UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MAESTRÍA EN INGENIERÍA

APLICACIONES FINANCIERAS

DEL MODELO DE VASICEK

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

(OPTIMACIÓN FINANCIERA)

P R E S E N T A

EDUARDO HERNÁNDEZ PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Francisco Venegas Martínez

Ciudad Universitaria Noviembre 2006

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se lo quiero dedicar a:

Mi mamá: Por todos estos años de apoyo incondicional,y por enseñarme que con dedicación y trabajo todo es posible.

Mi Papá: Por tu apoyo en esta larga etapa de mi vida.

Paola: Por brindarme su apoyo incondicional en cualquier momento. Por ayudarme a ser mejor persona, y sobre todo gracias por ser parte de mi vida.

Mis hermanos: Xochitl, Mauricio, Patricia y Claudia, por su apoyo, consejos y compañía.

Jovanna: Por todo el cariño que me das, gracias.

Familia Pavón: Por hacerme sentir parte de su familia, por la confianza de abrirme las puertas de su casa.

Don Julio, Isabel y Maria Luisa: Por el cariño y por la confianza que me han brindado.

Mis amigos: Alex, Armando, Cristian, Emmanuel, Iván, Marcos, Memo, Rafael, Rogrigo, Toño, Sergio.

UNAM: Por formarme como profesionista, así como el apoyo económico recibido en esta etapa.

Ambrosio y Adriana: Por su ayuda y consejos para mejorar este documento.

Jurado: Dr. Sergio Fuentes Maya, Dr. Mauel Ordorica,Dr. Francisco Venegas Martinez, M. en I. Fernando Cruz Aranda y M. en I. Patricia Aguilar Juárez por su tiempo por revisar este trabajo y sus valiosos comentarios.

Prof. Venegas: Por todo su apoyo incondicional, sus enseñanzas las cuales me motivaron a profundizar y no conformarme con lo ya establecido. Gracias por ser una gran persona, gracias por su amistad.

Prof. Fuentes Maya: Por todo el apoyo recibido en mi estancia en la DEPFI.

Jaime Vázquez: Por tu amistad y apoyo. Porque tus enseñanzas me han sido de gran utilidad.

Todos los profesores de la UNAM que contribuyeron a mi formación académica.

La música y a las matemáticas.

GRACIAS TOTALES. *

* Gustavo Cerati.

ÍNDICE

Pág.

INTRODUCCIÓN

Para entender el movimiento Browniano, así como sus transformaciones y generalizaciones, es necesaria la herramienta matemática del cálculo estocástico, que es la piedra angular de la modelación estocástica de los mercados financieros hoy en día. Sin embargo, existen fenómenos en el campo de la economía y finanzas que poseen la característica de estabilizarse hacia algún valor de largo plazo, como podrían ser los siguientes:

El supuesto de que las tasas de interés se mantienen constantes o bien que su dinámica está determinada por una función conocida en el tiempo, podría ser razonable para instrumentos de renta fija de muy corto plazo, por ejemplo, días o posiblemente semanas en periodos de estabilidad. Sin embargo, en el mediano y largo plazo, la tasa de interés presenta un comportamiento aleatorio, en cuyo caso el movimiento Browniano proporciona una herramienta adecuada de análisis.

En los últimos 30 años el desarrollo de teorías sobre modelos de tasas de interés ha sido explosivo, este tipo de modelos se ha clasificado en modelos de equilibrio y modelos de no equilibrio, los más representativos del primer grupo son el modelo de Vasicek y CIR. Ambos presentan reversión a la media a un valor de largo plazo, pero el primero puede tomar valores negativos (lo cual es una propiedad no deseable en modelos de tasas) pero su principal ventaja radica en su manejo analítico. Sin embargo, es de gran utilidad en la valuación de bonos así como de productos derivados.

El creciente uso de los contratos a futuro para cubrir el riesgo de tasas de interés, se debe en gran medida a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar y salir rápidamente del mercado debido a su liquidez y apalancamiento. Los futuros financieros, en particular, los que se refieren a tasas de interés o títulos de deuda, pública o privada son herramientas útiles que permiten a los inversionistas institucionales, a los fondos de pensiones y a las tesorerías de corporativos administrar el riesgo de las tasas de interés con costos bajos de transacción. Asimismo, el riesgo crédito de estos instrumentos es mínimo, o casi nulo, debido a la asociación del mercado con una cámara de compensación que a cambio de una comisión actúa como contraparte de todas las partes; situación que garantiza el cumplimiento de las obligaciones adquiridas por todos los participantes en el mercado. En conclusión, los futuros de tasas de interés son instrumentos que permiten a los inversionistas cumplir sus posiciones pasivas y/o activas, en respuesta a sus expectativas económicas y financieras, reduciendo el riesgo de la incertidumbre del mercado con bajos costos de transacción.

El costo de capital es un indicador para medir la rentabilidad de una empresa, en particular una comparación de este indicador con el rendimiento sobre el capital es una técnica empleada para la toma de decisiones sobre proyectos de inversión. Los estudios previos han demostrado que el costo de capital tiende ha alcanzar un valor de largo plazo. Es por ello, que en este trabajo se plantea que el comportamiento del rendimiento sobre el capital puede ser modelado con el modelo de Vasicek y a través de éste obtener una estimación del costo de capital.

El objetivo de este trabajo es exponer las características básicas del modelo de Vasicek y una vez alcanzado esto, mostrar tres aplicaciones de este modelo a variables financieras de gran importancia. Por lo que la organización de este trabajo se dividirá en cuatro capítulos, explicados brevemente a continuación.

En el primer capítulo se presentará una introducción al movimiento Browniano, así como el lema de Itô, el cual será una herramienta fundamental en el desarrollo de este trabajo. Se mostrará el modelo de Vasicek y sus propiedades al resolver las ecuaciones diferenciales que representan al modelo, obteniendo como principal característica la reversión a la media.

En el capítulo dos, se vinculará una aplicación del modelo de Vasicek a la determinación de la estructura de plazos. Debido a que en la práctica se ha observado que las tasas de interés presentan reversión hacia algún valor de largo plazo, se propone el modelo de Vasicek como un candidato idóneo. En el desarrollo de este capítulo se revisarán los conceptos básicos de valuación de bonos, así como los conceptos de tasa forward y tasa corta. Además, se mostrará que la estructura de plazos puede ser obtenida a través de la tasa corta, haciendo el supuesto que la tasa corta es guiada por el modelo de Vasicek, y a partir de esta especificación se obtiene endógenamente la estructura de plazos.

En el capítulo tres se desarrollarán modelos que permiten inmunizar el valor presente de flujos de efectivo ante movimientos moderados de las tasas de interés. Ésto nos llevará a revisar los conceptos de duración y convexidad, los cuales son medidas de sensibilidad de flujos de efectivo ante cambios en las tasas de interés. En la primera sección se revisará el método clásico de inmunización de flujos de efectivo a través del rendimiento al vencimiento (yield to maturity) tomando un portafolio de bonos. Se extenderá este método al contemplar movimientos en la estructura de plazos y movimientos paralelos de ésta. Por último, se mostrará un método de inmunización a través de un portafolio de futuros. Tanto en el caso de inmunización con la estructura de plazos con futuros y bonos se utilizará la estructura de plazos del modelo de Vasicek obtenida en el capítulo dos.

En el cuarto capítulo se presentará evidencia empírica así como una prueba de que el rendimiento sobre el capital (ROE) e inverso multiplicativo del múltiplo precio-valor en libros (P/L) presentan reversión a la media. Debido a ésto se propondrá como modelo para estos indicadores al modelo de Vasicek.

Un último apartado mostrará las conclusiones de este trabajo. Lo que llevará a presentar los principales inconvenientes que resultan de suponer el modelo de Vasicek en las tres aplicaciones financieras ya mencionadas. Para resolver estos inconvenientes se darán las posibles extensiones a las propuestas de este trabajo.

CAPÍTULO 1

MOVIMIENTO BROWNIANO Y MODELO DE VASICEK

1.1 Introducción

Con el propósito de motivar el estudio de los procesos estocásticos, se iniciará con una breve descripción de los procesos en tiempo discreto. Esto permitirá la construcción gradual de los conceptos básicos en los que se fundamenta el desarrollo de las finanzas modernas en tiempo continuo. Se presentan algunas de las propiedades del movimiento Browniano aritmético, movimiento Browniano geométrico y el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, de acuerdo con Shimko [22]. En el desarrollo del presente capítulo, se presentará el Lema de Itô así como su extensión multivariada. La importancia de este lema es fundamental para el entendimiento y desarrollo de los capítulos subsecuentes. Por último, se presenta el modelo de Vasicek así como su distribución.

1.2 Modelos discretos y continuos

El concepto de caminata aleatoria es esencial para la construcción del movimiento Browniano, el cual se definirá a continuación.

Considere la familia e_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Una caminata aleatoria, W_n, $n \in \mathbb{N}$, se define mediante:

$$W_{n+1} = W_n + e_{n+1} \ , \tag{1.1}$$

con W_0 conocido. De lo anterior, es importante destacar que la variable n representa el tiempo. Por conveniencia se tomará $n = 0$ como el presente.

W_n representa el valor de acumulación de e_n. W_n es llamado una caminata aleatoria, pues determina la posición final de dar pasos aleatorios a la derecha o a la izquierda a través del tiempo. En ocasiones, el concepto de caminata aleatoria es útil para describir el precio de activos, por ejemplo, títulos de capital o acciones.

La especificación de la unidad de tiempo puede ser hecha a través de incrementos de algún periodo predeterminado: día, mes, trimestre, etc. Sin embargo, el caso de mayor interés es cuando el periodo se refiere a un instante $\mathrm{d}t$. De esta manera, si $t \in [0, t]$ representa el tiempo en forma continua, entonces (1.1) se puede reescribir como:

$$W_{t+\Delta t} = W_t + e_{t+\Delta t} \ , \tag{1.2}$$

con $W_0 = 0$ y $e_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$. Por lo tanto,

$$\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \ . \tag{1.3}$$

Así, cuando Δt se sustituye por un instante $\mathrm{d}t$, se sigue que

$$\mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t) \ . \tag{1.4}$$

El proceso $\mathrm{d}W_t$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t\right] = 0$,
(ii) $\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t \mathrm{d}t\right] = 0$,
(iii) $\mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] = \mathrm{d}t$,
(iv) $\mathrm{Var}\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] = 0$,
(v) $\mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t \mathrm{d}t)^2\right] = 0$,
(vi) $\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_t \mathrm{d}t\right] = 0$.

Las propiedades anteriores se pueden probar de la siguiente manera:

(i) Debido a que $\mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$ se tiene que:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t\right] = 0.$$

(ii) Como

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t \mathrm{d}t\right] = \mathrm{d}t \mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t\right] \ ,$$

y por el inciso anterior:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t \mathrm{d}t\right] = 0.$$

(iii) Se sabe que $\mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$

$$\mathrm{d}t = \mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_t\right] = \mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] - \mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t\right]^2 ,$$

al utilizar (i) se tiene que

$$\mathrm{d}t = \mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] .$$

(iv) Al calcular la varianza de $(\mathrm{d}W_t)^2$ se tiene que

$$\mathrm{Var}\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] = \mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t)^4\right] - \mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] \ ,$$

pero como

$$\mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t),$$

se tiene que su cuarto y segundo momentos están dados por $3\mathrm{d}t^2$ y $\mathrm{d}t^2$, por lo que

$$\mathrm{Var}\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] = 2\mathrm{d}t^2 = 0.$$

(v) Por propiedades de esperanza

$$\mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t)^2\right] = \mathrm{d}t^2 E\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] \ ,$$

y por (iii) se tiene que

$$\mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t)^2\right] = \mathrm{d}t^2\mathrm{d}t = 0.$$

(vi) Al calcular la varianza de $[\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t]$ se tiene que

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t\right] = \mathrm{E}\left[(\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t)^2\right] - \mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t\right]^2 \ ,$$

y por los incisos (ii) y (v) se tiene que:

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t\right] = 0 - 0^2,$$

por lo que

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t\right] = 0.$$

El proceso $\mathrm{d}W_t$ satisface:

$$\begin{array}{lll} & \mathrm{d}W_t & \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}W_t & \mathrm{d}t & \mathit{0} \\ \mathrm{d}t & \mathit{0} & \mathit{0} \end{array} \tag{1.5}$$

Para probar que $(\mathrm{d}W_t)^2 = \mathrm{d}t$, ver [26], se determinará el límite V de la variación cuadrática media de la sucesión de variables aleatorias en términos de convergencia en error cuadrático medio cuando $n \to \infty$. Es decir, si

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \ ,$$

se desea encontrar V tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - V\right]^2 = 0. \tag{1.6}$$

En la expresión anterior existen dos posibles soluciones las cuales son: la variable aleatoria V_n y el tipo de límite que se está usando. Por lo que se propone a:

$$V = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right].$$

Debido a que la variable aleatoria $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}\left(0, t_i - t_{i-1}\right)$ se llega a:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right] &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = t\end{aligned},$$

y así, se tiene que

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - t\right]^2 =$$

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^4 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(\Delta W_{t_i})^2(\Delta W_{t_j})^2 + t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2\right],$$

donde $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$.

Por otro lado como la familia de variables aleatorias independientes $\{\Delta W_{t_n}\}$ se distribuyen $\mathcal{N}\left(0, t_n - t_{n-1}\right)$ se tiene:

$$\mathrm{E}\left(\Delta W_{t_i}\right)^4 = 3(t_i - t_{i-1})^2 ,$$

$$\mathrm{E}\left[(\Delta W_{t_i})^2(\Delta W_{t_j})^2\right] = (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) ,$$

por lo que:

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2 - t\right]^2 = 3\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

$$+t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) .$$

Al usar el hecho de que $t_i - t_{i-1} = t/n$, para toda i, se llega a

$$\sum_{i=1}^{n}3(t_i - t_{i-1})^2 = n3\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{3t^2}{n},$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1}) = \binom{n}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2n}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2 - t\right]^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3t^2}{n}+t^2-\frac{t^2}{n}+t^2-2t^2\right)=0\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2t^2}{n}\right)=0.\end{aligned}$$

Por lo que el límite V se puede escribir como:

$$V=\int_0^t (dW_s)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2,$$

donde el límite se interpreta de acuerdo a (1.6). Es decir,

$$\int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 = t.$$

Diferenciando respecto de dt se demuestra que:

$$(\mathrm{d}W_t)^2 = \mathrm{d}t.$$

Por (vi) de las propiedades y por la observación anterior se tiene que si

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t\right] = \mathrm{d}W_t\mathrm{d}t,$$

y por (ii) de las propiedades anteriores se demuestra que

$$\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t = 0.$$

Finalmente, por definición se tiene que

$$\mathrm{d}t^2 = 0.$$

El proceso W_t es conocido como el proceso estándar de Wiener y puede ser escrito en forma diferencial como:

$$W_t = W_0 + \int_0^t \mathrm{d}W_u\ .$$

El proceso estándar de Wiener W_t cumple las siguientes propiedades:

(i) W_t es continuo en t,
(ii) W_t no es diferenciable,
(iii) W_t es un proceso de variación no acotada,
(iv) W_t es un proceso de variación cuadrática acotada,
(v) La distribución de W_u dado W_t con $u > t$, se distribuye $\mathcal{N}(W_t, u-t)$,
(vi) La varianza de un pronóstico W_u se incrementa indefinidamente conforme $u \to \infty$.

La primera propiedad se sigue ya que $\mathrm{d}W_t$ es una variable aleatoria de magnitud infinitesimal.

La segunda propiedad es debido a que W_t es una familia de variables aleatorias independientes entonces la diferencial izquierda y derecha no necesariamente coinciden.

La tercera propiedad se cumple porque la caminata aleatoria continua tiene longitud infinita.

La cuarta propiedad se satisface puesto que la suma de los cuadrados de los cambios en W es finita y es igual a t.

La quinta propiedad es cierta pues W_u es una suma de variables aleatorias normales independientes (e_t), entonces se sigue que W_u también es normal con media W_t y varianza determinada por la longitud del intervalo, que en este caso es $u - t$.

Finalmente, la propiedad (vi) se sigue debido a que en el inciso anterior se tiene que si $u \to \infty$, entonces la varianza de la condicional W_u dado W_t, $u - t$, tiende a ∞.

El proceso de Wiener en algunas ocasiones es inapropiado para la modelación financiera, sin embargo, se puede escribir un proceso estocástico continuo en función del proceso estandár de Wiener. Por ejemplo, se puede considerar una caminata aleatoria con una tendencia generalizada y heterocedasticidad (es decir, varianza no constante) que dependan ambas de X_t y t:

$$X_{t+1} = X_t + \alpha\left(X_t, t\right) + \sigma\left(X_t, t\right) e_{t+1}; \quad e_t \;\; v.a.i.i.d. \;\; \mathcal{N}(0,1),$$

con X_0 conocido.

Análogamente, si se escogen subintervalos de longitud Δ que traten de seguir el comportamiento de este proceso, se tendrá que:

$$X_{t+\Delta} = X_t + \alpha\left(X_t, t\right)\Delta + \sigma\left(X_t, t\right) e_{t+\Delta}; \quad e_t \;\; v.a.i.i.d. \;\; N(0, \Delta),$$

con X_0 conocido.

De esta forma se puede notar que las propiedades estocásticas de las muestras periodicas de un proceso de mayor frecuencia serán las mismas que las del proceso de menor frecuencia. Estrictamente hablando, esta réplica es exacta solo si α y σ son constantes; el propósito es desarrollar la intuición para la construcción de modelos estocásticos.

Al analizar nuevamente el comportamiento del proceso anterior cuando Δ tiende a $\mathrm{d}t$ se tiene que:

$$\mathrm{d}X_t = \alpha\left(X_t, t\right)\mathrm{d}t + \sigma\left(X_t, t\right)\mathrm{d}W_t \ ;$$

con X_0 conocido.

Así, el proceso anterior es la descripción de un proceso univariado de Wiener generalizado. Cabe mencionar que $\mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{d}Z_t$ describirán un proceso estándar de Wiener y que $\mathrm{d}Y_t$ y $\mathrm{d}X_t$ se referirán a funciones del proceso estándar de Wiener.

1.3 Proceso estocástico de frecuencia continua

1.3.1. Movimiento Browniano aritmético

Sea $\mathrm{d}W_t$ un proceso estándar de Wiener, con α y σ constantes, entonces se dice que X_t sigue un movimiento Browniano aritmético con tendencia α y volatilidad σ si:

$$\mathrm{d}X_t = \alpha \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ .$$

Este proceso es utilizado para modelar economías variables que tienen una tasa de crecimiento lineal con incertidumbre.

El movimiento Browniano aritmético X_t cumple las siguientes propiedades:

(i) X_t puede ser positivo o negativo,

(ii) La distribución de X_u dado X_t es normal con media con $X_t + \alpha\left(u - t\right)$ y desviación estándar $\sigma\sqrt{u-t}$,

(iii) La varianza del valor futuro X_u dado X_t tiende a ∞, conforme u tiende también.

Las propiedades anteriores indican que el movimiento Browniano aritmético es apropiado para variables que pueden tomar valores tanto positivos como negativos, para aquéllas cuyos errores de los valores futuros tengan una distribución normal, y para las variables en las que su varianza se incremente linealmente en el tiempo. Por ejemplo, una variable que puede ser modelada a través de un movimiento Browniano aritmético es el flujo de efectivo neto.

1.3.2. Movimiento Browniano geométrico

Sea $\mathrm{d}W_t$ un proceso estándar de Wiener, α y σ constantes, entonces se dice que X_t sigue un movimiento Browniano geométrico con tendencia α y volatilidad σ si:

$$\mathrm{d}X_t = \alpha X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t \ .$$

Este proceso es utilizado para modelar economías variables que crecen exponencialmente a una tasa promedio α y tienen una volatilidad proporcional al valor de la variable.

El movimiento Browniano geométrico X_t cumple las siguientes propiedades:

(*i*) Si X_t comienza con un valor positivo, entonces permanecerá positivo,

(*ii*) X_t tiene una barrera absorbente en 0; es decir si X_t toma el valor de cero, entonces X_t permanecerá en cero,

(*iii*) La distribución condicional de X_u dado X_t es lognormal, es decir, $\log(X_u)$ está normalmente distribuido, con media condicional de $\log(X_u)$:

$$\log(X_t) + \alpha\,(u-t) - \frac{1}{2}\sigma^2\,(u-t) \text{ con } \; u > t,$$

y desviación estándar condicional de $\log(X_u)$

$$\sigma\sqrt{u-t}\ .$$

El valor esperado de X_u dado X_t es:

$$X_t e^{\alpha(u-t)}\ ,$$

(*iv*) La varianza de un valor futuro X_u tiende a ∞ conforme u lo hace.

El movimiento Browniano geométrico es usado para modelar el precio de los activos financieros, ya que los cambios proporcionales en el precio de los activos son independientes e idénticamente distribuidos con función de densidad normal. Este movimiento puede ser apropiado para modelar el precio nominal de los bienes o el ingreso de alguna actividad en particular. En ocasiones es conveniente para modelar variables positivas que presentan tasas con crecimientos negativos.

1.3.3. Proceso de reversión a la media

Sea $\mathrm{d}W_t$ un proceso estándar de Wiener; $\kappa, \mu, \gamma, \sigma$; $\kappa \geq 0$ constantes, entonces se dice que X_t es un proceso de reversión a la media con parámetro de velocidad de ajuste κ, media a largo plazo μ y volatilidad σ, si cumple lo siguiente:

$$\mathrm{d}X_t = \kappa\,(u - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma X_t^{\gamma}\mathrm{d}W_t\ .$$

La elección de γ puede permitir la interpretación para la volatilidad del proceso. Este proceso es apropiado para modelar variables económicas positivas que presentan en el largo plazo tendencia a su media pero que pueden presentar distorsiones en el corto plazo. Se asumirá que κ, μ, γ son positivas.

En el caso particular en que $\gamma = 1$, el proceso recibe el nombre de Ornstein-Uhlenbeck.

El proceso de reversión a la media X_t cumple las siguientes propiedades:

(*i*) Si X_t comienza con un valor positivo, entonces permanecerá positivo,
(*ii*) La tendencia es positiva y la volatilidad desaparece, conforme X_t se aproxima a 0,
(*iii*) La varianza de un valor futuro X_u es finita, conforme u tiende a ∞,
(*iv*) Si $\gamma = \frac{1}{2}$, la distribución condicional de X_u dado X_t con $u > t$ es χ^2 no centrada. Con media

$$(X_t - \mu)\, e^{-\kappa(u-t)} + \mu.$$

y varianza

$$X_t \left(\frac{\sigma^2}{\kappa}\right) \left[e^{-\kappa(u-t)} - e^{-2\kappa(u-t)}\right] + \mu \left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right) \left[1 - e^{-\kappa(u-t)}\right]^2 .$$

Este proceso es apropiado para modelar tasas de interés o tasas de inflación que pueden presentar valores estables a largo plazo y no representar activos que se operan en un mercado. Incluso se podría modelar la volatilidad en sí misma a través de este tipo de proceso.

