DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS

CALCULO I

AGOSTO, 1982

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

I LIMITES Y CONTINUIDAD

LIMITES Y CONTINUIDAD.

II.1. CONCEPTOS BASICOS. DESIGUALDADES. VALOR ABSOLUTO Y ENTORNOS.

DESIGUALDADES.

Propiedades fundamentales.

1) El sentido de una desigualdad no se altera, si se suma o se resta a ambos miembros la misma cantidad. Si $a > b$, entonces $a \pm c > b \pm c$

Ejemplo 1.- $10 > 8$; $10 \pm 3 > 8 \pm 3$

2) El sentido de una desigualdad no se altera, si ambos miembros se multiplican o se dividen entre la misma cantidad positiva. Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Ejemplo 2.- $12 > 6$; $12(2) > 6(2) \longrightarrow 24 > 12$

$$\frac{12}{3} > \frac{6}{3} \longrightarrow 4 > 2$$

3) El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican o se dividen por la misma cantidad negativa. Si $a > b$ y $c < 0$; entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ejemplo 3.- $8 > 2$ $8(-2) < 2(-2) \longrightarrow -16 < -4$

$$\frac{8}{-2} < \frac{2}{-2} \longrightarrow -4 < -1$$

4) Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, la suma originará una desigualdad del mismo sentido. Si $a > b$ y $c > d$; entonces $a + c > b + d$

Ejemplo 4.- $14 > 6$ y $3 > 2 \longrightarrow 14 + 3 > 6 + 2 \longrightarrow 17 > 8$

5) Si de tres cantidades, la primera es mayor que la segunda y la segunda mayor que la tercera, entonces la primera es mayor que la tercera. Si $a > b$ y $b > c$; entonces $a > c$.

Ejemplo 5.- $14 > 6$ y $6 > 3 \longrightarrow 14 > 3$

6) Si dos desigualdades entre números positivos, tienen el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro y los productos darán como resul

tado una desigualdad en el mismo sentido. Se a, b, c, d, son todos positivos; y a > b, c > d, entonces ac > bd.

Ejemplo 6.- Si $4 > 2$ y $5 > 3 \longrightarrow 20 > 6$

7) Si en una desigualdad se sustituyen ambos miembros, por sus recíprocos, la desigualdad cambia de sentido. Así si $a > b$ se tendrá que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Ejemplo 7.- Si $25 > 5 \longrightarrow \frac{1}{25} < \frac{1}{5}$

VALOR ABSOLUTO Y DESIGUALDADES.

Definición.

Si a es un número positivo cualquiera, su valor absoluto será "a" y si a es negativo entonces será "-a"; así simbólicamente se representa lo anterior de la manera siguiente:

$$|a| = a \quad \text{si } a > 0, \quad |-a| = a \quad \text{si } a < 0$$

El valor absoluto de cero es cero esto es: $|0| = 0$

Ejemplo 8.- $|3| = 3$; $|7 - 5| = |2| = 2$; $|3 - 8| = |-5| = 5$

Solución de ecuaciones donde intervienen valores absolutos.

Cuando en una igualdad intervienen valores absolutos de expresiones en términos de una variable; la igualdad se cumplirá para dos valores de la variable, esto se debe al concepto de valor absoluto.

Ejemplo 9.- $|3x - 4| = |6 - 2x|$ De acuerdo a la definición existen dos posibilidades:

$$3x - 4 = 6 - 2x \quad \ldots (A)$$
$$3x - 4 = -6 + 2x \quad \ldots (B)$$

Así de (A): $5x = 10 \longrightarrow x = 2$

y de (B): $x = -2$

Ahora si en lugar de tener una igualdad se tiene una desigualdad, entonces al resolver la expresión para determinar los valores x que la satisfacen se haría como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.- Determine los valores de x que cumplen con:

$$|4x - 2| \leq 6 \quad \ldots (A)$$

Se escribe (A) como $-6 \leq 4x - 2 \leq 6$; sumando 2 a cada miembro $-4 \leq 4x \leq 8$, por lo tanto los valores de x que satisfacen (A), son los que van de -1 a 2, inclusive.

ENTORNOS.

Se llama entorno o vecindad de un punto " a " en $\mathbb{R}$ al intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$ en donde δ es la semiamplitud o radio del intervalo. Ver figura 1.

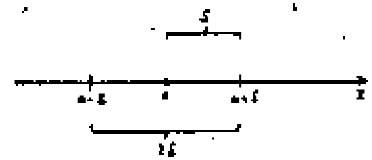


FIG 1

Tal entorno del punto a y radio δ suele también indicarse como:

$$|x - a| < \delta, \text{ o bien como } \mathcal{E}(a, \delta).$$

Se llama " entorno reducido " a aquél en el que se excluye el mismo punto " a ", esto se representa como:

$$\mathcal{E}'(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta, \; x \neq a\}, \text{ es decir:}$$

$$0 < |x - a| < \delta$$

II.2. DEFINICION DE LIMITE EN UN PUNTO DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL. INTERPRETACION GEOMETRICA.

LIMITE DE UNA VARIABLE.

Siendo ahora el objeto de estudio el concepto de límite en un punto, de una función real de variable real, es conveniente analizar previamente, el concepto de límite de una variable, análisis que se realizará a continuación. Antes de dar una definición considerénse los siguientes ejemplos.

Ejemplo 11.- Sea x la variable cuyo campo de variabilidad es la sucesión.

$$2 + \frac{1}{2} \;,\; 2 + \frac{1}{4} \;,\; 2 + \frac{1}{8} \;,\; \ldots \ldots ,\; 2 + \frac{1}{2^n} , \ldots .$$

Si x va tomando valores cada vez más " avanzados " es evidente que su valor se va acercando a 2; se dice entonces que x, tiende a 2, lo cual se escribe $x \to 2$, o bien que el límite de x es dos escribiéndose esto. $\lim x = 2$

Si $x \to 2$ entonces la diferencia $x - 2$ tiende a cero. Esto puede expresarse indicando que siempre se puede tener $x - 2 < \delta$, donde δ es un número positivo tan pequeño como se quiera.

Si $\delta = 0.1$ basta con tomar a:

$x = 2 + \frac{1}{2^4} = 2 + \frac{1}{16}$ con lo cual se cumple:

$x - 2 < \delta \quad , \quad 2 + \frac{1}{16} - 2 = \frac{1}{16} < 0.1$

Si se hace $\delta = 0.02 = \frac{1}{50}$, tomando $x = 2 + \frac{1}{2^6} = 2 + \frac{1}{64}$ se tiene :

$x - 2 = 2 + \frac{1}{64} - 2 = \frac{1}{64} < \frac{1}{50} = \delta$ etc.

Observese que x no llegará al valor 2, sin embargo, su valor puede estar tan cercano a 2 como se desee.

Ejemplo 12.- Sea un círculo fijo cuya área contante es "a" (figura 2) Considérese incrito en el círculo un polígono rectangular cuyo número de lados va en aumento; obviamente el área v del polígono es variable y al cambiar de valor, esta se acerca al número "a" sin llegar a ser $v = a$; es decir $v \to a$ o bien $\lim v = a$.

Para expresar la condición en que se basa este hecho se puede escribir $v - a \to 0$ o bien $| v - a | < \delta$. Siendo δ un número positivo tan pequeño como se quiera.

Es necesario tomar el valor absoluto de la diferencia $v - a$ cuando se compara ésta con el valor de δ porque en el presente caso se tiene siempre que $v - a < 0$. Si no se tomara valor absoluto, no tendría ningún objeto la comparación de un número negativo $v - a$ con cualquier número positivo δ ya que lo que realmente interesa es la comparación entre la magnitud de estas dos cantidades.

En general tomando $| v - a |$ en cualquier caso, si $|v - a| < \delta$ para todo $\delta > 0$ (por pequeño que este sea), se tendrá:

$v \to a$ ó bien $\lim v = a$

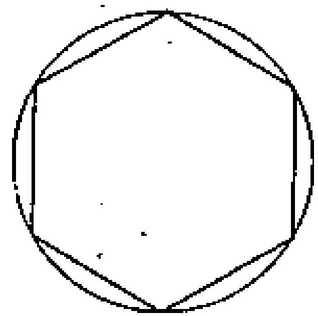


FIG 2

Definición.

" Se dice que la variable x tiende a la constante a , o bien, que el límite de x es a , si para todo número $\delta > 0$ (por pequeño que sea éste) siempre se verifica que $| x - a | < \delta$"

A continuación se presentará el concepto de Límite en un punto de una función real de variable real. Antes de exponer la definición formal se hará una introducción del concepto para lograr un mejor entendimiento.

NOCION DE LIMITE DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL.

Considérese la función dada por:

$y = f (x) = - 2x^2 + 8 x - 4$, y concéntrese la atención en una vecindad del valor $x = 3$.

Es necesario considerar la función no solo cuando $x = 3$, sino también cuando x toma valores en diversos entornos del punto $x = 3$.

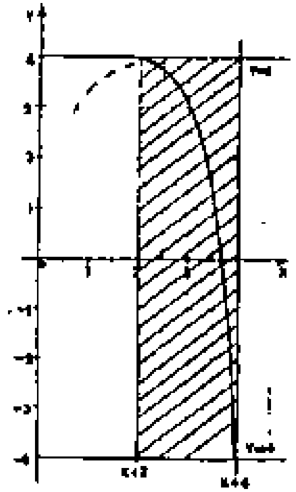


FIG 3

Para ello supóngase que se selecciona el entorno ϕ (3, 1) es decir, $2 < x < 4$. La gráfica de la función en este entorno muestra que para $x = 2$ - se tiene $f(2) = 4$ y para $x = 4$, $f(4) = -4$ (Figura 3).

En otras palabras, la gráfica de la función se encuentra en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2$, $x = 4$, $y = 4$, $y = -4$. El próximo paso - es seleccionar un entorno de $x = 3$ con menor amplitud, por ejemplo; - - -

ϕ (3, 0.5) es decir, $2.5 < x < 3.5$. Considerése la gráfica en este entorno. (Figura 4).

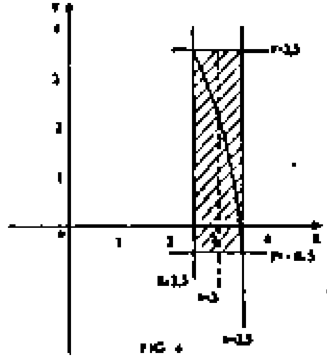


FIG 4

La gráfica se encuentra ahora en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2.5$, $x = 3.5$, $y = -0.5$, $y = 3.5$. Continuando de esta manera, tómese un- entorno aún menor, sea este ϕ (3, 0.1) ó sea, $2.9 < x < 3.1$, la gráfica se- encuentra ahora en el rectángulo formado por las rectas $x = 2.9$, $x = 3.1$, -- $y = 2.38$, $y = 1.58$; como muestra amplificadamente, la figura 5.

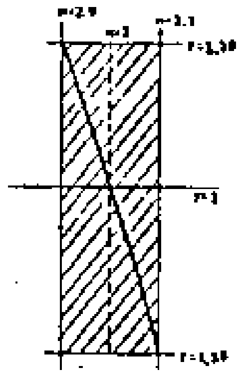


FIG. 5

El punto principal a recalcar es la altura de estos rectángulos. A medida que el ancho de los rectángulos disminuye, la altura también se reduce.

Si se continua tomando ahora el entorno ϕ (3, 0.01) ó sea $2.99 < x < 301$, el rectángulo correspondiente que contiene a la gráfica de la función estaría limitado por las rectas $x = 2.99$, $x = 3.01$, $y = 1.9598$. De lo anterior se deduce que a medida que las rectas $x =$ cte. se acercan al valor $x = 3$, las rectas $y =$ cte. se acercan al valor $y = 2$. Es posible que pueda preguntarse cual es el objeto de toda esta complicación en circunstancias que, por sustitución directa en la ecuación se obtiene que $y = 2$, cuando $x = 3$. Obsérvese sin embargo, que en toda la discusión no se ha utilizado este hecho, más aún, se ha evitado toda consideración de lo que sucede cuando $x = 3$.

Así, interesa solamente el comportamiento de " y " cuando x está en algún intervalo alrededor del valor 3.

En casi todas las funciones estudiadas hasta ahora, se distingue entre el comportamiento de la función en un punto, por ejemplo en $x = a$, y su comportamiento en una sucesión de entornos, cada vez más pequeños, de ese punto. Sin embargo, ocurre un cambio sorprendente cuando se estudian funciones cuyo comportamiento no puede determinarse por sustitución directa. Por ejemplo la función:

$$y = f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Está definida para todo valor de x excepto $x = 0$, la sustitución directa en $x = 0$ daría:

$$y = f(0) = \frac{0}{0}$$

lo cual carece totalmente de sentido. No obstante, se verá más adelante, que estudiando una sucesión de intervalos en torno a $x = 0$, que se hagan más y más pequeños, se observa que la altura de los rectángulos que contienen la función se hace también más y más pequeña y se acumula en torno a un valor particular de y. En ningún momento se dice algo acerca de y cuando x es cero, sólo se estudia el valor de y cuando x se hace más y más cercano a cero.

Volviendo al ejemplo de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$ se ve que cuando x se aproxima al valor 3, f (x) se aproxima o tiende al valor 2. Se dice entonces que por lo tanto " f (x) tiende a 2 cuando x tiende a 3 " y se abrevia esta proposición así:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

Si una función está definida para valores de x en torno a un número fijo " a " y si al tender x a " a ", los valores de f (x) se hacen más y más cercanos a un número específico L, esto es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \ldots (1)$$

Lo cual se lee " el límite de f (x) cuando x tiende a " a " es L".

Geométricamente esto significa que la sucesión de rectángulos que rodea a " a " y que tienen anchuras más y más pequeñas, tienen también alturas que se hacen cada vez menores y se acumulan en torno al punto (a, L)

Todas las proposiciones anteriores que contienen expresiones como "más cercano", "más pequeño", etc. son bastante imprecisas y solo pretenden dar una idea intuitiva de lo que ocurre.

Considérese ahora la siguiente función:

$$y = f(x) = \frac{x - 2}{2\,|x - 2|}$$

que está bien determinada para todo valor de x, excepto $x = 2$, puesto que para $x = 2$ la sustitución directa da; $y = \frac{0}{0}$.

La gráfica de la función, (figura 6), es muy simple:

Si $x > 2$, entonces $|x - 2| = x - 2$ y la función toma el valor + 0.5; y si $x < 2$, entonces $|x - 2| = -(x - 2)$, y la función vale − 0.5. Se quiere ahora estudiar el comportamiento de la función cuando x tiende a 2. Seleccionando un entorno para x=2, por ejemplo: ϕ (2, 0.6) o sea: $1.4 < x < 2.6$, se ve que la función está contenida en el rectángulo limitado por las rectas $x = 1.4$, $x = 2.6$, $y = 0.5$, $y = -0.5$, (Figura 7.).

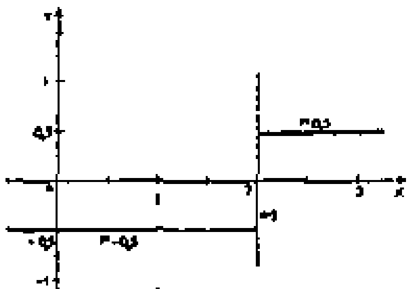


FIG 6

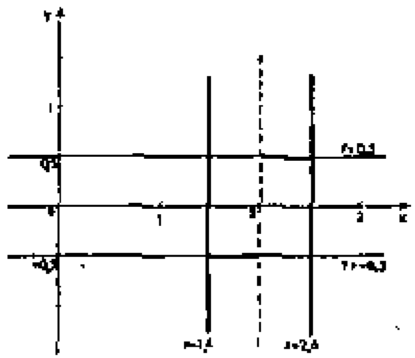


FIG 7

En realidad independientemente de cuán angosto se haga el entorno de x = 2, la altura del rectángulo será siempre uno; esto es, no hay límite cuando x tiende a 2 y se dice:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{2\,|x - 2|} \quad \text{no existe.}$$

Se estudiarán a continuación diversos ejemplos de funciones, con el objeto de determinar lo que sucede en la vecindad de un valor particular de x, cuando la función no queda definida mediante la sustitución directa de ese valor.

Ejemplo 13.- La función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

está definida para todo valor de x, excepto x = - 1, puesto que en x = - 1, tanto el numerador como el denominador se anulan ¿Existe $\lim_{x \to -1} f(x)$?

Para tener una idea de lo que sucede, se elabora una tabla de valores, y trazando enseguida la gráfica se obtiene una línea recta con un " agujero " en el punto (- 1, - 5), (figura 8).

x	f (x)
- 2	- 7
- 1	0/0
0	- 3
1	1
2	1

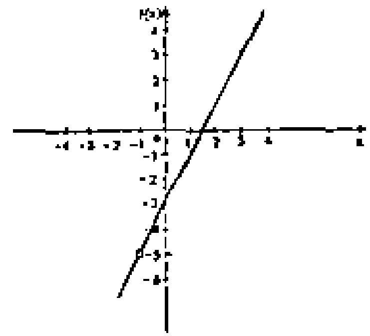


FIG 8

Con una discusión geométrica sobre los rectángulos como la hecha con la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, se concluye para este caso que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Sin embargo, es necesario disponer de un método más sistemático, sin necesidad de recurrir a representaciones gráficas y consideraciones intuitivas.

Por ejemplo se puede factorizar el numerador y la función se escribe como:

$$f(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$

Ahora, si $x \neq -1$, se puede simplificar y entonces:

$$f(x) = 2x - 3, \quad \text{si } x \neq -1$$

47

Esta función tiende a -5 cuando x tiende a -1 porque ahora se puede hacer la sustitución directa. Por tanto se concluye que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Obsérvese que en ningún momento se substituye el valor $x = -1$ en la expresión original.

<u>Ejemplo 14.-</u> Encontrar el límite de la función:

$$f(x) = \frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)}, \quad x \neq 4,\ x > 0$$

cuando x tiende a 4.

Obsérvese que no se puede aplicar la sustitución directa, puesto que $f(4) = \frac{0}{0}$, lo cual carece de sentido. Pudiera procederse en forma gráfica al igual que en el ejemplo 13; sin embargo, es posible hacer una transformación algebráica. En efecto, si racionalizamos el denominador, multiplicando la fracción por $\sqrt{x} + 2$, para $x \neq 4$ se tiene

$$\frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{3(x-4)}$$

y simplificando, se tiene:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{3} \quad \text{si } x \neq 4$$

El límite de esta expresión puede encontrarse por sustitución directa de $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{3} = \frac{\sqrt{4}+2}{3} = \frac{4}{3}$$

<u>Ejemplo 15.-</u> Encontrar el límite de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}, \quad x \neq -1,\ x \geq -2$$

cuando x tiende a -1.

Como la sustitución directa da una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se efectúa una racionalización del numerador.

Así multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2+x} + 1$, resulta:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2+x}-1)(\sqrt{2+x}+1)}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)} = \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)}$$

$$x \neq -1$$

Simplificando queda:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}+1}, \quad \text{para } x \neq -1,\ x \geq -2.$$

Por lo tanto $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{2+x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

<u>Ejemplo 16.-</u> Encontrar:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}, \quad h \neq 0, \text{ donde } f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

La sustitución directa de $h = 0$, da $\frac{f(4) - f(4)}{0} = \frac{0}{0}$

Sin embargo, $f(4) = \frac{1}{25}$

$$f(4+h) = \frac{1}{(4+h+1)^2} = \frac{1}{(5+h)^2}$$

Por tanto:

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{\frac{1}{(5+h)^2} - \frac{1}{25}}{h} = \frac{25 - (5+h)^2}{25h(5+h)^2}$$

$$= \frac{-(10h+h^2)}{25h(5+h)^2} = \frac{-h(10+h)}{25h(5+h)^2} = -\frac{(10+h)}{25(5+h)^2}$$

Así,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(10+h)}{25(5+h)^2} = \frac{-10}{25^2} = \frac{-2}{125}$$

<u>Ejemplo 17.-</u> Encontrar el $\lim_{x \to 3} f(x)$, donde $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, $x \neq 3$.

40

Dibujando la gráfica de ésta función en un entorno a $x = 3$, se ve que crece sin límite cuando x tiende a 3. (Figura 9). De acuerdo con la noción de límite antes dada, tómese un intervalo de valores de x en torno a 3 y véase en que rectángulo están contenidos los valores de la función de la figura; se ve claramente que no existen tales rectángulos cualquiera que sea la pequeñez del intervalo escogido alrededor de $x = 3$. En tal caso, se dice que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) \quad \text{No existe.}$$

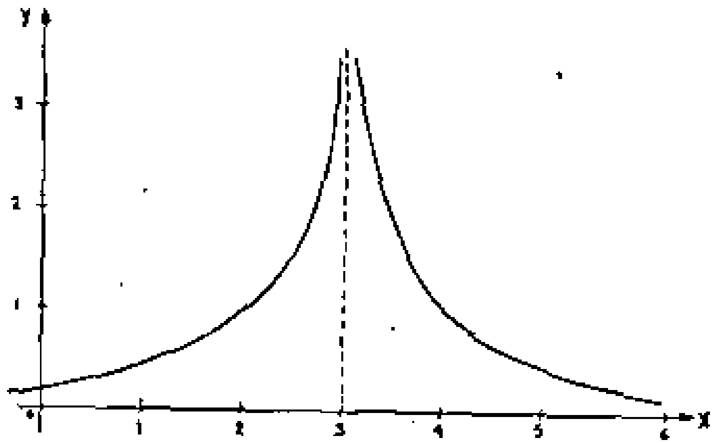


FIG 9

DEFINICION DE LIMITE DE UNA FUNCION.

Anteriormente se presentó la noción de límite de una manera informal, se habló de entornos " pequeños ", de números " cercanos " a otros, de cantidades " acercándose " a cero, etc. Sin embargo estas palabras no matemáticas tienen diferentes significados para cada persona y no pueden ser la base de una estructura matemática, por lo tanto, a continuación se establece la definición formal.-

Definición.- Dados una función f, y los números a y L, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a " a " es L, si para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

La proposición $\lim_{x \to a} f(x) = L$

es una notación abreviada para la definición anterior.

En otras palabras la anterior definición establece que los valores de la función $f(x)$ se aproximan a un límite L a medida que x se aproxima a un número a, si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L, se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomando x suficientemente cercana a " a " pero no igual a " a "

Es importante darse cuenta que en esta definición nada se menciona acerca del valor de la función cuando $x = a$. Esto es, no es necesario que la función esté definida para $x = a$ para que el $\lim_{x \to a} f(x)$ exista.

Ahora se entrará en detalles acerca de ésta definición y paralelamente se ilustrará la representación geométrica del concepto.

INTERPRETACION GEOMETRICA.

- Recuérdese que $|x - a| < \delta$, es equivalente a la doble desigualdad:

$$a - \delta < x < a + \delta$$

- Esta doble desigualdad expresa que x debe estar contenido en un entorno $\phi'(a, \delta)$.

- La parte de la desigualdad que expresa $0 < |x - a|$ significa simplemente que x no puede tomar el valor " a " es decir, se trata de un entorno reducido del punto " a " ya que se excluye el valor " a " mismo.

- La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ que es equivalente a $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, expresa que la función f está por encima de la recta $y = L - \varepsilon$

y por debajo de la recta $y = L + \varepsilon$ (figura 10).

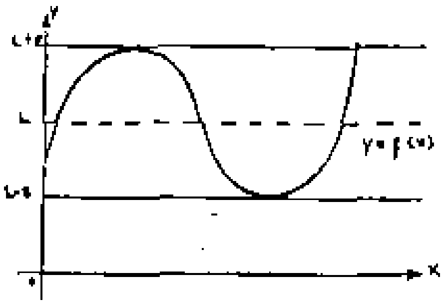


FIG 10

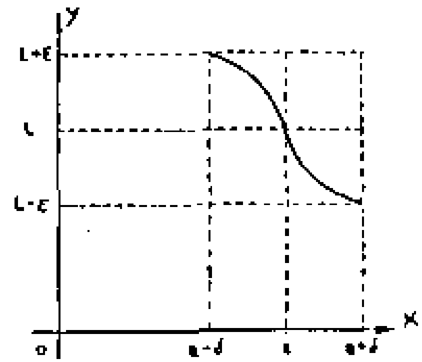


FIG 11

- La definición misma puede ser interpretada como un criterio, dado un número positivo arbitrario, llámesele ε, el criterio consiste en encontrar un número δ tal que $f(x)$ se encuentre entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$, siempre que x esté en el entorno reducido de a, $a - \delta < x < a + \delta$; $x \neq a$. Si se puede encontrar tal δ para todo número positivo ε, entonces se dice que $f(x)$ tiene el límite L cuando x tiende a " a ".

Obsérvese que el valor de δ puede ser diferente para diferentes valores de épsilon; además, el criterio debe ser aplicable a todo $\delta > 0$.

La interpretación geométrica expresa, que dado ε, debe ser posible encontrar un δ tal que la función f se encuentre en el rectángulo limitado por las rectas $x = a - \delta$, $x = a + \delta$, $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$; (Figura 11). Nada se dice acerca del valor de f cuando x es a.

Es conveniente adquirir cierta práctica para encontrar el δ que corresponde a un ε dado, esto puede empezarse efectivamente partiendo de algunos casos muy simples. Considérese un caso sencillo: sea $f(x) = 3x + 2$ y tómese a $a = 5$.

Obténgase el límite de la función en $a = 5$; para ello utilícese un entorno del punto a, sea este $\not\!\!\bigcirc(5, 1)$, o sea, $4 < x < 6$.

Ahora se formará una tabla con las siguientes columnas:

1.- Valor de x en estudio. . . (a)
2.- Valor contenido en el entorno reducido de "a". . . (x)
3.- Valor absoluto de la diferencia $x - a$
4.- Valor de la función en x. . . $f(x)$

Al observar las cuatro primeras columnas de la tabla, se ve que a medida que el intervalo $|x - a|$ tiende a cero, la función tiende al valor 13, por esto se dice que:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 13$$

Aumentándole ahora a la tabla las columas 5 y 6 o sea:

1	2	3	4	5	6
a	x	$\lvert x - a \rvert$	$f(x)$	L	$\lvert f(x) - L \rvert$
5	4.5	0.5	11.5	13	1.5
5	4.9	0.1	12.7	13	0.3
5	4.95	0.05	12.85	13	0.15
5	4.99	0.01	12.97	13	0.03
5	4.995	0.005	12.99	13	0.01
5	4.999	0.001	12.997	13	0.003
	→	→	→		→
	5	0	13		0

TABLA No. I.

5.- El valor del límite de la función. . . (L)

6.- El valor absoluto de la diferencia $f(x) - L$.

Se observa que para cada valor $\lvert x - a \rvert$ de la tabla, existe un valor de $\lvert f(x) - L \rvert$ y ambos tienden a cero.

Lo que se quiere es hacer ver que dado un ε, se puede encontrar un δ tal que:

$$\lvert 3x - 2 - 13 \rvert < \varepsilon \text{ cuando } \lvert x - 5 \rvert < \delta$$

Como $\lvert 3x - 15 \rvert = \lvert 3(x - 5) \rvert$, si se da un ε, se toma simplemente $\delta = \varepsilon/3$; entonces, si $\lvert x - 5 \rvert < \delta = \varepsilon/3$, se encuentra que $3 \lvert x - 5 \rvert < \varepsilon$, que equivale al resultado buscado, $\lvert 3x - 15 \rvert < \varepsilon$

Ejemplo 18.- Trazar una gráfica de $f(x) = \frac{3}{x + 2}$ donde $x \neq -2$, y encontrar un δ tal que $\lvert f(x) - 1/3 \rvert < 0.01$ si $\lvert x - 7 \rvert < \delta$

SOLUCIÓN:

La gráfica está ilustrada en la figura 12. En la definición se tendrá $L = \frac{1}{3}$ y $a = 7$, se debe encontrar un intervalo de x en torno de $a = 7$, tal que la gráfica se encuentre en el rectángulo adecuado. La función decrece monótonamente a medida que se avanza hacia la derecha, y por tanto, al levantar rectas verticales en los puntos en que las rectas $y = 0.34$, $y = 0.32$, cortan a la curva, se obtiene el mayor intervalo posible en el eje x. La intersección de dichas rectas con la curva representativa de la función, se encuentra resolviendo:

$$\frac{3}{x_1 + 2} = L + \varepsilon = 0.343333 \qquad \text{. . . . (A)}$$

$$\frac{3}{x_2 + 2} = L - \varepsilon = 0.323333 \qquad \text{. . . . (B)}$$

y despejando x.

De (A): $3 = 0.343333 (x_1 + 2)$

$$x_1 = 8.737864 + 2 \longrightarrow x_1 = 6.737864$$

De (B): $3 = 0.323333\,(x_2 + 2)$

$$x_2 = 9.278351 - 2 \longrightarrow x_2 = 7.278351$$

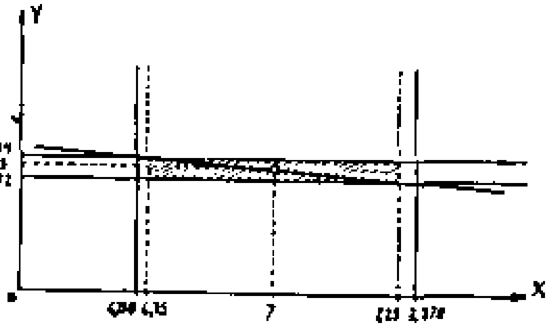


FIG 12

En la figura 13, se muestran estos valores a una escala muy amplificada, puesto que la función decrece monótonamente hacia la derecha, un valor adecuado para δ es 0.25, ya que si la función se encuentra en un rectángulo evidentemente también se encuentra en un rectángulo similar de la misma altura, pero más angosta. En otras palabras, se cumple:

$$\left| f(x) - 1/3 \right| < 0.01 \text{ cuando } 0 < \left| x - 7 \right| < 0.25$$

<u>Ejemplo 15.-</u> Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$, $a = 2$ y $\epsilon = 0.01$; $x \neq 2$.-

Determine un número $\delta > 0$, tal que se cumpla la definición de límite.- Dibuje una gráfica aproximada.

SOLUCION:

La función no está definida para $x = 2$, pero para $x \neq 2$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)} = \frac{2x - 4}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)}$$

$$= \frac{2(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)}$$

$$f(x)\Big/_{x \neq 2} = \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} = \frac{1}{2} = L$$

La gráfica de esta función está dibujada en la figura 13 en donde también se representan las rectas

$$y_1 = L + \epsilon = 0.51 \quad y \quad y_2 = L - \epsilon = 0.49$$

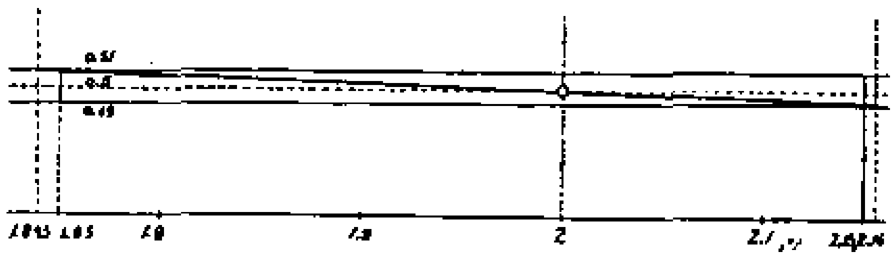


FIG 13

$$\frac{2}{\sqrt{2x_1} + 2} = L + \epsilon = 0.51 \qquad \dots\dots (A)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x_2} + 2} = L - \epsilon = 0.49 \qquad \dots\dots (B)$$

Despejando x de las ecuaciones (A) y (B):

De (A) $\sqrt{2x_1} + 2 = \dfrac{2}{0.51}$; $\sqrt{2x_1} = 1.92157$ por lo tanto $2x_1 = 3.69243$

$$x_1 = 1.84621$$

De (b) $\sqrt{2x_2} + 2 = \frac{2}{0.49}$; $\sqrt{2x_2} = 2.08163$ por lo tanto $2x_2 = 4.33319$

$x_2 = 2.16660$

Puesto que la función decrece monótonamente hacia la derecha, un valor adecuado para δ es $\delta = 0.15$, ya que $1.846 < 1.85$ y $2.166 > 2.15$

Ejemplo 20.- Demostrar por medio de la definición que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

SOLUCION:

Se tiene que $L = \frac{1}{2}$ y $a = 1$. Debe demostrarse que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \qquad \text{cuando } 0 < |x - 1| < \delta$$

Para formarse una idea del aspecto de la función, se traza la gráfica (figura 14), y de esta se ve que la función es monótonamente creciente. Esto se verifica escribiendo la identidad.

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Y observando que al crecer x, $1/(x+1)$ decrece, por tanto,

$$1 - \left[1/(x+1) \right] \text{crece.}$$

Supóngase en primer lugar que $\varepsilon < 1/2$, entonces, $L + \varepsilon < 1$ y $L - \varepsilon > 0$ puesto que $L = \frac{1}{2}$. En seguida se determinan los puntos en que las rectas $y = \frac{1}{2} - \varepsilon$ y $y = \frac{1}{2} + \varepsilon$, cortan a la curva, resolviendo las ecuaciones (A) y (B).

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} - \varepsilon \qquad \ldots\ldots (A)$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} + \varepsilon \qquad \ldots\ldots (B)$$

La ecuación (A) da: $x = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(x + 1)$, o sea:

$$\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) x = \frac{1}{2} - \varepsilon \quad \text{y}$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} \equiv x_1 ;$$

Similarmente la ecuación (B) da:

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{\frac{1}{2} - \varepsilon} \equiv x_2$$

Tomando δ igual a la menor distancia entre 1 y x_1 y entre 1 y x_2. Se puede verificar que $1 - x_1$ es menor que $x_2 - 1$, por tanto:

$$\delta = 1 - x_1 = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{4\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$$

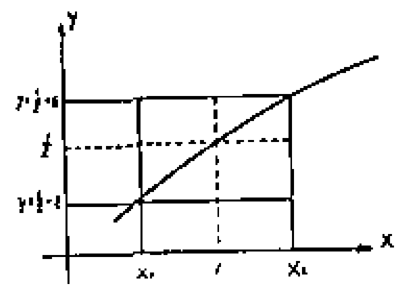


FIG 14

Observación. Si bien la definición básica expresa que debe encontrarse un δ para todo ε, en realidad se observa que una vez encontrado un δ para un determinado ε, se puede emplear el mismo δ para todos los ε mayores. Geométricamente esto significa que una vez que se sabe que la función se encuentra en un rectángulo, evidentemente está contenida en todo rectángulo del mismo ancho pero de mayor altura.

II.3. LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE Y LA FUNCION IDENTIDAD.

LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE.

Para determinar el límite de esta función recuérdese que la función constante es aquella que no varía, o sea que conserva su mismo valor para todo valor de la variable independiente, es decir:

$$f = \{ (x, f(x)) \mid x \in Df;\ f(x) = K \} \qquad \ldots\ldots (A)$$

cuya gráfica se muestra en la siguiente figura.

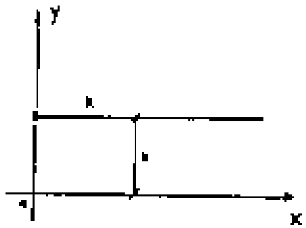


FIG 15

De esta misma gráfica resulta obvio establecer la siguiente proposición:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} K = K \qquad \ldots\ldots (B)$$

Para demostrar la proposición (B) se tomará como base a la definición de límite, establecida en el tema anterior II.2.; esto es:

Basta que $\exists$ un $\delta > 0$, tal que para un $\varepsilon > 0$ dado, se cumpla:

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon \qquad \text{siempre que;} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

como es fácil ver, sea cual fuere el número $\delta > 0$ que se escoja, siempre sucederá que $|f(x) - k|$ es menor que cualquier $\varepsilon > 0$ dado, por pequeño que este sea.

Teorema II. 1.- "Límite de la Función Constante".

Hipótesis: $f(x)$ es una función constante.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a un número a cualquiera, es igual a la constante.

Esto es: Si $f(x) = k$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$

LIMITE DE LA FUNCION IDENTIDAD.

Con un proceso análogo al punto anterior, recuérdese que la función identidad es aquella cuyo valor es exactamente el mismo que el que adquiere la variable independiente, es decir:

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in Df,\ f(x) = x\}$$

La gráfica se muestra a continuación, en la figura 16.

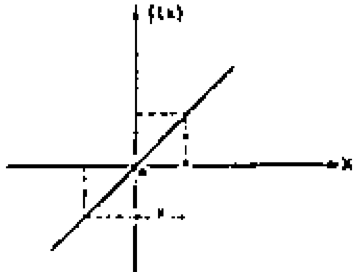


FIG 16

de la gráfica se puede observar que se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a \qquad \ldots (A)$$

Se comprobará la veracidad de la igualdad (A) recurriendo a la definición de límite . . . ; así debemos encontrar un número $\delta > 0$ para cada $\epsilon > 0$ tal que:

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

dado que $f(x) = x$ se tiene $|x - a| < \epsilon = \delta$

Por lo que para cualquier $\epsilon > 0$ dado siempre $\exists$ un $\delta = \epsilon > 0$ que cumple las condiciones establecidas de tal manera que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$

Teorema II.2. " Límite de la función identidad "

Hipótesis: $f(x)$ es la función identidad.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a cualquier número a es igual al número a.

Esto es: Si $f(x) = x$; entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$

II.4. TEOREMAS SOBRE LIMITES.

En el inciso II.2. del presente capítulo se estableció el concepto de límite de una función y se calcularon numéricamente algunos ejemplos de límites utilizando diversos artificios y manipulaciones algebráicas. El estudiante escéptico se dará cuenta de que cada una de ellas necesita justificarse aún cuando muchas de ellas parecen obvias. Por este motivo, se expondrán a continuación los teoremas sobre límites que sirven de base para el cálculo de límites de funciones. La correspondiente demostración de estos teoremas se presenta en un anexo al presente capítulo.

