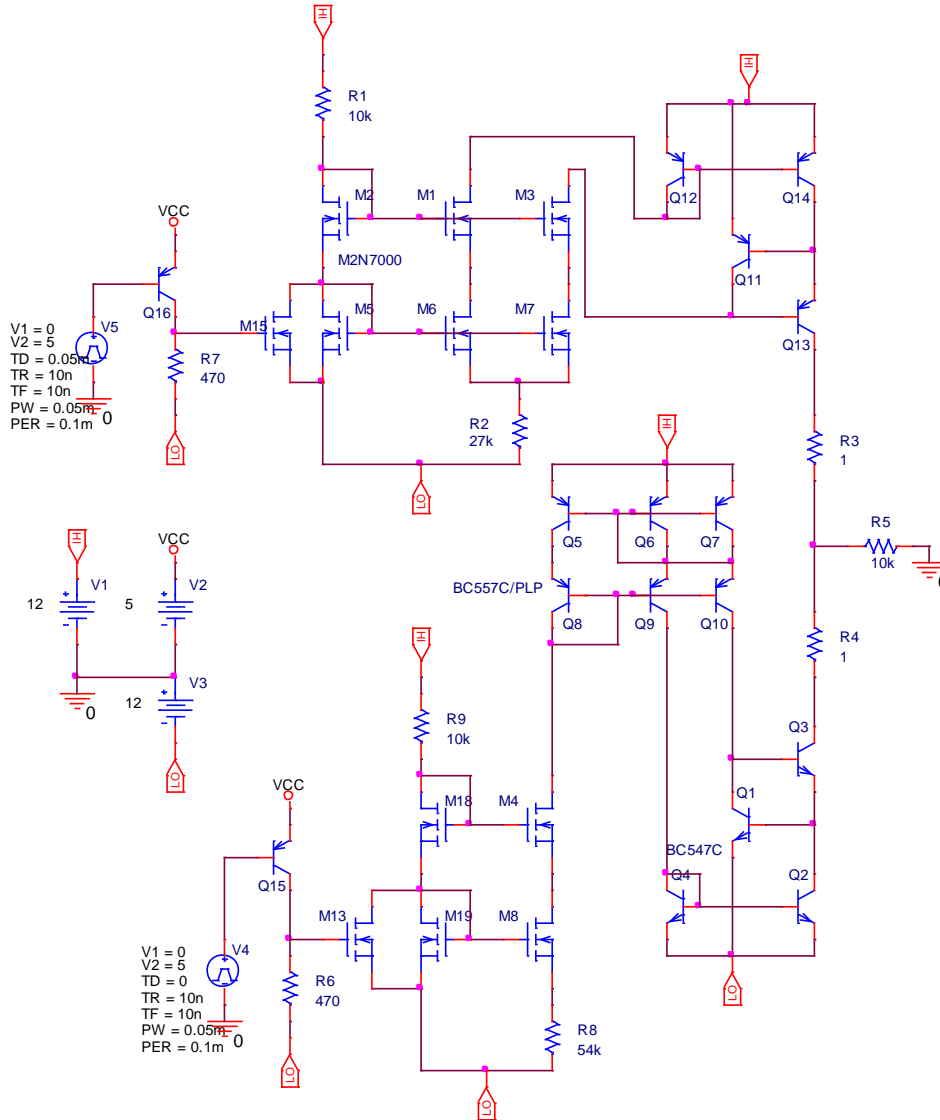


Figura 3.5. Diagrama de las fuentes de corriente conmutables.

### 3.1.5 Amortiguamiento en los MEMS

Las fuerzas a las que está sometida una estructura cuando un fluido se mueve a su alrededor o una estructura que se mueve inmersa en un fluido están determinadas por la ecuación de Navier-Stokes, sin embargo, ésta ecuación diferencial parcial es complicada y hay pocos casos para los que existe una solución matemática cerrada, de hecho, esta ecuación es tema de investigación reciente en el campo de la mecánica de fluidos. Por esta razón, para poder entender los mecanismos que intervienen en el amortiguamiento en MEMS es necesario hacer diversas consideraciones tal como se verá más adelante.

Para las máquinas de tamaño convencional, cuya velocidad de movimiento es relativamente baja, la disipación de energía debido al aire que la rodea puede ser despreciable; sin embargo, durante el diseño y el funcionamiento de microestructuras, es importante estimar

los efectos del amortiguamiento en el sistema debido a que éste determina su comportamiento dinámico. Por ejemplo, los acelerómetros, deben diseñarse para obtener un coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = 0.70$ , mientras que en las estructuras resonantes (resonadores) éste debe reducirse al mínimo para obtener un factor de calidad máximo.

A pesar de que un fluido en reposo es incapaz de resistir un esfuerzo cortante que tienda a modificar su forma permanentemente, existe una fuerza viscosa que se opone al movimiento relativo entre las diferentes capas del fluido. Por tanto, la viscosidad es una fricción interna entre capas adyacentes que se mueven con velocidades diferentes. Las fuerzas cortantes internas en un fluido viscoso que se mueve regularmente son proporcionales al gradiente de velocidad. Si el flujo es en dirección del eje  $x$  y la velocidad del fluido está distribuida a lo largo del eje  $y$ ; la velocidad  $u$  del flujo en la dirección  $x$ , es función de  $y$ , y el esfuerzo cortante  $\tau_{yx}$  es:

$$\tau_{yx} = \mu_f \frac{du(y)}{dy} \quad (3.47)$$

en donde  $\mu_f$  es el coeficiente de viscosidad. Para muchos líquidos puros y para los gases, en flujo estacionario, el coeficiente de viscosidad es constante. A líquidos con esta propiedad se les conoce como líquidos newtonianos. Sin embargo, se debe señalar, que los mecanismos que producen la viscosidad en los líquidos y en los gases son diferentes. En este trabajo se tratará, principalmente, del estudio de los mecanismos de viscosidad en los gases y el amortiguamiento producido por ellos.

Para un líquido estacionario, las posiciones relativas de las moléculas adyacentes en una misma capa se encuentran estables, pero la posición relativa de las moléculas en las diferentes capas de un fluido laminar cambian debido al flujo. En la figura 3.6 se muestra el cambio en las posiciones relativas entre las moléculas A y B, en capas adyacentes, cuya velocidad es diferente para cada capa y donde la velocidad del grupo de moléculas A es mayor que las del grupo B. Cuando A y B se aproximan, la energía potencial intermolecular decrece mientras que la energía cinética molecular aumenta y se forma una adhesión temporal entre ellas; entonces, una fuerza externa debe de realizar un trabajo para separar las moléculas. Dicha adhesión es una fuerza que se opone al movimiento. De acuerdo al mecanismo descrito anteriormente, si se incrementa la temperatura, la energía interna de las moléculas aumenta y, como consecuencia, es necesaria menos energía para que las moléculas puedan separarse. Por tanto, la viscosidad de la mayoría de los líquidos decrece cuando aumenta la temperatura.

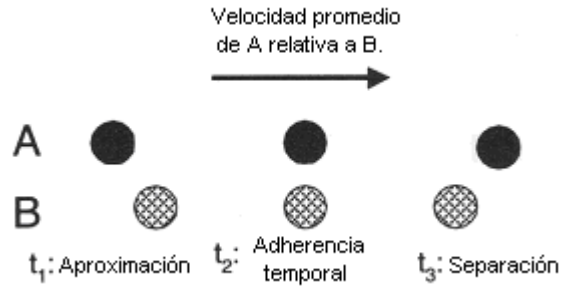


Figura 3.6. Mecanismo de viscosidad en un líquido. [18]

Para los gases, el movimiento térmico de una molécula es mucho mayor que su movimiento relacionado al flujo del gas. En la figura 3.7, la molécula A cuya velocidad de deriva es más pequeña se mueve a través de la frontera CD (debido al movimiento térmico) y, al ascender, adquiere una velocidad de deriva mayor, por tanto, gana momentum (impulso) de deriva y experimenta una fuerza hacia la derecha, sin embargo, la molécula ejerce una fuerza a la izquierda en la capa superior, lo cual tiende a retardar el movimiento de la capa más veloz. De manera similar, la molécula B en la capa más rápida, se mueve hacia abajo a través de la frontera CD (debido al movimiento térmico) y ejerce una fuerza a la derecha en una capa más lenta dentro de la cual se mueve.

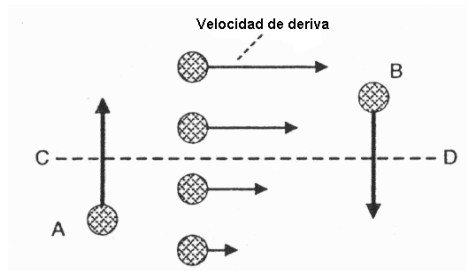


Figura 3.7. Mecanismo de viscosidad de un gas. [18]

Debido al mecanismo descrito anteriormente, un incremento en la temperatura provoca un aumento en la velocidad térmica de las moléculas, por tanto, se incrementa el ritmo al cual estas atraviesan las capas del fluido y, entonces, la viscosidad del gas aumenta cuando la temperatura del fluido aumenta. Un modelo simple basado en la teoría cinética de los gases, predice que:

$$\mu_f = \frac{1}{3} \rho_f \bar{v}_f \lambda_f \quad (3.48)$$

donde  $\rho_f$  es la densidad,  $\bar{v}_f$  es la velocidad promedio de las moléculas y  $\lambda_f$  es el recorrido libre promedio de las moléculas (*mean free path*). De acuerdo con la teoría cinética de los gases,  $\bar{v}_f$ ,  $\rho_f$  y  $\lambda_f$  son:

$$\bar{v}_f = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}} \quad (3.49), \quad \rho_f = n \frac{M_m}{N_{av}} \quad (3.50) \quad \text{y} \quad \lambda_f = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2} \quad (3.51)$$

donde  $R$  es la constante del gas ideal,  $M_m$  es la masa molar,  $d$  el diámetro molecular efectivo del gas,  $T$  es la temperatura absoluta y  $N_{av}$  es el número de Avogadro y, por tanto, la viscosidad para un gas se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mu_f = \frac{2\sqrt{RM_m T}}{\pi n d^2} \quad (3.52)$$

La ecuación (3.52) sugiere que la viscosidad es independiente de la presión del gas, lo cual fue confirmado experimentalmente por Maxwell para un amplio rango de presiones, siempre que éstas no sean muy pequeñas. También, esta ecuación indica que la viscosidad se incrementa en proporción directa a  $\sqrt{M_m}$  y a  $\sqrt{T}$ . Diversos experimentos han confirmado que  $\mu_f$  se incrementa con la temperatura pero el exponente excede ligeramente 0.5.

La temperatura y la dependencia molecular de  $\mu_f$  puede ser expresada por una relación empírica conocida como ecuación de Sutherland:

$$\mu_f = \mu_{f0} \frac{1+T_s/T_0}{1+T_s/T} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad (3.53)$$

donde  $T_0 = 273.15[K]$ ,  $\mu_{f0}$  es el coeficiente de viscosidad a una temperatura  $T_0$ ,  $\mu_{f0}$  y  $T_s$  son constantes que dependen del gas considerado. Usualmente, el coeficiente de viscosidad líquida es mucho más sensible a la variación de la temperatura que el de los gases.

Por otro lado, considérese un cubo elemental de un fluido tal como se muestra en la figura 2.11. Existen seis esfuerzos cortantes, ubicados en las caras del cubo, causados por el gradiente de velocidad del fluido:  $\tau_{xy}(x_0)$ ,  $\tau_{xy}(x_0 + dx)$ ,  $\tau_{yz}(y_0)$ ,  $\tau_{yz}(y_0 + dy)$ ,  $\tau_{zx}(z_0)$  y  $\tau_{zx}(z_0 + dz)$ . Existen, también, seis fuerzas normales, una en cada cara del cubo, causadas por las presiones externas:  $P(x)dydz$ ,  $P(x + dx)dydz$ ,  $P(y)dxdz$ ,  $P(y + dy)dxdz$ ,  $P(z)dxdy$  y  $P(z + dz)dxdy$ .

Si se asume que el peso del fluido es despreciable, para un flujo estacionario, la suma de fuerzas en el eje  $z$  está dada por:

$$[P(z) - P(z + dz)]dxdy + [\tau_{xz}(x + dx) - \tau_{xz}(x)]dydz + [\tau_{yz}(y + dy) - \tau_{yz}(y)]dxdz = 0 \quad (3.54)$$

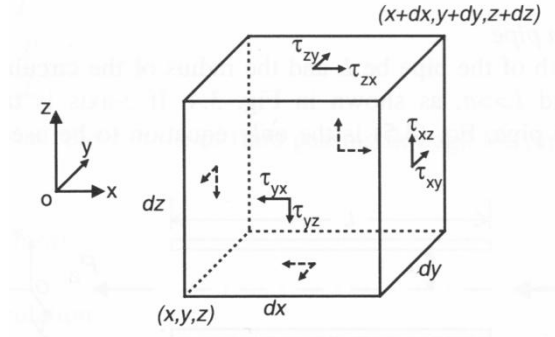


Figura 3.8. Esfuerzos cortantes sobre cada una de las caras del cubo elemental.

Reduciendo (3.54) mediante la definición de la derivada, se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (3.55)$$

pero de una manera similar a (3.47),  $\tau_{xz} = \mu_f \frac{\partial w}{\partial x}$  y  $\tau_{yz} = \mu_f \frac{\partial w}{\partial y}$ , entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.56)$$

donde  $w$  es la componente de la velocidad del fluido en el eje  $z$ . Haciendo un desarrollo similar que aquel de la ecuación (3.54), se tiene para las otras dos direcciones:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu_f \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.57.a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu_f \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.57.b)$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en direcciones paralelas a los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente.

A continuación se tratará un caso específico que produce amortiguamiento en los MEMS: el amortiguamiento por película comprimida. Cuando se coloca una placa paralela a una superficie plana y la primera se mueve hacia la segunda, la película de aire entre ambas se comprime, de tal manera que una parte del aire fluye hacia fuera de la región formada por ambas superficies. Por tanto, aparece una presión  $\Delta p$ . Por el contrario, cuando la placa se aleja de la superficie, la presión disminuye de tal manera que el aire circula hacia el interior. En ambos casos, estas fuerzas que actúan sobre la placa móvil se oponen al movimiento de ésta y, entonces, la película de aire actúa como un amortiguador. La fuerza de amortiguamiento depende de la distancia entre ambas superficies y, mientras más pequeña sea ésta, mayor será la fuerza de amortiguamiento. Cuando la placa se encuentra muy alejada de la superficie plana, las fuerzas sobre la placa, debidas a este fenómeno, son



despreciables y, por tanto, la fuerza de amortiguamiento se debe únicamente a la fuerza de arrastre.

Este tipo de amortiguamiento se utiliza comúnmente para controlar el amortiguamiento de una microestructura y ajustarlo a algún valor deseado. Por tanto, es importante disponer de modelos matemáticos que permitan determinar el comportamiento de este fenómeno en función de algunos parámetros de importancia.

Supónganse dos placas planas paralelas al plano  $xy$  de un sistema de coordenadas cartesianas, tal como se muestra en la figura 3.9. Si las dimensiones de ambas placas son mucho mayores que la distancia entre ellas, entonces, el aire fluye entre ambas placas sólo en dirección lateral.

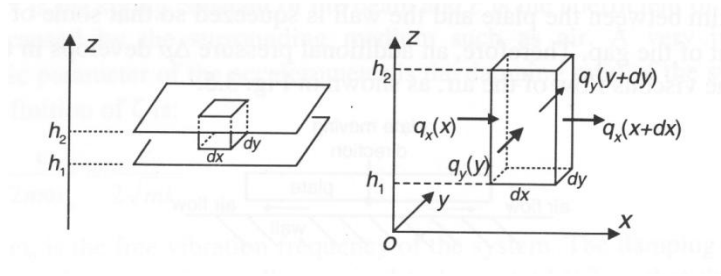


Figura 3.9. Unidad elemental y los flujos de masa que ocurren entre ambas placas. [18]

Considérese un elemento  $h dx dy$ , donde  $h = h_2 - h_1$ , como se muestra en la figura 3.9. Si  $q_x$  es el gasto volumétrico en dirección  $x$  por unidad de longitud en la dirección  $y$  y  $q_y$  es el gasto volumétrico en dirección  $y$  por unidad de longitud en la dirección  $x$ , entonces el balance de masa para el elemento es:

$$(\rho_f q_x)_x dy - (\rho_f q_x)_{x+dx} dy + (\rho_f q_y)_y dx - (\rho_f q_y)_{y+dy} dx = \left( \frac{\partial \rho_f (h_2 - h_1)}{\partial t} \right) dx dy \quad (3.58)$$

Haciendo uso de las siguientes relaciones:

$$(\rho_f q_x)_{x+dx} = (\rho_f q_x)_x + \frac{\partial(\rho_f q_x)}{\partial x} dx \quad (3.59.a)$$

$$(\rho_f q_y)_{y+dy} = (\rho_f q_y)_y + \frac{\partial(\rho_f q_y)}{\partial y} dy \quad (3.59.b)$$

(3.58) se reduce a:

$$\frac{\partial(\rho_f q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f h)}{\partial t} = 0 \quad (3.60)$$

Ahora para poder hallar  $q_x$  y  $q_y$ , es necesario determinar la distribución de velocidades en la dirección  $z$ , para lo cual se considera un elemento diferencial de la columna de gas entre

$z$  y  $z + dz$ , como se muestra en la figura 3.10. Haciendo el balance de fuerzas en la dirección  $x$ , se tiene que:

$$P(x)dydz + \tau_{zx}(z + dz)dxdy = P(x + dx)dydz + \tau_{zx}(z)dxdy \quad (3.61)$$

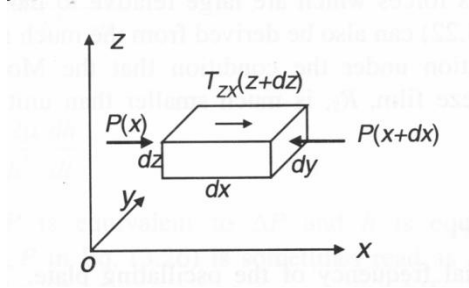


Figura 3.10. Balance de fuerzas en una sección de la columna. [18]

Por tanto,

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.62)$$

Además, se sabe que:

$$\tau_{zx} = \mu_f \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.63)$$

donde  $u$  es la componente de velocidad en la dirección  $x$ . Entonces, se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_f \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.64)$$

Para una distancia  $h$  pequeña,  $P(x, y)$  no es función de  $z$ . Integrando dos veces la ecuación, se tiene que  $u$  es:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu_f} \frac{\partial P}{\partial x} z^2 + c_1 \frac{1}{\mu_f} z + c_2 \quad (3.65)$$

Si las placas no se mueven lateralmente y se coloca el eje de coordenadas en la parte inferior, las condiciones de frontera para (3.65) son:

$$u(0) = 0 \text{ y } u(h) = 0 \quad (3.66)$$

Evaluando para las condiciones de frontera, se tiene:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu_f} \frac{\partial P}{\partial x} z(z - h) \quad 2.113$$

El gasto volumétrico en la dirección  $x$  por unidad de longitud en la dirección  $y$  está dado por:

$$q_x = \int_0^h u(z) dz = -\frac{h^3}{12\mu_f} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.68)$$

Aplicando el mismo procedimiento para  $q_y$ , se tiene:

$$q_y = -\frac{h^3}{12\mu_f} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.69)$$

Substituyendo (3.68) y (3.69) en la ecuación (3.60) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_f h^3}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho_f h^3}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial(h\rho_f)}{\partial y} \quad (3.70)$$

A la ecuación (3.70) se le conoce como ecuación de Reynolds. Si se supone que  $h$  es uniforme en ambas direcciones,  $x$  y  $y$ , se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_f \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_f \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\mu_f}{h^3} \frac{\partial(h\rho_f)}{\partial y} \quad (3.71)$$

Para una capa isotérmica, la densidad del aire  $\rho_f$ , es proporcional a la presión, y dicha relación está dada por:

$$\rho_f = \frac{P}{P_o} \rho_{fo} \quad (3.72)$$

Debido a (3.72), la ecuación (3.71) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\nabla^2 P^2 = 24 \frac{\mu_f}{h^3} \frac{\partial(hP)}{\partial y} \quad (3.73)$$

La ecuación anterior se puede desarrollar como:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + P \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) = 12 \frac{\mu_f}{h^3} \left( P \frac{dh}{dt} + h \frac{dP}{dt} \right) \quad (3.74)$$

Si se supone que el movimiento de las placas es pequeño,  $h = h_o + \Delta h$  y  $P = P_o + \Delta P$ , por tanto,  $\Delta h \ll h_o$  y  $\Delta P \ll P_o$ . Bajo estas condiciones la ecuación (3.74) se puede aproximar como:

$$P_o \left( \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} \right) = 12 \frac{\mu_f}{h^3} P_o h_o \left( \frac{1}{h_o} \frac{d\Delta h}{dt} + \frac{1}{P_o} \frac{d\Delta P}{dt} \right) \quad (3.75)$$

Si  $\frac{\Delta P}{P_o} \ll \frac{\Delta h}{h_o}$ , entonces, se tiene:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 12 \frac{\mu_f}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (3.76)$$

Si el movimiento de la placa es una vibración sinusoidal con amplitud  $\delta_a$  y  $h = h_o + \delta_a \sin(\omega t)$ , entonces utilizando la ecuación (3.76) es posible hacer una estimación sobre  $\Delta P$ :

$$\frac{\Delta P}{l^2} = 12 \frac{\mu_f}{h_o^3} \delta_a \omega \cos(\omega t) \quad (3.77)$$

donde  $l$  es una dimensión característica de la placa (por ejemplo: en una placa circular correspondería al radio y en una placa cuadrada es la mitad de la longitud de uno de sus lados). (3.77) se puede expresar también como:

$$\frac{\Delta P}{P_o} = 12 \frac{\mu_f l^2 \omega}{P_o h_o^2} \frac{\delta_a \cos(\omega t)}{h_o} = \sigma_f \frac{\delta_a \cos(\omega t)}{h_o} \quad (3.78)$$

donde  $\sigma_f = 12 \frac{\mu_f l^2 \omega}{P_o h_o^2}$ . Como  $\delta_a \cos(\omega t)$  tiene el mismo orden de magnitud que  $\Delta h = \delta_a \sin(\omega t)$ , se tiene que:

$$\frac{\Delta P}{P_o} \cong \sigma_f \frac{\Delta h}{h_o} \quad (3.79)$$

Por tanto, la condición para la validez de la ecuación (3.79) se puede expresar como  $\sigma \ll 1$  o como:

$$\frac{l}{h_o} \ll \sqrt{\frac{P_o}{12 \mu_f \omega}} \quad (3.80)$$

Anteriormente, se presentó el desarrollo que Bao [18] hace de las ecuaciones que describen la presión de un gas confinado entre dos placas, cuando una de ellas se mueve, y, a continuación, se presenta el caso de una placa plana finita. Si se considera un par de placas rectangulares con longitud mucho mayor que su ancho  $B$ , el origen del sistema de coordenadas se localiza en el centro de la placa inferior y el eje  $x$  es paralelo al borde que se considera como el ancho de dicha placa, tal como se muestra en la figura 3.11, entonces, el problema puede considerarse unidimensional, donde las condiciones de frontera están dadas por:

$$P\left(\pm \frac{1}{2}B\right) = 0 \quad (3.81)$$

La ecuación (3.76) puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 12 \frac{\mu_f}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (3.82)$$

donde  $h$  es la distancia entre ambas placas. Integrando dos veces la ecuación (3.82), se tiene que:

$$P(x) = 6 \frac{\mu_f}{h^3} \frac{dh}{dt} x^2 + c_1 x + c_2 \quad (3.83)$$

Satisfaciendo las condiciones de frontera se obtiene:

$$P(x) = -6 \frac{\mu_f}{h^3} \frac{dh}{dt} \left( \frac{B^2}{4} - x^2 \right) \quad (3.84)$$

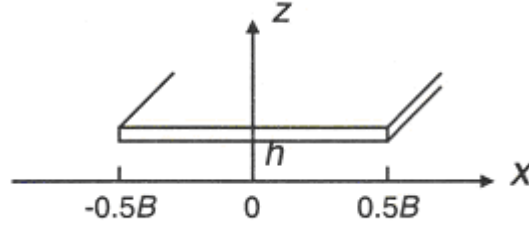


Figura 3.11. Ubicación de la placa rectangular delgada en el espacio.

De (3.84) se puede observar que  $P(x)$  es positiva cuando la película de aire se comprime ( $\frac{dh}{dt} < 0$ ) y viceversa. La presión máxima se presenta al centro de la placa cuando ( $x = 0$ ) y está dada por:

$$P(0) = -\frac{3\mu_f B^2}{2h^3} \frac{dh}{dt} \quad (3.85)$$

La fuerza de amortiguamiento en la placa está dada por:

$$F_{lr} = \int_{-B/2}^{B/2} P(x) L dx = -\frac{\mu_f B^3 L}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (3.86)$$

Según la definición de una fuerza de amortiguamiento  $F_{lr} = -c_{lr} \frac{dh}{dt}$ , el coeficiente de amortiguamiento de la placa es:

$$c_{lr} = \frac{\mu_f B^3 L}{h^3} \quad (3.87)$$

Es importante señalar que esta expresión es válida solo cuando se satisface que  $L \gg B$ . Si no se satisface la condición anterior, el problema es bidimensional y, por tanto, las ecuaciones (3.85), (3.86) y (3.87) cambian. Si las dimensiones de la placa en las direcciones  $x$  y  $y$  son  $B$  y  $L$ , respectivamente, entonces la fuerza de amortiguamiento y el coeficiente de amortiguamiento están dadas por:

$$F_{rec} = -\frac{\mu_f B^3 L}{h^3} \frac{dh}{dt} \beta_d \left( \frac{B}{L} \right) \quad (3.88)$$

y

$$c_{rec} = \frac{\mu_f B^3 L}{h^3} \beta_d \left( \frac{B}{L} \right) \quad (3.89)$$

donde  $\beta_d \left( \frac{B}{L} \right)$  está dada por:

$$\beta_d \left( \frac{B}{L} \right) = 1 - \frac{192 B}{\pi^5 L} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \left( \frac{n\pi L}{2B} \right) \quad (3.90)$$

Si la placa se encuentra perforada tal como se muestra en la figura 3.12 y la densidad de huecos está dada por  $n$  con unidades  $m^{-2}$ , entonces, la fuerza de amortiguamiento en una celda unitaria está dada por [134]:

$$F_{cell} = -\frac{3\mu_f A_c}{2\pi h^3} \frac{dh}{dt} (4\eta_f^2 - \eta_f^4 - 4 \ln \eta_f - 3) \quad (3.91)$$

donde  $A_c$  es el área de una celda unitaria y  $\eta_f$  es la relación  $r_o/r_c$ . Por tanto, la fuerza total de amortiguamiento en la placa perforada está dada por:

$$F_{per} = -\frac{3\mu_f A_p}{2\pi n h^3} \frac{dh}{dt} (4\eta_f^2 - \eta_f^4 - 4 \ln \eta_f - 3) \quad (3.92)$$

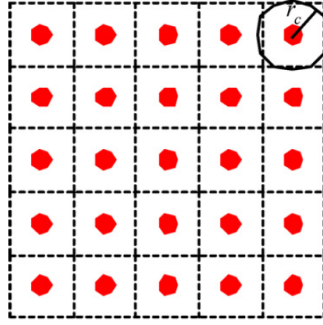


Figura 3.11. Arreglo de una placa perforada. [134]

Si las dimensiones de una estructura que se mueve inmersa en un fluido (o el fluido se mueve alrededor de la estructura), son cercanas al recorrido medio libre del fluido; entonces, es necesario calcular la viscosidad efectiva. La viscosidad efectiva del cuerpo está dada por [114]:

$$\mu_{ef} = \frac{\mu_f}{1 + 9.638 K_n^{1.159}} \quad (3.93)$$

donde  $K_n$  es el número de Knudsen. Dicho número está dado por la relación entre la distancia media libre del fluido  $\lambda_f$  y una dimensión característica de la estructura (o una longitud de escala)  $L$ .  $K_n$  está dada por:

$$K_n = \frac{\lambda_f}{L} \quad (3.94)$$

A pesar de que los mecanismos que ocasionan el amortiguamiento son variados, en esta sección se mostraron los aspectos más relevantes según el tipo de estructura que se utilizó durante este trabajo. Para profundizar sobre las fuerzas de amortiguamiento se sugiere leer el libro de Kempe [114] y sobre los mecanismos de amortiguamiento por película comprimida se sugiere leer el artículo de Bao y Yang [134]. En la siguiente sección se trata de otras fuerzas que también actúan sobre las barras que componen las estructuras propuestas en este trabajo.

### 3.1.6 Ruido y esfuerzos residuales en MEMS

#### *Ruido Browniano*

Según Gabrielson [135], si existe un mecanismo de disipación de energía en un sistema, entonces, debe existir también una fluctuación en el sistema relacionada directamente con la disipación. Por ejemplo: en un oscilador armónico amortiguado (sistema masa, resorte y amortiguador), la presencia de un amortiguador sugiere que cualquier oscilación continuará decreciendo en amplitud, incluso la agitación aleatoria de las moléculas circunvecinas, entonces, es necesario incluir una fuerza que evite que la temperatura del sistema caiga por debajo de los alrededores del sistema. Entonces, en cualquier sistema mecánico en equilibrio térmico, sin importar qué tan complejo sea éste, se puede hacer un análisis del ruido mecánico-térmico añadiendo una fuerza junto a cada amortiguador. La densidad espectral de esta fuerza mecánica de origen térmico está dada por:

$$F_{mt} = \sqrt{4k_b T c_a} \quad (3.95)$$

donde  $k_b$  es la constante de Boltzmann,  $c_a$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $T$  es la temperatura del sistema medida en Kelvin. Esta fuerza es una analogía del ruido de Johnson en una resistencia eléctrica y, esta similitud, se debe a que el ruido de Johnson es producido por la dispersión de los electrones libres debido a las vibraciones mecánico-térmicas de la red cristalina en el conductor.

Entonces, considerando modelo del acelerómetro de la sección 3.1.2, la fuerza  $F_{mt}$ , es decir, el ruido presente en el instrumento está dado por:

$$|Z_n(f)| = \sqrt{4k_b T c_a} \frac{G_n(f)}{k} \quad (3.96)$$

donde  $k$  es la constante del resorte y  $G_n(f)$  está dada por:

$$G_n(f) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}{Q^2}}} \quad (3.97)$$

donde  $Q$  está dada por:

$$Q = \frac{\omega_n m}{c_a} \quad (3.98)$$

Considerando (3.98), la ecuación (3.97) es la misma que la ecuación (3.10) y, por tanto, la grafica de (3.97) es, también, la figura 3.3. Entonces, además de que es importante controlar el amortiguamiento en la estructura para reducir el error en las mediciones de la aceleración, es importante controlar el amortiguamiento e para reducir la densidad espectral de ruido del instrumento. Como puede observarse en la figura 3.3, existen un rango, comprendido por frecuencias cercanas a cero, en las que las ecuaciones (3.10) y (3.97) se aproximan a la unidad; si  $\zeta < 0.70$  existe un rango intermedio de frecuencias para las cuales las ecuaciones (3.10) y (3.97) son mayores que la unidad, es decir, existen combinaciones de la masa, el resorte y el amortiguador para las que la densidad espectral de ruido del sistema se amplifica y, si  $\zeta < 0.70$ , entonces, la densidad espectral de ruido del sistema decae con el aumento de la frecuencia. Entonces, para reducir el ruido, es deseable tomar en cuenta el compromiso que existe al diseñar el sistema con un coeficiente de amortiguamiento relativamente bajo con un factor de amortiguamiento cercano o mayor a 0.70. Por otro lado, la relación señal a ruido del sistema para cualquier frecuencia está dada por:

$$\left| \frac{z_s}{z_n} \right|^2 = \frac{a_s m Q}{4k_b T \omega_o} \quad (3.99)$$

donde  $a_s$  es la aceleración de sistema con unidades de  $\frac{m}{s^2 \sqrt{Hz}}$ .

