ANALISIS DE SISTEMAS I
(Modelos Deterministas)

1. Generalidades sobre Sistemas. La plurivalencia del concepto sistema. Los sistemas como estructuras del conocimiento. Sistemas abiertos y cerrados. Sistemas con retroalimentación positiva o negativa. Clasificación de los sistemas. El concepto de modelo. Características de un modelo y su clasificación. Bases para el uso de un modelo. Soluciones analíticas y soluciones por simulación. Elementos estructurales de un sistema. Frontera cerrada. Subestructuras en los circuitos de retroalimentación: niveles y tasas. Metas, observaciones, discrepancias y cursos de acción en las subestructuras. Sistemas de Ingeniería.

2. La Ingeniería de Sistemas. El concepto de Ingeniería de Sistemas; su evolución. Etapas en la Ingeniería de Sistemas: Análisis, Planeación Exploratoria, Planeación Definitiva, Estudios durante el desarrollo, Ingeniería del Proyecto. Objetivos de la Ingeniería de Sistemas. Etapas del proceso de la Ingeniería de Sistemas: Definición de Problemas; Selección de Objetivos; Síntesis de Sistemas aprobados; Análisis de Sistemas y Selección del Optimo; Diagnóstico, Definición y Diseño. Relación con la Investigación de Operaciones.

3. Análisis de Sistemas y Selección del Optimo. Definición, relación con la Microeconomía. Niveles de Análisis. Ventajas de un Diseño Ingenieril cuando previamente se ha analizado el Sistema; Principio organizativo. El Método Científico; efectos a largo plazo de usar el método científico como un principio organizativo. Etapas básicas en el uso del método científico. Definición de Objetivos, Formulación de medidas de efectividad, Generación de alternativas, Evaluación de alternativas, Selección de la óptima, Retroalimentación. Conclusiones.

4. La Programación Matemática y el Análisis Operacional en los Modelos Deterministas. Elementos de la teoría de la demanda, de la de la producción y de la de costos. Modelos de Análisis Marginal: para un sólo producto, para multiproductos. Repaso de modelos de la Programación Matemática. Relaciones entre Programación Matemática, Teoría de la Firma, Análisis Beneficio-Costo, Análisis Efectividad-Costo y Análisis Operacional. La función Efectividad-Costo y la selección de medidas de efectividad. Aplicación a un sistema de transporte.

5. El Análisis de Sistemas como enfoque cuantitativo para la asignación de recursos; modelos lineales. Comparación entre el Análisis Marginal General y los modelos de la Programación Lineal. El Análisis de Sensibilidad: uso de isocuantas al medir la sensibilidad de los costos, las medidas de efectividad como

restricciones o especificaciones al usar técnicas de optimización. ~~Uso del dual en las medidas de efectividad~~. Análisis de Productividad. Comparación de sistemas y punto de equilibrio. ~~Aplicación al diseño económico de pavimentos de asfalto.~~

6. El Análisis Efectividad-Costo. Costos marginales y costos promedio. Costos fijos y variables. Costos históricos y costos futuros. Costos de oportunidad y costos. Precios sombra. El costo del dinero. Un modelo estático de una firma con productos múltiples y un conjunto de recursos fijos. Estimación de costos para un sistema; etapas en el análisis de dichos costos. Variación con el tiempo de costos y de beneficios; su comparación. Uso de la tasa de descuento en la evaluación de un sistema. Aplicación a la selección de pavimentos de asfalto o de concreto.

7. Selección del Sistema Optimo. Asignación de los recursos que requiere un sistema: modelos no lineales. Las condiciones de Kuhn-Tucker y su interpretación económica: ilustración mediante un modelo de monopolio con dos productos y dos actividades. Problemas de programación industrial al asignar recursos. Los métodos enumerativos en la Programación Entera. Conclusiones de Baumol sobre precios enteros duales. Selección del nivel de inversión inicial mediante Cálculo de Variaciones. Selección del nivel óptimo de inventario mediante el principio de Pontryagin. La Programación Dinámica y el problema de la programación de inversiones en sistemas. Aplicación a la selección de componentes de un sistema estructural.

8. Selección de proyectos a presupuesto fijo. El enfoque del Sistema de Planeación, Programación y Presupuestación (P.P.B.S.): metas, alternativas y desarrollo de modelos. Modelos de Presupuestación. Modelo para proyectos independientes divisibles y de un sólo período; proyectos indivisibles. Modelos para proyectos dependientes, indivisibles y de un sólo período. Modelo para proyectos independientes, indivisibles y de períodos múltiples; proyectos dependientes. Uso del método Lawrer-Bellen la selección de alternativas (modelos lineales y cuadráticos). Aplicación a la planeación.

6. El beneficio, para la sociedad, de la producción de un sistema: Clasificación de sistemas de ingeniería según equilibrio de la oferta y la demanda. Medidas del beneficio de un sistema de servicio público. Medida del valor con mercado y medida del beneficio sin mercado. Beneficios externos. Nivel óptimo de beneficios externos. El enfoque de la utilidad agregada. El óptimo de Pareto. Beneficio Social normativo y Beneficio social Positivo. Objetivos en un proyecto. Determinación del costo y del beneficio. Definiciones sobre medidas de efectividad. Diversas medidas de efectividad; Aplicación de ellas y conclusiones. Aplicación a sistemas hidroeléctricos.

7. Confiabilidad de un sistema. Conceptos fundamentales. Nivel de confianza, Fallo, Criterios de confiabilidad, operabilidad, Manteneabilidad, Reparabilidad, Vida Util, Redundancia. Factores a considerar en un cálculo de confiabilidad. Curvas de supervivencia. Vida media. Cálculo de curvas de supervivencia. Técnicas para el Cálculo de funciones de supervivencia. Cálculo de intervalos de confianza para los parámetros en la distribución exponencial y la binomial. Aplicación de la función de confiabilidad de Weibull. Factores para un diseño que tome en cuenta la confiabilidad, operabilidad y manteneabilidad.

OBJETIVOS DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS (Hall)

a) "Suministrar a los Funcionarios de una Institución o Empresa tanta información (relevante y oportuna) como sea posible.

b) Proponer objetivos a largo plazo y formular los planes que permitan alcanzarlos, como un marco de referencia para unir o coordinar proyectos individuales.

c) Balancear el programa de desarrollo general para asegurar que se progrese según todos los lineamientos prefijados haciendo al mismo tiempo el mejor uso de los recursos ya desarrollados.

d) Formular objetivos y planes para proyectos individuales, consistentes con los objetivos a largo plazo. Conocer las necesidades presentes de la Organización y anticipar las futuras, con objeto de que ésta se encuentre preparada para cuando deba actuar.

e) Mantener entrerados a sus profesantes de nuevas ideas, principios, métodos y mecanismos. Asegurar que a la nueva tecnología se le dé el mejor y más oportuno uso.

f) Llevar a cabo cada una de las operaciones en el proceso de la Ingeniería de Sistemas de la manera más eficiente posible, reconociendo que los requisitos de precisión, detalle y velocidad dependen de la fase del proceso en que se encuentre el proyecto".

FASES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS (Hall)

Estudio de los Sistemas, Planeación exploratoria o preliminar, Planeación del desarrollo de las actividades o definitiva, Estudios durante el desarrollo del proyecto y, propiamente llevar a cabo la Ingeniería requerida por el proyecto.

– Los Estudios de Sistemas tienen por objeto auxiliar a los Ejecutivos en la coordinación del programa general de todos los trabajos que la Institución o Empresa desea llevar a cabo, rara vez es un sólo proyecto. Para ello se requieren evaluaciones periódicas de los mismos, independientemente de la fase en que se encuentren. La información obtenida, convenientemente archivada, permitirá planear proyectos específicos para los que el ataque tendrá el enfoque correcto y los recursos necesarios.

– La Planeación Preliminar recae ya en un proyecto específico, problema o, área de necesidad. Aquí ya es indispensable definir problemas, seleccionar objetivos, sintetizar los sistemas y analizarlos, seleccionar el mejor, comunicar los resultados a los Ejecutivos con objeto de que comparen la evaluación de las consecuencias de la selección con los objetivos definidos.

– La Planeación Definitiva principia una vez tomada la decisión sobre el proyecto que debe llevarse adelante. Aquí se formula un plan de acción que cumpla con los objetivos y proponga los medios para alcanzarlos. Operacionalmente esta fase es una repetición de la anterior, salvo que todos los pasos se llevan a cabo con mayor detalle reduciendo drásticamente el conjunto de posibles selecciones. En esta fase reviste especial importancia la experimentación y el trabajo de campo.

– En la fase: Estudios durante el Desarrollo, se perfecciona el plan de acción interpretándolo a la luz de los nuevos datos técnicos que se van obteniendo. Es posible que esto repercuta en cambios en los objetivos o en los recursos previstos originándose nuevas decisiones. Finalmente al llevar a cabo propiamente la Ingeniería del proyecto deberán retroalimentarse resultados que puedan corregir posibles deficiencias en el programa y completen los archivos iniciados en la primera fase.

Como es evidente, de la operación descrita, las fases ni están en contradicción con las de los proyectos de Ingeniería Civil, todo lo contrario, las ordenan, complementan y controlan. Las labores de Planeación, Programación y Control de diversas Instituciones Oficiales tienden precisamente a este modus operandi. Esto no es de sorprender ya que "... Se ha aprendido que mediante la planeación técnica se pueden prevenir y evitar errores sumamente costosos" (Hall).

Seguramente que conservando en mente los objetivos y las fases del proceso de la Ingeniería de Sistemas resultará menos obscura la definición de Chestnut (1967): "El método de la Ingeniería de Sistemas reconoce que cada sistema es un todo integrado compuesto de diversas estructuras y sub-funciones especializadas. Reconoce además que cualquier sistema tiene un cierto número de objetivos y que el balance entre ellos puede diferir ampliamente de sistema a sistema. El método busca optimizar las funciones globales del sistema de acuerdo con una ponderación de los objetivos y obtener así máxima compatibilidad entre sus partes".

El sistema es entonces un todo integrado. La definición es por demás general. La naturaleza del todo no se especifica; puede ser un sistema económico, social o tecnológico. Estos últimos son los que aquí interesan, por ejemplo: los carreteros, los de alcantarillado, los hidroeléctricos, los de agua potable, etc. Obsérvese que cabe hablar de Sistemas de Ingeniería Civil. En todos ellos lo más importante es que el todo funcione armoniosamente y cumpla con objetivos prefijados y no que una de sus partes funcione en forma óptima en detrimento de las restantes. De hecho las funciones generales del sistema son optimizadas combinando en forma ponderada los diversos objetivos del mismo. Estos pueden ser: simplicidad, beneficios a corto o largo plazo, facilidad de conservación, costo, vida útil, eficiencia en el servicio, etc. Más que optimizar atendiendo a cada uno de ellos, la Ingeniería de Sistemas se plantea el óptimo general determinado como consecuencia lo que, para el sistema en análisis, debe entenderse por óptimos parciales que satisfagan los objetivos particulares.

Aceptando la existencia de los Sistemas de Ingeniería Civil es inmediato que debe capacitarse en la metodología de los sistemas al Ingeniero que deba estudiarlos. En este sentido surge como necesidad cuya satisfacción es inaplazable la formación de Ingenieros Civiles "de Sistemas".

INVESTIGACION DE OPERACIONES

En 1951 Morse la define como un método científico que suministra a los departamentos ejecutivos una base cuantitativa para las decisiones con respecto a las operaciones bajo su control. En 1957 Churchman define su método en los siguientes términos:

1. Formula el problema
2. Construye un modelo matemático que lo represente
3. Obtiene una solución del modelo
4. Pone a prueba el modelo y su solución
5. Implementa la solución

En 1963 Ackoff señala que las características fundamentales de la Investigación de Operaciones son orientación hacia los sistemas, uso de grupos (de personas) interdisciplinarios y, adoptación del método científico. En general los autores coinciden en que bajo el título de Investigación de Operaciones se agrupan disciplinas científicas, principalmente matemáticas, tales como: Programación Matemática, Teoría de Inventarios, Teoría de la Espera (Colas), etc.

A pesar de los distintos orígenes, uno bélico para la Investigación de Operaciones y otro civil para la Ingeniería de Sistemas es evidente de los conceptos anteriores que los puntos de contacto entre estas dos ramas del saber son abundantes. La controversia entre autores respecto a ellas es notoria, así, para Hall, la Investigación de Operaciones es un auxiliar muy importante de la Ingeniería de Sistemas en varias de las fases de ésta. De la definición de Chestnut se desprende su uso en los aspectos de optimización. Ackoff considera que una y otra convergen rápidamente hacia una nueva disciplina que en su concepto se podría llamar Investigación de Sistemas.

Enthoven, por su parte, afirma en 1967: ... "La epistemología de la Investigación de Operaciones es la de las ciencias exactas; esto es, la Investigación de Operaciones supone que los datos empíricos son exactos, o al menos .. suficientemente exactos para que sus cálculos refinados y precisos sean de valor. Por otra parte, la epistemología del Análisis de Sistemas es la epistemología de las ciencias Inexactas... El Análisis de Sistemas enfatiza técnicas para trabajar bajo la incertidumbre. La Investigación de Operaciones enfatiza las matemáticas aplicadas... La Investigación de Operaciones está orientada hacia problemas en los que el elemento del cálculo es dominante y en los que las matemáticas pueden ser consideradas como un substituto más que una ayuda al juicio. El Análisis de Sistemas por otra parte enfatiza conceptos económicos básicos como: producto marginal y costo marginal. El Análisis de Sistemas ha desarrollado una variedad de técnicas para analizar complejos problemas de decisión, pero de tal manera que el cálculo es el sirviente del juicio informado". Sin ánimo de entablar una más detallada discusión, que no tiene cabida en el propósito de este artículo, se desprende que aparentemente los estudios de Sistemas se encuentran más cernanos a la manera de pensar del Ingeniero, mientras que los de Investigación de Operaciones corresponden más bien al Científico (frecuentemente Matemático) Aplicado, sin dejar por esto de constituir una importante herramienta para el Ingeniero.

ANALISIS DE SISTEMAS

1. El enfoque propio de los sistemas

Los problemas enfocados según el Análisis de Sistemas implican:

a) Principiar con una perspectiva general del problema, de ahí aislar el sistema que debe ser estudiado así como, sus componentes principales y las interacciones entre ellas.

b) Desarrollar uno o varios modelos del sistema y de sus componentes.

c) Usar el modelo del sistema para explorar rutinariamente las alternativas y ganar conocimiento la naturaleza de las decisiones de fondo a tomar. Como un auxilio para lograr lo anterior, se deberán definir cuidadosamente los objetivos, enumerar sistemáticamente las alternativas, predecir y evaluar las consecuencias, todo ello en la forma más explícita posible.

2. Características del analista de sistemas

a) Dominio de las técnicas matemáticas usadas en la formulación de modelos (Programación Matemática, Teoría de Decisiones, etc.).

b) Experiencia en modelos y en su análisis (saber identificar las características relevantes de un problema y enfocarlo con propiedad, independientemente de las barreras de una disciplina matemática).

c) Entendimiento de la esencia del problema bajo estudio.

d) Saber usar las herramientas que brinda el Análisis Económico en especial las de beneficio-costo y efectividad-costo. Conocer de Microeconomía y de Econom-nomía de Bienestar.

e) Capacidad para el uso de la computadora, no como programador, sino como conocedor de modelos basados en computadora.

f) Capacidad y habilidad para reconocer, analizar y usar las fuerzas económicas, sociales y políticas que influyen en el planteamiento y solución del problema planteado.

3. Modelo del Sistema

Uno de los aspectos principales en el análisis de un sistema está dado por el modelo o modelos que lo representan, esto es independiente de si el sistema es ingenieril, económico, social o político. El objetivo del modelo es representar el comportamiento del sistema y de las interacciones entre éste y su ambito.

4. Análisis rutinario y sistemático de las alternativas.

Tal vez este sea el aspecto más importante del Análisis de Sistemas. Es importante notar que para la solución de un problema existen diferentes alternativas, cada una de ellas con ventajas y desventajas sobre las restantes. Luego no es suficiente que el analista construya un modelo elegante y sin tacha desde un punto de vista puramente teórico, debe probarlo para distintas condiciones externas, evaluar su comportamiento, encontrar relaciones funcionales entre variables de decisión, encontrando rangos de factibilidad entre las variables implicadas por los objetivos, explorar las implicaciones de objetivos alternos, etc... No debe esperarse que el modelo del sistema conduzca directamente a la solución del problema sino que meramente suministre mayor conocimiento sobre la naturaleza del mismo, con objeto de hacer juicios informados. Esto es, el papel del analista de sistemas no es especificar la solución del problema, más bien es ampliar la capacidad del ingeniero para hacer juicios bien fundamentados sobre la solución al problema.

5. Resumen

El enfoque de la Ingeniería de Sistemas se puede sintetizar en:

a) usar un conjunto de técnicas matemáticas

b) lograr un entendimiento profundo del problema planteado

c) desarrollar modelos del sistema

d) explorar sistemáticamente una variedad de alternativas, en datos, objetivos, soluciones, impactos o consecuencias.

6. Sistema

Es un grupo de partes que operan conjuntamente para lograr un fin común. Un automóvil es un sistema de componentes que trabajan conjuntamente para suministrar transportación. Una administración es un sistema de gente para asignar recursos y regular la actividad de una institución o empresa.

7. Sistemas abiertos

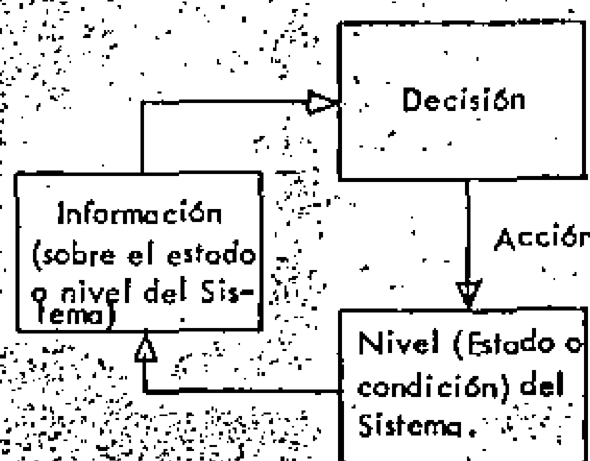
Un sistema abierto se caracteriza por los productos o salidas que suministra, los cuales resultan de los insumos o entradas pero con la condición de que los productos son independientes de los insumos. En otras palabras, el sistema no observa y reacciona a su comportamiento, la acción del sistema en el pasado no tiene influencia sobre su acción en el futuro. Un automóvil es un sistema abierto que por sí mismo no está gobernado por los lugares por los que haya transitado en el pasado ni tampoco tiene una meta que alcanzar en el futuro.

8. Sistemas cerrados o con retroalimentación

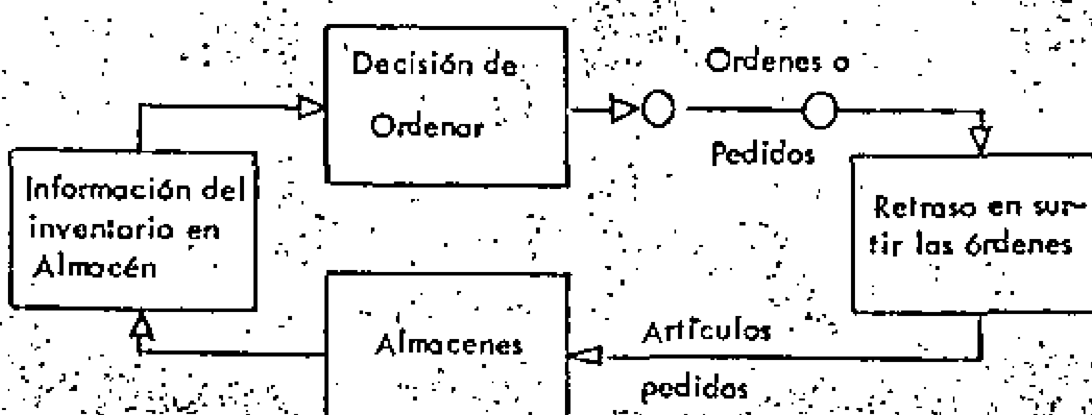
Por el contrario un sistema cerrado se ve influenciado por su comportamiento pretérito. Un sistema con retroalimentación tiene una estructura en circuito cerrado que proporciona resultados de la acción pasada del sistema con objeto de controlar la acción futura. La retroalimentación puede ser negativa o positiva. Cuando es negativa el sistema busca una meta y reacciona adecuadamente según si la ha alcanzado o no; cuando es positiva se crea un proceso siempre creciente, la acción en el pasado siempre genera mayor acción en el futuro. Así el termostato que controla la temperatura ambiente es un sistema cerrado con retroalimentación negativa. Un cultivo de bacterias es un sistema abierto con retroalimentación positiva.

9. Estructura de la retroalimentación

La estructura básica consiste de una trayectoria cerrada que secuencialmente conecta una decisión, que controla una acción, sobre el nivel o estado en que se encuentra un sistema y suministra información sobre dicho estado a la decisión que generará una nueva acción.

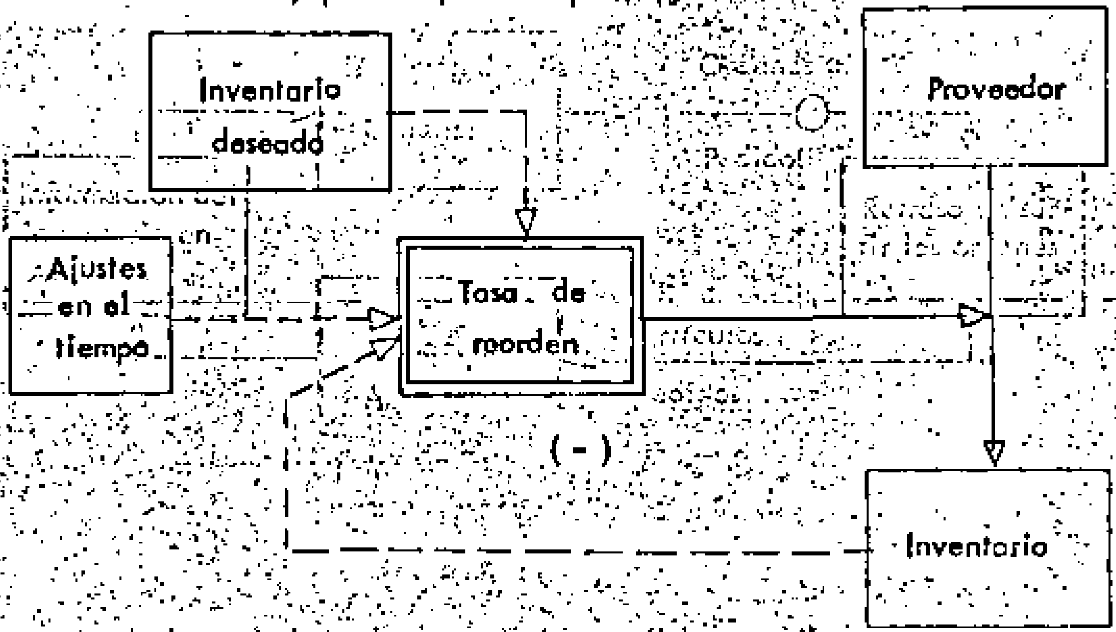


Para un sistema de inventario se tendría:



10.- Circuito con retroalimentación negativa y de primer orden

El diagrama adjunto ilustra un sistema elemental de control de inventario. Se supondrá que la tasa de reorden puede ser positiva o negativa, esto es, los artículos ordenados pueden ser incorporados al inventario o bien devueltos al proveedor. La meta fijada al sistema es mantener un cierto nivel de inventario (inventario deseado ID) que se supondrá fijo.



La decisión expresada por la tasa de reorden implica llevar el nivel actual real de inventario al I.D. esto significa incrementar la tasa cuando el nivel real es inferior al I.D.

A la inversa, conforme se eleva el nivel, la tasa se irá reduciendo.Si el inventario, por el contrario, es mayor que I.D. la tasa será negativa y los artículos serán devueltos.

En forma simplificada se puede especificar que la tasa de reorden es función de la diferencia entre I.D. y el real.

$$TR = ID - I$$

en donde

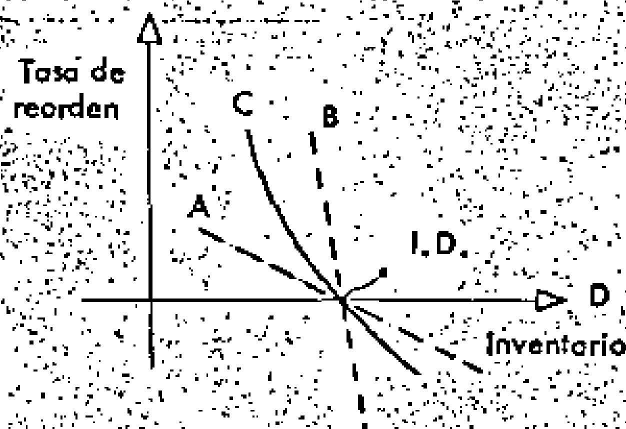
T. R. = Tasa de reorden (artículos / semana)

I.D. = Inventario deseado (artículos)

I. = Inventario real (artículos)

De inmediato se observa que la ecuación no es correcta dimensionalmente.

Cuando el inventario alcanza a I.D. se tiene que T.R. = 0.



Sin embargo, cuando no es así hay diferentes alternativas, lineales como en A y B ó no lineales como en C.

Con objeto de corregir la ecuación inicialmente planteada y seleccionar alguna de las curvas A, B ó C se introducirá el factor TA (tiempo de ajuste).

De manera que:

$$TR = \frac{1}{TA}(ID - I)$$

en donde las unidades de TA son semanas. La ecuación indica que se ordenará de un $TA^{-ésima}$ de la diferencia entre el inventario deseado y el real, cada semana. El tiempo TA es el que se requeriría para corregir el inventario si la tasa de reorden se mantiene fija. La ecuación anterior evidentemente implica ya la selección de una política lineal (A ó B) y su magnitud la define totalmente.

Aprovechando el ejemplo anterior se ilustrará el funcionamiento de la retroalimentación al variar el tiempo.

Sea

$ID = 6,000$ artículos

$TA = 5$ semanas (Esto es, se requieren 5 semanas para que una tasa de reorden dada corrija al inventario).

Entonces:

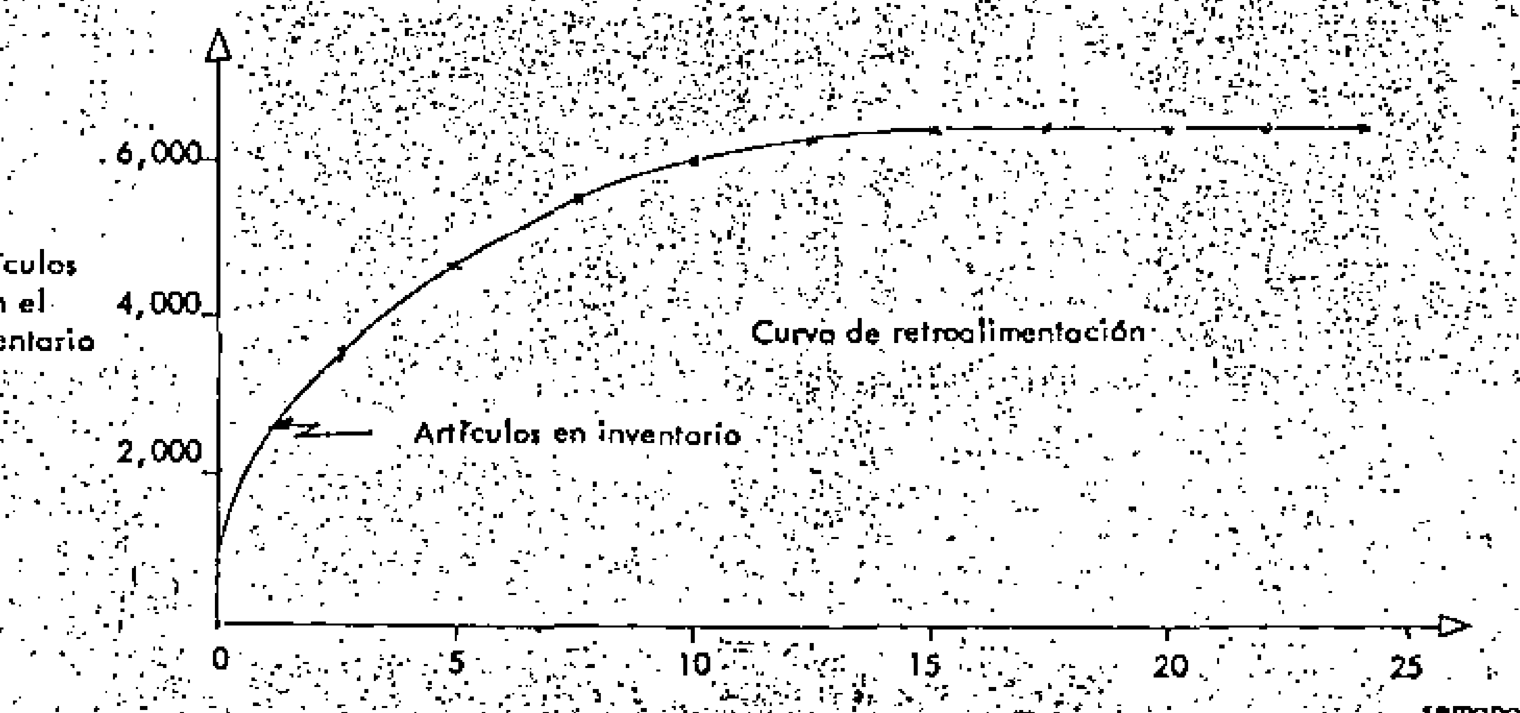
$$TR = \frac{1}{5}\ (6,000 - I)$$

Supóngase que el inventario inicial es de 1,000 artículos. Entonces la tasa de reorden es de mil artículos por semana. Si esta tasa persiste por dos semanas esta política, se habrán agregado dos mil unidades al inventario inicial resultando de 3,000 unidades. Usando este nuevo valor se obtendrá ahora una tasa de reorden de 600 unidades por semana. Si nuevamente se persiste en esta política durante dos semanas, al final de la cuarta semana se tendrán 4,200 artículos.

Se pueden tabular resultados, obteniéndose:

Tiempo (semanas)	Invent. (artículos)	Tasa de reorden (artículos/semana)
0	1000	1000
2	3000	600
4	4200	360
6	4920	216
8	5352	130
10	5611	78
12	5767	47
14	5860	28
16	5916	17
18	5950	10
20	5970	6
22	5982	4
24	5989	2

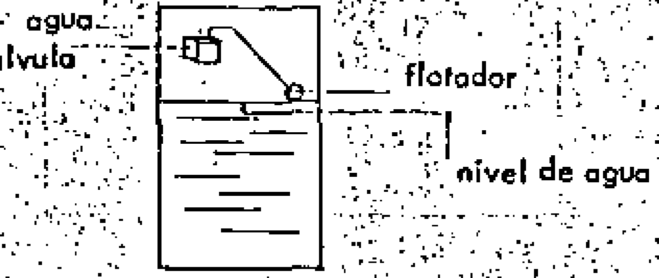
Representando gráficamente estos resultados se obtiene:



Obsérvese que conforme se acerca el inventario a los 6,000 artículos la tasa de reorden disminuye. De ahí la definición de que "un circuito de retroalimentación negativa es aquel en que la decisión de control tiende a ajustar el nivel del sistema a una meta dada exterior al circuito mismo". En el ejemplo la meta son los 6,000 artículos.

11. Ejercicio

Elaborar el diagrama de sistema correspondiente a un tanque en un sistema de abastecimiento de agua potable.



Si la capacidad del tanque es de 50,000 litros. Al iniciar el estudio contiene 5,000 litros y se desea llenar en 8 horas. Dibujar la curva de retroalimentación. Identificar para este ejemplo:

a) Inventario deseado

b) Inventario real

c) Tasa de reorden

d) Tiempo de ajuste

e) Nivel del sistema

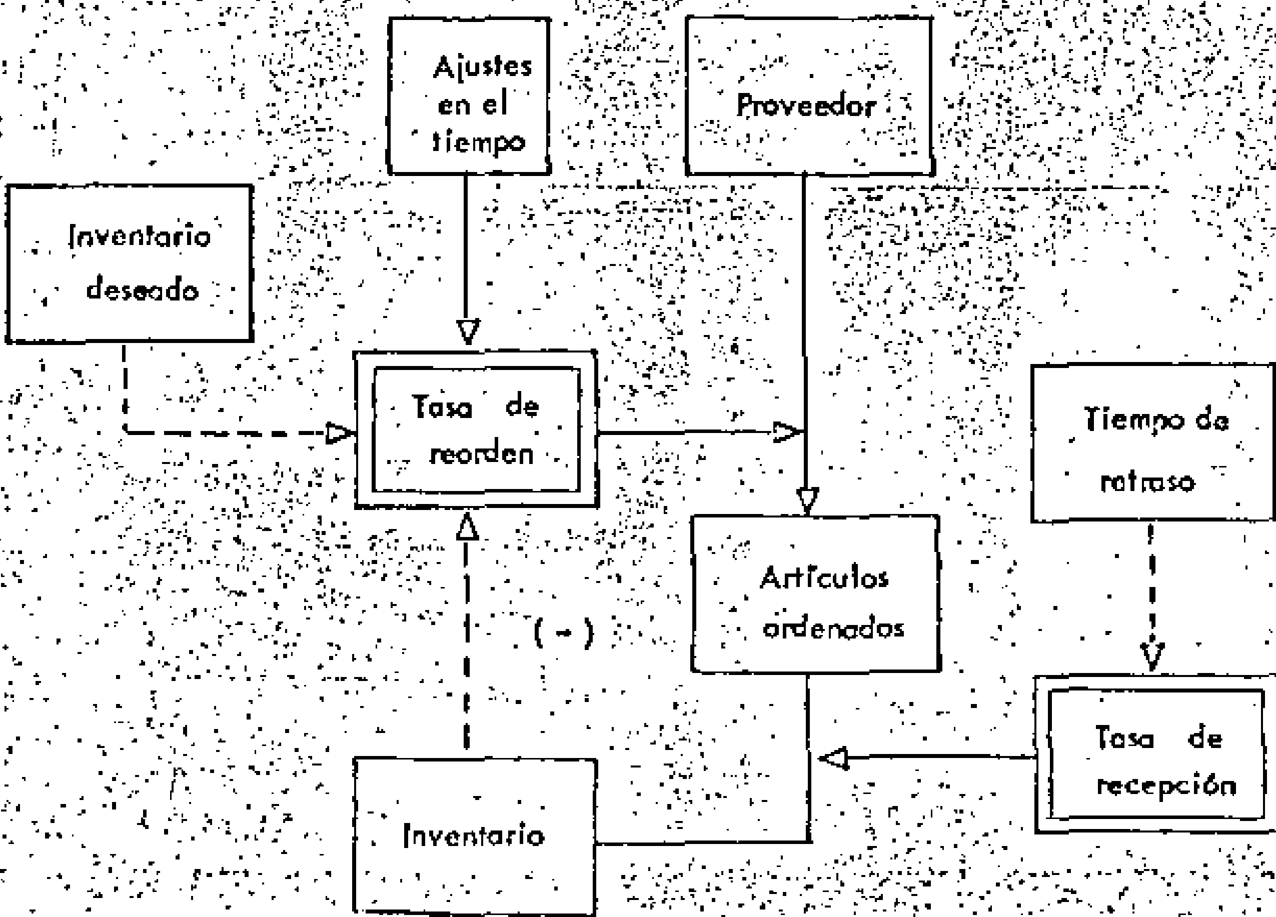
f) Decisión de control

12. Circuito con retroalimentación negativa y de segundo orden

Un sistema de segundo orden se caracteriza por tener dos niveles (variables de nivel). En los de primer orden, el inventario se acercaba gradualmente deseado sin oscilar.

Supóngase, ahora, que existe un retraso en la entrega de los artículos; esto es, entre que se ordenan y se reciben transcurre un intervalo de tiempo. Se tienen dos niveles correspondientes a la tasa de reorden y a la tasa de recepción de los artículos.

El diagrama del sistema resulta:



Puesto que el problema de inventario es el mismo que el de primer orden antes considerado, la ecuación

$$TR = \frac{1}{TA}\ (ID - I)$$

sigue siendo válida. Ahora bien, con objeto de tomar en cuenta la segunda variable de nivel, se definirá la tasa de recepción de la siguiente manera:

$$TRC = \frac{AO}{TIRT}$$

en donde:

TRC = tasa de recepción (artículos / semana)

AO = artículos ordenados (artículos)

TIRT = tiempo de retraso (semanas)

Obsérvese que la estructura para la tasa de recepción coincide con la de la tasa de reorden. Operacionalmente, si la tasa de reorden se incrementa el número de artículos ordenados aumentará lo que conduce a un incremento en la tasa de recepción.

Nuevamente se ilustrará el funcionamiento de la retroalimentación para este circuito de segundo orden. Sea de 10 semanas el tiempo de retraso y sean 10,000 los artículos ordenados. Con estos valores numéricos se tendrá el mismo flujo inicial de 1,000 artículos por semana en el inventario.

Se tiene entonces:

$$\begin{cases} TR = \frac{1}{5}\,(6{,}000 - I) \\ TRC = \frac{A\,O}{10} \end{cases}$$

Estas ecuaciones conjuntamente con los valores iniciales suministrados conducen a la tabla:

Tiempo (semanas)	Inventario (artículos)	Artículos Ordenados (artículos)	Tasa de reorden (arts./sem.)	Tasa de recepción (arts./sem.)
0	1000	10,000	1000	1000
2	3000	10 000	600	1000
4	5000	9200	200	920
6	6840	7760	-168	776
8	8392	5872	-478	587
10	9566	3741	-713	374
12	10315	1566	-863	157
14	10628	-473	-926	-47
16	10533	-2229	-907	-223
18	10087	-3597	-817	-360
20	9368	-4512	-674	-451
22	8465	-4957	-493	-496
24	7474	-4952	-295	-495
26	6484	-4551	-97	-455
28	5573	-3834	85	-383
30	4807	-2897	239	-290
32	4227	-1840	355	-184
34	3859	-763	428	-76
36	3707	246	459	25
38	3756	1114	449	111
40	3979	1789	404	179
42	4336	2240	333	224
44	4784	2457	243	246
46	5276	2452	145	245
48	5766	2251	47	225
50	6216	1895	-43	189
52	6595	1429	-119	143
54	6881	905	-176	91

56	7062	372	-212	37
58	7137	-128	-227	-13
60	7111	-557	-222	-56
62	7000	-890	-200	-89
64	6822	-1112	-164	-111
66	6599	-1218	-120	-122
68	6356	-1214	-71	-121
70	6113	-1114	-23	-111
72	5890	-936	22	-94
74	5703	-705	59	-70
76	5562	-445	88	-45
78	5473	-181	105	-18
80	5437	66	113	7
82	5450	278	110	28
84	5506	443	99	44
86	5594	552	81	55
88	5704	604	59	60
90	5825	601	35	60
92	5945	551	11	55
94	6056	463	-11	46
96	6148	348	-30	35
98	6218	219	-44	22
100	6261	88	-52	9

En el primer renglón de la tabla se tienen como datos de partida 1,000 artículos en el inventario inicial y 10,000 ordenados, de ahí que T R = 1,000 , T R C = 1,000 . Para el segundo renglón después de dos semanas el inventario será de 3,000 artículos, ya que se han estado recibiendo artículos a razón de mil a la semana (T R C = 1,000). Ahora bién, la diferencia entre la tasa de recepción y la de reorden es 0 = 1,000 - 1,000 ; esta política conservada durante dos semanas no altera el número de artículos ordenados que seguirá siendo de 10,000. La tasa de reorden ahora será de

$$TR = \frac{1}{5}\ (6000-3000) = 600 \text{ artículos /semana}$$

mientras que la de recepción permanece igual

$$TRC = \frac{10,000}{10} = 1000.$$

Por lo que se refiere al tercer renglón, la política de las semanas 3 y 4 fué de reordenar 600 artículos por semana y recibir mil por semana. Entonces el inventario será de

$$I = 3000 + 2\ (1000) = 5000 \text{ artículos}$$

Los artículos ordenados son

$$AO = 10000 - 2\ (1000-600) = 10000-800 = 9200$$

Las políticas que regirán para las próximas dos semanas son

$$TR = \frac{1}{5}\ (6000-5000) = 200$$

$$TRC = \frac{9200}{10} = 920$$

Por lo que se refiere al cuarto renglón y de acuerdo con las políticas definidas para las semanas 5 y 6, se tiene:

$$I = 5000 + 2\ (920) = 5000 + 1840 = 6840$$

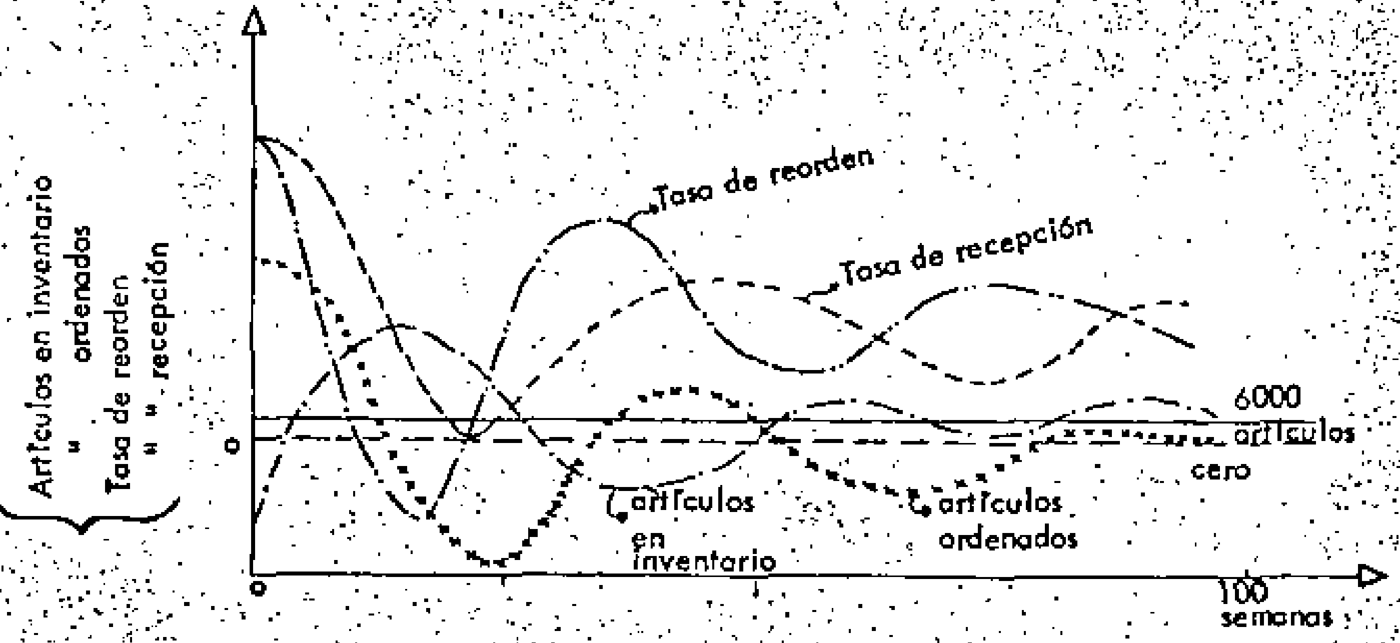
$$AO = 9200 - 2\ (920-200) = 7760$$

$$TR = \frac{1}{5}\ (6000 - 6840) = -168$$

$$TRC = \frac{1}{10}\ (7760) = 776$$

Y así sucesivamente.

Representando graficamente los resultados obtenidos:



Obsérvese que ahora la curva de artículos en inventario no se aproxima gradualmente a su valor final (6000 artículos), sino que oscila. Así, para la cuarta semana sube por encima del nivel deseado y es necesario devolver artículos al proveedor como se puede ver en la curva de tasa de reorden que cae, por abajo del eje. De hecho, la tasa de retorno es negativa de la semana 4 a la 27, pero se regresan tantos artículos al proveedor que el inventario, cae nuevamente por abajo del deseado. La fluctuación continua aunque ya decreciendo la amplitud. Nótese que la oscilación aparece cuando se agrega el retraso creado por la "línea de abastecimiento" representada tanto por los artículos ordenados como por la tasa de recepción.

13.-Ejercicio

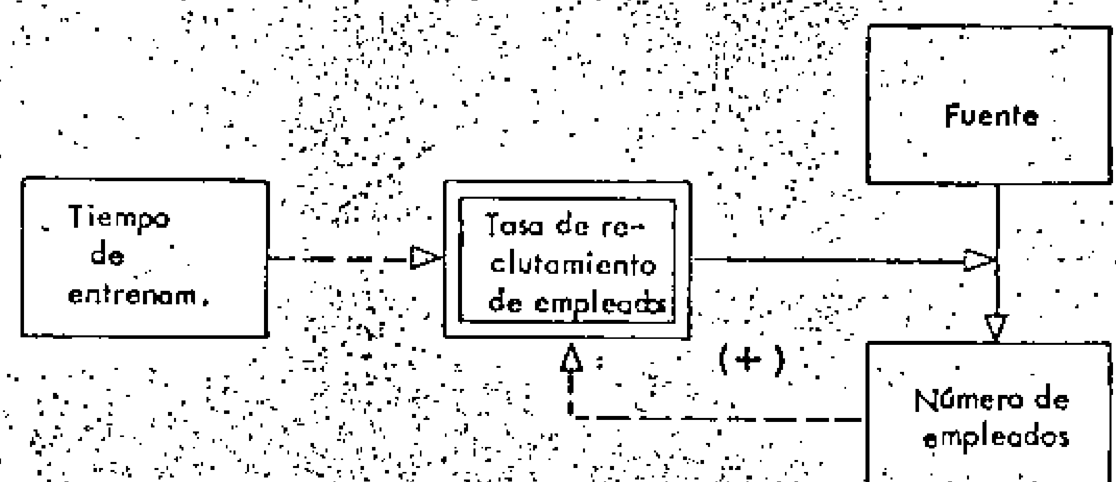
El mismo problema que en el ejercicio anterior pero ahora considerando que el abastecimiento llega por un canal de varios kms de longitud tardando 10 hrs. el agua. A la presa se le han solicitado 100,000 litros al iniciarse el estudio.

14.-Circuito con retroalimentación positiva.

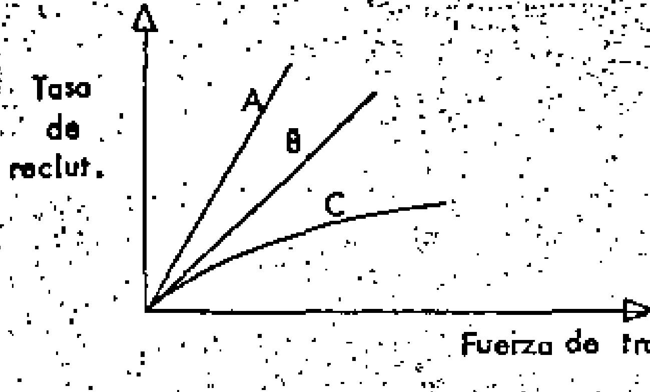
Un circuito con retroalimentación positiva no busca cumplir con una meta externa como es el caso de la retroalimentación positiva (negativa). En vez de ello cuando la retroalimentación es positiva se diverge constantemente de un punto de partida. La acción en el circuito positivo siempre incrementa la diferencia entre el nivel del sistema y un punto de referencia. La naturaleza del proceso de decisión es radicalmente diferente.

Para ilustrar este proceso consideremos el crecimiento de una organización, en donde los empleados antiguos entrenan a los nuevos. Entre mayor es la fuerza de trabajo, mayor es el número de personas que puede entrenar a los recien empleados. Considerando que hay trabajo suficiente, la tasa de reclutamiento de nuevos trabajadores depende directamente del número de empleados.

El diagrama del sistema es:



En forma similar a como se hizo al plantear el circuito de retroalimentación negativa, se puede ilustrar el de positiva:



La recta A sugiere una tasa de reclutamiento alta. La B una menor y en la C se abandona la proporcionalidad;

Optando por la relación lineal se tiene

$$TRE = \frac{1}{TE}(NE)$$

TRE = tasa de reclutamiento de empleados (empleados/semana).

TE = tiempo de entrenamiento (semana)

NE = número de empleados (empleados)

La tasa de reclutamiento de empleados es la política de admisión de trabajadores en la organización. El tiempo de entrenamiento mide el número de semanas que un antiguo empleado tiene que trabajar en tanto se localiza y entrena a uno nuevo. El número de empleados es la fuerza real de trabajo.

Supóngase con fines ilustrativos que TE = 50 semanas. NE = 6 empleados (inicialmente). La política de la empresa resulta:

$$TRE = \frac{NE}{50}$$

El comportamiento del sistema se pone de manifiesto en la tabla adjunta.

Tiempo	Número de empleados (emp)	Taso de reclut. (emp/sem)
0	6.0	0.12
20	8.4	0.17
40	11.8	0.24
60	16.5	0.33
80	23.0	0.46
100	32.3	0.65
120	45.2	0.90
140	63.2	1.26
160	88.5	1.77
180	124.0	2.48
200	173.6	3.47
220	243.0	4.86
240	340.2	6.80
260	476.2	9.52
280	666.7	13.33
300	933.4	18.67

Para el primer renglón se tiene

$$TRE = \frac{6}{50} = 0.12$$

Para el segundo, la política es reclutar 0.12 por semana, entonces

$$NE = 6 + 20\,(0.12) = 6 + 2.4 = 8.4$$

$$TRE = \frac{8.4}{50} = 0.17$$

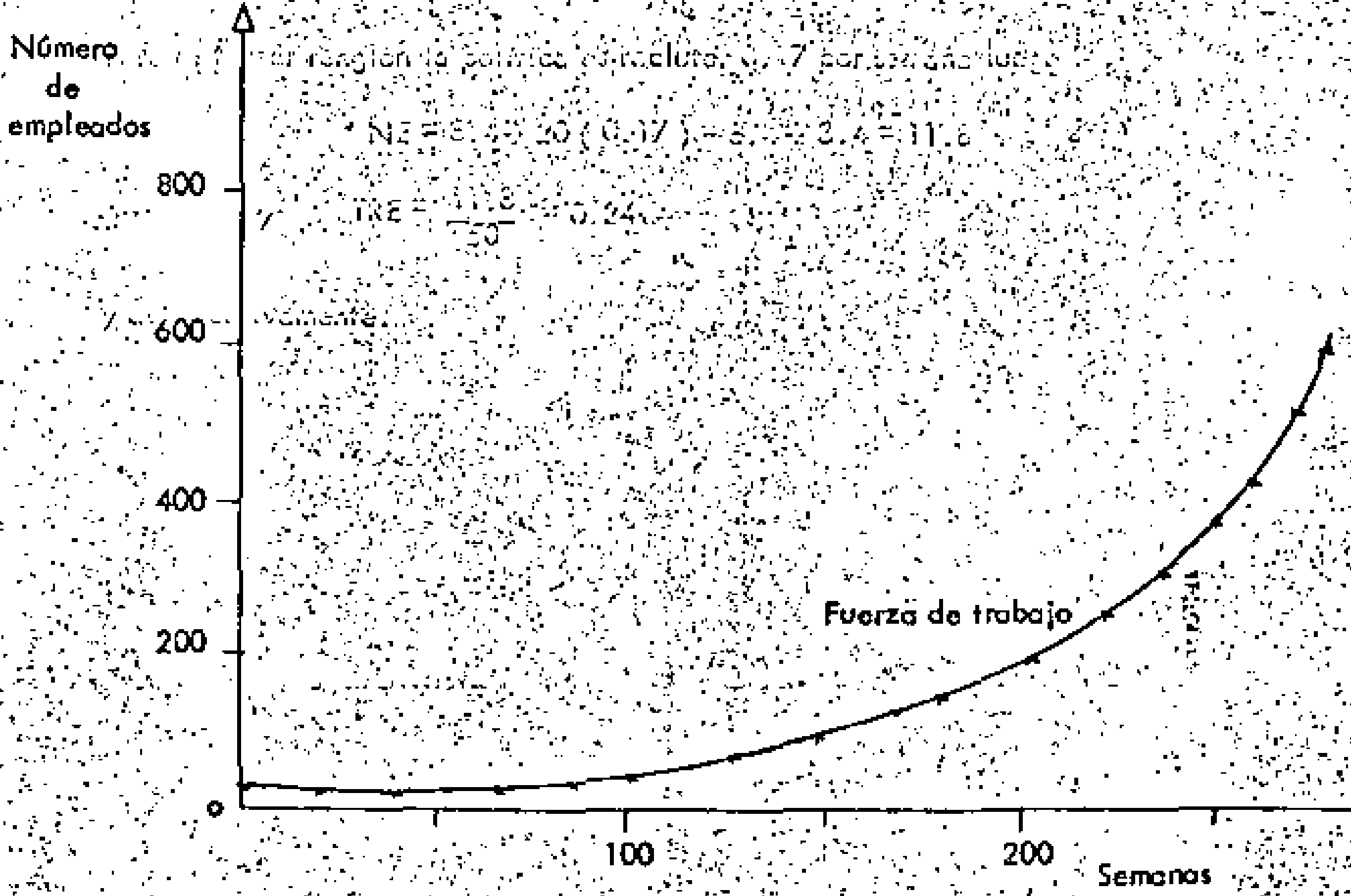
Para el tercer renglón la política es reclutar 0.17 por semana luego

$$NE = 8.4 + 20\,(0.17) = 8.4 + 3.4 = 11.8$$

y $$TRE = \frac{11.8}{50} = 0.24$$

y así sucesivamente.

Esta crecimiento exponencial se puede apreciar en la gráfica.



Esta tipo de mecanismo ocurre en el crecimiento de organismos vivos, puede ilustrar tanto la explosión demográfica como un crecimiento económico que satisfaga las hipótesis planteadas.

15.- Modelos

Algunas Generalidades sobre modelos

a) Un modelo es un sustituto o una representación de un objeto o de un sistema.

b) Un juguete es un modelo, también lo es una maqueta

c) Nuestros procesos mentales usan conceptos que se manipulan consituyendo nuevos conceptos, no son, de hecho, los sistemas reales que representan sino abstracciones producto de la experiencia. Esta experiencia ha sido filtrada y modificada por la percepción individual produciendo modelos del mundo que nos rodea.

d) También las relaciones funcionales usadas al describir el comportamiento de los circuitos de retroalimentación constituyen, modelos. Estos son más precisos que las imagenes mentales.

16.- Definición

Cualquier conjunto de reglas y relaciones que describen un objeto o concepto constituyen un modelo.

17.- Modelos de simulación (Postulado)

Los modelos matemáticos usados en la simulación pertenecen a la clase de modelos abstractos; dichos modelos abstractos incluyen imagenes mentales, descripciones literarias, reglas de juegos y códigos legales.

18.- Defectos principales de los Modelos mentales

a) Los modelos mentales frecuentemente son confusos y hasta contradictorios.

b) Las hipótesis no están claramente identificadas en el modelo mental. No es posible revisar la manera como fué generando el modelo.

c) El modelo mental no es facil de comunicar a otras personas. Además la naturaleza imprecisa del lenguaje puede ser usada para ocultar la nebulosidad mental tanto del que explica como del que escucha.

d) En especial, los modelos mentales para sistemas dinámicos no pueden manipularse de manera efectiva. Con frecuencia se extraen conclusiones erróneas sobre el comportamiento del sistema aún principiando con un modelo correcto.

19.- Juicio sobre modelos analíticos

De los observaciones anteriores, surge la necesidad de emplear modelos analíticos en vez de mentales. La validez y utilidad de los modelos dinámicos deben ser juzgados comparándolos con los modelos mentales descriptivos que serían usados de no existir los primeros y no contra una perfección imaginaria. Los modelos formales deben ser juzgados por su claridad de estructura, en vez de la confusión de las descripciones verbales.

Al construir un modelo formal, mediante diagramas de flujo, ecuaciones etc., se expone claramente la imagen mental del sistema. Se formulan ideas cuantitativas del tamaño, magnitud o influencia de los variables y sus interrelaciones.

20.- Validez de un modelo (Postulado)

La validez de un modelo es un juicio relativo. La utilidad de un modelo matemático de simulación debe ser juzgada comparándolo con la imagen mental o algún otro modelo abstracto que se emplearía en su lugar.

Un modelo es exitoso si abre el camino para mejorar la precisión para representar la realidad.

21.- Observación

Cuando un modelo es reducido a diagramas (conceptualización) y ecuaciones, cuando las hipótesis en las que se basa pueden reproducirse y analizarse, cuando puede ser comunicado a un auditorio, y cuando pueden determinarse normas de variación con el tiempo y entender así su comportamiento dinámico, entonces racionalmente se puede pensar que se conoce la realidad que se intenta representar.

22.- Simulación

La simulación, ó solución paso a paso, emplea las ecuaciones del modelo para describir los cambios que sufre al variar algún parámetro, frecuentemente el tiempo. . Por otra parte cuando se resuelven las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema se dice que se obtiene una solución analítica.

Así, por ejemplo, para el circuito de retroalimentación negativa y de primer orden la solución paso a paso fué ya ejemplificada. La solución analítica es

$$I = (ID) - \left[(ID) - I_o \right] e^{-\frac{t}{TA}}$$

I = inventario real al tiempo t.

ID = inventario deseado

I_o = inventario inicial

t = tiempo

TA = tiempo de ajuste

En forma similar se obtiene la solución analítica del circuito de retroalimentación negativa y de sugundo orden

$$I = c_1 + c_2\ e^{-\frac{t}{c_3}}\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{c_4} + c_5\right)$$

c_1, c_2, c_3, c_4 y c_5 son constantes arbitrarias.

Es claro que cuando sea posible obtener la solución analítica ésta será preferible sobre la paso a paso. Sin embargo dada la complejidad de los sistemas reales esto más bien es exepcional.

23.- Estructura de un sistema con retroalimentación

Frontera cerrada (Postulado)

En concepto un sistema de termostato (tercer nivel de Boulding) esto es, un sistema con retroalimentación, es cerrado y tiene una frontera que lo contiene. Su comportamiento dinámico ocurre dentro de su estructura interna. Cualquier interacción que es esencial para estudiar el modo como se comporta el sistema deberá ser incluída dentro de la frontera.

24.- Elemento estructural de un sistema (Postulado)

El circuito de retroalimentación es el elemento estructural básico en un sistema. Este circuito es el que genera el comportamiento dinámico. Los sistemas complejos están estructurados por conjuntos de circuitos de retroalimentación interactuantes.

25.- Decisiones (Postulado)

Cualquier decisión en un sistema cerrado se lleva a cabo en el contexto del circuito de retroalimentación. La acción de los controles de decisión alteran los niveles del sistema que a su vez influencían la decisión. Un proceso de decisión puede formar parte de más de un circuito de retroalimentación.

26.- Variables de nivel

Las variables de nivel (o de estado) describen la condición en que se encuentra el sistema a un tiempo dado. Estas variables acumulan los resultados de las acciones en el sistema. El cálculo de un nuevo valor de una variable de nivel implica el anterior valor de dicha variable así como las tasas y amplitud del intervalo de tiempo transcurrido desde el último cambio de nivel. Las variables de nivel acumulan los flujos descritos por las tasas.

27.- Variables de tasa

Las variables de tasa (o de acción) describen la rapidez con que cambian las variables de nivel. El cálculo de una variable de tasa se lleva a cabo usando unicamente los valores de las variables de nivel así como algunas constantes. Estas variables no dependen ni de sus valores anteriores, ni del intervalo de tiempo entre cálculos, ni de otras variables de tasa.

28.- Niveles y tasas como sub-subestructuras de un circuito. (Postulado)

Un circuito de retroalimentación consta de dos diferentes tipos de variables, las de nivel (o de estado) y las de tasa (o de acción). Salvo por constantes estos dos tipos de variables son necesarias y suficientes para representar un circuito de retroalimentación.

29.- Los niveles son integraciones. (Postulado)

Los niveles integran (acumulan) los resultados de la acción en un sistema. Las variables de nivel no pueden cambiar instantaneamente. Los niveles crean continuidad en el sistema entre puntos en el tiempo.

30.- Los niveles cambian unicamente mediante las tasas. (Postulado)

Una variable de nivel se calcula mediante el cambio, debido a las variables de tasa, que altera el valor previo del nivel. El valor actual de una variable de nivel puede calcularse sin necesidad de acudir a valores actuales o anteriores de otras variables de nivel. Esto es, las variables de nivel son independientes entre sí.

31.- No es posible distinguir entre niveles y tasas mediante sus unidades (Postulado)

Las unidades de medida de una variable no distinguen entre nivel y tasa. La identificación se logra reconociendo la diferencia entre una variable creada por integración y una que es producto de una política en el sistema.

32.- Regla práctica para distinguir entre variables de nivel y de tasa

Las tasas son variables de acción, cesan de actuar cuando la acción se suspende. Los niveles son la acumulación de los efectos de acciones pasadas y pueden observarse aunque no haya acción de momento. Luego, para diferenciar variables de nivel de variables de tasa imagínese que toda acción se ha detenido, entonces, sólo las variables de nivel permanecen y son observables. Así en una fábrica, si se suspende la actividad, permanecen los niveles de número de empleados, número de piezas terminadas, número de piezas en proceso, inversión en capital, que son todas ellas variables de nivel. Por el contrario, al parar la fábrica desaparecería la tasa instantánea de ventas y la tasa instantánea de producción etc., sin embargo permanecería la producción del año anterior o el promedio de ventas del año anterior que son niveles del sistema.

33.- Las tasas no son instantaneamente mesurables. (Postulado)

Ninguna tasa puede medirse salvo como promedio en un intervalo entre dos puntos en el tiempo. Ninguna tasa puede controlar otra tasa sin que intervenga una variable de nivel.

34.- Las tasas dependen unicamente de los niveles y de constantes (Postulado)

El valor de una tasa variable depende solamente de constantes y de un valor actual de las variables de nivel.

35.- Corolario

En cualquier trayectoria en un sistema se encuentran alternadas las variables de nivel y las de tasa. Así los niveles de inventario existen debido a que - la tasa de oferta y la de demanda suelen diferir y el inventario absorve esta diferencia. El caso es similar para una presa de almacenamiento.

36.- Los niveles describen completamente la condición en que se encuentra un sistema. (Postulado)

Solamente se necesitan los valores de las variables de nivel para describir - totalmente la condición de un sistema. Las variables de tasa no son necesarias puesto que pueden calcularse a partir de los niveles.

37.- Ejercicios

a) El agua corre desde un agujero en un tanque. ¿Cuál acción es gobernado por proceso de decisión? ¿Cuál es la información que controla el proceso de decisión?

b) Un estudiante quiere sacar un MB en todos sus examenes de una materia y continuamente está dicidiendo que tanto debe estudiar. ¿Cuál es el circuito de retroalimentación al que pertenece la decisión?

c) Un profesor desea definir el nivel de la enseñanza para obtener la máxima tasa de aprendizaje. Si profundiza mucho los alumnos pueden no entender y desanimarse si por el contrario es muy elemental la exposición los alumnos se aburren y pierden interés ¿ Cuál es el circuito de retroalimentación que gobierna el nivel al que debe presentarse el material?

d) Un estudiante dedica parte de su tiempo al deporte para mantener su condición física ¿ Cuál es la variable de nivel y cuál es la de tasa en el circuito de retroalimentación al que pertenece la decisión ?

e) Una dependencia dispone de n millones de pesos para conservar n kilómetros de carreteras. Con el circuito de retroalimentación (o circuitos) a que pertenecen las decisiones involucradas ejemplifican todos y cada uno de los postulados antes enunciados.

38.- Ecuaciones de tasa y de nivel.

En modelos complejos aparecen combinaciones de variables de tasa, formando ecuaciones de tasa; así como de nivel formando ecuaciones. Considerando que los circuitos de retroalimentación constituyen la estructura de un sistema cerrado y las subestructuras son las tasas y niveles, las ecuaciones de tasas y niveles son sub-subestructuras del sistema. Por lo que se refiere a la subestructura nivel sólo se requiere habilidad y juicio para definir qué niveles deben incorporarse al modelo de un sistema y la sub-subestructura ecuación de ni vel no desempeña un papel primordial en el planteamiento. No así para la sub-subestructura ecuación de tasa. Esta es propiamente un enunciado de la política a seguir. La política describe cómo debe usarse la información disponible con objeto de generar decisiones. Luego la política o ecuación de tasa indica cómo calcular la tasa con base en niveles y constantes. Así, en el ejemplo de retroalimentación positiva la ecuación de tasa indica cuál es la política de reclutamiento y especifica cómo el número actual de empleados determina el número de candidatos por entrenar.

La ecuación de tasa cubre instante por instante del comportamiento. Es una expresión algebráica que establece la tasa de flujo al presente en términos de la información presente. Por el contrario las ecuaciones de nivel ocasionan todos los cambios dependientes del tiempo en el carácter mismo del flujo.

39.- Componentes de la sub-subestructura ecuaciones de tasa.

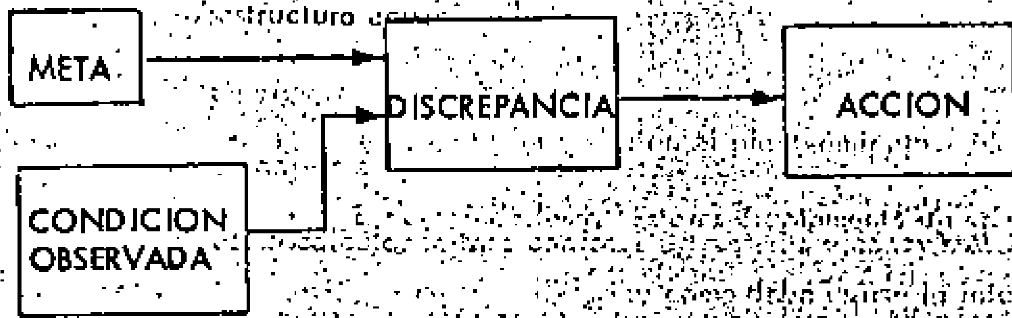
Las componentes de una ecuación de tasa son:

a) Una meta

b) Una condición observada del sistema

c) Una manera de expresar la discrepancia entre una meta y una condición observada del sistema

d) Una norma de conducta sobre la acción a tomar con base en la discrepancia.



Así para la ecuación de tasa

$$TR = \frac{1}{TA} \quad (ID-I)$$

La meta es el inventario deseado ID. La tasa de reorden especifica cómo cambiar el inventario hacia esa meta. La condición observada del sistema es el inventario I. La descrepancia la condición deseada y la aparente se toma en cuenta mediante (ID-I). La acción a tomar se especifica que es ordenar un TA-ésimo de la discrepancia.

En una retroalimentación positiva el concepto de meta adquiere un sentido un tanto diferente, aquí la meta es el valor a partir del cual el sistema principia su comportamiento siempre creciente.

Lo anterior se resume en el postulado siguiente:

40.- <u>Sub-subestructura: ecuación de tasa.</u> (Postulado)

Una política o ecuación de tasa reconoce una meta local hacia la cual tiende el punto de decisión, compara la meta con la condición del sistema para detectar una discrepancia y usa esta discrepancia como una guía para la acción.

41.- Ejercicios.

1.- La política de una empresa ha sido emplear a la mitad de los trabajadores necesaria para llevar la fuerza de trabajo hasta un número autorizado. - ¿ Cuáles son los componentes de dicha política ?

2.- La política que gobierna el flujo de corriente a voltaje constante de una batería en una serie de circuitos capacitancia-resistencia depende de las constantes C y R que caracterizan respectivamente a cada una de ellas y puede establecerse como:

$$I = \frac{V - \frac{Q}{c}}{R}$$

I = corriente en el capacitor

V = voltaje de la batería

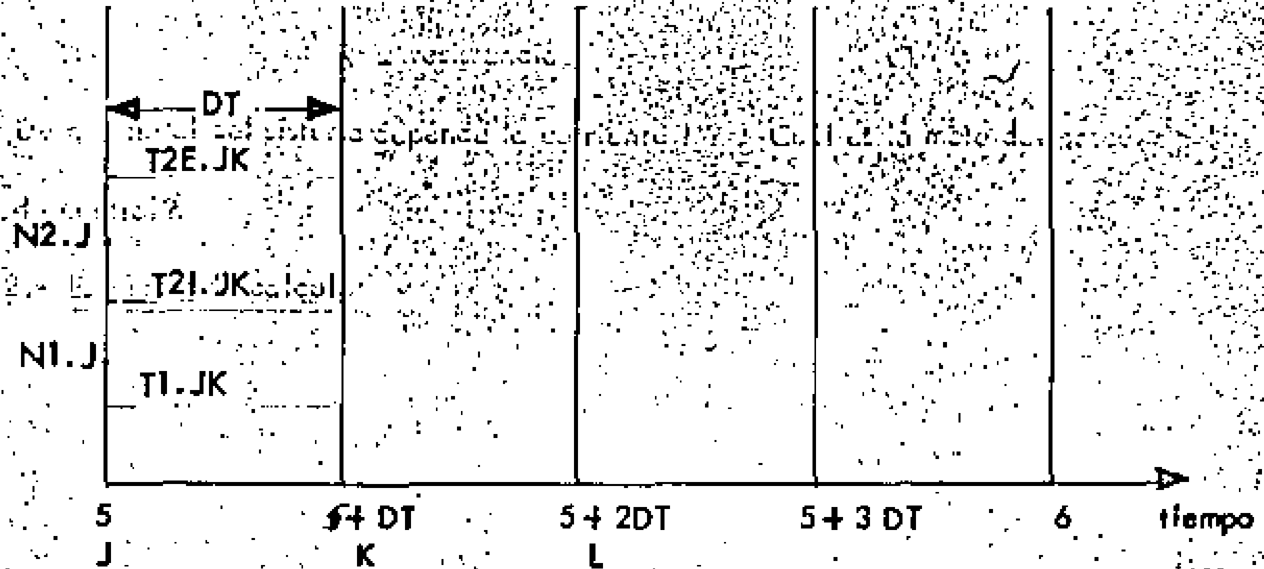
Q = carga en el capacitor

C = capacitancia del capacitor

R = resistencia

¿ De que nivel del sistema depende la corriente I ? ¿ Cuál es la meta del proceso de control?

42.- Esquemas de cálculo

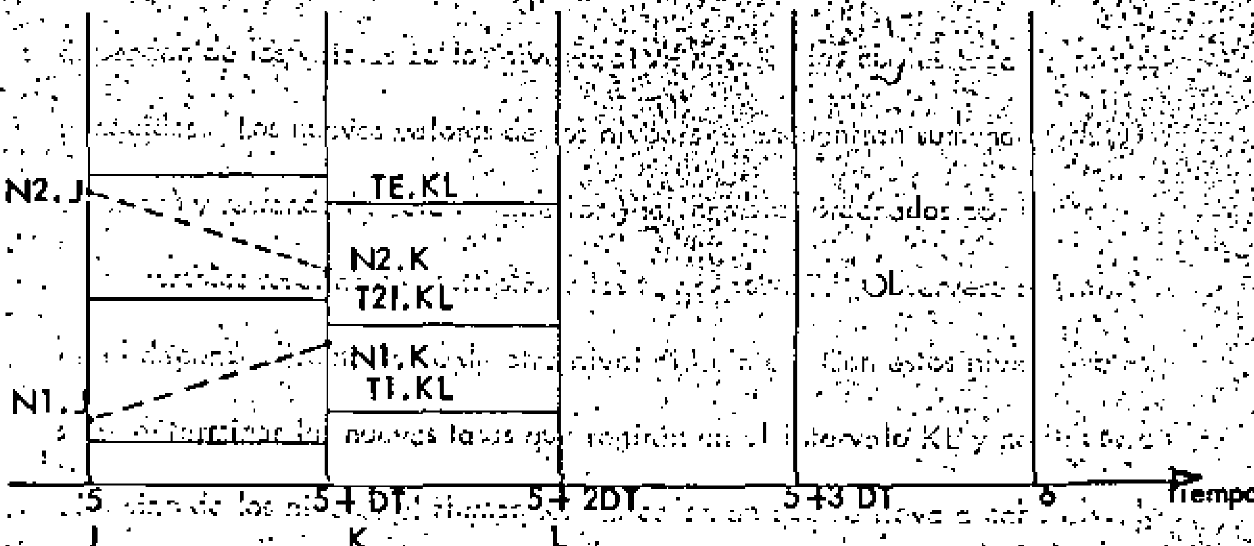


Cuando se intenta calcular las etapas, sucesivas en el tiempo, referentes al comportamiento dinámico de uns sistema es muy conveniente convenir de una buena vez, en la terminología que se va a emplear así como la sucesión de pasos que se van a dar. El cálculo avanza en pasos cuya duración es DT (diferencia en tiempo), estos se situan sobre el eje del tiempo. Así en el diagrama se supone que se ha completado el cálculo hasta el tiempo5 y se está en condiciones de principiar a calcular la condición en que se encuentra el sistema en la siguiente etapa (5 + DT). En la figura el 5 y el 6 indican las unidades de tiempo usadas en definir el sistema y no necesariamente coinciden con las unidades de tiempo requeridas para la solución del problema, de ahí la necesidad de emplear los incrementos DT. La figura ilustra, también una situación cuatro cálculos de condición del sistema en cada unidad de tiempo de definición.

En el punto K en el tiempo se están llevando a cabo los cálculos, esto es, en 5 + DT se está realizando la evaluación. Consecuentemente J es el tiempo en el que la anterior evaluación se llevó a cabo y L es el siguiente punto en el tiempo. No se necesitan sino estos tres puntos J, K, L para la evaluación en el punto K.

Al principiar el cálculo en el punto K se encuentran disponibles los niveles en el punto J y las tasas de flujo sobre el intervalo JK. En la figura, los niveles N1.J y N2.J. designan dos valores de las variables de nivel (estados del sistema) al tiempo J. También se ilustra la existencia de tres tasas en el intervalo JK. La tasa T1.JK fluye hacia el interior del nivel N1 y es la única tasa que afecta a N1. La tasa T2I. JK fluye hacia el interior del nivel N2 mientras que la tasa T2E.JK fluye hacia el exterior del nivel N2.

En la figura se dispone de toda la información que es necesaria para calcular los nuevos valores de los niveles al tiempo K.. Por el contrario los nuevos valores para las tasas en el intervalo KL no pueden calcularse todavía puesto que dependen de los valores de los niveles al tiempo K, los cuales todavía no son conocidos. Los nuevos valores de los niveles se encuentran sumando (hacia el interior) y restando (hacia el exterior) los cambios ordenados por las tasas. Estos cambios resultan de multiplicar las tasas por DT. Observese que ningún nivel depende directamente de otro nivel diferente. Con estos niveles ya es posible determinar las nuevas tasas que regirán en el intervalo KL y no se usará para ello sino de los niveles al tiempo K. El orden en que se lleva a cabo el cálculo de las tasas es de poca importancia ya que son independientes unas de otras. — Esquemáticamente la situación al terminar el cálculo en el punto K es como sigue:



43.- Ecuaciones de nivel

Como se desprende del esquema anterior, se está planteando un proceso de diferencias finitas. En estos términos se suelen expresar las ecuaciones de nivel. Así se ejemplifica considerando un presa a la cual fluye el agua con una tasa TI y se hacen extracciones según una tasa TE. La ecuación de nivel correspondiente será

$$N.K = N.J + (DT)(T.I.\ JK - T.E.\ JK)$$

en donde:

N.K = nivel en el punto K

NJ = nivel en el punto J

TI. JK= tasa hacia el interior para el intervalo JK

TE. JK= tasa hacia el exterior para el intervalo JK

DT= diferencia en tiempo.

Esta ecuación en diferencias finitas tiene como correspondiente

$$L = L_o + \int_o^t (TI-TE)\, dt$$

L = nivel en el tiempo t.

44.- Ecuaciones de tasa.

Las ecuaciones de tasa establecen cómo se controlan los flujos dentro de un sistema. Los datos que se les suministran son niveles del sistema y constantes adicionales. Por su parte las ecuaciones de tasa proporcionan el control del flujo hacia o desde o entre los niveles. Luego, la ecuación de tasa para el intervalo KL se calculará usando los niveles a dicho tiempo K y será de la forma:

$$T.KL = (\text{niveles y constantes})$$

Es evidente que:

a) Una ecuación de tasa no debe contener en su solución el intervalo DT, ya que ésto no tiene significado en el sistema real representado por el modelo.

b) En el segundo miembro de la ecuación de tasa no deberán aparecer variables de tasa, sino únicamente niveles y constantes.

c) En el primer miembro aparecerá la variable de tasa que define la ecuación.

No se debe olvidar que las ecuaciones de tasa son enunciativas de las políticas y que señalan cómo deben efectuarse las decisiones. Estas ecuaciones establecen cómo debe convertirse la información pertinente en una decisión y es mediante ellas que el sistema se controla a sí mismo. Así, una ecuación de tasa describe cómo el agua en una tubería depende de la posición de la válvula y de la presión del agua. En general, una ecuación de tasa establece nuestra percepción de cómo las decisiones del mundo real responden a las circunstancias y presiones que rodean el punto de decisión.

45.- Ecuaciones Auxiliares.