1.4 Lema de Itô y sus extensiones multivariadas

Sea una función de variable real

$$f(X_t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

donde X_t es un proceso de Wiener generalizado. De acuerdo a la expansión de la serie de Taylor para estimar $f(X_t + \Delta)$ se tiene que:

$$f(X_t + \Delta) = f(X_t) + \Delta f_X(X_t) + \frac{1}{2}\Delta^2 f_{XX}(X_t) + \frac{1}{2}\Delta^3 f_{XXX}(X_t) + ...,$$

los subíndices denotan las derivadas (más adelante indicarán derivadas parciales).

Del cálculo diferencial se tiene que conforme $\Delta \to \mathrm{d}X_t$ y al utilizar el hecho de que $(\mathrm{d}X_t)^n = 0$ para $n > 1$, se tiene que

$$f(X_t + \mathrm{d}X_t) = f(X_t) + f_X(X_t)\mathrm{d}X_t$$

ó

$$\mathrm{d}f(X_t) = f_X(X_t)\mathrm{d}X_t \ .$$

En el cálculo estocástico, el término $(\mathrm{d}X_t)^2$ no desaparece, pero no así, los términos de orden mayor a 2. Intuitivamente $\mathrm{d}X_t$ es suficientemente pequeño en el cálculo diferencial como para que $(\mathrm{d}X_t)^2$ sea cercano a cero. En el cálculo estocástico, $\mathrm{d}X_t$ es una variable aleatoria con distribución normal y debido a que la varianza de $\mathrm{d}X_t$ no es cero, entonces $(\mathrm{d}X_t)^2$ no desaparece, pero converge en probabilidad a $\mathrm{d}t$.

A partir de una serie de Taylor de segundo orden se tiene que el teorema fundamental del cálculo estocástico establece que:

$$f(X_t + \mathrm{d}X_t) = f(X_t) + f_X(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} f_{XX}(X_t) (\mathrm{d}X_t)^2 \ ,$$

ó

$$\mathrm{d}f(X_t) = f_X(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} f_{XX}(X_t) (\mathrm{d}X_t)^2 \ ,$$

el cual es una extensión lógica del teorema fundamental del cálculo diferencial, este resultado es conocido como el lema de Itô [1] en su forma más simple.

Si una variable t fuera determinista, entonces el término $(\mathrm{d}t)^2$ desaparecería; por lo que se puede usar esta propiedad para extender el lema de Itô a funciones de X_t y t.

Sean X_t un proceso de Wiener generalizado, t una variable real y f una función real que depende de X_t y t, entonces

$$\mathrm{d}f = \left[\alpha (X_t, t) f_{X_t} + \frac{1}{2} (\sigma (X_t, t))^2 f_{X_t X_t} + f_t\right] \mathrm{d}t + \sigma (X_t, t) f_{X_t} \mathrm{d}W_t \ .$$

El resultado anterior se puede probar de la siguiente manera; al utilizar la expansión de una serie de Taylor de segundo orden se tiene que

$$\mathrm{d}f = f_X \mathrm{d}X_t + f_t \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left[f_{XX} (\mathrm{d}X_t)^2 + 2 f_{Xt} \mathrm{d}X_t \mathrm{d}t + f_{tt} (\mathrm{d}t)^2\right] \ , \tag{1.7}$$

pero

$$\mathrm{d}X_t = \alpha (X_t, t) \mathrm{d}t + \sigma (X_t, t) \mathrm{d}W_t \ , \tag{1.8}$$

con $\mathrm{d}W_t$ un proceso de Wiener estándar, por lo que:

$$(\mathrm{d}X_t)^2 = (\alpha (X_t, t) \mathrm{d}t)^2 + 2\alpha (X_t, t) \mathrm{d}t \sigma (X_t, t) \mathrm{d}W_t + (\sigma (X_t, t) \mathrm{d}W_t)^2 \ ,$$

y así, se tiene que:

$$(\mathrm{d}X_t)^2 = (\sigma (X_t, t))^2 \mathrm{d}t \ . \tag{1.9}$$

[1] Una descripción más detallada puede ser consultada en Karatzas [14].

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t\mathrm{d}t =& \left(\alpha\left(X_t,t\right)\mathrm{d}t+\sigma\left(X_t,t\right)\mathrm{d}W_t\right)\mathrm{d}t \\ =& \alpha\left(X_t,t\right)\left(\mathrm{d}t\right)^2+\sigma\left(X_t,t\right)\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t \end{aligned} ,$$

por lo que se llega a que

$$\mathrm{d}X_t\mathrm{d}t = 0\ . \tag{1.10}$$

Finalmente, sustituyendo (1.8), (1.9) y (1.10) en (1.7) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f =& f_X\left(\alpha\left(X_t,t\right)\mathrm{d}t+\sigma\left(X_t,t\right)\mathrm{d}W_t\right)+f_t\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\left(\sigma\left(X_t,t\right)\right)^2\mathrm{d}t \\ =& \left[\alpha\left(X_t,t\right)f_X+\frac{1}{2}f_{XX}\left(\sigma\left(X_t,t\right)\right)^2+f_t\right]\mathrm{d}t+\sigma\left(X_t,t\right)f_X\mathrm{d}W_t \end{aligned} .$$

El resultado anterior es también llamado la Ley de movimiento para $f(X_t)$, y es una forma alternativa del Lema de Itô. Intuitivamente, $\mathrm{d}f$ muestra los cambios en los valores de una función de X_t a través del tiempo, donde X_t sigue un proceso generalizado de Wiener. Como f puede depender explícitamente del tiempo, parte de los cambios de f se derivan a través del tiempo. Sin embargo, el transcurso del tiempo afecta el valor de X_t y por lo tanto influye en el valor de f indirectamente. El lema de Itô representa un resumen de los efectos relevantes en los cambios en el valor de f.

1.5 Modelo de Vasicek

A continuación se presenta el modelo de Vasicek, el cual es muy útil para modelar variables que presentan estabilidad a algún valor de largo plazo, como es el caso de algunas variables financieras, por ejemplo, tasas de interés, inflación, rendimiento sobre el capital (ROE), étc.

El modelo de Vasicek [2] está dado por el siguiente proceso de Itô:

$$\mathrm{d}X = a(b - X_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t\ ,$$

donde $\mathrm{d}W$ es un movimiento browniano, y a, b, σ son constantes.

Es importante mencionar que los parámetros b, a, y σ son el parámetro de largo plazo, la velocidad de ajuste de X_t hacia el parámetro de largo plazo (parámetro de reversión a la media) y la volatilidad de X_t respectivamente.

[2] Ver "An equilibrium characterization of the term structure" [25].

1.5.1 Comportamiento de la parte determinista del modelo de Vasicek

Antes de examinar las propiedades del modelo de Vasicek se analizará el comportamiento de la parte determinística del modelo con el fin de entender mejor la reversión a la media. Para ello, considere la siguiente ecuación diferencial dada por la parte determinista del modelo de Vasicek.

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = a(b - X_t), \tag{1.11}$$

de donde la expresión anterior es equivalente a

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = ab - aX_t,$$

y así, se obtiene la siguiente ecuación diferencial no homogénea de primer orden:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + aX_t = ab. \tag{1.12}$$

Para resolver la ecuación anterior, se multiplica ambos lados de la igualdad por una función continua $\mu(t)$ y se obtiene que

$$\mu(t)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \mu(t)aX_t = \mu(t)ab.$$

Se impondrá que dicha función satisfaga lo siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}\left(X_t\mu(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\mu(t) + aX_t\mu(t) = ab\mu(t), \tag{1.13}$$

al desarrollar la derivada de la primera igualdad se tiene

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}\mu(t) + \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}X_t = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\mu(t) + aX_t\mu(t),$$

y al igualar término a término se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}X_t = aX_t\mu(t).$$

De donde la siguiente ecuación diferencial parcial homogénea de primer grado para $\mu(t)$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}}{\mu(t)} = a,$$

es análoga a

$$\frac{\mathrm{d}\ln\left(\mu(t)\right)}{\mathrm{d}t} = a.$$

De este modo

$$\ln\left(\mu(t)\right) = \int_t a \mathrm{d}s = at + c_1,$$

con c_1 una constante de integración, y así se tiene que

$$\mu(t) = c_2 e^{at}. \tag{1.14}$$

Por lo que al sustituir (1.14) en (1.13) se llega a

$$\frac{\mathrm{d}\left(X_t c_2 e^{at}\right)}{\mathrm{d}t} = abc_2 e^{at},$$

al integrar la expresión anterior

$$\begin{aligned} X_t c_2 e^{at} = & \int_t abc_2 e^{as} \mathrm{d}s \\ = & abc_2 \frac{1}{a} e^{at} + k_1 \\ = & c_2 b e^{at} + k_1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$X_t = b + ke^{-at}. \tag{1.15}$$

Para calcular el valor de la constante k se tomará la condición inicial la cual establece que

$$X_{t_0} = b + ke^{-at_0},$$

de donde se obtiene que

$$k = \left(X_{t_0} - b\right) e^{at_0}.$$

Por lo que al sustituir el valor de k en (1.15) se tiene que

$$X_t = b + \left(X_{t_0} - b\right) e^{at_0} e^{-at},$$

por lo tanto la solución de (1.11) está dada por

$$X_t = b + \left(X_{t_0} - b\right) e^{-a(t-t_0)}. \tag{1.16}$$

Note que

$$\lim_{t\to\infty} X_t = b,$$

es decir, X_t tiende en el largo plazo a b, lo cual explica el hecho de que a este parámetro se le conoce como el parámetro de largo plazo.

1.5.2 Propiedades del modelo de Vasicek

Enseguida se determinará la distribución del proceso de Vasicek, así como algunas de sus propiedades relevantes el cual está dado por:

$$\mathrm{d}X_t = a(b - X_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ .$$

Para poder determinar la distribución de X_t se resolverá la ecuación anterior, para ello considere el proceso Y_t, el cual está dado por

$$Y_t = X_t - b \ ,$$

lo cual lleva a

$$X_t = Y_t + b \ , \tag{1.17}$$

entonces

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}X_t \ ,$$

y así,

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}X_t = a(b - X_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ .$$

Al utilizar (1.17) se tiene que

$$\mathrm{d}Y_t = a(b - Y_t - b)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t = -aY_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ . \tag{1.18}$$

Se puede notar que el modelo de Vasicek se pudo reescribir como un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck mediante la transformación $Y_t = X_t - b$.
Ahora sea Z_t un proceso definido por

$$Z_t = Y_t e^{at}, \tag{1.19}$$

por lo que al aplicarle el lema de Itô a la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_t &= \left(-aY_t \frac{\mathrm{d}Z_t}{\mathrm{d}Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\mathrm{d}^2 Z_t}{\mathrm{d}Y_t^2} + \frac{\mathrm{d}Z_t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}Z_t}{\mathrm{d}Y_t}\sigma \mathrm{d}W_t \\
&= \left(-aY_t e^{at} + \frac{1}{2}\sigma^2(0) + aY_t e^{at}\right)\mathrm{d}t + e^{at}\sigma \mathrm{d}W_t \\
&= e^{at}\sigma \mathrm{d}W_t \ .
\end{aligned}$$

Si $s > t$, se tiene que

$$Z_s - Z_t = \int_t^s \mathrm{d}Z_u = \int_t^s \sigma e^{au} \mathrm{d}W_u \ ,$$

de donde

$$Z_s = Z_t + \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u \ ,$$

es decir, Z_s depende de $\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u$. Al sustituir (1.19) en la expresión anterior se tiene que

$$Y_s e^{as} = Y_t e^{at} + \sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \ ,$$

de lo anterior se obtiene que

$$Y_s = e^{-as} Y_t e^{at} + e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \ .$$

Y al sustituir (1.17) en la expresión anterior se tiene que

$$X_s - b = e^{-as}\left[X_t - b\right] e^{at} + e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \ ,$$

de donde

$$X_s = b + \left[X_t - b\right] e^{-a(s-t)} + e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \quad ,$$

es decir

$$X_s = X_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right] + e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \ . \tag{1.20}$$

Como $\mathrm{d}W_u \sim \mathcal{N}\left[0, \mathrm{d}u\right]$, entonces X_s se distribuye normal, y para calcular los parámetros de la distribución de probabilidad de X_s, a continuación se calcula el valor esperado y varianza de X_s.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X_s \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{E}\left[X_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right] + e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= X_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right] + e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= X_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathrm{E}\left[X_s \mid \mathcal{F}_t\right] = X_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right]. \tag{1.21}$$

Note que si $s \to \infty$, entonces

$$\mathrm{E}\left[X_s \mid \mathcal{F}_t\right] \to b.$$

Es decir, el modelo de Vasicek en promedio tiende a su valor de largo plazo ó parámetro de reversión a la media (b), al igual que la parte determinista del modelo, es por esta razón que al parámetro b se le da este nombre.

Al calcular la varianza

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left[X_s \mid \mathcal{F}_t\right] &= \operatorname{Var}\left[X_t e^{-a(s-t)} + b\left[1-e^{-a(s-t)}\right] + e^{-as}\sigma\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \operatorname{Var}\left[e^{-as}\sigma\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 e^{-2as}\operatorname{Var}\left[\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right],
\end{aligned}$$

pero

$$\operatorname{Var}\left[\int_t^T g(s)\mathrm{d}W_s\right] = \int_t^T g^2(s)\mathrm{d}s,$$

es decir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left[X_s \mid \mathcal{F}_t\right] &= \sigma^2 e^{-2as}\operatorname{Var}\left[\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 e^{-2as}\int_t^s e^{2au}\mathrm{d}u \\
&= \sigma^2 e^{-2as}\left[\frac{1}{2a}e^{2au}\right]_t^s \\
&= \sigma^2 e^{-2as}\frac{1}{2a}\left[e^{2as}-e^{2at}\right] \\
&= \sigma^2\frac{1-e^{-2as}e^{2at}}{2a},
\end{aligned}$$

por lo que

$$\operatorname{Var}\left[X_s \mid \mathcal{F}_t\right] = \sigma^2\frac{1-e^{-2a(s-t)}}{2a}. \tag{1.22}$$

Por lo tanto

$$X_s \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathrm{E}\left[X_s \mid \mathcal{F}_t\right], \operatorname{Var}\left[X_s \mid \mathcal{F}_t\right]\right),$$

es decir, el proceso de Vasicek se distribuye normal, y de acuerdo a (1.21) y (1.22) se tiene que

$$X_s \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(X_t e^{-a(s-t)} + b\left[1-e^{-a(s-t)}\right], \sigma^2\frac{1-e^{-2a(s-t)}}{2a}\right).$$

CAPÍTULO 2
VALUACIÓN DE BONOS Y ESTRUCTURA DE PLAZOS

2.1 Introducción

Cualquier persona ha tenido la experiencia en la vida diaria con alguna promesa de pago, es decir, ha pedido (o ha prestado) algo en algún momento de su vida. Algunas veces se pide prestada (se presta) una cantidad inicial S_0 en un tiempo t y se promete pagar (o que le pagarán al prestamista) en una fecha futura T esta cantidad S_0 más algo adicional por ejemplo I, es decir, en la fecha T se pagará la cantidad $S_0 + I$, donde casi siempre la cantidad adicional I es un porcentaje del monto inicial S_0, por lo que se tiene que el pago prometido será:

$$S_0 + rS_0 \ ,$$

lo cual es equivalente a

$$S_0(1 + r) \ .$$

Este porcentaje adicional r se podría pensar como el pago por el servicio del uso de dinero ajeno al cual se le conoce como crédito. Las personas piden prestado porque necesitan dinero para llevar a cabo sus planes (en lugar de ir al banco lo cual podría ser más caro). Por el contrario, las personas prestan dinero porque tienen un excedente y desean hacer algo productivo con él. Paralelamente, una empresa podría necesitar (o tener un excedente) de fondos para realizar proyectos los cuales incrementarían su capacidad productiva y de esta forma lograr un crecimiento de dichas empresas para poder sobrevivir en un mundo cada vez más dinámico y agresivo. Es decir, para poder crecer necesitarán fondos pero tal vez ahora no los tengan por lo que recurrirán al crédito, o invitarán a nuevos socios. Para hacer lo anterior las empresas básicamente tienen dos opciones las cuales son: emitir acciones y emitir deuda. El optar por la primera opción implica una pérdida en el poder de la toma de decisiones de la empresa, si se toma la segunda alternativa la forma más común es a través de pagarés (bonos), es decir, hoy piden prestado una cantidad B_0 y en un futuro pagarán una cantidad B_T (valor nominal). Por lo anterior, se podría pensar que las empresas venden (emiten) un pagaré (bono) a la cantidad B_0 el día de hoy y en el futuro se comprometen a pagar la cantidad B_T, es decir, existe un flujo de efectivo hoy que se deberá de entregar al vendedor del pagaré y un flujo de efectivo B_T que se entregarán al comprador del pagaré. Las empresas llevan a cabo este tipo de mecanismo para crecer y así lograr un mejor desempeño.

2.2 Instrumentos de renta fija

Una primera clasificación parsimoniosa de los instrumentos financieros está dada por instrumentos de renta fija e instrumentos de renta variable [3]. La característica fundamental de los instrumentos de renta fija es que los flujos de efectivo que genera este tipo de instrumentos están predeterminados como son los CETES (Certificados de la Tesorería), bonos de empresas, etc. Mientras que en los instrumentos de renta variable no están predeterminados los flujos de efectivo como son las acciones.

El bono es uno de los principales instrumentos de renta fija, el cual es una promesa de pago a futuro impersonalizada entre dos partes en la que una parte se compromete a pagar ciertos flujos de efectivo durante un lapso de tiempo a la contraparte que hace el préstamo. La parte que tiene la obligación de realizar pagos futuros se le conoce como el emisor del bono y la parte que recibe dichos pagos se le conoce como comprador o tenedor del bono. Al periodo de tiempo que dura este contrato se le denomina vencimiento del bono, y a la cantidad prestada estipulada en el bono que se deberá pagar en el vencimiento del bono se le conoce como valor nominal. Finalmente, si el bono paga flujos de efectivo antes de la fecha de vencimiento a estos flujos se les conoce como cupones, y a las fechas en que ocurren estos pagos de cupones se les conoce como fecha de pago o corte de cupón. Como un bono es una relación contractual que existe entre el emisor y el tenedor del bono durante el vencimiento de éste, el tenedor del bono tendrá motivos suficientes para preocuparse de que la posición financiera de la empresa emisora pueda cambiar en forma importante ya que de ella depende la capacidad de la empresa para responder a sus obligaciones. Un tenedor del bono puede exigir a la empresa emisora un requirimiento mínimo de razón circulante, es decir, los tenedores de los bonos nesesitarán estar informados acerca de la evolución de la empresa y esto lo pueden hacer vía los estados financieros.

Los contratos de bonos se pueden dividir en:

(1) Contratos que restringen la emisión de nueva deuda,
(2) Contratos que imponen restricciones sobre el pago de dividendos,
(3) Contratos que imponen restricciones sobre fusiones,
(4) Contratos que imponen restricciones sobre las disposiciones de los activos de una empresa.

[3] Van Horne en su libro Financial market rates and flows, desarrolla un análisis detallado de la clasificación de los diferentes tipos de bonos.

Estas restricciones son hechas para evitar que la empresa emisora aumente el grado de riesgo de la deuda en circulación. Por ejemplo, se podría emitir nueva deuda con derecho superior o igual sobre los activos de la empresa, o los bonos que restringen el pago de dividendos son obligaciones principalmente hechas para evitar casos extremos donde los accionistas voten para pagarse a sí mismos un dividendo liquidador que dejará a los tenedores de los bonos con una empresa vacía.

Por lo anterior, existe una clasificación parsimoniosa de los bonos la cual a continuación se comentará:

(a) Bonos garantizados (hipotecarios).- en este tipo de bonos existe un bien físico como garantía. Se clasifican de acuerdo a prioridad de derechos, al derecho a emitir valores adicionales y al alcance del gravamen.
(b) Bonos no garantizados.- en este tipo de bonos no existe un bien como garantía. Se clasifican en bonos a largo plazo, bonos a largo plazo subordinados, bonos a corto plazo, bonos sobre ingresos, bonos a tasa flotante, bonos comerciales y bonos no comerciales.

Los bonos pueden o no pagar flujos de efectivo intermedios a la fecha de vencimiento, cuando no pagan cupones y solo pagan el valor nominal en la fecha de vencimiento se les conoce como bonos cupón cero o simplemente ceros. Cuando un bono paga cupón se le conoce como bono cuponado o bono con cupón.

2.2.1 Elementos de un bono

Debido a que un instrumento financiero queda totalmente caracterizado por sus flujos de efectivo y el tiempo en que estos ocurren, en consecuencia se tienen todos los elementos para valuarlo. Los elementos de un bono son:

(1) Valor nominal, es el valor que se promete pagar en la fecha en que vence el bono,
(2) fecha de vencimiento, es la fecha en que se deberá pagar el valor nominal (ó vida del bono),
(3) fecha de emision, fecha en que se emite el bono,
(4) fecha de colocación, es la fecha en que se puso a la venta el bono,
(5) tasa cupón, es la tasa de rendimiento que se paga periodicamente sobre el valor nominal (la cual se puede ver como el pago de intereses del bono), por lo que si un bono es cupon cero entoces su tasa cupón deberá ser cero,
(6) cupón, es la cantidad en unidades monetarias que se paga periodicamente, la cual se calcula como la tasa cupón por el valor nominal.

Con los elementos anteriores quedan totalmente caracterizados los flujos de efectivo de un bono, y como consecuencia queda caracterizado totalmente un bono, y de esta forma se puede hablar de la valuación de un bono.

2.3 Valuación de Bonos

Una vez que se conocen los elementos de un bono, se conocen los flujos de efectivo que éste pagará, así como las fechas en que ocurrirán estos flujos, y para determinar el precio del bono solo bastará saber la tasa de descuento de dichos flujos. Para ello se calculará el precio de un bono cuponado, se denotarán a VN como el valor nominal del bono, T el vencimiento del bono, C_i el cupón que se pagará en $i < T$ con $i = 1, ..., T$. Si y es el rendimiento al vencimiento del bono (también conocido como yield to maturity ó simplemente yield), entonces el precio del bono $B(t,T)$ estará dado por el valor presente de sus flujos de efectivo, es decir:

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T} \frac{C_i}{(1+y)^{i-t}} + \frac{VN}{(1+y)^{T-t}} \ .$$

Alternativamente, si el rendimiento al vencimiento tiene composición continua entonces el precio del bono estaría dado por

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-y(i-t)} + VNe^{-y(T-t)} \ .$$

Para cualquier bono, se puede reportar el precio de mercado ó, dados los flujos de efectivo, el rendimiento único (rendimiento al vencimiento). De esta forma si se reporta el precio de mercado entonces el rendimiento al vencimiento (y) se puede calcular como la tasa de descuento que iguala los flujos de efectivo al valor de mercado del bono.