### *Esfuerzos residuales*

De acuerdo con Senturia [1], en algunos tipos de estructuras, específicamente ciertos tipos de barras, los esfuerzos axiales totales podrían ser no nulos, es decir, podrían tener un esfuerzo residual neto. Estos esfuerzos residuales podrían tener efecto sobre el comportamiento dinámico de una barra al flexionarse. Se puede demostrar [1] que si  $\sigma_o$  es la magnitud de los esfuerzos residuales y  $A_t$  es el área de la sección transversal de la estructura, la fuerza debida a los esfuerzos residuales por unidad de longitud está dada por:

$$q_o = \sigma_o A \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.100)$$

Este efecto se observa cuando a una barra que no se le ha aplicado ningún esfuerzo tiende a deformarse después de haber sido fabricada. El origen de este fenómeno se presenta en procesos donde se depositan películas calientes sobre un substrato y al enfriarse éstas tienden a contraerse.



### 3.1.7 Fabricación de las microestructuras

En esta sección se describe someramente el proceso de fabricación comercial que se empleó para la construcción de las barras. Para profundizar sobre los métodos de micromaquinado se recomienda referirse a [112, 111].

Las microestructuras fueron fabricadas en MEMSCAP Inc. [136] a través de un proceso superficial llamado PolyMUMPS [137]. Las películas que se utilizan durante este proceso son: 3 capas de polisilicio, 2 capas de óxido de silicio, una capa de nitruro de silicio y una película de oro. El proceso comienza sobre una oblea de silicio (100) tipo n, que se dopa con átomos de fósforo usando una película de PSG. Después de la difusión, se remueve la capa de PSG y se deposita otra de nitruro de silicio (Nitride). Sobre esta película se deposita la primera capa de polisilicio (Poly0) que servirá como capa estructural, a la cual se le da forma mediante un proceso de grabado. Este grabado consiste en depositar una película fotosensible sobre Poly0 y revelarla con una máscara cuya geometría fue hecha por el diseñador. Después se remueven aquellas partes de la película fotosensible indeseada y, por medio de un grabado con plasma, las regiones indeseadas de Poly0. A continuación, se remueve lo que hubiera quedado de la película fotosensible. Este proceso de grabado es común durante el proceso de fabricación. Posteriormente, se deposita una capa de  $2 \mu\text{m}$  de PSG sobre Poly0, correspondiente a la primera capa de sacrificio (Oxide1), es decir, es una capa que se removerá en algún paso posterior, pero que durante la fabricación sirve para dar soporte a las demás capas de la estructura. A esta capa se le hace un pequeño grabado con la finalidad que la estructura cuente con topes que limiten el desplazamiento vertical de la segunda capa de polisilicio (Poly1). A continuación, se graba la capa de sacrificio de PSG, hasta la capa Poly0 y se deposita Poly1, además, sobre ésta se deposita una película delgada de PSG y para dopar la capa Poly1 mediante el calentamiento de la oblea. Posteriormente, se graba la capa Poly1. Sobre Poly1 se deposita una segunda capa de sacrificio de PSG (Oxide2) y, además, ésta se graba. A continuación se realiza un segundo grabado, pero a diferencia del anterior este grabado actúa sobre las capas depositadas anteriormente con la intención de que la última capa de polisilicio (Poly2) tenga acceso a la capa Poly0 o al nitruro. Se deposita y se dopa la capa Poly2, después, se ésta se graba Poly2 y se remueven los restos de la película fotosensible, de la misma forma que para Poly1 y se realiza un segundo grabado hasta Poly0. Por último, se deposita una capa de oro (Metal) que servirá para hacer los contactos eléctricos, se remueven las capas de sacrificio y los restos de la película fotosensible que pudieran haber quedado, entonces, el proceso ha terminado y las microestructuras se encuentran liberadas. En la figura 3.12 se reproduce una figura donde se muestran las capas estructurales y de sacrificio del proceso. En la tabla 3.3 se muestran algunas de las principales características de cada una de las capas que forman las microestructuras hechas con este proceso.

Según MEMSCAP [137], se han medido las propiedades mecánicas de las capas de polisilicio que forman las diversas estructuras de los MEMS y algunas de las características mecánicas son:

- Módulo de Young:  $158 \pm 10$  [GPa]
- Relación de Poisson:  $0.22 \pm 0.01$
- Fuerza para la fractura:  $1.21 \pm 0.8$  [GPa] hasta  $1.65 \pm 0.28$  [GPa]

Capa	Espesor (nm)			Esfuerzos residuales (MPa)			Resistencia ( $\Omega/sq$ )		
	Mín.	Prom.	Máx.	Mín.	Prom.	Máx.	Mín.	Prom.	Máx.
Nitride	530	600	670	0	90	280	NA		
Poly0	470	500	530	0	-25	-50	15	30	45
Oxide1	1750	2000	2250	NA			NA		
Poly1	1850	2000	2150	0	-10	-20	1	10	20
Oxide2	670	750	830	NA			NA		
Poly2	1400	1500	1600	0	-10	-20	10	20	30
Metal	460	520	580	0	50	100	0.05	0.06	0.07

Tabla 3.3. Parámetros de cada una de las capas que forman los MEMS fabricados a través de PolyMUMPs [137].

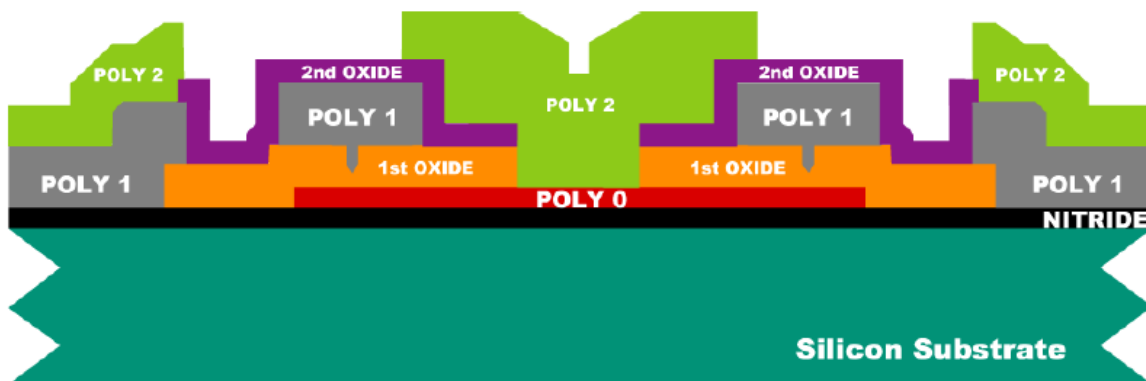


Figura 3.12. Representación de cada una de las capas depositadas a través del proceso PolyMUMPs antes de remover las capas de sacrificio [137].

En la figura 3.13 se muestra la superposición de las máscaras que se utilizaron para la fabricación de las microestructuras. La superficie total es de  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$  y se puede observar dos rectángulos que se asemejan a líneas perpendiculares que atraviesan por el centro del chip, la función de estas “líneas” es la de marcar el chip original para dividirlo en cuatro pedazos. Si se numeran los cuadrantes de la misma forma que en un plano cartesiano, en los cuadrantes 1 y 4 se pueden apreciar varios tipos de estructuras: dos tipos de acelerómetros cuyo eje sensible se encuentra en el plano formado por el sustrato, un acelerómetro de torsión que sirve para medir aceleraciones perpendiculares al sustrato y un conjunto de ménsulas. En el cuadrante 2 y 3 se pueden observar barras en puente, una con una longitud de  $1500\ \mu\text{m}$  y  $1000\ \mu\text{m}$ , respectivamente. Además, en estos cuadrantes

es posible distinguir en ambos lados de la barra dos estructuras cuya intención es que sirvan de soporte de los chips cuando estos se coloquen sobre la línea de retardo.

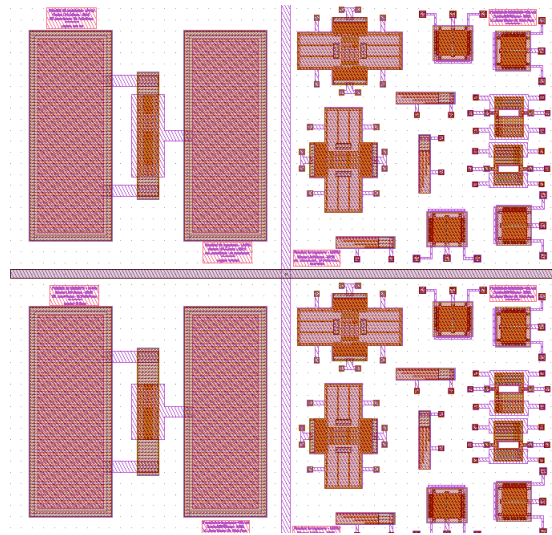


Figura 3.13. Superposición de las máscaras usadas en la fabricación. Además, esta figura se asemeja a la forma en que se aprecia el chip.

### 3.2 Microestructuras propuestas

Las estructuras propuestas para funcionar como elementos inerciales en el mircoacelerómetro SAW-MEMS son dos barras fijas en sus dos extremos. En las figuras 3.14 se muestran imágenes tomadas con el microscopio del analizador de microsistemas Polytec MSA-500. En las figuras 3.14 es posible distinguir, por debajo de las barras, el electrodo de control formado por Poly0. Para construir las barras se utilizaron Poly1 y Poly2 [137] y para poder liberar la microestructura, es decir, remover por completo las capas de óxido (Oxide1 y/o Oxide2) y lograr que la estructura pudiera moverse libremente. Incluso se distingue un patrón de difracción sobre la barra que se deforma por la acción de su propio peso. Este tipo de estructuras son demasiado largas según los criterios utilizados en MEMS e, incluso, el personal de atención a clientes de MEMSCAP dudaba que se pudieran realizar estructuras tan largas. En las siguientes secciones se propone una forma de estudiar este tipo de estructuras, se hacen simulaciones ellas, se muestran los resultados experimentales y, por último, se discute acerca de los resultados.

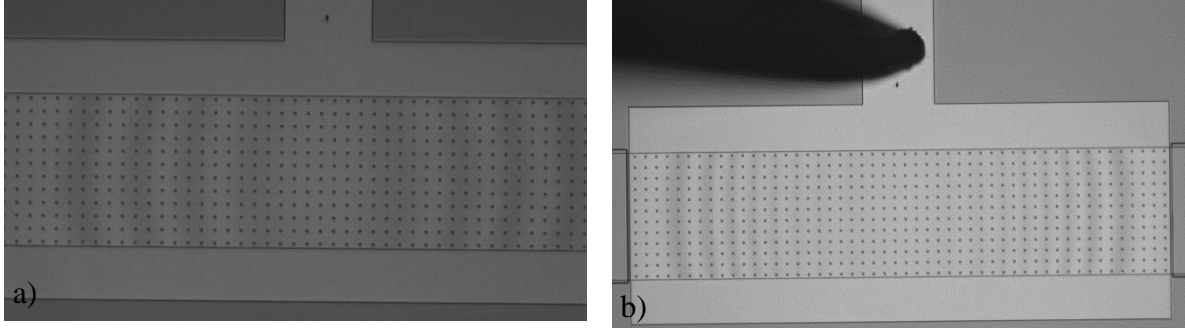


Figura 3.14. a) Puente de longitud de 1500  $\mu\text{m}$ . b) Puente de 1000  $\mu\text{m}$  de longitud.

### 3.2.1 Análisis de las barras

Considerando las dimensiones de las estructuras propuestas, éstas satisfacen el criterio de una barra larga tal como fue establecido por Rao [118]; sin embargo, al ver la relación entre el largo y el ancho surge la pregunta de si la estructura se asemeja más a una placa que a una barra.

De la misma forma que para las barras, para las placas existen también diversas teorías para explicar la vibración de éstas. Una teoría muy conocida es la llamada teoría clásica de placas o teoría de Kirchhoff, la cual está basada en las mismas consideraciones que la teoría de barras de Euler-Bernoulli. Las consideraciones hechas en la teoría de Kirchhoff son: el espesor de la placa es pequeño en comparación de las dimensiones laterales de la placa, el plano medio de la placa es el plano neutral después de la deformación, el desplazamiento de la placa es pequeño comparado con su espesor, las deformaciones  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  y  $\varepsilon_{zz}$  son despreciables. Según éstas consideraciones, los momentos flexionantes en la placa están dados por:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_p \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.101)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.102)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1 - \nu_p) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.103)$$

Las fuerzas cortantes están dadas por:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.104)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.105)$$

Considerando el equilibrio de fuerzas en el eje  $z$ , entonces, la ecuación de movimiento está dada por:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f(x, y, t) = \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.106)$$

Desarrollando las derivadas del lado izquierdo de (3.106) y reorganizando los términos, ésta puede expresarse como:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (3.107.a)$$

o bien

$$D(\nabla^2 \nabla^2 w) + \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (3.107.b)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad del material con el que está fabricada la placa,  $h$  es el espesor de la membrana y  $f(x, y, t)$  es la fuerza por unidad de área aplicada sobre la placa. Si se compara la ecuación (3.107.a) con la ecuación de barras de Euler-Bernoulli (3.11), se puede observar que, si la sección transversal de la barra es constante, (3.11) se simplifica y se obtiene una derivada de cuarto orden multiplicada por el producto del módulo de Young por el momento de inercia de área; entonces, las ecuaciones tienen una estructura similar y, la principal diferencia entre ambos se debe a la existencia de las derivadas parciales en  $y$ .

Por otro lado, las condiciones de frontera para el caso en el que los bordes paralelos al eje  $x$  se encuentran libres son:

$$M_y \Big|_{(x,y=b,t)} = 0 \quad (3.108)$$

y

$$V_y \Big|_{(x,y=b,t)} = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \Big|_{(x,y=b,t)} = 0 \quad (3.109)$$

Se puede observar que, si los momentos que flexionan la barra en dirección  $y$  son cero ( $M_y = M_{xy} = 0$ ), la ecuación (3.107) es idéntica a la ecuación de Euler-Bernoulli (3.11). Suponiendo que la fuerza está uniformemente distribuida, dos bordes laterales paralelos de la placa se encuentran libres y las deformaciones de la estructura son pequeñas; entonces sería posible utilizar la ecuación (3.11) en lugar de la ecuación (3.107). Además, para simplificar el estudio del problema planteado se prefiere utilizar la ecuación (3.11).

Las fuerzas que actúan sobre la microestructura son: el peso de la barra, una fuerza de amortiguamiento debido al efecto de la película comprimida (ecuación (3.86)), una fuerza de actuación electrostática (ecuaciones (3.39) y (3.40)) y una fuerza debida a los esfuerzos residuales en la microestructura (ecuación (3.100)). Si se considera que las fuerzas están uniformemente distribuidas sobre la estructura y la sección transversal de la estructura es

constante, entonces, la ecuación que describe los desplazamientos de la barra, está dada por:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{m_b g}{l} - \frac{c_b}{l} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \sigma_o A \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + F_{eb}(x, t) \quad (3.110)$$

donde  $l$  es la longitud de la barra y  $F_{eb}(x, t)$  es la fuerza de origen electrostático distribuida uniformemente sobre la barra. En el caso de que la actuación sea por voltaje se tiene:

$$F_V(V, x, t) = \frac{\alpha_f \epsilon_c A_c}{2l(d_o - w(x,t))^2} V^2 \quad (3.111)$$

y en el caso de que la actuación electrostática sea por corriente:

$$F_Q(Q) = \frac{Q^2}{2l\alpha_f \epsilon_c A_c} \quad (3.112)$$

Reorganizando los términos de la ecuación (3.110) y considerando la actuación electrostática por voltaje, se tiene que la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la barra está dada por:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \sigma_o A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{c_b}{l} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{m_b g}{l} + \frac{\alpha_f \epsilon_c A}{2l(d_o - w(x,t))^2} V^2 \quad (3.113.a)$$

y para el caso de la actuación electrostática por corriente, se obtiene:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \sigma_o A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{c_b}{l} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{m_b g}{l} + \frac{Q^2}{2l\alpha_f \epsilon_c A_c} \quad (3.113.b)$$

Las condiciones de frontera para un puente son:

$$w(x = 0, t) = 0 \quad (3.114.a)$$

$$w(x = l, t) = 0 \quad (3.114.b)$$

$$\frac{dw(x=0,t)}{dx} = 0 \quad (3.114.c)$$

$$\frac{dw(x=l,t)}{dx} = 0 \quad (3.114.d)$$

Por otro lado, se puede obtener una expresión teórica para calcular la frecuencia de los modos de vibración de la barra considerando los esfuerzos residuales, si se aplica el método de separación de variables en la siguiente ecuación de tal forma que  $w(x, t)$  queda como [118]:

$$w(x, t) = W(x)(k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)) \quad (3.115)$$

Si se substituye (3.115) en (3.113) y se considera que la gravedad, el amortiguamiento y la fuerza electrostática son nulos, entonces, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \sigma_o A \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - \rho A \omega^2 W(x) = 0 \quad (3.116)$$

Si se considera que la función  $W(x)$  de la forma:

$$W(x) = c_1 \cosh(s_1 x) + c_2 \sinh(s_1 x) + c_3 \cos(s_2 x) + c_4 \sin(s_2 x) \quad (3.117)$$

donde

$$s_1^2, s_2^2 = \frac{\sigma_o A}{2EI} \pm \left[ \left( \frac{\sigma_o A}{2EI} \right)^2 + \frac{\rho A \omega^2}{EI} \right]^{1/2} \quad (3.118)$$

Si (3.117) está sujeta a las condiciones de frontera (3.114), entonces, se puede demostrar que la frecuencia de cada uno de los modos de vibración de la estructura puede obtenerse resolviendo la siguiente ecuación trascendente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & s_2 \\ \cosh(s_1 l) & \sinh(s_1 l) & \cos(s_2 l) & \sin(s_2 l) \\ s_1 \sinh(s_1 l) & s_1 \cosh(s_1 l) & -s_2 \sin(s_2 l) & s_2 \cos(s_2 l) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.119)$$

donde  $|A|$  es el determinante de la matriz A.

En la siguiente sección se tratará sobre la solución de las ecuaciones (3.113.a) y (3.113.b) propuestas para el análisis de las barras, considerando las condiciones de frontera del puente (3.114).

### 3.2.2 Resultados teóricos

Para resolver las ecuaciones diferenciales parciales (3.113.a) y (3.113.b), numéricamente, se utilizaron diferencias finitas y un método implícito. Se decidió utilizar un método implícito en lugar de uno explícito, porque el primero es convergente sin importar la magnitud de los incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta t$  [138, 139].

Para plantear las ecuaciones en diferencias, las derivadas temporales se aproximaron con diferencias finitas hacia atrás, mientras que las derivadas espaciales se aproximaron con diferencias finitas centradas [104]. Las ecuaciones en diferencias empleadas para resolver el problema de las barras en puente, considerando el modelo de Euler-Bernoulli, para la actuación por voltaje y por corriente, respectivamente, son:

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{\Delta x^4} w(x + 2\Delta x, t) - \left( \frac{4EI}{\Delta x^4} + \frac{\sigma_o A}{\Delta x^2} \right) w(x + \Delta x, t) + \left( \frac{4EI}{\Delta x^4} + \frac{\sigma_o A}{\Delta x^2} + \frac{c_b}{l\Delta t} + \frac{\rho A}{\Delta t^2} \right) w(x, t) - \\
& \left( \frac{4EI}{\Delta x^4} + \frac{\sigma_o A}{\Delta x^2} \right) w(x - \Delta x, t) + \frac{EI}{\Delta x^4} w(x - 2\Delta x, t) = \frac{mg}{l} + \frac{\alpha_f \epsilon_c AV(t)^2}{2l(d_o - w(x, t - \Delta t))^2} + \left( \frac{c_b}{l\Delta t} + \right. \\
& \left. \frac{2\rho A}{\Delta t^2} \right) w(x, t - \Delta t) - \frac{\rho A}{\Delta t^2} w(x, t - 2\Delta t)
\end{aligned} \tag{3.120.a}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{\Delta x^4} w(x + 2\Delta x, t) - \left( \frac{4EI}{\Delta x^4} + \frac{\sigma_o A}{\Delta x^2} \right) w(x + \Delta x, t) + \left( \frac{4EI}{\Delta x^4} + \frac{\sigma_o A}{\Delta x^2} + \frac{c_b}{l\Delta t} + \frac{\rho A}{\Delta t^2} \right) w(x, t) - \\
& \left( \frac{4EI}{\Delta x^4} + \frac{\sigma_o A}{\Delta x^2} \right) w(x - \Delta x, t) + \frac{EI}{\Delta x^4} w(x - 2\Delta x, t) = \frac{mg}{l} + \frac{Q(t)^2}{2l\alpha_f \epsilon_c} + \left( \frac{c_b}{l\Delta t} + \frac{2\rho A}{\Delta t^2} \right) w(x, t - \Delta t) - \\
& \frac{\rho A}{\Delta t^2} w(x, t - 2\Delta t)
\end{aligned} \tag{3.120.b}$$

Una vez que se ha explicado la forma en que se realizaron las simulaciones numéricas de la barra, es necesario probar el modelo y para hacerlo se utilizaron tres puentes. Dos de ellos son los que se muestran en las figuras 3.14, las cuales se fabricaron tal como se explica en la sección 3.1.7, y el otro, es el que se muestra en la fotografía de la figura 3.15, fabricado por la Dra. Laura Adriana Oropeza Ramos sobre una oblea SOI (*Silicon on insulator*), las características y las dimensiones aproximadas de esta última estructura son: el material sobre el que fue construido es silicio ( $E_{\text{silicio}} = 172 \text{ GPa}$ ,  $\rho_{\text{silicio}} = 2330 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $\sigma_{\text{silicio}} = 0$ ), el largo de la estructura es de  $370 \mu\text{m}$ , el ancho es de  $10 \mu\text{m}$ , el espesor es de  $21 \mu\text{m}$  y la distancia desde la barra al substrato es de  $9 \mu\text{m}$ . Debido a que la distancia entre el substrato y el puente es cercana al ancho de la barra, entonces, los efectos de amortiguamiento por película comprimida son despreciables y el amortiguamiento en la estructura se debe principalmente al arrastre, es decir, a la estructura que se mueve inmersa en un fluido, pero como los desplazamientos son pequeños, entonces, el amortiguamiento también lo es y, por estas razones, se desprecia el efecto de amortiguamiento. A continuación se presentan los resultados teóricos obtenidos con el modelo. Primero se trata sobre el puente mostrado en la figura 3.15 y, después, se tratará sobre las barras propuestas (figuras 3.14).



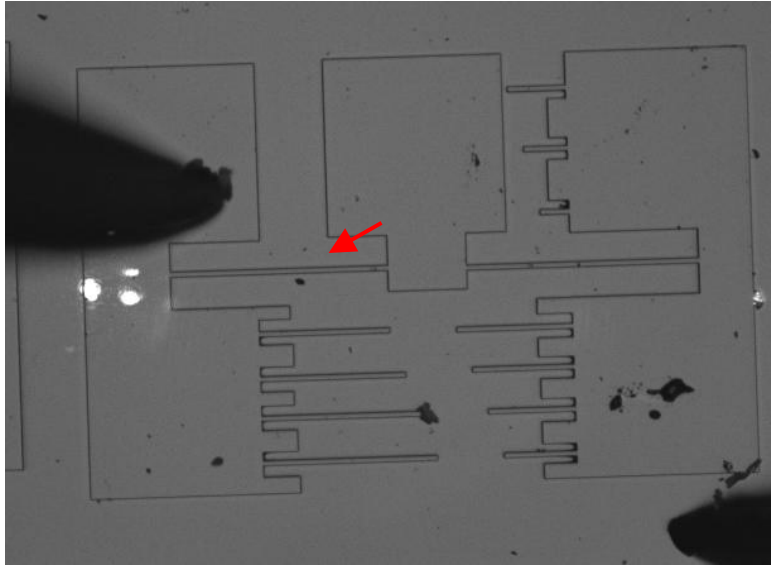


Figura 3.15. Puente fabricado sobre una oblea SOI que se utilizó para probar el modelo propuesto.

#### *Barra SOI*

Una forma común de obtener los modos de vibración de una microestructura es aplicar una señal eléctrica cuyo espectro en frecuencia sea amplio, es decir, la magnitud de su espectro sea constante sobre un amplio rango de frecuencias con la finalidad de observar la respuesta mecánica de la estructura. Existen dos tipos de señales que se pueden utilizar para encontrar los modos de vibración de la estructura, éstas son: un impulso<sup>8</sup> y una señal de ruido blanco. Sin embargo, las simulaciones numéricas se encuentran limitadas debido a que en ellas el dominio del tiempo es discreto, esto implica que el incremento del tiempo  $\Delta t$  debe ser seleccionado cuidadosamente, considerando el teorema de muestreo de Nyquist [140], es decir, que en el mejor de los casos sólo se podrán obtener señales con frecuencias máximas de la mitad de la frecuencia de muestreo ( $1/\Delta t$ ). Entonces, para aproximar la función de transferencia de la barra, se aplicó un impulso con una amplitud de 100 V y, para determinar los modos de vibración de la estructura, se calculó la FFT. En la figura 3.16 se muestra el desplazamiento del punto central en la barra y en la figura 3.17 el espectro en frecuencias de la barra. En esta última figura, se observa una espiga situada en 1.35 MHz y una magnitud de  $6.025 \times 10^{-11}$  m.

---

<sup>8</sup> Un impulso sólo existe como una distribución matemática, físicamente, una señal con estas características no existe, sin embargo, se considera como tal, a un pulso cuya duración temporal es tan corta que su espectro es suficientemente amplio en comparación con las frecuencias de vibración de las estructuras.

Desplazamiento del punto central de la barra resultante de aplicarle un impulso vs. tiempo  
(Respuesta al impulso de la barra SOI)

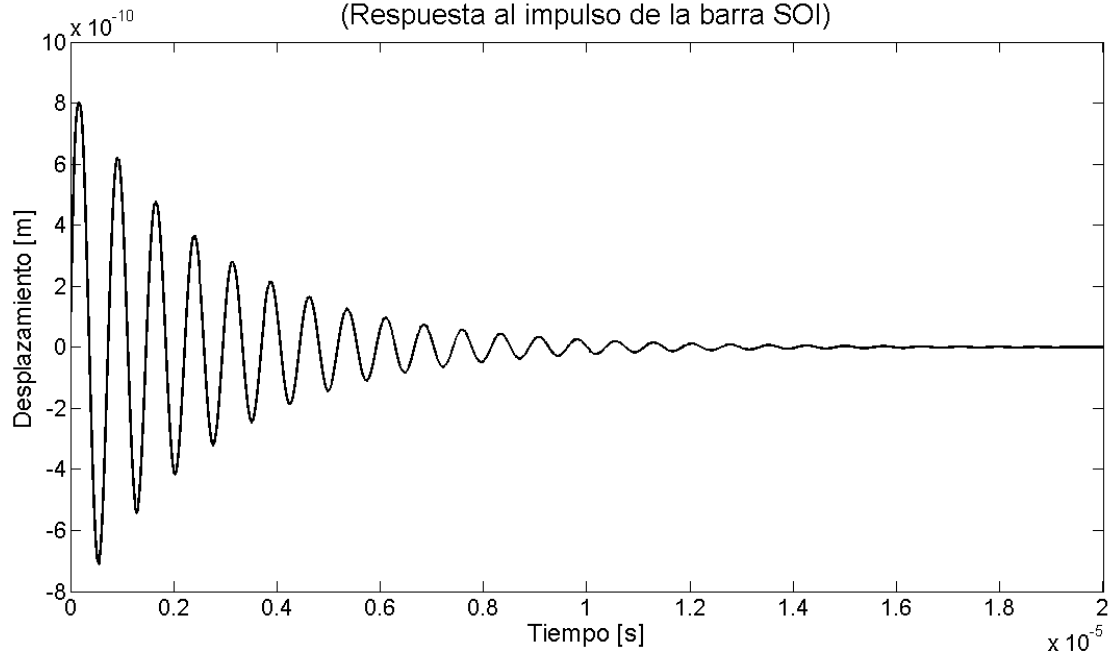


Figura 3.16. Respuesta al impulso de la barra SOI.

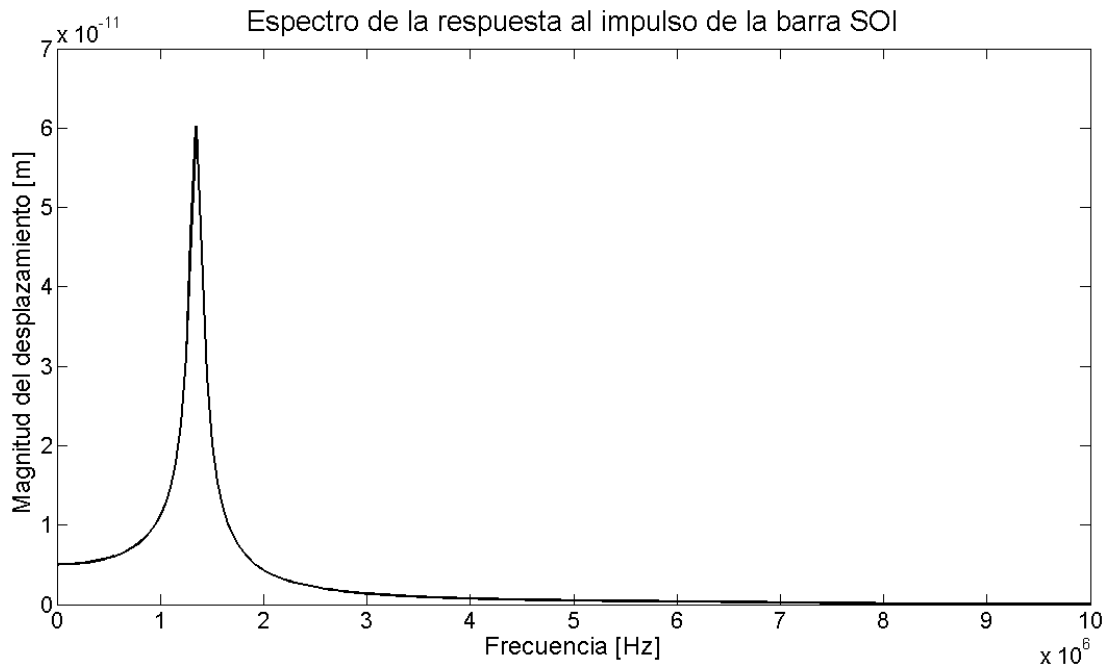


Figura 3.17. Magnitud del espectro de la respuesta al impulso de la barra SOI.