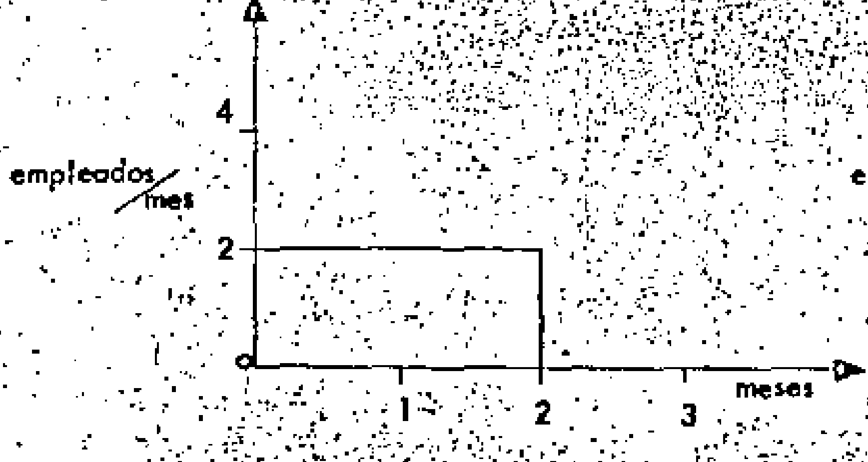
Frecuentemente, la claridad y significado de una ecuación de tasa puede incrementarse fraccionándolas en ecuaciones que describen subpolíticas. Estas reciben el nombre de ecuaciones auxiliares. A diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones de tasa y de nivel, estas ecuaciones auxiliares sí pueden depender unas de otras formándose cadenas de ecuaciones auxiliares, las que deben ser evaluadas en un cierto orden.

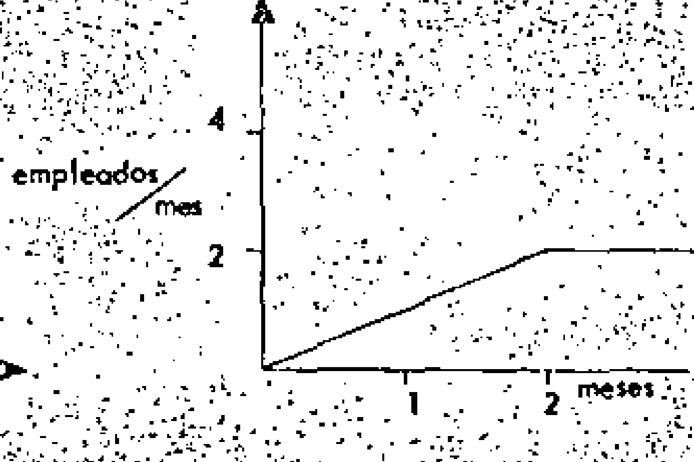
46.- Observación.

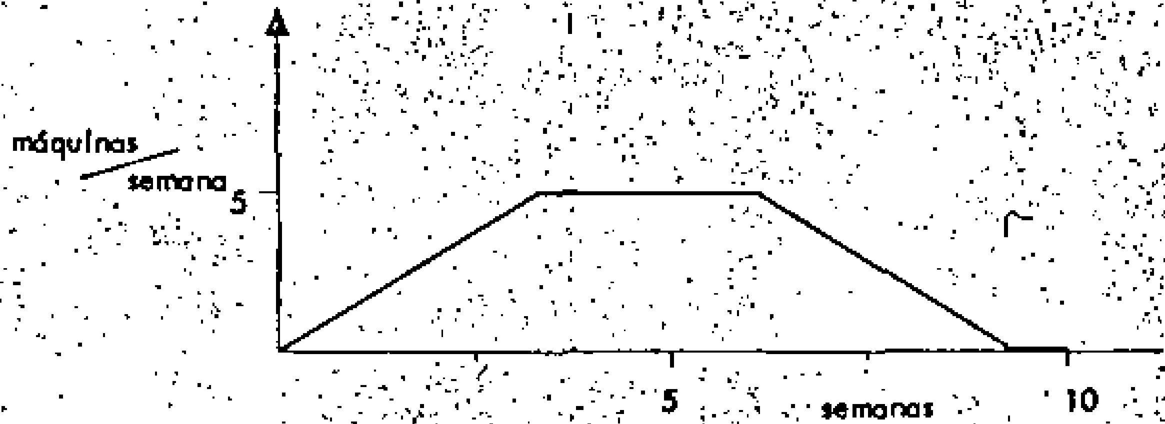
Para iniciar cualquier proceso de cómputo es indispensable suministrar el valor inicial de los niveles, de manera que exista una imagen inicial completa del estado que guarda el sistema al iniciarse su simulación.

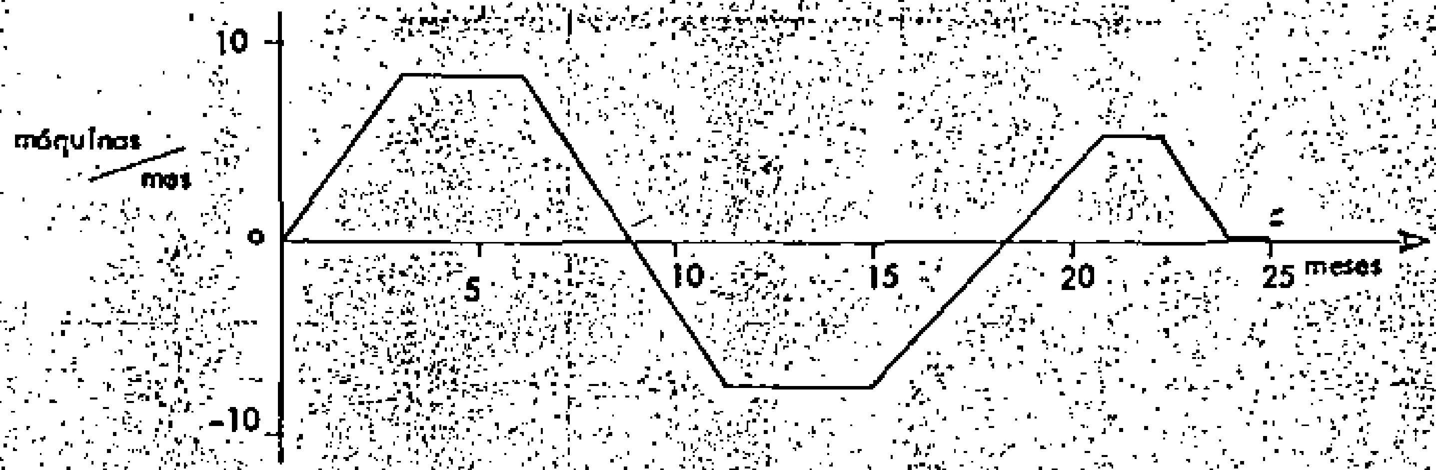
47.- Ejercicios.

1.- Para las siguientes políticas establecer gráficamente la variación de los niveles



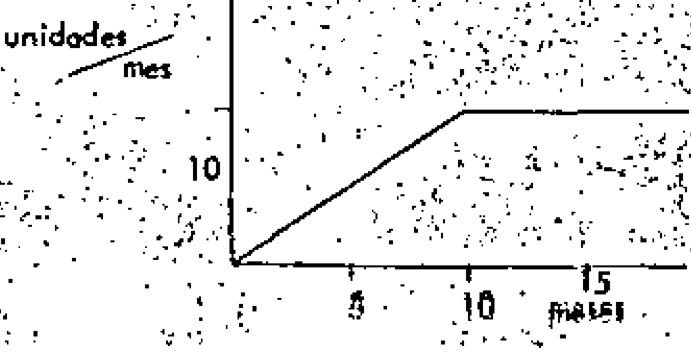


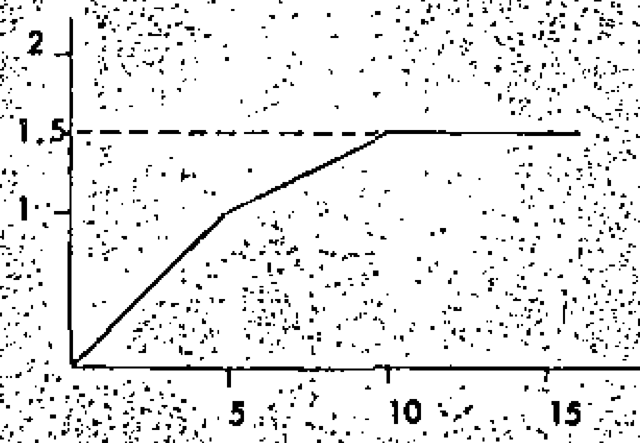


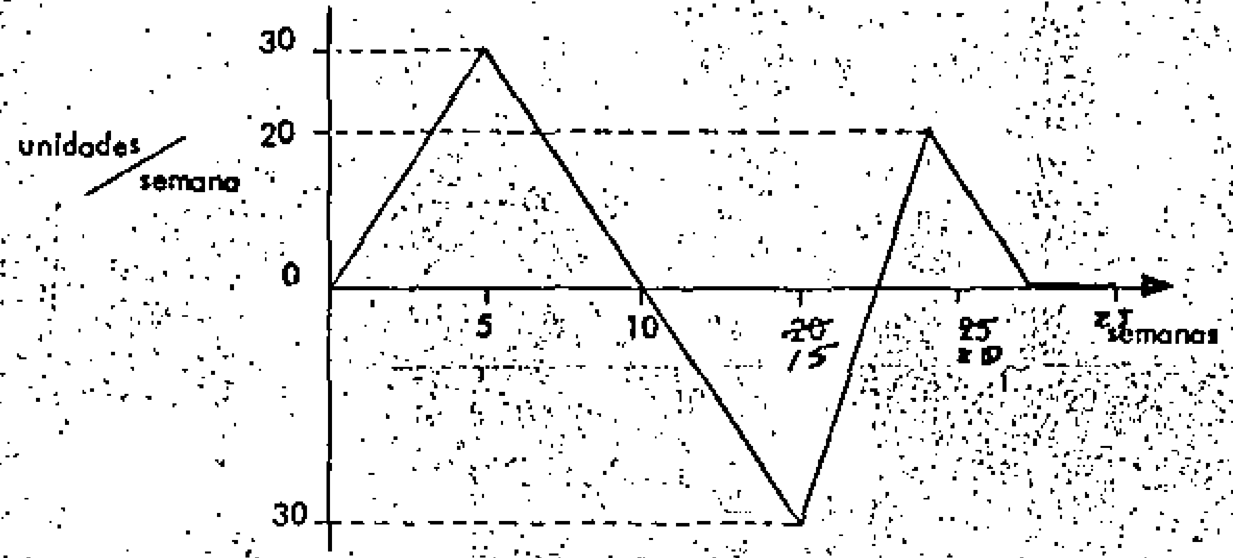


2.- Suponiendo que los empleados reclutados por mes son proporcionales al número de trámites no efectuados. Escribr la ecuación de tasa.

3.- En las figuras se muestran cómo han variado los niveles. Dibujar la variación de las tasas.







47.- Dimensiones.

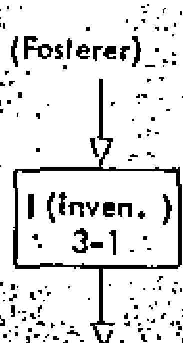
En cualquier ecuación, cada uno de los términos debe estar medido en las mismas dimensiones. De no ocurrir ésto existirá un error en la formulación.

48.- Longitud del intervalo de duración (Postulado).

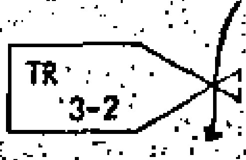
En cualquier modelo, el intervalo de duración DT será menor que la mitad del menor retraso de primer orden en el sistema.

49.- Símbolos convencionales para el diagrama de flujo de un sistema (Fosterer)

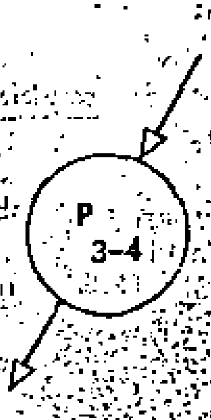
a) Un rectángulo representará a las ecuaciones de nivel y a funciones especiales que implique integración. Conviene incluir en el rectángulo el nombre del nivel y el número de la ecuación a la que se refiere.



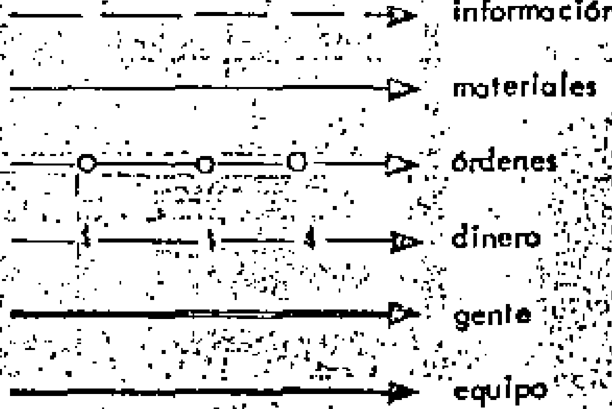
b) Un esquema de una válvula representará a las ecuaciones de tasa. Ya que este tipo de ecuaciones controlan el flujo, recibiendo como insumos la información requerida para el referido control. Las mismas observaciones respecto a los identificadores interiores.



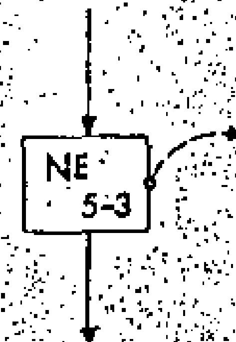
c) Un círculo representará a las ecuaciones auxiliares. Estas, como se ha dicho forman parte de las ecuaciones de tasa y se encuentran entre éstas y las de nivel. Identificadores bajo la misma regla.



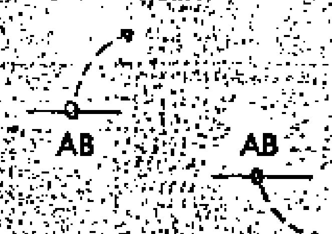
d) El flujo se representará mediante flechas dependiendo del tipo de flujo el cuerpo de la flecha.



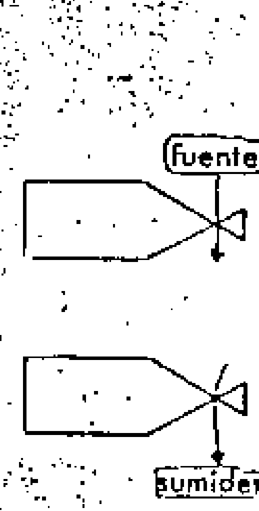
e) Para representar la acción de transferir información desde un cierto nivel o adquirir información sobre una cierta variable sin afectarla, se usará el símbolo de flujo de información con un pequeño círculo en la fuente de dicha información. Es evidente que de un nivel que no contiene información no se podrá derivar un flujo de información pero sí una transferencia como la que se ha descrito.



f) Para representar los parámetros del modelo, esto es, los valores que permanecen constantes durante la simulación, aunque pueden cambiar de simulación a simulación, se empleará el nombre del parámetro y una línea en la parte superior o inferior con un pequeño círculo de transferencia de información.



g) Si es necesario señalar fuentes o sumideros de flujos se asociará al símbolo de la válvula una figura irregular. Si no tiene acción sobre el sistema el sumidero o la Fuente se supondrá infinita.



h) Los conectores con otros diagramas serán paréntesis en los que se indique de donde viene el flujo y a donde va y el tipo de ecuación

(ABC, N)

50.- <u>Ejemplo</u>

1.- Hacer el diagrama de flujo para las siguientes ecuaciones. Si:

HE = hombres entrenándose (hombres)

HEM = hombres en proceso de ser empleados (hombres/mes)

HCE = hombres completando su entrenamiento (")

TE = tiempo de entrenamiento (meses)

TNE = tiempo normal de entrenamiento (meses)

CE = coeficiente de efectividad en el entrenamiento (sin dimensiones)

HEX = hombres experimentados (hombres)

HR = hombres que renuncian (hombres / mes)

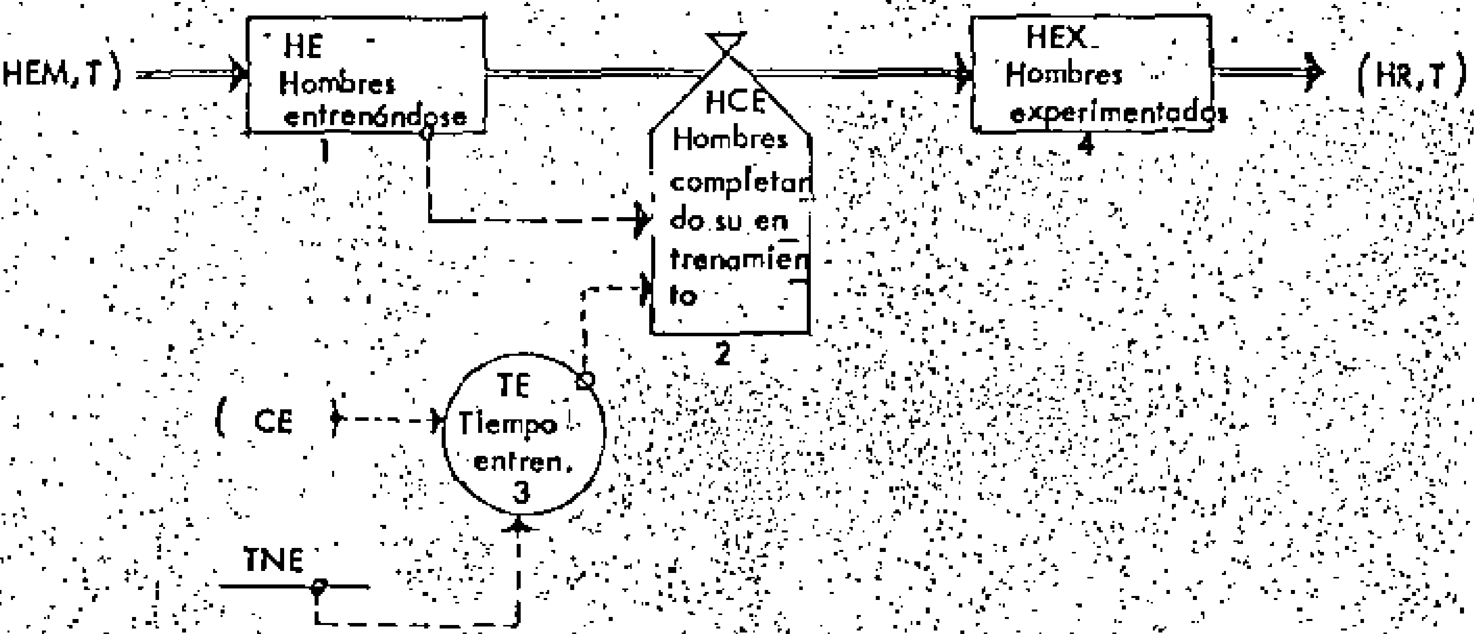
1.-) $HE.K = H.E.J + (DT)\ (HEM.JK - HCE.JK)$

2.-) $HCE.KL = \frac{HE.K}{TE.K}$

3.-) $TE.K = (TNE)\ CE.K$

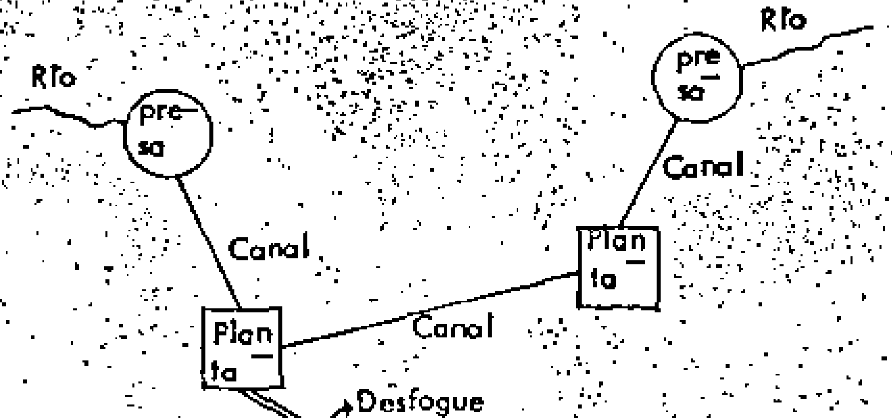
4.-) $HEX.K = HEX.J + (DT)\ (HCE.JK - HR.JK)$

El diagrama de flujo correspondiente resulta:



51.- Ejercicio

Definir ecuaciones y elaborar el diagrama de flujo correspondiente para la operación de las presas y plantas mostradas.- Si se deben surtir A KWA, la capacidad de las plantas es de B y C KWH respectivamente y los canales de las presas a las plantas son para D, E y Fm 3/5 respectivamente.



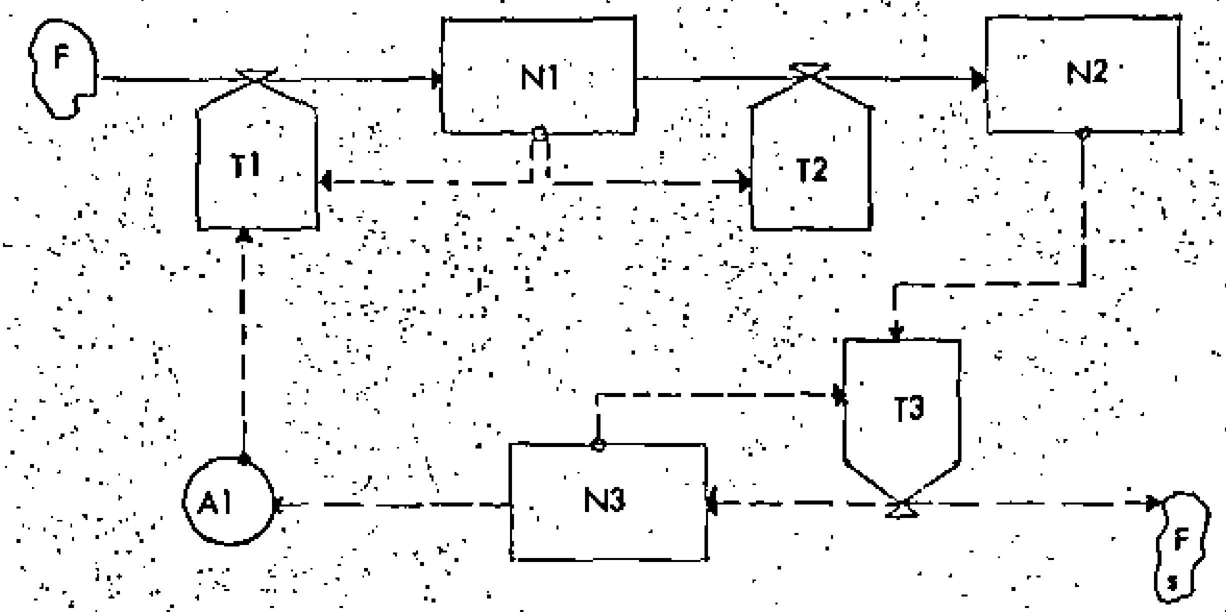
52.- Característica de las ligas de información

En la estructura de un sistema las ligas para transporte de información, cuando conectan niveles con tasas tienen distinto caracter que los flujos entre niveles. De hecho, estas ligas para transporte de información muestran las fuentes de las que dependen las tasas. Es sabido que estas ligas no afectan a las fuentes de las que provienen, aunque es claro que los flujos controlados por las tasas sí son alterados.

Las ecuaciones de tasa controlan el monto de un flujo que entra o sale de un nivel, pero la cantidad dentro de un nivel se conserva, esto es, excepto debido al flujo controlado por la tasa. Un flujo transporta algo de un nivel a otro, disminuyendo el primero y aumentando el segundo. Pero la información relativa a un nivel puede formarse sin alterar ni al nivel fuente ni al de destino. Esto mismo puede decirse de la liga de un nivel a una tasa. La información puede duplicarse sin destruirla o afectarla.

53.- Diagrama de flujo ilustrativo

En el esquema adjunto se ilustra la diferencia entre la transferencia de información, mediante una liga y, un flujo.



En el diagrama se opera con materiales y con información. La tasa T1 controla un flujo físico de una fuente al nivel N1. La tasa T2 controla el flujo físico de N1 a N2. N1 suministra información a T1 y a T2, ésto es la información respecto a N1 sirve de base para determinar la magnitud de T1 y T2. Es claro que estas ligas no disminuyen el nivel de N1. El El nivel N3 se encuentra en el flujo de información y solamente será cambiado por la tasa asociada T3, la cual rige su magnitud por la información que le suministran tanto N2 como N3. Obsérvese que solo ligas de transferencia de información constituyen insumos para las tasas. La ecuación auxiliar A1 de hecho forma parte de T1 y por tanto se encuentra siempre entre un nivel y una tasa.

54.- <u>Ecuaciones auxiliares en las ligas para información</u>. (Postulado)

Una ecuación auxiliar es una subdivisión de una ecuación de tasa y por tanto debe encontrarse sólo en una liga para información que vaya de un nivel a una tasa.

55.- Definición.

Un nivel es conservativo, esto es, no se altera a menos que un flujo lo modifique.

56.- Existen niveles en subsistemas conservativos. (Postulado)

Todos los niveles son cantidades conservativas. Sólo puede cambiarse moviendo el flujo entre niveles, fuentes o sumideros.

57.- Mismas unidades en subsistemas conservativos. (Postulado)

En un subsistema de flujos conservativos todos los niveles tienen las mismas unidades de medida; todas las tasas tienen esas mismas unidades pero divididas por la unidad tiempo.

58.- La información no es un flujo conservativo. (Postulado)

La información no se agota por el uso. No está sujeta a las leyes conservativas. La información puede ser transmitida a otro punto sin destruir su existencia en la fuente.

59.- Las ligas para información conectan niveles a tasas. (Postulado)

Las ligas para información conectan los niveles a las tasas de control. Las ligas para información son los únicos insumos para las ecuaciones de tasa.

Las ligas para información conectan los niveles a las [illegible]

sas. Las ligas para información son los únicos insumos para las ecuaciones [illegible]

60.- Las decisiones (en las tasas) se basan únicamente en la información disponible. (Postulado)

Sola la información aparente (disponible) puede influenciar una decisión. Los verdaderos niveles del sistema frecuentemente son alterados por procesos en la red de información antes de encontrarse disponibles en el punto de decisión.

61.- La información como conexión entre subsistemas conservativos. (Postulado)

Solamente ligas para información pueden conectar dos subsistemas conservativos. La información sobre niveles en un subsistema puede servir para controlar el flujo en otro subsistema.

62.- Los coeficientes de conversión pueden existir únicamente en las ligas para información. (Postulado)

Usualmente las ligas para información requieren de coeficientes de conversión para cambiar unidades de medida entre diferentes sistemas conservativos o para crear las unidades de la tasa (división entre el tiempo). Coeficientes de conversión existen únicamente en las ligas para información entre niveles y tasas.

63.- Observación.

Nunca deben insertarse coeficientes de conversión, en el modelo del sistema, meramente para balancear las dimensiones de medida. Cada coeficiente debe tener un significado claro e identificable en el sistema real y debe tener un valor numérico que pueda obtenerse de observaciones directamente relacionadas con el sistema. Deben describir procesos específicos en el sistema.

64.- Los coeficientes de conversión deben estar identificados con el sistema real. (Postulado)

Los coeficientes de conversión no se insertan meramente para corregir unidades de medida, no son valores abstractos deducidos de un análisis estadístico (correlación). Deben poder relacionarse con el sistema real y tendrán valores numéricos que puedan obtenerse de observaciones entre niveles de sistemas asociados.

65.- Un circuito de retroalimentación de primer orden tiene un comportamiento exponencial. (Postulado)

Un circuito de retroalimentación siempre muestra un comportamiento exponencial al variar el tiempo. Para retroalimentación positiva, la exponencial positiva diverge de un valor de equilibrio. Para retroalimentación negativa, la exponencial negativa converge al equilibrio.

66.- Un circuito de retroalimentación de primer orden, pero manteniendo el tiempo constante, relaciona un nivel con una tasa. (Postulado) constante, relacionada al nivel con una tasa. (Postulado)

La exponencial, a tiempo constante, de un circuito de retroalimentación positivo es la recíproca del multiplicador que define la tasa en términos del nivel.

67.- Los circuitos de retroalimentación positiva y de orden superior al primero muestran un crecimiento exponencial. (Postulado)

Los circuitos de retroalimentación positiva y de n-ésimo orden muestran un crecimiento exponencial positivo. La constante es:

$T = \sqrt[n]{A_1 \; A_2 \; . \; . \; . \; A_n}$ cuando los niveles son simples acumulaciones y las A_i son las recíprocas de los multiplicadores que relacionan niveles con tasas sucesivas.

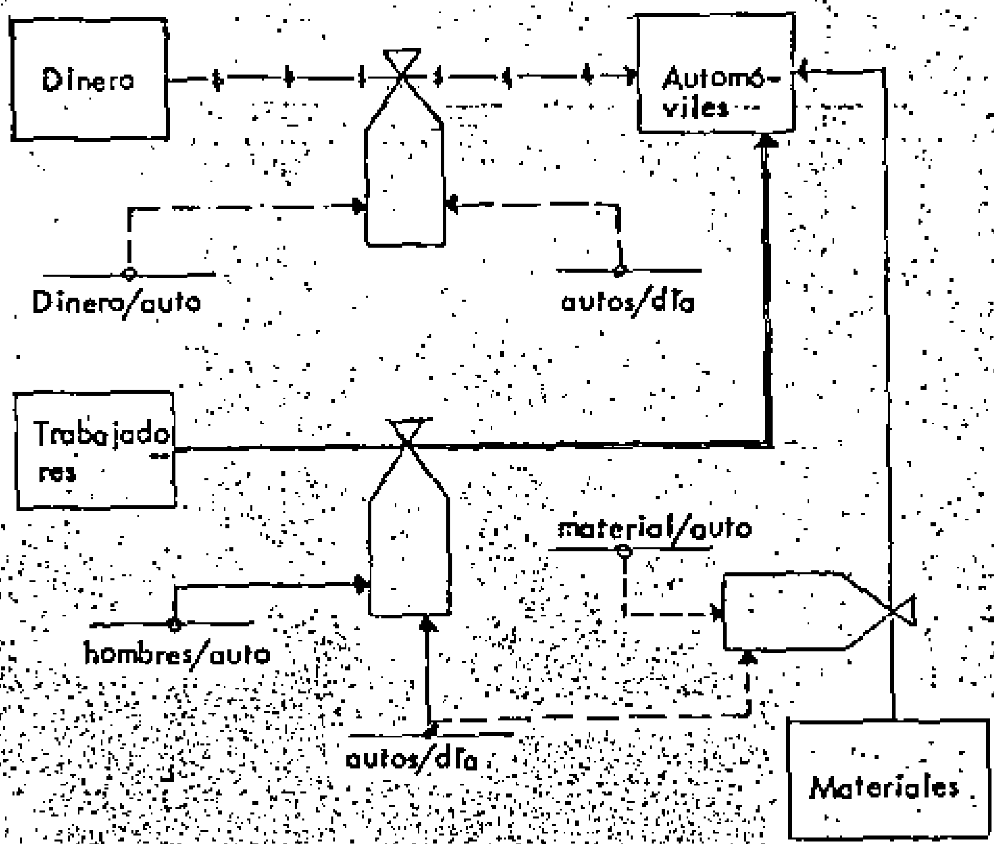
68.- La oscilación senusoidal es en circuito de retroalimentación negativo y de segundo orden. (Postulado)

El circuito de retroalimentación negativa de segundo orden muestra un comportamiento oscilante sostenido y según una senoide con un período $P = 2\pi \sqrt{A_1 A_2}$, en donde A_i es la recíproca del multiplicador que relaciona niveles con tasas sucesivas.

69.- Ejercicios

a) En la producción de automóviles se usa mano de obra, dinero y materiales.

¿Hay algún defecto en el diagrama de flujo que se muestra? ¿Cuál? Corregirlo.


Dinero
Automó-
viles
Dinero/auto
autos/día
Trabajado
res
material/auto
hombres/auto
autos/día
Materiales

70.- Observación

Frecuentemente los flujos, ya sea de dinero, de materiales, de información etc.. se ven sujetos a esperas o retrasos. El tratar de incluir este fenómeno en los modelos matemáticos del sistema, tipificarlos y analizarlos lleva a la necesidad de idear circuitos especiales a los que se les dará el nombre de regulador.

En principio, los retrasos pueden ocurrir en todos los canales de flujo, sin embargo, el tratar de introducirlos en su totalidad conduciría a un considerable aumento de detalle en el modelo sin ganar significativamente información sobre el comportamiento global del sistema. Luego, se consideran únicamente aquellos cuya influencia sea notoria en el comportamiento dinámico, procurando agrupar sus efectos tanto cuando se encuentran colocados sucesivamente con relación al flujo (en cascada) como cuando se encuentran en flujos convergentes (en paralelo).

71.- Definición

Un regulador es un proceso de conversión que acepta un flujo gobernado por una cierta tasa y produce otro gobernado por una tasa diferente. Tal es el caso de una presa de derivación, de una bodega de tránsito etc.. Es claro que el regulador debe contener una cierta cantidad de aquello que esta fluyendo con objeto de cumplir con su misión, habrá un nivel.

72.- Estructura de un regulador. (Postulado)

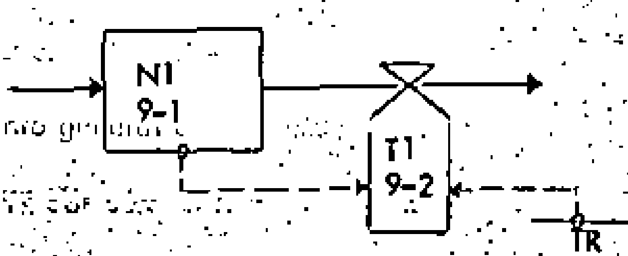
Un regulador en el tiempo y para el flujo de cantidades físicas o de información, puede ser creado mediante una combinación de ecuaciones de nivel y de taso.

73.- Características principales de un regulador

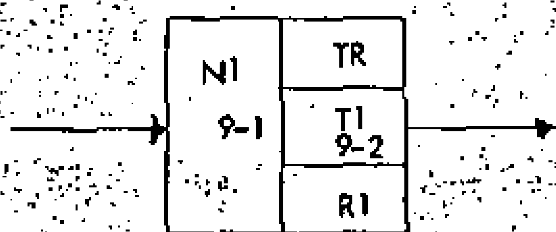
El postulado anterior hace ver que el regulador es simplemente un paquete de ecuaciones de nivel y de tasa insertadas en un canal de flujo. Este paquete tiene dos características de especial interés. La primera es el tiempo, en promedio, en que retrasa o adelanta un flujo. Lo cual determina el efecto estacionario del regulador. Entendiendo por estado estacionario aquel en el que la tasa a la entrada, la tasa a la salida y el nivel en el regulador son todos ellos constantes. En este estado la cantidad en tránsito por el regulador se obtendrá multiplicando la tasa con que el flujo entra, por el tiempo promedio en el regulador. La segunda característica es su respuesta transitoria. La cual dice como se relaciona la variación (con el tiempo) del flujo saliente con la variación del flujo entrante, antes de que se establezca el estado estacionario. Dos reguladores cuyo efecto estacionario sea el mismo pueden tener diferentes respuestas transitorias y por tanto tener efectos diferentes en el comportamiento general del sistema. Conviene asociar a un regulador una constante TR que será su tiempo promedio de regulación.

74.- Regulador exponencial de primer orden

Este tipo de regulador consta de un nivel que absorve las diferencias entre el flujo entrante y el saliente, y una tasa de salida cuya magnitud depende tanto del nivel como de la constante TR (tiempo de regulación)



Se representará comodamente de la siguiente manera:



En donde N1 es el nivel en el regulador, TR es el tiempo promedio de regulación, T1 es la tasa a la salida y R1 es el regulador, el 1 indica el número de válvulas y niveles en el regulador.

75.- Ecuaciones de un regulador exponencial de primer orden: (Postulado)

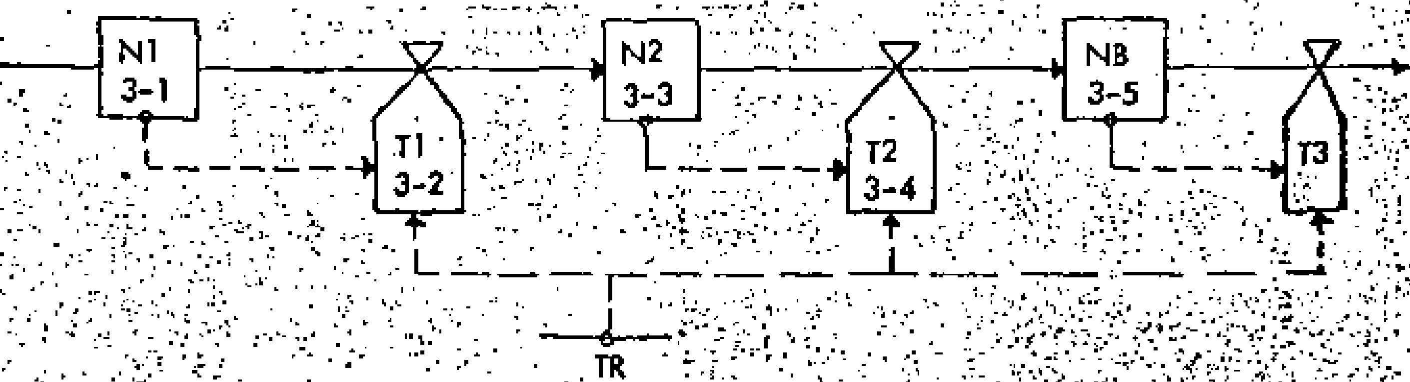
Un regulador exponencial de primer orden está definido por las siguientes ecuaciones:

$$TE.KL = \frac{N.K}{TR}$$

$$N.K = N.J + (DT)(IT.JK - TE.JK)$$

76.- Regulador exponencial de orden superior

Poniendo en cascada varios reguladores de primer orden se obtiene uno de orden superior según se ilustra.



Las correspondientes ecuaciones de nivel y tasa serán:

$$T1.KL = \frac{N1.K}{TR/3}$$

$$N1.K = N1.J + (DT)(T1.JK - T1\ JK)$$

$$T2.KL = \frac{N2.K}{TR/3}$$

$$N2.K = N2.J + (DT)(T1.JK - T2.JK)$$

$$T3.KL = \frac{N3.K}{TR/3}$$

$$N.3K = N3.J + (DT)(T2.JK) - TE.JK)$$

Que se pueden resumir para el regulador en:

a) para el nivel $N.K = N1.K + N2.K + N3.K$

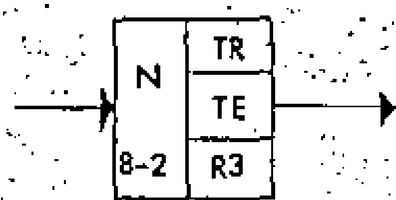
o bien:

$$N.K = N.J + (DT)(TI.JK - TE.JK)$$

b) para la tasa:

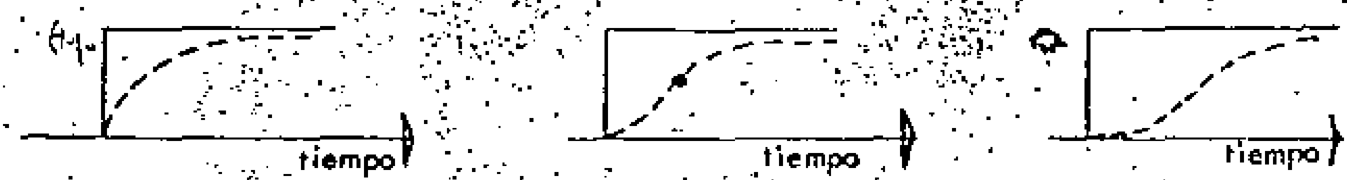
$$TE.KL = TR3 (TI.JK, TR)$$

y diagramáticamente:



77.- Tiempo de respuesta de los reguladores exponenciales.

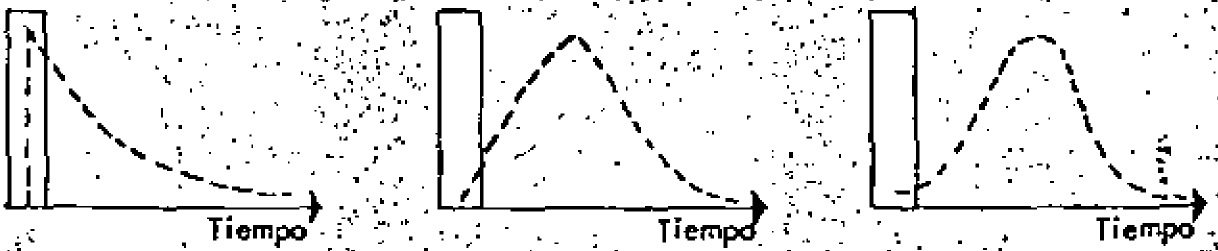
La respuesta transitoria de un regulador exponencial cambia según el número de reguladores de primer orden con que cuenta. Se puede percibir el comportamiento del regulador mediante las siguientes gráficas, en las que la línea continua indica la variación, con el tiempo, del flujo entrante y la discontinua la del saliente.



primer orden · segundo orden · tercer orden

En las figuras anteriores se ha considerado que el flujo entrante cambia bruscamente de magnitud, pero que alcanzando un cierto valor permanece constante con el tiempo.

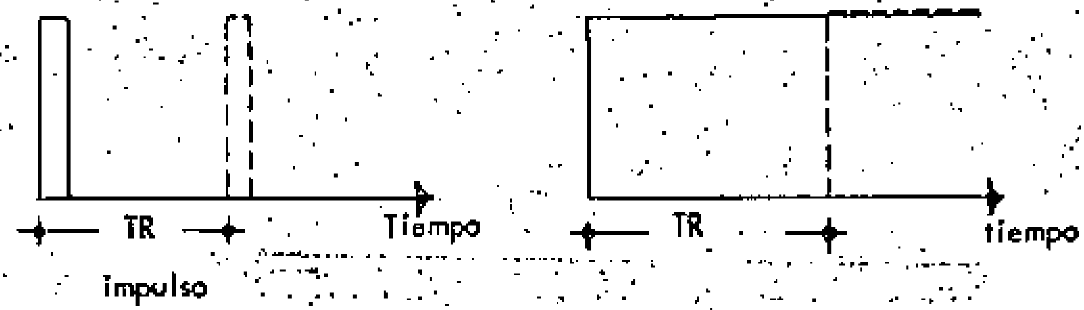
Ahora bien, si el flujo entrante recobra su magnitud anterior inmediatamente después de alcanzar su máximo, se dirá que fué un impulso o pulsación. En este caso las respuestas serán como a continuación se ilustra



primer orden segundo orden tercer orden

De todas las figuras puede notarse que entre más sea el número de reguladores de primer orden en la cascada más se retarda la respuesta por parte del regulador.

Finalmente puede considerarse una regulación hipotética llamada de tubería en donde no hay flujo al exterior sino hasta que transcurre la totalidad del tiempo de regulación TR, a partir del cual el flujo entrante y el saliente son idénticos como se ilustra a continuación



En general se buscará el orden del regulador por ejemplar mediante el tipo de respuesta que más se asemeja al sistema real. Si uno de segundo orden no retrasa suficiente, de acuerdo con el problema real, se acudirá a uno de tercero, cuarto, etc.

78.- Política y decisión (definición)

En la forma como se ha venido usando, una política es una regla o norma de conducta que establece como deben tomarse las decisiones operativas inherentes al sistema. Por lo que toca a decisión esta es la acción tomada a un tiempo cualquiera como resultado de aplicar la política a las condiciones que prevalecen en ese momento.

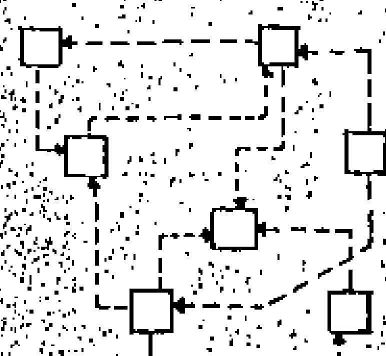
Entendiendo por un ejecutivo aquel que toma decisiones de las que se derivan acciones siempre con base en la información disponible, es posible esquematizarlo como un convertidor de información en acción.

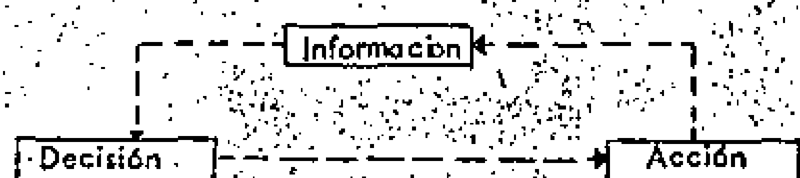
Los flujos entrantes a este convertidor son informaciones y los salientes son decisiones que controlan acciones.

79.- Institución o empresa

Una organización tanto si está dedicada al servicio público como si es de caracter privado no es sino una compleja red de canales de información interconectados. De estos canales emergen, en ciertos puntos, controles para procesos físicos; inversión monetaria, reclutamiento de trabajadores, construcción de obras, adquisición de equipos, producción de bienes etc... Todo ello constituye un sistema, de acuerdo con la definición inicialmente propuesta. En cualquier punto del sistema en donde se ejecuta una acción existe un punto de decisión cuyas fuentes de información alcanzan otros puntos tanto del sistema como del ámbito que le sirve de marco de referencia.

Ciertamente un sistema real, ya sea económico, tecnológico o administrativo, no es uno simple como los estudiados. Sin embargo en todos ellos puede distinguirse una red de decisiones interconectadas a las que corresponden acciones que suministran información para la toma de nuevas decisiones. Esta es la esencia del proceso. El circuito elemental presentado inicialmente de





aparece reiteradamente en estos sistemas económicos, tecnológicos o administrativos, estructurando el sistema real.

80.- Naturaleza del proceso de decisión

Si se fija la atención en el proceso de decisión a través del cual la información se convierte en acción, se observa la presencia de niveles, tasas, flujos y sus combinaciones. Una decisión está basada en la información del estado en que se encuentra el sistema esto es por diversos niveles en el sistema. Estos son los insumos para las decisiones. El producto de la decisión controla las tasas según los cuales los niveles del sistema deben variar.

Ahora bien, una persona es responsable de alguna tasa de flujo en particular. Esta persona deberá conocer las condiciones actuales aparentes del sistema. Deberá estar conciente de cuales son las condiciones deseadas y deberá saber que acción tomar de acuerdo con la discrepancia para hacer coincidentes los dos puntos anteriores.

Desde este punto de vista la toma de decisiones es un proceso contínuo. Es un mecanismo de conversión para cambiar flujos de información que varían constantemente en señales de control que determinan las tasas de flujo en el sistema.

... cuando en puntos de control que determinan las tasas de flujo en el ...

81. Uso de la palabra política (función de decisión)

Como se ha visto, la palabra política se ha usado para describir la manera como el proceso de decisión convierte la información en acción.

Esta regla de decisión puede considerarse a diferentes niveles:

a) En la forma más primitiva implica una acción no razona previamente, aleatoria que no depende de la información disponible y que no tiene bases.

b) Algo mas elaborada implica reacciones instintivas no razonadas que resultan de los flujos de información sin haber entendimiento por parte del participante sobre la estructura y base de sus acciones.

c) Por último en un tercer nivel de abstracción hay conciencia de las razones formales para las decisiones.

Es claro que el concepto de política usado se refiere precisamente a este último nivel de abstracción.

82. Política y Decisión (Postulado)

La política de control debe estar definida para cada punto de decisión de un sistema.

83. Preguntas básicas para formular una función de decisión en particular en un modelo.

a) ¿Que factores son suficientemente significativos como para incluirlos en el proceso de decisión en estudio?

b) ¿Cuál es la dirección en que afecta el factor A, cual el B, etc...?

c) ¿Cuál es la magnitud del efecto del factor A, del B, etc...?

d) ¿Qué características no lineales del efecto A deben considerarse, del B, etc...?

84. Algunas observaciones para ayudar a definir los factores a incluir en el proceso de decisión

1a. Probar el modelo con y sin el factor con objeto de conocer su influencia.

2a. Probar con el modelo la repercución que la decisión tiene en el factor y el tiempo al que ocurre. Esto es particularmente importante cuando se trata de retroalimentación positiva ya que se crea un efecto multiplicativo.

3a. En cuanto a dirección se debe tomar en cuenta no sólo si un factor ayuda o no a que el sistema cumpla con los objetivos señalados sino si esto ocurre a corto y/o a largo plazo.

4a. En cuanto a la magnitud de los factores interesa mas saber cuales cambiarán niveles y tasas que conocer con precisión las magnitudes promedios de dichas tasas y niveles.

5a. No linealidades surgen cuando la influencia de un factor en una decisión no es proporcional a su magnitud o cuando la respuesta de la decisión no es independiente de dos o mas efectos causales.

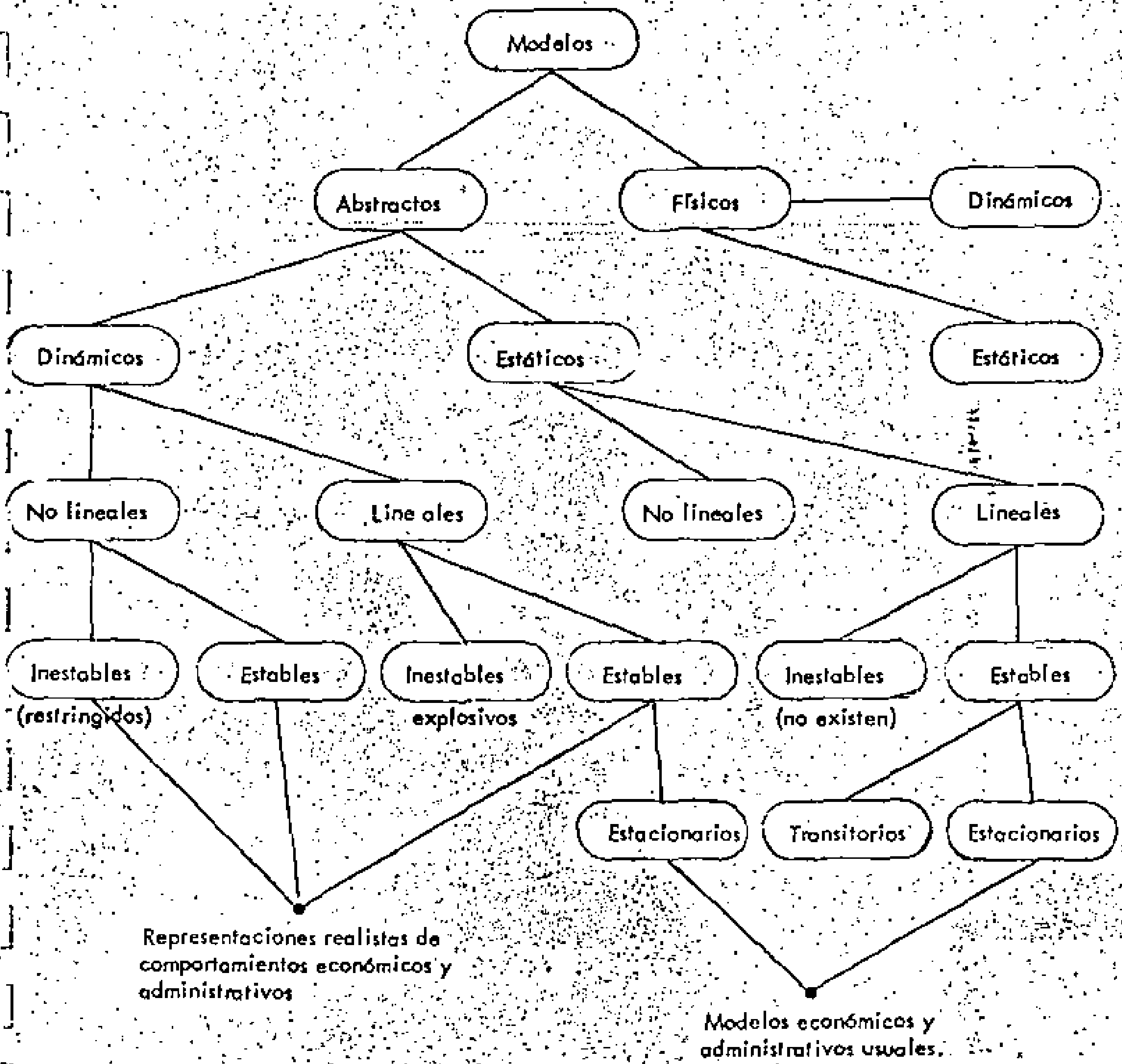
En general, es mas fácil obtener un comportamiento realista de un modelo no lineal que de una idealización lineal.

6a. Se pueden asociar dos factores, artículos, etc... en un mismo canal de flujo si se cumple que están controlados por la misma función de decisión o si se usan para propósitos idénticos en el modelo.

85. Variables exógenas y endógenas

Son aquellas cuyos valores ocurren independientemente de las variables internas del modelo. Serán usadas para establecer el ámbito del sistema, suelen emplearse para probar un modelo y observar sus respuestas y reacciones. Análogamente, a las variables propias del modelo se les llamará endógenas.

86. Clasificación de modelos (Forrester)



87. Modelos Físicos y Abstractos

La primera clasificación de los modelos, distingue entre físicos y abstractos. Los físicos usualmente son réplicas de objetos bajo estudio. Los modelos físicos
estáticos
abstractos como son las maquetas ayudan a visualizar tamaños, resistencias, etc... Los modelos dinámicos son del tipo de los usados en túneles de viento para investigar características aerodinámicas.

Un modelo abstracto usa símbolos en vez de dispositivos físicos y como ya se ha dicho corresponden a imagen mentales. Estos también pueden ser estáticos si corresponden a imágenes que no cambian con el tiempo o dinámicos en caso contrario.

88. Modelos lineales y no lineales

Un modelo lineal es aquel en el que es válido el principio de superposición. En un sistema lineal la respuesta a cualquier perturbación tiene un curso independiente de cualquier otra. La respuesta total es la suma de las respuestas parciales. Además cuando es lineal sólo pueden ocurrir oscilaciones libres sostenidas o amortiguadas, pero no explosivas. En el sistema no lineal se viola el principio de superposición. En la realidad, pocos sistemas tecnológicos (industriales), o económicos son lineales.

[illegible] sistema no lineal.

[illegible] en la realidad pocos sistemas tecnológicos

[illegible] o económicos son lineales.

89. <u>Modelos estables e inestables</u>

Los modelos dinámicos pueden ser estables ó nestables. Son estables si tienden a regresar a su condición inicial una vez que cesa de actuar la perturbación. En un sistema inestable que principia en reposo una perturbación inicial se amplifica conduciendo a oscilaciones cuya amplitud aumenta constantemente.

90. <u>Modelos estacionarios y transitorios</u>

Un comportamiento estacionario es aquel en el que su comportamiento es repetitivo con el tiempo. En los transitorios el comportamiento cambia con el tiempo, no se repiten.

91. <u>Modelos abiertos y cerrados</u>

El modelo dinámico cerrado funciona sin conexión con variables exógenas. Internamente genera los valores de las variables al cambiar el tiempo por simple interacción de variables endógenas. En caso contrario serán abiertos.

92. <u>Algunas experiencias en la formulación de modelos</u>

a) Noble "Problemas en la Construcción de un modelo para una compañía".

-"En una empresa las areas principales de actividad son:

a) Producción

b) Distribución e inventario

a) Producción

b) Distribución e inventarios

c) Ventas

d) Compras

e) Mercado

f) Inversiones de capital

g) Finanzas

h) Investigación

i) Personal

todas ellas están interconectadas y un modelo estructural básico de contemplar a todas ellas, con énfasis en distintas áreas según la aplicación. Así, un modelo de Programación Lineal deberá cubrir las cuatro primeras, presentándose problemas por la dificultad de entendimiento e interpretación del mismo.

No solamente puede dividirse la empresa en sus áreas funcionales, sino que su organización pude separarse en esferas de autoridad y responsabilidad bastante independiente en donde se presentan todas estas funciones. El punto de la organización de una compañía y el impacto de la construcción de un modelo pueden considerarse como separados, lo que en este momento se quiere señalar es que las divisiones orgánicas ya sea por funciones o por desarrollo histórico u otras causas suministran áreas naturales por las que se puede iniciar la construcción de modelos. Sin embargo, los objetivos inmediatos para el uso de tales modelos son diferentes de los de la empresa total y con para el uso de tales modelos son diferentes de los de la empresa total

surgen dificultades cuando se tratan de ligar los diferentes partes. Luego el modelista, decidir como enfocar el problema. ¿Va a construir un conjunto de micro-modelos que deberán ligarse o debe intentar un modelo grueso del conjunto?

En muchos respectos el micro nivel es mas fácil de trabajar y es una tentación fuerte seguir por este camino. Yo pienso que lo mejor es desarrollar los dos tipos de modelos.

La pregunta ahora es que tipo de modelo se intenta construir. ¿Será operacional? ¿De planeación táctica o estratégica? ¿Será estático o dinámico? ¿Determinista o aleatorio? ¿Descriptivo, exploratorio o de optimización? No hay respuesta universal a estas preguntas. Nos encontramos limitados por la disponibilidad de datos, fuerza de trabajo y potencia de las técnicas por usar. Distingo tres tipos de modelos:

a) de Programación Matemática

b) de simulación

c) de insumo-producto.

Los del tipo (a) son de optimización, los del (b) son exploratorios y los del (c) son descriptivos. Los del (a) y (c) tienden a ser estáticos y deterministas. Mientras que los del (b) ofrecen la posibilidad de ser dinámicos y probabilistas. Los del (a), han sido empleados con fines de planeación tanto táctica como estratégica. Los del (b) tienen mayor alcance aunque el diseñar los experimentos que su uso requiere no es tarea simple. Por los que se refiere a los del (c) permiten mejorar nuestro entendimiento del problema, estructurar la compañía dentro del ámbito general de la economía nacional y explorar las perturbaciones que acarrean a la empresa los cambios en la última.

Al identificar los diferentes tipos de modelos, he dejado fuera aquellos que representan los procesos de decisión. Sin embargo, defiendo mi omisión señalando que estos que incluyen la teoría de juegos y de decisiones no son modelos de una empresa.

En resumen, al presente no debemos pensar en términos de modelos de una empresa, sino mas bién en modelos de asignación de recursos, de mercado, de inversión de capital y de planeación financiera. Para todos ellos la Programación Matemática es la herramienta ideal para atacarlos.

Por lo que se refiere a su construcción en implantación, es necesario conseguir datos de la estructura de la empresa actual y futura, materias primas e intermedias usadas en la manufactura, métodos de transportación, localización de los clientes, etc.... A parte de la enormidad de datos que para una empresa real esto representa, surge la necesidad de mantenrlos actualizados. También datos financieros y de costos, el modelista debe entrar en contacto con los contadores presentándose la dificultad de que estos manejan datos his tóricos, promedios que no son de utilidad para el modelista. Sin embargo, es indispensable que la contabilidad forme parte del modelo.

Platicando ahora sobre los objetivos, presentaré aquí algunos de donde elegir:

a) maximizar ganancias a corto plazo

b) maximizar ganancias a largo plazo

c) maximizar dividendos a los accionistas

d) maximizar crecimiento de la empresa.

Es un error pensar que los objetivos de una empresa se encuentran claramente establecidos para el ejecutivo cada vez que toma una decisión o prepara sus planes de acción. Luego el modelo debemos elaborarlo de manera que puedan compararse resultados según unos u otros objetivos. En otras palabras, en una compañía tratamos de maximizar algo sin saber bien a bien que cosa. El criterio de optimización debe cambiar según la situación en que se encuentre la compañía.

Vivimos en un mundo incierto y esto debe reflejarse en el modelo, quizá usando variables aleatorias en el objetivo, quizá en las restricciones o probablemente en ambos, y siempre tratando de situar a la empresa en su ámbito que es la economía nacional o quizá la mundial.

A una empresa le son vitales los estudios de mercado, pero es tan poco lo que Teoría de los Juegos ha hecho en este terreno. Considero que esto es una debilidad que impide sacar grandes ventajas de cualquier modelo que se haga de una empresa..

Otras preguntas que surgen son: ¿Que tanto debe descentralizarse? ¿Cómo puede llevarse a cabo? ¿Debe existir un plan central o maestro? ¿Debe dejarse libertad operacional a las diversas unidades? Considero que hasta el momento muchas de las incognitas que he planteado no tienen respuesta. Sin embargo, espero que mis comentarios no suenen a pesimistas.

b) Kendall. "Construcción de modelos y sus problemas".

"... Proceder a describir, ahora, los que en mi opinión son los principales problemas en la construcción de modelos y en su análisis. En particular los que se refieren a modelos económicos y sociales.

Principiaremos diciendo que un modelo es tan bueno como la materia prima a la que se le aplica. Todos sabemos de las dificultades que implica conseguir buenos datos económicos, los grandes errores en las estimaciones; el retraso en las estadísticas de trabajo; cambios en los índices; el pequeño período de disponibilidad de informaciones realmente comparables. La dificultad en recolectar datos. De continuar enumerando probablemente ustedes se asustarían y desistirían de construir modelos; ciertamente no es esta mi intención. Así que pasaré a otros tópicos, los que no son menos angustiosos.

El primer problema se refiere a la naturaleza de las variables con las que vamos a trabajar. En Economía debemos pensar en términos de demanda, valor, utilidad, etc... y hay que reconocer que a pesar de que estos conceptos son cuantificables siempre hay algo, esencialmente sujetivo, en ellos. El punto es entonces si debemos admitir en nuestros modelos que básicamente son intangibles. Yo por mi parte no veo razón para no hacerlo.

Si planteamos relaciones entre variables, debemos estar concientes de que un sistema resulta mas complicado entre mas ecuaciones (relaciones entre variables) intervengan en él. Existe la tendencia a simplificar considerando sólo relaciones lineales. Pero en el mundo real el comportamiento no es lineal. También existe la tendencia a considerar todo como seguro, a elaborar modelos deterministas, esto ciertamente no nos acerca a la realidad.

El segundo problema y mucho más importante es que recientemente nos hemos dado cuenta de que el comportamiento de los sitemas económicos criticamente dependen de los lapsos transcurridos entre estímulo y respuesta. La Economía clásica cuando llegaba a expresar relaciones en términos matemáticos siempre lo hacía sin tomar en cuenta el concepto tiempo, como relaciones estáticas. Imposible deducir el comportamiento dinámico a partir de ellas. Sin embargo, en nuestros días los econometristas se han dado cuenta de la importancia vital que el comportamiento dinámico tiene en la Economía. Esto pone en entredicho hasta nuestras mas sólidas técnicas de inferencia estadística.

He dejado para el final una de los temas mas importantes y que siempre debemos encarar. ¿Cómo debemos probar un modelo? ¿Cómo sabemos que tan bueno es un modelo construído? La respuesta sonará a pragmática pero es la realidad. Si un modelo trabaja es un buen modelo. Esto significa que su comportamiento puede ser controlado y predicho. La costumbre de ponerlo a trabajar con los datos del pasado no es mala. Aunque se debe notar que no hay ningún motivo para que situaciones pretéritas se repitan en el presente o en el futuro.

Por último tocaré un tópico que siempre se me pregunta en este tipo de reunión. ¿Cómo se construye un modelo? Esta pregunta es como aquella de ¿Cómo se hace un millón de libras? o ¿Cómo se cura una enfermedad? Todo depende de que tipo de modelo se desea construir. Hasta este momento no creo que nadie pueda responder a la pregunta planteada. Baste decir que no se han construído suficientes modelos como para extraer una regla de comportamiento. Lo mas que se puede recomendar es que se lean artículos sobre casos particulares, los que suministrarán alguna luz sobre los problemas particulares en estudio.

Para terminar, permítanme decirles que para mí, como para el Dr. Wold no

SEGUNDO CAPITULO

METODOS DEL ANALISIS DE SISTEMAS

93. Introducción

Antes de continuar adelante conviene recordar que el Análisis de Sistemas es un conjunto de procedimientos cuantitativos que permiten especificar como deben combinarse recursos: hombres, dinero y materiales con objeto de alcanzar un propósito, genéricamente es una frase para designar la aplicación de los conceptos microeconómicos clásicos a problemas de asignación de recursos.

El Análisis de Sistemas:

a) Obliga al diseñador de sistemas a tener mayor conciencia de sus objetivos al imponerle la necesidad de anunciarlos explícitamente y de como deben ser medidos.

b) Suministra mecanismos para predecir las futuras demandas sobre el diseño.

c) Establece procedimientos para generar un gran número de posibles soluciones.

d) Conjunta técnicas de optimización que permiten seleccionar las mejores alternativas.

e) Sugiere estrategias de toma de decisiones que pueden usarse para seleccionar entre posibles alternativas.

95. Capítulos en un análisis de sistemas, para un óptimo

Llevar a cabo el análisis de un sistema implica:

a) Establecer las características que debe tener un sistema óptimo.

b) Seleccionar una combinación de subsistemas que conformarán el sistema total.

c) Analizar las interacciones entre los subsistemas del sistema.

d) Establecer las características de los subsistemas.

96. Sistemas y subsistemas

En el análisis de sistemas con múltiples unidades es muy conveniente contar con expresiones analíticas que describan los productos de los subsistemas en términos de sus insumos (matrices de sistema). Una vez que estas expresiones se encuentran disponibles ya es posible seleccionar de un catálogo de subsistemas aquellos cuya relación insumo-producto se ajuste a los insumos y a los productos del sistema total. Esto implica una mera agregación de subsistemas considerados como cajas negras (cajas ciegas).

De esta manera se logra satisfacer las especificaciones del sistema óptimo sin entrar en detalles que son irrelevantes en esta etapa del análisis. Además de que se obtienen, como subproducto, las especificaciones de los componentes de los subsistemas.

Lo importante de este procedimiento es que los ingenieros de subsistemas optimi zan la porción de sistema que es de su responsabilidad y, lográndolo, permiten al ingeniero de sistemas optimizar, en términos simples, el sistema como un todo.

97. Análisis Marginal

Uno de los métodos más adecuados para identificar el diseño óptimo de un subsistema lo suministra el Análisis Marginal de la Teoría Microeconómica. La analogía entre una empresa particular y una institución gubernamental es suficiente como para aplicar la Teoría de la Organización (Firma) a instituciones de carácter público. Las dos preguntas fundamentales a las que contesta esta teoría son:

a) ¿Cómo se ve afectado el comportamiento de una organización (firma) al cambiar la demanda de sus productos?

b) ¿Cómo usa la firma sus recursos para crear su producto?

Para usar esta teoría dentro del marco de una institución gubernamental debe establecerse la analogía entre ganancias obtenidas por la compañía al vender sus productos y los beneficios recibidos por la colectividad como consecuencia de la operación de un sistema gubernamental.

Sin embargo, ya desde ahora cabe prevenir sobre una diferencia importante. En la industria la interacción entre demanda y producción depende del grado de control que la empresa tiene sobre el mercado. Bajo la condición de que el producto de una empresa no es el único en el mercado y que su tamaño no es suficientemente grande como para monopolizarlo, la condición óptima para la empresa es aquella en que los beneficios marginales son iguales a los costos marginales.

Lo anterior no es cierto para el gobierno, ya que usualmente monopoliza la actividad que lleva a cabo, influencia los precios de los recursos, los subsidia, o les dá un tratamiento fiscal,especial, etc... con lo cual viola las condiciones de libre competencia no siendole, por tanto, aplicable el teorema de optimalidad anterior. A pesar de esto, una gran parte de los conceptos de la Microeconomía le son aplicables a su comportamiento.

Boulding sostiene que el Análisis Marginal tiene el defecto de ser sumamente formalista y poco accesible a ser aplicado. No es simple determinar la tasa marginal de transformación de un insumo en un producto, o la tasa marginal de sustitución de un insumo o de un producto por otro. Aun así, se insiste, el Análisis Marginal es de gran importancia para el análisis de un subsistema.

98. Análisis Beneficio-Costo

La diferencia entre el Analisis Beneficio-Costo, Efectividad-Costo (del que con detalle nos ocuparemos más adelante) y Análisis Microeconómico radica en que los dos primeros intentan evaluar propuestas sobre diseños de sistemas dados, y el último elige los parámetros de diseño en vez de aceptarlos como datos. Así, el Análisis Beneficio-Costo se aplica generalmente a diseños propuestos, sobre los cuales el ejecutivo no tiene otra acción que aceptarlos o rechazarlos. Esto lo lleva a cabo mediante comparaciones directas de costos y beneficios medidos en las mismas unidades (pesos generalmente). En el caso en que resulten beneficios que no pueden ser reducidos a un común denominador el análisis consiste en identificar el de costo mínimo para un mismo nivel de efectividad.

Dentro del Análisis de Sistemas, el método del Beneficio-Costo se dirigirá exclusivamente al caso de alternativas mutuamente exclusivas. Se emplearán cuando las decisiones sean simplemente de aceptar o rechazar.

En las operaciones gubernamentales los costos por intervenir difieren de los de las empresas privadas. Bajo circunstancias particulares la medida de los costos se ajustará para reflejar la diferencia entre el costo de oportunidad y el precio, en el mercado, de los recursos. La medida de los beneficios de un programa público deberá incluir aquellos que se acumulan marginalmente. Probablemente el Análisis Beneficio-Costo sería menos criticable si no se usarán cocientes de costos totales a beneficios, sino que las decisiones tratarán de maximizar la diferencia entre los flujos de dinero correspondientes a beneficios bien definidos y los correspondientes a costos.

99. Análisis Efectividad-Costo

Este análisis sigue lineamientos del anterior, pero está específicamente dirigido a problemas en los que los productos no pueden ser evaluados por precios del mercado aunque si los insumos y, estos últimos son sustituibles mediante relaciones de cambio desarrolladas en el mercado. Aquí se intenta maximizar la efectividad sujeta a una restricción general de recursos medidos en pesos.

Este tipo de análisis es apropiado cuando:

a) No existe valor, en el mercado, para productos altemos.

b) Los insumos pueden ser correctamente evaluados a precios del mercado.

En el punto de efectividad máxima, para un presupuesto dado, cualquier recurso usado adicionalmente, deja intacto el cociente de efectividad marginal entre costo marginal. Así, las condiciones marginales de efectividad en el sector público, son las mismas que en la iniciativa privada. Sin embargo, muchos estudios de efectividad-costo pecan por el mismo defecto de los de beneficio-costo. Usan el cociente de efectividad total entre costo total como un índice de la bondad de un proyecto.

100. Análisis Operacional

Este tipo de análisis es apropiado para elementos físicos o en general en los que no tiene influencia el elemento monetario. Aquí también se intenta maximizar la efectividad pero sujeta a un conjunto de restricciones que comprenden recursos en especie, medidos en sus unidades correspondientes. Este tipo de análisis es adecuado cuando no existe valor en el mercado ni de los insumos ni de los productos. Clásicamente esto se ilustra en una operación bélica en donde no se juzgo apropiado pedirle a un comandante que al diseñar su estrategia tenga en mente los costos de reproducción del humano y los de las balas y demás material bélico que emplea.

101. Otros métodos del Análisis de Sistemas

Si bien los cuatro antes comentados son fundamentales en el Análisis de Sistemas no son, de ninguna manera, los únicos. Hace también uso de los métodos siguientes entre otros:

a) Análisis Ingenieriles. Tanto la Ingeniería como las Ciencias Físicas contienen un cuerpo de conocimientos teóricos que ha sido desarrollado explícitamente para el Análisis de Sistemas o que le es de utilidad. No es de sorprender ya que el ingeniero siempre se ha preocupado de lograr diseños eficientes. Sin embargo, es notorio que los ingenieros difieren de otros grupos en lo que se relaciona con consideraciones de carácter estético o social, puentes feos pero baratos, etc... El Análisis de Sistemas puede ser un mecanismo para incorporar formalmente objetivos más amplios, en los que se contemplen aspectos sociales.

b) Teoría de los Juegos. Como es sabido intenta definir la estrategia óptima para un jugador a partir de un análisis de sus pérdidas o ganancias bajo distintos cursos de acción de que dispone, tomando en cuenta los cursos de acción abiertos a su oponente.

c) Teoría de las Decisiones. Como también es sabido se ocupa de la selección de las alternativas cuando la información tiene diversos grados de confianza. Usualmente se asignan beneficios y costos específicos a las combinaciones decisión-estado de la naturaleza, así como una probabilidad de ocurrencia para la combinación. Fundamentalmente se usará cuando las variables del sistema son aleatorias y puede describirse su comportamiento mediante procesos estocásticos.

d) Análisis de Actividades. Los procedimientos de esta rama conducen a crear modelos matemáticos que relacionan todos los posibles niveles de distintas actividades con los recursos disponibles. Se establecen regiones de factibilidad para las posibles soluciones y se elige la mejor usando los métodos de la Programación Matemática. Indispensable en sistemas industriales y económicos.

e) Teoría de Colas. Aquí se desea estimar el tamaño de una instalación de acuerdo con la demanda máxima esperada ocasionalmente; estocasticamente se describen las llegadas al sistema, los tiempos de servicio, las fluctuaciones en la longitud de la cola esperando el servicio, la prioridad en que deben ser atendidos los clientes y el comportamiento que observan, tanto a la llegada como en su permanencia en la cola. Esto conduce directamente a un análisis para determinar la tasa de servicio máxima para la cola, tomando en cuenta los costos por tamaño de las instalaciones, así como los asocia dos a las esperas y retrasos en el servicio. En los sistemas de transporte es de especial interés.

f) Teoría de la retroalimentación. Es fundamental en el Análisis de sistemas ya que en muchos de ellos los productos influencian los insumos. Gracias a esta teoría se pueden diseñar sistemas dinámicamente estables para sistemas autocorrectivos o que responden a cambios en los insumos.

g) Teoría del aprendisaje y la adaptación. Un sistema que aprende responderá con mayor precisión o con mayor rapidez en cada impulso, conforme sea capaz de evaluar, a partir de la experiencia o del comportamiento, un cambio en las condiciones del ámbito. Un sistema que se adapta (adaptativo) es uno que se ajusta a cambios en el ámbito buscando mantener un nivel exógeno.

h) Teoría del Insumo-Producto. Esta teoría debida a Leontief se ocupa de describir fenómeno del equilibrio general mediante un análisis empírico de la producción. Permite construir un modelo descriptivo de un sistema.

102. Etapas básicas en el análisis de un subsistema

Para el análisis de cualquier sistema o subsistema se acostumbra llevar a cabo las siguientes cinco etapas:

a) Definición de objetivos

El formular medidas de efectividad implica definir metas. Una meta es un estado deseado o un resultado que esperamos alcanzar, por ejemplo, pegarle a un blanco es una meta, como también pueden serlo obtener máximo provecho de una inversión o mínimo costo de un proceso industrial.

Una medida de efectividad (función objetivo en un análisis efectividad-costo), mide el comportamiento del sistema con respecto a la meta. Las medidas de efectividad suministran una escala (un patrón de comparación) permitiendo comparar diversas alternativas mediante la efectividad que cada una de ellas logra.

Cabe hacer notar que efectividad no coincide con eficiencia cuyo sentido es lograr un cierto objetivo, que puede no guardar ninguna relación con la meta fijada, sin desperdicio de recurso.

105. <u>Generación de alternativas</u> (De Neufville)

El propósito global de este análisis es descubrir y especificar soluciones preferidas. Es evidente que el analista debe dedicar un esfuerzo considerable a la exploración de un amplio rango de posibles soluciones. Deben buscarse soluciones que dominen a otras, así como aquellas que difieran significativamente de las previamente consideradas.

Dado que siempre existe limitación de recursos, es importante definir la sensibilidad (tasa de cambio) de los méritos de un diseño al cambiar sus parámetros prin cipales. Como recomendaciones se puede mencionar que:

a) El mayor esfuerzo analítico debe dedicarse a la exploración de aquellas alternativas que lucen como de mayor productividad.

b) La magnitud del esfuerzo invertido estará en proporción con los beneficios esperados de cada situación.

Ahora bien, seleccionar alternativas implica, como primer paso, el encontrarlas. Con respecto a esto, se puede pensar en dos tareas.

1o. Identificación de tipos de soluciones.

2o. Examen de las soluciones de un tipo dado.

La búsqueda de alternativas puede llevarse a cabo, entre otras, de dos maneras principales:

La primera, es un intento deliberado de ejercitar la imaginación para identificar todos los tipos relevantes de soluciones. Esto quizá no es sino una recomendación a ser creativo, para lo cual no hay método.

La segunda manera de generar alternativas consiste de una definición deliberada y exhaustiva de posibilidades que un tipo de solución ofrece. Esto puede llevarse a cabo mediante una computadora variando parámetros de manera que se consideren todos los posibles combinaciones. Cuando se usa esta táctica el procedimiento puede simplificarse de dos formas:

a) La definición de alternativas se confina a la capacidad de la memoria de la computadora e internamente se evaluan.

b) Se comparan internamente las alternativas y solamente se imprimen, para consideración posterior, las dominantes.

Cabe insistir que la generación de alternativas es fundamental para el Análisis de Sistemas.

106. Evaluación de alternativas. (De Neufville)

La evaluación de alternativas consiste en asociar cada alternativa de sistema con sus efectos: costos, beneficios, impactos en la colectividad, efectividad funcional, etc... Para ello se hace uso de los modelos desarrollados.

La selección se logra mediante un examen de los efectos de cada alternativa, una comparación de su valor relativo y una decisión sobre cual de los conjuntos es preferible. Mientras que la evaluación es un procedimiento mecánico, la selección es materia de juicio.