De las expresiones anteriores es importante destacar que debido a que los pagos del bono son conocidos de antemano, el valor del bono $B(t,T)$ fluctúa debido a los cambios en las tasas de interés, creando con ello un pérdida potencial. También se observa que existe una relación inversa entre la tasa y el precio de un bono, es decir, si las tasas aumentan entonces el precio del bono disminuirá y viceversa.

2.3.1 Curva de rendimientos al vencimiento (Curva yield)

Como se comentó anteriormente, la valuación de un bono depende del rendimiento al vencimiento (yield), ó si se tiene el precio de mercado del bono entonces el rendimiento al vencimiento (y) se puede calcular como la tasa de descuento que iguala los flujos de efectivo al valor de mercado del bono, es decir, para cualquier bono se puede reportar el precio de mercado, o dados los flujos de efectivo del bono, su rendimiento único. Sin embargo, la verdadera cuestión estriba en averiguar si el rendimiento se puede relacionar a las condiciones prevalecientes del mercado.

El rendimiento al vencimiento de cualquier bono está fuertemente limitado a las condiciones generales de los mercados de renta fija. Todos los rendimientos al vencimiento tienden a moverse juntos en este mercado. No obstante, todos los rendimientos al vencimiento de los bonos no son exactamente los mismos. La variación de los rendimientos al vencimiento es explicada en parte por las calificaciones crediticias de los bonos, es decir, los bonos con mayor calificación crediticia serán más caros que los de menor calificación. Con todo, la calificación crediticia no explica totalmente las variaciones observadas. Otro factor que explica parcialmente las diferencias en los rendimientos al vencimiento es el tiempo al vencimiento, es decir, los bonos con mayor vencimiento tendrán mayor rendimiento al vencimiento.

De esta forma surge un concepto importante el cual es llamado la curva de rendimiento al vencimiento (o curva yield) la cual es la relación funcional entre el rendimiento al vencimiento y el plazo del vencimiento del bono. Cuando se está analizando un bono en particular es útil determinar su rendimiento y fecha de vencimiento, y colocarlos como un punto de la curva de rendimientos al vencimiento para bonos de su misma clasificación de riesgo. Esto dará una indicación general de que tan bien está valuado el bono respecto a todo el mercado. Si el punto del bono que se está analizando se encuentra lejos de la curva deberá existir probablemente una explicación de su desviación, relacionada a situaciones especiales tales como nuevas noticias que pudieran afectar la solvencia del emisor.

La estructura intertemporal de las tasas de interés representa la relación, en un punto dado en el tiempo, entre el plazo al vencimiento y el rendimiento al vencimiento del bono dentro de un nivel de riesgo dado. La representación tradicional de la estructura intertemporal está basada en bonos de rendimiento a la par, esto es utilizando el rendimiento al vencimiento de bonos con un cupón cercano a su vencimiento. La ventaja de este método es que los bonos relacionados, denominados on the run (emitidos recientemente) son muy líquidos y sus precios reflejan acertadamente las condiciones del mercado. Sin embargo, este método ignora la información contenida en otros bonos que se encuentran en circulación. Algunos enfoques intentan ajustar la curva de rendimientos a través de los rendimientos de todas las emisiones vigentes.

2.4 La estructura de plazos

La curva yield es útil, pero debido a que es algo arbitraria no proporciona una explicación completamente satisfactoria de las diferenciales de los rendimientos al vencimiento. No obstante, el ajuste de una curva utilizando bonos con diferentes cupones es insatisfactorio. El problema es que los rendimientos observados no representan los rendimientos futuros a menos que todos, los cupones puedan ser reinvertidos a la misma tasa, lo cual es muy poco probable. Es por lo anterior que se requiere de otra teoría, y esta sección se encarga de proporcionarla y se conoce como la estructura de plazos. La teoría presentada en esta sección deja de lado las ideas del rendimiento al vencimiento para enfocarse en el concepto puro de tasa de interés, es decir, se basa en la observación de que en general la tasa de interés depende de la longitud del periodo de tiempo en que el dinero es prestado.

Se define la tasa spot (o tasa de interés de contado) a T años como la tasa de interés de una inversión efectuada en un periodo de tiempo que empieza en t y termina en T años, donde el interés y el principal serán pagados en T, a la cual se le denotará como $R(t,T)$. Es importante hacer notar que bajo este enfoque de la tasa spot no existen flujos de efectivo entre t y T y los únicos flujos ocurren en t y T. De esta forma si se tiene un bono cupón cero con valor nonimal VN y fecha de vencimiento en T entonces su precio estará dado por

$$B(t,T) = \frac{VN}{(1+R(t,T))^{T-t}} \ ,$$

y si la composición de la tasa es en tiempo continuo entonces el precio del bono está dado por:

$$B(t,T) = VNe^{-R(t,T)(T-t)} \ .$$

Es importante destacar que el flujo de efectivo del bono al vencimiento T es VN, es decir,

$$B(T,T) = VN,$$

de donde se tiene que $R(T,T) = 0$.

Note que en este caso el rendimiento al vencimiento está bien definido, dado que corresponde al vencimiento compuesto en el periodo T sobre el bono y en este caso para este bono cupón cero se tendrá que su rendimiento al vencimiento en un plazo T es la tasa spot. En contraste, un bono con cupones tiene muchos flujos de efectivo previos al vencimiento y puede ser descompuesto en una serie de bonos cupón cero donde el cupón al tiempo i puede ser visto como el valor nominal de un bono cupón cero con vencimiento en esta fecha. El valor nominal más el último cupón es el valor nominal de un bono cupón cero con vencimiento en T. De esta forma el precio del bono está dado por

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T} \frac{C_i}{(1+R(t,i))^{i-t}} + \frac{VN}{(1+R(t,T))^{T-t}} \ , \tag{2.1}$$

donde $R(t,i)$ son las tasas spot que integran la estructura de plazos en el tiempo i, con $i = 1, 2, ..., T$. Es importante mencionar que la estructura de plazos también es conocida como la curva cero o curva spot, y ésta representa las tasas spot graficadas contra el tiempo.

Si la composición de las tasas de interés son en tiempo continuo entonces el precio de un bono cuponado está dado por

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-R(t,i)(i-t)} + VNe^{-R(t,T)(T-t)} \ . \tag{2.2}$$

Una curva cupón cero (o estructura de plazos) es, teóricamente, más precisa que la curva usual de rendimientos al vencimiento. La primera representa un conjunto de precios primitivos, a partir de los cuales puede ser derivado el valor de los instrumentos de renta fija (en particular los bonos). Desafortunadamente, los mercados activos para los bonos cupón cero (denominados tambien strips) existen solo en los Estados Unidos y Francia, y son relativamente recientes. Por lo tanto, la curva de la tasa spot generalmente se estima a partir de los bonos en circulación con un cupón en proceso de pago, utilizando la ecuación (2.1) ó (2.2) según sea el caso.

En la práctica, normalmente las tasas spot (o tasa cupón cero) no se pueden observar directamente, lo que se puede observar son los bonos que pagan cupón. Un punto importante es el como se puede extraer la curva de rendimiento cupón cero a partir de los precios de las obligaciones con cupón, es por ello que la siguiente sección aborda un método para tal objetivo.

2.4.1 Método bootstrap

La forma obvia de determinar una curva de tasas spot es encontrando los precios de una serie de bonos cupón cero con varias fechas de vencimiento. Lamentablemente el conjunto disponible de bonos cupón cero es típicamente muy pequeño, y además, hasta hace poco no existían bonos cupón con vencimientos de largo plazo. Por lo que no es siempre práctico determinar el conjunto completo de tasas spot de esta forma. Sin embargo, la existencia de un bono cupón cero no es necesaria para el concepto de tasas spot, no se requieren tales datos para determinar el valor de las tasas spot.

La curva de tasas spot puede ser determinada de los precios de los bonos cuponados comenzando con bonos de vencimientos cortos y trabajando hacia adelante con bonos de vencimientos mayores.

Se ilustrará el proceso para la composición de un año bajo el supuesto de que los cupones se pagan una vez al año. Primero, se determinará $R(t,1)$ por observación directa de la tasa de interés de un año. Después, se considerará un bono a dos años. Se supondrá que el bono tiene precio $B(t,2)$ el cual hace pagos de cupón de montos C_1 y C_2 al final del año 1 y 2 respectivamente, y con valor nominal de VN. El precio de debe ser igual al valor presente de los flujos de efectivo, es decir:

$$B(t,2) = \frac{C_1}{(1+R(t,1))} + \frac{C_2 + VN}{(1+R(t,2))^2} ,$$

como la tasa spot al primer año $(R(t,1))$ ya es conocida, entonces se puede resolver la ecuación anterior para la tasa spot al segundo año, es decir, para $R(t,2)$. Trabajando de esta forma hacia delante, lo siguiente es considerar un bono a tres años, cuatro años,..., T años y así, se puede determinar las tasas spot $R(t,3)$, $R(t,4)$,..., $R(t,T)$ paso a paso. Cabe mencionar que bajo este método se tendrán las tasas spot de acuerdo a los vencimientos de los bonos disponibles por lo que no se tendrán tasas spot fuera de estos periodos de vencimiento [4]. Es por ello, que es necesario contar con modelos que puedan proporcionar la tasa spot a un vencimiento específico por lo que en las siguientes dos secciones se darán los conceptos necesarios para abordar en la sección 2.7 un modelo estocástico de estructura de plazos.

2.5 Tasa forward

La tasa spot a T años es la tasa de interés de una inversión efectuada para un periodo de tiempo que empieza hoy (t) y que finaliza al cabo de T años. Muchas veces, se está interesado en conocer las tasas de interés intermedias entre una tasa spot a T_1 años y una tasa spot a T_2 años con $T_2 > T_1$. Este tipo de información lo contiene de forma implícita la estructura de plazos y a partir de ésto surge el concepto de tasa forward, la cual se puede definir como la tasa de interés que se encuentra implícitamente entre las tasas spot actuales para periodos futuros de tiempo. A continuación, se ilustra el cálculo de una tasa forward, para ello considere las tasas spot a T_1 y a T_2 años denotadas por $R(t,T_1)$ y $R(t,T_2)$ respectivamente. De esta forma una inversión de 1 unidad monetaria invertida a un plazo de T_2 años se puede ver como una inversión a un periodo de T_1 años y al final de T_1 años reinvertir a la tasa futura a $T_2 - T_1$ prevaleciente dentro de T_1.

[4] Consultar Hull [13].

Por lo que bajo argumentos de arbitraje se podría esperar que ambas alternativas de inversión brinden el mismo monto en T_2, es decir,

$$(1 + R(t, T_2))^{T_2-t} = (1 + R(t, T_1))^{T_1-t}(1 + f(t, T_1, T_2))^{T_2-T_1}, \tag{2.3}$$

donde $f(t, T_1, T_2)$ es la tasa que se observa en t, para una inversión que comienza en T_1 y finaliza en T_2, a la cual se le conoce como la tasa forward de T_1 a T_2, observada en t. Por lo que la expresión de la tasa forward bajo composición discreta está dada por:

$$f(t, T_1, T_2) = \left[\frac{(1 + R(t, T_2))^{T_2-t}}{(1 + R(t, T_1))^{T_1-t}}\right]^{\frac{1}{T_2-T_1}} - 1 \ . \tag{2.4}$$

Análogamente, si la composición de las tasas spot es continua la tasa forward puede ser obtenida a través de la ecuación

$$e^{R(t,T_2)(T_2-t)} = e^{R(t,T_1)(T_1-t)}e^{f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)} \ ,$$

y la tasa forward para la composición continua está dada por

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{R(t, T_2)(T_2 - t) - R(t, T_1)(T_1 - t)}{T_2 - T_1} \ . \tag{2.5}$$

De las expresiones para la tasa forward proporcionadas en (2.4) y (2.5) y usando el hecho de que $R(t, t) = 0$, se observa que la tasa forward $f(t, t, T)$ es la tasa spot $R(t, T)$. La tasa de interés forward también mide la pendiente de la estructura de plazos ya que de (2.3) si se supone que $t = 0$, $T_1 = 1$ y $T_2 = 2$ y después de simplificar y eliminar los términos cruzados se tiene que:

$$f(t, 1, 2) \approx R(t, 2) + (R(t, 2) - R(t, 1)) \ ,$$

la cual es una medida de la pendiente de la estructura de plazos. Por lo tanto, con una estructura de plazos con desplazamientos ascendentes, $R(t, 2)$ está por arriba de $R(t, 1)$ y $f(t, 1, 2)$ estará por encima de $R(t, 2)$, proporcionando una guía sobre la tendencia de los movimientos futuros de las tasas de interés. Cuando la composición es continua por la ecuación (2.5) la observación de que la tasa forward mide la pendiente de la estructura de plazos es más directa y además, se observa que si la estructura es ascendente $R(t, 1) < R(t, 2)$ entonces la tasa forward $f(t, 1, 2,)$ estará por encima de $R(t, 2)$. De esta forma, cuando la estructura de plazos es plana (tanto para composición continua como discreta) la curva spot es idéntica a la curva de rendimiento a la par y a la curva forward. En general, las curvas difieren. En particular, en el caso de una estructura de plazos con desplazamientos ascendentes la curva de rendimiento al vencimiento está por debajo de la curva spot mientras que la curva forward está por encima. Por el contrario, con una estructura de plazos con desplazamientos descendentes la curva de rendimiento al vencimiento está por encima de la curva de tasas spot, la cual a su vez está por arriba de la curva de tasas forward.

Es importante destacar que existe una gran número de tasas forwards asociadas a una curva spot. De hecho, si existen n periodos, entonces existen n tasas spot (incluyendo R(t,t) la cual se define como cero); y de esta estructura de plazos existen $\frac{n(n+1)}{2}$ tasas forward (incluyendo las tasas spot básicas). Sin embargo, todas estas tasas forward son derivadas de las n tasas spot subyacentes.

La curva de rendimientos al vencimiento (curva yield) puede ser observada, al menos aproximadamente, buscando una serie de cotizaciones de bonos en las publicaciones financieras. La curva casi nunca es plana, pero usualmente tiene una pendiente creciente conforme los vencimientos se incrementan. La tasa spot tiene características similares. Típicamente, también la pendiente se incrementa rápidamente en vencimientos cortos y continúa incrementándose en forma gradual conforme los vencimientos se alargan. Además, se observa que la curva spot tiene variaciones cada día, por lo que resulta natural preguntarse si existe una explicación simple para esta forma típica de la estructura de plazos.

Existen tres explicaciones estándar o teorías de la estructura de plazos, cada una de las cuales proporciona algún significado importante. A continuación se esbozarán brevemente estas tres teorías [5] :

(1) La más sencilla es la conocida como la teoría de las expectativas la cual sostiene que las tasas spot a largo plazo deben reflejar las tasas de interés a corto plazo futuras esperadas. De manera más precisa argumenta que una tasa forward correspondiente a cierto periodo es igual a la tasa spot futura esperada para este periodo.

(2) La segunda teoría, conocida como la teoría de segmentación de mercados, conjetura que no es necesario que haya relación alguna entre las tasas spot a corto y largo plazo. Bajo esta teoría, diferentes instituciones invertirán en obligaciones de diferentes vencimientos sin posibilidad de cambio en el vencimiento deseado para la inversión. La tasa de interés a corto plazo se determinará por la oferta y demanda en el mercado de obligaciones a corto plazo, la tasa de interés a mediano plazo se determina por la oferta y demanda del mercado de obligaciones a mediano plazo, y así sucesivamente.

(3) Finalmente, la teoría que resulta en cierta forma más atractiva es la conocida como la teoría de la preferencia por la liquidez. En ella se argumenta que las tasas forward deben ser siempre más altas que las tasas spot esperadas en el futuro.

[5] Para una exposición más amplia ver Russell [20].

El supuesto básico subyacente de la teoría de la preferencia por la liquidez es que los inversionistas prefieren conservar su liquidez e invertir sus fondos durante periodos cortos de tiempo. Los prestatarios, por otro lado, normalmente prefieren endeudarse a tasas de interés fijas y periodos largos. Si las tasas de interés ofrecidas por los bancos y otros intermediarios financieros fueran tales que la tasa forward fuera igual a la tasa spot esperada en el futuro, las tasas de interés a largo plazo, se igualarían a la media de las tasas de interés a corto plazo esperadas en el futuro. Con la ausencia de incentivos para cambiar de proceder, los inversionistas tenderían a depositar sus fondos durante periodos cortos y los prestatarios tenderían a endeudarse a periodos largos. Los intermediarios financieros podrían, en ese caso, financiar cantidades importantes de préstamos a largo plazo a tasa fija con depósitos a corto plazo. Lo cual implicaría sin embargo, un excesivo riesgo de tasa de interés. En la práctica, para emparejar a depositantes con prestatarios y eliminar así, el riesgo de tasa de interés, los intermediarios financieros aumentarán la tasa de interés a largo plazo con respecto a las tasas de interés a corto plazo esperadas en el futuro. De esta forma, se reducirá la demanda de préstamos a largo plazo de tasa fija y se estimulará a los inversionistas a depositar sus fondos durante largos periodos de tiempo. La teoría de la preferencia por la liquidez lleva a una situación en la que las tasas forward son más altas que las tasas spot esperadas en el futuro. Es también consecuente con la observación empírica acerca de que las curvas de rendimientos tienden a tener pendientes positivas más a menudo que pendientes negativas.

Es importante resaltar que la tasa spot $R(t,T)$ puede ser pensada como una inversión realizada de 1 unidad monetaria, la cual será reinvertida cada periodo de tiempo a la tasa forward $f(t,t+k,t+k+1)$ es decir,

$$(1+R(t,T))^{T-t} = (1+f(t,t,t+1))\,(1+f(t,t+1,t+2))\,...\,(1+f(t,T-1,T))$$

pero $f(t,t,t+1) = R(t,1)$, por lo que

$$(1+R(t,T))^{T-t} = (1+R(t,1))\,(1+f(t,t+1,t+2))\,...\,(1+f(t,T-1,T)) \tag{2.6}$$

por lo que la tasa spot para el periodo T se puede escribir como un promedio geométrico de las tasas spot y forward.

En el caso continuo

$$e^{R(t,T)(T-t)} = e^{R(t,1)}e^{f(t,t+1,t+2)}e^{f(t,t+2,t+3)}...e^{f(t,T-1,T)}\ , \tag{2.7}$$

de donde se obtiene que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[R(t,1) + \sum_{i=2}^{T-t} f(t,t+i-1,t+i)\right]\ ,$$

es decir, en el caso continuo la tasa spot a T años es un promedio aritmético de la tasa spot y las tasas forward. Sin embargo debido a que $f(t,t,k) = R(t,k)$, se tiene que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[f(t,t,t+1) + \sum_{i=2}^{T-t} f(t,t+i-1,t+i)\right]. \qquad (2.8)$$

Se observa que la tasa spot a T años es un promedio aritmético de las tasas forward por periodo. De lo anterior, es importante mencionar que la estructura de plazos puede ser generada a través de las tasas forward espaciadas un periodo de tiempo, es decir, por:

$$f(t,t,t+1), f(t,t+1,t+2), f(t,t+2,t+3), ..., f(t,T-1,T).$$

Por lo tanto, si se conocen estas tasas entonces la estructura de plazos puede ser obtenida como un promedio geométrico o aritmético (geométrico para composición discreta y aritmético para composición continua). Cabe mencionar que las tasas forward espaciadas por un periodo de tiempo $f(t,t+k,t+k+1)$ son muy importantes para la estructura de plazos, razón por la cual la siguiente sección trata acerca de ellas.

2.6 Tasa corta

Las tasas cortas[6] son las tasas forward espaciadas solo un periodo de tiempo.

La tasa corta al tiempo k de acuerdo con esto está dada por:

$$r_k = f(t,t+k,t+k+1),$$

que es la tasa forward de k a $k+1$.

Note que $R(t,1) = f(t,t,t+1) = f(t,t+0,t+0+1) = r_0$.

Como se comentó anteriormente las tasas cortas pueden ser consideradas fundamentales, así como las tasas spot, ya que para un conjunto completo de tasas cortas se puede especificar totalmente una estructura de plazos. Es decir, de acuerdo a (2.6) y (2.7) se tiene que

$$(1 + R(t,T))^{T-t} = (1 + R(t,1))(1 + r_1)(1 + r_2) ... (1 + r_{T-1}).$$

En el caso continuo

$$e^{R(t,T)(T-t)} = e^{R(t,1)} e^{r_1} e^{r_2} ... e^{r_{T-1}}, \qquad (2.9)$$

[6] Consultar Luemberger [15].

es decir, la estructura de plazos se puede obtener en el caso discreto como un promedio geométrico de las tasas cortas. En el caso continuo la estructura de plazos se puede obtener como un promedio aritmético de las tasas cortas a partir de (2.9), es decir:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\sum_{i=0}^{T-1} r_i \ .$$

Si se particiona el intervalo $[t,T]$ en subintervalos de longitud ΔT (cuya longitud podría ser $\Delta T = \frac{1}{n}$) se tiene

$$e^{R(t,T)(T-t)} = e^{f(t,t,t+\Delta T)\Delta T} e^{f(t,t+\Delta T,t+2\Delta t)\Delta T} \ldots e^{f(t,t+(n-1)\Delta T,t+n\Delta t)\Delta T} \ ,$$

de donde

$$\begin{aligned} R(t,T) =& \frac{1}{T-t}\sum_{i=0}^{n-1} f(t,t+i\Delta T,t+(i+1)\Delta T)\Delta T \\ =& \frac{1}{T-t}\sum_{i=0}^{n-1} r_{i\Delta T}\Delta T \end{aligned} \ ,$$

tomando el límite cuando $n \to \infty$ (como $\Delta T = \frac{1}{n}$, entonces $\Delta T \to 0$), se tiene que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_s \mathrm{d}s \ . \tag{2.10}$$

Se observa que bajo composición continua y al suponer que los periodos de longitud ΔT son cercanos a cero, la estructura de plazos se puede ver como el promedio aritmético de las tasas cortas, que en este caso de composición continua resulta ser la integral de las tasas cortas. Este hecho indica que la tasa corta es fundamental para el cálculo de la estructura de plazos, ya que a partir de ellas se puede generar la estructura de plazos. Por lo que en lo subsecuente se tomará como punto de partida para determinar la estructura de plazos a la tasa corta, a través de especificar la dinámica seguida por la tasa corta, y de esta forma se encontrará la estructura de plazos.

