DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD Y DISEÑO DE ESPECIFICACIONES

# CARTAS DE CONTROL

M. en I. JOSE ANTONIO MENDOZA M.

Diciembre, 1982

## I - NATURALEZA DEL PROBLEMA

Se llama "calidad", desde el punto de vista estadístico, a la característica medible o contable de un producto, por ejemplo al diámetro de una varilla, a la resistencia de un concreto, etc, entre las contables, número de defectuosos (o porcentaje) de tabiques en un lote de estos. La "calidad" de todo producto manufacturado está siempre sujeta a cierta cantidad de variación; esta variación puede deberse a dos tipos diferentes de causas: unas llamadas "causas asignables", cuyos efectos en general son relativamente grandes y pueden atribuirse o asignarse a ciertos factores específicos, tales como falta de adiestramiento de los operadores, defectos en la maquinaria o en las materias primas, etc; las otras son un conjunto de causas ignoradas por nosotros, pero el efecto de cada una de ellas es muy pequeño, estas son las llamadas "causas aleatorias" o casuales. La variación de la calidad debida a "causas aleatorias" es inevitable pero la cantidad y el carácter de dicha variación puede predecirse por medio de las teorías probabilísticas, en términos generales.

Cuando en un procesocoperatorio las únicas causas de variación de calidad son las aleatorias, se dice que está "bajo control estadístico" y si intervienen una o más causas asignables, se dice que está "fuera de control estadístico".

Para establecer el control estadístico de calidad de un producto, debería hacerse uso de todas las técnicas desarrolladas en la es_

b) Las técnicas de las cartas de control son aplicables en cualquier etapa de la producción de un proyecto.

c) Generalmente no se encuentra un estado de control riguroso.

d) Debe establecerse un estado de control a un nivel satisfactorio abajo de la máxima eficiencia que puede obtenerse en la operación.

e) La calidad es intrinseca al producto y no puede introducirse a él por medio de su inspección.

## II - CARTAS DE CONTROL

La característica fundamental de la técnica estadística llamada "carta de control" es la de inferir sobre el proceso de producción en base a muestras tomadas de dicha producción. A trávés de dicha carta podremos conocer cual es el estado de control; lograr control a un nivel apropiado y juzgar si se ha logrado o no el nivel deseado.

Para establecer carta de control de una característica, sea medible o contable se supone que sólo actúan causas aleatorias y se señalan regiones de aceptación y de rechazo para dicha característi_

ca. Si los valores calculados a partir de muestras caen en la región de aceptación, se dice que los puntos están bajo control y en caso contrario que están fuera de control.

La zona de rechazo se fija en términos de la probabilidad de rechazar la hipótesis, de que sólo actúan causas aleatorias, cuando es verdadera, es decir, si todos los puntos caen en la zona de aceptación, no significa que no existen causas asignables sino que se tiene la probabilidad, fijada de antemano, de que las únicas causas que operaron fueron casuales.

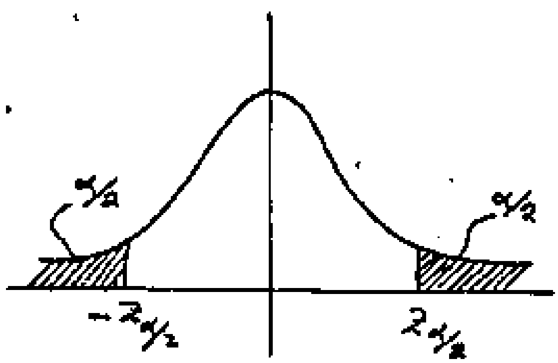
II.1 Cartas de Control para Variables.

Cuando tratamos con características medibles, es costumbre ejercer control sobre la calidad promedio de un proceso, así como sobre la variabilidad; para la primera, se traza la llamada "carta de control para medias" o simplemente "carta $\bar{X}$"; para la variabilidad se trazan las llamadas "carta R" y "carta $\sigma$" si se toma el rango o la desviación estándar de las muestras respectivamente; como estimadores de la desviación estándar de la población.

II.1.a) Carta $\bar{X}$

Si suponemos que la población (formada por los resultados obtenidos de las repeticiones de un proceso operatorio) está normalmen

distribuida, podemos asegurar con una probabilidad de $1-\alpha$ que la media de una muestra aleatoria de tamaño n estará dentro de los límites $\mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $\mu$ y $\sigma$ son respectivamente, media y desviación estándar de la población y $Z_{\alpha/2}$ es la abscisa correspondiente a una área de probabilidades de $\alpha/2$ en una distribución normal estándar. Si la población no está normalmente distribuida, pero la muestra es grande o se ejecuta el muestreo con reemplazo, las afirmaciones anteriores siguen siendo válidas.

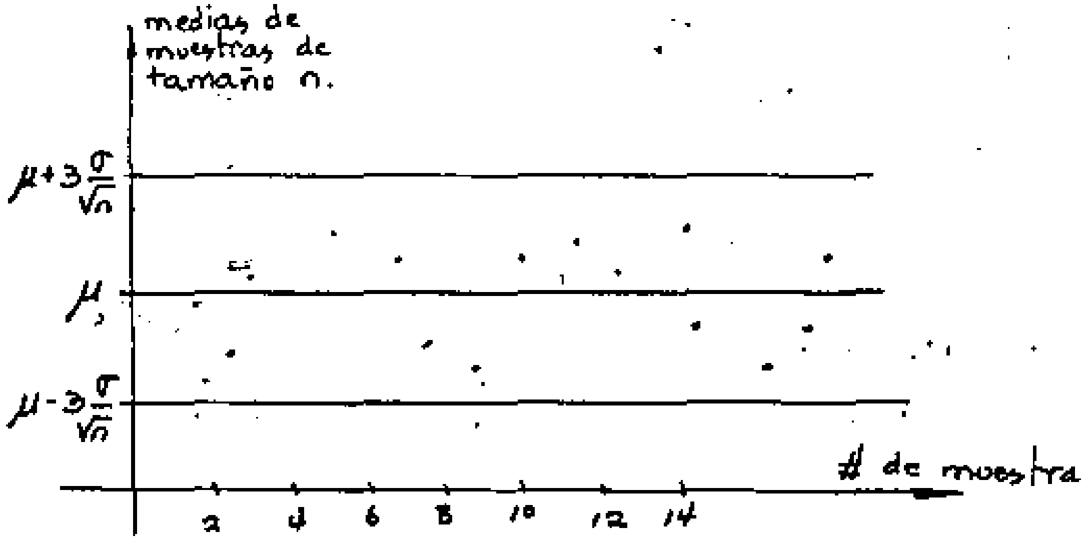



En la práctica se acostumbra considerar una probabilidad (intervalo de confianza) de 99.73%, a la que corresponde una $Z_{\alpha/2} = 3$.

En la "Carta $\bar{X}$, la zona de aceptación, con probabilidad de 99.73%, tendrá una línea central $\mu$ , un límite superior de control $\mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y un límite inferior de control $\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . El factor $3/\sqrt{n}$ se encuentra tabulado para diferentes valores de n y se representa por A, así los límites de control son $\mu \pm A\sigma$ (ver tabla # 1).

Para cada muestra aleatoria de tamaño n extraida de la población se calcula su media $\bar{X}$ mediante la expresión $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ .

Si el proceso está "bajo control", se espera que sólo 27 de 10 000 muestras tendrán una $\bar{X}$ que caerá fuera de la zona aceptación.




Generalmente $\mu$ y $\sigma$ son desconocidas, por lo que las sustituiremos por estimadores de máxima verosimilitud como son la media de las medias de las muestras $\bar{\bar{X}}$ y la media de las desviaciones estándar de las muestras $\bar{S}$, respectivamente.

Si se toman k muestras, en donde es aconsejable que $k > 25$.

$\bar{\bar{X}} = \dfrac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_k}{k}$ ; $\bar{\bar{X}}$ es un estimador insesgado de $\mu$ donde $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots\dots\dots, \bar{X}_k$ son las medias de la primera, segunda...Késima muestra respectivamente.

si el tamaño de las muestras es el mismo: $\bar{S} = \dfrac{S_1 + S_2 + \dots + S_k}{k}$

Las desviaciones estándar $S_1, S_2, \dots\dots\dots, S_k$ de las muestras se obtienen de :

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}} \qquad j=1,2,\ldots k$$

S es un estimador sesgado de $\sigma$ y para evitar el sesgo debe multiplicarse por $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ quedando $\sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$ puede entonces decirse que: $\sigma = \bar{S}/C_2$ donde $1/C_2$ es un factor que depende del tamaño n de la muestra y que se encuentra tabulado (ver tabla 1).

Con estos estimadores los límites de contro son: $\bar{\bar{X}} \pm \frac{3}{\sqrt{n}\, C_2} \bar{S}$

Se acostumbra llamar con $A_1$ al factor $\frac{3}{\sqrt{n}\, C_2}$ que también está tabulado para diferentes valores de n (tabla 1) los límites son entonces, $\bar{\bar{X}} \pm A_1 \bar{S}$

Puede sustituirse $\sigma$ por otro estimador basado en el "rango" R de las muestras, que se define como la diferencia entre el máximo valor de los elementos de la muestra y el mínimo valor de los mismos. Si se eligen k muestras, se calculan los rangos de ellas y se obtiene la media de los rangos $\bar{R}$ con la expresión

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_k}{k} = \frac{\sum^{k} R_i}{k}$$

El estimador de $\sigma$ basado en rangos tiene un sesgo mayor que el basado en desviaciones estándar, pero éstas son más laboriosas de calcular que aquéllos, por lo que a menudo se les da preferencia a los rangos.

Existen tablas en donde se encuentra la relación $\overline{R}/\sigma$ que se representa por $d_2$, para diferentes tamaños de la muestra, de aquí que $\sigma = \overline{R}/d_2$ y los límites de control para la "carta $\overline{X}$ serán $\overline{\overline{X}} \pm \frac{3\overline{R}}{d_2\sqrt{n}}$. El factor $\frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ que es llamado $A_2$ también está tabulado (tabla 1) quedando los límites:

$$\overline{\overline{X}} \pm A_2 \overline{R}$$

Resumen: Los límites de contro para la "Carta $\overline{X}$ son:

$\mu \pm A\sigma$ cuando $\mu$ y $\sigma$ son conocidos

$\overline{\overline{X}} \pm A_1\overline{S}$ cuando $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{S}$ son estimadores de $\mu$ y $\sigma$ respectivamente,

$\overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R}$ cuando $\mu$ y $\sigma$ son estimados por $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{R}$ respectivamente.

Si el proceso no está bajo control (indicado por puntos fuera de los límites establecidos), deben revisarse los límites calculados para obtener un proceso controlado. Una regla práctica para el cálculo de los nuevos límites es eliminar a los puntos fuera de control y con los restantes calcular la nueva $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{R}$ ó $\sigma$ según el caso; este procedimiento debe continuarse hasta que todos los puntos caigan dentro de los límites de control. Lo anterior, aunque no tiene una justificación teórica, se basa en que la situación de dichos

puntos puede deberse a una causa asignable. Los límites calculados en base a estimadores son llamados naturales, pero podemos calcular otros límites, basados en datos específicos, en ese caso usaremos las fórmulas correspondientes a $\mu$ y $\sigma$ conocidas y en ellas sustituiremos los valores especificados.

II.1.b) Carta S y Carta R

Los rangos R y las desviaciones estándar S de las muestras son variables aleatorias, tales que aunque sus poblaciones no están normalmente distribuidas se ha encontrado que casi la totalidad de ellas se encuentra en el intervalo limitado por la media de dichas poblaciones más y menos, tres veces la desviación estándar de las poblaciones de dichas variables aleatorias.

De $\sigma = \bar{S}/C_2$ obtenido anteriormente llegamos a que la media de las desviaciones es $\bar{S} = \sigma C_2$

La desviación estándar de S está dada por

$$\sigma_S = \sqrt{2(n-1) - 2nC_2^2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

Así los límites de control para la Carta S, que son $\bar{S} \pm 3\sigma_S$ pueden expresarse

$$\sigma\left[C_2 \pm \frac{3}{\sqrt{2n}}\sqrt{2(n-1) - 2nC_2^2}\right]$$

Los factores de $\sigma$ son llamados $B_2$ (considerando el signo +), y $B_1$ (considerando el signo -), que dependen sólo de n y se encuentran tabulados.

Por lo tanto los límites para una Carta S, cuando la desviación es_ tándar $\sigma$ de la población original es conocida, serán:

Límite superior $\bar{S}+B_2\sigma$

Límite inferior $\bar{S}-B_1\sigma$

Como en la práctica no es fácil que pueda conocerse $\sigma$ se sustituye por su estimador $\bar{S}/C_2$ quedando entonces los límites:

$$\bar{S}\left[1 \pm \frac{3}{c_2\sqrt{2n}}\sqrt{2(n-1)-2n\,c_2^2}\right]$$

donde los factores de $\bar{S}$, llamados $B_4$ (considerando signo +) y $B_3$ (considerando signo -), depende sólo del tamaño de la muestra y se_ encuentran tabulados (tabla 1). Luego los límites serán:

Límite superior $\bar{S}+B_4\ \bar{S}$

Límite inferior $\bar{S}-B_3\ \bar{S}$

La línea central es $C_2\sigma$ cuando se conoce $\sigma$, en caso de ser des conocida $\sigma$, la línea central es $\bar{S}$.

Los límites de control para la Carta R se obtienen en forma semejan te. Se había ya obtenido que $\bar{R} = \sigma\, d_2$. Puede verse que la desvia ción de R, $\sigma_R$ es $\sigma_R = d_3\sigma$ donde $d_3$ depende de n; luego los límites

serán $\sigma(d_2 \pm d_3)$.

Designando con $D_2$ a la suma $d_2 + d_3$ y con $D_1$ a la diferencia $d_2 - d_3$ tendremos

Límite superior $D_2 \sigma$

Límite inferior $D_1 \sigma$

Sustituyendo a $\sigma$ por su estimador $\sigma = \bar{R}/d_2$ se llega a $\bar{R}\left[1 \pm \frac{d_3}{d_2}\right]$
y si $D_4 = 1 + d_3/d_2$ y $D_3 = 1 - d_3/d_2$

se obtiene

Límite superior $D_4\bar{R}$

Límite inferior $D_3\bar{R}$

la línea de centro es de $d_2\sigma$ ó $\bar{R}$ según sea conocida o no $\sigma$.

Los factores $d_3$, $D_1$, $D_2$, $D_3$ y $D_4$ están tabulados y pueden verse en la tabla 1.

Para las Cartas S y R, también podemos calcular límites basados en datos específicos, como se indicó en la Carta $\bar{X}$.

Ejemplo:

De la producción de cierto artículo se han extraído 20 muestras de tamaño 4, habiéndose obtenido que

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{k=1}^{20} \bar{X}_k}{20} = 0.9752 \text{ y } \quad \bar{R} = \frac{\sum_{k=1}^{20} \bar{R}_k}{20} = 0.0002.$$

Codificándose los datos por medio de la ecuación: $\frac{X - 0.975}{0:001}$ i.e expresando cada medida como una desviación de 0.975 en 0:0001

| Carta $\bar{X}$ (codificada) | | Carta R (codificada) | |
|---|---|---|---|
| Línea Central | $\bar{\bar{X}} = 2.0$ | Línea Central | $\bar{R} = 2.0$ |
| L S C | $\bar{X} + A_2\bar{R} = 3.4$ | L S C | $D_4R = 4.5$ |
| L I C | $\bar{X} - A_2\bar{R} = 0.6$ | L I C | $D_3R = 0$ |

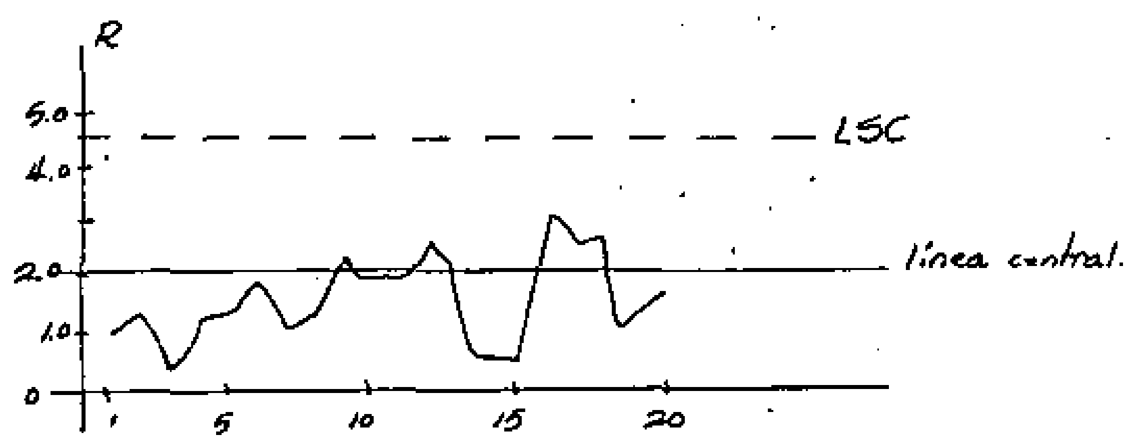


Tabla 1. Factores para Calcular Lineas de Cartas de Control

| Tamaño de Muestra | Carta $\bar{X}$ | | | | | Carta S | | | | Carta R | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Factores para límites | | | Factores línea central | | Factores para límites | | | | Factores línea central | | | Factores para límites | | | |
| n | A | $A_1$ | $A_2$ | $c_2$ | $1/c_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $d_2$ | $1/d_2$ | $d_3$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
| 2 | 2.121 | 3,760 | 1.880 | 0.5642 | 1.7725 | 0 | 1,843 | 0 | 3.267 | 1.128 | 0.8865 | 0.853 | 0 | 3.686 | 0 | 3.267 |
| 3 | 1.732 | 2,394 | 1.023 | 0.7236 | 1.3820 | 0 | 1.858 | 0 | 2,568 | 1.693 | 0.5907 | 0.888 | 0 | 4.358 | 0 | 2.575 |
| 4 | 1.500 | 1.880 | 0.729 | 0.7979 | 1.2533 | 0 | 1.808 | 0 | 2,266 | 2.059 | 0.4857 | 0.880 | 0 | 4.698 | 0 | 2.282 |
| 5 | 1.342 | 1.596 | 0.577 | 0.8407 | 1.1894 | 0 | 1.756 | 0 | 2.089 | 2.326 | 0.4299 | 0.864 | 0 | 4.918 | 0 | 2.115 |

Nota: La tabla para n comprendida entre 2 y 25 puede verse en la referencia Nº 2, pág. 382.