107. Selección

Es el arte de balancear todas las consecuencias. Para ello se efectuan juicios de valor a las medidas de efectividad, deducidas objetivamente, como un resul tado del proceso de evaluación. Por definición la selección no es un problema técnico. El analista suministrará la información relevante para la realización del juicio.

ANALISIS MARGINAL

108. Objeto del Análisis Marginal

El Análisis Marginal se ocupa primordialmente del proceso de efectuar selecciones entre diversas combinaciones de factores de la producción y de los productos mismos al ocurrir cambios diferenciales en las combinaciones. En otras palabras, el Análisis Marginal responde a la pregunta ¿Vale la pena producir una unidad adicional?

109. Función de Producción de una industria. (Caja negra).

Considérese una industria que usa m factores para fabricar p productos. A la función definida implícitamente por la ecuación

$$Q(z_1, \ldots, z_p, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

se le llama función de producción de la industria.

$z_k \geq 0$ son los productos (cantidad de unidades)

$x_i \geq 0$ son los factores (cantidad de unidades) y constituyen el dominio de la función de producción; con primeras y segundas derivadas parciales contínuas.

110. Producto Marginal

Se entiende por producto marginal del producto a con respecto al factor b a:

$$PM_{ab} = \frac{\partial z_a}{\partial x_b} \quad (a = (, \ldots, p, \; b = 1, \ldots, m)$$

y por tanto

$$PM_{ab} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x_b}}{\frac{\partial Q}{\partial z_a}}$$

El producto marginal mide el cambio en la p producción del producto z_a al variar el factor x_b cuando el resto de los factores y productos se mantienen constantes.

111. Tasa de Sustitución Técnica

Se entiende por tasa de sustitución técnica entre dos factores a y b a:

$$TST_{ab} = -\frac{\partial x_a}{\partial x_b} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x_b}}{\frac{\partial Q}{\partial x_a}}$$

La tasa de sustitución técnica mide el número de unidades de un factor requeridos para mantener constante un flujo de productos cuando se elimina una unidad del otro producto.

112. Tasa de transformación de productos

Se entiende por tasa de transformación entre productos entre a y b a:

$$TTP = \frac{\partial z_a}{\partial z_b} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial z_b}}{\dfrac{\partial Q}{\partial z_a}}$$

La tasa de transformación de productos mide el número de unidades de un producto que pueden obtenerse cuando se reduce en una unidad la fabricación del otro, manteniendo constante el flujo de factores.

113. Hipótesis en que se basa el modelo

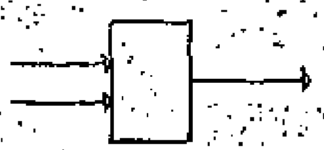
a) La industria posee un proceso productivo capaz de transformar un máximo de m factores en p productos.

b) Existe una función de producción que relaciona un conjunto de factores independientes con un conjunto de productos independientes.

c) La función de producción es tal que la cantidad fabricada, para un producto dado, representa la cantidad máxima de dicho producto que puede ser fabricado a partir de los factores cuando la fabricación de los restantes (p - 1) producto se mantiene en cantidades especificadas.

d) La naturaleza de la función de producción ha sido predeterminado por un conjunto de decisiones técnicas por parte de los ingenieros de la industria.

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

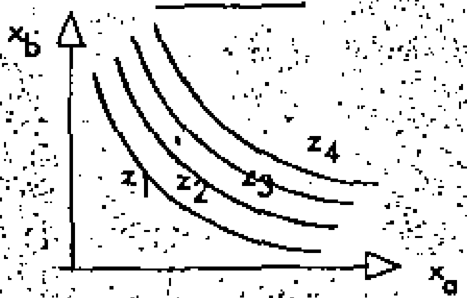


117. Isocuantas

Considérese un solo producto y unicamente dos factores, entonces:

$$z = z\ (x_a, x_b)$$

La representación gráfica de esta función en dos dimensiones son curvas de nivel. A dichas curvas de nivel se les llama isocuantas.



y cumplen con que para todos los puntos de una isocuanta el valor de la función de producción es el mismo.

La taso de sustitución técnica para los dos factores considerados es la pendiente de la tangente a la isocuanta cambiada de signo.

Por otra parte, para una isocuanta $z =$ cte.

luego

$$d\,z = 0 = \frac{\partial z}{\partial x_a}\, d\ x_a + \frac{\partial z}{\partial x_b}\, d\ x_b$$

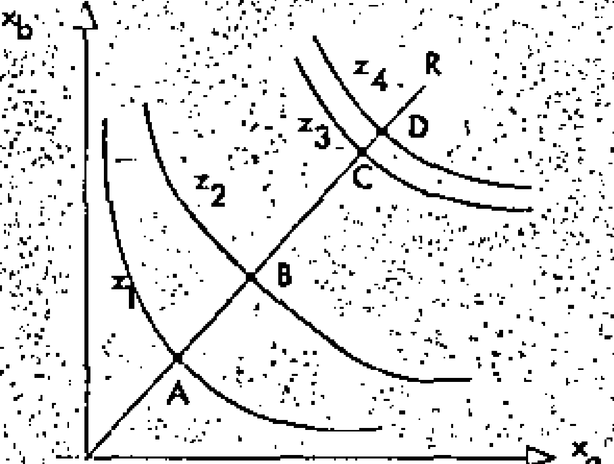
$$dz = 0 = \frac{\partial z}{\partial x_a}\,dx_a + \frac{\partial z}{\partial x_b}\,dx_b$$

$$\frac{d\ x_a}{d\ x_b} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x_b}}{\frac{\partial z}{\partial x_a}} = \frac{PM_b}{PM_a}$$

y la tasa de sustitución técnica es el cociente de los productos marginales de los factores.

Obsérvese, de la forma de la isocuanta, que a medida que la sustitución del factor a se realiza la T.S.T. tiende a cero, esto es, la sustitución es más y más difícil, hasta hacerse imposible.

118. Recuperación a escala



Considérese una función de producción

$$z = z\,(x_a,\ x_b)$$

y sus curvas de nivel (isocuantas) correspondientes a producciones.

$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$; en donde $z_{i+1} = z_i + \text{cte}$.

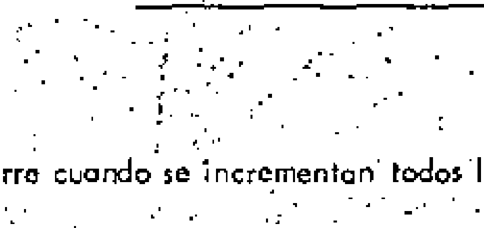
Considérese el rayo OR levado desde el origen y los puntos A, B, C, D en que corta a las isocuantas. Se observa que la distancia de B a C es mayor que la de C a D. La distancia entre isocuantas implica mayor insumo de factores. Puesto que el incremento en la producción es cte. y se necesitan menos insumos de A a B se dice que existe una recuperación a escala creciente. Analogamente entre B y C habrá una recuperación a escala decreciente. En el caso en que para todos los rayos las isocuantas se encontraran a igual distancia se diría que existe una recuperación a escala constante.

Obsérvese que recuperación a escala ocurre cuando se incrementan todos los factores conjuntamente, esto se asocia con un problema a largo plazo a la inversa de lo antes estudiado, en donde se varía un solo factor manteniendo constantes los restantes, esto se asocia con un problema a corto plazo.

119. Industria (caja negra) con dos productos y un sólo factor

Sea ahora

$$Q(z_a, z_b, x) = 0$$



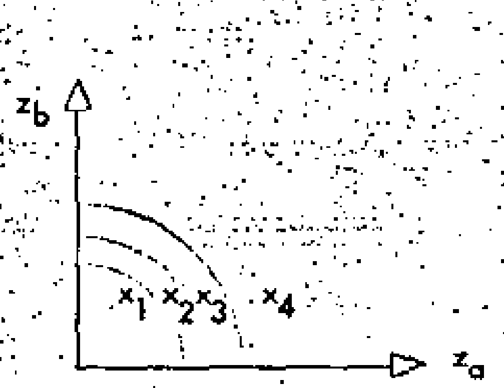
suponiendo que explicitamente:

$$x = x(z_a, z_b)$$

en donde x representa la cantidad mínima del factor único requerido para producir z_a unidades del producto a y z_b del b y a, b son productos obtenidos en un solo proceso industrial por simple variación del factor.

La representación en dos dimensiones de esta función se lobra también mediante sus curvas de nivel llamadas curvas de transformación de producción.

La pendiente de la tangente, cambiada de signo, es la tasa de transformación del, producto, esto es, la tasa según la cual z_a debe ser sacrificado para producir mas z_b sin variar el insumo x.



120. <u>Comparación de propiedades de isocuantas y curvas de transformación de producción.</u>

1. Isocuanta es el lugar geométrico de los puntos que son representaciones de factores x_a y x_b de manera que el nivel de producción z es el mismo para todas las combinaciones de x_a y x_b.	1. Una curva de transformación de producción es el lugar geométrico de los puntos que son representaciones de productos z_a y z_b que pueden ser fabricados a partir de un insumo x.
2. Una combinación de factores que se encuentra en una isocuanta z_2, y que está arriba y a la derecha de otra combinación en una isocuanta z_1, representa un nivel de producción que es superior a z_1.	2. Una combinación de productos que se encuentra en una curva de transformación de producción x_2 que está arriba y a la derecha de otra combinación en una curva x_1, representa un nivel de insumo superior al x_1.

3. Las isocuantas admiten tangentes dirigidas hacia abajo y hacia la derecha.	3. Las curvas de transformación de producción admiten tangentes hacia abajo y hacia la derecha.
4. Las isocuantas nunca se intersectan.	4. Las curvas de transformación de pro- nunca se intersectan.
5. Las isocuantas son convexas hacia el origen, esto es, el valor absoluto de la pendiente de la tangente a una isocuanta disminuye hacia la derecha.	5. Las curvas de transformación de producción son cóncavas hacia el origen, esto es, el valor absoluto de la pendiente de la tangente a una curva de transformación de producción se incrementa hacia la derecha.

121. Función de producción de Cobb-Douglas

Esta función es de la forma

$$z = A\ x_a^{\alpha}\ x_b^{\beta}$$

para un sólo producto y dos factores, A, α, β son constantes. Si $\alpha + \beta = 1$ la función muestra recuperaciones a escala constantes. Si $\alpha + \beta > 1$ serán crecientes y si $\alpha + \beta < 1$ decrecientes. Esta función homogenea también muestra isocuantas con pendiente negativa y convexos hacia el origen.

122. Decisiones hacia el exterior (ámbito) de una industria (sistema)

Relacionadas con el exterior, mercado, una industria toma las siguientes cuatro decisiones:

a) ¿Qué factores se deben comprar (aceptar)?

b) ¿En que cantidades (niveles y tasas)?

c) ¿Que productos fabricar (aceptados por el exterior)?

d) ¿En que cantidades se deben fabricar (niveles y tasas)?

Estas decisiones implican el estudio del ámbito. La respuesta a las dos primeras requiere la teoría del costo, para las dos últimas la teoría de la demanda.

123. Ecuación de costo

Es una relación funcional que liga el costo total a la cantidad de los factores comprobados por la industria.

124. Función de costo

Es una ecuación que expresa los costos totales como una función de los productos fabricados.

125. Costo de un factor de producción

El costo de un factor dado es el valor máximo que el factor puede adquirir en un luego

$$z\,\frac{d\,(CT)}{dz} - CT = 0$$

$$\frac{d\,(CT)}{dz} = \frac{CT}{z}$$

pero

$$\frac{d\,(CT)}{dz} = CM$$

luego

$$CM = \frac{CT}{z} = CTP$$

En resumen para un mercado perfectamente competitivo, el costo total promedio es mínimo cuando es igual al costo marginal (corto plazo)

133. Funciones de costo para largo plazo

A largo plazo todos los factores de la producción son variables.

Entonces, para un caso similar al anterior

$$z = z\,(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$$

en donde x_i son los factores variables del caso anterior y y_i son los factores que en el caso anterior habían permanecido fijos.

La ecuación de costo a largo plazo será:

$$C = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Procediendo de la misma manera:

$$\min C = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

s.a.

$$\bar{z} = z(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

La forma de Lagrange para la condición necesaria resulta:

$$L = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + F + \lambda \left[\bar{z} - z(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \right.$$

de donde:

$$c_i - \lambda \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} - \lambda \frac{\partial z}{\partial y_j} = 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\bar{z} - z(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$$

$m + n + z$ ecuaciones con $m + n + 3$ incognitas.

Resolviendo c en términos de z resulta:

$$c = c(z)$$

en donde c es el costo mínimo a largo plazo de producir z unidades.

Para este caso

$$CT = CTV = C$$

$$CTP = CVP = \frac{c}{z}$$

$$CM = \frac{dc}{dz}$$

134. <u>Producción de una industria con un sólo producto y en un mercado perfectamente competitivo.</u>

En este caso el precio del producto en el mercado es fijo y determinado por las leyes de la oferta y la demanda.

competencia perfecta

La función de costo total es:

$$CT = CT(z)$$

La ganancia es Π diferencia entre ingresos totales IT y costo total CT.

$$\Pi = IT - CT = P\,z - CT(z)$$

Si se desea maximizar las ganancias, la condición necesaria es:

$$\underline{d\,\Pi} = 0 = P - \underline{d\,(CT)}$$

pero

$$\frac{d(CT)}{dz} = CM \Longrightarrow P = CM$$

Luego una industria en un mercado perfectamente competitivo maximiza sus ganancias cuando opera con costos marginales iguales al precio del producto en el mercado.

Claro está que lo anterior requiere el cumplimiento de la condición suficiente

$$\frac{d^2 \Pi}{dz^2} < 0$$

esto es:

$$\frac{d^2 \Pi}{dz} = \frac{d}{dz}\left(P - \frac{d(cr)}{dz}\right) < 0$$

$$= -\frac{d^2 (CT)}{d z^2} < 0$$

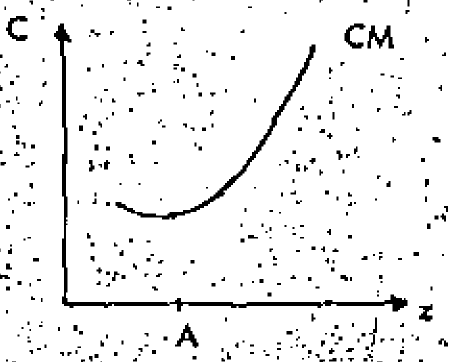
$$-\frac{d^2 (CT)}{dz^2} = -\frac{d(CM)}{dz} < 0$$

y por tanto:

$$\frac{d(CM)}{dz} > 0$$

Esto es, deberá operar en un entorno a la derecha del punto A.

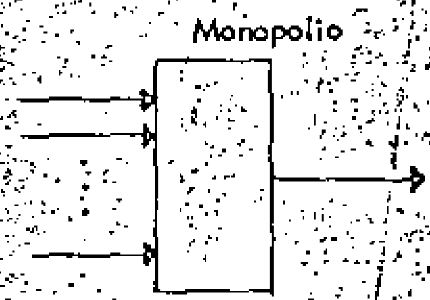
Cuando $CM = P$ se dice que la industria se encuentra en un equilibrio a corto plazo.



En general la regla para operación a costo mínimo en un mercado perfectamente competitivo es como sigue:

" Si $P \geq CVP$ operar en equilibrio a corto plazo
Si $P \leq CVP$ no producir nada"

135. Producción de una industria con un sólo producto cuando existe monopolio



Un monopolio se caracteriza por:

a) Una sola industria fabrica el producto

b) El comportamiento de la industria totalmente independiente del comportamiento de otras industrias iguales en otros mercados y no pueden entrar al de la industria en estudio.

Se parte de la hipótesis no puede incrementar su producción a menos que reduzca su precio, ya que a un precio dado el mercado agotó su capacidad de compra.

En este caso

$$\begin{cases} P = P(z) \\ \dfrac{dP}{dz} < 0 \end{cases}$$

Es claro que en este caso

$$IP = IP(z) \quad ; \quad IT = IT(z)$$

en donde IP = ingreso promedio del monopolio

IT = ingreso total del monopolio.

Por otra parte,

$$IT(z) = P(z)\ z$$

como anteriormente

$$\pi = IT(z) - CT(z)$$

la condición necesaria para maximizar ganancias es:

$$\frac{d\pi}{dz} = 0 = \frac{dIT(z)}{dz} - \frac{dCT(z)}{dz}$$

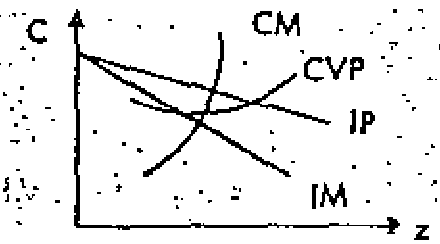
esto es:

$IM = CM$ (ingreso marginal igual a costo marginal).

La condición suficiente es:

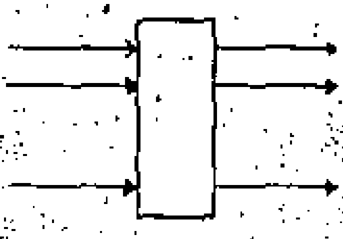
$$\frac{d^2\pi}{dz^2} < 0$$

Esto es, el ingreso marginal debe ser decreciente.



136. Producción múltiple en competencia perfecta o imperfecta

En lo que sigue se presentan exclusivamente conclusiones; se distinguen cuatro casos:



competencia perfecta o no

a) competencia perfecta tanto para la compra de los factores como para la venta de los productos.

b) competencia imperfecta, tanto para la compra de los factores como para la venta de los productos. (monopsomio, monopolio, duopolio, oligopolio o competencia monopolista).

c) competencia perfecta para la adquisición de factores, e imperfecta para la venta de los productos.

d) competencia imperfecta para la adquisición de factores y perfecta para la venta de los productos.

Se hará uso de los siguientes indicadores:

TTP = tasa de transformación de productos $\left(- \frac{\partial z}{\partial z} \right.$

TST = tasa de sustitución técnica $\left(\frac{\partial z_a}{\partial x_b} \right)$

PM = tasa de sustitución técnica $\left(- \frac{\partial x_a}{\partial x_b} \right)$

P = precio en el mercado

C = costo (de la ecuación de costo)

IM = ingreso marginal $\left(\frac{d\,(IT)}{dz} \right)$

CMF = costo marginal de un factor $\left(\frac{\partial C}{\partial x_b} \right)$ (C de la ecuación de costo).

Los condiciones para una operación óptima de la empresa resultan:

Caso	TTP	PM	TST.
a	$\frac{P_a}{P_b} = - \frac{\partial z_b}{\partial z_a}$	$C_a = P_b \frac{\partial z_b}{\partial x_a}$	$\frac{C_a}{C_b} = - \frac{\partial x_b}{\partial x_a}$
b	$\frac{IM_a}{IM_b} = - \frac{\partial z_b}{\partial z_a}$	$CMF_a = IM_b \frac{\partial z_b}{\partial x_a}$	$\frac{CMF_a}{CMF_b} = - \frac{\partial x_b}{\partial x_a}$
c	$\frac{IM_a}{IM_b} = - \frac{\partial z_b}{\partial z_a}$	$C_a = IM_b \frac{\partial z_b}{\partial x_a}$	$\frac{C_a}{C_b} = - \frac{\partial x_b}{\partial x_a}$
d	$\frac{P_a}{P_b} = - \frac{\partial x_b}{\partial z_a}$	$CMF_a = P_b \frac{\partial z_b}{\partial x_a}$	$\frac{CMF_a}{CMF_b} \quad \frac{\partial x_b}{\partial x_a}$

137. Uso del Análisis Marginal por el Análisis de Sistemas: Análisis Efectividad-Costo (De Neufville).

Como se ha visto el Análisis Marginal se ocupa de relacionar los factores de la producción con los productos terminados, de buscar las condiciones de operación óptima para la industria de acuerdo con el mercado.

Considerando ahora un sistema, ahí se tratará de adjudicar recursos a alternativas de proyectos, de transformar valiosos recursos en aún mas valiosos productos v.g. transformar materiales, servicios de obra de mano, espacio, servicios de equipo en unidades habitacionales, etc...

Al analista de sistemas le interesa por tanto identificar como las alternativas de diseño afectan el valor del proceso de transformación de los recursos y buscará optimizar dicho proceso.

Puede visualizarse el sistema como formado por tres componentes la de valor de los recursos, la de producción o transformación y la de valor del producto. En términos microeconómicos, la componente de valor de los recursos es el mercado de recursos, la componente de transformación es la función de producción y la componente de valor de los productos es un mercado o un medio político.

El Análisis de Sistemas examina cada una de estas componentes así como sus interacciones haciendo uso de las técnicas del Análisis Marginal.

La primera etapa es modelar el proceso de producción, el sistema físico para transformar recursos físicos en productos físicos. Para ello se plantéa la función de producción, el objetivo, al hacerlo, es definir como asignará recursos el ejecutivo.

También servirá, la función de producción, como un marco de referencia para comparar modelos alternos más complejos del sistema físico en estudio.

Cabe recordar aquí que la función de producción es el lugar geométrico de todas las combinaciones eficientes de recursos, en este sentido las alternativas que se obtengan mediante su uso dominan a las restantes. La función de producción puede visualizarse como la frontera de la región factible en un espacio de insumos y productos.

La función de producción no necesariamente adquiere una forma analítica, de hecho, basta tabular el producto máximo para cualquier combinación de recursos. Siempre representará lo máximo que puede lograrse con los recursos disponibles usando la tecnología existente.

Es evidente que es indispensable entender el concepto de función de producción para lograr un diseño efectivo del sistema.

Otro concepto importante en el Análisis de Sistemas es el de la ley de recuperaciones marginales decrecientes ya que describe como cambia el producto al modificar (sumando o restando) individualmente los recursos.

De hecho la ley establece que el producto (productividad) marginal de cualquier recurso, en un proceso disminuye eventualmente cuando se incrementa la cantidad usada de dicho recurso dejando fijas las cantidades de los demás recursos. Esta ley es de caracter empírico, sin embargo, su importancia práctica amerita su uso.

El Análisis de Sistemas lo dá por válida y se basa en ello el seleccionar alternativas.

Otro de los conceptos que utiliza es el de recuperación a escala ya que describe como cambia el producto cuando varían colectivamente los recursos. Las recuperaciones de escala ocurren cuando el tamaño de las combinaciones de recursos, mas eficientes, exceden con mucho las necesidades de producción. Puede ilustrarse con una cuenca basta y aprovechamiento hidraulico modesto. El analista de sistemas debe buscar estas recuperaciones por escala y aprovechar los ahorros que ofrecen. Sin embargo, en general se debe conceder que la recuperación por escala es constante, en la función de producción considerada.

También deberá estudiar el analista la posibilidad de que la función de producción sea convexa ya que así los óptimos logrados no serán sólo locales sino totales. A este respecto el Análisis Marginal asegura que la ley de las recupera ciones decrecientes es aplicable y las recuperaciones por escala son constantes, la función de producción es convexa.

La idea de que un conjunto de recursos disponibles dá lugar a diferentes combinaciones eficientes (de los mismos) con objeto de obtener un cierto nivel de producción es básica en el Análisis de Sistemas. El uso de isocuantas es por tanto fundamental, definir su variación mediante las pendientes de las tangentes, (tasa de sustitución técnica) adquiere también especial importancia, así como recordar que es el cociente de los productos marginales de los recursos.

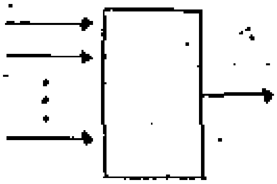
Ahora bien, el criterio para seleccionar el diseño más económico o la asignación de recursos más racional es indudablemente recuperación máxima. Se entenderá por recuperación máxima lo que para el Análisis Marginal es la ganancia máxima o sea el máximo incremento neto obtenido de transformar recursos en servicios o bienes.

Se puede entonces proponer como modelo para el proceso de transformación de recursos el siguiente. Aclarando que es determinista estático, no lineal y de optimización.

$$\max \ \Pi = V(z) - h(x)$$

s.a.

$$\bar{z} = z(x)$$



$\bar{z}$ = cantidad del producto por obtener.

$V(z) =$ valor del producto z

$x =$ cantidad del o de los recursos usados

$h(x) =$ valor de los recursos usados

$z(x) =$ función de producción utilizada

$\pi =$ valor neto del proceso de transformación

Obsérvese la analogía con el modelo de monopolio cuando en vez de $h(x)$ (ecuación de costos) se usa $h(z)$ función de costo. Nótese que el concepto valor de un recurso corresponde al de costo de un factor antes definido por el Análisis Marginal.

El problema de optimización, central en el Análisis de Sistemas, antes planteado dá lugar a dos problemas de los que se tratará más adelante.

a) Minimizar el costo de los recursos usados para lograr un nivel de producción $\bar{z}$

b) Maximizar el nivel de producción cuando el presupuesto o el nivel de recursos está fijo.

También, y con objeto de hacer uso de ello posteriormente, es conveniente distinguir entre los dos problemas anteriores, el primero es de optimización del proceso de producción y el segundo es optimización de la selección de alternativos en donde es necesario balancear costos y beneficios.

En el Análisis de Sistemas esta distinción conduce a trabajar en dos etapas. La Primera es obtener el mejor diseño para un cierto rango predefinido. La relación, así encontrada, entre producto y costo mínimo será la función efectividad-costo que entrará como objetivo en el siguiente análisis, en donde se intenta definir el nivel de producción o efectividad mas conveniente mediante el juicio sobre costos y beneficios.

Regresando al problema de optimización y habiendo identificado el problema planteado como uno de los que se analizaron en el inciso 136, su respuesta será:

Caso (b) de (136) será:

$$TST_{ab} = -\frac{CMF_a}{CMF_b}$$

Si se suponen precios constantes de los recursos (competencia perfecta) se cae en (a) de (136) y

$$TST_{ab} = -\frac{C_a}{C_b}$$

Lo que significa que para precios constantes de los recursos el cociente C_a/C_b define la tasa a la que uno puede ustituír al otro de manera que el costo total del cambio sea nulo, manteniéndose así constante el presupuesto inicial. En lo que sigue se identificará recta de presupuesto constante con tangente a una isocuanta en el punto de la producción más económico.

Entonces obteniendo costos totales y niveles de producción se crea la función efectividad costo:

$$c = e(z)$$

que como se ha dicho posteriormente se usa como objetivo.

La función efectividad-costo es el resultado de la primera etapa de optimización mediante el Análisis Marginal.

El valor del nivel de efectividad o producto de un sistema público no siempre es posible definirlo objetivamente, generalmente no producen bienes que se vendan en un mercado competitivo. Para estos sistemas el analista no puede determinar objetivamente el nivel óptimo del producto o la efectividad óptima de diseño. Su papel consistirá en suministrar al ejecutivo la función efectividad-costo. Si por el contrario costo y efectividad pueden compararse objetivamente, entonces el analista debe determinar el mejor nivel de efectividad.

El mejor nivel de producción es por definición un punto en la trayectoria de expansión y por tanto, un punto en la curva efectividad-costo, que se determinará por las técnicas del Análisis Marginal. La solución será lograr ingresos marginales iguales a costos marginales.

Para terminar se mencionará como otra aplicación del Análisis Marginal al Análisis de Sistemas, los llamados Estudios de Cambios o variaciones (Tradeoff Analysis). El cambio entre dos recursos está medido por su tasa de sustitución

Se consideran cuatro alternativas de aviso a los automovilistas, cada una con su costo.

Alternativa	Costo anual (promedio)
a) barras cruzadas	\$ 42 (U.S. Dollars)
b) luces intermitentes	\$ 1,995 "
c) barreras automáticas	\$ 4,235 "
d) pasos a desnivel	\$ 87,900 "

Se supondrá que el número de accidentes se pueden predecir mediante las ecuaciones de Newman:

$$\text{NEA (barras)} = -0.0978 + 0.0014A + 0.0018C + 0.0164D + 0.0096E + 0.0153G$$
$$\text{NEA (luces)} = -0.0131 + 0.0009A + 0.0145B + 0.0107D + 0.0178F + 0.0151G$$
$$\text{NEA (barreras)} = -0.2469 - 0.0018A - 0.0421B + 0.0093C + 0.0096D + 0.0812G$$

en donde:

NEA = número esperado de accidentes por año
A = promedio anual de tráfico diario (en cientos)
B = número de vías
C = visibilidad horizontal (valor típico = 20)
D = promedio del número de trenes diarios
E = factor del ángulo de cruzamiento (valor típico = 9)
F = tipo de aproximación (v. t. = 5)
G = visibilidad diagonal (v.t. = 5)

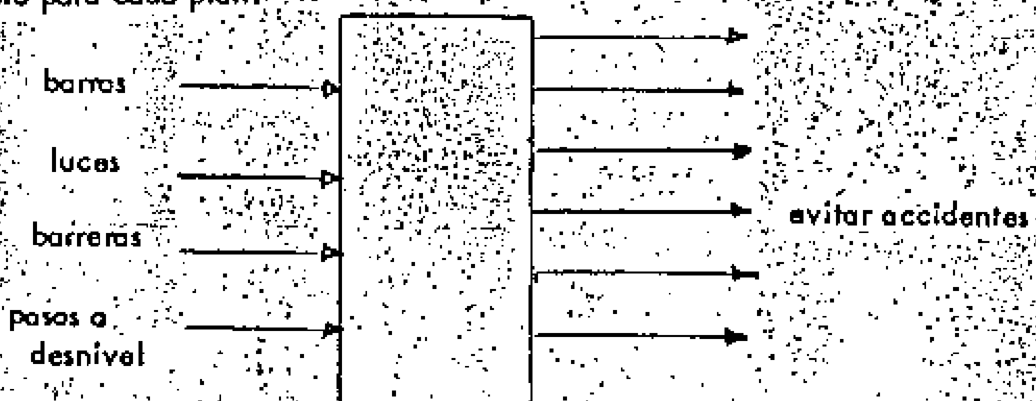
Solución

a) Cálculo del número esperado de accidentes por año.

Entrando a las ecuaciones de Newman con los datos de la tabla anterior se obtuvo:

Categoría	Barras	Luces	Barreras	Desnivel
1	1.12	0.85	- 0.40	0
2	0.91	0.72	- 0.13	0
3	0.63	0.54	0.22	0
4	2.03	1.45	0.08	0
5	1.82	1.32	0.35	0
6	1.54	1.14	0.71	0

b) Entrando ahora con los datos de la tabla inmediata se prueban 11 diferentes planes de soluciones obteniendo número total de accidentes por año y costo para cada plan.



Plan	Categoría y Alternativa						Costo	NEA (año)
1	1-1	2-1	3-1	4-1	5-1	6-1	7,770.00	282.1
2	1-1	2-1	3-1	4-3	5-1	6-1	120,981.00	229.5
3	1-3	2-1	3-1	4-3	5-1	6-1	133,560.00	224.9
4	1-3	2-1	3-1	4-3	5-3	6-1	481,579.00	102.9
5	1-3	2-3	3-1	4-3	5-3	6-1	594,790.10	74.8
6	1-3	2-3	3-1	4-3	5-3	6-2	637,756.10	66.0
7	1-3	2-3	3-1	4-3	5-3	6-3	687,036.10	56.6
8	1-3	2-3	3-3	4-3	5-3	6-3	783,475.10	47.1
9	1-3	2-3	3-3	4-3	5-3	6-4	2,624,105.50	31.5
10	1-3	2-3	3-3	4-3	5-4	6-4	4,568,302.00	2.5
11	1-3	2-3	3-4	4-3	5-4	6-4	11,492,596.00	-2.5

			PLAN 1						ΔNEA / ΔCosto	PLAN 2				ΔNEA / ΔCosto	PLAN 3				ΔNEA / ΔCosto	PLAN 4				ΔNEA / ΔCosto	PLAN 5	
	NEA (KE)	Costo (KE)	NEA (KE)	Costo (KE)	NEA	Costo	ΔNEA	ΔCosto	1/1000	NEA (KE)	Costo (KE)	ΔNEA	ΔCosto	$\frac{1}{10^3}$	NEA (KE)	Costo (KE)	ΔNEA	ΔCosto	$\frac{1}{10^3}$	NEA (KE)	Costo (KE)	ΔNEA	ΔCosto	$\frac{1}{10^3}$	NEA (KE)	Costo (KE)
1-1	3.36	126	3.36	126	1.12	42	—	—	—	3.36	126	—	—	—			—	—	—			—	—	—		
1-2	2.56	5995			0.85	1995	0.23	1,953	138			0.23	1,953	138	-1.2	12,700	—	—	—			—	—	—		
1-3	-1.2	12,700			-0.40	4235	1.52	4,193	364			1.52	4,193	364			—	—	—	-1.2	12,700	—	—	—	-1.2	12,700
1-4	0	243,000			0	87,900	1.12	87,858	12			1.12	87,858	12			-0.40	83,665	-4			-0.40	83,665	-4		
2-1	24.6	1130	24.6	1130	0.81	42	—	—	—	24.6	1,130	—	—	—	24.6	1,130	—	—	—	24.6	1,130	—	—	—		
2-2	13.5	53,800			0.72	1995	0.12	1,953	98			0.19	1,953	98			0.19	1,953	98			0.19	1,953	97		
2-3	-3.5	14,500			-0.13	4235	1.04	4,193	248			1.04	4,193	248			1.04	4,193	248			1.04	4,193	248	-3.5	14,500
2-4	0	1,354,000			0	87,900	0.72	87,858	8			0.72	87,858	8			0.72	87,858	8			0.72	87,858	8		
3-1	14.5	965	14.5	965	0.63	42	—	—	—	14.5	965	—	—	—	14.5	965	—	—	—	14.5	965	—	—	—	14.5	965
3-2	12.5	15,800			0.54	1995	0.09	1,953	46			0.09	1,953	46			0.09	1,953	46			0.09	1,953	46		
3-3	5.1	27,500			0.22	4235	0.41	4,193	98			0.41	4,193	98			0.41	4,193	98			0.41	4,193	98		
3-4	0	242,000			0	87,900	0.63	87,858	7			0.63	87,858	7			0.63	87,858	7			0.63	87,858	7		
4-1	55	1130	55	1130	2.03	42	—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	[illegible]	—		
4-2	39.1	54,800			1.45	1995	0.58	1,953	297			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
4-3	2.1	14,500			0.08	4235	1.95	4,193	467	2.1	14,500	—	—	—	2.1	14,500	—	—	—	2.1	14,500	—	—	—	2.1	14,500
4-4	0	1,220,000			0	87,900	2.03	87,858	23			0.08	83,665	0.9			0.08	83,665	.9			0.08	83,665	.9		
5-1	151	3480	151	3480	1.82	42	—	—	—	151	3,480	—	—	—	151	3,480	—	—	—			—	—	—		
5-2	109	16,000			1.82	1995	0.50	1,953	256			0.60	1,953	256			0.60	1,953	256			—	—	—		
5-3	23	351,000			0.35	4235	1.42	4,193	345			1.47	4,193	345			1.47	4,193	345	29	351,000	—	—	—	29	351,000
5-4	0	1,300,000			0	87,900	1.82	87,858	21			1.21	87,858	21			1.32	87,852	21			0.35	83,665	4		
6-1	33.8	925	33.8	925	1.54	42	—	—	—	33.8	925	—	—	—	33.8	925	—	—	—	33.8	925	—	—	—	33.8	925
6-2	25.1	44,000			1.14	1995	0.46	1,953	205			0.46	1,953	205			0.40	1,953	205			0.46	1,953	205		
6-3	15.5	335,000			0.71	4135	0.83	4,193	198			0.83	4,193	198			0.83	4,193	193			0.83	4,193	198		
6-4	0	10,300,000			0	87,900	1.54	87,858	18			1.54	87,858	18			1.54	87,858	13			1.54	87,858	15		
			282.6	7,150						229.4	121,126				224.6	133,700				102.8	481,220				34.4	504,5

Plan 1	Plan 2	Plan 3	Plan 4	Plan 5
(1-1)	(1-1)	(1-2)	(1-3)	(1-3)
(2-1)	(2-1)	(2-1)	(2-1)	(2-3)
(3-1)	(3-1)	(3-1)	(3-1)	(3-1)
(4-1)	(4-3)	(4-3)	(4-3)	(4-3)
(5-4)	(5-1)	(5-1)	(5-3)	(5-3)
(6-1)	(6-1)	(6-1)	(6-1)	(6-1)

					PLAN 5				$\frac{\Delta NEA}{\Delta costo}$	PLAN 6				$\frac{\Delta NEA}{\Delta costo}$	PLAN 7				$\frac{\Delta NEA}{\Delta costo}$	PLAN 8				$\frac{\Delta NEA}{\Delta costo}$	PLAN 9	
C-A	NEE(ce)	costo(ce)	NEA	costo	NEA(ce)	costo(ce)	ΔNEA	Δcosto	$\frac{1}{10^{?}}$	NEA(ce)	costo(ce)	ΔNEA	Δcosto	$\frac{1}{10^{?}}$	NEA(ce)	costo(ce)	ΔNEA	Δcosto	$\frac{1}{10^{?}}$	NEA(ce)	costo(ce)	ΔNEA	Δcosto	$\frac{1}{10^{?}}$	NEA(ce)	costo
1-1	3.56	126	1.12	42			—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
1-2	2.56	5,975	0.80	1,775			—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
1-3	-1.2	12,700	-0.40	4,235	-1.2	12,700	—	—	—	-1.2	12,700	—	—	—	-1.2	12,700	—	—	—	-1.2	12,700	—	—	—	-1.2	12,700
1-4	0	261,000	0	83,900			-0.40	83,665	-1			-0.40	83,665	-1			-0.40	83,665	-1			-0.4	83,665	-1		
2-1	24.6	1,120	0.91	42			—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
2-2	19.5	53,800	0.72	1,775			—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
2-3	-3.5	14,500	-0.13	4,235	-3.5	14,500	—	—	—	-3.5	14,500	—	—	—	-3.5	14,500	—	—	—	-3.5	14,500	—	—	—	-3.5	14,500
2-4	0	250,000	0	83,900			-0.13	83,665	2			-0.13	83,665	2			-0.13	83,665	2			-0.13	83,665	2		
3-1	14.5	965	5.63	42	14.5	965	—	—	—	14.5	965	—	—	—	14.5	965	—	—	—			—	—	—		
3-2	13.5	45,700	0.54	1,795			0.09	1,953	46			0.09	1,953	46			0.09	1,953	46			—	—	—		
3-3	5.1	97,505	0.22	4,235			0.41	4,193	98			0.41	4,193	98			0.41	4,193	98*	5.1	97,500	—	—	—	5.1	97,50
3-4	0	202,000	0	83,900			0.63	81,858	7			0.63	81,858	7			0.63	81,858	7			0.26	83,665	3		
4-1	55	1,130	2.03	42			—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
4-2	39.1	54,800	1.45	1,995			—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
4-3	2.1	14,500	0.08	4,235	2.1	14,500	—	—	—	2.1	14,500	—	—	—	2.1	14,500	—	—	—	2.1	14,500	—	—	—	2.1	14,500
4-4	0	220,000	0	83,900			0.08	83,665	.9			0.08	83,665	.9			0.08	83,665	.9			0.08	83,665	.9		
5-1	151	3,180	1.82	42			—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
5-2	109	145,000	1.32	1,995			—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
5-3	29	351,000	0.35	4,235	29	351,000	—	—	—	29	351,000	—	—	—	29	351,000	—	—	—	29	351,000	—	—	—	29	351,000
5-4	0	730,000	0	83,900			0.35	83,665	4			0.35	83,665	4			0.36	83,665	4			0.35	83,665	4		
6-1	33.8	925	1.64	42	33.8	925	—	—	—			—	—	—			—	—	—			—	—	—		
6-2	25.1	44,000	1.16	1,995			0.40	1,953	205*	25.1	44,000	—	—	—			—	—	—			—	—	—		
6-3	15.5	93,500	0.71	4,225			0.43	4,193	156			0.43	2,210	195*	15.5	93,500	—	—	—	15.5	93,500	—	—	—		
6-4	0	1,190,000	0	83,900			4.54	81,858	12			4.14	[illegible]	12			0.71	83,665	9			0.71	83,665	9*	0	[illegible]
Total					92.2	5[illegible]				66.0	695,665				56.4	641,165				47.0	783,700				31.5	[illegible]

(1-3), (2-3)
(3-1), (4-3)
(5-3), (6-1)

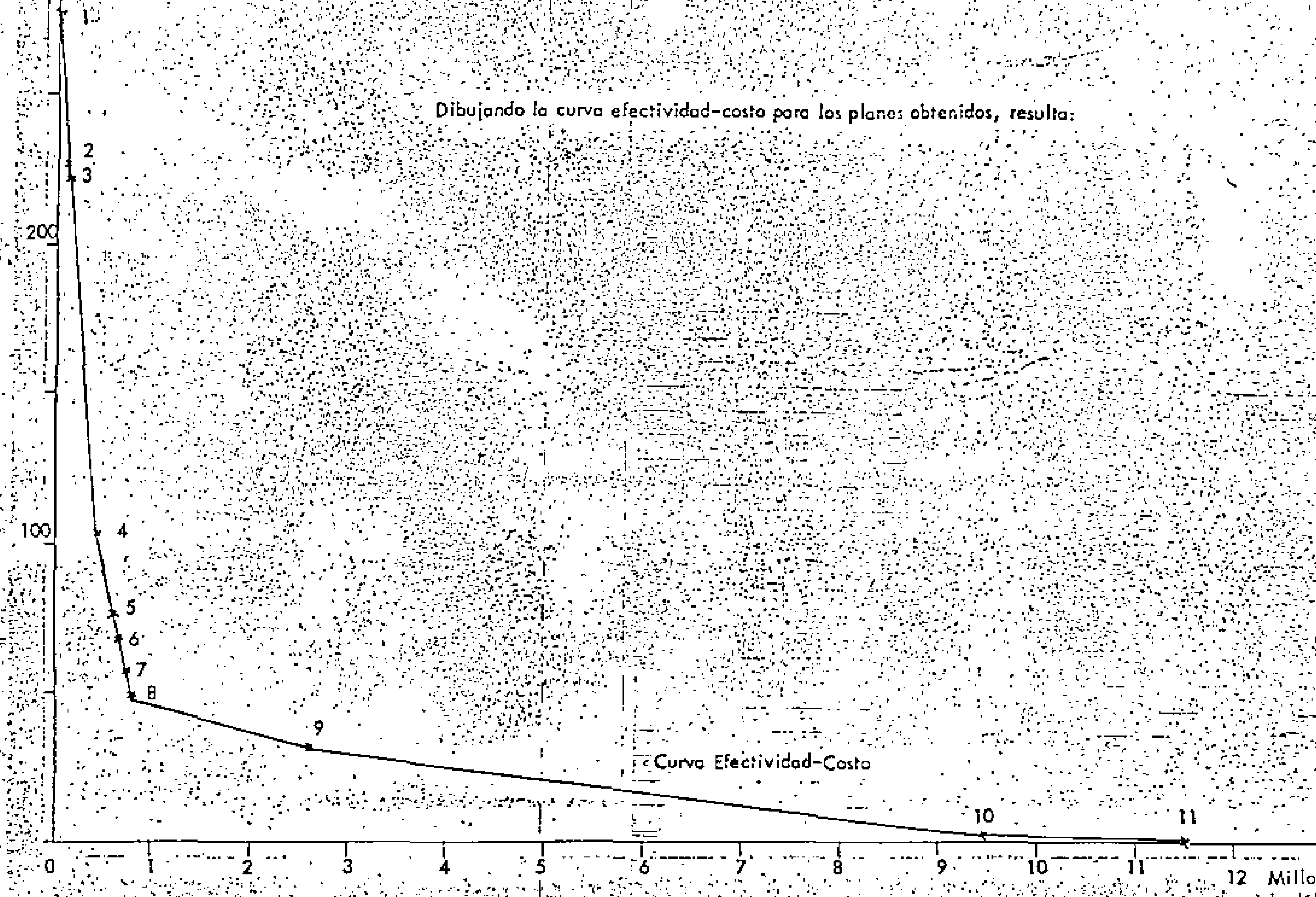
(1-3), (2-3)
(3-1), (4-3)
(5-3), (6-2)

(1-3), (2-3)
(3-1), (4-3)
(5-3), (6-3)

(1-3), (2-3)
(3-2), (4-3)
(5-3), (6-3)

(1-3), (2-3)
(3-3), (4-3)
(5-3), (6-4)

Dibujando la curva efectividad-costo para los planes obtenidos, resulta:



De la inspección de la curva efectividad-costo, se colige que los planes más efectivos son el 8 y el 9. Esto es, si el presupuesto para prevenir accidentes es de hasta un millón de dólares, optar por el ocho que consiste en poner barreras para los cruces en todas las categorías.

Si el presupuesto es mayor del millón optar por barreras en todos los cruces salvo los 22 de la categoría seis, para los que se construirá paso a desnivel.

139. Ejercicio

Mediante un análisis efectividad-costo definir la asignación de los recursos A, B, C a los productos 1,2,3,4 si la matriz de efectividades es:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13 & 8 & 5 \\ 10 & 2 & 7 \\ 3 & 18 & 21 \\ 31 & 24 & 35 \end{pmatrix} \end{array}$$

El vector de costos es $\begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix}$

140. Tipos de análisis Efectividad-Costo

Es posible distinguir tres tipos de análisis efectividad-costo.

a) Estudios para la configuración de un sistema

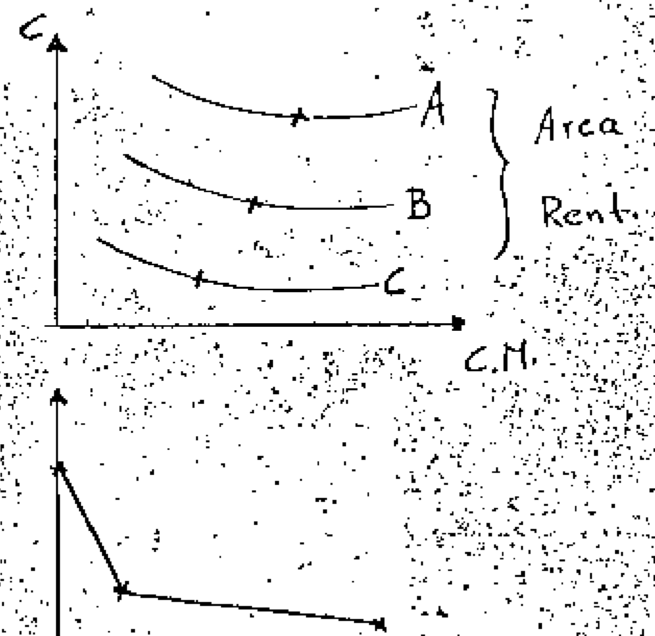
b) Estudios de comparación entre sistemas

c) Estudios de estructuras de sistemas.

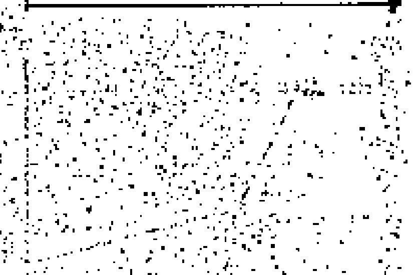
141. Estudios para la configuración de un sistema

A esta categoría pertenecen los estudios dedicados a seleccionar las características o configuración de un sistema aislado. Los costos se usan, como se ha visto, para ayudar a la selección de dichas características, buscando aquellas que minimizan los primeros para un cierto nivel de comportamiento o para indicar las características que maximizan el comportamiento a un nivel dado de costo.

Así, considerando tres distintos tipos de edificio, la carga muerta sobre el terreno y su costo total, se obtienen las curvas que muestran área rentable.

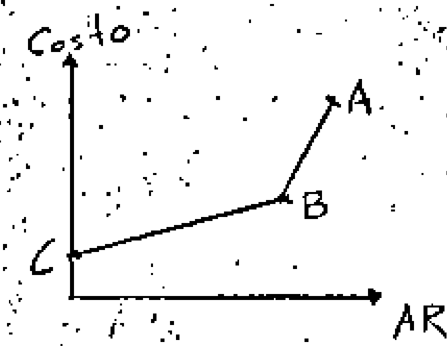


La característica a determinar es la carga muerta, la efectividad está medida por el área rentable (nivel de comportamiento) y el costo es el total del sistema (edificio).



A partir de esta curva se puede pasar a la curva de efectividad-costo haciendo uso de los puntos mínimos de cada curva.

De esa curva se observa que la alternativa dominante es la B, con lo que seleccionamos el tipo de edificio cuyo peso muerto se aproxima mas al de la alternativa B para su punto mínimo.



En lo que se refiere al tratamiento de los costos en los estudios tienen las siguientes características.

a) Los costos se obtienen con gran detalle con objeto de sensibilizar las combinaciones (tradeoff) de recursos.

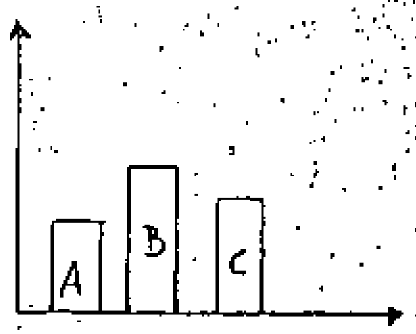
b) En la evaluación global los costos intervienen como ecuaciones, las que conjuntamente con las de efectividad se manipulan para obtener las curvas de soluciones optimizadas y las combinaciones apropiadas.

c) Los costos no están asociados al tiempo, sino que simplemente se suman para lograr, de alguna manera, el costo total en el período en estudio. También cabe hacer notar que la medida de comportamiento del sistema no es necesariamente la de efectividad completa del proyecto.

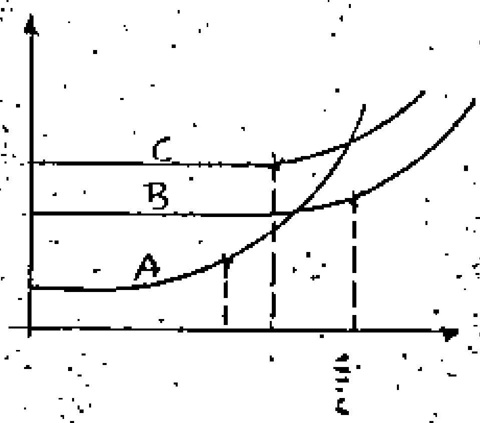
142. Estudios de comparación entre sistemas

Aquí el énfasis se pone en comparar dos o más sistemas configurados para un mismo fin. Se supone que cada uno de los sistemas fué previamente suboptimizado en sus características.

Si solamente con base al costo se fuera a seleccionar seguramente bastaría una gráfica como la mostrada y puesto que todas las alternativas cumplen con el objetivo propuesto, la selección simplista sería la A.



Usando ahora las trayectorias de expansión correspondientes a cada una de las alternativas se observa que la dominante es la B que será la que deberá ser seleccionada.



En lo que se refiere a los costos, estos estudios tienen las siguientes características:

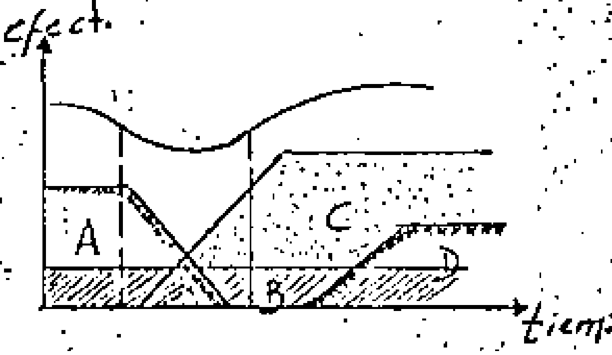
a) Requieren menos detalle que en el caso anterior.

b) Tampoco se asocia el concepto tiempo al de costo.

143. Estudios de Sistemas de Sistemas

Este tipo de estudios hace necesario asociar el concepto de tiempo al de costo y al de efectividad, con objeto de lograr el mismo nivel de efectividad en todo el horizonte de planeación.

Los conceptos se pueden ilustrar mediante los sistemas A, B, C y D cuya efec tividad varía con el paso del tiempo.



Como puede observarse para el comportamiento mostrado la efectividad del sistema de sistemas disminuye entre t_1 y t_2.

Una alternativa sería prolongar la vida del sistema A, otra iniciar antes, de ser posible, la vida del C. El costo acumulado de ambas alternativas, usando valores presentes con una tasa de descuento apropiada suministrarán la información necesaria para que el ejecutivo tome la decisión conforme a su disponibilidad presupuestal actual y en el horizonte de planeación.

144. Condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker en términos del Análisis Marginal

Considérese una industria que hace uso de m factores variables, n factores fijos y produce p productos diferentes.

x_{ik} = cantidad del i-ésimo factor variable usada en la producción del k-ésimo producto.

x_{jk} = cantidad del j-ésimo factor fijo usado en la fabricación del k-ésimo producto.

z_k = cantidad fabricada del k-ésimo producto.

Y_j = cantidad del j-ésimo factor disponible en las bodegas de la industria.

En estas condiciones la función de producción de la industria está dada por:

$$Q\,(z_1, \ldots, z_p, x_{11}, \ldots, x_{mp}, \ldots, Y_{np}) = 0$$

Se requiere además que la cantidad consumida del j-ésimo factor fijo no sea mayor que lo disponible Y_j.

$$\sum_{k=1}^{p} Y_{jk} \leq Y_j \;, \quad j = 1, \ldots, n$$

Sea R la función de ingresos totales de la industria y, C la ecuación de costo total variable.

$$R = R\,(z_1, \ldots, z_p)$$
$$C = C\,(x_{11}, \ldots, x_{mp})$$

Sea K el costo de transferir unidades de un factor fijo de la fabricación de un producto a otra

$$K = K\,(Y_{11}, \ldots, Y_{np})$$

Entonces $\partial K / \partial Y_{jk}$ representa la razón del cambio en el costo de desviar el factor fijo j a la fabricación del k-ésimo producto.

Si F representa todos los demás costos fijos salvo K, la función de ganancia para la industria es:

$$\Pi = R - C - K - F$$

la que debe ser maximizada sujeta a:

$$\begin{cases} Q(z_1, \ldots, z_p, x_{11}, \ldots, x_{mp}, Y_{11}, \ldots, Y_{np}) = 0 \\ \sum_{k=1}^{p} Y_{jk} = \Upsilon_j, \; j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

y con la condición de que todas las variables sean no negativas.

En estas circunstancias el teorema de Kuhn-Tucker suministra las condiciones de optimalidad.

Para aplicar el teorema se requiere la concavidad en la función objetivo y en las restricciones (convexidad), lo que puede asegurarse en virtud de estar sometidas a la ley de recuperaciones decrecientes.

El lagrangeano resulta:

$$L = R - C - K - F + \lambda Q + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\quad_j - \sum_{k=1}^{p} Y_{jk} \right)$$

y las condiciones de Kuhn-Tucker producen las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\partial L}{\partial z_k} = \dfrac{\partial R}{\partial z_k} + \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial z_k} \leq 0, \quad k = 1, \ldots, p$

b) $\dfrac{\partial L}{\partial x_{ik}} = -\dfrac{\partial C}{\partial x_{ik}} + \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x_{ik}} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m; \; k = 1, \ldots, p$

c) $\dfrac{\partial L}{\partial Y_{jk}} = -\dfrac{\partial K}{\partial Y_{jk}} + \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial Y_{jk}} - \mu_j \leq 0, \quad j = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, p$

d) $\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial R}{\partial z_k}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial z_k}\right)z_k^o+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\left(-\frac{\partial C}{\partial x_{ik}}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial x_{ik}}\right)x_{ik}^o+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{\partial K}{\partial y_{jk}}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial y_{jk}}-\mu_j\right)y_{jk}^{=}=0$

e) $z_k^o \geq 0,\ k=1,\ldots p$

f) $x_{ik}^o \geq 0,\ i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,p$

g) $y_{jk}^o \geq 0,\ j=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,p$

h) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Q \geq 0$

i) $\frac{\partial L}{\partial \mu} = Y_j - \sum_{k=1}^{p} y_{jk} \geq 0,\ k=1,\ldots,n$

j) $Q\lambda^o + \sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \sum_{k=1}^{p} y_{jk}\right)\mu_j = 0$

k) $\lambda^o \geq 0$

l) $\mu_j^o \geq 0,\ j=1,\ldots,n$

En las ecuaciones anteriores aparecen los multiplicadores de Lagrange λ y μ_j. Por lo que se refiere a λ es el precio sombra de la función de producción. Por lo que se refiere a μ_j estos son los costos unitarios de oportunidad asociados con cada factor fijo. Cabe recordar que el precio sombra indica lo que vale un factor en términos de su contribución adicional a la consecución de un objetivo (valor marginal de la contribución).

La condición (a) puede reescribirse como

$$\frac{\partial R}{\partial z_k} \leq \lambda \frac{\partial Q}{\partial z_k} \quad k = 1,\ldots,p.$$

En esta forma establece que el ingreso marginal por concepto del k-ésimo producto debe ser menor o igual que el costo marginal de fabricar el k-ésimo producto. Es claro que sólo se fabricará dicho producto si domina la igualdad estricta.

La condición (b) puede reescribirse como

$$\frac{\partial C}{\partial x_{ik}} \geq \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_{ik}}, \quad i = 1,\ldots, m; \; k = 1,\ldots,p.$$

En esta forma establece que el costo del iésimo factor variable usado en la fabricación del k-ésimo producto debe ser mayor o igual que el valor marginal del uso de una unidad de i,-ésimo factor variable en la fabricación del k-ésimo producto. Es claro que dicho factor sólo se utilizará si domina la igualdad estricta.

Por lo que se refiere a (c) se tiene que:

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial y_{jk}} - \frac{\partial K}{\partial y_{jk}} \leq \mu_j \quad , \quad j = 1,\ldots, n; \; k = 1,\ldots,p.$$

Es condición establece que el valor marginal de usar una unidad del j-ésimo factor fijo en la fabricación del k-ésimo producto menos el costo marginal de convertir una unidad del j-ésimo factor fijo en la fabricación del k-ésimo producto debe ser menor o igual que el valor marginal de k-ésimo factor fijo. Si no se cumple la -

igualdad estricta, entonces el j-ésimo factor fijo no se utilizará en la producción del k-ésimo producto.

Tanto en (a), (b) y (c) si la igualdad rige, la industria está operando en las condiciones óptimas.

La condición (d) establece que la ganancia total debe ser igual al costo de los recursos escasos o equivalentemente, la ganancia de la industria después de pagar por los recursos de que carece debe ser igual a cero.

Las condiciones (e) , (f) y (g) hacen notar que la solución debe ser factible.

La igualdad siempre regirá en la exprisión (h) por la definición misma de función de producción. Si la oferta excede a la demanda en un factor regirá la desigualdad en (i) y consecuentemente, para dicho factor, $\mu_j = 0$.

La condición (j) necesariamente existirá, puesto que si $Q = 0$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \, Y_j^o = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \mu_j \quad y_{jk}^o$$

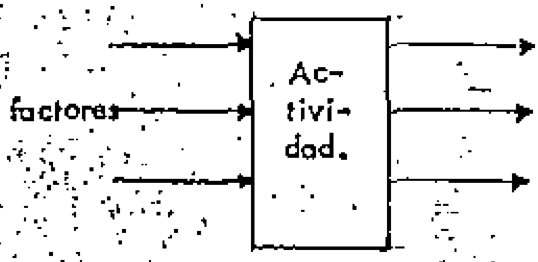
indicando que el valor de los recursos escasos para la industria es igual al valor dichos recursos usados en la producción. Los multiplicadores nunca serán negativos de acuerdo con (k) y (ℓ).

ANALISIS DE ACTIVIDADES

145. Introducción

El Análisis de Actividades, dentro de las técnicas microeconómicas, permite no sólo sustitución sino también complementaridad sin perder la ley de las recuperaciones decrecientes ni las recuperaciones a escala. Permite trabajar con funciones de producción menos restringidas en cuanto a sus condiciones de continuidad y diferenciación. Por otra parte presenta el inconveniente de la linealidad aunque ofrece a cambio el uso de las técnicas lineadas de optimización.

La idea central es el concepto de Actividad entendiéndose por ella un proceso de transformación de factores (recursos) en productos. Las actividades o variables intermedias entre insumos y productos, representan procesos (caminos) alternos mediante los cuales se obliga la combinación de los recursos. En la práctica, de hecho, sólo se emplean efectivamente los recursos cuando se usan en una combinación específica. Dado que las actividades son suceptibles de ser representadas mediante cajas negras de las que se obtienen producciones eficientes el Análisis de Actividades suministra una excelente metodología al de sistemas cuyos fines son idénticos.



146. Axiomas del Análisis de Actividades.

El Análisis de Actividades se funda en dos axiomas básicos:

a) Axioma de la proporcionalidad. Por proporcionalidad se entiende que si una actividad puede ser operada a un nivel tipo, también puede ser operada a cualquier fracción no negativa o múltiplo de dicho nivel, variando los factores y los productos proporcionalmente. El múltiplo suministra la intensidad a que dicha actividad será operada.

b) Axioma de la aditividad. El axioma implica que si dos actividades se usan conjuntamente en la fabricación de un producto, la primera operada a una intensidad x_1 y la segunda a una intensidad x_2, los factores requeridos y los productos fabricados consistirán de la suma de los factores y los productos correspondientes a la operación individual de la primera actividad a la intensidad x_1 y la segunda a la intensidad x_2. En términos económicos las actividades reciben el nombre de "economías externas" y se supone que no existe interacción entre ellas. De existir debió haberse tomado en cuenta en la etapa de diseño de las actividades.

147. Postulado de la eficiencia económica.

Por eficiencia económica, otro de los fundamentos del Análisis de Actividades, se entiende que cualquiera que sea otro conjunto de intensidades que generan una cantidad mayor de un bien sin tener que variar la producción de otro.

148. Elementos en un análisis de actividades.

En un problema que implica un análisis de actividades deben distinguirse los siguientes elementos:

a) Las posibilidades de producción puramente técnicas.

b) Las limitaciones cuantitativas en los recursos básicos disponibles en la economía en estudio (factores de producción primarios)

c) Las metas que deben ser servidas por la producción.

d) Las mejores selecciones que permiten explotar las posibilidades técnicas coordinadamente hacia un objetivo.

149. La tecnología

La formalización de las posibilidades técnicas involucra unicamente dos conceptos; el de un bien y el de una actividad. Los bienes deben ser *homogeneos* y perfectamente divisibles, bajo esta denominación se incluyen tanto los factores primarios obra de mano, uso de tierra etc. como los productos intermedios tales como acero, concreto etc. y los productos finales como cortinas puentes etc. El concepto de actividad fué previamente definido.

Por y_n se representa la cantidad neta del n-ésimo bien en el sistema productivo si y_n es negativo se tratará de un insumo; cada y_n, representa una tasa de flujo por unidad de tiempo. La k-ésima actividad se representará por un conjunto de coeficientes a_{nk} indicando la tasa de flujo por unidad de tiempo del n-ésimo bien en la k-ésima actividad.

Entonces si x_k es la intensidad de la k-ésima actividad, el flujo del bien será $x_k\, a_{nk}$.

Al vector $\overline{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{NK} \end{bmatrix}$ se le llamará un conjunto de actividades básicas.

Y cualquier estado de la producción puede ser descrito por una combinación de actividades básicas con coeficientes no negativos x_k.

Resulta, entonces, que los productos netos finales son:

$$Y_n = \sum_{k=1}^{K} a_{nk}\, x_k,\ x_k \geq 0,\ n = 1, \ldots, N$$

Los vectores de actividades básicas constituyen la matriz tecnológica o simplemente la tecnología.

$$\overline{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_K \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ - & - & - & - \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NK} \end{bmatrix} \end{array}$$

Con base en lo anterior se formulará la siguiente definición:

"Un punto $\overline{Y}$ en un espacio de bienes recibe el nombre de posible en una tecnología $\overline{A}$ si existe un punto $\overline{x}$ en el espacio de actividades que satisfaga $\overline{y} = \overline{A}\,\overline{x}$; $\overline{x} \geq \overline{0}$".

También los postulados citados a continuación definen el tipo de tecnología en estudio.

Postulado A "Es imposible encontrar un conjunto de intensidades positivas de algunas o de todas las actividades para las que el efecto conjunto es un producto neto nulo de todos los bienes".

En términos algebráicos, el postulado establece que no existe un vector $\bar{x}$ para el cual

$$\bar{Y} = \bar{A}\,\bar{x} = \bar{0}\ , \quad \bar{x} \geq \bar{0}$$

Postulado B "Es imposible encontrar un conjunto de intensidades positivas de algunas o de todas las actividades para las que el efecto conjunto consista de un producto neto positivo de por lo menos un bien, sin ocasionar un producto neto negativo para al menos otro bien".

150. Posibilidades de producción sin bienes intermedios

Para la formulación de los postulados A y B no fué necesario especificar cuales de los bienes se desea que produzca la tecnología y cuales son factores primarios. En lo que sigue se supondrá que un bien es factor primario o es deseado, pero no los dos simultáneamente.

Postulado C, (fuerte). "Es posible encontrar un conjunto de intensidades positivas de algunas o de todas las actividades para las que los requerimientos conjuntos de factores primarios se encuentren dentro de límites prefijados y para los cuales la producción conjunta consista de cantidades netas positivas para todos los bienes deseados".

Postulado C_2 (debil) "Es posible encontrar un conjunto de intensidades positivas de algunas o de todas las actividades para las que los requerimientos conjuntos de factores primarios se encuentren dentro de límites prefijados y para los cuales la producción conjunta consista de cantidades netas no negativas".

Postulado D_1 (fuerte) "Es posible satisfacer el postulado C_1 de manera que las cantidades netas de todos los bienes intermedios sean nulas".

Postulado D_2 (debil) "Es posible satisfacer el postulado C_2 de manera que las cantidades netas de todos los bienes intermedios sean nulas".

151. Los factores primarios considerados como bienes deseados

El primer paso en esta dirección es formalizar la definición de punto eficiente antes suministrada.

"Un punto posible en el espacio de los bienes es llamado eficiente cuando un incremento en alguna de sus coordenadas (cantidad neta producida) puede lograrse solo disminuyendo alguna otra coordenada".

Teorema A

"Una condición necesaria y suficiente para que un punto posible $\overline{Y} \in \overline{A}$ sea eficiente es que exista un vector $\overline{p}$ (de precios) positivo y normal a $\overline{A}$. Esto implica que $\overline{y}$ sea un punto frontera de $\overline{A}$".

sean positivos para los bienes finales, no negativos para los factores primarios cuyo límite de disponibilidad sea alcanzado por $\bar{y}$ y elementos nulos para los factores primarios cuyo límite de disponibilidad no sea alcanzado por $\bar{y}$. Esto implica que $\bar{y}$ sea un punto frontera de $\bar{A}$".

Teorema D

"Para un punto eficiente $\bar{y}$ o bien $y_{fin} = 0$ o los límites de disponibilidad son alcanzados por al menos uno de los flujos de factores primarios".

Teorema E

"Una condición necesaria y suficiente para la eficiencia de un punto alcanzable $\bar{y}$ es que exista un vector $\widehat{\Pi}_{fin}$ tal que la función lineal de los flujos de bienes alcance un máximo dentro del conjunto de puntos alcanzables $\bar{y}$".

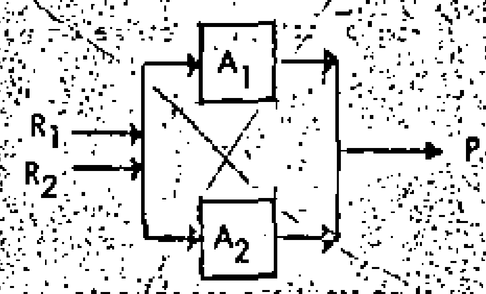
Teorema F

"Si se satisface el postulado B por la matriz de la tecnología $\bar{A}$, existe para cada vector positivo $\widehat{\Pi}_{fin}$ por lo menos un punto eficiente $\bar{y}$ para el que la función lineal de los flujos alcanza su máximo en el conjunto de puntos alcanzables".

Los fundamentos teóricos anteriores son generalmente usados ligados a conceptos del Análisis Marginal y conducen a problemas de Programación Lineal.

153. Ejemplo 4.1.—

En una industria se presenta el siguiente problema. Definir la intensidad con que deben emplearse las actividades A_1 y A_2 con objeto de transformar los recursos R_1 y R_2 en un producto P máximo, si R_1 se dispone de cuatro unidades, de R_2 de 6 unidades; la primera actividad rinde dos



unidades de P por una unidad de R_1 y tres de R_2; la segunda actividad rinde tres unidades de P por dos unidades de R_1 y una de R_2. (figura 4.2).

El primer paso es construir el mapa de isocuantas, situando en el eje y el recurso R_1 y en el x el R_2. En estas condiciones, las actividades A_1 y A_2 quedan representadas por rectas que pasan por el origen, ya que la tasa de flujo de recursos es constante para cada actividad (pendiente de la recta) y para una intensidad nula el flujo también es nulo.

$$\cancel{TF_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad TF_2 = \frac{2}{1} = 2}$$

A continuación se inicia la selección de puntos sobre las actividades con objeto de disponer de las isocuantas. El enunciado indica que A_1 rinde dos unidades de P por una unidad de R_1 y tres de R_2, entonces, usando el axioma de la proporcionalidad se tendrá una unidad de P usando 0.5 de R_1 y 1.5 de R_2. El punto (1.5, 0.5) se sitúa sobre A_1, análogamente para A_2 el enunciado indica que para tres unidades de P se usan dos de R_1 y una de R_2; luego, por el mismo axioma para una de P se utilizarán 0.67 de R_1 y 0.33 de R_2. El punto (0.33, 0.67) se sitúa sobre A_2 y se dibuja el segmento de isocuanta correspondiente a $P = 1$ (figura A.3).

Las isocuantas incluyen segmentos paralelos a los ejes lo que indica que cualquier otra adición de un factor es redundante y no puede incrementar el producto cuando el otro factor se encuentra fijo.

En la forma descrita y siempre usando el axioma de las proporciones se dibujó el resto de las isocuantas.

El tercer paso es dibujar la región de factibilidad, la que está definida en términos de los recursos disponibles cuatro unidades de R_1 y seis de R_2. Estos datos definen un rectángulo en el mapa. El punto M resuelve el problema. Basta pasar una isocuanta por él para obtener que $P = 6.7$ unidades.

La intensidad con que deben operarse las actividades está dada por:

$$x_1 = \frac{|M\,N|}{|L\,N|} \times \frac{7}{2} = \quad ; \quad x_2 = \frac{|L\,M|}{|L\,N|} \times \frac{7}{3} =$$

$$x_1 = \frac{3.8}{8.3} \times \frac{7}{2} = 1.6\,; \quad x_2 = \frac{4.6}{8.3} \times \frac{7}{3} = 1.26$$

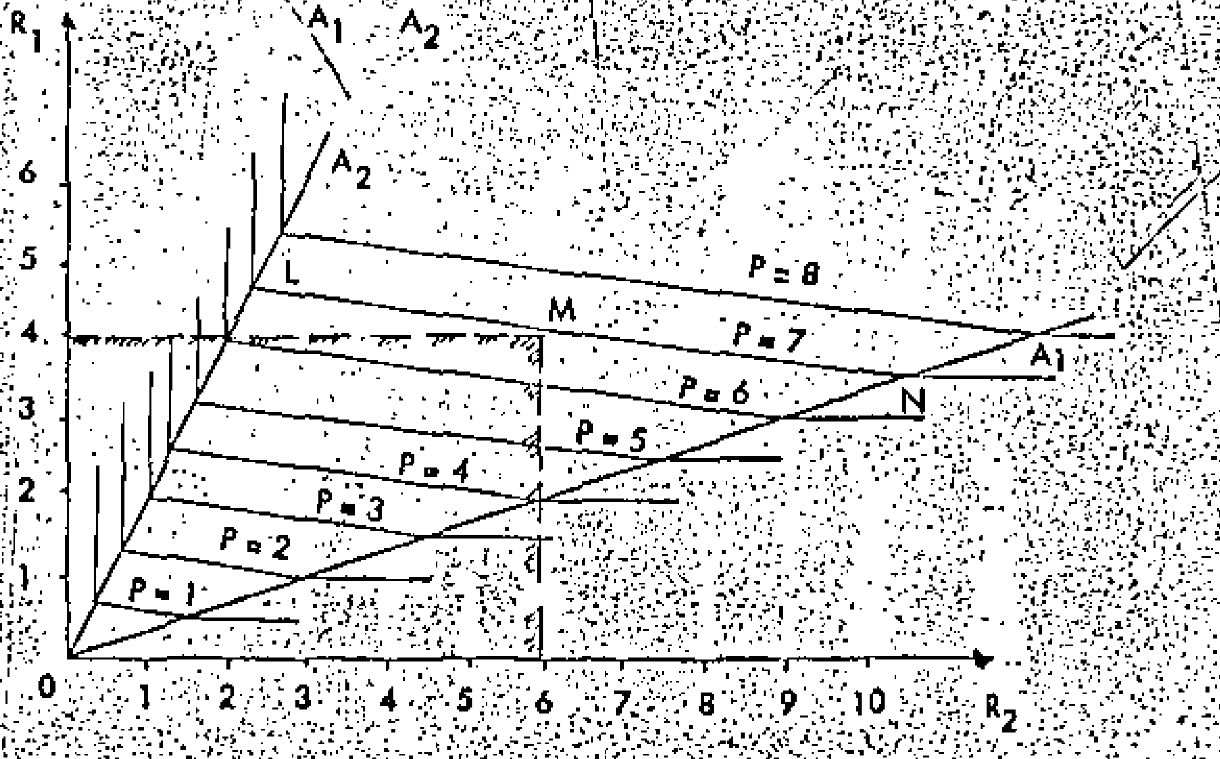
Usando los diferentes teoremas, el problema planteado puede expresarse como una de Programación Lineal:

$$\max\ z = z\,x_1 + 3x_2 \Longleftarrow P$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \Longleftarrow R_1 \qquad z = 7$$

$$\underset{\Uparrow \atop A_1}{3x_1} + \underset{\Uparrow \atop A_2}{x_2} \leq 6 \Longleftarrow R_2 \qquad x_1 = 1.6,\ x_2 = 1.2$$



154. Comparación de los modelos de una industria (caja negra) para Análisis Marginal y para Análisis de Actividades.

Análisis Marginal	Análisis de Actividades
1. Los precios de los productos de la industria son fijos y conocidos	1. Los precios de los productos son fijos y conocidos
2. Los precios de los factores son fijos y conocidos	2. Los precios de los factores son fijos y conocidos
3. El objetivo de la industria es maximizar su ganancia sujeta a las restricciones técnicas impuestas por su función de producción	3. El objetivo es maximizar su ganancia sujeta a las restricciones impuestas por la naturaleza de las actividades y los factores fijos disponibles
4. Dispone de un proceso de producción capaz de transformar un máximo de m factores variables en p productos	4. Dispone de p actividades independientes capaces de combinar un máximo de m factores variables en una unidad de producto, aunque puede fabricar más de un producto
5. Existe una función de producción con primera y segunda derivadas continua (parciales) que relaciona un conjunto de factores independientes con un conjunto de productos independientes	5. Cada actividad está caracterizada por un conjunto de cocientes de las cantidades de factor usadas para lograr una unidad de producto. Estos cocientes son constantes e independientes de la intensidad con que se opere la actividad

6. La función de producción es tal que la cantidad de producto fabricado para uno dado representa la cantidad máxima de tal producto que puede fabricarse a partir de cantidades de factores previamente especificada, cuando los restantes p-1 productos permanecen fijos	6. La intensidad con que usa sus actividades se encuentra restringida por los recursos disponibles. Los factores son perfectamente divisibles, pero tienen una cota superior
7. La naturaleza de la función de producción fué previamente determinada mediante un conjunto de decisiones técnicas	7. La naturaleza de las actividades ha sido predeterminada por un conjunto de decisiones técnicas
8. La función de producción está caracterizada por productos marginales decrecientes para todas las combinaciones factor-producto, una tasa de sustitución técnica decreciente para las combinaciones factor-factor y una tasa de transformación entre productos crecientes para las combinaciones producto-producto	8. Dos o más actividades pueden usarse simultáneamente y el producto logrado es la suma de los productos que se obtendrían de usarlas separadamente
9. Todos los factores y productos son perfectamente divisibles	9. Todos los productos y factores son perfectamente divisibles

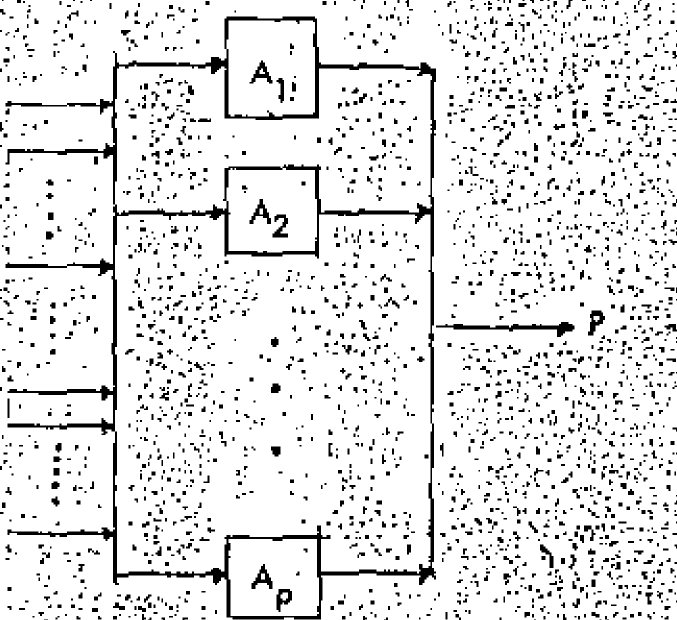
10. Los parámetros que definen la función de ingresos totales, la función de producción y la ecuación de costos totales no varían con el tiempo y no tienen fluctuaciones aleatorias.	10. Ni los precios de los productos y factores ni los cocientes que definen las actividades cambian con el tiempo y no se permiten fluctuaciones aleatorias.