Adicionalmente, se encontrará una relación entre el precio del bono y la tasa forward, para ello considere

$$e^{R(t,T)(T-t)} e^{f(t,T,T+\Delta T)\Delta T} = e^{R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t)} \ ,$$

de donde se obtiene que

$$R(t,T)(T-t) + f(t,T,T+\Delta T)\Delta T = R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t) \ ,$$

y así,

$$f(t,T,T+\Delta T) = \frac{R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t) - R(t,T)(T-t)}{\Delta T} , \qquad (2.11)$$

pero

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} ,$$

entonces

$$R(t,T)(T-t) = -\ln(B(t,T)).$$

Análogamente,

$$R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t) = -\ln(B(t,T+\Delta T)) ,$$

por lo que al sustituir lo anterior en (2.11) se tiene que

$$\begin{aligned} f(t,T,T+\Delta T) &= \frac{-\ln(B(t,T+\Delta T)) + \ln(B(t,T))}{\Delta T} \\ &= -\frac{\ln(B(t,T+\Delta T)) - \ln(B(t,T))}{\Delta T} \end{aligned} .$$

Al tomar el límite cuando $\Delta T \to 0$ se obtiene lo que se conoce como la tasa forward instantánea la cual será denotada por $f(t,T)$, es decir

$$\begin{aligned} f(t,T) &= \lim_{\Delta T \to 0} f(t,T,T+\Delta T) \\ &= -\lim_{\Delta T \to 0} \frac{\ln(B(t,T+\Delta T)) - \ln(B(t,T))}{\Delta T} \\ &= -\frac{\partial \ln(B(t,T))}{\partial T} \end{aligned} .$$

Por lo tanto la tasa forward instantánea está dada por la derivada del logaritmo natural del precio de un bono cupón cero, es decir:

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln(B(t,T))}{\partial T} . \qquad (2.12)$$

La estructura de plazos es importante ya que a través de ella se pueden valuar instrumentos de renta fija. Se comentó el método Bootstrap el cual es una herramienta útil para obtener la estructura de plazos. Sin embargo, para obtener una estructura de plazos completa se necesitarían tener bonos de cualquier vencimiento, situación que en la práctica parece poco fácil de tener. La tasa corta especifica totalmente la estructura de plazos es por ello que existen metodologías basadas en el estudio de la dinámica de la tasa corta (la cual se proporciona exógenamente) y a partir de ésta se obtiene la estructura de plazos. En la siguiente sección se supondrá que la tasa corta es estocastica y es conducida por el modelo de Vasicek el cual se introdujo en el capítulo 1.

2.7 Estructura de plazos del modelo de Vasicek

A continuación, se determinará la estructura de plazos bajo el supuesto de que la tasa corta es estocástica y conducida por un proceso de Itô, en particular se supondrá que es conducida por el modelo de Vasicek.

2.7.1 Precio de un bono cupón cero

A lo largo de esta sección se supondrá un bono cupón cero con valor nominal de una unidad monetaria, de esta forma si $R(t,T)$ es la tasa spot de t a T con composición continua, el precio de este bono con vencimiento en T de acuerdo a la sección 2.4 está dado por:

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \ . \tag{2.13}$$

Enseguida, se proporciona una metodología ampliamente conocida, la cual establece una dinámica estocástica de la tasa corta a través del siguiente proceso de Itô

$$\mathrm{d}r_t = \mu(t,r_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,r_t)\mathrm{d}W_t \ , \tag{2.14}$$

donde $\mathrm{d}W_t$ es un movimiento Browniano, μ y σ son funciones conocidas, la cual será una especificación exógena. Debido a (2.10) la estructura depende de la tasa corta, pero la tasa corta es estocástica, entonces la tasa corta es estocástica y por la relación entre la estructura de plazos y la tasa corta establecida en (2.10) se tiene que el precio de un bono cupón cero por (2.13) en términos de la tasa corta está dado como sigue [7]:

$$B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \ . \tag{2.15}$$

En la práctica se observa que las tasas de interés no crecen indefinidamente, pero se observa que presentan reversión de la media a un valor constante, lo cual es una propiedad deseable en el análisis de la dinámica de las tasas de interés, es por ello que la dinámica de la tasa corta será modelada por el modelo de Vasicek, el cual como se vio en el capítulo uno presenta esta propiedad relevante de las tasas de interés. Cabe destacar que este modelo es muy útil debido a sus propiedades para valuar productos derivados de tasas de interés.

[7] Ver Duffie [7].

El modelo de Vasicek tiene la siguiente forma

$$\mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ , \tag{2.16}$$

donde: a, b y $\sigma > 0$ son cantidades constantes y conocidas, y $\mathrm{d}W_t$ es el movimiento Browniano estándar.

De acuerdo a (1.20) se tiene que la solución de (2.16) está dada por

$$r_s = r_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right] + e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \ , \tag{2.17}$$

por lo que

$$r_s \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathrm{E}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right], \mathrm{Var}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \ ,$$

es decir la tasa corta tiene una distribución normal con media y varianza dadas por (1.21) y (1.22) respectivamente.

Para calcular el precio del bono dado en (2.15), sea

$$I(t,T) = \int_t^T r_s \mathrm{d}s \ ,$$

con r_s definida en (2.17). Debido a que

$$r_s \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathrm{E}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right], \mathrm{Var}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right]\right),$$

entonces

$$I(t,T) \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right], \mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right]\right).$$

Recordando que la función generadora de momentos de una variable aleatoria X que se distribuye normal está dada por

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = e^{t\mathrm{E}[X] + \frac{t^2}{2}\mathrm{Var}[X]} \quad \forall \ \ t \in \mathbb{R} \ ,$$

se tiene que el precio del bono cupón cero está dado por la función generadora de momentos de $I(t,T)$ valuada en $t = -1$, es decir

$$B(t,T) = M_{I(t,T)}(-1) \ .$$

Como $I(t,T)$ se distribuye normal, entonces se tiene que el precio del bono en términos de la función generadora de momentos de $I(t,T)$ queda determinado por

$$B(t,T) = e^{-\mathrm{E}[I(t,T) \ \mid \ \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}[I(t,T) \ \mid \ \mathcal{F}_t]}. \tag{2.18}$$

De la expresión anterior se concluye que para calcular el precio del bono únicamente basta calcular $\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right]$ y $\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right]$ por lo que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{E}\left[\int_t^T r_s \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_t^T \left[r_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right]\right.\right. , \\
&+ \left.\left. e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] = & \int_t^T r_t e^{-a(s-t)} \mathrm{d}s + b\int_t^T \mathrm{d}s - b\int_t^T e^{-a(s-t)} \mathrm{d}s \\
& + e^{-as}\sigma \int_t^T \int_t^s e^{au} \mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \mathrm{d}s \\
& = -\frac{1}{a} r_t \left[e^{-a(s-t)}\right]_t^T + b(T-t) + \frac{b}{a}\left[e^{-a(s-t)}\right]_t^T + 0 \\
& = -\frac{r_t}{a}\left[e^{-a(T-t)} - e^{-a(t-t)}\right] + b(T-t) \\
& + \frac{b}{a}\left[e^{-a(T-t)} - e^{-a(t-t)}\right] \\
& = -\frac{r_t}{a}\left[e^{-a(T-t)} - 1\right] + b(T-t) + \frac{b}{a}\left[e^{-a(T-t)} - 1\right] \\
& = b(T-t) + r_t\left[\frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a}\right] - b\left[\frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a}\right] \\
& = b(T-t) + [r_t - b]\left[\frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a}\right]
\end{aligned}
.
$$

Por lo tanto:

$$
\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] = b(T-t) + [r_t - b]\left[\frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a}\right]. \tag{2.19}
$$

Al calcular la varianza:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{Var}\left[\int_t^T r_s \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[r_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right]\right.\right. \\
&+ \left.\left. e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[\int_t^s e^{-as}e^{au}\mathrm{d}W_u\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[\int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{d}W_u\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} .$$

Sea

$$u(s) = \int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{d}W_u \ ,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[\int_t^T u(s)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \left[\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right] - \mathrm{E}^2\left[\int_t^T u(s)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \sigma^2 \left[\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right]\right. \\
&- \left.\mathrm{E}^2\left[\int_t^T \left[\int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{d}W_u\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \sigma^2 \left[\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right]\right. \\
&- \left.\left[\int_t^T \left[\int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]^2\right]
\end{aligned} ,$$

pero

$$\mathrm{d}W_u \sim \mathcal{N}[0, \mathrm{d}u] \ ,$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \sigma^2 \left[\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right] - \left(\int_t^T 0\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right)^2\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{E}\left[\int_t^T \int_t^T u(s)u(k)\mathrm{d}s\mathrm{d}k \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{E}\left[2\int_t^T \int_t^s u(s)u(k)\mathrm{d}k\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= 2\sigma^2 \int_t^T \left(\int_t^s \mathrm{E}\left[u(s)u(k) \mid \mathcal{F}_t\right]\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}s
\end{aligned} .$$

Debido a que la región de integración es un cuadrado comprendido en los ejes s y k, lo que nos permite dividir la región en dos partes. Se trabajará con la región que se encuentra por debajo de la recta $k = s$, la cual está representada por la desigualdad $k < s$,, por lo que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[u(s)u(k) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{E}\left[\int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{d}W_u \int_t^k e^{-a(k-u)}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{-as}\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u e^{-ak}\int_t^k e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-a(s+k)}\mathrm{E}\left[\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \int_t^k e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} ,$$

pero debido a que

$$\mathrm{E}\left[\int_t^T H(s)\mathrm{d}W_s \int_t^T G(s)\mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] = \int_t^T H(s)G(s)\mathrm{d}s \ ,$$

se llega a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[u(s)u(k) \mid \mathcal{F}_t\right] &= e^{-a(s+k)}\int_t^k e^{2au}\mathrm{d}u \\
&= e^{-a(s+k)}\left[\frac{e^{2ak}-e^{2at}}{2a}\right] \\
&= \frac{e^{-as}e^{ak}-e^{2at}e^{-as}e^{-ak}}{2a}
\end{aligned} ,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right] &= 2\sigma^2\int_t^T\left(\int_t^s\frac{e^{-as}e^{ak}-e^{2at}e^{-as}e^{-ak}}{2a}\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}s\\
&= 2\sigma^2\int_t^T\left[\frac{e^{-as}}{2a}\int_t^s e^{ak}\mathrm{d}k-e^{2at}e^{-as}\int_t^s e^{-ak}\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}s\\
&= \frac{2\sigma^2}{2a}\int_t^T\left[e^{-as}\frac{(e^{as}-e^{at})}{a}+e^{2at}e^{-as}\frac{(e^{-as}-e^{-at})}{a}\right]\mathrm{d}s\\
&= \frac{\sigma^2}{a}\int_t^T\left[\frac{1-e^{-a(s-t)}}{a}+e^{2at}e^{-as}\frac{(e^{-as}-e^{-at})}{a}\right]\mathrm{d}s
\end{aligned},$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right] &= \frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^T\left[1-e^{-a(s-t)}+e^{2at}e^{-2as}-e^{-as}e^{-at}\right]\mathrm{d}s\\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\Bigg[(T-t)-\left(\frac{-1}{a}\right)\left[e^{-a(s-t)}\right]_t^T+e^{2at}\left(\frac{-1}{2a}\right)\left[e^{-2as}\right]_t^T\\
&\quad -e^{-at}\left(\frac{-1}{a}\right)\left[e^{-as}\right]_t^T\Bigg]\\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\Bigg[(T-t)+\frac{1}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right]+e^{2at}\frac{-1}{2a}\left[e^{-2aT}-e^{-2at}\right]\\
&\quad +\frac{1}{a}e^{-at}\left[e^{-aT}-e^{-at}\right]\Bigg]\\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\Bigg[(T-t)+\frac{1}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right]-\frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1)\\
&\quad +\frac{1}{a}e^{at}(e^{-aT}-e^{-at})\Bigg]\\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\Bigg[(T-t)+\frac{1}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right]-\frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1)\\
&\quad +\frac{1}{a}(e^{-a(T-t)}-1)\Bigg]\\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t)+\frac{2}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right]-\frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1)\right]\\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t)-2\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)-\frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1)\right]
\end{aligned}.$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right] = \frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t)-2\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)-\frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1)\right]. \tag{2.20}$$

Si:

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \ , \tag{2.21}$$

y por (2.19) y (2.20), se tiene que:

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= -\left[b(T-t) + [r_t - b]\left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right]\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) - 2\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right) - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)} - 1)\right] \\
&= -\, b(T-t) - (r_t - b)D + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) - 2D - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)} - 1)\right] \\
&= -\, b(T-t) - r_t D + bD + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{a^2}D - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\left[e^{-2a(T-t)} - 1\right] \\
&=(T-t)\left[-b + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right] - rD \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\left[e^{-2a(T-t)} - 2e^{-a(T-t)} + 1 - 1 - 1 + 2e^{-a(T-t)}\right] \\
&=(T-t)\left[-b + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right] - rD \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}\frac{1}{a^2}\left[1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}\right] - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\left[-2 + 2e^{-a(T-t)}\right] \\
&=(T-t)\left[-b + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right] - rD \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}\frac{1}{a^2}\left[1 - e^{-a(T-t)}\right]^2 + \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}2\left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right] \\
&=(T-t)\left[-b + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right] - rD - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}D \\
&=(t-T)\left(b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 - rD \\
&=(t-T)\left(b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) + D\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 - rD \\
&=(t - T + D)\left(b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 - rD \\
&=\frac{1}{a^2}(D - t - T)\left(a^2 b - \frac{1}{a}\sigma^2\right) - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 - rD
\end{aligned}$$

Por lo que el precio del bono está dado por:

$$\begin{aligned}B(t,T) &= e^{-\mathrm{E}[I(t,T)\ \mid\ \mathcal{F}_t]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}[I(t,T)\ \mid\ \mathcal{F}_t]} \\ &= e^{\left[\frac{1}{a^2}(D+t-T)\left(a^2b-\frac{1}{a}\sigma^2\right)-\frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2-rD\right]} .\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.7.2 Estructura de Plazos

Enseguida, se determinará la estructura de plazos bajo el supuesto de que la tasa corta es conducida por el modelo de Vasicek.

Para ello note que el precio del bono cupón cero está dado por (2.13) y (2.15), de donde se obtiene que

$$e^{-R(t,T)(T-t)} = B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] .$$

De acuerdo a (2.15) y (2.22) se tiene que

$$\begin{aligned}e^{-R(t,T)(T-t)} &= B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{\left[\frac{1}{a^2}(D+t-T)\left(a^2b-\frac{1}{a}\sigma^2\right)-\frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2-rD\right]} ,\end{aligned}$$

por lo que la estructura de plazos del modelo de Vasicek está dada por

$$R(t,T) = \frac{rD - \frac{1}{a^2}(D+t-T)\left(a^2b-\frac{1}{a}\sigma^2\right)+\frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2}{T-t} , \tag{2.23}$$

con

$$D(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} .$$

CAPÍTULO 3
TÉCNICAS DE INMUNIZACIÓN DE FLUJOS DE EFECTIVO

3.1 Medidas de sensibilidad de flujos de efectivo

En la práctica se observa que los movimientos de los precios de los bonos de largo plazo son mayores que los movimientos de los precios de los bonos de corto plazo, es decir, los precios de los bonos de largo plazo son más sensibles que los de corto plazo. Razón por la cual se podría pensar que el vencimiento de un bono puede ser un indicador de su riesgo, sin embargo es una medida imperfecta del riesgo por que solo contempla el pago del valor presente e ignora todos los pagos de cupón intermedios.

En la siguiente sección se introducirá una medida del riesgo de un bono a su principal fuente de riesgo: la tasa de interés, la cual posteriormente será una herramienta fundamental para controlar este riesgo.

3.1.1 Duración

A continuación se definirá una medida de riesgo para el precio de un bono, para ello hay que recordar que el precio de un bono depende de la tasa de interés a la que se descuentan los flujos de efectivo que proporciona. Del cálculo diferencial se sabe que la derivada de una función es la sensibilidad de esta función ante cambios en la variable, por lo que al aplicarle este concepto al precio de un bono se tiene que si P es el precio de un bono y y es su rendimiento al vencimiento (yield to maturity), entonces la derivada del precio del bono respecto al rendimiento al vencimiento indicará el cambio del precio del bono por cada cambio unitario en el rendimiento (y). Note que la relación del precio de un bono y su rendimiento es inversa, entonces se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} < 0,$$

es decir, si el rendimiento se incrementa el precio del bono baja y viceversa.

Se define a la duración monetaria del precio de un bono como

$$DM = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}. \tag{3.1}$$

La duración monetaria denotada por DM es una medida de sensibilidad del precio de un bono a cambios en la tasa de interés, y la razón por la que se define como $-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$ es que esta derivada es negativa y al ponerle este signo se transforma en una medida sin signo.

La duración monetaria es útil ya que indica la variación en unidades monetarias del precio del bono por cada incremento unitario en su rendimiento. Sin embargo, en ocasiones es útil contar con el cambio relativo del precio del bono, por lo que es conveniente definir a la duración modificada como el número D^* tal que

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = -D^* P. \tag{3.2}$$

Note que en la expresión anterior D^* es el factor por el cual el precio actual del bono cambia por cada incremento unitario en el rendimiento. Este hecho es importante ya que si se utiliza la siguiente aproximación

$$\frac{\Delta P}{\Delta y} \approx -D^* P,$$

entonces la expresión siguiente

$$\Delta P \approx -D^* P \Delta y \ ,$$

proporciona el valor explícito del cambio en el precio del bono por variaciones en el rendimiento.

Cabe mencionar que DM y D^* están relacionadas ya que de (3.2) se tiene que

$$D^* = -\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{P}DM. \tag{3.3}$$

La siguiente medida de riesgo del precio de un bono es una modificación de las anteriores pero es muy útil cuando la composición de la tasa es compuesta por periodos, ya que proporciona una interpretación útil y sencilla de comprender. La duración de un bono también llamada duración de Macaulay [8] se define como el número D tal que

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = -\frac{D}{1+\frac{y}{m}}P, \tag{3.4}$$

al despejar se tiene que

$$D = -\frac{1+\frac{y}{m}}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y},$$

[8] Para una descripción más detallada ver Macaulay [16].

y por (3.2)

$$D = D^* \left(1 + \frac{y}{m}\right). \tag{3.5}$$

Enseguida, se proporcionarán fórmulas explícitas cuando la composición del rendimiento del bono es compuesto m veces al año.

Sea P el precio de un bono cuponado, entonces su precio está dado por

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^t} \ ,$$

donde c_t es el flujo (cupón) del bono en el tiempo t; y es el rendimiento al vencimiento del bono convertible m veces al año.

La duración monetaria de este bono está dada por

$$DM = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^t} = -\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{-\frac{t}{m}c_t}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{t+1}}\right] \ ,$$

por lo que

$$DM = \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{t}{m}c_t}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{t+1}} \ . \tag{3.6}$$

Al aplicar (3.3) se tiene que

$$D^* = \frac{1}{P} DM = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{t}{m}c_t}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{t+1}} \ , \tag{3.7}$$

y por (3.5) la duración (o duración de Macaulay) está dada por

$$D = D^* \left(1 + \frac{y}{m}\right) = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{t}{m}c_t}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{t+1}} \left(1 + \frac{y}{m}\right) = \frac{1}{P} \left(\frac{1 + \frac{y}{m}}{1 + \frac{y}{m}}\right) \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{t}{m}c_t}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{t}} \ ,$$

por lo que

$$D = \sum_{t=1}^{n} \frac{t}{m} w_t; \qquad w_t = \frac{\frac{c_t}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^t}}{P} \ . \tag{3.8}$$

En la expresión anterior note que el numerador en w_t es el pago del cupón hecho por el bono en el periodo t traído a valor presente, es decir, es un sumando del precio del bono (P), por lo que

$$\sum_{t=1}^{n} w_t = \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{c_t}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^t}}{P} = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^t} = \frac{1}{P} P = 1 \ ,$$

es decir, la expresión en (3.8) es un promedio ponderado del plazo de cada pago del bono, donde las ponderaciones son proporcionales al valor presente de los flujos de efectivo proporcionados por el bono. Por lo tanto la duración (ó duración de Macaulay) D está expresada en unidades de tiempo. Además, si los flujos de efectivo (c_t) son no negativos, entonces $0 \leq D \leq n$, es decir, la duración es menor o igual que el vencimiento de un bono. Por lo tanto la duración D se puede interpretar como el tiempo promedio del pago del bono, de hecho se puede pensar a la duración de un bono cuponado como el vencimiento de un bono cupón cero equivalente al cuponado.

Note que en el caso de un bono cupón cero la duración coincide con su vencimiento, y en el caso de un bono cuponado la duración es estrictamente menor que el vencimiento. Esto muestra que la duración puede ser vista como una medida generalizada de vencimiento.

Aproximación al precio de un bono

Debido a que la duración modificada D^* satisface

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = -D^*P \ ,$$

entonces la duración modificada mide la pendiente relativa de la curva precio-rendimiento en un punto dado.

Si se considera la siguiente aproximación

$$\frac{\Delta P}{\Delta y} \approx -D^*P, \qquad \Delta P = P(y + \Delta y) - P(y) \ ,$$

entonces

$$P(y + \Delta y) \approx P(y) - \Delta y D^* P \ , \tag{3.9}$$

es decir, se obtiene una aproximación lineal al precio del bono, la cual es útil como medida y control del riesgo.

3.1.2 Convexidad

Como se vio anteriormente, la duración es una herramienta útil para predecir el efecto de cambios en la tasa de interés sobre el valor de los instrumentos de renta fija (en particular los bonos), sin embargo es tan solo una aproximación de primer orden válida para cambios pequeños en el rendimiento. Es por ello que para obtener una mejor precisión en el efecto de la tasa en el precio (el cual puede ser considerado por (3.9)) se presentará el concepto de convexidad, la cual es la curvatura en un punto dado de la curva precio-rendimiento.

La convexidad se define como el valor C tal que

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2} = CP,$$

donde P es el precio del bono.

El concepto de convexidad es importante ya que a través de la serie de Taylor se puede obtener una aproximación al precio de un bono dada por

$$\mathrm{d}P \approx \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}(\mathrm{d}y)^2 \ ,$$

la cual es equivalente a

$$\frac{1}{P}\mathrm{d}P \approx \frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}(\mathrm{d}y)^2 \ .$$

De la definición de duración modificada y convexidad se tiene que la expresión anterior es equivalente a

$$\frac{1}{P}\mathrm{d}P \approx -D^*\mathrm{d}y + \frac{1}{2}C(\mathrm{d}y)^2 \ ,$$

agrupando términos se tiene que

$$\frac{1}{P}\mathrm{d}P \approx \left[-D^* + \frac{1}{2}C\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}y = -\left[D^* - \frac{1}{2}C\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}y \ ,$$

lo cual muestra que la convexidad provoca que la duración se incremente en respuesta a un decremento en las tasas y que decrezca en respuesta a un incremento en las tasas.

Note ahora que si

$$\mathrm{d}P = P(y + \Delta y) - P(y) \ ,$$

entonces la ecuación anterior es equivalente a

$$P(y + \Delta y) = P(y) + \mathrm{d}P = P(y) - \mathrm{d}yD^*P(y) + \frac{1}{2}CP(y)(\mathrm{d}y)^2 \ ,$$

y como los flujos de efectivo de un bono son positivos entonces la convexidad será positiva. De la ecuación anterior se puede observar que el lado derecho que representa a la curva precio-rendimiento permanece por arriba de la línea recta de la duración, este efecto es ventajoso porque implica que los precios de los bonos (los cuales están dados por la curva) crecen más que la aproximación líneal (la cual está dada por la línea recta), y disminuyen menos que la aproximación líneal. De la observación anterior es importante hacer notar que mientras más grande sea la convexidad más benéfico será este efecto. Cabe mencionar que los bonos con mayor convexidad tambien serán más solicitados y por lo tanto podrían ser más caros.

