



Universidad Nacional Autónoma
de México



PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

Control de robots cooperativos con un observador lineal

T E S I S
QUE PARA OPTAR AL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
Área: Eléctrica, Campo: Control
P R E S E N T A:
LUIS RENÉ SAGREDO HERNÁNDEZ

Dirigida por:
Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

MÉXICO, D.F.

2006

**CONTROL DE ROBOTS COOPERATIVOS CON UN
OBSERVADOR LINEAL**

Luis René Sagredo Hernández

**Dirigida por:
Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO DE INGENIERÍA
FEBRERO 2006**

Agradecimientos

- A Dios por haberme permitido llegar hasta este punto, que era una de mis metas en la vida. También por darme la dicha de conocer personas llenas de sabiduría y madurez, además de hacer nuevos amigos completamente extraordinarios.
- A mis maestros; Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez, Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria, Dr. Leonid M. Fridman, Dr. Gerardo René Espinosa Pérez, Dr. Yu Tang Xu, Dra. Cristina Verde y Dr. Jaime Moreno Pérez, por ayudarme y tener siempre la disposición para atender las consultas que surgieron en el transcurso de mis estudios de maestría.
- A mis compañeros de generación (2003): Jorge Días, Eduardo, Jorge Angel, Fernando, Mauricio, Cecilia, Adrian, Christian y Arturo; por su ayuda y grata comunión que se obtuvo dentro y fuera de las aulas de clase, además de su invaluable amistad.
- A mis compañeros de laboratorio de robótica: Juan Carlos, Ricardo, Angélica, Jorge Gudiño y Adrian Castillo; por sus comentarios y aportaciones que ofrecieron en el desarrollo de esta tesis.
- Se agradece a CONACyT por el apoyo económico durante los estudios de maestría.

Dedicatorias

A Dios.

A mis abuelos.

A mis padres y hermanos.

A mis maestros y compañeros.

A mi segundo hogar; que lo tomé
como propio...UNAM

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	3
1.2. Motivación	5
1.3. Formulación del problema	5
1.4. Contribuciones	6
1.5. Organización de la tesis	6
2. MODELO CINEMÁTICO	7
2.1. Cinemática directa	7
2.1.1. Espacio articular y espacio operacional	12
2.1.2. Espacio de trabajo	12
2.2. Cinemática inversa	13
2.2.1. Cinemática inversa de un robot manipulador	14
2.3. Cinemática diferencial	15
2.3.1. Jacobiano geométrico	16
2.3.2. Singularidades	17
3. MODELO DINÁMICO	19
3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	20
3.1.1. Modelo dinámico de un robot	20
3.2. Modelo dinámico de un sistema de robots cooperativos	22
3.3. Propiedades del modelo de un robot	24
4. CONTROL DE UN SISTEMA DE ROBOTS COOPERATIVOS	26
4.1. Esquema de control	28
4.1.1. Controlador	31
4.1.2. Observador lineal	32

4.1.3. Análisis de estabilidad	33
5. RESULTADOS	37
5.1. Descripción del equipo utilizado	37
5.2. Descripción de las trayectorias de movimiento	39
5.3. Resultados experimentales	41
CONCLUSIONES	49
A. MODELO DINÁMICO DE LOS ROBOTS A465 Y A255	50
A.1. Cinemática directa	50
A.2. Cinemática inversa	53
A.3. Modelo dinámico	55
A.4. Dinámica de los motores	59
B. PRUEBA DE ESTABILIDAD DEL CONTROLADOR	61
BIBLIOGRAFÍA	66

Índice de figuras

1.1. Robot manipulador A465 <i>CRS Robotics</i>	1
1.2. Control cooperativo. A la izquierda, los robots CRS A465 y A255, respectivamente. A la derecha, la mano Utah/MIT. Fuente: Murray R., Li Z. y Sastry S. (1994). <i>Robotic Manipulation</i>	3
2.1. Representación típica de una articulación de rotación.	8
2.2. Descripción de un robot de cadena cinemática abierta.	9
2.3. Sistema coordinado, centrado en el efector final para un manipulador.	11
2.4. Espacio de trabajo de un robot manipulador.	13
2.5. Posición del centro de la muñeca, descrito por el vector \mathbf{p}_m	15
3.1. Sistema de robots cooperativos en el agarre de un objeto.	23
4.1. Esquema de control retroalimentado.	27
5.1. Sistema experimental del laboratorio de Robótica.	38
5.2. Sensor de fuerza.	39
5.3. Trayectorias polinomiales para los primeros 10 segundos del efector final del manipulador A465. Para: a) Posición. b) Velocidad. c) Aceleración	41
5.4. Robots A465 y A255 en su posición inicial (steady).	43
5.5. Error de seguimiento en coordenadas cartesianas. a) \tilde{x}_1 . b) \tilde{y}_1 . c) \tilde{z}_1 . d) \tilde{x}_2 . e) \tilde{y}_2 . f) \tilde{z}_2	45
5.6. Fuerza deseada (- - -) y fuerza real (—). a) F_{1x} . b) F_{1y} . c) F_{1z} . d) F_{2x} . e) F_{2y} . f) F_{2z}	46
5.7. Errores de observación. a) \tilde{q}_{11} . b) \tilde{q}_{12} . c) \tilde{q}_{13} . d) \tilde{q}_{21} . e) \tilde{q}_{22} . f) \tilde{q}_{23}	47

5.8. Voltajes de control para las articulaciones de los robots. Para:	
a) q_{11} . b) q_{12} . c) q_{13} . d) q_{21} . e) q_{22} . f) q_{23}	48
A.1. Diagrama de cuerpo libre.	52
A.2. Sentido de los ángulos α_i y θ_i	53
A.3. Proyección del centro de la muñeca sobre el plano x_0y_0	55
A.4. Proyección sobre el plano formado por el 2o. y 3er. elemento.	56

Resumen

En esta tesis se presenta el control de un conjunto de robots cooperativos que no cuentan con transductores de velocidad; pero si con sensores de posición y fuerza. La tarea designada a los robots es el agarre firme de un objeto y el seguimiento de una trayectoria deseada en el espacio de trabajo usando retroalimentación de posición y fuerza. El esquema de control propuesto es un enfoque descentralizado de posición/fuerza explícito restringido con un observador lineal. El método propuesto se basa en el principio de ortogonalización sin contemplar la dinámica del objeto. Los robots son del tipo manipulador; en específico el A465 y A255 de la marca canadiense *CRS Robótica* ubicados en el laboratorio de robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería (UNAM). El observador lineal realiza una buena estimación de la velocidad en el sistema debido a que es un observador de alta ganancia y el control del sistema se valida mediante el Segundo Método de Lyapunov, de esta manera, el controlador-observador provee un seguimiento asintótico en las trayectorias prescritas y en la fuerza deseada. Los resultados se obtienen a un tiempo de muestreo de 9 milisegundos y muestran que los errores de posición (en el espacio articular) son alrededor de +/- 1 grado y los errores del observador de +/- 0.2 grados. Por otro lado también se observa que el control cooperativo provee un seguimiento en la fuerza deseada; y aunque los resultados son buenos, se pueden mejorar si se contempla la fricción dinámica en el modelo del sistema y se disminuye el tiempo de muestreo. Por lo tanto es posible el control de robots cooperativos sin transductores de velocidad mediante una ley de control adecuada basada en observadores de estados.

Prólogo

La evolución en ciencia y tecnología vio su inicio en la prehistoria cuando el hombre formó sus primeras herramientas, un tanto burdas, hechas de piedra y madera. Con ello aprendió que tenía un cierto grado de control sobre su hábitat, de tal forma que incluso podía realizar tareas pesadas con ayuda del mismo hombre o con el sometimiento de animales. En el transcurrir de los años, esta intuición abrió paso a la idea de buscar constantemente sustitutos que pudieran imitar su comportamiento o en el mejor de los casos que realizara el trabajo de los humanos en las diferentes instancias de interacción con su medio ambiente.

Uno de los propósitos más extravagantes del hombre fue el poder dar vida a sus artefactos y que estos poseyeran inteligencia. A este respecto una de las primeras obras importantes fue la novela de Mary Shelley, publicada en Inglaterra en 1817. Con el título de *Frankenstein*, la narración se refiere a los esfuerzos de un científico, el doctor Frankenstein, para crear un monstruo humanoide que luego produjo estragos en la comunidad.

Un siglo más tarde, aparece una criatura mecánica (automaton), fabricada por un brillante científico llamado Rossum y su hijo, a la cual se le confía la tarea de sustituir al humano en sus obligaciones de una forma subordinada. Esta descripción se refiere a la obra publicada en 1917 por el escritor checo Karel Capek, denominada *Rossum's Universal Robots*. Desde entonces el término robot -derivado de la palabra checa *robota* que significa realizar un trabajo- toma parte en las historias de ciencia ficción, y hoy en día, da origen a un campo de estudio muy amplio.

Entre los escritores de ciencia ficción, Isaac Asimov ha contribuido con varias narraciones relativas a robots. En 1939 este escritor ruso concibe al robot como un autómatas con apariencia de humano, pero desprovisto de sentimientos; su comportamiento, dictado por un cerebro "positrónico" programado, incursionaba en satisfacer ciertas reglas de conducta ética. Asimov

introdujo la palabra *Robótica* como el término de la ciencia dedicado al estudio de los robots, los cuales basan su comportamiento en tres principios, que denominó como las *Tres Leyes de la Robótica*.

1. Un robot no debe dañar a un ser humano o, por su inacción, dejar que un ser humano sufra daño.
2. Un robot debe obedecer las órdenes que le son dadas por un ser humano, excepto cuando estas órdenes están en oposición con la Primera Ley.
3. Un robot debe proteger su propia existencia, hasta donde esta protección no esté en conflicto con la Primera o Segunda Ley.

En la actualidad, la ciencia ficción sigue teniendo tal influencia en las personas, que se sigue imaginando a un robot como un humanoide que puede hablar, caminar, ver y escuchar. Con ello, surgen diferentes puntos de vista como: la encantadora compañía del robot R2D2 de la serie *La guerra de las Galaxias*, el sentido amistoso o bélico que causa el filme de *Yo Robot*, el fantástico policía *Robocop* o la capacidad de pensar y tomar decisiones a libre albedrío que expresa la película *Inteligencia Artificial*. Sin embargo, de acuerdo con la interpretación científica, dentro del escenario de la ciencia ficción, un robot es visto sólo como una máquina que, independientemente de su exterior, es capaz de modificar el medio en el cual opera. Así, el concepto de robot ha pasado de ser una visión como dispositivo mecánico super-humano de ciencia ficción a una realidad de brazo mecánico articulado con un gran potencial de aplicaciones en un sin fin de actividades cotidianas; pudiendo realizar una amplia gama de operaciones físicas en su alrededor.

En el campo de la manufactura debido en gran parte a los avances en la tecnología de la computación se da el inicio de la automatización¹. Esta palabra fue acuñada en los 40's por la compañía de motores Ford usada para describir la operación colectiva de varias máquinas interconectadas. Desde el punto de vista formal, automatización es definido como: "El control automático de la producción manufacturada a través de varias etapas; usando equipo automático para evitar el trabajo manual" (Spong y Vidyasagar 1989).

Para una persona, automatización puede significar tajantemente el proceso de reemplazar humanos por máquinas, sin mencionar el sabor de miedo

¹Unión de las palabras en inglés *Automatic Motivation*

y desconfianza que esto puede provocar. Pero históricamente cada desarrollo tecnológico implica el incremento de la productividad con el objetivo de mejorar en diferentes aspectos la calidad de vida del ser humano (aunque tal finalidad no esté tan palpable en las diversas ramas de la automatización). Es importante señalar que la automatización, al tiempo de eliminar algunos trabajos para los obreros como: soldar, armar o ensamblar en una línea de producción, también crea trabajos de instalación y mantenimiento de robots, desarrollo de lenguajes de programación (del inglés; software), entre otras que describiremos más adelante.

Incrementalmente, automatización significa la introducción de robots y esto representa la forma más alta de automatización. Los robots industriales se fabrican en una gama de tamaños, formas y configuraciones. Pero sin lugar a duda, los *robots manipuladores* son vistos con una especial atracción, comparados con otras máquinas, por la simple razón de tener una inherente forma antropomórfica. También constan de sensores de percepción, que son cada vez más parecidos a los de un humano, de tal manera que hoy en día un robot antropomórfico consta de: brazos, manos y dedos en la parte motriz; y en la parte sensorial: visión y capacidad de medir fuerza aplicada. No obstante, se espera que los futuros robots tengan capacidades similares a las de un humano; y aunque el camino es largo, éste es uno de los objetivos de la robótica.

La realización de ideas futuristas aplicadas a la robótica se vienen limitando debido a infinidad de razones y; aunque la tecnología de la robótica presenta un nivel espectacular en áreas como: visión, sensibilidad e inteligencia artificial; aún es primitiva comparada con la asombrosa adaptabilidad y destreza de los humanos. Por tal motivo, la ganancia hasta el momento en el sentido de imitar a los seres humanos es programar a los robots para que ejecuten tareas simples.

Una de las razones principales por la cual la robótica tiene cierto grado de complejidad es por su naturaleza interdisciplinaria, puesto que combina diversas áreas como: eléctrica, mecánica, electrónica, ciencias de la informática, bioingeniería, cibernética y la ciencia del control automático.

Con el advenimiento de los microprocesadores de alta velocidad la apreciable mejoría en la fabricación de robots y el desarrollo de la investigación en los campos previamente mencionados han propiciado el progreso de la robótica aumentando su complejidad tanto conceptual como tecnológica; incrementando precisión, productividad y flexibilidad. La expresión *robótica avanzada* se enfoca al estudio de robots con características de autonomía cuando ejecutan

una misión, de esta manera, la aplicación de robots autónomos se desarrolla en lugares físicos o geométricos que no son conocidos a priori. También vale la pena resaltar el empleo de robots en lugares diferentes al campo industrial, donde los robots están reemplazando a los humanos. Estas tareas se dan en espacios que para los humanos no son prácticos ni deseables. Por ejemplo: En la exploración terrestre y marina, en la recuperación y reparación satelital, en el desarme de artefactos explosivos o en la investigación radioactiva, por mencionar algunas. De la misma manera, en el campo de la biotecnología se tiene el desarrollo de órganos artificiales, así como el diseño de prótesis. Todo esto ha llevado a un substancial y real campo de aplicación para la teoría de control.

Desde los 80's la robótica y el control se han beneficiado mutuamente. Por un lado, robots no lineales han dado casos de estudio para el control y por otro, el desarrollo de robots ha dado hincapié a usar nuevos algoritmos de control avanzado. Por ejemplo: para robots móviles se han originado nuevas líneas de investigación, donde las ecuaciones que describen su movimiento, además de ser no lineales, son variantes en el tiempo. En robots manipuladores se desarrollan diferentes líneas de investigación como: el control de robots cooperativos, control de robots manipuladores para escritura, el control de fuerza sin retroalimentación de ésta, control de brazos para el reconocimiento de superficies, etc. Los sistemas de visión también desarrollan líneas de investigación dentro del campo de la robótica. La descripción y el reconocimiento de objetos o el seguimiento del extremo final de un robot manipulador, son unas de las tantas aplicaciones de éste campo. Todo esto ha dado las nuevas metas para el control en tareas como: soldar, ensamblar, afilar y esmerilar, lo cual requiere de una medición externa dada por visión² y los sensores de fuerza, o por el reconocimiento de objetos por medio del control posición/fuerza.

Hoy en día, podemos encontrar gran cantidad de literatura concerniente al campo de la robótica, llámese revistas, manuales, libros o artículos de investigación. En todos éstos se reconoce que la mecánica y el control juegan un papel fundamental, ya que estas disciplinas consideran el conocimiento preliminar requerido para el control de robots que son utilizados en aplicaciones industriales o para la investigación. Por lo tanto, los trabajos re-

²Aquí nos referimos a cámaras colocadas en el brazo del robot o en lugares que proveen una buena percepción.

cientes tienen como objetivo presentar aspectos fundamentales, tecnológicos e innovadores del modelado y control de robots manipuladores. Dentro de los aspectos fundamentales se considera la cinemática, dinámica, planeación de trayectorias y control de movimiento. En tanto, aspectos tecnológicos incluyen actuadores, sensores, arquitectura de control (software/hardware) y algoritmos de control industrial. Finalmente la parte innovadora considera el desarrollo de algoritmos de control avanzado para robots rígidos, flexibles y móviles como: control de retroalimentación, de estructura variable, control robusto, adaptable, control de interacción y pasividad.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Desde el punto de vista de la mecánica clásica, un robot está constituido por un sistema locomotor (piernas o ruedas) que le provee de movimiento de traslación y por un aparato manipulador que opera sobre objetos presentes en su área de trabajo. Así, el término *robot* se aplica a una gran variedad de dispositivos mecánicos como: vehículos móviles terrestres, manipuladores industriales, vehículos submarinos autónomos (AUV, siglas en inglés de *Autonomous Underwater Vehicle*), operadores teledirigidos o teleoperados, espaciales, etc. Para esta tesis, el desarrollo se basa en *robots manipuladores industriales* antropomórficos, los cuales tienen al menos un brazo que le provee de movilidad, una muñeca que le dota de destreza y una mano o efector final que desarrolla una operación requerida (Figura 1.1).