Teorema II.3.- " Unicidad de los límites. "

Hipótesis: Una función $f(x)$ está definida en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: Esta función no puede tener dos límites distintos, cuando x tiende al valor a.

Teorema II.4.-

Hipótesis: Una función $f(x)$ es positiva o nula en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, no puede ser negativo.

Teorema II.5.-

Hipótesis: Una función $f(x)$ es negativa o nula en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, no puede ser positivo.

Teorema II.6.- " Límite de una suma ".

Hipótesis: $f(x)$ es la suma de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a.

Tesis: $f(x)$ tiene límite cuando x tiende al valor a y dicho límite es igual a la suma de los límites cuando x tiende al número a, de las funciones sumadas.

Esto es: Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, y si

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1, \lim_{x \to a} f_2(x) = L_2, \ldots, \text{ y } \lim_{x \to n} f_n(x) = Ln$$

Entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \right] =$

$$= L_1 + L_2 + \ldots + Ln$$

Teorema II.7.- "Límite de un producto."

Hipótesis: Una función $f(x)$ es el producto de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al valor a.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a existe y es igual al producto de los límites en este punto de las funciones-que se multiplican.

Esto es: si $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$

Y si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1,\ \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2,\ \ldots\ \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$

entonces:
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) \right] = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \ldots \cdot L_n$$

Corolario.- El límite en un punto del producto de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por el límite de la función en ese punto.

Esto es: $\lim\limits_{x \to a} \left[k\, f(x) \right] = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Teorema II.8.- "Límite de un cociente"

Hipótesis: $f(x)$ es el cociente de dos funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a y el límite del denominador no es cero.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a, existe, y es igual al cociente de los límites de dichas funciones en el punto indicado.

Esto es: si $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$; $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$ y

$\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2 \neq 0$ entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2} \ ; \ L_2 \neq 0$$

Teorema II.9.-

Hipótesis: Dos funciones de x, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen los mismos valores para valores iguales de x en un entorno del punto $x = a$ y $f_2(x)$ tiene límite cuando x tiende al número a.

Tesis: La función $f_1(x)$ tiene límite cuando x tiende al número a y este límite es igual al límite de la función $f_2(x)$ en dicho punto.

Esto es: Si $f(x) = f_2(x)\ \forall x \in a - \delta < x < a + \delta$ y si

$\lim f_2(x) = L$, entonces existe: $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L$

Teorema II.10.-

Hipótesis: Para un entorno del punto a se tiene que $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$, además, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen límite cuando x tiende al valor a y sus límites son iguales.

Tesis: El límite cuando x tiende al número a de la función $f(x)$, existe y es igual al límite de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el punto considerado.

Esto es: Si $f_1(x) < f(x) < f_2(x)\ \forall x \in 0 < |x - a| < \delta$

Y si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L$, entonces existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Teorema II.11.-

Hipótesis: n es un número entero positivo y el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor $x = a$ es positivo. Si n es positivo, o bien dicho límite es negativo o cero si n es impar positivo.

Tesis: El límite de la raíz enésima de $f(x)$ cuando x tiende al valor $x = a$ es igual a la raíz enésima del límite de $f(x)$ en ese punto.

O sea: Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de los teoremas anteriores. Para indicar el teorema del límite que se está usando, se hará anotando la abreviatura " T ", seguida por el número del teorema.

Ejemplo 21.- Encontrar el valor de: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)$

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 1 \quad \ldots\ldots (T.\ II.\ 6)$$

$$= 4 + 2 \times 2 - 1 \quad \ldots\ldots (T.\ II.\ 1)\ (T.\ II.\ 7)$$

$$= 7 \quad \ldots\ldots (T.\ II.\ 2)$$

Ejemplo 22.- Encontrar el $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$

$$\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-9}{2x^2+7x+3}} = \sqrt{\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{2x^2+7x+3}} \quad \ldots\ldots (T.\ II.\ 11)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to -3}(2x^2+7x+3)}} \quad \ldots\ldots (T.\ II.\ 8)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to -3} x^2 - \lim\limits_{x\to -3} 9}{\lim\limits_{x\to -3} 2x^2 + \lim\limits_{x\to -3} 7x + \lim\limits_{x\to -3} 3}} \quad \ldots\ldots (T.\ II.\ 6)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to -3} x \cdot \lim\limits_{x\to -3} x - \lim\limits_{x\to -3} 9}{2\lim\limits_{x\to -3} x \cdot \lim\limits_{x\to -3} x + 7\lim\limits_{x\to -3} x + \lim\limits_{x\to -3} 3}} \quad \ldots\ldots (T.\ II.\ 7)$$

$$= \sqrt{\frac{(-3)(-3)-9}{2(-3)(-3)+7(-3)+3}} \quad \ldots\ldots (T.\ II.\ 2)\ (T.\ II.\ 1)$$

$$= \sqrt{\frac{9-9}{18-21+3}}$$

$$= \sqrt{\frac{0}{0}} = \frac{0}{0}$$

Lo obtenido representa una indeterminación, lo cual carece de sentido; sin embargo, esto no significa que el límite buscado no existe. La función para la cual se trata de encontrar su límite cuando $x \to -3$, simplemente no está definida para ese valor de x, por lo tanto para $x \neq -3$ se puede utilizar la siguiente trasformación algebraica, apoyándose en el teorema II.5.

$$\frac{x^2-9}{2x^2+7x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(2x+1)(x+3)} = \frac{x-3}{2x+1}$$

entonces:

$$\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-9}{2x^2+7x+3}} = \lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x-3}{2x+1}} = \sqrt{\frac{-3-3}{-6+1}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Ejemplo 23.- Encontrar el valor de $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

En este problema, al igual que en el ejemplo anterior no es posible aplicar el teorema II.8 al cociente ya que el límite del denominador se anula cuando $x \to -2$. Sin embargo, factorizando el numerador se tiene:

$$\frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}, \text{ así:} \quad (T.\ II.\ 9)$$

Este cociente es (x^2+2x+4) si $x \neq -2$ (ya que si $x \neq -2$ se puede dividir numerador y denominador entre $(x+2)$. Entonces la solución a este problema se toma la siguiente forma:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x^2-2x+4), \text{ siendo } x \neq -2$$

$$= \lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 2x + \lim_{x\to -2} 4 \quad (T.\ II.\ 6)$$

$$= \lim_{x\to -2} x \cdot \lim_{x\to -2} x - 2\lim_{x\to -2} x + 4 \quad (T.\ II.\ 7)\ (T.\ II.\ 1)$$

$$= (-2)(-2) - 2(-2) + 4 \quad (T.\ II.\ 2)$$

$$= 12$$

II.5 LIMITES LATERALES.

Al estudiarse el concepto de límite de una función $\lim_{x \to a} f(x)$, se hizo especial mención de que interesa analizar los valores que puede tomar la variable independiente x en un intervalo abierto que contiene el valor " a " pero no en " a " mismo, esto es, en valores de x próximos a " a " que sean mayores que " a " o menores que " a " (es decir en un entorno reducido de " a "). Sin embargo, supóngase por ejemplo, que se tiene la función:

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x - 3}}$$

Ya que f (x) no está definida para x < 3, la función no se define en cualquier intervalo abierto que contenga a 3. De aquí, se puede considerar:

$$\lim_{x \to 3} \frac{5}{\sqrt{x - 3}} \quad \text{no existe .}$$

Sin embargo, si x está restringida a valores mayores que 3, el valor de $\sqrt{x - 3}$ se puede hacer tan cercano a cero como se quiera tomando x suficientemente cercano a 3, pero mayor que 3.

En un caso como este se hace que x se aproxime a 3 por la derecha, y entonces se considera El Límite Lateral por la Derecha, el cual se define formalmente a continuación.

LIMITE LATERAL POR LA DERECHA.

Considerénse una cierta función y = f (x) donde x está definida en el intervalo abierto (a, a + h), donde h ∈ ℜ y h > 0, según se observa en la Figura 17.

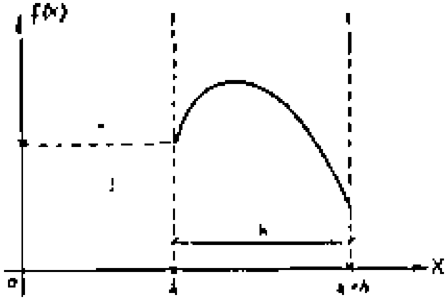


FIG 17

Se dice que el límite de f (x) cuando x se aproxima a " a " por la derecha es L_1, y se denota:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1 \qquad \ldots\ldots (A)$$

Si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que } 0 < x - a < \delta \qquad \ldots\ldots (B)$$

Nótese que en (B) no hay barras de valor absoluto para x − a, ya que si x > a, x − a > 0

Se sigue de la expresión (A) para el ejemplo analizado, que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{5}{\sqrt{x - 3}} \to \infty$$

Si al considerar el límite de la función, la variable independiente x está restringida a valores menores que un número " a ", decimos que x se aproxima a " a " por la izquierda, entonces el límite se llama límite lateral por la izquierda.

LIMITE LATERAL POR LA IZQUIERDA.

Considerénse ahora la misma función y = f (x), pero " x " en cambio definida en el intervalo (a − h, a), donde h ∈ ℜ y h > 0, según se muestra en la Figura 18.

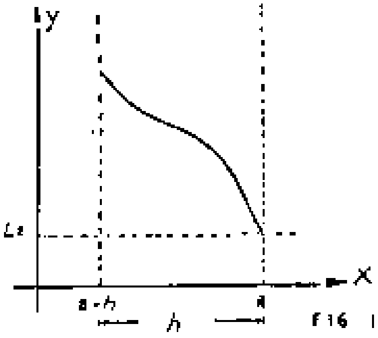


FIG 18

Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a "a" por la izquierda es L_2, y se denota:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2 \qquad (c)$$

Si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < a - x < \delta \qquad (D)$$

Se puede ahora llamar al $\lim_{x \to a} f(x)$, Límite Bilateral o no dirigida, para distinguirlo de los límites laterales.

<u>Teorema II.12.-</u>

Hipótesis: $f(x)$ tiene límite cuando x tiende al valor a y este límite es el número L.

Tesis: Los límites cuando x tiende al número a por la izquierda y por la derecha, existen y ambos son iguales al número L.

La interpretación geométrica de lo anterior se muestra a continuación- donde puede observarse que x puede tender al número "a" bien sea por la derecha o bien por la izquierda de "a", teniéndose para ambos casos la posibilidad de que los límites sean diferentes ($L_1 \neq L_2$). Ver figura 19.

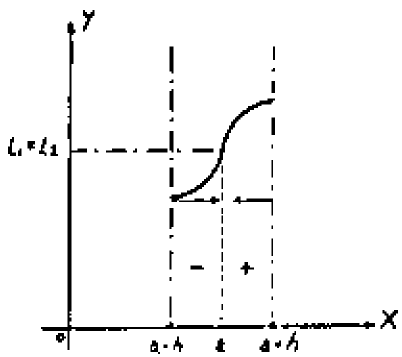


FIG 19(a)

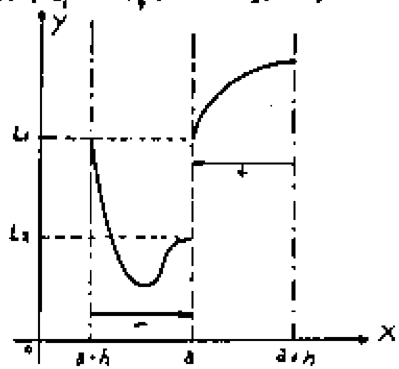


FIG 19(b)

En la figura 19(a), $L_1 = L_2$: $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 = L_2$, en cambio la figura 19(b) $L_1 \neq L_2$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ no existe.}$$

<u>Ejemplo 24.-</u> Sea h una función definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 10 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Trazar la gráfica de h.

b) Encontrar el $\lim_{x \to 3} h(x)$, si existe.

SOLUCION:

a) Un dibujo de la gráfica se muestra a continuación en la figura 20.

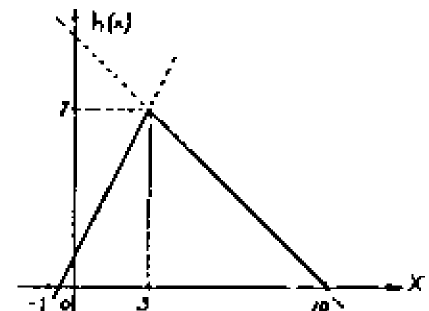


FIG 20

b) $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x + 1) = 7 = L_2$

$\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} (10 - x) = 7 = L_1$

Según el Teorema II.12., como $L_1 = L_2$, $\lim_{x \to 3} h(x)$ existe y es igual a 7

Ejemplo 25.- Sea g una función definida por:

$$g(t) = \begin{cases} 4 + t^2 & \text{si } t < -2 \\ 5 & \text{si } t = -2 \\ 12 - t^2 & \text{si } t > -2 \end{cases}$$

Trazar la gráfica de g, y encontrar $\lim\limits_{t \to -2} g(t)$

SOLUCION:

La gráfica de la función g es la que se muestra abajo en la figura 21

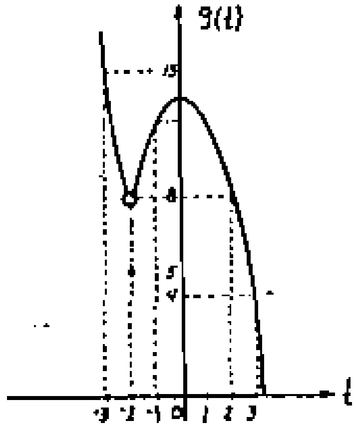


FIG 21

$$\lim_{t \to -2^+} g_+(t) = \lim_{t \to -2^+} (12 - t^2) = 8 = L_1$$

$$\lim_{t \to -2^-} g_-(t) = \lim_{t \to -2^-} (4 + t^2) = 8 = L_2$$

Por lo tanto por el teorema II.12, $\lim\limits_{x \to -2} g(t)$ existe y es igual a 8.

Nótese que $g(-2) = 5$, lo cual no afecta al $\lim\limits_{t \to -2} g(t)$

Ejemplo 26.- Considérese la siguiente función f, definida por:

$$f(r) = \begin{cases} r + 2 \quad , & -3 < r \leq 1 \\ \frac{1}{2} r^2 - 3 & 1 < r \leq 4 \end{cases}$$

Investigar si existe $\lim\limits_{r \to 1} f(r)$ y trazar la gráfica de $f(r)$

SOLUCION:

$$\lim_{r \to 1^+} f(r) = \lim_{r \to 1^+} \left(\frac{1}{2} r^2 - 3 \right) = \frac{-5}{2} = L_1$$

$$\lim_{r \to 1^-} f(r) = \lim_{r \to 1^-} (r + 2) = 3 = L_2$$

Por lo tanto como $L_1 \neq L_2$, $\lim\limits_{r \to 1} f(r)$ no existe. Ver figura 22.

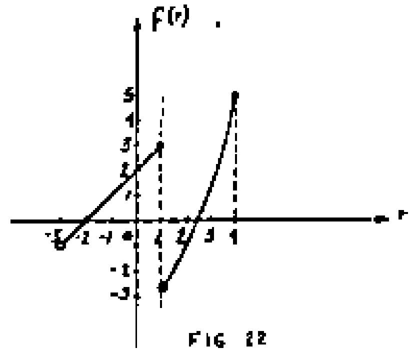


FIG 22

__NOTA:__ Los círculos negros pertenecen a la gráfica, __no__ así los blancos.

__Ejemplo 27.-__ Para la siguiente función dada por tres reglas de correspondencia, determinar los límites de dicha función para los puntos en que $x = -2$ y $x = 5$. Hacer un dibujo de la gráfica de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{para } -4 \leq x \leq -2 \\ -3 & \text{para } -2 < x \leq 5 \\ 2x - 13 & \text{para } 5 < x < 10 \end{cases}$$

SOLUCION:

Se puede iniciar con el trazo de la gráfica de $f(x)$ para una mejor visualización del problema, tal y como se ilustra en la figura 23.

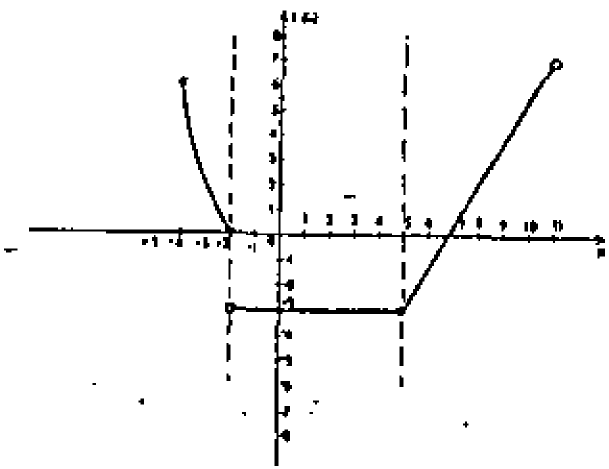


Fig 23

a) Viendo si se cumple el teorema II.12. si $a = -2$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (-3) = -3 = L_1$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 + 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0 = L_2$$

Por lo tanto como $L_1 \neq L_2$, $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe.

b) Para $a = 5$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (2x - 13) = -3 = L_1$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (-3) = -3 = L_2$$

por lo tanto como $L_1 = L_2 = -3$, el límite existe y vale:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = -3$$

II.6. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO. DISCONTINUIDAD REMOVIBLE. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.

En el inciso II.2. se analizó el significado de límite de una función en un punto y se escribió su definición con la expresión (1) que se repite a continuación:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \ldots\ldots (A)$$

Recordando también que no es necesario tomar en cuenta el valor de la función f, cuando $x = a$; de hecho, para muchas expresiones la función no está siquiera definida en $x = a$.

En esa mismo inciso, en el ejemplo 13, se consideró la función f definida por la ecuación:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$

Así mismo se observó que tal función está definida para todos los valores de x, excepto $x = -1$, para el cual tanto el numerador como el denominador de la función se anulan. Un dibujo de la gráfica de todos los puntos de la recta $y = 2x - 3$, excepto el $(-1, -5)$ se muestra en la figura 8.

En ella, precisamente, hay una notable " interrupción " en el punto $(-1, -5)$ y se dirá entonces que la función <u>f es discontinua</u> para cuando-

$x = -1$.

En cambio si se define $f(-1) = 5$, la función queda ahora definida para todos los valores de x, pero aún hay un " salto " en la gráfica, y la función sigue siendo discontinua en ese mismo valor, según se muestra en la figura 24.

Si embargo, si se define que $f(-1) = -5$, entonces se dice que la función f es continua para todos los valores de x.

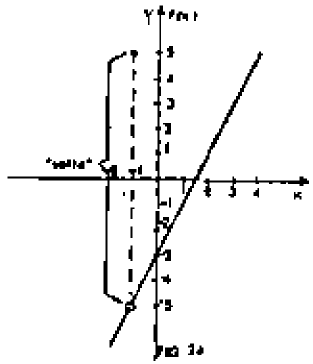


Fig 24

Definición: Se dice que la función f es continua en el valor $a \in Df$, siempre y cuando se cumpla lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (B)$$

El que se cumpla la definición anterior implica que se cumpla las siguientes condiciones:

1) Que $f(a)$ esté definida.

2) Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$

3) Que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Basta con que una de las tres expresiones anteriores se cambie para que la condición (B) no se cumpla, por lo tanto, la función f no sea continua en el valor a. La condición (B) es necesaria y suficiente para que la función $y = f(x)$ sea continua en a.

Ejemplo 28.- Sea f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica e investigar si es continua en el punto donde $x = -2$

SOLUCION:

En la figura 25, se muestra un dibujo de la gráfica de la función, en la cual hay un salto en el punto donde $x = -2$

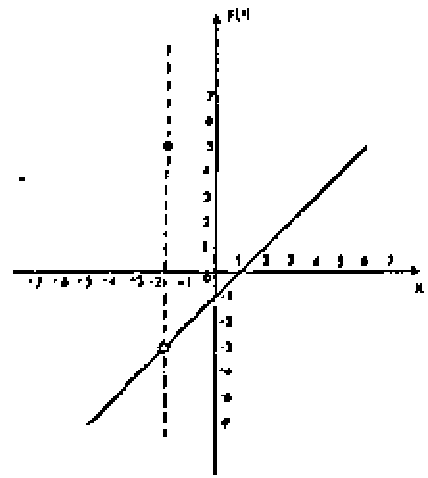


fig 25

Investigando paso a paso la condición de continuidad para $x = -2$

$f(-2) = 5$ $\therefore$ por lo tanto se satisface la primera condición.

$\lim_{x \to -2} f(x) = -3$ $\therefore$ por lo tanto se satisface la segunda condición.

Pero, como $f(-2) \neq \lim_{x \to -2} f(x)$, la tercera condición no se satisface.

Así, se concluye que f es discontinua cuando $x = -2$

Ejemplo 29.- Considérese la siguiente función:

$$g(x) = \frac{x+3}{x^2+x-6}$$

Investíguese si existe algún punto de discontinuidad en dicha función.

SOLUCION:

En la figura 26 se muestra un dibujo de la gráfica de la función g.

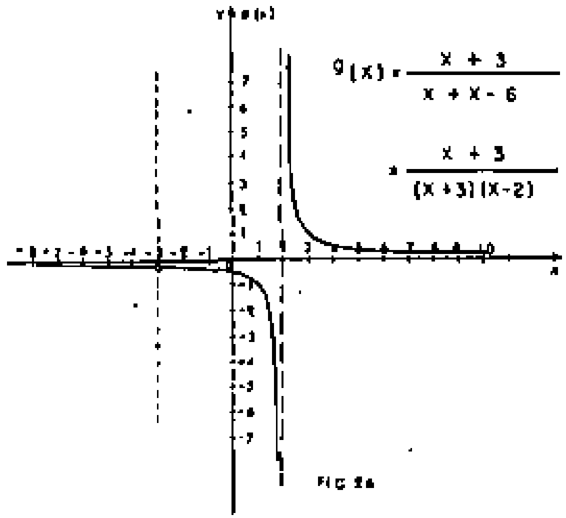


FIG 26

Analizando la función g, se observa que ésta no se encuentra definida para $x = -3$, por tanto,

$$g(x) = \frac{1}{x-2} \quad , \text{ para } x \neq -3$$

Esto se ve claramente como una interrupción en la gráfica de g, cuando $x = -3$, y así, al no cumplirse la condición (I), se concluye que tal función es discontinua para cuando $x = -3$.

Sin embargo, existe otro punto de discontinuidad, ya que cuando $x = 2$, el denominador de la función g, se anula no quedando definida para ese valor. Nuevamente se concluye que dicha función no es continua al no cumplirse la condición (0) ahora para $x = 2$. Este último caso, también se puede verificar observando el comportamiento de $g(x)$ en la figura 26.

Ejemplo 30.- Sea h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{x}{2} - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica, e investigar si se cumple la condición de continuidad, en el punto donde $x = 2$.

SOLUCION:

En la figura 27, se encuentra representada gráficamente la función h, se observa que para $x = 2$, hay una interrupción en dicha gráfica.

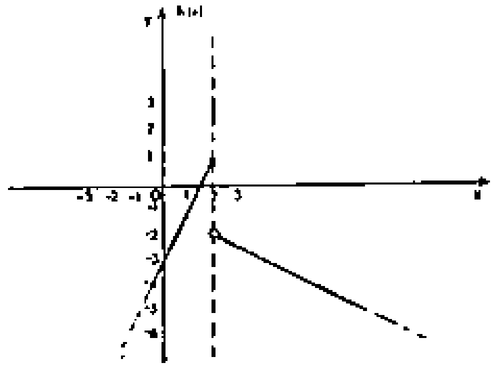


FIG 27

Ahora investigando paso a paso la condición de continuidad para $x = 2$, se tiene:

$f(2) = 2(2) - 3 = 1$, por lo tanto satisface la primera condición.

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 3) = 4 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\frac{x}{2} - 1 \right) = -1 - 1 = -2$$

ya que $\lim_{x \to 2^-} h(x) \neq \lim_{x \to 2^+} h(x)$, se concluye que $\lim_{x \to 2} h(x)$ no existe; entonces la segunda condición no se satisface y h es discontinua para $x = 2$.

Ejemplo 31.- Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x \leq 4 \\ kx - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Encontrar el valor de la constante k que hace que la función sea continua para $x = 4$.

SOLUCION:

Para que $f(x)$ sea continua para $x = 4$, debe cumplirse la condición de continuidad.

$f(4) = 3(4) + 7 = 19$ por lo tanto se cumple la primera condición.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (3x + 7) = 12 + 7 = 19$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (kx - 1) = 4k - 1$$

Para que se cumpla la segunda condición, debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x), \text{ o sea}$$

$4k - 1 = 19$ por lo tanto $k = 5$, así $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$ y $f(x)$ es continua en $x = 4$.

DISCONTINUIDAD REMOVIBLE:

En los ejemplos anteriores, se han analizado funciones que presentan discontinuidad para algún punto.

Si se analiza detenidamente para cada caso, la causa que origina dicha discontinuidad, se podrá observar que cuando la discontinuidad se origina porque $f(a) \nexists$, siendo 'a' el punto de discontinuidad, existiendo $\lim_{x \to a} f(x)$; o bien existiendo $f(a)$ y existiendo $\lim_{x \to a} f(x)$ estos no son iguales; o sea: $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. En esta situación la discontinuidad se menciona como "Discontinuidad Removible", pues basta con definir $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ para que la discontinuidad se elimine.

Pero se ha de recalcar que en esta forma se estaría definiendo, de manera absoluta; una "nueva función"; siendo la "nueva" función idéntica a la anterior, excepto en el punto $x = a$.

En el caso que la discontinuidad sea originada por la no existencia del $\lim_{x \to a} f(x)$; entonces esta discontinuidad es irremovible y no se podrá eliminar de ninguna manera.

Ejemplo 32.- Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

estudiado en el ejemplo 28. Indicar si la discontinuidad del punto en que $x = -2$ es removible y en caso afirmativo removerla.

SOLUCION:

En el ejemplo 28, se puede observar (figura 25) que la función $f(x)$ presenta " un salto " para $x = -2$. Así mismo se puede ver que la función cumple para $x = -2$, las dos primeras partes de la condición de continuidad, es decir:

1.- $f(x)$ está definida para $x = -2$ y vale $f(-2) = 5$

2.- $\lim\limits_{x \to -2}$ existe y vale: $L = -3$

Pero la tercera parte, no se cumple, puesto que:

3.- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$

$$-3 \neq 5$$

La discontinuidad si es removible, puesto que basta con definir $f(-2) = -3$, y también se cumplirá la tercera parte, quedando la función continua para $x = -2$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ -3 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Ejemplo 33.- Sea la función:

$$g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$$

estudiada en el ejemplo 29. Indicar si la discontinuidad del punto en que $x = 2$ es removible y en caso de serlo, removerla.

SOLUCION:

La función $g(x)$ no cumple con la primera parte, tal como se vió en el ejemplo 29.

Analizando la función para la segunda parte:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{x^2 + x - 6} \quad \text{no existe.}$$

Obviamente, la función tiene una discontinuidad irremovible, puesto que no es posible definir la función en $x = 2$ y que sea igual al valor del límite, puesto que el límite no existe.

TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.

Las funciones continuas tienen un buen número de propiedades importantes, algunas de las cuales son consecuencia de las propiedades de los límites. Aplicando la definición de discontinuidad y los teoremas de límites antes vistos, se tienen los siguientes teoremas sobre funciones continuas en un punto.

Teorema II.13.-

Hipótesis: f y g son dos funciones continuas en $x = a$.

Tesis: (1) $f + g$ es continua en $x = a$

(2) $f - g$ es continua en $x = a$

(3) $f \cdot g$ es continua en $x = a$

(4) $f \div g$ es continua en $x = a$, siempre que $g(a) \neq 0$.

Se demostrará la parte (1) de este teorema, para ilustrar el tipo de demostración requerida para cada parte, ya que f y g son continuas en a, de la definición de continuidad, se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (A)$$

y

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \qquad (B)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (A) y (B), y del teorema II.8 se tiene:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = f(a) + g(a) \qquad (C)$$

La ecuación (C) es la condición para que f + g sea continua en x = a, la cual proporciona la demostración del teorema II.13.1.

<u>Teorema II.14.</u> Una función polinomial es continua en todo punto.

Para demostrar este teorema, considérese la función polinomial f, definida por:

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n,\quad b_0 \neq 0$$

donde n es un entero no negativo y $b_0, b_1, \dots, b_n$, son números reales. Con aplicaciones sucesivas de los teoremas de límites, se puede demostrar que si a es cualquier número, entonces:

$\lim_{x \to a} f(x) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1} + b_2 a^{n-2} + \dots + b_{n-1} a + b_n$, de donde se sigue que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

<u>Teorema II.15.</u>

Hipótesis: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ es una función racional.

Tesis: $f(x)$ es continua para todo su dominio siempre que $h(x) \neq 0$

Este teorema se demostrará en base a que f es una función racional, la cual puede ser expresada como el cociente de dos funciones polinomiales. Así, f puede estar definida por:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Donde g y h son dos funciones polinomiales y el dominio de f consiste de todos los números ℝ excepto aquellos para los cuales $h(x) = 0$.

Si a es cualquier número en el dominio de f, entonces $h(a) \neq 0$;

así por el teorema II.6.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} \qquad (C)$$

Ya que g y h son funciones polinomiales, por el teorema II.14., son continuas en a, y así $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ y $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$. Consecuentemente, de la ecuación (D):

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

II.7. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN INTERVALO.

Con los conceptos enunciados en el inciso anterior, es posible analizar la continuidad de cualquier función real de variable real en el punto en que se desee. Sin embargo, para muchos problemas será interesante investigar los intervalos en los cuales una función sea continua. El concepto de continuidad de una función en un intervalo puede expresarse mediante las siguientes definiciones.

<u>Definición.</u>- La función f es continua en el intervalo abierto (a, b) si y sólo si es continua para todo valor de x que esté dentro del intervalo (a, b).

<u>Definición.</u>- La funcion f es continua en el intervalo cerrado [a, b] si y sólo si es continua para todo valor de x que este dentro del intervalo abierto (a, b); así como continua por la derecha en a* y continua por la izquierda en b**.

*La función f es continua por la derecha en a, si y sólo si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

** La función f es continua por la izquierda en b, si y sólo si:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, para investigar la continuidad de una función en un intervalo, es necesario el análisis en todos los puntos de ese intervalo. Este trabajo será, lógicamente, engorroso, impráctico y, dada su magnitud imposible. Sin embargo, apoyándose en los teoremas sobre continuidad, estudiados en el inciso anterior, el problema se reduce a analizar solamente los valores en los cuales no se cumplan las hipótesis de los teoremas, o bien aquellas en las que haya duda, por ejemplo en donde haya cambio de regla de correspondencia.

<u>Ejemplo 34.-</u> Sea $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ determinar los intervalos para los cuales la función g es continua.

SOLUCIÓN:

La función en estudio es una función racional y de acuerdo al Teorema II.15., será continua para todo valor de x, excepto aquellos que anulen el denominador. De manera que igualando a cero el denominador:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x = \pm 2$$

Para $x = -2$ ó $x = 2$, la función g no es continua. Entonces, los intervalos en los que sí es continua son:

$$(-\infty, -2), \ (-2, 2) \text{ y } (2, +\infty)$$

<u>Ejemplo 35.-</u> Para que valores de x, la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , -1 < x < 1 \\ 2x - 4 & , 1 \le x < 2 \\ 5 - x^2 & , 2 \le x < 3 \end{cases}$$

es continua ? Dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN:

Apoyándose en los teoremas sobre funciones continuas puede fácilmente deducirse que $f(x)$ es continua en los intervalos $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 3)$. Sin embargo, los únicos valores dudosos están en $x = 1$ y $x = 2$.

Analizando los puntos dudosos:

a) <u>en x = 1</u>

$$f(1) = 2(1) - 4 = -2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 4) = 2 - 4 = -2$$

por lo tanto como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 4)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe.

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

por lo tanto se cumple la condición de continuidad, y así se concluye que la función f es continua en $x = 1$.

b) <u>En x = 2</u>

$$f(2) = 5 - (2)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 4) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5 - x^2) = 5 - 4 = 1$$

por lo tanto como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Por esto último, se concluye que f no es continua cuando $x = 2$. En la figura 28, aparece la gráfica de dicha función.

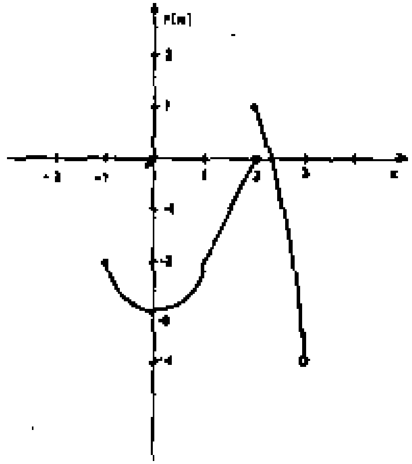


FIG 26

Ejemplo 36.- Analizar la continuidad de la función h (t) indicando los valores para los cuales sea discontinua y los intervalos donde sea continua. Dibuje la gráfica.

$$h(t) = \begin{cases} \cot t & \text{si } -\pi < t \leq -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} t + 1 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < t \leq 0 \\ e^{t} & \text{si } 0 < t < +\infty \end{cases}$$

SOLUCION:

Las expresiones que forman la regla de correspondencia, representan algunas de las funciones trascendentes estudiadas en el capítulo I. De acuerdo a lo estudiado, se puede afirmar:

a) La función cotangente es continua, excepto en los puntos en que $t = \pm n\pi$, en donde n es un número entero positivo. Para este problema, la primera expresión no presenta ningún punto de discontinuidad porque su intervalo de definición no incluye a los valores señalados.

b) La función seno siempre es continua.

c) La suma de la función seno más la función constante t = 1, también es continua, de acuerdo con el teorema II.13.

d) La función exponencial $h(t) = e^{t}$ es continua siempre.

e) Los únicos valores dudosos son cuando $t = -\frac{\pi}{2}$ y cuando $t = 0$

Análisis de los puntos dudosos:

a) cuando $t = -\frac{\pi}{2}$

h (t) está definida por medio de la primera expresión y vale:

$$h\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$$

entonces se cumple la primera parte de la definición:

$$\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^-} h(t) = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^-} \cot t = 0$$

$$\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^+} h(t) = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{sen} t + 1 = 0$$

Por lo tanto el límite existe y vale $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} h(t) = 0$

y la segunda parte se cumple.

La tercera parte se cumple, puesto que:

$$\lim_{t \to \frac{-\pi}{2}} h(t) = h\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$$

Entonces la función h (t) es continua para $t = -\frac{\pi}{2}$

b) Cuando t = 0.

h (t) no está definida puesto que ningun intervalo de definición de las tres expresiones incluye el valor t = 0. Al no cumplirse la primera parte, la función h (t) no es continua para t = 0.

Es de hacerse notar que el límite en ese punto sí existe, como lo puede comprobar el alumno, es decir los límites laterales son iguales.

$$\lim_{t \to 0^-} h(t) = \lim_{t \to 0^+} h(t) = 1$$

Sin embargo, al no poder igualar el valor del límite, que sí existe, con el valor de la función en ese punto, por no estar definida, la condición de continuidad no se cumple y la función $h(t)$ es discontinua en ese punto.

Resumiendo:

$h(t)$ es continua para los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 0) \text{ y } (0, +\infty)$$

o bien:

$h(t)$ es discontinua para $t = 0$.

La gráfica de la función puede observarse en la figura 29.

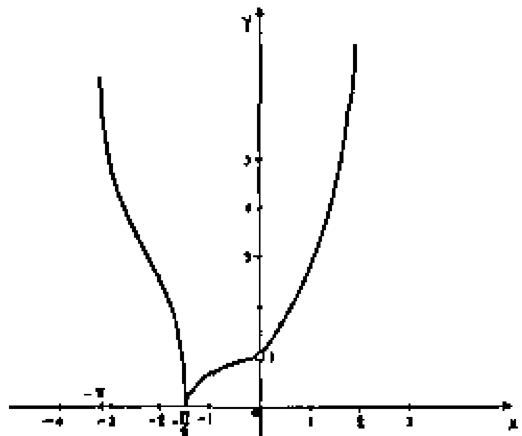


FIG 29

II.8. LIMITES CON APLICACION EN EL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Se tratará en este tema la obtención de los límites de ciertas funciones que tienen posterior aplicación no solamente en este curso, sino en otras materias de matemáticas.

Estos límites no se pueden obtener por sustitución directa, y así su valor tendrá que obtenerse por otro medio.

Ha de quedar claro que los casos que se tratarán no son los únicos de este tipo de límites, pero su obtención se analiza debido a la aplicación que tendrán en temas posteriores.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

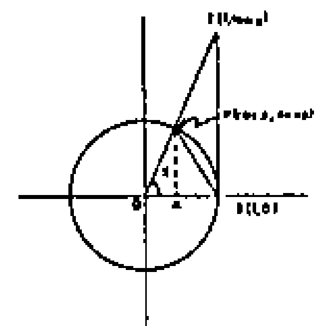


FIG 30

Haciendo $f(x) = \text{sen } x$, se ve que $f(0)$ no está definida, sin embargo se demostrará que su límite existe.

Supóngase $0 < x < \pi/2$

Refiriéndose a la figura 30, la cual muestra un círculo de radio unitario cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$ y en el cual se puede distinguir el sector circular BOP cuyo ángulo central, medido en radianes es x, y cuya área está determinada por $\frac{1}{2} r^2 x$; Así si s unidades cuadradas es el área del sector BOP, entonces $S = \frac{1}{2} x$.