Cálculo de la convexidad de un bono cuponado con rendimiento compuesto m veces al año

Enseguida, se determinará la convexidad de un bono cuponado cuando la tasa de rendimiento es compuesta por m periodos al año.

En este caso de la definición de convexidad se tiene que

$$
\begin{aligned}
C =& \frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{c_t}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^t} = \frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{t}{m}c_t}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{t+1}} \\
=& \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{t}{m}\frac{t+1}{m}c_t}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{t+2}} = \frac{1}{P}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{t(t+1)}{m^2}c_t}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^t} \\
=& \frac{1}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)}{m^2}\frac{\frac{c_t}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^t}}{P}
\end{aligned}
,
$$

por lo tanto

$$
C = \frac{1}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)}{m^2}w_t; \qquad w_t = \frac{\frac{c_t}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^t}}{P}\ . \tag{3.10}
$$

Es importante hacer notar nuevamente que de la expresión anterior se tiene que la convexidad es un promedio ponderado de $\frac{t(t+1)}{m^2}$, lo cual hace que la convexidad esté expresada en unidades de tiempo al cuadrado.

Finalmente de (3.10) note que para una duración y un rendimiento dados, mientras más bajo sea el cupón del bono, más baja será la convexidad. De este modo, note que los bonos cupón cero tienen la menor convexidad para una duración dada, ya que si P_0 es el precio de un bono cupón cero entonces

$$
P_0 = \frac{VN}{(1+y)^T}\ ,
$$

donde VN es el valor nominal y y es el rendimiento del bono. Entonces se tiene que la convexidad está dada por

$$
C = \frac{1}{P_0}\frac{\mathrm{d}^2 P_0}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{P_0}\frac{T(T+1)}{(1+y)^2}\frac{VN}{(1+y)^T} = \frac{1}{P_0}\frac{T(T+1)}{(1+y)^2}P_0\ ,
$$

por lo que

$$C = \frac{T(T+1)}{(1+y)^2} \ , \tag{3.11}$$

la cual es la convexidad de un bono cupón cero, y si $T = n$ entonces la convexidad para este bono cupón cero es menor que la de un bono cuponado dada por (3.10).

3.2 Duración y convexidad de un portafolio

En esta sección se determinará la duración y convexidad para un portafolio de bonos.

Para ello considere un portafolio de n bonos con diferentes vencimientos, con el mismo rendimiento al vencimiento (yield), sean $P_i(y)$ el precio del i-ésimo bono con vencimiento en T_i, w_i el número de bonos i mantenidos en el portafolio, $i = 1, ..., n$, entonces el precio de este portafolio está dado por

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n} w_i P_i(y) \ .$$

La duración monetaria del portafolio está dada por

$$DM_p = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{i=1}^{n} w_i P_i(y) = -\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\mathrm{d}P_i(y)}{\mathrm{d}y} = \sum_{i=1}^{n} w_i DM_i \ ,$$

donde DM_i es la duración monetaria del i-ésimo bono. Por lo que la duración monetaria del portafolio se obtiene al calcular el promedio ponderado de las duraciones monetarias de los bonos que componen el portafolio, es decir:

$$DM_p = \sum_{i=1}^{n} w_i DM_i \ , \tag{3.12}$$

y la duración modificada está dada por el número D_P^* tal que

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = -D_P^* P \ ,$$

al despejar

$$D_P^* = -\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{P} DM \ ,$$

pero por (3.12)

$$D_P^* = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} w_i DM_i \ .$$

Por lo tanto la duración modificada del portafolio está dada por

$$D_P^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{P} DM_i \ , \tag{3.13}$$

o en forma equivalente

$$D_P^* = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{P_i}{P} \frac{DM_i}{P_i} \ .$$

Si D_i^* es la duración modificada del i-ésimo bono, entonces por (3.3) se tiene que

$$D_P^* = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{P_i}{P} D_i^* \ , \tag{3.14}$$

es decir, la duración modificada del portafolio es un promedio ponderado de las duraciones de los bonos que componen el portafolio.

A continuación, se determinará la convexidad de un portafolio de bonos como el número C_P tal que

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}y^2} = PC_p \ ,$$

de donde

$$C_P = \frac{1}{P} \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{P} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} \sum_{i=1}^{n} w_i P_i = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\mathrm{d}^2 P_i(y)}{\mathrm{d}y^2} \ ,$$

por lo que

$$C_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{1}{P} \frac{\mathrm{d}^2 P_i}{\mathrm{d}y^2} \ , \tag{3.15}$$

o de forma equivalente

$$C_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{P_i}{P} \frac{1}{P_i} \frac{\mathrm{d}^2 P_i}{\mathrm{d}y^2} = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{P_i}{P} C_i \ . \tag{3.16}$$

Por lo tanto, se observa que la convexidad del portafolio es el promedio ponderado de las convexidades de los bonos que lo componen.

3.3 Inmunización de flujos de efectivo

En esta sección se presentará un método para formar un portafolio de bonos, el cual servirá de protección contra el riesgo de la tasa de interés. Este procedimiento es llamado inmunización, ya que se inmuniza el valor del portafolio contra cambios en las tasas de interés.

Suponga que se tienen $F_1, F_2, ..., F_n$ flujos de efectivo que se recibirán en los tiempos $t_1, t_2, ..., t_n$ respectivamente, y sea $V(F)$ el valor presente de los flujos $F_1, F_2, ..., F_n$ al día de hoy. Si las tasas de interés llegaran a subir demasiado el valor presente de los flujos de efectivo decrecerá, por el contrario si las tasas de interés bajaran el valor presente de los flujos de efectivo se incrementaría.

Si $V(F) > 0$ se considera que es un activo pero si $V(F) < 0$ entonces será un pasivo. De esta forma si $V(F) > 0$ y las tasas suben, entonces este incremento será desfavorable, pero si las tasas bajan este cambio será favorable. De forma análoga si $V(F) < 0$ y las tasas suben esto será favorable, sin embargo si las tasas bajan será desfavorable.

Es por ello que el tenedor de estos flujos de efectivo enfrenta un riesgo de tasa de interés ante el valor presente de los flujos de efectivo por lo que es necesario encontrar una estrategia que inmunice estos flujos contra cambios en la tasa de interés. Una forma de lograr tal inmunización sería comprando (o vendiendo en corto) un bono de tal forma que los cupones inmunizarán los flujos de efectivo, desafortunadamente, no siempre se van a encontrar estos bonos que coincidan con los flujos de efectivo. Otra forma sería comprando un portafolio de bonos cupón cero con vencimiento en $t_1, t_2, ..., t_n$ (las fechas en que ocurrirán los flujos de efectivo) sin embargo no siempre es posible encontrar dichos bonos.

Otra estrategia es armar un portafolio con bonos cupón cero de tal forma que el valor presente de este portafolio sea igual al valor presente de los flujos de efectivo, pero surge el inconveniente de que si el rendimiento del bono cambia con el paso del tiempo entonces el valor presente del portafolio y el de los flujos de efectivo cambiará y será distinto. Sin embargo, una solución a este problema es igualar la sensibilidad al cambio en las tasas de interés del portafolio y de los flujos, es decir, igualar la duración del portafolio y de los flujos. Por un lado al igualar el valor presente del portafolio de bonos y el de los flujos de efectivo ambos tendrían el mismo valor el día de hoy, y si además, se logra que la duración de este portafolio y los flujos sea la misma, entonces ambos valores presentes responderán idénticamente (al menos en primer orden) a cambios en los rendimientos. Si el rendimiento se incrementa entonces el valor presente de los flujos se decrementará en aproximadamente el mismo valor que el valor presente del portafolio de bonos, pero si el rendimiento decrece tanto el valor presente de los flujos y el del portafolio crecerán en el mismo monto.

De la discusión anterior el problema se ve reducido a resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, y para que este sistema tenga solución única el portafolio debe consistir de dos bonos.

Si $V(F)$ y D son el valor presente y duración de los flujos de efectivo, y considere dos bonos cupón cero cuyos precios y duraciones están dados por P_1, D_1 para el bono uno respectivamente, y P_2, D_2 para el bono 2 respectivamente. Si α_1 y α_2 son las cantidades invertidas en el bono 1 y 2, entonces la ecuación que establece que el valor presente del portafolio y de los flujos de efectivo es igual es:

$$P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 = V(F) \ ,$$

por (3.14) la ecuación que hace que las duraciones sean iguales está dada por:

$$P_1D_1\alpha_1 + P_2D_2\alpha_2 = DV(F) \ ,$$

con α_1 y α_2 las incógnitas del sistema de ecuaciones.

Por lo tanto α_1 y α_2 proporcionarán el portafolio que inmunizará el valor presente de los flujos de efectivo contra cambios en la tasa de rendimiento. Sin embargo, si el rendimiento cambia, el portafolio tomará un valor que será aproximadamente igual al del valor presente de los flujos de efectivo. Ante este cambio del rendimiento, el portafolio original deberá ser rebalanceado ya que a este nuevo nivel de la tasa de rendimiento el portafolio ya no inmunizará los flujos de efectivo, por lo que se trata de rebalancear dinámicamente el valor del portafolio.

Note que este método usa la duración como medida de riesgo la cual trabaja bien cuando los cambios de rendimientos son pequeños. Si se quisiera contar con mejor precisión en la inmunización ante cambios moderados en la tasa de interes sería adecuado utilizar la convexidad, es decir, el portafolio de bonos cupón además de ser igualado a su valor presente y duración con las de los flujos de efectivo, también deberá ser formado de tal manera que su convexidad sea la misma. Al hacer esto se tendrá que resolver un sistema de tres ecuaciones, razón por la cual sería adecuado adicionar un bono al portafolio de bonos que se construyó con el método donde únicamente se ocupaba la duración, para obtener un sistema de tres ecuaciones en tres incógnitas.

Si $V(F)$, D y C son el valor presente, duración y convexidad del valor presente de los flujos de efectivo; P_i, D_i y C_i son los precios, duración y convexidad del bono i, $i = 1, 2, 3$ respectivamente y α_i es la proporción invertida en el bono i, entonces las ecuaciones que igualan el valor presente y duración del portafolio y de los flujos de efectivo están dadas por

$$P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + P_3\alpha_3 = V(F)$$

$$P_1D_1\alpha_1 + P_2D_2\alpha_2 + P_3D_3\alpha_3 = DV(F) \ ,$$

y por (3.16) la ecuación de convexidad está dada por

$$P_1C_1\alpha_1 + P_2C_2\alpha_2 + P_3C_3\alpha_3 = CV(F) \ .$$

De esta forma, α_1, α_2 y α_3 proporcionarán un portafolio que inmunizará el valor presente de los flujos de efectivo ante cambios moderados en la tasa de interés, que como con anterioridad se debe rebalancear dinámicamente para que la protección siga siendo eficaz.

Finalmente, este método de inmunización proporciona buenos resultados en la práctica pero tiene debilidades las cuales se citan a continuación:

i) Es un método de inmunización local, es decir, para cambios pequeños o moderados en el rendimiento,

ii) Supone que los rendimientos de los bonos así como el de los flujos de efectivo son iguales, lo cual en la práctica no es cierto,

iii) Se supone que bonos con pequeñas y grandes duraciones pueden ser encontrados con el mismo rendimiento, lo cual es irreal,

iv) Debido a que usualmente los bonos de largo plazo tienen rendimientos más grandes que los de corto plazo, cuando los rendimientos cambian es improbable que los rendimientos en todos los bonos cambien por el mismo monto, por lo que rebalancear el portafolio puede ser difícil.

Es por ello que a continuación se considerará una extensión de inmunización que contempla a la estructura de plazos y no solo el rendimiento al vencimiento de un bono.

3.4 Extensión del concepto de duración y convexidad a la estructura de plazos

Hasta el momento se ha utilizado el concepto de duración como una medida de sensibilidad del precio de un bono respecto al rendimiento de un bono, pero si se trabaja con la estructura de plazos en lugar del rendimiento al vencimiento esta medida de riesgo a las tasas de interés se puede generalizar.

Esta alternativa es considerar cambios paralelos en la curva de la tasa spot, es decir, dadas las tasas spot $R(t, T_1)$, $R(t, T_2)$,...,$R(t, T_n)$, se supondrá que estas tasas cambian simultáneamente por una cantidad λ, es decir, el cambio en las tasas spot estaría dado por $R(t, T_1)+\lambda$, $R(t, T_2)+\lambda$,...,$R(t, T_n)+\lambda$. Note que este cambio paralelo en la curva de tasas spot generaliza un cambio en el rendimiento al vencimiento, ya que si la curva de tasas spot es plana entonces todas las tasas serían igual al valor común del rendimiento al vencimiento. Una vez vista esta alternativa que generaliza a lo anterior (rendimiento al vencimiento) se puede construir la duración y convexidad usando la estructura de plazos.

Considere la siguiente notación, sea

$$P(\lambda) = P\left(R(t, T_1) + \lambda, R(t, T_2) + \lambda, ..., R(t, T_n) + \lambda\right) ,$$

es decir, el precio de un bono visto como función de un incremento (decremento) paralelo en la estructura de plazos de λ unidades. Por ejemplo, si la composición es continua entonces

$$P(\lambda) = P(R(t,T_1)+\lambda, R(t,T_2)+\lambda, ..., R(t,T_n)+\lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_{T_i} e^{-(R(t,T_i)+\lambda)T_i} \ .$$

Ahora, se considerará una medida de sensibilidad con respecto a cambios paralelos en la curva de rendimientos y ésta será definida como la duración monetaria Fisher-Weil [9] para un arbitrario λ como el número DM:

$$DM = -\frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} \ .$$

Del mismo modo se puede definir la duración modificada Fisher-Weil como el número D^* tal que

$$\frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} = -P(0)D^* \ ,$$

la cual es la sensibilidad relativa del precio y esencialmente generaliza la fórmula de la duración modificada del rendimiento al vencimiento (yield).

La duración modificada Fisher-Weil para el caso de composición continua está dada por

$$\begin{aligned} D^* =& -\frac{1}{P(0)}\frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} = -\frac{1}{P(0)}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\sum_{i=1}^{n} c_{T_i} e^{-(R(t,T_i)+\lambda)T_i}\right]_{\lambda=0} \\ =&\frac{1}{P(0)}\sum_{i=1}^{n} T_i c_{T_i} e^{-R(t,T_i)T_i} \end{aligned} \ ,$$

con

$$P(0) = P = \sum_{i=1}^{n} c_{T_i} e^{-R(t,T_i)T_i} \ .$$

Para el caso de composición compuesta m veces al año se tiene que

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_{T_i}\left[1+\frac{R(t,T_i)+\lambda}{m}\right]^{-T_i} \ ,$$

[9] En su artículo titulado "Coping with the risk of interest-rate fluctuations: returns to bondholders from naive optimal strategies", [9].

entonces la duración modificada está dada por

$$\begin{aligned} D^* &= -\frac{1}{P(0)}\frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} \\ &= -\frac{1}{P(0)}\left[\sum_{i=1}^{n} -T_i c_{T_i}\frac{1}{m}\left(1+\frac{R(t,T_i)+\lambda}{m}\right)^{-(T_i+1)}\right]_{\lambda=0} \end{aligned} ,$$

por lo que

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{m}c_{T_i}\left(1+\frac{R(t,T_i)}{m}\right)^{-(T_i+1)}}{P(0)} .$$

En el caso continuo la duración modificada Fisher-Weil es un promedio ponderado del tiempo en que ocurren los flujos, sin embargo en el caso de composición discreta, no obstante de tener unidades de tiempo, no es exactamente un promedio ponderado de los tiempos en que se reciben flujos ya que el factor de descuento $\left(1+\frac{R(t,T_i)}{m}\right)^{-(T_i+1)}$ que aparece en el numerador no es el factor de descuento $\left(1+\frac{R(t,T_i)}{m}\right)^{-T_i}$ del flujo c_{T_i}, es decir, existe un factor extra $\left(1+\frac{R(t,T_i)}{m}\right)^{-1}$ en cada sumando del numerador.

Al recordar el caso simple cuando solo se aplicaba el rendimiento al vencimiento (yield), es decir, cuando $R(t,T_i)=y \ \ \forall\, T_i$ era posible factorizar $(1+y)^{-1}$ como factor común de la suma y así obtener un promedio ponderado. Cuando se considera a la estructura de plazos en lugar del rendimiento al vencimiento no es posible hacer ese paso ya que que el término que sobra $\left(1+\frac{R(t,T_i)}{m}\right)^{-1}$ depende de T_i, es decir, depende del índice de la suma i, y es por esta razón que algunos autores a la duración modificada Fisher-Weil le llaman cuasiduración modificada ya que no es propiamente un promedio ponderado.

De forma análoga, se puede definir la convexidad cuando se trabaja con la estructura de plazos, es decir la convexidad se define como el número C tal que

$$\frac{\partial^2 P(\lambda)}{\partial \lambda^2}|_{\lambda=0} = CP(0) .$$

3.4.1 Inmunización de flujos de efectivo a través de la estructura de plazos

Cuando se trabaja con la estructura de plazos el método de inmunización visto previamente se convierte en un método más robusto, pues en lugar de trabajar con el rendimiento al vencimiento, se trabajará con la estructura de plazos y se supondrá que toda la estructura de plazos cambia paralelamente y como consecuencia este nuevo método no dependerá en seleccionar bonos con un rendimiento al vencimiento común.

El método de inmunización consistirá en crear un portafolio de bonos cupón cero cuyo valor presente sea igual al valor presente de los flujos de efectivo que se desean inmunizar. Para hacer que el valor presente del portafolio responda en la misma magnitud a cambios pequeños y paralelos en la estructura de plazos al valor presente de los flujos de efectivo, se pedirá que la duración Fisher-Weil de este portafolio sea igual a la de los flujos de efectivo. De esta manera se tendrá un sistema de dos ecuaciones y para simplificar este problema entonces se utilizarán dos bonos para obtener dos incógnitas en dos ecuaciones y así obtener una solución única.

Específicamente, el sistema que se tendrá que resolver es

$$\begin{array}{r} P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 = V(F) \\ P_1D_1\alpha_1 + P_2D_2\alpha_2 = V(F)D^* \end{array},$$

donde $V(F)$, D^* son el valor presente y duración modificada Fisher-Weil de los flujos de efectivo, P_i, D_i y α_i es el precio, duración modificada Fisher-Weil y la proporción invertida del bono i respectivamente, $i = 1, 2$.

De esta forma se deberá resolver el sistema para α_1 y α_2, y se obtendrá un portafolio que inmunice el valor presente de los flujos de efectivo ante cambios paralelos en la estructura de plazos.

Si se desea una mejor precisión en la estrategia de inmunización de los flujos de efectivo ante cambios paralelos moderados en la estructura de plazos es conveniente imponer la restricción adicional de que las convexidades del portafolio y la de los flujos de efectivo sean iguales, de esta forma se tendrán tres ecuaciones, y nuevamente para simplificar el problema es conveniente armar un portafolio de tres bonos para tener un sistema de tres ecuaciones en tres incógnitas.

Es decir, si C_i y C son las convexidades para el bono i y para el valor presente de los flujos de efectivo respectivamente, entonces las dos ecuaciones de valor presente y duración están dadas por

$$\begin{array}{r} P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + P_3\alpha_3 = V(F) \\ P_1D_1\alpha_1 + P_2D_2\alpha_2 + P_3D_3\alpha_3 = V(F)D^* \end{array},$$

y la ecuación que establece que las convexidades deben ser iguales es

$$P_1C_1\alpha_1 + P_2C_2\alpha_2 + P_3C_3\alpha_3 = V(F)C \ .$$

De esta forma, α_1, α_2 y α_3 definirán un portafolio que inmunizará a los flujos de efectivo ante el riesgo de cambios paralelos y moderados en la estructura de plazos. Es importante mencionar que esta inmunización es dinámica al igual que en el caso anterior.

3.5 Inmunización con Futuros

La importancia de los mercados de futuros financieros [10] se debe primordialmente al hecho de que proporcionan flexibilidad a los inversionistas para entrar o salir rápidamente del mercado. Esto es debido a su liquidez y al bajo nivel de apalancamiento que se requiere. Es por ello que los futuros financieros de títulos de deuda pública, son herramientas útiles que permiten a las tesorerías de corporativos controlar el riesgo de tasa de interés con bajos costos de transacción. Adicionalmente, el riesgo crédito de estos instrumentos es nulo débido a la incorporación del mercado de una cámara de compensación la cual actúa como contraparte de todas las partes, garantizando el cumplimiento de las obligaciones contraídas.

Es por ello que los futuros sobre títulos de deuda pública son instrumentos idóneos que permiten a las tesorerías planear sus flujos de efectivo en respuesta a sus expectativas económicas y financieras, reduciendo el riesgo y la incertidumbre del mercado con bajos costos de transacción.

A continuación, se presenta un método de inmunización de flujos de efectivo utilizando futuros [11], y se supondrá que la tasa corta es guiada por un proceso de difusión dado por

$$\mathrm{d}r_t = \mu(r_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(r_t, t)\mathrm{d}W \ , \tag{3.17}$$

donde r_t es la tasa corta; $\mu(r_t, t)$, $\sigma(r_t, t)$ son funciones conocidas y $\mathrm{d}W$ es un movimiento browniano.

Por otro lado un contrato de futuros sobre tasas de interés es un contrato de futuros sobre un activo cuyo precio depende únicamente del nivel de las tasas de interés (como es el caso de un título de deuda pública cuyo precio depende de las tasas de interés).

Es decir, el precio del futuro es una función de la tasa de interés r_t, tiempo t, vencimiento del contrato T y el vencimiento del activo subyacente M. Por lo que si F es el precio de un futuro sobre un título de deuda pública, entonces

$$F = F(r_t, t; T, M),$$

[10] Para una revisión de estos instrumentos consultar Hull [13].
[11] Basado en González-Venegas [12].

por el lema de Itô se tiene que:

$$\mathrm{d}F = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu(r_t, t)\frac{\partial F}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 F}{\partial r_t^2}\right]\mathrm{d}t + \sigma(r_t, t)\frac{\partial F}{\partial r_t}\mathrm{d}W \ .$$

Ahora, el precio de un futuro sobre un bono cupón cero está dado por

$$F(r_t, t; T, M) = S\exp\left[r_{T-t}(T-t) - r_{T+M-t}(T+M-t)\right] \ ,$$

para composición continua, y

$$F(r_t, t; T, M) = S\left[\frac{1 + r_{t,T}\frac{T-t}{360}}{1 + r_{t,T+M}\frac{T+M-t}{360}}\right] \ ,$$

para composición discreta, donde S es el valor nominal del bono cupón cero y $r_{t,T}$ es la tasa de rendimiento estimada del bono cupón cero en $[t, T]$, y $r_{t,T+M}$ es la tasa de rendimiento del bono cupón cero en $[t, T+M]$.