### *Barras propuestas*

Como ya se mencionó, las barras propuestas son dos: una con una longitud de  $1000 \mu\text{m}$  y otra con longitud de  $1500 \mu\text{m}$ . Para abreviar, a partir de este punto, las barras de  $1000 \mu\text{m}$

y de  $1500 \mu m$  de longitud, se denotarán como (BC) y (BL), respectivamente. De acuerdo a la tabla 3.3, las otras dimensiones aproximadas de las barras son: el espesor es de  $3.5 \mu m$ , el ancho de la barra es de  $350 \mu m$ , la distancia entre la barra y el substrato es de  $2 \mu m$ , las perforaciones en la barra son cuadradas y cada lado mide  $5 \mu m$ , la distancia desde el centro de una perforación hasta otra contigua es de  $30 \mu m$ . El módulo de Young, la relación de Poisson y la fuerza de fractura son aquellos que se muestran en la sección 3.1.7.

Para poder hacer las simulaciones de las barras es importante estimar el amortiguamiento y la capacitancia de las microestructuras. Con la finalidad de apreciar el efecto de las perforaciones en el amortiguamiento de la barra, primero, se calculó el coeficiente de amortiguamiento con la ecuación (3.87) y, después, se comparó con el obtenido utilizando (3.89). El coeficiente de amortiguamiento por unidad de longitud de la placa sin perforaciones es  $\frac{c_{sin}}{L} = 96.4688 Pa \cdot s$ , mientras que para el caso de la placa perforada es de  $\frac{c_{con}}{L} = 0.60094 Pa \cdot s$ . Se puede observar que la diferencia entre ambos es considerable. Esta diferencia se puede explicar considerando la función logaritmo que aparece en (3.89). Durante las simulaciones se utilizó, como valor aproximado al amortiguamiento real, el coeficiente de amortiguamiento obtenido en la placa con perforaciones. Para los cálculos de la capacitancia se utilizaron las ecuaciones (3.30) y (3.33), se consideró como si la placa no tuviera perforaciones y la diferencia de la capacitancia cuando se toma en cuenta el espesor de la barra es menor al 0.4%, por esta razón, es posible despreciar el espesor de la barra. La capacitancia por unidad de longitud para las barras es  $\frac{C_b}{L} = 1.572 nF/m$ .

El módulo de Young y los esfuerzos residuales dependen de los procesos de fabricación lo cual hace que exista incertidumbre sobre los valores reales que tiene la estructura. Para poder valorar los efectos de las posibles variaciones de estos parámetros en el comportamiento de la estructura se estudiarán los modos de vibración de los puentes en nueve posibles casos, dados por las combinaciones de los valores mínimos, máximos y típicos para el módulo de Young y el esfuerzo residual reportados por MEMSCAP [137]. Como una primera aproximación al problema se utilizó la ecuación (3.119) para estimar el efecto del esfuerzo residual en los puentes y los resultados de este análisis se presentan en la figura 3.18. Es importante señalar que en esta figura el eje de las abscisas se encuentra normalizado con respecto a la frecuencia natural de ésta, cuando no hay esfuerzos residuales y se considera un módulo de Young de 148 GPa. En la figura 3.18 se puede observar que, cuando los esfuerzos residuales son positivos, la barra tiende a ser más rígida y, por tanto, la frecuencia del primer modo de la barra crece. Además, existe un rango de esfuerzos residuales negativos donde la barra es menos rígida y, a diferencia del caso anterior, la frecuencia del primer modo decrece. Si el esfuerzo residual continúa decreciendo existe, un valor crítico para el cual el primer modo de vibración de la barra no se presenta sino que sólo se encuentran los modos superiores. En la tabla 3.4 se reproducen

resultados obtenidos con CoventorWare<sup>9</sup> [141]. Este valor crítico es un punto de inestabilidad de la barra y los resultados obtenidos indican que a partir de él, la función de forma crece indefinidamente. En la figura 3.19 se muestra un ejemplo de este caso, obtenido con la ecuación (3.115). Este fenómeno sugiere que para esos valores de esfuerzos residuales, la barra pierde su integridad y tiende a romperse durante la liberación de la estructura después de la fabricación. En la tabla 3.4 se muestran las frecuencias de los modos de vibración obtenidos con CoventorWare.

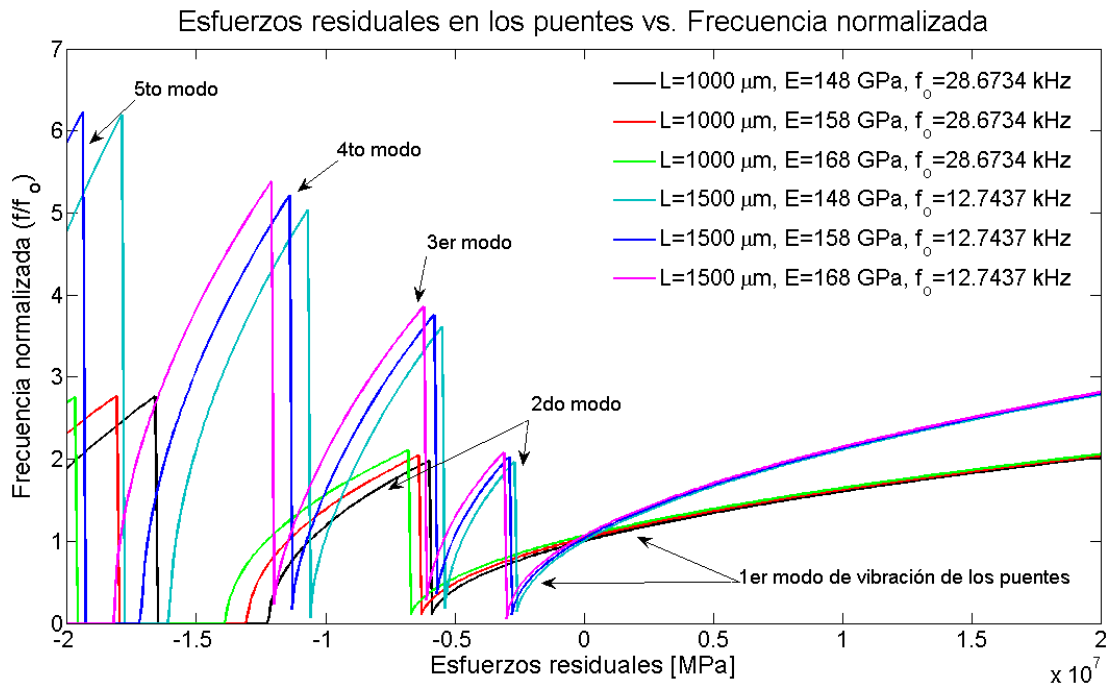


Figura 3.18. Frecuencia normalizada de los modos de vibración de la estructura vs. los esfuerzos residuales de la barra.

Adicionalmente, para corroborar la validez de las expresiones (3.115) y (3.119) se realizaron simulaciones por medio de elemento finito con CoventorWare. Estas simulaciones consisten en obtener la frecuencia del primer modo de vibración para esfuerzos residuales de -2 MPa, 0 MPa y 2 MPa para ambas barras. Los resultados de estas simulaciones se muestran en la tabla 3.5.a, considerando los parámetros que se muestran en la tabla 3.5.b.

Además, por medio de elemento finito se obtuvo la forma de la barra para los 6 primeros modos de vibración de la estructura si se desprecia el esfuerzo residual de la estructura y el módulo de Young es de 158 GPa. Como se puede observar en la figura 3.20, se confirma que la estructura se comporta como una barra para frecuencias relativamente bajas y se

<sup>9</sup> CoventorWare es un programa enfocado al análisis y a la construcción de MEMS que utiliza las técnicas de elemento finito.

puede observar que existen modos de vibración torsionales, es decir, la estructura se mueve como una placa, sin embargo, este comportamiento ocurre a frecuencias mucho mayores. Por esta razón, se justifica haber utilizado una ecuación de barras para una estructura que aunque estrictamente no es tal, bajo determinadas condiciones su comportamiento sí se asemeja a una barra. En la figura 3.21 se muestra la función de forma de la barra obtenida por medio de (3.119).

	$\sigma_o$ [MPa]	E [GPa]	1_Frequency	2_Frequency	3_Frequency	4_Frequency
Step 1	0	148	12933.13	35646.17	38979.43	69977.3
Step 2	0	158	13362.89	36830.74	40274.77	72302.75
Step 3	0	168	13779.24	37978.38	41529.73	74555.7
Step 4	-10	148	-1	-1	32837.77	33271.27
Step 5	-10	158	-1	-1	34783.08	37370.19
Step 6	-10	168	-1	-1	36231.57	41463.55
Step 7	-20	148	-1	-1	-1	18504.61*
Step 8	-20	158	-1	-1	-1	28065.54*
Step 9	-20	168	-1	-1	-1	29862.76*

Tabla 3.4. Resultados obtenidos con Coventor de los diversos modos de vibración del puente cuya longitud es 1500  $\mu\text{m}$ . Aquellas casillas indicadas con -1 quieren decir que Coventor no encontró solución para dicho modo. \*Debido a la forma del modo, éste corresponde al 5<sup>to</sup> modo.

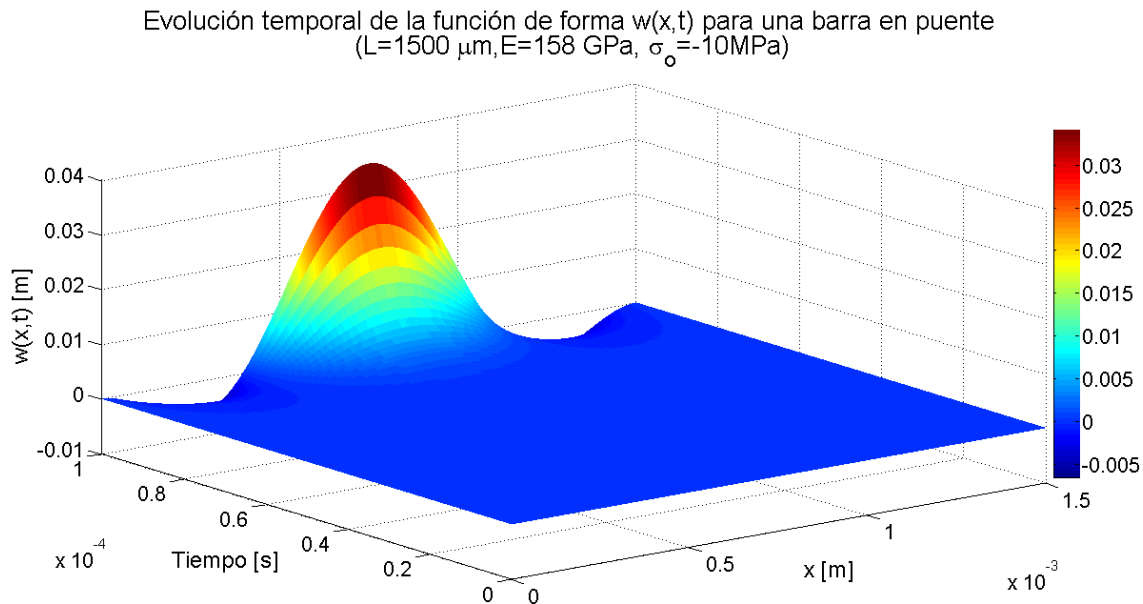


Figura 3.19. Comportamiento dinámico de la barra cuando se le aplica un escalón de gravedad y ésta se encuentra sometida a un esfuerzo residual con magnitud de -10 MPa. En el eje vertical se muestra la función de forma de la barra y su evolución temporal, observándose el comportamiento inestable de la estructura.

a)

Caso	Barra Corta			Barra Larga		
	Frecuencia natural ec. (3.17) o (3.119) [KHz]	Frecuencia natural ec. (3.120.a) [KHz]	Frecuencia natural por elemento finito [KHz]	Frecuencia natural ec. (3.17) o (3.119) [KHz]	Frecuencia natural ec. (3.120.a) [KHz]	Frecuencia natural por elemento finito [KHz]
1	32.9792	32.4644	32.3735	16.7155	16.6389	13.2956
2	33.8127	33.2612	33.2339	17.0436	16.9629	13.7138
3	34.6260	34.0396	34.0726	17.3652	17.2802	14.1197
4	28.6734	28.9494	28.8864	12.7437	12.7309	12.7753
5	29.6263	29.8892	29.8463	13.1672	13.1527	12.9282
6	30.5494	30.8004	30.7763	13.5775	13.5614	13.7741
7	23.5020	23.2793	24.8597	6.3986	6.3794	12.5517
8	24.6587	24.4084	25.9707	7.2186	7.1975	12.9939
9	25.7632	25.4845	27.0359	7.9527	7.9297	12.9295

b)

Caso	Módulo de Young [GPa]	Esfuerzos residuales [MPa]
1	148	2
2	158	2
3	168	2
4	148	0
5	158	0
6	168	0
7	148	-2
8	158	-2
9	168	-2

Tabla 3.5.a) Comparación de resultados obtenidos teóricamente y por medio de elemento finito. b) Parámetros considerados para cada uno de los casos estudiados.

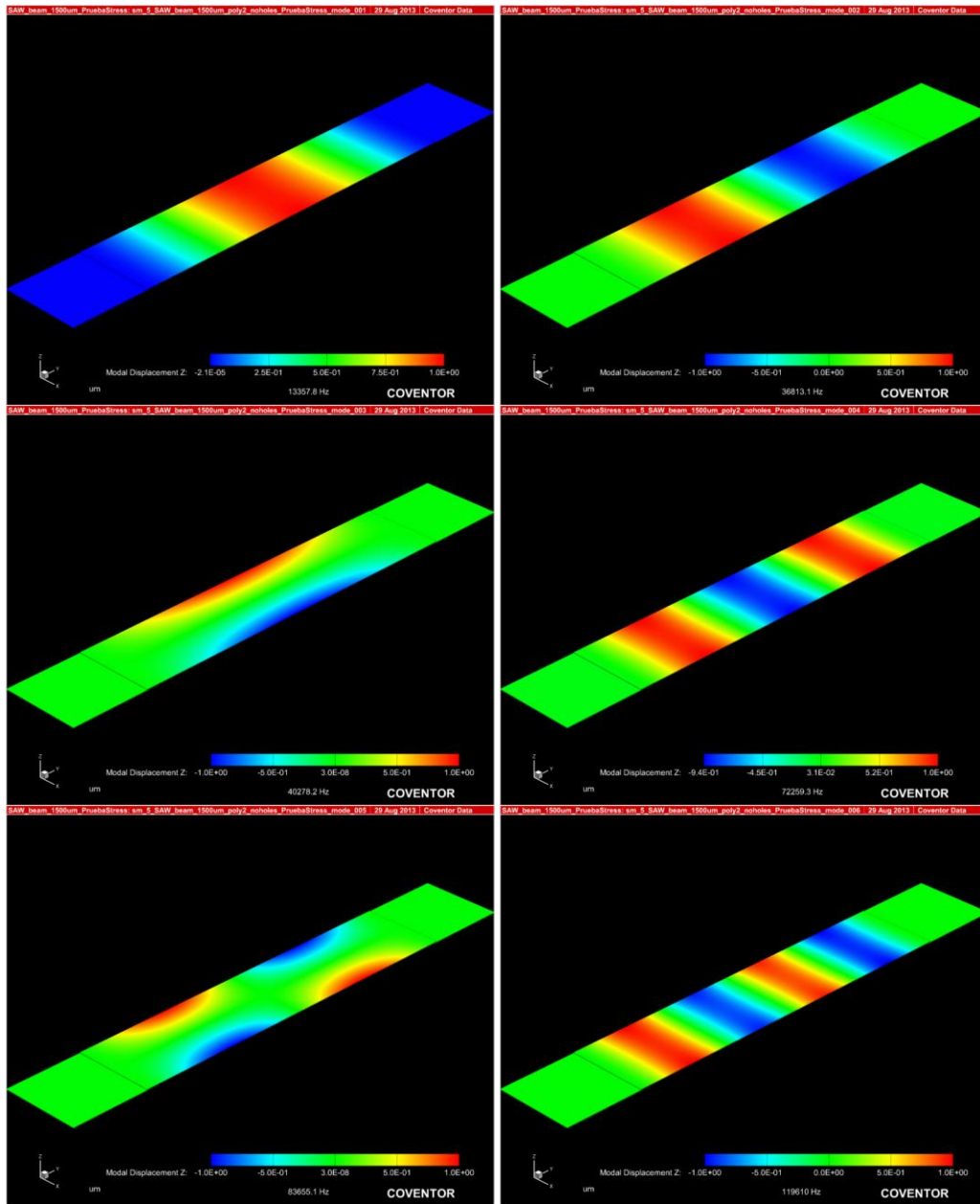


Figura 3.20. Seis primeros modos de vibración de la estructura calculados por medio de elemento finito.

Una vez que se ha demostrado que el comportamiento teórico de la estructura bajo determinadas condiciones puede estudiarse utilizando la teoría de barras de Euler-Bernoulli, es importante estudiar la respuesta dinámica de la estructura cuando ésta se encuentra bajo la acción de la gravedad y si se considera el efecto del amortiguamiento tal como ocurre con una barra real cuando se encuentra inmersa en la atmosfera. En las figuras 3.22 se muestra la respuesta al escalón de la barra larga. Para la simulación, primero, se calculó la función de forma inicial de la barra cuando se encuentra sometida a la gravedad ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ) y, después, se le aplicó el escalón de voltaje a la estructura. En la figura

3.23 se muestra la respuesta de la barra cuando se le aplica un impulso a la estructura, considerando el amortiguamiento y despreciándolo. En la figura 3.24 se muestra la simulación de la barra cuando a ésta se le aplica un voltaje senoidal con una amplitud unitaria y una frecuencia de 10 KHz.

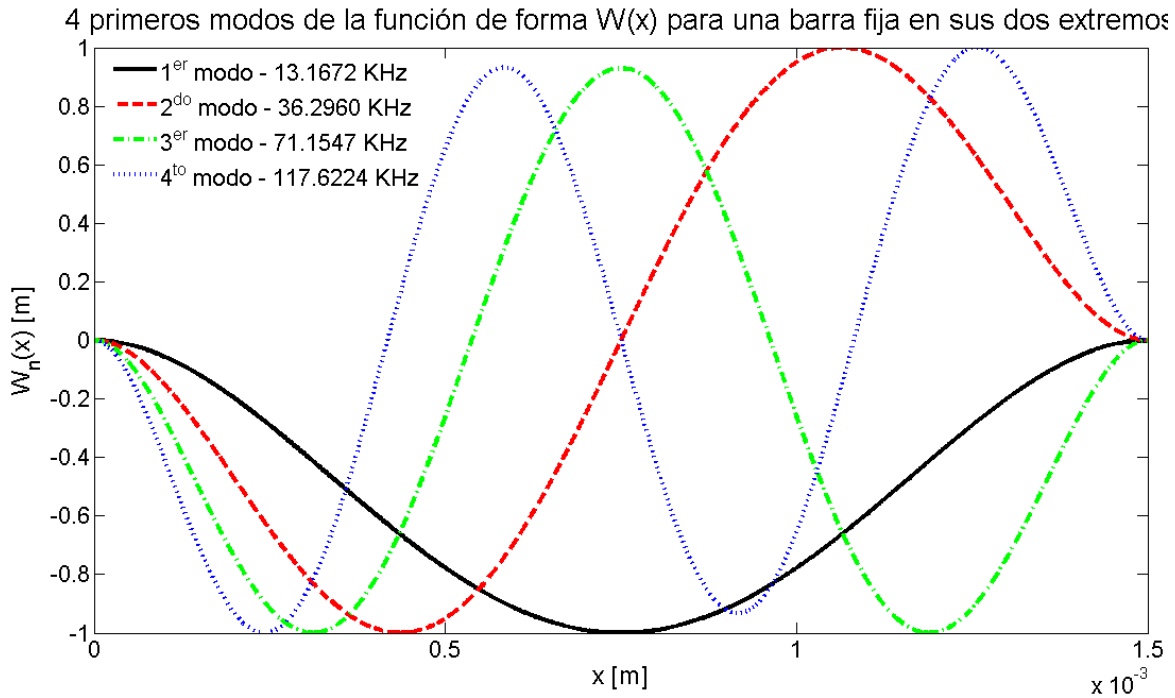
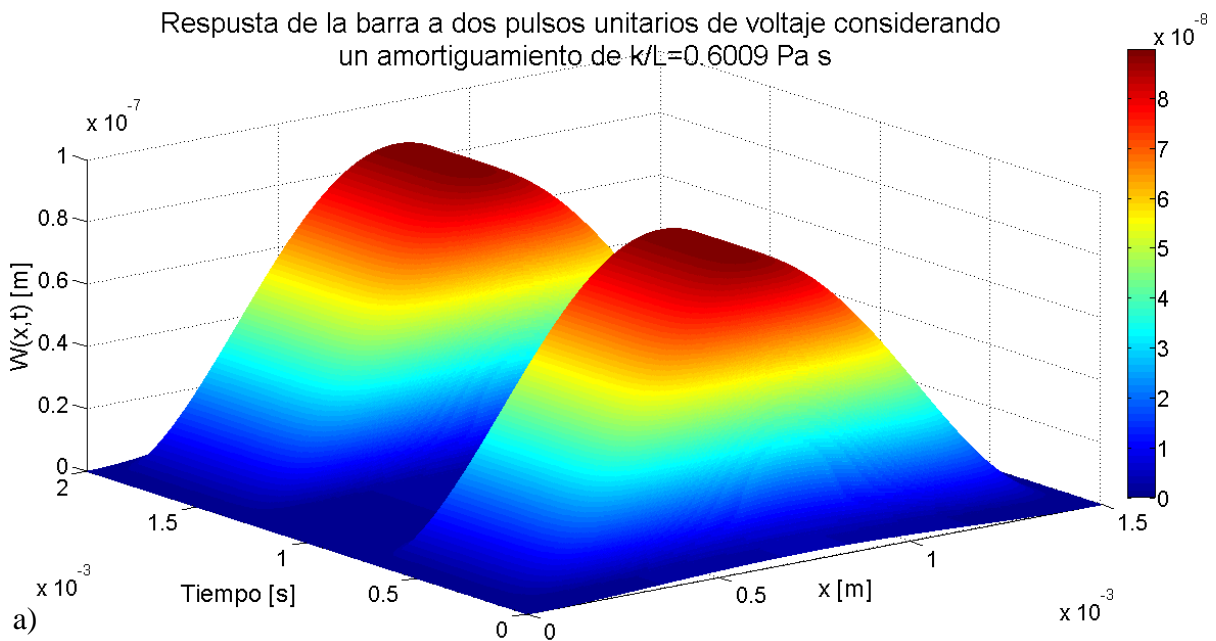


Figura 3.21. Modos de vibración de la estructura calculados por medio de la ecuación (3.119).





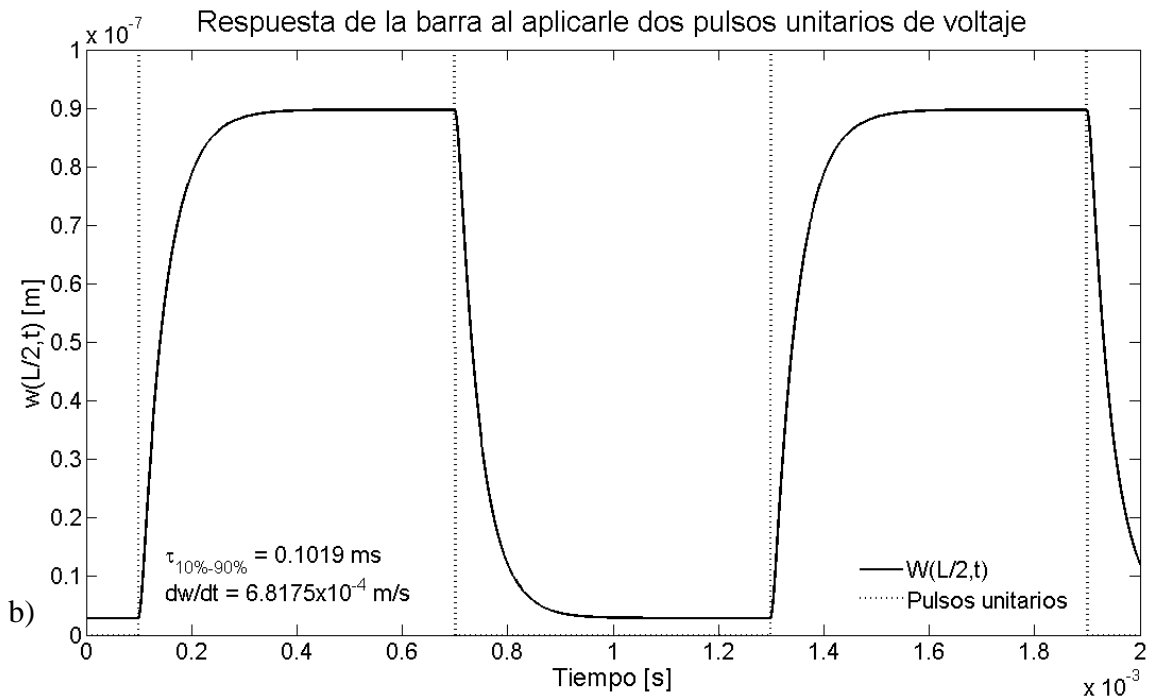


Figura 3.22. Respuesta al escalón de la barra con longitud de  $1500 \mu\text{m}$ . a) Evolución temporal de la función de posición  $w(x,t)$  al aplicársele dos pulsos unitarios de voltaje y b) evolución temporal del punto central de la barra  $w(L/2,t)$ .

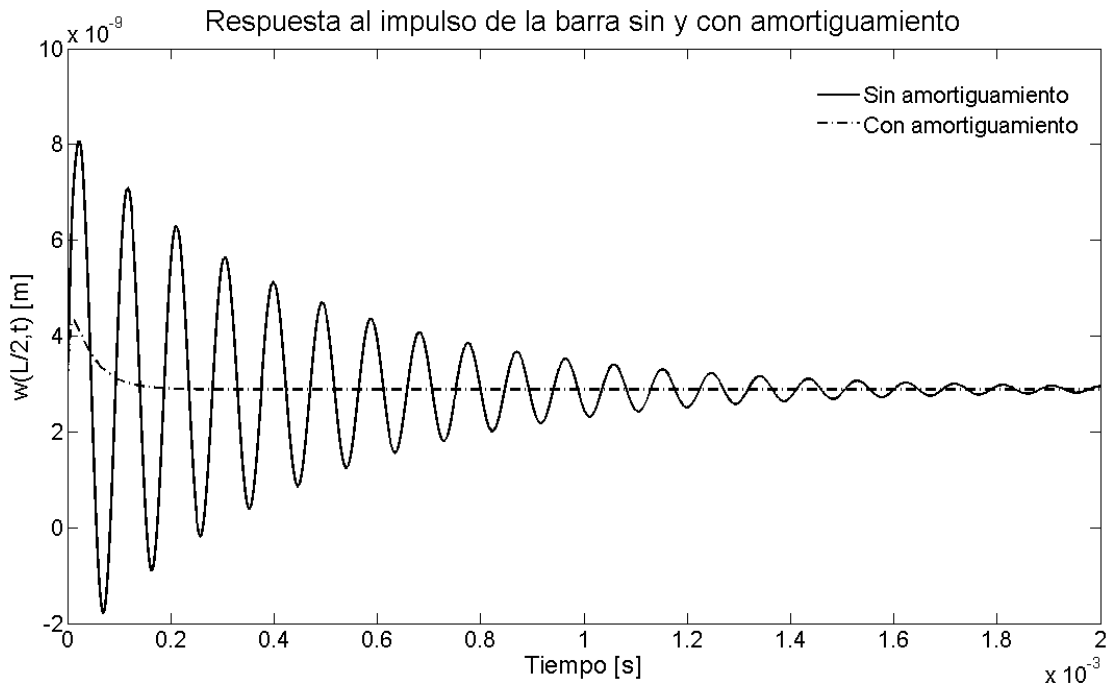


Figura 3.23. Respuesta al impulso del punto central de la barra con longitud de  $1500 \mu\text{m}$  cuando se desprecia el amortiguamiento presente en la estructura y cuando éste sí se considera.

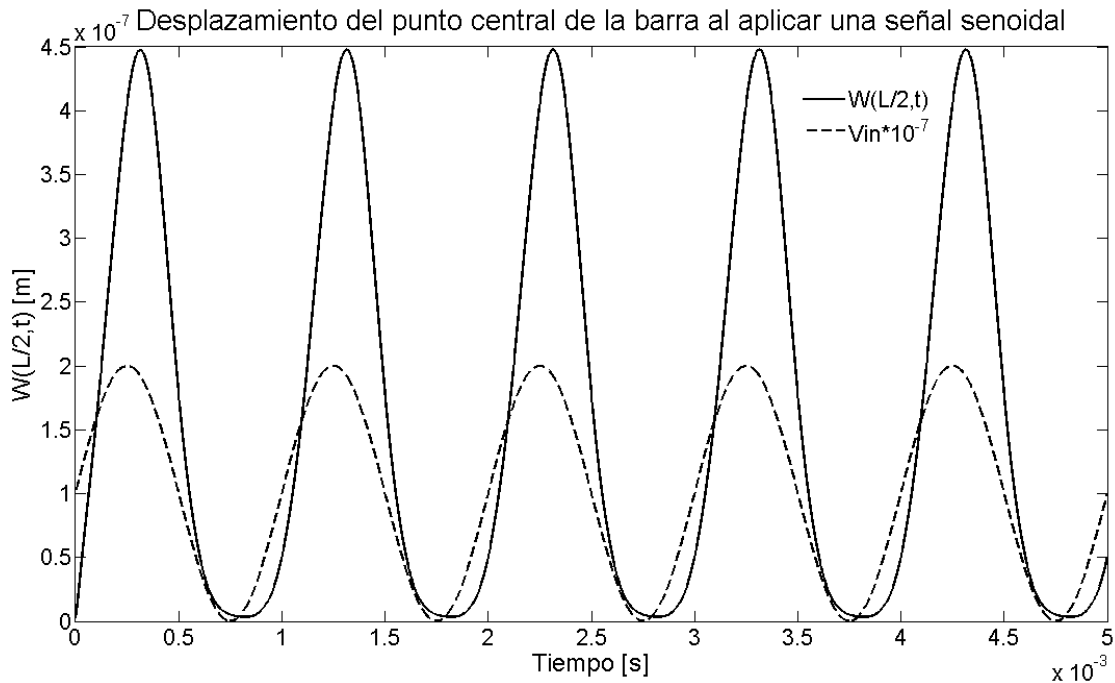


Figura 3.24. Simulación del puente con longitud de  $1500 \mu m$  cuando se le aplica una señal senoidal unitaria con una frecuencia de  $1 KHz$ .