## II.2 Cartas de Control para Atributos.

En el punto anterior hablamos de cartas para variables o características medibles que pueden expresarse en números, en este nos ocuparemos de cartas para características contables, es decir clasificando el concepto en defectuoso o no defectuoso. Las cartas para atributos pueden ser de dos tipos, las que están basadas en la fracción defectuosa y que se conocen como "carta p"; y los que registran el número de defectos por unidad, estas son las llamadas "Carta C".

Al analizar los elementos de una muestra para el trazo de una carta p, los resultados posibles sólo pueden ser defectuoso o no defectuoso, es decir, la población tiene una distribución de probabilidad binomial en la que si p es la probabilidad de obtener un defectuoso en la población, la media $\mu$ de una muestra de tamaño n será np y su desviación estándar $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

La probabilidad de obtener d defectuosos en n elementos es: $_dC_n p^d (1-p)^{n-d}$

y la probabilidad de obtener como máximo a defectuosos en una muestra de tamaño n es: $\sum_{d=0}^{d=a} {}_dC_n p^d (1-p)^{n-d}$

Si definimos una nueva variable aleatoria como la fracción defectuosa en la muestra $\frac{d}{n}$, la media de esta nueva variable es p y su desviación estándar $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Una regla empírica para el cálculo de los límites de control para fracción defectuosa es su media, aumentada y disminuida de tres veces su desviación. Esta regla empírica se vuelve aproximadamente exacta a medida que n crece.

Los límites quedan entonces: $p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

cuando p es conocida. Si p no se conoce debe estimarse por datos anteriores por medio de $\bar{p}$

$$\bar{p} = \frac{\text{número total de defectuosos}}{\text{número total de inspeccionados}}$$

El número total de defectuosos se refiere a la suma de los defectuosos encontrados en las k muestras analizadas, recomendándose que ese número no sea menor de 25. Por lo que los límites quedarán:

$$\bar{p} \pm \frac{3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}$$

Si algunos puntos caen fuera de los límites de control, deben calcularse nuevos límites con el estimador $\bar{p}$ calculado únicamente con los puntos bajo control en el paso anterior.

Ej. De la producción de una máquina para hacer tornillos se extraen 25 muestras de 50 tornillos cada una; los datos obtenidos de esas 25 muestras fueron los siguientes.

| No. de muestra | d | p | No. de muestra | d | p | No. de muestra | d | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.02 | 9 | 1 | 0.02 | 17 | 1 | 0.02 |
| 2 | 2 | 0.04 | 10 | 0 | 0.00 | 18 | 0 | 0.00 |
| 3 | 5 | 0.10 | 11 | 0 | 0.00 | 19 | 0 | 0.00 |
| 4 | 6 | 0.12 | 12 | 1 | 0.02 | 20 | 1 | 0.02 |
| 5 | 3 | 0.06 | 13 | 0 | 0.00 | 21 | 1 | 0.02 |
| 6 | 5 | 0.10 | 14 | 1 | 0.02 | 22 | 0 | 0.00 |
| 7 | 2 | 0.04 | 15 | 0 | 0.00 | 23 | 0 | 0.00 |
| 8 | 1 | 0.02 | 16 | 2 | 0.04 | 24 | 1 | 0.02 |
| | | | | | | 25 | 0 | 0.00 |

Número total de defectuosos = 34

Número total de inspeccionados = 1250

$$\bar{p} = \frac{34}{1250} = 0.0272\,; \quad 1-\bar{p} = 0.9728$$

límite superior $= 0.0272 + \dfrac{3\sqrt{0.0272 \times 0.9728}}{7.071} = 0.0963$

como el límite inferior resulta negativo, se considera nulo

límite inferior = 0

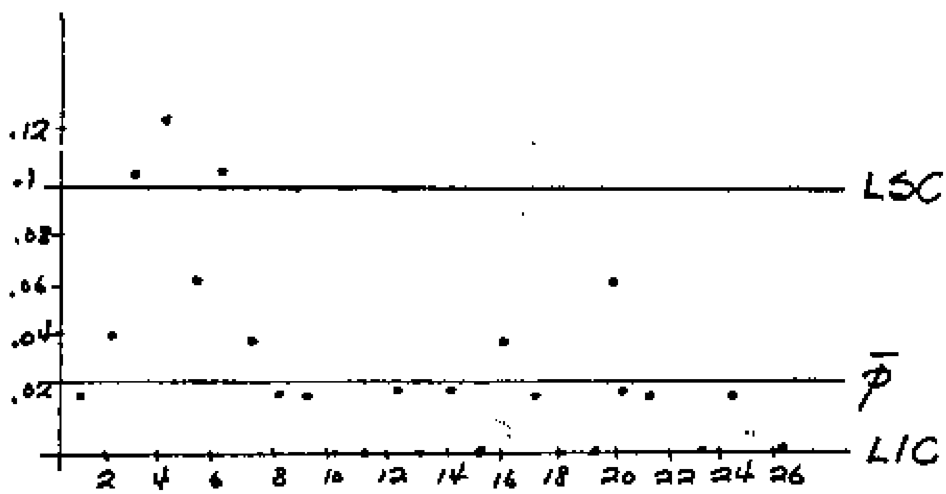
Las muestras números 3, 4 y 6 están fuera de control con los límites de prueba calculados, puede suponerse que hasta la 6a muestra estaban actuando causas asig nables, por lo que se calcula el nuevo p eliminando las 6 primeras _ muestras

$$\bar{p} = \frac{12}{950} = 0.0126$$

$$\text{límite superior} = 0.0126 + \frac{3\sqrt{0.0126 \times 0.126 \times 0.9874}}{7.071} = 0.0599$$

Límite inferior = 0

Con estos nuevos límites, todos los puntos están bajo control.




La Carta C es una carta de control para defectos por unidad. La unidad puede ser un solo artículo, un grupo de artículos, una parte de un artículo, etc. Se examina la unidad y el número de defectos encontrados se registra en la Carta C.

En general en una unidad examinada pueden aparecer un gran número de defectos pero la probabilidad de que aparezca cada uno de ellos es muy pequeña, por lo que puede considerarse que la variable aleatoria C tiene una distribución de probabilidad que es la de Poisson. Así si llamamos C' al promedio de defectos por unidad (conocido de antemano, o estimado de datos pasados), la probabilidad de encontrar C defectos en una unidad es:

$C'^{C} e^{-C'}/C!$ , la desviación estándar está dada por $\sqrt{C'}$, de aquí que los límites de control son: $C' \pm 3\sqrt{C'}$

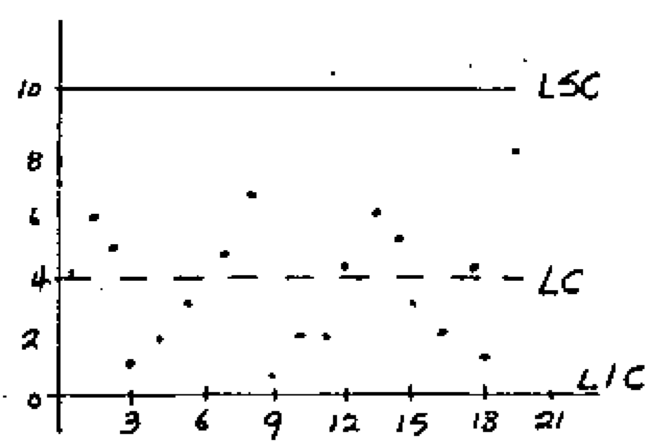
Ejemplo:

De pasadas experiencias, se sabe que para el ensamble de una máquina se tiene un promedio de C' = 3.8 remaches perdidos.

Por tanto: $L\,S\,C = C' + 3\sqrt{C'} = 3.8 + 3 \times 1.95 = 10$

$L\,I\,C = C' - 3\sqrt{C'} = 3.8 - 3 \times 1.95 < 0 \quad \therefore \; L\,I\,C = 0$

$LC = C' = 3.8$




Como se han ensamblado 25 máquinas con los siguientes remaches perdidos

4, 6, 5, 1, 2, 3, 5, 7, 1, 2, 2, 4, 6, 5, 3, 2, 4, 1, 8, 4, 5, 6, 3, 4, 2.

## III - LIMITES DE TOLERANCIA

A menudo la calidad de un producto manufacturado debe estar comprendida dentro de unos límites especificados, llamados "límites de tolerancia". Estos límites nos indican con una probabilidad $(1-\alpha)$ dada de antemano, que el 100 P % de la población estará dentro de ellos.

Si la media $\mu$ y la desviación estándar $\sigma$ de la población normalmente distribuida son conocidos, podemos asegurar que el 100 $(1-\alpha)$ % de la población estará dentro de los límites $\mu \pm Z_{\alpha/2}\sigma$. Pero generalmente no se conocen por lo que se sustituyen por sus estimadores $\bar{X}$ y S respectivamente, pero puede verse que el intervalo $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} S$ no siempre contendrá al 100 $(1-\alpha)$ % de la población. Sin embargo es posible determinar una constante K que al ser instituida por $Z_{\alpha/2}$ nos dé los límites de un intervalo tal, que una proporción P de la población esté contenida en él con una probabilidad de $1-\alpha$. Estos límites son: $\bar{X} \pm KS$. Los valores de K dependen del tamaño n de la muestra, de P y de $1-\alpha$ y se encuentran tabulados (ver tabla 2).

Tabla 2 - Factores para Límites de Tolerancia de dos Lad

| | $1-\alpha = 0.95$ | | | $1-\alpha = 0.99$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n \ P | 0.90 | 0.95 | 0.99 | 0.90 | 0.95 | 0.99 |
| 2 | 32.019 | 37.674 | 48.430 | 160.193 | 188.491 | 242.300 |
| 3 | 8.380 | 9.916 | 12.861 | 18.930 | 22.401 | 29.055 |
| 4 | 5.369 | 6.370 | 8.299 | 9.398 | 11.150 | 14.527 |
| 5 | 4.275 | 5.079 | 6.634 | 6.612 | 7.855 | 10.260 |

Nota: La tabla para valores de n de 2 a 10 000 puede verse en la re rencia Nº 1, pág. 413.

Algunas veces es conveniente, en lugar de especificar dos límites, especificar uno de ellos, de manera que podamos asegurar con una pr babilidad $(1-\alpha)$ que el 100 P % de la población se encuentra arriba (límite inferior) o abajo (límite superior) de él. Estos límites s llamados "límites de tolerancia de un lado".

La constante k empleada para el cálculo de ellos, es distinta de la usada en los "límites de dos lados". Esta constante k también se e cuentra tabulada. Así se tiene

Límite superior de un lado: $\bar{X} + kS$

Límite inferior de un lado: $\bar{X} - kS$

Si la población no está normalmente distribuida la teoría anterior sobre límites de tolerancia, no es aplicable. Sin embargo, existen límites que son independientes de la distribución de la población, que están calculados en base a la máxima y la mínima observación de una muestra de tamaño n.

Según referencia Nº 2 pág. 229, el tamaño de muestra n requerido para que el 100 P % de la población, con una probabilidad $1-\alpha$, se encuentre entre la mayor y menor observación de la muestra está dado por:

$$n \cong \left[\frac{2-(1-p)}{1-p}\right]\left[\frac{\chi^2_{\alpha,4}}{4}\right] + \frac{1}{2}$$

límites de tolerancia de dos lados.

Para límites de un solo lado la n requerida está dada por: $n = \frac{\log \alpha}{\log P}$

Debemos observar que los "límites de tolerancia" son diferentes a los límites del intervalo de confianza, ya que estos son usados para estimar un parámetro de una población, en cambio los de tolerancia nos indican entre que valores estará contenida una proporción de dicha población. La diferencia entre estos límites está basada en el hecho de que cuando n crece la longitud del intervalo de confianza se acerca a cero, mientras que los límites de tolerancia se aproximan a $\mu \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma$

## IV - MUESTREO DE ACEPTACION

El muestreo de aceptación se refiere a los métodos llamados "planes de muestreo", por los cuales el comprador puede decidir entre aceptar o no, lotes de un producto. Si resulta costoso, difícil o imposible examinar la totalidad del lote, el comprador decide aceptarlo o no sobre la información proporcionada por una muestra de dicho lote.

El muestreo de aceptación puede ser por "atributos" o por "variables". En el primer caso, el lote es rechazado si la muestra contiene demasiados defectuosos; en el caso de variables el criterio puede ser de "un lado" o de "dos lados" dependiendo de las especificaciones.

La decisión para elegir entre analizar atributos o variables, puede basarse en los siguientes puntos:

1.- Para la misma información entre lotes buenos y malos, se requiere una muestra mayor cuando se analizan atributos, que cuando se analizan variables. Por lo cual, si la inspección del elemento es costosa o destructiva, debe preferirse muestreo por variables.

2.- Las mediciones y cálculos requeridos para la inspección por variables, puede ser más costosa que la decisión de sí o no y el conteo requerido para la prueba por atributos. Así, se debe considerar si la prueba en sí, es costosa, difícil o tardada.

3.- Los métodos por variables proporcionan información producto por producto que puede utilizarse en el diagnóstico de la producción.

4.- La exactitud de los planes por variable depende de la suposición de la normalidad en la distribución de la variable medida; sin embargo, si dicha distribución se aparta de la normalidad, pueden usarse como métodos aproximados. Los planes por atributos no están sujetos a esta restricción.

5.- El muestreo por atributos puede requerir inspectores menos entrenados, que el muestreo por variables.

Después de decidir lo que constituye el lote por inspeccionar, el elemento o unidad del lote y si el muestreo se hará por atributos o variables debe especificarse:

Nivel de calidad aceptable.
Número de grupo de elementos que deben ser muestreados.
Nivel de inspección.

El muestreo de aceptación implica que al extraer una muestra aleatoria de un lote, éste se aceptará si el número de defectuosos encontrados en la muestra no exceede a un "número de aceptación". Este procedimiento es equivalente a probar la hipótesis $H_o$ de que la proporción

de defectuosos p en un lote es igual a un valor dado $p_o$, contra la hipótesis alternativa $H_1$ de que es igual a $p_1$, donde $p_1 > p_o$. Al valor $p_o$ se le llama "nivel de calidad aceptable" N C A y $P_1$ es llamado porcentaje de defectuosos tolerables por lote P D T L, algunos autores lo llaman nivel de calidad rechazable N C R (ver referencia # 4, pág. 530).

La probabilidad máxima de rechazar un lote bueno (error de tipo I) se acostumbra llamar "riesgo del productor"; y la máxima probabilidad $\beta$ de aceptar un lote malo, (error del tipo II), es llamado "riesgo del consumidor".