Un método de inmunización es crear un portafolio Π consistente de contratos futuros, es decir

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} w_i F_i \ ,$$

donde w_i es la cantidad de contratos del futuro i en el portafolio y F_i es el precio del futuro i. El valor de este portafolio se iguala al valor presente de los flujos de efectivo denotado por $V(F)$, es decir

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} w_i F_i = V(F) \ ,$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} w_i F_i - V(F) = 0.$$

Se desea determinar las cantidades w_i, $i = 1, 2, 3$ de tal forma que los cambios en el valor presente de los flujos de efectivo $V(F)$ por variaciones en la tasa de interés se compensen con los flujos generados por los contratos a futuro de distinto vencimiento F_i, es decir

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i F_i\right) - \mathrm{d}V(F) = 0 \ ,$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{d}F_i - \mathrm{d}V(F) = 0 \ .$$

Note que $V(F)$ depende también de la tasa de interés, por lo que al aplicar el lema de Itô a la expresión anterior se llega a

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{i=1}^{n} w_i \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial t} + \mu(r_t,t)\frac{\partial F_i}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2} \right) \mathrm{d}t + \sigma(r_t,t)\frac{\partial F_i}{\partial r_t}\mathrm{d}W \right] \\
&- \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(r_t,t)\frac{\partial V}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} \right) \mathrm{d}t + \sigma(r_t,t)\frac{\partial V}{\partial r_t}\mathrm{d}W \right] \\
=& \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial r_t}\mu(r_t,t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2} \\
&+ \sigma(r_t,t)\mathrm{d}W \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial r_t} w_i - \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t - \mu(r_t,t)\frac{\partial V}{\partial r_t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}\mathrm{d}t \\
&- \sigma(r_t,t)\frac{\partial V}{\partial r_t}\mathrm{d}W \\
=& \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial t}\mathrm{d}t + (\mu(r_t,t)\mathrm{d}t + \sigma(r_t,t)\mathrm{d}W) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial r_t} w_i \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2} - \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t - \frac{\partial V}{\partial r_t}(\mu(r_t,t)\mathrm{d}t + \sigma(r_t,t)\mathrm{d}W) \\
&- \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned} .$$

Por (3.17) se tiene que la igualdad anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}r_t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial r_t} w_i + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2} - \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t - \frac{\partial V}{\partial r_t}\mathrm{d}r_t \\
&- \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned} ,$$

y al reagrupar términos se tiene que

$$\begin{aligned}
0 =& \left[\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \right] \mathrm{d}t + \left[\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial r_t} - \frac{\partial V}{\partial r_t} \right] \mathrm{d}r_t \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t) \left[\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} \right] \mathrm{d}t
\end{aligned} .$$

La ecuación anterior es fundamental para generar estrategias de cobertura con contratos a futuro sobre bonos cupón cero, ya que a partir de ésta se desarrolla el siguiente método de cobertura.

3.5.1 Método de Inmunización

De la ecuación anterior dado que dt y dr_t son variables independientes, se sigue que las condiciones para que se conserve esa igualdad es que los términos que se encuentran en los paréntesis sean igual a cero, es decir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial r_t} - \frac{\partial V}{\partial r_t} &= 0 \ . \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} &= 0 \end{aligned}$$

El sistema anterior puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial F_i}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \left[-\frac{\partial F_i}{\partial r_t} \right] - \left[-\frac{\partial V}{\partial r_t} \right] &= 0 \ , \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

el cual es un sistema de tres ecuaciones en las incógnitas w_1,w_2,...,w_n, y donde $-\frac{\partial F_i}{\partial r_t}$, $-\frac{\partial V}{\partial r_t}$, $\frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2}$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}$, son las duraciones y convexidad monetarias del futuro i y del valor presente de los flujos de efectivo respectivamente.

Adicionalmente, las cantidades $\frac{\partial F_i}{\partial t}$ y $\frac{\partial V}{\partial t}$ miden la sensibilidad de los futuros y del valor presente de los flujos de efectivo a la fecha de inicio de la cobertura respectivamente. Es decir, el sistema de ecuaciones anterior retoma el hecho de que la duración y convexidad monetarias del portafolio de futuros deben ser iguales a las del valor presente de los flujos de efectivo.

Cabe mencionar que con cuatro o más series de futuros en el portafolio se obtendría un sistema de tres ecuaciones en cuatro o más incógnitas, por lo tanto existiría un número infinito de estrategias de coberturas, de las cuales se podrían escoger algunas que cumplan ciertas restricciones adicionales que se impongan (como podrían ser condiciones sobre la liquidez de los contratos). Sin embargo sería una tarea ardua, por esta razón es conveniente escoger tres futuros para así obtener un sistema de tres ecuaciones en tres incógnitas, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} w_1\frac{\partial F_1}{\partial t}+w_2\frac{\partial F_2}{\partial t}+w_3\frac{\partial F_3}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial t} &=0 \\ w_1\left[-\frac{\partial F_1}{\partial r_t}\right]+w_2\left[-\frac{\partial F_2}{\partial r_t}\right]+w_3\left[-\frac{\partial F_3}{\partial r_t}\right]-\left[-\frac{\partial V}{\partial r_t}\right] &=0 \\ w_1\frac{\partial^2 F_1}{\partial r_t^2}+w_2\frac{\partial^2 F_2}{\partial r_t^2}+w_3\frac{\partial^2 F_3}{\partial r_t^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} &=0 \end{aligned} \quad .$$

Si se desea formar un portafolio con cuatro futuros tal vez sería apropiado adicionar una restricción más al sistema (3.18) tal como que el valor presente del portafolio de futuros y valor presente de los flujos de efectivo fueran iguales, lo que volverá a (3.18) en un sistema de cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas, es decir

$$\begin{aligned} w_1F_1+w_2F_2+w_3F_3+w_4F_4 &=V(f) \\ w_1\frac{\partial F_1}{\partial t}+w_2\frac{\partial F_2}{\partial t}+w_3\frac{\partial F_3}{\partial t}+w_4\frac{\partial F_4}{\partial t} &=\frac{\partial V}{\partial t} \\ w_1\left[-\frac{\partial F_1}{\partial r_t}\right]+w_2\left[-\frac{\partial F_2}{\partial r_t}\right]+w_3\left[-\frac{\partial F_3}{\partial r_t}\right]+w_4\left[-\frac{\partial F_4}{\partial r_t}\right] &=-\frac{\partial V}{\partial r_t} \\ w_1\frac{\partial^2 F_1}{\partial r_t^2}+w_2\frac{\partial^2 F_2}{\partial r_t^2}+w_3\frac{\partial^2 F_3}{\partial r_t^2}+w_4\frac{\partial^2 F_4}{\partial r_t^2} &=\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} \end{aligned} \quad .$$

Donde la primera ecuación establece el hecho de que el valor presente del portafolio de futuros es el mismo que el valor presente de los flujos de efectivo.

Si en vez de trabajar con la duración monetaria se trabaja con la duración modificada el sistema anterior puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V}\left(w_1F_1+w_2F_2+w_3F_3+w_4F_4\right) &=\frac{V(f)}{V} \\ \frac{1}{V}\left(w_1\frac{\partial F_1}{\partial t}\frac{F_1}{F_1}+w_2\frac{\partial F_2}{\partial t}\frac{F_2}{F_2}+w_3\frac{\partial F_3}{\partial t}\frac{F_3}{F_3}+w_4\frac{\partial F_4}{\partial t}\frac{F_4}{F_4}\right) &=\frac{\partial V}{\partial t}\frac{1}{V} \\ -\frac{1}{V}\left(w_1\frac{\partial F_1}{\partial r_t}\frac{F_1}{F_1}+w_2\frac{\partial F_2}{\partial r_t}\frac{F_2}{F_2}+w_3\frac{\partial F_3}{\partial r_t}\frac{F_3}{F_3}+w_4\frac{\partial F_4}{\partial r_t}\frac{F_4}{F_4}\right) &=-\frac{\partial V}{\partial r_t}\frac{1}{V} \\ \frac{1}{V}\left(w_1\frac{\partial^2 F_1}{\partial r_t^2}\frac{F_1}{F_1}+w_2\frac{\partial^2 F_2}{\partial r_t^2}\frac{F_2}{F_2}+w_3\frac{\partial^2 F_3}{\partial r_t^2}\frac{F_3}{F_3}+w_4\frac{\partial^2 F_4}{\partial r_t^2}\frac{F_4}{F_4}\right) &=\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}\frac{1}{V} \end{aligned} \quad ,$$

reagrupando términos y si

$$k_i = \frac{w_i F_i}{V}, \quad D_i = -\frac{\partial F_i}{\partial r_t}\frac{1}{F_i}, \quad C_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial r_t^2}\frac{1}{F_i}, \quad A_i = \frac{\partial F_i}{\partial r_t}\frac{1}{F_i}$$

$$D_V = -\frac{\partial V}{\partial r_t}\frac{1}{V}, \quad C_V = \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}\frac{1}{V}, \quad A_V = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{1}{V} \ .$$

De esta forma, el sistema de ecuaciones anterior está dado por

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 =& 1 \\ k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 =& A_V \\ k_1 D_1 + k_2 D_2 + k_3 D_3 + k_4 D_4 =& D_V \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3 + k_4 C_4 =& C_V \end{aligned} \ , \tag{3.19}$$

donde D_i, C_i son la duración modificada y convexidad del futuro i, y D_V, C_V la duración modificada y convexidad del flujo de efectivo.

Finalmente, como el precio del futuro está dado por

$$F(r_t, t; T, M) = S\left[\frac{1 + r_{t,T}\left(\frac{T-t}{360}\right)}{1 + r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\right] \ , \tag{3.20}$$

con S es el valor nominal del bono cupón cero; $r_{r,T}$ tasa de rendimiento estimada libre de riesgo entre el tiempo t y T; $r_{r,T+91}$ es la tasa de rendimiento estimada libre de riesgo entre el tiempo t y $T + 91$.

Ahora, se supondrá que la estructura de plazos está afectada por cambios paralelos, por lo que el efecto del precio del futuro debido a estos cambios será denotado por $F(\lambda)$ y es igual a

$$F(\lambda) = S\left[\frac{1 + (r_{t,T} + \lambda)\left(\frac{T-t}{360}\right)}{1 + (r_{t,T+91} + \lambda)\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\right] \ ,$$

donde λ es el cambio paralelo en la estructura de plazos, por lo que la duración monetaria del futuro suponiendo cambios paralelos en la estructura de plazos está dada por:

$$\begin{aligned} D =& \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} \\ =& S\,\frac{\frac{T-t}{360}\left[1 + (r_{t+91} + \lambda)\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right] - \frac{T+91-t}{360}\left[1 + (r_{t,T} + \lambda)\left(\frac{T-t}{360}\right)\right]}{\left[1 + (r_{t,T+91} + \lambda)\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right]^2}|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D =& S\frac{\frac{T-t}{360}\left[1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right]-\frac{T+91-t}{360}\left[1+r_{t,T}\left(\frac{T-t}{360}\right)\right]}{\left[1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right]^2}\\
=&\frac{S\frac{T-t}{360}\left[1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right]}{\left[1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right]^2}-S\frac{T+91-t}{360}\frac{1+r_{t,T}\left(\frac{T-t}{360}\right)}{\left[1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right]^2}\\
=&\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\\
&-\frac{T+91-t}{360}\frac{1}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}S\frac{1+r_{t,T}\left(\frac{T-t}{360}\right)}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}
\end{aligned}
,
$$

por (3.20) se tiene que

$$
\begin{aligned}
D =&\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}-\frac{T+91-t}{360}\frac{1}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}F\\
=&\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}-\frac{T+91-t}{360}\frac{\frac{T-t}{360}}{\frac{T-t}{360}}\frac{S}{S}\frac{1}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}F\\
=&\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}-\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\frac{T+91-t}{T-t}\frac{F}{S}
\end{aligned}
.
$$

Por lo tanto la duración es

$$
D=\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\left[1-\frac{F}{S}\frac{T+91-t}{T-t}\right], \tag{3.21}
$$

y la convexidad monetaria del futuro está dada por

$$
\begin{aligned}
C =&\frac{\partial^2F(\lambda)}{\partial\lambda^2}|_{\lambda=0}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda}\right)|_{\lambda=0}\\
=&\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+(r_{t,T+91}+\lambda)\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\left(1-\frac{F(\lambda)}{S}\frac{T+91-t}{T-t}\right)\right]|_{\lambda=0}\\
=&\left\{\left(1-\frac{F(\lambda)}{S}\frac{T+91-t}{T-t}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+(r_{t,T+91}+\lambda)\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\right)\right.\\
&\left.+\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+(r_{t,T+91}+\lambda)\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(1-\frac{F(\lambda)}{S}\frac{T+91-t}{T-t}\right)\right\}|_{\lambda=0}
\end{aligned}
,
$$

$$
\begin{aligned}
C =& \Bigg\{ \left(1 - \frac{F(\lambda)}{S}\frac{T+91-t}{T-t}\right)\left(-\frac{S\frac{T-t}{360}\frac{T+91-t}{360}}{\left[1+(r_{t,T+91}+\lambda)\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right]^2}\right) \\
&- \frac{S\frac{T-t}{360}}{1+(r_{t,T+91}+\lambda)\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\frac{T+91-t}{T-t}\frac{1}{S}\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda}\Bigg\}|_{\lambda=0} \\
=& \left(1 - \frac{F(0)}{S}\frac{T+91-t}{T-t}\right)\left(-\frac{S\frac{T-t}{360}\frac{T+91-t}{360}}{\left[1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right]^2}\right) \\
&- \frac{\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\frac{T+91-t}{T-t}\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda}|_{\lambda=0} \\
=& -\left[1 - \frac{F(0)}{S}\frac{T+91-t}{T-t}\right]\left[\frac{S\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\right]\left[\frac{\frac{T+91-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\right] \\
&- \frac{\frac{T-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\frac{\frac{T+91-t}{360}}{\frac{T-t}{360}}\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}
\end{aligned}
,
$$

por (3.21) el primer sumando es la duración monetaria, por lo que

$$
C = -D\frac{\frac{T+91-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)} - \frac{\frac{T+91-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}D \ ,
$$

de este modo se tiene que

$$
C = -2D\frac{\frac{T+91-t}{360}}{1+r_{t,T+91}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)} \ . \tag{3.22}
$$

Este método propuesto para inmunizar un conjunto de flujos de efectivo contra el riesgo de la tasa de interés parte de la estructura de plazos, la cual puede ser estimada con el modelo de Vasicek dada por (2.23), para determinar la duración y convexidad (monetaria o modificada) del valor presente del conjunto de flujos de efectivo y de los contratos a futuro sobre tasas para diferentes vencimientos dadas por (3.21) y (3.22) respectivamente. Con el sistema de ecuaciones determinadas en (3.18) ó (3.19) se obtiene el portafolio que inmunizará al valor presente de los flujos de efectivo.

CAPÍTULO 4

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL RENDIMIENTO SOBRE EL CAPITAL E INVERSO DE LA RAZÓN PRECIO-UTILIDAD

4.1 Introducción

En la vida diaria, para la toma de decisiones se requieren de ciertos indicadores que sirvan como benchmark para llevar a cabo una decisión correcta. En las finanzas corporativas se requieren tomar muchas decisiones entre las que destacan:

1) La compra de una empresa.
2) Llevar a cabo un proyecto
3) El precio al que se venderá una acción cuando se emite por primera vez.
4) Elegir una estructura de capital adecuada, étc.

Existen técnicas que ayudan a la toma de decisiones en este campo, entre las que destacan para (los puntos 1 y 2): el método de flujos de efectivo descontados, el valor presente neto, el cálculo de la tasa interna de retorno, el valor económico agregado (EVA), análisis de razones financieras como es el caso del rendimiento sobre capital (ROE), el múltiplo precio utilidad (P/E), el múltiplo precio a valor en libros (P/B). Todas estas técnicas ó indicadores anteriores ocupan al "COSTO DE CAPITAL", el cual es tomado como un benchmark al compararlo con los resultados obtenidos por las técnicas anteriores. Es decir, es en esta variable llamada costo de capital en donde recae la responsabilidad de la toma de decisiones en el área de las finanzas corporativas, razón por la cual la determinación del costo de capital es fundamental para la toma de decisiones en esta área, ya que de este cálculo depende en gran medida el realizar o no alguna acción.

Algunos autores definen al costo de capital como la tasa de rendimiento que debe obtener la empresa sobre sus inversiones para que su valor en el mercado permanezca inalterado. Este costo es también la tasa de descuento de las utilidades empresariales futuras. Dicho costo se puede estimar como el costo de oportunidad de una inversión alternativa. Es por ello que el administrador de las finanzas empresariales se debe proveer de las herramientas necesarias para tomar las decisiones sobre las inversiones a realizar y por ende las que más le convengan a la organización.

En el estudio del costo de capital se tiene como base las fuentes específicas de capital para buscar los insumos fundamentales para determinar el costo total de capital de la empresa, estas fuentes deben ser de largo plazo, ya que éstas son las que otorgan un financiamiento permanente.

Las fuentes principales de fondos a largo plazo son el endeudamiento a largo plazo, las acciones preferentes, las acciones comunes y las utilidades retenidas [12], cada una asociada con un costo específico y que lleva a la consolidación del costo total de capital. En particular este trabajo se enfocará al costo de capital del accionista.

Desde una perspectiva económica, el costo de capital se puede estimar como el costo de oportunidad de una inversión alternativa. En consecuencia, su estimación está influenciada por el momento del mercado, lo que puede volverla muy volátil. El costo de capital se puede ver como la tasa requerida en función de las expectativas para evaluar los flujos de fondos provenientes de una inversión particular. Adicionalmente, el concepto de costo de oportunidad siempre se sustenta en variables esperadas. Las cuales se formulan según las expectativas del mercado.

Los componentes básicos del costo de capital son:

1) La tasa de interés,
2) La inflación esperada,
3) El riesgo.

Los dos primeros forman el valor temporal del dinero y el tercero es la incertidumbre generada por las condiciones actuales del mercado.

Existen varios métodos para estimar el costo de capital, también llamado costo de riesgo al accionista. La técnica más utilizada es el modelo teórico de valuación de activos conocido como CAPM [13] (siglas en inglés de Capital Asset Pricing Model), el cual establece que el costo del capital (denotado por r_e) está dado por:

$$r_e = r_f + \beta(r_m - r_f) \ ,$$

con

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(r_m, r)}{\mathrm{Var}(r_m)} \ ,$$

[12] Para una descripción más general de estos conceptos ver Quivera [19].
[13] Consultar Sharpe [21].

y donde r_f, r_m y r_e son la tasa libre de riesgo, el rendimiento del mercado y el rendimiento de la acción respectivamente. De esta forma el parámetro β en este modelo mide la sensibilidad entre la rentabilidad de la acción y la del mercado, es decir, indica cuanto rinde la acción por cada punto que rinde el mercado.

Sin embargo, estudios previos han demostrado que el CAPM a pesar de ser el modelo más utilizado en todo el mundo, para estimar el costo de capital, (o dicho de otra forma, la rentabilidad que deben obtener los accionistas de una empresa por invertir su dinero en ella) ha sido puesto en tela de juicio muchas veces, y especialmente, la evidencia empírica muestra que no funciona adecuadamente para estimar el costo de capital en los mercados emergentes. Carbonell-Hurtado-Pérez [5], han trabajado con un modelo alternativo de costo de capital, el "Downside Capital Asset Pricing Model" (D-CAPM), encontrando que funciona mucho mejor que el CAPM en los mercados emergentes (en este artículo se muestra que la beta del CAPM tradicional explica el 36% de las variaciones en la rentabilidad de los mercados emergentes, mientras que la beta del D-CAPM explica el 55%).

4.1.1 Downside capital asset pricing model

En finanzas se suele definir el riesgo como la variabilidad en los rendimientos (tanto positivos como negativos) de un título y se mide con la desviación estándar o con la varianza. No obstante, a los inversionistas les preocupa únicamente la parte negativa del riesgo, es decir, las rentabilidades por debajo del promedio. Las que están por encima, lejos de molestar, son deseadas. Sin embargo, si la distribución de rentabilidades es normal, no hay ningún problema al medir el riesgo con la desviación estándar o con la varianza, porque la distribución es simétrica, y estos parámetros, nos indicarán que tan probable es el observar tanto rentabilidades superiores como inferiores a la media. Pero si la distribución no es simétrica, como ocurre especialmente en los mercados emergentes, la desviación estándar y la varianza, dejan de ser útiles como indicadores de riesgo, ya que la probabilidad de obtener un rendimiento x% por encima de la media, es diferente a la probabilidad de obtenerlo por debajo de ella, y el cálculo del parámetro de riesgo del CAPM (la beta) se hace tomando en cuenta rendimientos tanto positivos como negativos por lo que el costo de capital obtenido con este modelo, universalmente utilizado, no dará estimaciones apropiadas de este costo de capital.

Debido a los problemas comentados anteriormente el modelo downside capital asset pricing model (D-CAPM) trata de solucionar el problema anterior centrándose únicamente en el riesgo a la baja, y los valores que se obtienen son más acordes con lo que un inversionista espera por invertir su dinero en un país emergente, es decir, las rentabilidades inferiores a las de la media. Los supuestos bajo los cuales el D-CAPM se desarrolla, son muy similares a los del CAPM tradicional, sin embargo no requiere simetría en la distribución de rendimientos, lo cual es una gran ventaja. En particular si r_e, r_f, r_m son el costo de capital, la tasa libre de riesgo, y el rendimiento del mercado respectivamente, entonces el modelo D-CAPM es el siguiente:

$$r_e = r_f + \beta_0(r_f - r_m)\ .$$

El cual es la misma fórmula del CAPM, pero la forma de calcular el párametro β_0 es a través de la siguiente forma:

$$\beta_0 = \frac{\mathrm{Cov}(\min(r_m - \bar{r}_m, 0), \min(r - \bar{r}, 0))}{\mathrm{Var}(\min(r_m - \bar{r}_m, 0))}\ .$$

Siendo:

r_m: La rentabilidad del mercado.

$\bar{r}_m$: La rentabilidad promedio del mercado.

r: La rentabilidad de la acción observada.

$\bar{r}$: La rentabilidad promedio de la acción.