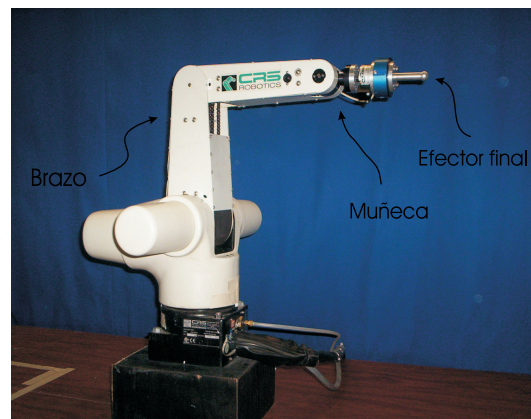


Figura 1.1: Robot manipulador A465 *CRS Robotics*.

Una definición adoptada por la Federación Internacional de Robótica bajo la norma ISO/TR 8373 es: “Un robot manipulador industrial es una máquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil, para su empleo en aplicaciones industriales”, (Kelly 1994).

Con base a esta descripción, un robot puede programarse para desplazar su brazo a través de una secuencia de movimientos con el fin de realizar una diversidad de operaciones industriales con una gran precisión. Un punto determinante en el cual se fundamenta la aplicación de los robots, dándoles utilidad y adaptabilidad, es la capacidad de ser *programables*. Las partes que constituyen un robot manipulador son:

- **Una estructura mecánica** que consiste de una secuencia de cuerpos rígidos (eslabones) conectados por medio de articulaciones.
- **Actuadores** que proveen el movimiento del manipulador, actuando en sus articulaciones. Típicamente se emplean actuadores eléctricos (motores de CD); pero también se utilizan del tipo hidráulico y neumático.
- **Sensores:** *Internos* que miden el estado del manipulador, como posición y velocidad de cada eslabón. *Externos* que miden el estado de su entorno, como los sistemas de fuerza y visión.
- **Un sistema de control** que supervisa y verifica el movimiento del manipulador en la ejecución de una aplicación específica.

La mayoría de los robots manipuladores que se emplean en la industria actual, aunque se caracterizan por una amplia diversidad de diseños, las tareas básicas que desarrollan son limitadas y monótonas. Su funcionalidad se basa en la llamada operación de *tomar y colocar* (del inglés; pick and place). Sin embargo, se tienen numerosas tareas diferentes que se caracterizan por un contacto físico entre el extremo final del robot y un objeto (e.g. esmerilar, trazar, escribir, afilar, pulir, etc.).

Con el crecimiento de la robótica en las últimas dos décadas, se han desarrollado investigaciones en diferentes aspectos que no sólo incluyen el control de un robot, sino el *control cooperativo de robots*, envolviendo manos con múltiples dedos que proveen de destreza y versatilidad (Figura 1.2).

De esta manera, la toma y manipulación de objetos por un conjunto de robots (manos con varios dedos), representa la evolución que hasta el momento se

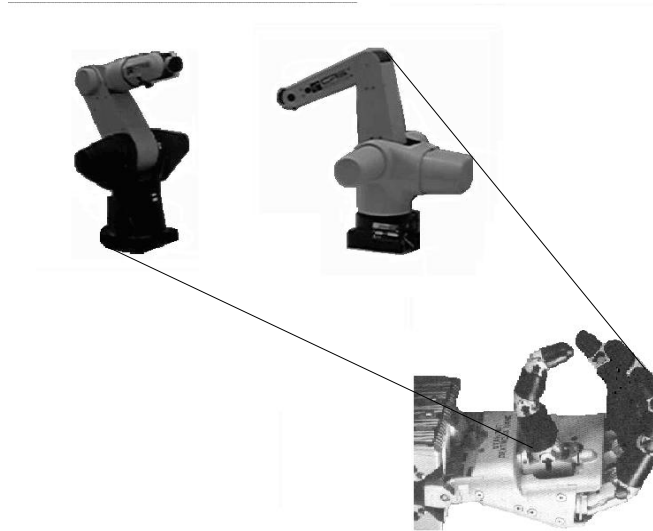


Figura 1.2: Control cooperativo. A la izquierda, los robots CRS A465 y A255, respectivamente. A la derecha, la mano Utah/MIT. Fuente: Murray R., Li Z. y Sastry S. (1994). *Robotic Manipulation*.

tiene en control y robótica. Específicamente, este arreglo tiene la habilidad para configurarse en el agarre de objetos, además de realizar movimientos finos de posición/fuerza para la manipulación de piezas delicadas.

1.1. Antecedentes

Varios resultados progresivos se obtuvieron en los últimos años para lograr que una mano de múltiples dedos sujete un objeto sin dañarlo. Un primer objetivo fue mantener la punta del efector final sobre una superficie, manteniendo cierta fuerza sobre ella. Uno de los primeros pasos que se dieron en este tipo de control fue el esquema de *control híbrido* de posición/fuerza (Raibert y Craig 1981). El sistema de control basado en este esquema, contaba con dos lazos de retroalimentación para controlar por separado posición y fuerza. Sin embargo, se presentaron algunas respuestas inestables; una de las causas era que no se consideraba rigurosamente el modelo del manipulador, para vencer esta dificultad se propusieron diferentes enfoques. Por ejemplo: Khatib (1987) desarrolla la formulación en el espacio operacional, que es donde se envuelven movimientos restringidos y fuerzas de contacto. Yoshikawa (1987)

propone un control híbrido dinámico que toma en cuenta la dinámica del manipulador y considera explícitamente la restricción para el efector final. Por otro lado, McClamroch y Danwei (1988) desarrollan condiciones teóricas para la estabilidad de lazo y seguimiento, usando un control retroalimentado; por un lado, utilizan una modificación del método *par calculado* para el control no lineal, y por otro, aplican un control lineal; para la primera parte se logra obtener condiciones de seguimiento global, y para la segunda sólo desarrollan condiciones de seguimiento local. En Arimoto *et al.* (1993) se propone el principio de ortogonalización para brazos articulares, éste se da como una noción extendida del control híbrido (posición/fuerza) para manipuladores bajo restricciones geométricas, ortogonalizando las señales de retroalimentación de posición y fuerza en el espacio articular; la ortogonalización se realiza vía una matriz de proyección, calculada en tiempo real, del gradiente de la ecuación de la superficie, de esta manera, la proyección de posición y las señales de error de velocidad en el espacio articular son perpendiculares al vector de fuerza, que es normal a la superficie en el punto de contacto.

En lo que respecta a la medición de la velocidad articular, muchos algoritmos de control asumen que los valores de las velocidades articulares están disponibles. No obstante, esto no es siempre posible o puede que no sea deseable hacerlo, debido a que las señales provenientes de tacómetros pueden estar contaminadas por ruido. Otro de los principales problemas es la complejidad de integrar una gran cantidad de sensores dentro de una arquitectura pequeña de robots articulados (manos con múltiples dedos). Como consecuencia, surge la necesidad de estimar la velocidad articular.

Diferentes métodos de observación¹ se han propuesto para estimar la velocidad articular de un robot manipulador. Por un lado están los basados en observadores de velocidad y por otro, los basados en el filtrado pasa-alto de la información de la posición del eslabón (Queiroz *et al.* 1996). Dentro de los primeros se encuentran los observadores deslizantes y los observadores no lineales. Por ejemplo: Arteaga Pérez (2001) incluye un observador lineal de velocidad en la ley de control, logrando un seguimiento uniforme finalmente acotado; y aunque sus resultados, comparados con otros esquemas de control-observador conocidos, muestran un mejoramiento en el error de seguimiento,

¹Un observador es un estimador de estados; es un sistema dinámico que intenta estimar una o todas las variables de estado

estos son sólo simulados. En Arteaga Pérez y Muñoz (2002) se utiliza un observador no lineal para el control cooperativo de robots, garantizando estabilidad asintótica. Finalmente, Gudiño Lau *et al.* (2004) implementan un control de seguimiento para robots cooperativos considerando un observador de velocidad lineal que es basado parcialmente en el modelo del robot.

1.2. Motivación

El agarre de objetos por un conjunto de robots requiere de una mínima integración de sensores en su arquitectura debido a diferentes factores como: el costo que conlleva obtener encoders, el espacio requerido para integrar en un manipulador más transductores y el número de entradas/salidas que se puedan contener en las tarjetas de procesamiento de datos. Por ello, en nuestro caso se requiere de la utilización de un observador de estados que reconstruya las velocidades articulares y que además no dependa del modelo del sistema. Varios esquemas de observadores han sido empleados en el control de robots articulados, desde los no lineales hasta los más simples pero basados parcialmente en la dinámica del modelo.

1.3. Formulación del problema

En este trabajo se plantea controlar un conjunto de robots cooperativos ubicados en el Laboratorio de Robótica del edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería (UNAM).

Dada una trayectoria \mathbf{q}_d , obtener una ley de control para los actuadores tal que la salida \mathbf{q} siga la trayectoria deseada.

La tarea designada para los robots es el agarre y levantamiento de una caja colocada en una posición inicial \mathbf{x}_0 para realizar enseguida un círculo con ella. El problema se fundamenta en que el sistema no cuenta con transductores de la velocidad de cada articulación y por ello la necesidad de integrar un observador dentro del esquema de control que reconstruya las velocidades articulares de los manipuladores. El diseño de observadores para robots es bastante complejo, debido a que el manipulador es un sistema no lineal acoplado y para implementar el esquema control-observador sólo se cuenta con encoders digitales o transductores que proveen la posición de cada articulación y dos sensores de fuerza ubicados en la parte final del extremo

de cada robot, respectivamente. El control sólo se realiza en las tres primeras articulaciones de cada robot debido al número de entradas/salidas que tienen las tarjetas de adquisición de datos y cuenta con un lazo de retroalimentación de fuerza para comparar la fuerza deseada que se implementa en el programa. Los experimentos se sustentan en el conocimiento teórico que fundamenta el movimiento y control de robots y específicamente, se asume que la dinámica de los robots CRS A465 y A255 es bien conocida (Gudiño Lau *et al.* 2004).

1.4. Contribuciones

En esta tesis se implementa un control de robots cooperativo descentralizado con un observador lineal. La ventaja de este observador se caracteriza por un lado, en su sencillez y por otro, en no depender del modelo del sistema. El observador provee la estimación de la velocidad directamente en las coordenadas del sistema físico y a diferencia de aquellos que compensan la no linealidad del sistema (observador no lineal) éste sólo contiene la parte lineal. Este observador cae dentro del grupo de los llamados *observadores de ata ganancia*.

1.5. Organización de la tesis

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos en adición a la introducción, donde se da una reseña general de las partes de un robot articulado, se describen los antecedentes, la motivación del trabajo, la formulación del problema y las contribuciones. En el Capítulo 2 se presenta el modelo matemático de un robot que concierne a la descripción de su movimiento. En el Capítulo 3 se presenta el modelo dinámico de un robot, donde se describen los factores que producen su movimiento (fuerzas y torques). En el Capítulo 4 se dan las bases del control y la estabilidad de un sistema de robots cooperativos. Posteriormente, en el Capítulo 5 se presentan los resultados y conclusiones. Por último se dan los Apéndices: en el Apéndice A se describe el modelo dinámico de los robots A465 y A255; y en el Apéndice B se muestra la prueba de estabilidad del controlador.

Capítulo 2

MODELO CINEMÁTICO

Para que un robot manipulador pueda realizar una gama de operaciones físicas es necesario que se componga de varios eslabones (elementos) interconectados por medio de uniones o articulaciones, formando una especie de *brazo*. El movimiento de su estructura se obtiene por la composición de movimientos elementales de cada articulación con respecto a la anterior. Entonces, uno de los objetivos es determinar el efecto acumulativo del conjunto de movimientos articulares con el propósito de describir la posición y orientación del extremo final del brazo articulado.

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas básicas necesarias para describir el movimiento de la geometría de un robot manipulador. Su análisis cinemático concierne en la descripción de los movimientos con respecto a un sistema coordenado fijo, ignorando las fuerzas y momentos que causan el movimiento de la estructura. Esto nos lleva a distinguir entre la *cinemática* y la *cinemática diferencial*. La cinemática describe la relación entre la posición articular y la correspondiente posición y orientación del extremo de un robot manipulador, mientras que la cinemática diferencial se refiere a la relación entre los movimientos articulares y los movimientos de la parte terminal del robot en términos de las velocidades.

2.1. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa de un robot manipulador rígido es determinar la posición y la orientación del extremo del manipulador, conocidas las posiciones de los correspondientes eslabones respecto a un marco de referen-

cia. Los robots manipuladores consisten de una cadena cinemática de cuerpos rígidos llamados eslabones o elementos conectados a través de uniones o articulaciones, las cuales permiten el movimiento entre los eslabones adyacentes. Las articulaciones traen consigo dos tipos de movimientos simples: movimiento traslacional y movimiento rotacional¹.

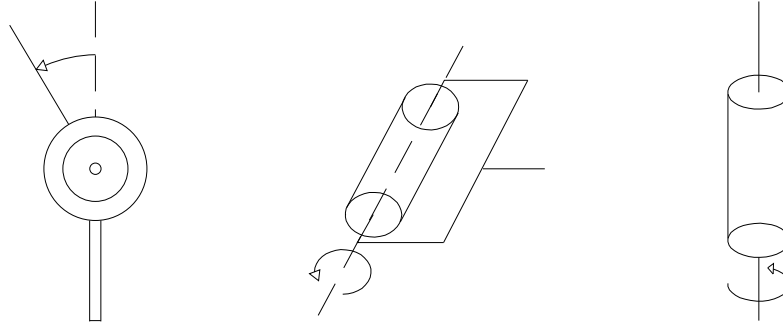


Figura 2.1: Representación típica de una articulación de rotación.

En esta tesis sólo se abordan articulaciones de rotación debido a que los robots en los cuales se basa este trabajo están constituidos por articulaciones de revolución. Éstas son semejantes a un balero permitiendo una rotación relativa alrededor de un eje (Figura 2.1). La acción de cada articulación se describe por medio de un número real; el ángulo de rotación, que se llama *variable articular*. De esta manera, la cinemática directa consiste en determinar el mapeo entre la respectiva posición y orientación de la parte terminal del robot y las variables articulares (respecto a un sistema coordenado). El número de uniones en un brazo articulado determina su grado de movilidad y típicamente, un robot manipulador industrial dispone de 6 grados de libertad de los cuales 3 ubican la posición del último eslabón en el espacio y 3 más especifican su orientación.

La configuración básica de un manipulador es de *cadena cinemática abierta*, que se produce cuando sólo una secuencia de elementos conectan a sus dos extremos. Un extremo de esta cadena se conecta a un elemento base, mientras que el otro extremo se conecta al efector final (Figura 2.2).

¹El primero es el movimiento lineal que describen las articulaciones prismáticas y el segundo es un movimiento giratorio cuando las articulaciones son de revolución.

En robótica, el término *efector final* se utiliza para describir un dispositivo que se encuentra unido a la última articulación del manipulador, permitiendo realizar una aplicación particular. Los efectores finales se dividen en dos categorías: pinzas y herramientas. Las pinzas, como su nombre lo indica, se utilizan para el agarre de objetos; y una herramienta se utilizaría para realizar una operación específica.

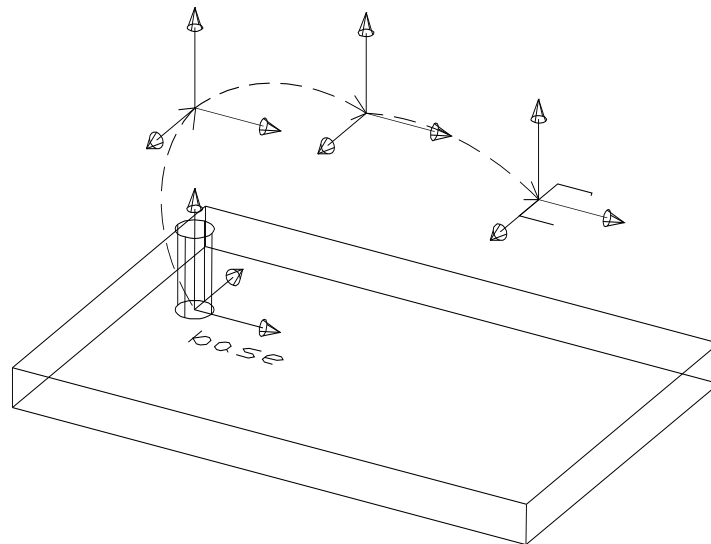


Figura 2.2: Descripción de un robot de cadena cinemática abierta.

Como se mencionó anteriormente, la cinemática directa determina la configuración particular de un robot, calculando el lugar donde se ubica su extremo, si las variables articulares son conocidas. Por lo tanto, para encontrar las ecuaciones que representan la posición del brazo, en puntos, en relación con el tiempo, los ingenieros en robótica utilizan algunas consideraciones que facilitan el cálculo (Spong y Vidyasagar 1989). De una forma simplificada, estas consideraciones son:

- Enumerar los eslabones de 0 a n comenzando desde la base.
- Las uniones se enumeran de tal forma que la unión i conecta los eslabones i e $i - 1$.

- La variable articular i -ésima se denota por q_i , que en nuestro caso, representa el ángulo entre elementos.
- Cada unión se mueve independientemente por un actuador², que es colocado en dicha unión y el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los eslabones.
- Se coloca un sistema coordenado en cada eslabón. De igual manera, se coloca un marco inercial en la base del robot, el cual es llamado *marco de la base* y se representa por $O_0 - x_0y_0z_0$.

Las posiciones articulares correspondientes a cada articulación del robot, las cuales son medidas por medio de trasductores (encoders) colocados en los actuadores, son agrupadas para propósitos analíticos en el vector de posiciones

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T, \quad (2.1)$$

donde n es el número de articulaciones.