También se observan la cuerda BP y la tangente BT en el punto B.

Llámese k_1 al área del triángulo OBP, donde $k_1 = \frac{1}{2}$ sen x, y k_2 al área del triángulo OBT, donde $k_2 = \frac{1}{2}$ tan x.

Por geometría elemental se tiene:

$k_1 < S < k_2$; esto es: $\frac{1}{2} \text{sen } x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x.$ (A) o sea: $\text{sen } x < x < \tan x$ (B)

y dividiendo (B) entre sen x, queda:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\tan x}{\text{sen } x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

de donde: $\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$ (C)

Por otra parte: $1-\cos x = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}$

o sea: $1-\cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x}$

Como $1 > \cos x > 0 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x} < \text{sen}^2 x$

por lo tanto $1-\cos x < \text{sen}^2 x$

De (A) : $\text{sen}^2 x < x^2$; ya que $\text{sen } x > 0$ y $x > 0$

por lo tanto: $1-\cos x < \text{sen}^2 x < x^2 \Rightarrow 1 - x^2 < \cos x$: llevado a (C)

$$1 - x^2 < \frac{\text{sen } x}{x} < 1 \qquad \text{(D)}$$

Tomando límite cuando $x \to 0$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}(1-x^2) < \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1 \qquad \text{(E)}$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$; recordando que $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen } x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \quad \text{por lo tanto} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } kx}{x} = \lim_{x\to 0} k\,\frac{\text{sen } kx}{kx} = k\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } kx}{kx} =$

$= k \cdot 1 = k \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } kx}{x} = k$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) =$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} =$

$= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{1+\cos x}$

por lo tanto $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\text{sen } x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x^2}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x^2}{x} = 0$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + b_m}$

Para este límite se presentan los siguientes 3 casos:

a) $n = m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_n}{x^n}}{\frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}{x^n}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0}{b_0}$$

por lo tanto: $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{a_0}{b_0}$ si $n = m$

b) $n < m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^{m-n}} + \frac{a_1}{x^{m-n+1}} + \dots + \frac{a_n}{x^m}}{\frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$= \frac{0}{b} = 0$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = 0, \text{ si } n < m.$$

c) $n > m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots \frac{a_n}{x^n}}{\frac{b_0}{x^{n-m}} + \frac{b_1}{x^{n-m+1}} + \dots \frac{b_m}{x^n}}$$

$$= \frac{a_0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} \to \infty, \text{ si } n > m$$

es decir, el límite no existe si $n > m$.

8) $\displaystyle \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$

Desarrollando el binomio:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1^m + \frac{m\,1^m}{1!}\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{m(m-1)}{2!}1^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$$

$$1^{m-3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\frac{m-1}{m} + \frac{1}{3!}\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

por lo tanto $\displaystyle \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$

9) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, tomando $x = \frac{1}{m}$; $x \to 0 \Rightarrow m \to \infty$

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

10) $\displaystyle \lim_{\beta\to 0} \frac{L(1+\beta)}{\beta}$; como $\displaystyle \frac{L(1+\beta)}{\beta} = L(1+\beta)^{1/\beta}$

$$\rightarrow \lim_{\beta\to 0}\frac{L(1+\beta)}{\beta} = \lim_{\beta\to 0} L(1+\beta)^{1/\beta} = \lim_{\beta\to 0}(1+\beta)^{1/\beta}$$

Del límite 8) se tiene $\lim (1 + \beta)^{1/\beta} = e$

por lo tanto: $\displaystyle \lim_{\beta\to 0}\frac{L(1+\beta)}{\beta} = L\,e = 1$

V.4 REGLA DE L'HÔPITAL. FORMAS INDETERMINADAS.

Cuando una función $y = f(x)$, toma una de las siguientes formas para un determinado valor de x:

$$f(x) = \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

se dice que la función $y = f(x)$ toma una forma indeterminada.

Hasta el momento, en el Capítulo II en el cálculo de algunos límites cuando resultaba $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se vieron varios casos en los cuales se mostró la forma de como eliminar dicha indeterminación. Es decir, dada una función $y = f(x)$, si para algún valor de la variable independiente, el límite de la función toma una de las dos formas anteriores de indeterminación, ya sea $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se ha visto como conocer el valor de dicho límite, mediante una transformación o procedimiento algebraico.

Sin embargo, una de las aplicaciones de la derivada, es precisamente poder eliminar dicha indeterminación en una forma más sencilla, a través de la regla de L'Hôpital, la cual se describe a continuación:

22

Regla de L'Hôpital:

Dada la fracción : $\frac{f(x)}{g(x)}$, si $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, se presenta en el cociente una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, para $x = a$.

El problema que se plantea consiste en encontrar:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Para ello, se hará uso del siguiente teorema:

Teorema V. 6 Regla de L'Hôpital

Hipótesis: 1).- Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$, dos funciones derivables en el intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número $a \in I$.

2).- Para toda $x \neq a$ en I, $g'(x) \neq 0$.

3). $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

4). $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Tésis: Se cumple que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El Teorema anterior es válido si los límites a los que se hace mención son todos límites derechos o límites izquierdos.

Demostración:

Para la demostración del Teorema anterior, se distinguen tres casos:

1). $x \to a^+$

2). $x \to a^-$

3). $x \to a$

Solución:

Tomando $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$ $a = 27$, $b = 28$ y aplicando (5) queda:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27} + (28 - 27)\,\frac{1}{3x_1^{2/3}} \quad ; 27 < x_1 < 28$$

Esto es:

$$\sqrt[3]{28} = 3 + \frac{1}{3x_1^{2/3}} \qquad (*)$$

Pero como $27 < x_1 \longrightarrow \dfrac{1}{3x_1^{2/3}} < \dfrac{1}{3(27)^{2/3}} = \dfrac{1}{3(9)} = \dfrac{1}{27}$

$3 + \dfrac{1}{3x_1^{2/3}} < 3 + \dfrac{1}{27}$, luego por (*)

$$3 < \sqrt[3]{28} < 3 + \frac{1}{27}$$

Para ejemplificar una aplicación del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial expresado en la ecuación (6) se da el siguiente:

Ejemplo 8.-

Demostrar que $\sqrt{101} - \sqrt{100} < \dfrac{1}{20}$

Solución:

Sea $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 100$, $h = 1$, entonces $a + h = 101$

$f(a + h) = \sqrt{101}$, $f(a) = \sqrt{100}$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(a + h\theta) = f'(100 + \theta) = \dfrac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}$; $0<\theta<1$

Aplicando (6) : $\sqrt{101} = \sqrt{100} + \dfrac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}$; $0 < \theta < 1$

Esto es: $\sqrt{101} - \sqrt{100} = \dfrac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}$

Pero: $\dfrac{1}{2\sqrt{100 + \theta}} < \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20}$, luego:

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{20} \qquad \text{Q.D.}$$

Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial para dos funciones:

Este teorema conocido también como Teorema de Cauchy, es fundamental para estudiar la Regla de L'Hopital que se ve en el siguiente tema.

Teorema V.5 De Cauchy .

Hipótesis. Sean $y = f(x)$, $y = g(x)$ dos funciones que cumplen con las condiciones:

1). $y = f(x)$, $y = g(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$

2). $y = f(x)$, $y = g(x)$ son derivables en el intervalo (a, b)

3). $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en (a, b).

Tésis: Existe un valor x_1 en el intervalo abierto (a, b) para el cual

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - f(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \; ; a < x_1 < b \qquad (7)$$

Demostración: Conviene primeramente hacer ver que $g(b) \neq g(a)$ para que la expresión (7), tenga sentido.

En efecto evidentemente la función $y = g(x)$ cumple con las condiciones de la Hipótesis del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en el intervalo $[a; b]$, luego se tiene:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(x_1) ; a < x_1 < b$$

Pero $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b) \rightarrow g'(x_1) \neq 0$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \neq 0 \rightarrow g(b) - g(a) \neq 0 \rightarrow g(b) \neq g(a)$$

Ahora bien, considérese la función auxiliar:

$$\phi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left[g(x) - g(a)\right] - \left[f(x) - f(a)\right] . (8)$$

Como puede observarse, $\phi(a) = \phi(b) = 0$, entonces la función (8) -

Analizando la demostración del primer caso, se observa que en las condiciones del Teorema no se supone que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ están definidos en " a ", por tal motivo, considerando que:

$$\text{para } x \neq a \quad y = f(x) \quad y \quad y = g(x)$$
$$y \text{ para } x = a \quad y = f(a) = 0 \; y \; y = g(a) = 0 \qquad (1)$$

Sea " b " el punto extremo derecho del intervalo abierto I dado en las condiciones del Teorema. Puesto que $y = f(x)$ y $y = g(x)$, son ambas derivables en I, excepto posiblemente en " a ", se concluye que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas derivables en el intervalo $(a, x]$, donde $a < x \leq b$.

Así que, $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas continuas en el intervalo $(a, x]$. Las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son también continuas a la derecha de " a " ya que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = f(a)$$

$$y \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 = g(a) \qquad (2)$$

Por lo tanto, $y = f(x)$, y $y = g(x)$, son continuas en el intervalo cerrado $[a, x]$. Así, $y = f(x)$, y $y = g(x)$ satisfacen las tres condiciones del Teorema de Cauchy para dos funciones en el intervalo $[a, x]$. Luego, se cumple que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (3)$$

donde x_1 es un número tal que $a < x_1 < x$.

Teniendo en cuenta las expresiones (1) y (2), se tiene que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (4)$$

Ya que $a < x_1 < x$, se sigue que cuando $x \to a^+$, $x_1 \to a^+$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lim_{x_1 \to a^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (5)$$

Pero por las condiciones del teorema, el límite en el lado derecho de la expresión (5), es L. Por consiguiente:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \text{Q.D.}$$

lo cual prueba el caso (1).

La demostración del caso (2), es similar a la anterior, y la demostración del caso (3) está basada en los resultados de los casos (1) y (2) y se dejan al estudiante como ejercicio.

El Teorema V. 6, se conoce con el nombre de Regla de L'Hôpital.

De esta manera, queda visto que la regla es aplicable para la forma $\frac{0}{0}$, asimismo, también resulta aplicable para la forma $\frac{\infty}{\infty}$, sin embargo su demostración, no se presenta en este capítulo, dado que cae fuera del alcance del curso.

En conclusión, cabe mencionar que la regla de L'Hôpital, sólo es aplicable cuando se presentan las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 9.

Encontrar $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$

Solución:

Sustituyendo en la expresión $x = 0$, se obtiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0}$$

la cual es una indeterminación que puede eliminarse mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, de esta manera considerando la expresión anterior, como un cociente de dos funciones se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

por lo tanto, aplicando la regla de L'Hôpital resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x}$$

finalmente, tomando el límite se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

por lo que,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$$

Ejemplo 10 Calcular:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$$

Solución:

Al buscar el límite de $F(x)$ cuando $x\to\infty$, se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

La indeterminación anterior, puede eliminarse empleando para ello la regla de L'Hôpital y considerando a $F(x)$, como un cociente de dos funciones, de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = 0$$

En algunas ocasiones, puede suceder que después de haber aplicado la regla de L'Hôpital, a una indeterminación, ésta persista es decir, que se tenga:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}$$

En este caso, la regla de L'Hôpital puede aplicarse tantas veces como sea necesario hasta que se haya eliminado la indeterminación, o sea:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(a)}{g''(a)}$$

donde:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(a)}{g''(a)}$$

el procedimiento anterior se conoce con el nombre de generalización de la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 11

Dada la función:

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1-\cos x}$$

encontrar $\lim_{x\to 0} F(x)$

Solución:

Considerando a $F(x)$ como el cociente de dos funciones, es decir,

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1-\cos x}$$

tomando el límite de $F(x)$ cuando $x\to 0$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1-\cos x} = \frac{0}{0}$$

la cual es una indeterminación en la que resulta aplicable la regla de L'Hôpital, con lo que se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

como puede observarse, la indeterminación persiste una vez que se ha aplicado la regla, de esta manera, volviendo a aplicar la regla por segunda vez, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-0}{1}=\frac{1}{2}$$

Finalmente, se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1-\cos x}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 12.

Dada la función: $F(x)=\frac{L\,x}{\csc x}$

Hallar: $\lim_{x\to 0} F(x)$

Solución:

Considerando a la función $F(x)=\frac{L\,x}{\csc x}$ como un cociente de dos funciones, es decir:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L\,x}{\csc x}$$

Y tomando límites cuando $x\to 0$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{L\,x}{\csc x}=\frac{-\infty}{\infty}$$

dado que: $L\,x \to -\infty$ si $x\to 0^+$

y $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\to\infty$ si $x\to 0$

Entonces para eliminar la indeterminación, se hace uso de la regla de L'Hôpital, teniendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{L\,x}{\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}$$

como: $\csc x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\cot x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{L\,x}{\csc x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}=\frac{0}{0}$$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{(-x\operatorname{sen} x+\cos x)}=\frac{0}{1}=0$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0}\frac{L\,x}{\csc x}=0$$

Tal como puede apreciarse, los ejemplos anteriores, muestran la aplicación de la regla de L'Hôpital, en los casos en que únicamente se presentan indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

DETERMINACION DEL VALOR DE LA FORMA $0\cdot\infty$

Si una función $F(x)$, considerada como el producto de dos funciones, $F(x)=f(x)\cdot g(x)$, toma la forma indeterminada $0\cdot\infty$, para un valor de x, la función dada puede escribirse en la forma:

$$F(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Esto se hace con el objeto de llegar a obtener una de las formas vistas anteriormente y de esta manera poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo. 13

Calcular: $\lim_{x\to 0^+} x\,L\,x$

Solución:

Considerando, a $\lim_{x\to 0^+} x\,Lx$ como:

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 0^+}x\,L\,x$$

donde: $f(x)=x$ y $g(x)=L\,x$

se obtiene que: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,L\,x = 0\cdot\infty$

Por lo tanto, haciendo:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,L\,x = \lim_{x\to 0^+} \frac{L\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

La forma de la indeterminación anterior, permite el empleo de la regla de L'Hôpital, es decir:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{L\,x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Por lo cual $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,L\,x = 0$

DETERMINACION DEL VALOR DE LA FORMA $\infty-\infty$

Si una función $F(x)$, considerada como la diferencia de dos funciones $F(x) = f(x) - g(x)$, toma la forma indeterminada $\infty-\infty$, para un valor de " x ", en general es posible transformarla en una fracción que tomará la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, mediante algún procedimiento algebraico y de esta manera, es posible aplicar la regla de L'Hôpital, y encontrar un valor determinado.

Ejemplo. 14

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right)$

Solución:

Considerando a $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right)$ como:

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right)$$

y tomando límite cuando $x\to 1$, resulta:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right) = \infty - \infty$$

Para eliminar la indeterminación anterior, se requiere de una transformación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, las cuales, mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, pueden eliminarse.

De esta manera, tomando como factor común a $\frac{1}{(x-1)\,L\,x}$, resulta que:

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right) = \frac{1}{(x-1)\,L\,x} \left(x\,L\,x - [x-1] \right)$$

por lo que,

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x\,L\,x - (x-1)}{(x-1)\,L\,x} = \frac{0}{0}$$

La indeterminación anterior permite aplicarse la regla de L'Hôpital, con lo que se obtiene:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\,L\,x - (x-1)}{(x-1)\,L\,x} = \lim_{x\to 1} \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) + L\,x - 1}{(x-1)\left(\frac{1}{x}\right) + L\,x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{L\,x}{1 - \frac{1}{x} + L\,x} = \frac{0}{0}.$$

Como se observa después de aplicar la regla de L'Hôpital, la indeterminación persiste, por lo que aplicándola nuevamente resulta:

$$\lim_{x\to 1} \frac{L\,x}{1 - \frac{1}{x} + L\,x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1+x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo. 15

Calcular $\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$

Solución:

Considerando a $\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$ como:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$$

tomando límites cuando $x \to 0$, resulta:

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right) = \infty - \infty$$

Puesto que para la indeterminación anterior no existe un procedimiento que permita eliminarla directamente, se debe buscar alguna transformación algebraica mediante la cual sea posible obtener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, y de esta forma, poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Así pues, si se toma como factor común de la expresión anterior a $\frac{\cot x}{x}$ se obtiene:

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{\cot x}{x} \left(x - \frac{1}{\cot x} \right), \text{ pero como:}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}, \text{ se tiene que:}$$

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x \tan x} \left(x - \tan x \right) = \frac{x - \tan x}{x \tan x}$$

Ahora bien, obteniendo el límite de la última expresión:

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \frac{0}{0}$$

Por lo tanto, la indeterminación anterior, permite el empleo de la regla de L'Hôpital; así pues:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{\tan x + x \sec^2 x}$$

Pero como: $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ y $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{\tan x + x \sec^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x \cos x + x}$$

Simplificando la última expresión y utilizando las sustituciones trigonométricas siguientes,

$$\cos^2 x - 1 = \operatorname{sen}^2 x$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$$

se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x \cos x + x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 2x + x} = \frac{0}{0}$$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, y tomando el límite se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 2x + x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \operatorname{sen} x \cos x}{2 \cos 2x + 1} = \frac{0}{3} = 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{4 \operatorname{sen} x \cos x}{2 \cos 2x + 1} = 0$$

DETERMINACION DE VALOR DE LAS FORMAS 0^0, ∞^0, 1^∞.

Si una función $\phi(x)$ puede expresarse en la forma $f(x)^{g(x)}$, puede suceder que para algún valor x_0 de x, se obtenga que:

$f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ quedando la forma 0^0

o bien:

$f(x_0) = 1$, $g(x_0) =$ quedando la forma 1^∞

o también:

$f(x_0) =$, $g(x_0) = 0$ quedando la forma ∞^0

Entonces, para poder determinar un valor que permita eliminar la inde-

16

terminación para cualquiera de las tres formas anteriores, se emplea el procedimiento que a continuación se explica:

Sea la función $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$

Tomando logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión anterior y aplicando las propiedades de los logaritmos, se obtiene que:

$$L\ \phi(x) = g(x)\, L\, f(x)$$

Por lo que en cada uno de los casos anteriores, el logaritmo natural de la función, $\phi(x)$, tomará la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. De esta manera determinando el valor de esta forma por el procedimiento correspondiente visto anteriormente, se obtiene el límite del logaritmo de la función $\phi(x)$.

De tal forma que, si el límite toma el valor " a ", es decir si:

$$\lim_{x \to x_0} L\,\phi(x) = a$$

entonces: $\lim_{x \to x_0} \phi(x) = e^{a}$

Ejemplo. 16.

Calcular: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$

Solución:

Considerando la expresión anterior como:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

buscando el límite, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = 1$$

Esta indeterminación conduce al empleo del proceso descrito anteriormente para eliminarla, así pues, tomando logaritmos naturales y aplicando las propiedades de los logaritmos se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} L\,\phi(x) = \lim_{x \to \infty} x\, L\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

de donde:

$$\lim_{x \to \infty} x\, L\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty \cdot 0$$

El método para resolver dicha indeterminación (inciso V. 4), indica que hay que considerar el límite anterior como el producto de dos funciones tratando de llegar a obtener una indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Así pues, siguiendo dicho proceso resulta:

$$\lim_{x \to \infty} x\, L\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Calculando el límite de la última expresión se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

Aplicando ahora la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

buscando el límite resulta:

$$\lim_{x \to \infty^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

De esta manera,

$$\lim_{x \to \infty^+} L\,\phi(x) = \lim_{x \to \infty^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Como el límite que se busca es $\lim \phi(x)$, finalmente queda:

$$\lim_{x \to \infty^+} \phi(x) = \lim_{x \to \infty^+} f(x)^{g(x)} = e^{1} = e$$

Ejemplo. 17

Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{e^{-x}}$

Solución:

Considerando a $\lim\limits_{x\to\infty} x^{e^{-x}}$ como:

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{e^{-x}} = \infty^{0}$$

tomando logaritmos,

$$\lim_{x\to\infty} L\,\phi(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\, L\,x = 0.\infty$$

Aplicando el método para eliminar dicha indeterminación, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L\,x}{\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{L\,x}{e^{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Utilizando la regla de L'Hôpital y calculando el límite se obtiene,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L\,x}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\,e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Así, pues, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} L\,\phi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{L\,x}{e^{x}} = 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{e^{-x}} = e^{0} = 1$$

Ejemplo. 18

Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

Solución:

Si $\lim\limits_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0$

Tomando logaritmos: $L\,x^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x\, L\,x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} L\,x^{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\, L\,x$

$$\lim_{x\to 0^+} L\,\phi(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{L\,x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} L\,\phi(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0}$$

Aplicando nuevamente la regla,

$$\lim_{x\to 0^+} L\,\phi(x) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x - x\operatorname{sen} x} = -\frac{2(0)}{1-0} = 0$$

Luego $\lim\limits_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{0} = 1$

II SUCESIONES Y SERIES

VII. 1 SUCESIONES

Con el objeto de introducir el concepto de sucesión analicemos el siguiente caso.

Supóngase que un banco decide pagar el 100% de interés anual. Esto es, si alguien decide invertir un peso en dicho banco, al cabo de un año tendrá

$$1+1=2 \text{ pesos}$$

Si el banco efectuara la composición de interés semestralmente, al inversionista le iría mejor, pues al cabo de medio año tendría

$$1+\frac{1}{2} \text{ pesos}$$

cantidad sobre la cual se pagaría el otro 50% de interés. Esto es, durante el segundo semestre ganaría

$$(1+\frac{1}{2})\ (\frac{1}{2}) \text{ pesos}$$

por lo que al final del año tendría

$$(1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=(1+\frac{1}{2})^2=2.25 \text{ pesos}$$

Ahora bien, si la composición de interés se efectúa tres veces al año, el peso del inversionista se convertirá al final del año en

$$(1+\frac{1}{3})^3=2.37 \text{ pesos}$$

y si la composición se efectúa cuatro veces al año, en:

$$(1+\frac{1}{4})^4=2.44 \text{ pesos}$$

En general, si se compone la inversión n veces en un año, por cada peso invertido se obtendrá al final del año

$$(1+\frac{1}{n})^n \text{ pesos}$$

El análisis anterior puede resumirse en la siguiente tabla

Número de composiciones en un año.	Cantidad recuperable por cada peso al finalizar el año.
1	$(1+1)^1=2$
2	$(1+\frac{1}{2})^2=2.25$
3	$(1+\frac{1}{3})^3=2.37$
4	$(1+\frac{1}{4})^4=2.44$
.	.
.	.
.	.
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
.	.
.	.
.	.

Como se ve, hemos establecido una función

$$f:N \to R$$

definida por

$$f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$$

que asocia a cada número natural n (número de veces que se compone el interés en un año) un número real $(1+\frac{1}{n})^n$ (cantidad que se recupera anualmente).

A partir de esta función, podemos formar la colección de términos

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

o sea

$$2,\ 2.25,\ 2.37,\ 2.44,\ \ldots,\ (1+\frac{1}{n})^n,\ \ldots$$

a la que llamaremos sucesión infinita y que, en forma abreviada, denotaremos con

$$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$$

Definición.

Una sucesión infinita es una colección ordenada de términos

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

formada a partir de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

A $f(n)$ se le llama término enésimo de la sucesión.

En forma abreviada, representaremos con $\{f(n)\}$ a la sucesión cuyo término enésimo es $f(n)$.

Ejemplo VII. 1

Las siguientes son sucesiones infinitas:

a) $\{n^2\} = 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$

b) $\{\frac{3}{n}\} = 3,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{3}{n},\ \ldots$

c) $\{(-1)^{n+1}n\} = 1,\ -2,\ 3,\ -4,\ \ldots,\ (-1)^{n+1}n,\ \ldots$

d) $\{\frac{(2i)^n}{n!}\} = 2i,\ -2,\ -\frac{4}{3}i,\ \frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{(2i)^n}{n!},\ \ldots$

Obsérvese que la definición no excluye la posibilidad de que los términos de la sucesión sean números complejos, como en el caso d) del ejemplo anterior. Empero, en lo que sigue trabajaremos con sucesiones de números reales, a menos que se indique otra cosa.

Volvemos ahora al ejemplo del interés bancario. Como se puede ver en la tabla, a medida que aumenta el número de composiciones de interés en un año, aumenta la cantidad que el inversionista recupera. Sin embargo, podemos preguntarnos: ¿Existe alguna cantidad máxima recuperable por cada peso invertido aunque el número de composiciones por año sea tan grande como se quiera?

Para responder a esto, veamos que sucede con el término $(1+\frac{1}{n})^n$ a medida que n aumenta:

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
3	2.37
.	.
.	.
.	.
24	2.6637
.	.
.	.
365	2.7146
.	.
.	.
8,760	2.7181
.	.
.	.
525,600	2.7182

Vemos que $(1+\frac{1}{n})^n$ crece cada vez más lentamente (por ejemplo al cambiar n de 8,760 a 525,600, sólo cambia la cuarta cifra decimal), lo que nos lleva a pensar que hay un límite para el crecimiento de $(1+\frac{1}{n})^n$. Dicho límite es el número irracional

$$e = 2.7182818284\ \ldots$$

Entonces, la cantidad recuperable por cada peso invertido nunca será mayor que "e" pesos, por grande que sea el número de composiciones efectuadas anualmente.

La discusión anterior se resume en la expresión

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

y por ello decimos que la sucesión $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ tiene límite (el número e), lo cual representamos mediante

$$\lim \{(1+\frac{1}{n})^n\}=e$$

<u>Límite de una sucesión.</u>

En general, diremos que una sucesión $\{f(n)\}$ tiene límite si, a medida que n crece, $f(n)$ se acerca a un cierto valor fijo L. Esto es,

si $n\to\infty$, entonces $f(n)\to L$

En este caso decimos que la sucesión $\{f(n)\}$ es convergente (converge a L).

Este concepto puede expresarse formalmente en la siguiente

Definición.

Una sucesión $\{f(n)\}$ tiene límite L si, para todo número $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, existe un número M tal que

$|f(n)-L| < \varepsilon$ para todo $n > M$.

Simbolizamos esto mediante

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=L$$

Ejemplo VII. 2.

Demostrar que la sucesión

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots$

tiene límite $L=0$.

Requerimos para ello demostrar que siendo $\varepsilon > 0$ existe un M tal que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad \forall n>M$$

Como $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ por ser n siempre positivo, tenemos

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

de donde

$$n>\frac{1}{\varepsilon}$$

por tanto, $\forall\varepsilon>0$ existe un número $M=\frac{1}{\varepsilon}$ tal que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad \forall n>M.$$

quedando demostrado.

- -

No todas las sucesiones son convergentes. Por ejemplo, la sucesión

$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$

no tiene límite ya que

si $n\to\infty$, entonces $n^2\to\infty$.

Para calcular el límite de una sucesión convergente, pueden emplearse los teoremas básicos sobre límites que el estudiante ya conoce para el caso de funciones. Por ejemplo, para calcular el límite de la sucesión

$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n+1}{3n}, \ldots$

podemos proceder de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$$

Como ejercicio adicional demostraremos, en base a la definición, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$$

En efecto, como

$$\left|\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n+1-n}{3n}\right| = \left|\frac{1}{3n}\right| = \frac{1}{3n} \dots$$

se cumplirá que

$$\left|\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

si y sólo si

$$\frac{1}{3n} < \varepsilon$$

es decir si

$$n > \frac{1}{3\varepsilon}$$

por lo que, $\forall \varepsilon > 0$ existe un número $M = \frac{1}{3\varepsilon}$ tal que

$$\left|\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \qquad \forall n > M.$$

- -

<u>Sucesiones monótonas.</u>

Si analizamos la sucesión

$$\{(n-1)!\} = 1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ \dots,\ (n-1)!,\ \dots$$

vemos que cada término es mayor o igual que el anterior, por lo que diremos que la sucesión es creciente. Por el contrario, si en una sucesión cada término es menor o igual que el anterior, diremos que la sucesión es decreciente, como en el siguiente caso:

$$\{\tfrac{1}{n}\} = 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \dots,\ \tfrac{1}{n},\ \dots$$

Definición.

Sea $\{f(n)\}$ una sucesión:

1) Si $f(n+1) \geq f(n)$, $\forall n \in N$, la sucesión es creciente.

2) Si $f(n+1) \leq f(n)$, $\forall n \in N$, la sucesión es decreciente.

A una sucesión creciente o decreciente se le llama monótona.

Ejemplo VII. 3.

a) La sucesión del problema de interés bancario

$$2,\ 2.25,\ 2.37,\ 2.44,\ \dots$$

es una sucesión monótona creciente.

b) No siempre es posible definir una sucesión mediante una sola regla de correspondencia. Por ejemplo, la sucesión

$$1,\ 1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{7},\ \dots$$

se puede formar a partir de las reglas:

$$f(2n-1) = \frac{1}{2n-1} \quad y \quad f(2n) = \frac{1}{2n-1}$$

Esta es una sucesión monótona decreciente.

c) La sucesión

$$\{(-1)^n (\tfrac{1}{n})\} = -1,\ \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{5},\ \dots$$

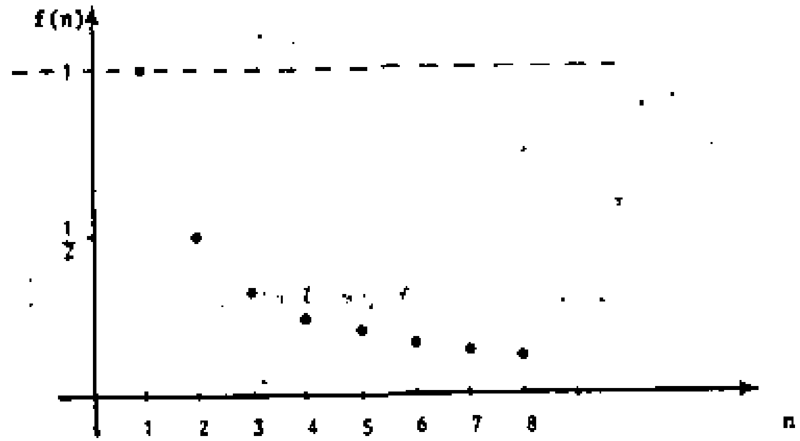
no es monótona ya que no es creciente y tampoco decreciente.

- -

Para la sucesión

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \dots,\ \tfrac{1}{n},\ \dots$$

podemos construir la siguiente gráfica



donde puede apreciarse claramente que todo término de la sucesión es menor o igual que 1, por lo que diremos que 1 es una cota superior de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$.

Por otra parte, como todo término de la sucesión es mayor que cero, este número es una cota inferior de $\{\frac{1}{n}\}$.

Definición.

1) El número real p es una cota superior de la sucesión $\{f(n)\}$ si:

$$f(n) \leq p, \quad \forall n \in N.$$

2) El número real q es una cota inferior de la sucesión $\{f(n)\}$ si:

$$f(n) \geq q, \quad \forall n \in N.$$

Una sucesión se dice acotada si tiene una cota inferior y una cota superior.

De acuerdo con esto, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$, que como vimos es monótona, es además acotada.

Teorema VII. 1.

Toda sucesión monótona acotada tiene límite (es convergente).

Demostración.

Probaremos el teorema para sucesiones monótonas crecientes:

Sea $\{f(n)\}$ una sucesión acotada. Como $\{f(n)\}$ admite una cota superior, por el axioma del supremo tiene una mínima cota superior a la que llamaremos L. Si $\epsilon>0$, $L-\epsilon$ no puede ser una cota superior de $\{f(n)\}$; por tanto algún término de la sucesión es mayor que $L-\epsilon$, o sea

$$f(k)>L-\epsilon \quad \text{para algún } k\in N \quad \ldots . \quad (1)$$

Como $\{f(n)\}$ es creciente:

$$f(n) \geq f(k), \quad \forall n>k$$

y, por (1):

$$f(n) > L-\epsilon \quad \forall n>k \quad \ldots . \quad (2)$$

Por otra parte, como L es una cota superior

$$f(n) \leq L \quad \forall n \in N \quad \ldots . \quad (3)$$

de (2) y (3)

$$L-\epsilon < f(n) \leq L \quad \forall n>k$$

restando L

$$-\epsilon < f(n)-L \leq 0 \quad \forall n>k$$

lo que implica

$$|f(n)-L| < \epsilon \quad \forall n>k$$

con lo que hemos demostrado la existencia del límite, que es precisamente la mínima cota superior L.

La demostración es similar si $\{f(n)\}$ es decreciente.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Ejemplo VII. 4

a) Ya hemos visto que $\{\frac{1}{n}\}$ es monótona y acotada, por lo que según el teorema anterior tiene límite. Esto concuerda con lo obtenido en el ejemplo VII.2, donde se demostró que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

b) Consideremos la sucesión

$$\frac{-1}{1\cdot 2}, \frac{-1}{2\cdot 3}, \frac{-1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{-1}{n(n+1)}, \ldots$$

Esta es una sucesión monótona creciente ya que $f(n+1)>f(n)$ $\forall n\in N$, como se demuestra a continuación:

$$\frac{-1}{L(n+2)} > \frac{-1}{L(n+1)}$$

$$-L(n+1) > -L(n+2)$$

$L(n+1) < L(n+2)$ lo cual es evidente.

Por otra parte, la sucesión es acotada ya que

1) $\frac{-1}{L2}$ es una cota inferior, pues por ser creciente

$f(n) \geq \frac{-1}{L2} \quad \forall n \in N$

2) Como $L(n+1) > 0 \quad \forall n \in N$, entonces $\frac{-1}{L(n+1)}$ es siempre negativo y cualquier número positivo es una cota superior de la sucesión $(\frac{-1}{L(n+1)})$.

En base a lo anterior, del teorema VII. 1 se concluye que la sucesión tiene límite.

Se deja al estudiante la obtención de dicho límite.

- -

VII. 2 SERIES.

Una forma interesante de introducir el concepto de serie nos la proporciona la siguiente paradoja, debida al filósofo griego Zenón de Elea (siglo V A.C.):

"Un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir, cuando haya recorrido la primera mitad, tendrá que recorrer la otra mitad. Cuando haya recorrido la mitad de esta última, le quedará todavía la cuarta parte; cuando haya recorrido la mitad de esta cuarta parte, le quedará la octava parte, y así sucesivamente."

Analicemos con más detalle esta situación:

Si suponemos que el corredor se desplaza a velocidad constante y le lleva t segundos recorrer la primera mitad del trayecto, el tiempo en que recorre la distancia total será

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots \qquad (1)$$

La idea de la paradoja es que la suma de un número infinito de términos, como (1), no puede ser un número finito, por lo que el corredor no podría alcanzar la meta en un tiempo finito. Sin embargo, sabemos que si el corredor se desplaza a velocidad constante y emplea t segundos en recorrer la primera mitad, llegará a la meta en 2t segundos. Podemos por ello suponer que:

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots = 2t \qquad (2)$$

con lo que hemos asignado a la suma infinita (1), que llamaremos serie, un valor finito 2t, esperando que la igualdad (2) sea válida -

en algún sentido.

La expresión (2) puede representarse como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^{n-1}} = 2t \qquad (3)$$

Definición.

Una serie es la suma de un número infinito de términos:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

Obsérvese que los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ constituyen una sucesión.

Otro ejemplo de serie lo tenemos al interpretar la expresión decimal del número racional $\frac{1}{3}$:

0.333 ...

cuyo significado es

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots \qquad (4)$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3} \qquad (5)$$

No siempre es posible asignar a una serie un valor finito como lo hicimos en (3) y (5). Por ejemplo, la serie

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 + \ldots \qquad (6)$$

carece de un valor finito como suma total.

A las series (1) y (4) se les llama convergentes, mientras que (6) se dice que es divergente.

Antes de establecer una definición formal de convergencia y divergencia de series, volvamos al análisis de la paradoja de Zenón.

A partir de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^{n-1}} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots \qquad (1)$$

podemos formar la sucesión de sumas parciales

$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$

donde

$$S_1 = t$$
$$S_2 = t + \frac{t}{2}$$
$$S_3 = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4}$$
$$\vdots$$
$$S_n = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}}$$

Vemos que el término general S_n de la sucesión de sumas parciales, es la suma de los n primeros términos de la serie (1), y en el límite:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

para calcular este límite observemos que

$$S_1 = t = (2-1)\,t$$
$$S_2 = t + \frac{t}{2} = (2 - \frac{1}{2})t$$
$$S_3 = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} = (2 - \frac{1}{4})t$$

y, como puede demostrarse por inducción matemática, el término general de la sucesión de sumas parciales es:

$$S_n = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} = (2 - \frac{1}{2^{n-1}})t$$

por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (2-\frac{1}{2^{n-1}})t = 2t$$

Con esto vemos que la expresión (2)

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots = 2t$$

es válida si interpretamos la suma del número infinito de términos,

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots$$

como el límite de la sucesión

$$\{t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}}\}$$

Definición.

Sea

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

una serie, y sea $\{S_n\}$ una sucesión (llamada de sumas parciales) tal que

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n.$$

Si existe un número real S tal que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

se dice que la serie es convergente y tiene suma S, en cuyo caso se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Una serie no convergente se dice que es divergente.

Nótese que la "suma" de una serie convergente es el límite de una sucesión de sumas parciales y no se puede obtener mediante una suma ordinaria de términos, puesto que éstos son un número infinito.

Para las series convergentes, el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se utiliza para indicar tanto la serie como su suma, a pesar de ser dos conceptos distintos (la suma representa un número y por tanto no puede ser convergente ni divergente).

Ejemplo VII. 5.

a) Para el caso de la serie (4):

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

se tiene que

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{10^n})$$

(Demuéstrelo)

Como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(1-\frac{1}{10^n}) = \frac{1}{3}$$

la serie converge y su suma es $\frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$$

b) Para el caso de la serie (6):

$$1+4+9+\ldots+n^2+\ldots$$

el término general de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = 1+4+9+\ldots+n^2 = \frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$$

(Demuéstrelo)

En este caso, el límite de $\{S_n\}$ no existe, ya que a medida que n crece, $\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$ tiende a infinito. En ocasiones es to se simboliza mediante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{6}(2n^2+3n+1) = \infty$$

En consecuencia, la serie (6) es divergente.