La figura 3.23 muestra que la barra se comporta como un sistema amortiguado y que el amortiguamiento es un factor importante en el comportamiento del sistema. Se puede apreciar que el amortiguamiento cambia por completo la forma en que se mueve la barra y, para el considerado aquí, no es posible observar un movimiento armónico de la estructura ni los modos de vibración de la misma. Esto es importante por lo observado experimentalmente y que se explicará en la sección siguiente. En la figura 3.25 se muestra la amplitud del espectro en frecuencias de la función  $W(L/2, t)$  que se muestra en la figura 3.24.

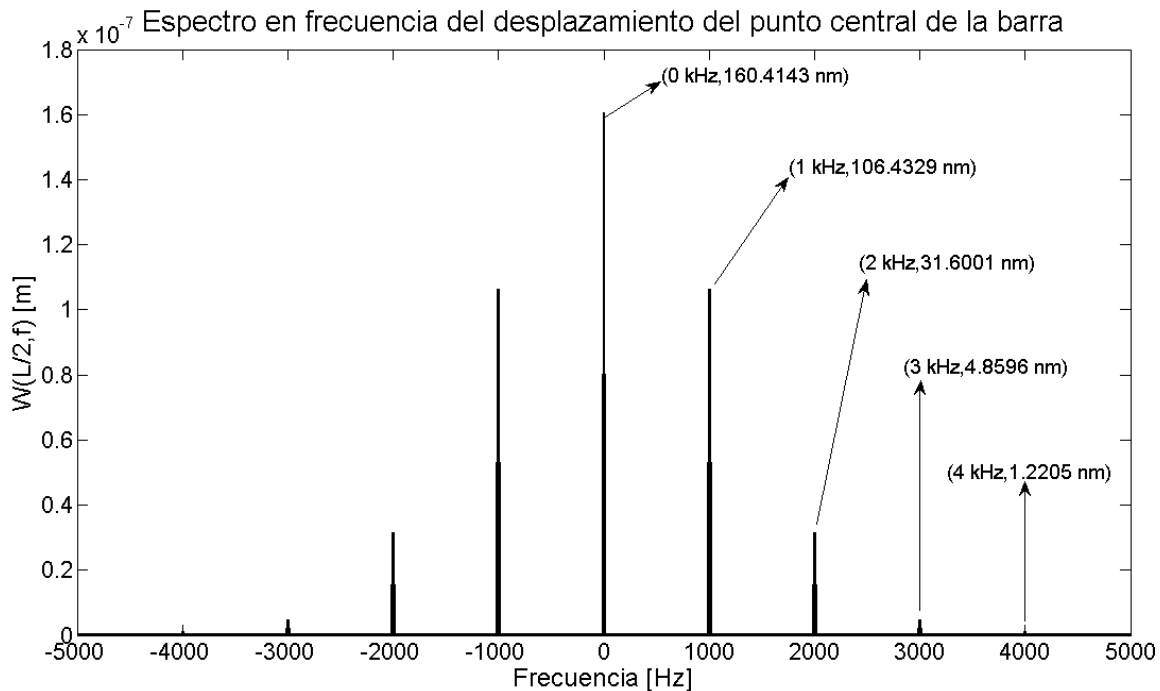


Figura 3.25. Espectro en frecuencia del desplazamiento del punto central de la barra larga cuando se le aplica una señal de senoidal con una amplitud de 1 V con una componente de DC de 1 V.

### 3.2.3 Resultados experimentales

Para realizar las mediciones de los puentes se utilizó un analizador de microsistemas MSA-400 fabricado por Polytec [142, 143]. Este sistema detecta, mediante interferometría, las variaciones de la frecuencia de la luz al ser reflejada por una estructura móvil debidas al efecto Doppler. De esta forma es posible medir la velocidad o el desplazamiento de un punto sobre la estructura. Según el fabricante este instrumento tiene resolución de  $1 \text{ nm}$ , sin embargo, por medio de técnicas de interpolación, es posible realizar mediciones en el rango de los picómetros [143]. Las mediciones se realizaron en la Ciudad Universitaria, ubicada al sur de la Ciudad de México<sup>10</sup>, a una temperatura ambiente entre  $20$  y  $25^\circ\text{C}$ . Lo primero que se intentó medir fueron los modos de vibración de la estructura, sin embargo, esto no fue posible para las barras fabricadas con PolyMUMPS porque el amortiguamiento, debido al efecto de la película comprimida (ver sección 3.1.5), a la que está sometida la barra no permitió distinguirlos al aplicarle una señal de ruido blanco o un barrido en frecuencias; sin embargo, sí fue posible medir el primer modo de vibración del puente fabricado en la oblea SOI (Figura 3.15). El resultado de la medición del primer modo de vibración de la estructura se muestra en la figura 3.26. Entonces, para medir los modos de vibración de las estructuras propuestas (Figuras 3.14) se necesita una cámara de vacío adaptada al MSA-400, la cual no se dispone actualmente. Esta limitante impidió verificar

<sup>10</sup> La presión atmosférica en la Ciudad de México es aproximadamente 0.76 veces la presión atmosférica al nivel del mar.

los modos experimentales de la estructura y buscar una relación entre el modelo propuesto y sus parámetros, como el módulo de Young y el esfuerzo residual de la estructura con los resultados experimentales obtenidos. La figura 3.27 muestra el resultado de aplicar una señal de ruido con una amplitud de 3 V a la barra corta. En esta figura no se distingue ningún modo de vibración y aunque pueden observarse algunas espigas presentes en la respuesta en frecuencia, éstas no pueden asociarse a un modo de vibración en particular. Es claro que el movimiento de la estructura en este caso es más o menos uniforme, es decir, se mueven los puntos centrales de la barra y los extremos, lo cual quiere decir que dichas espigas no corresponden a un modo de la barra sino a ruido presente en el sistema.

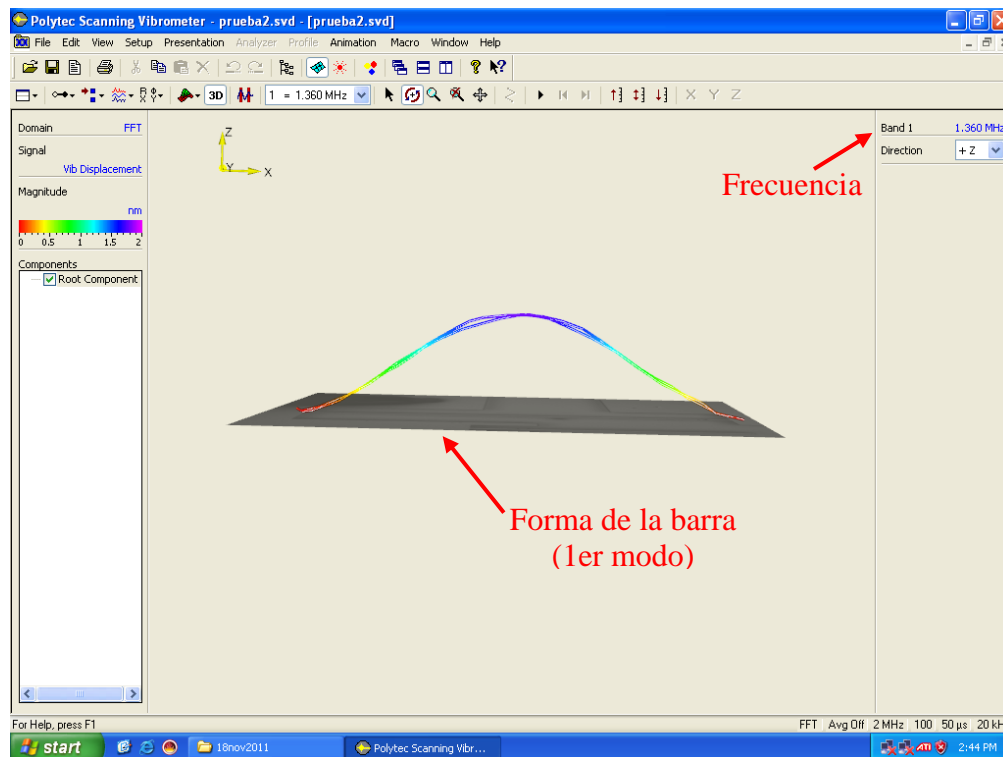


Figura 3.26. Medición del primer modo de vibración de la barra SOI observada al aplicarle una señal de ruido blanco.

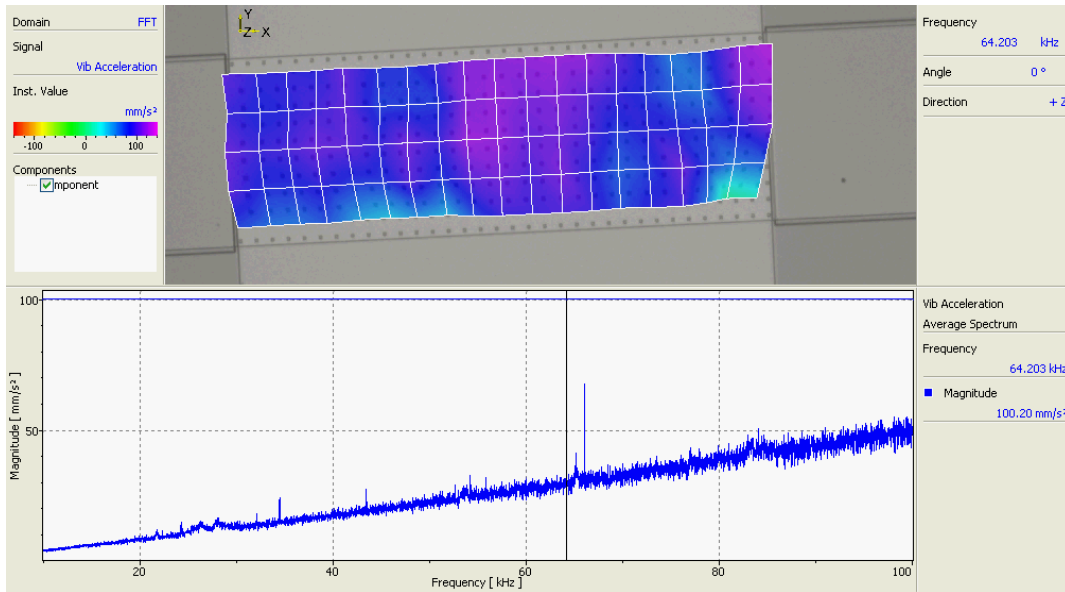
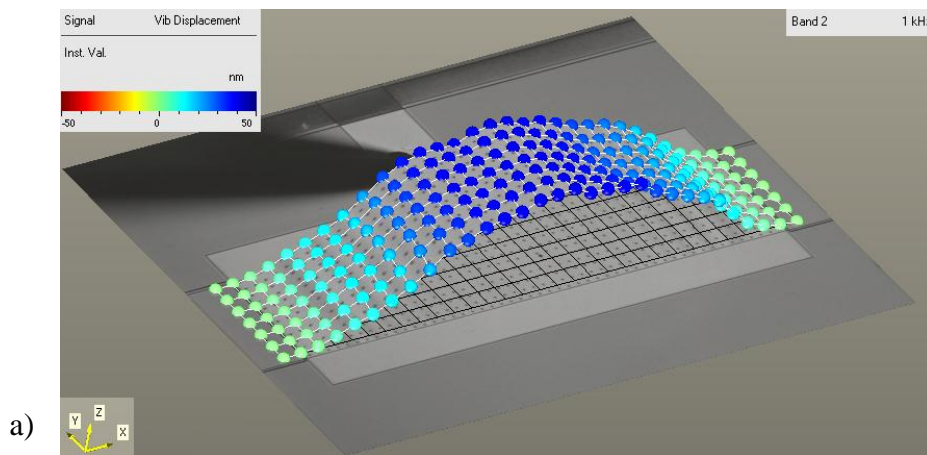


Figura 3.27. Forma de la barra al aplicar una señal de ruido y la magnitud de la aceleración vs. la frecuencia.

En las figuras 3.28 se muestran los desplazamientos de la barra cuya longitud es de  $1500 \mu\text{m}$  cuando se le aplica una señal senoidal con una amplitud de AC de 3 V y una de DC de 1V. Debido a que el MSA-400 analiza los desplazamientos en el dominio de la frecuencia se presentan los desplazamientos para 1 kHz, 2 kHz, 3 kHz y 4 kHz.



a)

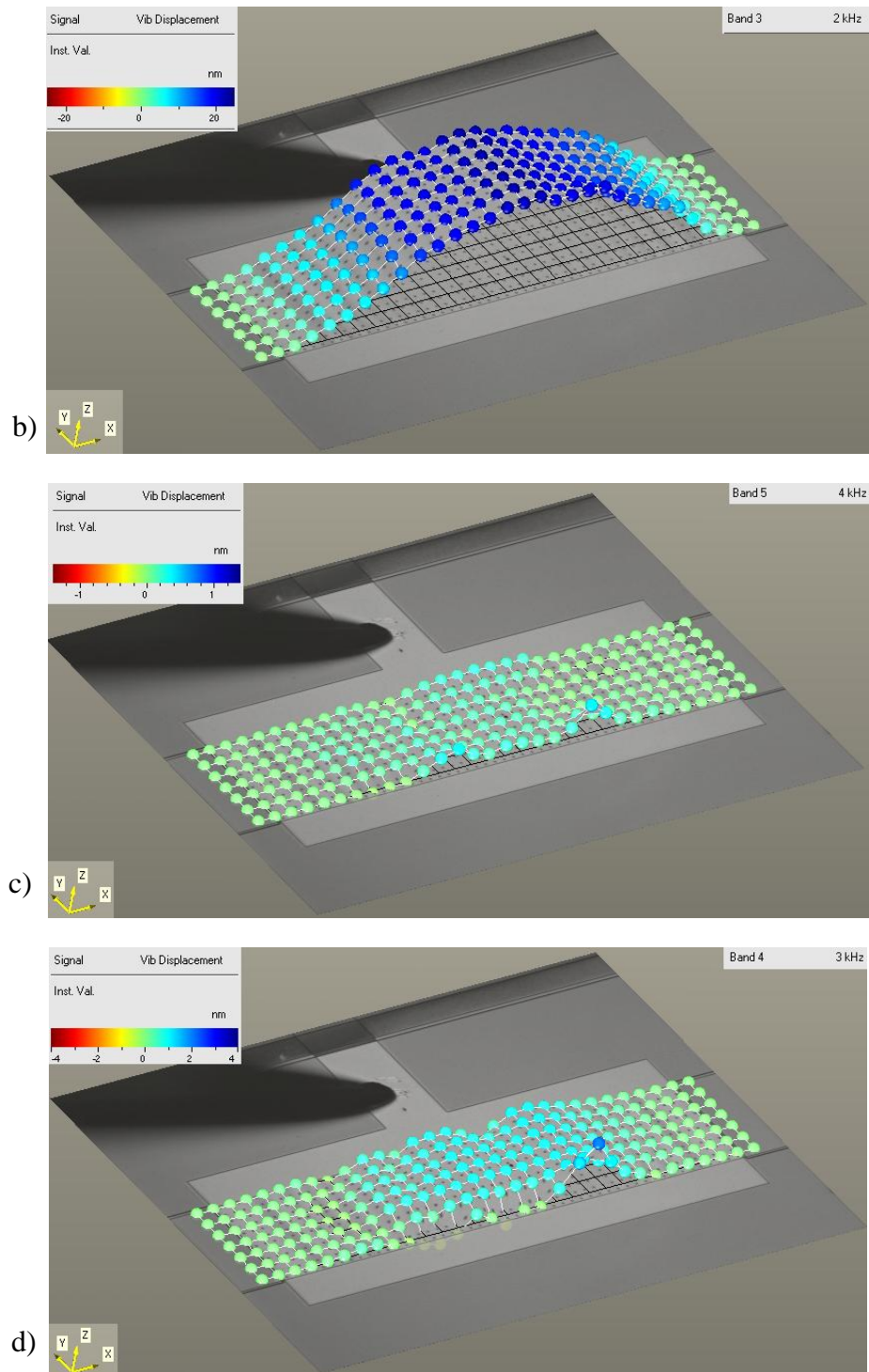


Figura 3.28. Componentes espectrales a) 1 kHz, b) 2 kHz, c) 3 kHz y d) 4 kHz obtenidas experimentalmente con el MSA-400 de Polytec al aplicarle una señal de AC de 3V y de DC de 1V a una frecuencia de 1 kHz.

Para ninguna de las dos barras fue posible observar directamente los modos de vibración de la estructura debido a que la barra también es un sistema sobreamortiguado. Sin embargo

para la barra de  $1000 \mu\text{m}$  de longitud se observó una particularidad en su respuesta. En la figura 3.29 se muestra el desplazamiento de la barra medida experimentalmente cuando se le aplica una señal senoidal de 3 V de amplitud montada sobre una de DC de 1 V.

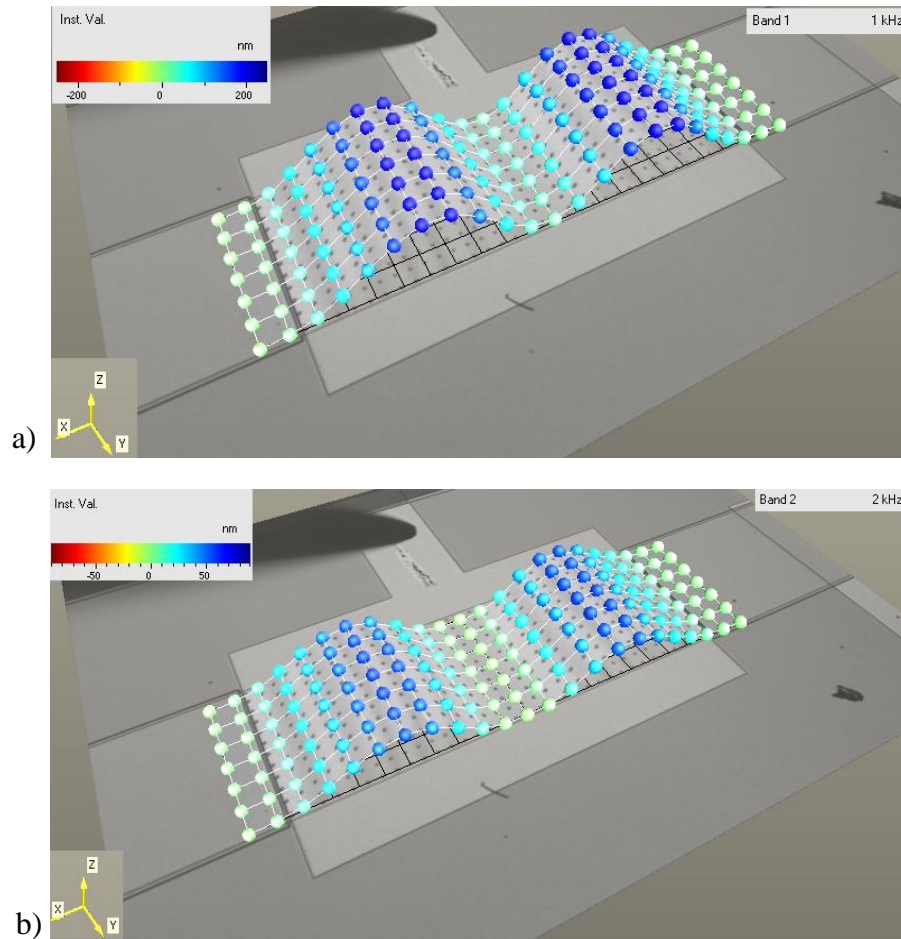


Figura 3.29. Componentes espectrales a) 1 kHz y b) 2 kHz obtenidas experimentalmente con el MSA-400 de Polytec al aplicarle una señal de AC de 3V y de DC de 1V a una frecuencia de 1 kHz.

### 3.2.4 Discusión de resultados

Una vez que se han presentado los resultados teóricos y experimentales, a continuación estos se analizan con la finalidad de encontrar similitudes y diferencias entre ambos. El orden que se sigue para hacerlo es el mismo que aquel con el que fueron presentados los resultados a lo largo del trabajo.

Como ya se mencionó, para el estudio de las barras, se propuso utilizar la teoría de barras de Euler-Bernoulli. Como una primera prueba de la teoría y del método numérico se decidió probar con la barra SOI. Al aplicarle una señal de ruido blanco fue posible medir experimentalmente el primer modo de vibración de la estructura, ubicándose a una frecuencia de 1.36 MHz (Figura 3.26). Por otro lado, utilizando el método numérico

descrito anteriormente y una señal de ruido, se obtuvo que la frecuencia del primer modo correspondía a 1.36 MHz. Posteriormente, aplicándole un impulso de voltaje a la barra, se obtuvo su respuesta (Figura 3.16) y se obtuvo su espectro utilizando la FFT (Figura 3.17), lo cual permitió obtener el primer modo de vibración en 1.35 MHz. El error entre los resultados teóricos y experimentales es menor que 0.75 % y éste está asociado principalmente a la resolución del espectro en frecuencias que puede calcular el MSA-400 de Polytec y la resolución del espectro teórico, en ambos casos depende de la cantidad de puntos adquiridos en el dominio del tiempo. Es importante señalar que para este caso el amortiguamiento que sufre la estructura es despreciable debido a las dimensiones de ésta, principalmente a que el puente es muy estrecho y la distancia entre el puente y el substrato es relativamente grande.

En la figura 3.18 se analizó teóricamente cómo varía la frecuencia del modo de vibración más cercano al origen (frecuencia de 0 Hz) cuando el módulo de Young y el esfuerzo residual presente en la estructura cambian. Para el caso de la barra larga, puede distinguirse una región ( $\sigma_o > -3 MPa$ ) donde se presentan todos los modos de vibración de la estructura, es decir, a partir del primer modo; sin embargo, existen otros donde se presentan a partir del segundo o algún otro modo superior (ver aquellos marcados como 2<sup>do</sup> modo, 3<sup>er</sup> modo, etc.). Se puede observar, también, que para esfuerzos residuales mayores a cero, éste es el factor dominante en la variación de la frecuencia de los modos de vibración, mientras que para esfuerzos residuales menores a cero, el módulo de Young toma mayor importancia. Estos resultados han sido verificados parcialmente por medio de elemento finito y en la tabla 3.4 se muestran algunos de estos resultados. De esta tabla puede observarse que cuando no hay esfuerzo residual, se presentan todos los modos de vibración, pero cuando el esfuerzo residual se hace más negativo, entonces, Coventor no encuentra solución para aquellos modos más cercanos a cero. Por ejemplo, en el caso de  $\sigma_o = -10 MPa$ , Coventor no encuentra solución para el primero ni para el segundo modo de vibración, sólo para aquellos superiores a éstos, lo cual coincide con los resultados que se muestran en la figura 3.18. De la misma forma ocurre para el caso cuando  $\sigma_o = -20 MPa$ . Por otro lado, al hacer una simulación en el tiempo de la estructura, cuando a ésta se le aplica un escalón de aceleración de 1 g de magnitud y  $\sigma_o = -10 MPa$ , en la figura se observa que el puente se comporta inestablemente<sup>11</sup>. Este resultado sugiere como criterio de estabilidad de la estructura cuando varía el esfuerzo residual como aquel en el que se presentan todos los modos de vibración de la estructura, mientras que la región de inestabilidad representa la destrucción de la microestructura al ser liberada después de concluido el proceso de fabricación. Este fenómeno puede asemejarse a una cuerda cuya tensión supera la resistencia de la cuerda y provoca que esta se rompa.

---

<sup>11</sup> En este caso se considera la estabilidad según el concepto BIBO, que en inglés, significa *Bounded Input, Bounded Output* y cuya traducción es: entrada acotada, salida acotada.



En las tablas 3.5 se muestran las frecuencias a las cuales se presenta el primer modo de vibración de ambas estructuras calculadas por medio de elemento finito, por medio del análisis de vibración libre de un puente (Ecuación (3.120)) y por medio de diferencias finitas (Ecuación 3.119). En la tabla 3.6 se muestran los errores entre cada uno de los métodos utilizados para calcular los modos de vibración de la estructura bajo condiciones específicas. Los errores fueron calculados con las siguientes expresiones:

$$Error[\%] = 100 \left| \frac{M1-M2}{FEM} \right| \quad (3.121)$$

donde M1 y M2 representan los resultados obtenidos por medio de (3.119) o de (3.120) y FEM significa el resultado obtenido con FEM. Por otra parte, para comparar los resultados obtenidos con (3.119) y (3.120) se utilizó la siguiente expresión:

$$Error[\%] = 200 \left| \frac{M1-M2}{M1+M2} \right| \quad (3.122)$$

Estrictamente, (3.122) puede interpretarse como una desviación entre ambos resultados más que como un error.

Errores entre los diferentes métodos [%]						
Caso	C1 y C3	C2 y C3	C1 y C2	C4 y C6	C5 y C6	C4 y C5
1	1.8709	0.2808	1.5733	25.7220	25.1459	0.4593
2	1.7416	0.0821	1.6445	24.2806	23.6922	0.4746
3	1.6242	0.0969	1.7079	22.9856	22.3836	0.4907
4	0.7374	0.2181	0.9579	0.2473	0.3475	0.1005
5	0.7371	0.1437	0.8835	1.8487	1.7365	0.1102
6	0.7373	0.0783	0.8182	1.4273	1.5442	0.1186
7	5.4614	6.3573	0.9521	49.0220	49.1750	0.3005
8	5.0518	6.0156	1.0202	44.4462	44.6086	0.2927
9	4.7074	5.7383	1.0876	38.4918	38.6697	0.2896

Tabla 3.6. Cálculo de los errores de los resultados presentados en la tabla 3.5.a. En un gris obscuro se resaltan aquellos casos para los cuales el error fue mayor al 20%, mientras que en un gris más claro, se resaltan aquellos otros cuyo error fue mayor al 2%.

De la tabla 3.6 se puede observar que los errores entre FEM y los métodos analíticos para el caso de la barra corta crecen hasta un 6% para esfuerzos residuales negativos (casos 7, 8 y 9), sin embargo, para los casos donde no hay esfuerzos residuales (casos 4, 5 y 6) todos los errores calculados son menores al 1% o, incluso para esfuerzos residuales positivos, los errores calculados son todavía relativamente bajos (< 2%). Además, las diferencias obtenidas con las ecuaciones (3.119) y (3.120) son, en todos los casos menores al 2%. Por otro lado, para la barra larga, los errores calculados con elemento finito y por medio de las ecuaciones (3.119) y (3.120) son considerables para los casos donde el esfuerzo residual es diferente de cero, llegando a presentarse errores de casi el 50%. Sin embargo, para el caso donde el esfuerzo residual es nulo, los resultados tienen errores menores al 2%. Además, los datos obtenidos con (3.119) y (3.120) tienen diferencias menores al 1%. De estas

observaciones puede entonces decirse que: los errores entre los resultados obtenidos con (3.119) y (3.120) podrían deberse a errores numéricos, redondeos, truncamientos, aproximaciones, etc.; la concordancia entre (3.119) y (3.120) es una evidencia de que la ecuación (3.120) y su implementación numérica sirven para simular el desplazamiento de una barra según la teoría de Euler-Bernoulli; se observó que cuando el estrés residual es cero, los errores entre los tres métodos propuestos son relativamente bajos; sin embargo, cuando éste es negativo, entonces, los errores crecen llegando a ser más notorios para la barra larga. Se intentó determinar la causa de éstos y, para lograrlo, se modificaron algunos parámetros de la simulación de elemento finito como las dimensiones del mallado utilizado; sin embargo, no se obtuvo una mejoría. Es importante señalar que por las dimensiones de la estructura, las simulaciones de elemento finito se encuentran limitadas por las características de la computadora y no fue posible reducir satisfactoriamente las dimensiones del mallado en dirección del vector normal al plano que forma la cara superior de la barra porque, al hacerlo, aumentaba considerablemente la cantidad de información que se debía procesar y la memoria RAM de la computadora resultó insuficiente. Lo anterior quiere decir que debido a que hay pocos puntos a lo largo de la sección transversal de la barra durante las simulaciones de elemento finito, quizá no sea posible simular adecuadamente los efectos del esfuerzo residual en la estructura y este error se asienta cuando el efecto de los esfuerzos residuales en la estructura es más notorio, lo cual corresponde al caso de la barra larga. Sin embargo, queda pendiente probar esto y verificar si la información presentada en la figura 3.18 se puede replicar con el método de elemento finito.

Por otro lado, se obtuvieron las formas de los seis primeros modos de vibración de la estructura por medio de elemento finito (Figura 3.20) y los 4 primeros por medio de la ecuación (3.119) (Figura 3.21), pudiéndose observar que, según el método elemento finito, hay dos modos torsionales intercalados entre los modos característicos de una barra, los cuales no son predichos por medio de (3.119) debido al carácter bidimensional de la ecuación. Comparando los modos que sí corresponden a la barra, estos se parecen en forma y el error máximo de la frecuencia a la cual se presentan es menor al 1.7% en todos los casos. Durante la experimentación con las barras, no se distinguió que la barra se moviera torsionalmente, sólo se vieron desplazamientos parecidos al primer modo tal como los que se muestran en las figuras 3.28 y 3.29.

En la figura 3.22 se utilizó la ecuación (3.120) para calcular la respuesta de la estructura ante un pulso de voltaje cuando está presente el amortiguamiento por película comprimida distribuido a lo largo de la estructura, en ésta se puede observar que el sistema está amortiguado. En la figura 3.23, se muestra la comparación de la respuesta al impulso de la barra cuando el amortiguamiento está presente y cuando no lo está. Como resultado se puede observar que las oscilaciones que acompañan al puente cuando no hay amortiguamiento desaparecen debido a las dimensiones de la estructura y a las

características del fluido circundante. En la figura 3.27 se muestra la confirmación experimental de este fenómeno, pues en ella no se distingue ninguna espiga de interés y las que aparecen pueden considerarse como ruido presente en el sistema durante las mediciones.

En la figura 3.24 se muestra el desplazamiento del punto central del puente en función del tiempo cuando se le aplica una señal senoidal con una amplitud de 1 V y una frecuencia de 1 kHz. Comparando con la señal de voltaje aplicada a la barra, se puede apreciar que el desplazamiento no corresponde con una senoidal pura y esto se debe a que la fuerza electrostática sobre la barra es inversamente proporcional al cuadrado del voltaje aplicado. Para poder comparar los desplazamientos de la barra, en la figura 3.25, se muestra el espectro en frecuencia de la señal de la figura 3.24. En ésta se pueden distinguir 6 espigas, sin embargo, se sabe que de una señal senoidal montada sobre una de DC, resultarían sólo tres: una de DC, otra a la frecuencia de la señal senoidal aplicada y otra al doble de la frecuencia. Estas 6 espigas se deben a la relación inversa mencionada anteriormente. Para comparar la forma en que se mueve el puente largo, experimentalmente, se le aplicó una señal de voltaje de 1 V de DC y 3 VAC. La diferencia entre los voltajes aplicados se debe a que durante la simulación, la barra rebasa el criterio de estabilidad por pull-in y, como resultado, se obtiene una respuesta creciente del puente. En las figuras 3.28 se muestran las componentes en frecuencia para 1 kHz, 2 kHz, 3 kHz y 4 kHz. En estas figuras se puede observar que para 1 kHz y para 2 kHz sí hay un desplazamiento cuya magnitud es casi la mitad para 2 kHz con respecto al desplazamiento a 1 kHz. Las magnitudes de 3 kHz y 4 kHz son despreciables. La relación de las magnitudes entre los desplazamientos a 2 kHz y a 1 kHz es de aproximadamente 0.3, experimentalmente es de 0.5. Las diferencias podrían deberse a la incertidumbre que existe en las propiedades mecánicas del material con el cual se fabricaron las barras.