155. Diferencias en la función de producción para un análisis marginal y para uno de actividades (dorfman).

"La actividad es un concepto mas específico que la función de producción en un análisis marginal. De hecho, una función de producción es una familia de actividades que usan los mismos factores y suministran los mismos productos. Si se comparan dos puntos cualesquiera en la superficie de una función de producción representan distintas intensidades de la misma actividad o bien representan actividades diferentes. La función de producción es, entonces, una herramienta para exhibir y comparar actividades diferentes aunque relacionadas. Lo que no presenta adecuadamente es la consecuencia de usar diferentes actividades en paralelo, y estas combinaciones de actividades son especialmente importantes.

156. Industria (caja negra) con p actividades independientes, m factores variables y n fijos y un producto

La notación a emplear es la siguiente:



z_k = nivel de intensidad de la actividad $\underline{k}$.

x_{ik} = cantidad de i-ésimo factor variable requerido por la k-ésima actividad

y_{jk} = cantidad del j-ésimo factor fijo requerido por la k-ésima actividad

Y_j = cantidad disponible del j-ésimo factor fijo

a_{ik} = cantidad i-ésimo factor variable requerido por unidad de actividad $\underline{k}$.

b_{jk} = cantidad del j-ésimo factor variable requerido por unidad de actividad $\underline{k}$.

P_k = precio por unidad de actividad $\underline{k}$.

C_i = precio por unidad de i-ésimo factor variable

K_{jk} = costo de convertir una unidad del j-ésimo factor fijo para ser usado en la actividad $\underline{k}$.

En estas condiciones la función de ganancia resulta.

$$\Pi = \sum_{k=1}^{p} P_k \, z_k - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} C_i \, x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} K_{jk} \, Y_{jk}$$

Como restricciones se tienen:

$$x_{ik} = a_{ik} \; z_k \qquad i = 1, \ldots, m; \; k = 1, \ldots, p$$

$$y_{jk} = b_{jk} \, z_k \qquad j = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, p$$

$$\sum_{k=1}^{p} y_{jk} \leq Y_j \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Es claro que este problema puede resolverse por alguno de los métodos de la Programación Lineal, sin embargo, lo que aquí interesa es interpretarlo económicamente; para ello se emplearán nuevamente las condiciones de Kuhn-Tucker.

El Lagrangiano resulta:

$$L = \Pi + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (Y_j - \sum_{k=1}^{p} y_{jk}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \nu_{ik} (x_{ik} - a_{ik} z_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \omega_{jk}$$

$$(y_{jk} - b_{jk} z_k).$$

en donde μ_j, ν_{ik}, ω_{jk} son los multiplicadores de Lagrange.

Las condiciones de Kuhn-Tucker resultan:

a) $P_k \leq \sum \nu_{ik} a_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \omega_{jk} b_{jk}$, $k = 1, \ldots, p$

b) $-C_i \leq -\nu_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, p$

c) $\omega_{jk} - K_{jk} \leq \mu_j$, $j = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, p$

d) $\sum_{k=1}^{p} P_k z_k^o - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} C_i x_{ik}^o - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} K_{jp} y_{jk}^o = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \mu_j b_{jk} z_k^o$

e) $z_k^o \geq 0 \quad , k = 1, \ldots, p$

f) $x_{ik}^o \geq 0 \quad , i = 1, \ldots, m ; k = 1, \ldots, p$

g) $y_{jk}^o \geq 0 \quad , j = 1, \ldots, n ; k = 1, \ldots, p$

h) $\sum_{k=1}^{p} y_{jk} \leq Y_j \quad , j = 1, \ldots, n$

i) $x_{ik} \geq a_{ik} \; z_k \quad , i = 1, \ldots, m ; k = 1, \ldots, p$

j) $y_{jk} \geq b_{jk} \; z_k \quad , j = 1, \ldots, n ; k = 1, \ldots, p$

k) $\sum_{j=1}^{n} \mu_j \; Y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} y_{jk} \mu_j$

l) $\mu_j \geq 0, \nu_{ik} \geq 0, \omega_{jk} \geq 0, i = 1, \ldots, m ; j = 1, \ldots, n ; k = 1, \ldots, p$

Los multiplicadores son los precios marginales de los factores de la producción, esto es, los precios que la industria pagaría por una unidad marginal de factor. Así μ_j corresponde a un factor fijo, ν_{ik} corresponde a un factor variable i usado en la actividad k; ω_{jk} corresponde a un factor fijo j usado en la actividad k.

Después de un exámen detallado como el que se efectuó en el número (144) se logran las siguientes reglas, las que garantizan la operación óptima.

a) El precio de cada actividad debe ser menor o igual que la suma de los precios marginales de los factores fijos y variables usados en la operación para intensidad unitaria de la actividad. En caso contrario la actividad no se opera.

b) Para cada combinación factor variable-actividad el precio unitario del factor variable dado deberá ser mayor o igual al precio marginal del factor variable con relación a la actividad.

c) El costo de convertir una unidad de un factor fijo dado para usarlo en una actividad dada debe ser mayor o igual que el precio marginal neto del factor en la actividad.

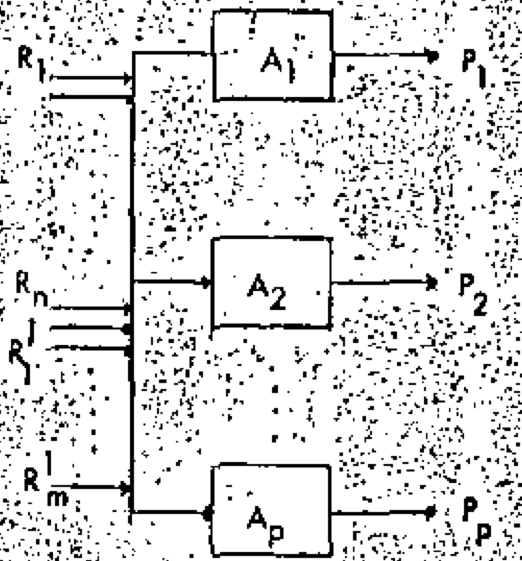
d) La ganancia total después de pagar por los factores fijos debe ser nula.

e) El valor total marginal de los recursos fijos disponibles debe ser igual al valor marginal de los recursos fijos usados en la operación.

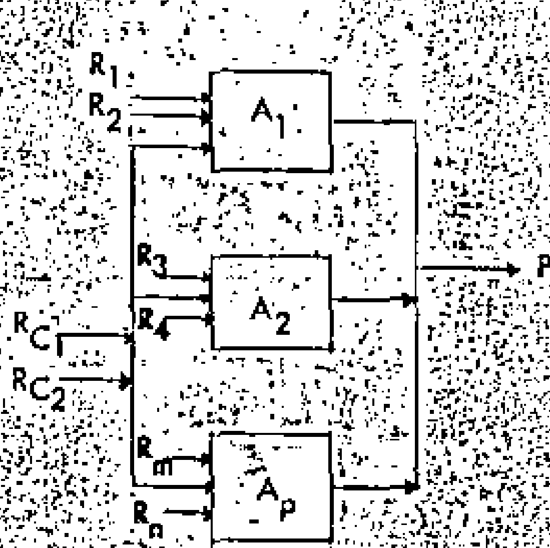
157. Observaciones

a) En el número anterior se ha mencionado precio de la actividad en vez de precio del producto. Se supondrá que el precio de la actividad en el mercado competitivo es proporcional al precio del producto.

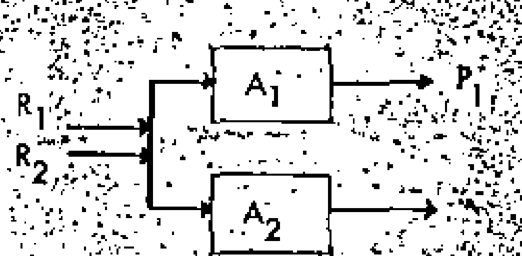
b) La formulación anterior se ha hecho considerando que todas las actividades suministran el mismo producto. Sin embargo, la formulación es análoga cuando se supone que cada actividad proporciona un producto diferente. Las conclusiones son también análogas.



c) Cuando se considera que cada actividad tiene factores exclusivos (variables o fijos) así como algunos que les son comunes, la formulación y las conclusiones son idénticas. Sin embargo, cuando se trata de resolver un problema numérico particular y visualizar el comportamiento general, surge como la herramienta ideal el método de descomposición de Dantzig-Wolfe.



d) En lo anterior se ha considerado que el ámbito del sistema es un mercado perfectamente competitivo y los precios fueron considerados como constantes. Si ahora se situa en un ámbito monopolista los precios varían con la cantidad producida y el problema deja de ser lineal aunque siguen siendo válidos los axiomas de la aditividad, la proporcionalidad y el postulado de la eficiencia económica. No es ya posi-



ble resolverlo por Programación Lineal. Pero dado que las condiciones del ámbito se reflejan únicamente en la función objetivo, es posible acudir al método de Wolfe. Se ilustrará con un ejemplo al que corresponde el diagrama de la figura.

Los precios de los productos P_1 y P_2 varían con las intensidades de las actividades x_1 y x_2, de manera que $\Pi_1 = (5 - 0.1\, x_1)$, $\Pi_2 = (8 - 0.3\, x_2)$.

El problema resulta:

$$\max\ z = (5 - 0.1\, x_1)\, x_1 + (8 - 0.3\, x_2)\, x_2$$

s.a.

$$2 x_1 + x_2 \leq 50$$

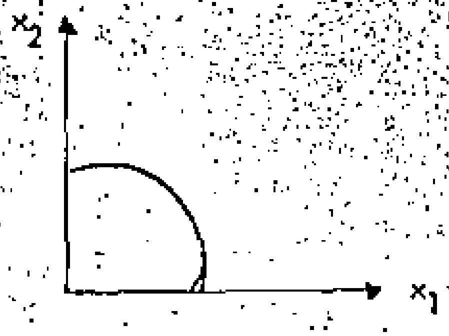
$$x_1 + 3 x_2 \leq 30$$

$$x_1 ,\ x_2 \geq 0.$$

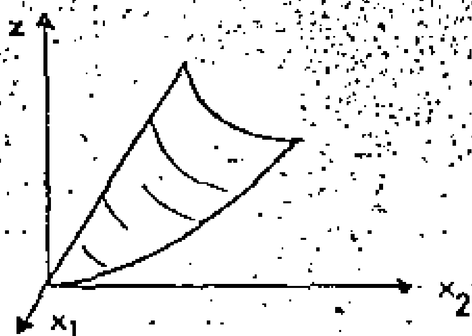
158. Recuperaciones crecientes y la Programación Entera

En toda la teoría marginal estudiada se ha considerado que es válida la ley de las recuperaciones o rendimientos decrecientes. En el caso que esto no ocurra la Programación Entera suministra un camino para resolver el problema.

Como ilustración se muestra una isocuanta de una función de producción para la que no es válida la ley de los rendimientos decrecientes.



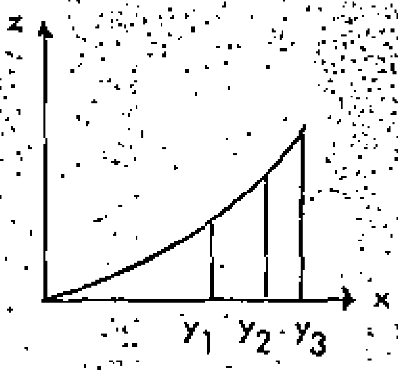
Claramente la isocuanta tiene una curvatura "errónea" y la función de producción en vez de ser cóncava es convexa y los métodos tanto del cálculo como de la Programación Matemática no se dé utilidad en este caso.



Por su parte Markowitz y Manne han sugerido un método para resolver este problema. Básicamente consiste en reformular el problema como uno de Programación Entera. La función objetivo se aproxima mediante una poligonal introduciendo variables enteras artificiales. Resultando así un problema de maximizar una función lineal sobre una región convexa, lo cual garantiza que el óptimo local es también global.

Sea $z = (f(x)$ para $0 \leq x \leq y_3$ con

$$\frac{dz}{dx} \geq 0, \; d^2 x/dx^2 > 0$$



La curva se aproxima mediante segmentos de recta, con pendientes $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$, entonces

$$z = \overline{S}_1 , x_1 + \overline{S}_2 x_2 + \overline{S}_3 x_3$$

con las siguientes restricciones

$$\delta_1 > (1/y)\ x_1$$

$$\delta_2 \geq \left[1/(y_2 - y_1)\right]\ x_2$$

$$\delta_3 \geq \left[1/(y_3 - y_2)\right]\ x_3$$

$$\delta_i = 0\ 6\ 1$$

Evidentemente esta técnica implica que la función sea separable, esto es:

$z = f(x_1 , x_2) = g(x_1) + h(x_2)$.

Uso del Análisis de Actividades por el Análisis de Sistemas: Análisis de sensibilidad. (De Neufville).

159. Introducción

Los métodos anteriores permiten llevar a cabo una asignación óptima precisa de los recursos, sin embargo, ésto implica un conocimiento perfecto de los datos, pero una decisión de asignación de recursos es un plan para usarlos en un futuro y bajo condiciones que no pueden ser predecidas con precisión. De ahí que cualquier modelo determinista que involucre precios futuros de los recursos requisitos en los productos, etc... será sólo una estimación puntual del ámbito futuro en el que se debe situar al sistema.

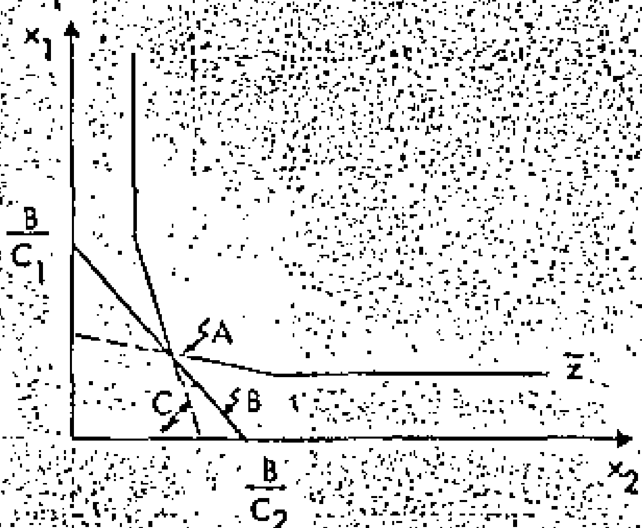
Se hace, entonces, necesario que cuando se utilice una técnica determinista, como el Análisis de Actividades, desarrollar un plan de asignación de recursos que en alguna forma tome en cuenta la imprecisión de la información, un plan para trabajar con la incertidumbre colateralmente al proceso de optimización. El analista de sistemas debe seleccionar de entre planes óptimos sobre un muy estrecho conjunto de condiciones y otros planes subóptimos pero sobre un conjunto de condiciones mucho más amplio. Para ello el analista necesita predecir el rango de condiciones sobre las cuales un plan específico es óptimo y comparar este rango con las que el, racionalmente, piensa que tienen grandes posibilidades de ocurrir. Para ello hará uso del Análisis de Sensibilidad.

El objeto del Análisis de Sensibilidad es encontrar rangos (intervalos) en los que el costo de los recursos, su disponibilidad y la tecnología pueden variar sin alterar el conjunto de variables de decisión encontrado como óptimo.

160. <u>Análisis de sensibilidad en los costos</u>

Este tipo de análisis se ocupa de identificar al conjunto de precios de los recursos para los que la misma asignación es óptima. De hecho, la asignación óptima puede ser la misma para diferentes conjuntos de precios. Al preparar sus recomendaciones para el ejecutivo el analista debe darse cuenta de que los precios de los recursos no pueden ser conocidos con precisión y, por tanto, acompañar sus recomendaciones con una indicación sobre como deberá cambiarse el diseño óptimo al variar los precios.

Tratando de clarificar los conceptos anteriores, se usará un mapa de isocuantas, en donde se singulariza una de ellas que corresponde a una producción $\bar{z}$, así como una recta de costos que corresponde a un presupuesto B. Como es sabido la pendiente de la tangente a la isocuanta es la tasa de sustitución técnica. <u>La pendiente de la recta del presupuesto es la tasa según la cual un recurso puede ser sustituído por otro manteniendo el mismo nivel de egresos para la adquisición de recursos.</u>



La pendiente de la recta presupuestal es el cociente, con signo contrario, de los precios de los recursos:

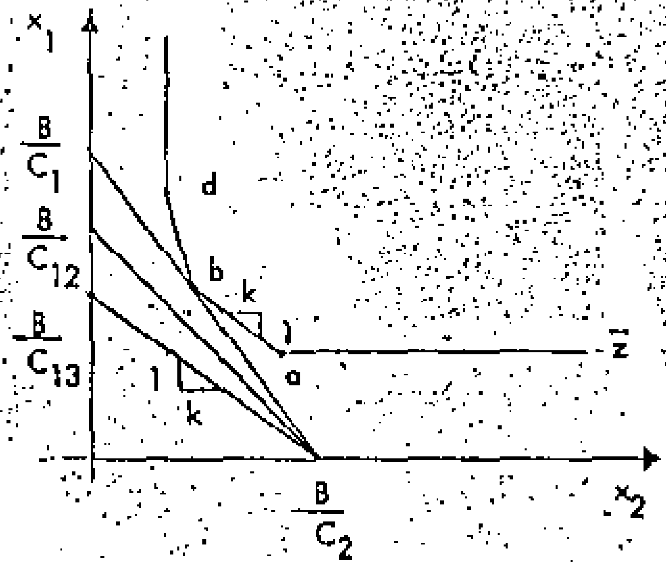
$$-\frac{B/C_1}{B/C_2} = -\frac{C_2}{C_1}$$

La condición de optimalidad para isocuanta poligonal es la misma que para la curva contínua, esto es:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left|\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_2}}\right| & < -\dfrac{C_2}{C_1} < & \left|\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_2}}\right| \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x_1 \text{ disminuye} & & x_1 \text{ aumenta} \\ x_2 \text{ aumenta} & & x_2 \text{ disminuye.} \end{array}$$

Esta relación entre productividades marginales (productos marginales) y costos relativos se ilustra en la figura.

Se considerará en primer lugar la sensibilidad de las proporciones óptimas de recursos cuando el precio de un recurso cambia. Específicamente se supondrá que el precio de x_1 se incrementa a $C_{1_2} > C_1$, de manera que si el presupuesto permanece constante la cantidad máxima comprada de x_1 baja de B/C_1 a B/C_{12} y la pendiente de la recta del presupuesto cambia, en valor absoluto, de C_2/C_1 a C_2/C_{12}.



Es claro que el precio de x_1 puede incrementarse a C_{13} en donde $C_2/C_{13} = 1/K$ que es la pendiente del segmento adyacente al punto óptimo sin que cambie la combinación óptima de recursos. Pero cualquier incremento mayor en el precio ocasionará que el punto óptimo cambie de "b" a "a". El mismo razonamiento con el precio de x_2 conduciría a cambiar el punto óptimo de "b" a "d". Luego el rango para el que es óptima la combinación de recursos representada por "b" puede representarse por

$$\left| m_{ab} \right| < \left| \frac{C_2}{C_1} \right| < \left| m_{bd} \right|$$

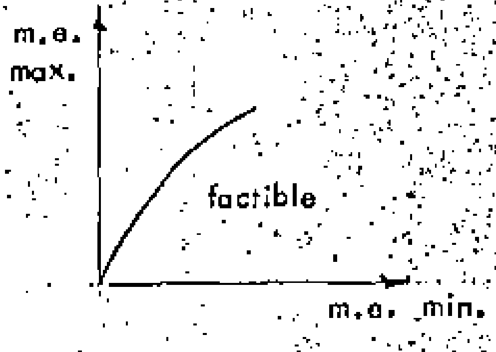
161. Análisis de sensibilidad en las especificaciones

Las medidas de efectividad frecuentemente pueden tratarse como especificaciones o restricciones. Típicamente se optimiza una medida primaria y las secundarias se tratan como especificaciones de calidad o comportamiento, las que se introducen en el modelo mediante restricciones. Por ejemplo, en un sistema de transporte, la medida principal de efectividad que se introduce como objetivo conduce a maximizar el número de personas al que dá servicio, sujeto a especificaciones de que la velocidad sea por lo menos de 60 km/hora y que el pasaje no sea superior a \$ 1.50 . Con frecuencia se desea conocer como afectan estas especificaciones al objetivo primario para la cual se hará un estudio de sensibilidad de las restricciones ya sea de los términos independientes o de los coeficientes de las variables.

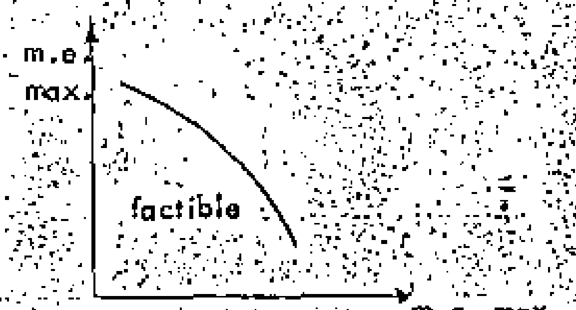
Esta relación entre la medida de efectividad principal y las secundarias se puede medir mediante el precio sombra, para ello se harán los siguientes razonamientos. En general, las regiones de factibilidad para las medidas de efectividad son convexas cuando las funciones de producción son convexas, (rige la ley de las recuperaciones o rendimientos decrecientes), independientemente de que se maximicen o minimicen.

Cuando la región de factividad es convexa la pendiente de la frontera describe la relación entre la función objetivo y las restricciones. De hecho esta pendiente es la tasa de cambio en la función objetivo por unidad de cambio en la restricción:

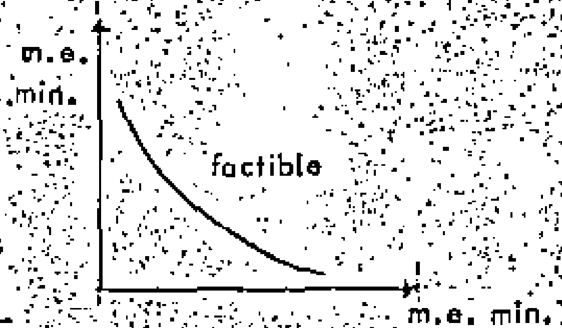
$$\text{pendiente} = \frac{\partial z_1}{\partial b_i} = w_i = \text{precio sombra por unidad de } b_i$$



La solución del dual proporciona estas pendientes, tasas de cambio de la función objetivo para cada restricción.



Es por tanto posible medir el impacto de las especificaciones o medidas de efectividad secundarias en el diseño óptimo. Estas técnicas del Análisis de Sensibilidad facilitan la selección explícita entre distintas especificaciones.



Conociendo la relación técnica entre ellas pueden incrementarse las mejoras en el diseño de los sistemas totales mediante las estrategias suministradas por el *Análisis Marginal*.

162 Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo.

Consideremos nuevamente el problema :

$$\left.\begin{array}{c} \max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{sujeto a :} \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ - - - - - - - - - - \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \end{array}\right\} (5.1.1)$$

La solución de este problema es $\bar{x}^* \left\{ x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \right\}$

Se desea conocer el rango de variación de $c_j (j=1,\dots,n)$ que no altera a $\bar{x}^*$. Esto es, responder a la pregunta ¿que tanto se pueden variar los coeficientes de la función objetivo sin alterar la respuesta al problema inicialmente planteado? Se dirá que el intervalo $\phi'_j < c_j < \phi_j (j=1,\dots, n)$ es el rango de insensibilidad del coeficiente c_j y mientras éste se identifique con sus puntos interiores no se altera la respuesta $\bar{x}^*$.

La determinación de $\phi'_j < c_j < \phi_j$ es por demás simple, basta hacer depender c_j de un parámetro t, calcular $(z_j - c_j)$ óptimo a partir del coeficiente c_j redefinido, identificar puntos que conducen a una solución diferente a $\bar{x}^*$ mediante los nuevos (z_j-c_j), así como aquellos puntos, en que por variar t, c_j coincide con los restantes coeficientes de la función objetivo o lo anulan. Conocidos estos puntos críticos se analiza el comportamiento (en signo) de los nuevos (z_j-c_j) al variar t en $(-\infty, \infty)$. El intervalo (t'_j, t_j) es aquel cuyas fronteras son puntos críticos, en el que todos los nuevos (z_j-c_j) adquieren el signo positivo, ya que para todos sus puntos inferiores la solución $\bar{x}^*$ continúa siendo óptima. Mediante el nuevo coeficiente de x_j y a partir de (t'_j, t_j) se define el rango de sensibilidad (ϕ'_j, ϕ_j) para c_j.

Los conceptos anteriores se ilustran en el ejemplo que a continuación se presenta.

$$\left.\begin{array}{c} \max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a :} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 18 \\ x_j \geq 0 \end{array}\right\} \quad (5.1.2)$$

y definir el rango de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo.

Como primer paso se obtendrá el óptimo mediante el simplex.

θ	v.b.	$\bar{b}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
	x_4	12	1	2*	3
	x_5	18	3	1	1
	z_j-c_j		-2	-3	-1
	v.b.	$\bar{b}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$
12	x_2	6	0.5	0.5	1.5
4.8	x_5	12	2.5*	-0.5	-0.5
	z_j-c_j	18	-0.5	1.5	3.5
	v.b.	$\bar{b}$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$
	x_2	3.6	-0.2	0.6	1.6
	x_1	4.8	0.4	-0.2	-0.2
	z_j-c_j	20.4	0.2	1.4	3.4

$x_1 = 4.8, \; x_2 = 3.6, \; z = 20.4$

A continuación se estudia insensibilidad de c_1. El nuevo coeficiente, haciendolo depender del parámetro t, será: $c_1 = 2(1+t)$. El nuevo renglón de $(z_j - c_j)$ resulta:

para x_5, $3(-0.2) + 2(1+t)\,0.4 - 0 = 0.2 + 0.8\,t$

" x_4, $3(0.6) + 2(1+t)(-0.2) - 0 = 1.4 - 0.4\,t$

" x_3, $3(1.6) + 2(1+t)(-0.2) - 1 = 3.4 - 0.4\,t$

por lo que se refiere a los valores críticos t, estos son:

a) Los que son frontera entre soluciones

$$0.2 + 0.8\,t = 0 \; ; \; t = -\frac{1}{4}$$

$$1.4 - 0.4\,t = 0 \; ; \; t = \frac{7}{2}$$

$$3.4 - 0.4\,t = 0 \; ; \; t = \frac{17}{2}$$

b) Los que hacen coincidir a c_1 con los restantes coeficientes de la función objetivo.

$$2(1 + t) = 3 \; ; \; t = \frac{1}{2}$$

$$2(1 + t) = 1 \; ; \; t = -\frac{1}{2}$$

c) El que anula el coeficiente

$$2(1 + t) = 0 \; ; \; t = -1$$

Finalmente se estudia el comportamiento de los nuevos $(z_j - c_j)$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$

t	$-\infty$ $\;$ -1	$-1/2$	$-1/4$	0	$1/2$	$7/2$	$17/2$	∞
$0.2 + 0.8\,t$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$1.4 - 0.4\,t$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$3.4 - 0.4\,t$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$

El intervalo en el que los nuevos ($z_j - c_j$) se conservaron simultáneamente positivos es $-\frac{1}{4} < t < \frac{7}{2}$. Luego el rango de sensibilidad resulta:

$$1.5 < c_1 < 9$$

Razonando de la misma manera se obtienen para c_2 y c_3 las siguientes tablas y rangos respectivamente.

t	$-\infty$ — -1	-1 — $-7/9$	$-7/9$ — $-17/24$	$-17/24$ — $-2/3$	$-2/3$ — $-1/3$	$-1/3$ — 0	0 — $1/3$	$1/3$ — ∞
$0.2 - 0.6t$	+	+	+	+	+	+	+	-
$1.4 + 1.8t$	-	-	+	+	+	+	+	+
$3.4 + 4.8t$	-	-	-	+	+	+	+	+

$$-\frac{17}{24} < t < \frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{3} < c_2 < 4$$

t	$-\infty$ — -1	-1 — 0	0 — 1	1 — 2	2 — 3.4	3.4 — ∞
$3.4 - t$	+	+	+	+	+	-

$$-\infty < t < 3.4$$

$$-\infty < c_3 < 4.4$$

Luego, se obtendrá la misma respuesta $x_1 = 4.8$, $x_2 = 3.6$, cuando:

$$1.5 < c_1 < 9$$

$$7/3 < c_2 < 4$$

$$-\infty < c_3 < 4.4$$

163. Sensibilidad de los términos independientes de las restricciones.

(sensibilidad de los precios sombra).

El problema relativo a definir el rango de insensibilidad de los términos independientes de las restricciones, se reduce al problema anterior sin mayor esfuerzo adicional recordando que en el dual los términos independientes del primal son precisamente los coeficientes de la función objetivo.

Basta, por tanto, determinar la solución óptima mediante el simplex, plantear el correspondiente dual para dicha etapa y proceder como en (5.1).

Ilustrando estos conceptos, sea el problema (5.1.2)

$$\max \; z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$$
$$x_j \geq 0$$

y se desea conocer el rango de sensibilidad de los términos independientes de las restricciones.

La última etapa (la del óptimo) en la solución fue:

s	v.b.	$\bar{b}$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$
	x_2	3.6	-0.2	0.6	1.6
	x_1	4.8	0.4	-0.2	-0.2
	$z_j - c_j$	20.4	0.2	1.4	3.4

Entonces el dual correspondiente a esta etapa será:

v.b.	b	$\bar{w}_3$	$\bar{w}_4$
w_1	1.4	-0.2	0.6
w_2	0.2	0.6	-0.2
w_5	3.4	0.6	1.6
$Z_j - c_j$	20.4	4.8	3.6

Cabe recordar que están relacionadas, la variable de holgura del primal x_{m+r} con la variable legítima del dual w_r y la variable legítima del primal x_r y la de holgura del dual w_{m+r}.

Puesto que la función objetivo del dual de (5.1.2) es :

$$\min Z = 12\, w_1 + 18\, w_2$$

Se tiene que el renglón $Z_j - c_j$ para el rango de sensibilidad de b_1, resulta :

para w_3 : $12(1+t)(-0.2) + 18(0.6) - 0 = 8.4 - 2.4\, t$

" w_4 : $12(1+t)(0.6) + 18(-0.2) - 0 = 3.6 + 7.2\, t$

Los valores críticos son $-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{2}$, luego :

t	-1	-1/2	0	1/2	7/2 ∞
8.4 - 2.4 t	+	+	+	+	-
3.6 + 7.2 t	-	+	+	+	+

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{7}{2}$$

$$6 < b_1 < 54$$

Para el rango de sensibilidad de b_2, el renglón Z_j-c_j resulta para w_3: $12(-0.2) + 18(1+t)(0.6) - 0 = 8.4 + 10.8\ t$

" w_4: $12(0.6) + 18(1+t)(-0.2) - 0 = 3.6 - 3.6\ t$

Los valores críticos son: $-1, -\frac{7}{9}, -\frac{1}{3}, 0, 1$.

t	-1	-7/9	-1/3	0	1 ∞
8.4 + 10.8 t	-	+	+	+	+
3.6 - 3.6 t	+	+	+	+	-

$$-\frac{7}{9} < t < 1$$

$$4 < b_2 < 36$$

Luego, se hará la misma selección de vectores que constituyen la base cuando $6 < b_1 < 54$; $4 < b_2 < 36$.

5.4.- Sensibilidad de los coeficientes de las restricciones.

Consideremos el mismo problema (5.1.2) que se ha utilizado en la ilustración de los dos puntos anteriores. Para este problema se obtuvo que en el óptimo la base está constituida por los vectores $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$. Se desea definir el rango de insensibilidad para el coeficiente de x_2 en la primera restricción (a_{12}).

Puesto que se ha encontrado que en el óptimo la base está constituida por x_1 y x_2, la base, consecuentemente, con que se inicia el estudio de sensibilidad estará formada por los coeficientes de dichos vectores tanto en la función objetivo como en las restricciones

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

el último renglón corresponde a los coeficientes de $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{z}$ en la función objetivo.

Ahora se plantea definir x para la matriz $\bar{B}_1$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

nótese que $\bar{B}$ y $\bar{B}_1$ difieren únicamente en el coeficiente para el que se esta realizando el estudio de sensibilidad.

El primer paso es lograr la inversa de $\bar{B}_1$, para ello se usar la matriz $\bar{A} = \bar{B}_1 \bar{B}^{-1}$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}x) & (\frac{2}{5}-\frac{1}{5}x) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo $t = \frac{5}{3x-1}$; $x = \frac{t+5}{3t}$; $(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x) = \frac{t-1}{3t}$

luego :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{t-1}{3t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^{-1} = \begin{bmatrix} t & \frac{1-t}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que $\bar{A} = \bar{B}_1 \bar{B}^{-1} \longrightarrow \bar{B}_1^{-1} = \bar{B}^{-1} \bar{A}^{-1}$,

$$\bar{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & \frac{1-t}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t}{5} & \frac{t+5}{15} & 0 \\ \frac{3}{5}t & \frac{t}{5} & 0 \\ \frac{7}{5}t & \frac{10-7t}{15} & 1 \end{bmatrix}$$

Para definir el rango de insensibilidad de a_{12} se hace uso de dos condiciones, la primera que garantice que los z_j-c_j de las variables no básicas se conserven no negativos, la segunda mantiene no negativos a los términos independientes de las restricciones.

Con relación a la primera condición $z_j-c_j \geq 0$ se tiene:

$$z_3-c_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{5}t & \frac{10-7t}{15} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{21}{5}t + \frac{10-7t}{15} - 1 \geq 0; \quad t \geq \frac{5}{56}$$

$$z_4-c_4 = \begin{bmatrix} \frac{7}{5}t & \frac{10-7t}{15} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{7}{5}t \geq 0 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$z_5-c_5 = \begin{bmatrix} \frac{7}{5}t & \frac{10-7t}{15} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{10-7t}{15} \geq 0 \quad ; \quad \frac{10}{7} \geq t$$

Por lo que se refiere a la segunda condición, $b_i \geq 0$ se tiene

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t}{5} & \frac{t+5}{15} & 0 \\ \frac{3}{5}t & -\frac{t}{5} & 0 \\ \frac{7}{5}t & \frac{10-7t}{15} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12t}{5} + \frac{18t+90}{15} \\ \frac{36}{5}t - \frac{18t}{5} \\ \frac{84}{5}t + \frac{180-126t}{15} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} ; 5 \geq \\ ; t \geq \\ \end{matrix}$$

Para que simultáneamente se cumplan todas las condicionantes para el parámetro t se requiere:

$$\frac{5}{56} < t < \frac{10}{7}$$

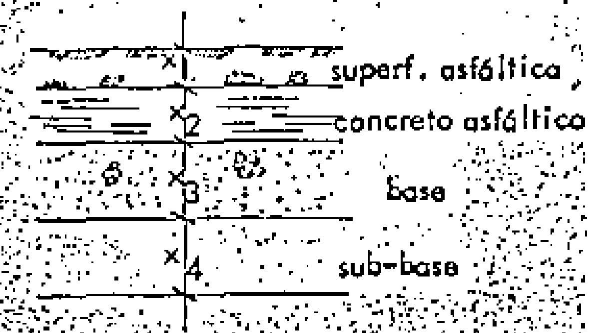
Por consiguiente:

$$1.5 < a < 19$$

Luego, el rango de insensibilidad de a_{12} es (1.5, 19). El nú-

165. Aplicación: diseño de una carretera

Determinar el diseño de pavimento más económico y explorar la sensibilidad para cambios en las especificaciones y en los costos.



Las especificaciones del "Asphalf Institute" para un camino de 1,000 vehículos diarios en ambas direcciones señalan:

$$x_1 \geq 1.5" \quad \text{(especificación 1)}$$

$$x_1 + x_2 \geq 4.5" \quad \text{(especificación 2)}$$

$$x_1 + x_2 + 0.5\,x_3 \geq 6.0" \quad \text{(especificación 3)}$$

$$x_1 + x_2 + 0.5\,x_3 + 0.37\,x_4 \geq 8.5" \quad \text{(especificación 4)}$$

por otra parte los costos unitarios de las diferentes capas permiten formular la siguiente función objetivo:

$$z = 0.5\,x_1 + 0.4\,x_2 + 0.18\,x_3 + 0.16\,x_4$$

El problema es de Programación Lineal y empleando el Dual-Simplex se logran los siguientes resultados como solución óptima:

$$x_1 = 1.5",\ x_2 = 3.0",\ x_3 = 8.0",\ x_4 = 0,\ z = 3.39$$

las restricciones 1, 2 y 4 son obligatorias bajo esta solución.

La sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo es como sigue:

$$0.36 \leq (C_1 = 0.50) \leq \infty$$

$$0.36 \leq (C_2 = 0.40) \leq 0.50$$

$$0 \leq (C_3 = 0.18) \leq 0.20$$

$$13.3 \leq (C_4 = 0.16) \leq \infty$$

Por lo que se refiere a las especificaciones se tiene:

1) Si se disminuye en una pulgada la cuarta restricción esto es 7.5", z disminuye a 3.03. Luego disminuyendo las características de la sub-base se logra un ahorro.

2) Si se desea saber en cuanto costaría aumentar una pulgada de la capa de concreto asfáltico se analizaría la segunda restricción obteniendo un incremento de 0.04 \$/yarda^2.

166. Ejercicio

Una planta mezcladora de concreto usada en la construcción de una presa usa una mezcla de 30% de arena y 70% de grava (por unidad de peso). Existen depósitos naturales en cinco lugares cercanos a la presa, cada uno con composiciones y costos de transportación diferentes según se muestra en la tabla.

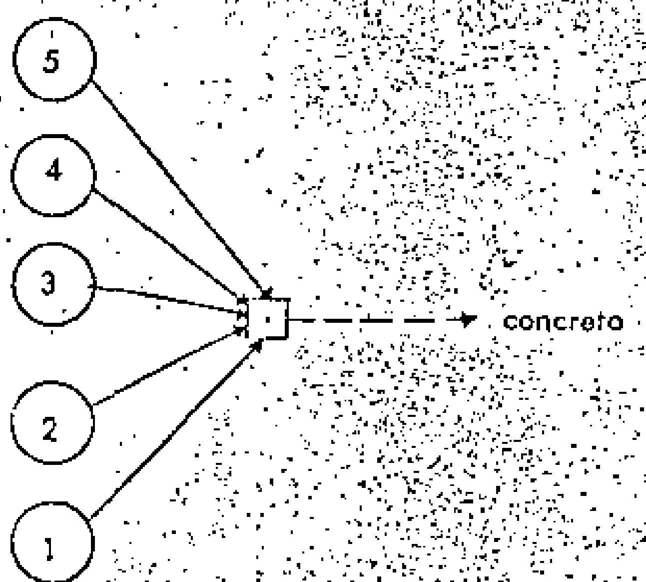
	1	2	3	4	5
Arena	40%	20%	50%	80%	70%
Grava	60%	80%	50%	20%	30%
Costo/ton	$150	$180	$100	$125	$200

a) ¿Cuál es la solución óptima?

b) El cambio en la composición de los recursos influye sobre la solución óptima, ¿Cuál de entre la grava o la arena influye más?

c) Suponiendo que se cambiara la dosificación de la mezcla ¿Cambiaría la solución óptima? ¿Entre que límites?

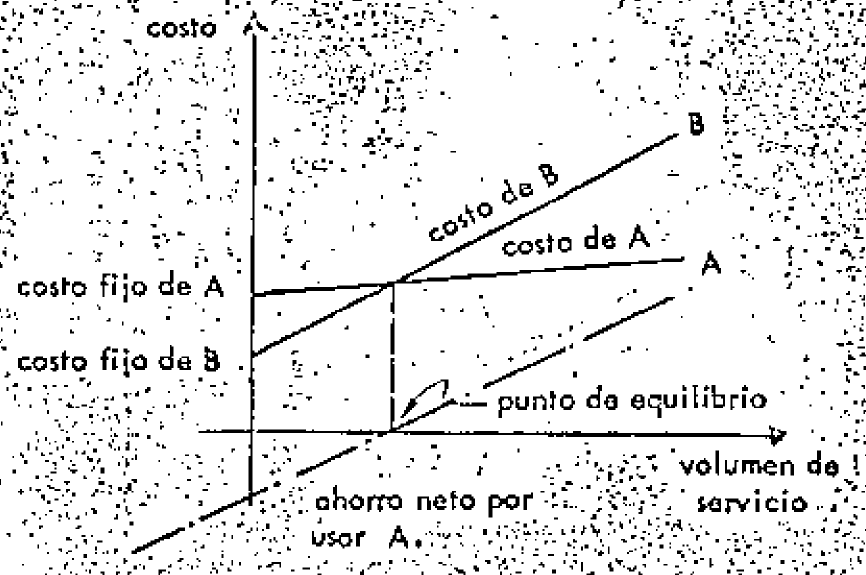
d) ¿Cuál de los costos de transportación tiene mayor influencia sobre la solución óptima?



167. Uso de la técnica del punto de equilibrio (punto de "salir a mano") en la comparación entre sistemas

Los estudios de punto de equilibrio tienen como uno de sus objetos determinar las consecuencias de seleccionar alternativas diferentes a la óptima. Es especialmente importante en el diseño de un sistema puesto que la carga de trabajo que se exige al sistema o volumen de servicio que se espera brindará, es el parámetro de diseño más difícil de estimar con precisión. La técnica del punto de equilibrio identifica los volumenes de servicio más alla de los cuales el sistema no experimentará ninguna pérdida. La técnica del punto de equilibrio implica en su aplicación una comparación entre dos sistemas.

Es interesante cuando algunos costos o beneficios de un sistema son independientes del volumen de servicio, mientras que otros no lo son.

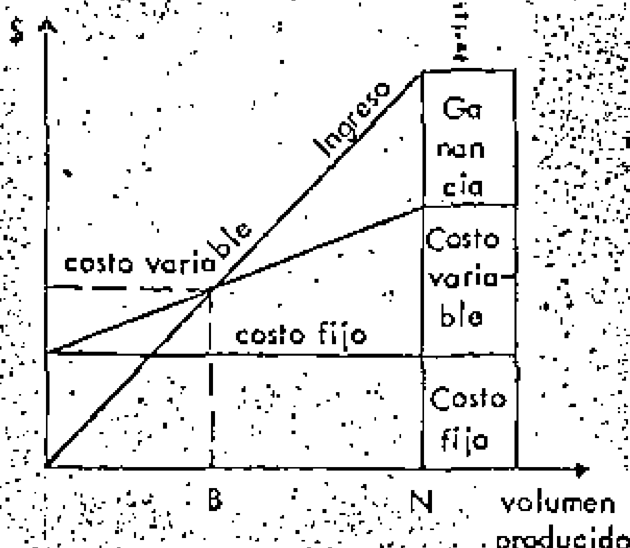


Considérense por ejemplo dos alternativas la "A" y la "B".

La "A" tiene un mayor costo fijo pero menor costo de operación que el "B".

Para todos los volumenes mayores que el que corresponde al punto de equilibrio el costo total de usar el sistema "A" es menor que el resultante de usar el sistema "B", obteniéndose así un ahorro neto al emplear "A".

El punto de equilibrio separará el intervalo de volúmenes posibles en dos partes, una en donde la alternativa "A" es la apropiada y otra en donde no lo es. Este tipo de análisis puede usarse para determinar el valor de un sistema así como sus méritos relativos. Una industria, al evaluar la posible creación de un nuevo sistema, desea conocer cuando el valor de lo que va a producir supera al valor de lo del antiguo.



Las propiedades de un diagrama de punto de equilibrio aparecen en la figura. Para relaciones lineales los costos variables son directamente proporcionales a los volumenes producidos. Como es sabido el costo total "C" es la suma de los costos fijos y variables. Los ingresos R se suponen directamente proporcionales a los volúmenes producidos.

El punto de "salir a mano" es B y lo define la intersección de las rectas de costo total e ingresos. Para volumenes producidos antes de llegar a B existe pérdida. Para los producidos después existe ganancia.

Es posible definir las siguientes relaciones:

$$R = nP$$

$$C = nV + F$$

$$Z = R - C = n(P - V) - F$$

para

$$Z = 0 = n(P - V) - F$$

$$n = B = \frac{F}{P - V}$$

en donde:

R = ingreso total

C = costo total

Z = ganancia bruta

P = precio del producto

n = número de unidades producidas (volumen producido)

B = número de unidades producidas para "salir a mano".

V = costo variable.

F = costo fijo.

Precauciones al usar la técnica del punto de equilibrio.

a) Este tipo de estudios tiende a sobre simplificar el ámbito de las decisiones, lo que es un defecto en problemas en donde se requiere tomar medidas detalladas.

b) No orienta sobre como llevar a cabo las decisiones a que dá lugar.

c) La utilidad está en razón directa de la precisión de los datos en que se basa. Es indispensable mantener un proceso contable preciso y actual.

d) Implica decisiones a muy corto plazo ya que no toma en cuenta los riesgos e incertidumbres propios del futuro.

168. Ejercicio

Una industria fabrica los productos A, B y C, cuyos volumenes anuales son 10,000;7000 y 5,000 respectivamente. La venta del producto A constituye el 30% de los ingresos de la industria, con una contribución del 40% en su precio de venta. El producto B tiene un costo fijo de $ 35,000 con una contribución del 50% al precio. Los costos fijos del producto C son $ 20,000 y sus ventas constituyen el 30% de los ingresos, con una contribución al precio del 10%. Los costos totales de la industria son de $ 80,000 y las ventas totales de $ 250,000.

a) ¿Cuál es el ingreso de la industria para el punto de equilibrio?

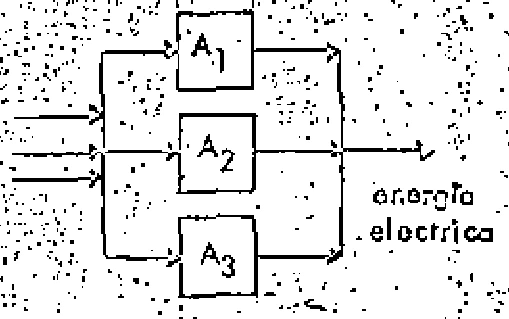
b) ¿Cuál es la ganancia en cada uno de los productos?

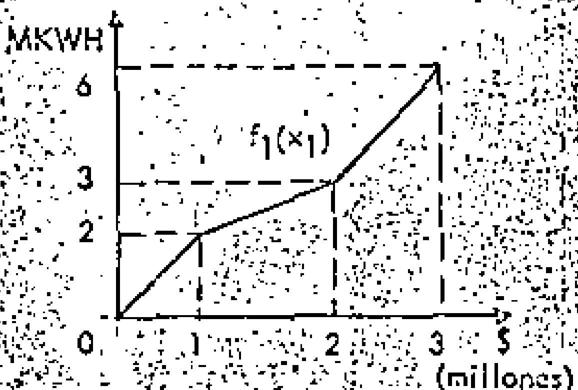
ANALISIS OPERACIONAL Y CONTROL POR RETROALIMENTACION

169. Una generalización del Análisis de Actividades

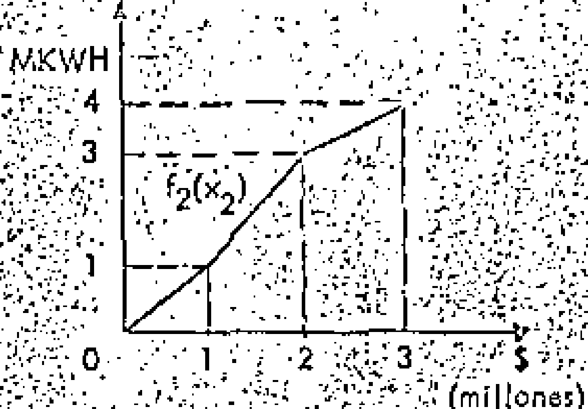
Como se ha visto anteriormente, el Análisis de Actividades se encuentra restringido a trabajar con funciones lineales ya que sólo así cumple con los axiomas que lo fundamentan. Sin embargo, no son muchos los problemas reales que acepten este tipo de idealización. Una primera generalización se encontró al quitar la industria de un ámbito de competencia perfecta y situarla en uno monopolista. Al hacerlo se dió lugar a un problema de Programación Cuadrática. Sin embargo, aún en este caso las limitaciones de concavidad y convexidad constituyen una limitación. Otra generalización la constituyó el empleo de la Programación Entera, cuando no era aplicable la ley de los rendimientos decreciente. La generalización que ahora se estudiará, lograda por el uso de la Programación Dinámica, suprime las condiciones de concavidad o convexidad. Específicamente este método presupone que los cambios en la función objetivo originado por cualquier cambio en alguna variable x_i, es independiente de los valores de las otras variables x_j, $j = i$. Esta hipótesis, sin embargo, limita el uso de esta técnica operacional a sólo situaciones en donde es legítimo y válido regirse por ella.

Para ilustrar estos conceptos considérese el problema sobre simplificado de invertir en la construcción de tres posibles obras (actividades) para la generación de energía eléctrica. El producto que se va a obtener, para cada uno de los sitios, mediante el recurso dinero, está dada por las siguientes gráficas.

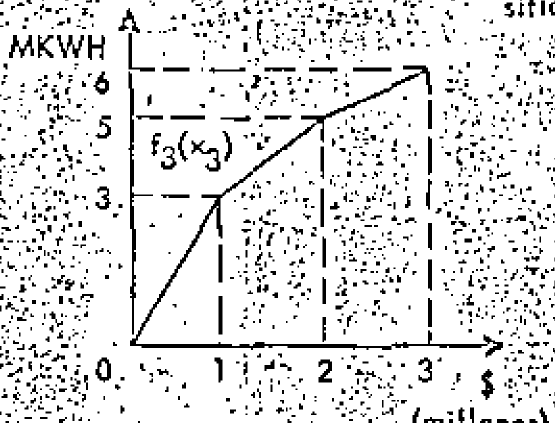




sitio A



sitio B



sitio C

Se desea invertir hasta cinco millones de pesos pero no más de tres en cada sitio.

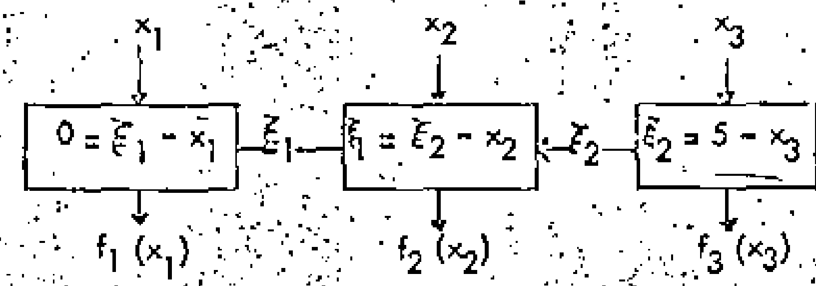
En estas condiciones el problema por resolver es:

$$\max z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$0 \leq x_1,\ x_2,\ x_3 \leq 3 \text{ enteros}$$



Para el sitio A, representando con $\Lambda_1(\xi)$ el rendimiento y con la inversión, se tiene:

$$\Lambda_1(\xi) = \max_{x_1} \left[f_1(x_1) \right]$$

ξ	$\Lambda(\xi)$
0	0
1	2
2	3
3	6

Para el segundo sitio se tiene

$$\Lambda_2(\xi) = \max_{x_2} \underbrace{f_2(x_2) + \Lambda_1(\xi - x_2)}_{\Omega_2}$$

		$\xi = 0$		$\xi = 1$		$\xi = 2$		$\xi = 3$		$\xi = 4$		$\xi = 5$		$\xi = 6$		$\xi = 7$	
x_2	$f_2(x_2)$	Λ_1	Ω_2	Λ_1	Ω_2	Λ_1	Ω_2	Λ_1	Ω_2	Λ_1	Ω_2	Λ_1	Ω_2	Λ_1	Ω_2	Λ_1	Ω_2
0	0	0	0*	2	2*	3	3*	6	6*	0	0	0	0	0	0	6	0
1	1			0	1	2	3*	3	4	6	7*	0	1	0	1	0	
2	3					0	3*	2	5	3	6	6	9*	0	3	0	3
3	4							0	4	2	6	3	7	6	10	0	11*

Tabla de Λ_2

en forma análoga para el sitio "C"

$$\Lambda_3(\xi) = \max_{x_3} \underbrace{\left[f_3(x_3) + \Lambda_2(\xi_3 - x_3) \right]}_{\Omega_3}$$

		$\xi = 0$		$\xi = 1$		$\xi = 2$		$\xi = 3$		$\xi = 4$		$\xi = 5$	
x_3	$f_3(x_3)$	Λ_2	Ω_3	Λ_2	Ω_3	Λ_2	Ω_3	Λ_2	Ω_3	Λ_2	Ω_3	Λ_2	Ω_3
0	0	0	0*	2	2	3	3	6	6	0 7	0 7	9	9
1	3			0	3*	2	5*	3	6	6	9*	0 7	13
2	5					0	5*	2	7*	3	8	6	11*
3	6							0	6	2	8	3	9

Tabla de Λ_3

En resumen:

ξ	$x_1(\xi)$	$\Lambda_1(\xi)$	$x_2(\xi)$	$\Lambda_2(\xi)$	$x_3(\xi)$	$\Lambda_3(\xi)$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	0	2	1	3
2	2	3	0,1,2	3	1,2	5
3	3	6	0	6	2	7
4	0	0	1	7	1	9
5	0	0	2	9	2	11*

Luego, el máximo rendimiento que se puede obtener de los tres sitios es de 11 MKWH.

Se tiene $x_3 = 2$

$$\xi_2 = 5 - 2 = 3 \quad ; \quad x_2(3) = 0 \quad x_2 = 0$$

$$\xi_1 = 5 - 2 - 0 = 3 \quad ; \quad x_1(3) = 3 \quad x_1 = 3$$

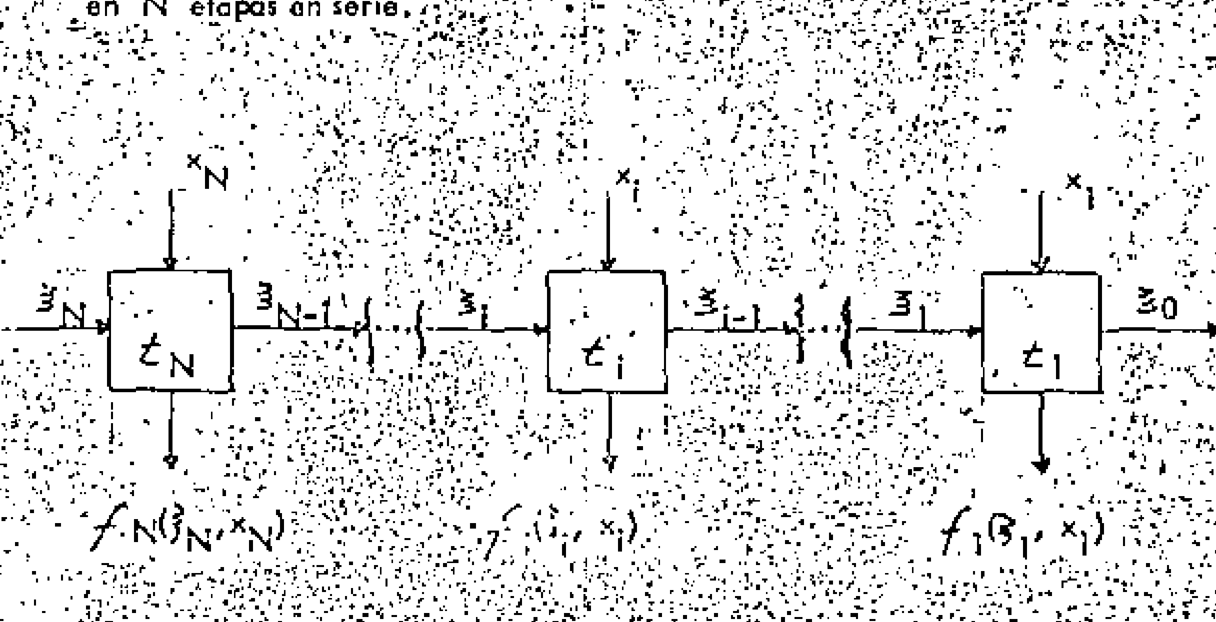
Se invertirán tes millones en el sitio A,

Se invertirán cero millones en el sitio B,

Se invertirán dos millones en el sitio C.

170. Uso del método de la Programación Dinámica por el Análisis de Sistemas

Como se vió en el ejemplo anterior la Programación Dinámica, basada en el principio de optimalidad de Bellman, procede por etapas descomponiendo un problema de N variables en N problemas de una variable, resolviéndolo en N etapas en serie.



Al resolverlo hace uso de las variables de estado (ξ_i), las de decisión o control (x_i) y las de etapa (i). Transforma en la etapa i, la variable ξ_i en ξ_{i-1}, mediante la transformación $t(\xi_i, x_i)$ produciendo un rendimiento $f_i(\xi_i, x_i)$.

El problema será:

$$\max_{x_1, \ldots, x_N} \left[f_N(\xi_N, x_n) \oplus \cdots \oplus f_1(\xi_1, x_1) \right]$$

Comp. ⊕ = Cualquier operación para la que sea válido el principio de optimalidad

$$\text{s.a.}$$

$$\xi_{i-1} = t_i(\xi_i, x_i)$$

El problema es resuelto por la aplicación sucesiva de la fórmula de recurrencia

$$\Lambda_i(\xi_i) = \max_{x_i} \Omega_i(\xi_i, x_i) \; ; \; i = 1, \ldots, N$$

en donde

$$\Omega_i(\xi_i, x_i) = \begin{cases} f_i(\xi_i, x_i) & ; \; i = 1 \\ f_i(\xi_i, x_i) \oplus \Lambda_{i-1}(t_i(\xi_i, x_i)) & ; \\ & i = 2, \ldots, N \end{cases}$$

La descomposición en etapas seriadas es aprovechado por el Análisis de Sistemas para estudiar los sistemas estructurados por subsistemas en serie que cambian el estado en que se encuentran los recursos, resultando productos cuya composición de valores se desea maximizar. Es claro que en cada etapa la transformación del estado de los recursos se encuentra gobernada por un control.

171. Observación

En problemas más generales que el considerado en el número anterior, es conveniente usar una tabulación numérica diferente.

El primer paso es introducir las variables de estado. Las restricciones son: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$, $x_1, x_2, x_3 \leq 3$ (enteros). Entonces:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \Longrightarrow \begin{cases} 0 = \xi_1 - x_1 \;,\; x_1 = \xi_1 \\ \xi_1 = \xi_2 - x_2 \\ \xi_2 = \xi_3 - x_3 \\ \xi_3 \leq 5 \end{cases}$$

Observese que al sumar las restricciones de la derecha se obtiene la de la izquierda.

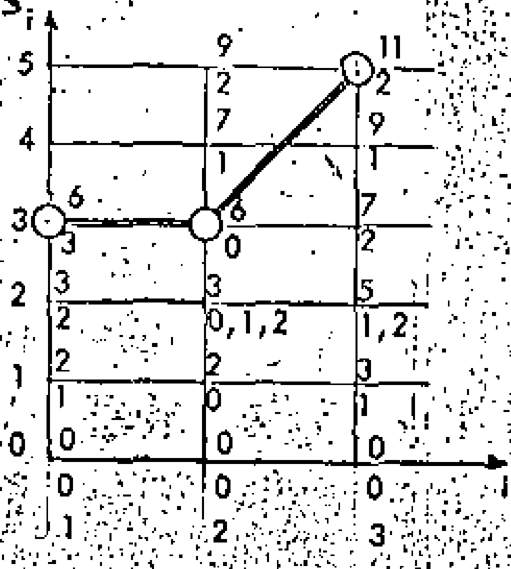
El rango de las variables de estado es $0 \leq \xi_i \leq 5$

El rango de las variables de control es $0 \leq x_i \leq 3$

$$f_1(\xi_1, x_1) = \Omega_1(\xi_1, x_1)$$

ξ_i	x_i	$f_1(\cancel{\xi_1}, x_1)$	$\xi_{i-1}=\xi_i-x_i$	$f_2(\cancel{\xi_2}, x_2)$	$\Lambda_1(\xi_2-x_2)$	$\Omega_2(\xi_2, x_2)$	$f_3(\cancel{\xi_3}, x_3)$	$\Lambda_2(\xi_3-x_3)$	$\Omega_3(\xi_3, x_3)$
0	0	0*	0	0	0	0*	0	0	0*
0	1	x	−1	1	x	x	3	x	x
0	2	x	−2	3	x	x	5	x	x
0	3	x	−3	4	x	x	6	x	x
1	0	x	1	0	2	2*	0	2	2
1	1	2*	0	1	0	1	3	0	3*
1	2	x	−1	3	x	x	5	x	0
1	3	x	−2	4	x	x	6	x	0
2	0	x	2	0	3	3*	0	3	3
2	1	x	1	1	2	3*	3	2	5*
2	2	3*	0	3	0	3*	5	0	5*
2	3	x	−1	4	x	x	6	x	x
3	0	x	3	0	6	6*	0	6	6
3	1	x	2	1	3	4	3	3	6
3	2	x	1	3	2	5	5	2	7*
3	3	6*	0	4	0	4	6	0	6
4	0	x	4	0	x	x	0	7	7
4	1	x	3	1	6	7*	3	6	9*
4	2	x	2	3	3	6	5	3	8
4	3	x	1	4	2	6	6	2	8
5	0	x	5	0	x	x	0	9	9
5	1	x	4	1	x	x	3	7	10
5	2	x	3	3	6	9*	5	6	11*
5	3	x	2	4	3	7	6	3	9

i = 1   i = 2   i = 3

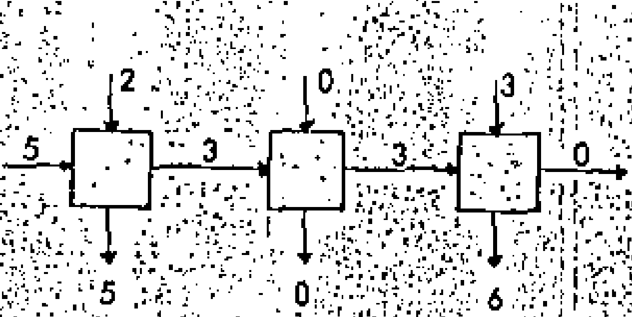


$\xi_2 = \xi_3 - x_3$; $x_3 = 2$

$\xi_2 = 5 - 2 = 3$; $x_2 = 0$

$\xi_1 = \xi_2 - x_2$

$\xi_1 = 3 - 0 = 3$; $x_1 = 3$



Luego $z = 11$

$x_1 = 3$

$x_2 = 0$

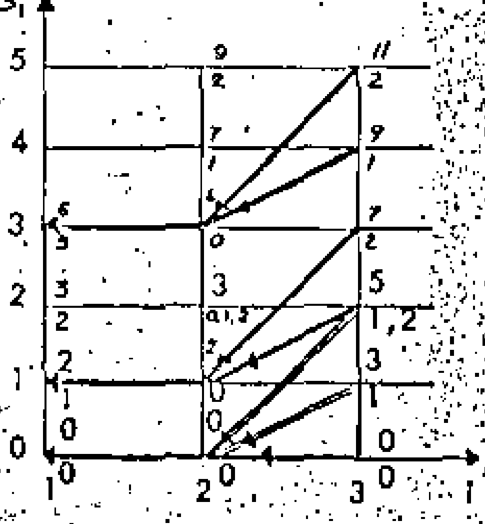
$x_3 = 2$

172. <u>Sensibilidad</u>

Es importante notar que la formulación de la Programación Dinámica permite hacer análisis de sensibilidad automáticamente.

Los resultados del ejemplo anterior permiten ilustrar el punto.

a) Variación de la producción al cambiar el insumo inicial (ξ_3).



para $\xi_3 = 5$; $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = 11$.

para $\xi_3 = 4$; $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $z = 9$

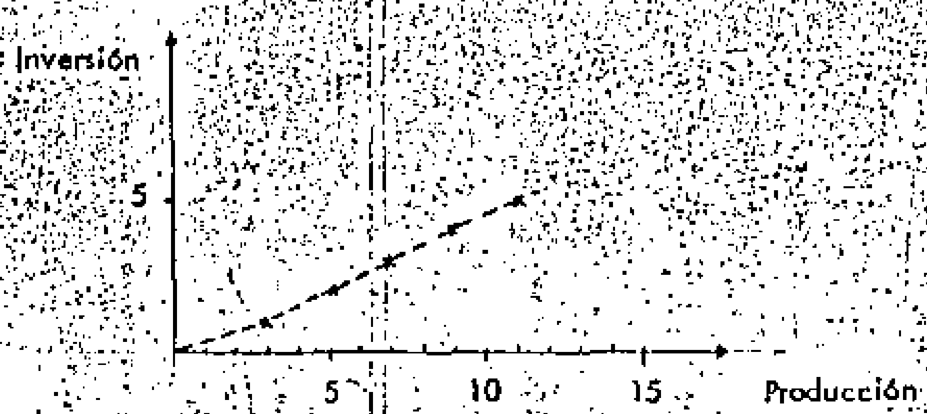
para $\xi_3 = 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $z = 7$

para $\xi_3 = 2$; $\begin{cases} x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ z = 5 \\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ z = 5 \end{cases}$

para $\xi_3 = 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $z = 3$

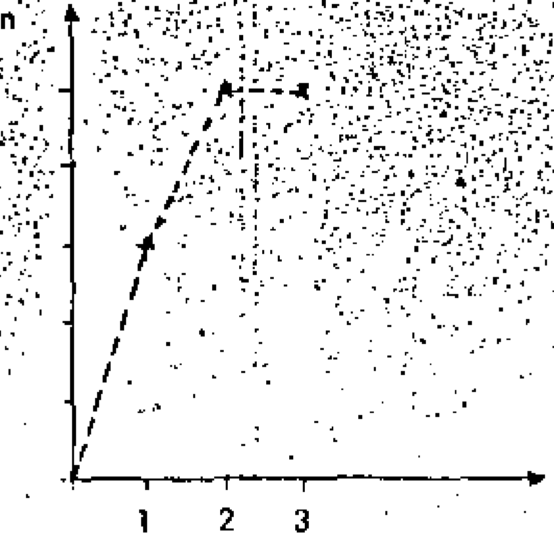
para $\xi_3 = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = 0$

Comparando gráficamente insumos y productos, se obtiene la siguiente trayectoria de expansión.



b) Variación del insumo inicial al cambiar el número de etapas (I).

También usando la gráfica de resumen final se puede comparar el insumo inicial con el número de tapas.



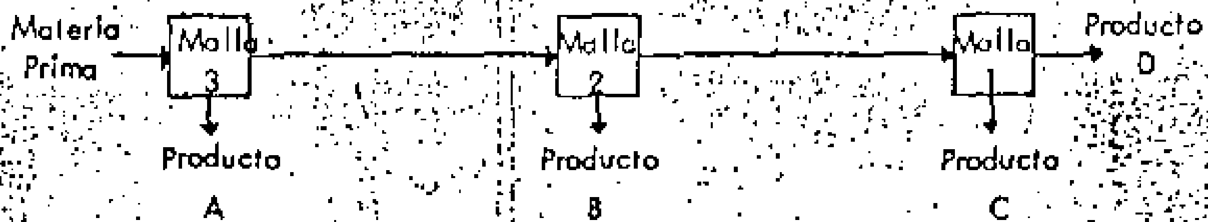
Se puede observar que la inversión inicial es identica para dos y para tres sitios. Sin embargo, para dos sitios la máxima producción es de nueve unidades, mientras que para tres es de once unidades. Evidentemente reporta mayores ventajas el disponer de tres sitios.

c) Variación de la producción con el número de etapas.

Esta gráfica comprueba lo aseverado en el párrafo anterior hace ver que para la misma inversión disponiendo de los tres sitios se obtienen dos unidades más de producción.

173. Ejercicio

Se desean separar cuatro diferentes tamaños de partículas mediante un sistema de mallas de tres distintos tamaños. La materia prima es colocada en la malla tres y por vibración caerá material a la malla tres, lo que permanece al final del vibrado constituye el producto A. En forma análoga se obtienen los productos B y C. Lo que pasa la malla uno constituye el producto D.



La cantidad de material que pasa por una malla será un porcentaje $\propto$ $(0 \leq \propto < 1)$ del que le llegó y dependerá del tiempo e intensidad del vibrado. El costo de la separación del material para cada una de las mallas depende de $\propto$ y de la cantidad total de material que le llegó.

Costo de separación para la i-ésima malla = $\left[k_i \, L(1 - \propto_i) \right]$ (cantidad de de material que llegó a la i-ésima malla).

En donde k_i es una constante negativa.

La revoltura inicial contiene:

1 tonelada del material tipo 3 (el mayor)

3 toneladas del material tipo 2

4 toneladas del material tipo 1

2 toneladas del material tipo 0 (el menor)

Los precios por tonelada de cada producto son como sigue:

A - \$ 10/ton

B - \$ 30/ton

C - \$ 35/ton

D - \$ 60/ton

Las constantes, k_i tienen los siguientes valores:

$$k_1 = -1.5$$

$$k_2 = -1.0$$

$$k_3 = -0.5$$

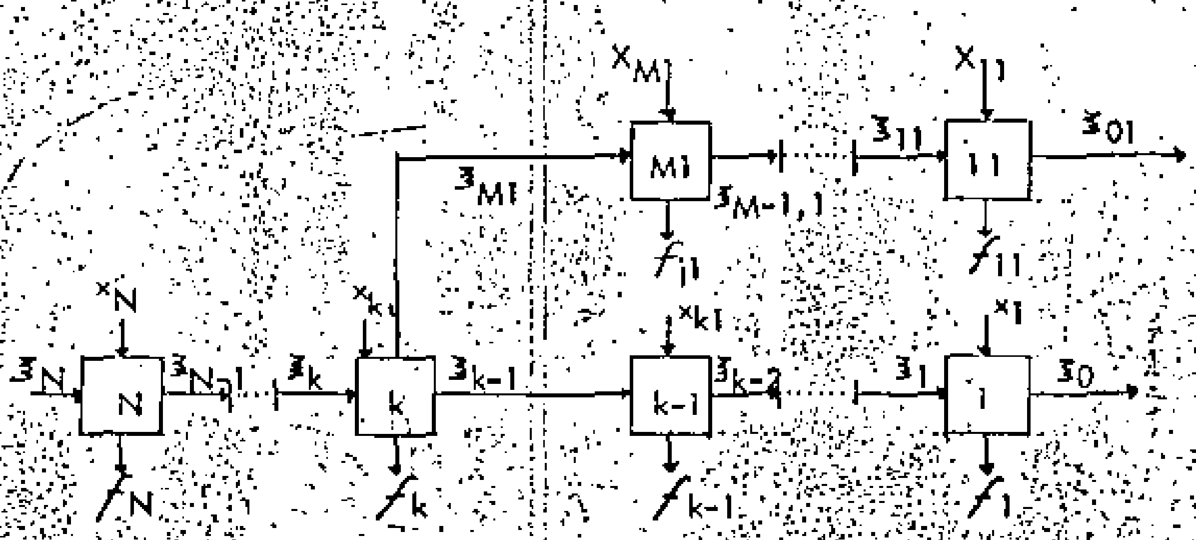
a) Determinar la composición del producto, en cada etapa, que maximiza la ganancia.

b) ¿Cómo se altera la composición, en el óptimo, si la revoltura inicial contiene tres toneladas de material tipo 3 ?

c) ¿Cómo afecta el suprimir la malla 3?

174. Sistemas con ramas divergentes

Frecuentemente se encuentran en las aplicaciones del Análisis de Sistemas, algunos que se ramifican. Tal es el caso de los sistemas administrativos e industriales; se dirá que son de Ramas Divergentes. Se caracterizan por tener una sola entrada y varias salidas.



Las transformaciones para las etapas son:

$$\mathfrak{z}_{i-1} = t_i(\mathfrak{z}_i, x_i) \;;\; i = 1, \ldots, N$$

$$\mathfrak{z}_{j-1,1} = t_{j1}(\mathfrak{z}_{j1}, x_{j1}) \;;\; j = 1, \ldots, M$$

$$\mathfrak{z}_{M1} = t_{k1}(\mathfrak{z}_k, x_k) \;;$$

La última transformación corresponde a la etapa en donde se unen las dos ramas. Para estos sistemas con ramas divergentes se conserva la característica de los sistemas seriados que se han estudiado hasta ahora, esta es, la de que los rendimientos en cada etapa pueden expresarse como una función sólo del insumo y de la decisión para la etapa.

Resulta así que las ecuaciones de recurrencia son:

a) Para la rama divergente, etapas 11 a M1,

$$\Lambda_{11}(\xi_{11}) = \max_{x_{11}} f_{11}(\xi_{11}, x_{11})$$

$$\Lambda_{j1}(\xi_{j1}) = \max_{x_{j1}} \left[f_{j1}(\xi_{j1}, x_{j1}) \oplus \Lambda_{j-1,1}(t_{j1}(\xi_{j1}, x_{j1})) \right] ;$$

$$j = 2, \ldots, M$$

b) Para las etapas 1 a k-1, en la rama principal,

$$\Lambda_1(\xi_1) = \max_{x_1} f_1(\xi_1, x_1)$$

$$\Lambda_i(\xi_i) = \max_{x_i} \left[f_i(\xi_i, x_i) \oplus \Lambda_{i-1}(t_i(\xi_i, x_i)) \right] ; \; i = 2, \ldots, k-1$$

c) Para la etapa k en donde se presenta la divergencia,

$$\Lambda_{k+M1}(\xi_k) = \max_{x_k} \Big[f_k(\xi_k, x_k) \oplus \Lambda_{k-1}(t_k(\xi_k, x_k))$$

$$\Lambda_{M1}(t_{k1}(\xi_k, x_k)) \Big]$$

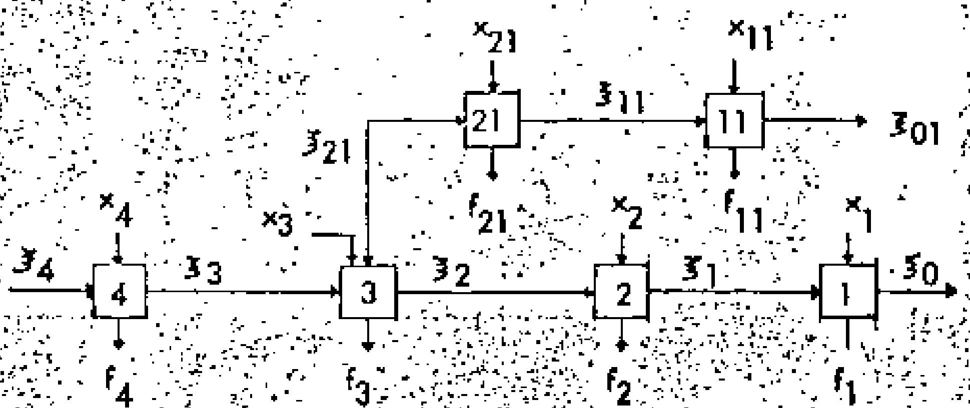
d) Para las restantes etapas k+1 a N en la rama principal,

$$\Lambda_{i+M1}(\xi_i) = \max \left[f_i(\xi_i, x_i) \oplus \Lambda_{i-1+M1}(t_i(\xi_i, x_i)) \right] ;$$

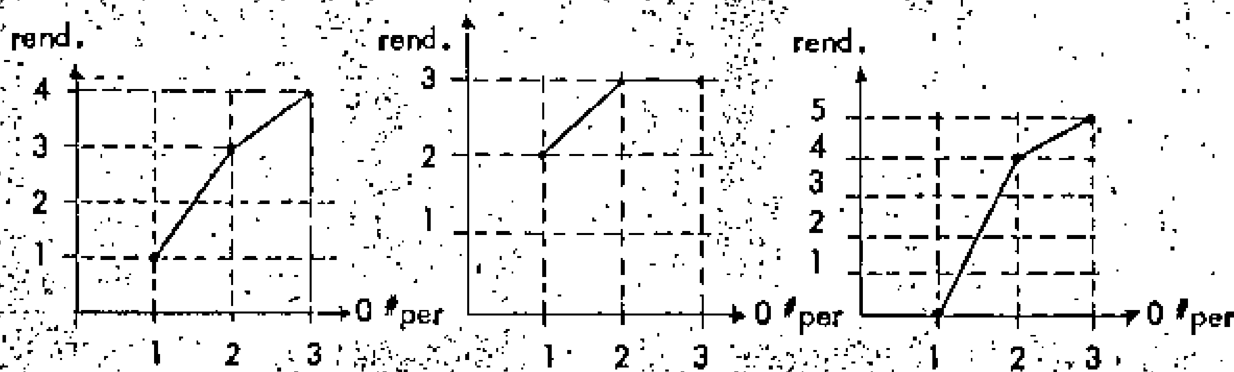
$$i = k+1, \ldots, N.$$

175. Ejemplo

Para un sistema administrativo como el mostrado en la figura, maximizar la composición de los rendimientos parciales, logrando así la mejor asignación de personal; se dispone de ocho personas igualmente calificadas para todos los puestos. Por otra parte en cada una de las secciones mostradas no deberá haber más de tres personas y nunca menos de una.