- -

En los casos anteriores, hemos obtenido una expresión simplificada para la suma de los primeros n términos de la serie, que permite calcular con facilidad el límite. Sin embargo, esto no es siempre posible. De hecho, en la mayoría de los casos no existe una expresión simplificada de S_n, por lo que estudiaremos otros métodos para determinar la convergencia o divergencia de una serie.

Condición necesaria para la convergencia de una serie.

Observemos que en las series convergentes

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \cdots + \frac{t}{2^{n-1}} \qquad (1)$$

y

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots \qquad (4)$$

el término general tiende a cero, a medida que n crece; es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{2^{n-1}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3}{10^n} = 0$$

Este hecho se presenta siempre que una serie es convergente.

> Teorema VII. 2
>
> Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Demostración.

04

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente y sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales.

Como la serie es convergente

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1+a_2+\cdots+a_n) = L \qquad (1)$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) = L \qquad (2)$$

restando (2) de (1)

$$\lim_{n\to\infty} (a_1+a_2+\cdots+a_n) - \lim_{n\to\infty} (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) = 0$$

por las propiedades de los límites

$$\lim_{n\to\infty} ((a_1+a_2+\cdots+a_n) - (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})) = 0$$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Este teorema establece una condición necesaria para la convergencia de una serie. Sin embargo, dicha condición no es suficiente; en otras palabras, el hecho de que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no implica que la serie sea convergente.

La verdadera utilidad del teorema VII. 2 es que permite establecer el siguiente:

> Corolario (prueba de divergencia)
>
> Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplo VII. 6.

a) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$$

por lo que la serie es divergente.

b) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

En este caso el teorema VII. 2 no nos permite decidir si la serie converge o diverge.

c) En el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

se tiene un caso análogo al b).

Posteriormente demostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, llamada serie armónica, es divergente; mientras que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, es convergente.

Propiedades de las series.

Las series tienen ciertas propiedades que vale la pena mencionar antes de estudiar diferentes criterios que nos faciliten el trabajo de establecer el carácter de convergencia o divergencia de una serie:

1) El carácter de convergencia o divergencia de una serie no cambia si todos sus términos se multiplican por una constante diferente de cero.
2) El carácter de convergencia o divergencia de una serie no cambia si se agrega o suprime un número finito de términos.
3) El carácter de convergencia o divergencia de una serie de términos POSITIVOS no cambia si sus términos se agrupan de cualquier manera.
4) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series CONVERGENTES, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n+\beta b_n)$ es también convergente $\forall \alpha,\beta \in R$ y su suma está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n+\beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Se deja al estudiante la demostración de las propiedades 1) a 3). Para una demostración de la propiedad 4) puede consultarse la referencia 1 pág. 471.

VII. 3 CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

Podemos demostrar que la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

es divergente, agrupando sus términos en la siguiente forma:

$$(1)+(\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\dots+\tfrac{1}{16})+\dots \qquad (1)$$

Observemos que cada uno de los términos entre paréntesis de esta serie, es mayor o igual que los de la serie divergente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots \qquad (2)$$

ya que

$$1 \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} \geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia, la suma de los términos de (1) será mayor que la suma de los términos de (2). Como la suma de los términos de (2) tiende a infinito cuando $n\to\infty$ (por ser esta serie divergente), entonces, la suma de los términos de (1) también tiende a infinito, por lo que la serie armónica es divergente.

El método aquí empleado, conocido como criterio de comparación, puede formalizarse como sigue:

Criterio de comparación.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie términos positivos ($a_n \geq 0$, $\forall n \in N$) cuyo carácter queremos conocer:

I) Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es una serie CONVERGENTE de términos positivos y $a_n \leq c_n$, $\forall n \in N$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es CONVERGENTE.

II) Si $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es una serie DIVERGENTE de términos positivos y $a_n \geq d_n$, $\forall n \in N$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es DIVERGENTE.

Demostración.

I) Sea: $S_n = a_1+a_2+\dots+a_n$

el término general de la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y sea:

$$Z_n = c_1+c_2+\dots+c_n$$

el de $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Como $a_n \leq c_n$, $\forall n \in N$, entonces:

$$S_n \leq Z_n$$

Además, por ser $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergente, existe el límite de $\{Z_n\}$ al que llamaremos L:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = L$$

En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq L$$

Por otra parte, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos

$$S_n > 0$$

Por tanto existe un número real S entre cero y L tal que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

II) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ una serie divergente

y sea $a_n \geq d_n$, $\forall n \in N$.

Si suponemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente, por la parte I) del criterio de comparación se tiene que

$a_n \geq d_n \quad \forall n \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es convergente, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Es claro que, para poder utilizar este criterio se requiere comparar con series de carácter conocido. Entre las series que más se emplean para comparar están las series geométricas y las series "p", que trataremos a continuación.

<u>Serie geométrica.</u>

Una serie geométrica es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

Vemos que cada término es igual al anterior multiplicado por un factor fijo q llamado razón. La convergencia o divergencia de este tipo de series depende del valor de la razón q, como veremos:

La suma de los n primeros términos de la serie es:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} \qquad (1)$$

Multiplicando esta expresión por q:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n \qquad (2)$$

Restando (2) de (1):

$$S_n(1-q) = a - aq^n$$

de donde

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

Este límite depende del valor de q y se pueden destacar tres casos:

a) Si $|q|<1$, entonces: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

y en consecuencia la serie es convergente y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

b) Si $|q|>1$, entonces: cuando $n\to\infty$, $q^n\to\infty$ ó $q^n\to-\infty$, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

no existe y, en consecuencia, la serie es divergente.

c) Si $|q|=1$, entonces $q=1$ ó $q=-1$.

Para $q=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + a + a + \ldots$$

y la serie es divergente.

Para $q=-1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a - a + a - a + \ldots$$

y la serie es también divergente.

(Demuéstrelo)

Resumiendo:

> La serie geométrica : $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ converge si y sólo si $|q|<1$.

Ejemplo VII. 7.

a) Para determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}+1} = \frac{4}{2} + \frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \ldots \qquad (1)$$

podemos emplear la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots \qquad (2)$$

cuya razón es $q = \frac{1}{3}$, por lo que es convergente.

Comparando estas dos series vemos que

$$\frac{4}{2} < 4$$

$$\frac{4}{4} < \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{10} < \frac{4}{9}$$

$$\vdots$$

y en general: $\dfrac{4}{3^{n-1}+1} < \dfrac{4}{3^{n-1}}$

Empleando el criterio de comparación, se concluye que la serie (1) es convergente.

b) Para determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{3^n} \qquad (1)$$

veamos si las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} \qquad (2)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \qquad (3)$$

son convergentes.

Para analizar la serie (2), utilicemos la serie geométrica convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Por las propiedades de las series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$$

de aquí que la serie (2) es convergente.(propiedad 1) de las series).

Para la serie (3), utilicemos la serie geométrica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

Como esta serie es convergente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \qquad (4)$$

también es convergente.

Comparando (3) con (4):

$\frac{n}{3^n} < (\frac{2}{3})^n \quad \forall n\in N$ (Demuéstrelo)

Por el criterio de comparación, la serie (3) también es convergente.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ son series convergentes, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{3^n}$$

es convergente (propiedad 4)).

- -

Serie P.

Una serie p es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

La convergencia o divergencia de este tipo de series depende del valor de p. Podemos considerar tres casos:

a) Si $p>1$, agrupemos los términos como sigue:

$$1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) + (\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}) + \dots \qquad (1)$$

y consideremos la serie

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \dots$$

que es una serie geométrica con $a=1$ y $q = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$. Como $p>1$, q es un número positivo menor que 1 y la serie es convergente. Los términos de esta serie pueden ser escritos en la forma

$$1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}) + (\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}) + \dots \qquad (2)$$

Vemos que, cada uno de los términos entre paréntesis de la serie (1) es menor o igual que su correspondiente de la serie convergente (2), por lo que, del criterio de comparación se sigue que (1) es convergente.

b) Si $p=1$, la serie p es la serie armónica y, como vimos, es divergente.

c) Si $p<1$, cada término de la serie p es mayor o igual que su correspondiente de la serie armónica, y por el criterio de comparación la serie p es divergente.

Resumiendo:

$$\boxed{\text{La serie p: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si y sólo si } p>1.}$$

Ejemplo VII. 8.

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ del ejemplo VII. 6 es una serie p, con $p=2$, y por tanto convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$

es una serie p divergente ($p= 1/2$).

b) Analicemos el caso de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots \qquad (1)$$

comparándola con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \qquad (2)$$

Observamos que

$$1 = 1$$
$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{6} > \frac{1}{9}$$
$$\frac{1}{24} < \frac{1}{16}$$
$$\frac{1}{120} < \frac{1}{25}$$

y se puede demostrar por inducción matemática que:

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in N \ \text{ y } \ n \geq 4$$

Se dice por esto que la serie (2) "domina" a la serie (1) a partir de n=4. Vale la pena entonces observar que:

Basta con que las desigualdades

$$a_n \leq c_n$$
y
$$a_n \geq d_n$$

del criterio de comparación se cumplan a partir de un cierto valor de n, para que dicho criterio siga siendo aplicable (ya que podemos suprimir un número finito de términos en las series sin alterar su carácter de convergencia o divergencia).

Por ello, podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es una serie convergente.

Otra forma de demostrarlo es la siguiente:

Multiplicando por 3 la serie (2), obtenemos la serie convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{9} + \frac{3}{16} + \frac{3}{25} + \ldots \qquad (3)$$

Comparando ahora las series (1) y (3), vemos que:

$$1 < 3$$
$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{6} < \frac{3}{9}$$
$$\frac{1}{24} < \frac{3}{16}$$
$$\frac{1}{120} < \frac{3}{25}$$

y, como se puede demostrar por inducción matemática:

$$\frac{1}{n!} < \frac{3}{n^2}, \quad \forall n \in N$$

Podemos entonces concluir, basados en el criterio de comparación tal como se enunció originalmente, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente.

- -

En ocasiones, el criterio de comparación es de difícil aplicación práctica (dicha dificultad estriba en encontrar la serie que servirá de comparación). Por esto, introduciremos otro criterio conocido como criterio del cociente o de d'Alembert.

<u>Criterio de d'Alembert.</u>

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos.

Calculemos: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

I) Si $L<1$, la serie es convergente.

II) Si $L>1$ ó $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, la serie es divergente.

III) Si $L=1$, el criterio no decide.

Demostración.

I) Si $L<1$, elijamos un número real q tal que

$$L<q<1, \qquad (1)$$

De acuerdo con la definición de límite, existe un $m\in N$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \qquad \forall n>m,$$

por lo que

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < q$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < q$$

$$\frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} < q$$

$$\vdots$$

De donde:

$$a_{m+1} < a_m\, q$$

$$a_{m+2} < a_{m+1}\, q < a_m\, q^2$$

$$a_{m+3} < a_{m+2}\, q < a_{m+1} q^2 < a_m\, q^3$$

En consecuencia, a partir del término a_{m+1}, los términos de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son menores que los correspondientes términos de la serie geométrica.

$$a_m\, q + a_m\, q^2 + a_m\, q^3 + \dots \qquad (2)$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos, $L\geq 0$ y de (1): $0<q<1$, y la serie (2) es convergente.

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

II) Si $L>1$ ó $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$ cuando $n\to\infty$, existe un $m\in N$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \qquad \forall n\geq m.$$

es decir:

$$a_{n+1} > a_n, \qquad \forall n\geq m.$$

Es claro entonces que a_n no tiende a cero cuando $n\to\infty$, por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

III) Si aplicamos el criterio a la serie p tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

para cualquier valor de p.

Pero ya hemos demostrado que cuando $p>1$ la serie es convergente y cuando $p\leq 1$ divergente, quedando comprobado que L puede ser igual a uno tanto para series convergentes como para divergentes, por lo que en este caso el criterio no decide.

Ejemplo VII. 9.

a) Aplicando el criterio de d'Alembert a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ se obtiene:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

y la serie es convergente.

b) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n!\,(n+1)n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

y la serie es divergente.

c) Con ayuda del criterio de d'Alembert, resulta sencillo demostrar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{3^n}$$

del ejemplo VII. 7.

En efecto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5+(n+1)}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{5+n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+6}{n+5}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+6}{n+5} = \frac{1}{3}$$

por lo que la serie converge.

- -

Series alternadas.

Los criterios de comparación y de d'Alembert no son aplicables a series tales como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

que llamaremos series de signos alternados o, simplemente, series alternadas.

En general, una serie alternada es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

donde $a_n > 0$, $\forall n \in N$.

Existe un criterio que establece una condición suficiente para la convergencia de este tipo de series, llamado criterio de Leibniz.

Criterio de Leibniz.

La serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

donde $a_n > 0$ $\forall n \in N$, es convergente si:

$$a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in N \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración

Sea la serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

Si n es un número par, el término general de la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{n-1} - a_n$$

puede agruparse en la siguiente forma:

$S_n = (a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)$

Como $a_n > a_{n+1}$, los términos entre paréntesis son todos positivos y la sucesión $\{S_n\}$ es creciente.

Por otra parte, si agrupamos S_n en la forma:

$S_n = a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{n-2}-a_{n-1})-a_n$

por el mismo razonamiento vemos que $S_n < a_1$, y la sucesión es acotada.

Como $\{S_n\}$ es monótona y acotada, tiene límite, llamémosle L:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \quad \text{(si n es par).}$$

Nos resta demostrar que tomando un número impar de términos, el límite de la sucesión de sumas parciales es también L.

En efecto:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \qquad \text{(si n es par)}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

Por hipótesis: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$,

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = L + 0 = L$$

Hemos demostrado que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ tiene límite, por lo que dicha serie es convergente.

Ejemplo VII. 10

a) Mediante el criterio de Leibniz se puede demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$$

es convergente, ya que:

1) $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \cdots$

o bien: $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in N$

por lo que: $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in N$

y 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

b) Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

se tiene que

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in N$$

y como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

por el criterio de Leibniz la serie es convergente.

- -

En el ejemplo anterior se demostró que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

es convergente. Sin embargo, la serie que se obtiene reemplazando cada término por su valor absoluto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

es divergente (serie armónica).

Se dice por ello que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es una serie condicionalmente convergente.

Por otra parte, tanto la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$$

como la que se obtiene reemplazando cada término por su valor absoluto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

son series convergentes, por lo que se dice que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ es una serie absolutamente convergente.

Estos conceptos no sólo son aplicables a series alternadas, sino también a series de signos cualesquiera. En lo que sigue, cuando hablemos de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se entenderá que a_n puede tener cualquier signo, y representaremos mediante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a la serie que se forma reemplazando los términos de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ por sus respectivos valores absolutos.

<u>Teorema</u> VII. 3.

Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente.

Demostración.

Sean $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

y $Z_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$

Entonces:

$S_n + Z_n = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \ldots + (a_n + |a_n|)$

De aquí que, como $a_n + |a_n| \geq 0$, $\forall n \in N$, la sucesión $\{S_n + Z_n\}$ es monótona creciente y tiene cota inferior (cualquier número negativo).

Por otra parte, como $a_n \leq |a_n|$ implica que $a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, podemos escribir

$S_n + Z_n \leq 2|a_1| + 2|a_2| + \ldots + 2|a_n|$,

y como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, la sucesión $\{S_n + Z_n\}$ tiene una cota superior $(2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|)$.

En consecuencia la sucesión $\{S_n + Z_n\}$ es monótona y acotada, por lo que existe el límite:

$\lim\limits_{n \to \infty} (S_n + Z_n)$

Además, por hipótesis, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente y existe el límite

$\lim\limits_{n \to \infty} Z_n$

De aquí que, por propiedades de los límites

$\lim\limits_{n \to \infty} (S_n + Z_n) - \lim\limits_{n \to \infty} Z_n = \lim\limits_{n \to \infty} (S_n + Z_n - Z_n) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$

también existe, lo que demuestra que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplo VII. 11.

Podemos determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} = 0.54 - 0.15 - 0.19 - 0.08 + 0.03 + \ldots$$

(donde n está en radianes), analizando la serie de valores absolutos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} \right|$$

Dado que $|\cos(n)| \leq 1, \ \forall n \in N$, es claro que

$$\left| \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \forall n \in N \qquad (1)$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

es una serie p, con p = 3/2, converge.

De la expresión (1), por el criterio de comparación concluímos que

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} \right|$ es convergente, y, por el teorema VII. 3

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}}$, es también convergente.

> **Definición.**
>
> Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Obsérvese que, según el teorema VII. 3, toda serie absolutamente convergente es convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}}$, del ejemplo anterior, es absolutamente convergente, al igual que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

> **Definición.**
>
> Una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para la cual $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, se llama condicionalmente convergente.

Son ejemplos de series condicionalmente convergentes la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ya estudiada, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{\sqrt{n+1}}$, como el estudiante puede comprobar.

III INTEGRAL DE RIEMANN

INTEGRAL DEFINIDA E INTEGRAL INDEFINIDA.

OBJETIVOS.

OBJETIVO GENERAL:

El alumno comprenderá los fundamentos del cálculo integral de funciones de una sola variable independiente.

Al terminar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. Definir partición de un intervalo.
* 2. Definir norma de una partición.
* 3. Determinar una función escalonada que aproxime los valores de una función continua en un intervalo dado.
* 4. Dada una función escalonada en un intervalo, calcular el valor de la suma de Riemann.
5. Calcular el área bajo la curva, empleando series del tipo: Σm, Σm^2, Σm^3
* 6. Explicar el concepto de integral Definida, mediante la suma de Riemann, de una función continua de una variable independiente.
7. Explicar las condiciones que hacen una función integrable en un intervalo.
* 8. Explicar, mediante una figura, la interpretación geométrica de la integral Definida de una función continua.
9. Explicar tres o más aplicaciones diferentes de la Integral Definida.
* 10. Explicar cada una de las propiedades básicas de la Integral Definida.
11. Demostrar el Teorema del Valor medio del Cálculo Integral.
* 12. Explicar, con un diagrama, la representación del Teorema del Valor Medio.
13. Para una función derivable y continua dentro de un intervalo, demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.
14. Dadas unas funciones $f(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, . . ., $F_n(x)$, distinguir cuales de las $F_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son antiderivadas de $f(x)$.
* 15. Encontrar el valor de una integral indefinida por medio del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.
* 16. Dada una función integrable en un intervalo, calcular, usando la Regla de Barrow, el valor de su integral definida en ese intervalo.

* OBJETIVOS ESENCIALES.

INTEGRAL DEFINIDA

E

INTEGRAL INDEFINIDA

INDICE.

INTEGRAL DEFINIDA E INTEGRAL INDEFINIDA.

V.1 INTERVALO, PARTICION, NORMA.

Iniciaremos nuestro estudio del Cálculo Integral planteándonos el siguiente problema: Determinar el área comprendida entre la curva dada por la función $f: \{ x, y \mid x \in R , y = f(x) \}$, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje x (área bajo la curva).

Gráficamente se representa de la siguiente manera:

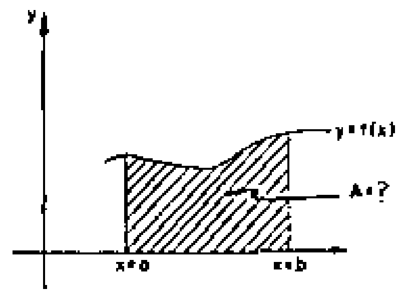


Figura V.1

Para la formulación precisa de este problema y para su solución es necesario recordar y definir algunos conceptos auxiliares.

Se llama *intervalo cerrado* a aquel conjunto $\{ x \mid x \in R \text{ y } a \leq x \leq b \}$; este intervalo puede dividirse en n subintervalos cuyos puntos frontera $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1}, x_n$ están sujetos a la siguiente condición:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Así, por ejemplo, el intervalo $[1, 3.5]$ se puede dividir arbitrariamente en cuatro subintervalos de la siguiente manera:

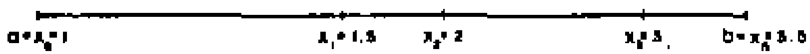


Figura V.2

y se cumple que:

$1 < 1.5 < 2 < 3 < 3.5$

En general si se representan los subintervalos sobre la recta numérica ó eje x, queda:

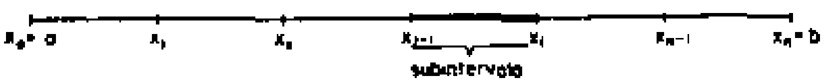


Figura V.3

A los n subintervalos así formados se les definirá como la partición P del intervalo $[a, b]$; el subintervalo iésimo semiabierto será : $[x_i, x_{i-1})$

Por lo tanto definiremos como norma de una partición P, y se representará por Δ, a la longitud del subintervalo mas grande de los subintervalos cerrados $[x_i - x_{i-1}]$.

Con las bases anteriores ya estamos listos para definir una función escalonada $S(x)$ de la siguiente manera:

Una función $s(x)$ cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$ se llama escalonada si existe una partición P para la cual $S(x)$ permanece constante en cada uno de los n subintervalos semiabiertos de P.

Ejemplo V. 1

Un empleado postal tiene la siguiente tabla para el cobro de timbres postales; represente a la función gráficamente.

Solución:

Peso (gr.)	Timbres ($)
$[0, 20)$	0.20
$[20, 50)$	0.50
$[50, 100)$	1.00
$[100, 120]$	3.00

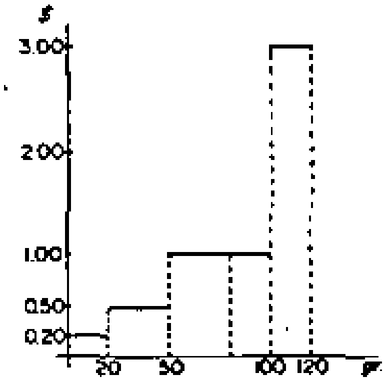


Figura V.4

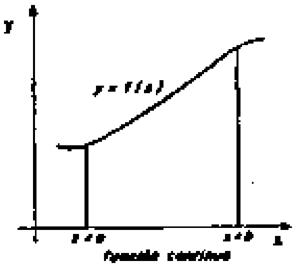
La función representada es una función escalonada pues cumple con la definición ya que:

El intervalo $[0, 120]$ se dividió en cuatro subintervalos $[0, 20)$, $[20, 50)$, $[50, 100)$, $[100, 120]$ correspondiendo en cada caso los valores constantes 0.20, 0.50, 1.0 y 3.0, respectivamente.

Los anteriores conceptos nos van a servir para determinar una función escalonada que aproxime los valores de una función continua en un intervalo dado, como se explica a continuación.

Si suponemos que ξ_i representa cualquier punto del intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, en cada subintervalo del intervalo cerrado $[a, b]$, podremos encontrar un valor ξ_i y a cada ξ_i le corresponderá un valor de la función $y = f(x)\big|_{x=\xi_i} = f(\xi_i)$ de tal forma que en la función continua $y = f(x)$, originalmente planteada, la podemos representar aproximadamente como la función escalonada $f[\xi_i]$, como se observa en la figura V.5.

Con este proceso podremos resolver en forma aproximada el problema planteado originalmente, que era encontrar el área bajo la curva de la figura V.1 o la figura V.5.a; si en su lugar calculamos el área de la figura V.5.b, ambas tenderán a ser iguales mientras mayor número de subintervalos haya, o sea mientras menor sea la norma de la partición.



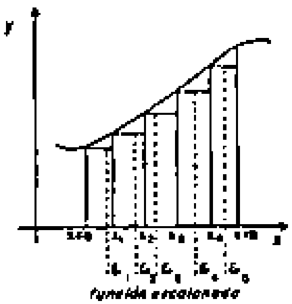


Figura V.5

El área bajo la función escalonada $f(\xi_i)$ para $\xi_i \in [a, b]$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ se puede determinar como se ilustra en la figura siguiente.

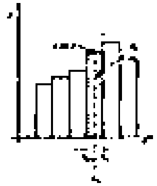


Figura V. 6

El área del rectángulo $\underset{n}{i}$ será igual a: $f(\xi_{\underset{n}{}})(x_i - x_{i-1}) = A_i$

el área total será : $A_t = \sum_{i=1} A_i = \sum_{i=1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, que es la solución aproximada al problema planteado.

V.2 SUMA DE RIEMANN.

A la expresión indicada en el párrafo anterior: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ ó $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$, se le llama " Suma de Riemann ".

Ejemplo V. 2

Encontrar un valor de la Suma de Riemann para la función continua $y = f(x) = 1 + x$ en el intervalo cerrado $[1, 10]$

Solución:

En este caso $[a, b] = [1, 10]$; dividamos el intervalo en 9 subintervalos iguales, de amplitud 1, y construyamos una función escalonada, como se muestra en la figura siguiente:

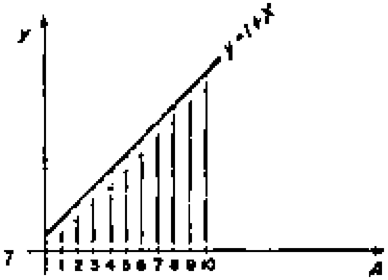


Figura V.7

$$A_T = \sum_{i=1}^{9} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= 2(1) + 3(1) + 4(1) + \ldots + 10(1)$$

$$= \underline{\underline{54}}$$

Si el número de subintervalos fuera mayor, el resultado sería mas aproximado al área bajo la curva.

V. 3 INTEGRAL DEFINIDA, FUNCION INTEGRABLE.

A continuación definiremos lo que representa que una función continua $y = f(x)$ sea integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$

Definición: La función $y = f(x)$ es integrable en $x \in [a, b]$; si existe un número L que satisfaga:

$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L \right| < \varepsilon$ tal que $\varepsilon > 0$ y prefijado, y además :

$|x_i - x_{i-1}| < \delta$ también $\delta > 0$ pequeño y prefijado entonces:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

En el momento en que $\Delta \to 0$, $x_{i-1} \to x_i$ y $f(\xi_i)$ tiende a $f(x)$, también se puede decir que el número de subintervalos tiende a infinito.

Al $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = L$ se le llama integral definida de la función continua $y = f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ y se le representa por $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Recuérdese que Δ representa la norma; al hacer tender ésta a cero, se garantiza que todos los demás intervalos tienden a cero, por lo que la integral definida no depende de los subintervalos $\Delta_i x$.

Recordemos también que si $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$; entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

$f(c)$ existe $\qquad c \in [a, b]$

$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Conviene aclarar que en la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, x representa la variable de integración, $f(x)$ se llama integrando o función integrable, " a " límite inferior, " b " límite superior y el símbolo $\int$ se llama signo de integración.

Ejemplo V. 3

Encontrar el área bajo la curva $y = x^2$ limitada por las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

Al intervalo $[0, 2]$, con amplitud igual a $2 - 0 = 2$, dividámoslo en n subintervalos iguales $\Delta_i x = \frac{2}{n}$ $\quad\cdots\cdots$ (1)

entonces:

$$a = 0 < \frac{2}{n} < \frac{4}{n} < \frac{6}{n} < \cdots < \frac{2}{n}k < \cdots < 2 = b$$

El área del késimo rectángulo será:

$A_k = f(\xi_k)\,\Delta_i x$; pero $\xi_k = \frac{2}{n}k$,

por lo tanto $f(\xi_k) = f\left(\frac{2}{n}k\right)$; $\quad A_k = f\left(\frac{2}{n}k\right)\Delta_i x \quad \cdots\cdots$ (2)

como $f(x) = x^2$, entonces $f\left(\frac{2}{n}k\right) = \frac{4}{n^2}k^2 \quad\cdots\cdots$ (3)

Sustituyendo (1) y (3) en (2) queda:

$$A_k = \frac{4}{n^2}k^2\,\frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}k^2$$

El área total será:

$$A_T = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n^3}k^2$$

pero $\frac{8}{n^3}$ es independiente de k por lo que puede salir de la sumatoria, quedando:

$$A_T = \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad\cdots\cdots \quad (4)$$

el problema ahora se reduce a encontrar el valor de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, que por inducción Matemática se puede demostrar que es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = A_k \qquad\cdots\cdots \quad (5)$$

sustituyendo (5) en (4) queda:

$$A_T = \frac{8}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n}\frac{8}{n^3}A_k \qquad\cdots\cdots \quad (6)$$

desarrollando y simplificando se obtiene:

$$A_T = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

como se conoce que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$

entonces $\lim\limits_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \lim\limits_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \qquad\cdots\cdots$ (7)

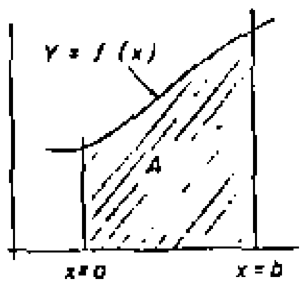
sustituyendo (6) en (7) queda:

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}$$

por lo tanto $\int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}$

V.4 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

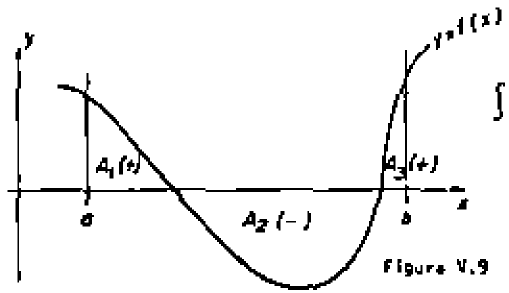
Se puede afirmar que la integral definida de la función continua $y = f(x)$, geométricamente representa el área abajo de la propia curva $y = f(x)$, limitada por las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la figura.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

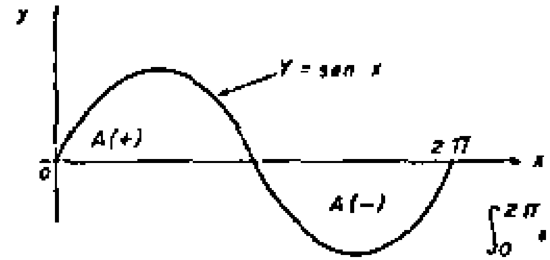
Figura V. 8

Obsérvese también que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de las sumas algebraicas de las áreas bajo la curva y no el área total en valor absoluto, según se ejemplifica en las siguientes figuras:



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

Figura V.9



$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = A - A = 0$$

Figura V.10

Ejemplo V.4

Calcular geométricamente la siguiente integral definida:

$$I = \int_1^3 (3 - 2x)\,dx.$$

Solución:

En este caso $y = 3 - 2x$; si la representamos gráficamente queda:

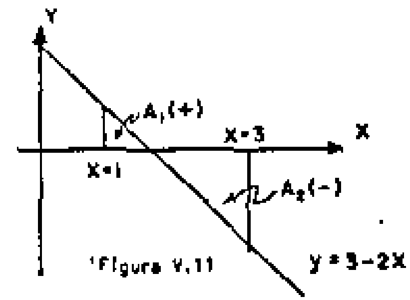


Figura V.11

Intersección con el eje x: $y = 0$ por lo tanto $0 = 3 - 2x$, donde $x = \frac{3}{2} = 1.5$ para $x = 1$, $y = 1$

para $x = 3$, $y = -3$

Las áreas serán:

$$A_1 = (1.5 - 1.0)\ 1/2 = 0.25$$

$$A_2 = (3 - 1.5)\ 3/2 = 2.25$$

Por lo tanto $A_T = A_1 - A_2 = 0.25 - 2.25 = -2$

De donde: $\int_1^3 (3 - 2x)\,dx = -2$

Ejemplo V.5

Calcular la siguiente integral, usando la interpretación geométrica:

$$I = \int_0^T (V_0 + g\,t)\,dt$$

en que V_0 = rapidez inicial.

g = aceleración de la gravedad.

V_0, g pueden considerarse constantes.

Solución:

En este caso la función integrable es:

$f(t) = V_0 + g\,t$, la representación gráfica de dicha función es:

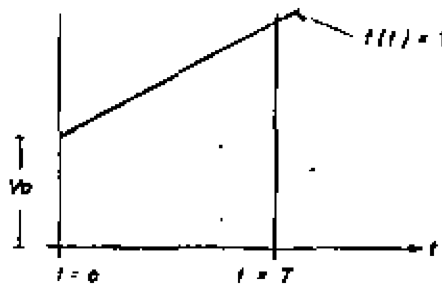


Figura V.12

Como la integral definida de la función $f(t) = V_0 + g\,t$ en el intervalo cerrado $[0, T]$ representa el área bajo la curva; la solución será:

$$A = \frac{\text{Base menor} + \text{Base mayor}}{2}\ \text{Altura}$$

o sea: $A = \dfrac{V_0 + (V_0 + g\,T)}{2}\,(T - 0) = V_0\,T + \dfrac{g\,T^2}{2}$

por lo tanto: $I = \int_0^T (V_0 + g\,t)\,dt = V_0\,T + \dfrac{g\,T^2}{2}$

V. 5 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

A continuación se dan algunas propiedades de la integral definida; todas ellas se pueden demostrar a partir de su definición.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$; entonces:

1.- $\int_a^b dx = b - a$

2.- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$; k = constante.

3.- $\int_a^b k\,dx = k\,(b - a)$; k = constante.

4.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

5.- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

6.- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$; $c \in [a, b]$

7.- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

es decir, la integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones

8.- Si $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

9.- Si $k > 0$, se cumple que:

$$\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

10.- Si $c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)\,dx$$

Ahora demostraremos a manera de ejemplos algunas de las propiedades y el resto se dejarán al alumno.

Ejemplo V.6

Demostrar que: $\int_a^b k\,d\,x = k\,(b - a)$.

Solución:

De la definición de la integral definida puede escribirse:

$$\int_a^b k\,d\,x = \lim_{\substack{\Delta \to 0\\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta_i\,x$$

en este caso $f(x) = k$

Dividamos el intervalo $[b - a]$ en n subintervalos, quedará:

$$\Delta_i\,x = \frac{b-a}{n}$$

entonces: $a = x_0 < a + \frac{b-a}{n} < a + 2\,\frac{b-a}{n} < a + 3\,\frac{b-a}{n} < \cdots$

$\cdots < a + k\,\frac{b-a}{n} < \cdots < a + n\,\frac{b-a}{n} = b$,

del área del késimo rectángulo será: $A_k = f(x_k)\,\Delta_i\,x$

$$A_k = [\Delta_i\,x]\,f\left[a + k\,\frac{(b-a)}{n}\right] = k\,\Delta_i\,x$$

por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta_i\,x = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k =$

$$= \frac{b-a}{n}\,nk = k\,(b-a)$$

de donde $\lim_{\substack{\Delta \to 0\\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta_i\,x = \lim_{\substack{\Delta \to 0\\ n \to \infty}} k\,(b-a) = k\,(b-a)$

pues k, b y a son independientes de Δ o de n.

Ejemplo V.7

Interpretar geométricamente la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x;\; c \in [a, b]$$

Solución:

Sea la función $y = f(x)$ y representémosla gráficamente en un sistema x Y:

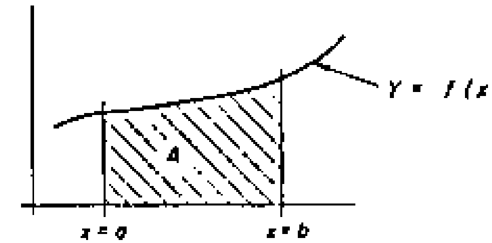


Figura V.13

la $\int_a^b f(x)\,d\,x$ geométricamente representa el área bajo la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ como se ve en la figura V.13.

Si c es una abscisa comprendida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces: $\int_a^c f(x)\,d\,x$, representa el área A_1 bajo la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$, y $x = c$, como se puede ver en la figura V.14 y $\int_c^b f(x)\,dx$ representa el área A_2 bajo la misma curva, pero entre las rectas $y = 0$, $x = c$, $x = b$.

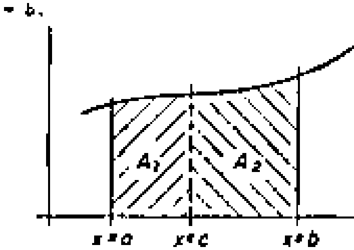


Figura V.14

Se puede observar que:

$$A_1 + A_2 = A_T$$

por lo que: $\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x$.

V.6 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL.

Si la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número $c \in [a, b]$ tal que haga que:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = f(c)\,(b - a)$$

<u>Demostración:</u> Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$; llamemos m al valor mínimo de la función y a M al valor máximo, así:

$$M = f(x_M)\ ;\ \forall\, x_M \in [a, b]$$

$$m = f(x_m)\ ;\ \forall\, x_m \in [a, b]$$

gráficamente queda:

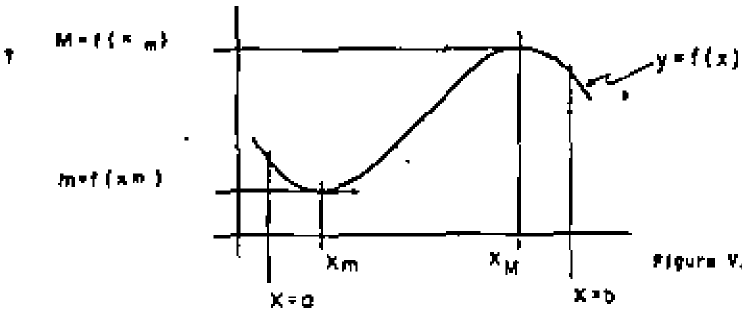


Figura V. 15.

se puede afirmar que: $m \le f(x) \le M,\ \forall\, x \in [a, b]$; también se puede decir que: $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ en base a la propiedad 3 y $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$; en base a la propiedad 8 se afirma lo siguiente:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

ya que: $m \le f(x) \le M$

es decir: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

dividiendo todos los miembros de la expresión anterior por $(b-a)$ y observando que la diferencia resulta positiva ya que $b > a$, se obtiene:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

pero $m = f(x_m)$ y $M = f(x_M)$ por lo que:

$$f(x_m) \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le f(x_M)$$

Dado que $f(x)$ es continua $\forall\, x \in [a, b]$, debe tener todos los -- valores comprendidos entre m y M; como $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ es uno de estos valores, entonces debe existir, por lo menos, un valor de $c \in [a, b]$ tal que:

$$m \le f(c) \le M$$

o sea: $$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$ que es lo que se quería demostrar.