De esta forma se puede observar que la fórmula de este modelo es muy parecida a la del CAPM tradicional, pero el cálculo de la medida de sensibilidad del D-CAPM (β_0) es diferente, ya que este parámetro es un factor que mide la sensibilidad entre la rentabilidad de la acción y la del mercado, pero únicamente a la baja, es decir, indica cuanto cae la acción por debajo de su rentabilidad promedio, por cada punto que el mercado cae por debajo de su rentabilidad promedio, y no la sensibilidad total, tanto a la alza como a la baja, tal y como lo hace el CAPM tradicional. Por lo tanto el D-CAPM soluciona el problema anterior, pues como se comentó anteriormente se centra únicamente en el riesgo a la baja, y los valores que se obtienen son más acordes con lo que un inversionista espera por invertir su dinero en un país emergente. Pero, los rendimientos obtenidos por estos modelos (CAPM y D-CAPM) siguen siendo bajos para mercados emergentes. En particular Carbonell *et al* [5] ajustaron el D-CAPM y CAPM para 46 de las principales empresas de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), e incluyeron al IPyC (índice de la BMV). Cuyos resultados son más acordes con la realidad que los obtenidos con el CAPM tradicional. No obstante el D-CAPM sigue arrojando costos de capital bajos.

Debido a lo anterior en este capítulo se dará una propuesta de estimación del costo de capital de los accionistas a través de un modelo que considere como parámetros a las características específicas de la empresa.

4.2 ROE, P/E, costo de capital y equilibrio competitivo

A continuación, se presenta una justificación de la medida propuesta para estimar el costo de capital. Se construirá un modelo del valor de los derechos de los accionistas sobre el capital de una entidad.

4.2.1 Definición de valor para los accionistas

La forma en que deben considerar los accionistas el valor de sus derechos sobre el capital de una entidad se explica en la teoría de finanzas que sostiene que el valor de cualquier derecho financiero es simplemente el valor presente de los pagos en efectivo que reciben los tenedores de este pago, consultar Bernard-Palepu-Healy [1]. Puesto que los accionistas reciben pagos en efectivo de una empresa en forma de dividendos, el valor de su capital es el valor presente de los dividendos futuros (incluido cualquier dividendo por liquidación). Es decir,

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Div_t}{(1+r_e)^t} \ , \tag{4.1}$$

en donde:

V es el valor del capital;

Div_t es el t-ésimo dividendo y

r_e es el costo de capital de los accionistas.

De la ecuación anterior se observa que la empresa tiene una vida indefinida. Desde luego, en realidad las empresas se declaran en bancarrota o se venden. En estos casos, los socios reciben efectivamente un dividendo de terminación sobre sus acciones. A la fórmula anterior de valuación se le conoce como el modelo de dividendos descontados. Constituye la base para el más popular de los enfoques teóricos de valuación de las acciones.

Si todos los efectos del capital (que no se refieran a las transacciones de capital) fluyen por el estado de resultados, el valor en libros esperado del capital para los socios existentes al final del año t (denotado por VL_t) es simplemente el valor en libros al principio del año t (denotado por VL_{t-1}) más la utilidad neta esperada del año t (UN_t) menos los dividendos esperados para el año t (Div_t), es decir,

$$VL_t = VL_{t-1} + UN_t - Div_t \ ,$$

de donde se obtiene que el dividendo esperado al tiempo t está dado por

$$Div_t = UN_t + VL_{t-1} - VL_t \ . \tag{4.2}$$

Al sustituir (4.2) en (4.1) se tiene

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t + VL_{t-1} - VL_t}{(1+r_e)^t} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t + VL_{t-1} - VL_t - r_eVL_{t-1} + r_eVL_{t-1}}{(1+r_e)^t} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t - r_eVL_{t-1} + VL_{t-1}(1+r_e) - VL_t}{(1+r_e)^t} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{UN_t - r_eVL_{t-1}}{(1+r_e)^t} + \frac{VL_{t-1}(1+r_e) - VL_t}{(1+r_e)^t}\right] \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t - r_eVL_{t-1}}{(1+r_e)^t} + \lim_{k\to\infty}\sum_{t=1}^{k} \frac{VL_{t-1}(1+r_e) - VL_t}{(1+r_e)^t}
\end{aligned} ,
$$

al expandir la segunda suma se obtiene:

$$
\begin{aligned}
V =& \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t - r_eVL_{t-1}}{(1+r_e)^t} \\
&+ \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{VL_0(1+r_e) - VL_1}{(1+r_e)} + \frac{VL_1(1+r_e) - VL_2}{(1+r_e)^2} + \frac{VL_2(1+r_e) - VL_3}{(1+r_e)^3}\right. \\
&\left. + ... + \frac{VL_{k-1}(1+r_e) - VL_k}{(1+r_e)^k}\right\}.
\end{aligned}
$$

Al tomar como común denominador a $(1+r_e)^k$ en el segundo paréntesis de la expresión anterior se tiene que:

$$
\begin{aligned}
V =& \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t - r_eVL_{t-1}}{(1+r_e)^t} + \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{(VL_0(1+r_e) - VL_1)\,(1+r_e)^{k-1}}{(1+r_e)^k}\right. \\
&+ \frac{(VL_1(1+r_e) - VL_2)\,(1+r_e)^{k-2}}{(1+r_e)^k} + \frac{(VL_2(1+r_e) - VL_3)\,(1+r_e)^{k-3}}{(1+r_e)^k} + \\
&\left. ... + \frac{(VL_{k-2}(1+r_e) - VL_{k-1})\,(1+r_e)^{k-(k-1)}}{(1+r_e)^k} + \frac{VL_{k-1}(1+r_e) - VL_k}{(1+r_e)^k}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t - r_e VL_{t-1}}{(1+r_e)^t} + \lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{VL_0(1+r_e)^k - VL_1(1+r_e)^{k-1}}{(1+r_e)^k} \right. \\
&\quad + \frac{VL_1(1+r_e)^{k-1} - VL_2(1+r_e)^{k-2}}{(1+r_e)^k} + \frac{VL_2(1+r_e)^{k-2} - VL_3(1+r_e)^{k-3}}{(1+r_e)^k} \\
&\quad \left. + \ldots + \frac{VL_{k-2}(1+r_e)^2 - VL_{k-1}(1+r_e)}{(1+r_e)^k} + \frac{VL_{k-1}(1+r_e) - VL_k}{(1+r_e)^k} \right\} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t - r_e VL_{t-1}}{(1+r_e)^t} + \lim_{k\to\infty} \left[VL_0 - \frac{VL_k}{(1+r_e)^k} \right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t - r_e VL_{t-1}}{(1+r_e)^t} + VL_0 - \lim_{k\to\infty} \frac{VL_k}{(1+r_e)^k} .
$$

Note que a medida en que se amplia el horizonte de planeación k, el término final de la expresión anterior (el cual se puede interpretar como el valor presente del valor de liquidación en libros) se considera intrascendente, por lo que

$$
V = VL_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UN_t - r_e VL_{t-1}}{(1+r_e)^t} . \tag{4.3}
$$

Es decir, el valor del capital es el valor actual en libros (VL_0), más el valor presente de la utilidad neta del periodo t menos el valor en libros del capital al inicio del periodo (t-1) multiplicado por el costo del capital. A la utilidad neta menos el valor en libros del periodo anterior multiplicado por el costo del capital se le conoce como las utilidades abnormales del periodo t (las cuales serán denotadas por UA_t), es decir

$$
UA_t = UN_t - r_e VL_{t-1} . \tag{4.4}
$$

Es importante mencionar que algunos autores [14] definen las utilidades normales en el periodo t como la multiplicación de la tasa de retorno normal por el valor en libros del capital al inicio del periodo t (es decir en el periodo $t-1$). Donde la tasa de retorno normal es igual al costo de capital, cabe mencionar que este costo de capital es el mismo que se usa en el contexto de valuación con flujos de efectivo descontados. De este modo se puede interpretar a las utilidades abnormales como la capacidad de la empresa de aumentar la riqueza de los inversionistas, ya que la utilidad neta del periodo t se puede interpretar como la capacidad de la empresa de generar riqueza en el periodo t, y valor en libros del capital al inicio del periodo

[14] Por ejemplo Bernard *et al* [2].

multiplicado por el costo de capital se podría pensar como la ganancia inicial (en t-1) del inversionista.

Así, de acuerdo a (4.3), si una empresa puede obtener únicamente una tasa normal de rendimiento de su valor en libros, entonces los inversionistas podrían pagar no más que el valor en libros para adquirir esta empresa (o comprar una acción de esta empresa). Los inversionistas estarían dispuestos a pagar más o menos del valor en libros si las utilidades se encuentran por arriba o por debajo de este nivel. Entonces la desviación del valor de mercado al valor en libros del capital depende del poder de la empresa para generar "utilidades abnormales" (se entiende como utilidad abnormal a la capacidad de la empresa de generar una utilidad por arriba de la utilidad normal).

De esta forma el valor del capital puede ser visto como la suma del valor en libros actual más las utilidades abnormales futuras descontadas, es decir, la fórmula obtenida en (4.3):

$$V = VL_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{UA_t}{(1+r_e)^t} \ , \tag{4.5}$$

con UA_t definida en (4.4).

4.2.2 ROE, utilidades abnormales y equilibrio competitivo

De (4.5) se tiene que las ganancias normales [15] son aquéllas que no atraen o expulsan capitales de un determinado sector productivo. Mientras que por el contrario una ganancia abnormal (extraordinaria) es la que provoca ingresos de nuevas inversiones al sector. En cambio, si la ganancia está por debajo de la normal los capitales se retiran del sector. Bajo el supuesto de un mercado competitivo se tendría que las utilidades abnormales serían cero, razón por la cual en la expresión anterior se tendría que

$$V_t = VL_t \ . \tag{4.6}$$

De la ecuación (4.4)

$$UN_t - r_e VL_{t-1} = 0 \ ,$$

razón por la cual

$$r_e = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} \ . \tag{4.7}$$

El lado derecho de la expresión anterior es la definición del Rendimiento sobre el capital (ROE). Por lo que se concluye que el ROE en un mercado competitivo tiende al costo de capital de los accionistas.

[15] Ganancias ordinarias como las definía Smith [23].

A continuación, se tratará de explicar la conducta del ROE en un mercado que no está en equilibrio, para ello bajo el supuesto de un mercado en equilibrio y al incorporar las ecuaciones (4.6) y (4.7) se tiene que

$$ROE = r_e = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} = \frac{UN_t}{V_{t-1}} \ , \tag{4.8}$$

donde V_{t-1} es el valor de mercado del capital en el periodo t-1. Si el mercado no está en equilibrio entonces:

$$ROE = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} \longrightarrow r_e \ . \tag{4.9}$$

Por la ecuación (4.9) y (4.5) se tiene que:

$$ROE = \frac{UN_t}{V_{t-1} - \sum_{i=t}^{\infty} \frac{UA_i}{(1+r_e)^i}} \longrightarrow r_e \tag{4.10}$$

De la expresión anterior se observa que si existen dos empresas (empresa A y empresa B) con las mismas utilidades en el periodo t ($UN_t^k, k = A, B$), mismo valor en libros del capital en el periodo t-1 ($VL_{t-1}^k, , k = A, B$), y mismo costo de capital ($r_e^A = r_e^B = r_e$), es decir

$$\begin{aligned} UN_t^A &= UN_t^B = UN_t \\ VL_{t-1}^A &= VL_{t-1}^B = VL_{t-1} \\ r_e^A &= r_e^B = r_e \end{aligned} \quad . \tag{4.11}$$

Si las utilidades abnormales de A (UA_t^A), son mayores que las de B (UA_t^B), para cualquier periodo, es decir, A tiene mejores perspectivas de crecimiento que B, y si

$$VP(UA_t^k) = \sum_{i=t}^{\infty} \frac{UA_i^k}{(1+r_e)^i} \ k = A, B \ ,$$

es el valor presente de las utilidades abnormales de la empresa k, k=A,B respectivamente, se tendrá que

$$VP(UA_t^A) > VP(UA_t^B) \ , \tag{4.12}$$

y de este modo se tiene que

$$VL_{t-1} - VP(UA_t^B) > VL_{t-1} - VP(UA_t^A) \ ,$$

y así

$$\frac{UN_t}{VL_{t-1} - VP(UA_t^A)} > \frac{UN_t}{VL_{t-1} - VP(UA_t^B)} \ .$$

Por (4.10) la expresión anterior expresa que el ROE en el periodo t de la empresa A (ROE_t^A) es mayor que el de la empresa B (ROE_t^B). En conclusión si una empresa tiene utilidades abnormales mayores que cualquier otra empresa, entonces experimentará altos niveles de ROE comparados con estas empresas, es decir existe una relación directa entre ROE y utilidades abnormales. Es importante destacar que de acuerdo a (4.10) el ROE de ambas empresas tenderá a su costo de capital (que en este caso se hizo la suposición de que era el mismo) sin importar el nivel alcanzado de este indicador.

Si una empresa experimenta utilidades abnormales positivas significativas y mayores al resto de la industria en el periodo t, entonces el valor presente de estas utilidades abnormales $VP(UA_t)$ implican un alto valor del ROE en el periodo t (ROE_t) comparado con las demás empresas. Sin embargo, la presencia de estas utilidades abnormales positivas atraerán más competencia haciendo que en los proximos k periodos estas utilidades abnormales decrezcan, y como consecuencia el valor presente de estas utilidades abnormales en el periodo $t+k$ ($VP(UA_{t+k})$) serán menores al valor presente de las utilidades abnormales en el periodo t ($VP(UA_t)$), es decir

$$VP(UA_t) > VP(UA_{t+k}) \ . \tag{4.13}$$

Debido a que existirá mayor competencia, entonces las utilidades en los subsecuentes periodos decrecerán y ademas la empresa tenderá a expandir sus bases de inversión razón por la cual

$$\begin{aligned} VL_{t+k-1} &> VL_{t-1} \\ UN_t &> UN_{t+k} \end{aligned} \quad , \tag{4.14}$$

y de esta forma por (4.13) y (4.14)

$$\frac{UN_t}{VL_{t-1} - VP(UA_t)} > \frac{UN_{t+k}}{VL_{t+k-1} - VP(UA_{t+k})} \ .$$

Por (4.10) se tiene que

$$ROE_t > ROE_{t+k} \ ,$$

es decir, el ROE en k periodos será menor que el ROE en t. De esta manera se observa que si una empresa experimenta utilidades abnormales positivas significativas mayores respecto a otras empresas en un periodo t, entonces presentará un alto ROE en el periodo t. Sin embargo, conforme transcurra el tiempo estas utilidades abnormales atraerán más competencia, decrementándose las utilidades abnormales, y de esta forma el numerador de (4.10) aumentará ocasionando que el ROE en el periodo $t + k$ decrezca, es decir, cuando una empresa experimenta altos niveles del ROE (como consecuencia de utilidades abnormales positivas) este tenderá a decrecer conforme transcurra el tiempo.

Por otro lado, si una empresa tiene utilidades abnormales pequeñas respecto a las demás, entonces tendrá bajos niveles de ROE (como consecuencia de la relación directa entre utilidad abmormal y ROE). Además, si las utilidades se encuentran por debajo de lo normal (se podría pensar que no existen utilidades abnormales o que éstas son muy pequeñas o que son negativas) los capitales se retirarían del sector o no habría una competencia fuerte razón por la cual las empresas que se mantengan en el sector experimentarán paulatinamente un incremento en las utilidades abnormales (como consecuencia de la disminución de la competencia) y como resultado el ROE comenzará a incrementarse en los siguientes periodos (como consecuencia de la relación directa entre utilidades anbnormales y ROE). Es decir, empresas con bajos niveles de ROE (como efecto de bajas utilidades abnormales) conforme pase el tiempo experimentarán un aumento en el ROE.

A manera de conclusión se tiene que si se presentan utilidades abnormales significativas (y como consecuencia se tendrá un ROE alto), éstas tenderán a desaparecer debido a argumentos de equilibrio general, y como resultado de esta disminución de utilidades abnormales el ROE caerá. Por el contrario si se presentan utilidades abnormales no significativas o negativas (teniendo como consecuencia un ROE bajo), entonces éstas tenderán a subir y como consecuencia el ROE aumentará.

Se observa que en un mercado en equilibrio si se presentan altos ROE's, entonces este crecimiento abnormal de utilidades no se podrá mantener por mucho tiempo, implicando que éste tenderá a bajar hacia un valor de equilibrio. Por el contrario si se presentan bajos niveles de ROE's, entonces esta situación tenderá a mejorarse a través de un incremento de utilidades abnormales (y el aumento de estas utilidades abnormales decrementará las utilidades abnormales de las empresas que presentan ROE's altos), implicando un aumento en el nivel del ROE hacia un nivel de equilibrio (ya que este crecimiento no se podrá mantener por las fuerzas competitivas de las demás empresas).

Por lo tanto, parece existir una tendencia del ROE hacia un valor de equilibrio, el cual es un valor de largo plazo, y como se vio en la ecuación (4.9) el ROE tiende al costo de capital en un mercado en equilibrio competitivo, por lo tanto se concluye que este valor al cual tiende el ROE debe ser el costo de capital.

4.2.3 P/E, utilidades abnormales y equilibrio competitivo

De la misma manera se puede verificar que el P/E tiende al costo de capital, para ello de acuerdo a (4.8) se tiene que

$$ROE = r_e = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} = \frac{UN_t}{V_{t-1}} = \frac{1}{\frac{V_{t-1}}{UN_t}} \ .$$

Si N es el número de acciones emitidas por la empresa, $P_{t-1} = \frac{V_{t-1}}{N}$ es el precio de mercado de cada acción emitida, y $UPA_t = \frac{UN_t}{N}$ es la utilidad por acción al tiempo t, entonces la ecuación anterior es equivalente a

$$ROE = r_e = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} = \frac{\frac{UN_t}{N}}{\frac{V_{t-1}}{N}} = \frac{UPA_t}{P_{t-1}} = \frac{1}{\frac{P_{t-1}}{UPA_t}} ,$$

donde el denominador de la última igualdad de la expresión anterior es la definición de la razón Precio-Utilidad (P/E), es decir

$$ROE = r_e = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} = \frac{\frac{UN_t}{N}}{\frac{V_{t-1}}{N}} = \frac{UPA_t}{P_{t-1}} = \frac{1}{\frac{P_{t-1}}{UPA_t}} = \frac{1}{P/E} . \tag{4.15}$$

Por lo que se concluye que el inverso multiplicativo de la razón P/E en un mercado competitivo tiende al costo de capital de los accionistas.

Enseguida se tratará de explicar la conducta del P/E en un mercado que no está en equilibrio, para ello bajo el supuesto de un mercado en equilibrio y de acuerdo a la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{P/E} = r_e = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} = \frac{UN_t}{V_{t-1}} ,$$

si el mercado no está en equilibrio entonces

$$\frac{1}{P/E} = \frac{UN_t}{V_{t-1}} \longrightarrow r_e , \tag{4.16}$$

por la ecuación (4.16) y (4.5) se tiene que

$$\frac{1}{P/E} = \frac{UN_t}{VL_t + \sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{UA_i}{(1+r_e)^i}} \longrightarrow r_e . \tag{4.17}$$

De esta igualdad se tiene que si existen utilidades abnormales positivas, entonces estas utilidades atraerán más competencia razón por la cual estas utilidades se caerán obteniendo que el denominador de (4.17) aumentará (ya que las utilidades abnormales decrecerán), por lo que el cociente en (4.17) disminuirá. Mientras que si las utilidades se encuentran por debajo de la normal (se podría pensar que no existen utilidades abnormales o que éstas son muy pequeñas o que son negativas) los capitales se retirarían del sector o no habría una competencia fuerte, razón por la cual las empresas que se mantengan en el sector experimentarán que la cantidad expresada en el denominador de (4.17) disminuirá (ya que las utilidades abnormales crecerán), y finalmente el cociente de (4.17) aumentará.

A manera de conclusión se tiene que si se presentan utilidades abnormales significativas (se tendrá un inverso del P/E alto), están tenderán a desaparecer debido a argumentos de equilibrio general, y como consecuencia de esta disminución de utilidades abnormales el inverso del P/E caerá.

Por el contrario si se presentan utilidades abnormales no significativas o negativas (se tendrá un inverso del P/E bajo), entonces estas tenderán a subir y como consecuencia el inverso del P/E aumentará.

Se observa que en un mercado en equilibrio si se presentan altos valores para los inversos P/E, entonces este crecimiento abnormal de utilidades no se podrá mantener por mucho tiempo, implicando que éste tenderá a bajar hacia un valor de equilibrio. Por el contrario, si se presentan inversos P/E bajos, entonces esta situación tenderá a mejorarse a través de un incremento de utilidades abnormales (y el aumento de estas utilidades abnormales decrementará las utilidades abnormales de las empresas que presentan inversos P/E altos), implicando un aumento en el nivel del inverso P/E hacia un nivel de equilibrio (ya que este crecimiento no se podrá mantener por las fuerzas competitivas de las demás empresas).

Por lo tanto, parece existir una tendencia del inverso P/E hacia un valor de equilibrio, el cual es un valor de largo plazo, y como se vio en la ecuación (4.16) el inverso P/E tiende al costo de capital en un mercado en equilibrio competitivo, por lo tanto se concluye que este valor al cual tiende el inverso P/E debe ser el costo de capital.

A manera de conclusión general debido a la definición del ROE se tiene la siguiente relación entre ROE y P/E

$$ROE = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} = \frac{UN_t}{VL_{t-1}} \frac{V_{t-1}}{V_{t-1}} = \frac{V_{t-1}}{VL_{t-1}} \frac{UN_t}{V_{t-1}} \ ,$$

y de este modo si P/L es el múltiplo Precio-Valor en libros, se tiene la siguiente igualdad

$$ROE = \frac{P/L}{P/E} \ .$$

Es decir, existe una relación directa entre el ROE y el inverso del P/E, y además por las ecuaciones (4.16) y (4.9) se tiene que estos dos indicadores tienden al costo de capital en un escenario de equilibrio competitivo.

4.3 Evidencia empírica del fenómeno de reversión a la media del ROE

Robert N. Freeman, James A. Ohlson y Stephen H. Penman en su artículo titulado Book Rate of return and Prediction of earnings Changes: An empirical

Investigation [11], comentan que a lo largo del tiempo se han desarrollado muchas investigaciones sobre la conducta de las utilidades de las empresas.

Generalmente en todas estas investigaciones se concluye que los cambios en las utilidades contables no son predecibles, esto es que las utilidades siguen el comportamiento de una caminata aleatoria. Basados en estas inferencias han surgido algunos comentarios en contra de estas conclusiones, en particular los autores argumentan que la conclusión de que las utilidades no son predecibles es cierto en un sentido muy limitado, ya que una modesta extensión de la información en la cual se basaron los estudios previos permitiría rechazar la hipótesis de que los cambios en las utilidades no son predecibles. Específicamente la hipótesis de los autores es que el rendimiento sobre el capital contable en libros (ROE), predice los cambios de las utilidades. Si esto fuera cierto entonces las hipótesis anteriores de que las utilidades siguen una caminata aleatoria serían erróneas.

Estos autores encuentran dos resultados empíricos los cuales conjuntamente sugieren que su hipótesis podría ser más descriptiva, estos resultados son:

1) El rendimiento sobre el capital contable en libros (ROE) sigue un proceso de reversión a la media.

2) Los cambios en las tasas de retorno están fuertemente correlacionadas con cambios en las utilidades.