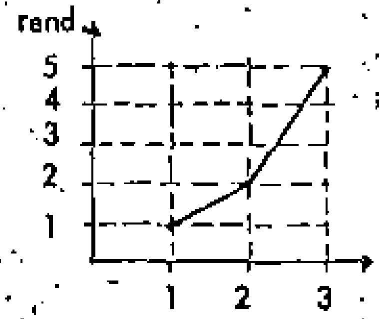


Los rendimientos son como sigue:

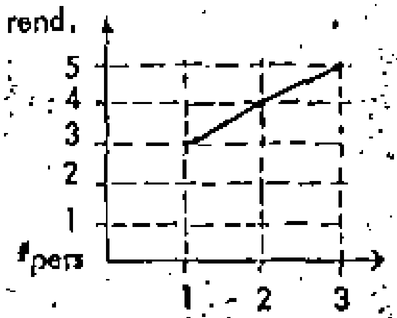


Paso 1 Paso 2 Paso 3

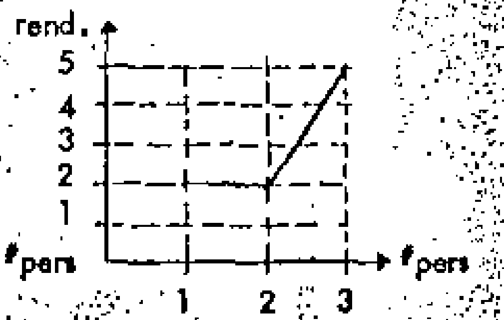
Paso 4



Paso 11



Paso 21



Ecuaciones de sistemas

$$\xi_3 = \xi_4 - x_4 \qquad \xi_{11} = \xi_{21} - x_{21} \qquad 6 \leq \xi_4 \leq 8 \qquad 1 \leq \xi_1 \leq 3$$

$$\xi_2 + \xi_{21} = \xi_3 - x_3 \qquad 0 = \xi_{11} - x_{11} \qquad 5 \leq \xi_3 \leq 7 \qquad 2 \leq \xi_2 \leq 4$$

$$\xi_1 = \xi_2 - x_2 \qquad 8 \geq \xi_4 \qquad 4 \leq \xi_2 + \xi_{21} \leq 6 \qquad 1 \leq \xi_{11} \leq 3$$

$$0 = \xi_1 - x_1 \qquad 1 \leq x_1 \leq 3 \qquad 2 \leq \xi_{21} \leq 4$$

1a. Rama principal (etapas 1 y 2).

$$\Omega_1 = f_1 (\xi_1 = 1, x_1) = 1$$

$$\Omega_1 = f_1 (\xi_1 = 2, x_1 = 2) = 3$$

$$\Omega_1 = f_1 (\xi_1 = 3, x_1 = 3) = 4$$

ξ_2	x_2	$\xi_2 - x_2 = \xi_1$	$\Lambda_1(\xi_2 - x_2)$	$f_2(\xi_2, x_2)$	$\Omega_2(\xi_2, x_2)$
2	1	1	1	2	3*
3	1	2	3	2	5*
3	2	1	1	3	4
4	1	3	4	2	6*
4	2	2	3	3	6*
4	3	1	1	3	4

2o. Rama divergente (etapas 11 y 21)

$$\Omega_{11} = f_{11}(\xi_{11} = 1,\ x_{11} = 1) = 3$$

$$\Omega_{11} = f_{11}(\xi_{11} = 2,\ x_{11} = 2) = 4$$

$$\Omega_{11} = f_{11}(\xi_{11} = 3,\ x_{11} = 3) = 5$$

ξ_{21}	x_{21}	$\xi_{21}-x_{21}=\xi_{11}$	$\Lambda_{11}(\xi_{21}-x_{21})$	$f_{21}(\xi_{21},x_{21})$	$\Omega_{21}(\xi_{11},x_{21})$
2	1	1	3	2	5*
3	1	2	4	2	6*
3	2	1	3	2	5
4	1	3	5	2	7
4	2	2	4	2	6
4	3	1	3	5	8*

3o. Etapa en la ocurre la divergencia.

ξ_3	x_3	$\xi_3-x_3=\xi_2+\xi_{21}$	ξ_2	ξ_{21}	$f_3(\xi_3,x_3)$	$\Lambda_2(\xi_2)$	$\Lambda_{21}(\xi_{21})$	$\Omega_{3+21}(\xi_3,x_3)$
5	1	4	2	2	0	3	5	8*
6	1	5	3	2	0	5	5	10
6	1	5	2	3	0	3	6	9
6	2	4	2	2	4	3	5	12*
7	1	6	2	4	0	3	8	11
7	1	6	3	3	0	5	6	11
7	1	6	4	2	0	6	5	11
7	2	5	3	2	4	5	5	14*
7	2		2	3	4	3	6	13
7	3	4	2	2	5	3	5	13

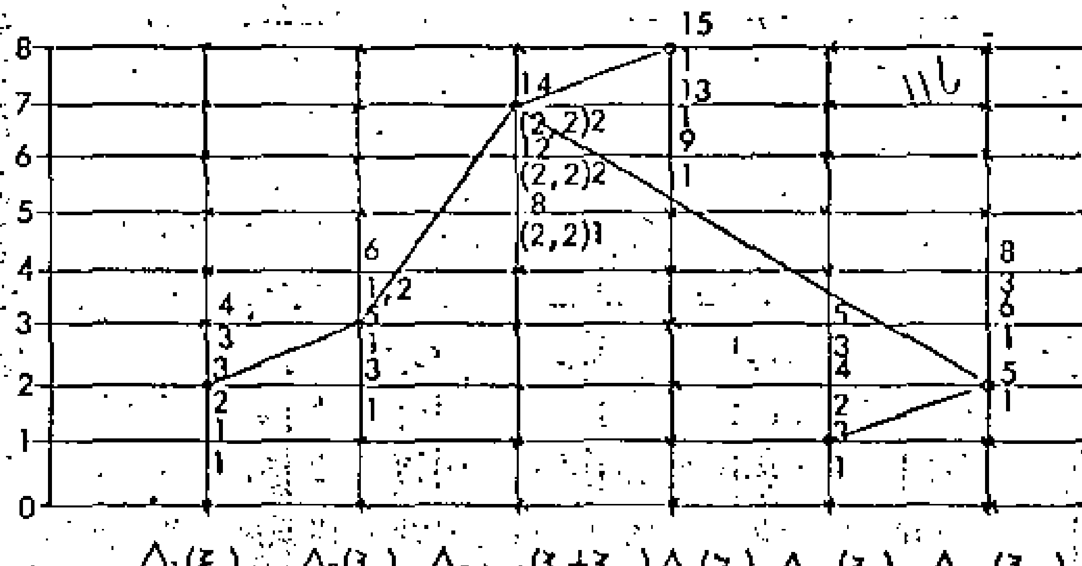
4o. Rama principal (etapa 4)

ξ_4	x_4	$\xi_4 - x_4 = \xi_3$	$\Lambda_{3+21}(\xi_4 - x_4)$	$f_4(\xi_3, x_3)$	$\Omega_{4+21}(\xi_4, x_4)$
6	1	5	8	1	4*
7	1	6	12	1	13*
7	2	5	8	2	10
8	1	7	14	1	15*
8	2	6	12	2	14
8	3	5	8	5	13

$x_4 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_{21} = 1$

$z = 15$

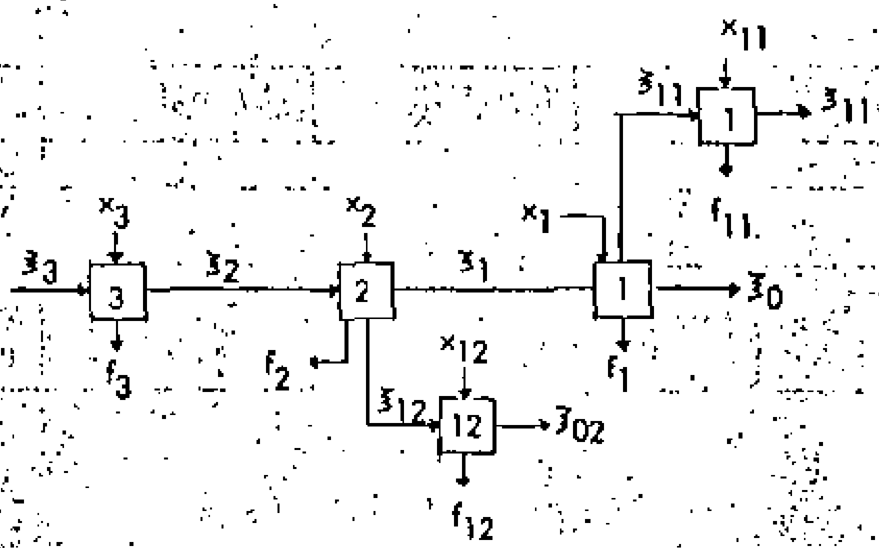
$x_3 = 2 \quad x_1 = 2 \quad x_{11} = 1$



176. <u>Ejercicios</u>

1. Estudiar para sensibilidad el ejemplo anterior y sacar conclusiones al respecto.

2. Estudiar para sensibilidad el sistema, buscando



$$\max z = f_1(x_1) \oplus f_2(x_2) \oplus f_3(x_3) \oplus f_{11}(x_{11}) \oplus f_{12}(x_{12})$$

s.a.

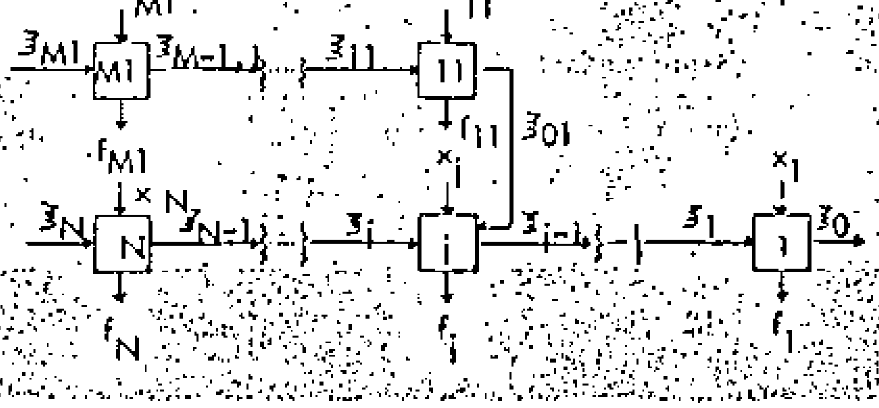
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_{11} + x_{12} \leq 10$$

$$0 \leq x_i \leq 2$$

Usar las gráficas del ejemplo anterior f_1, f_2, f_3 y f_{11} para f_{12} usar lo correspondiente a f_{21}.

177. Sistemas con ramas convergentes

Un sistema con ramas convergentes, como el que se muestra en la figura, se caracteriza por tener varias entradas y una sola salida.



La transformación en la etapa j en donde ocurre la convergencia es

$$\xi_{j-1} = t_j(\xi_{01}, \xi_j, x_j)$$

mientras que para todas las restantes etapas las transformaciones son las usuales

$$\xi_{i-1} = t_i(\xi_i, x_i)\ ;\ i = 1, \ldots, N\ ;\ i \neq j$$

$$\xi_{i-1,1} = t_{i1}(\xi_{i1}, x_{i1})\ ;\ i = 1, \ldots, M.$$

Por otra parte, los rendimientos son:

$$f_j = f_j(\xi_{01}, \xi_j, x_j)$$

$$f_i = f_i(\xi_i, x_i)\ ;\ i = 1, \ldots, N;\ i \neq j.$$

$$f_{i1} = f_{i1}(\xi_{i1}, x_{i1})\ ;\ i = 1, \ldots, M.$$

Los cálculos se pueden llevar en cuatro etapas.

a) El sistema principal, etapas 1 a $j-1$ se calculará en la forma usual mediante

$$\Lambda_1(\xi_1) = \max_{x_1} f_1(\xi_1, x_1)$$

$$\Lambda_i(\xi_i) = \max_{x_i} \left[f_i(\xi_i, x_i) \oplus \Lambda_{i-1}(t_i(\xi_i, x_i)) \right] \quad i = 2, \ldots, j-1$$

b) Cálculo de la rama convergente

$$\Lambda_{11}(\xi_{M-1,1}) = \max_{x_{M1}} f_{M1}(\xi_{M-1,1}, x_{M1})$$

$$\Lambda_{i1}(\xi_{M-i,1}) = \max_{x_{M-i+1,1}} \Big[f_{M-i+1,1}(\xi_{M-i,1}, x_{M-i+1,1}) \oplus \Lambda_{i-1,1}$$

$$(\bar{t}_{M-i+1,1}(\xi_{M-i,1}, x_{M-i+1,1})) \Big] \quad i = 2, \ldots, M.$$

en donde $\bar{t}$ implica una transformación inversa.

c) La etapa j en la que ocurre la convergencia se calculará mediante

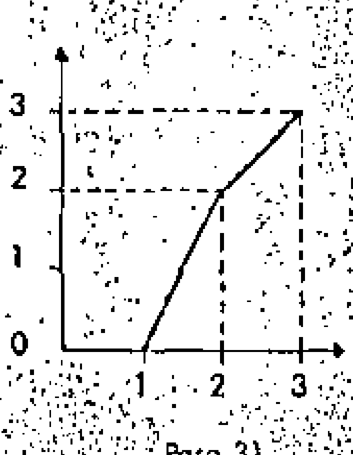
$$\Lambda_{j+M1}(\xi_j) = \max_{(\xi_{01}, x_j)} \Big[f_j(\xi_{01}, \xi_j, x_j) \oplus \Lambda_{j-1}(t_j(\xi_{01}, \xi_j, x_j)) \oplus \Lambda_{M1}(\xi_{01}) \Big]$$

d) Por último, se continuará con la rama principal, para las etapas $j+1$ a N, en la forma normal

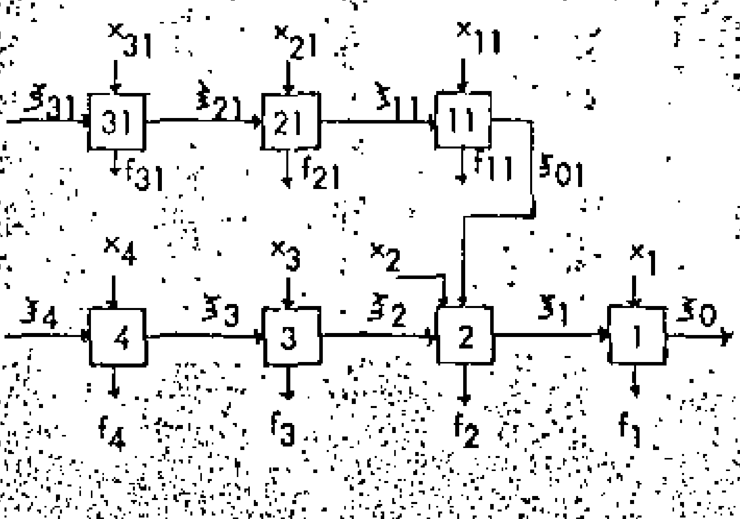
$$\Lambda_{i+M1}(\xi_i) = \max_{x_i} \Big[f_i(\xi_i, x_i) \oplus \Lambda_{i-1+M1}(t_i(\xi_i, x_i)) \Big] \quad ; \; i = j+1, \ldots, N.$$

178. <u>Ejemplo</u>

El mismo problema anterior pero considerando una disponibilidad de nueve personas, y el paso adicional cuyos rendimientos se muestran en la figura.



Paso 31



Ecuaciones de sistema.

$$\xi_{31} = x_{31} + \xi_{21} \qquad \xi_4 = x_4 + \xi_3 \qquad 1 \le \xi_1 \le 3 \qquad 0 \le \xi_{01} \le 9-7 = 2$$

$$\xi_{21} = x_{21} + \xi_{11} \qquad \xi_3 = x_3 + \xi_2 \qquad 2 \le \xi_{01} + \xi_2 \le 4 \qquad 1 \le \xi_4 \le 3$$

$$\xi_{11} = x_{11} + \xi_{01} \qquad \xi_2 = x_2 + \xi_1 - \xi_{01} \qquad 3 \le \xi_3 \le 5 \qquad 2 \le \xi_{21} \le 4$$

$$\xi_9 \ge \xi_{31} + \xi_4 \qquad \xi_1 = x_1 \qquad 4 \le \xi_4 \le 6 \qquad 3 \le \xi_{31} \le 5$$

<u>1a. Rama convergente</u>

ξ_{21}	x_{31}	$\xi_{21}+x_{31}=\xi_{31}$	$f_{31}(\xi_{21}, x_{31})$
2	1	3	0
2	2	4	2
2	3	5	3*
3	1	4	0
3	2	5	2*
4	1	5	0*

$$\xi_{31} = 5$$

ξ_{11}	x_{21}	$\xi_{11}+x_{21}=\xi_{21}$	$f_{21}(\xi_{11}, x_{21})$	$\Lambda_{11}(\xi_{11}+x_{21})$	$\Omega_{21}(\xi_{11}, x_{21})$
1	1	2	2	3	5*
1	2	3	2	2	4
1	3	4	5	0	5*
2	1	3	2	2	4*
2	2	4	2	0	2
3	1	4	2	0	2*

ξ_{01}	x_{11}	$\xi_{01}+x_{11}=\xi_{11}$	$f_{11}(\xi_{01}, x_{11})$	$\Lambda_{21}(\xi_{01}+x_{11})$	$\Omega_{31}(\xi_{01}+x_{11})$
0	1	1	3	5	8*
0	2	2	4	4	8*
0	3	3	5	2	7
1	1	2	3	4	7*
1	2	3	4	2	6
2	1	3	3	2	5*

2o. Etapa "1"

$$\Omega_1 = f_1 (\xi_1 = 1,\ x_1 = 1) = 1$$

$$\Omega_1 = f_1 (\xi_1 = 2,\ x_1 = 2) = 3$$

$$\Omega_1 = f_1 (\xi_1 = 3,\ x_1 = 3) = 4$$

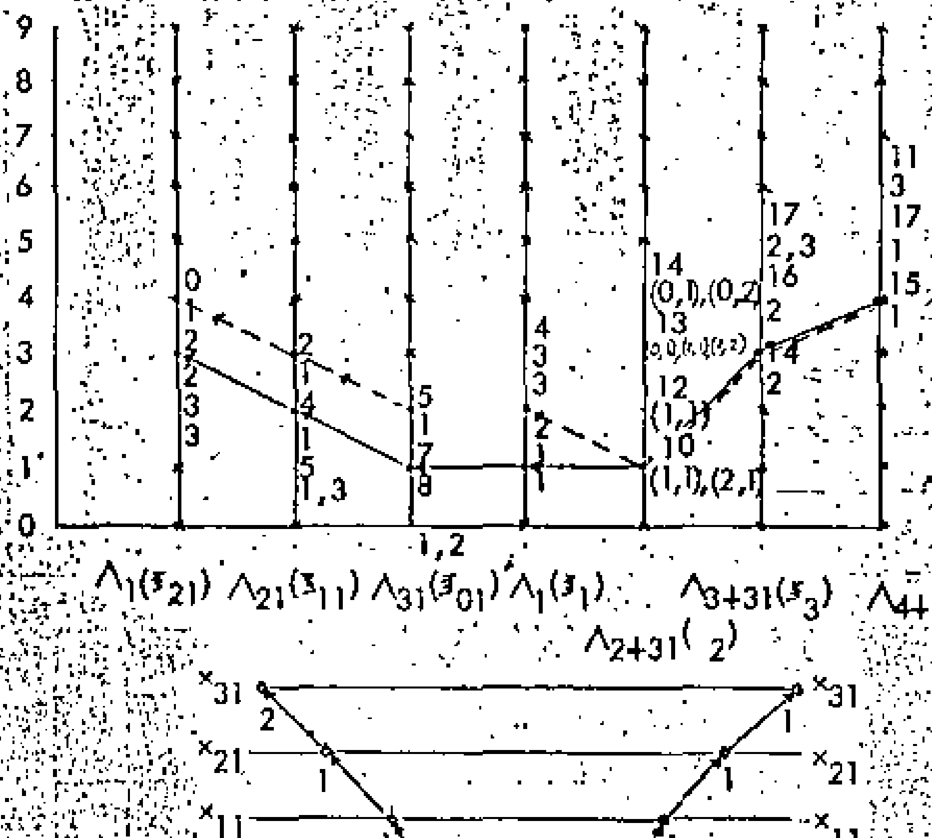
3o. Etapa "2" en que ocurre la convergencia.

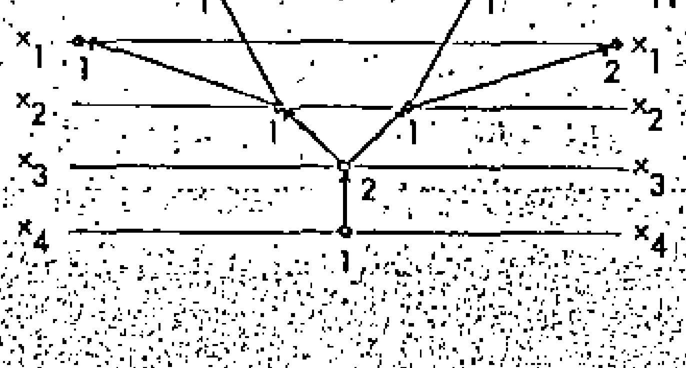
ξ_2	(ξ_{01}, x_2)	$\xi_2+\xi_{01}$	$\xi_2+\xi_{01}-x_2=\xi_1$	$f_2(\xi_{01}, \xi_2, x_2)$	$\Lambda_1(\xi_2+\xi_{01}-x_2)$	$\Lambda_{31}(\xi_{01})$	$\Omega_{2+31}(\xi_{01}, \xi_2,$
1	(1,1)	2	1	2	1	7	10*
1	(2,1)	3	2	2	3	5	10*
1	(2,2)	3	1	3	1	5	9
2	(0,1)	2	1	2	1	8	11
2	(1,1)	3	2	2	3	7	12*
2	(1,2)	3	1	3	1	7	11
2	(2,1)	4	3	2	4	5	11
2	(2,2)	4	2	3	3	5	11
2	(2,3)	4	1	3	1	5	9
3	(0,1)	3	2	2	3	8	13*
3	(0,2)	3	1	3	1	8	12
3	(1,1)	4	3	2	4	7	13*
3	(1,2)	4	2	3	3	7	13*
3	(1,3)	4	1	3	1	7	11
4	(0,1)	4	3	2	4	8	14*
4	(0,2)	4	2	3	3	8	14*
4	(0,3)	4	1	3	1	8	12

ξ_3	x_3	$\xi_3-x_3=\xi_2$	$f_3(\xi_3, x_3)$	$\Lambda_{2+31}(\xi_3-x_3)$	$\Omega_{3+31}(\xi_3, x_3)$
3	1	2	0	12	12
3	2	1	4	10	14*
4	1	3	0	13	13
4	2	2	4	12	16*
4	3	1	5	10	15
5	1	4	0	14	14
5	2	3	4	13	17*
5	3	2	5	12	17*

ξ_4	x_4	$\xi_4 - x_4 = \xi_3$	$f_4(\xi_4, x_4)$	$\Lambda_{3+31}(\xi_4 - x_4)$	$\Omega_{4+31}(\xi_4, x_4)$
4	1	3	1	14	15*
5	1	4	1	16	17*
5	2	3	2	14	16
6	1	5	1	17	18
6	2	4	2	16	18
6	3	3	5	14	19*

Puesto que $\xi_{31} = 5$ y $\xi_{31} + \xi_4 \leq 9$, $\xi_4 = 4$.



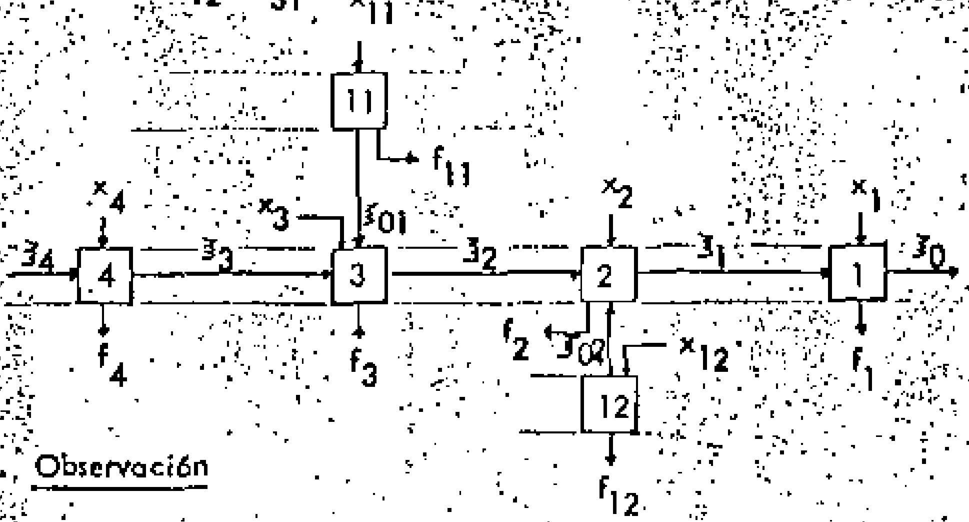


179. Ejercicios

1. Estudiar para sensibilidad el ejemplo anterior y sacar conclusiones.

2. Con los datos del problema anterior estudiar para sensibilidad el sistema.

Usar: $f_{12} = f_{31}$, x_{11}



180. Observación

El método descrito anteriormente hace uso de la transformación inversa $\bar{t}$ en el cálculo de la rama convergente y conduce a expresar ξ_{31} en función de ξ_{01}. Sin embargo, selecciona el óptimo para $_{31}$ subordinando a esta condición el valor de ξ_4. Lo anterior conduce a una solución particular que no necesariamente es la única. Cuando se estudian sistemas más complejos en los que las variables de estado tienen tanto interés en la solución como las de decisión es conveniente acudir a métodos más generales y obtener una gama más amplia de soluciones.

El método general que a continuación se presenta permite producir varias alternativas adicionales, no implica maximizar la variable de estado ξ_{31} y además será el usado para estudiar sistemas con alimentación hacia adelante y con retroalimentación. Por otra parte no requiere la transformación inversa.

En detalle,

a) Para la rama convergente se tiene:

$$\Lambda_{i1}(\xi_{i1},\xi_{01}) = \max_{x_{i1}} \left[f_{i1}(\xi_{i1},x_{i1}) \oplus \Lambda_{i-1,1}(t_{i1}(\xi_{i1},x_{i1}),\xi_{01}) \right]$$

$$i = 2, \ldots, M$$

b) Para la rama principal antes de la convergencia se hará el cálculo en la forma usual.

c) Para la etapa "j" en que ocurre la convergencia:

$$\Lambda_{j+N1}(\xi_j,\xi_{M1},\xi_{01}) = \max_{x_j} \left[f_j(\xi_j,x_j) \oplus \Lambda_{j-1}(t_j(\xi_j,x_j)) \oplus \Lambda_{M1}(t_{N1}(\xi_{01},\xi_{M1})) \right]$$

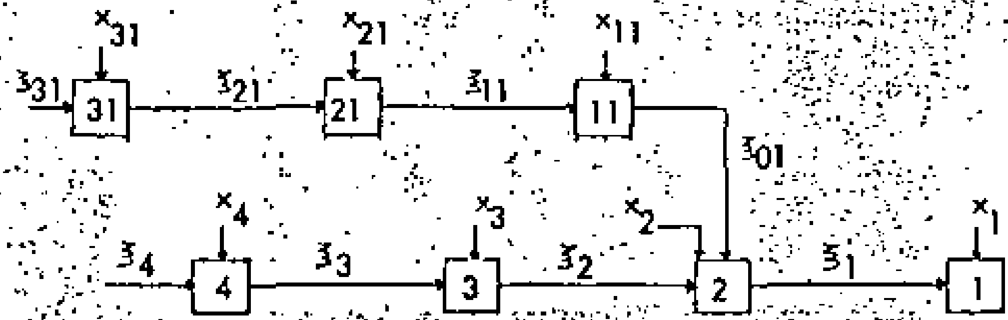
d) Para las restantes en la rama principal

$$\Lambda_{i+M1}(\xi_i,\xi_{M1},\xi_{01}) = \max_{x_i} \left[f_i(\xi_i,x_i) \oplus \Lambda_{i-1}(t_i(\xi_i,x_i,\xi_{01},\xi_{M1})) \right]$$

$$i = j+1, \ldots, N.$$

//

181. Ejemplo



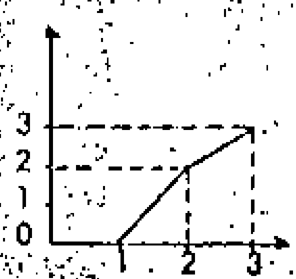
Ecuaciones de Sistema

$\xi_{21} = \xi_{31} - x_{31}$ $\quad \xi_3 = \xi_4 - x_4$

$\xi_{11} = \xi_{21} - x_{21}$ $\quad \xi_2 = \xi_3 - x_3$

$\xi_{01} = \xi_{11} - x_{11}$ $\quad \xi_1 = (\xi_2 + \xi_{01}) - x_2$

$\xi_1 = x_1$



Paso 31

Restricciones

$1 \leq \xi_1 \leq 3$ $\quad 3 \leq \xi_{31} \leq 7$ $\quad \xi_{31} + \xi_4 = 9$

$2 \leq \xi_{01} + \xi_2 \leq 4$ $\quad 2 \leq \xi_{21} \leq 6$

$0 \leq \xi_2 \leq 4$ $\quad 1 \leq \xi_{11} \leq 5$

$1 \leq \xi_3 \leq 5$ $\quad 0 \leq \xi_{01} \leq 4$

$2 \leq \xi_4 \leq 6$ $\quad 1 \leq x_1 \leq 3$

12

1o. Cálculo etapas "11", "21" y "31".

ξ_{01}	ξ_{11}	x_{11}	$\xi_{11}-x_{11}=\xi_{01}$	$f_{11}(\xi_{11},x_{11})$
0	1	1	0	3*
0	2	2	0	4*
0	3	3	0	5*
1	2	1	1	3*
1	3	2	1	4*
1	4	3	1	5*
2	3	1	2	3*
2	4	2	2	4*
2	5	3	2	5*
3	4	1	3	3*
3	5	2	3	4*
4	5	1	4	3*

ξ_{01}	ξ_{21}	x_{21}	$\xi_{21}-x_{21}=\xi_{11}$	$\Lambda_{11}(\xi_{11})$	$f_{21}(\xi_{21},x_{21})$	$\Omega_{21}(\xi_{21},x_{21},\xi_{01})$
0	2	1	1	3	2	5*
0	3	1	2	4	2	6*
0	3	2	1	3	2	5
0	4	1	3	5	2	7
0	4	2	2	4	2	6
0	4	3	1	3	5	8*
0	5	2	3	5	2	7
0	5	3	2	4	5	9*
0	6	3	3	5	5	10*
1	3	1	2	3	2	5*
1	4	1	3	4	2	6*
1	4	2	2	3	2	5
1	5	1	4	5	2	7
1	5	2	3	4	2	6
1	5	3	2	3	5	8*
1	6	2	4	5	2	7
1	6	3	3	4	5	9*
2	4	1	3	3	2	5*
2	5	1	4	4	2	6*
2	5	2	3	3	2	5
2	6	1	5	5	2	7
2	6	2	4	4	2	6
2	6	3	3	3	5	8*
3	5	1	4	3	2	5*
3	6	1	5	4	2	6*
3	6	2	4	3	2	5
4	6	1	5	3	2	5*

ξ_{01}	ξ_{31}	x_{31}	$\xi_{31}-x_{31}=\xi_{21}$	$\Lambda_{21}(\xi_{21})$	$f_{31}(\xi_{31},x_{31})$	$\Omega_{31}(\xi_{31},x_{31},\xi_{01})$	
0	3	1	2	5	0	5*	← I
0	4	1	3	6	0	6	
0	4	2	2	5	2	7*	← II
0	5	1	4	8	0	8*	
0	5	2	3	6	2	8*	
0	5	3	2	5	3	8*	
0	6	1	5	9	0	9	
0	6	2	4	8	2	10*	
0	6	3	3	6	3	9	
0	7	1	6	10	0	10	
0	7	2	5	9	2	11*	
0	7	3	4	8	3	11*	
1	4	1	3	5	0	5*	← III
1	5	1	4	6	0	6	
1	5	2	3	5	2	7*	← IV
1	6	1	5	8	0	8*	
1	6	2	4	6	2	8*	
1	6	3	3	5	3	8*	
1	7	1	6	9	0	9	
1	7	2	5	8	2	10*	
1	7	3	4	6	3	9	
2	5	1	4	5	0	5*	← V
2	6	1	5	6	0	6	
2	6	2	4	5	2	7*	← VI
2	7	1	6	8	0	8*	
2	7	2	5	6	2	8*	
2	7	3	4	5	3	8*	
3	6	1	5	5	0	5*	
3	7	1	6	6	0	6	
3	7	2	5	5	2	7*	
4	7	1	6	5	0	5	

2o. Cálculo de la etapa "1"

$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 1, x_1 = 1) = 1 \longleftarrow \text{II}$$

$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 2, x_1 = 2) = 3 \longleftarrow \text{I}$$

$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 3, x_1 = 3) = 4 \longleftarrow \text{III}$$

3o. Cálculo de la etapa "2" en que ocurre la convergencia.

14

ξ_{01}	ξ_{31}	ξ_2	$\xi_2+\xi_{01}$	x_2	$\xi_2+\xi_{01}-x_2=\xi_1$	$\Lambda_1(\xi_1)$	$\Lambda_{31}(\xi_{31})$	$f_2(\xi_2,x_2)$	$\Omega_{31+2}(\xi_2,x_2,\xi_{31},\xi_{01})$
0	3	2	2	1	1	1	5	2	8*
0	3	3	3	1	2	3	5	2	10*
	3	3	3	2	1	1	5	3	9
0	3	4	4	1	3	4	5	2	11*
0	3	4	4	2	2	3	5	3	11*
0	3	4	4	3	1	1	5	3	9
0	4	2	2	1	1	1	7	2	10*
0	4	3	3	1	2	3	7	2	12*
0	4	3	3	2	1	1	7	3	11
0	4	4	4	1	3	4	7	2	13*
0	4	4	4	2	2	3	7	3	13*
0	4	4	4	3	1	1	7	3	1
0	5	2	2	1	1	1	8	2	11*
0	5	3	3	1	2	3	8	2	13*
0	5	3	3	2	1	1	8	3	12
0	5	4	4	1	3	4	8	2	12
0	5	4	4	2	2	3	8	3	14*
0	5	4	4	3	1	1	8	3	12
0	6	2	2	1	1	1	10	2	13*
0	6	3	3	1	2	3	10	2	15*
0	6	3	3	2	1	1	10	3	14
0	6	4	4	1	3	4	10	2	16*
0	6	4	4	2	2	3	10	3	16*
	6	4	4	3	1	1	10	3	14
0	7	2	2	1	1	1	11	2	14*
0	7	3	3	1	2	3	11	2	16*
0	7	3	3	2	1	1	11	3	15
0	7	4	4	1	3	4	11	2	17*
0	7	4	4	2	2	3	11	3	17*
0	7	4	4	3	1	1	11	3	15
1	4	1	2	1	1	1	5	2	8*
1	4	2	3	1	2	3	5	2	10*
1	4	2	3	2	1	1	5	3	9
1	4	3	4	1	3	4	5	2	11*
1	4	3	4	2	2	3	5	3	11*
1	4	3	4	3	1	1	5	3	9
1	5	1	2	1	1	1	7	2	10*
1	5	2	3	1	2	3	7	2	12*
1	5	2	3	2	1	1	7	3	11
1	5	3	4	1	3	4	7	2	13*
1	5	3	4	2	2	3	7	3	13*
1	5	3	4	3	1	1	7	3	11

ξ_{01}	ξ_{31}	ξ_2	$\xi_2+\xi_{01}$	x_2	$\xi_2+\xi_{01}-x_2=\xi_1$	$\Lambda_1(\xi_1)$	$\Lambda_{31}(\xi_{31})$	$f_2(\xi_2,x_2)$	$\Omega_{31+2}(\xi_2,x_2,\xi_{31},\xi_{01})$
1	6	1	2	1	1	1	8	2	11*
1	6	2	3	1	2	3	8	2	13*
1	6	2	3	2	1	1	8	3	12
	6	3	4	1	3	4	8	2	14*
1	6	3	4	2	2	3	8	3	14*
1	6	3	4	3	1	1	8	3	12
1	7	1	2	1	1	1	10	2	13*
1	7	2	3	1	2	3	10	2	15*
1	7	2	3	2	1	1	10	3	14
1	7	3	4	1	3	4	10	2	16*
1	7	3	4	2	2	3	10	3	16*
1	7	3	4	3	1	1	10	3	14
2	5	0	2	1	1	1	5	2	8*
2	5	1	3	1	2	3	5	2	10*
2	5	1	3	2	1	1	5	3	9
2	5	2	4	1	3	4	5	2	11*
2	5	2	4	2	2	3	5	3	11*
2	5	2	4	3	1	1	5	3	9
2	6	0	2	1	1	1	7	2	10*
2	6	1	3	1	2	3	7	2	12*
2	6	1	3	2	1	1	7	3	11
2	6	2	4	1	3	4	7	2	13*
2	6	2	4	2	2	3	7	3	13*
2	6	2	4	3	1	1	7	3	11
2	7	0	2	1	1	1	8	2	11*
	7	1	3	1	2	3	8	2	13*
2	7	1	3	2	1	1	8	3	12
2	7	2	4	1	3	4	8	2	14*
2	7	2	4	2	2	3	8	3	14*
2	7	2	4	3	1	1	8	3	12
3	6	0	3	1	2	3	5	2	10*
3	6	0	3	2	1	1	5	3	9
3	6	1	4	1	3	4	5	2	11*
3	6	1	4	2	2	3	5	3	11*
3	6	1	4	3	1	1	5	3	9
3	7	0	3	1	2	3	7	2	12*
3	7	0	3	2	1	1	7	3	11
3	7	1	4	1	3	4	7	2	13*
3	7	1	4	2	2	3	7	3	13*
3	7	1	4	3	1	1	7	3	11
4	7	0	4	1	3	4	5	2	11*
4	7	0	4	2	2	3	5	3	11*
4	7	0	4	3	1	1	5	3	9

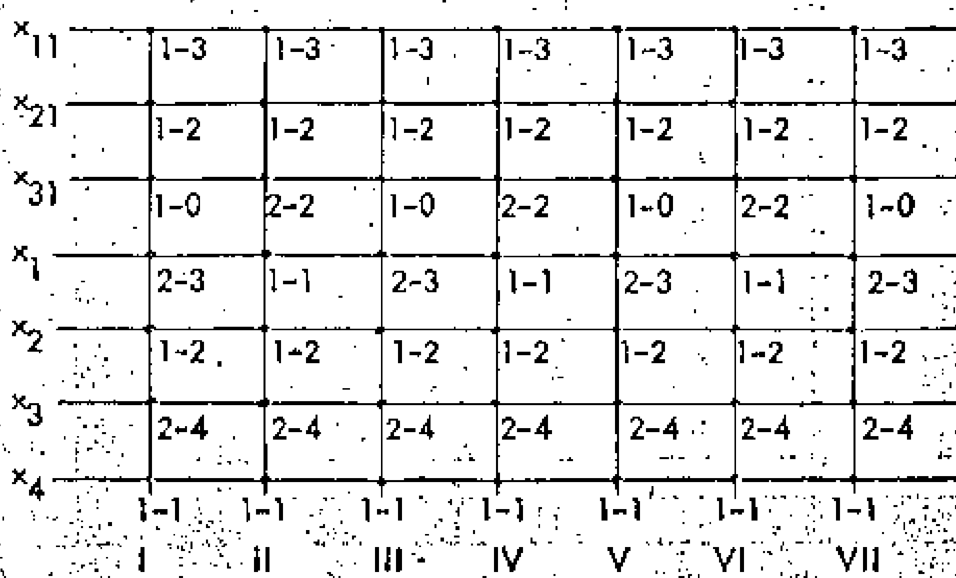
4o. Cálculo de las etapas "3" y "4"

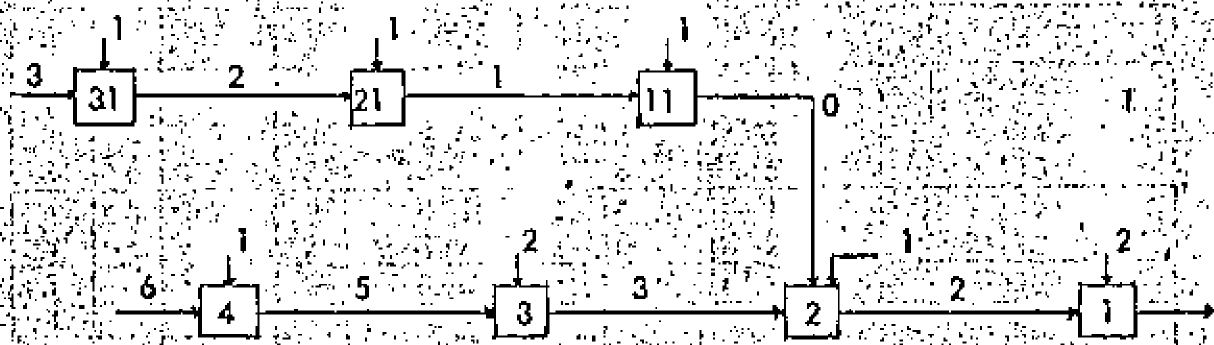
ξ_{01}	ξ_{31}	ξ_3	x_3	$\xi_3 - x_3 = \xi_2$	$\Lambda_{2+31}(\xi_2)$	$r_3(\xi_3, x_3)$	$n_{3+31}(\xi_3, x_3)$
0	3	3	1	2	8	0	8*
0	3	4	1	3	10	0	10
0	3	4	2	2	8	4	12*
0	3	5	1	4	11	0	11
0	3	5	2	3	10	4	14*
0	3	5	3	2	8	5	13
0	4	3	1	2	10	0	10*
0	4	4	1	3	12	0	12
0	4	4	2	2	10	4	14*
0	4	5	1	4	13	0	13
0	4	5	2	3	12	4	16*
0	4	5	3	2	10	5	15
0	5	3	1	2	11	0	11*
0	5	4	1	3	13	0	13
0	5	4	2	2	11	4	15*
0	5	5	1	4	14	0	14
0	5	5	2	3	13	4	17*
0	5	5	3	2	11	5	16
0	6	3	1	2	13	0	13*
0	6	4	1	3	15	0	15
0	6	4	2	2	13	4	17
0	6	5	1	4	16	0	16
0	6	5	2	3	15	4	19*
0	6	5	3	2	13	5	18
0	7	3	1	2	14	0	14*
0	7	4	1	3	16	0	16
0	7	4	2	2	14	4	18*
0	7	5	1	4	17	0	17
0	7	5	2	3	16	4	20*
0	7	5	3	2	14	5	19
1	4	2	1	1	8	0	8*
1	4	3	1	2	10	0	10
1	4	3	2	1	8	4	12*
1	4	4	1	3	11	0	11
1	4	4	2	2	10	4	14*
1	4	4	3	1	8	5	13
1	4	5	2	3	11	4	15*
1	4	5	3	2	10	5	15*
1	5	2	1	1	10	0	10*
1	5	3	1	2	12	0	12
1	5	3	2	1	10	4	14*
1	5	4	1	3	13	0	13
1	5	4	2	2	12	4	16*
1	5	4	3	1	10	5	15
1	5	5	2	3	13	4	17*
1	5	5	3	2	12	5	17*

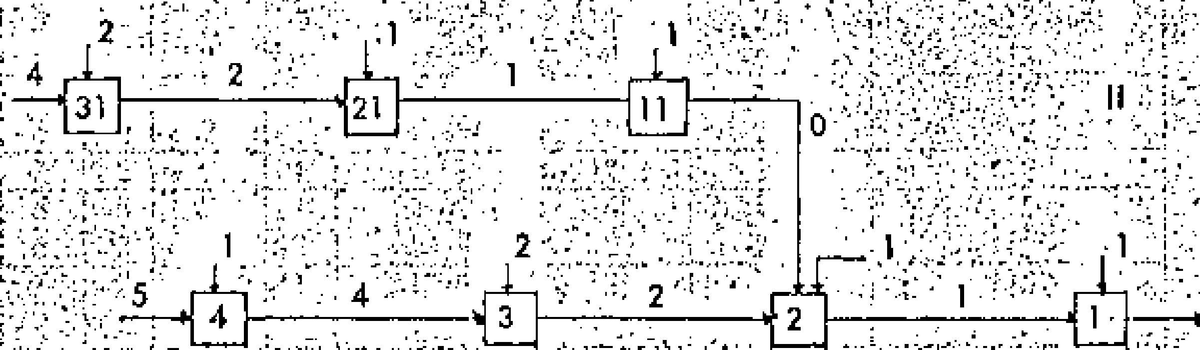
ξ_{01}	ξ_{31}	ξ_3	x_3	$\xi_3 - x_3 = \xi_2$	$\Lambda_{2+31}(\xi_2)$	$f_3(\xi_3, x_3)$	$\Omega_{3+31}(\xi_3, x_3)$
1	6	2	1	1	11	0	11*
1	6	3	1	2	13	0	13
1	6	3	2	1	11	4	15*
1	6	4	1	3	14	0	14
1	6	4	2	2	13	4	17*
1	6	4	3	1	11	5	16
1	6	5	2	3	14	4	18*
1	6	5	3	2	13	5	18*
1	7	2	1	1	13	0	13*
1	7	3	1	2	15	0	15
1	7	3	2	1	13	4	17*
1	7	4	1	3	16	0	16
1	7	4	2	2	15	4	19*
1	7	4	3	1	13	5	18
1	7	5	2	3	16	4	20*
1	7	5	3	2	15	5	20*
2	5	1	1	0	8	0	8*
2	5	2	1	1	10	0	10
2	5	2	2	0	8	4	12*
2	5	3	1	2	11	0	11
2	5	3	2	1	10	4	14*
2	5	3	3	0	8	5	13
2	5	4	2	2	11	4	15*
2	5	4	3	1	10	5	15*
2	5	5	3	2	11	5	16*
2	6	1	1	0	10	0	10*
2	6	2	1	1	12	0	12
2	6	2	2	0	10	4	14*
2	6	3	1	2	13	0	13
2	6	3	2	1	12	4	16*
2	6	3	3	0	10	5	15
2	6	4	2	2	13	4	17*
2	6	4	3	1	12	5	17*
2	6	5	3	2	13	5	18*
2	7	1	1	0	11	0	11*
2	7	2	1	1	13	0	13
2	7	2	2	0	11	4	15*
2	7	3	1	2	14	0	14
2	7	3	2	1	13	4	17*
2	7	3	3	0	11	5	16
2	7	4	2	2	14	4	18*
2	7	4	3	1	13	5	18*
2	7	5	3	2	14	5	19*

ξ_{01}	ξ_{31}	ξ_3	x_3	$\xi_3-x_3=\xi_2$	$\Lambda_{2+31}(\xi_2)$	$f_3(\xi_3,x_3)$	$\Omega_{3+31}(\xi_3,x_3)$	
3	6	1	1	0	10	0	10*	
3	6	2	1	1	11	0	11	
3	6	2	2	0	10	4	14*	← VII
3	6	3	2	1	11	4	15*	
3	6	3	3	0	10	5	15*	
3	6	4	3	1	11	5	16*	
3	7	1	1	0	12	0	12*	
3	7	2	1	1	13	0	13	
3	7	2	2	0	12	4	16*	
3	7	3	2	1	13	4	17*	
3	7	3	3	0	12	5	17*	
3	7	4	3	1	13	5	18*	
4	7	1	1	0	11	0	11*	
4	7	2	2	0	11	4	15*	
4	7	3	3	0	11	5	16*	

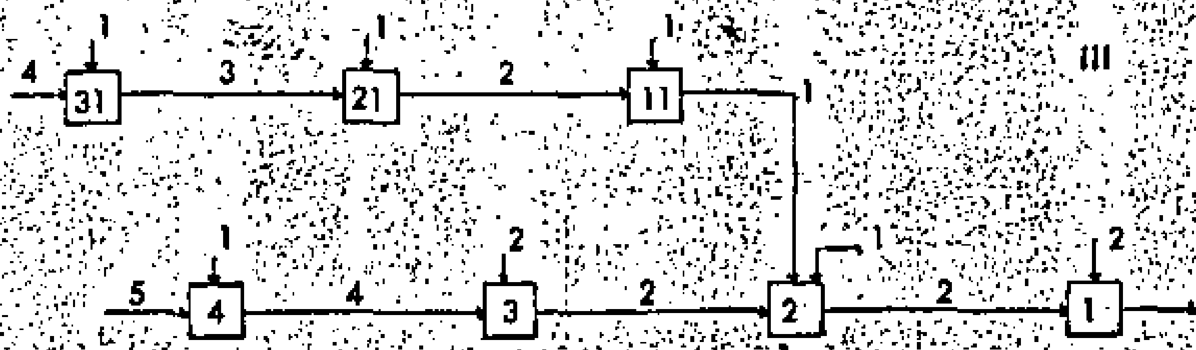
ξ_{01}	ξ_{31}	ξ_4	ξ_4+3	x_4	$\xi_4-x_4=\xi_3$	$\Lambda_{3+31}(\xi_3)$	$f_4(\xi_4,x_4)$	$\Omega_4(\xi_4,x_4,\xi_{01},\xi_{31})$	
0	3	6	9	1	5	14	1	15	← I
0	3	6	9	2	4	12	2	14	
0	3	6	9	3	3	8	5	13	
0	4	5	9	1	4	14	1	15	← II
0	4	5	9	2	3	10	2	12	
0	5	4	9	1	3	11	1	12	
1	4	5	9	1	4	14	1	15	← III
1	4	5	9	2	3	12	2	14	
1	4	5	9	3	2	8	5	13	
1	5	4	9	1	3	14	1	15	← IV
1	5	4	9	2	2	10	2	12	
1	6	3	9	1	2	11	1	12	
2	5	4	9	1	3	14	1	15	← V
2	5	4	9	2	2	12	2	14	
2	5	4	9	3	1	8	5	13	
2	6	3	9	1	2	14	1	15	← VI
2	6	3	9	2	1	10	2	12	
2	7	2	9	1	1	11	1	12	
3	6	3	9	1	2	14	1	15	← VII
3	6	3	9	2	1	10	2	12	
3	7	2	9	1	1	12	1	13	
4	7	2	9	1	1	11	1	12	


x_{11}
x_{21}
x_{31}
x_1
x_2
x_3
x_4
1-3 1-3 1-3 1-3 1-3 1-3 1-3
1-2 1-2 1-2 1-2 1-2 1-2 1-2
1-0 2-2 1-0 2-2 1-0 2-2 1-0
2-3 1-1 2-3 1-1 2-3 1-1 2-3
1-2 1-2 1-2 1-2 1-2 1-2 1-2
2-4 2-4 2-4 2-4 2-4 2-4 2-4
1-1 1-1 1-1 1-1 1-1 1-1 1-1
I II III IV V VI VII

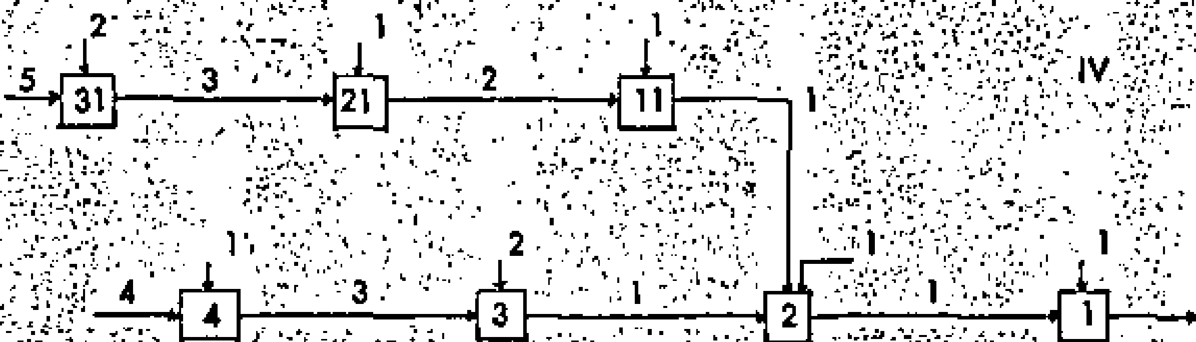

31
21
11
4
3
2
1
I


31
21
11
4
3
2
1
II

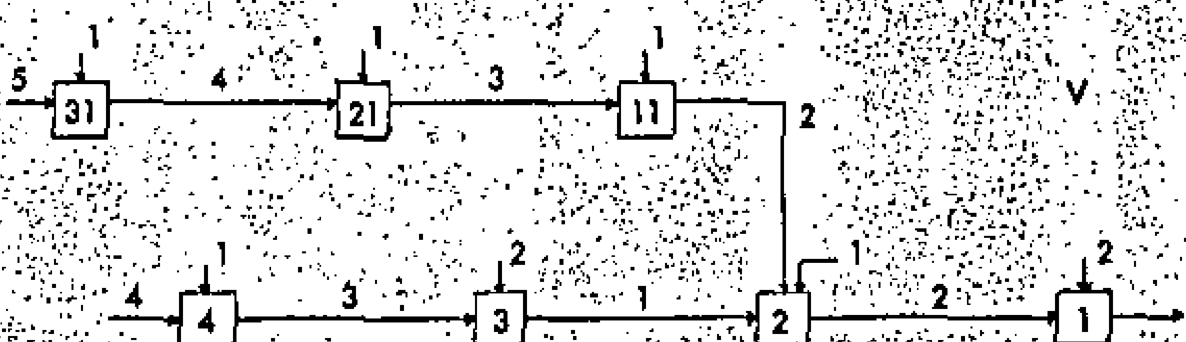
III



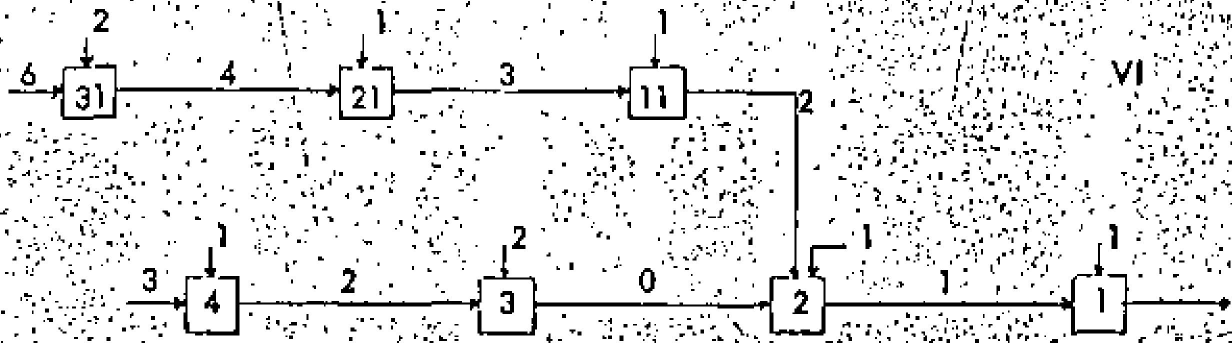
IV



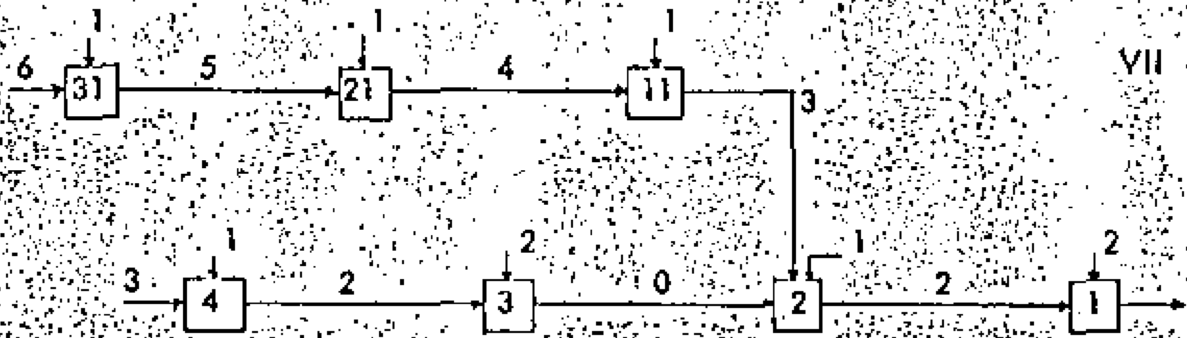
V



VI

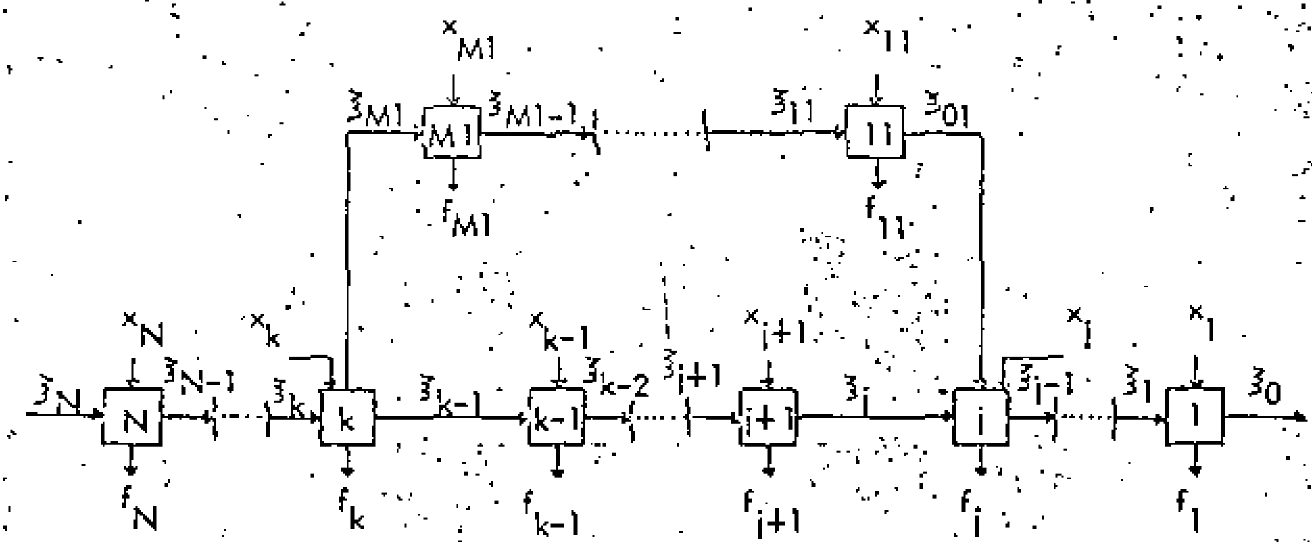


VII



4

182. Sistemas con alimentación hacia adelante



Un sistema con retroalimentación hacia adelante consiste de un sistema en serie de N etapas con una rama divergente en la etapa k, la converge nuevamente al sistema principal en la etapa j, $j < k$.

Las transformaciones de las variables de estado quedan definidas por:

$$\xi_{i-1} = t_i(\xi_i, x_i)\ ;\ i = 1, \ldots, N;\ i \neq j$$
$$\xi_{i-1,1} = t_{i1}(\xi_{i1}, x_{i1})\quad i = 1, \ldots, M$$
$$\xi_{j-1} = t_j(\xi_{01}, \xi_j, x_j)$$
$$\xi_{M1} = t_{k1}(\xi_k, x_k)$$

Análogamente, los rendimientos obtenidos en las transformaciones resultan:

$$f_i(\xi_i, x_i)\ ;\ i = 1, \ldots, N\ ;\ i \neq j$$
$$f'_{i1}(\xi_{i1}, x_{i1})\ ;\ i = 1, \ldots, M$$
$$f_j = f_j(\xi_{01}, \xi_j, x_j)$$

Al estudiar un sistema con retroalimentación hacia adelante es importante tener presente que la rama es tanto divergente como convergente y por tanto ξ_{M1} y ξ_{01} afectan el rendimiento del sistema seriado. Si la rama se optimiza separadamente como un sistema seriado su rendimiento óptimo deberá determinarse como una función tanto de ξ_{01} como de ξ_{M1}. Esta es la premisa fundamental tanto para estos sistemas como para los de retroalimentación.

Ahora bien, el rendimiento óptimo de la rama puede observarse en el sistema principal en la etapa en que ocurre la divergencia o en la etapa en que ocurre la convergencia.

a) Si la etapa de absorción es aquella en que ocurre la divergencia se tendrá:

$$\Lambda_{k+M1}(\xi_k) = \max_{\xi_{01}, x_k} \Big[f_k(\xi_k, x_k) \oplus \Lambda_{k-1}(t_k(\xi_k, x_k), \xi_{01}) \oplus \Lambda_{M1}(t_{k1}(\xi_k, x_k), \xi_{01}) \Big]$$

b) Para la rama divergente - convergente se tendrá

$$\Lambda_{i1}(\xi_{i1}, \xi_{01}) = \max_{x_{i1}} \Big[f_{i1}(\xi_{i1}, x_{i1}) \oplus \Lambda_{i-1,1}(t_{i1}(\xi_{i1}, x_{i1}), \xi_{01}) \Big]$$

$$i = 2, \ldots, M$$

c) Para las etapas uno a k - 1 se tiene:

$$\Lambda_j(\xi_j, \xi_{0j}) = \max_{x_j} \Big[f_j(\xi_j, \xi_{0j}, x_j) \ominus \Lambda_{j-1}(t_j(\xi_{01}, x_j)) \Big]$$

$$\Lambda_i(\xi_i, \xi_{01}) = \max_{x_i} \Big[f_i(\xi_i, x_i) \ominus \Lambda_{i-1}(t_i(\xi_i, x_i), \xi_{01}) \Big]$$

$$i = j+1, \ldots, k-1$$

y

$$\Lambda_i(\xi_i) = \max_{x_i} \left[f_i(\xi_i, x_i) \oplus \Lambda_{i-1}(t_i(\xi_i, x_i)) \right] \quad ; \quad i = 2, \ldots, j-1$$

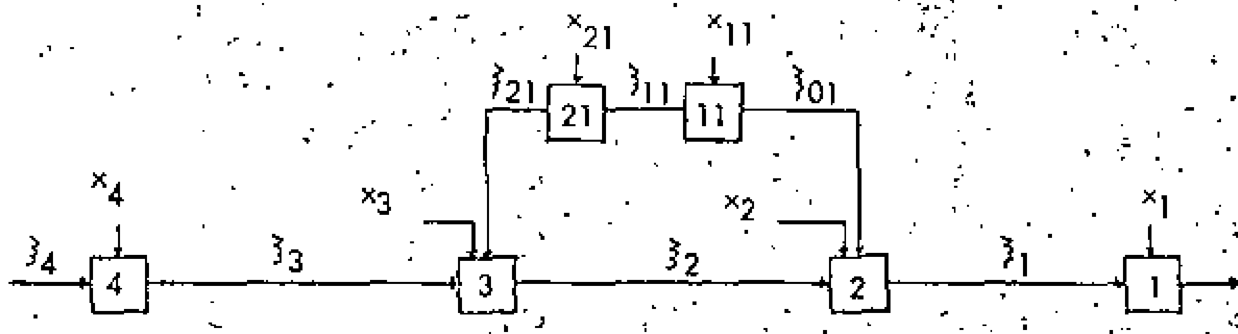
d) Para las etapas $k+1$ en adelante

$$\Lambda_{i+M1}(\xi_i) = \max_{x_i} \left[f_i(\xi_i, x_i) \ominus \Lambda_{i-1}(t_i(\xi_i, x_i)) \right] \quad ; \quad i = k+1, \ldots, N.$$

Es claro que la absorción en el sistema principal puede llevarse a cabo en la etapa de convergencia, sin embargo, esto requiere el uso de la transformación inversa con las implicaciones ya señaladas.

183. Ejemplo

Con los datos de los ejemplos anteriores analizar el sistema mostrado en la figura.



Ecuaciones de sistema.

$$\xi_3 = \xi_4 - x_4 \qquad \xi_{01} = \xi_{11} - x_{11}$$

$$\xi_{21} + \xi_2 = \xi_3 - x_3 \qquad \xi_1 = (\xi_2 + \xi_{01}) - x_2$$

$$\xi_{11} = \xi_{21} - x_{21} \qquad \xi_1 = x_1$$

Restricciones:

$$6 \leq \xi_4 \leq 9 \qquad 2 \leq \xi_{21} \leq 7 \qquad 4 \leq \xi_{21} + \xi_2 \leq 7$$

$$5 \leq \xi_3 \leq 8 \qquad 1 \leq \xi_{11} \leq 6 \qquad 2 \leq \xi_{01} + \xi_2 \leq 5$$

$$0 \leq \xi_2 \leq 5 \qquad 0 \leq \xi_{01} \leq 5 \qquad 1 \leq x_i \leq 3$$

$$1 \leq \xi_1 \leq 3$$

1o. Cálculo de las etapas "11" y "21"

ξ_{01}	ξ_{11}	x_{11}	$\xi_{11}-x_{11}=\xi_{01}$	$f_{11}(\xi_{11},x_{11})$	
0	1	1	0	3*	← I
0	2	2	0	4*	
0	3	3	0	5*	
1	2	1	1	3*	← II
1	3	2	1	4*	
1	4	3	1	5*	
2	3	1	2	3*	← III
2	4	2	2	4*	
2	5	3	2	5*	
3	4	1	3	3*	
3	5	2	3	4*	
3	6	3	3	5*	
4	5	1	4	3*	
4	6	2	4	4*	
5	6	1	5	3*	

2o. Cálculo etapa "1"

$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 1, x_1 = 1) = 1$$

$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 2, x_1 = 2) = 3$$

$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 3, x_1 = 3) = 4$$

ξ_{01}	ξ_{21}	x_{21}	$\xi_{21}-x_{21}=\xi_{11}$	$\Lambda_{11}(\xi_{11})$	$f_{21}(\xi_{21},x_{21})$	$\Omega_{21}(\xi_{11},x_{21},\xi_{01})$	
0	2	1	1	3	2	5*	← I
0	3	1	2	4	2	6*	
0	3	2	1	3	2	5	
0	4	1	3	5	2	7	
0	4	2	2	4	2	6	
0	4	3	1	3	5	8*	
0	5	2	3	5	2	7	
0	5	3	2	4	5	9*	
0	6	3	3	5	5	10*	
1	3	1	2	3	2	5*	← II
1	4	1	3	4	2	6*	
1	4	2	2	3	2	5	
1	5	1	4	5	2	7	
1	5	2	3	4	2	6	
1	5	3	2	3	5	8*	
1	6	2	4	5	2	7	
1	6	3	3	4	5	9*	
1	7	3	4	5	5	10*	
2	4	1	3	3	2	5*	← III
2	5	1	4	4	2	6*	
2	5	2	3	3	2	5	
2	6	1	5	5	2	7	
2	6	2	4	4	2	6	
2	6	3	3	3	5	8*	
2	7	2	5	5	2	7	
2	7	3	4	4	5	9*	
3	5	1	4	3	2	5*	
3	6	1	5	4	2	6*	
3	6	2	4	3	2	5	
3	7	1	6	5	2	7	
3	7	2	5	4	2	6	
3	7	3	4	3	5	8*	
4	6	1	5	3	2	5*	
4	7	1	6	4	2	6*	
4	7	2	5	3	2	5	
5	7	1	6	3	2	5*	

Cálculo de la etapa "2"

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_2	$\xi_2+\xi_{01}$	x_2	$(\xi_2+\xi_{01})-x_2=\xi_1$	$\Lambda_1(\xi_1)$	$f_2(\xi_2,x_2)$	$\Omega_2(\xi_2,x_2,\xi_{01},\xi_{21})$
0	2	2	2	1	1	1	2	3*
0	2	3	3	1	2	3	2	5*
0	2	3	3	2	1	1	3	4
0	2	4	4	1	3	4	2	6*
0	2	4	4	2	2	3	3	6*
0	2	4	4	3	1	1	3	4
0	2	5	5	2	3	4	3	7*
0	2	5	5	3	2	3	3	6
0	3	2	2	1	1	1	2	3*
0	3	3	3	1	2	3	2	5*
0	3	3	3	2	1	1	3	4
0	3	4	4	1	3	4	2	6*
0	3	4	4	2	2	3	3	6*
0	3	4	4	3	1	1	3	4
0	4	2	2	1	1	1	2	3*
0	4	3	3	1	2	3	2	5*
0	4	3	3	2	1	1	3	4
0	5	2	2	1	1	1	2	3*
1	3	1	2	1	1	1	2	3*
1	3	2	3	1	2	3	2	5*
1	3	2	3	2	1	1	3	4
1	3	3	4	1	3	4	2	6*
1	3	3	4	2	2	3	3	6*
1	3	3	4	3	1	1	3	4
1	3	4	5	2	3	4	3	7*
1	3	4	5	3	2	3	3	6
1	4	1	2	1	1	1	2	3*
1	4	2	3	1	2	3	2	5*
1	4	2	3	2	1	1	3	4
1	4	3	4	1	3	4	2	6*
1	4	3	4	2	2	3	3	6*
1	4	3	4	3	1	1	3	4
1	5	1	2	1	1	1	2	3*
1	5	2	3	1	2	3	2	5*
1	5	2	3	2	1	1	3	4
1	6	1	2	1	1	1	2	3*
2	4	0	2	1	1	1	2	3*
2	4	1	3	1	2	3	2	5*
2	4	1	3	2	1	1	3	4
2	4	2	4	1	3	4	2	6*
2	4	2	4	2	2	3	3	6*
2	4	2	4	3	1	1	3	4
2	4	3	5	2	3	4	3	7*
2	4	3	5	3	2	3	3	6

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_2	$\xi_2+\ 01$	x_2	$(\xi_2+\xi_{01})-x_2=\xi_1$	$\Lambda_1(\xi_1)$	$f_2(\xi_2,x_2)$	$\Omega_2(\xi_2,x_2;\xi_{01},\xi_{21})$
2	5	0	2	1	1	1	2	3*
2	5	1	3	1	2	3	2	5*
2	5	1	3	2	1	1	3	4
2	5	2	4	1	3	4	2	6*
2	5	2	4	2	2	3	3	6*
2	5	2	4	3	1	1	3	4
2	6	0	2	1	1	1	2	3*
2	6	1	3	1	2	3	2	5*
2	6	1	3	2	1	1	3	4
2	7	0	2	1	1	1	2	3*
3	5	0	3	1	2	3	2	5*
3	5	0	3	2	1	1	3	4
3	5	1	4	1	3	4	2	6*
3	5	1	4	2	2	3	3	6*
3	5	1	4	3	1	1	3	4
3	5	2	5	2	3	4	3	7*
3	5	2	5	3	2	3	3	6
3	6	0	3	1	2	3	2	5*
3	6	0	3	2	1	1	3	4
3	6	1	4	1	3	4	2	6*
3	6	1	4	2	2	3	3	6*
3	6	1	4	3	1	1	3	4
3	7	0	3	1	2	3	2	5*
3	7	0	3	2	1	1	3	4
4	6	0	4	1	3	4	2	6*
4	6	0	4	2	2	3	3	6*
4	6	0	4	3	1	1	3	4
4	6	1	5	2	3	4	3	7*
4	6	1	5	3	2	3	3	6
4	7	0	4	1	3	4	2	6*
4	7	0	4	2	2	3	3	6*
4	7	0	4	3	1	1	3	4
5	7	0	5	2	3	4	3	7*
5	7	0	5	3	2	3	3	6

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_3	x_3	$\xi_3-x_3=\xi_2+\xi_{21}$	ξ_2	$\Lambda_2(\xi_2)$	$\Lambda_{21}^{C}(\xi_{31})$	$f_3(\xi_3,x_3)$	$\Omega_{3+21}(\xi_3,x_3,\xi_{01},\xi_{21}^{C})$
0	2	5	1	4	2	3	5	0	8*
0	2	6	1	5	3	5	5	0	10
0	2	6	2	4	2	3	5	4	12*
0	2	7	1	6	4	6	5	0	11
0	2	7	2	5	3	5	5	4	14*
0	2	7	3	4	2	3	5	5	13
0	2	8	1	7	5	7	5	0	12
0	2	8	2	6	4	6	5	4	15*
0	2	8	3	5	3	5	5	5	15*
0	3	6	1	5	2	3	6	0	9*
0	3	7	1	6	3	5	6	0	11
0	3	7	2	5	2	3	6	4	13*
0	3	8	1	7	4	6	6	0	12
0	3	8	2	6	3	5	6	4	15*
0	3	8	3	5	2	3	6	5	14
0	4	7	1	6	2	3	8	0	11*
0	4	8	1	7	3	5	8	0	13
0	4	8	2	6	2	3	8	4	15*
0	5	8	1	7	2	3	9	0	12*
1	3	5	1	4	1	3	5	0	8*
1	3	6	1	5	2	5	5	0	10
1	3	6	2	4	1	3	5	4	12*
1	3	7	1	6	3	6	5	0	11
1	3	7	2	5	2	5	5	4	14*
1	3	7	3	4	1	3	5	5	13
1	3	8	1	7	4	7	5	0	12
1	3	8	2	6	3	6	5	4	15*
1	3	8	3	5	2	5	5	5	15*
1	4	6	1	5	1	3	6	0	9*
1	4	7	1	6	2	5	6	0	11
1	4	7	2	5	1	3	6	4	13*
1	4	8	1	7	3	6	6	0	12
1	4	8	2	6	2	5	6	4	15*
1	4	8	3	5	1	3	6	5	14
1	5	7	1	6	1	3	8	0	11*
1	5	8	1	7	2	5	8	0	13
1	5	8	2	6	1	3	8	4	15*
1	6	8	1	7	1	3	9	0	12*
2	4	5	1	4	0	3	5	0	8*
2	4	6	1	5	1	5	5	0	10
2	4	6	2	4	0	3	5	4	12*
2	4	7	1	6	2	6	5	0	11
2	4	7	2	5	1	5	5	4	14*
2	4	7	3	4	0	3	5	5	13
2	4	8	1	7	3	7	5	0	12
2	4	8	2	6	2	6	5	4	15*
2	4	8	3	5	1	5	5	5	15*

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_3	x_3	$\xi_3-x_3=\xi_2+\xi_{21}$	ξ_2	$\Lambda_2(\xi_2)$	$\Lambda_{21}(\xi_{21})$	$f_3(\xi_3,x_3)$	$\Omega_{3+21}(\xi_3,x_3,\xi_{01},\xi_{21})$
2	5	6	1	5	0	3	6	0	9*
2	5	7	1	6	1	5	6	0	11
2	5	7	2	5	0	3	6	4	13*
2	5	8	1	7	2	6	6	0	12
2	5	8	2	6	1	5	6	4	15*
2	5	8	3	5	0	3	6	5	14
2	6	7	1	6	0	3	8	0	11*
2	6	8	1	7	1	5	8	0	13
2	6	8	2	6	0	3	8	4	15*
2	7	8	1	7	0	3	9	0	12*
3	5	6	1	5	0	5	5	0	10*
3	5	7	1	6	1	6	5	0	11
3	5	7	2	5	0	5	5	4	14*
3	5	8	1	7	2	7	5	0	12
3	5	8	2	6	1	6	5	4	15**
3	5	8	3	5	0	5	5	5	15*
3	6	7	1	6	0	5	6	0	11*
3	6	8	1	7	1	6	6	0	12
3	6	8	2	6	0	5	6	4	15*
3	7	8	1	7	0	5	8	0	13*
4	6	7	1	6	0	6	5	0	11*
4	6	8	1	7	1	7	5	0	12
4	6	8	2	6	0	6	5	4	15*
4	7	8	1	7	0	6	6	0	12*
5	7	8	1	7	0	7	5	0	12*

Cálculo de la etapa "4"

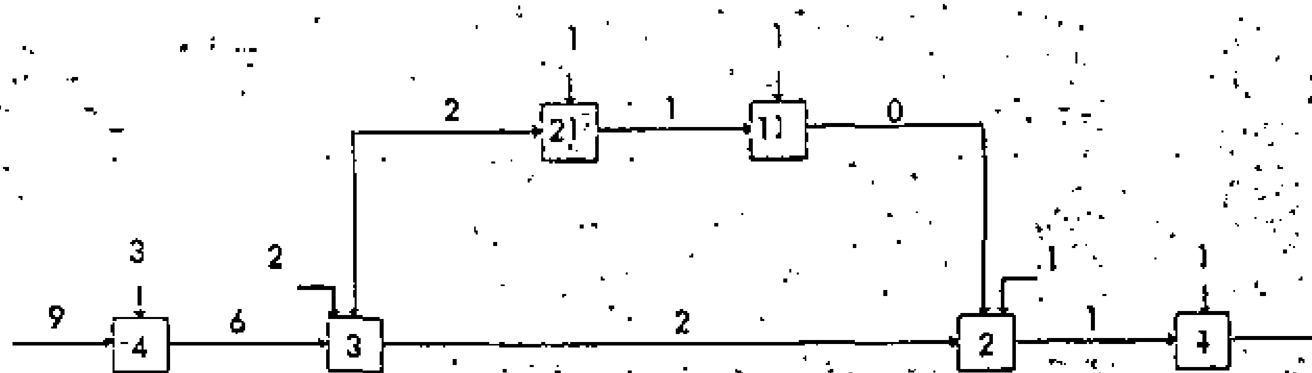
ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_4	x_4	$\xi_4-x_4=\xi_3$	$\Lambda_{3+21}(\xi_3)$	$f_4(\xi_4,x_4)$	$\Omega_{4+31}(\xi_3,x_3,\xi_{01},\xi_{21})$
0	2	6	1	5	8	1	9
0	2	7	1	6	12	1	13
0	2	7	2	5	8	2	10
0	2	8	1	7	14	1	15
0	2	8	2	6	12	2	14
0	2	8	3	5	8	5	13
0	2	9	1	8	15	1	16
0	2	9	2	7	14	2	16
0	2	9	3	6	12	5	17

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_4	x_4	$\xi_4 - x_4 = \xi_3$	$\Lambda_{3+21}(\xi_3)$	$f_4(\xi_4, x_4)$	$\Omega_{4+31}(\xi_3, x_3, \xi_{01}, \xi_{21})$
0	3	7	1	6	9	1	10
0	3	8	1	7	13	1	14
0	3	8	2	6	9	2	11
0	3	9	1	8	15	1	16
0	3	9	2	7	13	2	15
0	3	9	3	6	9	5	14
0	4	8	1	7	11	1	12
0	4	9	1	8	15	1	16
0	4	9	2	7	11	2	13
0	5	9	1	8	12	1	13
1	3	6	1	5	8	1	9
1	3	7	1	6	12	1	13
1	3	7	2	5	8	2	10
1	3	8	1	7	14	1	15
1	3	8	2	6	12	2	14
1	3	8	3	5	8	5	13
1	3	9	1	8	15	1	16
1	3	9	2	7	14	2	16
1	3	9	3	6	12	5	17
1	4	7	1	6	9	1	10
1	4	8	1	7	13	1	14
1	4	8	2	6	9	2	11
1	4	9	1	8	15	1	16
1	4	9	2	7	13	2	15
1	4	9	3	6	9	5	14
1	5	8	1	7	11	1	12
1	5	9	1	8	15	1	16
1	5	9	2	7	11	2	13
1	6	9	1	8	12	1	13
2	4	6	1	5	8	1	9
2	4	7	1	6	12	1	13
2	4	7	2	5	8	2	10
2	4	8	1	7	14	1	15
2	4	8	2	6	12	2	14
2	4	8	3	5	8	5	13
2	4	9	1	8	15	1	16
2	4	9	2	7	14	2	16
2	4	9	3	6	12	5	17
2	5	7	1	6	9	1	10
2	5	8	1	7	13	1	14
2	5	8	2	6	9	2	11
2	5	9	1	8	15	1	16
2	5	9	2	7	13	2	15
2	5	9	3	6	9	5	14

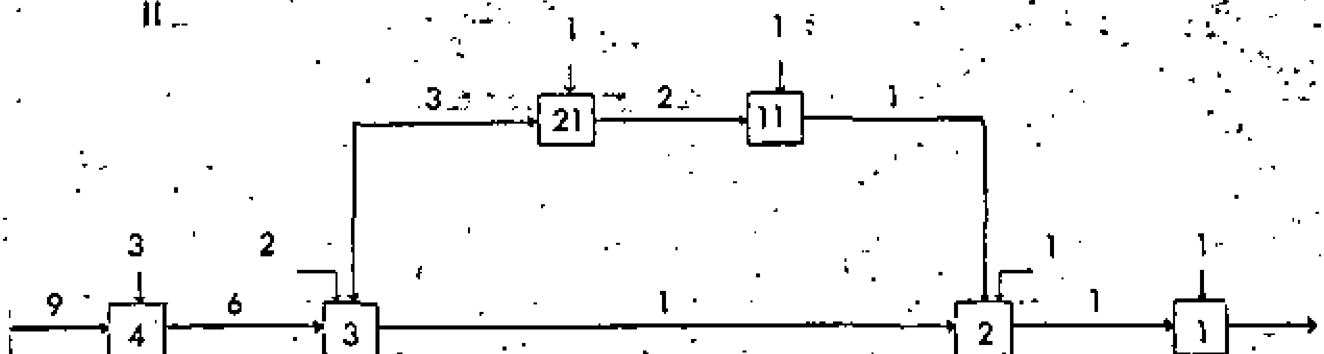
ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_4	x_4	$\xi_4 - x_4 = \xi_3$	$\Lambda_{3+21}(\xi_3)$	$f_4(\xi_4, x_4)$	$\Omega_{4+31}(\xi_4, x_4, \xi_{01}, \xi_{21})$
2	6	8	1	7	11	1	12
2	6	9	1	8	15	1	16
2	6	9	2	7	11	2	13
2	7	9	1	8	12	1	13
3	5	7	1	6	10	1	11
3	5	8	1	7	14	1	15
3	5	8	2	6	10	2	12
3	5	9	1	8	15	1	16
3	5	9	2	7	14	2	16
3	5	9	3	6	10	5	15
3	6	8	1	7	11	1	12
3	6	9	1	8	15	1	16
3	6	9	2	7	11	2	13
3	7	9	1	8	13	1	14
4	6	8	1	7	11	1	12
4	6	9	1	8	15	1	16
4	6	9	2	7	11	2	13
4	7	9	1	8	12	1	13
5	7	9	1	8	12	1	13

x_{11}	1-3	1-3	1-3	1-3
x_{21}	1-2	1-2	1-2	1-2
x_1	1-1	1-1	1-1	1-1
x_2	1-2	1-2	1-2	1-2
x_3	2-4	2-4	2-4	2-4
x_4	3-5	3-5	3-5	3-5

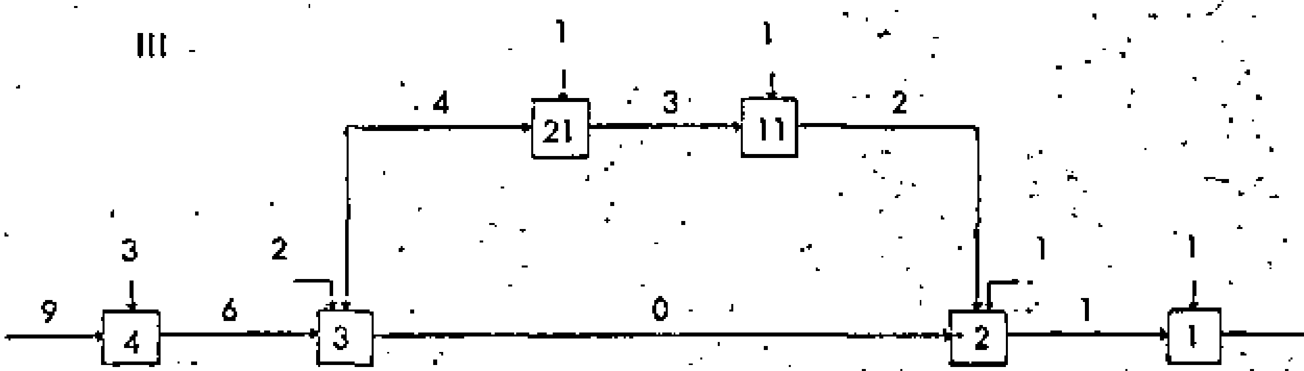
I



II



III

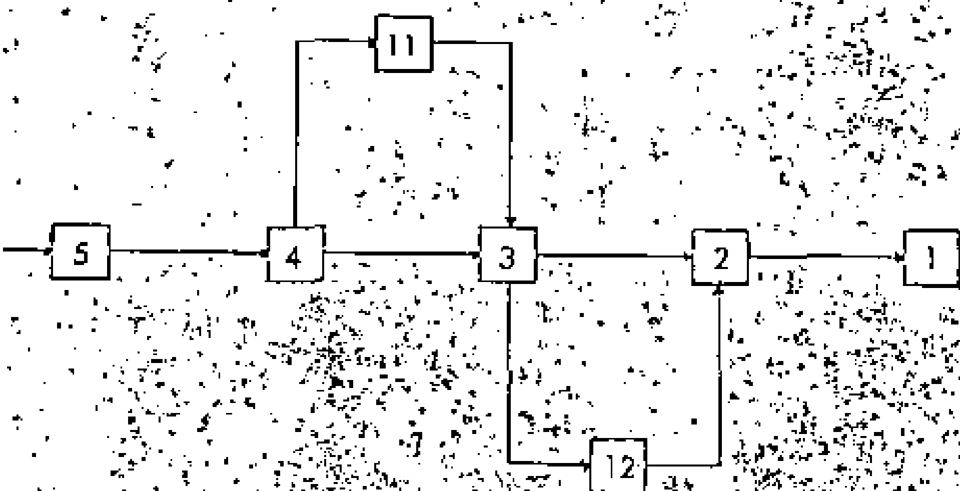


4

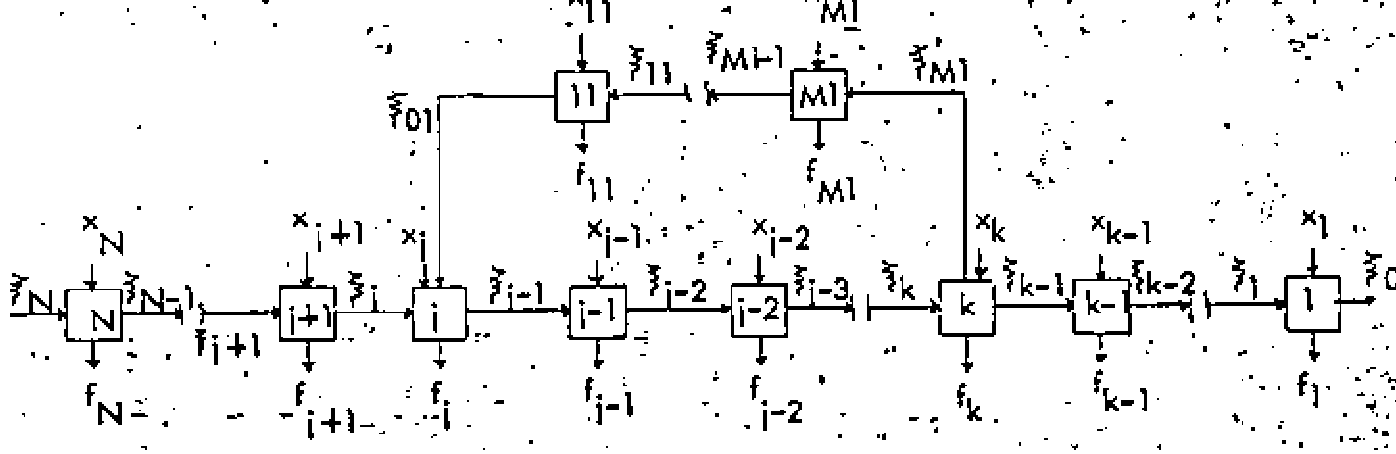
184. Ejercicios

a) Estudiar para sensibilidad el ejemplo anterior.

b) Analizar para sensibilidad el sistema mostrado.