Por otra parte, se puede interpretar geométricamente el Teorema del Valor medio del Cálculo Integral, basándose en la interpretación geométrica de la Integral Definida.

El teorema expresa que: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ es decir, -- asegura la existencia de un rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)$ que representa la misma área que la de $\int_a^b f(x)\,dx$, como se ilustra en la figura V. 16.

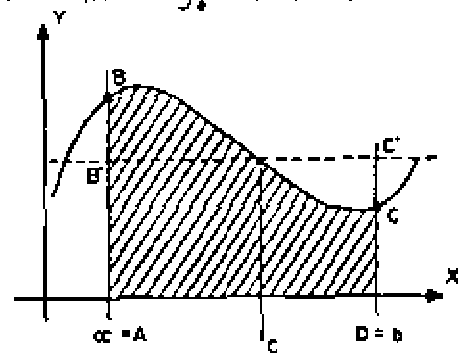


Figura V. 16

o sea $\text{Area}_{ABCD} = \text{Area}_{AB'C'D}$

pero $\text{Area}_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx$

y $\text{Area}_{AB'C'D} = (b-a)\,f(c)$.

Obsérvese también que este teorema asegura por lo menos la existencia -

de un valor de c. A la ordenada $f(c)$ se le llama ordenada media.

Ejemplo V.8

Determinar el valor de $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, d x$.

Solución:

Representamos gráficamente las funciones :

$f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x)\,g(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

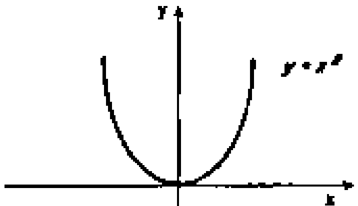


Figura V. 17

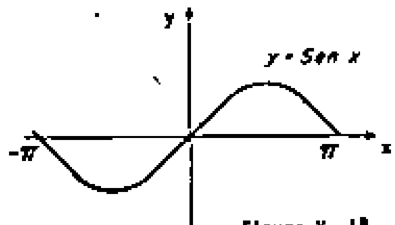
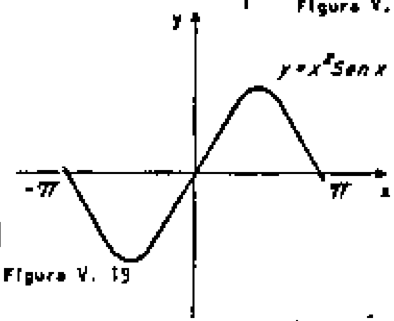


Figura V. 18

por lo tanto x^2 sen x quedará:



$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x = f(c)\,[b - a]$$

Figura V. 19

obsérvese que el origen divide a la figura en dos partes iguales.

$c = 0$ y $f(c) = 0$

por lo tanto $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x = 0\,[\pi - (-\pi)] = 0$

Ejemplo V. 9

Determinar la integral $\int_2^8 (3 + x)\, d x$, así como la ordenada media $f(c)$.

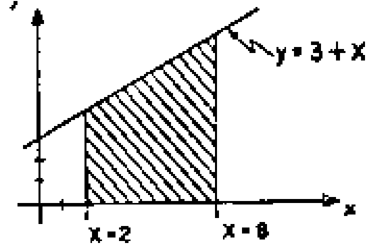


Figura V. 20

Solución:

Como $\int_2^8 (3 + x)\, d x$ representa el área bajo la curva quedará

para $x = 2$, $\quad y = 5$

si : $x = 8$ $\quad y = 11$

por lo que el área del trapecio será:

$$A = \frac{5 + 11}{2}\; 6 = 48$$

como $\quad A = \int_{a=2}^{b=8} (3 + x)\, d x$

entonces: $\int_2^8 (3 + x) d\, x = 48$

Apliquemos ahora el Teorema del Valor Medio que dice:

$$\int_a^b f(x)\, d x = f(c)\,[b - a]$$

sustituyendo queda:

$$\int_2^8 (3 + x)\, d x = f(c)\,[8 - 2] = 48$$

por lo tanto:

$$6\, f(c) = 48$$

donde $f(c) = 8$ y representa el valor promedio (ordenada media), entonces $f(c) = 3 + c = 8$, por lo que $c = 5$.

Ejemplo V. 10

Utilizando el Teorema del Valor Medio, encontrar c y $f(c)$ de la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{5} f(x)\, d x \text{ si } f(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \le x \le 2 \\ 5 - x & 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

Solución:

Si representamos gráficamente la función queda:

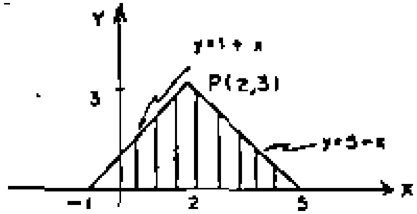


Figura V. 21

El valor de $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$, geométricamente representa el área bajo la curva por lo que es igual a 9.

Por otro lado, el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral establece:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,[b-a] \quad \forall c \in [a,b]$$

es decir: $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 9 = f(c)\,[b-a]$

en este caso: $[a,b] = [-1,5]$ y $b-a = 5-(-1) = 6$

por lo que:

$$9 = f(c)\,6 \quad \text{por lo tanto } f(c) = \frac{9}{6} = 1.5$$

pero $f(x) = 1 + x$ para $-1 \le x \le 2$

y $f(x) = 5 - x$ para $2 \le x \le 5$

por lo tanto $1 + c_1 = 1.5$ donde $c_1 = 0.5$

$5 - c_2 = 1.5$ donde $c_2 = 3.5$

es decir, en este caso existen dos valores de c (0.5 y 3.5) que aseguran la existencia de un rectángulo de base $(b-a) = 6$ y altura $f(c) = 1.5$ que representa la misma área que la de la $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

V.7 INTEGRAL DEFINIDA CON LIMITE SUPERIOR VARIABLE.

Hemos representado a la integral definida de la función continua $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$ con la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$; también conocemos que geométricamente corresponde al área bajo la curva $y = f(x)$ entre las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$; hagamos ahora un cambio de variable, es decir $x = u$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$ y estudiemos la segunda integral. Supongamos que el extremo superior es variable, o sea $b = x$; entonces el área obtenida para cada valor de x será distinta, lo que significa que es función de x, es decir:

$$A = A(x) = F(x)$$

$$A(x) = \int_a^x f(u)\,du = F(x);\; x \in [a,b]$$

Podemos concluir que la $\int_a^x f(u)\,du$ define a la función $F(x)$, cuyo dominio es el mismo que el de la función $f(u)$, es decir todo valor de $x \in [a,b]$.

Gráficamente se representa de la siguiente manera:

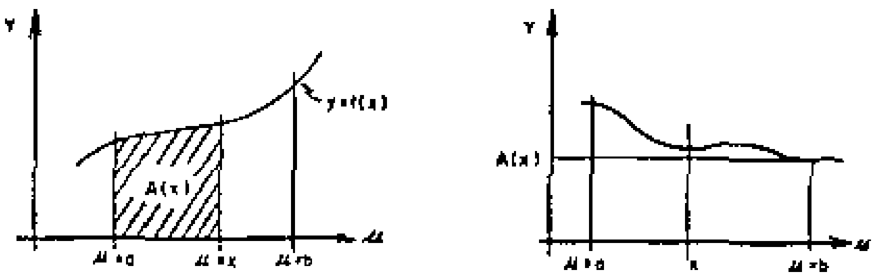


Figura V. 22

Ejemplo V. 11

Encontrar el valor de la siguiente integral y representarla gráficamente:

$$\int_0^x (x+2)\,dx = f(x)$$

Solución:

Como $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^x (x+2)\,dx$ entonces:

$f(x) = x + 2$; $a = 0$

$b = x$

si representamos gráficamente $f(x)$ queda:

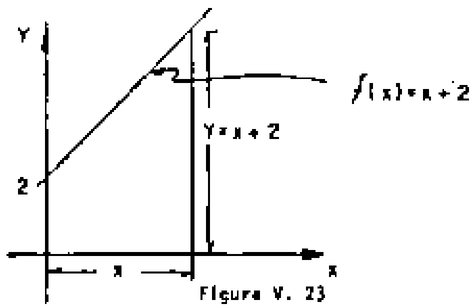


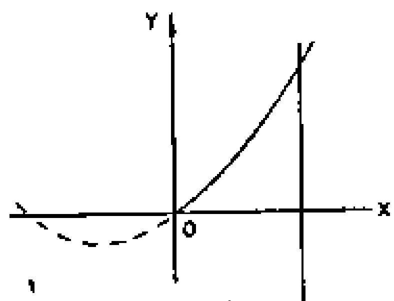
Figura V. 23

Se conoce que la integral representa el área bajo la curva entre $f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, entonces quedará:

$$A = \frac{2 + (x+2)}{2}\, x = \frac{4+x}{2}\, x = 2x + \frac{x^2}{2}$$

por lo tanto: $A = 2x + \frac{x^2}{2}$

Si a su vez representamos esta última función en un sistema de ejes coordenados X Y quedará:



$$y = 2x + \frac{x^2}{2}$$

$$2y = x^2 + 4x + 4 - 4$$

$$2y = (x+2)^2 - 4$$

$$(x+2)^2 = 2(y+2)$$

Figura V. 24

que es la ecuación de una parábola con vértice en $(-2, -2)$ simétrica con respecto a un eje paralelo al eje Y y cóncava hacia arriba; nótese que en todo caso solo interesa el intervalo $[0, x]$ en que $x \geq 0$.

V. 8 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL.

Ya hemos obtenido integrales definidas con límite superior variable, las cuales tienen la siguiente expresión:

$$\int_a^x f(u)\,du = F(x)$$

Enunciemos y demostremos ahora el teorema fundamental del cálculo integral a partir de la expresión anterior:

<u>TEOREMA:</u>

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea $x \in [a, b]$ sí $F(x)$ es la función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du \qquad \ldots\ldots (1)$$

entonces: $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

<u>Demostración</u>: Hagamos $x = x + \Delta x$, entonces (1) queda:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du = F(x + \Delta x) \qquad \ldots\ldots (2)$$

Pero por una de las propiedades de la integral definida se sabe que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \ldots\ (3)$$

$$\forall\ c \in [a, b]$$

entonces:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du = \int_a^x f(u)\,du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du \ \ldots (4)$$

ya que $x \in [a, x + \Delta x]$; despejando de (4) a $\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du$:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = \int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du \quad \int_a^x f(u)\,du \qquad \ldots\ldots (5)$$

sustituyendo (1) y (2) en (5).

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = F(x + \Delta x) - F(x) \qquad \ldots\ldots (6)$$

pero $F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$ o sea:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = \Delta F(x) \qquad \ldots\ldots (7)$$

como $f(u)$ es una función continua se puede aplicar a (5) el teorema del valor medio del cálculo integral, es decir:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = f(c)\left[(x+\Delta x)-x\right] = f(c)\left[\Delta x\right],\ \forall\, c \in \left[x,\ x+\Delta x\right] \qquad \ldots\ldots \quad (8)$$

Igualando (7) y (8):

$$\Delta F(x) = f(c)\,\Delta x \qquad \ldots\ldots \quad (9)$$

Dividiendo a (9) por Δx:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(c) \qquad \ldots\ldots \quad (10)$$

Ahora tomemos el límite de la expresión (10) cuando

$\Delta x \to 0$, es decir cuando $(x + \Delta x) \to x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \qquad \ldots\ldots \quad (11)$$

pero cuando $\Delta x \to 0$; $f(c) \to f(x)$,

puesto que: $c \in \left[x,\ x + \Delta x\right]$ entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x) \qquad \ldots\ldots \quad (12)$$

por otro lado $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{d\,F(x)}{dx}$ $\qquad \ldots\ldots \quad (13)$

de donde se puede concluir, igualando (12) y (13) que:

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x) \quad \text{l. q. q. d.}$$

Geométricamente se puede representar de la siguiente manera:

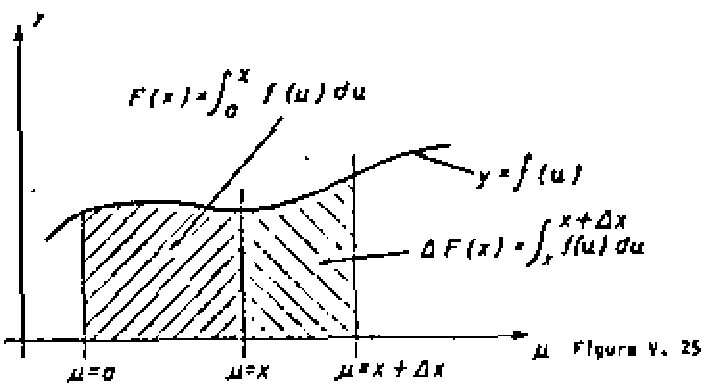


Figura V. 25

El teorema del valor medio queda expresado como sigue:

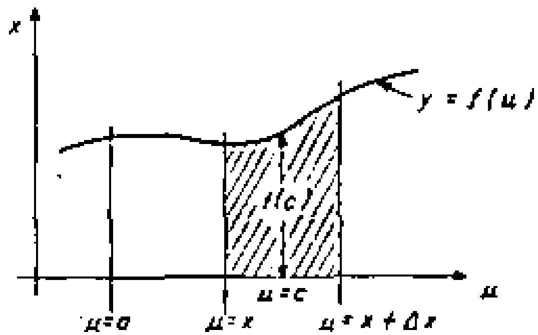


Figura V. 26

pero al ir haciendo mas pequeño Δx entonces $f(c)$ se aproxima a $f(x)$, como se ve en el siguiente diagrama:

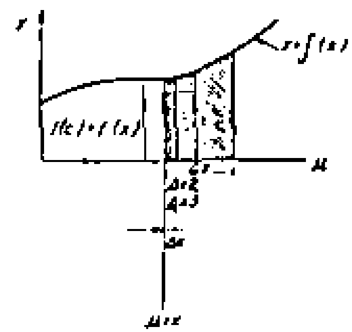


Figura V. 27

V. 5 RELACION ENTRE LA INTEGRACION Y LA DERIVACION DE UNA FUNCION CONTINUA.

A continuación discutiremos más ampliamente el teorema fundamental del cálculo integral; se estableció que si se tiene $\int_a^x f(u)\,du = F(x)$ entonces:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\,F(x)$$

Utilizando teoría de conjuntos lo anterior se puede expresar de la siguiente manera:

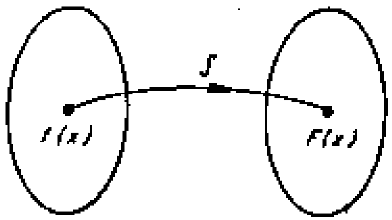


Figura V. 28

Es decir, mediante una transformación se llega al concepto de integral obteniéndose un valor F (x), pero también se ha determinado que:

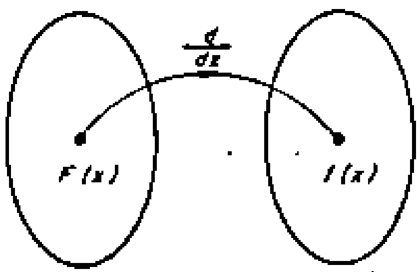


Figura V. 29

por tanto:

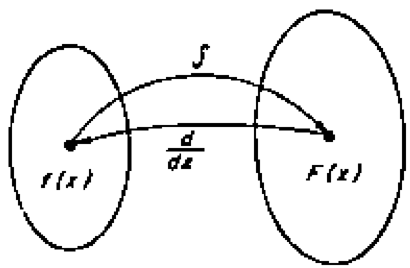


Figura V. 30

Como se ve la integración y la derivación son " transformaciones inversas ", es decir: $\int_a^x f(u)\,du = F(x)$ es " antiderivada " de f (x). La antiderivada mas general de f (x) es F (x) + C, donde C es una constante arbitraria, con lo que formalmente podemos definir que si F (x) es una antiderivada de f (x), entonces la expresión F (x) + C se llama integral indefinida de f (x), que se expresa $\int f(x)\,dx$.

De acuerdo con lo anterior, el problema de calcular el resultado de la operación $\int f(x)\,dx$, se concreta a buscar una función F (x) tal que: $F'(x) = f(x)$, es decir, tal que F (x) sea la antiderivada de f (x).

Ejemplo V. 12

Calcular la siguiente integral: $\int x^5\,dx$

Solución:

En este caso $f(x) = x^5$

F (x) puede ser:

$\frac{x^6}{6}$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6}\right) = x^5 = f(x)$

$\frac{x^6}{6} + 5$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6} + 5\right) = x^5 = f(x)$

$\frac{x^6}{6} + 2$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6} + 2\right) = x^5 = f(x)$

$\frac{x^6}{6} + c$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6} + c\right) = x^5 = f(x)$

en que c es una constante,

por lo tanto: $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$ en forma general.

$\frac{x^6}{6} + c$ es la antiderivada mas general de la función $f(x) = x^5$.

Ejemplo V. 13

Resolver la siguiente integral:

$\int \operatorname{sen} x\,dx$

Solución:

Como f (x) = sen x entonces F (x) puede ser:

$-\cos x$ ya que $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \operatorname{sen} x = f(x)$

$= - \cos x + c$ ya que $\frac{d}{dx}\,(- \cos x + c) = \operatorname{sen} x = f(x)$

por lo tanto $\int \operatorname{sen} x \, dx = - \cos x + c$ en forma general.

Ejemplo V. 14

Calcular la integral: $\int e^x \, dx$

Solución:

Como $f(x) = e^x$ entonces:

$$F(x) = e^x \text{ ya que } \frac{d}{dx}\, e^x = e^x.$$

o en forma general:

$$F(x) = e^x + c \text{ ya que } \frac{d}{dx}\left[e^x + c\right] = e^x$$

por lo tanto $\int e^x \, dx = e^x + c$

A toda función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para $\forall\, x \in [a, b]$, se le llama función primitiva de $f(x)$; se puede afirmar que si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ entonces $F(x) + c$ también lo es.

A la constante arbitraria " c " se le llama constante de integración y como se ha visto, es una cantidad independiente de la variable de integración x.

Como la constante de integración " c " es arbitraria, se puede concluir que la $\int f(x)\, dx$ tiene un número infinito de soluciones que difieren sólo en la constante de integración.

Conviene aclarar que para un problema dado el valor de la constante de integración se puede determinar si se conocen algunas condiciones particulares del problema como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo V. 15

Un punto material se mueve sobre el eje x de acuerdo a la siguiente rapidez:

$v = 3 + 5t$ en que v en $\frac{m}{seg}$ y t en seg ; determinar la ecuación que representa el desplazamiento x, si se conoce que el movimiento comienza a partir del origen.

Solución:

$$v = \frac{dx}{dt}\,;\quad dx = v\,dt\,;\quad x = \int v\,dt$$

para $v = 3 + 5t$

por lo tanto $\int v\,dt = \int (3 + 5t)\,dt = 3\int dt + 5\int t\,dt,$

Así

$$x = 3t + \frac{5}{2}\,t^2 + c$$

Con el fin de conocer para este caso la constante de integración se sabe que si $x = 0$, $t = 0$ o sea:

$$0 = 0 + 0 + c \quad \text{de donde } c = 0$$

y la ecuación del desplazamiento será:

$$\boxed{x = 3t + 2.5\,t^2}$$

V. 10 REGLA DE BARROW

A continuación veremos un método para calcular la integral definida conocido como Regla de Barrow.

Teorema:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es otra función también continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) \quad F(a)$$

Demostración: Hagamos $h(x) = \int_a^x f(u)\,du$, es decir:

$h(x)$ es la antiderivada de $f(u)$ o sea $h(x) = F(x) + C$

Si $x = a$ entonces la $\int_a^x f(u)\,du = \int_a^a f(u)\,du = 0$

por lo tanto: $h(x)\big|_{x=a} = 0\,;\quad 0 = F(a) + C$

de donde $C = -F(a)$

hagamos ahora $x = b$, entonces:

$$\int_a^{x=b} f(u)\,du = F(x) + C \Big|_{x=b} = F(b) + C;$$

pero $C = -F(a)$

por lo tanto $\int_a^b f(u)\,du = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$

que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo V. 16

Calcular $\int_2^4 (3x^3 - 2x^2 + 5)\,dx$

Solución:

En base a los teoremas sobre integrales se puede afirmar que:

$$I = \int_2^4 (3x^3 - 2x^2 + 5)\,dx = \int_2^4 3x^3\,dx - \int_2^4 2x^2\,dx + \int_2^4 5\,dx$$

encontrando ahora unas funciones $F(x)$ tales que $F'(x) = f(x)$ se obtiene:

$$I = 3\,\frac{x^4}{4}\Big]_2^4 - 2\,\frac{x^3}{3}\Big]_2^4 + 5x\Big]_2^4$$

Utilizando ahora la regla de Barrow queda:

$$I = \frac{3}{4}\left[4^4 - 2^4\right] - \frac{2}{3}\left[4^3 - 2^3\right] + 5\left[4 - 2\right]$$

$$I = \frac{3}{4}(256 - 16) - \frac{2}{3}(64 - 8) + 5(2)$$

$$I = \frac{3}{4}(240) - \frac{2}{3}(56) + 10$$

$$I = 180 - 37.3 + 10 = 190 - 37.3$$

Por lo tanto:

$$I = 152.7$$

Ejemplo V. 17

Calcular el área definida por la curva $y = 4x - x^2$, el eje x, y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

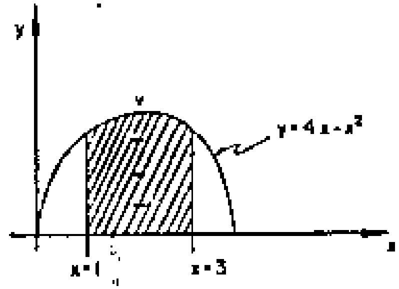


Figura V. 31

Solución:

Si $y = 4x - x^2$

$-y = x^2 - 4x + 4 - 4$

$-y + 4 = (x - 2)^2$

$-(y - 4) = (x - 2)^2$

que es la ecuación de una parábola, simétrica con respecto a un eje paralelo al eje Y con vértice en $v(2, 4)$ y cóncava hacia abajo.

De la interpretación geométrica, se conoce que:

$\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ (eje X), $x = a$ y $x = b$ por lo que se puede afirmar que:

$\int_1^3 (4x - x^2)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = 4x - x^2$ el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$; a continuación calcularemos el valor de la integral definida basándonos en las propiedades de la integral y en la regla de Barrow de la siguiente manera:

$$\int_1^3 (4x - x^2)\,dx = 4\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 x^2\,dx.$$

pero: $4\int_1^3 x\,dx = 4\,\frac{x^2}{2}\Big]_1^3 = 2x^2\Big]_1^3 = 2(9 - 1) = 16$

y: $-\int_1^3 x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big]_1^3 = -(9 - \frac{1}{3}) = -\frac{26}{3}$

por lo tanto $\int_1^3 (4x - x^2)\,dx = 16 - \frac{26}{3} = \frac{48 - 26}{3} = \frac{22}{3}$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{22}{3}\ u^2}$$

IV DESARROLLOS DE SERIES

VII. 4 SERIES DE POTENCIAS.

Existen series cuyos términos no necesariamente son constantes; por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots \qquad (1)$$

que llamaremos serie de potencias de x.

Es claro que para cada valor de x, la serie (1) es una serie de términos constantes. Veamos algunos casos.

Si $x = \frac{1}{2}$, se tiene la serie convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n+1} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Si $x = -3$, se tiene la serie divergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+1} = 1 - \frac{3}{2} + 3 - \frac{27}{4} + \cdots$$

Nótese que hemos tomado $x^0 = 1$ aún cuando x pueda valer cero, por conveniencia para la notación. Es claro que para $x=0$ se tiene un serie convergente.

Como vemos, no para todos los valores de x se obtienen series convergentes. Es importante entonces saber para que valores de x la serie (1) converge.

Ya que para ciertos valores de x se obtienen series alternadas, analicemos la serie de valores absolutos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n+1} \right| \qquad (2)$$

Aplicando el criterio de d'Alembert, la serie (2) converge para todo valor de $x \neq 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{n+2} \right|}{\left| \frac{x^n}{n+1} \right|} < 1$$

Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{n+1}{n+2} \right| < 1$$

o bien:

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| < 1 \qquad \text{(ya que x no depende de n)}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, la serie (2) converge para toda x tal que:

$$|x| < 1$$

En consecuencia, del teorema VII. 3, la serie (1) es convergente (absolutamente convergente) para valores de x tales que:

$$|x| < 1 \qquad \text{o bien:} \qquad -1 < x < 1.$$

Para $|x| = 1$, el criterio de d'Alembert no es aplicable, pues:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{n+2} \right|}{\left| \frac{x^n}{n+1} \right|} = 1$$

y debemos analizar por separado los casos cuando $x=1$ y $x=-1$.

Para x 1 se tiene la serie divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

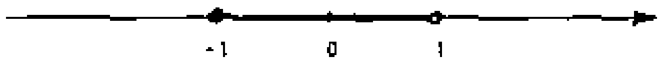
y para $x=-1$ se tiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

que es convergente (condicionalmente convergente).

Finalmente, puede demostrarse que para valores de x tales que $|x| > 1$, la serie (1) es divergente.

En resumen, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ es convergente únicamente para valores de x en el intervalo:



$$-1 \leq x < 1$$

llamado intervalo de convergencia.

Definición.

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

recibe el nombre de serie de potencias de x.

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots$$

recibe el nombre de serie de potencias de (x-a).

Nótese que la serie de potencias de x es un caso particular de la serie de potencias de (x-a). Observe que esta última siempre converge para x=a, ya que se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0$$

A cada serie de potencias corresponde un intervalo, llamado intervalo de convergencia, tal que la serie converge absolutamente para toda x en el interior de dicho intervalo, y diverge para toda x fuera de él. El punto medio del intervalo es a.

Teorema VII. 4 [1]

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ converge para al menos una $x \neq a$ y diverge para al menos otro valor de x, entonces existe un número real positivo r (llamado radio de convergencia) tal que la serie es absolutamente convergente para toda x en el intervalo $|x-a| < r$, y divergente para toda x fuera de él ($|x-a| > r$).

Según los teoremas VII. 3 y VII. 4, y por el criterio de d'Alembert, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

es absolutamente convergente si

$$|x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

y es divergente si

$$|x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

Para los puntos en la frontera del intervalo de convergencia, el criterio de d'Alembert no es aplicable, por lo que se hará necesario analizar por separado la convergencia de la serie en dichos puntos.

En casos extremos, el intervalo de convergencia puede reducirse a un sólo punto x=a, en cuyo caso diremos que el radio de convergencia es cero; o bien puede abarcar todo el eje real y diremos que el radio de convergencia es infinito.

(1) La demostración de este teorema se omite por estar fuera del alcance de este curso. El estudiante interesado puede consultar una demostración en la referencia 1 pág. 526.

Ejemplo VII. 12.

a) Obtengamos el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n(n+1)^2} = 1 + \frac{x-5}{12} + \frac{(x-5)^2}{81} + \ldots$$

Se tiene que

$$|x-5| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n(n+1)^2}{3^{n+1}(n+2)^2} \right| < 1$$

implica que

$$|x-5| \left(\tfrac{1}{3}\right) < 1$$

o bien

$$|x-5| < 3$$

por lo que r=3 es el radio de convergencia, y la serie converge absolutamente para todo valor de x en el intervalo:

$$-3 < x-5 < 3$$

es decir

$$2 < x < 8.$$

Analicemos la serie en los extremos del intervalo. Para x=8 se tiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

que es convergente (serie p, con p=2).

Para x=2 se tiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$$

que es absolutamente convergente (ver serie anterior).

En resumen, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n(n+1)^2}$ es convergente para todo valor de x en el intervalo:

$$2 \le x \le 8$$

Observe que en este caso la convergencia de la serie en los puntos extremos del intervalo es absoluta.

b) La siguiente serie converge únicamente para el valor x=-3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x+3)^n = 1+(x+3)+2!(x+3)^2+\ldots$$

ya que, para $x \neq -3$:

$$|x+3| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = |x+3| \lim_{n\to\infty} (n+1) > 1$$

y por el criterio de d'Alembert la serie diverge.

c) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

converge para todo valor de x, ya que

$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 = 0 < 1, \quad \forall x.$$

- -

Conviene mencionar que, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

es una serie de potencias con intervalo de convergencia $|x-a|<r$, entonces:

a) La serie puede derivarse término a término en dicho intervalo, y la serie obtenida

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-a)^{n-1}$$

tiene el mismo intervalo de convergencia.

b) La serie puede integrarse término a término en dicho intervalo, y la serie obtenida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

tiene el mismo intervalo de convergencia.

VII. 5 DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE DE POTENCIAS.

Una función puede desarrollarse en serie de potencias de x siguiendo varios procedimientos. Por ejemplo, para la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

prolongando indefinidamente la división

$$\begin{array}{r|l} 1-x & \underline{\;1 + x + x^2\;} \\ & 1 \\ & \underline{-1 + x} \\ & \quad x \\ & \quad \underline{-x + x^2} \\ & \qquad x^2 \\ & \qquad -x^2 + x^3 \end{array}$$

se obtendría que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Obsérvese que para $x=3$ la expresión anterior conduce a un resultado absurdo:

$$\frac{1}{1-3} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$$

ya que dicho valor está fuera del intervalo de convergencia de la serie ($|x|<1$).

En cambio, para valores de x dentro del intervalo de convergencia, podemos aproximar la función tomando un número finito de términos sin cometer un error "apreciable".

Por ejemplo, tomando los cuatro primeros términos

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \doteq 1 + x + x^2 + x^3 , \quad \text{si} \quad |x|<1$$

Para los valores de $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$, se tiene:

x	$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3$
$\frac{1}{2}$	2	1.875
$\frac{1}{4}$	1.333...	1.328
0	1	1

En muchas ocasiones se tiene una función cuya expresión es difícil de manejar y puede resultar conveniente sustituirla por un polinomio en x de grado n, lo cual se puede lograr si la función se desarrolla en una serie de potencias y se toman los términos necesarios para obtener la aproximación deseada.

Serie de Taylor.

Sea $f(x)$ una función, y busquemos expresarla en la forma:

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\dots \qquad (1)$$

Para obtener los coeficientes a_n podemos proceder en la siguiente forma:

Haciendo en (1) $x=a$, se obtiene

$$f(a)=a_0$$

que es el primer coeficiente. Para obtener los restantes, tomemos las derivadas sucesivas de (1) en el intervalo de convergencia de la serie:

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+4a_4(x-a)^3+\dots$$

$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\dots$$

$$f'''(x)=2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a)+\dots$$

$$f^{IV}(x)=2\cdot 3\cdot 4a_4+\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x)=n!\,a_n+\dots$$

Haciendo en estas expresiones $x=a$, obtenemos:

$$a_1=f'(a)$$

$$a_2=\frac{f''(a)}{2!}$$

$$a_3=\frac{f'''(a)}{3!}$$

$$a_4=\frac{f^{IV}(a)}{4!}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Llevando estos resultados a (1), se obtiene la expresión:

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\dots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\dots}$$

conocida como fórmula de Taylor.

Toda función que admita derivadas de cualquier orden en un intervalo abierto (x_1, x_2) puede ser expresada según esta fórmula para toda x en dicho intervalo.

Ejemplo VII. 13.

Para desarrollar en serie de Taylor la función $f(x)=Lx$ en potencias de $(x-1)$, calculemos:

$f(x)=Lx$	$f(1)=0$
$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f'(1)=1$
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f''(1)=-1$
$f'''(x)=\frac{2}{x^3}$	$f'''(1)=2$
$f^{IV}(x)=\frac{-6}{x^4}$	$f^{IV}(1)=-6$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$	$f^{(n)}(1)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

por lo que:

$$L(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots(1)$$

Como es fácil verificar, esta serie es absolutamente convergente en el intervalo

$$|x-1|<1$$

y condicionalmente convergente para uno de los extremos $(x=2)$; en consecuencia, la expresión (1) no es válida para x fuera de este intervalo

Se acostumbra decir que (1) es un desarrollo en serie de Taylor de la función Lx en un entorno de $x=1$.

Es posible aproximar el logaritmo natural de un número x, dentro del intervalo de convergencia, mediante el polinomio de tercer grado:

$$Lx\approx(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}\qquad 0<x\leq 2.$$

Calculemos, por ejemplo, el logaritmo de 1.5:

$$L1.5\doteq(1.5-1)-\frac{(1.5-1)^2}{2}+\frac{(1.5-1)^3}{3}=0.4166$$

Es claro que tomando más términos de la serie se obtiene una mejor aproximación.

Tomando cinco términos:

$$Lx\approx(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}\qquad 0<x\leq 2.$$

para $x=1.5$ se tendrá

$$L\,1.5=0.4073$$

que se aproxima más al valor real $L\,1.5=0.405465\ldots$

- -

Si en la serie de Taylor hacemos $a=0$, obtenemos:

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\ldots}$$

Expresión que nos permite desarrollar la función en una serie de potencias de x. Esta serie se conoce con el nombre de serie de Maclaurin.

Ejemplo VII. 14.

Para desarrollar la función e^x en serie de Maclaurin, calculemos:

$$\begin{array}{llll} f(x)=e^x & & & f(0)=1 \\ f'(x)=e^x & & & f'(0)=1 \\ f''(x)=e^x & & & f''(0)=1 \\ \vdots & & & \vdots \\ f^{(n)}(x)=e^x & & & f^{(n)}(0)=1 \end{array}$$

por lo que:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

o sea:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad(1)$$

Como vimos en el ejemplo VII. 12, c), la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

converge para todo valor de x, por lo que la expresión (1) es válida $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

En forma análoga, pueden obtenerse los desarrollos en serie de Maclaurin de las funciones senx y cosx:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Como es fácil comprobar, las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

son también convergentes para todo valor de x.

Ejemplo VII. 15.

Consideremos el problema de valuar el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x}$$

y la integral:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\text{sen}x}{x}\, dx$$

Estos problemas, que no tienen una solución inmediata, pueden resolverse empleando el desarrollo en serie de potencias de la función senx:

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

En efecto, según la expresión anterior

$$\frac{\text{sen}x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots \qquad (1)$$

de aquí que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Ahora, para obtener un valor aproximado de

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\text{sen}x}{x}\, dx$$

tomemos los primeros cuatro términos de la serie (1):

$$\frac{\text{sen}x}{x} \doteq 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}$$

de aquí que

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\text{sen}x}{x}\, dx \doteq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\right) dx$$

o sea:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\text{sen}x}{x}\, dx \doteq \left[x - \frac{x^3}{(3)3!} + \frac{x^5}{(5)5!} - \frac{x^7}{(7)7!}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\text{sen}x}{x}\, dx = (1 - 0.05555 + 0.00167 - 0.00003) -$$

$$- \left(\tfrac{1}{2} - 0.00694 + 0.00005 - 0.0000002\right)$$

Finalmente:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\text{sen}x}{x}\, dx = 0.45297$$

- -

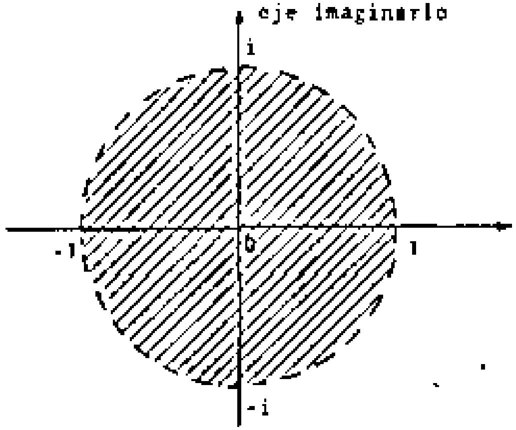
La mayoría de los conceptos tratados en este capítulo, pueden generalizarse para el caso de series con términos complejos. Por ejemplo, al inicio de la sección VII. 4 vimos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots$$

converge absolutamente para

$$|x| < 1$$

Si x puede tomar valores complejos, $|x|$ representa el módulo del número complejo x, y la expresión $|x| < 1$ queda representada en el plano de Argand por la región:



que recibe el nombre de círculo de convergencia. El radio de convergencia $r=1$ es el radio de dicho círculo.

Para toda $x \in C$ en el interior del círculo de convergencia, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ es absolutamente convergente.

En el caso general, la región de convergencia

$$|x-a| < r$$

está representada en el plano complejo por un círculo de radio r con centro en $x=a$.

Fórmula de Euler.

Considerando que x puede tomar valores complejos, en la expresión:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

podemos hacer $x=\theta i$ obteniendo:

$$e^{\theta i} = 1 + \theta i + \frac{(\theta i)^2}{2!} + \frac{(\theta i)^3}{3!} + \frac{(\theta i)^4}{4!} + \frac{(\theta i)^5}{5!} + \frac{(\theta i)^6}{6!} + \dots$$

o bien:

$$e^{\theta i} = 1 + i\,\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\,\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\,\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \qquad (1)$$

Por otra parte, de las funciones ya desarrolladas:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \qquad (2)$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

por lo que:

$$i\,\operatorname{sen}\,\theta = i\theta - i\,\frac{\theta^3}{3!} + i\,\frac{\theta^5}{5!} - i\,\frac{\theta^7}{7!} + \dots \qquad (3)$$

Por las propiedades de las series convergentes, de las expresiones (1), (2) y (3) se concluye que:

$$\boxed{e^{\theta i} = \cos\,\theta + i\,\operatorname{sen}\,\theta}$$

V ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

LA ECUACION DIFERENCIAL

Sea el siguiente problema:

Expresar matemáticamente el comportamiento del desplazamiento de un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial V_0, considerando despreciable la resistencia del aire.