Para determinar las ecuaciones cinemáticas del brazo de un robot se opta por la forma más general y simple que es el uso de las transformaciones homogéneas, las cuales representan un *movimiento rígido* (traslación + rotación). De este modo, la cinemática directa que transforma la posición y orientación del efector final al marco de referencia de la base se expresa por la matriz de transformación homogénea

$${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = {}^0\mathbf{A}_1(q_1) {}^1\mathbf{A}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n(q_n) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n(\mathbf{q}) & {}^0\mathbf{d}_n(\mathbf{q}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde ${}^{i-1}\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ es la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del sistema i al $i - 1$, utilizando una matriz por cada una de las articulaciones del robot (Apéndice A). ${}^0\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la submatriz ortogonal superior izquierda que representa la rotación del sistema coordenado $O_n - x_ny_nz_n$ con respecto al sistema de la base $O_0 - x_0y_0z_0$, debiendo satisfacer

$${}^0\mathbf{R}_n = ({}^n\mathbf{R}_0)^{-1} = ({}^n\mathbf{R}_0)^T, \quad (2.3)$$

²Un actuador es el mecanismo que provee de movimiento a los eslabones. Desde el punto de vista práctico, serían los “músculos” del robot. Ejemplos de estos son: motores de CD, alimentadores neumáticos o hidráulicos.

que es una característica de las matrices *ortogonales* y

$$\det^0 \mathbf{R}_n = +1, \quad (2.4)$$

que las define como *matrices rotacionales*. ${}^0\mathbf{d}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector que indica la posición del origen del sistema n ligado al efector final, medido desde el origen del sistema de referencia $O_0 - x_0 y_0 z_0$. La Figura 2.3 ilustra esta definición para una mano o efector final unido al brazo del robot. Con estos concep-

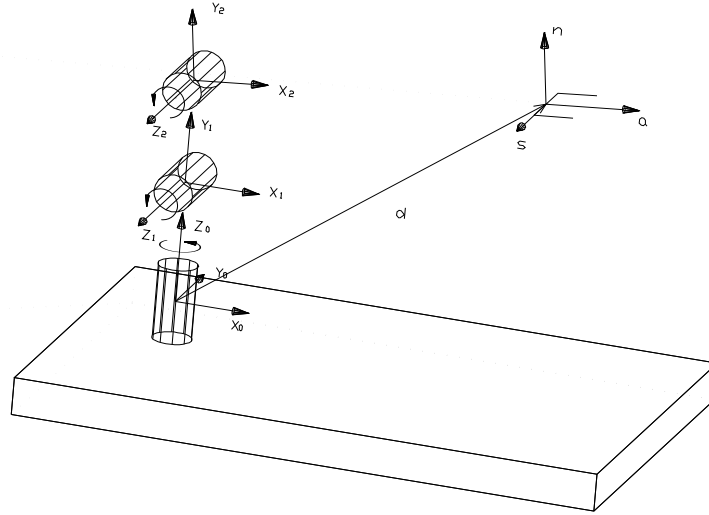


Figura 2.3: Sistema coordenado, centrado en el efector final para un manipulador.

tos la cinemática directa queda descrita, donde el cálculo de la matriz \mathbf{A}_i se realiza utilizando la Representación o Convención de Denavit-Hartenberg (Spong y Vidyasagar 1989). Esta Representación depende de cuatro variables denotadas por a_i , d_i , α_i y θ_i , donde $i = 1, 2, \dots, n$. A estos cuatro parámetros se les conoce como: longitud, separación, giro y ángulo (del inglés *length*, *offset*, *twist* y *angle*). Los tres primeros son constantes, mientras que el cuarto parámetro es la variable articular q_i (para articulaciones de revolución). En esta Convención cada matriz de transformación \mathbf{A}_i está representada por

cuatro transformaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= Rot_{z,\theta}, Trans_{z,d}, Trans_{x,a}, Rot_{x,\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $c_{(\cdot)}$ denota $\cos(\cdot)$ y $s_{(\cdot)}$ el $\sin(\cdot)$.

Para especificar el marco del efector final $O_n - x_n y_n z_n$ se utilizan los vectores unitarios \mathbf{n} , \mathbf{s} y \mathbf{a} ; denominados normal, deslizamiento y aproximación (por sus siglas en inglés: *normal*, *sliding* y *approach*). El vector \mathbf{a} apunta en la dirección del efector final, el vector \mathbf{s} especifica la orientación de la pinza desde un dedo al otro, y el tercer vector \mathbf{n} se toma de tal forma que se complete la definición de un sistema coordenado derecho. Juntos los tres vectores forman un sistema de referencia de coordenadas relativo al sistema de referencia de la base. Los vectores \mathbf{n} , \mathbf{s} y \mathbf{a} ; constituyen, respectivamente, los ejes x , y , z del sistema de referencia del efector final $O_n - x_n y_n z_n$ con respecto al sistema de coordenadas de la base.

2.1.1. Espacio articular y espacio operacional

Como se vio en la sección anterior, la cinemática directa establece la posición y orientación del marco de referencia del efector final como función de las variables articulares. Específicamente, es posible calcular la posición del efector final por medio de la ecuación (2.2).

Sin embargo, desde el punto de vista práctico, resulta común especificar la posición y orientación del dispositivo terminal cuando se diseña una tarea. Finalmente, este dispositivo terminal es el que sigue la trayectoria de una tarea encomendada. Al espacio en el cual se especifica la tarea del manipulador se le llama *espacio operacional* o *espacio cartesiano*. Por otro lado, el *espacio articular* o *espacio de configuración* es el espacio donde está definido el vector (2.1). La noción del espacio operacional y el espacio articular permite introducir el concepto de *espacio de trabajo*.

2.1.2. Espacio de trabajo

Respecto al espacio operacional, el *espacio de trabajo* es la región descrita por el origen del marco del efector final cuando todas las articulaciones del

manipulador ejecutan todos los movimientos posibles (Figura 2.4). Este espacio se subdivide en dos: *Espacio de trabajo alcanzable* y *espacio de destreza*. El primero es la región que puede alcanzar el extremo del manipulador con al menos una orientación; para el segundo, es la región que el extremo del manipulador puede describir mientras se mantienen diferentes orientaciones. Obviamente, el espacio de destreza es un subespacio del espacio de trabajo alcanzable.

El espacio de trabajo se caracteriza por la geometría del manipulador y por los límites articulares mecánicos. En otras palabras, el espacio de trabajo alcanzable es una relación que considera sólo la posición con una forma

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{q}) \quad q_{im} < q_i < q_{iM} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

donde q_{im} y q_{iM} son los límites mínimo y máximo de la articulación i .

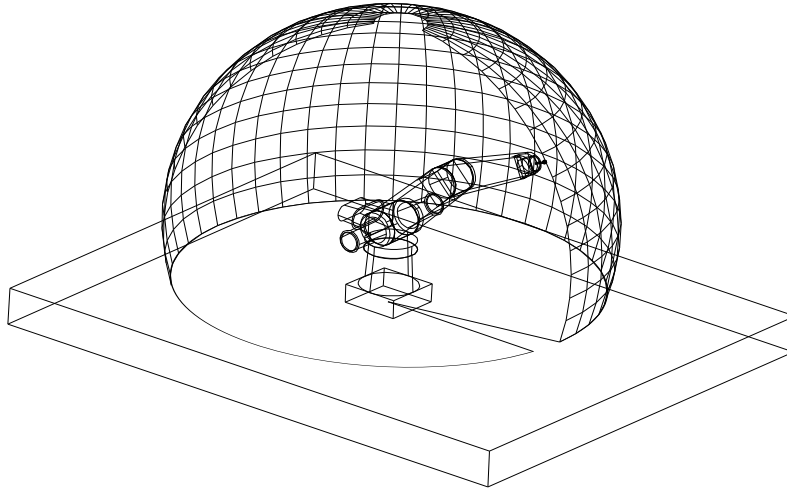


Figura 2.4: Espacio de trabajo de un robot manipulador.

2.2. Cinemática inversa

Usando la cinemática directa se puede calcular la configuración del robot a cada instante si se conocen todas las variables articulares. Por el contrario, cuando se requiere determinar las variables articulares q_i correspondientes

a la asignación de la posición \mathbf{d} y la orientación \mathbf{R} del dispositivo terminal del robot en el espacio operacional, se recurre a las ecuaciones de la *cinemática inversa*. La solución de este problema es fundamental en el sentido de trasladar movimientos específicos, naturalmente asignados en el espacio operacional, a los equivalentes movimientos del espacio articular en el cual se basa la ejecución de la tarea deseada. Esto significa que se debe encontrar la ecuación inversa de (2.2) que habilite el cálculo de las variables articulares, i.e.

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(t_{11}, \dots, t_{ij}), \quad (2.7)$$

donde t_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ es el elemento ij de la matriz de transformación homogénea ${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q})$ en el espacio articular.

Las ecuaciones de la cinemática inversa son de gran importancia desde el punto de vista práctico, por ejemplo: cuando un robot manipulador se comunica con otras máquinas es de gran utilidad conocer la posición del brazo articulado en el espacio operacional.

2.2.1. Cinemática inversa de un robot manipulador

Un robot manipulador está formado por un brazo que le provee de movilidad (3 g.d.l.) y por una muñeca en la cual se basa su destreza (3 g.d.l.). En nuestro caso, la solución de la cinemática inversa es de una forma cerrada si los ejes de las tres últimas articulaciones se intersecan en un mismo punto. Este hecho desacopla el problema en dos subproblemas llamados: *cinemática de posición inversa* y *cinemática de orientación inversa* (Spong y Vidyasagar 1989).

La cinemática de posición inversa consiste en calcular la posición del centro de la muñeca como función de las tres primeras variables articulares y de la distancia a la que se encuentra el origen del efector final, i.e.

$$\mathbf{d}_m = \mathbf{d} - d_6 \mathbf{a},$$

donde \mathbf{d}_m determina la posición x, y y z de la muñeca del robot; \mathbf{d} la posición del efector final y; \mathbf{a} es la orientación dada por la matriz de rotación $\mathbf{R}[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$ (Figura 2.5). Una vez que se ha resuelto la cinemática de posición inversa los valores de las tres primeras articulaciones $[q_1 q_2 q_3]^T$ se resuelven de una forma geométrica. Con estos valores la cinemática de orientación inversa se obtiene de

$${}^3\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} \mathbf{R},$$

donde \mathbf{R} representa la matriz de rotación expresada en términos de los ángulos de Euler (Spong y Vidyasagar 1989).

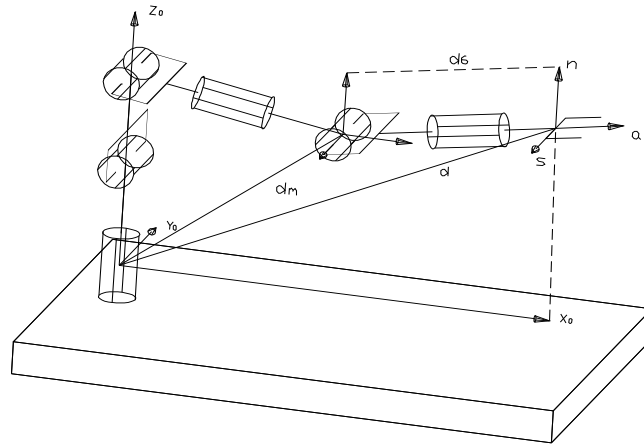


Figura 2.5: Posición del centro de la muñeca, descrito por el vector \mathbf{p}_m .

2.3. Cinemática diferencial

En la sección anterior revisamos las ecuaciones de la cinemática relacionando, por un lado las variables articulares y por otro, la posición y orientación del extremo del manipulador. En este apartado se estudian los movimientos diferenciales de un robot, que resultan en las relaciones de velocidad de las diferentes partes de su mecanismo. En síntesis, *la cinemática diferencial* establece las ecuaciones de velocidad de un robot manipulador relacionando la velocidad lineal y angular del efector final (o de cualquier otro punto) con la velocidad de las articulaciones. Este mapeo es descrito por una matriz llamada *Jacobiana*.

El jacobiano o matriz jacobiana es una de las herramientas más importantes en el análisis y control de movimiento de un manipulador, puesto que se obtiene información de las características del robot en diferentes aspectos como: planeación y ejecución de trayectorias suaves; en la determinación de configuraciones singulares, análisis de redundancia; en la ejecución de movimientos antropomórficos; en la derivación de las ecuaciones dinámicas

de movimiento y en la transformación de las fuerzas y torques del efector final a cada articulación.

2.3.1. Jacobiano geométrico

La correspondencia entre la velocidad lineal y angular de la parte terminal del último eslabón se establece por la ecuación diferencial

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.8)$$

donde $\dot{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ expresa la velocidad lineal; $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, la velocidad angular y $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ es la matriz *Jacobiana*. La obtención de esta matriz usualmente sigue un procedimiento geométrico basado en las contribuciones de las velocidades articulares a la velocidad lineal y angular del extremo del último eslabón, por éste hecho, $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es llamado *Jacobiano geométrico* del manipulador. En síntesis, el Jacobiano relaciona los movimientos de una articulación individual a los movimientos globales del mecanismo. El Jacobiano descrito en (2.8) se puede particionar en vectores columna de (3×1) como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_d \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_{d_1} & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_{d_n} \\ \dot{\mathbf{j}}_{o_1} & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_{o_n} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

donde se observa que:

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{J}_d(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_o(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.8), se obtiene

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_{d_1} & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_{d_n} \\ \dot{\mathbf{j}}_{o_1} & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_{o_n} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.12)$$

En esta ecuación es importante resaltar que el término $J_{d_i} \dot{q}_i$ representa la contribución de una articulación simple i a la velocidad lineal del efector final y el término $j_{o_i} \dot{q}_i$, similarmente, es la contribución a la velocidad angular del efector final.

El cálculo del Jacobiano para manipuladores donde aplica Denavit-Hatemberg se obtiene de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{d_i} \\ \mathbf{J}_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

donde \mathbf{z} son los vectores unitarios que representan el eje donde giran las articulaciones y \mathbf{d}_i los vectores de posición de cada una de las articulaciones.

2.3.2. Singularidades

El Jacobiano en la ecuación cinemática diferencial

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.14)$$

define un mapeo lineal entre el vector de las velocidades $\dot{\mathbf{q}}$ y el vector de velocidad $\mathbf{v} = [\dot{\mathbf{d}} \ \boldsymbol{\omega}]^T$ del efector final. El Jacobiano se relaciona con el tiempo, ya que los valores de cada uno de sus elementos y la magnitud del conjunto de elementos cambia con respecto a este. En general, el Jacobiano es función de la configuración del brazo y para aquellas configuraciones en las que no tiene rango completo se llaman *singularidades cinemáticas*.

Éstas se pueden clasificar como:

- **Singularidades de contorno** que ocurren cuando el manipulador se extiende o se contrae. Esto resulta cuando el extremo del manipulador llega a la frontera de su espacio alcanzable. Esta desventaja se puede evitar en la programación de la trayectoria.
- **Singularidades internas** que ocurren dentro del espacio alcanzable y son generalmente causadas por el alineamiento de dos o más ejes de movimiento o por la configuración del efector final. Al contrario de la anterior, estas singularidades constituyen un problema debido a que se pueden dar en cualquier punto dentro del espacio alcanzable.

Redundancia

La redundancia basa su determinación cuando el número de grados de movilidad es mayor que el número de variables necesarias para realizar una determinada tarea, por ejemplo: un robot manipulador industrial es *intrínsecamente redundante* cuando la dimensión del espacio operacional es menor que la dimensión del espacio articular ($m < n$). La redundancia es un concepto relativo a una tarea designada al manipulador; un robot puede ser redundante con respecto a una tarea y puede no serlo con respecto a otra. Aun así, en el caso en que $m = n$, un robot puede ser *funcionalmente redundante* cuando sólo un número de r componentes en el espacio operacional

son utilizadas para una tarea específica, esto es $r < m$. Un ejemplo típico de redundancia es el brazo humano con siete grados de movilidad: tres grados de movilidad en el hombro, uno en el codo y tres en la muñeca; eso sin considerar los grados de movilidad de los dedos.

Capítulo 3

MODELO DINÁMICO

El concepto de dinámica se refiere a las relaciones de aceleración, carga (fuerza), masa e inercia. Debido a esto, un modelo dinámico describirá completamente la evolución en el tiempo de un sistema mecánico. Para un robot, su modelo dinámico especifica la relación entre las fuerzas ejercidas sobre la estructura y las posiciones articulares, velocidades y aceleraciones. Contar con un modelo dinámico tiene la ventaja de poder simular el movimiento del manipulador, analizar su estructura y diseñar algoritmos de control. Simular los movimientos del brazo articulado permite probar estrategias de control y técnicas de planeación de movimiento sin la necesidad de emplear el sistema físico. En el análisis del modelo dinámico resulta de gran utilidad el cálculo de fuerzas y torques para el diseño de robots prototipos; llámese articulaciones, transmisiones y actuadores. En nuestro caso, el modelo dinámico permite caracterizar y controlar un robot físicamente, además de verificar los diferentes esquemas de control obtenidos de la investigación.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de un manipulador en el espacio articular se utilizan principalmente dos métodos. El primero se basa en la formulación de Newton-Euler, que tiene la desventaja de complicarse gradualmente cuando aumenta el número de articulaciones. El segundo es la formulación lagrangiana, que conceptualmente es simple y sistemático. No obstante, la dinámica de un robot manipulador también puede ser descrita de forma alternativa a las ecuaciones de Lagrange en términos de otras variables de estado. Esta descripción se obtiene mediante las ecuaciones de movimiento de Hamilton, que a diferencia de las variables de estado de Lagrange q y \dot{q} que tienen una interpretación física inmediata, las variables de Hamilton son la posición articular q y la cantidad de movimiento (momentum)

generalizado p .