# 4. Dispositivos SAW-MEMS

---

## 4.1 Antecedentes

Debido a que la energía de las ondas acústicas superficiales se encuentra confinada en una región cercana a la superficie del medio en el cual se propagan, es posible modificar las características de la onda cambiando las condiciones del medio circundante, tales como la temperatura, la presión y el material que rodea al dispositivo. Este hecho permitió que las ondas acústicas superficiales sirvieran también en el área de la instrumentación. Por medio de este principio es posible medir variables mecánicas, como la presión, la velocidad, la aceleración, la aceleración angular y, también, hacer mediciones eléctricas, magnéticas, térmicas y químicas [144]. Principalmente, existen dos formas en las que un sensor basado en SAW puede operar: una remota en la que una radiobase se comunica a través del dispositivo a través de ondas electromagnéticas y, otra, en la que se conecta un amplificador con una línea de retardo formando un oscilador, cuya frecuencia de oscilación depende de la variable de interés (configuración local). En la literatura existen ejemplos de sensores que funcionan bajo ambos principios de operación. Para sensores interrogables a distancia (inalámbricos) algunos ejemplos son: Reindl *et al.* [145] reportan un sensor de temperatura, presión, torque, corriente eléctrica y, además, presenta la teoría y el principio de operación de los transpondedores SAW; Li *et al.* reportan un sensor inalámbrico de presión y temperatura [146]; Schimetta *et al.* describen un sensor de presión inalámbrico con la finalidad de monitorear la presión de los neumáticos en un automóvil [147]; Jungwirth *et al.* reportan un sensor de presión de precisión [148]; la empresa Sensor comercializa un sensor de temperatura interrogable a una distancia máxima de 5 metros [149], entre otros. Por otro lado, las posibles aplicaciones en las que un sensor SAW conectado en una configuración local han sido muy estudiadas: Reeder y Cullen reportan un sensor de presión y temperatura [150]; Bao reporta un sensor de temperatura [151]; Jose *et al.* reportan un detector de hielo basado en SAW [152]; como sensores químicos en los que se mide la presencia de un compuesto por el cambio de masa en una película sensible [153, 154, 155] y, también, se han utilizado dispositivos SAW para hacer sensores mecánicos como acelerómetros [156, 157, 158, 159, 160]; Jose y Varadan *et al.* presentan un prototipo de giroscopio [161, 162] y Liu lo retoma y lo modifica para hacerlo sensible en dos ejes en lugar de uno [163]; sólo por mencionar algunos ejemplo. Como se puede observar, la aplicación de la tecnología SAW en la instrumentación ha sido utilizada ampliamente; sin embargo, la combinación de ondas SAW con los sistemas microelectromecánicos (MEMS) podría potenciar la aplicación de las SAW en la instrumentación. A pesar de que en [161, 163] se hace referencia a su uso en los MEMS, éstas no utilizan una estructura micromecánica convencional; sin embargo, debido a la definición un tanto ambigua de los MEMS, podría ser que un dispositivo SAW se considerara como tal, aunque el estudio de este tipo de dispositivos inició con anterioridad

a los MEMS. No obstante, se han realizado aplicaciones en las cuales se utilizan microestructuras mecánicas convencionales para modificar alguna de las propiedades de los dispositivos de ondas acústicas superficiales, por ejemplo: Oh *et al.* implementaron un transpondedor con un sensor de presión [164], en donde se utiliza una placa como transductor capacitivo, y Varadan *et al.* reportan un microacelerómetro interrogable que utiliza SAW y MEMS [17]. Este microacelerómetro consiste en un transductor interdigital depositado sobre un sustrato piezoeléctrico, en este caso óxido de zinc sobre un sustrato de silicio (no piezoeléctrico). Además, cuenta con una barra ranurada, que hace de elemento inercial, colocada por encima del sustrato donde se fabricó la línea de reatrd. Dependiendo de la ubicación espacial de cada uno de los reflectores, la señal se refleja hacia el IDT. Para hacer las mediciones de aceleración, desde una radiobase se transmite una señal de RF pulsada con una frecuencia bien determinada, la cual se recibe en el instrumento por medio de una antena. La energía electromagnética, mediante un IDT, se transforma en una onda acústica que se emite sobre el sustrato en el que se encuentra depositado el transductor. Al propagarse, la onda acústica interactúa con la estructura micromecánica, que está compuesta por una barra ranurada (reflectores), por medio del campo eléctrico asociado a ella y una porción de la onda acústica se refleja hacia el transductor interdigital produciendo una señal eléctrica, la cual se transmite como respuesta hacia la radiobase. La medición de la aceleración se hace midiendo los cambios de fase con respecto a una referencia dada por la ausencia de aceleración. Este dispositivo actúa como un modulador en fase, donde la señal moduladora corresponde a la aceleración que se desea medir. En la figura 4.1 se muestra el diagrama que Varadan publicó sobre este sistema y en la figura 4.2 se muestra la caracterización del sistema que ellos obtuvieron [17].

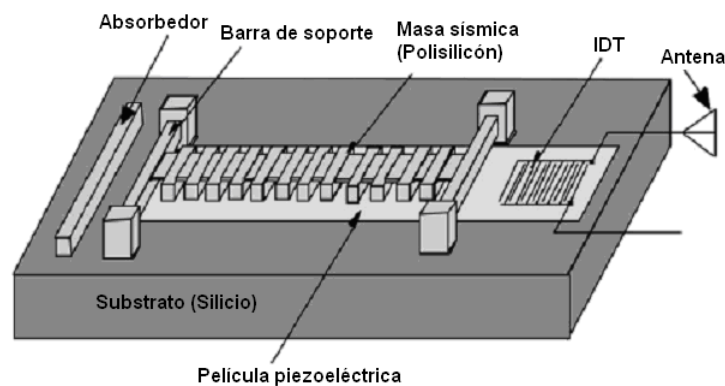


Figura 4.1. Microacelerómetro SAW-MEMS propuesto por Varadan [11].

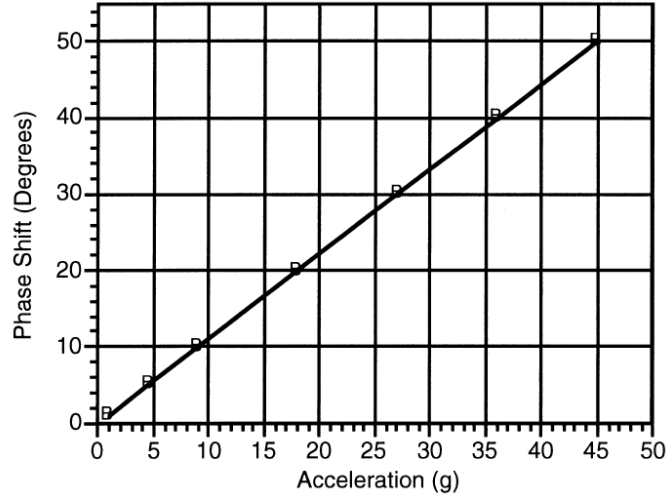


Figura 4.2. Curva característica del microacelerómetro interrogable reportado por Varadan *et al.* [17]

## 4.2 Interacción de ondas acústicas con una microestructura conductora

Como ya se mencionó en la sección 2.1, la velocidad de propagación de una SAW se ve modificada cuando se aproxima un plano conductor a la región de propagación de la estructura. Sin embargo, no ha sido determinada la forma en que se propagarán estas ondas en un medio inhomogéneo, como el que podría ser el ocasionado por una barra ranurada que se deforma sobre la región de propagación de la línea de retardo. Para poder estudiar la interacción de la onda acústica superficial con una estructura conductora, considérese un sistema formado por diversas capas y, cada una de ellas, con diferentes impedancias acústicas, tal como se muestra en la figura 4.3.

Según Brekhovskikh y Godin [165, 166], los coeficientes de transmisión y reflexión de una onda acústica en un medio multicapa están dados por:

$$r = \frac{Z_{in}^{(n)} - Z_{n+1}}{Z_{in}^{(n)} + Z_{n+1}} \quad (4.1)$$

y

$$t = \prod_{j=1}^n \frac{Z_{in}^{(j)} + Z_j}{Z_{in}^{(j)} + Z_{j+1}} e^{i\phi_j} \quad (4.2)$$

donde  $Z_j$  es la impedancia acústica de la capa  $j$ -ésima y  $Z_{in}^{(j)}$  es la impedancia de entrada desde el medio  $j$  y, éstas están dadas por:

$$Z_j \equiv \frac{\omega \rho_j}{k_{zj}} = \frac{\rho_j v_j}{\cos \theta_j} \quad (4.3)$$

y

$$Z_{in}^{(n)} = \frac{Z_{in}^{(n-1)} - i Z_n \tan(k_{zn} d_n)}{Z_n - i Z_{in}^{(n-1)} \tan(k_{zn} d_n)} Z_n \quad (4.4)$$

Donde  $\rho_j$ ,  $d_j$  y  $k_{zn}$  son: la densidad, el espesor y la proyección del número de onda en la dirección de propagación ( $k_{zj} = k_j \cos \theta_j$ ) en cada capa, respectivamente. El medio incidente es la capa  $n + 1$  y el medio en el cual se transmite la onda es la capa 1.

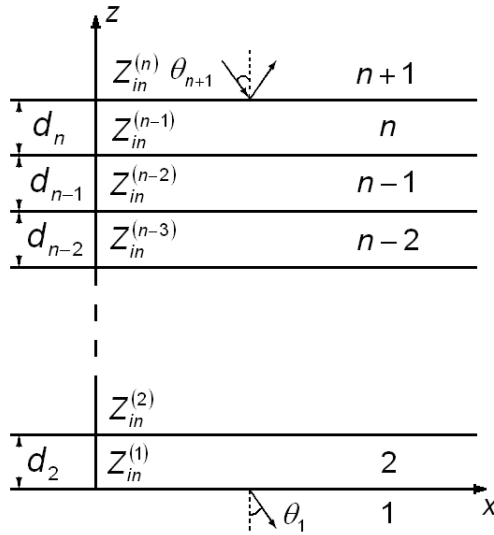


Figura 4.3. Representación de un sistema multicapas acústico compuesto por  $n+1$  medios, cada uno tiene una impedancia acústica diferente.

Si se considera que la incidencia de las ondas acústicas es normal a los medios, entonces, la impedancia acústica se reduce al producto de la velocidad de propagación de las ondas por la densidad del medio. Aparentemente no existe relación entre un medio estratificado y un medio inhomogéneo, pero sí hay una relación si se considera que el medio inhomogéneo está formado por capas muy delgadas, es decir, con un espesor diferencial. A continuación se demostrará que este método sigue siendo válido para el caso donde el medio es inhomogéneo si y sólo si la incidencia es normal. Si se considera un medio como el de la figura 4.2 en donde  $n \rightarrow \infty$  y  $d_j \rightarrow 0$ ; entonces, por la ecuación (4.4) se tiene  $Z_{in}^{(n)} = Z_{in}^{(n-1)}$  y, en última instancia,  $Z_{in}^{(n)} = Z_1$ . Entonces, en un medio compuesto por 3 capas, el coeficiente de reflexión  $r$  queda como:

$$r = \frac{Z_1 - Z_3}{Z_1 + Z_3} \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) indica que el coeficiente de reflexión depende únicamente de la impedancia acústica del medio incidente y del medio donde se transmitirá la onda si el ancho de la capa tiende a cero. Esto significa que no existe una reflexión de la señal acústica al pasar de un medio a otro cuando el ancho de cada medio acústico tiende a cero. Entre dos capas consecutivas, la ecuación (4.1) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$r = \frac{Z(z) - Z(z + \Delta z)}{Z(z) + Z(z + \Delta z)} \quad (4.6)$$

Multiplicando por 1 ( $1 = \frac{\Delta z}{\Delta z}$ ) y reagrupando los términos de (2.7) queda como:

$$r = - \frac{Z(z + \Delta z) - Z(z)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{Z(z) + Z(z + \Delta z)} \quad (4.7)$$

Si a (4.7) se le obtiene el límite cuando  $\Delta z \rightarrow 0$ :

$$r = - \frac{dZ(z)}{dz} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{2 Z(z) + \Delta Z(z)} \quad (4.8)$$

Se puede observar claramente de (2.9) que  $r = 0$  siempre que la derivada de la función de impedancia acústica exista (sea finita) y sea continua para toda  $z$ . Este resultado indica que para incidencia normal y un medio inhomogéneo las reflexiones se pueden despreciar siempre que  $Z_1 = Z_{n+1}$ .

Si no hay reflexiones de las ondas acústicas al propagarse por el medio inhomogéneo, la magnitud del coeficiente de transmisión es 1, sin embargo, falta conocer su fase. Este parámetro es muy importante debido a que las variaciones sobre dicho parámetro nos indicarán las variaciones en la frecuencia del oscilador y, por tanto, la respuesta del sistema.

Para determinar la fase considérese que:

$$\phi = \omega t \quad (4.9)$$

donde  $\phi$  es la fase de la señal,  $\omega$  es la frecuencia angular de la señal y  $t$  es el tiempo. Si

$$\omega = \omega_o + \Delta\omega \quad (4.10)$$

y

$$t = t_o + \Delta t \quad (4.11)$$

La fase inicial de la señal después de haber recorrido una distancia  $d$  a una velocidad  $v_o$ , está dada por:

$$\phi_o = \frac{2\pi f_o d}{v_o} \quad (4.12)$$



Si  $t_o$  es el tiempo que tarda una onda en recorrer una distancia  $d$  a una velocidad  $v_o$ , entonces:

$$t_o = \frac{d}{v_o} \quad (4.13)$$

Si  $\Delta t$  es la diferencia entre el tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia  $d$  a una velocidad  $v_o$  y el tiempo que tarda la onda en recorrer la misma distancia cuando hay un cambio de velocidad durante su propagación,  $\Delta t$  está dado por:

$$\Delta t = d \left( \frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_o} \right) \quad (4.14)$$

donde  $v_p$  es la velocidad promedio de la onda y está dada según el teorema del valor medio por:

$$v_p = \frac{1}{d} \int_0^d v(x) dx \quad (4.15)$$

Si la señal tiene una frecuencia  $f_o$  y  $\Delta f$  es el desplazamiento aparente de la frecuencia que sufre la onda con respecto a  $f_o$ . Según el efecto Doppler este cambio aparente de la frecuencia es:

$$\Delta f = f_o \left( 1 - \frac{v_p}{v_o} \right) \quad (4.16)$$

Se puede demostrar fácilmente que  $\phi$  está dada por:

$$\phi = 2\pi f_o d \left[ \frac{2}{v_p} - \frac{1}{v_o} \right] \quad (4.17)$$

La diferencia en la fase está dada por:

$$\Delta\phi = 4\pi f_o d \left( \frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_o} \right) = 2\omega_o \Delta t \quad (4.18)$$

La expresión propuesta por Gardener et al. [33] para estimar la variación de la frecuencia del oscilador cuya representación esquemática se muestra en la figura 1 es<sup>12</sup>:

$$\frac{\Delta v}{v_o} = \frac{\Delta f}{f_o} \quad (4.19)$$

Utilizando las ecuaciones (4.18) y (4.19) es posible demostrar que:

$$\frac{\Delta v}{v_o} = \frac{v_p}{2v_o} \frac{\Delta\phi}{\phi_o} \quad (4.20)$$

---

<sup>12</sup> La expresión (2.18) es una representación diferente de la expresión (2.14) relacionada con el efecto Doppler.

Si se desea conocer el máximo cambio de fase de una señal que puede ocurrir en un material dado, basta que  $v_o = v_f$ ,  $v_p = v_m$  y substituyendo por la ecuación (2.19), se tiene que:

$$K^2 = \frac{v_m \Delta\phi}{v_f \phi_o} \quad (4.21)$$

Despejando el cambio de fase de la expresión anterior, se puede observar que es proporcional a la fase inicial de la señal. Ésta está determinada principalmente por la distancia ( $d$ ) que ha de recorrer la onda. Por otra parte, la constante de proporcionalidad está relacionada directamente con el coeficiente de acoplamiento electromecánico. Se puede observar que si  $k^2 \rightarrow 0$ , entonces,  $\Delta\phi \rightarrow 0$ .

Del mismo modo, el cambio de frecuencia máximo para un oscilador, cuando la velocidad se hace variar desde  $v_m$  hasta  $v_f$ , es:

$$\Delta f_{max} = \frac{f_o K^2}{2} \quad (4.22)$$

Donde  $k^2$  es el coeficiente de acoplamiento electromecánico del material (ecuación (2.19)). De las ecuaciones (4.21) y (4.22) se puede observar la importancia de tener un material con un coeficiente de acoplamiento electromecánico elevado. Es importante tener un gran cuidado en la selección del material y su orientación.

En la demostración anterior se consideró que no había discontinuidades en el medio y, entonces, las reflexiones pueden despreciarse. Sin embargo, este es un caso particular que no siempre puede satisfacerse. Como un caso más general, se propone un sistema de dos ecuaciones diferenciales para calcular la impedancia de entrada ( $Z_{in}$ ), las cuales están dadas por:

$$\frac{dA(z)}{dz} + 2k_z(z) \frac{A(z)B(z)}{Z(z)} = 0 \quad (4.23.a)$$

$$\frac{dB(z)}{dz} + k_z(z) \left( Z(z) - \frac{A^2(z) - B^2(z)}{Z(z)} \right) = 0 \quad (4.23.b)$$

donde  $Z_{in}$  está dada por:

$$Z_{in}(z) = A(z) + iB(z) \quad (4.24)$$

$Z(z)$ , es la función que representa la impedancia acústica del medio inhomogéneo, por:

$$Z(z) = \frac{\rho(z)v(z)}{\cos \theta(z)} \quad (4.25)$$

y  $k_z(z)$ , la función del número de onda en la dirección  $z$ , por:

$$k_z(z) = \frac{\omega}{v(z)} \cos \theta(z) \quad (4.26)$$

Se puede demostrar que la relación que existe entre  $k_z(z)$  y  $\theta(z)$ , así como la de  $v(z)$  y  $\theta(z)$ , está dada, respectivamente, por:

$$\frac{-1}{k_z(z)} \frac{dk_z(z)}{dz} = \frac{1}{\theta(z)} \frac{d\theta(z)}{dz} \quad (4.27.a)$$

$$\frac{1}{v(z)} \frac{dv(z)}{dz} = \frac{1}{\theta(z)} \frac{d\theta(z)}{dz} \quad (4.27.b)$$

Las ecuaciones (4.27.a) y (4.27.b) implican que:

$$\theta(z) = \frac{c_k}{k_z(z)} \quad (4.28.a)$$

$$\theta(z) = c_v v(z) \quad (4.28.b)$$

donde  $c_v$  y  $c_k$  son dos constantes que deben ser determinadas por las condiciones de frontera. Una vez que se ha resuelto el problema matemático de encontrar la función  $Z_{in}$ , es posible calcular los coeficientes de reflexión y de transmisión utilizando las ecuaciones para una interfaz [165, 166], las cuales están dadas por:

$$r = \frac{Z_{in}(0) - Z_1}{Z_{in}(0) + Z_1} \quad (4.29)$$

$$t = \frac{2Z_{in}(0) \cos \theta}{Z_{in}(0) \cos \theta + Z_1} \quad (4.30)$$

donde  $Z_1$  es la impedancia acústica del medio incidente, que está dada por la ecuación (4.3).

Con la finalidad de probar el desarrollo matemático formado por las ecuaciones (4.9) hasta (4.18), se decidió comparar los resultados obtenidos con estas expresiones, al aplicarlas a un medio inhomogéneo que se ubica entre dos medios homogéneos y uno de estos es el medio incidente, con los resultados obtenidos utilizando las ecuaciones (4.1) a (4.4) dadas para un medio multicapa cuando las capas se van haciendo cada vez más angostas. Es importante señalar que la transición entre cada uno de los medios es continua. Se consideró que la velocidad en los medios homogéneos es de  $4000 \text{ m/s}$ , la velocidad en el medio inhomogéneo varía de forma parabólica de tal forma que en el centro de éste se obtiene un valor mínimo de velocidad que está denotado como  $v_{min}$  y que será utilizado como parámetro, la longitud del medio inhomogéneo es de  $370 \mu\text{m}$  y la frecuencia de la señal acústica es de  $1 \text{ GHz}$ . En la tabla 4.1 se muestran el cambio de la fase de la señal en función del ancho de las capas consideradas y los resultados obtenidos con (4.18). Como puede apreciarse en la tabla, mientras más capas se consideran al momento de hacer los cálculos, los resultados se aproximan cada vez más al resultado obtenido con la ecuación (4.18).

Estos resultados sugieren que, bajo las condiciones que se impusieron durante la deducción del método propuesto para ciertos tipos de medios inhomogéneos, éste y el método multicapa son equivalentes cuando el número de capas considerado tiende a infinito. Por otro lado, cuando  $v_{min} = 4000 \text{ m/s}$ , en todos los casos el cambio de fase debería ser cero; sin embargo, hay diferencias, las cuales podrían deberse a un error numérico asociado al proceso de cálculo.

$v_{min} \text{ [m/s]}$	$\Delta\phi \text{ [}^\circ\text{] Ec. (4.18)}$	$\Delta\phi \text{ [}^\circ\text{] } (d = 1 \times 10^{-10} \text{ m})$	$\Delta\phi \text{ [}^\circ\text{] } (d = 1 \times 10^{-9} \text{ m})$	$\Delta\phi \text{ [}^\circ\text{] } (d = 1 \times 10^{-8} \text{ m})$
3970	334.6734	335.0289	335.1909	336.8109
3975	278.6611	278.9129	279.0749	280.6949
3980	222.7425	222.9098	223.0718	224.6918
3985	166.9173	167.0191	167.1811	168.8011
3990	111.1853	111.2405	111.4024	113.0225
3995	55.5463	55.5735	55.7356	57.3556
4000	0	0.0180	0.1800	1.8000

Tabla 4.1. Comparación del método multicapa con la ecuación (4.18) propuesta.

Una vez que se ha establecido un método para determinar los coeficientes de reflexión y de transmisión de ondas acústicas que se propagan a través de un medio inhomogéneo, a continuación, se explicará por qué la propagación de las ondas acústica que interaccionan con una estructura conductora puede modelarse como ondas acústicas que se propagan a través de un medio inhomogéneo.

Si la barra se monta sobre el dispositivo SAW colocando el substrato, sobre el que fue fabricada la barra sobre los electrodos que se diseñaron específicamente para este fin (ver figura 2.17) y suponiendo que la barra no se encuentra deformada, ésta se encontrará a una distancia  $d_o$  del substrato. Por otro lado, si la barra se encuentra deformada, la distancia que hay entre cada punto de la barra y el substrato que está por debajo está dada por:

$$d(x, t) = d_o - w(x, t) \quad (4.31)$$

donde  $w(x, t)$  es la función de deformación de la estructura y, para el caso de una barra larga, está dada por la solución de las ecuaciones (3.113).

Por otro lado, según el método propuesto por Campbell y Jones (ecuaciones (2.21) a (2.40)), la velocidad es función de la posición de un plano conductor, que en el caso del microacelerómetro propuesto, es la barra que se trató en la sección 3. Entonces, si la velocidad a la cual se mueve la estructura es muy lenta en comparación con la velocidad de propagación del campo eléctrico, la velocidad de las SAW puede expresarse como:

$$v_{saw} = v_{saw} \left( c_{ijkl}, e_{jkl}, \varepsilon_{ij}, d(x, t) \right) \quad (4.32)$$

donde  $c_{ijkl}$ ,  $e_{jkl}$  y  $\varepsilon_{ij}$  son las constantes elásticas, piezoeléctricas y de permitividad eléctrica del material piezoeléctrico con el que está fabricado el substrato. Sin embargo, como ya se mostró en las ecuaciones (3.113) y (3.120), la función de forma  $w(x, t)$  depende de varios factores como: el voltaje o carga aplicada a la barra; la aceleración a la cual está sometida la barra; el módulo de Young; el esfuerzo residual; la distancia inicial entre la barra y el dispositivo SAW y al amortiguamiento debido al aire o gas circundante y, por tanto, a la presión de éste, en términos generales se puede decir que:

$$v_{saw}(x, t) = v_{saw}(c_{ijkl}, e_{jkl}, \varepsilon_{ij}, g, E, \sigma, d_o, V \text{ o } Q, x, t) \quad (4.33)$$

Sin embargo, el módulo de Young  $E$ , el esfuerzo residual  $\sigma$  y  $d_o$  pueden considerarse como parámetros que dependen exclusivamente de la construcción del dispositivo y que estos no cambian considerablemente debido a factores medioambientales después de la fabricación del dispositivo. Por otro lado, se sabe que  $c_{ijkl}$ ,  $e_{jkl}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  pueden variar debido a factores medio ambientales, principalmente, por la temperatura. Sin embargo, investigar rigurosamente los efectos en el sistema por la variación de la temperatura en las constantes del material queda pendiente para un análisis posterior, aunque, como se mencionará después, se han observado variaciones experimentales debido a este efecto, aunque éstas no han sido cuantificadas. Por esta razón, (4.33) se puede simplificar como:

$$v_{saw}(x, t) = v_{saw}(g, V \text{ o } Q, x, t) \quad (4.33)$$

Entonces, la velocidad de propagación de las SAW está dada en términos de la aceleración a la cual está sometida la barra y el voltaje o la carga eléctrica presentes en la estructura. Funcionando así, el sistema se convierte en un sensor de aceleración o de carga o de voltaje. En este caso se consideró solamente como acelerómetro y el voltaje se utilizó para actuar electrostáticamente a la barra y, de esta forma, poder tener algún esquema de control sobre la posición de la barra como una forma indirecta de medir la aceleración a la cual está sometida la barra. Una vez que ha sido explicada la relación que existe entre la aceleración a la que está sometida la estructura y la velocidad de las ondas, se describen brevemente los pasos que se siguieron para simular la respuesta de estos dispositivos:

1. Con las ecuaciones (4.113) o (4.114) se calcula la función de forma para un tiempo determinado.
2. Usando el método de Campbell y Jones se obtiene una función de velocidad (4.32).
3. Utilizando el método multicapa para medios inhomogéneos se calculan los coeficientes de reflexión y de transmisión o bien se puede emplear la ecuación (4.18) para encontrar el desfaseamiento de la señal acústica cuando las reflexiones se pueden despreciar.
4. Se determinan las admitancias del sistema para el valor de desfaseamiento calculado.

- Para el caso del microacelerómetro SAW-MEMS realimentado, con (2.120) se realizan las simulaciones numéricas para determinar los voltajes en cada nodo del circuito electrónico.

### 4.3 Estudio teórico del microacelerómetro SAW-MEMS remoto

Para estudiar el microacelerómetro remoto se propone un modelo simplificado y cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 4.4. Este modelo está compuesto por un IDT, una estructura reflectora (masa sísmica), dos absorbedores de las SAW ( $Ra1$  y  $Ra2$ ), la impedancia de la fuente de RF y su circuito de acoplamiento ( $Z_s$ ), una fuente eléctrica de RF y una fuente de aceleración que está conectada al bloque que representa a la masa sísmica. El hecho de que la masa sísmica tenga una fuente de aceleración conectada a uno de sus puertos, matemáticamente, quiere decir que la posición de la masa sísmica es función de la aceleración. La masa sísmica del sistema está compuesta por una barra ranurada, es decir, una barra en la que su sección transversal cambia, de tal forma que se tiene una sucesión de huecos en la estructura y, otra, donde la barra es más gruesa, a ésta regiones se les conocerá como reflectores. En los dispositivos SAW existen tres elementos representativos: los IDT's, regiones de propagación y reflectores. Bajo estas consideraciones se estudió a la microestructura como un elemento reflector en el cual la relación entre las señales que inciden a los puertos y las señales que se alejan de éstos está dada por la matriz de dispersión, cuya definición es:

$$\begin{bmatrix} A_{t1} \\ A_{t2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

donde  $[A_i]$  y  $[A_t]$  son los vectores de las ondas acústicas que inciden al puerto y de aquellas que se alejan de los puertos, respectivamente, y, en este caso, la matriz  $[S]$  es una función de la frecuencia y de la aceleración ( $S(\omega, a)$ ).

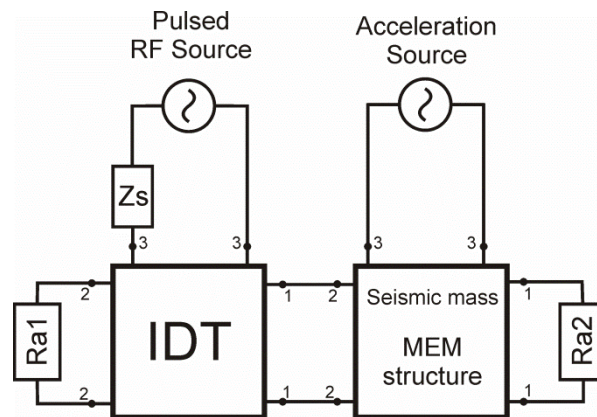


Figura 4.4. Diagrama a bloques del microacelerómetro remoto [167].

Si se aplica una aceleración al microacelerómetro, entonces, la barra se flexiona debido a la fuerza inercial. Por tanto, la posición de cada reflector cambiará con respecto a la posición del sustrato, es decir, cada reflector se acercará o se alejará del sustrato una distancia particular para cada uno de ellos. De la ecuación (4.3), se puede observar que la impedancia acústica es una función de la velocidad de fase de las SAW y de la densidad del material en el que éstas se propagan. De acuerdo con el método propuesto por Campbell y Jones, se puede esperar que la velocidad de fase de las ondas varíe cuando éstas se propagan por debajo de cada reflector, mientras estos se mueven en una dirección perpendicular al plano de propagación de las SAW. Si el material de propagación es el mismo, entonces su densidad es constante y la impedancia acústica cambia únicamente como una función de la velocidad; por lo tanto, es posible distinguir regiones donde la velocidad de las SAW pueden ser consideradas constantes. Las regiones con diferentes impedancias acústicas forman un sistema multicapa acústico y los coeficientes de reflexión y de transmisión pueden calcularse usando las ecuaciones (4.1) y (4.2). Para encontrar la posición en el espacio de la barra, es necesario determinar cómo se flexiona la barra cuando ésta se somete a una aceleración. Aunque se hubiera podido utilizar la teoría de barras de Euler-Bernoulli cuando la sección transversal de la barra cambia [118], para encontrar la función de forma de la barra se utilizó el método de elemento finito (FEM). En la figura 4.5 se muestra una representación de la barra y sus dimensiones y del sistema multicapa que se forma.