El número de grupos de elementos que deben ser muestreados, dependerá de que el plan de muestreo sea "simple", "doble", "múltiple" ó "secuencial". El plan de muestreo simple, únicamente especifica tamaño n de la muestra y número de aceptación a, que deben ser usados: la elección de estos números está basada en el N C A y en el P D T L, así como en los riesgos del productor y consumidor $\alpha$ y $\beta$. Así, si al examinar la muestra el número de defectuosos encontrado es menor o igual que a, el lote se acepta; en caso contrario se rechaza. Un plan de muestreo dado queda mejor descrito por su "curva característica operacional" C O, la cual relaciona la proporción de defectuosos en un lote con la probabilidad de aceptar dicho lote; además la C O describe el grado de protección ofrecida

por el plan de muestreo, respecto a la calidad de los lotes. La probabilidad de aceptar un lote con N elementos y conteniendo una proporción p de defectuosos, (el número de defectuosos será Np), en base a una muestra de tamaño n y siendo el número de aceptación a; queda expresada, utilizando la distribución hipergeométrica, como:

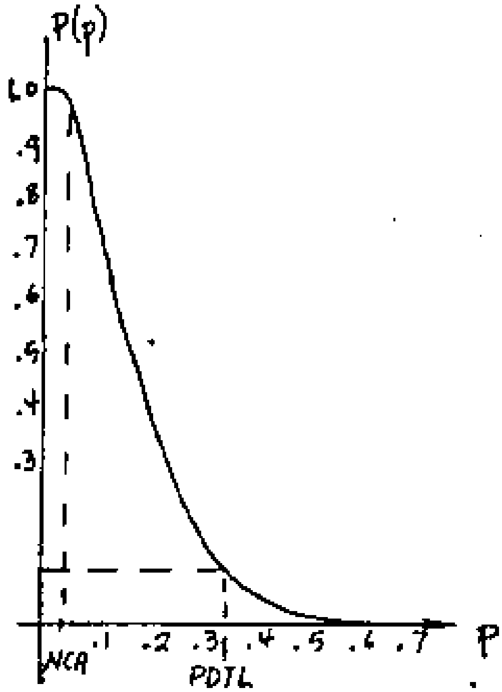
$$P(p) = \sum_{x=0}^{a} \frac{\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

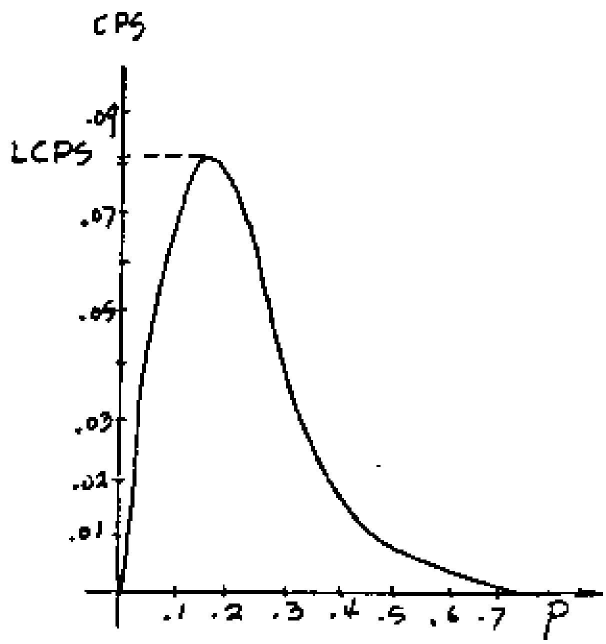
Aunque puede aproximarse con éxito a una binomial $P(p) = \sum_{x=0}^{a} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ cuyos valore se encuentran tabulados (ver ref. # 1, pág. 389).

De la curva C O puede verse que el "riesgo del productor" $\alpha$ es uno, menos la probabilidad de aceptar un lote con una proporción p de defectuosos igual al NCA y el riesgo del productor es la probabilidad de aceptar un lote con una probabilidad de defectuosos igual al PDTL.

También es conveniente, para la mejor descripción de un plan de muestreo, graficar la llamada curva de la "calidad promedio de salida" CPS, en la cual se relacionan la proporción p de defectuosos en un lote con la esperanza de aceptar un lote con dicha proporción de defectuosos, es decir, el producto p.P(p). Al máximo valor de este producto se le conoce con el nombre de "límite de la calidad promedio de salida" LCPS.

Las curvas OC y CPS para un ejemplo en el que N = 100; n = 10 y a = 1 son las siguientes:




Algunas veces el muestreo simple requiere un tamaño n de muestra grande, el cual puede reducirse con el muestreo doble o múltiple. En éste se extrae una muestra pequeña y si el lote es bueno, es decir tiene un número de defectuosos menor o igual a $a_1$ (número de aceptación para la primera muestra) se acepta; si el lote es malo,

o sea, si el número de defectuosos es mayor o igual a $r_1$ (número de rechazo para la primera muestra), se rechaza; si el número de defectuosos está comprendido entre $a_1$ y $r_1$ se extrae otra muestra, el total de defectuosos (los de la primera más los de la muestra siguiente) se compara con $a_2$ y $r_2$, etc. En general para plan de muestreo.

| | |
|---|---|
| Doble | $r_2 = a_2 + 1$ |
| Triple | $r_3 = a_3 + 1$ |

Si llamamos $n_1$ y $d_1$ al tamaño y número de defectuosos de la primera muestra respectivamente $n_2$ y $d_2$ a los correspondientes de la segunda, el tamaño promedio, de muestra en plan de muestreo doble será,

$$n_1\left[p(d_1 \leq a_1) + p(d_1 \geq r_1)\right] + n_2\left[p(a_1 < d_1 < r_1)\right]$$

En general este tamaño promedio en muestreo doble será inferior al tamaño n de 1ª muestra en muestreo simple, para el mismo grado de protección en ambos planes.

Después de decidir si se usará un plan de muestreo simple, doble o múltiple debe escogerse el "nivel de inspección", el cual depende de la importancia de detectar elementos defectuosos en el lote.

Existen tres niveles llamados I, II y III; el III debe ser usado cuando los defectuosos deben rechazarse por seguridad, el tamaño de muestra requerido en este caso es muy grande. Si por el contrario, el aceptar mayor número de defectuosos no es de mucha importancia y la prueba es costosa, debe usarse el nivel I, el cual nos conduce a tamaños menores de muestra. Si no existe alguna de las circunstancias anteriores (que es lo más frecuente) debe emplearse el nivel II.

Existen tablas en las cuales, para un tamaño dado de lote y nivel de inspección deseado, se obtiene una letra; con esta letra y el de nivel de calidad aceptable NCA especificado, en otra tabla puede obtenerse el tamaño n de muestra y los números de aceptación a y de rechazo r. Estas tablas correspondientes a un plan de muestreo simple, pueden verse en la referencia # 1, págs 414 y 415.

El muestreo múltiple llevado al extremo es llamado "muestreo secuencial", en éste después de la inspección de cada elemento, se decide si se acepta el lote, si se rechaza o si se continúa el muestreo; para ello se calculan $a_n$ y $r_n$, basados en el nivel de calidad aceptable, representado por $p_o$, en el PDTL, representado por $p_1$, en el riesgo $\alpha$ del productor y en el riesgo $\beta$ del consumidor, por medio de las siguientes expresiones.

$$a_n = \frac{\log \frac{\beta}{1-\alpha} + n \log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}} \qquad r_n = \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha} + n \log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

Si $a_n$ resulta fraccionario se redondea al entero inmediato inferior, y si es negativo se considera nulo; si $r_n$ no es entero se redondea al entero inmediato superior.

Si el número de defectuosos es $\leq a_n$ se acepta el lote, si es $\geq r_n$ se rechaza, si queda comprendido entre $a_n$ y $r_n$ se continúa.

El muestreo secuencial puede representarse gráficamente; los valores obtenidos de las expresiones anteriores, para diferentes valores de n se representan por dos líneas rectas que limitan las zonas de aceptación y rechazo respectivamente, si la representación gráfica del número de defectuosos d está en la zona limitada por las dos líneas rectas, el muestreo debe continuarse y se detendrá cuando ésta representación pase a la zona de aceptación o rechazo, algunas ocasiones esto no sucede, por lo que se acostumbra, dar de antemano un número N tal que al llegar a un número n de elementos inspeccionados igual a N el muestreo debe truncarse y decidir si se acepta o no el lote.

Ejemplo:

Si suponemos $p_o = 0.05$, $p_1 = 0.20$ $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$

queda:

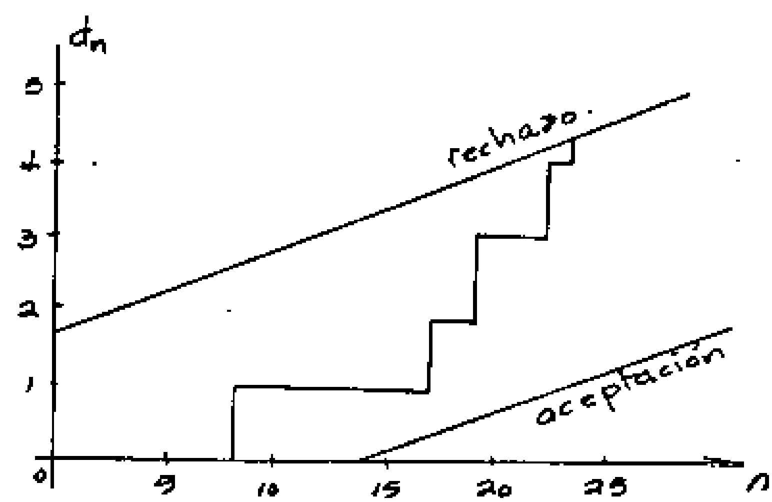
$$a_n = -1.45 + 0.11\ n$$

$$r_n = 1.86 + 0.11\ n$$

Tabulando $a_n$, $r_n$ y número de defectuosos $d_n$ para diferentes valores de n se obtiene.

| n | $d_n$ | $a_n$ | $r_n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | - | - |
| 2 | 0 | - | - |
| 3 | 0 | - | 3 |
| 4 | 0 | - | 3 |
| 5 | 0 | - | 3 |
| 6 | 0 | - | 3 |
| 7 | 0 | - | 3 |
| 8 | 1 | - | 3 |
| 9 | 1 | - | 3 |
| 10 | 1 | - | 3 |
| 11 | 1 | - | 4 |
| 12 | 1 | - | 4 |
| 13 | 1 | - | 4 |
| 14 | 1 | 0 | 4 |
| 15 | 1 | 0 | 4 |
| 16 | 1 | 0 | 4 |
| 17 | 2 | 0 | 4 |
| 18 | 2 | 0 | 4 |
| 19 | 3 | 0 | 4 |
| 20 | 3 | 0 | 5 |
| 21 | 3 | 0 | 5 |
| 22 | 4 | 0 | 5 |
| 23 | 5 | 1 | 5 |

Gráficamente




En el ejemplo a los 23 elementos inspeccionados se obtuvo $d_n = r_n$, por lo tanto termina el muestreo con rechazo del lote.

Referencias:


1. Miller I. and Freund J. W.
   "Probability and Statistics for Engineers"
   Prentice-Hall 1965

2. Bowker A. H. and Lieberman G. J.
   "Engineering Statistics"
   Prentice-Hall 1961

3. Crow E. L., Davis F. A. and Maxfield M. W.
   "Statistic Manual"
   Dover

4. Ostle B.
   "Estadística Aplicada"
   Limusa-Wiley 1965

5. Anuario.
   "Servicio Estadístico.
   S.O.P. México. 1961

6. Rice W. P.
   "Control Charts in Factory Management"
   Wiley 1946

7. Grant E. L.
   "Statistical Quality Control"
   McGraw Hill 1962

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD Y DISEÑO DE ESPECIFICACIONES

# CARTAS DE CONTROL

M. en I. JOSE ANTONIO MENDOZA M.

Diciembre, 1982

# I - NATURALEZA DEL PROBLEMA

Se llama "calidad", desde el punto de vista estadístico, a la característica medible o contable de un producto, por ejemplo al diámetro de una varilla, a la resistencia de un concreto, etc, entre las contables, número de defectuosos (o porcentaje) de tabiques en un lote de estos. La "calidad" de todo producto manufacturado está siempre sujeta a cierta cantidad de variación; esta variación puede deberse a dos tipos diferentes de causas: unas llamadas "causas asignables", cuyos efectos en general son relativamente grandes y pueden atribuirse o asignarse a ciertos factores específicos, tales como falta de adiestramiento de los operadores, defectos en la maquinaria o en las materias primas, etc; las otras son un conjunto de causas ignoradas por nosotros, pero el efecto de cada una de ellas es muy pequeño, estas son las llamadas "causas aleatorias" o casuales. La variación de la calidad debida a "causas aleatorias" es inevitable pero la cantidad y el carácter de dicha variación puede predecirse por medio de las teorías probabilísticas, en términos generales.

Cuando en un procesocoperatorio las únicas causas de variación de calidad son las aleatorias, se dice que está "bajo control estadístico" y si intervienen una o más causas asignables, se dice que está "fuera de control estadístico".

Para establecer el control estadístico de calidad de un producto, debería hacerse uso de todas las técnicas desarrolladas en la es_

b) Las técnicas de las cartas de control son aplicables en_ cualquier etapa de la producción de un proyecto.

c) Generalmente no se encuentra un estado de control riguro_ so.

d) Debe establecerse un estado de control a un nivel satis_ factorio abajo de la máxima eficiencia que puede obtener_ se en la operación.

e) La calidad es intrinseca al producto y no puede introdu_ cirse a él por medio de su inspección.

II - CARTAS DE CONTROL

La característica fundamental de la técnica estadística llamada _ "carta de control" es la de inferir sobre el proceso de producción en base a muestras tomadas de dicha producción. A través de dicha carta podremos conocer cual es el estado de control; lograr con_ trol a un nivel apropiado y juzgar si se ha logrado o no el nivel_ deseado.

Para establecer carta de control de una característica, sea medi_ ble o contable se supone que sólo actúan causas aleatorias y se se_ ñalan regiones de aceptación y de rechazo para dicha característi_

ca. Si los valores calculados a partir de muestras caen en la región de aceptación, se dice que los puntos están bajo control y en caso contrario que están fuera de control.

La zona de rechazo se fija en términos de la probabilidad de rechazar la hipótesis, de que sólo actúan causas aleatorias, cuando es verdadera, es decir, si todos los puntos caen en la zona de aceptación, no significa que no existen causas asignables sino que se tiene la probabilidad, fijada de antemano, de que las únicas causas que operaron fueron casuales.

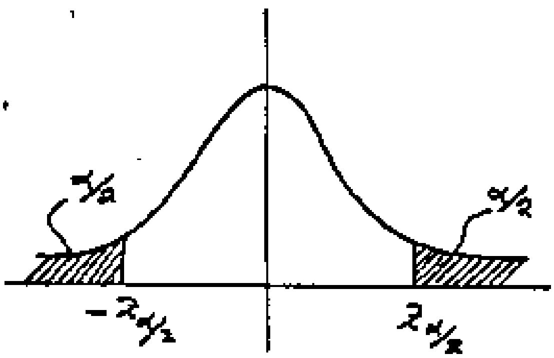
II.1 Cartas de Control para Variables.

Cuando tratamos con características medibles, es costumbre ejercer control sobre la calidad promedio de un proceso, así como sobre la variabilidad; para la primera, se traza la llamada "carta de control para medias" o simplemente "carta $\bar{X}$"; para la variabilidad se trazan las llamadas "carta R" y "carta $\sigma$" si se toma el rango o la desviación estándar de las muestras respectivamente, como estimadores de la desviación estándar de la población.

II.1.a) Carta $\bar{X}$

Si suponemos que la población (formada por los resultados obtenidos de las repeticiones de un proceso operatorio) está normalmen

distribuida, podemos asegurar con una probabilidad de $1-\alpha$ que la media de una muestra aleatoria de tamaño n estará dentro de los límites $\mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $\mu$ y $\sigma$ son respectivamente, media y desviación estándar de la población y $Z_{\alpha/2}$ es la abscisa correspondiente a una área de probabilidades de $\alpha/2$ en una distribución normal estándar. Si la población no está normalmente distribuida, pero la muestra es grande o se ejecuta el muestreo con reemplazo, las afirmaciones anteriores siguen siendo válidas.

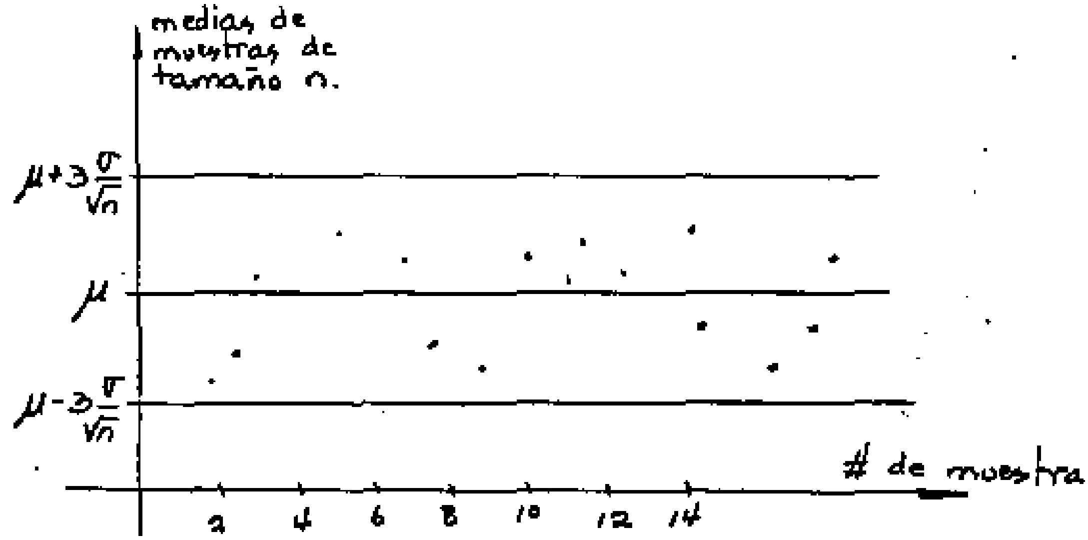



En la práctica se acostumbra considerar una probabilidad (intervalo de confianza) de 99.73%, a la que corresponde una $Z_{\alpha/2} = 3$.