Sin embargo, debido a que la mecánica lagrangiana se basa sólo en términos de la energía y las ecuaciones obtenidas son independientes del marco de referencia, resulta práctico utilizar éste método.

3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

El empleo de las ecuaciones de Lagrange para el modelado, requiere la noción de la energía cinética T y la energía potencial U . El Lagrangiano L de un sistema mecánico, que depende de las coordenadas generalizadas, se define como la diferencia entre éstas energías, i.e.

$$L = T - U, \quad (3.1)$$

donde se considera que la energía potencial U es debida a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad o fuerzas debidas a resortes.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de n g.d.l. (grados de libertad), están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

con τ_i compuesta por la fuerza generalizada¹ ejercida “externamente” por los actuadores en cada articulación y fuerzas no conservativas². Por último, cabe hacer notar que se tendrán tantas ecuaciones dinámicas como g.d.l. tenga el robot.

3.1.1. Modelo dinámico de un robot

Como lo mencionamos anteriormente, el modelo dinámico de un robot especifica la relación entre fuerzas y torques articulares del actuador y el movimiento de la estructura. Como el sistema de robots bajo estudio sólo consta de articulaciones rotacionales, entonces se utilizara el vocablo de torque cuando se refiera a las fuerzas generalizadas.

¹Se utiliza el término de *fuerza* para articulaciones prismáticas y *torque* para articulaciones de revolución.

²Son las fuerzas que resisten al movimiento de un objeto, como la fuerza de fricción. En general son las fuerzas que dependen del tiempo y la velocidad.

Para un robot manipulador de n g.d.l. formado por eslabones rígidos, conectados por uniones libres de fricción y elasticidad, la energía cinética se puede expresar siempre como:

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva denominada matriz de inercia del robot manipulador. Ésta matriz juega un papel importante tanto en el modelado dinámico como en el diseño de controladores para robots. En el primer caso, la matriz de inercia se encuentra íntimamente relacionada con la energía cinética (ecuación 3.3); para el segundo, se emplean algunas de sus propiedades para el estudio de estabilidad de sistemas de control de robots. A estos puntos se les conoce como *propiedades estructurales del modelo*.

Para la energía potencial, por el momento sólo se sabe que depende del vector de posiciones articulares.

El lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dado por la ecuación (3.1) es:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}). \quad (3.4)$$

Sustituyendo (3.4) en (3.2) y tomando la derivada, se obtiene la ecuación de movimiento

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.5)$$

donde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de torques articulares, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas gravitacionales de la forma

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.6)$$

y

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \{ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \} \quad (3.7)$$

es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis³. Una manera de obtener $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es a través de los coeficientes o símbolos de Christoffel de primer

³En general es la fuerza que experimenta un cuerpo con masa que se desplaza sobre otro objeto en rotación.

tipo (Spong y Vidyasagar 1989), definidos por:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right), \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

donde h_{ij} con $i, j = 1, \dots, n$ es el elemento ij de $\mathbf{H}(\mathbf{q})$.

3.2. Modelo dinámico de un sistema de robots cooperativos

Específicamente, el modelo de cada manipulador de cadena cinemática abierta con una restricción (Parra-Vega *et al.* 2000) está dado por:

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)\boldsymbol{\lambda}_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.9)$$

donde $i = 1$ denota el robot A465 e $i = 2$ el robot A255 (Figura 3.1). Y la descripción para cada una de las partes de (3.9) es:

- $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ es el vector de las articulaciones generalizadas.
- $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es la matriz de inercia simétrica positiva definida.
- $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ es el vector de coriolis y torques centrífugos.
- $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ es el vector de los torques gravitacionales.
- $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es la matriz diagonal semidefinida positiva de acuerdo con los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones.
- $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ es el vector de torques actuando sobre las articulaciones.
- $\mathbf{J}_{\varphi_i}^T \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ es el Jacobiano transpuesto.
- $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ es el vector de los multiplicadores de Lagrange (físicamente representa la fuerza aplicada en el punto de contacto).

Donde $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) = \nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ es de rango completo. Y $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$ se asume Lipschitz, tal que

$$\|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di})\| = L_i \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}\| = L_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|. \quad (3.10)$$

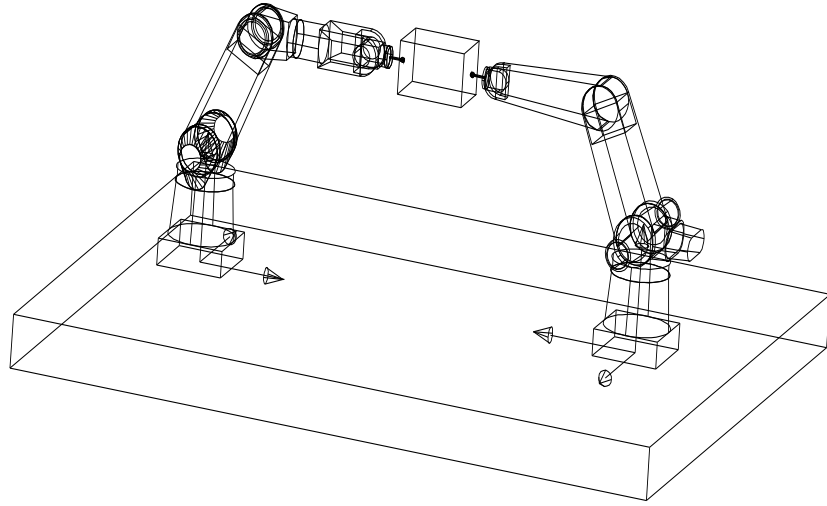


Figura 3.1: Sistema de robots cooperativos en el agarre de un objeto.

$\nabla\varphi_i(\mathbf{q}_i)$ denota el vector gradiente (o la matriz Jacobiana) de la superficie del objeto $\varphi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, el cual mapea un vector normal al plano tangente que se da en el punto de contacto descrito por

$$\varphi_i(\mathbf{q}_i) = 0. \quad (3.11)$$

Nótese que la ecuación anterior significa que se consideran restricciones homogéneas⁴. El sistema completo está sujeto a m restricciones holonómicas dadas por

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (3.12)$$

donde $\varphi(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_l) \in \mathbb{R}^m$. Además note que

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i = \nabla\varphi_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\varphi}(\mathbf{q}) = 0 \quad (3.13)$$

es una restricción sin movimiento, lo cual significa

$$\mathbf{p} = 0. \quad (3.14)$$

⁴Si la restricción de movimiento (3.11) se puede escribir como $\sum_i^n \varphi_i(q_i) = 0$, donde $\varphi_i(q_i)$ depende solamente de q_i , entonces la restricción es homogénea.

El auto valor más grande (pequeño) de una matriz se denota por $\lambda_{\max}(\cdot)$ ($\lambda_{\min}(\cdot)$). La norma de un vector \mathbf{x} de $n \times 1$ está dado por vectores de la forma $\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ y la norma de una matriz \mathbf{A} de $m \times n$ está dada por la correspondiente norma inducida $\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$.

3.3. Propiedades del modelo de un robot

Las propiedades que se dan a continuación son de gran utilidad en el análisis de la estabilidad. Considerando que las articulaciones de los robots son de revolución, entonces se cumplen las siguientes propiedades (Arteaga Pérez 1998).

Propiedad 3.3.1 Cada matriz $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ satisface $\lambda_{hi} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{x} \leq \lambda_{Hi} \|\mathbf{x}\|^2$
 $\forall \mathbf{q}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$, donde $\lambda_{hi} \triangleq \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i)$, $\lambda_{Hi} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i)$, y
 $0 < \lambda_{hi} \leq \lambda_{Hi} < \infty$. △

Propiedad 3.3.2 Con una definición propia de $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$, la matriz $\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ es anti-simétrica. △

Propiedad 3.3.3 El vector $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x})\mathbf{y}$ satisface $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{y})\mathbf{x} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_i}$. △

Propiedad 3.3.4 Se satisface $\|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x})\| \leq k_{ci} \|\mathbf{x}\|$ con $0 < k_{ci} < \infty$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$. △

Propiedad 3.3.5 El vector $\dot{\mathbf{q}}_i$ puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i &= \dot{\mathbf{q}}_i + (\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i) & (3.15) \\ &= (\mathbf{I}_{n_i \times n_i} - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i}) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i \\ &\triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{p}}_i, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{q})$ con $\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$ y $\dot{\mathbf{P}} \triangleq \mathbf{J}_{\varphi}^+ \mathbf{J}_{\varphi}$ es conocida como la velocidad restringida (Arimoto et al. 1993) y $\dot{\mathbf{p}}_i$ está definida como en (3.13). $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T (\mathbf{J}_{\varphi_i} \mathbf{J}_{\varphi_i}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ es conocida como la pseudoinversa de $\mathbf{J}_i(\mathbf{q})$ con una cota

$$C_{oi} = \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\| \quad (3.16)$$

y $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ tiene $\text{rank}(\mathbf{Q}_i) = n - m$. Las dos matrices anteriores son ortogonales, i.e.

$$\mathbf{Q}_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ = \mathbf{O}$$

y

$$\mathbf{Q}_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^T = \mathbf{O}.$$

△

Capítulo 4

CONTROL DE UN SISTEMA DE ROBOTS COOPERATIVOS

La correcta ejecución del movimiento de un robot articulado es confiada al sistema de control, el cual provee a los actuadores del manipulador los voltajes adecuados consistentes con la trayectoria de movimiento deseada. Sin embargo, el control del manipulador no se puede realizar sólo con el conocimiento del modelo dinámico, sino que es necesario de usar un lazo de retroalimentación que provee información sobre el estado actual del sistema; es decir, posición, velocidad y fuerza (Figura 4.1). Las variables de posición y velocidad se obtienen de encoders o transductores ubicados en las articulaciones de los robots. En cambio, la fuerza se mide por medio de sensores colocados en la parte terminal de los robots.

En la práctica, el diseño de una ley de control con retroalimentación debe actualizar los torques aplicados a cada articulación en respuesta a las desviaciones de la trayectoria deseada, cuidando que el diseño retroalimentado asegure el seguimiento de las trayectorias deseadas \mathbf{q}_d en presencia de diferentes aspectos como: errores en las condiciones iniciales, ruido en los sensores y parámetros no modelados. Para disminuir el efecto de estas perturbaciones en (Queiroz *et al.* 1996) se han empleado varias estrategias de control con el propósito de mejorar el desempeño de manipuladores industriales como:

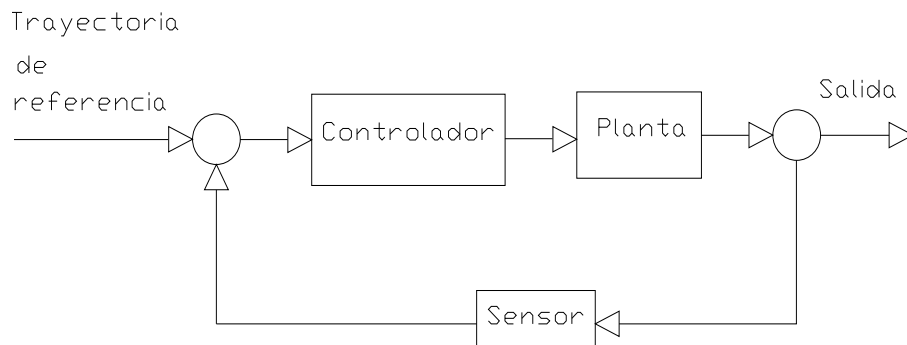


Figura 4.1: Esquema de control retroalimentado.

nombre	control
PD aumentado	$\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_v\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}$
Par calculado	$\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_v\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$
Híbrido	$\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_v\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\lambda$

Cuadro 4.1: Diferentes esquemas de control, donde $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$

el control PD aumentado, el método par calculado¹ o el control de posición/fuerza para robots con restricciones, llamado control híbrido (Cuadro 4.1).

De esta manera, para controlar la manipulación de un objeto por medio de un sistema de dos robots cooperativos, el esquema propuesto es un control de posición/fuerza explícito descentralizado utilizando el principio de ortogonalización de Arimoto *et al.* (1993), además de un observador de velocidad lineal. El control descentralizado toma cada una de las articulaciones del robot de una forma independiente basándose en el error entre la salida actual \mathbf{q} y la señal deseada \mathbf{q}_d .

¹El control par calculado transforma sistemas dinámicos no lineales en lineales. Este es un ejemplo de la técnica más general para linealizar un sistema por retroalimentación.

4.1. Esquema de control

Como se describió en la Sección 3.2, el modelo dinámico para un robot con movimiento restringido está dado por

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)\boldsymbol{\lambda}_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.1)$$

Definiendo los errores de seguimiento y observación como

$$\tilde{\mathbf{q}}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{z}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \hat{\mathbf{q}}_i, \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

donde \mathbf{q}_d es la posición deseada -en radianes- siendo una trayectoria suave acotada y $\hat{\mathbf{q}}$ es la posición estimada de \mathbf{q} . Otras definiciones son:

$$\Delta\mathbf{p}_i \triangleq \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{di} \quad (4.5)$$

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}_i \triangleq \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_{di}, \quad (4.6)$$

donde \mathbf{p}_i es la posición restringida real y \mathbf{p}_{di} la deseada². Para el error de fuerza $\boldsymbol{\lambda}_i$ es la fuerza real y $\boldsymbol{\lambda}_{di}$ es la fuerza aplicada (deseada) por cada manipulador en la superficie o restricción. Utilizando la Propiedad 3.3.5 definimos la señal de referencia como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{ri} &\triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)(\dot{\mathbf{q}}_{di} - \boldsymbol{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)(\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i\Delta\mathbf{p}_i + \xi\Delta\mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\boldsymbol{\Lambda}_i = k_i\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ con $k_i > 0$, es una matriz diagonal positiva definida y tanto β_i como ξ_i son constantes positivas. $\Delta\mathbf{F}_i$ se obtiene de

$$\Delta\mathbf{F}_i = \int_0^t \Delta\boldsymbol{\lambda}_i d\tau. \quad (4.8)$$

Se define también la variable deslizante \mathbf{s}_i como

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &\triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)(\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i + \boldsymbol{\Lambda}_i\tilde{\mathbf{q}}_i - \boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i) \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)(\Delta\dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i\Delta\mathbf{p}_i - \xi_i\Delta\mathbf{F}_i). \end{aligned} \quad (4.9)$$

²En realidad, tanto \mathbf{p}_i como \mathbf{p}_{di} y sus respectivas derivadas son cero, pero se incluyen para fines de análisis.

Como la ecuación se divide en dos espacios ortogonales, se puede definir

$$\mathbf{s}_i \triangleq \mathbf{s}_{pi} + \mathbf{s}_{fi}, \quad (4.10)$$

donde los subíndices p y f son las abreviaciones de posición y fuerza, respectivamente. Derivando la señal de referencia (4.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{ri} &\triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i(\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) + \xi\Delta\boldsymbol{\lambda}_i) \\ &+ \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i)(\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)(\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i\Delta\mathbf{p}_i + \xi\Delta\mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es una matriz diagonal positiva definida.