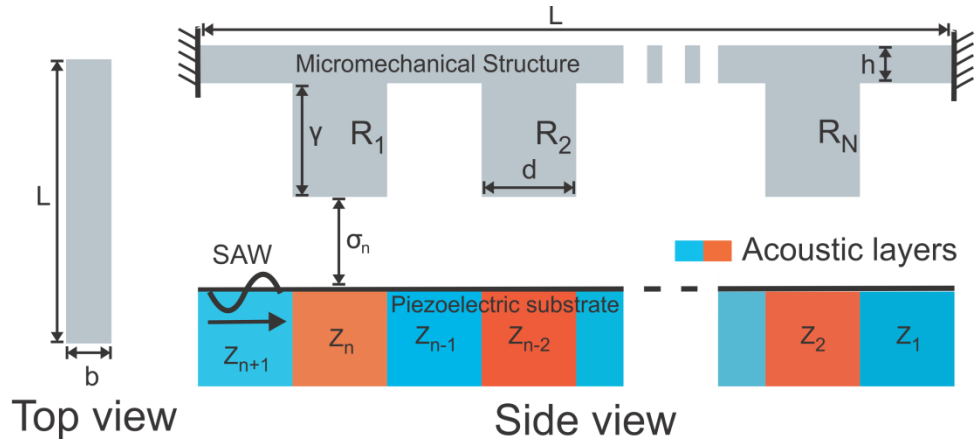


Figura 4.5. Representación de la barra y del sistema multicapa que ésta forma al interactuar con el sustrato, respecto con sus dimensiones. [167]

Una vez que la función de forma ha sido determinada, es posible aproximar la distancia entre el sustrato y cada uno de los reflectores. Usando FEM, se ha observado que, incluso para el caso de  $50 g$  ( $1 g = 9.81 m/s^2$ ), la deformación del lado inferior de los reflectores y del espacio entre estos es tal que las variaciones en la velocidad de las SAW son despreciables. Para simplificar el análisis y reducir el problema de la propagación de las ondas en un medio inhomogéneo, se define el concepto de región acústica como: la región

localizada en el sustrato donde la velocidad de fase de las ondas puede ser considerada constante y, en la figura 4.5, está marcada como  $Z_i$ . Para encontrar la velocidad de fase a través del método de Campbell y Jones es necesario determinar la distancia entre el sustrato y cada uno de los reflectores y los huecos entre dos huecos sucesivos (marcado como  $\sigma_i$  en la figura 4.5). Después de haber calculado cada uno de los  $\sigma_i$  es posible encontrar la velocidad de fase de cada región acústica y, finalmente, determinar el coeficiente de transmisión y de reflexión.

Para este estudio se tomó como referencia el microacelerómetro propuesto por Varadan *et al.* [17], sin embargo, los autores no proporcionaron la información suficiente para simular con exactitud su dispositivo. Como sustrato se consideró al niobato de litio Y-128°, cuyos ángulos de Euler son: 0,38°,0. Se escogió esta orientación porque se sabe que ésta presenta el mayor coeficiente de acoplamiento electromecánico para este material [168]. Las constantes elásticas, piezoeléctricas y de permitividad eléctrica del material fueron tomadas del trabajo de Warner *et al.* [75] y corroboradas con otras reportadas por diversos grupos de investigación [39, 169, 78, 77]. Con ellas se calculó una curva de velocidad de fase contra altura normalizada muy parecida a la que se muestra en la figura 2.16. Con esta curva se calculan la velocidad de propagación para cada una de las regiones acústicas.

A continuación se trata sobre las características físicas del dispositivo. El dispositivo fue fabricado con polisilicio dopado, con las siguientes propiedades físicas:  $E = 160 \text{ GPa}$ ,  $G = 65.574 \text{ GPa}$  y  $\rho = 2230 \text{ Kg/m}^3$ , donde  $E$ ,  $G$  y  $\rho$  son el módulo de Young, el módulo de cortante y la densidad, respectivamente. Las dimensiones de la barra son:  $N = 225$ ,  $L = 676.5 \mu\text{m}$ ,  $h = 1 \mu\text{m}$ ,  $\gamma = 1.3 \mu\text{m}$ ,  $d = 1.5 \mu\text{m}$ ,  $b = 5 \mu\text{m}$  y  $\sigma = 0.1 \mu\text{m}$ . Para que las ondas acústicas se sumen coherentemente es necesario que  $d = \lambda/4$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda. La frecuencia de operación del dispositivo es de 663 MHz.

La estructura con la geometría mencionada fue simulada utilizando CoventorWare [141] y el primer modo de vibración de la estructura es  $f_1 = 17.7312 \text{ kHz}$  y según la ecuación (3.10) y la figura 3.3, en el mejor de los casos ( $\zeta \cong 0.70$ ) el ancho de banda del sistema es 3.54 kHz. La función de forma de la barra ranurada está dada por:

$$w_c(x, a) = 8.3093 \times 10^4 a (x - 4.9378 \times 10^{-6})(x - 4.6375 \times 10^{-6})(6.7224 \times 10^{-4} - x)(6.7118 \times 10^{-4} - x) \quad (4.35)$$

donde  $a$  es la aceleración a la cual está sometida la barra medida en  $g$  y  $w_c$  está dada en metros. Para obtenerla, se ajustaron los puntos resultantes de las simulaciones con CoventorWare a un polinomio de cuarto orden y, además, se verificó que la deformación de la barra es lineal en un rango de  $-50g \leq a \leq 50g$ .

Hasta el momento se ha presentado la relación que existe entre la flexión de una barra debida a la aceleración y el coeficiente de reflexión de las ondas acústicas al propagarse por



la superficie. En las figuras 4.6 se muestran la magnitud y la fase del coeficiente de reflexión en un rango de aceleraciones desde  $-50g$  a  $50g$ . En esta figura se puede apreciar que la respuesta en fase del acelerómetro tiene una respuesta no lineal y esto se debe a la forma asintótica y no lineal de la figura 2.16. Además, se observó que para intervalos grandes de aceleración  $-50g$  a  $0g$  o  $0g$  a  $50g$  los puntos se ajusten adecuadamente a una recta, sin embargo, en el rango de  $-10g$  a  $10g$ , los puntos pueden considerarse como una línea recta ( $ph[^\circ] = 1.6167 \times 10^0 \cdot a + 4.1575 \times 10^{-1}$ ,  $R^2 = 9.9802 \times 10^{-1}$ , donde  $ph$  es la fase de la onda acústica. Para el ajuste se utilizó el método de mínimos cuadrados y  $R$  es el coeficiente de correlación de Pearson [170]). Este acelerómetro puede ser utilizado para medir aceleraciones positivas y negativas o medir aceleraciones positivas en un rango más amplio.

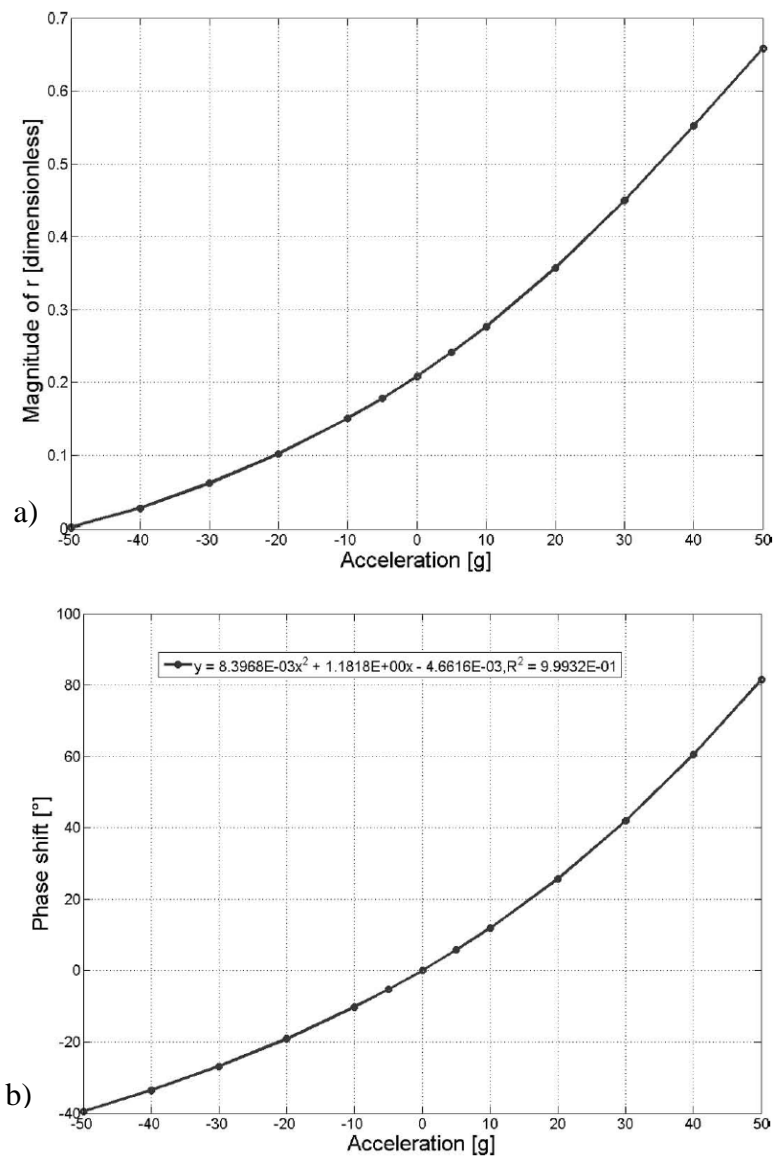


Figura 4.6. a) Magnitud y b) fase del coeficiente de reflexión. [167]

La magnitud y la fase del coeficiente de reflexión dependen de la coherencia con que las ondas acústicas se sumen durante su tránsito a través de la estructura reflectora. Por esta razón es importante analizar la forma en que el coeficiente de reflexión cambia cuando el ancho de los reflectores y de los espacios entre ellos cambia. La variación en el tamaño podría ocurrir debido a las tolerancias en los procesos de fabricación. Para estimar este efecto, se varió la longitud de cada reflector y del espacio entre los reflectores de acuerdo a una distribución normal, con media igual a  $1.5 \mu m$  y varianza tal que el error es menor al 1% en el 99% de los casos, es decir, se espera que 99 de cada 100 anchos de huecos o reflectores se encuentren en el rango de  $1.485 \mu m \leq d \leq 1.515 \mu m$ ; este caso corresponde a una desviación estándar de  $\sigma = 5.8366 \times 10^{-3} \mu m$ . En la figura 4.7 se muestra el coeficiente de reflexión para cinco diferentes casos, utilizando en cada uno de ellos un conjunto aleatorio diferente de anchos de huecos y reflectores.

En la tabla 4.2 se muestra el ajuste lineal de cada uno de los 5 casos y su coeficiente de correlación (R). Se puede observar que en cada uno de los casos las pendientes y los coeficientes de correlación son diferentes. Este hecho indica que este dispositivo es muy sensible a las variaciones en el ancho de los reflectores y huecos.

Si no hay una aceleración actuando sobre la barra, entonces, la barra no se flexiona. En esta situación, el coeficiente de reflexión sólo depende de la frecuencia, tal como se muestra en la figura 4.8. Así, la barra hace que el medio actúe como un filtro pasobanda de ondas acústicas superficiales. Este resultado es similar a aquel obtenido para arreglos reflectivos [20]. La principal diferencia entre ambos, es que el primero es un reflector móvil cuya respuesta está dada por la posición de la estructura, cuya fase del coeficiente de reflexión es aproximadamente lineal y, al no existir contacto entre ambas estructuras, no hay reflexiones de origen mecánico. La respuesta completa del instrumento puede expresarse como una función  $r(a, f)$ , tal como se muestra en la figura 4.9, donde  $a$  es la aceleración y  $f$  es la frecuencia.

	Ajuste lineal	$R^2$
Caso 1	$ph[^\circ] = 1.4965 a - 2.9816$	0.9916
Caso 2	$ph[^\circ] = 1.6086 a - 3.7155$	0.9884
Caso 3	$ph[^\circ] = 1.6489 a - 2.8275$	0.9934
Caso 4	$ph[^\circ] = 1.5476 a - 3.3116$	0.9902
Caso 5	$ph[^\circ] = 1.7879 a - 2.7447$	0.9938

Tabla 4.2. Ajuste lineal de cada una de las curvas que se muestran en la figura 4.7.b.

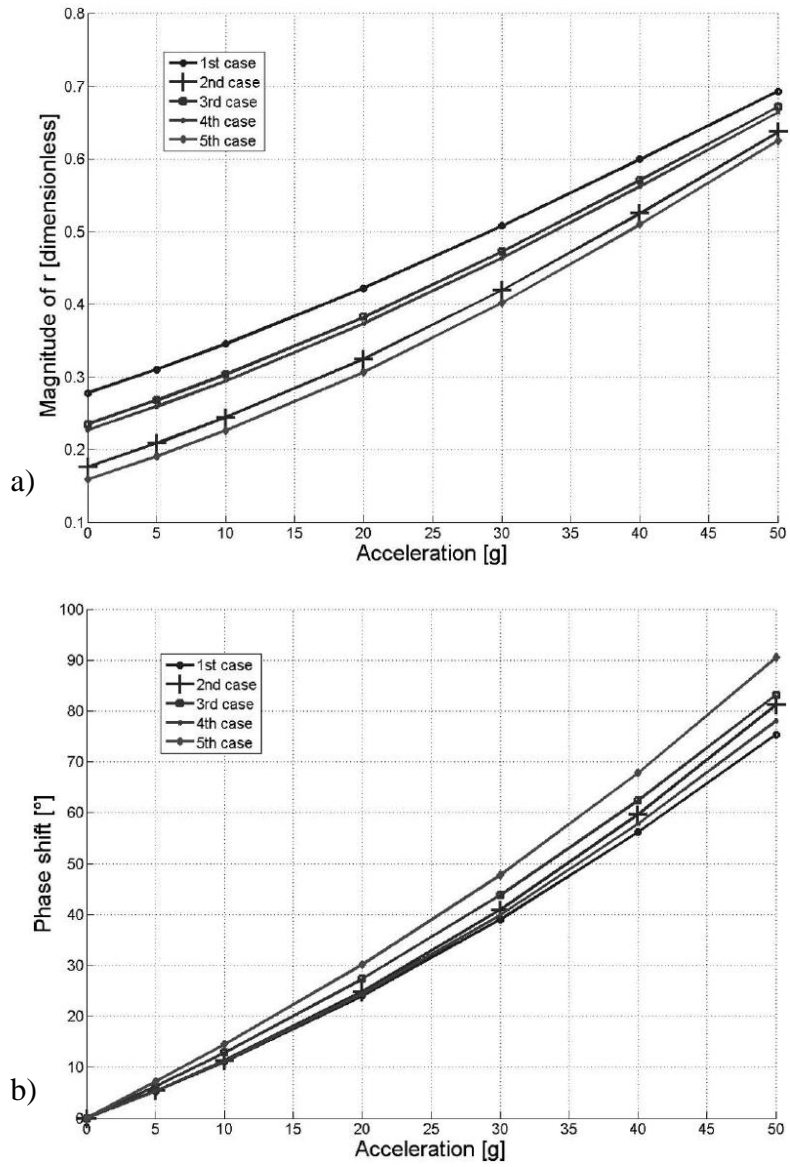


Figura 4.7. a) Magnitud y b) fase para los 5 casos en donde los anchos fueron obtenidos aleatoriamente con una distribución normal. [167]

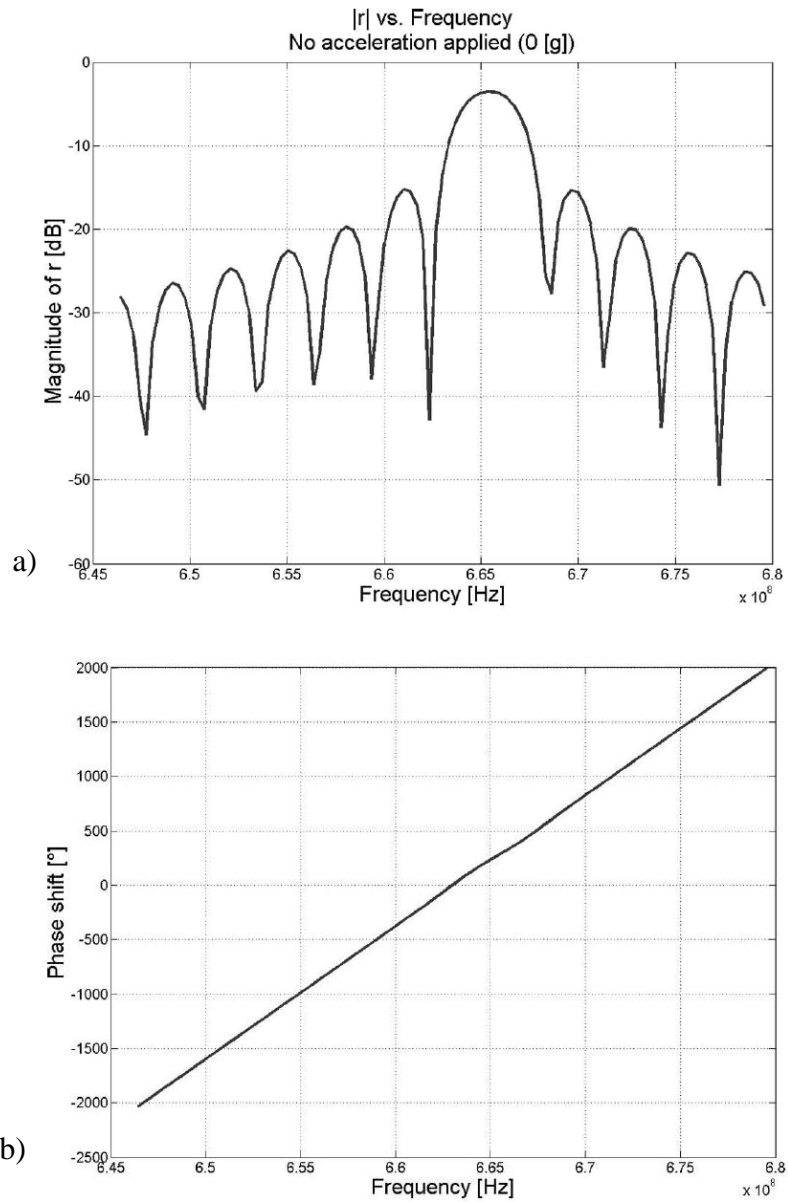


Figura 4.8. a) Magnitud y b) desfaseamiento del coeficiente de reflexión en ausencia de aceleración. [167]

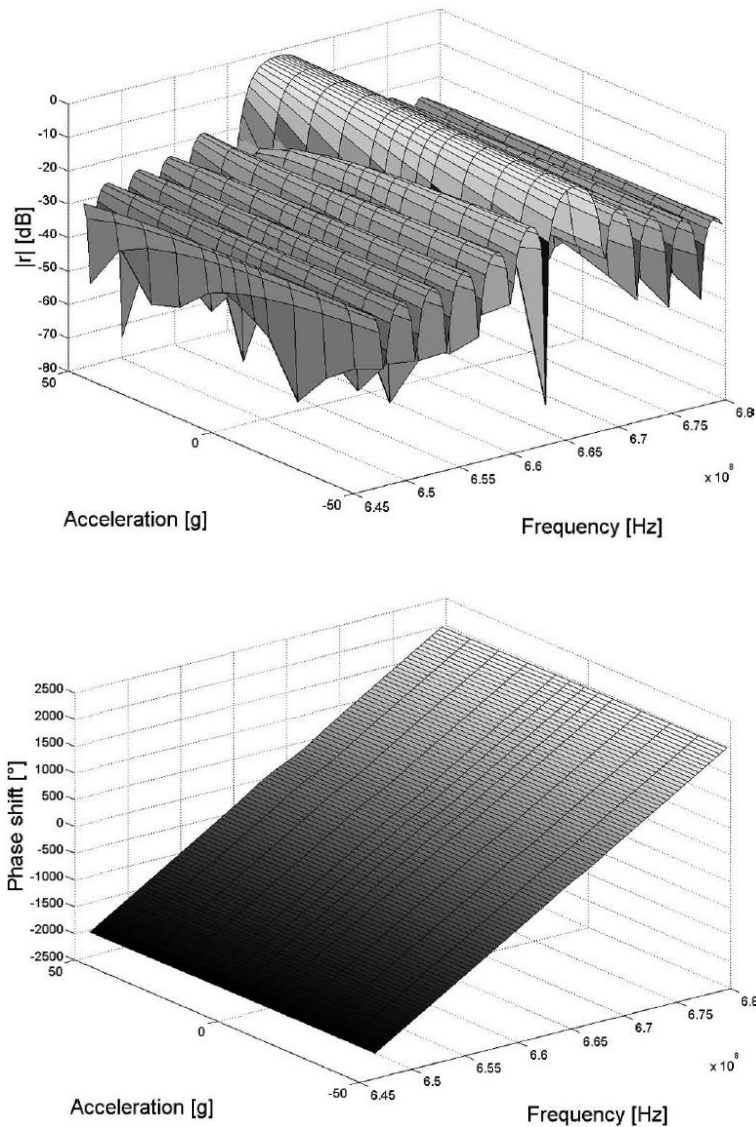


Figura 4.9. a) Magnitud y b) desfaseamiento del coeficiente de reflexión como función de la frecuencia y la aceleración. [167]

#### 4.4 Estudio de un microacelerómetro SAW-MEMS realimentado

Varadan et al. [17] han construido y caracterizado un microacelerómetro SAW-MEMS remoto, pero sin haber realizado un análisis teórico de su comportamiento. Sin embargo, tal como se ha explicado anteriormente, es posible entender la forma en que éste opera si se describe la forma en la que se propagarán las SAW en el dispositivo. Siguiendo estas ideas, es posible construir un microacelerómetro SAW-MEMS que, a diferencia del anterior, funcione localmente, es decir, como un oscilador, en el que la señal de aceleración provoca cambios en la frecuencia de éste y, por lo tanto, se tiene un sistema que opera como un oscilador controlado, cuya señal de control es la variable que se desea medir. Para lograrlo se propone un sistema que está formado por el oscilador SAW (línea de retardo y

amplificador), estudiado en el capítulo 2; una microestructura (puente y electrodo) estudiada en el capítulo 3; y los circuitos electrónicos adicionales (control, oscilador de referencia y mezclador) tal como se muestra en la figura 4.10.

Considerando las características del microacelerómetro, éste podría operar en tres modos: en malla abierta, en malla cerrada (realimentado) y en resonancia. Es importante hacer notar que en el sistema propuesto existen dos realimentaciones, la primera y que se mantiene para los tres modos, es la que se forma al colocar el amplificador (marcado con una A en la figura 4.10) entre ambos IDT de la línea de retardo, formando un oscilador. La segunda realimentación ocurre a través del mezclador, la circuitería de control que aplica un voltaje o carga eléctrica al electrodo de control para modificar la posición de la barra y, así, modificar la frecuencia del oscilador formado por la línea de retardo SAW. Entonces, para el modo de malla abierta, la segunda realimentación no se encuentra presente y la barra se mueve dependiendo de las fuerzas inerciales, elásticas y de amortiguamiento presentes en la estructura (ver sección 3.1.2). Para este sistema, la intención de operar en un modo realimentado es mantener la frecuencia del oscilador constante, es decir, mantener la posición del puente constante, entonces, cuando una fuerza inercial actúa sobre la barra, ésta tenderá a cambiar de posición, sin embargo, el control actúa de tal forma que, a través de un voltaje o carga eléctrica, se aplica una fuerza electrostática que equilibra nuevamente la posición de la barra y, la señal de aceleración se mide a través de la señal de control aplicada a la estructura. Una ventaja de este tipo de sistema es que el amortiguamiento efectivo en la estructura se divide por un factor que está relacionado con la ganancia en la malla de control [18], de esta forma es posible controlar el amortiguamiento y ajustarlo a un valor deseado. El último modo de operación consiste en aplicar una fuerza electrostática que mantenga a la barra en resonancia de tal manera que cuando la estructura se encuentra sometida a una aceleración, la frecuencia de resonancia cambie en función de ésta, de manera similar al microacelerómetro de Comi *et al* [171]. La transducción de la señal se logra por medio de los cambios de frecuencia en el oscilador debido al desplazamiento de la barra cuando se encuentra en resonancia.

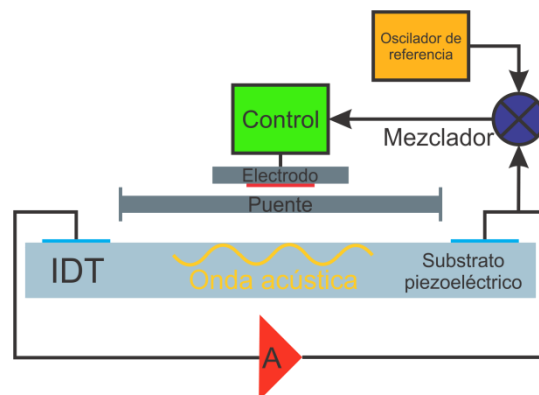


Figura 4.10. Esquema del microacelerómetro realimentado propuesto.

Durante los capítulos anteriores se trató sobre cada una de las partes que forman al sistema, sin embargo, falta aclarar cómo es que éstas se relacionan entre sí para hacer que funcione este sistema. Como ya se mostró en el capítulo 2, el amplificador y la línea de retardo forman juntos un oscilador cuya frecuencia depende de la velocidad de propagación de las SAW, que a su vez, como ya se mostró, que la velocidad de propagación cambia en función de la posición de un plano conductor sobre la estructura. Si la estructura no es un plano como en el caso de la barra, entonces, el medio de propagación se comporta como un medio inhomogéneo y, de acuerdo a la ecuación (4.18), hay un cambio en la fase de la onda acústica y, por tanto, de la frecuencia del oscilador. El sistema puede simularse del modo propuesto por que la velocidad a la cual se mueve la estructura es muy pequeña en comparación con la velocidad a la cual se mueven las ondas acústicas, tal como fue verificado experimentalmente con las barras descritas en el capítulo 3. En la siguiente sección se muestran los resultados de haber simulado este dispositivo tal como se describió anteriormente.

#### 4.5 Resultados y trabajo por realizar

Para determinar si es posible lograr la actuación electrostática, se realizó una prueba sencilla que consiste en aproximar de manera controlada una punta metálica, a la línea de retardo (Y-128°). Para lograr la aproximación se utilizó un micro-posicionador vertical cuya descripción y características han sido reportadas previamente [172]. Según Hautefeuille *et al.* el dispositivo está compuesto por una base de microscopio cuya perilla para el ajuste fino se encuentra acoplada mecánicamente a un motor a pasos que se controla a través del puerto paralelo de una computadora personal. La resolución mínima del sistema es de 0.5  $\mu\text{m}/\text{paso}$ . Para lograr el control deseado del motor se modificó el programa de control del motor de tal forma que éste subiera la punta paso por paso cuando el usuario lo deseara. En la figura 4.11 se muestra el montaje experimental.

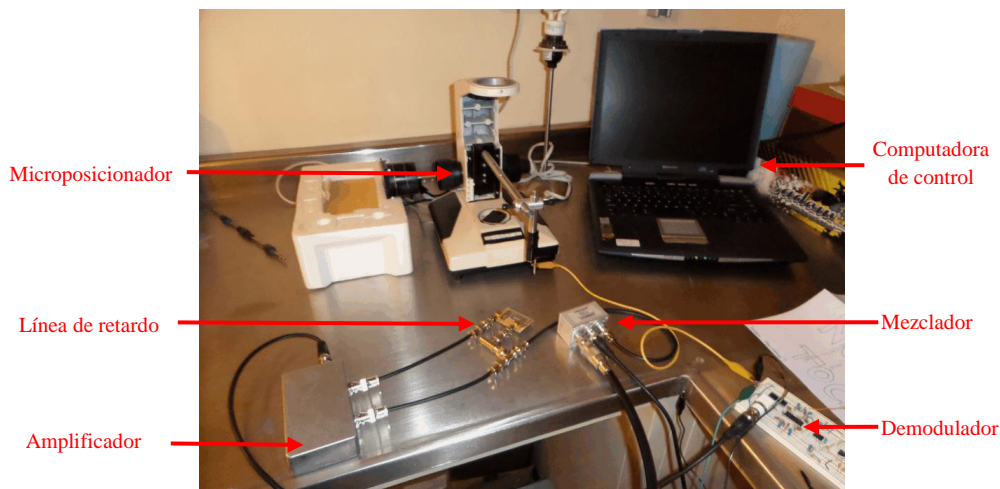


Figura 4.11. Arreglo experimental durante la prueba de proximidad.

Adicionalmente, la línea de retardo se conectó al amplificador construido para este propósito (figura 2.48) y se midieron las variaciones en frecuencia utilizando los sistemas electrónicos descritos en la sección 2.6.5. El voltaje a la salida del demodulador se midió utilizando un multímetro Meterman 37XR. En la figura 4.12 se muestra la curva de voltaje vs. Distancia de la punta al substrato piezoeléctrico de la línea de retardo. En ésta se puede observar una tendencia lineal excepto en aquella región cercana al origen. Con la finalidad de apreciar mejor la forma en que cambia el voltaje en función de distancias pequeñas, en la figura 4.13 se muestran los primeros puntos de la serie y su ajuste. El ajuste de estos puntos se hizo para la siguiente función:  $f(x) = ae^{bx} + ce^{dx}$ . Los parámetros obtenidos del ajuste y sus respectivos intervalos de confianza al 95% son:  $a = 0.01594$  (0.01204, 0.01984),  $b = -4.133$  (-7.812, -0.4548),  $c = 6$  (5.997, 6.003),  $d = -0.7645 \times 10^{-3}$  (-0.8827  $\times 10^{-3}$ , -0.6463  $\times 10^{-3}$ ) y el coeficiente de correlación de Pearson al cuadrado es:  $R^2 = 0.991$ .