En la "Carta $\bar{X}$, la zona de aceptación, con probabilidad de 99.73%, tendrá una línea central $\mu$ , un límite superior de control $\mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y un límite inferior de control $\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . El factor $3/\sqrt{n}$ se encuentra tabulado para diferentes valores de n y se representa por A, así los límites de control son $\mu \pm A\sigma$ (ver tabla # 1).

Para cada muestra aleatoria de tamaño n extraida de la población se calcula su media $\bar{X}$ mediante la expresión $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ .

Si el proceso está "bajo control", se espera que sólo 27 de 10 000 muestras tendrán una $\bar{X}$ que caerá fuera de la zona aceptación.




Generalmente $\mu$ y $\sigma$ son desconocidas, por lo que las sustituiremos por estimadores de máxima verosimilitud como son la media de las medias de las muestras $\bar{\bar{X}}$ y la media de las desviaciones estándar de las muestras $\bar{S}$, respectivamente.

Si se toman k muestras, en donde es aconsejable que $k \geq 25$.

$\bar{\bar{X}} = \dfrac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \ldots + \bar{X}_k}{k}$ ; $\bar{\bar{X}}$ es un estimador insesgado de $\mu$ donde $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, ........., $\bar{X}_k$ son las medias de la primera, segunda...Késima muestra respectivamente.

si el tamaño de las muestras es el mismo: $\bar{S} = \dfrac{S_1 + S_2 + \ldots + S_k}{k}$

Las desviaciones estándar $S_1$, $S_2$, ........, $S_k$ de las muestras se obtienen de :

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}} \qquad j = 1, 2, \ldots k$$

S es un estimador sesgado de $\sigma$ y para evitar el sesgo debe multiplicarse por $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ quedando $\sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$ puede entonces decirse que: $\sigma = \bar{S}/c_2$ donde $1/c_2$ es un factor que depende del tamaño n de la muestra y que se encuentra tabulado (ver tabla 1).

Con estos estimadores los límites de contro son: $\bar{\bar{X}} \pm \frac{3}{\sqrt{n}\, c_2} \bar{S}$
Se acostumbra llamar con $A_1$ al factor $\frac{3}{\sqrt{n}\, c_2}$ que también está tabulado para diferentes valores de n (tabla 1) los límites son entonces, $\bar{\bar{X}} \pm A_1 \bar{S}$

Puede sustituirse $\sigma$ por otro estimador basado en el "rango" R de las muestras, que se define como la diferencia entre el máximo valor de los elementos de la muestra y el mínimo valor de los mismos. Si se eligen k muestras, se calculan los rangos de ellas y se obtiene la media de los rangos $\bar{R}$ con la expresión

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_k}{k} = \frac{\sum R_i}{k}$$

El estimador de $\sigma$ basado en rangos tiene un sesgo mayor que el basado en desviaciones estándar, pero éstas son más laboriosas de calcular que aquéllos, por lo que a menudo se les da preferencia a los rangos.

Existen tablas en donde se encuentra la relación $\overline{R}/\sigma$ que se representa por $d_2$, para diferentes tamaños de la muestra, de aquí que $\sigma = \overline{R}/d_2$ y los límites de control para la "carta $\overline{X}$ serán $\overline{\overline{X}} \pm \frac{3\overline{R}}{d_2\sqrt{n}}$. El factor $\frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ que es llamado $A_2$ también está tabulado (tabla 1) quedando los límites:

$$\overline{\overline{X}} \pm A_2 \overline{R}$$

Resumen: Los límites de contro para la "Carta $\overline{X}$ son:

$\mu \pm A\sigma$ cuando $\mu$ y $\sigma$ son conocidos

$\overline{\overline{X}} \pm A_1\overline{S}$ cuando $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{S}$ son estimadores de $\mu$ y $\sigma$ respectivamente,

$\overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R}$ cuando $\mu$ y $\sigma$ son estimados por $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{R}$ respectivamente.

Si el proceso no está bajo control (indicado por puntos fuera de los límites establecidos), deben revisarse los límites calculados para obtener un proceso controlado. Una regla práctica para el cálculo de los nuevos límites es eliminar a los puntos fuera de control y con los restantes calcular la nueva $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{R}$ ó $\sigma$ según el caso; este procedimiento debe continuarse hasta que todos los puntos caigan dentro de los límites de control. Lo anterior, aunque no tiene una justificación teórica, se basa en que la situación de dichos

puntos puede deberse a una causa asignable. Los límites calculados en base a estimadores son llamados naturales, pero podemos calcular otros límites, basados en datos específicos, en ese caso usaremos las fórmulas correspondientes a $\mu$ y $\sigma$ conocidas y en ellas sustituiremos los valores especificados.

II.1.b) Carta S y Carta R

Los rangos R y las desviaciones estándar S de las muestras son variables aleatorias, tales que aunque sus poblaciones no están normalmente distribuidas se ha encontrado que casi la totalidad de ellas se encuentra en el intervalo limitado por la media de dichas poblaciones más y menos, tres veces la desviación estándar de las poblaciones de dichas variables aleatorias.
De $\sigma = \bar{S}/c_2$ obtenido anteriormente llegamos a que la media de las desviaciones es $\bar{S} = \sigma c_2$

La desviación estándar de S está dada por

$$\sigma_S = \sqrt{2(n-1) - 2n c_2^2} \; \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

Así los límites de control para la Carta S, que son $\bar{S} \pm 3\sigma_S$ pueden expresarse

$$\sigma \left[ c_2 \pm \frac{3}{\sqrt{2n}} \sqrt{2(n-1) - 2n c_2^2} \right]$$

Los factores de $\sigma$ son llamados $B_2$ (considerando el signo +), y $B_1$ (considerando el signo -), que dependen sólo de n y se encuentran tabulados.

Por lo tanto los límites para una Carta S, cuando la desviación estándar $\sigma$ de la población original es conocida, serán:

Límite superior $\bar{S}$ $+ B_2 \sigma$

Límite inferior $\bar{S}$ $- B_1 \sigma$

Como en la práctica no es fácil que pueda conocerse $\sigma$ se sustituye por su estimador $\bar{S}/C_2$ quedando entonces los límites:

$$\bar{S}\left[1 \pm \frac{3}{c_2\sqrt{2n}}\sqrt{2(n-1)-2n\,c_2^2}\right]$$

donde los factores de $\bar{S}$, llamados $B_4$ (considerando signo +) y $B_3$ (considerando signo -), depende sólo del tamaño de la muestra y se encuentran tabulados (tabla 1). Luego los límites serán:

Límite superior $\bar{S}$ $+ B_4 \ \bar{S}$

Límite inferior $\bar{S}$ $- B_3 \ \bar{S}$

La línea central es $C_2 \sigma$ cuando se conoce $\sigma$, en caso de ser desconocida $\sigma$, la línea central es $\bar{S}$.

Los límites de control para la Carta R se obtienen en forma semejante. Se había ya obtenido que $\bar{R} = \sigma\, d_2$. Puede verse que la desviación de R, $\sigma_R$ es $\sigma_R = d_3 \sigma$ donde $d_3$ depende de n; luego los límites

serán $\sigma(d_2 \pm d_3)$.

Designando con $D_2$ a la suma $d_2 + d_3$ y con $D_1$ a la diferencia $d_2 - d_3$ tendremos

Límite superior $D_2\,\sigma$

Límite inferior $D_1\,\sigma$

Sustituyendo a $\sigma$ por su estimador $\sigma = \bar{R}/d_2$ se llega a $\bar{R}\left[1 \pm \frac{d_3}{d_2}\right]$, y si $D_4 = 1 + d_3/d_2$ y $D_3 = 1 - d_3/d_2$

se obtiene

Límite superior $D_4\bar{R}$

Límite inferior $D_3\bar{R}$

la línea de centro es de $d_2\,\sigma$ ó $\bar{R}$ según sea conocida o no $\sigma$ .

Los factores $d_3$, $D_1$, $D_2$, $D_3$ y $D_4$ están tabulados y pueden verse en la tabla 1.

Para las Cartas S y R, también podemos calcular límites basados en datos específicos, como se indicó en la Carta $\bar{X}$.

Ejemplo:

De la producción de cierto artículo se han extraído 20 muestras de tamaño 4, habiéndose obtenido que

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{k=1}^{20} \bar{X}_k}{20} = 0.9752 \text{ y } \quad \bar{R} = \frac{\sum_{k=1}^{20} \bar{R}_k}{20} = 0.0002.$$

Codificándose los datos por medio de la ecuación: $\frac{X - 0.975}{0.001}$ i.e expresando cada medida como una desviación de 0.975 en 0.0001

| Carta $\bar{X}$ (codificada) | | Carta R (codificada) | |
|---|---|---|---|
| Línea Central | $\bar{\bar{X}} = 2.0$ | Línea Central | $\bar{R} = 2.0$ |
| L S C | $\bar{X} + A_2\bar{R} = 3.4$ | L S C | $D_4R = 4.5$ |
| L I C | $\bar{X} - A_2\bar{R} = 0.6$ | L I C | $D_3R = 0$ |

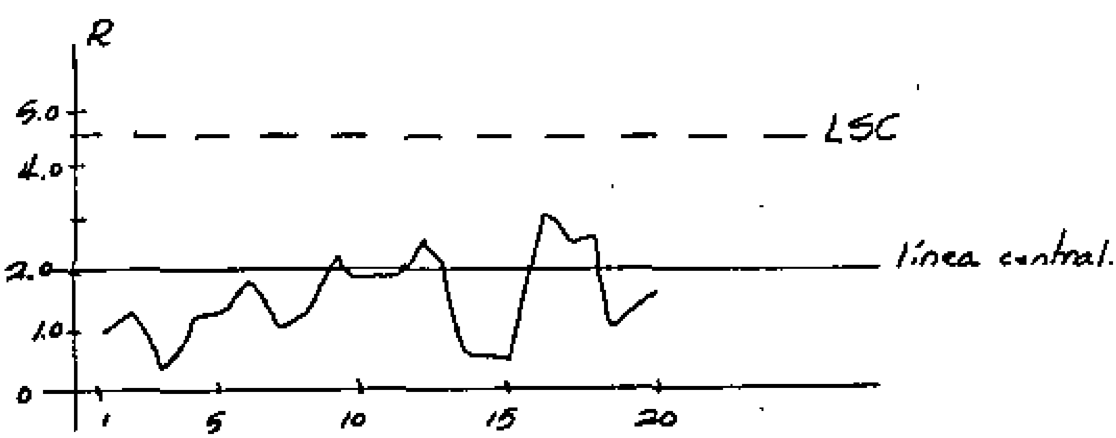


Tabla 1. Factores para Calcular Líneas de Cartas de Control

| Tamaño de Muestra | Carta $\bar{X}$ | | | | | Carta S | | | | Carta R | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Factores para límites | | | Factores línea central | | Factores para límites | | | | Factores línea central | | | Factores para límites | | | |
| $n$ | $A$ | $A_1$ | $A_2$ | $c_2$ | $1/c_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $d_2$ | $1/d_2$ | $d_3$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
| 2 | 2.121 | 3,760 | 1.880 | 0.5642 | 1.7725 | 0 | 1,843 | 0 | 3.267 | 1.128 | 0.8865 | 0.853 | 0 | 3.686 | 0 | 3.267 |
| 3 | 1.732 | 2.394 | 1.023 | 0.7236 | 1.3820 | 0 | 1.858 | 0 | 2.568 | 1.693 | 0.5907 | 0.888 | 0 | 4.358 | 0 | 2.575 |
| 4 | 1.500 | 1.880 | 0.729 | 0.7979 | 1.2533 | 0 | 1.808 | 0 | 2.266 | 2.059 | 0.4857 | 0.880 | 0 | 4.698 | 0 | 2.282 |
| 5 | 1.342 | 1.596 | 0.577 | 0.8407 | 1.1894 | 0 | 1.756 | 0 | 2.089 | 2.326 | 0.4299 | 0.864 | 0 | 4.918 | 0 | 2.115 |

Nota: La tabla para n comprendida entre 2 y 25 puede verse en la referencia Nº 2, pág. 382.

## II.2 Cartas de Control para Atributos.

En el punto anterior hablamos de cartas para variables o características medibles que pueden expresarse en números, en este nos ocuparemos de cartas para características contables, es decir clasificando el concepto en defectuoso o no defectuoso. Las cartas para atributos pueden ser de dos tipos, las que están basadas en la fracción defectuosa y que se conocen como "carta p"; y los que registran el número de defectos por unidad, estas son las llamadas "Carta C".

Al analizar los elementos de una muestra para el trazo de una carta p, los resultados posibles sólo pueden ser defectuoso o no defectuoso, es decir, la población tiene una distribución de probabilidad binomial en la que si p es la probabilidad de obtener un defectuoso en la población, la media $\mu$ de una muestra de tamaño n será np y su desviación estándar $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

La probabilidad de obtener d defectuosos en n elementos es: $_dC_n p^d (1-p)^{n-d}$

y la probabilidad de obtener como máximo a defectuosos en una muestra de tamaño n es: $\sum_{d=0}^{d=a} {}_dC_n p^d (1-p)^{n-d}$

Si definimos una nueva variable aleatoria como la fracción defectuosa en la muestra $\frac{d}{n}$, la média de esta nueva variable es p y su desviación estándar $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Una regla empírica para el cálculo de los límites de control para fracción defectuosa es su media, aumentada y disminuida de tres veces su desviación. Esta regla empírica se vuelve aproximadamente exacta a medida que n crece.

Los límites quedan entonces: $p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

cuando p es conocida. Si p no se conoce debe estimarse por datos anteriores por medio de $\bar{p}$

$$\bar{p} = \frac{\text{número total de defectuosos}}{\text{número total de inspeccionados}}$$

El número total de defectuosos se refiere a la suma de los defectuosos encontrados en las k muestras analizadas, recomendándose que ese número no sea menor de 25. Por lo que los límites quedarán:

$$\bar{p} \pm \frac{3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}$$

Si algunos puntos caen fuera de los límites de control, deben calcularse nuevos límites con el estimador $\bar{p}$ calculado únicamente con los puntos bajo control en el paso anterior.

Ej. De la producción de una máquina para hacer tornillos se extraen 25 muestras de 50 tornillos cada una; los datos obtenidos de esas 25 muestras fueron los siguientes.

| No. de muestra | d | p | No. de muestra | d | p | No. de muestra | d | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.02 | 9 | 1 | 0.02 | 17 | 1 | 0.02 |
| 2 | 2 | 0.04 | 10 | 0 | 0.00 | 18 | 0 | 0.00 |
| 3 | 5 | 0.10 | 11 | 0 | 0.00 | 19 | 0 | 0.00 |
| 4 | 6 | 0.12 | 12 | 1 | 0.02 | 20 | 1 | 0.02 |
| 5 | 3 | 0.06 | 13 | 0 | 0.00 | 21 | 1 | 0.02 |
| 6 | 5 | 0.10 | 14 | 1 | 0.02 | 22 | 0 | 0.00 |
| 7 | 2 | 0.04 | 15 | 0 | 0.00 | 23 | 0 | 0.00 |
| 8 | 1 | 0.02 | 16 | 2 | 0.04 | 24 | 1 | 0.02 |
| | | | | | | 25 | 0 | 0.00 |

Número total de defectuosos = 34

Número total de inspeccionados = 1250

$$\bar{p} = \frac{34}{1250} = 0.0272 \; ; \quad 1 - \bar{p} = 0.9728$$

$$\text{límite superior} = 0.0272 + \frac{3\sqrt{0.0272 \times 0.9728}}{7.071} = 0.0963$$

como el límite inferior resulta negativo, se considera nulo

límite inferior = 0

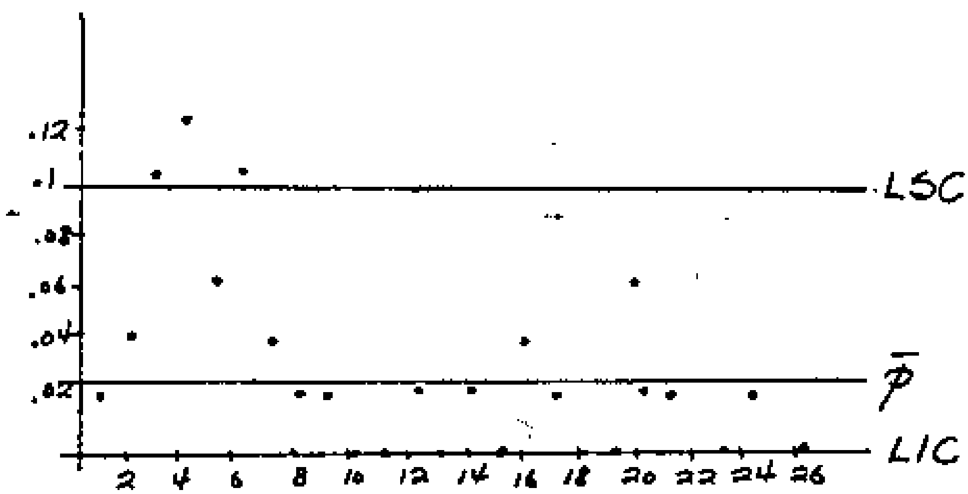
Las muestras números 3, 4 y 6 están fuera de control con los límites de prueba calculados, puede suponerse que hasta la 6a muestra estaban actuando causas asig nables, por lo que se calcula el nuevo p eliminando las 6 primeras muestras

$$\bar{p} = \frac{12}{950} = 0.0126$$

$$\text{límite superior} = 0.0126 + \frac{3\sqrt{0.0126 \times 0.126 \times 0.9874}}{7.071} = 0.0599$$

Límite inferior = 0

Con estos nuevos límites, todos los puntos están bajo control.