Puesto que las derivadas de \mathbf{Q}_i y de $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+$, no están disponibles, considérese para \mathbf{Q}_i que

$$\dot{\mathbf{Q}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i & \cdots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

donde $a_{jk}(\mathbf{q})$ es el elemento jk de \mathbf{Q}_i , con $j, k = 1, \dots, n_i$. De esta manera, se define

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\dot{\mathbf{q}}_{oi}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} & \cdots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i 1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} & \cdots & \frac{\partial a_{n_i n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

donde

$$\dot{\mathbf{q}}_{oi} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i. \quad (4.14)$$

Adicionalmente se define

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{r}) &\triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\dot{\mathbf{q}}_i) - \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\dot{\mathbf{q}}_{oi}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i & \cdots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i 1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i & \cdots & \frac{\partial a_{n_i n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &\triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{oi} \\ &= \dot{\mathbf{q}}_i - \hat{\dot{\mathbf{q}}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i \\ &= \dot{\mathbf{z}}_i + \Lambda_i \mathbf{z}_i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nótese que en (4.12), (4.13) y (4.15) se omite \mathbf{q}_i del argumento de $\dot{\mathbf{Q}}_i$, $\hat{\dot{\mathbf{Q}}}_i$ y $\ddot{\mathbf{Q}}_i$ por simplicidad. Ahora, en lugar de usar $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$ en (4.11), se define $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} &\triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i(\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i(\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) + \xi\Delta\lambda_i) \\ &\quad + \dot{\mathbf{Q}}_i(\dot{\mathbf{q}}_{oi})(\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\dot{\mathbf{q}}_{oi})(\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i\Delta\mathbf{p}_i + \xi\Delta\mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\dot{\mathbf{q}}_{oi})$ está dado de manera similar a $\dot{\mathbf{Q}}_i(\dot{\mathbf{q}}_{oi})$ en (4.13). Nótese que $\dot{\mathbf{p}}_i$ es aún usada debido a que su valor es conocido ($\dot{\mathbf{p}}_i = 0$). Despejando de la ecuación (4.11) se tiene

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i(\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i(\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) + \xi\Delta\lambda_i) \\ &= \ddot{\mathbf{q}}_{ri} - \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i)(\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)(\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i\Delta\mathbf{p}_i + \xi\Delta\mathbf{F}_i). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sustituyendo (4.18) en (4.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} &\triangleq \ddot{\mathbf{q}}_{ri} - \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i)(\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)(\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i\Delta\mathbf{p}_i + \xi\Delta\mathbf{F}_i) \\ &\quad + \dot{\mathbf{Q}}_i(\dot{\mathbf{q}}_{oi})(\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\dot{\mathbf{q}}_{oi})(\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i\Delta\mathbf{p}_i + \xi\Delta\mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (4.19)$$

Utilizando (4.15) es posible obtener

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} = \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i), \quad (4.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) &\triangleq -\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{r}_i)(\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i(\tilde{\mathbf{q}}_i - \mathbf{z}_i)) \\ &\quad - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{r}_i)(\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i\Delta\mathbf{p}_i + \xi_i\Delta\mathbf{F}_i). \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.1.1. Controlador

En vista de que se pueden obtener la velocidad $\dot{\mathbf{q}}_r$ y la aceleración $\ddot{\mathbf{q}}_r$, el controlador propuesto para cada robot es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_i &\stackrel{\Delta}{=} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \\ &\quad - \mathbf{K}_{R_i}(\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)(\boldsymbol{\lambda}_{di} - k_{F_i}\Delta\mathbf{F}), \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde $\mathbf{K}_{R_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es una matriz diagonal positiva definida y $k_F > 0$. Nótese que de (4.9) y (4.16)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri} &= \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i - \dot{\mathbf{q}}_i \\ &= \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sustituyendo esta ecuación y (4.20) en el control propuesto se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_i &= \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \\ &\quad - \mathbf{K}_{R_i}(\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)(\boldsymbol{\lambda}_{di} - k_{F_i}\Delta\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dinámica del controlador en lazo cerrado

Sustituyendo (4.24) en el modelo (4.1), la dinámica en lazo cerrado está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{q}}_i - \ddot{\mathbf{q}}_{ri}) - \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i \\ - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) = -\mathbf{K}_{R_i}(\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) \\ + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{F_i}\Delta\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sustituyendo (4.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i - \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i \\ - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} = -\mathbf{D}\mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{R_i}(\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \\ (\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{F_i}\Delta\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

A continuación, tomando en cuenta que $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i$ y $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri}$ satisfacen,

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{s}}_i, \end{aligned}$$

por la Propiedad (3.3.3), la dinámica de lazo cerrado queda descrita por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i}\mathbf{s}_i \\ &+ \mathbf{K}_{R_i}\mathbf{r}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi}\Delta\mathbf{F}_i) + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde

$$\mathbf{K}_{DR_i} \triangleq \mathbf{K}_{R_i} + \mathbf{D}_i. \quad (4.28)$$

4.1.2. Observador lineal

El observador propuesto, que es una modificación del observador dado en Berghuis y Nijmijer (1994), está dado como sigue

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} + \boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i + k_{di}\mathbf{z}_i \quad (4.29)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + k_{di}\boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i, \quad (4.30)$$

donde k_{di} es una constante positiva.

Derivando (4.29) y sustituyendo (4.30) se obtiene

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + k_{di}\boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i + \boldsymbol{\Lambda}_i\dot{\mathbf{z}}_i + k_{di}\dot{\mathbf{z}}_i. \quad (4.31)$$

Ahora sustituyendo (4.16) y (4.20) en (4.31) se tiene

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i + \boldsymbol{\Lambda}_i\dot{\mathbf{z}}_i - \dot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) + k_{di}\boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i + \boldsymbol{\Lambda}_i\dot{\mathbf{z}}_i + k_{di}\dot{\mathbf{z}}_i$$

cancelando términos y agrupando

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} = \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) + k_{di}\boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i + k_{di}\dot{\mathbf{z}}_i.$$

Finalmente de la definición de la variable deslizante (dada en 4.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_i &= \dot{\mathbf{r}}_i + k_{di}\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_i + k_{di}\mathbf{r}_i &= \dot{\mathbf{s}}_i - \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dinámica del observador en lazo cerrado

Multiplicando (4.32) por $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$, y tomando en cuenta (4.27), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{r}}_i + k_{di}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{r}_i &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i}\mathbf{s}_i \\ &+ \mathbf{K}_{R_i}\mathbf{r}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi}\Delta\mathbf{F}_i). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando nuevamente la Propiedad 3.3.3 para realizar un cambio en los términos $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i$ y $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i$ y recordando que $\mathbf{s}_i = \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri}$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i \\
&= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i \\
&= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} \\
&= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i)(\mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} \\
&= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i)(\mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}).
\end{aligned}$$

Finalmente (4.33) toma la forma,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i \\
&\quad - \mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i - \mathbf{H}_{\text{rd}_i}\mathbf{r}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{\text{Fi}}\Delta F). \tag{4.34}
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{H}_{\text{rd}_i} \triangleq k_{\text{di}}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{\text{R}_i}$ y \mathbf{K}_{DR_i} está definido como en (4.28).

4.1.3. Análisis de estabilidad

La estabilidad de un sistema alrededor de un punto de equilibrio se determina por el método directo de Lyapunov. La idea principal del método es estudiar la razón de cambio de la *energía del sistema* sin resolver explícitamente sus ecuaciones dinámicas. La expresión que representa la energía del sistema comúnmente se llama *función candidata de Lyapunov* y el principio fundamental de la estabilidad es mostrar que esta función decrece conforme transcurre el tiempo.

Para el sistema de robots cooperativos, los puntos de equilibrio se designan como los errores de seguimiento y de observación $\tilde{\mathbf{q}}_i$, $\tilde{\dot{\mathbf{q}}}_i$, $\Delta\mathbf{p}_i$, $\Delta\dot{\mathbf{p}}_i$, $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i$, \mathbf{z}_i y $\dot{\mathbf{z}}_i$. De esta manera, de (4.9), (4.27) y (4.34) se define el estado \mathbf{x} para los errores de seguimiento y observación como

$$\mathbf{x}_i \triangleq [\mathbf{s}_i^{\text{T}} \quad \mathbf{r}_i^{\text{T}} \quad \Delta\mathbf{F}_i^{\text{T}}]^{\text{T}}. \tag{4.35}$$

Puesto que el análisis que se realiza es local, se define la región de interés alrededor del origen como

$$\mathbb{D}_i = \{\mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\text{max}_i}\}. \tag{4.36}$$

Nuestra meta es mostrar que el control-observador propuesto estabiliza el sistema alrededor de los puntos de equilibrio, garantizando que siempre que

el vector de estados \mathbf{x}_i tiende a cero, los error de seguimiento y de observación también tenderán a cero. Probar la convergencia de los errores de observación \mathbf{z}_i y $\dot{\mathbf{z}}_i$ es directo de la ecuación (4.16), la cual es un filtro estable. No obstante, los errores de seguimiento demandan más atención. Para probar su convergencia se utiliza el siguiente Lema (Gudiño Lau *et al.* 2004).

Lema 4.1.1 *Si \mathbf{x}_i está acotado por x_{max} y tiende a cero, los siguientes hechos se cumplen:*

- (a) $\tilde{\mathbf{q}}_i$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ permanecen acotados. Además, si la cota x_{max_i} para $\|\mathbf{x}_i\|$ se elige suficientemente pequeña tal que se garantice que $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$ para todo t , con η_i una constante positiva suficientemente pequeña, entonces $\tilde{\mathbf{q}}_i$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ también tenderán a cero.
- (b) Si, además, el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}_i$ está acotado, entonces $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i$ permanecerá acotado y tenderá a cero. \triangle

De este lema se concluye que si el vector \mathbf{x}_i está acotado, sus componentes \mathbf{s}_i , \mathbf{r}_i y $\Delta\mathbf{F}_i$ también lo están. Además \mathbf{s}_i , \mathbf{r}_i y $\Delta\mathbf{F}_i$ tenderán a cero si \mathbf{x}_i converge.

Para sustentar el análisis de convergencia del esquema de control, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i, \quad (4.37)$$

donde

$$\mathbf{M}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) & 0 \\ 0 & 0 & \xi_i \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

y $V_i(\mathbf{x}_i)$ satisface

$$\lambda_{mi} \|\mathbf{x}_i\|^2 \leq V_i(\mathbf{x}_i) \leq \lambda_{Mi} \|\mathbf{x}_i\|^2, \quad (4.39)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_{mi} &\triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{M}_i) \\ \lambda_{Mi} &\triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{M}_i) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Ahora, supóngase que para la región de interés (4.36) se satisface

- $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0$
- $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) = 0$ si y solo si $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$

Además, si $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$ es válida para todo tiempo y si x_{\max_i} es suficientemente pequeña en el sentido del Lema 4.1.1, entonces se puede concluir la convergencia a cero de todas las señales de error. El siguiente teorema establece las condiciones de los parámetros del sistema de control que garantizan la convergencia.

Teorema 4.1.1 *Considérese la dinámica del sistema cooperativo dado por (3.12) y (4.1), en lazo cerrado, con la ley de control (4.22) y el observador (4.29)–(4.30), donde \mathbf{q}_{di} y \mathbf{p}_{di} son las posiciones de las restricciones deseadas, con derivadas $\dot{\mathbf{q}}_{di}$, $\ddot{\mathbf{q}}_{di}$, $\dot{\mathbf{p}}_{di}$, y $\ddot{\mathbf{p}}_{di}$ también acotadas, y todas ellas satisfacen la restricción (3.13). Considérese también los dominios dados $\mathbb{D}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ definidos por (4.36) para cada subsistema, donde las cotas x_{\max_i} , $i = 1, \dots, l$, son elegidas de acuerdo con*

$$x_{\max_i} \leq \frac{\eta_i \alpha_i}{(1 + \xi_i c_{0i} \sqrt{n_i})} \quad (4.40)$$

con $\alpha_i \triangleq k_i - |k_i - \beta_i| - \gamma_i$, donde k_i y β_i están definidos en (4.7) y $\gamma_i \triangleq c_{0i} L_i (v_{mi} + \beta_i \eta_i)$, con c_{0i} y L_i dado por (3.10)–(3.16) y $\|\dot{\mathbf{q}}_{di}\| \leq v_{mi} \forall t$. Entonces, las dinámicas y señales de error permanecen acotados y además se obtiene una estabilidad asintótica de los errores de seguimiento, de fuerza y de observación, i. e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}, \quad (4.41)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{0} \quad (4.42)$$

si las siguientes condiciones son satisfechas

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \triangleq \mu_{1i} + 1 + \delta_i \quad (4.43)$$

$$k_{di} \triangleq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) + \omega_i}{\lambda_{hi}} \quad (4.44)$$

$$\xi \triangleq c_1 + \lambda_{\max} + \frac{1}{4} \gamma_3^2 + \delta_i \quad (4.45)$$

donde $\omega_i = \mu_{2i} + \gamma_{2i} + \frac{1}{4}(\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i} + \gamma_{1i})^2 + \delta_i$, con δ_i una constante positiva y $\mu_{1i}, \mu_{2i}, \mu_{3i}, \mu_{4i}, \gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \gamma_{3i}$ y λ_{Di} están definidos en el Apéndice B. \triangle

Capítulo 5

RESULTADOS

En este capítulo, se presentan los resultados experimentales obtenidos al implementar el algoritmo de control posición-fuerza con un observador de velocidad lineal en dos robots manipuladores industriales ubicados en el Laboratorio de Robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería (UNAM).

5.1. Descripción del equipo utilizado

El equipo utilizado para comprobar la teoría desarrollada en términos del modelo del sistema y del algoritmo de control cooperativo se conforma principalmente de dos robots manipuladores industriales, dos tarjetas de adquisición de datos y una computadora, Figura (5.1). Las características de cada uno de estos componentes se describen a continuación:

- *Robots manipuladores.* El sistema de manipuladores se compone de un robot A465 y uno A255 de la firma canadiense *CRS Robotics*, con articulaciones de revolución impulsadas eléctricamente (motores de CD) via un sistema de engranaje armónico. El primer manipulador consta de 6 g.d.l. y el segundo de 5 g.d.l. Cabe resaltar que en cada brazo articulado sólo se hace uso de sus tres primeras articulaciones para la manipulación de un objeto. Ambos robots cuentan con transductores de posición ópticos (encoders) en cada articulación. Se cuenta con dos sensores de fuerza, de la marca JR3 con un rango de fuerza máximo de 100N, ubicados en el extremo final de los robots, respectivamente

(Figura 5.2). El sensor está conectado a una PC por medio de una interfaz (tarjeta) que provee lectura de fuerza a 1 ms. Adicionalmente, se utilizan protectores contra choques y fuerzas excesivas.



Figura 5.1: Sistema experimental del laboratorio de Robótica.

- *Tarjeta de adquisición de datos PCI-Flex Motion-6C de N.I.* Estas tarjetas son la interfaz de los transductores de posición por cada articulación. Son tipo PCI y pueden controlar las articulaciones en: posición, velocidad, aceleración, inicio y reporte de error. Tienen 6 salidas¹ y 8 entradas analógicas multiplexadas. Los voltajes de las tarjetas entrada/salida puede variar de ± 10 V y la corriente máxima de salida es de ± 10 mA.
- *Computadora y lenguaje de programación.* La computadora empleada tiene un procesador Intel Pentium IV a 2.4 MHz y el lenguaje de programación utilizado es básicamente C bajo el entorno del programa LabWindows que provee la compañía de *National Instrument* para el control de robots. El programa realiza sus iteraciones en 9 ms; conocido también como tiempo de muestreo del programa.

¹Utilizando 3 salidas para controlar el robot A465 y las 3 restantes para el robot A255

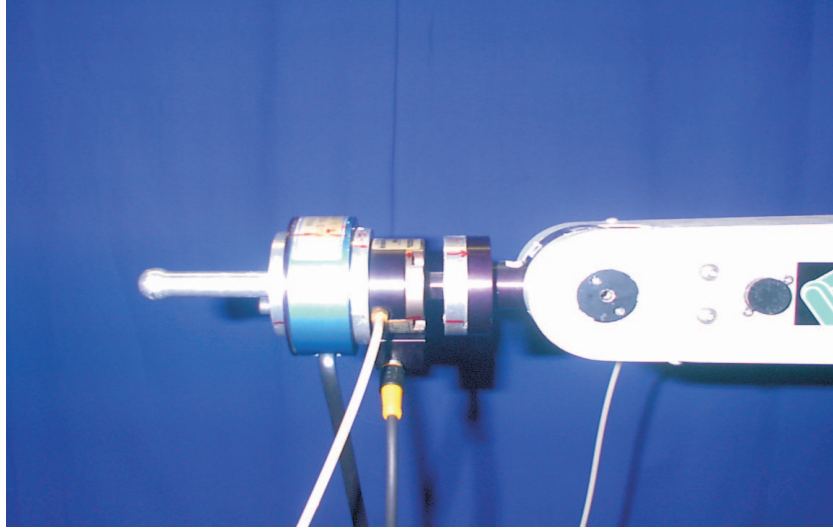


Figura 5.2: Sensor de fuerza.

5.2. Descripción de las trayectorias de movimiento

Las trayectorias de movimiento deseadas se generan con el propósito de guiar los movimientos del robot de una configuración actual a una posterior requerida. Comúnmente, las trayectorias se describen en el espacio operacional del robot y en seguida se utiliza la cinemática inversa para reconstruir los movimientos que las articulaciones deberán ejecutar. Para asegurar que los valores de la velocidad y la aceleración de la trayectoria no sean discontinuos al inicio y final del recorrido, se propone un polinomio de quinto orden

$$p_d(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5, \quad (5.1)$$

cuyos coeficientes pueden ser calculados con las condiciones $t_0 = 0$, $t_f = t$ y las posiciones deseadas.

Tomando la primera y segunda derivada de (5.1) se obtiene la velocidad y aceleración correspondiente. *i.e.*,

$$\dot{p}_d(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \quad (5.2)$$

$$\ddot{p}_d(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (5.3)$$

Evaluando (5.1)-(5.3) en un tiempo inicial ($t_0 = 0$), se obtiene

$$\begin{aligned} p_d(0) &= a_0 & a_0 &= p_i \\ \dot{p}_d(0) &= a_1 & \Rightarrow & a_1 = 0 \\ \ddot{p}_d(0) &= 2a_2 & & a_2 = 0, \end{aligned}$$

donde p_i es la posición inicial.

Para un tiempo final ($t_f = t$) los polinomios correspondientes a la posición, velocidad y aceleración (5.1)-(5.3) están dados como sigue:

$$\begin{aligned} p_f &= p_i + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ 0 &= 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3, \end{aligned}$$

donde $p_d(t_f)$ se sustituye por p_f que es la posición final y a_0 ha sido sustituido por p_i . La correspondiente velocidad y aceleración se igualan a cero con el propósito de que el efector final llegue a la posición final deseada con una velocidad cero (y como consecuencia; con aceleración cero). En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} p_f - p_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

o en forma compacta (5.4) se puede escribir como una ecuación lineal

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (5.5)$$

De esta manera conociendo las posiciones y el tiempo requerido para que el efector final del robot llegue de una posición inicial p_i a una final p_f , se pueden obtener los coeficientes a_3 , a_4 y a_5 ; despejando la expresión algebraica (5.5), *i.e.*

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} \quad (5.6)$$

Por ejemplo, para los primeros diez segundos ($t = 10s$), que es el tiempo en el cual los robots parten de su posición inicial (ready) y se acercan a la caja, la Figura (5.3) muestra las trayectorias de la posición, velocidad y aceleración deseada de las ecuaciones (5.1)-(5.3) para el brazo articulado A465. Con este mismo procedimiento se obtienen todas las trayectorias requeridas para la realización de la tarea designada de ambos robots.