Para cumplir con el enunciado propuesto deberemos primero tratar de identificar cuáles son las variables que intervienen en el fenómeno y entonces determinar cuáles de ellas son dependientes y cuáles independientes; posteriormente, deberemos hallar la relación entre ellas a través de una ley física.

Del análisis del enunciado podemos concluir que estamos ante un problema dinámico y que, por lo tanto, las variables involucradas básicamente serán el tiempo y el desplazamiento que, obviamente, nos conducen a dos variables íntimamente relacionadas con aquéllas y que son la velocidad y la aceleración

Ahora bien, dado que el desplazamiento del cuerpo, medido a partir de la superficie de la tierra, adquiere diferentes valores en diferentes instantes de tiempo, podemos concluir que la variable dependiente es precisamente el desplazamiento y, y entonces será claro que el tiempo t será la variable independiente. Es más, dado que para cada valor de t hay uno y sólo un valor de y, podemos afirmar que y es función de t, es decir, $y = y(t)$.

Por otro lado, como estamos ante un problema dinámico, conviene que hagamos un diagrama de cuerpo libre:

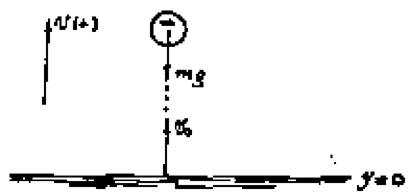


Fig. 1

Conceptos Básicos y Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

I La ecuación diferencial

II La ecuación diferencial ordinaria

- Conceptos de orden y grado
- Ecuación diferencial Lineal
- Solución de una ecuación diferencial

El movimiento del cuerpo estará regido por la segunda ley de Newton, que es la ley física que nos permite relacionar las variables identificadas. Su expresión es:

$$\Sigma F_y = ma \; ; \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot1)$$

del diagrama obtenemos lo siguiente:

$$\Sigma F_y = -mg.$$

Por lo tanto:

$$ma = -mg$$

$$\therefore \quad a = -g \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot2);$$

pero la aceleración puede expresarse en términos de la velocidad o el desplazamiento y en cada caso llegamos a las siguientes expresiones:

$$\frac{dv}{dt} = -g \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot3)$$

$$\text{ó} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4)$$

Cualquiera de las expresiones (1·3) y/o (1·4) es el modelo matemático del problema, es decir, es la abstracción del problema físico.

Podemos observar que dichas expresiones son igualdades que contienen derivadas de la incógnita, sea la velocidad v, el desplazamiento y, y que a diferencia de las ecuaciones algebraicas, dichas incógnitas son una función y no una variable numérica. A expresiones como las anteriores les llamaremos ecuaciones diferenciales.

> DEFINICION: Toda igualdad que relaciona a una función desconocida con su(s) variable(s) independiente(s) y su(s) derivada(s), se conoce con el nombre de ecuación diferencial.

Considerando que $v = v(t)$ y la definición anterior entonces la relación (1·1) es una ecuación diferencial.

Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales ligadas a fenómenos físicos son:

Oscilación de un péndulo de longitud L

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \theta = \theta(t) \quad \cdots\cdots \quad (1\cdot5)$$

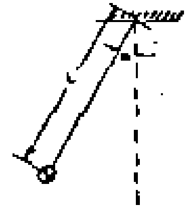


Fig. 2

Distribución de la temperatura en una placa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \, , \quad T = T(x,y) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot6)$$

Ecuación de un circuito eléctrico con resistencia R, inductancia L y fem variable E(t)

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \, , \quad i = i(t) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot7) \, .$$

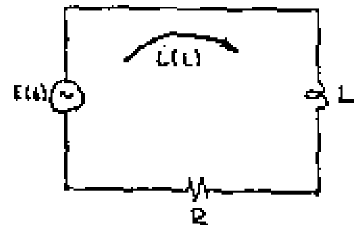


Fig. 3

Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.8)$$

Oscilación libre, con amortiguamiento, de una masa suspendida de un resorte.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + h\frac{dy}{dt} + ky = 0 \;,\quad y = y(t) \quad \ldots\ldots\ldots (I.9)$$

Podríamos escribir una lista extensa de ecuaciones diferenciales que representan matemáticamente sistemas físicos estudiados en ingeniería. En realidad, esta rama de la ciencia es donde mayor aplicación encuentra este tipo de estructuras matemáticas.

Todas las ecuaciones diferenciales presentadas hasta ahora, a excepción de las ecuaciones (I.6) y (I.8), contienen solamente derivadas ordinarias, debido a que sus incógnitas son funciones de una sola variable. A ecuaciones de este tipo se les denomina Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Las ecuaciones (I.6) y (I.8) contienen las derivadas parciales de la variable dependiente, que es una función de dos variables $T = T(x,y)$. Todas las ecuaciones de este tipo se conocen con cualquiera de los dos siguientes nombres: Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales ó simplemente, Ecuaciones Diferenciales Parciales. Un estudio más detallado de las mismas se presentará en el capítulo VI.

II ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA

1. Conceptos de orden y grado. A partir de este momento, nos ocuparemos exclusivamente de las ecuaciones diferenciales ordinarias. De los ejemplos de este tipo que dimos en la sección anterior, podemos ver que en las ecuaciones (I.4), (I.5), (I.6) y (I.9) el orden máximo de las derivadas involucradas es dos. En las ecuaciones (I.7) y (I.8), el orden máximo es uno. De las cuatro primeras citadas decimos que son de segundo orden; de las dos últimas que son de *primer orden*

DEFINICION: El orden de una ecuación diferencial ordinaria es el de la derivada de mayor orden que aparezca en dicha ecuación

Generalizando, una expresión del tipo:

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{n}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I.10)$$

donde x es la variable independiente, $y = y(x)$ la variable dependiente ó incógnita, $y', y'', y''', \ldots\ldots, y^{n}$ las n derivadas ordinarias de ella, será una ecuación diferencial ordinaria de orden n.

Con el fin de establecer el concepto de grado de una ecuación diferencial ordinaria veamos el siguiente:

EJEMPLO I.1 Encontrar una curva tal que la tangente a ella en cualquier punto forme con los ejes coordenados un triángulo de área constante e igual con a^2.

Solución:

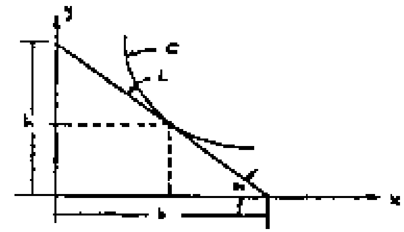


Fig. 4

De la figura hipotética

$$\tan\alpha = -y' \quad \text{-------------} (I.11)$$

$$b = x + y\cot\alpha \,,$$

por lo que

$$b = x - \frac{y}{y'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.12)$$

y

$$h = y + x\tan\alpha$$

ó sea

$$h = y - xy' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.13)$$

Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I.8)$$

Oscilación libre, con amortiguamiento, de una masa suspendida de un resorte,

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+h\frac{dy}{dt}+ky=0\,, \quad y=y(t) \quad \ldots\ldots \quad (I.9)$$

Podríamos escribir una lista extensa de ecuaciones diferenciales que representan matemáticamente, sistemas físicos estudiados en ingeniería. En realidad, esta rama de la ciencia es donde mayor aplicación encuentra este tipo de estructuras matemáticas.

Todas las ecuaciones diferenciales presentadas hasta ahora, a excepción de las ecuaciones (I.6) y (I.8), contienen solamente derivadas ordinarias, debido a que sus incognitas son funciones de una sola variable. A ecuaciones de este tipo se les denomina Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Las ecuaciones (I.6) y (I.8) contienen las derivadas parciales de la variable dependiente, que es una función de dos variables $T=T(x,y)$. Todas las ecuaciones de este tipo se conocen con cualquiera de los dos siguientes nombres: Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales ó simplemente, Ecuaciones Diferenciales Parciales. Un estudio más detallado de las mismas se presentará en el capítulo VI.

II ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA

1. Conceptos de orden y grado. A partir de este momento, nos ocuparemos exclusivamente de las ecuaciones diferenciales ordinarias. De los ejemplos de este tipo que dimos en la sección anterior, podemos ver que en las ecuaciones (I.4), (I.5), (I.6) y (I.9) el orden máximo de las derivadas involucradas es dos. En las ecuaciones (I.7) y (I.8), el orden máximo es uno. De las cuatro primeras citadas decimos que son de segundo orden; de las dos últimas, que son de primer orden.

DEFINICION: El orden de una ecuación diferencial ordinaria es el de la derivada de mayor orden que aparezca en dicha ecuación.

Generalizando, una expresión del tipo:

$$F(x,y,y',y'',\ldots\ldots,y^{n})=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I.10)$$

donde x es la variable independiente, $y=y(x)$ la variable dependiente ó incógnita, $y',y'',y''',\ldots\ldots,y^{n}$ las n derivadas ordinarias de ella, será una ecuacion diferencial ordinaria de orden n.

Con el fin de establecer el concepto de grado de una ecuacion diferencial ordinaria veamos el siguiente:

EJEMPLO I.1 Encontrar una curva tal que la tangente a ella en cualquier punto forme con los ejes coordenados un triangulo de área constante e igual con a^2.

Solución:

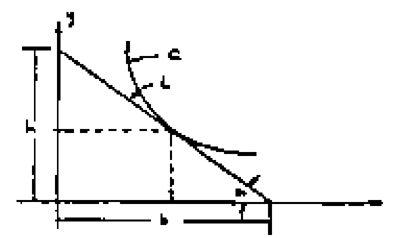


Fig. 4

De la figura hipotética

$$\tan\alpha=-y' \qquad\qquad \text{-------------} \quad (I.11)$$

$$b=x+y\cot\alpha\,,$$

por lo que

$$b=x-\frac{y}{y'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I.12)$$

$$\text{y} \quad h=y+x\tan\alpha$$

ó sea

$$h=y-xy' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I.13)$$

Según el enunciado del problema :

$$A = a^2.$$

por lo que :

$$\frac{hb}{2} = a^2$$

ó bien:

$$(Y - xY')\left(x - \frac{Y}{Y'}\right) = 2a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.14)$$

$$x^2Y'^2 - 2xYY' + Y^2 + 2a^2Y' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.15)$$

Notemos que la ecuación diferencial obtenida como modelo de la situación geométrica planteada, está expresada como un polinomio de grado dos en su primera derivada, que es en este caso la enésima ; por ello se dice que (1.15) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de segundo grado. Tenemos entonces la siguiente

> DEFINICION: Si una ecuación diferencial ordinaria de orden n puede expresarse como un polinomio de grado k en la enésima derivada, se dirá entonces que esa ecuación es de grado k, siempre y cuando k sea finito.

En el caso de que la ecuación diferencial no pueda ser expresada como un polinomio de grado k en su enésima derivada, entonces la definición de grado no es aplicable. Por ejemplo, la ecuación

$$e^{Y''} - xY' + Y = 0 \quad , \quad Y = Y(x) \quad \ldots\ldots \quad (1.16)$$

es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden cuyo grado no se puede definir por las razones antes expuestas.

La ecuación :

$$e^x \frac{d^2Y}{dx^2} + 2\left(\frac{dY}{dx}\right)^3 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.17)$$

es de segundo orden y primer grado; y la ecuación

$$\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^3 + Y\left(\frac{dY}{dx}\right)^5 + Y^3\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 = 5x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.18)$$

es una ecuación de segundo orden y tercer grado.

? LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL

Recordemos que $f(x,Y)$ es una función lineal en Y si y sólo si siendo $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$, se tiene :

$$f(x,Y) = f(x, c_1Y_1 + c_2Y_2)$$

$$f(x,Y) = c_1 f(x,Y_1) + c_2 f(x,Y_2)$$

Regresemos a nuestra ecuación (1.9) :

$$mY'' + hY' + kY = 0 \qquad \text{donde} \quad Y = Y(x)$$

Esta ecuacion puede escribirse como :

$$F(x, Y, Y', Y'') = 0$$

Si hacemos $\bar{Y} = [Y, Y', Y'']$, ¿ Es $F(x,\bar{Y})$ lineal ?

Debemos demostrar entonces que :

$$F(x, c_1\bar{Y}_1 + c_2\bar{Y}_2) = c_1F(x,\bar{Y}_1) + c_2F(x,\bar{Y}_2)$$

$$= c_1F(x, Y_1, Y_1', Y_1'') + c_2F(x, Y_2, Y_2', Y_2'')$$

Substituyendo $\bar{Y} = c_1\bar{Y}_1 + c_2\bar{Y}_2$ en la ecuación diferencial :

$$m[c_1Y_1 + c_2Y_2]'' + h[c_1Y_1 + c_2Y_2]' + k[c_1Y_1 + c_2Y_2] = 0$$

$$c_1mY_1'' + c_2mY_2'' + c_1hY_1' + c_2hY_2' + c_1kY_1 + c_2kY_2 = 0$$

Factorizando en c_1 y c_2 :

$$c_1[mY_1'' + hY_1' + kY_1] + c_2[mY_2'' + hY_2' + kY_2] = 0$$

$$\therefore \ c_1F(x, Y_1, Y_1', Y_1'') + c_2F(x, Y_2, Y_2', Y_2'') = 0$$

Por lo tanto $F(x,\bar{Y})$ es lineal en $\bar{Y}$, o lo que es lo mismo, $F(x, Y, Y', Y'')$ es lineal en la variable dependiente Y y en sus derivadas. Por ello decimos que la ecuación (1.9) es una ecuación diferencial lineal.

DEFINICION: Una ecuación diferencial ordinaria de orden n expresada como $F(x, Y, Y', \ldots, Y^{n}) = g(x)$, será lineal si y sólo si F es una función lineal en la variable dependiente Y en sus derivadas.

Según lo anterior, la ecuación

$$\frac{d\theta}{dt} + t\,\text{sen}\,\theta = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I\cdot 20)$$

es no lineal, dado que $\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2) \neq \text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2$. Observemos, en cambio que la ecuación

$$\frac{d\theta}{dt} + \theta\,\text{sen}\,t = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I\cdot 21)$$

sí es lineal, ya que la no linealidad se presenta en la variable independiente, lo que no afecta nuestro concepto.

Las siguientes ecuaciones son no lineales; porqué?

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + Y\,\text{sen}\,x = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I\cdot 22)$$

$$YY' + \frac{x-1}{4} = 3x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I\cdot 23)$$

$$Y'' - 2Y' = \ln Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I\cdot 24)$$

En general, $F(x, Y, Y', \ldots, Y^{n}) = a_0(x)Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \ldots + a_n(x)Y$ es una función lineal en Y y en sus derivadas. Por ello diremos que la expresión más general de una ecuación diferencial lineal de orden n es la siguiente:

$$a_0(x)Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)Y' + a_n(x)Y = Q(x)$$

Las ecuaciones de este tipo son de gran trascendencia en Ingeniería y dedicaremos el siguiente capítulo a su estudio.

Observemos que cuando $F(x, Y, Y', \ldots, Y^{n})$ es lineal en Y y sus derivadas, la ecuación $F(x, Y, Y', Y'', \ldots, Y^{n}) = Q(x)$ será necesariamente de primer grado. Lo inverso es falso, pues la ecuación (I·5), por ejemplo, es de primer grado y no es lineal.

3- SOLUCIÓN DE UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA

Volvamos al ejemplo del móvil lanzado verticalmente cuyo modelo matemático era:

$$\frac{dv}{dt} = -g \ ;$$

según ya sabemos, la incógnita en esta ecuación diferencial ordinaria es $v = v(t)$, que representa la rapidez con que el móvil se desplaza. ¿Cuál es la rapidez del móvil para cada instante t?

Para obtener la respuesta, expresemos la ecuación así:

$$dv = -g\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I\cdot 25)$$

Integrando en ambos miembros de la ecuación, llegamos a:

$$v = -gt + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I\cdot 26)$$

donde la constante c es una constante de integración y por ello esencial y arbitraria.

Observemos que la expresión (26) representa la regla de correspondencia entre el conjunto de la variable independiente t y el conjunto de la variable dependiente v, tal que se forman parejas ordenadas (t, v) en las cuales, según se concluye del comportamiento de v en (26), el primer elemento de ellas nunca se repite. Es decir, la relación establecida es unívoca y el resultado una función escalar de una sola variable.

$$v(t) = \{(t, v) \,/\, t \in D,\ v \in R,\ v : R \to R,\ v = -gt + c\} \ ;$$

si integramos dos veces la ecuación (4), que representa nuestro modelo matemático en términos del desplazamiento Y, llegaremos a que:

$$Y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + ct + c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I\cdot 27)$$

Un análisis similar al anterior nos hará afirmar que (27) es también una función escalar de una variable.

Además, substituyendo adecuadamente (26) y (27) en (3) y (4), respectivamente, se llega en ambos casos a una identidad

$$g = g$$

Las ecuaciones (26) y (27) son soluciones de las ecuaciones diferenciales (3) y (4) respectivamente.

> DEFINICION : La solución de una ecuación diferencial ordinaria es una función escalar de una variable escalar independiente, tal que, sustituida en dicha ecuación, la transforma en una identidad.

SOLUCION EXPLICITA Y SOLUCION IMPLICITA. Notemos que en (26) y (27), $\mathfrak{X}$ y Y están expresadas explícitamente como funciones de t, por lo que diremos que son soluciones explícitas de las ecuaciones (3) y (4) respectivamente. Sin embargo en algunos casos, sobre todo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, al resolver la ecuación diferencial llegamos a obtener una expresión que representa implícitamente a una infinidad de funciones escalares de una sola variable, que son soluciones de dicha ecuación; en esos casos se hace necesario poseer más información del problema a fin de obtener la solución más adecuada.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$YY' + x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I\text{-}28)$$

siendo $\quad Y = Y(x)$

La ecuación

$$x^2 + Y^2 = C^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I\text{-}29)$$

donde C^2 es una constante esencial y arbitraria, satisface a la ecuación diferencial.

En efecto, derivando (29) implícitamente tenemos :

$$2X + 2YY' = 0 \;;$$
$$X + YY' = 0$$

lo que sustituído en (28) nos da :

$$0 = 0$$

Se puede verificar que (29) expresa implícitamente una infinidad de funciones de x que son soluciones de (28). Dicha verificación es posible realizarla empleando "El teorema de la función implícita", el cual establece que la ecuación.

$$\phi(x, Y) = 0$$

expresa implícitamente a $Y = Y(x)$ $\forall\, x \in [a, b]$ si y sólo si $\frac{\partial \phi}{\partial Y} \neq 0$, dentro de este intervalo y además que $\phi(x, Y(x)) = 0$.

Gráficamente, cuatro de las funciones representadas implícitamente en (29) son las que se presentan en la figura.

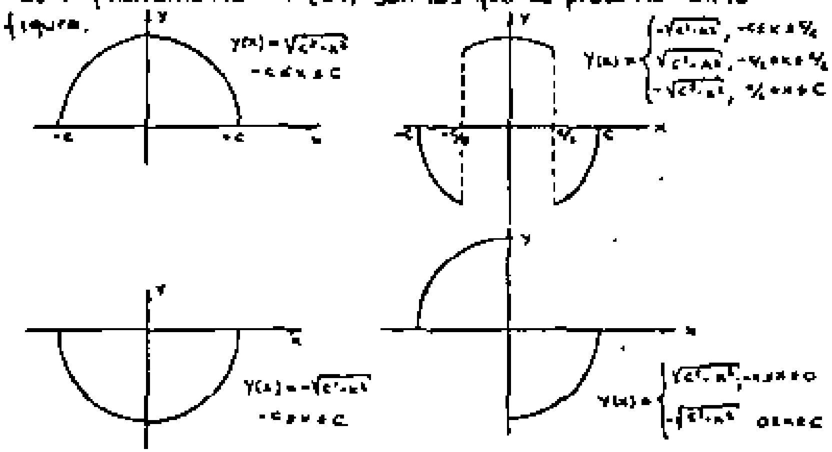


Fig. 5

Dependiendo de las condiciones del problema, cada una de ellas será solución de la ecuación diferencial propuesta. Si pedimos, por ejemplo, una solución que pase por (0,3) entonces tendremos de (29):

$$0+9=C'$$

ó sea

$$Y_1(x)=\sqrt{9-x^2} \qquad -3<x<3$$

En este ejemplo ha sido sencillo resolver la ecuación $\phi(x,y)=0$ y encontrar $Y=Y(x)$ tal que $\phi[x,Y(x)]=0$, pudiendo además escoger la solución más aceptable. Usualmente es imposible resolver la ecuación implícita para obtener una función explícita, debiendo que recurrir generalmente a procedimientos numéricos para tabular la solución explícita $Y=Y(x)$.

Por ejemplo, la ecuación de primer orden:

$$Y'=\frac{x^2}{1+Y^2} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \quad (\text{I}-30)$$

tiene como solución la función implícita

$$Y^3+3Y-X^3+C=0 \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (\text{I}-31)$$

No solamente es difícil resolver la ecuación (31) para funciones $Y=Y(x)$ que satisfagan la ecuación (30), sino que tambien es difícil determinar analíticamente los intervalos sobre los cuales están definidas las soluciones.

Entonces, toda $\phi(X,Y)=C$ que satisfaga

$$F(x,Y,Y',Y'',\ldots\ldots,Y^n)=0$$

Y además defina una función $Y=Y(x)$ que también satisfaga a la ecuación diferencial, se dice que representa una solución implícita de ella.

Cabe hacer notar que una diferencia fundamental entre ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, es que las primeras, siempre conducen a funciones explícitas y las segundas generalmente tienen soluciones implícitas.

Volvamos a la solución (24) del problema del movil:

$$v=-gt+C$$

Geométricamente, esta ecuación nos representa una familia de rectas paralelas entre sí y de pendiente igual a $-g$

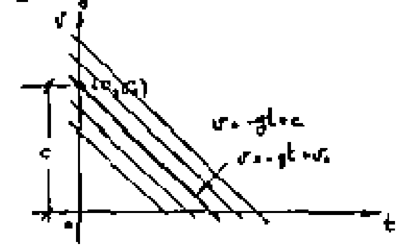


Fig. 6

Cada una de dichas rectas corresponde a un valor diferente de C y cada una de ellas satisface a la ecuación diferencial (3).

Según el enunciado del problema, el móvil es lanzado inicialmente con una velocidad v_0, es decir, en $t=0$, $v=v_0$ ó bien $v(0)=v_0$

Substituyendo esta condición en (24) tendremos.

$$v_0=-g(0)+C$$

$\therefore$

$$C=v_0$$

y la función correspondiente a dicha condición es;

$$v=-gt+v_0, \quad \text{- - - - - - - - - - - - -} \quad (\text{I}-32)$$

recta que pertenece a la familia representada por la ecuación (24).

Podemos comprobar fácilmente que la substitución adecuada de (32) en (3) nos conduce a una identidad, es decir, que (32) es solución de la ecuación diferencial.

Dado que la solución $v = v(t)$ expresada en (32) fue obtenida para el caso particular planteado, diremos que es una solución particular de la ecuación (5). Podemos entonces decir que la ecuación (26) expresa un conjunto de soluciones particulares de la ecuación diferencial (5) y por este hecho le llamaremos solución general de dicha ecuación.

Observemos que (5) es una ecuación diferencial de primer orden y que su solución general contiene sólo una constante esencial y arbitraria.

Con respecto a la ecuación (27):

$$Y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2;$$

representa una familia de parábolas cuyos vértices son $P(h,k)$ donde $h = \frac{C_1}{g}$ y $k = \frac{C_1^2}{2g} + C_2$ y de lado recto igual a g (compruébelo).

Fig. 7

Así entonces, la ecuación (27) representa la solución general de la ecuación (4) y cada una de las parábolas de la familia es solución particular de dicha ecuación diferencial. En este caso, observemos que existen, no uno, sino dos datos que condicionan la solución del problema: En $t = 0$, $y = 0$ (el cuerpo lanzado desde el suelo); y en $t = 0$, $v = y' = v_0 = Y_0'$

Substituyendo la primera condición en (27) tenemos:

$$0 = -\frac{1}{2}g(0) + C_1(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Derivando (27) respecto a t:

$$Y' = -gt + C_1$$

Substituyendo la segunda condición

$$V_0 = -g(0) + C_1$$

$$C_1 = V_0$$

La solución particular buscada es entonces:

$$Y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t \quad \text{- - - - - - - - - - - (I-33)}$$

Como puede observarse en la figura esta ecuación representa una parábola de la familia, precisamente aquella que pasa por el origen.

> Observemos que (27) es la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden y contiene dos constantes esenciales y arbitrarias.

También, como en el caso anterior, la solución particular fue obtenida de la solución general aplicando convenientemente las condiciones impuestas.

> DEFINICION: La solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer grado es una función de una sola variable que contiene un número de constantes esenciales y arbitrarias igual al orden de la ecuación diferencial y que, sustituida en ella, la transforma en una identidad.

La solución particular obviamente no contendrá constantes esenciales y arbitrarias. Sin embargo, algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que, al igual que las particulares, no contienen constantes esenciales y arbitra rias, pero con la circunstancia de que no se obtienen de la solución general de la ecuación.

DEFINICIÓN: Una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria de orden n y primer grado es una función de una sola variable que es obtenida de la solución general, valuando sus constantes esenciales y arbitrarias y que substituída en la ecuación diferencial la transforma en una identidad.

Sea el siguiente sistema mecánico.

EJEMPLO 2

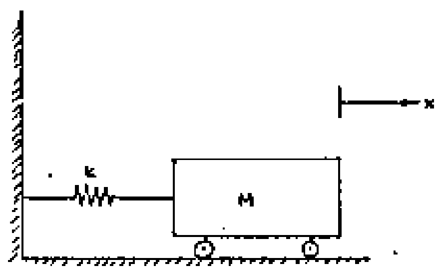


Fig. 8

cuyo modelo matemático, con base en el principio de conservación de la energía, es:

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}M(x')^2=E \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (1.34)$$

donde:

E = Energía total del sistema que, para este caso es constante.

k = Módulo de elasticidad del resorte.

Notemos que dicho modelo es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y segundo grado. La solución general es (compruébalo).

$$x=\sqrt{\frac{2E}{k}}\ \mathrm{Sen}\left[\pm\sqrt{\frac{k}{M}}\,t+c\right] \quad \text{- - - - - - -} \quad (1.35)$$

La ecuación diferencial lineal

I La ecuación diferencial lineal de 1er. orden

- Resolución del caso homogéneo
- Resolución del caso no homogéneo

II El operador diferencial

III La ecuación diferencial lineal general

- Resolución del caso homogéneo
- Resolución del caso no homogéneo
- El problema de valores iniciales y de valores en la frontera
- La existencia y unicidad de soluciones

IV Resolución de la ecuación lineal con coeficientes constantes

- Resolución del caso homogéneo. La ecuación característica y sus raíces
- Resolución del caso no homogéneo. El método de coeficientes indeterminados

V Variación de parámetros

VI Aplicaciones

LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL

En el capítulo anterior hemos estudiado algunos tipos de ecuaciones diferenciales, todas ellas de primer orden los cuales hemos resuelto en términos de funciones elementales del cálculo a partir de manipulaciones mas bien ingeniosas, de las Tecnicas de integración y sustitución. Esto conduce en cierta forma, a suponer que tal es el camino que debe seguirse en la solución de cualquier tipo de ecuaciones diferenciales, sin embargo, desde principios del siglo XVIII los matemáticos encontraron que son pocas las ecuaciones que admiten solución en términos de funciones elementales. Las investigaciones han puesto de manifiesto que es difícil obtener resultados y procedimientos generales aplicables a la solución de ecuaciones diferenciables, salvo para unos tipos especiales. Entre éstas se encuentran las llamadas "ecuaciones diferenciales lineales" las cuales admiten una teoría amplia y de grandes alcances. A pesar de que el estudio de tal teoría, ó al menos sus fundamentos, constituye de por sí un ejercicio intelectual casi indispensable para el estudioso de las ecuaciones diferenciales, no es esta la única razón por lo que se incluye en el programa, pues tales ecuaciones se presentan muy frecuentemente en problemas prácticos de ingeniería.

En este capítulo discutiremos algunos aspectos fundamentales de la teoría y método de solución para las ecuaciones diferenciales lineales; primero resolveremos la ecuación de primer orden; a continuación discutiremos la solución de la ecuación homogénea de 2º orden para, a partir de estos conceptos, generalizar y formalizar la teoría de ecuaciones lineales de orden n.

I.- LA ECUACION LINEAL DE PRIMER ORDEN

Supongamos que un hombre aborda un bote de motor en el muelle para hacer una travesía. El hombre y su bote pesan juntos 981 kg y el motor está diseñado para proporcionar al vehículo un empuje equivalente a una fuerza constante de 120 kg. El agua presenta una resistencia al movimiento que es directamente proporcional a la velocidad del bote, de tal forma que cuando la velocidad de éste es de 15 m/seg, la resistencia del agua es equivalente a una fuerza de 25 kg. Si nos interesa saber la velocidad del bote durante su trayectoria, podríamos emplear la segunda ley de Newton (la 2ª ley de Newton establece que la fuerza resultante de un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo, es directamente proporcional a la aceleración que le produce; donde la constante de proporcionalidad es la masa del cuerpo; esto se resume en la expresión: $F = ma$). La resultante F que actúa sobre el vehículo es la suma algebraica entre el empuje del motor y la resistencia que presenta el agua; esto es: $F = 120 - kV$

De acuerdo con la ley de Newton, se tiene:

$$120 - kV = ma$$

De la mecánica elemental sabemos que la aceleración es la rapidez de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, por lo que:

$$120 - kV = m\frac{dV}{dt} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - 1}$$

Ahora, como el peso del hombre y del bote es de 981 kg, su masa es de:

$$m = \frac{w}{g} = \frac{981}{9.81} = 100\ \frac{kg\cdot seg^2}{m}$$

Además, sabemos que cuando $V = 15$ m/seg, la resistencia del agua es de 25 kg, por lo que:

$$k(15) = 25 \quad \text{donde} \quad k = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}\ \frac{kg\text{-}seg}{m}$$

Remplazando los valores de m y k en la ecuación 1, Tenemos:

$$120 - \frac{5}{3}V = 100\frac{dV}{dt};$$

Se puede escribir como:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{60}V = \frac{6}{5} \quad \text{- - - - - - - - - - - - 2}$$

Con base en la definición de la ecuación diferencial ordinaria lineal vista en el capítulo anterior y cuya forma general es:

$$a_0(x)Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots + a_n(x)Y = Q(x),$$

si $n=1$, entonces :

$$Y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}Y = \frac{Q(x)}{a_0(x)} \quad , \quad a_0(x) \neq 0$$

haciendo $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ y $q(x) = \frac{Q(x)}{a_0(x)}$ tenemos :

$$Y' + P(x)Y = q(x) \quad \text{- - - - - - - - - - - - 3}$$

comparando 2 con 3 podemos decir que la ecuación diferencial ordinaria 2 es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden con $P(t) = \frac{1}{60}$ y $q(t) = \frac{4}{3}$. En general, toda ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden tiene la forma expresada en la ecuación 3.

En cuanto al desplazamiento del bote podemos distinguir dos casos.

1) El bote se desplaza por efecto de su motor.

2) El bote se desplaza por efecto de una fuerza aplicada inicialmente.

Notemos que en el caso 1), la fuerza que mueve al bote actúa durante todo el tiempo que dura el movimiento, es decir existe una excitación permanente en el sistema. En el caso 2) la fuerza que provoca el desplazamiento se aplica instantáneamente y desaparece, es decir no existe excitación permanente en el sistema.

El modelo correspondiente al caso 1) es precisamente la ecuación 2.

En el caso 2) el movimiento está regido también por la segunda ley de Newton, esto es, la resultante F que actúa sobre el bote, debido a que no existe excitación permanente en el sistema, es tan sólo la resistencia que presenta el agua al movimiento:

$$F = -kv$$

ó sea :

$$-kv = ma$$

y sustituyendo los valores de k y m obtenidos para el caso 1) tenemos :

$$-\frac{5}{3}v = 100a$$

pero $a = \frac{dv}{dt}$ y finalmente :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{60}v = 0 \quad \text{- - - - - - - - - - - - 4}$$

Notemos que la única diferencia entre las ecuaciones 2 y 4 es el miembro derecho de ambas, ya que mientras que en la primera éste es diferente de cero, en la segunda es igual a cero ; además, la primera nos representa un sistema con excitación permanente y en la segunda un sistema donde la excitación no es permanente. Esto nos conduce a distinguirlas llamándolas ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea y ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea, respectivamente.

En general toda ecuación diferencial ordinaria lineal de la forma:

$$a_0(x)Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots\cdots + a_n(x)Y = Q(x)$$

se llama no homogénea. y aquéllas de la forma:

$$a_0(x)Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots\cdots + a_n(x)Y = 0$$

son llamadas homogéneas.

Podemos observar en las ecuaciones 2 y 4 que el miembro derecho de ambas muestra la existencia o la carencia de excitación permanente en el sistema ; ahora bien como ambas ecuaciones están ligadas al mismo sistema, es preciso que notemos que a partir de la ecuación 2 podemos fácilmente obtener la ecuación 4, si eliminamos la excitación permanente en el sistema. Para señalar este hecho llamaremos a 4 la " *Ecuación homogénea asociada* " a 2.

> Conclusión: Toda ecuación ordinaria lineal de la forma $a_0(x)Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots\cdots + a_n(x)Y = Q(x)$ tiene asociada a ella una ecuación de la forma $a_0(x)Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots + a_n(x)Y = 0$ la cual se conoce como *Ecuación homogénea asociada*.

I.1 RESOLUCION DEL CASO HOMOGENEO

Consideremos el caso del bote que se mueve exclusivamente bajo el efecto de una fuerza aplicada inicialmente y cuyo modelo matemático es:

$$60v' + v = 0 \quad \text{- - - - - - - - - - - - - 5}$$

la cual puede escribirse como:

$$60\,dv + v\,dt = 0 \qquad (\text{forma } P(v,t)dt + Q(v,t)dv = 0)$$

Ecuación diferencial ordinaria no exacta, como puede fácilmente verificarse. ¿Existirá factor integrante función sólo de t?

Sabemos que debe cumplirse lo siguiente:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = f(t)$$

, si el factor integrante es función de la variable independiente; en nuestro caso tenemos:

$$P = v \quad \therefore \quad \frac{\partial P}{\partial v} = 1 \qquad\qquad \therefore \quad \frac{1}{60}[1-0] = \frac{1}{60} = f(t)$$

$$Q = 60 \quad \therefore \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Entonces la ecuación diferencial ordinaria admite un factor integrante función sólo de t.

¿Cuál es este factor?

Sabemos que si la ecuación diferencial ordinaria original la escribimos como

$$v' + \frac{1}{60}v = 0\ ;$$

entonces, $f(t)$ es precisamente el coeficiente de la variable dependiente en la ecuación anterior.

¿Todas las ecuaciones de la forma $y' + P(x)y = 0$ admiten el siguiente factor integrante: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$?

Para contestar la pregunta escribamos la ecuación en forma diferencial

$$p(x)\,y\,dx + dy = 0$$

donde:

$$P(x,y) = p(x)y \qquad y \qquad Q(x,y) = 1$$

entonces:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = p(x) \qquad y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$\therefore$ la ecuación diferencial ordinaria es no exacta.

Sabemos que $\mu(x)$ existe sólo si $\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = f(x)$; para nuestro caso, tenemos que:

$$\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = \frac{1}{1}\left[p(x) - 0\right] = p(x).$$

Se confirma entonces que existe $\mu(x)$ y de nuestra teoría del factor integrante tenemos, finalmente, que para tal ecuación diferencial ordinaria su factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

con lo cual nuestra pregunta anterior queda respondida afirmativamente.

Conclusión: Toda ecuación diferencial ordinaria de la forma $y' + P(x)y = 0$, es decir, toda ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden homogénea, admite un factor integrante de la forma $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$, función sólo de una variable.

Volviendo al problema modelado por la ecuación 5, tratemos de hallar su solución; para ello, multipliquemos la ecuación por el factor integrante determinado:

$$e^{\frac{1}{60}t}v' + \frac{1}{60}e^{\frac{1}{60}t}v = 0$$

pero el miembro izquierdo es $\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1}{60}t}v\right]$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1}{60}t}v\right] = 0$$

integrando, tenemos:

$$v = Ce^{-\frac{1}{60}t} \quad \text{-------------------} \quad 6$$

que es la solución general de la ecuación 5.

En general, dada la ecuación diferencial ordinaria lineal

$$y' + p(x)y = 0$$

cuyo factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

su solución general puede obtenerse por el mismo camino; entonces:

$$e^{\int p(x)dx}y' + p(x)e^{\int p(x)dx}y = 0$$

ó

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}\cdot y\right] = 0$$

integrando, tenemos:

$$e^{\int p(x)dx}y = C \qquad \therefore \quad y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad \text{--------} \quad 7$$

Si la fuerza aplicada inicialmente al bote le proporciona una velocidad igual a 5m/seg, la solución particular a este problema la obtenemos de la ecuación 6, valuándola constante esencial y arbitraria con la ecuación inicial:

$$v(0) = 5m/s$$
$$5 = Ce^{-\frac{1}{60}(0)} \qquad c = 5$$

es decir

$$v = 5e^{(-\frac{1}{60})t}$$

Gráficamente tenemos:

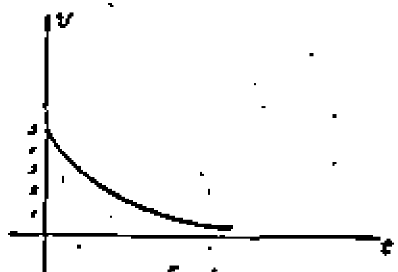


Fig. 1

I.2 RESOLUCION DEL CASO NO HOMOGENEO.