La Carta C es una carta de control para defectos por unidad. La unidad puede ser un solo artículo, un grupo de artículos, una parte de un artículo, etc. Se examina la unidad y el número de defectos encontrados se registra en la Carta C.

En general en una unidad examinada pueden aparecer un gran número de defectos pero la probabilidad de que aparezca cada uno de ellos es muy pequeña, por lo que puede considerarse que la variable aleatoria C tiene una distribución de probabilidad que es la de Poisson. Así si llamamos C' al promedio de defectos por unidad (conocido de antemano, o estimado de datos pasados), la probabilidad de encontrar C defectos en una unidad es:

$C'^{c}\, e^{-C'}/c!$ , la desviación estándar está dada por $\sqrt{C'}$, de aquí que los límites de control son: $C' \pm 3\sqrt{C'}$

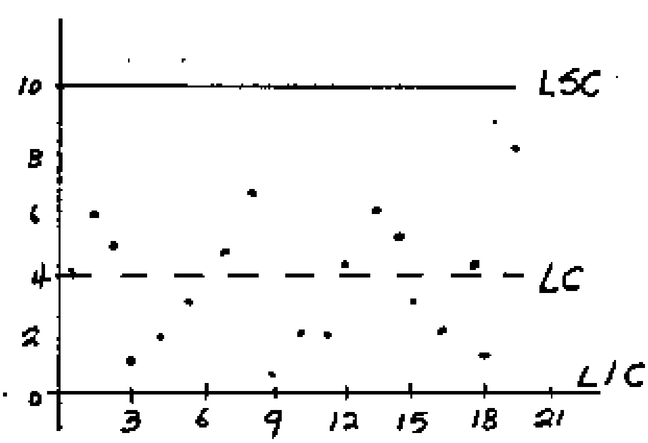
Ejemplo:

De pasadas experiencias, se sabe que para el ensamble de una máquina se tiene un promedio de C' = 3.8 remaches perdidos.

Por tanto: $L\,S\,C = C' + 3\sqrt{C'} = 3.8 + 3 \times 1.95 = 10$

$L\,I\,C = C' - 3\sqrt{C'} = 3.8 - 3 \times 1.95 < 0 \;\therefore\; L\,I\,C = 0$

$LC = C' = 3.8$




Como se han ensamblado 25 máquinas con los siguientes remaches perdidos

4, 6, 5, 1, 2, 3, 5, 7, 1, 2, 2, 4, 6, 5, 3, 2, 4, 1, 8, 4, 5, 6, 3, 4, 2.

# III - LIMITES DE TOLERANCIA

A menudo la calidad de un producto manufacturado debe estar comprendida dentro de unos límites especificados, llamados "límites de tolerancia". Estos límites nos indican con una probabilidad $(1-\alpha)$ dada de antemano, que el 100 P % de la población estará dentro de ellos.

Si la media $\mu$ y la desviación estándar $\sigma$ de la población normalmente distribuida son conocidos, podemos asegurar que el 100 $(1-\alpha)$ % de la población estará dentro de los límites $\mu \pm Z_{\alpha/2}\sigma$. Pero generalmente no se conocen por lo que se sustituyen por sus estimadores $\bar{X}$ y S respectivamente, pero puede verse que el intervalo $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}S$ no siempre contendrá al 100 $(1-\alpha)$ % de la población. Sin embargo es posible determinar una constante K que al ser instituida por $Z_{\alpha/2}$ nos dé los límites de un intervalo tal, que una proporción P de la población esté contenida en él con una probabilidad de $1-\alpha$. Estos límites son: $\bar{X} \pm KS$. Los valores de K dependen del tamaño n de la muestra, de P y de $1-\alpha$ y se encuentran tabulados (ver tabla 2).

Tabla 2 - Factores para Límites de Tolerancia de dos Lad

| | $1-\alpha = 0.95$ | | | $1-\alpha = 0.99$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n \ P | 0.90 | 0.95 | 0.99 | 0.90 | 0.95 | 0.99 |
| 2 | 32.019 | 37.674 | 48.430 | 160.193 | 188.491 | 242.300 |
| 3 | 8.380 | 9.916 | 12.861 | 18.930 | 22.401 | 29.055 |
| 4 | 5.369 | 6.370 | 8.299 | 9.398 | 11.150 | 14.527 |
| 5 | 4.275 | 5.079 | 6.634 | 6.612 | 7.855 | 10.260 |

Nota: La tabla para valores de n de 2 a 10 000 puede verse en la re rencia Nº 1, pág. 413.

Algunas veces es conveniente, en lugar de especificar dos límites, especificar uno de ellos, de manera que podamos asegurar con una pr babilidad ($1-\alpha$) que el 100 P % de la población se encuentra arriba (límite inferior) o abajo (límite superior) de él. Estos límites s llamados "límites de tolerancia de un lado".

La constante k empleada para el cálculo de ellos, es distinta de la usada en los "límites de dos lados". Esta constante k también se e cuentra tabulada. Así se tiene

Límite superior de un lado: $\bar{X} + kS$

Límite inferior de un lado: $\bar{X} - kS$

Si la población no está normalmente distribuida la teoría anterior sobre límites de tolerancia, no es aplicable. Sin embargo, existen límites que son independientes de la distribución de la población, que están calculados en base a la máxima y la mínima observación de una muestra de tamaño n.

Según referencia Nº 2 pág. 229, el tamaño de muestra n requerido para que el 100 P % de la población, con una probabilidad $1-\alpha$, se encuentre entre la mayor y menor observación de la muestra está dado por:

$$n \cong \left[\frac{2-(1-p)}{1-p}\right]\left[\frac{\chi^2_{\alpha,4}}{4}\right]+\frac{1}{2}$$

límites de tolerancia de dos lados.

Para límites de un solo lado la n requerida está dada por: $n = \frac{\log \alpha}{\log P}$

Debemos observar que los "límites de tolerancia" son diferentes a los límites del intervalo de confianza, ya que estos son usados para estimar un parámetro de una población, en cambio los de tolerancia nos indican entre que valores estará contenida una proporción de dicha población. La diferencia entre estos límites está basada en el hecho de que cuando n crece la longitud del intervalo de confianza se acerca a cero, mientras que los límites de tolerancia se aproximan a $\mu \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma$

## IV - MUESTREO DE ACEPTACION

El muestreo de aceptación se refiere a los métodos llamados "planes de muestreo", por los cuales el comprador puede decidir entre aceptar o no, lotes de un producto. Si resulta costoso, difícil o imposible examinar la totalidad del lote, el comprador decide aceptarlo o no sobre la información proporcionada por una muestra de dicho lote.

El muestreo de aceptación puede ser por "atributos" o por "variables". En el primer caso, el lote es rechazado si la muestra contiene demasiados defectuosos; en el caso de variables el criterio puede ser de "un lado" o de "dos lados" dependiendo de las especificaciones.

La decisión para elegir entre analizar atributos o variables, puede basarse en los siguientes puntos:

1.- Para la misma información entre lotes buenos y malos, se requiere una muestra mayor cuando se analizan atributos, que cuando se analizan variables. Por lo cual, si la inspección del elemento es costosa o destructiva, debe preferirse muestreo por variables.

2.- Las mediciones y cálculos requeridos para la inspección por variables, puede ser más costosa que la decisión de sí o no y el conteo requerido para la prueba por atributos. Así, se debe considerar si la prueba en sí, es costosa, difícil o tardada.

3.- Los métodos por variables proporcionan información producto por producto que puede utilizarse en el diagnóstico de la producción.

4.- La exactitud de los planes por variable depende de la suposición de la normalidad en la distribución de la variable medida; sin embargo, si dicha distribución se aparta de la normalidad, pueden usarse como métodos aproximados. Los planes por atributos no están sujetos a esta restricción.

5.- El muestreo por atributos puede requerir inspectores menos entrenados, que el muestreo por variables.

Después de decidir lo que constituye el lote por inspeccionar, el elemento o unidad del lote y si el muestreo se hará por atributos o variables debe especificarse:

Nivel de calidad aceptable.
Número de grupo de elementos que deben ser muestreados.
Nivel de inspección.

El muestreo de aceptación implica que al extraer una muestra aleatoria de un lote, éste se aceptará si el número de defectuosos encontrados en la muestra no exceede a un "número de aceptación". Este procedimiento es equivalente a probar la hipótesis $H_o$ de que la proporción

de defectuosos p en un lote es igual a un valor dado $p_o$, contra la hipótesis alternativa $H_1$ de que es igual a $p_1$, donde $p_1 > p_o$. Al valor $p_o$ se le llama "nivel de calidad aceptable" N C A y $P_1$ es llamado porcentaje de defectuosos tolerables por lote P D T L, algunos autores lo llaman nivel de calidad rechazable N C R (ver referencia # 4, pág. 530).

La probabilidad máxima de rechazar un lote bueno (error de tipo I) se acostumbra llamar "riesgo del productor"; y la máxima probabilidad $\beta$ de aceptar un lote malo, (error del tipo II), es llamado "riesgo del consumidor".

El número de grupos de elementos que deben ser muestreados, dependerá de que el plan de muestreo sea "simple", "doble", "múltiple" ó "secuencial". El plan de muestreo simple, únicamente especifica tamaño n de la muestra y número de aceptación a, que deben ser usados: la elección de estos números está basada en el N C A y en el P D T L, así como en los riesgos del productor y consumidor $\alpha$ y $\beta$. Así, si al examinar la muestra el número de defectuosos encontrado es menor o igual que a, el lote se acepta; en caso contrario se rechaza. Un plan de muestreo dado queda mejor descrito por su "curva característica operacional" C O, la cual relaciona la proporción de defectuosos en un lote con la probabilidad de aceptar dicho lote; además la C O describe el grado de protección ofrecida

por el plan de muestreo, respecto a la calidad de los lotes. La probabilidad de aceptar un lote con N elementos y conteniendo una proporción p de defectuosos, (el número de defectuosos será Np), en base a una muestra de tamaño n y siendo el número de aceptación a; queda expresada, utilizando la distribución hipergeométrica, como:

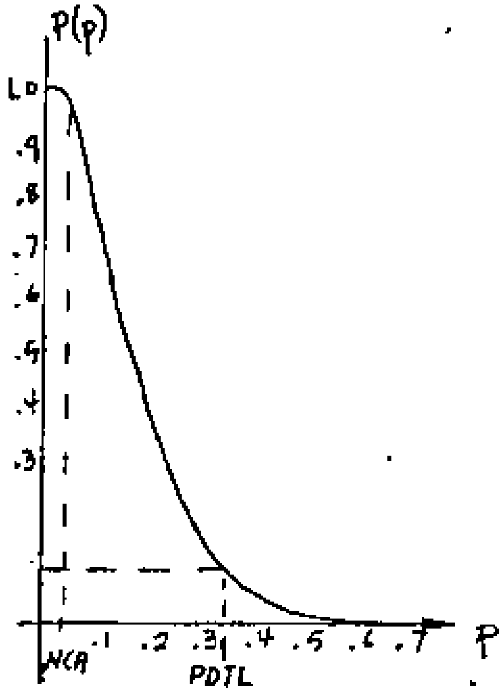
$$P(p) = \sum_{x=0}^{a} \frac{\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

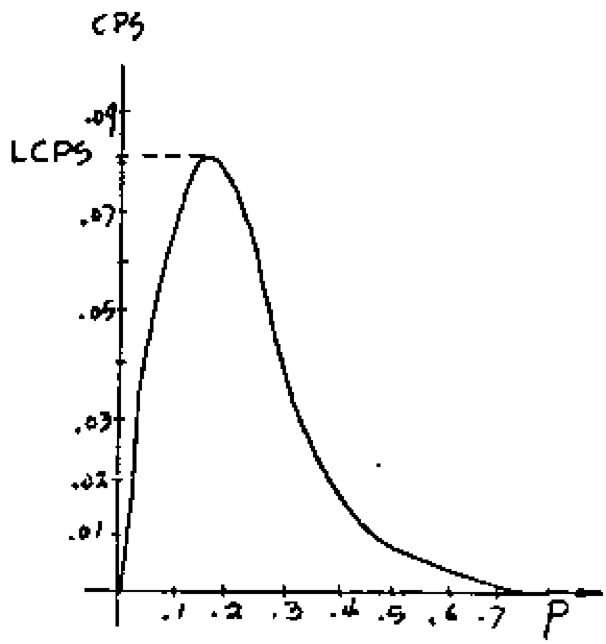
Aunque puede aproximarse con éxito a una binomial $P(p) = \sum_{x=0}^{a} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ cuyos valore se encuentran tabulados (ver ref. # 1, pág. 389).

De la curva C O puede verse que el "riesgo del productor" $\alpha$ es uno, menos la probabilidad de aceptar un lote con una proporción p de defectuosos igual al NCA y el riesgo del productor es la probabilidad de aceptar un lote con una probabilidad de defectuosos igual al PDTL.

También es conveniente, para la mejor descripción de un plan de muestreo, graficar la llamada curva de la "calidad promedio de salida" CPS, en la cual se relacionan la proporción p de defectuosos en un lote con la esperanza de aceptar un lote con dicha proporción de defectuosos, es decir, el producto p.P(p). Al máximo valor de este producto se le conoce con el nombre de "límite de la calidad promedio de salida" LCPS.

Las curvas OC y CPS para un ejemplo en el que N = 100; n = 10 y a = 1 son las siguientes:




Algunas veces el muestreo simple requiere un tamaño n de muestra grande, el cual puede reducirse con el muestreo doble o múltiple. En éste se extrae una muestra pequeña y si el lote es bueno, es decir tiene un número de defectuosos menor o igual a $a_1$ (número de aceptación para la primera muestra) se acepta; si el lote es malo,

o sea, si el número de defectuosos es mayor o igual a $r_1$ (número de rechazo para la primera muestra), se rechaza; si el número de defectuosos está comprendido entre $a_1$ y $r_1$ se extrae otra muestra, el total de defectuosos (los de la primera más los de la muestra siguiente) se compara con $a_2$ y $r_2$, etc. En general para plan de muestreo.

| | |
|---|---|
| Doble | $r_2 = a_2 + 1$ |
| Triple | $r_3 = a_3 + 1$ |

Si llamamos $n_1$ y $d_1$ al tamaño y número de defectuosos de la primera muestra respectivamente $n_2$ y $d_2$ a los correspondientes de la segunda, el tamaño promedio, de muestra en plan de muestreo doble será,

$$n_1\left[p(d_1 \leq a_1) + p(d_1 \geq r_1)\right] + n_2\left[p(a_1 < d_1 < r_1)\right]$$

En general este tamaño promedio en muestreo doble será inferior al tamaño n de la muestra en muestreo simple, para el mismo grado de protección en ambos planes.

Después de decidir si se usará un plan de muestreo simple, doble o múltiple debe escogerse el "nivel de inspección", el cual depende de la importancia de detectar elementos defectuosos en el lote.

Existen tres niveles llamados I, II y III; el III debe ser usado cuando los defectuosos deben rechazarse por seguridad, el tamaño de muestra requerido en este caso es muy grande. Si por el contrario, el aceptar mayor número de defectuosos no es de mucha importancia y la prueba es costosa, debe usarse el nivel I, el cual nos conduce a tamaños menores de muestra. Si no existe alguna de las circunstancias anteriores (que es lo más frecuente) debe emplearse el nivel II.