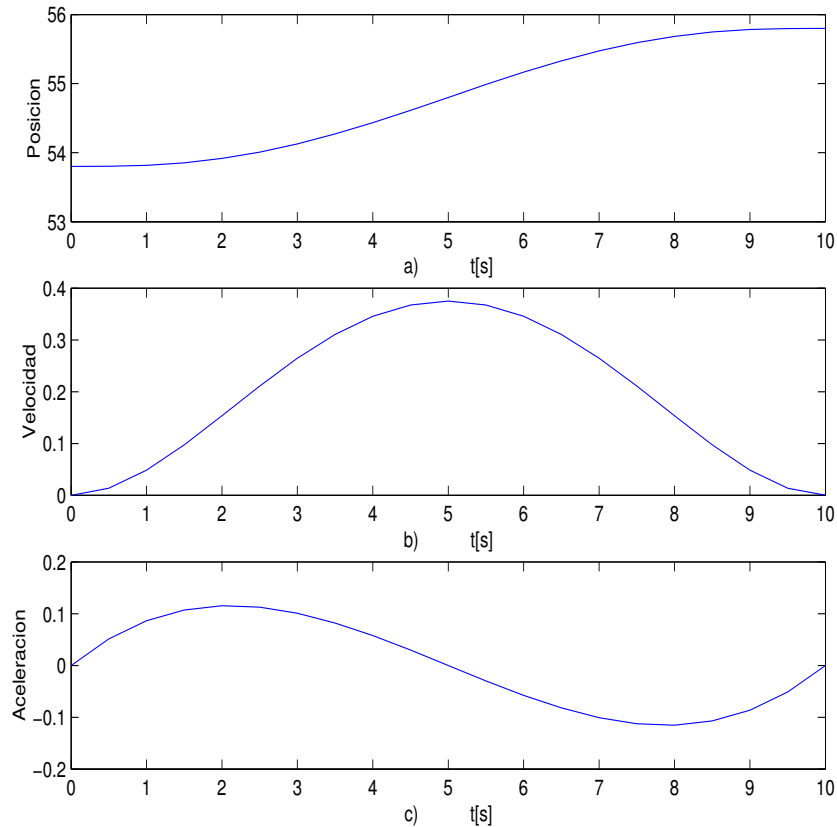


Figura 5.3: Trayectorias polinomiales para los primeros 10 segundos del efector final del manipulador A465. Para: a) Posición. b) Velocidad. c) Aceleración

5.3. Resultados experimentales

La tarea de nuestro sistema consiste en tomar un objeto (*grasping*), realizar un movimiento con él (aplicando una fuerza deseada) y posteriormente, dejarlo en la posición original. De esta manera, el movimiento descrito por el conjunto de robots se divide en dos partes: movimiento libre y movimiento restringido. El movimiento libre consiste en llevar el extremo de cada manipulador a la posición donde se encuentra el objeto (antes del agarre), considerándose una fuerza cero. Para el movimiento restringido (agarre del objeto) el efector final se encuentra en contacto con la restricción o superficie y entonces se considera el movimiento con una fuerza aplicada en el objeto.

Con el objetivo de examinar el comportamiento del esquema de control con un observador lineal se designó una tarea consistente en tomar un objeto y realizar un círculo con él en un tiempo de 40 segundos. El círculo tiene un radio de 0.05 m y es realizado mientras se le aplica una fuerza cambiante en el tiempo de forma sinusoidal. Las superficies o restricciones holónomas están definidas por (3.12), donde las posiciones del objeto (caja) están dadas por:

$$\begin{aligned} x_{R1} &= 0.557 [m] \\ x_{R2} &= 0.863 [m] \\ y_{R1,R2} &= 0.0 [m] \\ z_{R1,R2} &= 0.585 [m], \end{aligned}$$

la trayectoria deseada se describen como:

$$\begin{aligned} x_{R1} &= 0.557 [m] \\ x_{R2} &= 0.863 [m] \\ y_{R1,R2} &= 0.05 \sin((\omega(t - t_i)) - 0.05) [m] \\ z_{R1,R2} &= 0.585 + 0.05 \cos((\omega(t - t_i)) - 0.05) [m], \end{aligned}$$

y la fuerza deseada, por:

$$\lambda_{dxR1,R2} = \begin{cases} 5(t - 15)/5 & 15 < t \leq 20 \\ 5 + 5(t - 20)/5 & 20 < t \leq 25 \\ 10 + 5 \sin(3\pi(t - 25)/40) & 25 < t \leq 65 \\ 15 - 15(t - 65)/5 & 65 < t \leq 70 \end{cases}, \quad (5.7)$$

donde los subíndices R1 y R2 corresponden a los robot A465 y A255, respectivamente. Para estas posiciones se toma el marco de referencia del sistema completo en la base del robot A465 y los parámetros de la ley de control (4.22) y la señal de referencia (4.7) se describen en el Cuadro 5.1.

El experimento completo se realiza en 85 segundos. En los primeros 10s, de $t = 0\text{s}$ a $t = 10\text{s}$, los robots se acercan al objeto; en los siguientes 10s, de $t = 11\text{s}$ a $t = 20\text{s}$, los robots incrementan su fuerza de contacto para el agarrar el objeto y levantarlo a una posición $z=0.64 \text{ m}$.

Para los siguientes 40s, de $t = 21\text{s}$ a $t = 60\text{s}$, se aplica una fuerza dada en (5.7) mientras los robots realizan un círculo con el objeto. Posteriormente,

Robot	A465	A255
K_R	60I	13I
K_F	3I	3I
ξ	0,0001	0,0001

Cuadro 5.1: Parámetros de la ley de control

de $t = 66s$ a $t = 70s$ el objeto es colocado en su posición original y la fuerza aplicada disminuye nuevamente en forma lineal (rampa). Finalmente, en los últimos 10s de $t = 71s$ a $t = 80s$, los robots regresan a su posición inicial llamada *ready* (Figura 5.4).



Figura 5.4: Robots A465 y A255 en su posición inicial (steady).

Los resultados obtenidos se muestran de la Figura 5.5 a la Figura 5.8. En la Figura 5.5 se puede apreciar que los errores de posición en coordenadas cartesianas son de ± 1 cm, esto debido al hecho de que el modelo del sistema no contempla el la fricción dinámica que se presenta en las articulaciones sino que se aproxima por medio de una función signo. En la Figura 5.6 se muestra el seguimiento de fuerza mientras se realiza un círculo (descrito anteriormente), la figura muestra un buen seguimiento sin embargo se observan pequeñas oscilaciones alrededor de la trayectoria. En la figura 5.7 se muestran los errores de observación los cuales son de ± 0.1 grado. Finalmente, la

Figura 5.8 presenta la gráfica de los voltajes con el fin de verificar que éstos no se saturan durante la tarea designada a los robots.

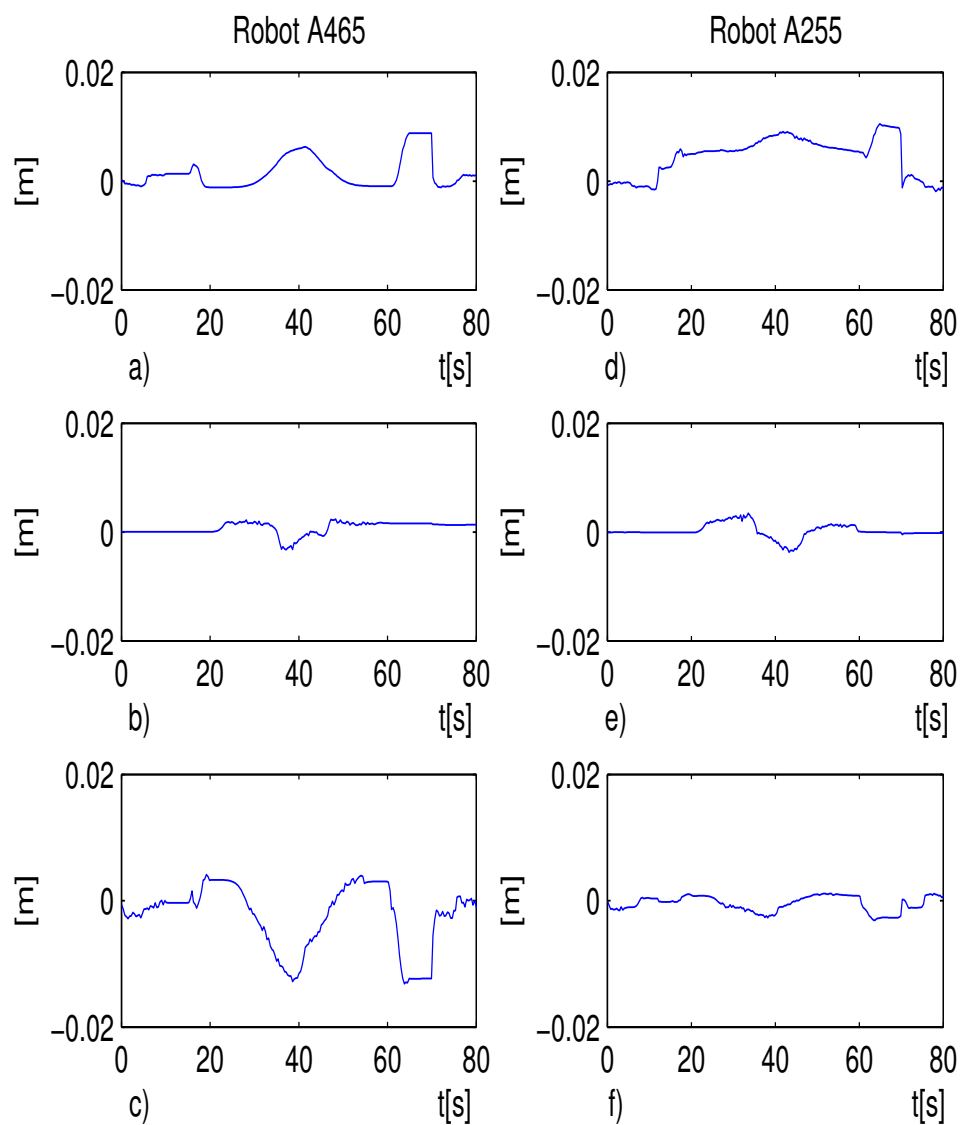


Figura 5.5: Error de seguimiento en coordenadas cartesianas. a) \tilde{x}_1 . b) \tilde{y}_1 . c) \tilde{z}_1 . d) \tilde{x}_2 . e) \tilde{y}_2 . f) \tilde{z}_2 .

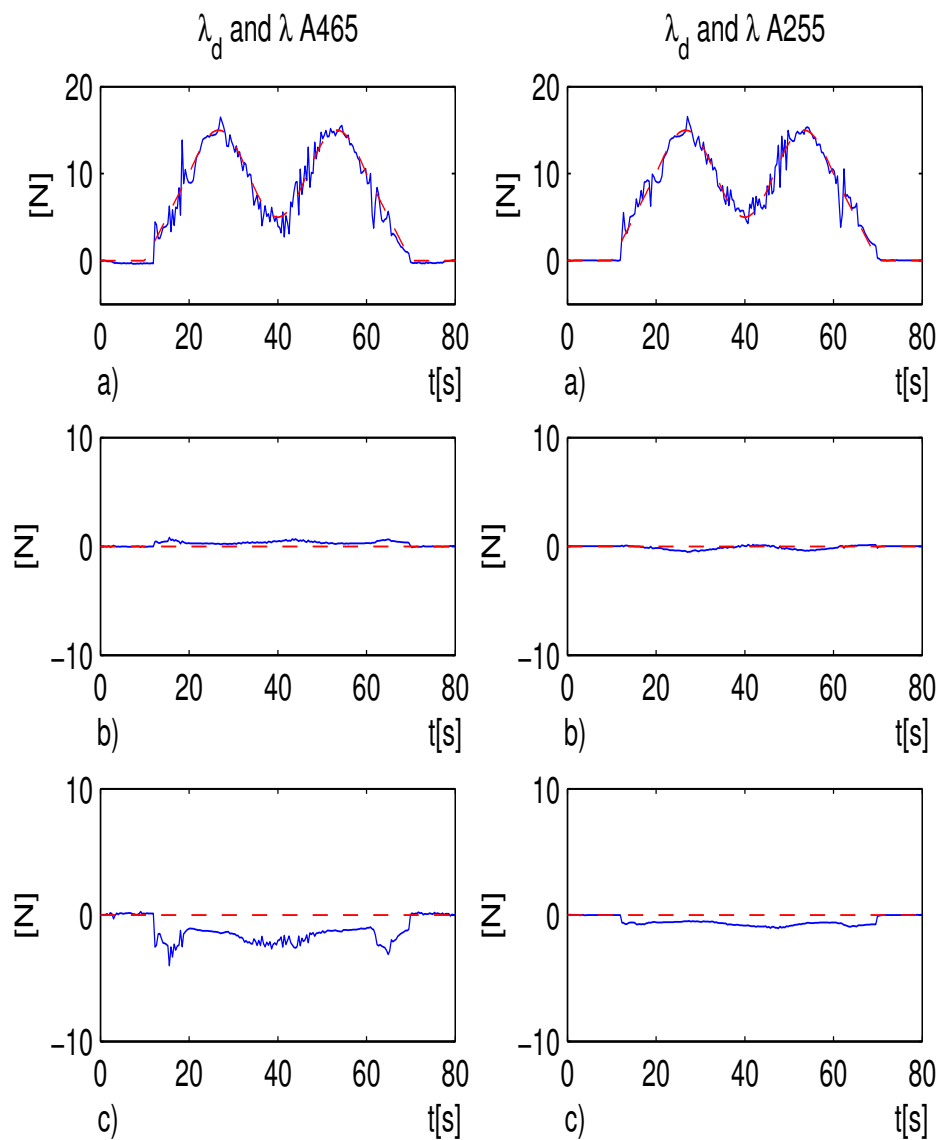


Figura 5.6: Fuerza deseada (- -) y fuerza real (—). a) F_{1x} . b) F_{1y} . c) F_{1z} . d) F_{2x} . e) F_{2y} . f) F_{2z} .

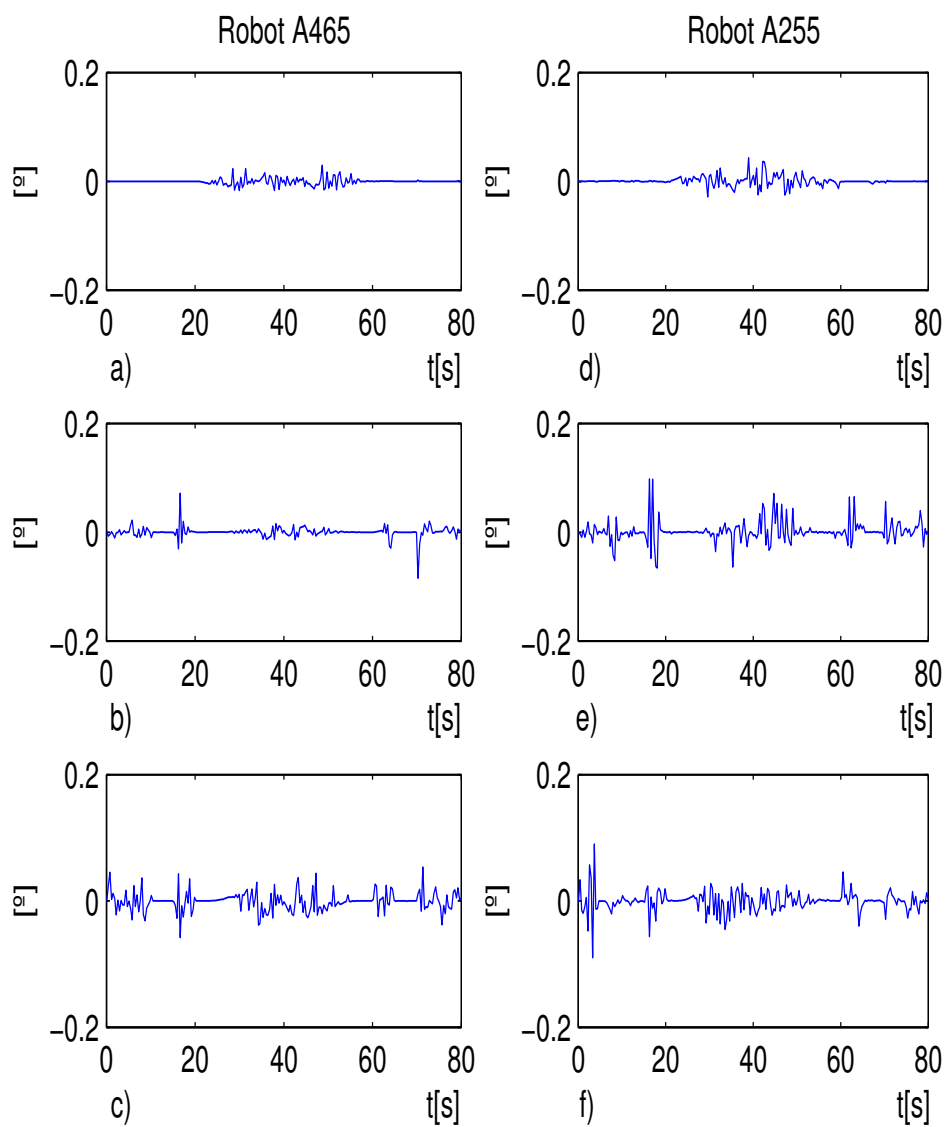


Figura 5.7: Errores de observación. a) \tilde{q}_{11} . b) \tilde{q}_{12} . c) \tilde{q}_{13} . d) \tilde{q}_{21} . e) \tilde{q}_{22} . f) \tilde{q}_{23} .