La evidencia encontrada por estos autores sustenta estos dos resultados. Por lo tanto los autores de esta forma concluyen que el rendimiento sobre el capital contable de libros (ROE) proporciona una base de predicción de utilidades futuras. Se argumenta que un bajo rendimiento sobre el capital (ROE) implica que las utilidades están temporalmente deprimidas, mientras que un ROE alto implica que las utilidades muestran un comportamiento inusualmente bueno. La evidencia entonces sugiere que mientras la hipótesis de caminata aleatoria es más robusta con respecto a las utilidades pasadas, predicciones más exitosas pueden ser hechas expandiendo el conjunto de información condicional al incluir medidas de desempeño que mezclen el estado de resultados así como la hoja de balance general, a través de medidas como el ROE.

Finalmente, estos autores comentan que los pronósticos de las utilidades podrían ser mejoradas a través de incrementar el conjunto de información condicional y un enfoque podría ser emplear variables macroeconómicas

Chant [6], en su artículo titulado On the predictability of corporate earnings per share Behavior, encuentra que la demanda de dinero agrega suficiente información para el subdesempeño extrapolativo de los modelos de series de tiempo en términos de poder predictivo. Este autor muestra que el aumentar una variable macroeconómica puede mejorar la predicciones sobre los cambios de las utilidades, lo cual es valioso ya que muestra una interesante relación entre el poder predictivo del ROE y una variable macroeconómica.

Posteriormente a este artículo de Freeman-Ohlson-Penman [11] siguieron una serie de artículos que trataron de probar la predictibilidad de los cambios en las utilidades, entre los más destacados se encuentran los siguientes:

Peasnell [18], demuestra como el valor económico de una empresa y sus rendimientos económicos pueden ser derivados de números contables y proporciona un elegante y simple vínculo entre rendimientos económicos y rendimientos contables.

Foster [10] proporciona evidencia de que muchas razones financieras no son descritas adecuadamente suponiendo una distribución normal. Cabe destacar que este artículo es crucial ya que es aquí donde se puede pensar que si las razones financieras no siguen una distribución normal, tal vez el supuesto de Freeman *et al* de que el ROE sigue un proceso de reversión a la media es adecuado.

Brief y Lawson [3] mostraron como es que las medidas contables como el ROE han ido tomando relevancia al evaluar el desempeño económico y financiero de una empresa.

Butler, Holland y Tippet [4] presentaron un análisis de series de tiempo mostrando que el ROE varia cíclicamente y sigue una tendencia de reversión a la media, entonces ellos toman ventaja de esta reversión a la media para predecir utilidades futuras a través del ROE trabajando conjuntamente con los administradores corporativos.

Ohlson [17] relaciona el valor en libros, a través de un modelo de capitalización de dividendos, para el valor del capital observado en un escenario de equilibrio general.

Dick W. Feenstra, Carel A. Huijgen y Hua Wang [8] en su artículo titulado An evaluation of the accounting rate of return; Evidence for Dutch Quoted Firms, argumentan que a pesar de que el ROE es tradicionalmente mencionado como una medida de rentabilidad fundamental en análisis de razones financieras, existe poco análisis empírico o teórico sobre sus propiedades estadísticas y su habilidad intrínseca para explicar los rendimientos de mercado. Es por esta razón que ellos en este trabajo proporcionaron un análisis empírico de las propiedades de la distribución y de series de tiempo del rendimiento sobre el capital contable (ROE) con empresas no financieras alemanas. Además, hacen un estudio para determinar si el ROE está relacionado con rendimiento y riesgo del mercado.

Los hallazgos encontrados en este análisis se resumen a continuación:

(1) El ROE no sigue una distribución normal,
(2) Las series de tiempo del ROE reportadas por empresas grandes son más estables que las reportadas por empresas chicas. Las empresas grandes tienden a reportar ROE's mas bajos con relación a las pequeñas empresas,
(3) La serie de tiempo del ROE sigue un proceso de reversión a la media,
(4) Los ROE's de grandes y pequeñas empresas se mueven hacia su valor normal,
(5) Los ROE's están correlacionados con los rendimientos del mercado, sin embargo el ROE no es igual al retorno de mercado en promedio,
(6) Los ROE's están asociados con el factor de riesgo sistemático beta, sin embargo la relación es débil.

En resumen, existe evidencia internacional de que las medidas contables son relevantes para medir variables de mercado, específicamente el ROE es una medida importante de rentabilidad, y se ha encontrado evidencia internacional de que el ROE sigue un proceso de reversión a la media. Es importante mencionar que toda esta literatura revisada utiliza al ROE para tratar de predecir cambios en la utilidad, o bien trata de investigar sus propiedades estadísticas y tratar de medir su relación con variables de mercado tales como son el rendimiento y riesgo de mercado, y en el camino encuentran que el ROE sigue un proceso de reversión a la media.

4.4 Metodología Propuesta

Debido a la evidencia empírica proporcionada en la sección 4.3 se cree que el ROE sigue un proceso de reversión a la media. La sección 4.2 sugiere que el ROE bajo un equilibrio competitivo tiende a un valor de largo plazo el cual es el costo de capital, entonces se concluye que el ROE presenta reversión a la media y ese valor al cual esta variable tiende es el costo de capital. Es por ello que esta propuesta de investigación se centra en determinar el costo de capital a través de un proceso de reversión a la media, donde el valor de largo plazo de este proceso es el costo de capital.

Esta propuesta se diferencia respecto a los trabajos de investigación presentados en la sección 4.3 debido a que estos artículos están interesados en el poder predictivo del ROE sobre las utilidades, así como en la relación existente entre el ROE y algunas variables de mercado (como es el caso del rendimiento y riesgo de mercado), la metodología que se propone tiene como objetivo estimar el costo de capital. A continuación, se presentan algunos modelos para probar reversión a la media y se detalla la metodología propuesta.

4.4.1 Reversión a la media

Para probar reversión a la media se pueden emplear los modelos utilizados en los artículos de Robert N. Freeman, James A. Ohlson y Stephen H. Penman [11], y Dick W. Feenstra, Carel A. Huijgen y Hua Wang [8].

Para ello Robert N. Freeman propone el siguiente modelo:

$$ROE_t = d + gROE_{t-1} + e_t \ , \tag{4.18}$$

donde los errores e_t y e_s, $t \neq s$ son independientes y

$$\mathrm{E}\left[e_t\right] = 0, \quad \mathrm{Cov}\left(ROE_{t-1}, e_t\right) = 0 \ \text{ y } \quad 0 \leq g \leq 1 \ .$$

Depende del valor que tome g se obtiene el proceso que siga el ROE, es decir:

- Si $g = 1$, se tendrá que el ROE sigue una caminata aleatoria.
- Si $g = 0$, se tendrá que el ROE seguirá un proceso puro de reversión a la media.
- Trabajos empíricos sugieren que el ROE es un híbrido si $d > 0$ y $g < 1$.

El modelo para probar reversión a la media de Dick W. Feenstra, es el siguiente:

$$\Delta ROE_t = a_1 + a_2 ROE_{t-1} + e_t \ . \tag{4.19}$$

Donde $\Delta ROE_t = ROE_t - ROE_{t-1}$, nuevamente dependiendo de los valores de los parámetros estará determinado el tipo de proceso que sigue el ROE, por lo que para saber cuales serán los valores que determinarían el proceso, es adecuado hacer las siguientes modificaciones a (4.19):

$$\Delta ROE_t = ROE_t - ROE_{t-1} = a_1 + a_2 ROE_{t-1} + e_t \ ,$$

por lo que

$$ROE_t = a_1 + (1 + a_2) ROE_{t-1} + e_t \ . \tag{4.20}$$

De esta forma el proceso del ROE será:

- Caminata aleatoria si $a_2 = 0$.
- Proceso estacionario (podría presentar reversión a la media) si $-2 < a_2 < 0$.
- El proceso explotaría y por lo tanto no sería estacionario si $a_2 < -2$ ó $a_2 > 0$.

En esta parte debido a que (4.20) es un AR(1) lo adecuado sería aplicar la prueba de Dickey-Fuller, para probar si es una caminata aleatoria.

4.4.2 Modelo propuesto

Los modelos propuestos por Freeman y Feenstra dados en las ecuaciones (4.18) y (4.19) respectivamente, solo prueban reversión a la media pero en ningún momento hablan del parámetro de reversión, el cual bajo este trabajo será el candidato a estimar el costo de capital. Adicionalmente, en la literatura revisada todos los autores únicamente prueban la reversión a la media y después tratan de pronosticar las utilidades a través de modelos probabilísticos o tratan de obtener el grado de relación entre el ROE y algunas variables de mercado. Es por esta razón que el modelo que se propone en este trabajo contempla el parámetro de reversión a la media explícitamente, es el modelo de Vasicek, el cual está dado por:

$$\mathrm{d}ROE_t = a(b - ROE_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ ,$$

con a,b,σ constantes y $\mathrm{d}W_t$ un movimiento Browniano.

Cuya versión discreta se puede escribir como:

$$\Delta ROE_t = a(b - ROE_t)\Delta t + \sigma \Delta t e_t \ , \tag{4.21}$$

donde $e_t \sim N(0,1)$, a, b, son constantes.

Debido a que el inverso P/E también presenta reversión reversión a la media, un modelo apropiado para esta variable es:

$$\Delta \left(\frac{1}{P/E}\right)_t = a(b - \left(\frac{1}{P/E}\right)_t)\Delta t + \sigma \Delta t e_t \ . \tag{4.22}$$

En este modelo de Vasicek, el parámetro b es conocido como el parámetro de reversión, es decir, es el valor al cual el proceso (en este caso el ROE e inverso P/E) tiende en el largo plazo, y en este caso este parámetro de reversión será el costo de capital. El parámetro (a) es conocido como el parámetro de velocidad de ajuste, y este parámetro indica que tan rápido el proceso (en este caso el ROE e inverso P/E) tiende hacia su valor de largo plazo (en este caso el costo de capital). Finalmente, el parámetro σ es la volatilidad del proceso (en este caso el

ROE e inverso P/E), el cual es la desviación estándar del ROE y el inverso P/E respectivamente.

4.4.3 Relación con la estrategia competitiva

Es importante destacar que si el parámetro de velocidad de ajuste (a) del modelo de Vasicek es pequeño, el modelo nos estaría diciendo que el ROE e inverso P/E tienden rápidamente ha ajustarse a su valor de largo plazo, es decir al costo de capital. Por el contrario si el parámetro de velocidad de ajuste es muy grande entonces el modelo indicaría que el ROE e inverso P/E tienden lentamente a su valor de largo plazo (costo de capital).

De la literatura de finanzas corporativas [16] se sabe que las empresas crean estrategias para crear una ventaja competitiva que las diferencia de las demás, y a través de esta ventaja competitiva las empresas obtienen mayores o menores utilidades respecto al promedio de la industria. Sin embargo, si una empresa tiene una excelente ventaja competitiva tendrá que mantenerla porque en un mercado en equilibrio competitivo, las demás empresas comenzarán a copiar sus estrategias y de esta forma esta aparente ventaja desaparecerá gradualmente, y esto impactará sus rendimientos.

Por el contrario, si una empresa tiene una pésima ventaja competitiva, y si ésta sobrevive entonces empezará a imitar a las mejores empresas, es decir, copiará la ventaja competitiva de las empresas líderes, situación que hará que sus medidas de rentabilidad mejoren. De esta forma una empresa no podrá mantener por mucho tiempo su ventaja competitiva por muy buena que sea.

Básicamente, la única forma en que una empresa puede mantener esa ventaja competitiva que la hace ser mejor a las demás es innovando. Una forma de evaluar la rentabilidad de una empresa (y por tanto tal vez sea un indicador de que tan fuerte es la empresa para mantener su ventaja competitiva) es comparar medidas de rentabilidad directa o indirectamente contra el costo de capital (estas medidas pueden ser el EVA, VPN, ROE, ROA, P/B, P/E, etc.).

En particular si el ROE o el inverso P/E es mayor al costo de capital se puede decir que la administración agrega valor a los accionistas, y se podría pensar que la empresa tiene una ventaja competitiva que hace que sus inversiones sean productivas. Sin embargo, el tiempo en que la empresa podrá hacer que su ROE e inverso P/E superen al costo de capital depende en gran medida de la capacidad de la empresa para defender su ventaja competitiva.

[16] Ver Bernard-Palepu-Healy [2].

Es por esta razón que surge la pregunta de si el modelo que se propone podrá medir la fortaleza de la ventaja competitiva, la cual hará que las empresa mantenga rendimientos por arriba de su costo de capital, y la respuesta es afirmativa.

El modelo propuesto es capaz de medir la fortaleza de la ventaja competitiva, y esto lo hace a través del parámetro de velocidad de ajuste (a).

La forma en que el parámetro de velocidad de ajuste ayuda a predecir la fortaleza de la ventaja competitiva a continuación se resume:

- Si la empresa experimenta ROE's e inverso P/E altos y presenta un parámetro de velocidad de ajuste pequeño, entonces esto implicará que el ROE e inverso P/E tiende rápidamente al costo de capital, situación que hace evidente que la fortaleza de la ventaja competitiva de la empresa es débil, y se deberán tomar medidas al respecto.

- Si la empresa experimenta altos ROE's, e inverso P/E y su coeficiente de velocidad de ajuste es grande, esto implica que el ROE e inverso P/E tiende lentamente a su valor de largo plazo (costo de capital), situación que hace evidente la fortaleza de la ventaja competitiva de la empresa.

- Si el ROE e inverso P/E de una empresa experimenta valores bajos (por debajo de su media), y el parámetro de velocidad es chico, implica que el ROE e inverso P/E se acercan rápidamente al costo de capital, situación que evidencia que la dirección de la empresa está trabajando para crear una ventaja competitiva que fortalezca a la empresa.

- Si la empresa experimenta ROE's e inversos P/E tan bajos que se encuentren por debajo de su costo de capital, y el parámetro de velocidad de ajuste es grande, esto implica que el ROE e inverso P/E tiende lentamente al costo de capital, situación que hace evidente que la ventaja competitiva de la empresa es muy mala y la administración no es hábil para implementar medidas correctivas.

De esta forma se dan argumentos de que los modelos (4.21) y (4.22) no solo ayudan a estimar el costo de capital, sino que también ayuda a evaluar la ventaja competitiva de la empresa.

A continuación, se presenta la metodología para estimar los modelos (4.21) y (4.22)

4.4.4 Estimación de Parámetros

Si se supone que el incremento de tiempo es un trimestre (para el ROE) ó un día (para el inverso del P/E) entonces se tiene que:

$$\Delta t = t - (t-1) = 1 \ .$$

Los modelos (4.21) y (4.22) se pueden rescribir como:

$$\Delta X_t = X_{t+1} - X_t = a(b - X_t) + \sigma e_t = ab - aX_t + \sigma e_t \ ,$$

y de esta forma

$$X_{t+1} = ab + (1-a)X_t + \sigma e_t \ ,$$

se corre una regresión lineal simple de X (siendo X el ROE o el inverso del múltiplo P/E) al tiempo t como variable dependiente y se toma a X del trimestre (para el ROE) o del día (en caso del inverso del P/E) anterior como variable independiente. Donde los parámetros a estimar son ab y (1-a) respectivamente.

Por lo tanto, se obtienen los estimadores del modelo de Vasicek para estimar el costo de capital a través del parámetro de largo plazo (b), así como la ventaja competitiva de la empresa de la cual se está estimando el costo de capital a través del parámetro de velocidad de ajuste (a).

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron algunas aplicaciones del modelo de Vasicek al área de finanzas. La importancia recae en que el modelo de Vasicek tiene la propiedad de presentar reversión a un parámetro de largo plazo, característica importante en algunas variables económicas y financieras. El modelo de Vasicek está en función del movimiento Browniano. Éste modelo es de fácil manejabilidad lo cual ha propiciado el desarrollo de teorías, que son de suma utilidad hoy en día en los mercados financieros. Sin embargo dicho proceso estocástico representa una vaga descripción de las características de la realidad financiera.

La estructura de plazos modelada con el modelo de Vasicek es de gran utilidad principalmente en la valuación de productos derivados debido a la normalidad de dicho modelo. Desafortunadamente ésta característica puede hacer que la estructura de plazos presente tasas de interés negativas, no deseadas en la práctica.

Adicionalmente, debido a que el movimiento Browniano no captura movimientos extremos sería adecuado modelar la dinámica de la tasa corta con el modelo de Vasicek adicionando un componente de saltos que incorpore la teoría de los valores extremos para integrar este tipo de movimientos.

Se presentó un modelo estocástico para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo en donde la duración y convexidad jugaron un papel muy importante. Cabe mencionar que existen algunas limitaciones en el modelo, si se desea disponer de cuatro o más series de futuros de tasas de interés se obtendrían con este método un sistema de tres ecuaciones con cuatro o más incógnitas. Por lo que existiría un número infinito de estrategias de cobertura, de las cuales se puede escoger algunas que cumplan con atributos deseables como es la liquidez de los futuros, que agregaría una restricción adicional, obteniendo un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Por otro lado, en el modelo se hace el supuesto de que se pueden vender futuros por cantidades divisibles. Sin embargo, es importante notar que la estandarización de los contratos no permite tomar posiciones sobre nominales, distintos a los múltiplos generados por el tamaño del contrato.

Finalmente, la inmunización por duración y convexidad es fundamentalmente un método local diseñado para cubrir cambios en el valor presente debido a desplazamientos pequeños y moderados en la tasa de interés. Por esta razón, estas estrategias requieren de actualizaciones periódicas (rebalanceo) a fin de proteger eficazmente no solo contra pequeños desplazamientos en tasas sino también contra cambios moderados y extremos. Si una estrategia no es rebalanceada atendiendo al comportamiento y a las expectativas del mercado, la protección se deteriora progresivamente.

Se dieron argumentos teóricos y se proporcionó evidencia empírica de que el inverso del múltiplo P/L y el ROE siguen un proceso de reversión a la media, en particular se mostró que este indicador tiende al costo de capital. Para estimar el costo de capital se propone al parámetro de reversión a la media del modelo de Vasicek, bajo el escenario de equilibrio competitivo. Es importante destacar que el modelo de Vasicek no solo es útil para estimar el costo de capital, sino que también ayuda a evaluar la fortaleza de la ventaja competitiva de la empresa para seguir generando utilidades abnormales y de esta forma obtener inversos del múltiplo P/E y ROE por arriba de sus costos de capital. La forma en que este modelo evalúa la ventaja competitiva es a través del parámetro de velocidad de ajuste.

Cabe mencionar que esta propuesta supone el modelo de Vasicek para estimar el costo de capital, y este modelo supone que el parámetro de reversión es constante. Sin embargo, no existe razón alguna para que este parámetro sea constante en particular el valor del costo de capital depende del momento en que se encuentre la economía. Sería razonable realizar una extensión de esta propuesta en donde el parámetro de reversión a la media sea una función del tiempo, un modelo adecuado que contemple un parámetro de reversión a la media en función del tiempo sería el Hull-White, donde el parámetro de reversión es una función del tiempo.

Otra posible extensión a esta metodología de estimación del costo de capital sería considerar un modelo multifactor que incorpore la característica de reversión a la media del modelo de Vasicek en la parte determinista y en la parte de difusión considerar algunas variable económicas, contables ó financieras que pudieran afectar el costo de capital de los accionistas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bernard, V. L., Healy, P. M., Palepu, K. G., (2002). Análisis y valuación de negocios: mediante estados financieros, International Thomson, México.

[2] Bernard, V. L., Healy, P. M., Palepu, K. G., (2004). Business analysis and valuation: using financial statements, South-Western College, México.

[3] Brief, R. P., Lawson, R. A. (1992). The Role of the Accounting Rate of Return in Financial Statement Analysis. *Accounting Review* , 67(2), 411-426.

[4] Butler, D., Holland, K., Tippett, M., (1994). Economic and accounting (book) rates of return: application of a statistical model. *Accounting and Business Research*, 24(96), 303-318.

[5] Carbonell López, Oscar, Hurtado García, Francisco Javier, Pérez Tenorio, César Manuel. (2001). D-CAPM en México: Un modelo alternativo para estimar el costo de capital.

[Online] http://www.ipade.mx/contenidoshome3/pdf/DCAPM.pdf.

[6] Chant, P. D. (1980). On the predictability of corporate earnings per share behavior. *Journal of Finance*, 35(1), 13-21.

[7] Duffie, D., (2001). Dynamic asset pricing theory, Princeton University Press, Princeton.

[8] Feenstra, D., Huijgen, C., Wang, H., (2000) An evaluation of the accounting rate of return: evidence for Dutch quoted firms. *Research Report of University of Groningen*, 00E55, 1-34.

[9] Fisher, L., Weil, R. (1971). Coping with the risk of interest-rate fluctuations: returns to bondholders from naive optimal strategies. *Journal of Business* , 44(4), 408-431.

[10] Foster, G. (1977). Quarterly accounting data: time series properties and predictive ability results. *The Accounting Review* , 52(1), 1-21.

[11] Freeman, R., Olhson, J., Penman, S. (1982). Book rate-of-return and prediction of earnings changes: an empirical investigation. *Journal of Accounting Research* , 20(2), 639-653.

[12] González, B., Venegas, F. (2002). Cobertura de tasas de interes con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocastico de duración y convexidad. *El Trimestre Economico* , 69(274), 1-19.

[13] Hull, J., (2000). Options, futures, and other derivative securities, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

[14] Karatzas, I., Shreve, Steven E.,(1996). Brownian motion and stochastic calculus, Springer Verlang, New York.

[15] Luenberger, D., 1998). Investment science, Oxford University Press, New York.

[16] Macaulay, F., (1938) Some theorical problems suggested by the movement of interest. Rates, bond yields and stock prices in the United States, National Bureau of economic Research, New York.

[17] Ohlson, J., (2001). Earnings, book values, and dividends in equity valuation: an empirical perspective. *Contemporary Accounting Research* , 18(1), 107-120.

[18] Ohlson, J., (1982). Some formal connections between economic values and yields and accounting numbers. *Journal of Business Finance and Accounting* , 9(3), 361-381.

[19] Quivera Yamelis. (2004). Estimación del costo de capital en inversiones reales tangibles. [Online] http://es.geocities.com/yamelisquivera/e2/ei3.htm.

[20] Russell, S., (1992). Understanding the term structure of interes rates: the expectations theory. *Federal reserve Bank of St. Louis Review* , 36-51.

[21] Sharpe, W., (1964). Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* , 19(3), 425-442.

[22] Shimko, D., (1992). Finance in continuous time: a primer, Kolb Publishing Company, Miami.

[23] Smith, A.,(1976). An inquiry into the nature and causes of the wealth of nations, University of Chicago Press, Chicago.

[24] Van Horne, J.,(1984). Financial Market rates and flows, Prentice Hall, Englewood cliffs, New Jersey.

[25] Vasicek, O., (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* , 5(3), 177-188.

[26] Wilmott, P.,(2000). Paul Wilmott on quantitative finance, John Wiley and Sons, Chichester.