Existen tablas en las cuales, para un tamaño dado de lote y nivel de inspección deseado, se obtiene una letra; con esta letra y el de nivel de calidad aceptable NCA especificado, en otra tabla puede obtenerse el tamaño n de muestra y los números de aceptación a y de rechazo r. Estas tablas correspondientes a un plan de muestreo simple, pueden verse en la referencia # 1, págs 414 y 415.

El muestreo múltiple llevado al extremo es llamado "muestreo secuencial", en éste después de la inspección de cada elemento, se decide si se acepta el lote, si se rechaza o si se continúa el muestreo; para ello se calculan $a_n$ y $r_n$, basados en el nivel de calidad aceptable, representado por $p_o$, en el PDTL, representado por $p_1$, en el riesgo $\alpha$ del productor y en el riesgo $\beta$ del consumidor, por medio de las siguientes expresiones.

$$a_n = \frac{\log \frac{\beta}{1-\alpha} + n \log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}} \qquad r_n = \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha} + n \log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

Si $a_n$ resulta fraccionario se redondea al entero inmediato inferior, y si es negativo se considera nulo; si $r_n$ no es entero se redondea al entero inmediato superior.

Si el número de defectuosos es $\leq a_n$ se acepta el lote, si es $\geq r_n$ se rechaza, si queda comprendido entre $a_n$ y $r_n$ se continúa.

El muestreo secuencial puede representarse gráficamente; los valores obtenidos de las expresiones anteriores, para diferentes valores de n se representan por dos líneas rectas que limitan las zonas de aceptación y rechazo respectivamente, si la representación gráfica del número de defectuosos d está en la zona limitada por las dos líneas rectas, el muestreo debe continuarse y se detendrá cuando ésta representación pase a la zona de aceptación o rechazo, algunas ocasiones esto no sucede, por lo que se acostumbra, dar de antemano un número N tal que al llegar a un número n de elementos inspeccionados igual a N el muestreo debe truncarse y decidir si se acepta o no el lote.

Ejemplo:

Si suponemos $p_o = 0.05$, $p_1 = 0.20$ $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$

queda:

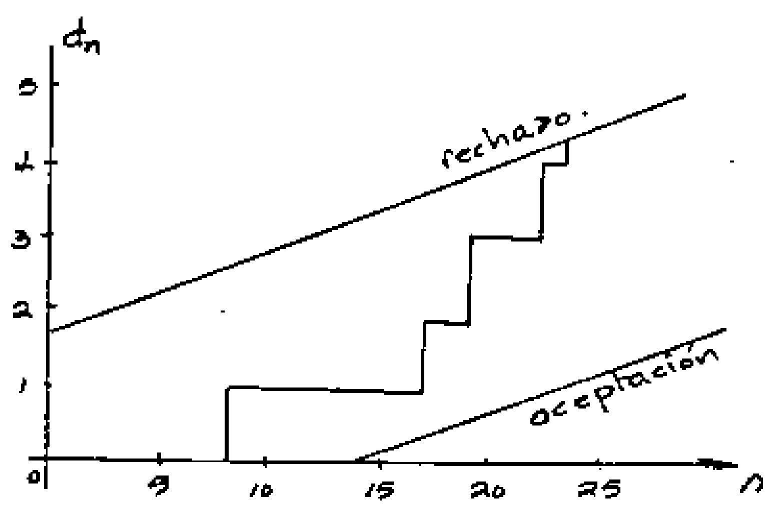
$$a_n = -1.45 + 0.11\, n$$

$$r_n = 1.86 + 0.11\, n$$

Tabulando $a_n$, $r_n$ y número de defectuosos $d_n$ para diferentes valores de n se obtiene.

| n | $d_n$ | $a_n$ | $r_n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | - | - |
| 2 | 0 | - | - |
| 3 | 0 | - | 3 |
| 4 | 0 | - | 3 |
| 5 | 0 | - | 3 |
| 6 | 0 | - | 3 |
| 7 | 0 | - | 3 |
| 8 | 1 | - | 3 |
| 9 | 1 | - | 3 |
| 10 | 1 | - | 3 |
| 11 | 1 | - | 4 |
| 12 | 1 | - | 4 |
| 13 | 1 | - | 4 |
| 14 | 1 | 0 | 4 |
| 15 | 1 | 0 | 4 |
| 16 | 1 | 0 | 4 |
| 17 | 2 | 0 | 4 |
| 18 | 2 | 0 | 4 |
| 19 | 3 | 0 | 4 |
| 20 | 3 | 0 | 5 |
| 21 | 3 | 0 | 5 |
| 22 | 4 | 0 | 5 |
| 23 | 5 | 1 | 5 |

Gráficamente




En el ejemplo a los 23 elementos inspeccionados se obtuvo $d_n = r_n$, por lo tanto termina el muestreo con rechazo del lote.

Referencias:


1. Miller I. and Freund J. W.
   "Probability and Statistics for Engineers"
   Prentice-Hall 1965

2. Bowker A. H. and Lieberman G. J.
   "Engineering Statistics"
   Prentice-Hall 1961

3. Crow E. L., Davis F. A. and Maxfield M. W.
   "Statistic Manual"
   Dover

4. Ostle B.
   "Estadística Aplicada"
   Limusa-Wiley 1965

5. Anuario.
   "Servicio Estadístico.
   S.O.P. México. 1961

6. Rice W. P.
   "Control Charts in Factory Management"
   Wiley 1946

7. Grant E. L.
   "Statistical Quality Control"
   McGraw Hill 1962

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD Y DISEÑO DE ESPECIFICACIONES

# CARTAS DE CONTROL

M. en I. JOSE ANTONIO MENDOZA M.

Diciembre, 1982

# I - NATURALEZA DEL PROBLEMA

Se llama "calidad", desde el punto de vista estadístico, a la característica medible o contable de un producto, por ejemplo al diámetro de una varilla, a la resistencia de un concreto, etc, entre las contables, número de defectuosos (o porcentaje) de tabiques en un lote de estos. La "calidad" de todo producto manufacturado está siempre sujeta a cierta cantidad de variación; esta variación puede deberse a dos tipos diferentes de causas: unas llamadas "causas asignables", cuyos efectos en general son relativamente grandes y pueden atribuirse o asignarse a ciertos factores específicos, tales como falta de adiestramiento de los operadores, defectos en la maquinaria o en las materias primas, etc; las otras son un conjunto de causas ignoradas por nosotros, pero el efecto de cada una de ellas es muy pequeño, estas son las llamadas "causas aleatorias" o casuales. La variación de la calidad debida a "causas aleatorias" es inevitable pero la cantidad y el carácter de dicha variación puede predecirse por medio de las teorías probabilísticas, en términos generales.

Cuando en un procesocoperatorio las únicas causas de variación de calidad son las aleatorias, se dice que está "bajo control estadístico" y si intervienen una o más causas asignables, se dice que está "fuera de control estadístico".

Para establecer el control estadístico de calidad de un producto, debería hacerse uso de todas las técnicas desarrolladas en la es_

b) Las técnicas de las cartas de control son aplicables en cualquier etapa de la producción de un proyecto.

c) Generalmente no se encuentra un estado de control riguroso.

d) Debe establecerse un estado de control a un nivel satisfactorio abajo de la máxima eficiencia que puede obtenerse en la operación.

e) La calidad es intrinseca al producto y no puede introducirse a él por medio de su inspección.

## II - CARTAS DE CONTROL

La característica fundamental de la técnica estadística llamada "carta de control" es la de inferir sobre el proceso de producción en base a muestras tomadas de dicha producción. A través de dicha carta podremos conocer cual es el estado de control; lograr control a un nivel apropiado y juzgar si se ha logrado o no el nivel deseado.

Para establecer carta de control de una característica, sea medible o contable se supone que sólo actúan causas aleatorias y se señalan regiones de aceptación y de rechazo para dicha característi_

ca. Si los valores calculados a partir de muestras caen en la región de aceptación, se dice que los puntos están bajo control y en caso contrario que están fuera de control.

La zona de rechazo se fija en términos de la probabilidad de rechazar la hipótesis, de que sólo actúan causas aleatorias, cuando es verdadera, es decir, si todos los puntos caen en la zona de aceptación, no significa que no existen causas asignables sino que se tiene la probabilidad, fijada de antemano, de que las únicas causas que operaron fueron casuales.

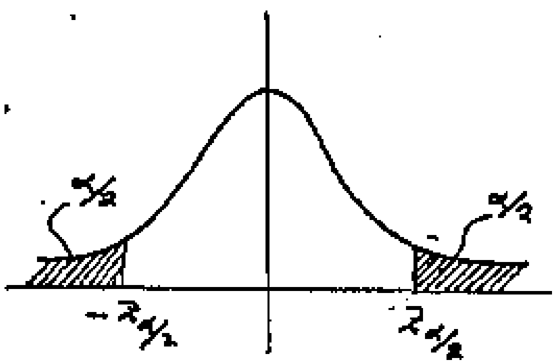
II.1 Cartas de Control para Variables.

Cuando tratamos con características medibles, es costumbre ejercer control sobre la calidad promedio de un proceso, así como sobre la variabilidad; para la primera, se traza la llamada "carta de control para medias" o simplemente "carta $\bar{X}$"; para la variabilidad se trazan las llamadas "carta R" y "carta $\sigma$" si se toma el rango o la desviación estándar de las muestras respectivamente, como estimadores de la desviación estándar de la población.

II.1.a) Carta $\bar{X}$

Si suponemos que la población (formada por los resultados obtenidos de las repeticiones de un proceso operatorio) está normalmen

distribuida, podemos asegurar con una probabilidad de $1-\alpha$ que la media de una muestra aleatoria de tamaño n estará dentro de los límites $\mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $\mu$ y $\sigma$ son respectivamente, media y desviación estándar de la población y $Z_{\alpha/2}$ es la abscisa correspondiente a una área de probabilidades de $\alpha/2$ en una distribución normal estándar. Si la población no está normalmente distribuida, pero la muestra es grande o se ejecuta el muestreo con reemplazo, las afirmaciones anteriores siguen siendo válidas.

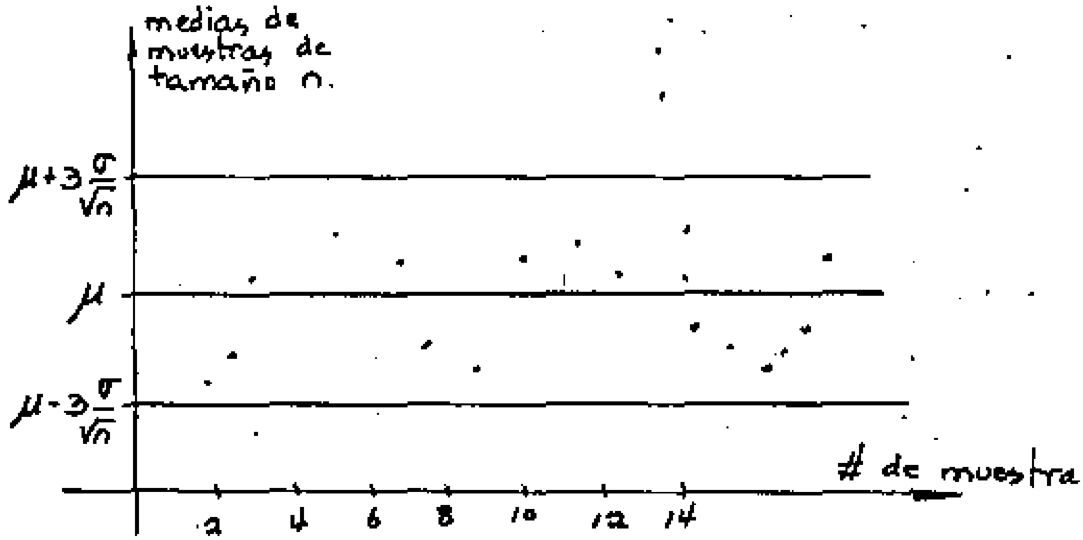



En la práctica se acostumbra considerar una probabilidad (intervalo de confianza) de 99.73%, a la que corresponde una $Z_{\alpha/2} = 3$.

En la "Carta $\bar{X}$, la zona de aceptación, con probabilidad de 99.73%, tendrá una línea central $\mu$ , un límite superior de control $\mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y un límite inferior de control $\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . El factor $3/\sqrt{n}$ se encuentra tabulado para diferentes valores de n y se representa por A, así los límites de control son $\mu \pm A\sigma$ (ver tabla # 1).

Para cada muestra aleatoria de tamaño n extraida de la población se calcula su media $\bar{X}$ mediante la expresión $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

Si el proceso está "bajo control", se espera que sólo 27 de 10 000 muestras tendrán una $\bar{X}$ que caerá fuera de la zona aceptación.




Generalmente $\mu$ y $\sigma$ son desconocidas, por lo que las sustituiremos por estimadores de máxima verosimilitud como son la media de las medias de las muestras $\bar{\bar{X}}$ y la media de las desviaciones estándar de las muestras $\bar{S}$, respectivamente.

Si se toman k muestras, en donde es aconsejable que $k > 25$.

$\bar{\bar{X}} = \dfrac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \ldots + \bar{X}_k}{k}$ ; $\bar{\bar{X}}$ es un estimador insesgado de $\mu$ donde $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots\ldots\ldots, \bar{X}_k$ son las medias de la primera, segunda...Késima muestra respectivamente.

si el tamaño de las muestras es el mismo: $\bar{S} = \dfrac{S_1 + S_2 + \ldots + S_k}{k}$

Las desviaciones estándar $S_1, S_2, \ldots\ldots\ldots, S_k$ de las muestras se obtienen de :

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}} \qquad j = 1, 2, \ldots k$$

S es un estimador sesgado de $\sigma$ y para evitar el sesgo debe multiplicarse por $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ quedando $\sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$ puede entonces decirse que: $\sigma = \bar{S}/c_2$ donde $1/c_2$ es un factor que depende del tamaño n de la muestra y que se encuentra tabulado (ver tabla 1).

Con estos estimadores los límites de contro son: $\bar{\bar{X}} \pm \frac{3}{\sqrt{n}\, c_2} \bar{S}$
Se acostumbra llamar con $A_1$ al factor $\frac{3}{\sqrt{n}\, c_2}$ que también está tabulado para diferentes valores de n (tabla 1) los límites son entonces, $\bar{\bar{X}} \pm A_1 \bar{S}$

Puede sustituirse $\sigma$ por otro estimador basado en el "rango" R de las muestras, que se define como la diferencia entre el máximo valor de los elementos de la muestra y el mínimo valor de los mismos. Si se eligen k muestras, se calculan los rangos de ellas y se obtiene la media de los rangos $\bar{R}$ con la expresión

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_k}{k} = \frac{\sum R_i}{k}$$

El estimador de $\sigma$ basado en rangos tiene un sesgo mayor que el basado en desviaciones estándar, pero éstas son más laboriosas de calcular que aquéllos, por lo que a menudo se les da preferencia a los rangos.

Existen tablas en donde se encuentra la relación $\overline{R}/\sigma$ que se representa por $d_2$, para diferentes tamaños de la muestra, de aquí que $\sigma = \overline{R}/d_2$ y los límites de control para la "carta $\overline{X}$ serán $\overline{\overline{X}} \pm \frac{3\overline{R}}{d_2\sqrt{n}}$.
El factor $\frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ que es llamado $A_2$ también está tabulado (tabla 1) quedando los límites:

$$\overline{\overline{X}} \pm A_2 \overline{R}$$

Resumen: Los límites de contro para la "Carta $\overline{X}$ son:

$\mu \pm A\sigma$ cuando $\mu$ y $\sigma$ son conocidos

$\overline{\overline{X}} \pm A_1\overline{S}$ cuando $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{S}$ son estimadores de $\mu$ y $\sigma$ respectivamente.

$\overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R}$ cuando $\mu$ y $\sigma$ son estimados por $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{R}$ respectivamente.

Si el proceso no está bajo control (indicado por puntos fuera de los límites establecidos), deben revisarse los límites calculados para obtener un proceso controlado. Una regla práctica para el cálculo de los nuevos límites es eliminar a los puntos fuera de control y con los restantes calcular la nueva $\overline{\overline{X}}$ y $\overline{R}$ ó $\sigma$ según el caso; este procedimiento debe continuarse hasta que todos los puntos caigan dentro de los límites de control. Lo anterior, aunque no tiene una justificación teórica, se basa en que la situación de dichos

puntos puede deberse a una causa asignable. Los límites calculados en base a estimadores son llamados naturales, pero podemos calcular otros límites, basados en datos específicos, en ese caso usaremos las fórmulas correspondientes a $\mu$ y $\sigma$ conocidas y en ellas sustituiremos los valores especificados.