Ahora consideremos el problema cuyo modelo matemático es la ecuación diferencial ordinaria 2.

$$v' + \frac{1}{60}v = \frac{6}{5}\ ;$$

en forma diferencial tenemos:

$$dv + (\tfrac{1}{60}v - \tfrac{6}{5})dt = 0 \quad ; \quad (\text{forma } P(t,v)dt + Q(v,t)dv = 0)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria no exacta, como puede verificarse fácilmente.

¿ Existirá factor integrante función sólo de t?

Para contestar a esta pregunta, lo que procede es verificar si:

$$\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right] = f(t)$$

ó sea:

$$\frac{1}{1}\left[\frac{1}{60} - 0\right] = \frac{1}{60} = f(t)$$

de lo cual concluimos que sí existe $\mu(t)$ y, por lo tanto, dicho factor integrante tiene la forma:

$$\mu(t) = e^{\frac{1}{60}t}$$

Notemos que este factor integrante, que es de una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea, es el mismo que el de la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea asociada a ella.

¿ Toda ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

admite al siguiente factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}\ ?$$

La ecuación en cuestión puede escribirse como:

$$[p(x)y - q(x)]\,dx + dy = 0 \qquad \text{- - - - - - - - 8}$$

Entonces, para la ecuación 8 se tiene:

$$\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = p(x)\text{, que es función sólo de } x.$$

En consecuencia, la ecuación admite el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Conclusión: Toda ecuación diferencial ordinaria de la forma $y' + p(x)y = q(x)$, es decir lineal de primer orden no homogénea, admite el factor integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Para resolver la ecuación diferencial ordinaria 2, multipliquemos por el factor integrante determinado.

$$e^{\frac{1}{60}t}v + \frac{1}{60}e^{\frac{1}{60}t}v = \frac{6}{5}e^{\frac{1}{60}t};$$

pero nuevamente el miembro izquierdo es:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1}{60}t}v\right]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1}{60}t}v\right] = \frac{6}{5}e^{\frac{1}{60}t}$$

integrando, tenemos:

$$e^{\frac{1}{60}t}v = \frac{6}{5}\int e^{\frac{1}{60}t}dt + c$$

$$e^{\frac{1}{60}t}v = 72\,e^{\frac{1}{60}t} + c.$$

$$v = c\,e^{-\frac{1}{60}t} + 72 \qquad \text{-----------} \; 9$$

La solución particular de este problema la determinamos a partir de la solución 9, sustituyendo la condición inicial $V(0)=0$, puesto que el bote parte del reposo; valuando la constante esencial y arbitraria, tenemos:

$$0 = c\,e^{-\frac{1}{60}(0)} + 72 \quad \therefore \quad c = -72$$

$$\therefore \quad v = 72\left[1 - e^{-\frac{1}{60}t}\right]$$

Gráficamente tenemos:

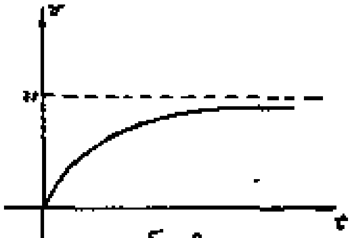


Fig. 2

Lo anterior significa que el bote tendrá como velocidad límite 72 m/seg, ya que si $t \to \infty$, $e^{-\frac{1}{60}t} \to 0$.

De la comparación de las soluciones 6 y 9 observamos que 9 es la suma de la solución general de la ecuación diferencial ordinaria homogénea asociada a la ecuación diferencial ordinaria 2, más otro término.

¿Qué significado tiene este segundo término?

Para contestar la pregunta anterior tomemos como un hecho que ese segundo término es una función de t. Sustituyámoslo en la ecuación diferencial ordinaria 2:

$$0 + \frac{72}{60} = \frac{6}{5}$$

Esto es:

$v(t) = 72$, es solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea 2. Apoyándonos en los conceptos de solución general, solución particular y solución singular podemos afirmar que esta función no es la solución general de la ecuación diferencial ordinaria propuesta, puesto que no satisface la definición; tampoco es solución singular puesto que, como ya vimos en el capítulo anterior, las ecuaciones diferenciales lineales no admiten este tipo de solución; así que $v(t) = 72$ es solución particular de la ecuación diferencial ordinaria lineal 2, ya que si en 9 hacemos $c = 0$ obtenemos precisamente dicha solución.

Si llamamos $v_H(t)$ a la solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea asociada a 2 y $v_p(t)$ a una solución particular de la misma, entonces podemos escribir la ecuación 9 como:

$$v(t) = v_H(t) + v_p(t)$$

En general, ¿tendremos siempre que la solución general de una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de primer orden se puede expresar como la suma de la solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea asociada, más una solución particular de la ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea?

La respuesta a esta interrogante requiere el establecimiento de la forma de la solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea;

sea: $\quad y' + p(x)y = q(x) \qquad \text{-----------} \; 10$

cuyo factor integrante es, como ya vimos, $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ entonces:

$$e^{\int p(x)dx} y' + p(x)\, e^{\int p(x)dx} y = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

pero el miembro izquierdo es:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx} y\right]$$

y por lo tanto:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx} y\right] = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

integrando:

$$e^{\int p(x)dx} y = \int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx + c$$

C es una constante de integración que incluye a las constantes de integración del miembro izquierdo y del miembro derecho.

$$\therefore \quad y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx\right] \quad ---11$$

Haciendo uso del resultado 7 vemos que la solución encontrada es la suma de la solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea asociada a la ecuación diferencial ordinaria lineal 10, más otro término cuya naturaleza investigamos a continuación. Hagamos

$$e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx\right] = h(x)$$

sustituyamos h(x) como posible solución en la ecuación diferencial ordinaria 10.

$$h'(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[e^{\int p(x)dx} q(x)\right] - p(x)\, e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx\right]$$

$$h'(x) = q(x) - p(x)\, e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx\right]$$

$$p(x)h = p(x)\, e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx\right]$$

$$h' + p(x)h = q(x)$$

$$q(x) - p(x)\, e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx\right] + p(x)\, e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx\right] = q(x)$$

$$\therefore \quad q(x) = q(x)$$

y h(x) es entonces solución de la ecuación diferencial ordinaria 10. Desde luego, h(x) no puede ser solución general de la ecuación diferencial ordinaria propuesta porque no satisface la definición; por otro lado, sabemos que toda ecuación diferencial ordinaria lineal no acepta soluciones singulares, por lo tanto $y = h(x)$ debe ser una solución particular de 11, lo cual se confirma si en el resultado obtenido (ec. 11) hacemos $C = 0$: obtenemos precisamente $y = h(x)$. De modo que si llamamos $y_h(x)$ a la solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea asociada a 10 y $y_p(x)$ a una solución particular de dicha ecuación, el resultado 11 (solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal 10) puede expresarse como sigue:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x);$$

con lo cual habremos contestado afirmativamente a la interrogante que nos planteamos.

II EL OPERADOR DIFERENCIAL LINEAL.

Consideremos el ejemplo con el cual iniciamos este capítulo y cuyo modelo es:

$$v' + \frac{1}{60} v = -\frac{c}{5} \quad -------------12$$

que como sabemos puede expresarse así:

$$\frac{d}{dt} v + \frac{1}{60} v = -\frac{c}{5};$$

ahora recordando que $\frac{d}{dt} = D$, podemos reescribirla como:

$$Dv + \frac{1}{60} v = \frac{c}{5} \quad -------------13$$

por otro lado sabemos que el operador D es una transformación lineal, es decir:

$$D(f_1(x) + f_2(x)) = Df_1(x) + Df_2(x)$$

$$D\alpha\, q(x) = \alpha\, Dq(x)$$

En general, cualquier operador de tipo D^n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ es una transformación lineal.

El alumno podrá verificar que $a_0(x)D$ es también un operador lineal. En general $a_0(x)D^n$ es un operador lineal.

Por otro lado, del álgebra de transformaciones lineales, sabemos que la suma de dos transformaciones lineales es también una transformación lineal; es decir, dados D^2 y D se tiene que $D^2 + D$ es también un operador lineal; en consecuencia la ecuación 13 puede reescribirse como:

$$\left(D + \frac{1}{60}\right)v = \frac{6}{5} \qquad \text{- - - - - - - - - - - - - - 14}$$

Además, la ecuación 12 puede expresarse en términos del desplazamiento x, es decir:

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{1}{60}\frac{d}{dt}x = \frac{6}{5};$$

que, empleando el operador D, queda:

$$D^2x + \frac{1}{60}Dx = \frac{6}{5}$$

y por lo ya visto llegamos finalmente a:

$$\left(D^2 + \frac{1}{60}D\right)x = \frac{6}{5} \qquad \text{- - - - - - - - - - - - 15}$$

En general, ecuaciones diferenciales lineales de mayor orden pueden ser escritas de manera similar, como podemos observar en el siguiente ejemplo:

sea: $\quad Y''' + 3Y'' + 2Y = \operatorname{sen} x \quad ; \quad Y = Y(x)$

Escribirla en términos del operador D, tenemos, por lo ya visto:

$$(D^3 + 3D^2 + 2)Y = \operatorname{sen} x \qquad \text{- - - - - - - - - - - 16}$$

Debemos notar que en las ecuaciones 14, 15 y 16, el operador que actúa sobre la variable dependiente es un polinomio en D, que denotaremos como $P(D)$ y que además tiene coeficientes constantes;

Ahora sea la siguiente ecuación:

$$x^2Y'' + \frac{1}{x}Y' + Y = 0;$$

Por lo ya comentado, esta ecuación puede escribirse como:

$$\left(x^2D^2 + \frac{1}{x}D + 1\right)Y = 0$$

$$P(D) = x^2D^2 + \frac{1}{x}D + 1$$

En general, una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n se puede escribir como:

$$a_0(x)Y^n + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots + a_n(x)Y = Q(x)$$

o bien:

$$\left[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_n(x)\right]Y = Q(x)$$

donde

$$P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_n(x)$$

> DEFINICIÓN. El operador lineal $P(D)$ será llamado "Operador diferencial lineal de orden n" en el intervalo $x \in [a, b]$ si puede expresarse en la forma:
>
> $$P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_n(x), \quad a_0(x) \neq 0 \quad \cdots 17$$
>
> donde los coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$ $a_n(x)$ son funciones continuas en dicho intervalo.

Verifiquemos que, en efecto, cualquier operador diferencial de la forma 17 es lineal.

Sean $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ dos funciones diferenciales de orden n.

i) $P(D)[Y_1(x) + Y_2(x)] = [a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_n(x)][Y_1(x) + Y_2(x)]$
$= a_0(x)D^n[Y_1(x) + Y_2(x)] + a_1(x)D^{n-1}[Y_1(x) + Y_2(x)] + \cdots + a_n(x)[Y_1(x) + Y_2(x)]$
$= [a_0(x)D^nY_1(x) + \cdots + a_n(x)Y_1(x)] + [a_0(x)D^nY_2(x) + \cdots + a_n(x)Y_2(x)]$
$= P(D)Y_1(x) + P(D)Y_2(x)$

ii) $P(D)[\alpha Y_1(x)] = [a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_n(x)][\alpha Y_1(x)]$
$= a_0(x)D^n[\alpha Y_1(x)] + a_1(x)D^{n-1}[\alpha Y_1(x)] + \cdots + a_n(x)[\alpha Y_1(x)]$
$= \alpha a_0(x)D^nY_1(x) + \alpha a_1(x)D^{n-1}Y_1(x) + \cdots + \alpha a_n(x)Y_1(x)$
$= \alpha P(D)Y_1(x)$

por lo tanto el operador diferencial es lineal.

III.- LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL GENERAL

III.1. Solución de la ecuación homogénea

Consideremos la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea.

$$Y'' + a_1(x)Y' + a_2(x)Y = 0 , \qquad Y = Y(x) \quad \dots\dots \quad 18$$

sea $Y(x) = Y_1(x)$ una solución de dicha ecuación. ¿ $Y(x) = C_1Y_1(x)$ donde C_1 es una constante arbitraria es tambien solucion de 18?

Verifiquemos

$Y'(x) = C_1 Y_1'(x)$

$Y''(x) = C_1 Y_1''(x)$

sustituyendo en 18.

$$C_1Y_1''(x) + C_1a_1(x)Y_1'(x) + C_1a_2(x)Y_1(x) = 0$$

$$C_1\underbrace{[Y_1''(x) + a_1(x)Y_1'(x) + a_2(x)Y_1(x)]}_{0} = 0$$

$\therefore 0 = 0$

Es decir $Y(x) = C_1Y_1(x)$ es solución de 18

Sea ahora $Y(x) = Y_2(x)$ otra solución de 18 de modo que $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ sean linealmente independientes; por lo que vimos anteriormente, entonces $Y(x) = C_2Y_2(x)$, C_2 constante arbitraria, también es solución de 18.

¿ $Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x)$ es solución de 18 ?

Verifiquemos:

$Y'(x) = C_1Y_1'(x) + C_2Y_2'(x)$

$Y''(x) = C_1Y_1''(x) + C_2Y_2''(x)$

sustituyendo en 18

$$C_1Y_1''(x) + C_2Y_2''(x) + a_1(x)[C_1Y_1'(x) + C_2Y_2'(x)] + a_2(x)[C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x)] = 0$$

reacomodemos:

$$C_1\underbrace{[Y_1''(x) + a_1(x)Y_1'(x) + a_2(x)Y_1(x)]}_{0} + C_2\underbrace{[Y_2''(x) + a_1(x)Y_2'(x) + a_2(x)Y_2(x)]}_{0} = 0$$

Es decir $Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x)$ $\dots\dots\dots\dots$ 18*
es solución de la ecuación 18

¿Qué tipo de solución es la función dada por 18*? Sabemos que no puede ser solución singular puesto que la ecuación 18 es lineal; tampoco es particular ya que la expresion 18* involucra constantes arbitrarias.

¿ Es solución general ?

Con base en la definición de solución general de una ecuación diferencial ordinaria, podemos contestar afirmativamente, ya que 18* satisface a la ecuación 18 y además tiene tantas constantes arbitrarias como es el orden de la ecuación.

> Conclusión.- la función $Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x)$ es la solución general de la ecuación 18.

El resultado que alcanzamos en el párrafo anterior se puede generalizar con el siguiente:

TEOREMA 1 Sea la ecuación diferencial

$$[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots\cdots a_n(x)]Y = 0$$

lineal, homogénea, de orden n y sean $Y_1(x), Y_2(x), \dots Y_n(x)$ n funciones linealmente independientes soluciones de la ecuación; entonces:

$$Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \cdots\cdots + C_nY_n(x).$$

es la solución general de dicha ecuación.

Con base en lo desarrollado para la ecuación 18, el alumno podrá demostrar fácilmente la verdad del teorema 1

EJEMPLO 1 Dada la ecuación

$$xy'' - (x+3)y' + y = 0 \qquad , \qquad x > 0$$

y dos soluciones de ella

$y_1 = x + 3$

$y_2 = e^x(x^2 - 4x + 6)$

¿ $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ es la solución general de la ecuación?

Por el teorema 1 vemos que esto sería cierto si $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ fueran linealmente independientes.

Sabemos que una condición suficiente para la independencia de un conjunto de n funciones es que el Wronskiano de las mismas sea diferente de cero, en el intervalo donde se definen las funciones.

En nuestro caso, Y_1, Y_2 están definidas $\forall x \in \mathbb{R}$. Determinemos el valor del Wronskiano para Y_1 y Y_2.

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{bmatrix} x+3 & e^x(x^2-4x+6) \\ 1 & e^x(2x-4) + e^x(x^2-4x+6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+3) & e^x(x^2-4x+6) \\ 1 & e^x(x^2-2x+2) \end{bmatrix}$$

$$= e^x(x+3)(x^2-2x+2) - e^x(x^2-4x+6) = e^x x^3$$

$\therefore \quad W(Y_1, Y_2) \neq 0 \qquad \forall x \neq 0$

Por lo tanto $Y_1 = x+3$ y $Y_2 = e^x(x^2-4x+6)$ son linealmente independientes y en consecuencia:

$$Y(x) = C_1(x+3) + C_2 e^x(x^2-4x+6)$$

es la solución general de la ecuación propuesta.

$\boxed{\text{EJEMPLO 2}}$ Dada la ecuación

$$Y'' + (\operatorname{tg} x - 2\cot x)Y' = 0$$

y dos soluciones de ella

$$Y_1(x) = \operatorname{sen}^3 x$$
$$Y_2(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$$

¿ $Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x)$ es solución general de la ecuación ? Nuevamente, por el teorema 1, habrá que demostrar que $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son linealmente independientes, para que $Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x)$ sea la solución general. Escojamos un camino diferente al uso del Wronskiano.

sea $\quad C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) = 0$

consideremos $C_1 \neq 0 \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}$.

entonces:

$$C_2 = -\frac{C_1 Y_1(x)}{Y_2(x)} = -\frac{C_1(\operatorname{sen}^3 x)}{\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x}$$

como $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x+x) = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$

tenemos

$$C_2 = -\frac{C_1 \operatorname{sen}^2 x}{1-\cos^2 x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{C_1 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{C_1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}C_1$$

$\therefore$ Existen escalares C_1 y C_2 diferentes de cero tales que

$$C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) = 0$$

$\therefore$ Y_1 e Y_2 son linealmente dependientes.

$\therefore$ $Y = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x)$ no es la solución general de la ecuación dada.

$\boxed{\text{III.2 SOLUCION DE LA ECUACION NO HOMOGENEA.}}$

Consideremos la siguiente ecuación

$$Y' + p(x)Y = q_1(x) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 19$$

sea $Y = Y_1(x)$ una solución de ella:

Se cumple entonces que:

$$Y_1'(x) + p(x)Y_1(x) = q_1(x)$$

¿ La función $Y = C_1 Y_1(x)$ es solución de la ecuación 19, si $C_1 \neq 1$?

Verifiquemos:

$$Y'(x) = C_1 Y_1'(x)$$

sustituyamos en 19

$$C_1 Y_1'(x) + C_1 p(x) Y_1(x) = C_1[Y_1'(x) + p(x)Y_1(x)] = C_1 q_1(x) \neq q_1(x)$$

$$Y = C_1 Y_1(x) \quad \text{no es solución de 19}$$

Sea ahora

$$Y' + p(x)Y = q_2(x) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 20$$

y consideremos que $Y = Y_2(x)$ es una solución de ella. Se cumple entonces que:

$$Y_2'(x) - p(x)Y_2(x) = q_2(x)$$

Consideremos la siguiente ecuación:

$$Y' + P(x)Y = q_1(x) + q_2(x) \quad \dots\dots\dots \quad 21$$

¿ $Y = Y_1(x) + Y_2(x)$ será solución de dicha ecuación?
Verifiquemos:

$$Y' = Y_1'(x) + Y_2'(x)$$

sustituyamos en 21:

$$Y_1'(x) + Y_2'(x) + P(x)\left[Y_1(x) + Y_2(x)\right] =$$

$$Y_1'(x) + P(x)Y_1(x) + Y_2'(x) + P(x)Y_2(x) = q_1(x) + q_2(x)$$

$Y = Y_1(x) + Y_2(x)$ es solución de la ecuación 21

El hecho que acabamos de demostrar se conoce con el nombre de Principio de Superposición:

Sea $P(D)Y = q_1(x)$ una ecuación cuya solución es $Y = Y_1(x)$
Sea $P(D)Y = q_2(x)$ una ecuación cuya solución es $Y = Y_2(x)$
Se cumple que la ecuación

$$P(D)Y = q_1(x) + q_2(x)$$

tiene como solución a la función $Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x)$.

Debemos notar que el polinomio $P(D)$ es el mismo en las tres ecuaciones; que es de cualquier orden y que el principio de superposición sólo se refiere al segundo miembro de la ecuación.

Como resultado de este principio, un camino para resolver la ecuación diferencial:

$$P(D)Y = v_1(x) + v_2(x) + \dots + v_n(x)$$

es resolver las siguientes ecuaciones

$$P(D)Y = v_1(x)$$
$$P(D)Y = v_2(x)$$
$$\vdots$$
$$P(D)Y = v_n(x)$$

Si llamamos a sus soluciones $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ respectivamente, entonces la solución de la ecuación propuesta es:

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

Apliquemos a 19 y 20 el principio de superposición pero hagamos $q_2(x) = 0$

tenemos

$$Y' + p(x)Y = q_1(x) \quad \dots\dots\dots \quad 22$$
$$Y' + p(x)Y = 0 \quad \dots\dots\dots \quad 23$$

la solución de la ecuación

$$Y' + p(x)Y = q(x) + 0 \quad \dots\dots\dots \quad 24$$

será entonces:

$$Y = Y_1(x) + Y_2(x); \quad \dots\dots\dots \quad 25$$

notemos que 22 y 24 son la misma ecuación.

¿ Qué tipo de solución deberán ser $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ para que 25 sea la solución general de 24?

Como ya establecimos, la solución general de 24, deberá tener una sola constante arbitraria. Esto es, por la forma de 25, la constante deberá ser aplicada a cualquiera de ambas soluciones Y_1, Y_2. Analicemos:

Si hacemos $Y = C_1Y_1(x) + Y_2(x)$, con $C_1 \neq 1$, vemos que $C_1Y_1(x)$ deja de ser solución de 22 por lo que vimos al principio de este tema, y por lo tanto, $Y = C_1Y_1(x) + Y_2(x)$ deja de ser solución de 24; es decir, $C_1Y_1(x)$ puede, a lo más, ser una solución particular de 22 en el caso de que $C_1 = 1$

Si hacemos $Y = Y_1(x) + C_1Y_2(x)$ vemos que $C_1Y_2(x)$ es la solución general de 23 por lo tanto:

$$Y = Y_1(x) + C_1Y_2(x) \quad \dots\dots\dots \quad 26$$

sigue siendo la solución general de 24; es más, 26 es la solución general de esta ecuación, ya que además de satisfacerla, tiene una sola constante esencial y arbitraria.

Saquemos conclusiones:

Dada la ecuación $Y' + p(x)Y = q(x)$, hemos probado que su solución general es la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada, $C_1Y_2(x)$, más una solución particular, $Y_1(x)$, de la ecuación no homogénea original.

Entonces, haciendo:

$$Y_H = C_1Y_2(x)$$

Y

$$Y_P = Y_1(x)$$

tenemos que 26 puede escribirse como:

$$Y = Y_h + Y_p$$

Debemos notar que este es el mismo resultado que el obtenido en la sección I-2. Observemos que el argumento empleado en esta ocasión se apoya en el principio de superposición y dado que éste no depende del orden de la ecuación diferencial, podemos generalizar el resultado en el siguiente:

TEOREMA 2 Dada la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n:

$$a_0(x)Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots + a_n(x)Y = q(x)$$

su solución general será de la siguiente forma.

$$Y = Y_h(x) + Y_p(x)$$

donde $Y_h(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada y $Y_p(x)$ es una solución particular de la no homogénea.

III-3 EL PROBLEMA DE VALORES INICIALES Y DE VALORES EN LA FRONTERA.

Consideremos el modelo lineal planteado en el ejemplo 18:

$$xY'' - (x+3)Y' + Y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27$$

Como vimos anteriormente, dos soluciones de ella son las funciones

$$Y_1(x) = x+3$$

y

$$Y_2(x) = e^x(x^2-4x+6)$$

Entonces, de lo que sabemos de la solución general de una ecuación diferencial homogénea, podemos escribir como tal a la siguiente función:

$$Y(x) = c_1(x+3) + c_2 e^x(x^2-4x+6) \quad \ldots\ldots \quad 28$$

Con el fin de obtener una solución particular de la ecuación propuesta es necesario valuar las constantes que aparecen en la solución general; el número de ellas nos obliga a pensar en construir dos ecuaciones algebráicas cuyas incógnitas sean precisamente dichas constantes.

Construyamos las ecuaciones considerando que:

$$Y(1) = 0 \; ; \quad Y'(1) = 1$$

La primera condición la sustituimos en la expresión 28 con el siguiente resultado:

$$0 = 4c_1 + 3ec_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29$$

Para sustituir la segunda condición es necesario derivar la solución dada, esto es:

$$Y'(x) = c_1 + c_2 e^x(x^2-2x+2)$$

En esta última expresión sustituimos la condición $Y'(1)=1$ con el siguiente resultado:

$$1 = c_1 + ec_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30$$

Resolviendo para c_1 y c_2 el sistema de ecuaciones algebráicas formado por 29 y 30, tenemos:

$$c_1 = -3$$

y

$$c_2 = \frac{4}{e}$$

Entonces la solución particular buscada es:

$$Y(x) = \frac{4}{e}e^x(x^2-4x+6) - 3(3+x)$$

Hemos visto que para obtener la solución particular de una ecuación diferencial de primer orden era necesario contar con una condición. En el presente caso, dado que la ecuación diferencial era de segundo orden, necesitamos de dos condiciones (un punto y la primera derivada en él.)

¿Cuántas condiciones se requieren para encontrar la solución particular de una ecuación diferencial de orden n?

Como el problema se reduce a determinar los valores de n incógnitas, constantes esenciales, entonces se requieren ecuaciones algebráicas; como ya vimos, estas ecuaciones provienen de condiciones propuestas al problema. También vimos que para el caso de una ecuación de segundo orden se necesitan dos condiciones, así que en nuestro caso necesitamos n condiciones.

El planteamiento del problema de obtener una solución particular para el caso de una ecuación diferencial de primer orden es:

$$Y' = f(x, y)$$
$$Y(x_0) = Y_0$$

Para una ecuación de segundo orden:

$$Y'' = f(x, Y, Y')$$
$$Y(x_0) = Y_0$$
$$Y'(x_0) = Y_0'$$

Así que para una ecuación de orden n tenemos:

$$Y^n = f(x, Y, Y', \ldots\ldots, Y^{n-1})$$
$$Y(x_0) = Y_0$$
$$Y'(x_0) = Y_0'$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$Y^{n-1}(x_0) = Y_0^{n-1}$$

Debemos notar que en todos los casos las condiciones impuestas están dadas para el mismo valor x_0 de la variable independiente y por tal hecho se les conoce como condiciones iniciales; es decir, una ecuación diferencial con condiciones impuestas para el mismo valor x_0 de la variable independiente constituye un problema de condiciones iniciales.

Definición.- El problema:

$$Y^n = f(x, Y, Y', \ldots\ldots, Y^{n-1})$$
$$Y(x_0) = Y_0$$
$$Y'(x_0) = Y_0'$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$Y^{n-1}(x_0) = Y_0^{n-1}$$

constituye un problema con condiciones iniciales para una ecuación diferencial de orden n.

Consideremos el mismo problema, es decir:
Dada la ecuación 27 y las condiciones:

$$Y(1) = 0$$
$$Y(2) = 1$$

¿Cuál es la solución particular?

Sabemos que la solución general de 27 está dada por la expresión 28, por lo que la solución del problema está en valuar nuevamente las constantes esenciales, para lo cual volvemos a formar dos ecuaciones algebraicas. Ambas se obtienen sustituyendo en la solución general las condiciones dadas.

Para la primera tenemos:

$$0 = 4C_1 + 3eC_2 \quad \text{------------} \quad 31$$

Para la segunda tenemos:

$$1 = 5C_1 + 2e^2C_2 \quad \text{------------} \quad 32$$

Resolviendo para C_1 y C_2 el sistema de ecuaciones algebraicas 31 y 32 tenemos

$$C_1 = \frac{3}{15 - 8e}$$
$$C_2 = -\frac{4}{15e - 8e^2}$$

Entonces la solución particular buscada es:

$$Y(x) = \frac{3}{15 - 8e}(x + 3) - \frac{4e^x}{15e - 8e^2}(x^2 - 4x + 6)$$

Debemos notar que también en este caso necesitamos dos condiciones para establecer la solución particular, pero que a diferencia de las condiciones usadas en el primer caso, éstas están dadas para dos valores diferentes de la variable independiente, $x = 1$, $x = 2$.

En las aplicaciones, estos dos valores representan los extremos del problema en estudio y por tal razón se les conoce como "*Puntos Frontera*"; de ahí que los valores que adopta la variable dependiente en dichos extremos se conozcan con el nombre de "*Valores en la frontera*"; para nuestro caso, "valores en la frontera" son 0 y 1, que, como fueron impuestos al problema, condicionan la respuesta de éste y de ahí que también se conozcan con el nombre de "condiciones en la frontera". Resumiendo, para nuestro caso las condiciones en la frontera, son $Y(1)=0$ y $Y(2)=1$

En realidad el término "Condiciones en la frontera" es más general, puesto que si bien es cierto que la variable dependiente es nuestra incógnita, esto no quiere decir necesariamente que siempre sea posible medir su valor en los puntos frontera; aún más, en algunas ocasiones resulta más conveniente calcular la primera derivada de la variable dependiente, de modo que condiciones en la frontera pueden ser los valores de la primera derivada de la variable dependiente medidos en los puntos frontera; esto es, para nuestro caso, unas nuevas condiciones de frontera pueden ser:

$$Y'(1)=1 \quad ; \quad Y'(2)=e$$

Algunas veces, por características del problema, las condiciones en la frontera que pueden medirse toman formas como:

$$Y(1)=0 \quad ; \quad Y(2)=e$$

ó bien:

$$Y(1)=1 \quad ; \quad Y'(2)=1$$

En general un valor en la frontera es el valor que adopta en dicho punto la variable dependiente y/o sus derivadas.

DEFINICION.- El problema

$$Y^{n}=f(x,Y,Y',\dots,Y^{n-1})$$
$$Y(x_0)=Y_0 \quad , \quad Y(x_1)=Y_1$$
$$Y'(x_0)=Y_0' \quad , \quad Y'(x_1)=Y_1'$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$Y^{n-1}(x_0)=Y_0^{n-1} \quad , \quad Y^{n-1}(x_1)=Y_1^{n-1}$$

constituye un problema con condiciones en la frontera para una ecuación diferencial de orden n.

Sabemos que las condiciones en un problema ya sean iniciales ó de frontera nos permite evaluar las constantes esenciales y arbitrarias; sin embargo, en el caso de condiciones en la frontera puede presentarse la circunstancia de tener más condiciones que constantes, con la consecuencia de contar con un sistema de más ecuaciones que incógnitas y por lo tanto existe la posibilidad de que el sistema algebraico de ecuaciones no tenga solución y de ahí que el problema con condiciones en la frontera tampoco la tenga.

III 4 LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

Consideremos el siguiente problema de condiciones iniciales asociado a la ecuación diferencial de primer orden

$$Y'+P(x)Y=q(x) \quad ; \quad Y(x_0)=Y_0 \quad \text{------} \quad 33$$

ó bien

$$Y'=q(x)-P(x)Y \quad ; \quad Y(x_0)=Y_0$$

¿ Tiene solución y es única para el punto (x_0,Y_0)?

Aplicando el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y considerando que:

$$f(x,Y)=q(x)-P(x)Y \;;$$

decimos que existe solución si $f(x,y)$ es continua en (x_0,Y_0), lo que obliga a que $q(x)$ y $P(x)$ sean continuas en dicho punto.

Además:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-P(x);$$

sabemos que la solución es única si $\frac{\partial f}{\partial Y}$ es continua en (x_0,Y_0) por lo tanto $P(x)$ debe ser continua para garantizar la unicidad.

Conclusión:

El problema 33 tiene solución única si $P(x)$ y $q(x)$ son continuas en (x_0,Y_0).

Ahora, consideremos el siguiente problema de condiciones iniciales asociado a la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$\left.\begin{array}{l} Y'' + a_1(x)Y' + a_2(x)Y = q(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \\ Y'(x_0) = Y'_0 \end{array}\right\} \text{---------- } 34$$

¿ Tiene solución y es única para el punto (x_0, Y_0) ?

Dado que solo conocemos el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de primer orden, necesitamos disminuir el orden de la ecuación del problema 34; para conseguir esto, hagamos el siguiente cambio de variable:

$$Y = e^{\int z\,dx}$$

por lo tanto

$$Y' = z e^{\int z\,dx} \qquad y \qquad Y'' = (z' + z^2) e^{\int z\,dx}$$

sustituyendo en 34 tenemos el siguiente problema equivalente 35.

$$(z' + z^2)e^{\int z\,dx} + a_1(x) z e^{\int z\,dx} + a_2(x) e^{\int z\,dx} = q(x)$$

o bien:

$$z' + z^2 + a_1(x) z + a_2(x) = q(x) e^{-\int z\,dx}$$

llamemos:

$$Q(x) = q(x) e^{\int z\,dx}$$

con

$$\left.\begin{array}{l} Z' = Q(x) - a_1(x)Z - Z^2 - a_2(x) \\ Z(x_0) = Z_0 = \dfrac{Y'(x_0)}{Y(x_0)} \;, \quad Y(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \text{--------- } 35$$

Ahora, este problema tendrá solución y será única si cumple con las condiciones establecidas en el teorema correspondiente:

Existe solución si $f(x,z) = Q(x) - a_1(x)Z - Z^2 - a_2(x)$ es continua en (x_0, Z_0); entonces se deberá cumplir que $Q(x)$, $a_1(x)$ y $a_2(x)$ sean continuas en dicho punto y para que $Q(x)$ sea continua se requiere que $q(x)$ sea continua.

La solución es única si $\dfrac{\partial f(x,z)}{\partial z}$ es continua en el punto (x_0, Z_0).

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -a_1(x) - 2z$$

De donde se infiere que $a_1(x)$ debe ser continua en dicho punto.

Conclusión:

El problema 35 tiene solución única si $a_1(x)$, $a_2(x)$, y $q(x)$ son continuas en x_0.

Ahora bien, dado que si se cumplen las condiciones establecidas en la conclusión anterior, $z(x)$ existe y es única, entonces también $Y(x) = e^{\int z\,dx}$ existe y es única, por lo que llegamos a la siguiente:

Conclusión.

El problema 34 tiene solución única si $a_1(x)$, $a_2(x)$, $q(x)$ son continuas en x_0.

Así, el teorema de existencia y unicidad de soluciones para un problema como 34 puede enunciarse como sigue:

TEOREMA

Sea
$$\begin{array}{l} Y'' + a_1(x)Y' + a_2(x)Y = q(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \\ Y'(x_0) = Y'_0 \end{array}$$

un problema de condiciones iniciales. Si $a_1(x)$, $a_2(x)$ y $q(x)$ son continuas para x_0, en un intervalo (α, β) que lo contenga, existe una solución única $Y = Y(x)$ que satisface las condiciones iniciales empleadas.

Siguiendo un proceso de razonamiento inductivo es posible generalizar el teorema anterior de la siguiente manera:

TEOREMA

Sea
$$\begin{array}{l} Y^{n} + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots + a_n(x)Y = q(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \\ Y'(x_0) = Y'_0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ Y^{n-1}(x_0) = Y_0^{n-1} \end{array}$$

un problema de condiciones iniciales. Si $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ y $q(x)$ son continuas para x_0, en un intervalo (α, β) que lo contenga, existe una solución única $Y = Y(x)$ que satisface las condiciones iniciales enunciadas.

IV. RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE COEFICIENTES CONSTANTES.

Como vimos al principio de este capítulo, la ecuación diferencial lineal,

$$Y' + P(x)Y = q(x)$$

tiene como solución a la siguiente función,

$$Y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int P(x)dx} + c\right];$$

misma que fue obtenida siguiendo un camino analítico basado en el concepto de factor integrante para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Sin embargo, para ecuaciones diferenciales de orden superior a uno y de coeficientes variables tal camino no existe y la obtención de la solución de ellas es complicada; en el caso de que dichos coeficientes sean constantes existe una teoría general para hallar su solución. Este último caso se presenta frecuentemente en ingeniería y de ahí que estemos interesados en estudiarlo con detalle en este curso. Además, debemos notar que toda ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes no presenta ningún problema en cuanto a la existencia y unicidad de sus soluciones (Porque?)

IV.1 · ECUACION HOMOGENEA, ECUACION CARACTERISTICA Y LOS DIFERENTES TIPOS DE RAICES.

Sea la siguiente ecuación:

$$Y'' + aY' + bY = 0 \quad \text{-----------} \; 36$$

ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden y coeficientes constantes a y b.

¿Cuál es su solución general?

Lo que sabemos de este tipo de ecuaciones es que la solución general es una función como la que sigue:

$$Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x)$$

donde $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son soluciones de la ecuación 36 y además linealmente independientes, pero ¿Qué forma tienen dichas ecuaciones?

Para contestar la interrogante recordemos que la solución de

$$Y' + \lambda Y = 0$$

es:

$$Y(x) = Ce^{-\lambda x} \qquad \lambda = \text{constante.}$$

Es decir, la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea con coeficientes constantes es de tipo exponencial. Veamos si este tipo de solución también es válido para la ecuación de segundo orden.