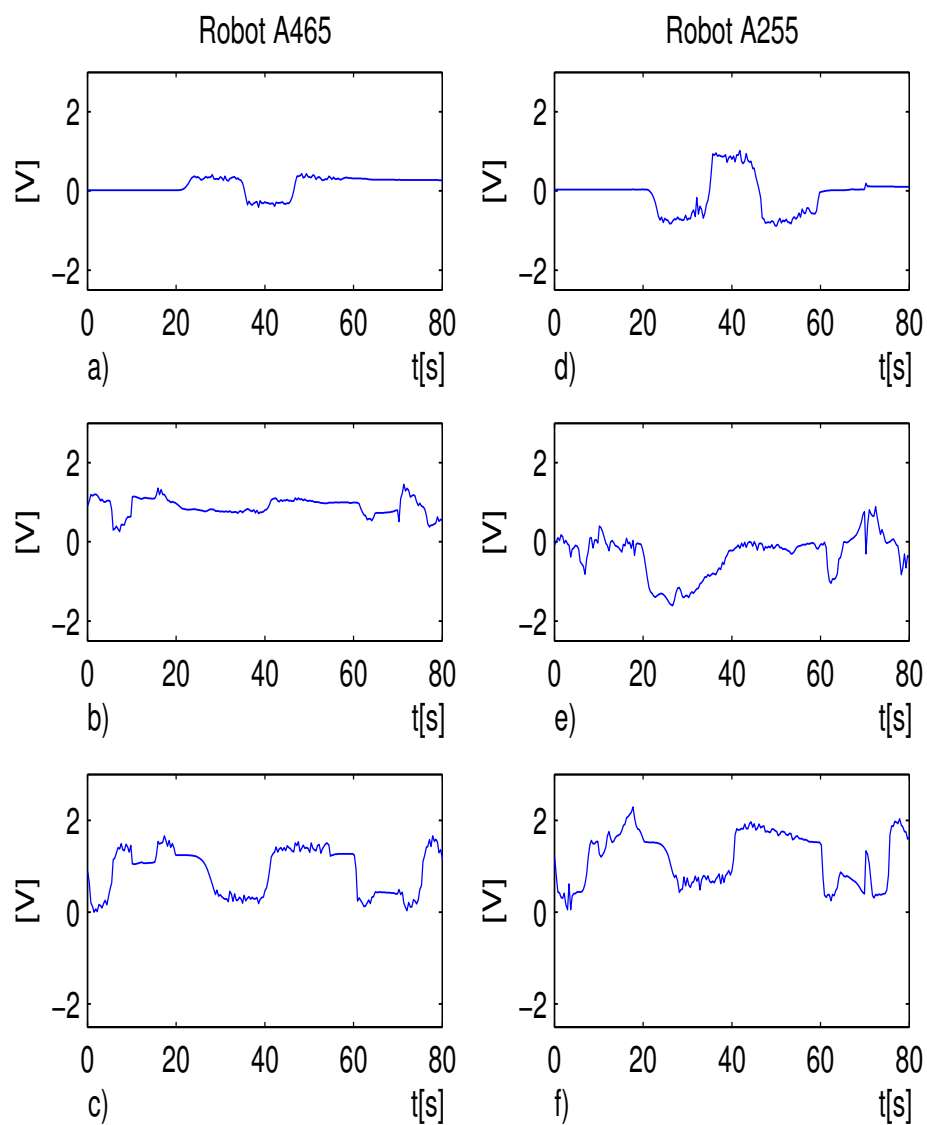


Figura 5.8: Voltajes de control para las articulaciones de los robots. Para: a) q_{11} . b) q_{12} . c) q_{13} . d) q_{21} . e) q_{22} . f) q_{23} .

Conclusiones

El esquema controlador-observador propuesto en esta tesis provee un seguimiento asintótico en las trayectorias prescritas y en el seguimiento de la fuerza deseada. El problema de control de robots cooperativos sin transductores de velocidad se ha realizado utilizando un observador lineal el cual reconstruye de una manera asintótica las velocidades articulares de cada robot manipulador con un error de ± 0.01 grados. A pesar de ser un observador lineal (implementado en un sistema no lineal), realiza una buena estimación de la posición y velocidad. Esto debido a que es un observador de alta ganancia, lo que significa que su dinámica de observación es más rápida que la velocidad del controlador².

La ley de control es un enfoque descentralizado de posición/fuerza explícito, tomando en cuenta las restricciones del movimiento. Se utiliza el Principio de Ortogonalización el cuál distingue entre señales de posición retroalimentada de señales de fuerza retroalimentada mediante una matriz de proyección en coordenadas articulares. El esquema de control-observador propuesto se valida con la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Por lo tanto es posible el control de robot cooperativos sin transductores de velocidad mediante una ley de control adecuada basada en observadores de estado. Se concluye también que aunque los errores de observación y de posición son buenos, podrían mejorar si se contempla en el modelo la fricción dinámica y se reduce el tiempo de muestreo.

²Es requisito para obtener un buen desempeño de un proceso, que el observador de estados sea más rápido que el control

Apéndice A

MODELO DINÁMICO DE LOS ROBOTS A465 Y A255

Los robots A465 y A255 de la marca canadiense CRS, son del tipo manipulador con 6 y 5 grados de libertad cada uno, respectivamente¹. Son actuados por motores de corriente directa mediante transmisiones armónicas. Algunas de sus especificaciones más relevantes se dan en el Cuadro A.1 y su descripción completa se divide en tres partes llamadas; cinemática directa, cinemática inversa y modelo.

	A465	A255
Número de ejes	6	5
Peso	31Kg	17Kg
Capacidad de carga	2Kg	1Kg
Alcance	0.710m	0.559m

Cuadro A.1: Características de los robots A465 y A255.

A.1. Cinemática directa

La cinemática directa de un robot manipulador se describe por medio de una matriz que transforma las coordenadas de la última articulación (o de

¹Cabe mencionar que en el control de robots cooperativos utilizado en este trabajo sólo se emplean las primeras tres articulaciones de cada manipulador.

cualquier otro punto) con respecto de un sistema coordenado fijo en la base de la primera articulación del robot, la expresión matemática que define esta matriz es:

$${}^0\mathbf{T}_3(\mathbf{q}) = {}^0\mathbf{A}_1(q_1) {}^1\mathbf{A}_2(q_2) {}^2\mathbf{A}_3(q_3), \quad (\text{A.1})$$

donde la matriz homogénea ${}^{i-1}\mathbf{A}_i(q_i)$ transforma las coordenadas de un punto del sistema i al $i-1$ ($i = 1, 2, 3$). Para obtener cada matriz ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ se utiliza la convención de Denavit-Hartenberg; usada comúnmente para seleccionar la orientación de los marcos de referencia que se colocan en cada articulación. La forma de la matriz está dada por

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_i C_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_i S_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{bmatrix}$$

con $S_{\theta_i} = \sin(\theta_i)$ y $C_{\theta_i} = \cos(\theta_i)$. Los demás parámetros que aparecen en la matriz de transformación anterior, se detallan a continuación:

- a_i es la distancia a lo largo del eje x_i desde el origen 0_i a la intersección de los ejes x_i y z_{i-1}
- $d - i$ determina la distancia a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen 0_{i-1} a la intersección de los ejes x_i y z_{i-1} .
- α_i es el ángulo entre z_{i-1} y z_i , medido alrededor de $x - i$ (Figura A.2).
- θ_i representa el ángulo entre x_{i-1} y x_i medido con respecto a z_{i-1} (Figura A.2).

Los valores de los parámetros anteriores se especifican en el Cuadro A.2, y en la Figura A.1 se muestra el diagrama de cuerpo libre y los sistemas coordenados ligados a cada articulación. De esta manera, las respectivas matrices de transformación son: Para el robot A465

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1} & 0 \\ S_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{\theta_2} & -S_{\theta_2} & 0 & a_2 C_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} & C_{\theta_2} & 0 & a_2 S_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

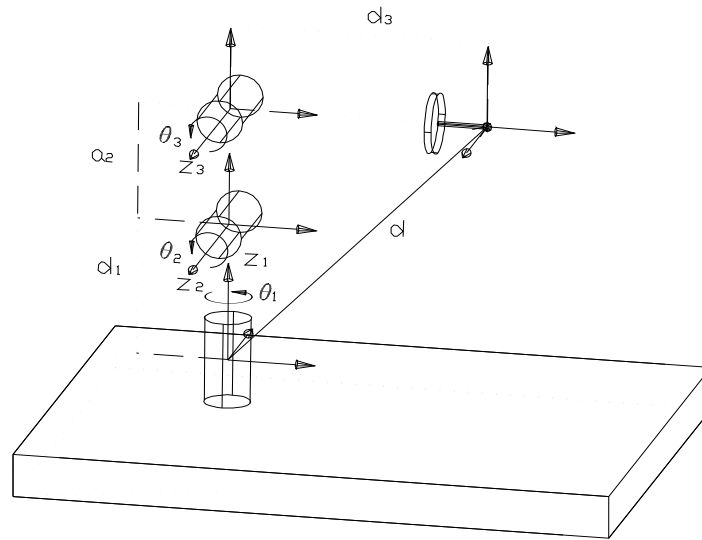


Figura A.1: Diagrama de cuerpo libre.

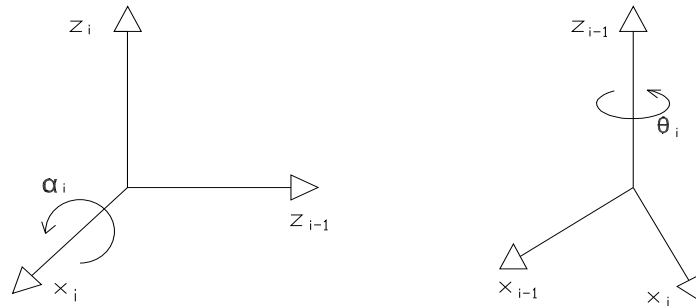
	A465				A265		
	a_i	α_i	d_i	θ_i	a_i	d_i	θ_i
1	0.0	+90°	0.33m	$\theta_1(t)$	0.0	0.254m	$\theta_1(t)$
2	0.305m	0°	0.0	$\theta_2(t)$	0.254m	0.0	$\theta_2(t)$
3	0.0	+90°	0.0	$\theta_3(t)$	0.254m	0.0	$\theta_3(t)$

Cuadro A.2: Parámetros del robot A465 y A255.

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_{\theta_3} & 0 & S_{\theta_3} & 0 \\ S_{\theta_3} & 0 & -C_{\theta_3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Y para el robot A255

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1} & 0 \\ S_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 C_{\theta_2} \\ 0 & 1 & 0 & a_2 S_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura A.2: Sentido de los ángulos α_i y θ_i .

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 C_{\theta_3} \\ 0 & 1 & 0 & a_3 S_{\theta_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A.2. Cinemática inversa

Para resolver el problema de la cinemática inversa es necesario considerar que las tres últimas articulaciones (para un robot de 6 grados de libertad) se intersectan en un punto. De esta forma, la cinemática inversa se divide en dos problemas simples conocidos respectivamente como: *cinemática de posición inversa* y *cinemática de orientación inversa*. Dicho de otra manera, primero se encuentra la posición \mathbf{d} de la intersección de los ejes de la muñeca (llamado centro de la muñeca) y después se encuentra su orientación \mathbf{R} .

Posición inversa

La cinemática de posición inversa de los robots A465 y A255 se describe por la ecuación

$$\mathbf{p}_{mi} = \mathbf{d}_i - d_i \mathbf{R}_i \mathbf{a}_i \quad (\text{A.2})$$

donde:

- $\mathbf{p}_{mi} = [p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}]^T$ es el vector de posición del centro de la muñeca medido desde el origen de la base del robot.

- \mathbf{d}_i es el vector de posición del efector final medido desde la base del robot.
- d_i es la distancia entre la parte terminal del robot y el centro de la muñeca².
- \mathbf{R}_i determina la orientación del sistema coordenado de la última articulación respecto de la base. Para el caso del robot A255 se considera \mathbf{R} como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

- \mathbf{a} es el vector unitario orientado en la dirección de acercamiento del efector final.

entonces, (A.2) da una relación

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - d_6 r_{13} \\ p_y - d_6 r_{23} \\ p_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

nótese que la ecuación (A.4) depende de las primeras tres variables articulares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Conocidas las componentes del vector \mathbf{p} , se puede utilizar el enfoque geométrico para calcular las variables articulares θ_{i1} , θ_{i2} y θ_{i3} , este procedimiento se basa en la trigonometría. Para calcular el valor de la primer variable, se proyecta el vector \mathbf{p}_{mi} sobre el plano x_0y_0 (Figura A.3). De esta proyección se tiene que

$$\theta_{1i} = \arctan(P_{xi}, P_{yi}), \quad (\text{A.5})$$

donde \arctan denota la función arco tangente de dos argumentos.

El calculo de los ángulos θ_2 y θ_3 dado θ_1 , se obtiene considerando el plano formado por el segundo y tercer elemento mostrado en la Figura A.4, y como el movimiento del elemento dos y tres es también planar, entonces

$$\theta_3 = \arctan(D, \pm\sqrt{1 - D^2}), \quad (\text{A.6})$$

²tamaño del último eslabón + tamaño del efector final.

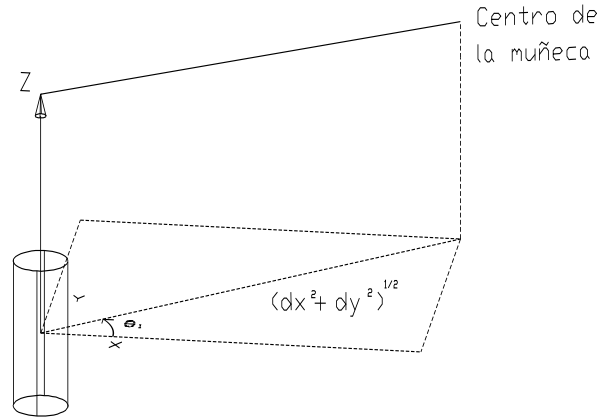


Figura A.3: Proyección del centro de la muñeca sobre el plano x_0y_0 .

con

$$D = \frac{P_x^2 + P_y^2 + (P_z - d_1)^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2d_4}. \quad (\text{A.7})$$

Finalmente θ_2 se obtiene de

$$\theta_2 = \arctan(p_z - d_1, \sqrt{p_x^2 + p_y^2}) - \arctan(a_3 \sin(\theta_3), a_2 + a_3 \cos(\theta_3)) \quad (\text{A.8})$$

Orientación inversa

Como se mencionó anteriormente sólo las tres primeras articulaciones del robot son controladas. De esta manera, el cálculo correspondiente a la orientación del efector final no es necesario puesto que la orientación de la muñeca no se controla. Las últimas articulaciones de los robots mantienen la orientación del tercer elemento durante todos los movimientos que realiza el manipulador.

A.3. Modelo dinámico

Empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el movimiento, la ecuación dinámica de un manipulador está dada por la ecuación

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i, \quad (\text{A.9})$$

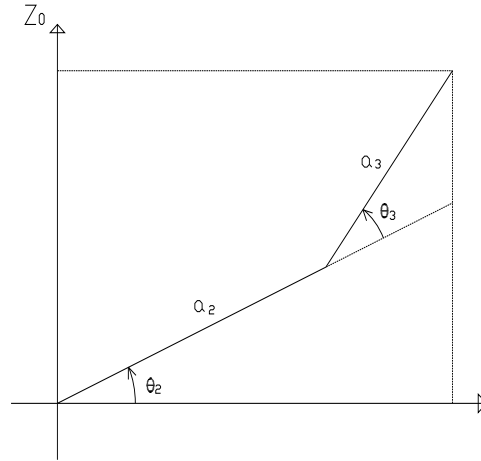


Figura A.4: Proyección sobre el plano formado por el 2o. y 3er. elemento.

donde sus elementos $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ y $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$ son en general función de las posiciones y velocidades de todas las articulaciones, esto es $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ y $\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Dicho de otra forma, los elementos de $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ y $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$ son por supuesto dependientes de la geometría del robot. A continuación se describen cada uno de los términos que forman la ecuación (A.9).

Matriz de inercia generalizada $\mathbf{H}(\mathbf{q})$

La matriz de inercia $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ es una matriz simétrica definida positiva de 3×3 , se define como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

donde sus elementos son función solamente de \mathbf{q} .