II.1.b) Carta S y Carta R

Los rangos R y las desviaciones estándar S de las muestras son variables aleatorias, tales que aunque sus poblaciones no están normalmente distribuidas se ha encontrado que casi la totalidad de ellas se encuentra en el intervalo limitado por la media de dichas poblaciones más y menos, tres veces la desviación estándar de las poblaciones de dichas variables aleatorias.
De $\sigma = \bar{S}/C_2$ obtenido anteriormente llegamos a que la media de las desviaciones es $\bar{S} = \sigma C_2$

La desviación estándar de S está dada por

$$\sigma_S = \sqrt{2(n-1) - 2nC_2^2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

Así los límites de control para la Carta S, que son $\bar{S} \pm 3\sigma_S$ pueden expresarse

$$\sigma \left[ C_2 \pm \frac{3}{\sqrt{2n}} \sqrt{2(n-1) - 2nC_2^2} \right]$$

Los factores de $\sigma$ son llamados $B_2$ (considerando el signo +), y $B_1$ (considerando el signo -), que dependen sólo de n y se encuentran tabulados.

Por lo tanto los límites para una Carta S, cuando la desviación estándar $\sigma$ de la población original es conocida, serán:

Límite superior $\bar{S}+B_2\sigma$

Límite inferior $\bar{S}-B_1\sigma$

Como en la práctica no es fácil que pueda conocerse $\sigma$ se sustituye por su estimador $\bar{S}/C_2$ quedando entonces los límites:

$$\bar{S}\left[1 \pm \frac{3}{c_2\sqrt{2n}}\sqrt{2(n-1)-2nc_2^2}\right]$$

donde los factores de $\bar{S}$, llamados $B_4$ (considerando signo +) y $B_3$ (considerando signo -), depende sólo del tamaño de la muestra y se encuentran tabulados (tabla 1). Luego los límites serán:

Límite superior $\bar{S}+B_4\ \bar{S}$

Límite inferior $\bar{S}-B_3\ \bar{S}$

La línea central es $C_2\sigma$ cuando se conoce $\sigma$, en caso de ser desconocida $\sigma$, la línea central es $\bar{S}$.

Los límites de control para la Carta R se obtienen en forma semejante. Se había ya obtenido que $\bar{R} = \sigma d_2$. Puede verse que la desviación de R, $\sigma_R$ es $\sigma_R = d_3\sigma$ donde $d_3$ depende de n; luego los límites

serán $\sigma(d_2 \pm d_3)$.

Designando con $D_2$ a la suma $d_2 + d_3$ y con $D_1$ a la diferencia $d_2 - d_3$ tendremos

Límite superior $D_2 \sigma$

Límite inferior $D_1 \sigma$

Sustituyendo a $\sigma$ por su estimador $\sigma = \bar{R}/d_2$ se llega a $\bar{R}\left[1 \pm \frac{d_3}{d_2}\right]$
y si $D_4 = 1 + d_3/d_2$ y $D_3 = 1 - d_3/d_2$

se obtiene

Límite superior $D_4\bar{R}$

Límite inferior $D_3\bar{R}$

la línea de centro es de $d_2 \sigma$ ó $\bar{R}$ según sea conocida o no $\sigma$ .

Los factores $d_3$, $D_1$, $D_2$, $D_3$ y $D_4$ están tabulados y pueden verse en la tabla 1.

Para las Cartas S y R, también podemos calcular límites basados en datos específicos, como se indicó en la Carta $\bar{X}$.

Ejemplo:

De la producción de cierto artículo se han extraído 20 muestras de tamaño 4, habiéndose obtenido que

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{k=1}^{20} \bar{X}_k}{20} = 0.9752 \text{ y } \quad \bar{R} = \frac{\sum_{k=1}^{20} \bar{R}_k}{20} = 0.0002.$$

Codificándose los datos por medio de la ecuación: $\frac{X - 0.975}{0.001}$ i.e expresando cada medida como una desviación de 0.975 en 0.0001

| Carta $\bar{X}$ (codificada) | | Carta R (codificada) | |
|---|---|---|---|
| Línea Central | $\bar{\bar{X}} = 2.0$ | Línea Central | $\bar{R} = 2.0$ |
| L S C | $\bar{X} + A_2\bar{R} = 3.4$ | L S C | $D_4R = 4.5$ |
| L I C | $\bar{X} - A_2\bar{R} = 0.6$ | L I C | $D_3R = 0$ |

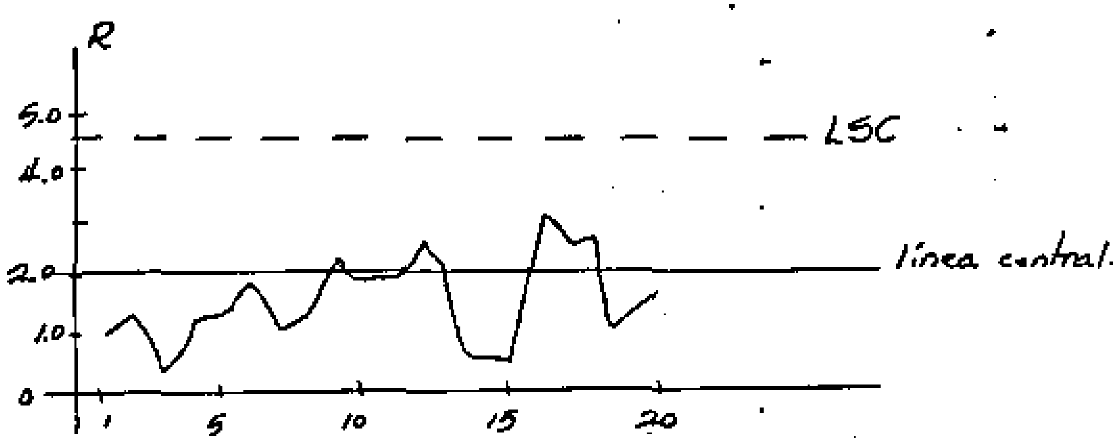


Tabla 1. Factores para Calcular Líneas de Cartas de Control

| Tamaño de Muestra | Carta $\bar{X}$ | | | | | Carta S | | | | Carta R | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Factores para límites | | | Factores línea central | | Factores para límites | | | | Factores línea central | | | Factores para límites | | | |
| n | A | $A_1$ | $A_2$ | $c_2$ | $1/c_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $d_2$ | $1/d_2$ | $d_3$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
| 2 | 2.121 | 3,760 | 1.880 | 0.5642 | 1.7725 | 0 | 1,843 | 0 | 3.267 | 1.128 | 0.8865 | 0.853 | 0 | 3.686 | 0 | 3.267 |
| 3 | 1.732 | 2.394 | 1.023 | 0.7236 | 1.3820 | 0 | 1.858 | 0 | 2.568 | 1.693 | 0.5907 | 0.888 | 0 | 4.358 | 0 | 2.575 |
| 4 | 1.500 | 1.880 | 0.729 | 0.7979 | 1.2533 | 0 | 1.808 | 0 | 2.266 | 2.059 | 0.4857 | 0.880 | 0 | 4.698 | 0 | 2.282 |
| 5 | 1.342 | 1.596 | 0.577 | 0.8407 | 1.1894 | 0 | 1.756 | 0 | 2.089 | 2.326 | 0.4299 | 0.864 | 0 | 4.918 | 0 | 2.115 |

Nota: La tabla para n comprendida entre 2 y 25 puede verse en la referencia Nº 2, pág. 382.

## II.2 Cartas de Control para Atributos.

En el punto anterior hablamos de cartas para variables o características medibles que pueden expresarse en números, en este nos ocuparemos de cartas para características contables, es decir clasificando el concepto en defectuoso o no defectuoso. Las cartas para atributos pueden ser de dos tipos, las que están basadas en la fracción defectuosa y que se conocen como "carta p"; y los que registran el número de defectos por unidad, estas son las llamadas "Carta C".

Al analizar los elementos de una muestra para el trazo de una carta p, los resultados posibles sólo pueden ser defectuoso o no defectuoso, es decir, la población tiene una distribución de probabilidad binomial en la que si p es la probabilidad de obtener un defectuoso en la población, la media $\mu$ de una muestra de tamaño n será np y su desviación estándar $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

La probabilidad de obtener d defectuosos en n elementos es: ${}_dC_n p^d (1-p)^{n-d}$

y la probabilidad de obtener como máximo a defectuosos en una muestra de tamaño n es: $\sum_{d=0}^{d=a} {}_dC_n p^d (1-p)^{n-d}$

Si definimos una nueva variable aleatoria como la fracción defectuosa en la muestra $\frac{d}{n}$, la media de esta nueva variable es p y su desviación estándar $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Una regla empírica para el cálculo de los límites de control para fracción defectuosa es su media, aumentada y disminuida de tres veces su desviación. Esta regla empírica se vuelve aproximadamente exacta a medida que n crece.

Los límites quedan entonces: $p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

cuando p es conocida.. Si p no se conoce debe estimarse por datos anteriores por medio de $\bar{p}$

$$\bar{p} = \frac{\text{número total de defectuosos}}{\text{número total de inspeccionados}}$$

El número total de defectuosos se refiere a la suma de los defectuosos encontrados en las k muestras analizadas, recomendándose que ese número no sea menor de 25. Por lo que los límites quedarán:

$$\bar{p} \pm \frac{3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}$$

Si algunos puntos caen fuera de los límites de control, deben calcularse nuevos límites con el estimador $\bar{p}$ calculado únicamente con los puntos bajo control en el paso anterior.

Ej. De la producción de una máquina para hacer tornillos se extraen 25 muestras de 50 tornillos cada una; los datos obtenidos de esas 25 muestras fueron los siguientes.

| No. de muestra | d | p | No. de muestra | d | p | No. de muestra | d | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.02 | 9 | 1 | 0.02 | 17 | 1 | 0.02 |
| 2 | 2 | 0.04 | 10 | 0 | 0.00 | 18 | 0 | 0.00 |
| 3 | 5 | 0.10 | 11 | 0 | 0.00 | 19 | 0 | 0.00 |
| 4 | 6 | 0.12 | 12 | 1 | 0.02 | 20 | 1 | 0.02 |
| 5 | 3 | 0.06 | 13 | 0 | 0.00 | 21 | 1 | 0.02 |
| 6 | 5 | 0.10 | 14 | 1 | 0.02 | 22 | 0 | 0.00 |
| 7 | 2 | 0.04 | 15 | 0 | 0.00 | 23 | 0 | 0.00 |
| 8 | 1 | 0.02 | 16 | 2 | 0.04 | 24 | 1 | 0.02 |
| | | | | | | 25 | 0 | 0.00 |

Número total de defectuosos = 34

Número total de inspeccionados = 1250

$$\bar{p} = \frac{34}{1250} = 0.0272 ; \quad 1 - \bar{p} = 0.9728$$

límite superior = $0.0272 + \frac{3\sqrt{0.0272 \times 0.9728}}{7.071} = 0.0963$

como el límite inferior resulta negativo, se considera nulo

límite inferior = 0

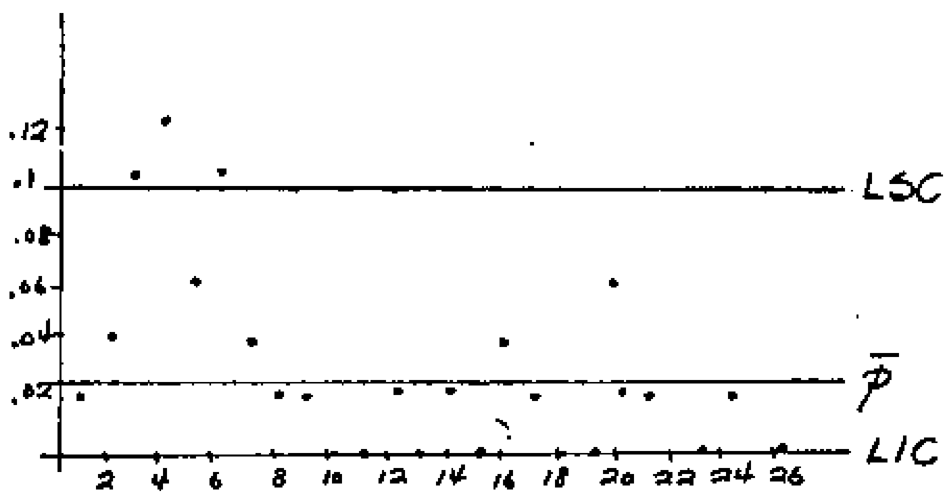
Las muestras números 3, 4 y 6 están fuera de control con los límites de prueba _ calculados, puede suponerse que hasta la 6a muestra estaban actuando causas asig nables, por lo que se calcula el nuevo p eliminando las 6 primeras muestras

$$\bar{p} = \frac{12}{950} = 0.0126$$

$$\text{límite superior} = 0.0126 + \frac{3\sqrt{0.0126 \times 0.126 \times 0.9874}}{7.071} = 0.0599$$

Límite inferior = 0

Con estos nuevos límites, todos los puntos están bajo control.




La Carta C es una carta de control para defectos por unidad. La unidad puede ser un solo artículo, un grupo de artículos, una parte de un artículo, etc. Se examina la unidad y el número de defectos encontrados se registra en la Carta C.

En general en una unidad examinada pueden aparecer un gran número de defectos pero la probabilidad de que aparezca cada uno de ellos es muy pequeña, por lo que puede considerarse que la variable aleatoria C tiene una distribución de probabilidad que es la de Poisson. Así si llamamos C' al promedio de defectos por unidad (conocido de antemano, o estimado de datos pasados), la probabilidad de encontrar C defectos en una unidad es:

$C'^{c} e^{-c'}/c!$ , la desviación estándar está dada por $\sqrt{C'}$, de aquí que los límites de control son: $C' \pm 3\sqrt{C'}$

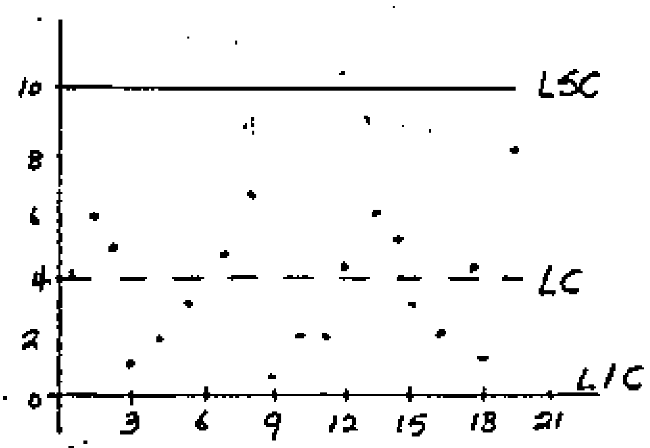
Ejemplo:

De pasadas experiencias, se sabe que para el ensamble de una máquina se tiene un promedio de C' = 3.8 remaches perdidos.

Por tanto: $LSC = C' + 3\sqrt{C'} = 3.8 + 3 \times 1.95 = 10$

$LIC = C' - 3\sqrt{C'} = 3.8 - 3 \times 1.95 < 0 \therefore LIC = 0$

$\therefore LC = C' = 3.8$




Como se han ensamblado 25 máquinas con los siguientes remaches perdidos

4, 6, 5, 1, 2, 3, 5, 7, 1, 2, 2, 4, 6, 5, 3, 2, 4, 1, 8, 4, 5, 6, 3, 4, 2.

# III - LIMITES DE TOLERANCIA

A menudo la calidad de un producto manufacturado debe estar comprendida dentro de unos límites especificados, llamados "límites de tolerancia". Estos límites nos indican con una probabilidad $(1-\alpha)$ dada de antemano, que el 100 P % de la población estará dentro de ellos.

Si la media $\mu$ y la desviación estándar $\sigma$ de la población normalmente distribuida son conocidos, podemos asegurar que el 100 $(1-\alpha)$ % de la población estará dentro de los límites $\mu \pm Z_{\alpha/2}\sigma$. Pero generalmente no se conocen por lo que se sustituyen por sus estimadores $\bar{X}$ y S respectivamente, pero puede verse que el intervalo $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} S$ no siempre contendrá al 100 $(1-\alpha)$ % de la población. Sin embargo es posible determinar una constante K que al ser instituida por $Z_{\alpha/2}$ nos dé los límites de un intervalo tal, que una proporción P de la población esté contenida en él con una probabilidad de $1-\alpha$. Estos límites son: $\bar{X} \pm KS$. Los valores de K dependen del tamaño n de la muestra, de P y de $1-\alpha$ y se encuentran tabulados (ver tabla 2).