185. Sistemas con retroalimentación



Los sistemas con retroalimentación coinciden con los de alimentación hacia adelante excepto en la posición relativa de las etapas j y k para las que en el caso de retroalimentación se tiene $k < j$, en donde k es la etapa en que ocurre la divergencia y j es aquella en que se realiza la convergencia.

Como en el caso anterior la absorción se puede llevar a cabo tanto en la etapa en que ocurre la divergencia como en la que se tiene la convergencia. Se optará por llevarla a cabo en la que se presenta la divergencia por las razones antes apuntadas.

El método a seguir puede resumirse de la manera siguiente:

a) Optimizar las etapas uno a k-1 en la forma usual para obtener

$$\Lambda_{k-1}(\xi_{k-1})$$

b) Optimizar la rama que consta de las etapas 11 a M_1 para obtener

$$\Lambda_{M1}(\xi_{01},\xi_{M1})$$

c) Absorver la rama en la etapa k mediante

$$\Lambda_{k+M1}(\xi_k,\xi_{01}) = \max \left[f_k(\xi_k,x_k) \oplus \Lambda_{k-1}(t_k(\xi_k,x_k)) \oplus \Lambda_{M1}(\xi_{01},t_{k1}(\xi_k,x_k)) \right]$$

d) Las etapas $k+1$ hasta $j-1$, se optimizan hasta encontrar

$\Lambda_{j-1+M1}(\xi_{j-1},\xi_{01})$ en la forma usual.

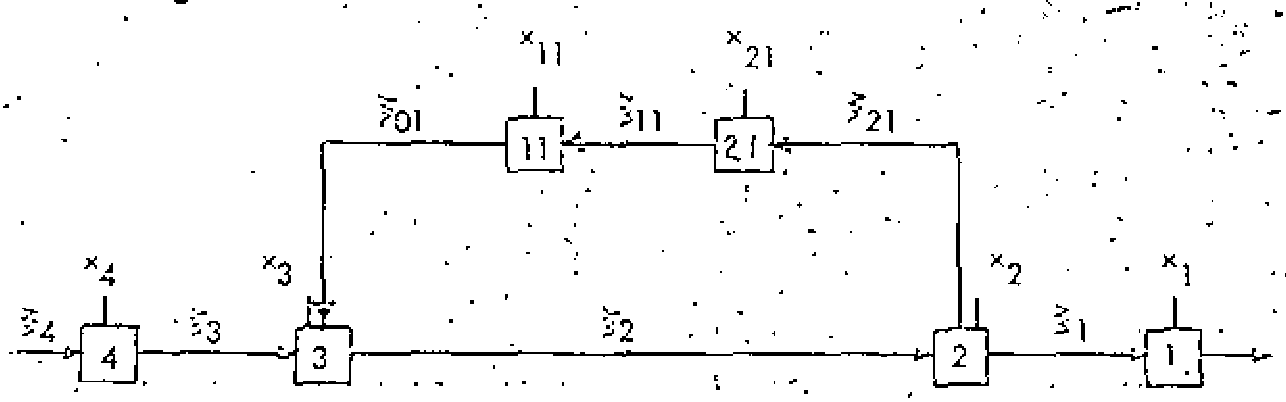
e) En la etapa j, $_{01}$ se optimiza mediante

$$\Lambda_{j+M1}(\xi_j) = \max_{\xi_{01},x_j} \left[f_j(\xi_{01},\xi_j,x_j) \oplus \Lambda_{j-1+M1}(t_j(\xi_j,x_j),\xi_{01}) \right]$$

f) Se optimizan las restantes etapas para obtener $\Lambda_{N+M1}(\xi_N)$

186. Ejemplo

Con los datos de los problemas anteriores analizar el sistema mostrado en la figura.



Ecuaciones de Sistema

$$\xi_3 = \xi_4 - x_4 \qquad \xi_{01} = \xi_{11} - x_{11}$$

$$\xi_2 = (\xi_3 + \xi_{01}) - x_3 \qquad \xi_{11} = \xi_{21} - x_{21}$$

$$\xi_1 + \xi_{21} = \xi_2 - x_2$$

$$\xi_1 = x_1$$

Restricciones

$$-6 \leq \xi_4 \leq 9 \qquad -2 \leq \xi_1 + \xi_{21} \leq \cancel{4}\ 7 \qquad 0 \leq \xi_{01} \leq 3$$

$$-5 \leq \xi_3 + \xi_{01} \leq 8 \qquad 1 \leq \xi_1 \leq 3 \qquad 1 \leq \xi_{11} \leq 4$$

$$2 \leq \xi_2 \leq 8 \qquad 5 \leq \xi_3 \leq 8 \qquad 2 \leq \xi_{21} \leq 5$$

Cálculo etapas "11" y "21"

ξ_{01}	ξ_{11}	x_{11}	$\xi_{11} - x_{11} = \xi_{01}$	$f_{11}(\xi_{11}, x_{1}\wedge)$
0	1	1	0	3
0	2	2	0	4
0	3	3	0	5
1	2	1	1	3
1	3	2	1	4
1	4	3	1	5
2	3	1	2	3
2	4	2	2	4
3	4	1	3	3

ξ_{01}	ξ_{21}	x_{21}	$\xi_{21}-x_{21}=\xi_{11}$	$\Lambda_{11}(\xi_{11})$	$f_{21}(\xi_{21},x_{21})$	$\Omega_{21}(\xi_{21},x_{21},\xi_{01})$
0	2	1	1	3	2	5*
0	3	1	2	4	2	6*
0	3	2	1	3	2	5
0	4	1	3	5	2	7
0	4	2	2	4	2	6
0	4	3	1	3	5	8*
0	5	2	3	5	2	7
0	5	3	2	4	5	9*
1	3	1	2	3	2	5*
1	4	1	3	4	2	6*
1	4	2	2	3	2	5
1	5	1	4	5	2	7
1	5	2	3	4	2	6
1	5	3	2	3	5	8*
2	4	1	3	3	2	5*
2	5	1	4	4	2	6*
2	5	2	3	3	2	5
3	5	1	4	3	2	5*

Cálculo de la etapa "1"

$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 1,\ x_1 = 1) = 1$$
$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 2,\ x_1 = 2) = 3$$
$$\Omega_1 = f_1(\xi_1 = 3,\ x_1 = 3) = 4$$

Cálculo de la etapa "2"

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_2	x_2	$\xi_2 - x_2 = \xi_1 + \xi_{21}$	ξ_1	$\Lambda_1(\xi_1)$	$\Lambda_{21}(\xi_{21})$	$f_2(\xi_2, x_2)$	$\Omega_{2+21}(\xi_2, x_2, \xi_{21}, \xi_{01})$
0	2	4	1	3	1	1	5	2	8*
0	2	5	1	4	2	3	5	2	10*
0	2	5	2	3	1	1	5	3	9
0	2	6	1	5	3	4	5	2	11*
0	2	6	2	4	2	3	5	3	11*
0	2	6	3	3	1	1	5	3	9
0	2	7	2	5	3	4	5	3	12*
0	2	7	3	4	2	3	5	3	11
0	2	8	3	5	3	4	5	3	12*
0	3	5	1	4	1	1	6	2	9*
0	3	6	1	5	2	3	6	2	11*
0	3	6	2	4	1	1	6	3	10
0	3	7	1	6	3	4	6	2	12*
0	3	7	2	5	2	3	6	3	12*
0	3	7	3	4	1	1	6	3	10
0	3	8	2	6	3	4	6	3	13*
0	3	8	3	5	2	3	6	3	12
0	4	6	1	5	1	1	8	2	11*
0	4	7	1	6	2	3	8	2	13*
0	4	7	2	5	1	1	8	3	12
0	4	8	1	7	3	4	8	2	14*
0	4	8	2	6	2	3	8	3	14*
0	4	8	3	5	1	1	8	3	12
0	5	7	1	6	1	1	9	2	12*
0	5	8	1	7	2	3	9	2	14*
0	5	8	2	6	1	1	9	3	13
1	3	5	1	4	1	1	5	2	8*
1	3	6	1	5	2	3	5	2	10*
1	3	6	2	4	1	1	5	3	9
1	3	7	1	6	3	4	5	2	11*
1	3	7	2	5	2	3	5	3	11*
1	3	7	3	4	1	1	5	3	9
1	3	8	2	6	3	4	5	3	12*
1	3	8	3	5	2	3	5	3	11
1	4	6	1	5	1	1	6	2	9*
1	4	7	1	6	2	3	6	2	11*
1	4	7	2	5	1	1	6	3	10
1	4	8	1	7	3	4	6	2	12*
1	4	8	2	6	2	3	6	3	12*
1	4	8	3	5	1	1	6	3	10

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_2	x_2	$\xi_2-x_2=\xi_1+\xi_{21}$	ξ_1	$\Lambda_1(\xi_1)$	$\Lambda_{21}(\xi_{21})$	$f_2(\xi_2,x_2)$	$\Omega_{2+21}(\xi_2,x_2,\xi_{01},\xi_{01})$
1	5	7	1	6	1	1	8	2	11*
1	5	8	1	7	2	3	8	2	13*
1	5	8	2	6	1	1	8	3	12
2	4	6	1	5	1	1	5	2	8*
2	4	7	1	6	2	3	5	2	10*
2	4	7	2	5	1	1	5	3	9
2	4	8	1	7	3	4	5	2	11*
2	4	8	2	6	2	3	5	3	11*
2	4	8	3	5	1	1	5	3	9
2	5	7	1	6	1	1	6	2	9*
2	5	8	1	7	2	3	6	2	11*
2	5	8	2	6	1	1	6	3	10
3	5	7	1	6	1	1	5	2	8*
3	5	8	1	7	2	3	5	2	10*
3	5	8	2	6	1	1	5	3	9

Cálculo de la etapa "3"

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_3	$\xi_3+\xi_{01}$	x_3	$\xi_3+\xi_{01}-x_3=\xi_2$	$\Lambda_{2+21}(\xi_2)$	$f_3(\xi_3,x_3)$	$\Omega_{3+21}(\xi_3,x_3)$
0	2	5	5	1	4	8	0	8*
0	2	6	6	1	5	10	0	10
0	2	6	6	2	4	8	4	12*
0	2	7	7	1	6	11	0	11
0	2	7	7	2	5	10	4	14*
0	2	7	7	3	4	8	5	13
0	2	8	8	1	7	12	0	12
0	2	8	8	2	6	11	4	15*
0	2	8	8	3	5	10	5	15*
0	3	6	6	1	5	9	0	9*
0	3	7	7	1	6	11	0	11
0	3	7	7	2	5	9	4	13*
0	3	8	8	1	7	12	0	12
0	3	8	8	2	6	11	4	15*
0	3	8	8	3	5	9	5	14
0	4	7	7	1	6	11	0	11*
0	4	8	8	1	7	13	0	13
0	4	8	8	2	6	11	4	15*
0	5	8	8	1	7	12	0	12*
1	3	5	6	1	5	8	0	8*
1	3	6	7	1	6	10	0	10

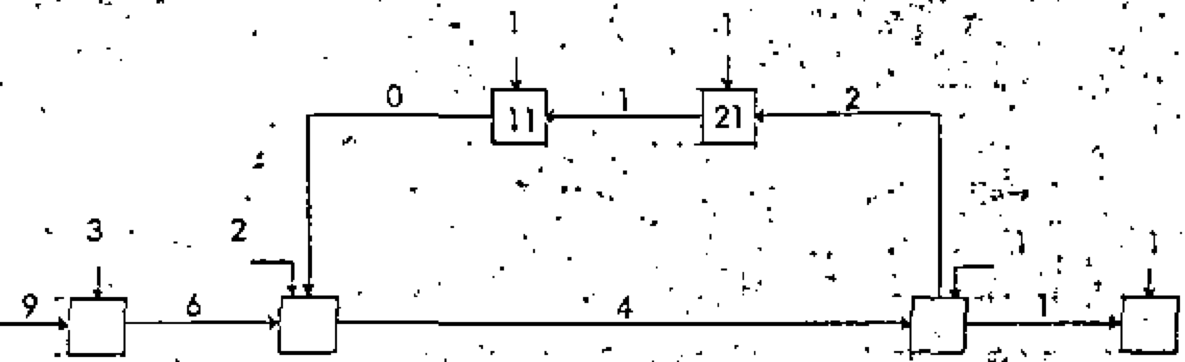
ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_3	$\xi_{01}+\xi_3$	x_3	$\xi_{01}+\xi_3-x_3=\xi_2$	$\Lambda_{2+21}(\xi_2)$	$f_3(\xi_3,x_3)$	$\Omega_{3+21}(\xi_3,x_3)$
1	3	6	7	1	6	10	0	10
1	3	6	7	2	5	8	4	12*
1	3	7	8	1	7	11	0	11
1	3	7	8	2	6	10	4	14*
1	3	7	8	3	5	8	5	13
1	4	6	7	1	6	9	0	9*
1	4	7	8	1	7	11	0	11
1	4	7	8	2	6	9	4	13*
1	5	7	8	1	7	11	0	11*
2	4	5	7	1	6	8	0	8*
2	4	6	8	1	7	10	0	10
2	4	6	8	2	6	8	4	12*
2	5	6	8	1	7	9	0	9*
3	5	5	8	1	7	8	0	8*

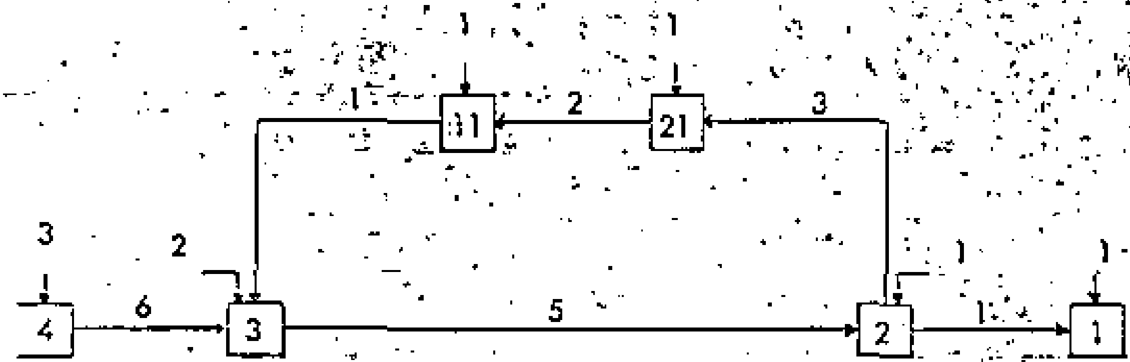
Cálculo de la etapa "4"

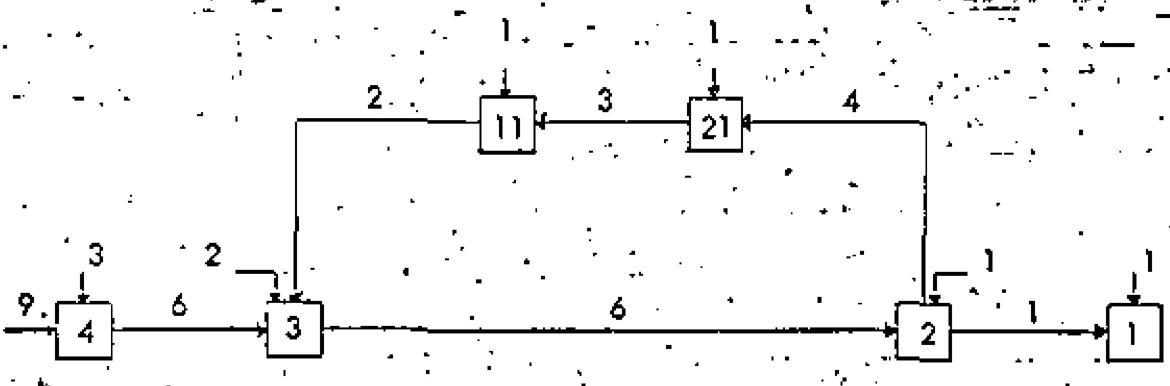
ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_4	x_4	$\xi_4-x_4=\xi_3$	$\Lambda_{3+21}(\xi_3)$	$f_4(\xi_4,x_4)$	$\Omega_4(\xi_4,x_4,\xi_{01},\xi_{21})$
0	2	6	1	5	8	1	9
0	2	7	1	6	12	1	13
0	2	7	2	5	8	2	10
0	2	8	1	7	14	1	15
0	2	8	2	6	12	2	14
0	2	8	3	5	8	5	13
0	2	9	1	8	15	1	16
0	2	9	2	7	14	2	16
0	2	9	3	6	12	5	17 *
0	3	7	1	6	9	1	10
0	3	8	1	7	13	1	14
0	3	8	2	6	9	2	11
0	3	9	1	8	15	1	16
0	3	9	2	7	13	2	15
0	3	9	3	6	9	5	14
0	4	8	1	7	11	1	12
0	4	9	1	8	15	1	16
0	4	9	2	7	11	2	13
0	5	9	1	8	12	1	13
1	3	6	1	5	8	1	9
1	3	7	1	6	12	1	13
1	3	7	2	5	8	2	10

ξ_{01}	ξ_{21}	ξ_4	x_4	$\xi_4 - x_4 = \xi_3$	$\Lambda_{3+21}(\xi_3)$	$f_4(\xi_4, x_4)$	$\Omega_{4+21}(\xi_4, x_4, \xi_{01}, \xi_{21})$
1	3	8	1	7	14	1	15
1	3	8	2	6	12	2	14
1	3	8	3	5	8	5	13
1	3	9	2	7	14	2	16
1	3	9	3	6	12	5	17 *
1	4	7	1	6	9	1	10
1	4	8	1	7	13	1	14
1	4	8	2	6	9	2	11
1	4	9	2	7	13	2	15
1	4	9	3	6	9	5	14
1	5	8	1	7	11	1	12
1	5	9	2	7	11	2	13
2	4	6	1	5	8	1	9
2	4	7	1	6	12	1	13
2	4	7	2	5	8	2	10
2	4	8	2	6	12	2	14
2	4	8	3	5	8	5	13
2	4	9	3	6	12	5	17 *
2	5	7	1	6	9	1	10
2	5	8	2	6	9	2	11
2	5	9	3	6	9	5	14
3	5	6	1	5	8	1	9
3	5	7	2	5	8	2	10
3	5	8	3	5	8	5	13

	I	II	III
x_{11}	1-3	1-3	1-3
x_{21}	1-2	1-2	1-2
x_1	1-1	1-1	1-1
x_2	1-2	1-2	1-2
x_3	2-4	2-4	2-4
x_4	3-5	3-5	3-5


1
1
0
11
1
21
2
3
2
1
1
9
6
4
1

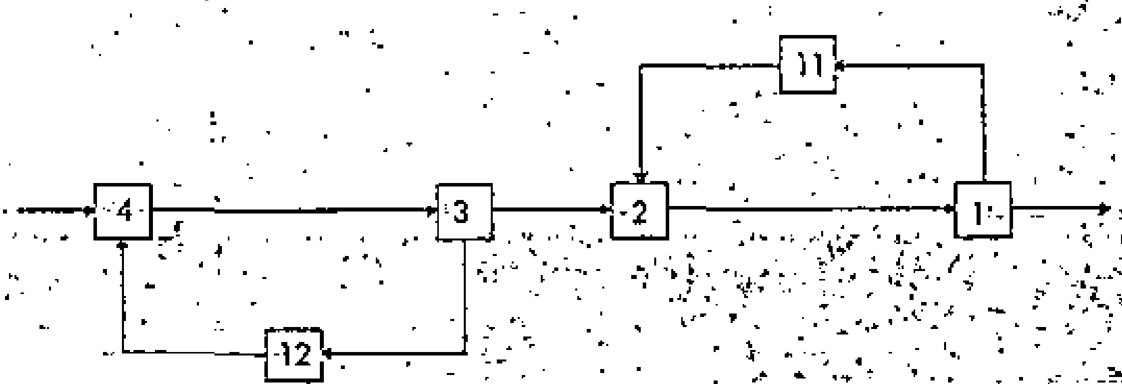

1
1
1
11
2
21
3
3
2
1
1
4
6
3
5
2
1
1


1
1
2
11
3
21
4
3
2
1
1
9
4
6
3
6
2
1
1

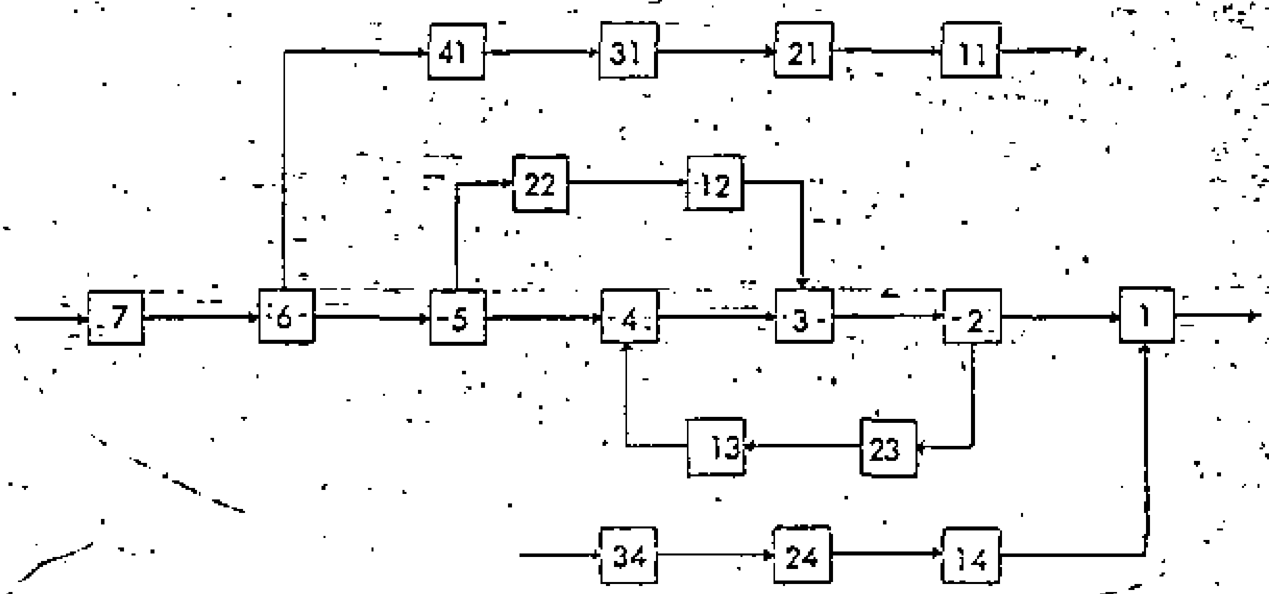
187. Ejercicios

a) Estudiar para sensibilidad el sistema del ejemplo anterior.

b) Analizar para sensibilidad el sistema mostrado en la figura



188. Caso general



Al presentarse un sistema como el mostrado en la figura en el que se combinan las estructuras elementales ya estudiadas, el camino a seguir consistirá en la descomposición en estructuras elementales, la optimización parcial y la absorción según las fórmulas de recurrencia aplicables a cada caso.

189. Observación

Como se ha visto al analizar los ejemplos anteriores las restricciones para las variables de estado desempeñan un papel primordial en la solución. Pueden tanto evitar trabajo inutil como impedir, de no estar correctamente planteadas, llegar a la solución óptima.

Para definirlos conviene aplicar algunas reglas por demás elementales.

a) Considerar todos los casos simples, influenciados por las ramas susceptibles de llevar el flujo inicial a la etapa o etapas finales.

b) Para cada caso simple asignar el valor mínimo que las restricciones para las variables de decisión permitan.

c) En las etapas en que se presenta divergencia restringir la suma de flujos salientes.

d) En las etapas en que se presenta convergencia restringir la suma de flujos entrantes.

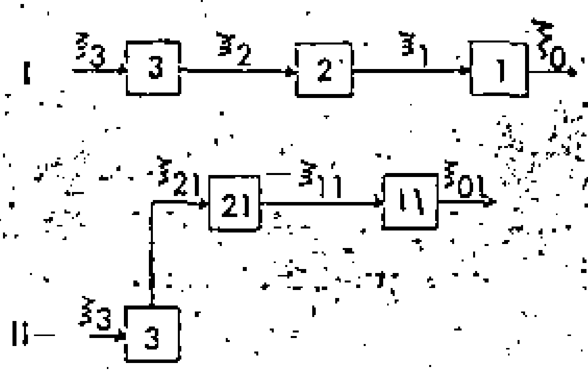
e) Definir el extremo inferior de la restricción para la variable de estado mediante la suma de los valores mínimos de las variables de decisión que se encuentran a la derecha (en el sentido del flujo) de la etapa considerada.

f) Definir el extremo superior mediante la diferencia entre el total de flujo disponible para el caso simple tratado y suma de valores mínimos para las variables de decisión a la izquierda (en el sentido contrario al flujo) de la etapa considerada.

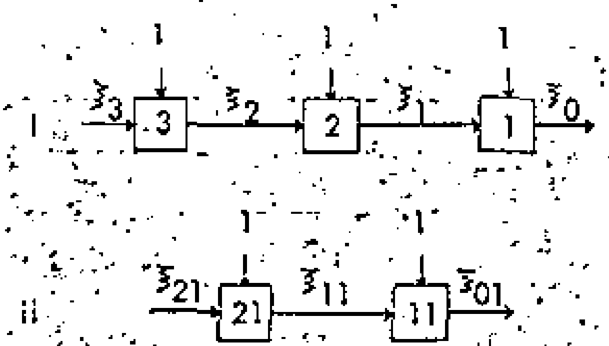
g) Definir restricciones de las etapas que no son influenciadas por las ramas considerando el sistema completo con las variables de decisión con valores mínimos. Definir aquí restricciones para las sumas.

10.- Sistema con rama divergente.

a) Casos simples



b) Valores mínimos que permiten las variables de decisión



c) Sumas por restringir

$$\le \xi_{21} + \xi_2 \le$$

e) Extremos inferiores

I) $2 \le \xi_2, \; 1 \le \xi_1$

II) $2 \le \xi_{21}, \; 1 \le \xi_{11}$

f) Extremos superiores

I) Cantidad disponible de flujo = 8 − 3 = 5

$$\xi_2 \le 4, \; \xi_1 \le 3$$

II) Cantidad disponible de flujo = 8 − 4 = 4

$$\xi_{21} \le 4, \; \xi_{11} \le 3$$

g) Etapas no influenciadas y divergencias

Cantidad disponible de flujo = 8

$$6 \le \xi_4 \le 8$$

$$5 \le \xi_3 \le 8 \; 7$$

$$4 \le \xi_2, \; \xi_{21} \le 7, \; 6$$

En resumen

$6 \le \xi_4 \le 9$ 8 $\quad 2 \le \xi_2 \le 4 \quad 2 \le \xi_{21} \le 4$

$5 \le \xi_3 \le 8$ 7 $\quad 1 \le \xi_1 \le 3 \quad 1 \le \xi_{11} \le 3$

$4 \le \xi_2 + \xi_{21} \le 7$ 6

2o. Sistema con rama convergente

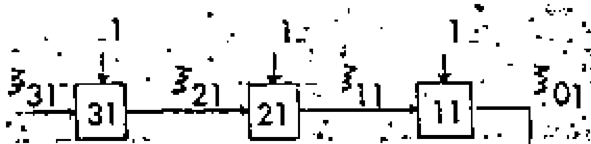
a) Casos simples

I)

II)

III)

IV)



b) Extremos

I) Flujo disponible = 9 - 5 = 4

$2 \le \xi_4 \le 4$

$1 \le \xi_3 \le 3$

$0 \le \xi_2 \le 2$

II) Flujo disponible = 9 - 2 = 7

$$5 \leq \xi_{31} \leq 7$$
$$4 \leq \xi_{21} \leq 6$$
$$3 \leq \xi_{11} \leq 5$$
$$2 \leq \xi_{01} \leq 4$$
$$1 \leq \xi_{1} \leq 3$$

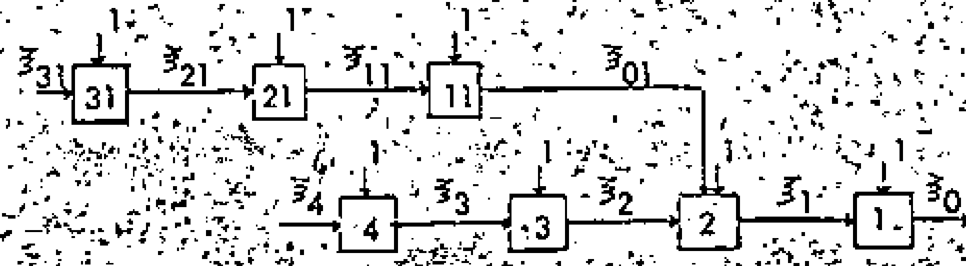
III) Flujo disponible = 9 - 3 = 6

$$4 \leq \xi_{4} \leq 6$$
$$3 \leq \xi_{3} \leq 5$$
$$2 \leq \xi_{2} \leq 4$$
$$1 \leq \xi_{1} \leq 3$$

IV) Flujo disponible = 9 - 4 = 5

$$3 \leq \xi_{31} \leq 5$$
$$2 \leq \xi_{21} \leq 4$$
$$1 \leq \xi_{11} \leq 3$$
$$0 \leq \xi_{01} \leq 2$$

c) Convergencia



$$2 \leq \xi_{01} + \xi_2 \leq 4$$

Resumen

$$2 \leq \xi_4 \leq 6 \qquad 3 \leq \xi_{31} \leq 7 \qquad 2 \leq \xi_{01} + \xi_2 \leq 4$$

$$1 \leq \xi_3 \leq 5 \qquad 2 \leq \xi_{21} \leq 6$$

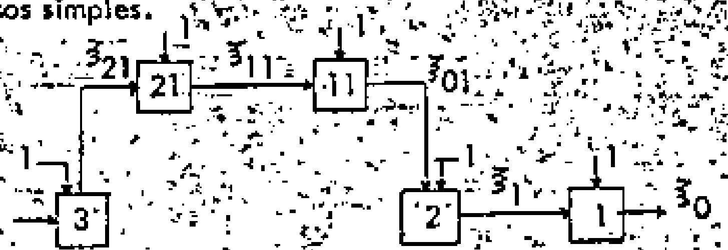
$$0 \leq \xi_2 \leq 4 \qquad 1 \leq \xi_{11} \leq 5$$

$$1 \leq \xi_1 \leq 3 \qquad 0 \leq \xi_{01} \leq 4$$

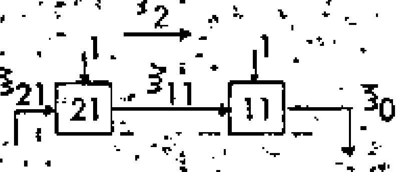
3o.- Sistema con alimentación hacia adelante.

a) Casos simples.

I)



II)



III)

b)-Extremos:

I) Flujo disponible = 9 - 1 = 8

$$4 \leq \xi_{21} \leq 7$$

$$3 \leq \xi_{11} \leq 6$$

$$2 \leq \xi_{01} \leq 5$$

$$1 \leq \xi_1 \leq 3$$

II) Flujo disponible = 9 - 5 = 4

$$0 \leq \xi_2 \leq 4$$

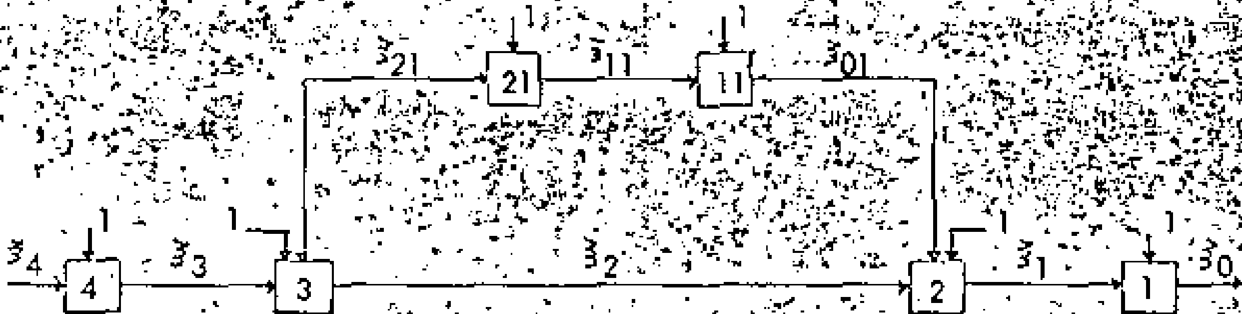
III) Flujo disponible = 9 - 4 = 5

$$2 \leq \xi_{21} \leq 3$$
$$1 \leq \xi_{11} \leq 4$$
$$0 \leq \xi_{01} \leq 3$$

IV) Flujo disponible = 9 - 3 = 6

$$1 \leq \xi_2 \leq 5$$
$$1 \leq \xi_1 \leq 3$$

c) Convergencia, divergencia y etapas no afectadas.



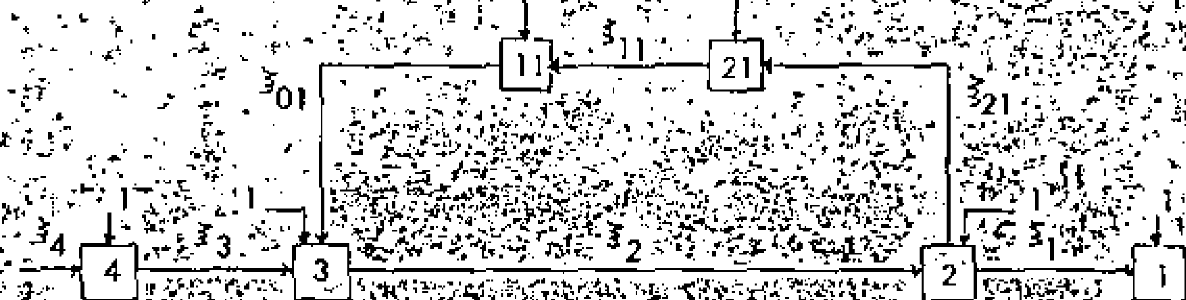
$$6 \leq \xi_4 \leq 9$$
$$5 \leq \xi_3 \leq 8$$
$$4 \leq \xi_{21} + \xi_2 \leq 7$$
$$2 \leq \xi_2 + \xi_{01} \leq 4$$

Resumen

$$6 \leq \xi_4 \leq 9 \qquad 2 \leq \xi_{21} \leq 7$$
$$5 \leq \xi_3 \leq 8 \qquad 1 \leq \xi_{11} \leq 6$$
$$0 \leq \xi_2 \leq 5 \qquad 0 \leq \xi_{01} \leq 5$$
$$1 \leq \xi_1 \leq 3 \qquad 4 \leq \xi_{21} + \xi_2 \leq 7$$
$$2 \leq \xi_2 + \xi_{01} \leq 4$$

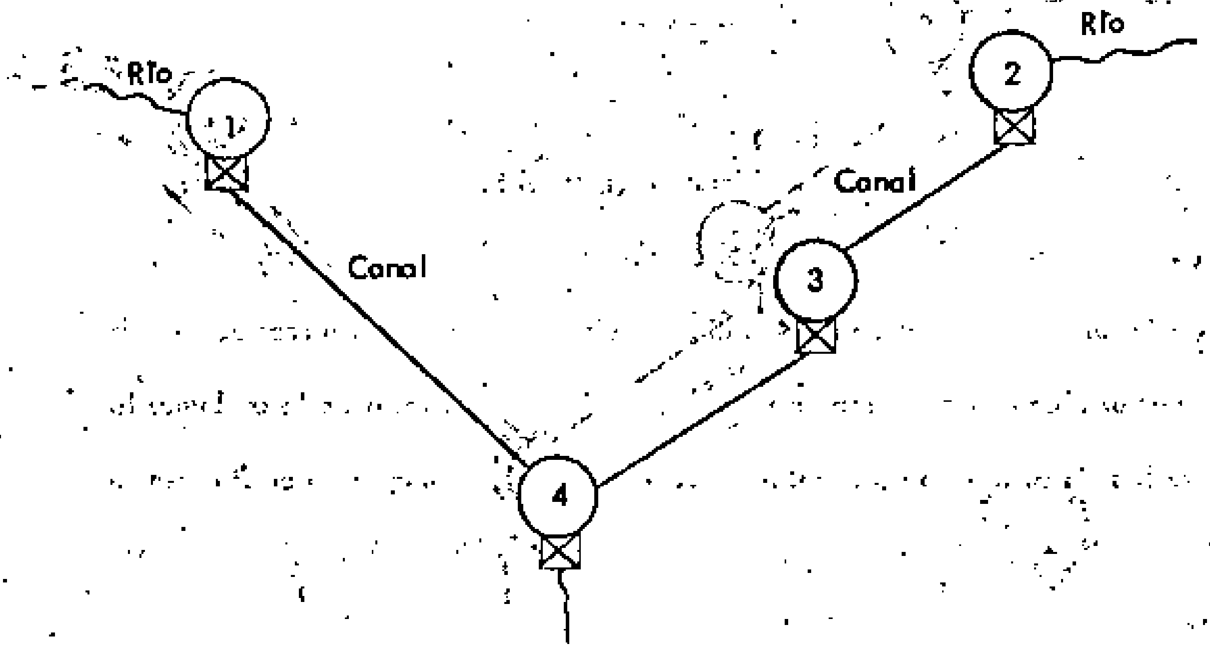
190. <u>Ejercicio</u>

Obtener las restricciones para el caso de retroalimentación



1.9 Control por retroalimentación

Los conceptos sobre control por retroalimentación se ilustrarán considerando un ejemplo. Este consiste de un sistema hidráulico para propósitos múltiples compuesto por cuatro presas con sus correspondientes casas de máquinas, a pie de presa tal y como se muestra en la figura.



Las presas se usarán para los siguientes propósitos:

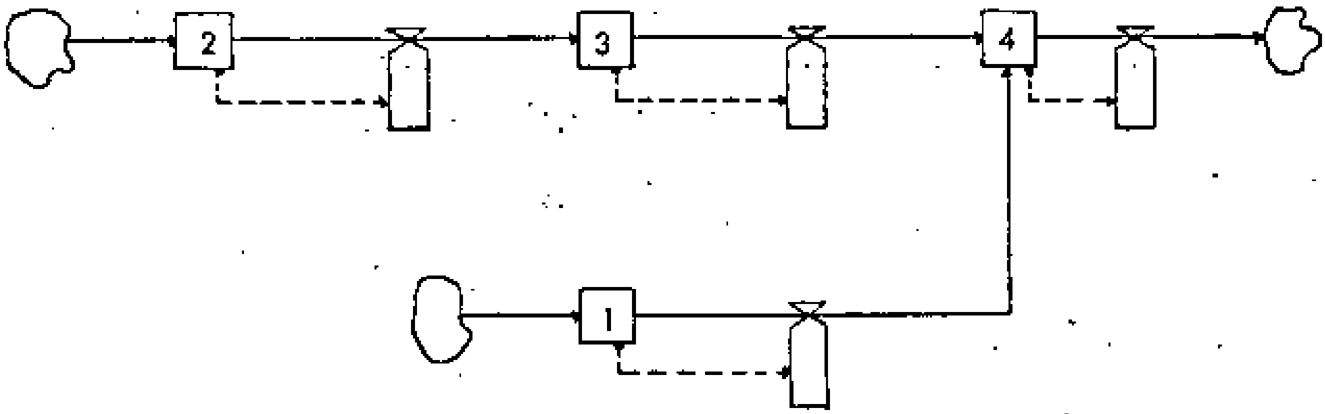
a) generación de energía eléctrica

b) irrigación

c) control de avenidas

d) aspectos recreativos.

El diagrama de flujo con la notación de Forrester resulta



En el se pueden apreciar dos fuentes, un sumidero, cuatro niveles y cuatro tasas. Las variables de nivel corresponden a los volúmenes almacenados, las variables de tasa a las generaciones de energía eléctrica, las fuentes a los ríos y el sumidero al agua saliendo del sistema. En el diagrama considerado se tiene meramente la descripción hidráulica todavía sin tomar en cuenta la retroalimentación con fines de control.

El volumen de agua en la i-ésima presa se representará mediante

$$\xi_i \,, \; i = 1, \ldots, 4$$

Ahora bien atendiendo a los aspectos recreativos se hace indispensable especificar una cantidad mínima de agua en cada una de las presas misma que corresponderá a un nivel mínimo. El volumen mínimo corresponderá a $\xi_i = 0$, se impondrá además la restricción de que $0 \leq \xi_i$.

Atendiendo ahora al control de avenidas se deberá dejar un volumen en la presa que permita absorver estas aguas. Se hará necesario imponer un extremo superior a $_{i}$. Para el ejemplo considerado

$$0 \leq \xi_{1,k} \leq 10$$

$$0 \leq \xi_{2,k} \leq 10$$

$$0 \leq \xi_{3,k} \leq 10$$

$$0 \leq \xi_{4,k} \leq 15$$

Las variables de decisión o control son los flujos que salen de las presas, estos se representarán mediante x_{ik} cuyo significado es volumen que sale de la presa i durante el intervalo (de tiempo) k. Para cada presa, el flujo máximo queda definido por la capacidad de generación de la planta situada a pie de presa. Conviene definir un mínimo pensando en la navegación de las conducciones que se inician en los desfogues. Para el ejemplo considerado se tiene

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 4$$

$$0 \leq x_3 \leq 4$$

$$0 \leq x_4 \leq 7$$

Las ecuaciones del sistema que expresan como fluye el agua a las presas son:

$$\xi_{1,k+1} = \xi_{1,k} - x_{1,k} + A$$

$$\xi_{2,k+1} = \xi_{2,k} - x_{2,k} + B$$

$$\xi_{3,k+1} = \xi_{3,k} - x_{3,k} + x_{2,k}$$

$$\xi_{4,k+1} = \xi_{4,k} - x_{4,k} + x_{3,k} + x_{1,k}$$

En donde A y B son las aportaciones de los ríos que respectivamente llegan a las presas uno y dos. Se considerará que para un día esta aportación es constante e igual a dos y tres respectivamente

$$A = 2$$

$$B = 3$$

En un problema de control, como el que aquí interesa existirá siempre un "criterio de comportamiento", para el caso en estudio este criterio debe tomar en cuenta el uso del agua tanto en generación de energía como en irrigación.

Para fines de control se especificará que se revisará el comportamiento del sistema cada dos horas. Esto define que para un día cualquiera habrá doce oportunidades para controlar el comportamiento del sistema en estudio, por tanto $k = 0, 1, \ldots, 11$.

Se supondrá que los beneficios que rinde el flujo en un período de dos horas es una función lineal del mismo, esto es, el beneficio obtenido por un flujo que sale de la presa i en el período k es $C_i(k)\, x_{ik}$. Los valores de $C_i(k)$ se muestran en la tabla que a continuación aparece

k	$c_1(k)$	$c_2(k)$	$c_3(k)$	$c_4(k)$	$c_5(k)$
0	1.1	1.4	1.0	1.0	1.6
1	1.0	1.1	1.0	1.2	1.7
2	1.0	1.0	1.2	1.8	1.8
3	1.2	1.0	1.8	2.5	1.9
4	1.8	1.2	2.5	2.2	2.0
5	2.5	1.8	2.2	2.0	2.0
6	2.2	2.5	2.0	1.8	2.0
7	2.0	2.2	1.8	2.2	1.9
8	1.8	2.0	2.2	1.8	1.8
9	2.2	1.8	1.8	1.4	1.7
10	1.8	2.2	1.4	1.1	1.6
11	1.4	1.8	1.1	1.0	1.5

Obsérvese que los costos se transladan al considerar diferentes presas, esto es debido al tiempo que transcurre desde que el agua abandona una presa hasta que llega a otra, estos tiempos son:

4 horas desde presa 1 hasta presa 4

4 horas desde presa 2 hasta presa 3

2 horas desde presa 3 hasta presa 4

Los beneficios derivados de la irrigación se logran únicamente a partir del agua que sale de la última presa y son $c_5(k)\,u_{4k}$.

La función de beneficios debe incluir, para propósitos de control, una multa si no se satisface la condición de terminar el día con un cierto nivel en cada presa. Esta función de multas para el caso particular es

$$\Psi_i(\xi_{i,12}, m_i) = \begin{cases} -40\,(\xi_{i,12} - m_i)^2 & \text{si} \quad \xi_{i,12} < m_i \\ 0 & \text{si} \quad \xi_{i,12} \geq m_i \end{cases}$$

En donde m_i es el volumen deseado para la presa i al terminar el día.

Para el día bajo análisis, los volúmenes iniciales en las presas son:

$$\xi_{1,0} = 5$$
$$\xi_{2,0} = 5$$
$$\xi_{3,0} = 5$$
$$\xi_{4,0} = 5$$

Los volúmenes que se desean tener al terminar el día son:

$$m_1 = 5$$

$$m_2 = 5$$

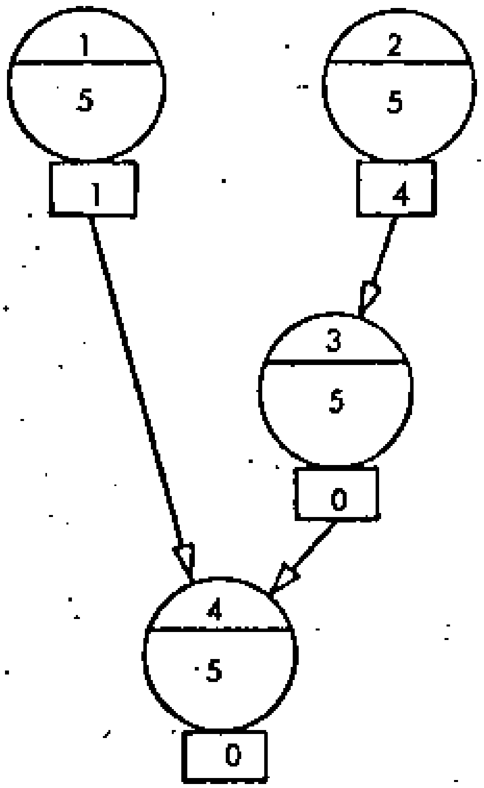
$$m_3 = 6$$

$$m_4 = 7$$

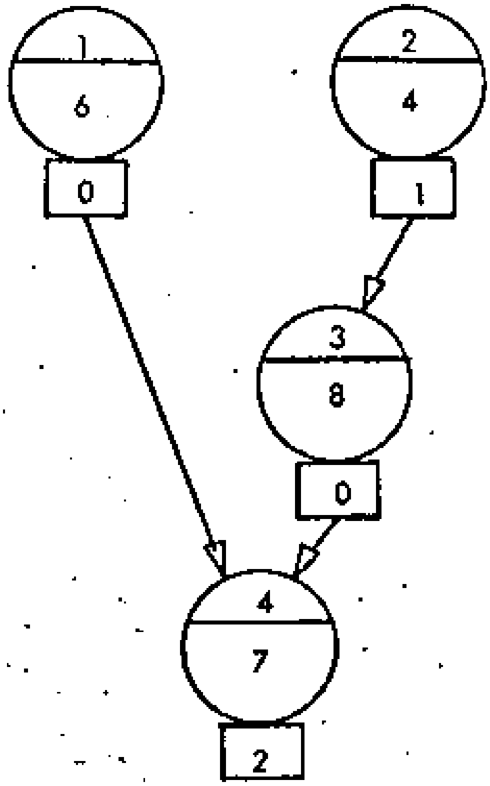
El criterio de comportamiento, mismo que se desea maximizar es:

$$J = \sum_{k=0}^{11} \sum_{i=1}^{4} c_i(k)\, x_{i,k} + \sum_{k=0}^{11} c_5(k)\, x_{4,k} + \sum_{i=1}^{4} \Psi_i\,(\xi_{i,12}\,,\, m_i)$$

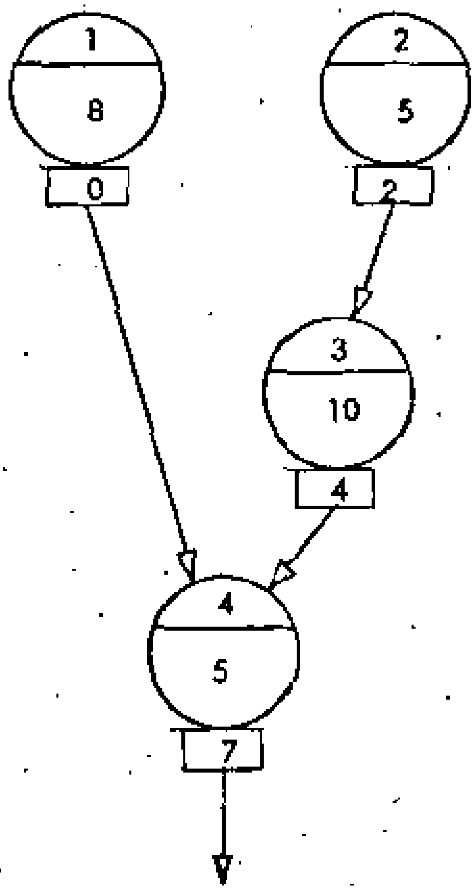
Resolviendo el problema por Programación Dinámica en la forma ya expuesta dado que se dispone de las ecuaciones de sistema y de las restricciones para las variables de estado como para las de decisión se llega a los siguientes resultados:



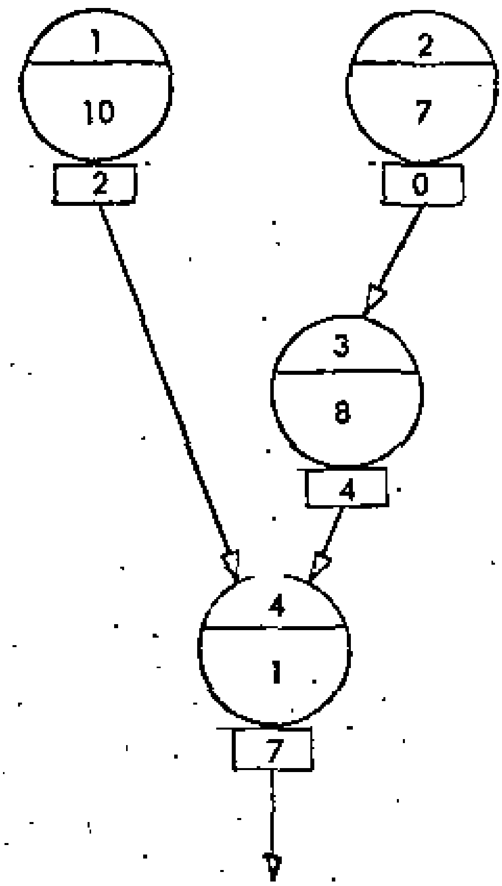
período cero



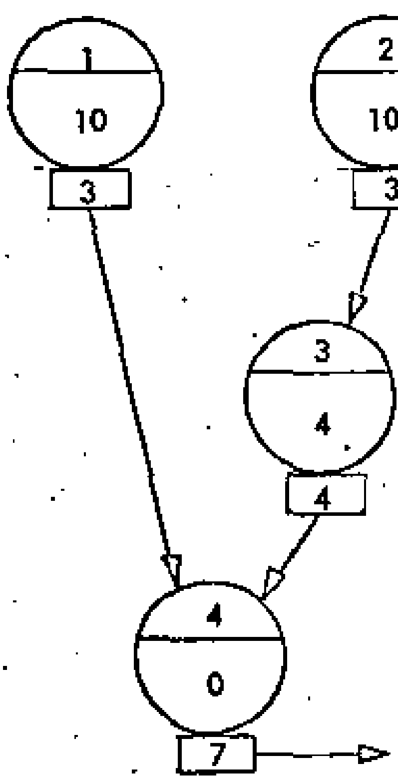
período uno



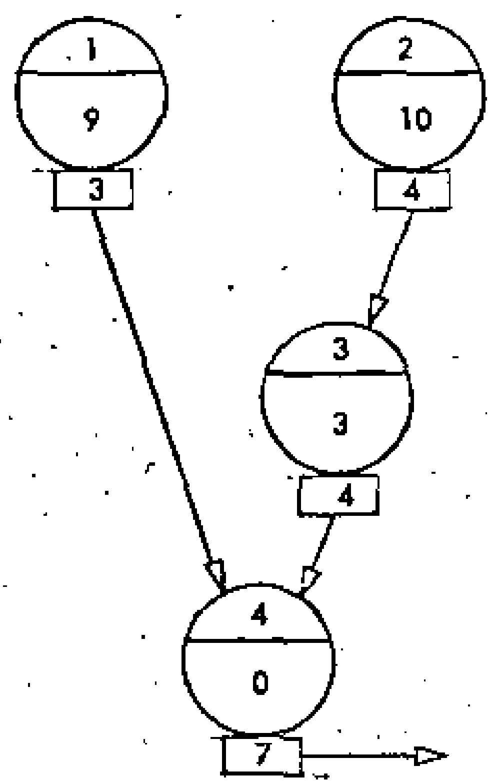
período dos



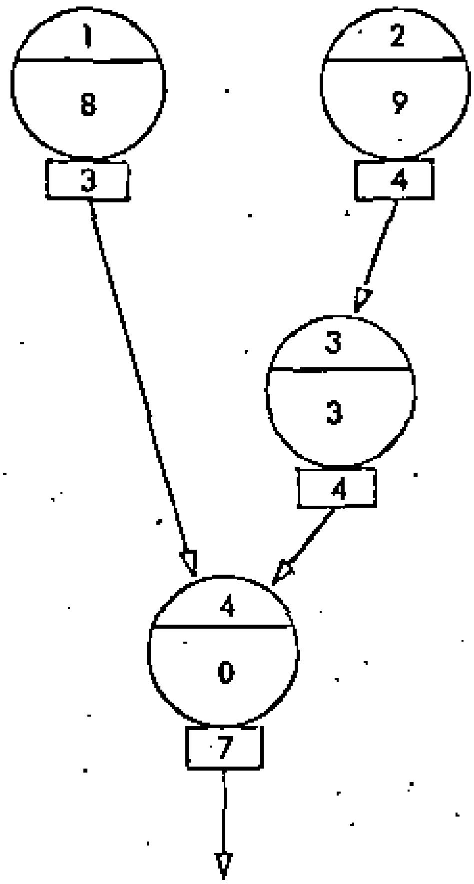
período tres



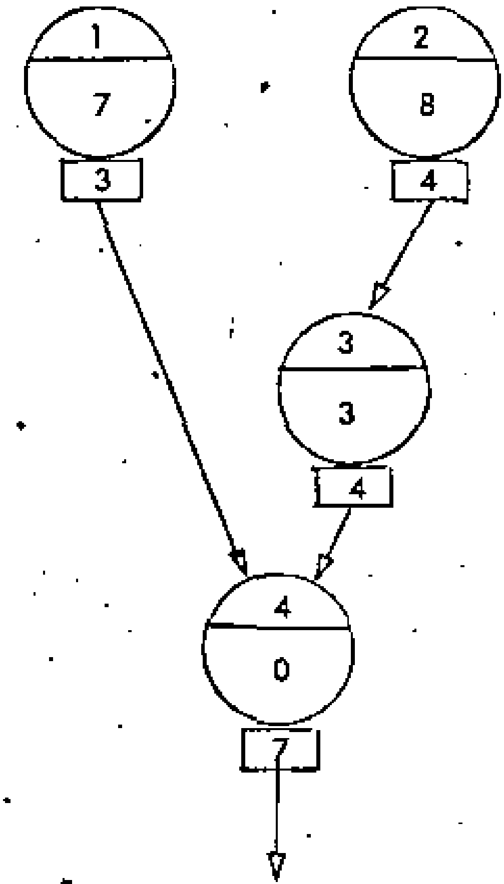
período cuatro



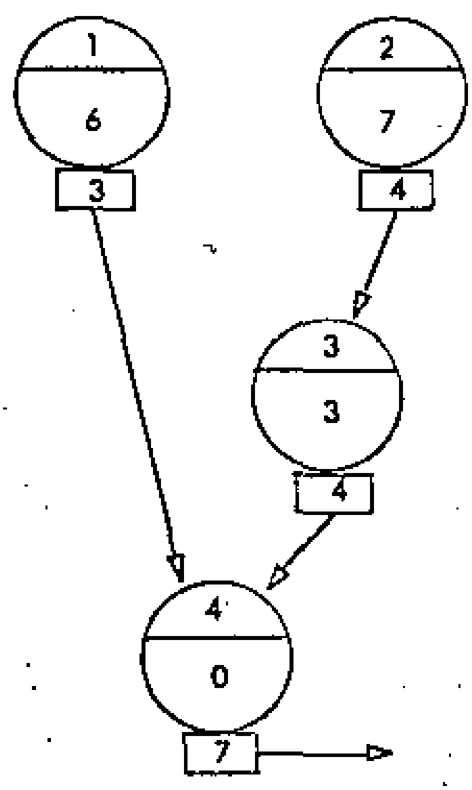
período cinco



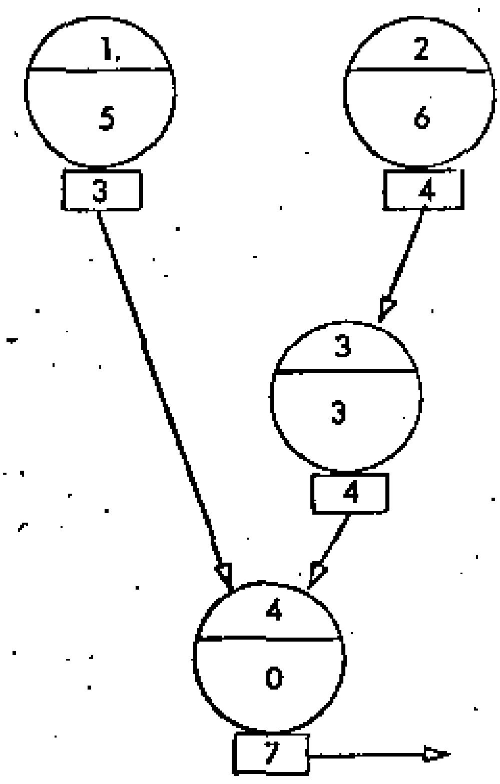
período seis



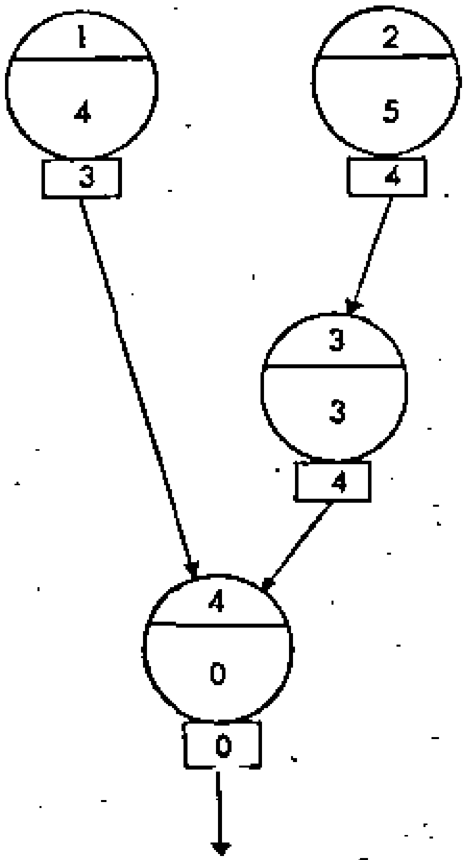
período siete



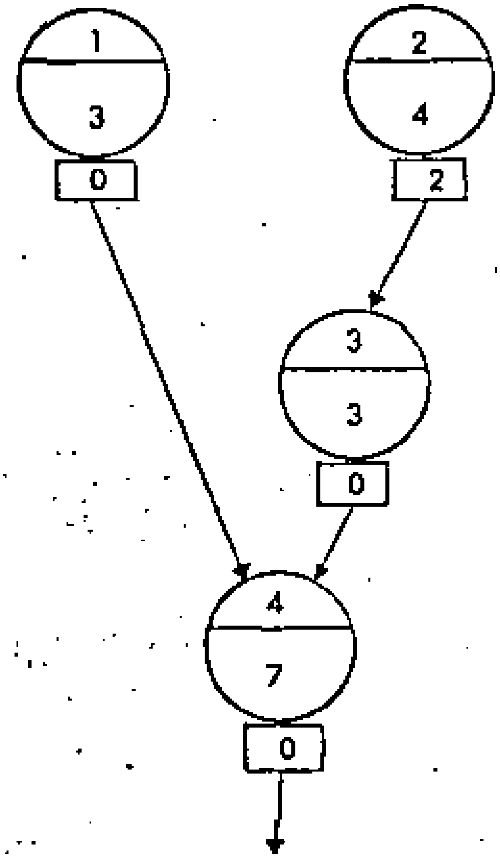
período ocho



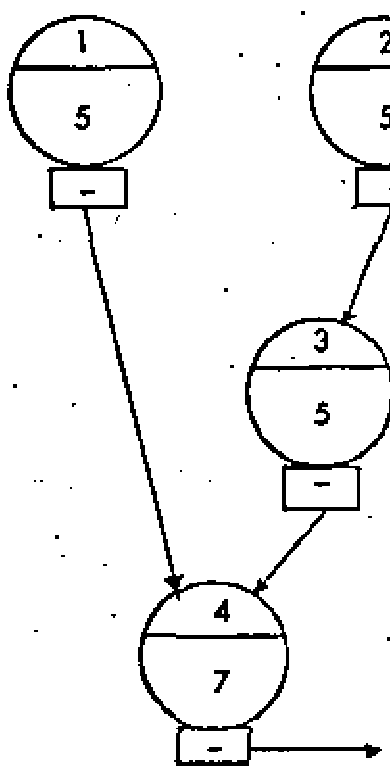
período nueve



período diez



período once



período doce

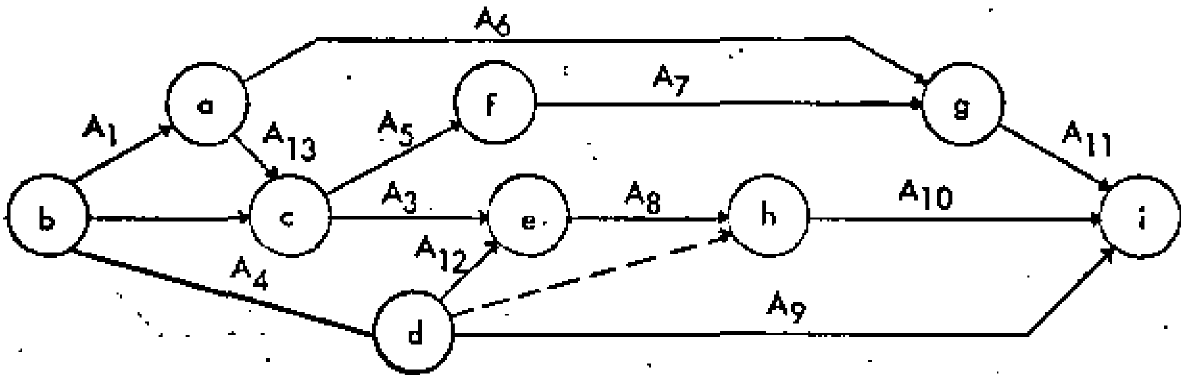
A todo lo largo del proceso se ha empleado como formula de recurrencia la siguiente:

$$\Lambda_{12}(\xi) = \sum_{i=1}^{4} \Psi_i(\xi_{i,12}, m_i)$$

$$\Lambda_j(\xi) = \max_{x_j} \left\{ \sum_{k=0}^{11} \sum_{i=1}^{4} c_i(k) x_{i,k} + \sum_{k=0}^{11} c_5(k) x_{4,k} + \sum_{i=1}^{4} \Psi_i(\xi_{i,12}, m_i) + \Lambda_{j+1}(\zeta(\xi, \bar{x}_{i,j}) \right\} \quad ; \; j = 0, \ldots, 11$$

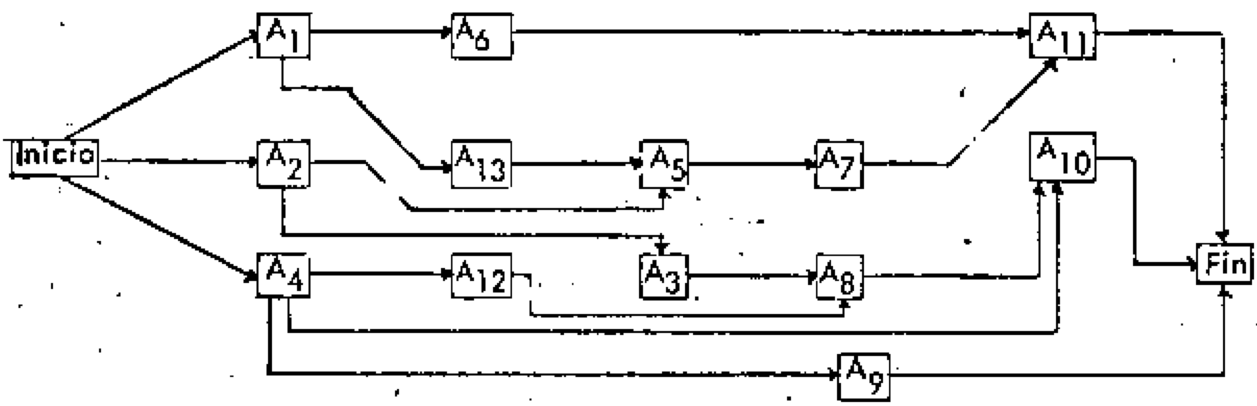
192. <u>Asignación de recursos para diagramas de flechas</u>

Frecuentemente la descripción de un sistema se hace mediante una red de actividades del tipo de las usadas en Ruta Crítica.