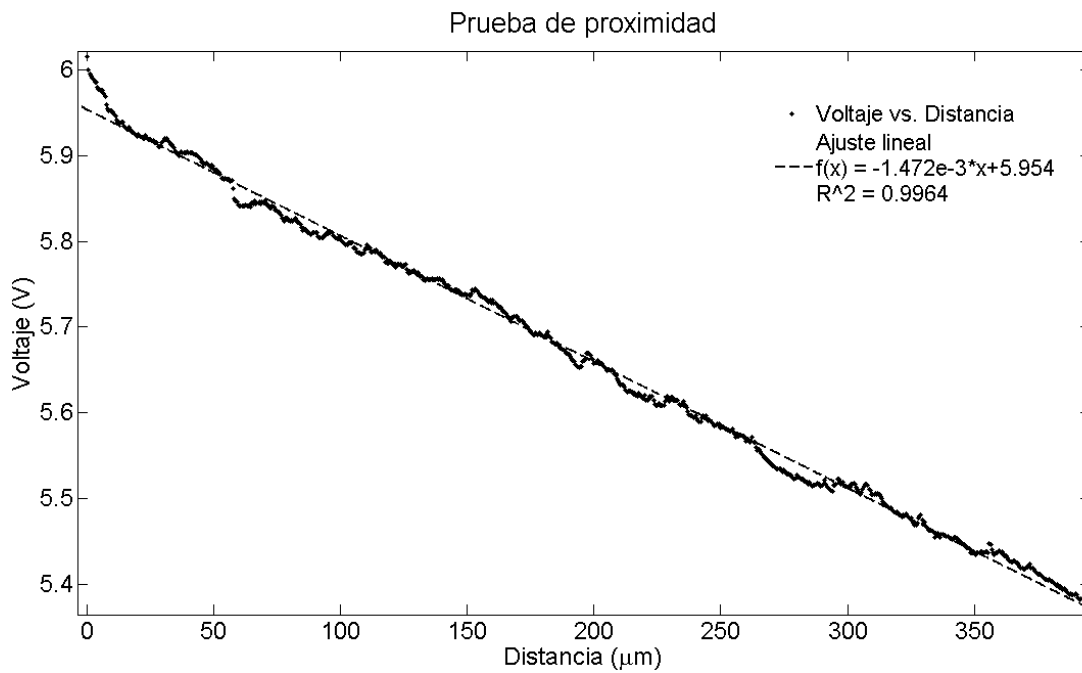


Figura 4.12. Curva de Voltaje vs. Distancia. En este caso la distancia es entre la punta de prueba y la región de propagación de las ondas acústicas en la línea de retardo.



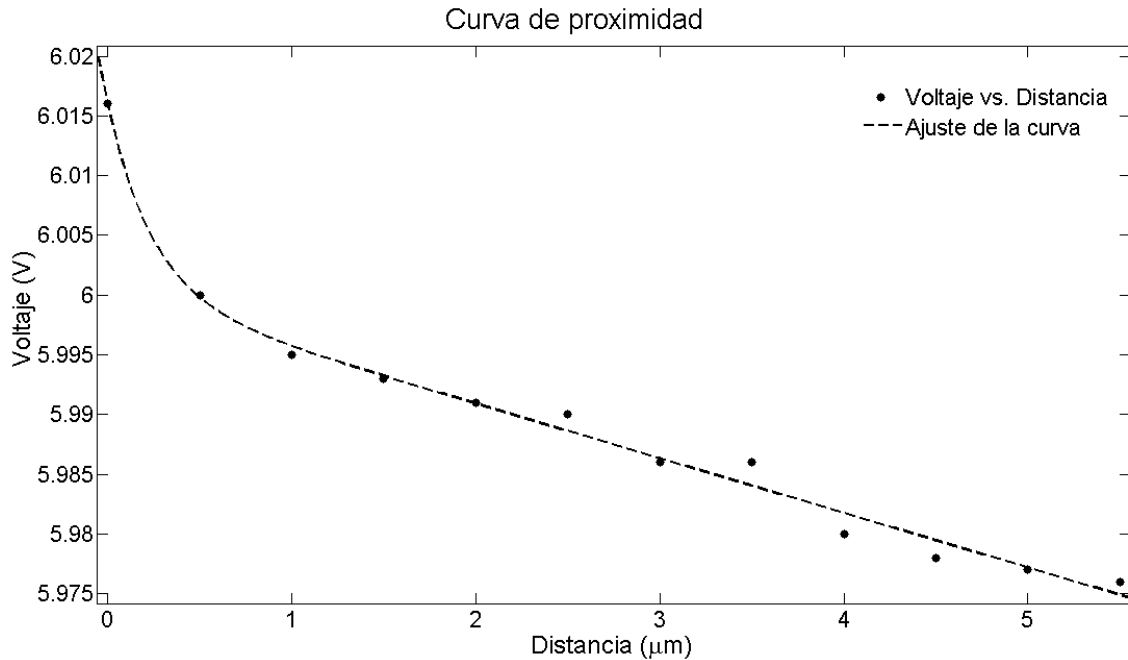


Figura 4.13. Curva de Voltaje vs. Distancia en el intervalo de 0 a 5.5 μm.

La tendencia lineal de la curva que se muestra en la figura 4.11 se podría deber a la capacitancia que existe entre la punta y los electrodos de los IDT's, es decir, la punta, que está conectada al potencial de referencia del sistema, modifica la distribución de carga de los transductores y, por tanto, la respuesta en frecuencia de estos y, así, la frecuencia del oscilador varía dependiendo de la posición de la punta de manera lineal en un intervalo amplio excepto al inicio de la curva. El comportamiento que se observa en la figura 4.13, podría deberse a la variación de la velocidad de propagación de las SAW debido a la proximidad de la punta conductora, tal como ocurre con el método de Campbell y Jones.

Para corroborar por medio de las simulaciones que un cambio en la velocidad de propagación de las ondas acústicas produce una variación en la frecuencia del oscilador. Se modificó la velocidad de la región de propagación de las SAW y se obtuvieron los nuevos coeficientes Y para velocidades de 4020 m/s, 4050 m/s y 4080 m/s. En la figura 4.14 se muestra las simulaciones para un intervalo de tiempo que permite apreciar los desfases que existen entre ellos. Además, se puede observar que la magnitud cambia, lo cual podría deberse a que la respuesta en frecuencia de los IDT's no es plana. Por otro lado, se midieron las frecuencia de las señales de salida, que se muestran en la figura 4.14, y se observó que existe un desplazamiento en la frecuencia de aproximadamente  $\pm 100$  kHz.

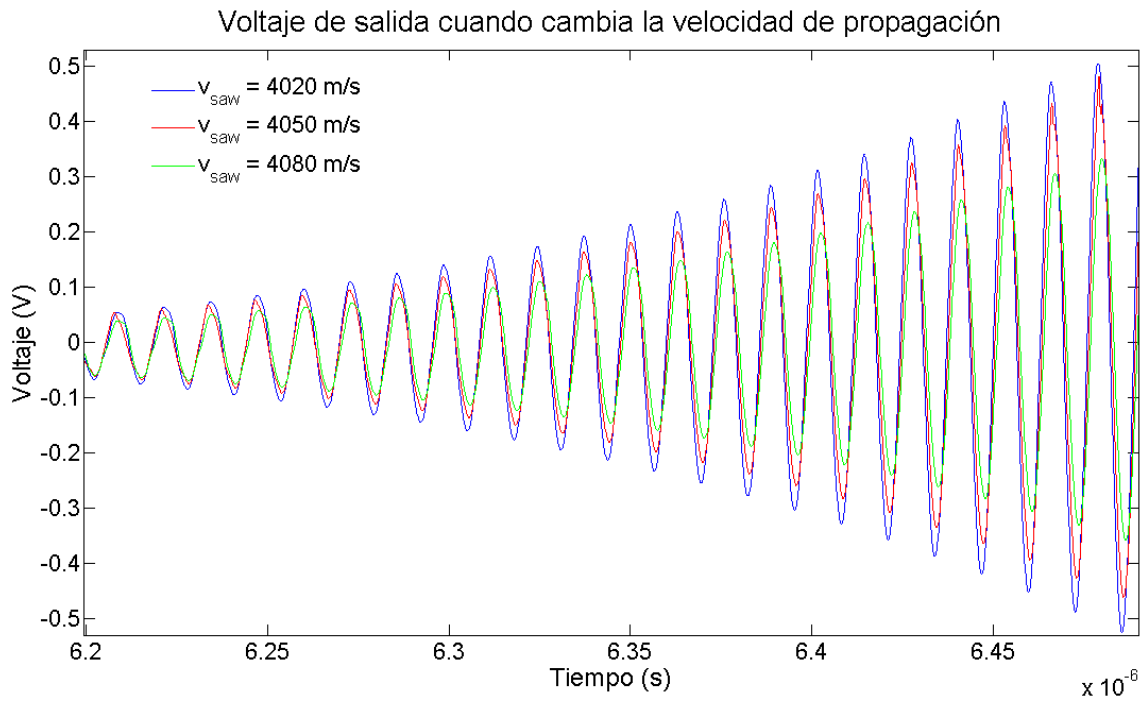


Figura 4.14. Resultado de la simulación cuando se hace variar la velocidad de propagación de las SAW.

# 5. Conclusiones

---

A lo largo de este trabajo se trató sobre la combinación de los MEMS y los dispositivos SAW que, usualmente, han sido utilizados por separado. Los intentos por lograr dispositivos SAW-MEMS han sido escasos y este trabajo es uno de éstos. Durante el desarrollo de este proyecto hubo que tratar sobre el diseño, caracterización y simulación de la línea de retardo y del amplificador necesarios para que, funcionando ambos en conjunto, formaran un oscilador; se propuso un método para hacer simulaciones del oscilador y se compararon los resultados contra aquellos experimentales; se diseñaron, se mandaron a fabricar y se caracterizaron dos micropuentes cuya finalidad es hacer de elemento inercial en el dispositivo SAW-MEMS; se propuso un modelo distribuido para analizar el comportamiento dinámico de las barras cuando estas se encuentran sometidas a fuerzas electrostáticas, de amortiguamiento viscoso, inerciales y de esfuerzos residuales y se compararon con simulaciones hechas con elemento finito; se propuso un modelo que explica el funcionamiento de los dispositivos SAW-MEMS tal como se proponen en este trabajo; y se hicieron trabajos preliminares sobre el prototipo SAW-MEMS. A continuación se concluirá con detenimiento acerca de los puntos más relevantes de este trabajo.

En la sección 2.2 se comprobó que los programas computacionales desarrollados para calcular la velocidad de propagación de ondas de Rayleigh por medio del método de Campbell y Jones en substratos piezoeléctricos y en medios estratificados funcionan adecuadamente. La validación de estos programas se hizo comparando los resultados obtenidos con aquellos que han sido previamente reportados. La comparación se realizó por medio de la inspección de las figuras 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6 y observar que las curvas son similares. Esto permitió tener certeza de la curva de velocidad vs. altura normalizada que se utilizó para explicar la forma en que operan los dispositivos SAW-MEMS. Además, estos resultados convierten a estos programas en herramientas que podrán servir para la investigación futura del coeficiente de acoplamiento electromecánico de diversos materiales en substratos formados por un volumen o por materiales estructurados.

Posteriormente, al desarrollar la teoría para analizar dispositivos acústicos por medio de la matriz  $P$ , se propuso un método que permite calcular la matriz de impedancias de un dispositivo que tiene  $N$  puertos de entrada y salida, es decir, este método es una generalización del caso común en el que se consideran sólo dos puertos, según nuestro conocimiento, no se ha reportado un método similar a este. Este método permitirá explorar dispositivos SAW con  $N$  puertos.

Como una parte importante de este trabajo se diseñaron, se mandaron a fabricar y se caracterizaron dos líneas de retardo SAW. Una se construyó sobre un substrato de niobato de litio  $Y-128^\circ$  y, la otra, sobre niobato de litio  $Y-41^\circ$ . Sin embargo, durante el diseño se consideraron las características del substrato  $Y-128^\circ$  y el mismo patrón se replicó sobre  $Y-$

41°. Se diseñó la línea de retardo para tener una frecuencia central de 75 MHz, sin embargo, la frecuencia central se midió alrededor de los 78 MHz. Hay dos causas principales de esta diferencia: la velocidad de propagación de las SAW en el sustrato es mayor que aquella estimada por medio del método de Campbell y la dimensión de los transductores interdigitales cambió debido a las tolerancias en el proceso de fabricación. Como se explica en la sección 2.4.1, hubo que ajustar los parámetros de admitancias teóricas para que coincidieran en frecuencia con aquellos que se midieron experimentalmente. La diferencia entre las velocidades de propagación de las SAW obtenidas con el método de Campbell y Jones y con las mediciones experimentales corresponde a una diferencia máxima de 110 m/s. Por otro lado, el fabricante utilizó métodos ópticos para medir el ancho de los transductores y midió que los transductores tienen en promedio 6.618  $\mu\text{m}$  y utilizando SEM se midió aproximadamente 6.5  $\mu\text{m}$ , cuando las dimensiones propuestas fueron de 6.625  $\mu\text{m}$ . Estos resultados sugieren que debido al proceso de fabricación los electrodos tienen una dimensión menor de la esperada. La variación en la frecuencia de la línea de retardo se debe a una combinación de ambos efectos y, aunque el niobato de litio es un material que ha sido ampliamente estudiado, es necesario seguir caracterizándolo debido a que sus constantes elásticas, piezoeléctricas y de permitividad eléctrica pueden cambiar según los procesos de fabricación utilizados. Además, con SEM se observa que la distancia entre dos electrodos sucesivos es de aproximadamente 6.7  $\mu\text{m}$ , lo cual se manifiesta como una reducción de la capacitancia de los IDTs en aproximadamente 0.63 veces con respecto a la capacitancia teórica. Esto hace que la amplitud de las admitancias sea menor y se observó que al IDT receptor sólo se llegan, aproximadamente, una séptima parte de las ondas que se emiten en el IDT transmisor, el resto se disipan en el material o se difractan. Hasta el momento no se ha encontrado un coeficiente de pérdidas en niobato de litio Y-128° y esta información podría servir para estimarlo. Queda pendiente hacer más estudios para determinar este coeficiente y verificar si depende de la frecuencia de la onda o no. Por medio de AFM se midió la topografía del sustrato y éste cumple con las características necesarias para aplicaciones de ondas acústicas superficiales y no se observó ninguna irregularidad de consideración en las películas que forman los electrodos.

Cuando se calculó teóricamente la matriz de admitancias de la línea de retardo se observó que la amplitud de los coeficientes dependía del número de puntos utilizados para representar la distribución de carga del IDT. Evidentemente esto es erróneo y, por esta razón, se dedujo una expresión (ecuación 2.106) que permite normalizar la distribución de carga en el dominio de Fourier. Comparando los resultados teóricos con los experimentales, la ecuación cumple con el objetivo de ajustar la amplitud de la transformada de Fourier de la distribución de carga.

Para hacer el oscilador se probaron cuatro amplificadores: un amplificador de una etapa en configuración de emisor común (figura 2.45); dos amplificadores hechos por Minicircuits,

uno con número ZX60-6013E+ y otro con número de serie ZX60-3018G+, y un amplificador de tres etapas (figura 2.46), formado básicamente por dos etapas de amplificación de emisor común y una de colector común. Como se mencionó anteriormente, el único amplificador que sirvió para esta aplicación fue el amplificador de tres etapas. La causa de esto es que el amplificador de una etapa, a pesar de tener una ganancia relativamente alta para impedancias de salida altas, tiene una ganancia pobre cuando se conecta al IDT de la línea de retardo porque su impedancia es relativamente baja y los amplificadores de Minicircuits no tienen una ganancia suficiente para compensar las pérdidas de inserción ni las pérdidas en la línea aunque presentan un rango muy amplio de frecuencias con ganancia constante. No se pudieron utilizar dos amplificadores de estos conectados en cascada porque están limitados en la potencia de entrada al amplificador y, si se supera, éste puede dañarse. Por otro lado, la ganancia del amplificador de tres etapas es cercana a los 40 dB para cargas de 50  $\Omega$  (ver figuras 2.51), un poco más del doble que la ganancia de los amplificadores de Minicircuits, lo que lo hace adecuado para la aplicación, sin embargo, en un futuro este diseño podría modificarse para mejorar su desempeño, por ejemplo: lograr que la ganancia sea constante, reducir el ruido del amplificador, mejorar los acoplamientos entre cada una de las etapas, redistribuir los elementos en la tarjeta, utilizar elementos de montaje superficial, entre otras. Se conectó el amplificador a cada una de las líneas de retardo y en ambos casos se observó la oscilación de los sistemas.

Para simular el comportamiento del oscilador, fue necesario modelar el amplificador por medio de ecuaciones en diferencias. Para modelar los TBJ's se utilizó el modelo de Gummel y Poon. Se obtuvieron los voltajes de DC del circuito y se compararon con aquellos obtenidos con SPICE, encontrándose diferencias menores al 0.05% en todos los casos. Utilizando nuestro programa computacional, se hicieron simulaciones de AC, se compararon con SPICE (figura 2.49) y se encontraron diferencias de aproximadamente el 16 %. Estas diferencias se deben principalmente a la forma en la que se calcularon las capacitancias de las uniones base-emisor y base-colector. En nuestro programa se utilizaron algunas simplificaciones sobre el cálculo de éstas; cuando se desprecian las capacitancias, se observa que los resultados coinciden plenamente.

Se logró establecer un método para simular el amplificador junto con la línea de retardo y observar las oscilaciones del sistema, sin embargo, éste es un proceso que demanda mucho tiempo y recursos computacionales. Por ejemplo, las simulaciones presentadas en la figura 2.50 se obtuvieron después de tres días de correr el programa en una computadora Dell Vostro 480 con un procesador Intel Core i7 – 2600 de cuatro núcleos con una frecuencia de reloj de 3.40 GHz y 8 GB de RAM. Una forma de visualizar con mayor facilidad la gran cantidad de recursos computacionales que demanda este tipo de simulaciones es a través de calcular el cociente del tiempo que toma hacer las simulaciones entre el tiempo simulado, para este caso es aproximadamente de  $3.77 \times 10^{10}$ , es decir, si se quisiera simular un segundo del oscilador, se requerirían  $3.77 \times 10^{10}$  segundos, que son más de 1196 años.

Debido a que los cálculos se realizan secuencialmente en el tiempo y a las limitaciones de tiempo para la realización del proyecto, no fue posible implementar una forma eficiente de hacerlos en paralelo y poder aprovechar por completo los recursos de la computadora. En SPICE cuando no se encuentra la convergencia para un incremento de tiempo ( $\Delta t$ ) dado, éste incremento se divide entre 8 y se busca otra vez la convergencia para los puntos de interés, sin embargo, en nuestro método no es posible hacer uso de la división de intervalos porque se utiliza la transformada de Fourier para ligar la línea de retardo con el amplificador, este hecho limita considerablemente las posibilidades de convergencia y hace que para poder simular voltajes con amplitudes mayores haya que agregar más puntos, es decir, escoger un  $\Delta t$  más pequeño y, por tanto, el programa tarde aún más. Por otro lado, el número de puntos se encuentra limitado a las características de la computadora. Como trabajo pendiente queda investigar la forma de hacer estas simulaciones con más eficiencia, es decir, en menos tiempo y pudiendo aprovechar el procesamiento en paralelo. Como resultado de las simulaciones se obtuvo que la frecuencia del oscilador es de 77.50 MHz, mientras que las que se midieron experimentalmente son de 77.52 MHz, el error entre ambas es menor al 0.02%, además, el tiempo de retardo obtenido con la simulación de la línea es de aproximadamente 2.74  $\mu\text{s}$ , mientras que la medida experimentalmente es de 2.3  $\mu\text{s}$ . La diferencia puede deberse a que en 2.74  $\mu\text{s}$  es cuando la señal recibida es suficiente para notar visualmente los cambios en la simulación, sin embargo, este resultado se encuentra dentro del intervalo de tiempo cuando las SAW viajan a través del IDT receptor por primera vez.

Utilizando PolyMUMP's de MEMSCAP se diseñaron y se fabricaron dos puentes de 1000  $\mu\text{m}$  y 1500  $\mu\text{m}$  de longitud. Para su estudio se propuso una variación de la ecuación de Euler-Bernoulli, la cual incluye la fuerza de origen electrostático, fuerzas de amortiguamiento, esfuerzos residuales y fuerzas inerciales, todas ellas distribuidas a lo largo de la estructura. Para probar las ecuaciones, se utilizó un puente fabricado por la Dra. Oropeza sobre una oblea SOI. Experimental y teóricamente se encontró al primer modo de vibración en 1.36 MHz, entonces, la ecuación predijo satisfactoriamente el primer modo de vibración de la barra SOI.

Debido a que las capas estructurales de polisilicio de PolyMUMPs tienen esfuerzos residuales, se decidió utilizar la ecuación 3.119 para estimar los efectos de éstos sobre las barras fabricadas. Se observó que valores negativos de esfuerzos residuales hacen más blanda la estructura, por el contrario, valores positivos la hacen más rígida y esto se observa en el hecho de que disminuye o aumenta la frecuencia de los modos de vibración de la estructura. Sin embargo, existe un valor crítico de esfuerzo residual (con valor negativo) para el cual el primer modo de vibración desaparece, según las simulaciones hechas con la ecuación de Euler-Bernoulli y con elemento finito, ésta es una condición de estabilidad para la estructura. Esta conclusión se obtiene de la figura 3.19 tomando en cuenta que la amplitud del desplazamiento del puente es mucho mayor que el espesor de éste y tiene una

tendencia creciente conforme avanza el tiempo. En la práctica, este hecho podría significar la ruptura del puente. Es decir, podría ser un criterio para determinar si bajo ciertos procesos de fabricación con características específicas, el puente podrá ser liberado satisfactoriamente.

En la tabla 3.5 se compara la frecuencia natural de la estructura calculada por medio de las ecuaciones (3.119), (3.120.a) y con elemento finito. En dicha tabla se consideraron nueve casos que corresponden a las posibles combinaciones de tres módulos de Young (148 GPa, 158 GPa y 168 GPa) con diferentes esfuerzos residuales (-2 MPa, 0 MPa y 2 MPa). Para los casos en que los esfuerzos residuales son 0, las diferencias entre los tres métodos son menores al 2%. Cuando los esfuerzos residuales son de 2 MPa, para la barra corta, las diferencias son menores al 1.6%; pero para la barra larga, la diferencia entre el elemento finito y la ecuación (3.120.a) son menores al 22.3%. Las diferencias entre (3.119) y (3.120.a) se deben a las aproximaciones hechas al momento de calcular la ecuación en diferencias. Sin embargo, para esfuerzos residuales de -2 MPa, los errores entre el método de elemento finito y la solución de la ecuación (3.120.a) son de 6.6% y 65% para la barra corta y la barra larga, respectivamente. Queda pendiente revisar la causa de por qué con el análisis de elemento finito la barra resulta mucho más rígida que con el análisis hecho por medio de las ecuaciones; sin embargo, una posible causa podría ser que, debido a que el puente es muy delgado en comparación de su largo, el mallado contiene muy pocos puntos para representar la sección transversal de la barra. Por otro lado, se demostró que con las ecuaciones (3.120) es posible calcular la respuesta dinámica del los puentes.

En el capítulo 4 se mostró un procedimiento para vincular los dispositivos de ondas acústicas con los MEMS. Este análisis considera un medio formado por capas con un ancho arbitrario y con diferentes impedancias acústicas, posteriormente, se considera el caso particular cuando el ancho de las películas tiende a cero y la incidencia de las ondas es normal y, se propuso una ecuación que permite calcular la fase de las ondas al salir de la región de propagación. Este caso corresponde al tránsito de las ondas por un medio inhomogéneo. Para corroborarlo, se propuso un medio inhomogéneo y se analizó por medio del método multicapas y por la ecuación (4.18) y, se observó, que mientras más delgadas van siendo las capas, los resultados tienden a igualarse (ver tabla 4.1).

Se utilizó el método de multicapas para analizar un microacelerómetro remoto que había sido reportado previamente. Este método probó que se pueden calcular las amplitudes y las fases de los coeficientes de reflexión de las ondas acústicas que se propagan en un medio piezoeléctrico. Durante el desarrollo se trató de igualar todas las condiciones del acelerómetro reportado, sin embargo, en el artículo original no se incluyó toda la información necesaria para lograrlo. Se estableció una relación entre la deformación de la barra ranurada, calculada con elemento finito, y la velocidad de propagación de las SAW en las regiones acústicas, calculada por medio del método de Campbell y Jones. Se determinó que este instrumento tiene un comportamiento asimétrico, es decir, su respuesta es diferente

para aceleraciones positivas y negativas en un rango de -50 g a 50 g, pero si el rango de aceleraciones es menor (-10 g a 10g) la respuesta del instrumento es casi lineal. Además, se encontró que el coeficiente de reflexión de las SAW es altamente sensible al ancho de cada una de las ranuras en la barra (reflectores) e, incluso, diferencias aleatorias menores al 1% pueden hacer que el comportamiento del sistema sea diferente. Además, se observó que la barra ranurada actúa como un filtro pasobanda de ondas acústicas, cuya respuesta en frecuencia, cambia dependiendo de la aceleración a la cual está sometida la estructura.

Por otro lado, en este trabajo se propuso un nuevo tipo de acelerómetro SAW-MEMS que está formado por un oscilador SAW, estudiado en el capítulo 2, y una micropunte, estudiado en el capítulo 3; que opera siguiendo los principios propuestos en el capítulo 4. La idea de este microacelerómetro es que la barra, al deformarse, modifique la frecuencia de resonancia del circuito oscilador y, de esta forma, la señal de aceleración quede modulada en frecuencia.

Con la finalidad de probar el principio de transducción del sistema anterior, se hizo una prueba de proximidad en la que se observó que la frecuencia del oscilador cambia tal como se muestra en las figuras 4.12 y 4.13. Como resultado se observó que existe una interacción entre la punta y los IDT's y el voltaje cambia de manera lineal según la posición de la punta, sin embargo, para distancias menores de 2  $\mu\text{m}$  se observa un cambio de la frecuencia del oscilador que sale de la tendencia lineal, esto podría deberse a la interacción eléctrica entre la punta y el substrato piezoeléctrico. Aunque los resultados no son concluyentes, se trabaja para eliminar o minimizar los errores experimentales que pudieran haber estado presentes y, además, el equipo del Dr. Hautefeuille está trabajando para mejorar su microposicionador y lograr resoluciones menores, lo cual permitiría hacer mediciones más precisas sobre el cambio de la velocidad de propagación de las SAW cuando se encuentran en presencia de un material conductor. De esta forma se podrían tener resultados concluyentes sobre la efectividad de la transducción por medio de las SAW. Sin embargo, los resultados de la figura 4.12 sugieren otro método de transducción con las ondas SAW y queda pendiente diseñar y construir microestructuras cuya función pueda modificar la capacitancia de los transductores y, por tanto, la frecuencia del oscilador.

Se hicieron las simulaciones para comprobar el cambio en la frecuencia del oscilador cuando cambia la velocidad de propagación de las ondas acústicas en la línea de retardo. Se confirmó que existe un cambio en la frecuencia del oscilador. Sin embargo, como trabajo pendiente queda evaluar si modificar la distribución de carga en los transductores interdigitales o modificar la propagación de las SAW funciona mejor para hacer aplicaciones electrónicas y de sensado.

Este trabajo abre las posibilidades para seguir investigando y desarrollando sensores y otros dispositivos electrónicos basados en la combinación SAW-MEMS.



# Apéndice A. Modelo de los TBJ's

---

Para poder realizar las simulaciones, tipo SPICE, del amplificador es necesario disponer de los modelos de cada uno de los transistores. Para la fabricación del amplificador que se muestra en la figura 2.44, se utilizaron dos tipos de transistores: un transistor tipo PNP de propósito general modelo BC557A y un transistor NPN para RF modelo BF959. A continuación se muestran dichos parámetros para ambos dispositivos.

**Parámetros del modelo de Gummel-Poon para el transistor BC557A.**

```
.MODEL QBC557A/PLP PNP(+IS = 2.059E-14 +NF = 1.003 +ISE = 2.971E-15 +NE = 1.316 +BF = 227.3 +IKF = 0.08719 +VAF = 37.2 +NR = 1.007 +ISC = 1.339E-14 +NC = 1.15 +BR = 7.69 +IKR = 0.07646 +VAR = 11.42 +RB = 1 +IRB = 1E-06 +RBM = 1 +RE = 0.688 +RC = 0.6437 +XTB = 0 +EG = 1.11 +XTI = 3 +CJE = 1.4E-11 +VJE = 0.5912 +MJE = 0.3572 +TF = 7.046E-10 +XTF = 4.217 +VTF = 5.367 +ITF = 0.1947 +PTF = 0 +CJC = 1.113E-11 +VJC = 0.1 +MJC = 0.3414 +XCJC = 0.6288 +TR = 1E-32 +CJS = 0 +VJS = 0.75 +MJS = 0.333 +FC = 0.7947 )
```

**Parámetros del modelo de Gummel-Poon para el transistor BF959.**

```
.MODEL BF959 NPN(+IS = 12.6E-15 +NF = 0.991 +ISE = 396E-15 +NE = 1.56 +BF = 90.8 +IKF = 0.0521 +VAF = 56.7 +NR = 0.991 +ISC = 396E-15 +NC = 1.56 +BR = 5 +IKR = 0.0521 +VAR = 28.3 +RB = 10 +IRB = 1E-06 +RBM = 1 +RE = 0.305 +RC = 1 +XTB = 0 +EG = 1.11 +XTI = 3 +CJE = 1.4E-12 +VJE = 3.41 +MJE = 0.397 +TF = 99.5E-12 +XTF = 0 +VTF = Inf +ITF = 0 +PTF = 0 +CJC = 1.27E-12 +VJC = 2.48 +MJC = 0.245 +XCJC = 0.6288 +TR = 12.9E-9 +CJS = 0 +VJS = 0.75 +MJS = 0.333 +FC = 0.7947 )
```



# Apéndice B. Cables utilizados.

---

Para conectar la línea de retardo con el amplificador se utilizaron cables coaxiales RG-58 fabricados por Condumex [173]. En la tabla B.1 se reproduce la información sobre la atenuación que proporciona el fabricante. Para poder estimar la atenuación en el cable a la frecuencia de interés (78 MHz) se hizo un ajuste de los datos según la siguiente ecuación:

$$At(f) = \frac{p_1 f + p_2}{f + q_1} \left[ \frac{V/V}{100 \text{ m}} \right] \quad (\text{B.1})$$

donde  $At(f)$  es la función con la que se aproxima la atenuación en el cable en función de la frecuencia  $f$  dada en MHz,  $p_1 = -0.03719$ ,  $p_2 = 36.4$  y  $q_1 = 47.09$ .

Frecuencia (MHz)	Atenuación (dB/100m)	Atenuación (V/V/100m)
10	4	0.6309573
100	13	0.2238721
200	18.5	0.1188502
400	28	$3.981071 \times 10^{-2}$
700	38.5	$1.188502 \times 10^{-2}$
900	45.0	$5.623413 \times 10^{-3}$
1000	48.0	$3.981071 \times 10^{-3}$

Tabla B.1. Datos de atenuación para los cables coaxiales RG-58.

Utilizando B.1, se obtiene que la atenuación a 78 MHz es: 0.2678 V/V/100m. Considerando una relación lineal, la atenuación en un metro de cable es de 0.992678 V/V/m o de -0.06383 dB/m. Para longitudes de cable menores a un metro, la atenuación es prácticamente despreciable.

Por otro lado, según el fabricante, la velocidad de propagación en el cable es de  $v_{cable} = 0.66c = 1.9786 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Entonces, la longitud de onda a 78 MHz es de 2.5367 m. Para reducir los efectos de las líneas de transmisión debidos a la longitud de los cables se consideró que la longitud del cable fuera 20 veces menor que la longitud de onda de la señal, por esta razón, la longitud del cable debería ser de 12.68 cm. Para fines prácticos se utilizaron cables de 15 cm de longitud aproximadamente.

Según el fabricante la impedancia característica de los cables es de  $53.5 \pm 2 \Omega$  y la capacitancia por unidad de longitud es aproximadamente de 94 pf/m, entonces, calculando se obtiene que la inductancia del cable es 0.2691  $\mu\text{H/m}$ .