Tabla 2 - Factores para Límites de Tolerancia de dos Lad

| | $1-\alpha=0.95$ | | | $1-\alpha=0.99$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n \ P | 0.90 | 0.95 | 0.99 | 0.90 | 0.95 | 0.99 |
| 2 | 32.019 | 37.674 | 48.430 | 160.193 | 188.491 | 242.300 |
| 3 | 8.380 | 9.916 | 12.861 | 18.930 | 22.401 | 29.055 |
| 4 | 5.369 | 6.370 | 8.299 | 9.398 | 11.150 | 14.527 |
| 5 | 4.275 | 5.079 | 6.634 | 6.612 | 7.855 | 10.260 |

Nota: La tabla para valores de n de 2 a 10 000 puede verse en la re rencia Nº 1, pág. 413.

Algunas veces es conveniente, en lugar de especificar dos límites, especificar uno de ellos, de manera que podamos asegurar con una pr babilidad $(1-\alpha)$ que el 100 P % de la población se encuentra arriba (límite inferior) o abajo (límite superior) de él. Estos límites s llamados "límites de tolerancia de un lado".

La constante k empleada para el cálculo de ellos, es distinta de la usada en los "límites de dos lados". Esta constante k también se cuentra tabulada. Así se tiene

Límite superior de un lado: $\bar{X} + kS$

Límite inferior de un lado: $\bar{X} - kS$

Si la población no está normalmente distribuida la teoría anterior sobre límites de tolerancia, no es aplicable. Sin embargo, existen límites que son independientes de la distribución de la población, que están calculados en base a la máxima y la mínima observación de una muestra de tamaño n.

Según referencia Nº 2 pág. 229, el tamaño de muestra n requerido para que el 100 P % de la población, con una probabilidad $1-\alpha$, se encuentre entre la mayor y menor observación de la muestra está dado por:

$$n \cong \left[\frac{2-(1-p)}{1-p}\right]\left[\frac{\chi^2_{\alpha,4}}{4}\right]+\frac{1}{2}$$

límites de tolerancia de dos lados.

Para límites de un solo lado la n requerida está dada por: $n = \frac{\log \alpha}{\log P}$

Debemos observar que los "límites de tolerancia" son diferentes a los límites del intervalo de confianza, ya que estos son usados para estimar un parámetro de una población, en cambio los de tolerancia nos indican entre que valores estará contenida una proporción de dicha población. La diferencia entre estos límites está basada en el hecho de que cuando n crece la longitud del intervalo de confianza se acerca a cero, mientras que los límites de tolerancia se aproximan a $\mu \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma$

## IV - MUESTREO DE ACEPTACION

El muestreo de aceptación se refiere a los métodos llamados "planes de muestreo", por los cuales el comprador puede decidir entre aceptar o no, lotes de un producto. Si resulta costoso, difícil o imposible examinar la totalidad del lote, el comprador decide aceptarlo o no sobre la información proporcionada por una muestra de dicho lote.

El muestreo de aceptación puede ser por "atributos" o por "variables". En el primer caso, el lote es rechazado si la muestra contiene demasiados defectuosos; en el caso de variables el criterio puede ser de "un lado" o de "dos lados" dependiendo de las especificaciones.

La decisión para elegir entre analizar atributos o variables, puede basarse en los siguientes puntos:

1.- Para la misma información entre lotes buenos y malos, se requiere una muestra mayor cuando se analizan atributos, que cuando se analizan variables. Por lo cual, si la inspección del elemento es costosa o destructiva, debe preferirse muestreo por variables.

2.- Las mediciones y cálculos requeridos para la inspección por variables, puede ser más costosa que la decisión de sí o no y el conteo requerido para la prueba por atributos. Así, se debe considerar si la prueba en sí, es costosa, difícil o tardada.

3.- Los métodos por variables proporcionan información producto por producto que puede utilizarse en el diagnóstico de la producción.

4.- La exactitud de los planes por variable depende de la suposición de la normalidad en la distribución de la variable medida; sin embargo, si dicha distribución se aparta de la normalidad, pueden usarse como métodos aproximados. Los planes por atributos no están sujetos a esta restricción.

5.- El muestreo por atributos puede requerir inspectores menos entrenados, que el muestreo por variables.

Después de decidir lo que constituye el lote por inspeccionar, el elemento o unidad del lote y si el muestreo se hará por atributos o variables debe especificarse:

Nivel de calidad aceptable.
Número de grupo de elementos que deben ser muestreados.
Nivel de inspección.

El muestreo de aceptación implica que al extraer una muestra aleatoria de un lote, éste se aceptará si el número de defectuosos encontrados en la muestra no exceede a un "número de aceptación". Este procedimiento es equivalente a probar la hipótesis $H_o$ de que la proporción

de defectuosos p en un lote es igual a un valor dado $p_o$, contra la hipótesis alternativa $H_1$ de que es igual a $p_1$, donde $p_1 > p_o$. Al valor $p_o$ se le llama "nivel de calidad aceptable" N C A y $P_1$ es llamado porcentaje de defectuosos tolerables por lote P D T L, algunos autores lo llaman nivel de calidad rechazable N C R (ver referencia # 4, pág. 530).

La probabilidad máxima de rechazar un lote bueno (error de tipo I) se acostumbra llamar "riesgo del productor"; y la máxima probabilidad $\beta$ de aceptar un lote malo, (error del tipo II), es llamado "riesgo del consumidor".

El número de grupos de elementos que deben ser muestreados, dependerá de que el plan de muestreo sea "simple", "doble", "múltiple" ó "secuencial". El plan de muestreo simple, únicamente especifica tamaño n de la muestra y número de aceptación a, que deben ser usados: la elección de estos números está basada en el N C A y en el P D T L, así como en los riesgos del productor y consumidor $\alpha$ y $\beta$. Así, si al examinar la muestra el número de defectuosos encontrado es menor o igual que a, el lote se acepta; en caso contrario se rechaza. Un plan de muestreo dado queda mejor descrito por su "curva característica operacional" C O, la cual relaciona la proporción de defectuosos en un lote con la probabilidad de aceptar dicho lote; además la C O describe el grado de protección ofrecida

por el plan de muestreo, respecto a la calidad de los lotes. La probabilidad de aceptar un lote con N elementos y conteniendo una proporción p de defectuosos, (el número de defectuosos será Np), en base a una muestra de tamaño n y siendo el número de aceptación a; queda expresada, utilizando la distribución hipergeométrica, como:

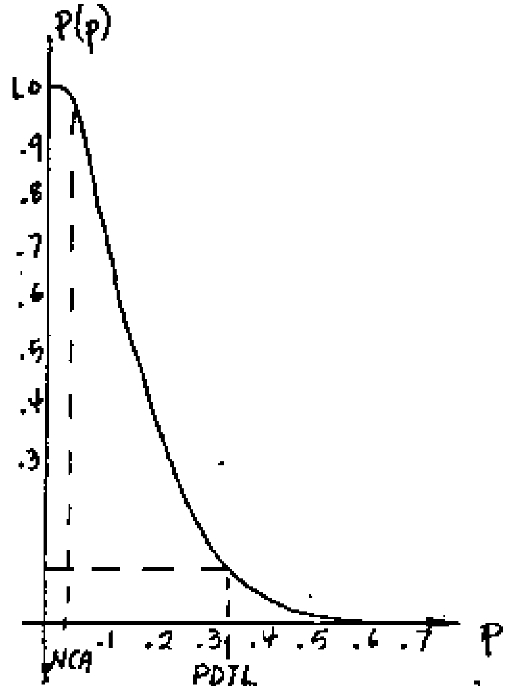
$$P(p) = \sum_{x=0}^{a} \frac{\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

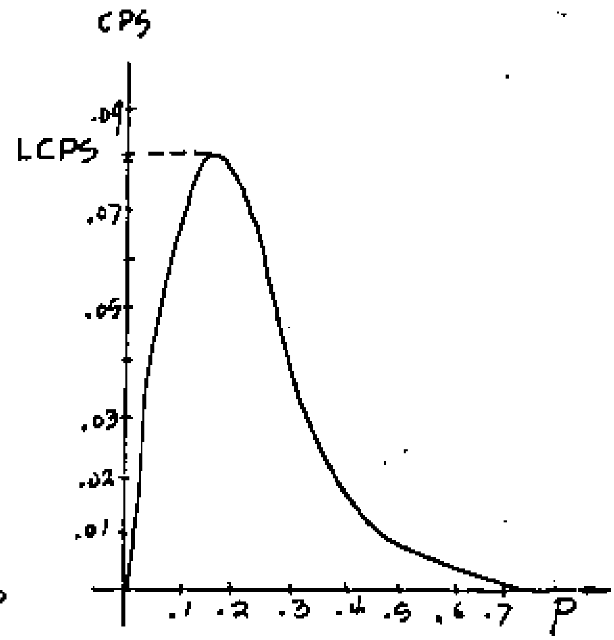
Aunque puede aproximarse con éxito a una binomial $P(p) = \sum_{x=0}^{a} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ cuyos valore se encuentran tabulados (ver ref. # 1, pág. 389).

De la curva C O puede verse que el "riesgo del productor" $\alpha$ es uno, menos la probabilidad de aceptar un lote con una proporción p de defectuosos igual al NCA y el riesgo del productor es la probabilidad de aceptar un lote con una probabilidad de defectuosos igual al PDTL.

También es conveniente, para la mejor descripción de un plan de muestreo, graficar la llamada curva de la "calidad promedio de salida" CPS, en la cual se relacionan la proporción p de defectuosos en un lote con la esperanza de aceptar un lote con dicha proporción de defectuosos, es decir, el producto p.P(p). Al máximo valor de este producto se le conoce con el nombre de "límite de la calidad promedio de salida" LCPS.

Las curvas OC y CPS para un ejemplo en el que N = 100; n = 10 y a _
= 1 son las siguientes:




Algunas veces el muestreo simple requiere un tamaño n de muestra _ grande, el cual puede reducirse con el muestreo doble o múltiple._ En éste se extrae una muestra pequeña y si el lote es bueno, es __ decir tiene un número de defectuosos menor o igual a $a_1$ (número de aceptación para la primera muestra) se acepta; si el lote es malo,

o sea, si el número de defectuosos es mayor o igual a $r_1$ (número de rechazo para la primera muestra), se rechaza; si el número de defectuosos está comprendido entre $a_1$ y $r_1$ se extrae otra muestra, el total de defectuosos (los de la primera más los de la muestra siguiente) se compara con $a_2$ y $r_2$, etc. En general para plan de muestreo.

Doble $\qquad r_2 = a_2 + 1$

Triple $\qquad r_3 = a_3 + 1$

Si llamamos $n_1$ y $d_1$ al tamaño y número de defectuosos de la primera muestra respectivamente $n_2$ y $d_2$ a los correspondientes de la segunda, el tamaño promedio, de muestra en plan de muestreo doble será,

$$n_1\left[p\left(d_1 \leq a_1\right) + p\left(d_1 \geq r_1\right)\right] + n_2\left[p\left(a_1 < d_1 < r_1\right)\right]$$

En general este tamaño promedio en muestreo doble será inferior al tamaño n de 1ª muestra en muestreo simple, para el mismo grado de protección en ambos planes.

Después de decidir si se usará un plan de muestreo simple, doble o múltiple debe escogerse el "nivel de inspección", el cual depende de la importancia de detectar elementos defectuosos en el lote.

Existen tres niveles llamados I, II y III; el III debe ser usado cuando los defectuosos deben rechazarse por seguridad, el tamaño de muestra requerido en este caso es muy grande. Si por el contrario, el aceptar mayor número de defectuosos no es de mucha importancia y la prueba es costosa, debe usarse el nivel I, el cual nos conduce a tamaños menores de muestra. Si no existe alguna de las circunstancias anteriores (que es lo más frecuente) debe emplearse el nivel II.

Existen tablas en las cuales, para un tamaño dado de lote y nivel de inspección deseado, se obtiene una letra; con esta letra y el de nivel de calidad aceptable NCA especificado, en otra tabla puede obtenerse el tamaño n de muestra y los números de aceptación a y de rechazo r. Estas tablas correspondientes a un plan de muestreo simple, pueden verse en la referencia # 1, págs 414 y 415.

El muestreo múltiple llevado al extremo es llamado "muestreo secuencial", en éste después de la inspección de cada elemento, se decide si se acepta el lote, si se rechaza o si se continúa el muestreo; para ello se calculan $a_n$ y $r_n$, basados en el nivel de calidad aceptable, representado por $p_o$, en el PDTL, representado por $p_1$, en el riesgo $\alpha$ del productor y en el riesgo $\beta$ del consumidor, por medio de las siguientes expresiones.

$$a_n = \frac{\log \frac{\beta}{1-\alpha} + n \log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}} \qquad r_n = \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha} + n \log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1}{p_0} - \log \frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

Si $a_n$ resulta fraccionario se redondea al entero inmediato inferior, y si es negativo se considera nulo; si $r_n$ no es entero se redondea al entero inmediato superior.

Si el número de defectuosos es $\leq a_n$ se acepta el lote, si es $\geq r_n$ se rechaza, si queda comprendido entre $a_n$ y $r_n$ se continúa.

El muestreo secuencial puede representarse gráficamente; los valores obtenidos de las expresiones anteriores, para diferentes valores de n se representan por dos líneas rectas que limitan las zonas de aceptación y rechazo respectivamente, si la representación gráfica del número de defectuosos d está en la zona limitada por las dos líneas rectas, el muestreo debe continuarse y se detendrá cuando ésta representación pase a la zona de aceptación o rechazo, algunas ocasiones esto no sucede, por lo que se acostumbra, dar de antemano un número N tal que al llegar a un número n de elementos inspeccionados igual a N el muestreo debe truncarse y decidir si se acepta o no el lote.

Ejemplo:

Si suponemos $p_o = 0.05$, $p_1 = 0.20$ $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$

queda:

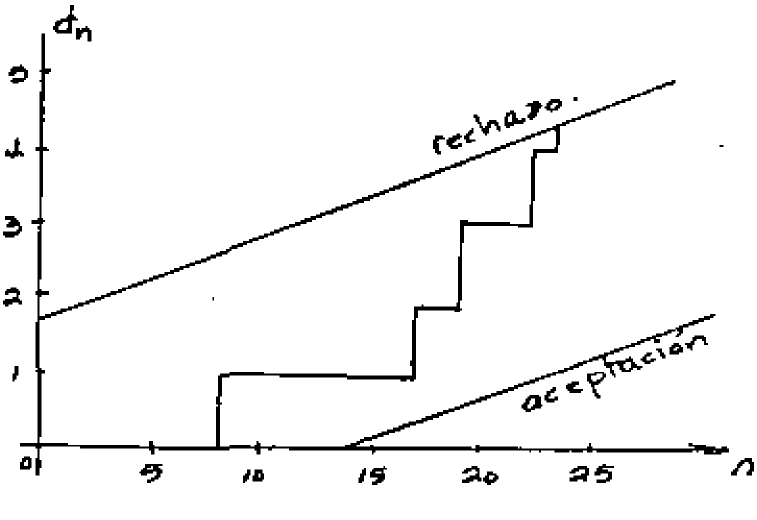
$$a_n = -1.45 + 0.11\ n$$

$$r_n = 1.86 + 0.11\ n$$

Tabulando $a_n$, $r_n$ y número de defectuosos $d_n$ para diferentes valores de n se obtiene.

| n | $d_n$ | $a_n$ | $r_n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | - | - |
| 2 | 0 | - | - |
| 3 | 0 | - | 3 |
| 4 | 0 | - | 3 |
| 5 | 0 | - | 3 |
| 6 | 0 | - | 3 |
| 7 | 0 | - | 3 |
| 8 | 1 | - | 3 |
| 9 | 1 | - | 3 |
| 10 | 1 | - | 3 |
| 11 | 1 | - | 4 |
| 12 | 1 | - | 4 |
| 13 | 1 | - | 4 |
| 14 | 1 | 0 | 4 |
| 15 | 1 | 0 | 4 |
| 16 | 1 | 0 | 4 |
| 17 | 2 | 0 | 4 |
| 18 | 2 | 0 | 4 |
| 19 | 3 | 0 | 4 |
| 20 | 3 | 0 | 5 |
| 21 | 3 | 0 | 5 |
| 22 | 4 | 0 | 5 |
| 23 | 5 | 1 | 5 |

Gráficamente




En el ejemplo a los 23 elementos inspeccionados se obtuvo $d_n = r_n$, por lo tanto termina el muestreo con rechazo del lote.

Referencias:


1. Miller I. and Freund J. W.
   "Probability and Statistics for Engineers"
   Prentice-Hall 1965

2. Bowker A. H. and Lieberman G. J.
   "Engineering Statistics"
   Prentice-Hall 1961

3. Crow E. L., Dàvis F. A. and Maxfield M. W.
   "Statistic Manual"
   Dover

4. Ostle B.
   "Estadística Aplicada"
   Limusa-Wiley 1965

5. Anuario.
   "Servicio Estadístico.
   S.O.P. México. 1961

6. Rice W. P.
   "Control Charts in Factory Management"
   Wiley 1946

7. Grant E. L.
   "Statistical Quality Control"
   McGraw Hill 1962