Para el robot A465 estos elementos se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_{11} &= 0.72899 + 0.36865 \cos(2q_2) + 0.36987 \sin(2q_2 + q_3) \\ &\quad - 0.162177 \cos(2q_3 + 2q_2) \\ h_{12} &= 0 \\ h_{13} &= 0 \\ h_{21} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{22} &= 1.08725 + 6.0 \times 10^{-11} \cos(2q_2) + 0.739747 \sin(q_3) \\
h_{23} &= 0.36987 \sin(q_3) + 0.34077 \\
h_{31} &= 0 \\
h_{32} &= 0.36987 \sin(q_3) + 0.34077 \\
h_{33} &= 0.34077
\end{aligned}$$

Y los elementos de la matriz de inercia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ del robot *A255* están dados por:

$$\begin{aligned}
h_{11} &= 0.650 + 0.25 \cos(2q_2) + 0.05(2 \cos q_2 + 2 \cos q_3) \\
h_{12} &= 0 \\
h_{13} &= 0 \\
h_{21} &= 0 \\
h_{22} &= 1.1 \\
h_{23} &= 0.03 \cos(q_2 - q_3) \\
h_{31} &= 0 \\
h_{32} &= 0.03 \cos(q_2 - q_3) \\
h_{33} &= 0.57
\end{aligned}$$

Matriz de coriolis y torques centrífugos $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

Es una matriz de la forma

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Sus elementos se determinan por:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \{-0.369 \sin(2q_2) + 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) + 0.37 \cos(2q_2 + q_3)\} \dot{q}_2 \\
&\quad + \{0.185 \cos(q_3) + 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) + 0.185 \cos(2q_2 + q_3)\} \dot{q}_3 \\
c_{21} &= \{0.369 \sin(2q_2) - 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) - 0.37 \cos(2q_2 + q_3)\} \dot{q}_1 \\
c_{31} &= \{-0.185 \cos(q_3) - 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) - 0.185 \cos(2q_2 + q_3)\} \dot{q}_1 \\
c_{12} &= \{-0.369 \sin(2q_2) - 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) - 0.37 \cos(2q_2 + q_3)\} \dot{q}_1 \\
c_{22} &= -6 \times 10^{-11} \sin(2q_2) \dot{q}_2 + 0.37 \cos(q_3) \dot{q}_3 \\
c_{32} &= -0.37 \cos(q_3) \dot{q}_2 \\
c_{13} &= \{0.185 \cos(q_3) + 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) + 0.185 \cos(2q_2 + q_3)\} \dot{q}_1 \\
c_{23} &= 0.37 \cos(q_3) \dot{q}_2 + 0.37 \cos(q_3) \dot{q}_3 \\
c_{33} &= 0
\end{aligned}$$

Y los elementos de la Matriz de coriolis y torques centrífugos $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del robot A255 están dados por:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 3.2 - 0.25 \sin 2q_2 \dot{q}_2 + 0.05(-\sin q_2 \dot{q}_2 - \sin q_3 \dot{q}_3) \\
 c_{12} &= -0.25 \sin 2q_2 \dot{q}_1 - 0.05 \sin q_2 \dot{q}_1 \\
 c_{13} &= 0.05 - \sin q_3 \dot{q}_1 \\
 c_{21} &= 0.25 \sin 2q_2 \dot{q}_1 + 0.05 \sin q_2 \dot{q}_1 \\
 c_{22} &= 1.8 \\
 c_{23} &= 0.03 \cos q_2 - q_3 \dot{q}_3 \\
 c_{31} &= 0.05 \sin q_3 \dot{q}_1 \\
 c_{32} &= -0.03 \cos q_2 - q_3 \dot{q}_2 \\
 c_{33} &= 1.2
 \end{aligned}$$

Vector de los torques gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$

Este vector se encuentra presente en robots destinados a desplazarse fuera del plano horizontal y su forma es:

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 24.7065 \cos(q_2) + 11.897 \sin(q_2 + q_3) \\ 11.897 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

para el robot A465 y

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.8 \cos q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

para el A255.

Términos disipativos \mathbf{D} y F_c

Los términos disipativos corresponden a la fricción viscosa y fricción de coulomb, estos están determinados para los robots A465 y A255, respectivamente, por:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

y

$$\mathbf{F}_{c1}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} f_{c1} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ f_{c2} \text{sign}(\dot{q}_2) \\ f_{c3} \text{sign}(\dot{q}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.082 \text{sign}(\dot{q}_1) \\ 3.973 \text{sign}(\dot{q}_2) \\ 8.707 \text{sign}(\dot{q}_3) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{F}_{c2}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} f_{c1} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ f_{c2} \text{sign}(\dot{q}_2) \\ f_{c3} \text{sign}(\dot{q}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015 \text{sign}(\dot{q}_1) \\ 0.80 \text{sign}(\dot{q}_2) \\ 0.70 \text{sign}(\dot{q}_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Es importante hacer notar que en el análisis de estabilidad del algoritmo de control propuesto no se considera el término de fricción de coulomb. Sin embargo, la fricción se compensa en el programa de implementación experimental.

A.4. Dinámica de los motores

El modelo dinámico relacionando el voltaje v aplicado a la armadura del motor con el par τ suministrado por dicho motor (Kelly 1994) está dado por

$$J_m \ddot{q}_i + f_m \dot{q}_i + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q}_i + \frac{\tau}{\sqrt{2}} = \frac{K_a}{r R_a} v, \quad (\text{A.17})$$

que representa un modelo dinámico lineal simplificado de un motor de CC con inductancia de armadura despreciable, donde

- J_m inercia del rotor (Kg $m\sqrt{2}$)
- K_a constante motor-par (N m / A)
- R_a resistencia de la armadura (Ω)
- k_b constante de contrareacción electromotriz (V s / rad)
- f_m coeficiente de fricción con sus soportes (N-m)
- τ par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga (N-m)
- q posición angular del eje de la carga (rad)

- r relación de reducción de los engranes (en general $r \gg 1$)
- v voltaje de la armadura (V)

Considerando actuadores de CC en las n articulaciones la ecuación (A.17) toma la forma

$$\boldsymbol{\tau}_i = -\mathbf{M}_{ai}\ddot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{M}_{bi}\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{M}_{ci}\mathbf{v}_i, \quad (\text{A.18})$$

con

$$\mathbf{M}_{ai} = \text{diag}\{J_{mi}r_i^2\} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{M}_{bi} = \text{diag}\{(f_{mi} + (\frac{K_a K_b}{R_a})_i)r_i^2\} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{M}_{ci} = \text{diag}\{(\frac{K_a K_b}{R_a})_i \frac{1}{r_i^2}\} \quad (\text{A.21})$$

El modelo dinámico completo de un manipulador se obtiene reemplazando $\boldsymbol{\tau}$ de (A.18) en (A.9)

$$(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) + \mathbf{M}_{ai})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D} + \mathbf{M}_{bi})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{M}_{ci}\mathbf{v} \quad (\text{A.22})$$

La ecuación anterior puede ser vista como un sistema dinámico cuya entrada es \mathbf{v} y sus salidas son \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$.

Apéndice B

PRUEBA DE ESTABILIDAD DEL CONTROLADOR

Para probar que las dinámicas y señales de error permanecen acotados y que además la estabilidad del sistema es asintótica en los errores, es necesario mostrar que $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0 \quad \forall t$ y que $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ en una región $\mathbb{D} = \{\mathbf{x}_i \mid \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max i}\}$. Nótese que esto implica que $\mathbf{x}_i(0)$ debe estar en general, en una subregión de \mathbb{D} . Para llevar a cabo este objetivo considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_i(\mathbf{x}_i) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{x}_i, \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{r}_i \\ \Delta \mathbf{F}_i \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

y

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo (B.2) y (B.3) en (B.1) se tiene que

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i, \quad (\text{B.4})$$

derivando esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{r}_i \\ &\quad + \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{r}}_i + \Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i.\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Si ahora se sustituyen dinámicas en lazo cerrado correspondiente a las ecuaciones (4.27) y (4.34) en la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i \\ &\quad - \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{DRi}\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{Ri}\mathbf{r}_i \\ &\quad + \mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi i}^T(\mathbf{q}_i)(\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi}\Delta \mathbf{F}_i) + \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i \\ &\quad - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{DRi}\mathbf{s}_i \\ &\quad - \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{rdi}\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi i}^T(\mathbf{q}_i)(\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi}\Delta \mathbf{F}_i) + \Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i.\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Para simplificar los términos en (B.6) se utiliza la definición de \mathbf{K}_{DR} (ecuación (4.28)):

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{Ri}\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{DRi}\mathbf{s}_i &= \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{Ri}\mathbf{r}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{DRi}\mathbf{r}_i \\ &= \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{Ri}\mathbf{r}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{Ri}\mathbf{r}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i\mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i\mathbf{r}_i.\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Además, se utiliza (4.9) para desarrollar el séptimo término de (B.6), i.e.

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi i}^T(\mathbf{q}_i)(\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi}\Delta \mathbf{F}_i) = -\Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i - \Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i k_{Fi}\Delta \mathbf{F}_i.\quad (\text{B.8})$$

Empleando la Propiedad 3.2 de anti-simetría a los términos correspondientes de (B.6) se tiene que

$$\frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i = 0.$$

Entonces, $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i)$ toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &= -\mathbf{s}_i^T \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{DRi}\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i\mathbf{r}_i \\ &\quad - K_{Fi}\Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \\ &\quad - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i \\ &\quad + \mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi i}^T(\mathbf{q}_i)\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi}\mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi i}^T(\mathbf{q}_i)\Delta \mathbf{F}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{rdi}\mathbf{r}_i\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Antes de continuar, analicemos algunos de los términos de la expresión anterior. En síntesis, la función candidata de Lyapunov en su mayoría depende de los estados definidos en la ecuación (4.35). Para los demás términos la definición de cotas determina su análisis de estabilidad.

Para verificar que $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0$ se definen las siguientes cotas:

$$\mu_{1i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{B.10})$$

$$\mu_{2i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{B.11})$$

$$\mu_{3i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{B.12})$$

$$\mu_{4i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max i}} M_e(x_{\max i}) \lambda_{Hi} \quad (\text{B.13})$$

De esta forma se tiene

$$-\mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \leq \mu_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 \quad (\text{B.14})$$

$$-\mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i \leq \mu_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 \quad (\text{B.15})$$

$$-\mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \leq \mu_{3i} \|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{s}_i\| \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{DRi} \mathbf{s}_i \leq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{Ri}) \|\mathbf{s}_i\|^2. \quad (\text{B.17})$$

Recordando que $\mathbf{H}_{rdi} \triangleq k_{di} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{Ri}$, se tiene

$$\begin{aligned} -\mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{rdi} \mathbf{r}_i &= -\mathbf{r}_i^T (k_{di} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{Ri}) \mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{r}_i^T k_{di} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{Ri} \mathbf{r}_i \\ &\leq -k_{di} \lambda_{hi} \|\mathbf{r}_i\|^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{Ri}) \|\mathbf{r}_i\|^2, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

donde $\lambda_{hi} = \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i)$.

$$-\Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i \leq -\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) k_{Fi} \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) &\leq \|\mathbf{s}_i^T\| \|\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\| M_e(x_{\max i}) \|\mathbf{r}_i\| \\ &\leq \lambda_{Hi} M_{ei}(x_{\max i}) \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| \\ &\leq \mu_{4i} \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$-\mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{r}_i \leq \lambda_{D_i} \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\|, \quad (\text{B.21})$$

donde

$$\lambda_{D_i} \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i). \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) k_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i \leq c_{1i} k_{F_i} \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \mathbf{F}_i\|. \quad (\text{B.23})$$

Sustituyendo en la ecuación (B.9) las cotas previamente definidas, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & \mu_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \|\mathbf{s}_i\|^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i) \|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{s}_i\| \\ & - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) k_{F_i} \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 + \mu_{4i} \|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{s}_i\| + \mu_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 + \mu_{3i} \|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{s}_i\| \\ & + c_{1i} c_{2i} \zeta_{1i} \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) \|\mathbf{r}_i\|^2 + c_{1i} c_{2i} \zeta_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & + c_{1i} c_{2i} k_{F_i} \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \mathbf{F}_i\| + c_{1i} k_{F_i} \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \mathbf{F}_i\| - k_{d_i} \lambda_{h_i} \|\mathbf{r}_i\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Ordenando términos semejantes

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & -[\lambda_{\min}(k_{R_i}) - \mu_{1i}] \|\mathbf{s}_i\|^2 \\ & - [k_{d_i} \lambda_{h_i} - \mu_{2i} - c_{1i} c_{2i} \zeta_{2i} - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i})] \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) k_{F_i} \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 \\ & + [\lambda_{\max}(\mathbf{D}_i) + \mu_{4i} + \mu_{3i} + c_{1i} c_{2i} \zeta_{1i}] \|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{s}_i\| \\ & + [c_{1i} c_{2i} k_{F_i} + c_{1i} k_{F_i}] \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \mathbf{F}_i\| \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Definiendo

$$\theta_{1i} = \lambda_{\min}(k_{R_i}) - \mu_{1i} \quad (\text{B.26})$$

$$\theta_{2i} = k_{d_i} \lambda_{h_i} - \mu_{2i} - c_{T_i} \nu_{2i} - \lambda_{\max}(k_{R_i}) \quad (\text{B.27})$$

$$\theta_{3i} = \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) k_{F_i} \quad (\text{B.28})$$

y

$$\psi_{1i} = \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i) + \mu_{3i} + \mu_{4i} + c_{1i} c_{2i} \zeta_{1i} \quad (\text{B.29})$$

$$\psi_{2i} = c_{1i} (c_{2i} + k_{F_i}), \quad (\text{B.30})$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - \theta_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 - \theta_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 - \theta_{3i} \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 \\ & + \psi_{1i} \|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{s}_i\| + \psi_{2i} \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \mathbf{F}_i\|. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Haciendo

$$\theta_{1i} = \delta_i + \frac{1}{2}\psi_{1i} \quad (\text{B.32})$$

$$\theta_{2i} = \delta_i + \frac{1}{2}\psi_{1i} + \frac{1}{2}\psi_{2i} \quad (\text{B.33})$$

$$\theta_{3i} = \delta_i + \frac{1}{2}\psi_{2i} \quad (\text{B.34})$$

Las definiciones de θ_{1i} , θ_{2i} y θ_{3i} se realizaron para completar cuadrados, de tal manera que

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &\leq -\delta_i\|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i\|\mathbf{r}_i\|^2 - \delta_i\|\Delta\mathbf{F}_i\|^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}(\sqrt{\psi_{1i}}\|\mathbf{s}_i\| - \sqrt{\psi_{1i}}\|\mathbf{r}_i\|)^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}(\sqrt{\psi_{2i}}\|\mathbf{r}_i\| - \sqrt{\psi_{2i}}\|\Delta\mathbf{F}_i\|)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

\therefore

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i\|\mathbf{x}_i\|^2, \quad (\text{B.36})$$

lo que significa que $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i)$ es negativa definida en \mathbb{D} . Es decir, $\|\mathbf{x}_i\|$ no puede ser más grande que $x_{\max i}$, de tal manera que sus errores tenderán a cero, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.37})$$

lo que significa que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{s}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.38})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.39})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta\mathbf{F}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.40})$$

Por el Lema 4.1.1 a), esto implica que

$$\|\Delta\mathbf{p}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.41})$$

$$\|\Delta\dot{\mathbf{p}}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.42})$$

$$\|\mathbf{z}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.43})$$

$$\|\dot{\mathbf{z}}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.44})$$

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.45})$$

$$\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i\| \rightarrow 0 \quad (\text{B.46})$$

Como $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i\|$ está acotada, también $\|\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_i\|$ lo está, por lo que del Lema 4.1.1 b) se concluye que

$$\|\Delta\lambda_i\| \rightarrow 0 \tag{B.47}$$

En conclusión el controlador estabiliza el sistema de robots cooperativos en la manipulación de un objeto.

Bibliografía

- Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa.** 1993. Model-based adaptive hybrid control for geometrically constrained robots. *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation.*, 618–623.
- Arteaga Pérez, M. A. y L. A. Muñoz.** 2002. Control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics Proceedings*, 2837–2842.
- Arteaga Pérez, M.** 1998. On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 120. 8–14.
- Arteaga Pérez, M.** 2001. Robot control of robots by using a linear observer. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics Proceedings*, 571–576.
- Berghuis, H. y H. Nijmijer.** 1994. Robust control of robots via linear estimated state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39. 2159–2162.
- Canudas de Wit, C., B. Siciliano y G. Bastin.** 1996. *Theory of Robot Control.* London: Springer-Verlag.
- Chen, C.-T.** 1970. *Introduction to Linear System Theory.* New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Groover, M., M. Weiss, R. Nagel y N. Odrey.** 1994. *Robótica Industrial.* México, D. F.: McGraw-Hill.
- Gudiño Lau, J., M. Arteaga Pérez, L. Muñoz y V. Parra-Vega.** 2004. On the control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12(4). 600–6008.

- Kelly, M. R.** 1994. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*,. Ensenada B.C.: UNAM.
- Khalil, H. K.** 1996. *Nonlinear Systems, 2nd ed.*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice–Hall.
- Khatib, O.** 1987. A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal of Robotics and Automation* RA-3. 43–53.
- Martinez, J., M. Arteaga Pérez y L. Sagredo.** 2005. Caracterización de fricción en los robots industriales: A465 y a255. *AMCA*.
- McClamroch, N. y W. Danwei.** 1988. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33(5). 419–426.
- Murray, R. M., Z. Li y S. S. Sastry.** 1994. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. Boca Raton, Florida, U. S. A.: CRC Press.
- Niku, S. B.** 2001. *Introduction to Robotics. Analysis, Systems, Applications*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson–Education.
- Parra-Vega, V., A. Rodríguez-Angeles, S. Arimoto y G. Hirzinger.** 2000. High precision constrained grasping with cooperative adaptive handcontrol. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 32. 235–254.
- Queiroz, M., D. Dawson y T. Burg.** 1996. Position/force control of robots manipulators without velocity/force measurements. *International Conference On Robotics and Automation*. Minnesota, USA. 2561–2566.
- Raibert, M. y J. Craig.** 1981. Hybrid position/force control of manipulators. *Transactions of the ASME* 102. 126–133.
- Sciavicco, L. y B. Siciliano.** 2000. *Modeling and Control of Robot Manipulators, 2nd ed.* London: Springer–Verlag.
- Spong, M. W. y M. Vidyasagar.** 1989. *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons.

- Yoshikawa, T.** 1987. Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators-description of hand constraints and calculation of joint driving force. *IEEE Journal of Robotics and Automation* 386-392.