Debido a que la atenuación, la longitud y la capacitancia e inductancia por unidad de longitud son relativamente pequeñas en comparación con otros elementos en el sistema, durante las simulaciones se despreciaron los cables.



# Apéndice C. Publicación

---

Como resultado de este trabajo de investigación, hasta el momento de presentar esta tesis, se ha publicado un artículo en una revista internacional de arbitraje riguroso cuya cita es:

J.O. Guerra-Pulido y P.R. Pérez-Alcázar, «Relationship between acceleration and the scattering matrix in a SAW-MEMS accelerometer,» *IEEE T Ultrason Ferr*, vol. 58, n° 7, pp. 1460-1467, 2011.



## Referencias

- [1] S. Senturia, *Microsystem design*, USA: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [2] C. Smith, «Piezoresistive effects in germanium and silicon,» *Phys Rev*, vol. 94, n° 1, pp. 42-49, 1954.
- [3] J. Allen, *Micro Electro Mechanical System Design*, Boca Raton, FL, USA: Taylor & Francis Group, LLC, 2005.
- [4] R. Bouge, «Recent development in MEMS sensors: a review of applications, markets and technologies,» *Sensor Review*, vol. 33, n° 4, pp. 300-304, 2013.
- [5] H. Nathanson, W. Newell, R. Wickstrom y J. Davis, «The resonant gate transistor,» *IEEE T Electron Dev*, ED-14, pp. 117-133, 1967.
- [6] K. Petersen, «Silicon as mechanical material,» *Proc IEEE*, vol. 70, n° 5, pp. 420-457, 1982.
- [7] R. Howe y W. Muller, «Polycrystalline silicon micromechanical beams,» *J Electrochem Soc: Solid state Sci Technol*, vol. 130, n° 6, pp. 1420-1423, 1983.
- [8] E. Becker, W. Ehrfeld, P. Hagmann, A. Maner y D. Muchmeyer, «Fabrication of microstructures with high aspect ratios and great structural heights by synchrotron radiation lithography, galvanofarming and platic modeling (LIGA process),» *Microelectron Eng*, vol. 4, n° 1, pp. 35-56, 1986.
- [9] H. Fujita, «Two decades of MEMS: From surprise to enterprise,» *IEEE Conference on MEMS*, pp. 1-6, 2007.
- [10] L. Shuangfeng, M. Tiehua y H. Wen, «Design and fabrication of a new miniaturized capacitive accelerometer,» *Sensor Actuat A-Phys*, vol. 147, pp. 70-74, 2008.
- [11] P. Dong, X. Li, H. Yang, H. Bao, W. Zhou, S. Li y S. Feng, «High-performance monolithic triaxial piezoresistive shock accelerometers,» *Sensor Actuat A-Phys*, vol. 141, pp. 339-346, 2008.
- [12] L. Wang, K. Deng, L. Zou, R. Wolf, R. Davis y S. Trolrier-McKinstry, «Microelectromechanical systems accelerometers using lead zirconate titanate thick films,» *IEEE Electr Device L*, vol. 23, n° 4, pp. 182-184, 2002.
- [13] J. Yang, J. Shuhai y Y. Du, «Novel optical accelerometer based on Fresnel diffractive micro lens,» *Sensor Actuat A-Phys*, vol. 151, pp. 133-140, 2009.
- [14] K. Liao, R. Chen y B. Chou, «A novel thermal-bubble-based micromachined accelerometer,» *Sensor Actuat A-Phys*, 130-131, pp. 282-289, 2006.
- [15] J. Courteaud, N. Crespy, P. Combette, B. Sorli y A. Giani, «Studies and optimization of the frequency response of a micromachined thermal accelerometer,» *Sensor Actuat A-Phys*, vol. 147, pp. 75-82, 2008.
- [16] H. Dong, Y. Jia, Y. Hao y S. Shen, «A novel out-of-plane MEMS tunneling accelerometer,» *Sensor Actuat A-Phys*, vol. 120, pp. 360-364, 2005.
- [17] V. Varadan, V. Varadan y H. Subramanian, «Fabrication, characterization and testing of wireless MEMS-IDT based microaccelerometers,» *Sensor Actuat A-Phys*, vol. 90, pp. 7-19, 2001.
- [18] M. Bao, *Micromechanical transducers: pressure sensores, accelerometers and gyroscopes*, Amsterdam: Elsevier, 2000.
- [19] L. Rayleigh, «On waves propagated along the plane surface of an elastic solid,» *Proc. London Math. Soc.*, vol. 17, n° 1, pp. 4-11, 1885.
- [20] D. Morgan, *Surface acoustic wave filters with applications to electronic communications and signal precessing*, UK: Academic Press, 2007.
- [21] R. White y F. Voltmer, «Direct piezoelectric coupling to surface elastic waves,» *Appl. Phys. Lett.*, vol. 7, n° 12, pp. 314-316, 1965.
- [22] B. Auld, *Acoustic field and waves in solids. Volume 1*, USA: Krieger Publishing Company, 1990.
- [23] B. Auld, *Acoustic Fields and waves in solids. Volume II*, USA: Krieger Publishing Company, 1990.
- [24] D. Morgan, «A history of surface acoustic wave devices,» *International Journal of High Speed Electronics and Systems*, vol. 10, n° 3, pp. 553-602, 2000.
- [25] R. Williamson, «Case studies of successful surface acoustic wave devices, Ultrasonics IEEE,» *IEEE Ultrason. Symposium Proc.*, pp. 460-468, 1977.
- [26] R. White, «Surface elastic waves,» *Proc. IEEE*, vol. 58, n° 8, pp. 1238-1272, 1970.

- [27] K. Ingebrigtsen, «Surface waves in piezoelectrics,» *J. Appl. Phys.*, vol. 40, n° 7, pp. 2681-2686, 1969.
- [28] C. Hartmann y B. Secrest, «End effects in interdigital surface wave transducers,» *IEEE Ultrason. Symp.*, pp. 413-416, 1972.
- [29] R. Peach, «A general approach to the electrostatic problem of the SAW interdigital transducer,» *IEEE Trans.*, SU-28, n° 2, pp. 96-105, 1981.
- [30] R. Milsom, N. Reilley y M. Redwood, «Analysis of generation and detection of surface and bulk acoustic waves by interdigital transducers,» *IEEE Trans.*, SU-24, n° 3, pp. 147-166, 1977.
- [31] D. Qiao, W. Liu y P. Smith, «General Green's functions for SAW device analysis,» *IEEE T Ultrason Ferr*, vol. 46, n° 5, pp. 1242-1253, 1999.
- [32] D. Morgan, «Quasi-static analysis of generalized SAW transducers using the Green's function method,» *IEEE T Sonics Ultrason*, SU-27, n° 3, pp. 111-123, 1980.
- [33] J. Campbell y W. Jones, «A method for estimating optimal crystal cuts and propagation directions for excitation of piezoelectric surface waves,» *IEEE T Sonics Ultrason*, SU-15, n° 4, pp. 209-217, 1968.
- [34] [En línea]. Available: [jornbr.home.xs4all.nl/plotreader/](http://jornbr.home.xs4all.nl/plotreader/). [Último acceso: marzo 2014].
- [35] J. Campbell y W. Jones, «Propagation of surface waves at the boundary between a piezoelectric crystal and a fluid medium,» *IEEE T Sonics Ultrason*, SU-17, n° 2, pp. 71-76, 1970.
- [36] M. E. Hakiki, O. Elmazria, M. Assouar, V. Moret, L. Brizoual, M. Vanecek y P. Alnot, «ZnO/AlN/diamond layered structure for SAW devices combining high velocity and high electromechanical coupling coefficient,» *Diam Relat Mater*, vol. 14, pp. 1175-1178, 2005.
- [37] E. Dogheche, D. Remiens, S. Shikata, A. Hachigo y H. Nakahata, «High-frequency surface acoustic wave devices based on LiNbO<sub>3</sub>/diamond multilayered structure,» *Appl Phys Lett*, vol. 87, p. 213503, 2005.
- [38] F. Nakahata y F. Satoshi, «Theoretical study on SAW characteristics of layered structures including a diamond layer,» *IEEE T Ultrason Ferr*, vol. 42, n° 2, pp. 362-375, 1995.
- [39] S. Shikata, A. Hachigo, H. Nakahata y M. Narita, «Simulation of characteristics of a LiNbO<sub>3</sub>/Diamond surface acoustic wave,» *IEEE T Ultrason Ferr*, vol. 51, n° 10, pp. 1308-1313, 2004.
- [40] S. Joshi y R. White, «Excitation and detection of surface elastic waves in piezoelectric crystals,» *J Acoust Soc Amer*, vol. 46, n° 1, pp. 17-27, 1969.
- [41] H. Engan, «Excitation and detection of surface elastic waves by spatial harmonics of interdigital transducers,» *IEEE T Electron Dev*, ED-16, pp. 1014-1017, 1969.
- [42] S. Datta, B. Hunsinger y D. Malocha, «A generalized model for periodic transducers with arbitrary voltages,» *IEEE T Sonics Ultrason*, SU-26, pp. 235-242, 1979.
- [43] H. Engan, «Surface acoustic wave multielectrode transducers,» *T Sonics Ultrason*, SU-22, p. 395, 1975.
- [44] S. V. Biryukov y V. G. Polevoi, «The electrostatic problem for the SAW interdigital transducers in an external electric field. Part 1: A general solution for a limited number of electrodes,» *IEEE T Ultrason Ferr*, vol. 43, n° 6, pp. 1150-1159, 1996.
- [45] K.-y. Hashimoto, *Surface acoustic wave devices in telecommunications: Modelling and simulation*, Germany: Springer, 2000.
- [46] A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, McGraw-Hill, 1953.
- [47] C. Hartmann, «Approximate closed-form expressions for transducer capacitance, transducer coupling, piezoelectric velocity shift and piezoelectric refelctivity,» *IEEE Ultrason Symp*, pp. 305-307, 1995.
- [48] A. Papoulis, *The Fourier integral and its applications*, McGraw-Hill, 1962.
- [49] A. Nalamwar y M. Epstein, «Immitance characterisation of acoustic surface wave transducers,» *Proc. IEEE*, vol. 60, pp. 336-337, 1972.
- [50] W. Mason, *Physical Acoustics*, vol. 1A, Academic Press, 1964.
- [51] W. Smith, H. Gerard, J. Collins, T. Reeder y H. Shaw, «Analysis of interdigital surface wave transducers by use of an equivalent circuit model,» *IEEE T Microw Theory*, MTT-17, n° 11, pp. 856-864, 1969.
- [52] R. Li y J. Melngailis, «The influence of stored energy at step discontinuities on the behavior of surface-



- save gratings,» *IEEE T Sonics Ultrason*, SU-22, pp. 189-198, 1975.
- [53] T. Kojima y K. Shibayama, «An analysis of an equivalent circuit model for an interdigital surface-acoustic-wave transducer,» *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 27, n° suppl. 27-1, pp. 163-165, 1975.
- [54] C. Campbell, *Surface acoustic wave devices for mobile and wireless communications*, San Diego: Academic, 1998.
- [55] R. Tancrè y M. Holland, «Acoustic surface wave filters,» *IEEE Proc.*, vol. 59, n° 3, pp. 392-409, 1971.
- [56] G. Matthaei, «Acoustic surface-wave transversal filters,» *IEEE T Circuits Theory*, CT-20, n° 5, pp. 459-470, 1973.
- [57] C. Hartmann, D. Bell y R. Rosenfeld, «Impulse model design of acoustic surface-wave filters,» *IEEE T Sonics Ultrason*, SU-20, n° 2, pp. 80-93, 1973.
- [58] G. Tobolka, «Mixed matrix representation of SAW transducers,» *IEEE T Sonics Ultrason.*, SU-26, n° 6, pp. 426-428, 1979.
- [59] D. Morgan, «Cascading formulas for identical transducer P-matrices,» *IEEE T Ultrason ferr*, vol. 43, pp. 985-987, 1996.
- [60] J. Kuypers, D. Eisele y L. Reindl, «The K-model Green's function based analysis of surface acoustic wave devices,» *IEEE Ultrason Symp*, pp. 1550-1555, 2005.
- [61] J. Pierce, «Coupling-of-modes propagation,» *J. appl. Phys.*, vol. 25, n° 2, pp. 179-183, 1954.
- [62] C. Ruppel, W. Ruile, G. Scholl, K. Wagner y O. Männer, «Review of models for low-loss filter design and applications,» *Ultrason. Symp.*, pp. 313-324, 1994.
- [63] Y. Suzuki y M. Takeuchi, «Coupled mode theory of SAW for periodic structure,» *Electr. Commun. Jpn. Part 3*, vol. 76, n° 6, pp. 87-98, 1993.
- [64] K.-y. Hashimoto, «Simulation of surface acoustic wave devices,» *Jpn J Appl Phys*, vol. 45, n° 5B, pp. 4423-4428, 2006.
- [65] Y. Suzuki, H. Shimizu, M. Takeuchi, K. Nakamura y A. Yamada, «Some studies on SAW resonators and multiple-mode filters,» *IEEE Proc. Ultrason. Symp.*, pp. 297-302, 1976.
- [66] H. Haus, «Modes in SAW grating resonators,» *J. Appl. Phys.*, vol. 48, n° 12, pp. 4955-4961, 1977.
- [67] T. Pastureauud, «Evaluation of the P-matrix parameters frequency variations using FEM/BEM analysis,» *IEEE Ultrason Symp*, pp. 80-84, 2004.
- [68] W. Luo, Q. Fu, J. Wang, Y. Wang y D. Zhou, «Theoretical analysis of wireless passive impedance loaded SAW sensors,» *IEEE Sens J*, vol. 9, n° 12, pp. 1778-1783, 2009.
- [69] M. Solal, T. Abboud, S. Ballandras, S. Chamaly, V. Laude, R. Lardat, T. Pasteureaud, W. Ribbe, W. Steichen y P. Ventura, «FEM/BEM analysis for SAW devices».
- [70] N. Finger, G. Kovacs, J. Schöberl y U. Langer, «Accurate FEM/BEM simulation of surface acoustic wave filters,» *IEEE Ultrason Symp*, pp. 1680-1685, 2003.
- [71] V. Laude, A. Reinhardt, S. Ballandras y A. Khelif, «Fast FEM/BEM computation of SAW harmonic admittance and slowness curves,» *IEEE Ultrason Symp*, pp. 445-448, 2004.
- [72] D. Chen y H. Haus, «Analysis of metal strip SAW gratings and transducers,» *IEEE T Sonics Ultrason*, SU-32, n° 3, pp. 385-408, 1985.
- [73] J.O. Guerra-Pulido y P.R. Pérez-Alcázar, «Generalized relationships between P and Y matrices for analysis of SAW devices,» *Manuscrito Original*, 2013.
- [74] B. Abbot, C. Hartmann y D. Malocha, «A coupling-of-modes analysis of chirped transducers containing reflective electrode geometries,» *IEEE Ultrason Symp*, pp. 129-134, 1989.
- [75] A. Warner, M. Onoe y G. Coquin, «Determination of elastic and piezoelectric constants for crystals in class (3m),» *J Acoust Soc Am*, vol. 42, n° 6, pp. 1223-1231, 1967.
- [76] R. Smith y F. Welsh, «Temperature dependence of the elastic, piezoelectric, and dielectric constants of lithium tantalate and lithium niobate,» *J Appl Phys*, vol. 42, pp. 2219-2230, 1971.
- [77] R. Damle, «Elastic constants of Lithium niobate,» *J Phys D: Appl Phys*, vol. 25, pp. 1091-1095, 1992.
- [78] R. Weis y T. Gaylord, «Lithium niobate: summary of physical properties and crystal structure,» *Appl*

- Phys A*, vol. 37, pp. 191-203, 1985.
- [79] H. Ledbetter, H. Ogi y N. Nakamura, «Elastic, anelastic, piezoelectric coefficients of monocrystal lithium niobate,» *Mech Mater*, vol. 36, pp. 941-947, 2004.
- [80] H. Ogi, Y. Kawasaki, M. Hirao y H. Ledbetter, «Acoustic spectroscopy of lithium niobate: elastic and piezoelectric coefficients,» *J appl phys*, vol. 92, pp. 2451-2456, 2002.
- [81] [www.memscap.com](http://www.memscap.com).
- [82] C. Zhang, J. Caron y J. Vetelino, «The Bluestein-Gulyaev wave liquid sensing application,» *Sens Actuat B-Chem*, vol. 76, pp. 64-68, 2001.
- [83] C. Tseng, «Comments on "Excitation of elastic surface waves by spatial harmonics of interdigital transducers",» *IEEE Trans Electron Devices*, p. 945, 1970.
- [84] H. Engan, «Surface acoustic wave multielectrode transducers,» *IEEE T Sonics Ultrason*, SU-22, n° 6, pp. 395-401, 1975.
- [85] C. Campbell, «An empirical method for obtaining the harmonic response coefficients of a SAW interdigital transducers,» *IEEE Ultrason Symp*, pp. 283-287, 2002.
- [86] [www.sawcomponents.de](http://www.sawcomponents.de).
- [87] H. Klug y L. Alexander, X-ray diffraction procedures for polycrystalline and amorphous materials, New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [88] B. Warren, X-ray diffraction, New York: Dover Publications, 1990.
- [89] N. Jalil y K. Laxminarayana, «A review of atomic force microscopy imaging systems: application to molecular metrology and biological sciences,» *Mechatronics*, vol. 14, pp. 907-945, 2004.
- [90] V. Bellitto, Atomic force microscopy - imaging, measuring and manipulating surface at the atomic scale, Published online: Intech, 2012.
- [91] D. Pozar, Microwave engineering, New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [92] D. Frickey, «Conversion between S, Z, Y, h, ABCD, and T parameters which are valid for complex source and load impedence,» *IEEE T Microw Theory*, vol. 42, n° 2, pp. 205-211, 1994.
- [93] R. Marks y D. Williams, «Comments on "Conversion between S, Z, Y, h, ABCD, and T parameters which are valid for complex source and load impedances",» *IEEE T Microw Theory*, vol. 43, n° 4, pp. 914-915, 1995.
- [94] H. Hsu, Análisis de Fourier, Ciudad de México: Prentice Hall, 1998.
- [95] K. Clarke y D. Hess, Communication circuits: Analysis and design, Addison-Wesley Publishing Company, 1971.
- [96] S. Cotter, Complete wireless design, New York: Mc-Graw Hill, 2008.
- [97] Minicircuits Inc., [En línea]. Available: [www.minicircuits.com](http://www.minicircuits.com). [Último acceso: 14 Mayo 2013].
- [98] L. Nagel, Spice 2: A computer program to simulate semiconductor circuits, Berkley: Electronics Research Laboratory - University of California, 1975.
- [99] A. Newton, D. Pederson y A. Sangiovanni-Vicentelli, Spice 3 Version 3f3 User's Manual, Berkley: Department of Electrical Engineering and Computer Sciences - University of California, 1993.
- [100] P. Tuinenga, SPICE: A guide to circuit simulation & analysis using Pspice,, Englewoods Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- [101] G. Massobrio y P. Antognetti, Semiconductor device modeling with SPICE, New York: McGraw-Hill, 1993.
- [102] H. Gummel y H. Poon, «An integral charge contro model of bipolar transistors,» *Bell Syst. Tech. J.*, May-June, pp. 827-852, 1970.
- [103] J. Ebers y J. Moll, «Large-Signal behavior of Junction Transistors,» *IRE Proc*, vol. 42, n° 12, pp. 1761-1772, 1954.
- [104] B. Fornberg, A practical guide to pseudospectral methods, Cambridge University Press, 1996.
- [105] A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri, Numerical mathematics, New York: Springer, 2000.
- [106] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling y B. Flannery, Recipes in C: The art of scientific computing,

New York: Cambridge University Press, 1992.

- [107] R. Best, *Phase-Locked Loops*, New York: McGraw-Hill, 2003.
- [108] S. Gupta, «Phase-Locked Loop,» *IEEE Proc*, vol. 63, nº 2, pp. 291-306, 1975.
- [109] J. Wait, *Introduction to operational amplifier theory and applications*, New York: McGraw-Hill, 1992.
- [110] Philips Semiconductors, «NE564 datasheet,» 31 Aug 1994. [En línea]. Available: [www.futurelec.com](http://www.futurelec.com). [Último acceso: 20 Jun 2013].
- [111] N. Maluf y K. Williams, *An introduction to microelectromechanical systems engineering*, Boston: Artech House Inc., 2004.
- [112] M. Madou, *Fundamentals of microfabrication*, New York: CRC Press, 1997.
- [113] J. Judy, «Microelectromechanical systems (MEMS): fabrication, design and applications,» *Smart Mater. Struct.*, vol. 10, pp. 1115-1134, 2001.
- [114] V. Kempe, *inertial MEMS*, Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [115] W. Thompson, *Theory of vibration with applications*, USA: Prentice Hall, 1993.
- [116] I. Kovacic y M. Brennan, *The duffing equation: nonlinear oscillators and their behavior*, UK: John Wiley & Sons, 2011.
- [117] S. Han, H. Benaroya y T. Wei, «Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories,» *J. Sound Vib.*, vol. 225, nº 5, pp. 935-988, 1999.
- [118] S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.
- [119] A. Beck y C. da Silva Jr, «Timoshenko versus Euler beam theory: pitfalls of a deterministic approach,» *Struct. Saf.*, vol. 33, nº 1, pp. 19-25, 2011.
- [120] H. Palmer, «The capacitance of parallel plate capacitor by the Schwartz-Christoffel transformation,» *T. AIEE*, vol. 56, nº 3, pp. 363-366, 1937.
- [121] R. Elliott, *Electromagnetics*, New York: McGraw Hill, 1966.
- [122] H. Yang, *microgyroscope and microdynamics*, PhD Dissertartion, 2000.
- [123] W. Chang, «Analytical IC metal-line capacitance formulas,» *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 24, nº 9, pp. 608-611, 1976.
- [124] W. Chang, «Corrections to "Analytical IC metal-line capacitance formulas",» *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 25, nº 8, p. 712, 1977.
- [125] T. Sakurai y K. Tamaru, «Simple formulas for two and three dimensional capacitances,» *IEEE Trans. Electron. Devices*, ED-30, nº 2, pp. 183-185, 1983.
- [126] C. Yuan y T. Trick, «A simple formula for the estimation of the capacitance of two dimensional interconnects in VLSI circuits,» *IEEE Electron Device Lett.*, EDL-3, nº 12, pp. 391-393, 1982.
- [127] N. van der Meijs y J. Fokkema, «VLSI circuit reconstruction from mask topology,» *Integration*, vol. 2, pp. 85-119, 1984.
- [128] V. Leus y D. Elata, «Fringing field effect in electrostatic actuators,» Israel Institute of Technology, 2004.
- [129] M. Bao, H. Yang, H. Yin y S. Shen, «Effects of electrostatic forces generated by the driving signal on capacitive sensing devices,» *Sensor Actuat. A-Phys*, vol. 84, pp. 213-219, 2000.
- [130] L. Castañer y S. Senturia, «Speed-energy optimization of electrostatic actuators based on pull-in,» *IEEE J. Microelectromech. Syst.*, vol. 8, nº 3, pp. 290-298, 1999.
- [131] L. Castañer, J. Pons, R. Nadal-Guardia y A. Rodríguez, «Analysis of the extended operation range of electrostatic actuators by current-pulse drive,» *Sensor Actuat. A-Phys*, vol. 90, pp. 181-190, 2001.
- [132] R. Nadal-Guardia, A. Dehé, R. Aigner y L. Castañer, «Current drive methods to extend the range of travel of electrostatic microactuators beyond the voltage pull-in point,» *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 11, nº 3, pp. 255-263, 2002.
- [133] R. Nadal-Guardia, A. Brosa y A. Dehé, «Constant charge operation of capacitor sensors based on switched current circuits,» *IEEE Sensors J.*, vol. 3, nº 6, pp. 835-842, 2003].
- [134] M. Bao y H. Yang, «Squeeze film air damping in MEMS,» *Sensor Actuat A-Phys*, vol. 136, pp. 3-27,

2007.

- [135] T. Gabrielson, «Mechanical-thermal noise in micromachined acoustic and vibration sensors,» *IEEE T Electron Dev.*, vol. 40, n° 5, pp. 903-909, 1993.
- [136] MEMSCAP Inc., «MEMSCAP,» [En línea]. Available: [www.memscap.com](http://www.memscap.com). [Último acceso: 25 julio 2013].
- [137] A. Cowen, B. Hardy, R. Mahadevan y S. Wilcenki, «PolyMUMPs design handbook,» 2011. [En línea]. Available: [www.memscap.com](http://www.memscap.com). [Último acceso: 25 julio 2013].
- [138] K. Morton y D. Mayers, Numerical solution of partial differential equations, Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [139] S. Rao, Applied numerical methods for engineers and scientists, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall Inc., 2002.
- [140] J. Proakis y D. Manolakis, Digital signal processing: principles, algorithms and applications, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall Inc., 1996.
- [141] «Coventor,» [En línea]. Available: [www.coventor.com](http://www.coventor.com). [Último acceso: 06 Agosto 2013].
- [142] Polytec Inc., [En línea]. Available: [www.polytec.com](http://www.polytec.com). [Último acceso: 06 septiembre 2013].
- [143] Polytec, «MSA-500 Microsystem analyzer,» [En línea]. Available: [www.polytec.com](http://www.polytec.com). [Último acceso: 06 Septiembre 2013].
- [144] R. White, «Surface acoustic wave sensors,» *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 490-494, 1985.
- [145] L. Reindl, G. Scholl, T. Ostertag, H. Scherr, U. Wolff y F. Schmidt, «Theory and application of passive SAW radio transponders as sensors,» *IEEE T Ultrason Ferr*, vol. 45, n° 5, pp. 1281-1292, 1998.
- [146] T. Li, Z. Wu, H. Hu y L. Zheng, «Pressure and temperature microsensor based on surface acoustic wave,» *Electron Lett*, vol. 45, n° 6, 2009.
- [147] G. Schimetta, F. Dollinger y R. Weigel, «A wireless preassure measurement system using a SAW hybrid sensor,» *IEEE T Microw Theory*, vol. 48, n° 12, pp. 2730-2735, 2000.
- [148] M. Jungwirth, H. Scherr y R. Weigel, «Micromechanical precision pressure sensor incorporating SAW delay lines,» *Acta Mech*, vol. 158, pp. 227-252, 2002.
- [149] «Sensor: All sense,» [En línea]. Available: [www.sensor.com](http://www.sensor.com). [Último acceso: 10 Septiembre 2013].
- [150] T. Reeder y D. Cullen, «Surface acoustic wave pressure and temperature sensors,» *IEEE Proc*, vol. 64, n° 5, pp. 754-756, 1976.
- [151] X. Bao, W. Burkhard, V. Varadan y V. Varadan, «SAW temperature sensor and remote reading system,» *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 583-585, 1987.
- [152] K. Jose, G. Sunil, V. Varadan y V. Varadan, «Wireless IDT ice sensor,» *IEEE MTT-S Digest*, pp. 655-658, 2002.
- [153] S. Joo y R. Brown, «Chemical sensors with integrated electronics,» *Chem Rev*, vol. 108, pp. 638-651, 2008.
- [154] S. Ahmadi, C. Korman, M. Zaghoul y K. Huang, «CMOS integrated gas sensor chip using SAW technology,» *IEEE Proceedings of the International Symposium on circuits and systems*, pp. IV-848-IV-851, 2003.
- [155] W. Wang, S. He, S. Li y Y. Pan, «High frequency stability oscillator for surface acoustic wave based gas sensor,» *Smart Mater Struct*, vol. 15, pp. 1525-1530, 2006.
- [156] P. Hartemann y P. Meunier, «Tensioned or flexured SAW accelerometers,» *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 291-294, 1983.
- [157] P. Meunier y P. Hartemann, «Cantilever beamed SAW accelerometers,» *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 299-302, 1982.
- [158] D. Bower, M. Cracknell y A. Harrison, «A high linearity SAW accelerometer,» *IEEE 41st Annual Freq Control Symposium*, pp. 544-547, 1987.
- [159] C. Di Natale, F. Davide, A. D'Amico, G. Saggio, P. Verardi y E. Verona, «Multicomponent analysis of a triaxial accelerometer based on surface acoustic wave sensors,» *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 495-498, 1994.

- [160] J. Filipiak y G. Steczko, «Seismic vibration sensor with acoustic surface wave,» de *Modeling and measurement methods for acoustic waves and for acoustic microdevices*, Intech, 2013, pp. 443-478.
- [161] K. Jose, W. Suh, P. Xavier, V. Varadan y V. Varadan, «Surface acoustic wave MEMS gyroscope,» *Wave motion*, vol. 36, pp. 367-381, 2002.
- [162] V. Varadan, W. Suh, P. Xavier, K. Jose y V. Varadan, «Design and development of a MEMS-IDT gyroscope,» *Smart Mater Struct*, vol. 9, pp. 898-905, 2000.
- [163] Q. Liu y X. Wu, «Design of a novel MEMS IDT Dual axes surface acoustic wave gyroscope,» *IEEE Proc Conference on Nano/Micro Engineered and molecular systems*, pp. 817-820, 2007.
- [164] J. Oh, B. Choi y S. Lee, «SAW based passive sensor with passive signal conditioning using MEMS A/D converter,» *Sensor Actuat A- Phys*, vol. 141, pp. 631-639, 2008.
- [165] L. Brekhovskikh, *Waves in layered media*, New York: Academic Press, 1980.
- [166] L. Brekhovskikh y O. Godin, *Acoustics of layered media I (Series on wave phenomena)*, Springer, 1990.
- [167] J. Guerra-Pulido y P. Pérez-Alcázar, «Relationship between acceleration and the scattering matrix in a SAW-MEMS accelerometer,» *IEEE T Ultrason Ferr*, vol. 58, n° 7, pp. 1460-1467, 2011.
- [168] C. Zhang, J. Caron y J. Vetelino, «The Bleustein-Gulyaev wave for liquid sensing applications,» *Sensor Actuat B-Chem*, vol. 76, pp. 64-68, 2001.
- [169] J. Gualteri, J. Kosinski y A. Ballato, «Piezoelectric materials for acoustic wave applications,» *IEEE T Ultrason Ferr*, vol. 41, n° 1, pp. 53-59, 1994.
- [170] P. Hoel, *Introduction to mathematical statistics*, New York, NY: Wiley, 1966.
- [171] C. Comi, A. Corigliano, G. Langfelder, A. Longoni, A. Tocchio y B. Simoni, «A resonant microaccelerometer with high sensitivity operating in an oscillating circuit,» *J Microelectromech S*, vol. 19, n° 5, pp. 1140-1152, 2010.
- [172] M. Hautefeuille, J. López-Cortés, M. Ortega-Alfaro, M. Carreón-Castro y V. Velázquez, «Note: Fabrication of a simple versatile micro-positioning setup for automated soft lithography,» *Rev Sci Instrum*, vol. 82, p. 116104, 2011.
- [173] [En línea]. Available: [www.condumex.com.mx](http://www.condumex.com.mx). [Último acceso: enero 2014].