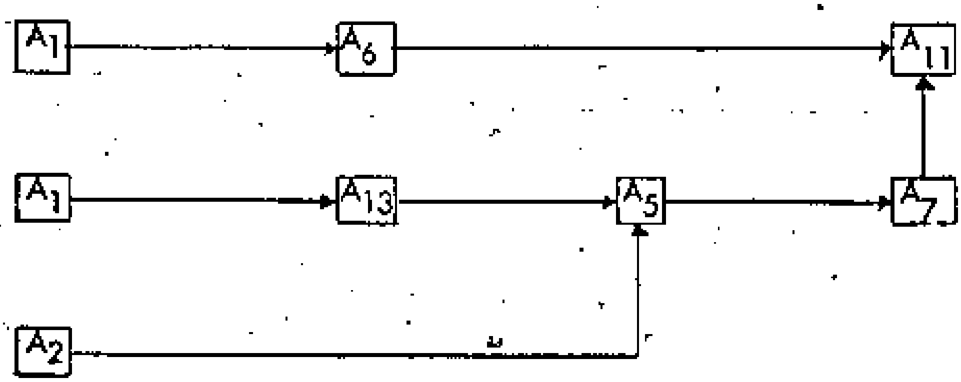


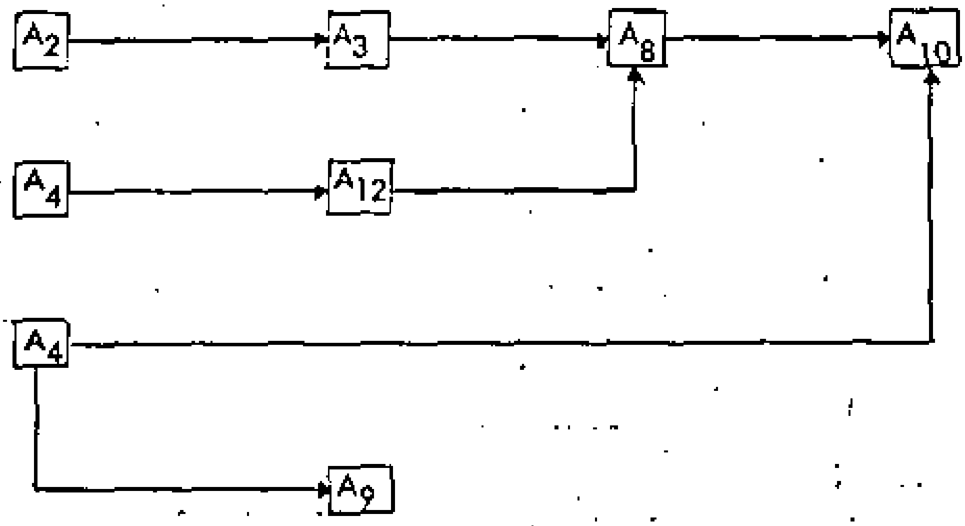
Aquí es posible usar la teoría desarrollada para los sistemas con alimentación hacia adelante en la adjudicación de recursos, siempre y cuando se tenga presente que esto implica una asignación constante (sin variación en el tiempo), esto es, no tomar en cuenta que la maquinaria que se usó en la actividad A_2 puede volver a ser emplear en A_{10}. Dado que no es este el caso en actividades constructivas no será de utilidad en esos casos. Por el contrario para otro tipo de industrias en donde si se presentan estas situaciones será de gran valor. Esto último rige para los procesos administrativos.

El primer paso para resolver el problema será obtener un diagrama de eventos a partir del diagrama de flechas

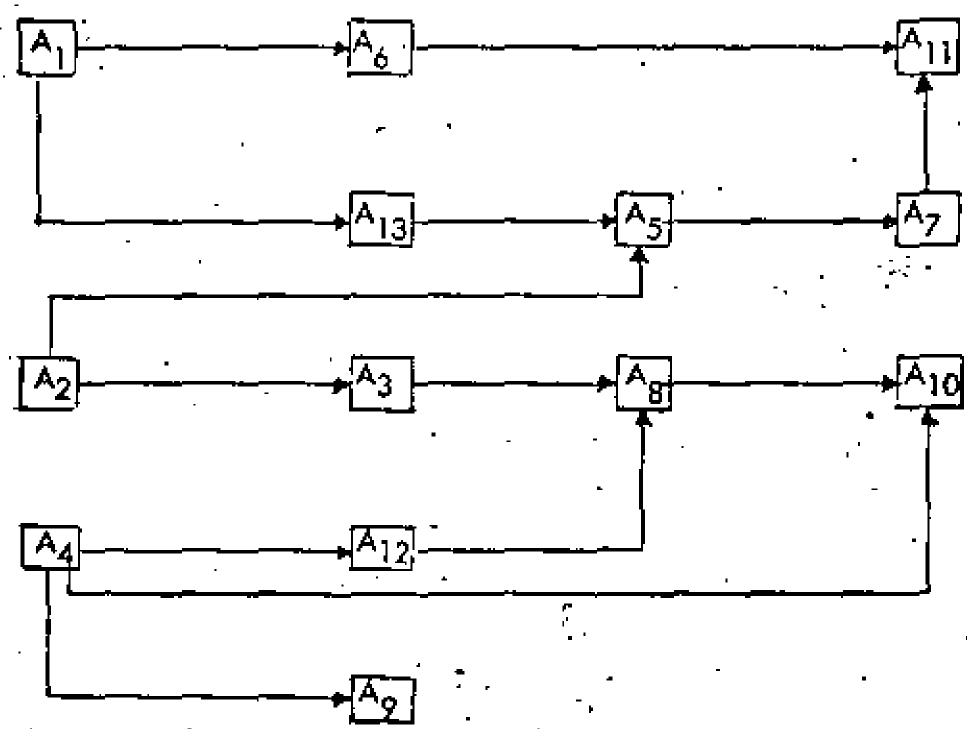


Con el diagrama de eventos ya es posible construir el diagrama de subsistemas:

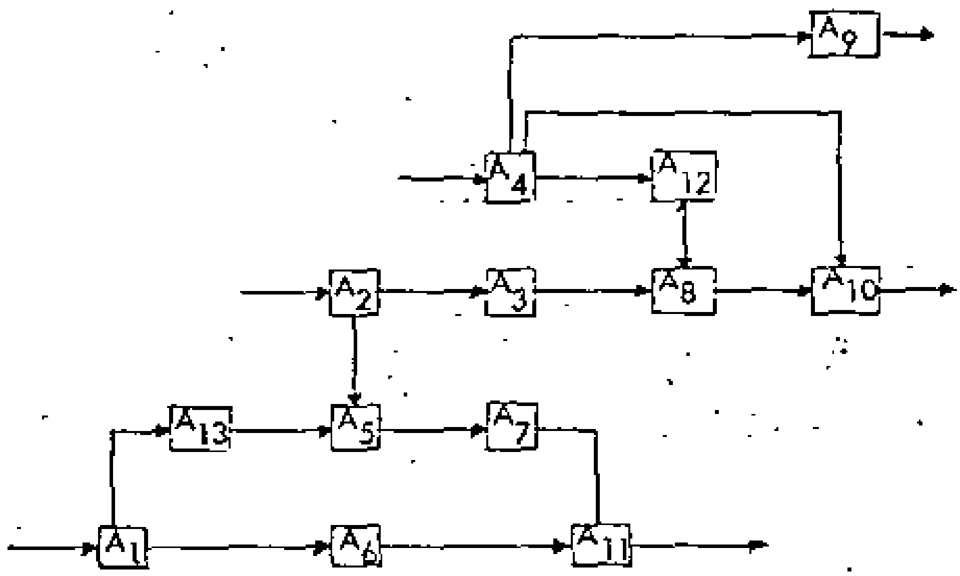




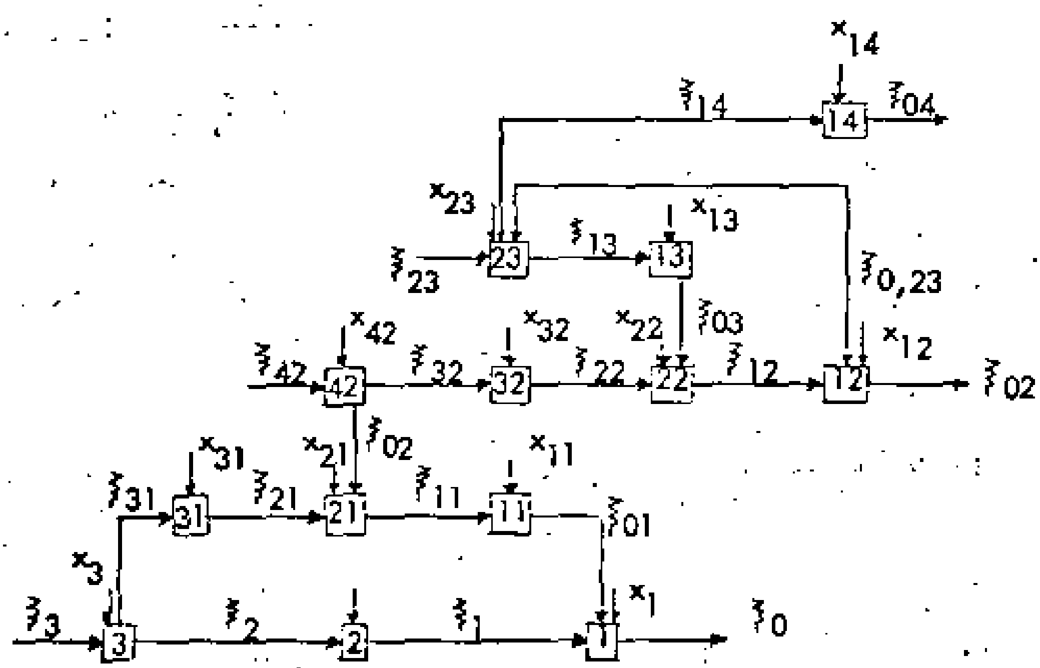
Luego:



Esto es:



Con la notación de sistemas:



Las ecuaciones de sistema resultan:

$$0 = \xi_1 + \xi_{01} - x_1 \qquad\qquad 0 = \xi_{12} + \xi_{0,23} - x_{12}$$

$$\xi_1 = \xi_2 - x_2 \qquad\qquad \xi_{12} = \xi_{22} + \xi_{03} - x_{22}$$

$$\xi_2 + \xi_{31} = \xi_3 - x_3 \qquad\qquad \xi_{22} = \xi_{32} - x_{32}$$

$$\xi_{01} = \xi_{11} - x_{11} \qquad\qquad \xi_{32} + \xi_{02} = \xi_{42} - x_{42}$$

$$\xi_{11} = \xi_{21} + \xi_{02} - x_{21} \qquad\qquad \xi_{03} = \xi_{13} - x_{13}$$

$$\xi_{21} = \xi_{31} - x_{31} \qquad\qquad \xi_{13} + \xi_{0,23} + \xi_{14} = \xi_{23} - x_{23}$$

$$0 = \xi_{14} - x_{14}$$

$$R = \xi_3 + \xi_{42} + \xi_{23}$$

El análisis principiaría en el diagrama de arriba hacia abajo y distinguiendo subsistemas con ramas divergentes, convergentes y con alimentación hacia adelante. Obsérvese que no se presenta retroalimentación puesto que en los diagramas de flechas no se permiten circuitos cerrados.

193. Asignación de recursos a una red constructiva

En el número anterior se estudió el caso en que los recursos se asignaban sin tomar en cuenta que los ya usados en una actividad se pueden usar posteriormente.

Ahora bien, para las redes que corresponden a obras no sucede así y a la asignación debe usar otro tipo de modelo. El que a continuación se expone se encuentra basado en uno de Hadley y hace uso de la Progración Entera en vez de la Dinámica.

Se supondrá que el día es el menor período de tiempo que debe considerar, de manera que, la programación de la obra se hará sobre una base diaria, es claro que esto puede reducirse a la hora o ampliarse a la semana o al mes. Los recursos por asignar en una obra serán: equipo, materiales, dinero, hombre. Se designará con a_{kj} la disponibilidad del recurso k en el día j. En total se considerarán K recursos. Después de estudiar la Ruta Crítica en la red de actividades se ha concluído que el terminarlo requiere de un máximo de N días y de un mínimo de n días. En total se requiere concluir I diferentes actividades en un cierto orden que es conocido. Puesto que no sólo una actividad puede realizarse en un día cualquiera se considerará que el conjunto de actividades $I(i)$ debe encontrarse terminado antes de iniciar la actividad i. Sea α_{ik} la cantidad del recurso k requerida por la actividad i. Sea x_{ij} la variable que define el porcentaje de actividad i que puede realizarse en el día j.

Es claro entonces que el primer grupo de restricciones que debe cumplirse es:

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_{ik}\, x_{ij} \leq a_{kj} \quad , \quad k = 1, \ldots, K, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Por otra parte para que la obra se encuentre terminada deberá cumplirse que

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1$$

Puesto que la actividad no puede iniciarse hasta que no se concluyan las del grupo $I(i)$ deberá cumplirse que

$$\sum_{u=1}^{j-1} x_{i'u} = 1 \qquad i' \in I(i)$$

en caso contrario $x_{ij} = 0$.

Esta condición puede escribirse en términos de variables binarias $\quad_{ij}$ de la siguiente manera

$$x_{ij} \leq \delta_{i'j} \; , \; i' \in I(i) \quad \text{toda } i, j$$

$$\sum_{u=1}^{j-1} x_{i'u} \geq \delta_{i'j} \quad i' \quad I(i) \text{ toda } i, j$$

En cuanto a la función objetivo, sea c_{kj} el costo por unidad de recurso k usado el día j entonces, el costo total mismo que se intenta minimizar es

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{I} c_{kj} \alpha_{ik} \; x_{ij}$$

En resumen el modelo es

$$\min z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{I} c_{kj} \alpha_{ik} \; x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_{ik} \; x_{ij} \leq a_{kj} \; , \qquad \begin{array}{l} k = 1, \ldots, K \\ j = 1, \ldots, N \end{array}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, I$$

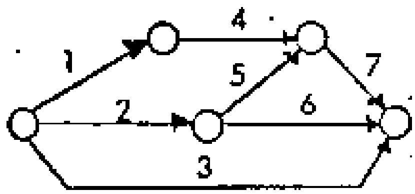
$$\sum_{u=1}^{j-1} x_{i'u} \geq \delta_{i'j} \qquad i' \in I(i) \text{ toda } i, j$$

$$x_{ij} \leq \delta_{i'j} \qquad i' \in I(i) \text{ toda } i, j$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \delta_{i'j} = 0 \text{ ó } 1 \qquad \text{toda } i, j$$

194. Ejemplo

Sea la red



Las duraciones máximas por actividad son

A	D	α_{ik}
1	2	2
2	3	4
3	5	5
4	4	3
5	2	1
6	3	4
7	3	3

De donde N = 9 y corresponde a las actividades 1, 4, 7. Por otra parte I = 7, K = 1, obra de mano. En total se dispone de 5 operarios, los cuales pue den trabajar todos los días.

Entonces la primera restricción resulta:

$$2x_{11} + 4x_{21} + 5x_{31} + 3x_{41} + x_{51} + 4x_{61} + 3x_{71} \leq 5 \; ; \qquad (j = 1)$$
$$2x_{12} + 4x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + x_{52} + 4x_{62} + 3x_{72} \leq 5 \qquad (j = 2)$$
$$2x_{13} + 4x_{23} + 5x_{33} + 3x_{43} + x_{53} + 4x_{63} + 3x_{73} \leq 5 \qquad (j = 3)$$
$$2x_{14} + 4x_{24} + 5x_{34} + 3x_{44} + x_{54} + 4x_{64} + 3x_{74} \leq 5 \qquad (j = 4)$$
$$2x_{15} + 4x_{25} + 5x_{35} + 3x_{45} + x_{55} + 4x_{65} + 3x_{75} \leq 5 \qquad (j = 5)$$
$$2x_{16} + 4x_{26} + 5x_{36} + 3x_{46} + x_{56} + 4x_{66} + 3x_{76} \leq 5 \qquad (j = 6)$$
$$2x_{17} + 4x_{27} + 5x_{37} + 3x_{47} + x_{57} + 4x_{67} + 3x_{77} \leq 5 \qquad (j = 7)$$
$$2x_{18} + 4x_{28} + 5x_{38} + 3x_{48} + x_{58} + 4x_{68} + 3x_{78} \leq 5 \qquad (j = 8)$$
$$2x_{19} + 4x_{29} + 5x_{39} + 3x_{49} + x_{59} + 4x_{69} + 3x_{79} \leq 5 \qquad (j = 9)$$

Por su parte la segunda restricción será:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} = 1 \qquad (i = 1)$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} = 1 \qquad (i = 2)$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} = 1 \qquad (i = 3)$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} = 1 \qquad (i = 4)$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{59} = 1 \qquad (i = 5)$$
$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} + x_{68} + x_{69} = 1 \qquad (i = 6)$$
$$x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} + x_{78} + x_{79} = 1 \qquad (i = 7)$$

Por lo que hace a la tercera restricción

$i = 4 \qquad I(4) = \left\{ 1 \right\}$

$$x_{41} \leq \delta_{11} \qquad x_{11} \geq \delta_{12}$$
$$x_{42} \leq \delta_{12} \qquad x_{11} + x_{12} \geq \delta_{13}$$
$$x_{43} \leq \delta_{13} \qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq \delta_{14}$$
$$x_{44} \leq \delta_{14} \qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq \delta_{15}$$
$$x_{45} \leq \delta_{15} \qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq \delta_{16}$$
$$x_{46} \leq \delta_{16} \qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \geq \delta_{17}$$
$$x_{47} \leq \delta_{17} \qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \geq \delta_{18}$$
$$x_{48} \leq \delta_{18} \qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} \geq \delta_{19}$$
$$x_{49} \leq \delta_{19}$$

$i = 5 \qquad I(5) \left\{ 2 \right\}$

$$x_{51} \leq \delta_{21} \qquad x_{21} \geq \delta_{22}$$
$$x_{52} \leq \delta_{22} \qquad x_{21} + x_{22} \geq \delta_{23}$$
$$x_{53} \leq \delta_{23} \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq \delta_{24}$$
$$x_{54} \leq \delta_{24} \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq \delta_{25}$$
$$x_{55} \leq \delta_{25} \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \geq \delta_{26}$$
$$x_{56} \leq \delta_{26} \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \geq \delta_{27}$$
$$x_{57} \leq \delta_{27} \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \geq \delta_{28}$$
$$x_{58} \leq \delta_{28} \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} \geq \delta_{29}$$
$$x_{59} \leq \delta_{29}$$

$i = 6 \qquad I(6) = \{2\}$

$x_{61} \leq \delta_{21}$ $\qquad$ $x_{21} \geq \delta_{22}$

$x_{62} \leq \delta_{22}$ $\qquad$ $x_{21} + x_{22} \geq \delta_{23}$

$x_{63} \leq \delta_{23}$ $\qquad$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq \delta_{24}$

$x_{64} \leq \delta_{24}$ $\qquad$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq \delta_{25}$

$x_{65} \leq \delta_{25}$ $\qquad$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \geq \delta_{26}$

$x_{66} \leq \delta_{26}$ $\qquad$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \geq \delta_{27}$

$x_{67} \leq \delta_{27}$ $\qquad$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \geq \delta_{28}$

$x_{68} \leq \delta_{28}$ $\qquad$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} \geq \delta_{29}$

$x_{69} \leq \delta_{29}$

$i = 7 \qquad I(7) \quad \{4, 5\}$

$x_{71} \leq \delta_{41}$ $\qquad$ $x_{71} \leq \delta_{51}$

$x_{72} \leq \delta_{42}$ $\qquad$ $x_{72} \leq \delta_{52}$

$x_{73} \leq \delta_{43}$ $\qquad$ $x_{73} \leq \delta_{53}$

$x_{74} \leq \delta_{44}$ $\qquad$ $x_{74} \leq \delta_{54}$

$x_{75} \leq \delta_{45}$ $\qquad$ $x_{75} \leq \delta_{55}$

$x_{76} \leq \delta_{46}$ $\qquad$ $x_{76} \leq \delta_{56}$

$x_{77} \leq \delta_{47}$ $\qquad$ $x_{77} \leq \delta_{57}$

$x_{78} \leq \delta_{48}$ $\qquad$ $x_{78} \leq \delta_{58}$

$x_{79} \leq \delta_{49}$ $\qquad$ $x_{79} \leq \delta_{59}$

$x_{41} \geq \delta_{42}$

$x_{41} + x_{42} \geq \delta_{43}$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq \delta_{44}$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \geq \delta_{45}$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \geq \delta_{46}$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} \geq \delta_{47}$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \geq \delta_{48}$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} \geq \delta_{49}$

$x_{51} \geq \delta_{52}$

$x_{51} + x_{52} \geq \delta_{53}$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} \geq \delta_{54}$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \geq \delta_{55}$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} \geq \delta_{56}$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} \geq \delta_{57}$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} \geq \delta_{58}$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} \geq \delta_{59}$

Por lo que hace a la función objetivo, se considerará que el costo diario por operario es de \$ 50.00, cualquiera que sea la actividad y el día, entonces:

$$x = 50 \Big[2(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19}) + 4(x_{21}+x_{22}+x_{23}$$
$$+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{29}) + 5(x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}$$

$$+x_{37}+x_{38}+x_{39})+3(x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{49})$$
$$+1(x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{59})+4(x_{61}+x_{62}$$
$$+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{69})+3(x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}$$
$$+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{79})\Big]$$

Para resolver el problema se empleará el método de Benders.

195. Asignación de recursos a una red constructiva Método de Pritsker, Walters y Wolfe.

Notación

i = número de proyecto, $i = 1, \ldots, I$ = 1

j = actividad, $j = 1, \ldots, N_i$ = 1, 2, 3, 4, 5

I = total de proyectos = 1

N_i = número de actividades en el proyecto i. = 5

t = período de tiempo, $t = 1, \ldots, G_i$

G_i = fecha especificada (en períodos) de terminación del proyecto i. = 12

g_i = fecha de terminación deseada para el proyecto i.

e_i = fecha, lo mas temprano posible, en que el proyecto puede completarse.

Fechas de Terminación Proyecto

a_{ij} = fecha de llegada (iniciación) de la actividad j del proyecto i. Las llegadas ocurren a principios de período.

d_{ij} = duración en períodos de la actividad j, del proyecto i.

l_{ij} = fecha, lo más temprana posible, en que pueda terminarse la actividad j del proyecto i.

u_{ij} = fecha, lo más tarde posible en que la actividad j del proyecto i pueda terminarse.

Fechas de Actividades del proyecto = 12

k = número (nombre) del recurso , $k = 1, \ldots, K$

K = total de recursos (tipos).

r_{ijk} = cantidad del recurso k requerido por la actividad j del proyecto i.

R_{kt} = cantidad del recurso k disponible en el período "t".

x_{ijt} = variable binaria, igual a 1 si la actividad j del proyecto i se termina en el período t; cero en caso contrario.

x_{it} = variable binaria que es uno en el período t si todas las actividades del proyecto i se han terminado para el período t; cero en caso contrario.

Función objetivo

La primera función objetivo que suele plantearse es minimizar el tiempo transcurrido desde que se inicia hasta que termina la obra.

La función objetivo en este caso es:

$$\max z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=e_i}^{G_i} x_{it} - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{t=l_{ij}}^{u_{ij}} t\, x_{ijt}$$

*en donde una elección conveniente para M es: $M > \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{N_i} u_{ij}$ **

para el caso $I = 1$, resulta:

$$\max z = \sum_{t=e_i}^{G} x_t - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=l_j}^{u_j} t\, x_{jt}$$

en donde

$$M > \sum_{j=1}^{N} u_j \quad *$$

Restricciones

a) Cada actividad tiene exactamente un período para completarse

M debe ser un número positivo suficientemente grande para asegurar que la contribución del término adicional es menor que cualquier X_{it}

a) Completar actividades

La actividad j de i se debe terminar cuando más en la fecha más tardía

[illegible] X_{ij} [illegible] para [illegible] cero.

$$\sum_{t=l_{ij}}^{u_{ij}} x_{ijt} = 1 \; ; \; i = 1, \ldots, I, \; j = 1, \ldots, N_i$$

Nótese que en cada restricción el valor de cualquier x_{ijt} por el valor de los otros en la restricción. Para hacer uso de este hecho se sustituirá la expresión anterior por

$$\sum_{t=l_{ij}}^{u_{ij}-1} x_{ijt} \leq 1$$

La actividad j puede o no haberse terminado un periodo antes de la fecha más tardía de terminación.

y se definirá

$$x_{ij}(u_{ij}) = 1 - \sum_{t=l_{ij}}^{u_{ij}-1} x_{ijt}$$

$$X_{ij}(u_{ij}) \begin{cases} = 0 & \text{la actividad } j \text{ se termina antes de la fecha } u_{ij} \\ = 1 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

El sustituir $x_{ij(u_{ij})}$ por su equivalencia disminuirá el número de variables en la formulación.

b) Completar proyectos

Las formulaciones que involucran las variables x_{it} requieren restricciones de la forma

El proyecto i puede o no haberse terminado en la fecha más temprana posible y un periodo antes de la [illegible].

$$x_{it} \leq \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=l_{ij}}^{t-1} x_{ijq} \; ; \; i = 1, \ldots, I; \; t = e_i, e_i + 1, \ldots, G_i)$$

En las formulaciones que involucran las variables x_t se requieren restricciones de la forma :

$$x_t \le \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=l_{ij}}^{t-1} x_{jq}; \quad t = \max a_j, \ldots, \max G_j).$$

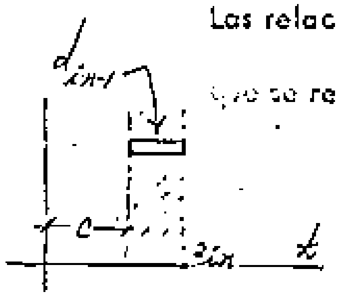
c) Secuenciación

Se requiere una restricción de secuenciación cuando no puede iniciarse una actividad hasta que otras no se hayan completado. La restricción será

$$\sum_{t=l_{im}}^{u_{im}} t\, x_{imt} + d_{in} \le \sum_{t=l_{in}}^{u_{in}} t\, x_{int}$$

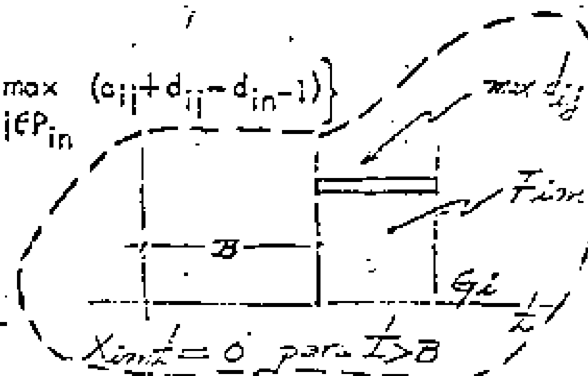
suponiendo que la actividad m debe terminarse antes de iniciar la n.

Las relaciones de secuenciación reduce el número de variables x_{ijt} para las que se requiere obtener valores a partir de la formulación, puesto que



$$x_{int} = 0 \text{ para } t < \max\left\{a_{in} - d_{in} - 1;\ \max_{j \in P_{in}} (a_{ij} + d_{ij} - d_{in} - 1)\right\}$$

$$x_{imt} = 0 \text{ para } t > \min_{j \in F_{im}} \left\{G_i - d_{ij}\right\}$$



en donde F_{im} es el conjunto de actividades del proyecto i que siguen a la actividad m. P_{in} es el conjunto de actividades del proyecto i que preceden a la actividad n.

d) Recursos

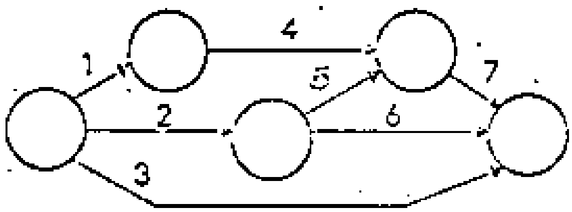
El valor r_{ijk} especifica el número de recursos del tipo k requeridos para llevar a cabo la actividad j del proyecto i. Los recursos requeridos por una actividad permanecen asignados a la misma hasta que termina. Para cada período la cantidad de recurso usado por las diferentes actividades, no debe superar a lo disponible, luego:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=t}^{t+d_{ij}-1} r_{ijk} \; x_{ijq} \le R_{kt} \quad t=(\min a_{ij}, \ldots \max G_i)$$

$$k = 1, \ldots, K.$$

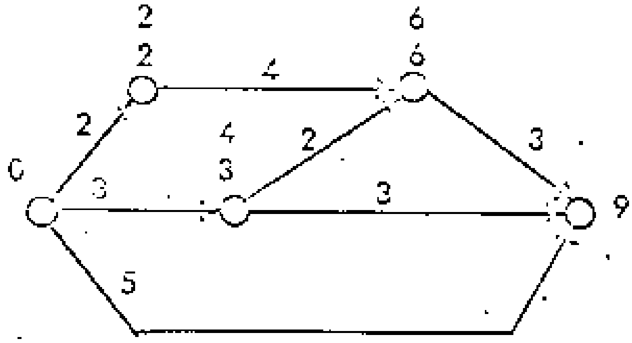
196. Ejemplo

Se dispone de cinco operarios diarios y se quiere terminar la obra a la mayor brevedad y en no más de 12 días. Definir como se deben programar los operarios



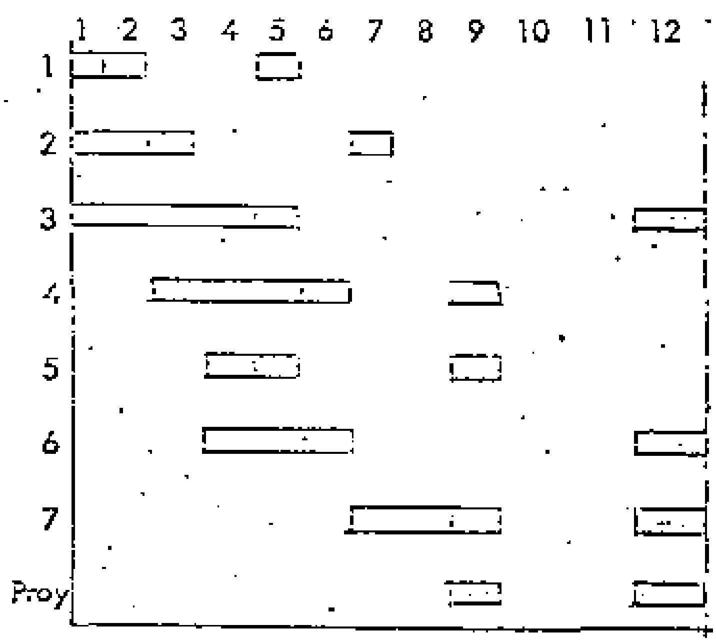
Actividad i.	Duración	(Recursos) No. de Operarios $\Rightarrow K = 1$
1	2	2
2	3	4
3	5	5
4	4	3
5	2	1
6	3	4
7	3	3

1o. Determinación del tiempo más próximo y más lejano de terminación.



j	dj	lj	uj
Act.	Dur.	T.P.T.	T.L.T.
1	2	2	5
2	3	3	7
3	5	5	12
4	4	6	9
5	2	5	9
6	3	6	12
7	3	9	12

2o. Diagrama de barras y variables en el problema.



x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}

x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}

x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{39}, $x_{3,10}$, $x_{3,11}$, $x_{3,12}$

x_{46}, x_{47}, x_{48}, x_{49}

x_{55}, x_{56}, x_{57}, x_{58}, x_{59}

x_{66}, x_{67}, x_{68}, x_{69}, $x_{6,10}$, $x_{6,11}$, $x_{6,12}$

x_{79}, $x_{7,10}$, $x_{7,11}$, $x_{7,12}$

x_{9}, x_{10}, x_{11}, x_{12}

Total de var = 41 var.

3o. Restricciones de terminación de actividades

$$\sum_{t=l_j}^{u_j} x_{jt} = 1 \quad \text{para } j = 1, \ldots, 7$$

(1) $x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$

(2) $x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 1$

(3) $x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{3,10} + x_{3,11} + x_{3,12} = 1$

(4) $x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} = 1$

(5) $x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{59} = 1$

(6) $x_{66} + x_{67} + x_{68} + x_{69} + x_{6,10} + x_{6,11} + x_{6,12} = 1$

(7) $x_{79} + x_{7,10} + x_{7,11} + x_{7,12} = 1$

4o. Restricciones de terminación de proyecto.

$$x_t \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{q=l_i}^{t-1} x_{iq} \right) \qquad (t = e, e+1, \ldots, G)$$

$$(8) \Longrightarrow 7x_9 \leq (x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15})+(x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27})+(x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38})+(x_{46}+x_{47}+x_{48})+(x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58})+x_{66}+x_{67}+x_{68}$$

$$(9) \Longrightarrow 7x_{10} \leq (x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15})+(x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27})+(x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{39})+(x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{49})+(x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{59})+(x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{69})+x_{79}$$

$$(10) \Longrightarrow 7x_{11} \leq (x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15})+(x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27})+(x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{39}+x_{3,10})+(x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{49})+(x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{59})+(x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{69}+x_{6,10})+(x_{79}+x_{7,10})$$

$$(11) \Longrightarrow 7x_{12} \leq (x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15})+(x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27})+(x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{3,10}+x_{3,11})+(x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{49})+(x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{59})+(x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{69}+x_{6,10}+x_{6,11})+(x_{79}+x_{7,10}+x_{7,11})$$

5o. Restricciones de secuenciación

$$\sum_{t=l_m}^{u_m} t\, x_{mt} + d_n \leq \sum_{t=l_n}^{u_n} t\, x_{nt} \qquad \text{cuando } \underline{m} \text{ antes de } \underline{n}$$

$(12) \Longrightarrow 2x_{12}+3x_{13}+4x_{14}+5x_{15}+4 \quad 6x_{46}+7x_{47}+8x_{48}+9x_{49}$

$(13) \Longrightarrow 3x_{23}+4x_{24}+5x_{25}+6x_{26}+7x_{27}+2 \quad 5x_{55}+6x_{56}+7x_{57}+8x_{58}+9x_{59}$

$(14) \Longrightarrow 3x_{23}+4x_{24}+5x_{25}+6x_{26}+7x_{27}+3 \quad 6x_{66}+7x_{67}+8x_{68}+9x_{69}+10x_{6,10}$

$+11x_{6,11}+x_{6,12}$

$(15) \Longrightarrow 6x_{46}+7x_{47}+8x_{48}+9x_{49}+3 \quad 9x_{79}+10x_{7,10}+11x_{7,11}+12x_{7,12}$

$(16) \Longrightarrow 5x_{55}+6x_{56}+7x_{57}+8x_{58}+9x_{59}+3 \quad 9x_{79}+10x_{7,10}+11x_{7,11}+12x_{7,12}$

6o. Restricciones de recurso.

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{q=t}^{t+d_i-1} r_{jk}\, x_{iq} \right) \leq R_{kt} \; (t=1,\ldots,G)\; (k=1,\ldots,K)$$

$t=1 \quad (17) \Longrightarrow 2(x_{12})+4(x_{23})+5(x_{35}) \leq 5$

$t=2 \quad (18) \Longrightarrow 2(x_{12}+x_{13})+4(x_{23}+x_{24})+5(x_{35}+x_{36})+3(0) \leq 5$

$t=3 \quad (19) \Longrightarrow 2(x_{13}+x_{14})+4(x_{23}+x_{24}+x_{25})+5(x_{35}+x_{36}+x_{37})+3(x_{46})$

$+1(0) \leq 5$

$t=4 \quad (20) \Longrightarrow 2(x_{14}+x_{15})+4(x_{24}+x_{25}+x_{26})+5(x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38})$

$+3(x_{46}+x_{47})+1(x_{55})+4(x_{66}) \leq 5$

$t=5 \quad (21) \Longrightarrow 2(x_{15})+4(x_{25}+x_{26}+x_{27})+5(x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{39})$

$+3(x_{46}+x_{47}+x_{48})+1(x_{55}+x_{56})+4(x_{66}+x_{67}) \leq 5$

$t=6 \quad (22) \Longrightarrow 4(x_{26}+x_{27})+5(x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{39}+x_{3,10})+3(x_{46}+x_{47}+x_{48}$

$+x_{49})+1(x_{56}+x_{57})+4(x_{66}+x_{67}+x_{68}) \leq 5$

$t=7 \quad (23) \Longrightarrow 4(x_{27})+5(x_{37}+x_{38}+x_{39}+x_{3,10}+x_{3,11})+3(x_{47}+x_{48}+x_{49})$

$+1(x_{57}+x_{58})+4(x_{67}+x_{68}+x_{69})+3(x_{79}) \leq 5$

$t=8 \quad (24) \Longrightarrow 5(x_{38}+x_{39}+x_{3,10}+x_{3,11}+x_{3,12})+3(x_{48}+x_{49})+1(x_{58}+x_{59})$

$+4(x_{68}+x_{69}+x_{6,10})+3(x_{79}+x_{7,10}) \leq 5$

$$t = 9 \quad (25) \Longrightarrow 5(x_{39} + x_{3,10} + x_{3,11} + x_{3,12}) + 3(x_{49}) + 1(x_{59}) + 4(x_{69} + x_{6,10} + x_{6,11}) + 3(x_{79} + x_{7,10} + x_{7,11}) \leq 5$$

$$t = 10 \quad (26) \Longrightarrow 5(x_{3,10} + x_{3,11} + x_{3,12}) + 4(x_{6,10} + x_{6,11} + x_{6,12}) + 3(x_{7,10} + x_{7,11} + x_{7,12}) \leq 5$$

$$t = 11 \quad (27) \Longrightarrow 5(x_{3,11} + x_{3,12}) + 4(x_{6,11} + x_{6,12}) + 3(x_{7,11} + x_{7,12}) \leq 5$$

$$t = 12 \quad (28) \Longrightarrow 5(x_{3,12}) + 4(x_{6,12}) + 3(x_{7,12}) \leq 5$$

7o. Especificaciones complementarias de fin de proyecto.

$$y_t \leq \left(\sum_{i}^{i} N_i\right) \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=l_j}^{t-1} x_{iq} \qquad t = 9, \ldots, 12$$

$$t = \max e_j, \ldots, \max G_j$$

$y_9 \leq$ segundo miembro de (8)

$y_{10} \leq$ segundo miembro de (9)

$y_{11} \leq$ segundo miembro de (10)

$y_{12} \leq$ segundo miembro de (11) .

8o. Funciones objetivo

a) Minimizar el tiempo de paso por el taller

$$\max z = \sum_{t=e}^{G} x_t - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=l_j}^{u_j} t\, x_{jt} \; ; \; M > \sum_{j=1}^{N} u_j$$

$M > 66$

$$\max z = \sum_{t=9}^{12} x_t - \frac{1}{70} \sum_{t=2}^{5} t x_{1t} + \sum_{t=3}^{7} t x_{2t} + \sum_{t=5}^{12} t x_{3t} \sum_{t=6}^{9} t x_{4t}$$

$$+ \sum_{t=5} t\, x_{5t} + \sum_{t=6}^{12} t\, x_{6t} + \sum_{t=9}^{12} t\, x_{7t}$$

$$\begin{aligned}\max\ z = {} & 70\,x_9 + 70\,x_{10} + 70\,x_{11} + 70\,x_{12} - 2x_{12} - 3x_{13} - 4x_{14} - 5\,x_{15} \\ & - 3\,x_{23} - 4\,x_{24} - 5\,x_{25} - 6\,x_{26} - 7\,x_{27} - 5\,x_{35} - 6\,x_{36} - 7\,x_{37} - 8\,x_{38} - 9\,x_{39} \\ & - 10\,x_{3,10} - 11\,x_{3,11} - 12\,x_{3,12} \\ & - 6\,x_{46} - 7\,x_{47} - 8\,x_{48} - 9\,x_{49} - 5\,x_{55} - 6\,x_{56} - 7\,x_{57} - 8\,x_{58} - 9\,x_{59} \\ & - 6\,x_{66} - 7\,x_{67} - 8\,x_{68} - 9\,x_{69} - 10\,x_{6,10} - 11\,x_{6,11} - 12\,x_{6,12} - 9\,x_{79} \\ & - 10\,x_{7,10} - 11\,x_{7,11} - 12\,x_{7,12}\end{aligned}$$

b) Minimizar el tiempo en el que todos los proyectos se completan

(no es aplicable a este caso)

c) Minimizar las multas por retardos.

Se supone que hay retardo cuando se termina entre la fecha deseada y la impuesta.

Para el caso en estudio sería entre 9 y 12 días considerando \$ 100.00 por día; así para $t = 10 - M = \$\ 100.00$

$t = 11 - M = \$\ 200.00$

$t = 12 - M = \$\ 300.00$

$$\max z = \sum_{t=g+1}^{G} p_j\ x_t$$

$$\max z = 100\ x_{11} + 100\ x_{12} + 100\ x_{10}$$

R	1	2		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{35}	x_{36}	x_{37}	x_{38}	x_{39}	$x_{3,10}$	$x_{3,11}$	$x_{3,12}$	x_{46}	x_{47}	x_{48}	x_{49}	x_{55}	x_{56}	x_{57}	x_{58}	x_{59}	x_{66}	x_{67}	x_{68}	x_{69}	$x_{6,10}$	$x_{6,11}$	$x_{6,12}$	x_{79}	$x_{7,10}$	$x_{7,11}$	$x_{7,12}$		T
c_j	70	70	70	70	-2	-3	-4	-5	-3	-4	-5	-6	-7	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-6	-7	-8	-9	-5	-6	-7	-8	-9	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-9	-10	-11	-12		
x_3		100	100	100																																							
(1)					1	1	1	1																																		=	1
(2)									1	1	1	1	1																													=	1
(3)														1	1	1	1	1	1	1	1																					=	1
(4)																						1	1	1	1																	=	1
(5)																										1	1	1	1	1												=	1
(6)																															1	1	1	1	1	1	1					=	1
(7)																																						1	1	1	1	=	1
(8)	7				-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1					-1	-1	-1		-1	-1	-1	-1		-1	-1	-1									≤	0
(9)		7			-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1				-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1				-1				≤	0
(10)			7		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		-1			-1	-1			≤	0
(11)				7	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		-1	-1	-1		≤	0
(12)					2	[illegible]	4	5														-6	-7	-8	-9																	≤	-4
(13)									3	4	5	6	7													-5	-6	-7	-8	-9												≤	-2
(14)									3	4	5	6	7																		-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12					≤	-3
(15)																						6	7	8	9													-9	-10	-11	-12	≤	-3
(16)																										5	6	7	8	9								-9	-10	-11	-12	≤	-3
(17)					2				4					5																												≤	5
(18)					2	2			4	4				5	5																											≤	5
(19)						2	2		4	4	4			5	5	5						3																				≤	5
(20)							2	2		4	4	4		5	5	5	5					3	3			1					4											≤	5
(21)								2			4	4	4	5	5	5	5	5				3	3	3		1	1				4	4										≤	5
(22)												4	4		5	5	5	5	5			3	3	3	3		1				4	4	4									≤	5
(23)													4			5	5	5	5	5			3	3	3		1	1				4	4	4				3				≤	5
(24)																	5	5	5	5	5			3	3			1	1				4	4	4			3	3			≤	5
(25)																		5	5	5	5								1					4	4	4		3	3	3		≤	5
(26)																			5	5	5														4	4	4		3	3	3	≤	5
(27)																				5	5															4	4				3	[illegible]	[illegible]
(28)																					5																4				3	[illegible]	

TERCER CAPITULO

ANALISIS DE INVERSIONES

197. Comparación de inversiones

El primer tema a tratar es la cuestión de criterios financieros que permiten la comparación y suministren bases para establecer prioridades entre diversas inversiones. Aún en los casos más simples, en los que la incertidumbre puede hacerse de lado, esta cuestión es de gran importancia.

Se principiará estudiando la frase "La inversión en el proyecto A es mejor que la inversión en el B". Esto es, se pondrá en forma explícita los criterios financieros que dicha frase encierra.

Desde ahora es importante señalar que son dos los problemas fundamentales relacionados con las decisiones en la selección de inversiones:

a) Dadas dos posibles inversiones definir cual es preferible.

b) Dado un orden de preferencia, y tomando en cuenta las restricciones presupuestales para un tiempo dado, determinar la inversión óptima.

En esta introducción nos ocuparemos del primero, y dejaremos para los capítulos siguientes el segundo, contemplándolo tanto a la luz de la certeza como bajo el riesgo.

Para ello, supondremos que una inversión, $\bar{p}$, está caracterizada por su flujo de fondos, esto es, toda inversión se encuentra representada por un conjunto de $(m+1)$ números reales $(\bar{p}_0, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m)$ representando ingresos $p_i > 0$ ó egresos $p_i < 0$.

En el problema (a) se nos pide especificar un orden de preferencia (una función utilidad), esto es, una numeración no arbitraria en el conjunto de todos los
conjuntos de $(m+1)$ números. Para ello definiremos un espacio vectorial lineal "de inversiones" de $(m+1)$ dimensiones y para el que existen las siguientes operaciones:

1. Adición

$$\text{Dado } \bar{p} = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\} \text{ y}$$
$$\bar{q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}, \text{ se define:}$$
$$\bar{p} + \bar{q} = \{p_0 + q_0, p_1 + q_1, \ldots, p_m + q_m\}$$

2. Producto por un escalar "t"

$$\text{Dado } \bar{p} = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}, \text{ se define:}$$
$$t\,\bar{p} = \{tp_0, tp_1, \ldots, tp_m\}$$

Existe también una inversión nula $\bar{0} = \{0, 0, \ldots, 0\}$ tal que $\bar{p} + \bar{0} = \bar{p}$; $t\,\bar{0} = \bar{0}$.

También haremos uso de notación y conceptos de la Teoría de la Utilidad, así, si $\bar{p}$ es preferida sobre $\bar{q}$ escribiremos $\bar{p} \succ \bar{q}$, si $\bar{p}$ es indiferente a $\bar{q}$ escribiremos $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$; y si $\bar{p}$ no es preferido sobre $\bar{q}$ se anotará $\bar{p} \lesssim \bar{q}$. Deberán cumplirse las siguientes leyes:

i) transitividad: si $\bar{p} > \bar{q}$ y $\bar{q} > \bar{r}$ entonces $\bar{p} > \bar{r}$.

ii) completicidad: dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$ o bien $\bar{p} > \bar{q}$ o, $\bar{p} \lesssim \bar{q}$.

Existirá también una función utilidad $u(\bar{x})$ de manera que si $\bar{p} > \bar{q}$ necesariamente $u(\bar{p}) > u(\bar{q})$ y si $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$, $u(\bar{p}) = u(\bar{q})$. El dominio de dicha función $u(\bar{x})$ es el conjunto s de todos los conjuntos de $(m+1)$ números reales. Obsérvese que si existe una función $u(\bar{x})$ existe una infinidad de ellas ya que cualquier transformación monotónica de una función de utilidad, es también una función utilidad para el orden de preferencia considerado.

<u>El problema de seleccionar un criterio financiero para las inversiones consiste meramente en determinar una función utilidad $u(\bar{x})$ cuyo dominio sea el espacio vectorial lineal antes definido.</u>

Ahora bien, la propiedad aditiva para puntos del espacio se refiere únicamente a la posibilidad de agregar flujos de dinero. Esto es, un proyecto α puede conducir a un flujo $\bar{p}$, mientras que otro β puede conducir a $\bar{q}$, la combinación de los dos puede conducir a $\bar{s}$ no necesariamente igual a $\bar{p}+\bar{q}$. En general los flujos $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{p}+\bar{q}$, $\bar{s}$ deben considerarse como puntos diferentes en el espacio de las inversiones.

Con las consideraciones anteriores en mente, formularemos los siguientes axiomas para el espacio antes definido:

A.1. (Axioma de continuidad). Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$ en donde $\bar{p} \succ \bar{q}$ existe un $\bar{\varepsilon}$ ($\varepsilon_i > 0$) tal que $(\bar{p} - \bar{\varepsilon}) \succ \bar{q}$.

A.2. (Axioma de preferencia manifiesta). Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$, si para cada i, $p_i \geq q_i$ y para algún j $p_j > q_j$ entonces $\bar{p} \succ \bar{q}$.

A.3. (Axioma de la impaciencia) Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$, de manera que $p = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_i, p_j, \ldots p_m\}$ y $\bar{q} = \{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_i, q_j, \ldots, q_m\}$ en donde $p_k = q_k$ excepto para $k = i, j$

y $p_i > q_i$

$p_i = q_j$

$p_j < q_i$

entonces $\bar{p} \succ \bar{q}$

A.4. (Axioma de la consistencia marginal). Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$, $\bar{p} \succ \bar{q}$ si y sólo si $\bar{p} - \bar{q} \succ \bar{0}$.

Ahora bien, si $\bar{p} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}, 0\}$ y $\bar{p}^1 = \{0, p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}\}$, diremos que $\bar{p}^1$ es la inversión $\bar{p}$ pospuesta un período.

A.5. (Axioma de la consistencia temporal). Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$, si $\bar{p} \succ \bar{q}$ y $p_m = q_m = 0$ entonces la inversión pospuesta $\bar{p}^1$ es preferida a la inversión pospuesta $\bar{q}^1$ $(\bar{p}^1 \succ \bar{q}^1)$.

Bajo estos axiomas, Williams y Nassar demuestran los dos siguientes teoremas:

T.1. Los únicos ordenes de preferencia que satisfacen los axiomas A.1., A.2., A.3. y A.4. son los suministrados por la fórmula del valor presente cuando se consideran tasas de actualización positivas. En otras palabras, los únicos ordenes de preferencia que satisfacen los axiomas antes mencionados son los suministrados por funciones utilidad de la forma.

$$u(\bar{p}) = p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_1 \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m p_m$$

en donde $0 < \alpha_i < 1$.

T.2. Los únicos ordenes de preferencia para inversiones que satisfacen los axiomas A.1., ..., A.5. son los suministrados por la fórmula del valor presente para una tasa de actualización idéntica en cada período, positivo e inferior a la unidad. Esto es:

$$\bar{u}(\bar{p}) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i p_i$$

Puesto que los dos anteriores teoremas han sido demostrados con todo rigor por los autores ya mencionados, cualquier discusión sobre el criterio del valor presente, su universalidad para reflejar con toda exactitud las preferencias de inversión, se convertirá en una discusión sobre los cinco axiomas antes enunciados.

En primer lugar el A.1. debe verse más como una hipótesis de trabajo que como un axioma de preferencia, sin embargo, no deja de retratar ésto último, ya que si al comparar dos flujos, los errores en los datos son suficientemente pequeños, no afectarán nuestro juicio sobre la preferencia.

Por lo que se refiere a los axiomas A.2. y A.3. no se jusga que existan serias dudas sobre ellos. Sin embargo, se harán algunas consideraciones con base en la Teoría del Consumo. Obsérvese que cualquier vector de consumo que es posible satisfacer con $\bar{q}$ también lo es posible con $\bar{p}$ y por el contrario hay algunos que sí se satisfacen con $\bar{p}$ pero no con $\bar{q}$. Esto es cierto aún en el caso de que los precios cambiaran por consideraciones generales de la economía (inflacionaria o deflacionaria) ya que entonces las decisiones del consumidor deberán ser consideradas por la Teoría de los Juegos y aún en ese caso el juego cuyo pago $p_i > q_i$ presupone una estrategia que seleccionaría a $\bar{p}$ sobre $\bar{q}$.

Ahora bién, en cuanto a A.4., supóngase que se presenta inopinadamente una oportunidad para obtener un flujo $\bar{r}$ tal que no tiene interacción con el resto del programa de inversión que conduce a seleccionar a $\bar{q}$. En estas circunstancias, evidentemente está justificado $\bar{r} \succ \bar{0}$ si y sólo si $(\bar{q} + \bar{r}) \succ \bar{q}$. Lo que A.4. sostiene es que la relación de $\bar{r}$ a $\bar{0}$ no se altera si $\bar{q}$ es cambiado. En otras palabras, el axioma señala que es posible decidir si un flujo adicional es suficientemente valioso o no, independientemente de cual sea el flujo que el resto de las inversiones se encuentre generando.

Es importante hacer notar, sin embargo, que A.4. no toma en cuenta si los proyectos que el flujo implicará son o no independientes, simplemente su implicación es para el caso en que sean independientes. Esto es, si $\bar{p} \succ \bar{q}$ y si $\bar{r} \succ \bar{s} = (\bar{p} + \bar{r}) \succ (\bar{q} + \bar{s})$.

Por último A.5. estipula que no hay una referencia absoluta sobre el tiempo. Es decir, si al principiar un período cualquiera $\bar{p}$ es preferido sobre $\bar{q}$ para los próximos n períodos, entonces al principiar el siguiente período $\bar{p}$ volverá a ser preferido sobre $\bar{q}$. Obsérvese que no dice que si al principiar un período el proyecto A es preferido sobre el proyecto B entonces el proyecto A será preferido sobre el B si se pospone su inicio hasta el siguiente período.

Los axiomas anteriores definen un orden de preferencia en el espacio de inversiones. Este está dado por la función utilidad $\psi(\bar{p}) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i p_i$ ya que por T.1. y T.2. sólo este orden de preferencia satisface dichos axiomas. Debe notarse sin embargo que no definen el valor de α, meramente su rango $0 < \alpha < 1$.

Dichos teoremas señalan que si α es una tasa de descuento entonces:

a) $\bar{p} \succ \bar{q}$

b) $\bar{p} \sim \bar{q}$

c) $\bar{p} \prec \bar{q}$

según si $r(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} p_i \alpha_i - \sum_{i=0}^{m} q_i \alpha_i$ es:

a) positivo

b) nulo

c) negativa.

La decisión, por tanto, está en función de la tasa de descuento α. Es claro que los valores de α para los cuales $r(\alpha) = 0$ son de especial interés ya que en ellos la decisión cambia.

198. Ejemplo.

Se trata de llevar a cabo un camino de 10 Km. con 8 m. de ancho entre dos ciudades A y B. Se desea tomar una decisión respecto a concreto o asfalto. Se han elaborado los proyectos para ambos casos y se ha calculado que el costo por m^2 es de $\$100.00/m^2$ para concreto y $\$90.00/m^2$ para asfalto. Ambos pavimentos deben conservarse y se supondrá una vida util de 27 años para el de concreto y de 17 para el de asfalto. Se estima que repavimentar un Km. de cual quiera de ellos cuesta \$200,000.00 pesos/Km. y que la conservación anual es de \$25,000.00. También luce como adecuada una tasa del 8% para estos proyectos ¿Qué decisión se debe tomar?.

Tambien se pregunta:

¿Para que tasa de interés los dos costos son iguales?

¿Qué pasa si se consigue que una entidad ajena page el 50% de los costos de construcción del camino?

Ambos pavimentos se compararán para 50 años de servicio, por lo que significa que el asfalto se repavimenta dos veces y el de concreto sólo una, ambos a los 50 años se encontraron en condiciones practicamente iguales.

En resumen, se tiene

Tipo de costo	Concreto	Asfalto
Construcción	\$ 8,000,000	\$7,200,000
Conservación anual	\$ 25,000	\$ 25,000
Repavimentación	\$ 200,000	\$ 200,000

Se tienen los siguientes costos anuales

Año	Concreto	Asfalto	Tasa de descuento
1	8,000,000	7,200,000	8 %
2	25,000	25,000	"
3	"	"	"
4	"	"	"
5	"	"	"

Año	Concreto	Asfalto	Tasa de descuento
6	25,000	25,000	8%
7	"	"	"
8	"	"	"
9	"	"	"
10	"	"	"
11	"	"	"
12	"	"	"
13	"	"	"
14	"	"	"
15	"	"	"
16	"	"	"
17	"	2,000,000	"
18	"	25,000	"
19	"	"	"
20	"	"	"
21	"	"	"
22	"	"	"
23	"	"	"
24	"	"	"
25	"	"	"
26	"	"	"
27	2,000,000	"	"

Año	Concreto	Asfalto	Tasa de descuento
28	25,000	25,000	8%
29	"	"	"
30	"	"	"
31	"	"	"
32	"	"	"
33	"	"	"
34	"	2,000,000	"
35	"	25,000	"
36	"	"	"
37	"	"	"
38	"	"	"
39	"	"	"
40	"	"	"
41	"	"	"
42	"	"	"
43	"	"	"
44	"	"	"
45	"	"	"
46	"	"	"
47	"	"	"
48	"	"	"
49	"	"	"
50	"	"	"

Con objeto de dar respuesta a las preguntas planteadas se consideraron tasas de descuento de 1% a 15%.

Tasa de descuento	V.P.N. Concreto	V.P.N. Asfalto (sin subsidio)
1 %	10,489,400	11,240,000
2 %	9,957,350	10,408,825
3 %	9,553,950	9,781,950
4 %	9,246,500	9,303,250
5 %	9.009,200	8,929,500
6 %	8,827,200	8,640,150
7 %	8,683,875	8,408,850
8 %	8,571,925	8,222,975
9 %	8,483,075	8.074,850
10%	8,413, 575	7,954,325
12%	8,312,225	7,770,450
15%	8,217,850	7,595,400

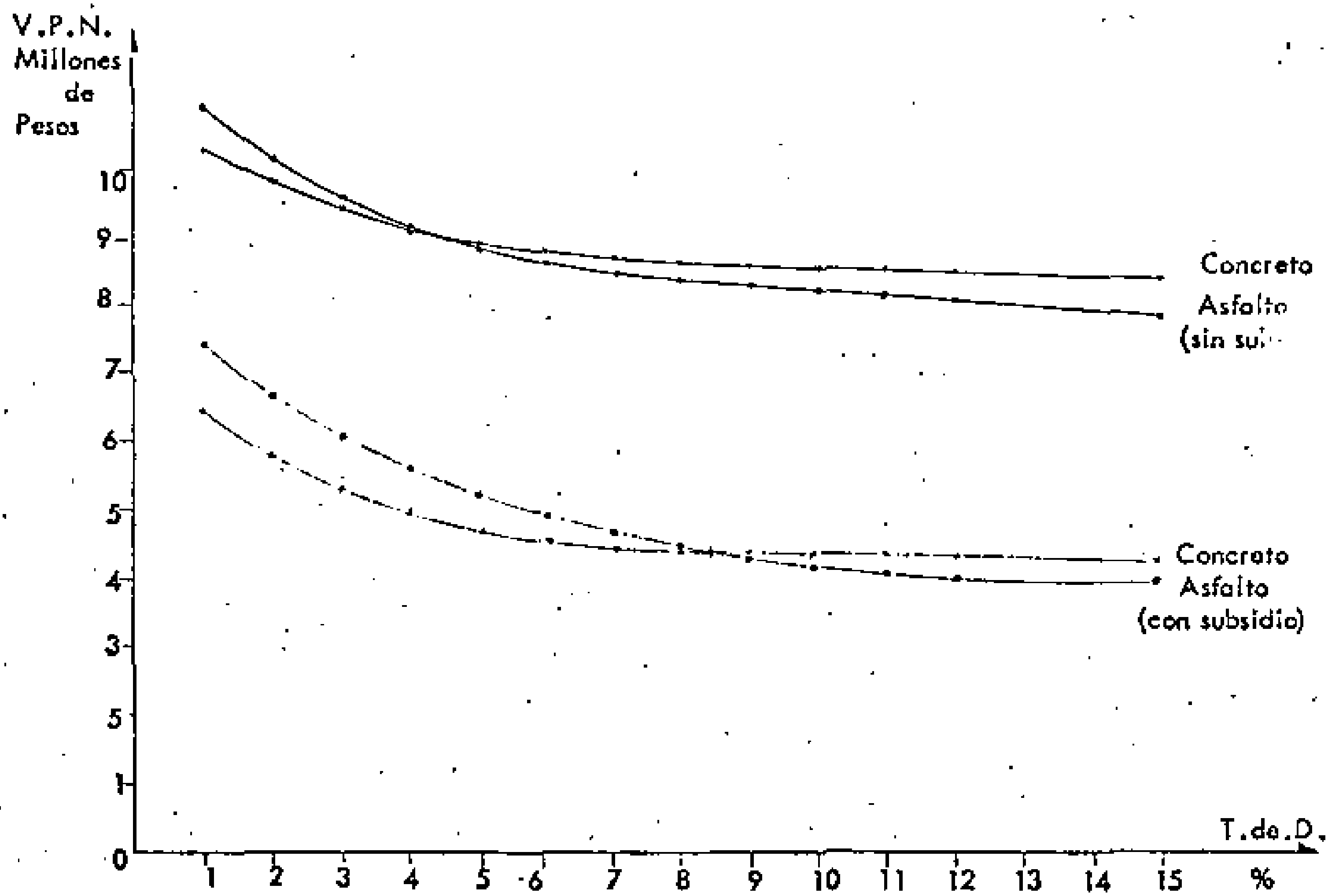
Es claro que para el 8% considerado la solución debe ser "asfalto".

De la figura se observa que para tasas de interés menores del 4.5% es preferible un pavimento de concreto para tasas mayores al 4.5% resulta mejor un pavimento de asfalto.

Para el caso en que una entidad ajena pague el 50% del costo inicial resulta

Tasa de descuento	V. P. N. Concreto	V. P. N. Asfalto(con subsidio)
1 %	6,489,400	7,640,000
2 %	5,957,350	6,808,825
3 %	5,553,950	6,181,950
4 %	5,246,500	5,703,250
5 %	5,009,200	5,329,500
6 %	4,827,200	5,040,150
7 %	4,683,875	4,808,850
8 %	4,571,925	4,622,975
9 %	4,483,075	4,474,850
10%	4,413,575	4,354,325
12%	4,312,225	4,170,450
15%	4,217,850	3,995,400

Cuando se cuenta con un subsidio del 50% del costo inicial y para una tasa del 8% el pavimento de concreto luce como mejor. Observese que para tasas arriba del 8.5% rige el pavimento de asfalto y para inferiores es el de concreto.



V.P.N.
Millones
de
Pesos
10
9
8
7
6
5
4
3
5
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
%
T.de.D.
Concreto
Asfalto
Concreto
Asfalto
(con subsidio)

199. Clasificación de proyectos

Se fijará ahora la atención en el problema de definir el conjunto de proyectos que deben ser seleccionados cuando existe un presupuesto fijo o un conjunto fijo de fondos para invertir en el futuro. El problema de la presupuestación consiste en asignar cantidades fijas de recursos, usualmente moneda, a una cierta variedad de proyectos alternos, trabajos o inversiones. El problema de la presupuestación difiere de otros de asignación de recursos, en que el tiempo es un factor esencial. Las decisiones de presupuestación pueden ser enfocadas ya sea desde un punto de vista de definir que proyectos a largo plazo deben ser seleccionados a partir de un cierto presupuesto, o bien definir cuando debe iniciarse un cierto proyecto. En cualquiera de los dos casos el elemento tiempo es importante en el problema.

Se entiende por un proyecto una actividad que requiere un compromiso de recursos en uno o más períodos con objeto de generar beneficios a lo largo del tiempo. Un proyecto es simplemente un medio para convertir recursos disponibles en un cierto período en valores disponibles en otro.

Ahora bien, los proyectos pueden ser independientes o dependientes, divisibles o indivisibles. Los proyectos independientes tienen la característica de que los beneficios que generan son independientes de la acción tomada en otros proyectos. Por el contrario si la acción tomada afecta los beneficios a generar por un cierto proyecto éste será dependiente. Entre este tipo de proyectos dependientes, encontramos los contingentes y los mutuamente exclusivos. Un ejemplo de proyecto contingente lo encontramos en proyecto de entroque entre dos supercarreteras (México-Cuernavaca y La Pera-Cuautla) es contingente en cuanto a que dependerá del proyecto de la segunda carretera. Por el contrario dos proyectos mutuamente exclusivos quedan ejemplificados por dos diseños para el mismo entroque una vez tomada la decisión del lugar. Por su parte los proyectos divisibles son aquellos que generan beneficios desde el momento que alguno de sus partes se realiza. Una carretera es un proyecto divisible puesto que sus tramos ya generan beneficios. Por el contrario un entronque es un proyecto indivisible ya que no principiará a generar beneficios hasta no estar abierto al tránsito.

De acuerdo con esta clasificación de los proyectos se clasificarán las técnicas y los modelos de presupuestación. Al tratar con las técnicas y los modelos deberá agregarse un factor de clasificación más: la incertidumbre. Así los modelos de presupuestación podrán ser deterministas o probabilistas según se considera la intervención del riesgo.

200. Proyectos independientes indivisibles y de un sólo periodo. (determinista)

Considerese un conjunto de proyectos $p_1, \ldots p_n$ independientes e indivisibles que requieren inversiones $a_1, \ldots, a_n$ para producir, en un sólo período, beneficios netos actuales $b_1, \ldots, b_n$. Considerando que existe una disponibilidad presupuestal c, definir el subconjunto de proyectos que maximice la suma de valores presentes netos invirtiendo sumas que no sobrepase el presupuesto.

El modelo básico es muy simple

$$\max\ z = b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n$$

s.a

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = C$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

$x_i = 1$ si el proyecto p_i se adopta, $x_i = 0$ en caso contrario.

Para un valor individual de la solución es inmediata acudiendo a uno cualquiera de los métodos de la Programación Binaria (Entera) como puede ser el de Lawler-Bell o busqueda directa etc...

201 . Ejemplo

Sean los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 cuando se dispone de \$27,000.00 y las características de costos y beneficios son los mostrados.

	b_i	a_i
P_1	3,000	10,000
P_2	4,000	15,000
P_3	5,000	20,000
P_4	1,000	5,000

$$\max\ z = 3000\,x_1 + 4000\,x_2 + 5000\,x_3 + 1000\,x_4$$

s.a.

$$10,000\,x_1 \cdot 15,000\,x_2 + 20,000\,x_3 + 5,000\,x_4 = 27,000$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1.$$

Luego se deben invertir \$10,000 en P_1 , \$ 15,000 en P_2, obteniendose beneficios netos actuales por \$7,000.00

202. Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal para proyectos independientes, indivisibles y de un sólo periodo.

Cuando el problema no consiste en determinar la inversión óptima para una disponibilidad presupuestal específica, sino definirlas para un itervalo entre A y B considerando subintervalos de amplitud señalada, entonces el camino es la Programación Dinámica.

Sea la variable de estado que describe el presupuesto, sean x_i las variables de decisión para proyecto p_i. Los beneficios obtenidos por invertir en los proyectos $P_1, P_2, \ldots, P_i$ se representarán por $\Lambda_i(\xi)$.

Se tiene: $\Lambda_0(\xi) = 0; \quad = 0.$

$$\Lambda_i(\xi) = \max_{x_1,\ldots,x_i} \left\{ \Lambda_{i-1}(\xi),\ b_i + \Lambda_{i-1}(\xi - a_i x_i) \right. ; \quad \Lambda_{i-1}(\xi - a_i x_i) = \infty \text{ si } \xi - a_i x_i < 0$$

Esto es, los beneficios iniciales, sin invertir en ningún proyecto, son nulos, cualquiera que sea el estado de la disponibilidad de capital.

Los beneficios producidos por los proyectos $P_1, \ldots, P_i$ o son los obtenidos por $P_1, \ldots, P_{i-1}$ si P_i no es seleccionado ($x_i = 0$) ó son los que se llevaban hasta P_{i-1} mas los aportados por P_i ($x_i = 1$). Obsérvese que si hasta P_i se disponia de ξ, hasta $i-1$ se dispondrá de $(\xi - a_i)$.

203. Ejemplo

Estudiar para sensibilidad disponibilidades entre 0 y \$50,000.00 considerando inter valos de $5,000.00 , para el problema antes enunciado.

	b_i	a_i
P_1	3,000	10,000
P_2	4,000	15,000
P_3	5,000	20,000
P_4	1,000	5,000

Niveles	Intervalos
1	0 a 5,000
2	5,000 a 10,000
3	10,000 a 15,000
4	15,000 a 20,000
5	20,000 a 25,000
6	25,000 a 30,000
7	30,000 a 35,000
8	35,000 a 40,000
9	40,000 a 45,000
10	45,000 a 50,000
11	50,000 ⟶

$(x_1, x_2, x_3\ x_4)$	Restricción	z
(0,0,0,0)	si	0
(0,0,0 1)	si	1000
(0,0,1,0)	si	5000
(0,0,1,1)	si	6000
(0,1,0,0)	si	4000
(0,1,0,1)	si	5000
(0,1,1,0)	no	—
(0,1,1,1)	no	—
(1,0,0,0)	si	3000
(1,0,0,1)	si	4000
(1,0,1,0)	no	—
(1,0,1,1)	no	—
(1,1,0,0)	si	7000 ←
(1,1,0,1)	no	—
(1,1,1,0)	no	—
(1,1,1,1)	no	—

Respuesta

$x_1 = x_2 = 1$

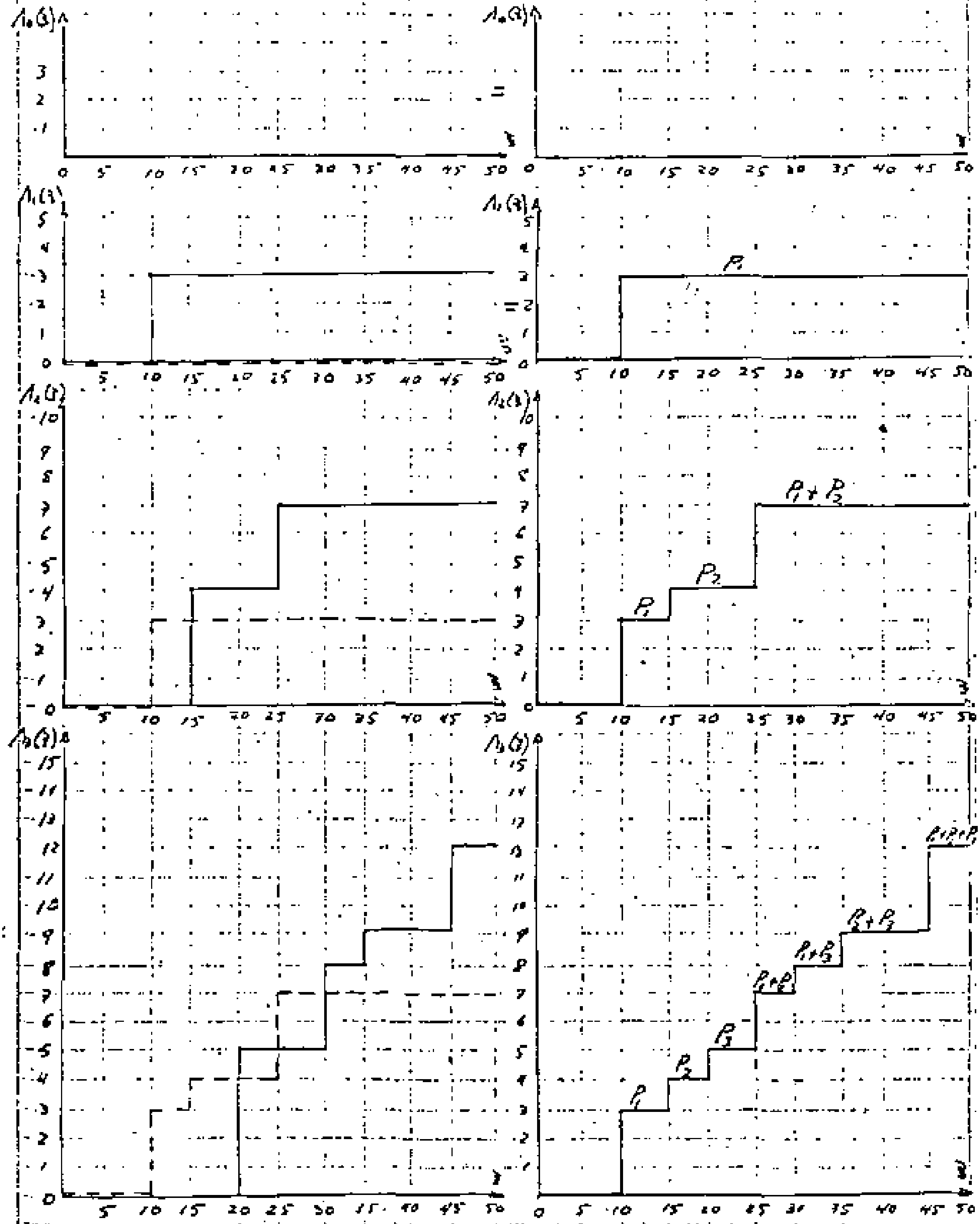
$x_3 = x_4 = 0$

$z = \$7,000.00$

ξ	$\Lambda_0(\xi)$	$\xi-10$	$3+\Lambda_0$	$\Lambda_1(\xi)$	x_i	$\xi-15$	$4+\Lambda_1$	Λ_2	x_i	$\xi-20$	$5+\Lambda_2$	Λ_3	x_i	$\xi-5$	$1+\Lambda_3$	Λ_4	x_i	
1	0	-	$-\infty$	0	0,0,0,0	-	$-\infty$	0	0,0,0,0	-	$-\infty$	0	0,0,0,0	-	$-\infty$	0	0,0,0,0	
2	0	-	$-\infty$	0	0,0,0,0	-	$-\infty$	0	"	-	$-\infty$	0	"	1	1	1	0,0,0,1	
3	0	1	3	3	1,0,0,0	-	$-\infty$	3	1,0,0,0	-	$-\infty$	3	1,0,0,0	2	1	3	1,0,0,0	
4	0	2	3	3	"	1	4	4	0,1,0,0	-	$-\infty$	4	0,1,0,0	3	4	4	0,1,0,0	1,0,0,1
5	0	3	3	3	"	2	4	4	"	1	5	5	0,0,1,0	4	5	5	0,0,1,0	0,1,0,1
6	0	4	3	3	"	3	7	7	1,1,0,0,	2	5	7	1,1,0,0	5	6	7	1,1,0,0	
7	0	5	3	3	"	4	7	7	"	3	8	8	1,0,1,0	6	8	8	1,0,1,0	1,1,0,1
8	0	6	3	3	"	5	7	7	"	4	9	9	0,1,1,0	7	9	9	0,1,1,0	1,0,1,1
9	0	7	3	3	"	6	7	7	"	5	9	9	"	8	10	10	0,1,1,1	
10	0	8	3	3	"	7	7	7	"	6	12	12	1,1,1,0	9	10	12	1,1,1,0	
11	0	9	3	3	"	8	7	7	"	7	12	12	"	10	13	13	1,1,1,1	

Nivel	Intervalo Presupuestal	Proyectos a invertir
1	0 a 4,999	-
2	5,000 a 9999	P_4
3	10,000 a 14,999	P_1
4	15,000 a 19,999	P_2 P_1 y P_4
5	20,000 a 24,999	P_3 P_2 y P_4
6	25,000 a 29,999	P_1 y P_2
7	30,000 a 34,999	P_1 y P_3 P_1, P_2 y P_4
8	35,000 a 39,999	P_2 y P_3 P_1, P_3 y P_4
9	40,000 a 44,999	P_2, P_3 y P_4
10	45,000 a 49,999	P_1, P_2 y P_3
11	50,000 ——	P_1, P_2, P_3 y P_4

II.3.- Método gráfico para determinar la sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos independientes, indivisibles y de un sólo periodo.



Por su parte el cuadro de inversiones por proyectos es como sigue

Proyecto	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50 – ∞	
P_1			✓ *	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	7
P_2				✓ *	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	8 **
P_3					✓ *		✓	✓	✓	✓	✓	6 ***
P_4		✓ *		✓	✓		✓	✓			✓	7
	0 (2)	1	1	3	3	2	4 (1)	4 (1)	3	3	4 (1)	

* Proyecto independiente

** Proyecto mas flexible

*** Proyecto menos flexible

(1) Intervalos con mayores posibilidades de inversión

(2) Intervalo sin ninguna posibilidad de inversión.

Proyectos ordenados según su flexibilidad: P_2, P_1 y P_4, P_3

Intervalos ordenados según sus posibilidades de inversion

(50- ∞, 35-40, 30-35), (45-50, 40-45, 20-25, 15-20), (25-30), (10-15,5-10),

(0-5)

204. El método de Ullman

Siguiendo los pasos del método gráfico Ullman ha ideado un camino que simplifica grandemente el cálculo númerico.

	10-3	15-4	20-5	5-1
Lista 0	Lista 1	Lista 2	Lista 3	Lista 4
0-0	0-0	0-0	0-0	0-0
	10-3	[illegible]-3	10-3	5-1
		15-4	15-4	10-3

Lista 0	Lista 1	Lista 2	Lista 3	Lista 4
		25-7	20-5	15-4
			25-7	
			30-8	20-5
			35-9	25-7
			45-12	30-8
				35-9
				40-10
				45-12
				50-13

Como se puede apreciar el método consiste en ir formulando listas sucesivas con el extremo inferior del intervalo presupuestal y los beneficios $\Lambda_i(\xi)$, se parte 0-0 y se agregan costos y beneficios por cada proyecto comparando, para cada intervalo, si las sumas son superiores o no a las ya existentes. Si la suma es superior será seleccionada, en caso contrario se opta por la de la lista anterior. También deberán incluirse, en la nueva lista, los puntos de la anterior cuyo monto en inversión sea inferior al obtenido con la suma.

205. Proyectos independientes indivisibles y de periodos multiples (determinista)

El modelo a emplear es similar al anterior, solo que ahora las inversiones y las disponibilidades presupuestales variarán de periodo en periodo. Considerando un horizonte de planeación T, de manerará que t = 1,2,...,T resulta..

$$\max \; z = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n$$

s.a.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq c_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq c_2$$

$$\text{—— —— —— —— —— —— ——}$$

$$a_{t1} x_1 + a_{t2} x_2 + \ldots + a_{tn} x_n \leq c_T$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

Nuevamente $x_i = 1$ indica que el proyecto P_i es aceptado. El caso contrario implicará $x_i = 0$.

Para disponibilidades presupuestales $\{c_1, \ldots, c_T\}$ definidos, el problema puede resolverse por cualquiera de los métodos de la Programación Binaria.

206. Ejemplo

Sean los siguientes datos

$$\text{Beneficios } \overline{b} = \left(3000, 4000, 5000, 1000\right)$$

respectivamente para los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4.

$$\text{Costos } \overline{A} = \begin{pmatrix} 10,000 & 15,000 & 20,000 & 5,000 \\ 5,000 & 10,000 & 10,000 & 10,000 \\ 15,000 & 15,000 & 15,000 & 5,000 \end{pmatrix}$$

respectivamente para los cuatro proyectos y tres periodos t_1, t_2 y t_3.