Supongamos que $Y(x) = e^{\lambda x}$ es solución de 36; entonces debe satisfacer dicha ecuación. Sustituyendo en ella tenemos:

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0;$$

ya que $e^{\lambda x} \neq 0$, $\forall x \in R$ y $\forall \lambda \in R$, entonces la anterior igualdad no puede ser cierta a menos que:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{-----------} \; 37$$

Entonces podemos escribir lo siguiente:

Conclusion:

$Y(x) = e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación diferencial lineal $Y'' + aY' + bY = 0$, si λ es obtenida de la ecuación:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

La ecuación 37 se conoce con el nombre de ecuación característica o polinomio característico y tiene como soluciones a λ_1 y λ_2, lo cual nos permite definir dos funciones exponenciales linealmente independientes, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$; por lo tanto:

$$Y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad , \quad Y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

Es decir, $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son también de forma exponencial. Finalmente, la solución general de la ecuación 40 es:

$$Y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} \; , \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{-----} \; 38$$

Verifiquemos que en efecto lo sea:

$$Y'(x) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 x}$$
$$Y''(x) = \lambda_1^2 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 c_2 e^{\lambda_2 x}$$

sustituyendo en 36, tenemos:

$$(\lambda_1^2 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 c_2 e^{\lambda_2 x}) + a(\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 x}) + b(c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}) =$$
$$= c_1[\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b]e^{\lambda_1 x} + c_2[\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b]e^{\lambda_2 x} = 0$$

La igualación a cero se explica porque las expresiones dentro de los paréntesis se anulan por satisfacer la ecuación 37; por lo tanto:

$Y(x)$ es solución general de 36

Por otro lado la ecuación 36, escrita en términos del operador lineal, queda como sigue:

$$(D^2 + aD + b)Y = 0 \quad \therefore \quad P(D)Y = 0$$

Debemos notar que los coeficientes de $P(D)$ son $1, a, b$ y que coinciden con los coeficientes de la ecuación característica. Esto nos proporciona un medio para, dada una ecuación diferencial lineal, escribir inmediatamente su ecuación característica. Por ejemplo:

La ecuación diferencial $2Y''+3Y'-4Y=0$ ó bien $(2D^2+3D-4)Y=0$, tiene como ecuación característica a:

$$2\lambda^2+3\lambda-4=0$$

Resumiendo, hemos visto que una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes tiene una solución de forma exponencial y si la ecuación diferencial es de segundo orden también la solución es de forma exponencial cuando las λ_i, $i=1,2$, las obtenemos de la ecuación característica.

En general dada la ecuación:

$$Y^{n} + a_1 Y^{n-1} + \dots + a_n Y = 0 \quad ; \quad a_1,\dots,a_n \text{ cts.} \dots 39$$

puede ser escrita en términos del operador diferencial como sigue:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n)Y = 0,$$

por lo cual la ecuación característica será:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \text{ ----------- } 40$$

Si las n raíces de $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ de la ecuación son tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ $i\neq j$ $i,j=1,\dots,n$ entonces la solución general de la ecuación será dada por la expresión:

$$Y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}, \text{ ya que:}$$

$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ por ser las raíces diferentes, forman un conjunto de funciones linealmente independientes (compruébelo).

EJEMPLO 3

Hallar la solución general de la siguiente ecuación:

$$Y''' - Y'' - 2Y' = 0$$

Escribiendo la ecuación en términos del operador diferencial lineal tenemos:

$(D^3 - D^2 - 2D)Y = 0$; entonces su ecuación característica será:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \text{ó bien} \quad \lambda(\lambda^2-\lambda-2)=0$$

lo cual implica que $\lambda_1=0$ es raíz de ella y resolviendo:

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

tenemos:

$$\lambda_2=-1 \quad y \quad \lambda_3=2.$$

Dado que $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$ la solución buscada es:

$$Y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

En el caso de que la ecuación 40 tenga como solución una raíz que tenga como multiplicidad m,

$$2\le m\le n$$

las funciones $e^{\lambda_i x}$ serán linealmente dependientes y por lo tanto no podemos formar con ellas la solución general;

EJEMPLO 4 Sea la ecuación diferencial

$$Y''' + a_1Y'' + a_2Y' + a_3Y = 0 \text{ ----------- } 41$$

cuya ecuación característica es

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Supongamos que las raíces de esta ecuación tienen multiplicidad $m=3$, es decir $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$. Intentemos escribir su solución general.

$$Y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_1 x}+c_3e^{\lambda_1 x}$$

ó bien

$$Y(x)=(c_1+c_2+c_3)e^{\lambda_1 x}$$

$$\therefore \quad Y(x)=c\,e^{\lambda_1 x},$$

La cual no puede ser la solución general de una ecuación diferencial de tercer orden.

En realidad, el problema que se presenta es el de que las funciones $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_1 x}$ y $e^{\lambda_1 x}$ son linealmente dependientes. La solución de tal problema está en romper la dependencia lineal que existe entre ellas; esto lo logramos escribiendo la solución general de la manera siguiente:

$$Y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2f_1(x)e^{\lambda_1 x}+c_3f_2(x)e^{\lambda_1 x}$$

En donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones a determinar.

Sabemos que:

$$(D^3+a_1D^2+a_2D+a_3)e^{\lambda x}=(\lambda-\lambda_1)^3e^{\lambda x} \qquad 42$$

ó bien

$P(D)e^{\lambda x}=(\lambda-\lambda_1)^3e^{\lambda x}$; si $\lambda=\lambda_1$ entonces tenemos:

$P(D)e^{\lambda_1 x}=0$ por lo tanto $e^{\lambda_1 x}$ es solución de la ecuación 41, como ya sabíamos.

Debemos recordar que si un polinomio característico tiene una raíz λ_k de multiplicidad m, entonces además de anularse el polinomio característico en $\lambda=\lambda_k$, se anulan todas las derivadas, hasta la de orden $m-1$ inclusive, del polinomio en $\lambda=\lambda_k$. Apoyados en lo anterior derivemos la ecuación 42 con respecto a λ.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}P(D)e^{\lambda x}=P(D)xe^{\lambda x}=\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda-\lambda_1)^3e^{\lambda x}$$

$$\therefore \quad P(D)xe^{\lambda x}=(\lambda-\lambda_1)^3xe^{\lambda x}+3(\lambda-\lambda_1)^2e^{\lambda x} \ldots\ldots 43$$

si $\lambda=\lambda_1$, tenemos: $P(D)xe^{\lambda_1 x}=0$, por lo tanto:

$xe^{\lambda_1 x}$ es también solución de la ecuación 41 $\therefore$

$\therefore f_1(x)=x$

Derivando la ecuación 41 nuevamente respecto a λ tenemos:

$$P(D)x^2e^{\lambda x}=(\lambda-\lambda_1)^3x^2e^{\lambda x}+3(\lambda-\lambda_1)^2xe^{\lambda x}+3(\lambda-\lambda_1)^2xe^{\lambda x}+6(\lambda-\lambda_1)e^{\lambda x} \qquad 44$$

si $\lambda=\lambda_1$

$$P(D)x^2e^{\lambda_1 x}=0$$

Por lo tanto $x^2e^{\lambda_1 x}$ es también solución de la ecuación 41

$\therefore \quad f_2(x)=x^2$

Debemos notar que, ya que $m=3$, hemos derivado $m-1$ veces la ecuación 42 para obtener $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Finalmente la solución general de la ecuación 41 es:

$$Y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2xe^{\lambda_1 x}+c_3x^2e^{\lambda_1 x}$$

o bien

$$Y(x)=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{\lambda_1 x}$$

Siguiendo un proceso de razonamiento inductivo es posible generalizar el resultado anterior en el siguiente:

TEOREMA

Sea $Y^n+a_1Y^{n-1}+\cdots+a_nY=0$, con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constantes, y su ecuación característica:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

Si una de las raíces de dicha ecuación es de multiplicidad $m \le n$, entonces la solución general de la ecuación diferencial estará dada por la siguiente expresión:

$$Y(x)=e^{\lambda_1 x}[c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_mx^{m-1}]+c_{m+1}e^{\lambda_{m+1}x}+\cdots+c_ne^{\lambda_n x}$$

EJEMPLO 5 Sea $Y''' + 2Y'' + Y' = 0$; hallar su solución general

Solución:

Tenemos : $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$,

donde:

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 0$

por lo tanto:

$Y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2 x) + c_3$

En el caso de que las raíces de la ecuación característica resulten números complejos, manejaremos dichas raíces como en el problema de raíces diferentes, pues debemos recordar que cuando un complejo resuelve una ecuación polinomial, también lo hace su conjugado.

EJEMPLO 6 Sea la ecuación:

$Y'' - 2Y' + 2Y = 0$; hallar su solución general.

Solución:

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, con $\lambda_1 = 1+i$ y $\lambda_2 = 1-i$

por lo tanto:

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

y su solución general es

$Y(x) = c_1 e^{(1+i)x} + c_2 e^{(1-i)x}$

o bien

$$Y(x) = e^{x}(c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}) \qquad 45$$

Es posible expresar esta solución en términos de funciones de variable real, ya que sabemos por el teorema de Euler que:

$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$;

sustituyendo en 45 tenemos:

$Y(x) = e^{x}[C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x]$

donde:

$C_1 = c_1 + c_2$

$C_2 = i(c_1 - c_2)$,

La cual es la solución buscada.

Notemos que en el caso de que:

$\lambda = r \pm iq$,

la solución es del tipo:

$e^{rx}(\cos qx + \operatorname{sen} qx)$;

para nuestro ejemplo:

$r = 1$ y $q = 1$

Aun cuando las raíces del polinomio característico sean números complejos conjugados, puede ocurrir que algunas se repitan.

EJEMPLO 7

Sea la ecuación

$Y^{iv} + 2Y'' + Y = 0$

con $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

donde

$\lambda_1 = \lambda_2 = i$; $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$

Por lo tanto, utilizando el teorema para el caso de las raíces repetidas y el resultado del ejemplo anterior, podemos expresar la solución de la ecuación en términos de variable real.

$Y(x) = \cos x(c_1 + c_2 x) + \operatorname{sen} x(c_3 + c_4 x)$

IV 2 LA ECUACION NO HOMOGENEA. EL METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Sea la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.

$$Y'' + 2Y' + Y = 2x + 3 \quad \text{-------------} \quad 46$$

Consideremos el problema de hallar su solución general. Para esto, dado que hasta ahora sólo sabemos resolver ecuaciones diferenciales homogéneas, intentemos transformar la ecuación 46 en una de dicho tipo; para ello debemos anular su miembro derecho. Escribamos la ecuación en términos del operador diferencial:

$$(D^2 + 2D + 1)Y = 2x + 3$$

Si aplicamos el operador D a ambos miembros, tenemos

$$D(D^2 + 2D + 1)Y = 2$$

Resulta casi obvio que lo que debemos hacer ahora para reducir la ecuación diferencial anterior a una homogénea es aplicar nuevamente el operador D:

$$\therefore \quad D^2(D^2 + 2D + 1)Y = 0$$

o sea:

$$Y^{iv} + 2Y''' + Y'' = 0 \quad \text{----------} \quad 47$$

Ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden cuya solución general podemos encontrar fácilmente:

$$Y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x + C_4 \quad \text{----} \quad 48$$

Por otro lado, la solución de la ecuación homogénea asociada a 46 es:

$$Y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \quad \text{----------} \quad 49$$

Además, sabemos que la solución general de 46 está dada por la expresión $Y = Y_c + Y_p$ --- 50; de 48, 49 y 50 llegamos a que:

$$Y_p = C_3 x + C_4 \quad \text{------------} \quad 51$$

donde C_3 y C_4 son coeficientes, no constantes esenciales, a determinar.

Ahora, si Y_p es solución de 46 debe satisfacerla transformándola en una identidad. Sustituyamos adecuadamente 51 en 46:

$$2C_3 + C_3 x + C_4 = 2x + 3$$
$$C_3 x + (2C_3 + C_4) = 2x + 3$$

por lo tanto, igualando coeficientes:

$$2C_3 + C_4 = 3$$
$$C_3 = 2$$

Entonces los coeficientes son:

$$C_3 = 2 \quad y \quad C_4 = -1$$

Por lo tanto: $Y_p = 2x + 1$

La solución general de 46 será:

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 2x + 1$$

Del problema anterior podemos obtener dos resultados fundamentales, a saber:

a) Existió un operador $P_1(D)$, en este caso, D^2, tal que la ecuación original se transformó en una ecuación homogénea.

b) La solución de la ecuación homogénea resultante, en este caso de cuarto orden, permitió obtener la forma de la solución particular de la ecuación original.

Consideremos ahora otro ejemplo: sea la ecuación

$$Y'' + 2Y' + Y = \operatorname{sen} x \quad \text{-----------} \quad 52$$

hallar su solución general.

¿Cuál es el operador $P_1(D)$ que actuando sobre la ecuación 52 la transforma en una ecuación homogénea?

Analizando el lado derecho de la ecuación vemos que es de la forma $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ y recordando lo que sabemos de ecuaciones homogéneas, términos de este tipo son solución de ecuaciones homogéneas con raíces complejas conjugadas de la forma $r = \alpha \pm i\beta$. En nuestro caso, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

así que $P_1(D) = (D^2+1)$, aplicado a 52 debe transformarla en una ecuación diferencial homogénea; procedemos:

$$(D^2+1)(D^2+2D+1)Y = (D^2+1)\operatorname{sen} x = 0$$
$$(D^4 + 2D^3 + 2D^2 + 2D + 1)Y = 0$$

Ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden y cuya solución general es:

$$Y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x$$

Ya que la solución de la ecuación homogénea asociada es $Y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

$$\therefore \quad Y_p = C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x$$

donde C_3 y C_4 son coeficientes a determinar.

Ahora, si Y_p es solución de 52 debe satisfacerla transformándola en una identidad; sustituyendo, tenemos:

$$2C_4\cos x - 2C_3\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

por lo tanto:

$$C_4 = 0 \quad y \quad -2C_3 = 1$$

Entonces los coeficientes son:

$$C_4 = 0 \quad y \quad C_3 = -1/2$$

por lo tanto

$$Y_p = -\tfrac{1}{2}\cos x$$

La solución general de 52 es:

$$Y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - \tfrac{1}{2}\cos x$$

De la experiencia de los dos ejemplos anteriores cabe hacer la siguiente pregunta. ¿Toda ecuación diferencial de la forma $(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n)Y = q(x)$, admite un operador $P_1(D)$ que la transforme en homogénea?

Por lo que vimos anteriormente, este operador se construye considerando que $q(x)$ es solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes; por otro lado, sabemos que las soluciones de ecuaciones lineales homogéneas son funciones del tipo:

$$\{x^k, e^{ax}, x^k e^{ax}, e^{ax}\cos qx, e^{ax}\operatorname{sen} qx\}, \quad k \geq 0, \; n = 0,1,2,\ldots$$

y la suma o el producto de ellas.

Esto significa que la existencia del operador $P_1(D)$ depende de la forma de $q(x)$, así que la respuesta a la interrogante es: No toda ecuación lineal no homogénea admite un operador $P_1(D)$ que la transforma en homogénea.

El operador $P_1(D)$ capaz de transformar una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes en una homogénea, se conoce con el nombre de ANIQUILADOR, ya que su función, como vimos, es anular el término no homogéneo.

> Conclusión. Una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes
>
> $$(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n)Y = q(x)$$
>
> admite un operador aniquilador si $q(x)$ es solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.

Es decir, ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes con $q(x)$ de la forma:

x^{-1}, $\ln x$, $\operatorname{tg} x$, $\log x^2$, etc. no admiten un operador aniquilador.

El procedimiento empleado en la resolución de los dos ejemplos aquí tratados condujo al problema de determinar los valores de ciertos coeficientes; es por esto, que dicho método se conoce con el nombre de método de "Coeficientes indeterminados".

EJEMPLO 8 Hallar la solución general de la siguiente ecuación:

$$Y'' + 3Y' + 2Y = e^{-x} + e^{2x}$$

Solución:

Sabemos que $Y = Y_c + Y_p$ y resolviendo la homogénea asociada tenemos:

$$Y_c = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

Ahora, dado que $q(x) = e^{-x} + e^{2x}$ es solución de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, existe

$P_1(D) = (D+1)(D+2)$ como operador de aniquilación

Aplicándolo, tenemos.

$(D+1)(D+2)(D^2+3D+2)y = 0$

Resolviendo esta última ecuación

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-x} + c_4xe^{-2x}$;

por lo tanto, $y_p = c_3xe^{-x} + c_4xe^{-2x}$, donde c_3 y c_4 son los coeficientes indeterminados.

Sustituyendo y_p en la ecuación original tenemos la siguiente identidad

$c_3e^{-x} - c_4e^{-2x} = e^{-x} + e^{-2x}$

por lo tanto

$c_3 = 1$ y $-c_4 = 1$

los coeficientes son

$c_3 = 1$ y $c_4 = -1$

por lo tanto

$y_p = xe^{-x} - xe^{-2x}$

y entonces la solución general de la ecuación original es:

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + xe^{-x} - xe^{-2x}$

$\boxed{\text{EJEMPLO 9}}$ Hallar la solución general de:

$y' + 2y = x + 1 + xe^{x}$

Solución.- La aniquilación del término $x+1$ se logra, como es obvio, aplicando el operador D^2, o sea:

$D^2(D+2)y = xe^{x}$

Ahora, sabemos que xe^{x} es solución de $(D-1)^2y = 0$, por lo que:

$D^2(D-1)^2(D+2)y = 0$ cuya solución general es:

$y = c_1 + c_2x + c_3e^{x} + c_4xe^{x} + c_5e^{-2x}$

Como la solución de la ecuación homogénea asociada a la original es:

$y_h = C_5e^{-2x}$

$\therefore$ $y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{x} + c_4xe^{x}$

$\therefore$ $y_p' + 2y_p = x + 1 + xe^{x}$

$c_2 + c_3e^{x} + c_4xe^{x} + c_4e^{x} + 2c_1 + 2c_2x + 2c_3e^{x} + 2c_4xe^{x} = x + 1 + xe^{x}$

$2c_1 + c_2 + e^{x}(3c_3 + c_4) + xe^{x}(3c_4) + 2c_2x = x + 1 + xe^{x}$

$\therefore$

$2c_1 + c_2 = 1$		$c_2 = 1/2$
$3c_3 + c_4 = 0$	$\therefore$	$c_4 = 1/3$
$3c_4 = 1$		$c_1 = 1/4$
$2c_2 = 1$		$c_3 = -1/9$

$\therefore$ $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{e^{x}}{9} + \frac{xe^{x}}{3}$

$\boxed{\text{V} \quad \text{VARIACIÓN DE PARÁMETROS}}$

Consideremos la siguiente ecuación:

$y'' + a_1y' + a_2y = q(x)$; a_1, a_2 = constantes ---53

de la cual, la solución general de la homogénea asociada a ella, es:

$y_c = c_1y_1 + c_2y_2$

$\boxed{\text{Teorema A}}$ Se propone que si se cumple la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix} \quad \text{-----------54}$$

Entonces una solución particular de 53 es:

$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$ ----------55

donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones a determinar.

Demostración:

Dado que y_p es solución de 53, volvemos y_p':

$y_p' = u(x)y_1' + v(x)y_2' + u'(x)y_1 + v'(x)y_2$

pero por hipótesis, de 54 tenemos:

$$u'(x)Y_1 + v'(x)Y_2 = 0$$

Entonces:

$$Y_p' = u(x)Y_1' + v(x)Y_2' \quad \text{-----------} \; 56$$

Además, valuando Y_p'':

$$Y_p'' = u(x)Y_1'' + v(x)Y_2'' + u'(x)Y_1' + v'(x)Y_2' \, ;$$

pero, por la hipótesis de 54 tenemos:

$$u'(x)Y_1' + v'(x)Y_2' = q(x)$$

$$\therefore \quad Y_p'' = u(x)Y_1'' + v(x)Y_2'' + q(x) \quad \text{--------} \; 57$$

Sustituyendo 55, 56 y 57 en 53, tenemos:

$$u(x)Y_1'' + v(x)Y_2'' + q(x) + a_1[u(x)Y_1' + v(x)Y_2'] + a_2[u(x)Y_1 + v(x)Y_2] = q(x)$$
$$u(x)[Y_1'' + a_1Y_1' + a_2Y_1] + v(x)[Y_2'' + a_1Y_2' + a_2Y_2] + q(x) = q(x)$$

Pero dado que Y_1 y Y_2 son soluciones de la homogénea asociada a 53, entonces:

$$Y_1'' + a_1Y_1' + a_2Y_1 = 0$$
$$\text{y} \quad Y_2'' + a_1Y_2' + a_2Y_2 = 0$$
$$\therefore \quad q(x) = q(x)$$

Debemos notar que en el caso anterior el coeficiente de la derivada de mayor orden en 53 es la unidad ¿Cómo debe expresarse el teorema si $a_0 \neq 0$ no es la unidad?

$\boxed{\text{EJEMPLO 10}}$ Sea la ecuación $Y'' + 4Y' + 4Y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ ... 58 encontrar su solución general.

Solución:

Sabemos que la solución general tiene la forma:

$$Y = Y_c + Y_p$$

Para determinar Y_c consideremos la ecuación homogénea asociada:

$$Y'' + 4Y' + 4Y = 0$$

entonces:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \text{y} \quad \therefore \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

y

$$Y_c = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$$

Ahora para encontrar Y_p vemos que no es posible aplicar el método de coeficientes indeterminados (¿Por qué?) y de ahí que optemos por suponer que Y_p es de la forma:

$$Y_p = u(x)e^{-2x} + v(x)xe^{-2x} \quad \text{--------} \; 59$$

según nos lo permite nuestra demostración anterior. Entonces, el problema radica en determinar $u(x)$ y $v(x)$; para ello recordemos que 59 será una solución particular de 58 si se cumple:

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix}$$

sustituyendo:

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2xe^{-2x} + e^{-2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-2x}}{x^2} \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema anterior tenemos:

$$\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{-4x}}\begin{bmatrix} -2xe^{-2x} & -xe^{-2x} \\ 2e^{-2x} & e^{-2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-2x}}{x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/x \\ 1/x^2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$u(x) = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln x = \ln\frac{1}{x}\,, \quad x \neq 0$$

y

$$v(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$

$$Y_p = e^{-2x}\ln\frac{1}{x} - e^{-2x} = e^{-2x}[\ln 1/x - 1]$$

La solución general será entonces:

$$Y = e^{-2x}\left[c_1 + c_2 x + \ln\frac{1}{x} - 1\right]$$

Debemos notar que Y_p se construye a partir de Y_c, por la simple sustitución de las constantes c_1 y c_2 por funciones de x, $u(x)$ y $v(x)$; por este hecho de considerar las constantes como variables, el método empleado para encontrar Y_p en el problema anterior, se conoce con el nombre de "*Método de los parámetros variables*" o "*Variación de parámetros*".

También debemos notar que al obtener $u(x)$ y $v(x)$ no se consideraron, premeditadamente, las constantes de integración por la razón que se muestra en el siguiente ejemplo.

$\boxed{\text{EJEMPLO 11}}$ Sea la ecuación $Y''+4Y'+4Y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$; si $Y_1 = e^{-2x}$ y $Y_2 = xe^{-2x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada, determinar la solución general de la ecuación dada, empleando el método de variación de parámetros.

Sabemos que:

$$Y_p = u(x)\,e^{-2x} + v(x)\,x\,e^{-2x}$$

y que:

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2xe^{-2x}+e^{-2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-2x}}{x^2} \end{bmatrix}$$

de donde:

$$u(x) = -\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{1}{x} + c_1$$

y

$$v(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c_2$$

$$\therefore \quad Y_p = \left(\ln\frac{1}{x} + c_1\right)e^{-2x} + \left(-\frac{1}{x} + c_2\right)x\,e^{-2x}$$

reacomodando, tenemos:

$$Y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + e^{-2x}\left(\ln\frac{1}{x} - 1\right)$$

Como podemos ver, el considerar las constantes de integración en la obtención de $u(x)$ y $v(x)$ nos condujo a la solución general de la ecuación propuesta y no a la solución particular que esperabamos. Así que podemos escribir:

$$Y = e^{-2x}\left(c_1 + c_2 x + \ln\frac{1}{x} - 1\right)$$

que es la solución general de la ecuación propuesta. Además, lo anterior justifica el hecho de no haber considerado las constantes en el ejemplo anterior y podemos concluir que, dado el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, podemos encontrar la solución general de la ecuación propuesta.

Los resultados obtenidos hasta el momento podemos generalizarlos en el siguiente:

$\boxed{\text{TEOREMA B}}$. Sea la ecuación diferencial:

$$Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \cdots + a_n Y = q(x)$$

de la cual

$$Y_c = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \cdots + c_n Y_n$$

es la solución de la homogénea asociada.

Sea

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \cdots & Y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \cdots & Y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{bmatrix}$$

Entonces una solución particular de la ecuación no homogénea es:

$$Y_p = u_1(x)Y_1 + u_2(x)Y_2 + \cdots + u_n(x)Y_n$$

La demostración del teorema anterior puede hacerse siguiendo los mismos pasos que en el teorema A y se recomienda al alumno hacerla.

$\boxed{\text{EJEMPLO 12}}$ Encontrar la solución general de la siguiente ecuación:

$$Y'' + Y' = \operatorname{tg} x$$

Para Y_c ; $\lambda^3 + \lambda = 0$

y $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$

$$Y_c = C_1 + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x$$

por lo tanto:

$$Y_p = a_1(x) + a_2(x) \operatorname{sen} x + a_3(x) \cos x ;$$

para U_1' , U_2' y U_3' tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & -\cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1'(x) \\ U_2'(x) \\ U_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{tg} x \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema tenemos:

$$U_1'(x) = \operatorname{tg} x$$
$$U_2'(x) = \cos x - \sec x$$
$$U_3'(x) = -\operatorname{sen} x$$

por lo que:

$$u_1(x) = \int \operatorname{tg} x\, dx = \ln \sec x$$
$$u_2(x) = \int (\cos x - \sec x)\, dx = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x - \operatorname{tg} x)$$
$$u_3(x) = \int \operatorname{sen} x\, dx = \cos x$$

y $$Y_p = \ln \sec x - \operatorname{sen} x \ln(\sec x - \operatorname{tg} x) + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y dado que esta función ya existe en la solución complementaria, tenemos:

$$Y_p = \ln \sec x - \operatorname{sen} x \ln(\sec x - \operatorname{tg} x),$$

quedando finalmente:

$$Y = C_1 + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x + \ln \sec x - \operatorname{sen} x \ln(\sec x - \operatorname{tg} x)$$

Consideremos el problema de hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal de coeficientes variables:

$$x Y'' - (x+3) Y' + Y = x^4 \quad - - - - - - - - - - - 60$$

sabiendo que $Y_1 = (x+3)$ y $Y_2 = e^x(x^2 - 4x + 6)$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Sabemos que su solución general es:

$$Y = Y_c + Y_p$$

donde $Y_c = C_1(x+3) + C_2 e^x (x^2 - 4x + 6)$

¿Cómo determinar Y_p?

Para dar respuesta a la pregunta anterior cuando la ecuación es de coeficientes constantes, contamos con dos procedimientos; uno, el método de coeficientes indeterminados y el otro el método de variación de parámetros; pero dado que el primero sólo es válido cuando la ecuación diferencial es de coeficientes constantes, queda descartado en este caso. Intentemos con el segundo procedimiento, para lo cual:

$$Y_p = u(x)(x+3) + v(x) e^x (x^2 - 4x + 6)$$

Entonces, ya que $a_0 \neq 1$

$$\begin{bmatrix} x+3 & e^x(x^2-4x+6) \\ 1 & e^x(x^2-2x+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$u'(x) = -(x^2 - 4x + 6)$$
$$v'(x) = x e^{-x} + 3 e^{-x}$$

por lo que integrando

$$u(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 6x$$
$$v(x) = -x e^{-x} - 4 e^{-x}$$

y por lo tanto

$$Y_p = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 6x\right](x+3) + \left[-x e^{-x} - 4 e^{-x}\right] e^x (x^2 - 4x + 6)$$

$$Y_p = -\frac{x^4}{3} - 8x - 24 \quad - - - - - - - - - - - 61$$

Verifiquemos que en efecto 61 es una solución particular de la ecuación 60; procedemos.

$$Y_p' = -\frac{4}{3} x^3 - 8$$
$$Y_p'' = -4x^2$$

Sustituyendo en 60 tenemos:

$\therefore \; x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$ - - - - - - - - 64

Evaluemos C_1 y C_2. Derivando 64 tenemos:

$\dot{x}(t) = -C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_2e^{-t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, t$ - - - - - 65

sustituyendo las condiciones iniciales en 64 y 65:

$x(0) = 0 = C_1 - \frac{1}{2} \quad \therefore \quad C_1 = \frac{1}{2}$

$\dot{x}(0) = 0 = -C_1 + C_2$, entonces $C_2 = C_1 = \frac{1}{2}$;

finalmente, la solución de nuestro problema es:

$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$

Nótese que cuando t tiende a infinito, los términos exponenciales tienden a cero, por lo que en la solución prevalecerá únicamente el término senoidal, lo cual implica que la masa M oscilará indefinidamente con una frecuencia igual a la de su excitación, aunque con una fase y amplitud distintos a la fase y amplitud de la excitación de entrada.

EJEMPLO 11 Sea el siguiente circuito LRC, excitado con una fuente de voltaje constante E.

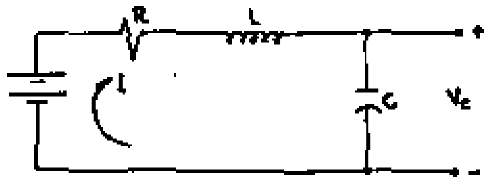


Fig. 5

donde $R = 3\Omega$, $L = 1H$ y $C = 0.5f$. Encontrar la expresión para la caída de voltaje V_c en el capacitor en cualquier instante t, suponiendo que:

$\dot{V}_c(0) = 0 = V_c(0)$

Solución: De la segunda ley de Kirchoff

$E = Ri + L\frac{di}{dt} + V_c$

en donde: $i(t) = C\dot{V}_c$ por lo tanto:

$E = RC\dot{V}_c + LC\ddot{V}_c + V_c$

ó

$\ddot{V}_c + \frac{R}{L}\dot{V}_c + \frac{1}{LC}V_c = \frac{E}{LC}$

sustituyendo valores:

$\ddot{V}_c + 3\dot{V}_c + 2V_c = 2E$;

ecuación diferencial no homogénea, que es el modelo matemático del problema.

Resolviendo:

$V_{c_h} = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$

$V_{c_p} = E$

$\therefore \; V_c(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + E$ - - - - - - - - - 66

Para evaluar C_1 y C_2, derivemos 66:

$\dot{V}_c(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t}$ - - - - - - - - - 67

Sustituyendo las condiciones iniciales en 66 y 67 tenemos:

$0 = C_1 + C_2 + E$

$0 = -C_1 - 2C_2$

$\therefore \; C_1 = -2E$ y $C_2 = E$

así que la solución a nuestro problema es:

$\therefore \; V_c(t) = -2Ee^{-t} + Ee^{-2t} + E$

Nótese que cuando t tiende a infinito, el voltaje en el capacitor tiende al valor del voltaje de la batería, como es de esperarse.

EJEMPLO 15 Consideremos el siguiente problema:

Se tiene un tubo en U lleno de un líquido de densidad ρ como se muestra en la siguiente figura:

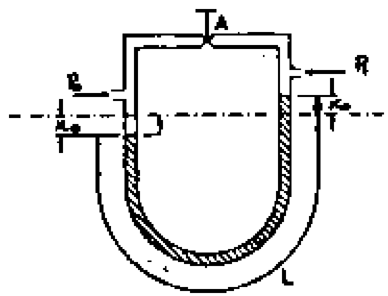


Fig. 6

Si en $t=0$ se abre la válvula A, igualando las presiones P_1 y P_2, encuentre el período de oscilación del líquido en el tubo, suponiendo despreciable la fricción entre el líquido y las paredes del tubo.

Solución:

La masa del líquido es $m = \rho A L$, en donde A es el área de la sección transversal del tubo y L es la longitud de la columna del líquido.

La fuerza que actúa sobre el líquido es:

$$f = \rho A 2 x_0 g - \rho A 2 x g\ ;$$

por lo que se tendrá, utilizando la segunda ley de Newton:

$$\rho A L \ddot{x} = \rho A 2 x_0 g - \rho A 2 x g$$

$$\ddot{x} + \frac{2g}{L} x = \frac{2g}{L} x_0\ ;$$ ecuación diferencial no homogénea que es el modelo matemático del problema:

Resolviendo la ecuación:

$$x_h = C_1 \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t$$

$$x_p = x_0$$

y

$$x(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t + x_0 \quad \text{-----} \; 68$$

Encontremos C_1 y C_2, derivando 68

$$\dot{x}(t) = -C_1\sqrt{\frac{2g}{L}} \operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t + C_2\sqrt{\frac{2g}{L}} \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t \quad \text{-----} \; 69$$

como para $t=0 \quad x=0 \Rightarrow C_1 = -x_0$

y $t=0 \quad \dot{x}=0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$\therefore \quad x(t) = x_0\left(1-\cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t\right)$$

De la solución se desprende que $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$ y por lo tanto el período de oscilación es:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

EJEMPLO 16 Un cable flexible de peso despreciable soporta un puente (carga uniforme) como se ve en la figura:

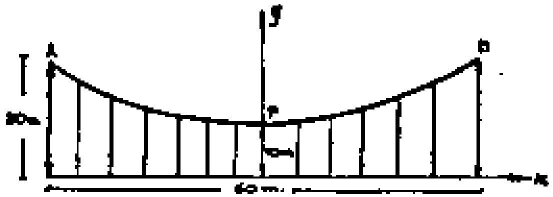


Fig. 7

Determine la ecuación de la curva APB.

Solución:

Consideremos la parte del cable entre el punto P y cualquier punto C de coordenadas (x, y).

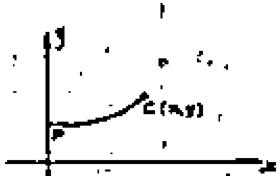


Fig. 8

Esta parte estará en equilibrio debido a la tensión T en C, la fuerza horizontal H en P y la carga vertical total sobre la porción PC del cable, la cual denotemos por $w(x)$ y la suponemos actuando sobre algún punto Q del cable

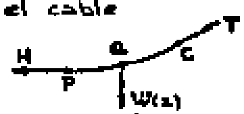


Fig. 9

En el equilibrio, la suma algebraica en la dirección x (horizontal) debe ser cero y la suma algebraica en la dirección y (vertical) también debe ser cero.

Descomponiendo la tensión T en sus dos proyecciones:

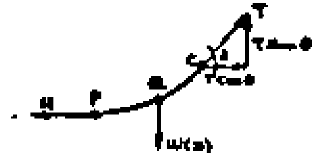


Fig. 10

Se tiene en el equilibrio:

$T \operatorname{sen}\theta = w(x)$ y $T\cos\theta = H$

Como $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$ = pendiente de la tangente en C de la curva APB,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{w(x)}{H};$$

donde H es una constante; ya que la tensión del cable en P y w depende de x, derivando la ecuación diferencial anterior, se tendrá:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\cdot\frac{dw(x)}{dx}$$

A $\frac{dw(x)}{dx}$ le podemos dar la siguiente interpretación:

Es el incremento de w por unidad de incremento de x, es decir, es la carga por unidad de distancia en la dirección horizontal.

Como en nuestro problema, la carga está uniformemente repartida, podemos escribir:

$$\frac{dw(x)}{dx} = w \quad ; \quad w \text{ constante}$$

y $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \quad \text{ecuación diferencial lineal no homogénea}$$

Resolviendo:

$$y = \frac{wx^2}{2H} + C_1x + C_2$$

Para evaluar las constantes C_1 y C_2 consideremos las condiciones iniciales:

en $x = 0$; $Y = 10\,m$ en $x = 0$ $\frac{dY}{dx} = 0$ ∴
$c_1 = 0$, $c_2 = 10$ por lo que la ecuación de la curva APB es :

$$Y = \frac{wx^2}{2H} + 10 \qquad -304 \le x \le 30$$

ecuación de una parábola.

Debemos notar que si el origen de nuestro sistema de referencia X-Y lo ponemos sobre el punto P, entonces, las condiciones iniciales serán ; en $x = 0$, $Y = 0$, en $x = 0$, $\frac{dY}{dx} = 0$ y $c_1 = c_2 = 0$ quedando la ecuación

$$Y = \frac{wx^2}{2H} \qquad -304 \le x \le 30$$

$\boxed{\text{EJEMPLO 17}}$ Un cubo de 5 pies de lado flota en el agua (densidad 62.5 lb/pies³); si se sabe que la caja oscila con un período de $\pi/5$ seg., cuál es el peso de la caja ?.

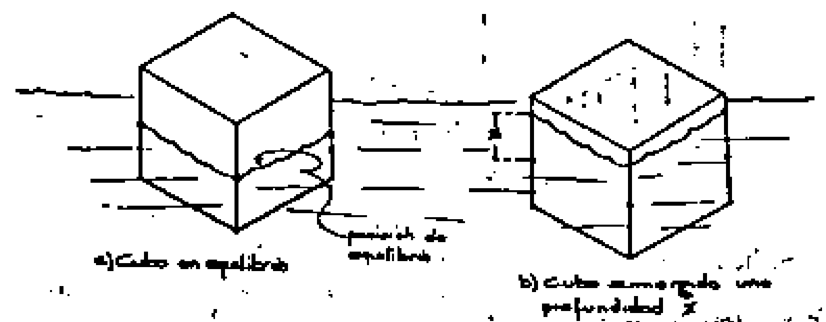


Fig. 11

En la posición b de la figura 11 existe una fuerza tendiente a empujar la caja hacia arriba nuevamente.

Por el principio de Arquímedes, la fuerza restauradora es igual al peso del líquido desalojado. Como el volumen total sumergido es $(5)(5)x$ pies³ y la densidad es de 62.5 lb/pie³, por lo tanto la fuerza restauradora tendrá un valor de :

$F_r = -(62.5)(25x)$ lbs.

Si denotamos el peso de la caja por w, tenemos de la segunda ley de Newton; tomamos $g = 32.2$ pies/seg²

$$\frac{w}{g}\ddot{x} = -1562.5\,x$$

$$\ddot{x} + \frac{50000}{w}x = 0$$

Ecuación diferencial lineal homogénea, resolviendo :

$$x(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{50{,}000}{w}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{50{,}000}{w}}\,t$$

como $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{50{,}000}{w}}} = \frac{\pi}{5}$

y $w \doteq 500$ lbs.