Disponibilidades presupuestales

$$\overline{c} = \begin{pmatrix} 30,000 \\ 20,000 \\ 40,000 \end{pmatrix}$$

en cada uno de los periodos.

se tiene:

$$\max z = 3000\,x_1 + 4000\,x_2 + 5000\,x_3 + 1000\,x_4$$

s.a.

$$10{,}000\,x_1 + 15{,}000\,x_2 + 20{,}000\,x_3 + 5{,}000\,x_4 \leq 30{,}000$$

$$5{,}000\,x_1 + 10{,}000\,x_2 + 10{,}000\,x_3 + 10{,}000\,x_4 \leq 20{,}000$$

$$15{,}000\,x_1 + 15{,}000\,x_2 + 15{,}000\,x_3 + 5{,}000\,x_4 \leq 40{,}000$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1.$$

Dado lo simple del problema se empleará busqueda directa

$\bar{x}$	R_1	R_2	R_3	z
0,0,0,0	si	si	si	0
0,0,0,1	si	si	si	1,000
0,0,1,0	si	si	si	5,000
0,0,1,1	si	si	si	6,000
0,1,0,0	si	si	si	4,000
0,1,0,1	si	si	si	5,000
0,1,1,0	no	si	si	——
0,1,1,1	no	no	si	——
1,0,0,0	si	si	si	3,000
1,0,0,1	si	si	si	4,000
1,0,1,0	si	si	si	8,000 ←
1,0,1,1	no	no	si	——
1,1,1,0	si	si	si	7,000
1,1,0,1	si	no	si	——

$\bar{x}$	R_1	R_2	R_3	z
1,1,1,0	no	no	si	______
1,1,1,1	no	no	no	______

$$x_1 = x_3 = 1, \quad x_2 = x_4 = 0$$

Invertir en los proyectos P_1 y P_3

207. <u>Sensibilidad para la disponibilidad presupuestal en proyectos independientes, independientes, indivisibles y de periodos múltiples.</u>

El camino para el estudio de sensibilidad nuevamente conduce el uso de la Programación Dinámica. La fórmula de recurrencia coincide con la antes usada sólo que ahora se tendrá un rector de variables de estado.

$$\Lambda_o(\xi) = 0$$

$$\Lambda_i(\xi) = \max_{x_1,\ldots,x_i}\left(\Lambda_{i-1}(\xi),\ b_i + \Lambda_{i-1}(\bar{\xi} - \bar{a}_i\, x_i)\right)$$

$\Lambda_{i-1}(\bar{\xi} - \bar{a}_i\,\bar{x}_i) = -\infty$ si cualquiera de los elementos $(\xi_t - a_{ti}\, x_i) < 0$.

La interpretación de la fórmula de recurrencia coinciden con la antes expuesta.

208. <u>Ejemplo.</u>

Usando niveles de inversión de $5,000.00 estudiar para sensibilidad el problema del número 206.

	ξ_2	ξ_3	Λ_0	ξ_1-10	ξ_2-5	ξ_3-15	$3+\Lambda_0$	Λ_1	$\bar{x}$	ξ_1-15	ξ_2-10	ξ_3-15	$4+\Lambda_1$	Λ_2	$\bar{x}$	ξ_1-20	ξ_2-10	ξ_3-15	$5+\Lambda_2$	Λ_3	$\bar{x}$	ξ_1-5	ξ_2-10	ξ_3-5	$1+\Lambda_3$	Λ_4
[illegible]	1	1	0	-	-	-	$-\infty$	0	oo	-	-	-	$-\infty$	0	oo	-	-	-	$-\infty$	0	oo	-	-	-	$-\infty$	0
[illegible]	1	2	0	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0
[illegible]	1	3	0	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0
[illegible]	1	4	0	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0
[illegible]	1	5	0	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0
[illegible]	1	6	0	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0
[illegible]	1	7	0	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	6	$-\infty$	0
[illegible]	1	8	0	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	7	$-\infty$	0
[illegible]	2	1	0	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0
[illegible]	2	2	0	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0
[illegible]	2	3	0	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0
[illegible]	2	4	0	-	1	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0
[illegible]	2	5	0	-	1	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0
[illegible]	2	6	0	-	1	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0
[illegible]	2	7	0	-	1	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	6	$-\infty$	0
[illegible]	2	8	0	-	1	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	7	$-\infty$	0
[illegible]	3	[illegible]	0	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0
[illegible]	3	[illegible]	0	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	1	$-\infty$	0
[illegible]	3	[illegible]	0	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	2	$-\infty$	0
[illegible]	3	4	0	-	2	1	$-\infty$	0	"	-	1	1	$-\infty$	0	"	-	1	1	$-\infty$	0	"	-	1	3	$-\infty$	0
[illegible]	3	5	0	-	2	2	$-\infty$	0	"	-	1	2	$-\infty$	0	"	-	1	2	$-\infty$	0	"	-	1	4	$-\infty$	0
[illegible]	3	6	0	-	2	3	$-\infty$	0	"	-	1	3	$-\infty$	0	"	-	1	3	$-\infty$	0	"	-	1	5	$-\infty$	0
[illegible]	3	7	0	-	2	4	$-\infty$	0	"	-	1	4	$-\infty$	0	"	-	1	4	$-\infty$	0	"	-	1	6	$-\infty$	0
[illegible]	3	8	0	-	2	5	$-\infty$	0	"	-	1	5	$-\infty$	0	"	-	1	5	$-\infty$	0	"	-	1	7	$-\infty$	0
[illegible]	4	1	0	-	3	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0
[illegible]	4	2	0	-	3	-	[illegible]	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	1	$-\infty$	0

ξ_1	ξ_2	ξ_3	Λ	-10	ξ_2-5	ξ_3-15	$3+\Lambda_0$	Λ_1	$\bar{x}$	ξ_1-15	ξ_2-10	ξ_3-15	$4+$	Λ_2	$\bar{x}$	ξ_1-20	ξ_2-10	ξ_3-15	$5+\Lambda_2$	Λ_3	$\bar{x}$	ξ_1-5	ξ_2-10		$1+\Lambda_3$	Λ_4	$\bar{x}$
1	4	[illegible]	0	-	3	-	$-\infty$	0	00 00	-	2	-	$-\infty$	0	00 00	-	2	-	$-\infty$	0	00	-	2	2	$-\infty$	0	[illegible]
[illegible]	4	[illegible]	0	-	3	1	$-\infty$	0	"	-	2	1	$-\infty$	0	"	-	2	1	$-\infty$	0	"	-	2	3	$-\infty$	0	"
[illegible]	4	[illegible]	0	-	3	2	$-\infty$	0	"	-	2	2	$-\infty$	0	"	-	2	2	[illegible]	0	"	-	2	4	$-\infty$	0	"
1	4	[illegible]	0	-	3	3	$-\infty$	0	"	-	2	3	$-\infty$	0	"	-	2	3	$-\infty$	0	"	-	2	5	$-\infty$	0	"
1	4	7	0	-	3	4	$-\infty$	0	"	-	2	4	$-\infty$	0	"	-	2	4	$-\infty$	0	"	-	2	6	$-\infty$	0	"
1	4	[illegible]	0	-	3	5	$-\infty$	0	"	-	2	5	$-\infty$	0	"	-	2	5	$-\infty$	0	"	-	2	7	[illegible]	0	"
2	[illegible]	[illegible]	0	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"
2	[illegible]	[illegible]	0	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	1	$-\infty$	0	"
2	[illegible]	[illegible]	0	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	2	$-\infty$	0	"
2	[illegible]	[illegible]	0	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	1	-	3	$-\infty$	0	"
2	1	[illegible]	0	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	1	-	4	$-\infty$	0	"
2	1	[illegible]	0	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	1	-	5	$-\infty$	0	"
2	1	[illegible]	0	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	1	-	6	$-\infty$	0	"
2	1	[illegible]	0	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	1	-	7	$-\infty$	0	"
2	2	[illegible]	0	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"
2	2	[illegible]	0	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	1	$-\infty$	0	"
2	[illegible]	3	[illegible]	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	2	$-\infty$	0	"
2	2	[illegible]	0	-	1	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	1	-	3	$-\infty$	0	"
2	2	[illegible]	0	-	1	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	1	-	4	$-\infty$	0	"
2	2	[illegible]	0	-	1	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	1	-	5	$-\infty$	0	"
2	2	7	0	-	1	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	1	-	6	$-\infty$	0	"
2	2	8	0	-	1	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	1	-	7	$-\infty$	0	"
2	3	[illegible]	0	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	1	1	-	$-\infty$	0	"
2	3	2	0	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	1	1	1	1	1	"
2	3	3	0	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	1	1	2	1	1	"
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	-	2	1	$-\infty$	0	"	-	1	1	$-\infty$	0	"	-	1	1	$-\infty$	0	"	1	1	3	1	1	"
			0	-	2	2	$-\infty$	0	"	-	1	2	$-\infty$	0	"	-	1	2	$-\infty$	0	"	1	1	[illegible]	1	1	"
			0	-	2	3	$-\infty$	0	"	-	1	3	$-\infty$	0	"	-	1	3	$-\infty$	0	"	1	1	.	1	1	"

	ξ_2		Λ	-10	ξ_2-5	ξ_3-15	$3+\lambda_0$	Λ_1	$\bar{x}$	ξ_1-15	ξ_2-10	ξ_3-15	$4+\Lambda$	λ_2	$\bar{x}$	ξ_1-20	ξ_2-10	ξ_3-15	$5+\lambda_2$	Λ_3	$\bar{x}$	ξ_1-5	ξ_2-10		$1+\lambda_3$	4
[illegible]	3	7	0	-	2	4	$-\infty$	0	00 00	-	1	4	$-\infty$	0	00 00	-	1	4	$-\infty$	0	00 00	1	1	6	1	1
[illegible]	3	8	0	-	2	5	$-\infty$	0	"	-	1	5	$-\infty$	0	"	-	1	5	$-\infty$	0	"	1	1	7	1	1
[illegible]	4	1	0	-	3	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	1	2	-	$-\infty$	0
2	4	2	0	-	3	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	1	2	1	1	1
2	4	3	0	-	3	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	1	2	2	1	1
2	4	4	0	-	3	1	$-\infty$	0	"	-	2	1	$-\infty$	0	"	-	2	1	$-\infty$	0	"	1	2	3	1	1
2	4	5	0	-	3	2	$-\infty$	0	"	-	2	2	$-\infty$	0	"	-	2	2	$-\infty$	0	"	1	2	4	1	1
2	4	6	0	-	3	3	$-\infty$	0	"	-	2	3	$-\infty$	0	"	-	2	3	$-\infty$	0	"	1	2	5	1	1
2	4	7	0	-	3	4	$-\infty$	0	"	-	2	4	$-\infty$	0	"	-	2	4	$-\infty$	0	"	1	2	6	1	1
2	4	8	0	-	3	5	$-\infty$	0	"	-	2	5	$-\infty$	0	"	-	2	5	$-\infty$	0	"	1	2	7	1	1
3	1	1	0	1	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0
3	1	2	0	1	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	1	$-\infty$	0
3	1	3	0	1	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	2	$-\infty$	0
3	1	4	0	1	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	2	-	3	$-\infty$	0
3	1	5	0	1	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	2	-	4	$-\infty$	0
3	1	6	0	1	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	2	-	5	$-\infty$	0
3	1	7	0	1	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	2	-	6	$-\infty$	0
3	1	8	0	1	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	2	-	7	$-\infty$	0
3	2	1	0	1	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0
3	2	2	0	1	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	1	$-\infty$	0
3	2	3	0	1	1	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	2	$-\infty$	0
3	2	4	0	1	1	1	3	3	10 00	-	-	1	$-\infty$	3	10 00	-	-	1	$-\infty$	3	10 00	2	-	3	$-\infty$	3
3	2	5	0	1	1	2	3	3	"	-	-	2	$-\infty$	3	"	-	-	2	$-\infty$	3	"	2	-	4	$-\infty$	3
3	2	6	0	1	1	3	3	3	"	-	-	3	$-\infty$	3	"	-	-	3	$-\infty$	3	"	2	-	5	$-\infty$	3
3	2	7	0	1	1	4	3	3	"	-	-	4	$-\infty$	3	"	-	-	4	$-\infty$	3	"	2	-	6	$-\infty$	3
3	2	8	0	1	1	5	3	3	"	-	-	5	$-\infty$	3	"	-	-	5	$-\infty$	3	"	2	-	7	$-\infty$	3

ξ_2	ξ_3	Λ	ξ_1-10	ξ_2-5	ξ_2-15	$3+\Lambda_0$	Λ_1	$\bar{x}$	ξ_1-15	ξ_2-10	ξ_3-15	$4+\Lambda$	Λ_2	$\bar{x}$	ξ_1-20	ξ_2-10	ξ_3-15	$5+\Lambda_2$	Λ_3	$\bar{x}$	ξ_1-5	ξ_2-10		$14+\Lambda_3$	Λ_4	$\bar{x}$
3	1	0	1	2	-	$-\infty$	0	00 00	-	1	-	$-\infty$	0	00 00	-	1	-	$-\infty$	0		2	1	-	$-\infty$	0	
3	2	0	1	2	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	2	1	1	1	1	
	3	0	1	2	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	2	1	2	1	1	"
3	4	0	1	2	1	3	3	10 00	-	1	1	$-\infty$	3	10 00	-	1	1	$-\infty$	3		2	1	3	1	3	10 00
3	5	0	1	2	2	3	3	"	-	1	2	$-\infty$	3	"	-	1	2	$-\infty$	3	"	2	1	4	1	3	"
3	6	0	1	2	3	3	3	"	-	1	3	$-\infty$	3	"	-	1	3	$-\infty$	3	"	2	1	5	1	3	"
	7	0	1	2	4	3	3	"	-	1	4	$-\infty$	3	"	-	1	4	$-\infty$	3	"	2	1	6	1	3	"
3	8	0	1	2	5	3	3	"	-	1	5	$-\infty$	3	"	-	1	5	$-\infty$	3	"	2	1	7	1	3	"
4	1	0	1	3	-	$-\infty$	0	00 00	-	2	-	$-\infty$	0	00 00	-	2	-	$-\infty$	0	00 00	2	2	-	$-\infty$	0	
4	2	0	1	3	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	2	2	1	1	1	
4	3	0	1	3	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	2	2	2	1	1	"
	4	0	1	3	1	3	3	10 00	-	2	1	$-\infty$	3	10 00	-	2	1	$-\infty$	3	10 00	2	2	3	1	3	
	5	0	1	3	2	3	3	"	-	2	2	$-\infty$	3	"	-	2	2	$-\infty$	3	"	2	2	4	1	3	"
4	6	0	1	3	3	3	3	"	-	2	3	$-\infty$	3	"	-	2	3	$-\infty$	3	"	2	2	5	1	3	"
4	7	0	1	3	4	3	3	"	-	2	4	$-\infty$	3	"	-	2	4	$-\infty$	3	"	2	2	6	1	3	"
4	8	0	1	3	5	3	3	"	-	2	5	$-\infty$	3	"	-	2	5	$-\infty$	3	"	2	2	7	1	3	"
1	1	0	2	-	-	$-\infty$	0	00 00	1	-	-	$-\infty$	0	00 00	-	-	-	$-\infty$	0	00 00	3	-	-	$-\infty$	0	00 00
1	2	0	2	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	3	-	1	$-\infty$	0	"
1	3	0	2	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	3	-	2	$-\infty$	0	"
1	4	0	2	-	1	$-\infty$	0	"	1	-	1	$-\infty$	0	"	-	-	1	$-\infty$	0	"	3	-	3	$-\infty$	0	"
1	5	0	2	-	2	$-\infty$	0	"	1	-	2	$-\infty$	0	"	-	-	2	$-\infty$	0	"	3	-	4	$-\infty$	0	"
1	6	0	2	-	3	$-\infty$	0	"	1	-	3	$-\infty$	0	"	-	-	3	$-\infty$	0	"	3	-	5	$-\infty$	0	"
1	7	0	2	-	4	$-\infty$	0	"	1	-	4	$-\infty$	0	"	-	-	4	$-\infty$	0	"	3	-	6	$-\infty$	0	"
1	8	0	2	-	5	$-\infty$	0	"	1	-	5	$-\infty$	0	"	-	-	5	$-\infty$	0	"	3	-	7	$-\infty$	0	"
2	1	0	2	1	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	3		-	$-\infty$	0	"
2	2	0	2	1	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	-	-	-	$-\infty$	0	"	3		1	$-\infty$	0	"
2	3	0	2	1	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	-		-	$-\infty$	0	"	[illegible]	-	[illegible]	$-\infty$	[illegible]	"
2	4	0	2	1	1	3	3	[illegible]	1	-	1	$-\infty$	3	[illegible]	-		1	$-\infty$	3	10 00		-		$-\infty$	3	10 00

	ξ_2	ξ_3	ξ_0	ξ_1-10	ξ_2-5	ξ_3-15	$3+\xi_0$	Λ_1	$\bar{x}$	ξ_1-15	ξ_2-10	ξ_3-10	$4+\xi_1$	Λ_2	$\bar{x}$	ξ_1-20	ξ_2-10	ξ_3-15	$5+\xi_2$	Λ_3	$\bar{x}$	ξ_1-5	ξ_2-10	ξ_3-5	$1+\xi_3$	Λ_4	$\bar{x}$
	2	5	0	2	1	2	3	3	[illegible]	1	-	2	$-\infty$	3	[illegible]	-	-	2	$-\infty$	3	[illegible]	3	-	4	$-\infty$	3	[illegible]
	2	6	0	2	1	3	3	3	"	1	-	3	$-\infty$	3	"	-	-	3	$-\infty$	3	"	3	-	5	$-\infty$	3	"
	2	7	0	2	1	4	3	3	"	1	-	4	$-\infty$	3	"	-	-	4	$-\infty$	3	"	3	-	6	$-\infty$	3	"
	2	[illegible]	0	2	1	5	3	3	"	1	-	5	$-\infty$	3	"	-	-	5	$-\infty$	3	"	3	-	7	$-\infty$	3	"
	3	[illegible]	0	2	2	-	$-\infty$	0	[illegible]	1	1	-	$-\infty$	0	[illegible]	-	1	-	$-\infty$	0	[illegible]	3	1	-	$-\infty$	0	
	3	[illegible]	0	2	2	-	$-\infty$	0	"	1	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	3	1	1	1	1	"
	3	[illegible]	0	2	2	-	$-\infty$	0	"	1	1	-	$-\infty$	0	"	-	1	-	$-\infty$	0	"	3	1	2	1	1	"
	3	4	0	2	2	1	3	3	[illegible]	1	1	1	4	4	[illegible]	-	1	1	$-\infty$	4	[illegible]	3	1	3	1	4	[illegible]
	3	5	0	2	2	2	3	3	"	1	1	2	4	4	"	-	1	2	$-\infty$	4	"	3	1	4	1	4	"
	3	6	0	2	2	3	3	3	"	1	1	3	4	4	"	-	1	3	$-\infty$	4	"	3	1	5	1	4	"
	3	7	0	2	2	4	3	3	"	1	1	4	4	4	"	-	1	4	$-\infty$	4	"	3	1	6	1	4	"
	3	[illegible]	0	2	2	5	3	3	"	1	1	5	4	4	"	-	1	5	$-\infty$	4	"	3	1	7	1	4	"
	4	[illegible]	0	2	3	-	$-\infty$	0	[illegible]	1	2	-	$-\infty$	0	[illegible]	-	2	-	$-\infty$	0	[illegible]	3	2	-	$-\infty$	0	[illegible]
	4	2	0	2	3	-	$-\infty$	0	"	1	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	3	2	1	1	1	"
	4	[illegible]	0	2	3	-	$-\infty$	0	"	1	2	-	$-\infty$	0	"	-	2	-	$-\infty$	0	"	3	2	2	1	1	"
	4	4	0	2	3	1	3	3	[illegible]	1	2	1	4	4	[illegible]	-	2	1	$-\infty$	4	[illegible]	3	2	3	1	4	[illegible]
	4	5	0	2	3	2	3	3	"	1	2	2	4	4	"	-	2	2	$-\infty$	4	"	3	2	4	4	4	"
	4	6	0	2	3	3	3	3	"	1	2	3	4	4	"	-	2	3	$-\infty$	4	"	3	2	5	4	4	"
	4	7	0	2	3	4	3	3	"	1	2	4	4	4	"	-	2	4	$-\infty$	4	"	3	2	6	4	4	"
	4	8	0	2	3	5	3	3	"	1	2	5	4	4	"	-	2	5	$-\infty$	4	"	3	2	7	4	4	"
5	1	1	0	3	-	-	$-\infty$	0	[illegible]	2	-	-	$-\infty$	0	[illegible]	1	-	-	$-\infty$	0	[illegible]	4	-	-	$-\infty$	0	[illegible]
	1	2	0	3	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	4	-	1	$-\infty$	0	
	1	3	0	3	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	4	-	2	$-\infty$	0	
	[illegible]	4	0	3	-	1	$-\infty$	0	"	2	-	1	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	4	-	3	$-\infty$	0	

ξ_1	ξ_2	ξ_3	Λ_0	ξ_1-10	ξ_2-5	ξ_3-15	$3+\Lambda_0$	Λ_1	$\bar{x}$	ξ_1-15	ξ_2-10	ξ_3-15	$4+\Lambda_1$	Λ_2	$\bar{x}$	ξ_1-20	ξ_2-10	ξ_3-15	$5+\Lambda_2$	Λ_3	$\bar{x}$	ξ_1-5	ξ_2-10	ξ_3-5	$1+\Lambda_3$	Λ_4	$\bar{x}$
5	1	5	0	3	-	2	$-\infty$	0	00/00	2	-	2	$-\infty$	0	00/00	1	-	2	$-\infty$	0	00/00	4	-	4	$-\infty$	0	[illegible]
5	1	5	0	3	-	3	$-\infty$	0	"	2	-	3	$-\infty$	0	"	1	-	3	$-\infty$	0	"	4	-	5	$-\infty$	0	"
5	1	7	0	3	-	4	$-\infty$	0	"	2	-	4	$-\infty$	0	"	1	-	4	$-\infty$	0	"	4	-	6	$-\infty$	0	"
5	1	3	0	3	-	5	$-\infty$	0	"	2	-	5	$-\infty$	0	"	1	-	5	$-\infty$	0	"	4	-	7	$-\infty$	0	"
	2	1	0	3	1	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	4	-	-	$-\infty$	0	"
5	2	2	0	3	1	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	1	-	-	$-\infty$	0	"	4	-	-	$-\infty$	0	"
	2	3	0	3	1	-	$-\infty$	0	20/00	2	-	-	$-\infty$	0	20/00	1	-	-	$-\infty$	0	00/00	4	-	2	$-\infty$	0	
5	2	4	0	3	1	1	3	3	10/00	2	-	1	$-\infty$	3	10/00	1	-	1	$-\infty$	3	10/00	4	-	3	$-\infty$	3	
5	2	5	0	3	1	2	3	3	"	2	-	2	$-\infty$	3	"	1	-	2	$-\infty$	3	"	4	-	4	$-\infty$	3	"
5	2	6	0	3	1	3	3	3	"	2	-	3	$-\infty$	3	"	1	-	3	$-\infty$	3	"	4	-	5	$-\infty$	3	"
5	2	7	0	3	1	4	3	3	"	2	-	4	$-\infty$	3	"	1	-	4	$-\infty$	3	"	4	-	6	$-\infty$	3	"
5	2	8	0	3	1	5	3	3	"	2	-	5	$-\infty$	3	"	1	-	5	$-\infty$	3	"	4	-	7	$-\infty$	3	"
5	3	1	0	3	2	-	$-\infty$	0	30/00	2	1	-	$-\infty$	0	30/00	1	1	-	$-\infty$	0	30/00	4	1	-	$-\infty$	[illegible]	
5	3	2	0	3	2	-	$-\infty$	0	"	2	1	-	$-\infty$	0	"	1	1	-	$-\infty$	0	"	4	1	1	1	1	
5	3	3	0	3	2	-	$-\infty$	0	"	2	1	-	$-\infty$	0	"	1	1	-	$-\infty$	0	"	4	1	2	1	1	
5	3	4	0	3	2	1	3	3	10/00	2	1	1	4	4	21/00	1	1	1	5	5	30/70	4	1	3	1	5	
5	3	5	0	3	2	2	3	3	"	2	1	2	4	4	"	1	1	2	5	5	"	4	1	4	1	5	
5	3	6	0	3	2	3	3	3	"	2	1	3	4	4	"	1	1	3	5	5	"	4	1	5	1	5	"
5	3	7	0	3	2	4	3	3	"	2	1	4	4	4	"	1	1	4	5	5	"	4	1	6	1	5	"
5	3	8	0	3	2	5	3	3	"	2	1	5	4	4	"	1	1	5	5	5	"	4	1	7	1	6	"
5	4	1	0	3	3	-	$-\infty$	0	00/00	2	2	-	$-\infty$	0	30/00	1	2	-	$-\infty$	0	30/30	4	2	-	$-\infty$	0	
5	4	2	0	3	3	-	$-\infty$	0	"	2	2	-	$-\infty$	0	"	1	2	-	$-\infty$	0	"	4	2	1	1	1	
5	4	3	0	3	3	-	$-\infty$	0	"	2	2	-	$-\infty$	0	"	1	2	-	$-\infty$	0	"	4	2	2	1	1	"
5	4	4	0	3	3	1	3	3		2	2	1	4	4	31/00	1	2	1	5	5		4	2	3	1	5	
5	4	5	0	3	3	2	3	3	"	2	2	2	4	4	"	1	2	2	5	5	"	4	2	4	4	5	"

ξ_1	ξ_2	ξ_3	Λ_0	ξ_1-10	ξ_2-5	ξ_3-15	$3+\Lambda_0$	Λ_1	$\bar{x}$	ξ_1-15	ξ_2-10	ξ_3-15	$4+\Lambda_1$	Λ_2	$\bar{x}$	ξ_1-20	ξ_2-10	ξ_3-15	$5+\Lambda_2$	Λ_3	$\bar{x}$	ξ_1-5	ξ_2-10	ξ_3-5	$1+\Lambda_3$	Λ_4
5	4	5	0	3	3	2	3	3	10/00	2	2	2	4	4	01/00	1	2	2	5	5	00/10	4	2	4	4	5
5	4	6	0	3	3	3	3	3	"	2	2	3	4	4	"	1	2	3	5	5	"	4	2	5	4	5
[illegible]	[illegible]	7	0	3	3	4	3	3	"	2	2	4	4	4	"	1	2	4	5	5	"	4	2	6	4	5
[illegible]	4	8	0	3	3	5	3	3	"	2	2	5	4	4	"	1	2	5	5	5	"	4	2	7	4	5
[illegible]	1	1	0	4	-	-	$-\infty$	0	[illegible]	3	-	-	$-\infty$	0	00/00	2	-	-	$-\infty$	0	00/00	5	-	-	$-\infty$	0
[illegible]	1	2	0	4	-	-	$-\infty$	0	"	3	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	5	-	1	$-\infty$	0
[illegible]	1	3	0	4	-	-	$-\infty$	0	"	3	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	5	-	2	$-\infty$	0
6	1	4	0	4	-	1	$-\infty$	0	"	3	-	1	$-\infty$	0	"	2	-	1	$-\infty$	0	"	5	-	3	$-\infty$	0
6	1	5	0	4	-	2	$-\infty$	0	"	3	-	2	$-\infty$	0	"	2	-	2	$-\infty$	0	"	5	-	4	$-\infty$	0
[illegible]	1	6	0	4	-	3	$-\infty$	0	"	3	-	3	$-\infty$	0	"	2	-	3	$-\infty$	0	"	5	-	5	$-\infty$	0
[illegible]	1	7	0	4	-	4	$-\infty$	0	"	3	-	4	$-\infty$	0	"	2	-	4	$-\infty$	0	"	5	-	6	$-\infty$	0
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	4	-	5	$-\infty$	0	"	3	-	5	$-\infty$	0	"	2	-	5	$-\infty$	0	"	5	-	7	$-\infty$	0
[illegible]	[illegible]	1	0	4	1	-	$-\infty$	0	"	3	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	5	-	-	$-\infty$	0
5	2	2	0	4	1	-	$-\infty$	0	"	3	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	5	-	1	$-\infty$	0
[illegible]	2	3	0	4	1	-	$-\infty$	0	"	3	-	-	$-\infty$	0	"	2	-	-	$-\infty$	0	"	5	-	2	$-\infty$	0
[illegible]	2	4	0	4	1	1	3	3	10/00	3	-	1	$-\infty$	3	10/00	2	-	1	$-\infty$	3	[illegible]	5	-	3	$-\infty$	3
6	2	5	0	4	1	2	3	3	"	3	-	2	$-\infty$	3	"	2	-	2	$-\infty$	3	"	5	-	4	$-\infty$	3
[illegible]	2	6	0	4	1	3	3	3	"	3	-	3	$-\infty$	3	"	2	-	3	$-\infty$	3	"	5	-	5	$-\infty$	3
[illegible]	2	7	0	4	1	4	3	3	"	3	-	4	$-\infty$	3	"	2	-	4	$-\infty$	3	"	5	-	6	$-\infty$	3
[illegible]	2	8	0	4	1	5	3	3	"	3	-	5	$-\infty$	3	"	2	-	5	$-\infty$	3	"	5	-	7	$-\infty$	3
[illegible]	[illegible]	1	0	4	2	-	$-\infty$	0	00/00	3	1	-	$-\infty$	0	00/00	2	1	-	$-\infty$	0	00/00	5	1	-	$-\infty$	0

311

ξ_1	ξ_2	ξ_3	Λ_0	ξ_1-10	ξ_2-5	ξ_3-15	$3+\Lambda_0$	Λ_1	$\bar{x}$	ξ_1-15	ξ_2-10	ξ_3-15	$4+\Lambda_1$	Λ_2	$\bar{x}$	ξ_1-20	ξ_2-10	ξ_3-15	$5+\Lambda_2$	Λ_3	$\bar{x}$	ξ_1-5	ξ_2-10	ξ_3-5	$1+\Lambda_3$	Λ_4	$\bar{x}$
5	3	2	0	4	2	-	$-\infty$	0	00/00	3	1	-	$-\infty$	0	00/00	2	1	-	$-\infty$	0	00/00	5	1	1	1	1	[illegible]
5	3	3	0	4	2	-	$-\infty$	0	"	3	1	-	$-\infty$	0	"	2	1	-	$-\infty$	0	"	5	1	2	1	1	"
5	3	4	0	4	2	1	3	3	10/00	3	1	1	4	4	01/00	2	1	1	5	5	00/10	5	1	3	1	5	00/10
[illegible]	3	5	0	4	2	2	3	3	"	3	1	2	4	4	"	2	1	2	5	5	"	5	1	4	1	5	"
[illegible]	3	6	0	4	2	3	3	3	"	3	1	3	4	4	"	2	1	3	5	5	"	5	1	5	1	5	"
[illegible]	3	7	0	4	2	4	3	3	"	3	1	4	4	4	"	2	1	4	5	5	"	5	1	6	1	5	"
[illegible]	3	8	0	4	2	5	3	3	"	3	1	5	4	4	"	2	1	5	5	5	"	5	1	7	1	5	"
[illegible]	4	1	0	4	3	-	$-\infty$	0	00/00	3	2	-	$-\infty$	0	00/00	2	2	-	$-\infty$	0	00/00	5	2	-	$-\infty$	0	[illegible]
[illegible]	4	2	0	4	3	-	$-\infty$	0		3	2	-	$-\infty$	0	"	2	2	-	$-\infty$	0	"	5	2	1	1	1	[illegible]
[illegible]	4	3	0	4	3	-	$-\infty$	0	"	3	2	-	$-\infty$	0	"	2	2	-	$-\infty$	0	"	5	2	2	1	1	"
[illegible]	4	4	0	4	3	1	3	3	10/00	3	2	1	4	4	01/00	2	2	1	5	5	00/10	5	2	3	1	5	00/10
[illegible]	4	5	b	4	3	2	3	3	"	3	2	2	4	4	"	2	2	2	5	5	"	5	2	4	4	5	"
[illegible]	4	6	0	4	3	3	3	3	"	3	2	3	4	4	"	2	2	3	5	5	"	5	2	5	4	5	"
[illegible]	4	7	0	4	3	4	3	3	"	3	2	4	7	7	11/00	2	2	4	5	7	11/00	5	2	6	4	7	11/00
[illegible]	4	8	0	4	3	5	3	3	"	3	2	5	7	7	"	2	2	5	5	7	"	5	2	7	4	7	[illegible]

Usando ahora el método de Ullman, se tiene:

(10,5,15)-3 (15,10,15)-4

Lista 0

(0,0,0,0) (0,0,0)-0

(20,10,15)-5

Lista 1

(0,0,0,0)(0,0,0)-0
(1,0,0,0)(10,5,15)-3

Lista 2

(0,0,0,0)(0,0,0)-0
(1,0,0,0)(10,5,15)-3
(0,1,0,0)(15,10,15)-4
(1,1,0,0)25,15,30)-7

(5,10,5)-1

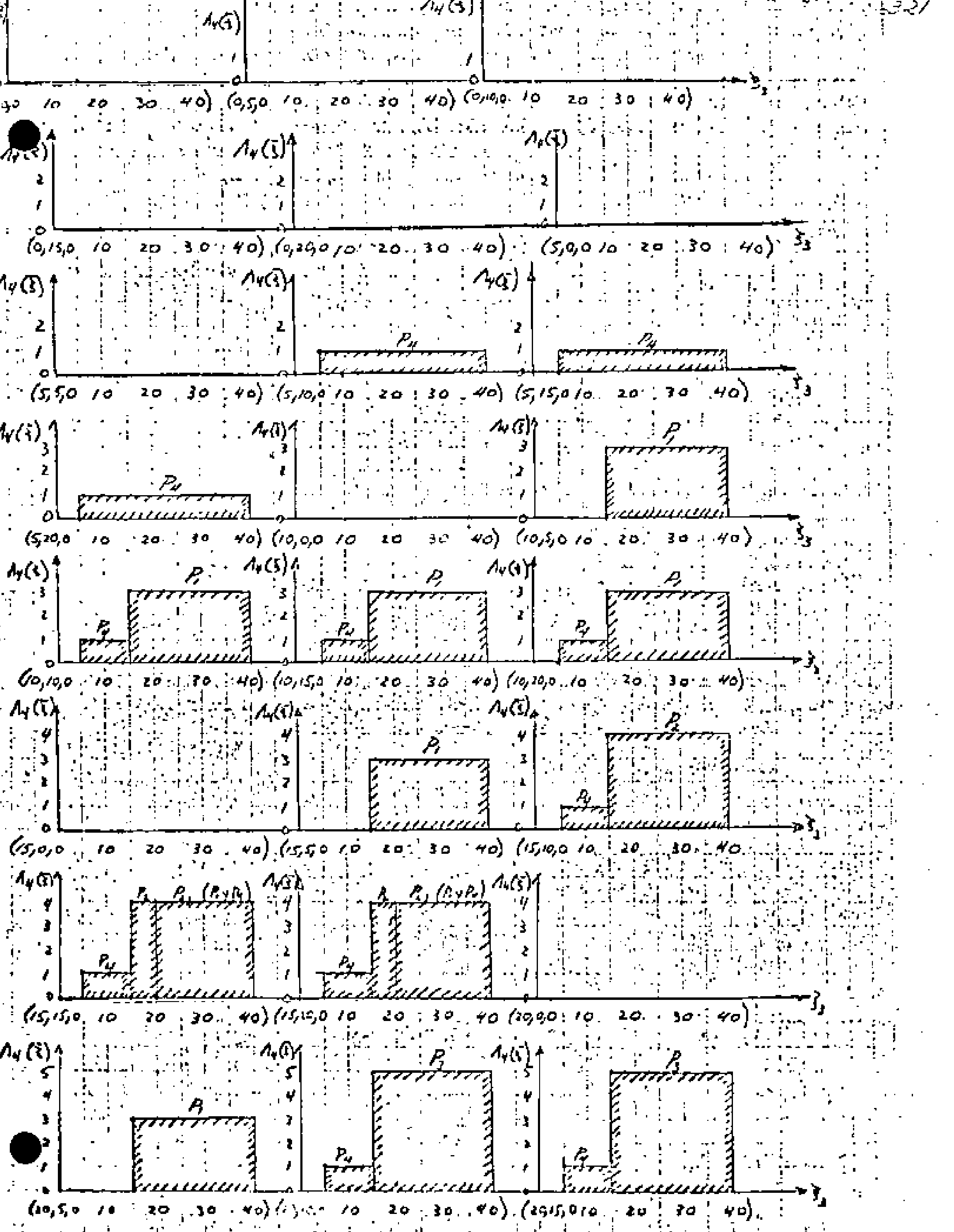
Lista 3

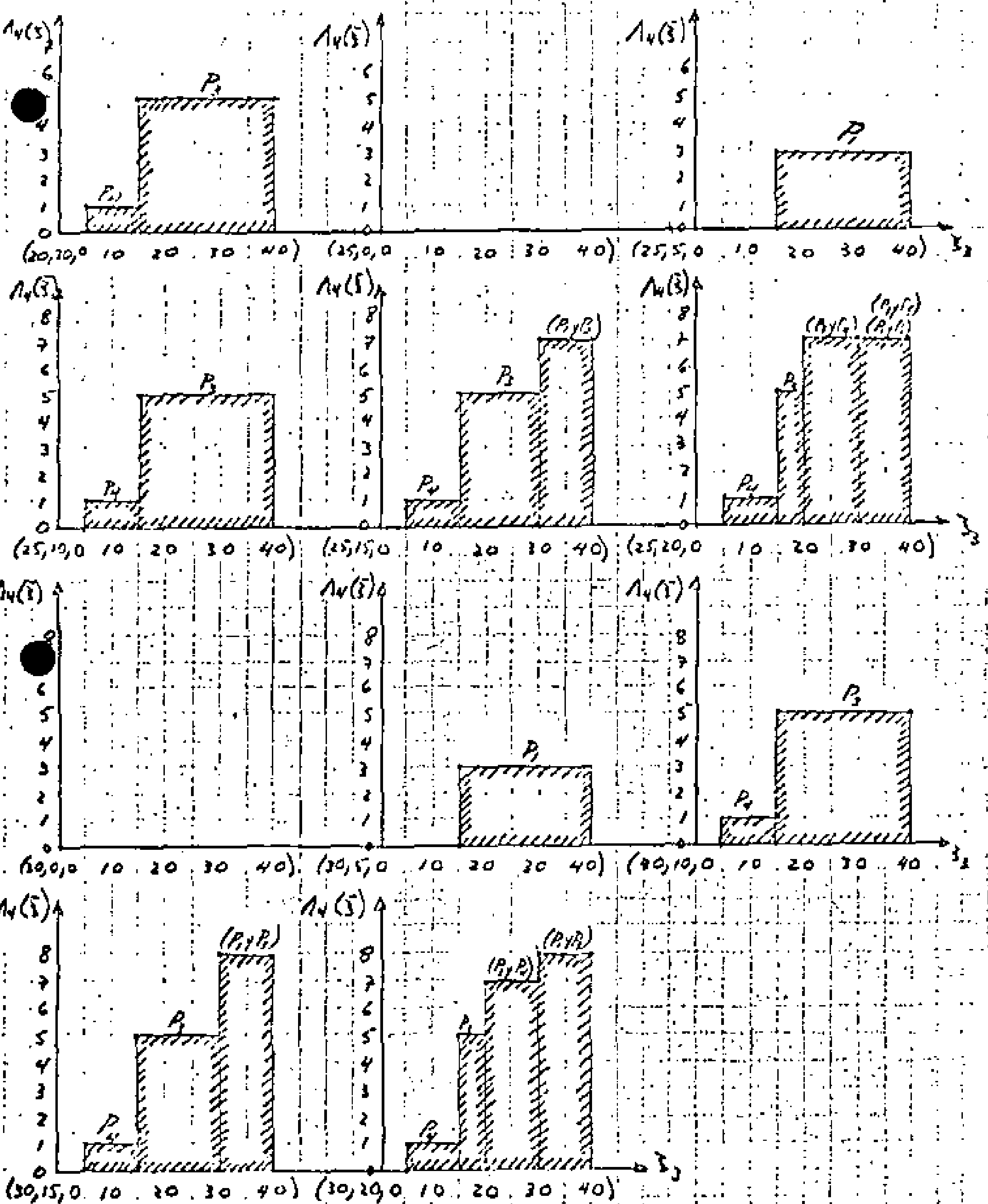
(0,0,0,0)(0,0,0)-0
(1,0,0,0)(10,5,15)-3
(0,1;0,0)(15,10,15)-4
(0,0,1,0)(20,10,15)-5
(1,1,0,0)(25,15,30)-7
(1,0,1,0)(30,15,30)-8
(35,20,30)-x
(45,25,45)-x

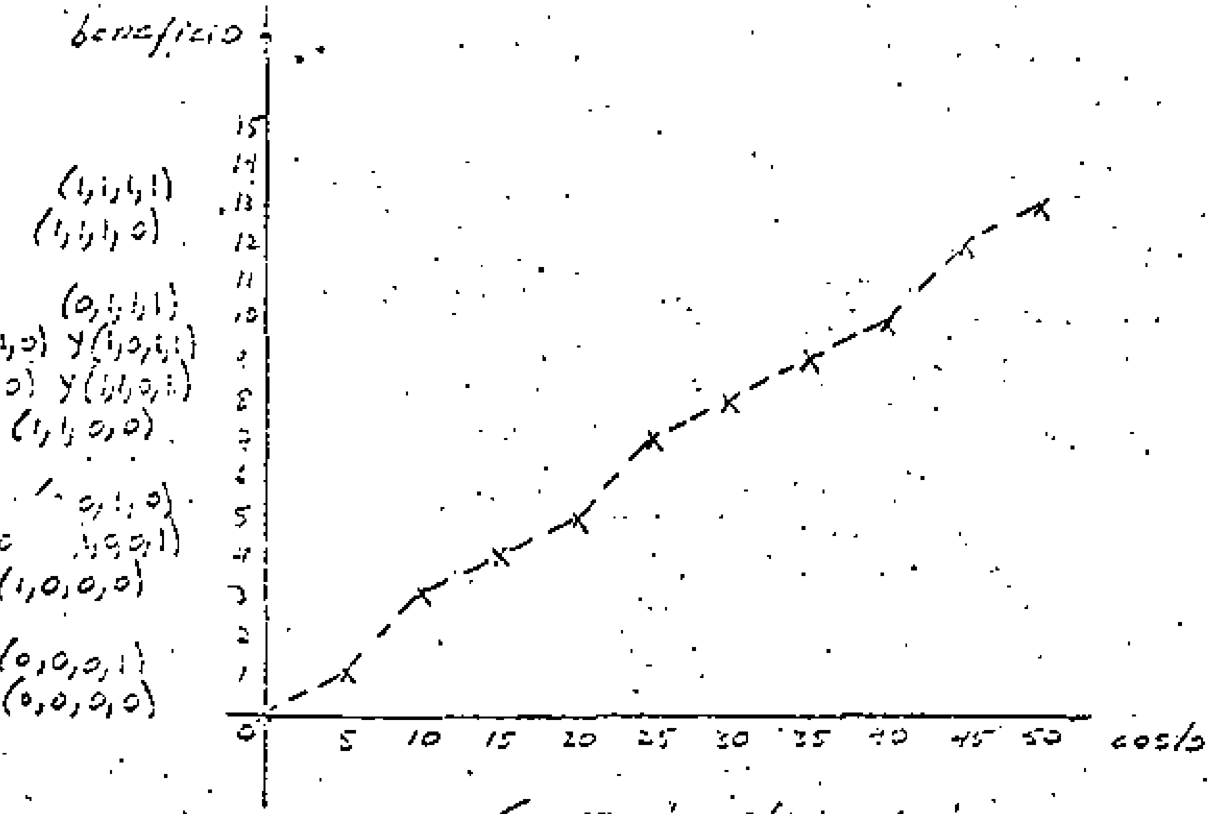
Lista 4

(0,0,0,0)(0,0,0)-0
(0,0,0,1)(5,10,5)-1
(1,0,0,0)(10,5,15)-3
(0,1,0,0)(15,10,15)-4
(1,0,0,1)(15,15,20)-4
(0,0,1,0)(20,10,15)-5
(0,1,0,1)(20,20,20)-5
(1,1,0,0)(25,15,30)-7
(0,0,1,1)(25,20,20)-7
(1,0,1,0)(30,15,30)-8
(30,25,35)-x
(35,25,35)-x

Dado que el método de Ullman sólo detecta vértices es necesario completar la Lista 4 con todos los puntos que siguen al vértice cuyos beneficios coinciden con los de él.




(20,20,0 10 20 30 40)
(25,0,0 10 20 30 40)
(25,5,0 10 20 30 40)
(25,10,0 10 20 30 40)
(25,15,0 10 20 30 40)
(25,20,0 10 20 30 40)
(30,0,0 10 20 30 40)
(30,5,0 10 20 30 40)
(40,10,0 10 20 30 40)
(30,15,0 10 20 30 40)
(30,20,0 10 20 30 40)



Curva beneficio-costo

209. Proyectos independientes, indivisibles de un sólo período y con varias opciones de inversión.

Sea el caso en que los proyectos $P_1, \ldots, P_n$ presenta cada uno de ellos m_j $(j = 1, \ldots, n)$ opciones de inversión, así en el proyecto P_j se dispone de las siguientes alternativas:

Alternativa	Costo	Beneficio
$P_{j.1}$	$a_{j.1}$	$b_{j.1}$
$P_{j.2}$	$a_{j.2}$	$b_{j.2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{j.mj}$	$a_{j.mj}$	$b_{j.mj}$

En estas condiciones el modelo resulta

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} b_{j.m_j} x_{j.m_j}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j.m_j} x_{j.m_j} \leq C$$

$$x_{j.m_j} = 0 \text{ 6 } 1$$

210. Ejemplo

Se dispone de \$ 20,000.00 para invertir en los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 que a continuación se describen. ¿Cómo deben invertirse si se busca lograr beneficios máximos?

	P_1		P_2		P_3		P_4	
Alternativa	Costo	Benef.	Costo	Benef.	Costo	Benef.	Costo	Benef.
1	2,000	1,000	5,000	1,000	10,000	4,000	3,000	2,000
2	5,000	2,000	10,000	3,000	12,000	8,000	10,000	5,000
3	10,000	3,000	8,000	2,000	-	-	-	-

$$\max\ z = 1\,x_{11} + 2\,x_{12} + 3x_{13} + 1\,x_{21} + 3\,x_{22} + 2\,x_{23} + 4x_{31} + 8\,x_{32} + 2\,x_{41} + 5\,x_{42}$$

s.a.

$$2x_{11} + 5x_{12} + 10x_{13} + 5x_{21} + 10x_{22} + 8x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 3x_{41} + 10x_{42} \leq 20$$

Para resolver este problema se empleará el método de Lawler-Bell.

Se tiene así:

$$\min\ z = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 8y_8 + 2y_9 + 5y_{10} - 31$$

s.a.

$$2y_1 + 5y_2 + 10y_3 + 5y_4 + 10y_5 + 8y_6 + 10y_7 + 12y_8 + 3y_9 + 10y_{10} - 55 \geq 0$$

$$Y_i = 0 \text{ ó } 1$$

$S^{41} = \{\underline{-8}, 3, 5, 7, \underline{-10}\}$

$y^{41} = -25$

$T^{41} = \{1, 2, 4, 6, 9\}$

$i = 1: -25 + 23 < 0$

$S^{42} = \{\underline{-8}, 3, 5, \underline{-7}\}$

$y^{42} = -35 \ngeq 0$

$T^{42} = \{1, 2, 4, 6, 9\}$

$i = 1: -35 + 23 < 0$

$S^{43} = \{\underline{-8}, 3, \underline{-5}\}$

$y^{43} = -45 \ngeq 0$

$T^{43} = \{1, 2, 4, 6, 9\}$

$i = 1: -45 + 23 < 0$

$S^{44} = \{\underline{-8}, \underline{-3}\}$

$y^{44} = -55$

$T^{44} = \{1, 2, 4, 6, 9\}$

$i = -55 + 23 < 0$

Respuesta:

$z = 19, \; y_1 = y_3 = y_4 = y_5 = y_8 = y_7 = y_{10} = 1$

$y_2 = y_6 = y_9 = 0$

211. Sensibilidad para la disponibilidad presupuestal en proyectos indivisibles de un sólo período y con varias opciones de inversión.

En este caso se tienen las siguientes fórmulas de recurrencia

$$\Lambda_0(\xi) = 0$$

$$\Lambda_{j+1}(\xi) = \max_{x_1,\dots,x_{j+1}} \left\{ \Lambda_j(\xi),\ \max_{m=1,\dots,b_{j+1}} \left[b_{j+1,m} + \Lambda_j(\xi - A_{j+1,m}) \right] \right\}$$

$$j = 0, \dots, N-1$$

en donde $\Lambda_j(\xi - A_{j+1,m}) = -\infty$ si $(\xi - A_{j+1,m}) < 0$.

El método de Ullman se aplica en forma similar, pero considerando que una lista cualquiera no es definitiva hasta que ha agotado todas las alternativas de inversión en un proyecto dado.

212. Ejemplo

Con los datos de costos y beneficios del ejemplo del número 210, estudiar la sensibilidad de la disponibilidad presupuestal hasta por \$ 40,000.00

(0,0) 2-1 5-2 10-3

Lista 0		Lista 1.1		Lista 1.2		Lista 1.3	
(0,0,0,0)	0-0	(0,0,0,0)	0-0	(0,0,0,0)	0-0	(0,0,0,0)	0-0
		(1-1,0,0,0)	2-1	(1-1,0,0,0)	2-1	(1-1,0,0,0)	2-1
				(1-2,0,0,0)	5-2	(1-2,0,0,0)	5-2
				$(\substack{1-1\\1-2},0,0,0)$	7-3	$(\substack{1-1\\1-2},0,0,0)$	7-3
						~~(1-3,0,0,0)~~	~~10-3~~
						$(\substack{1-1\\1-3},0,0,0)$	12-4
						$(\substack{1-2\\1-3},0,0,0)$	15-5
						$(\substack{1-1\\1-2},0,0,0)$	17-6

5-1 10-3

Lista 2.1

(0,0,0,0)	0-0
(1-1,0,0,0)	2-1
(1-2,0,0,0)	5-2
(1-1 / 1-2, 0,0,0)	7-3
-(1-3,0,0,0-) -(1-2,2-1,0,0)	10-3-
(1-1 / 1-3, 0,0,0) (1-1 / 1-2, 2-1,0,0)	12-4
(1-2 / 1-3, 0,0,0)	15-5
1-1 / (1-2,0,0,0) / 1-3	17-6
(1-2 / 1-3, 2-1,0,0)	20-6
1-1 / (1-2,2-1,0,0) / 1-3	22-7

Lista 2.2

(0,0,0,0)	0-0
(1-1,0,0,0)	2-1
(1-2,0,0,0)	5-2
(1-1,0,0,0)	7-3
-(1-3,0,0,0) -(1-2,2-1,0,0) -(0,2-2,0,0)	10-3-
(1-1 / 1-3, 0,0,0) (1-1 / 1-2, 2-1,0,0) (1-1,2,-2,0,0)	12-4
(1-2 / 1-3, 0,0,0) (1-2,2-2,0,0)	15-5
(1-1 / (1-2,0,0,0) / (1-3 (1-1 / 1-2, 2-2,0,0)	17-6
-(1-2 / 1-3, 2-1,0,0) -(1-3,2-2,0,0) -(1-2, 2-1 / 2-2, 0,0)	20-6-
1-1 / (1-2,2-1,0,0) / 1-3 (1-1 / 1-3, 2-2,0,0) (1-1,2-1 / 1-2,2-2, 0,0)	22-7
(1-2 / 1-3, 2-2,0,0)	25-8
1-1 / (1-2,2-2,0,0) / 1-3	27-9

-(1-2,2-1 / 1-3,2-2, 0,0)	30-9-
1-1 / (1-2, 2-1 / 2-2, 0,0) / 1-3	32-10

7

325

8-2

Lista 2.3

$(0,0,0,0)$	0-0
$(1\text{-}1,0,0,0)$	2-1
$(1\text{-}2,0,0,0)$	5-2
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\end{smallmatrix},0,0,0)$	7-3
—$(1\text{-}3,0,0,0)$ —$(1\text{-}2,2\text{-}1,0,0)$ —$(0,2\text{-}2,0,0)$ —$(1\text{-}1,2\text{-}3,0,0)$	~~10-3~~
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}3\end{smallmatrix},0,0,0)$ $(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\end{smallmatrix},2\text{-}1,0,0)$ $(1\text{-}1,2\text{-}2,0,0)$	12-4
—$(1\text{-}2,2\text{-}3,0,0)$	~~13-4~~
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},0,0,0)$ $(1\text{-}2,2\text{-}2,0,0)$ $(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\end{smallmatrix},2\text{-}3,0,0)$	15-5
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},0,0,0)$ $(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\end{smallmatrix},2\text{-}2,0,0)$	17-6
—$(\begin{smallmatrix}1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},2\text{-}1,0,0)$ —$(1\text{-}3,2\text{-}2,0,0)$ —$(1\text{-}2,\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}2\end{smallmatrix},0,0)$ —$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}3\end{smallmatrix},2\text{-}3,0,0)$ —$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$ —$(1\text{-}1,\begin{smallmatrix}2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$	~~20-6~~

$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},2\text{-}1,0,0)$ $(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}3\end{smallmatrix},2\text{-}2,0,0)$ $(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}2\end{smallmatrix},0,0)$	22-7
—$(\begin{smallmatrix}1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},2\text{-}3,0,0)$ —$(1\text{-}2,\begin{smallmatrix}2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$	~~23-7~~
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},2\text{-}2,0,0)$ $(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},2\text{-}3,0,0)$ $(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$	25-8
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},2\text{-}2,0,0)$	27-9
—$(\begin{smallmatrix}1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}2\end{smallmatrix},0,0)$ —$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$ —$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}3\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$ $(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$	~~30-9~~
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}2\end{smallmatrix},0,0)$	32-10
—$(\begin{smallmatrix}1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$	~~33-10~~
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$	35-11

—$(\begin{smallmatrix}1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$	~~38-11~~
$(\begin{smallmatrix}1\text{-}1\\1\text{-}2\\1\text{-}3\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\text{-}1\\2\text{-}2\\2\text{-}3\end{smallmatrix},0,0)$	40-12

10-4

Lista 3.1

$(0,0,0,0)$ — 0-0

$(1-1,0,0,0)$ — 2-1

$(1-2,0,0,0)$ — 5-2

$(\substack{1-1\\1-2},0,0,0)$ — 7-3

$(0,0,3-1,0)$ — 10-4

$(1-1,0,3-1,0)$ — 12-5

$(1-2,0,3-1,0)$ — 15-6

$(\substack{1-1\\1-2},0,3-1,0)$ — 17-7

$$\left.\begin{array}{r} -(1-3,0,3-1,0) \\ -(1-2,2-1,3-1,0) \\ -(0,2-2,3-1,0) \\ -(1-1,2-3,3-1,0) \end{array}\right\} \text{20-7}$$

$$\left.\begin{array}{r} (\substack{1-1\\1-3},0,3-1,0) \\ (\substack{1-1\\1-2},2-1,3-1,0) \\ (1-1,2-2,3-1,0) \end{array}\right\} \text{22-8}$$

$-(1-2,2-3,3-1,0)$ — 23-8

$$\left.\begin{array}{r} (\substack{1-2\\1-3},0,3-1,0) \\ (1-2,2-2,3-1,0) \\ (\substack{1-1\\1-2},2-3,3-1,0) \end{array}\right\} \text{25-9}$$

$$\left.\begin{array}{r} \substack{1-1\\(1-2,0,3-1,0)\\1-3} \\ (\substack{1-1\\1-2},2-2,3-1,0) \end{array}\right\} \text{27-10}$$

$$\left.\begin{array}{r} -(\substack{1-2\\1-3},2-1,3-1,0) \\ -(1-3,2-2,3-1,0) \\ -(1-2,\substack{2-1\\2-2},3-1,0) \\ -(\substack{1-1\\1-3},2-3,3-1,0) \\ -(\substack{1-1\\1-2},\substack{2-1\\2-3},3-1,0) \\ -(1-1,\substack{2-2\\2-3},3-1,0) \end{array}\right\} \text{30-10}$$

$$\left.\begin{array}{r} \substack{1-1\\(1-2,2-1,3-1,0)\\1-3} \\ (\substack{1-1\\1-3},2-2,3-1,0) \\ (\substack{1-1\\1-2},\substack{2-1\\2-2},3-1,0) \end{array}\right\} \text{32-11}$$

$$\left.\begin{array}{r} -(\substack{1-2\\1-3},2-3,3-1,0) \\ -(1-2,\substack{2-2\\2-3},3-1,0) \end{array}\right\} \text{33-11}$$

$$\left.\begin{array}{r} (\substack{1-2\\1-3},2-3,3-1,0) \\ \substack{1-1\\(1-2,2-3,3-1,0)\\1-3} \\ (\substack{1-1\\1-2},\substack{2-2\\2-3},3-1,0) \end{array}\right\} \text{35-12}$$

$\substack{1-1\\(1-2,2-2,3-1,0)\\1-3}$ — 37-13

$$\left.\begin{array}{r} -(\substack{1-2\\1-3},\substack{2-1\\2-2},3-1,0) \\ -\substack{1-1\\(1-2,\substack{2-1\\2-3},3-1,0)\\1-3} \\ -(\substack{1-1\\1-3},\substack{2-2\\2-3},3-1,0) \\ -(\substack{1-1\\1-2},\substack{2-1\\2-2\\2-3},3-1,0) \end{array}\right\} \text{40-13}$$

9

Lista 3.2

$(0,0,0,0)$	0-0
$(1-1,0,0,0)$	2-1
$(1-2,0,0,0)$	5-2
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,0,0)$	7-3
$(0,0,3-1,0)$	10-4
$(0,0,3-2,0)$	12-8
$(1-1,0,3-2,0)$	14-9
$(1-2,0,3-2,0)$	17-10
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,3-2,0)$	19-11
$(0,0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	22-12
$(1-1,0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	24-13
$(1-2,0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	27-14
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	29-15
$\cancel{(1-3,0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)}$ $\cancel{(1-2,2-1,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)}$ $\cancel{(0,2-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)}$ $\cancel{(1-1,2-3,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)}$	~~32-15~~
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-3},0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$ $(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-1,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$ $(1-1,2-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	34-16
$\cancel{(1-2,2-3,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)}$	~~35-16~~
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-2}{1-3},0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$ $(1-2,2-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$ $(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-3,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	37-17
$(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\\1-3\end{smallmatrix},0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$ $(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	39-18

3-2

Lista 4.1

$(0,0,0,0)$	0-0
$(1-1,0,0,0)$	2-1
$(0,0,0,4-1)$	3-2
$(1-1,0,0,4-1)$	5-3
$(\substack{1-1\\1-2},0,0,0)$	7-3
$(1-2,0,0,4-1)$	8-4
$(\substack{1-1\\1-2},0,0,4-1)$	10-5
$(0,0,3-2,0)$	12-8
$(1-1,0,3-2,0)$	14-9
$(0,0,3-2,4-1)$	15-10
$(1-1,0,3-2,4-1)$	17-11
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,0)$	19-11
$(1-2,0,3-2,4-1)$	20-12
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,4-1)$	20-13
$(1-1,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	24-13
$(0,0,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	25-14
$(1-1,0,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	27-15
$(\substack{1-1\\1-2},0,\substack{3-1\\3-2},0)$	29-15
$(1-2,0,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	30-16
$(\substack{1-1\\1-2},0,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	32-17
$(1-3,0,\substack{3-1\\3-2},4-1)$ $(1-2,2-1,\substack{3-1\\3-2},4-1)$ $(0,2-2,\substack{3-1\\3-2},4-1)$ $(1-1,2-3,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	35-17
$(\substack{1-1\\1-3},0,\substack{3-1\\3-2},4-1)$ $(\substack{1-1\\1-2},2-1,\substack{3-1\\3-2},4-1)$ $(1-1,2-2,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	37-18
$(1-2,2-3,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	38-18
$(\substack{1-2\\1-3},0,\substack{3-1\\3-2},4-1)$ $(1-2,2-2,\substack{3-1\\3-2},4-1)$ $(\substack{1-1\\1-2},2-3,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	40-19

10-5

Lista 4.2

$(0,0,0,0)$	0-0
$(1-1,0,0,0)$	2-1
$(0,0,0,4-1)$	3-2
$(1-1,0,0,4-1)$	5-3
$\cancel{\left(\frac{1-1}{1-2},0,0,0\right)}$	~~7-[illegible]~~
$(1-2,0,0,4-1)$	8-4
$\left(\substack{1-1\\1-2},0,0,4-1\right)$, $(0,0,0,4-2)$	10-5
$(0,0,3-2,0)$	12-8
$(1-1,0,3-2,0)$	14-9
$(0,0,3-2,4-1)$	15-10
$(1-1,0,3-2,4-1)$	17-11
$\cancel{\left(\frac{1-1}{1-2},0,3-2,4-1\right)}$	~~19-11~~ X
$(1-2,0,3-2,4-1)$	20-12
$\left(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,4-1\right)$, $(0,0,3-2,4-2)$	22-13
$(1-1,0,3-2,4-2)$	24-14
$\left(0,0,3-2,\substack{4-1\\4-2}\right)$	25-15.
$\left(1-1,0,3-2,\substack{4-1\\4-2}\right)$	27-16
$\cancel{\left(\frac{1-1}{1-2},0,3-2,4-2\right)}$	~~29-16~~ X
$\left(1-2,0,3-2,\substack{4-1\\4-2}\right)$	30-17
$\left(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,\substack{4-1\\4-2}\right)$	32-18
$\cancel{\left(1-1,0,\frac{3-1}{3-2},4-2\right)}$	~~34-18~~ X

$\left(0,0,\substack{3-1\\3-2},\substack{4-1\\4-2}\right)$	35-19
$\left(1-1,0,\substack{3-1\\3-2},\substack{4-1\\4-2}\right)$	37-20
$\cancel{\left(\frac{1-1}{1-2},0,\frac{3-1}{3-2},4-2\right)}$	~~39-20~~ X
$\left(1-2,0,\substack{3-1\\3-2},\substack{4-1\\4-2}\right)$	40-21

213. Proyectos independientes, indivisibles, de periodos múltiples y con varias opciones de inversión

Sea el caso en que los proyectos $P_1, \ldots, P_n$ presentan cada uno de ellos m_j $(j = 1, \ldots, n)$ opciones de inversión para el período $(t = 1, \ldots, T)$ en el horizonte de planeación.

En estas condiciones el modelo resulta:

$$\max. z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} b_{i_j} \; x_{i_j}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} a_{i_{jt}} \; x_{i_j} \leq b_t \qquad (t = 1, \ldots, t)$$

$$x_{i_j} = 0 \text{ ó } 1$$

en donde:

b_{i_j} = beneficio reportado por la opción i del proyecto j

$a_{i_{jt}}$ = inversión requerida por la opción i del proyecto j en el período

b_t = disponibilidad presupuestal en el período

x_{i_j} = variable de decisión; igual a la unidad si es seleccionada la opción i del proyecto j; igual a cero en caso contrario.

214. Ejemplo

Se tienen cuatro proyectos $P_1, \ldots, P_4$ indivisibles de tres períodos de inversión:

$$P_{1.1} = (4,3,2) \longrightarrow 3 \quad \text{(en miles de pesos)}$$

$$P_{1.2} = (5,7,5) \longrightarrow 4$$

$$P_{2.1} = (8,2,6) \longrightarrow 5$$

$$P_{2.2} = (4,4,6) \longrightarrow 3$$

$$P_{3.1} = (5,10,2) \longrightarrow 4$$

$$P_{3.2} = (6,3,8) \longrightarrow 6$$

$$P_{4.1} = (10,3,8) \longrightarrow 7$$

$$P_{4.2} = (5,12,3) \longrightarrow 6$$

Las disponibilidades presupuestales son de $[10, 15, 20]$ respectivamente.

¿Cuál es la mejor selección?

$$\max\ z = 3x_{11} + 4x_{21} + 5x_{22} + 3x_{22} + 4x_{13} + 6x_{23} + 7x_{14} + 6x_{24}$$

s.a.

$$4x_{11} + 5x_{21} + 8x_{12} + 4x_{22} + 5x_{13} + 6x_{23} + 10x_{14} + 5x_{24} \leq 10$$

$$3x_{11} + 7x_{21} + 2x_{12} + 4x_{22} + 10x_{13} + 3x_{23} + 3x_{14} + 12x_{24} \leq 15$$

$$2x_{11} + 5x_{21} + 6x_{12} + 6x_{22} + 2x_{13} + 8x_{23} + 8x_{14} + 3x_{24} \leq 20$$

de donde:

$$\min\ z^1 = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 6x_8$$

s.a.

$$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 10x_7 + 5x_8 \geq 37$$

$$3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 12x_8 \geq 29$$

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 8x_6 + 8x_7 + 3x_8 \geq 20$$

$$x_i = 0\ 6\ 1$$

14 326

Primera solución $x_1 = x_8 = 0 \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 1, \; z^1 = 29$

Segunda solución $x_4 = x_6 = 0 \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = x_8 = 1, \; z^1 = 29$

Tercera solución $x_1 = x_6 = 0 \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = 1, \; z^1 = 29$

luego

Primera solución $y_1 = y_8 = 1, \quad y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 0 \quad z = 9$

Segunda solución $y_4 = y_6 = 1, \quad y_1 = y_2 = y_3 = y_5 = y_7 = y_8 = 0 \quad z = 9$

Tercera solución $y_1 = y_6 = 1, \quad y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_7 = y_8 = 0 \quad z = 9$

Elegir primera alternativa de P_1 y segunda de P_4 o bien elegir segunda alternativa de P_2 y segunda de P_3 o bien elegir primera alternativa de P_1 y segunda de P_6.

Método de Geoffrion

$$\min z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 6x_8$$

s.a.

$$-37 + 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 10x_7 + 5x_8 \geq 0$$

$$-29 + 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 12x_8 \geq 0$$

$$-20 + 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 8x_6 + 8x_7 + 3x_8 \geq 0$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

215. Sensibilidad para la disponibilidad presupuestal en proyectos indivisibles de períodos múltiples y con varias alternativas de inversión

En este caso la fórmula de recurrencia se generaliza considerando vectorial a la variable de estado. La fórmula de recurrencia resultante es:

$$\Lambda_0(\bar{\xi}) = 0$$

$$\Lambda_{i+1}(\bar{\xi}) = \max_{x_1,\ldots,x_{i+1}} \left\{ \Lambda_i(\bar{\xi}), \max_{m=1,\ldots,L_{i+1}} \left[b_{i+1} + \Lambda_i(\bar{\xi} - \bar{A}_{i+1,m}) \right] \right\}$$

el tratamiento es similar al señalado en el número 211.

216. Ejemplo

Usando los datos del número 214 estudiar para sensibilidad el problema planteado, considerando hasta 20, 30 y 40 las disponibilidades presupuestales en los diferentes períodos.

Método de Ullman

(4,3,2) -3

Lista 0

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0	(0,0,0,0) (1-1,0,0,0)	(0,0,0) -0 (4,3,2) -3

$(5,7,5)-4$

Lista 1.2

$(0,0,0,0)$	$(0,0,0)-0$
$(1-1,0,0,0)$	$(4,3,2)-3$
$(1-2,0,0,0)$	$(5,7,5)-4$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,0,0)$	$(9,10,7)-7$

$(8,2,6)-5$

Lista 2.1.

$(0,0,0,0)$	$(0,0,0)-0$
$(1-1,0,0,0)$	$(4,3,2)-3$
$(1-2,0,0,0)$	$(5,7,5)-4$
$(0,2-1,0,0)$	$(8,2,6)-5$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,0,0)$	$(9,10,7)-7$
$(1-1,2-1,0,0)$	$(12,5,8)-8$
$(1-2,2-1,0,0)$	$(13,9,11)-9$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-1,0,0)$	$(17,12,13)-12$

$(4,4,6)-3$

Lista 2.2

$(0,0,0,0)$	$0,0,0)-0$
$(1-1,0,0,0)$	$(4,3,2)-3$
$(1-2,0,0,0)$	$(5,7,5)-4$
$(0,2-1,0,0)$	$(8,2,6)-5$
$(1-1,2-2,0,0)$	$(8,8,7)-6$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,0,0)$	$(9,10,7)-7$
$(1-1,2-1,0,0)$	$(12,5,8)-8$
$(1-2,2-1,0,0)$	$(13,9,11)-9$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-2,0,0)$	$(13,14,13)-10$
$(1-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2},0,0)$	$(16,9,14)-11$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-1,0,0)$	$(17,12,13)-12$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},\genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2},0,0)$	$(21,16,19)-X$

Lista 3.1

$(0,0,0,0)$	$(0,0,0)-0$
$(1-1,0,0,0)$	$(4,3,2)-3$
$(1-2,0,0,0)$	$(5,7,5)-4$
$(0,0,3-1,0)$	$(5,10,2)-4$
$(0,2-1,0,0)$	$(8,2,6)-5$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,0,0)$	$(9,10,7)-7$
$(1-1,0,3-1,0)$	$(9,13,4)-7$
$(1-2,0,3-1,0)$	$(10,17,7)-8$
$(1-1,2-1,0,0)$	$(12,5,8)-8$
$(1-2,2-1,0,0)$	$(13,9,11)-9$
$(0,2-1,3-1,0)$	$(13,12,6)-9$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-2,0,0)$	$(13,14,13)-10$
$(1-1,2-2,3-1,0)$	$(13,17,10)-10$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,3-1,0)$	$(14,20,9)-11$
$(1-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2},0,0)$	$(16,9,14)-11$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-1,0,0)$	$(17,12,13)-12$
$(1-1,2-1,3-1,0)$	$(17,15,10)-12$
$(1-2,2-1,3-1,0)$	$(18,19,13)-13$
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-2,3-1,0)$	$(18,24,15)-14$
$(1-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2},3-1,0)$	$(21,19,16)-X$

17

(6,3,8) -6

(10,3,8) -7

Lista 3.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) -4
(0,0,3-1,0)	(5,10,2) -4
(0,2-1,0,0)	(8,2,6) -5
(0,0,3-2,0)	(6,3,8) -6
$(\substack{1-1\\1-2},0,0,0)$	(9,10,7) -7
(1-1,0,3-1,0)	(9,13,4) -7
(1-2,0,3-1,0)	(9,17,7) -8
(1-1,0,3-2,0)	(10,6,10) -9
(1-2,0,3-2,0)	(11,10,13) -10
$(0,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(11,13,10) -10
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(0,2-1,3-1,0)	(13,12,8) -9
(0,2-1,3-2,0)	(14,5,14) -11
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-1,0)$	(14,20,9) -11
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,0)$	(15,13,15) -13
$(1-1,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(15,16,12) -13
$(1-2,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(16,20,15) -14
$(\substack{1-1\\1-2},2-1,0,0)$	(17,12,13) -12
(1-1,2-1,3-1,0)	(17,15,10) -12
(1-1,2-1,3-2,0)	(18,8,16) -14
(1-2,2-1,3-2,0)	(19,12,19) -15
$(0,2-1,\substack{3-1\\3-2},0)$	(19,15,16) -15
$(\substack{1-1\\1-2},2-2,3-2,0)$	(19,17,21) -16
$(1-1,2-2,\substack{3-1\\3-2},0)$	(19,20,18) -16
$(\substack{1-1\\1-2},0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(20,23,17) -17

Lista 4.1.

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,32) -3
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) -4
(0,0,3-1,0)	(5,10,2) -4
(0,0,3-2,0)	(6,3,8) -6
(0,2-1,0,0)	(8,2,6) -5
$(\substack{1-1\\1-2},0,0,0)$	(9,10,7) -7
(1-1,0,3-1,0)	(9,13,4) -7
(1-2,0,3-1,0)	(9,17,7) -8
(0,0,0,4-1)	(10,3,8) -7
(1-1,0,3-2,0)	(10,6,10) -9
(1-2,0,3-2,0)	(11,10,13) -10
$(0,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(11,13,10) -10
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(0,2-1,3-1,0)	(13,12,8) -9
(0,2-1,3-2,0)	(14,5,14) -11
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-1,0)$	(14,20,9) -11
(1-2,0,0,4-1)	(15,10,13) -11
(0,0,3-1,4-1)	(15,13,10) -11
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,0)$	(15,13,15) -13
$(1-1,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(15,16,12) -13
(0,0,3-2,4-1)	(16,6,16) -13
$(1-2,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(16,20,15) -14
$(\substack{1-1\\1-2},2-1,0,0)$	(17,12,13) -12
(1-1,2-1,3-1,0)	(17,15,10) -12
(0,2-1,0,4-1)	(18,5,14) -12
(1-1,2-1,0,3-2,0)	(18,8,16) -14
(1-2,2-1,3-2,0)	(19,12,19) -15
$(\substack{1-1\\1-2},0,0,4-1)$	(19,13,15) -14
$(0,2-1,\substack{3-1\\3-2},0)$	(19,15,16) -15
(1-1,0,3-1,4-1)	(19,16,12) -14
$(\substack{1-1\\1-2},2-2,3-2,0)$	(19,17,21) -16
(1-2,0,3-1,4-1)	(19,20,15) -15
$(1-1,2-2,\substack{3-1\\3-2},0)$	(19,20,18) -16
(1-1,0,3-2,4-1)	(20,9,18) -16
$(\substack{1-1\\1-2},0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(20,23,17) -17

(5,12,3) -6

Lista 4.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) -4
(0,0,3-1,0)	(5,10,2) -4
(0,0,0,4-2)	(5,12,3) -6
(0,0,3-2,0)	(6,3,8) -6
(0,2-1,0,0)	(8,2,6) -5
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},0,0,0\right)$	(9,10,7) -7
(1-1,0,3-1,0)	(9,13,4) -7
(1-1,0,0,4-2)	(9,15,5) -9
(0,0,0,4-1)	(10,3,8) -7
(1-1,0,3-2,0)	(10,6,10) -9
(1-2,0,0,4-2)	(10,19,8) -10
(0,0,3-1,4-2)	(10,22,5) -10
(1-2,0,3-2,0)	(11,10,13) -10
$\left(0,0,\begin{smallmatrix}3-1\\3-2\end{smallmatrix},0\right)$	(11,13,10) -10
(0,0,3-2,4-2)	(11,15,11) -12
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(0,2-1,3-1,0)	(13,12,8) -9
(0,2-1,0,4-2)	(13,14,9) -11
(0,2-1,3-2,0)	(14,5,14) -11
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},0,0,4-2\right)$	(14,22,10) -13
(1-1,0,3-1,4-2)	(14,25,7) -13
(1-2,0,3-1,4-2)	(14,29,10) -14
(1-2,0,0,4-1)	(15,10,13) -11
(0,0,3-1,4-1)	(15,13,10) -11
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},0,3-2,0\right)$	(15,13,15) -13
$\left(0,0,0,\begin{smallmatrix}4-1\\4-2\end{smallmatrix}\right)$	(15,15,11) -13
(1-1,0,3-2,4-2)	(15,18,13) -15
(0,0,3-2,4-1)	(16,6,16) -13
$\left(1-2,0,\begin{smallmatrix}3-1\\3-2\end{smallmatrix},0\right)$	(16,20,15) -14
(1-2,0,3-2,4-2)	(16,22,16) -16
$\left(0,0,\begin{smallmatrix}3-1\\3-2\end{smallmatrix},4-2\right)$	(16,25,13) -16
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},2-1,0,0\right)$	(17,12,13) -12
(1-1,2-1,3-1,0)	(17,15,10) -12
(1-1,2-1,0,4-2)	(17,17,11) -14
(0,2-1,0,4-1)	(18,5,14) -12
(1-1,2-1,3-2,0)	(18,8,16) -14
(0,2-1,3-1,4-2)	(18,24,11) -15
(1-2,2-1,3-2,0)	(19,12,19) -15
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},0,0,4-1\right)$	(19,13,15) -14
$\left(0,2-1,\begin{smallmatrix}3-1\\3-2\end{smallmatrix},0\right)$	(19,15,16) -15
(1-1,0,3-1,4-1)	(19,16,12) -14
(0,2-1,3-2,4-2)	(19,17,17) -17

217. Proyectos divisibles de un sólo período de inversión

A continuación se presentarán algunos criterios que se han expuesto para la elección de inversiones en este contexto.

1o. Dean señala que el criterio de la tasa de recuperación puede ser usada para seleccionar las inversiones. En esencia, según él, basta determinar el costo marginal del capital, la recuperación resultante del último incremento en la inversión, clasificar los proyectos en orden decreciente de la tasa de recuperación e ir seleccionándolos desde el principio y hasta agotar el presupuesto. La única dificultad la presentan los proyectos indivisibles, este problema, sin embargo, fué resuelto por Weingarten mediante programación mixta.

2o. Lorie y Savage demostraron que los proyectos arreglados según su tasa de recuperación quedarían ordenados de diferente manera que si el factor de clasificación fuese el valor presente. Hacen ver también que sólo se seleccionaría correctamente un conjunto de proyectos cuando el presupuesto fuese de tamaño óptimo, esto es, cuando permitiera la adopción de todos los proyectos cuya tasa de recuperación fuese superior al costo del capital.

3o. Solomon demostró posteriormente que el criterio relevante no es ni el de la tasa de recuperación a lo largo de la vida útil del proyecto ni el del valor presente. Para él el criterio adecuado debe ser aquel que considere el efecto en el valor presente del activo fijo resultante de aceptar o rechazar el proyecto. Sin embargo, como es sabido, la magnitud de este efecto depende tanto de la tasa de recuperación como de la vida útil del proyecto (el período de recuperación). Es claro, entonces, que la tasa de recuperación y el valor presente suministrarán un mismo orden de proyectos sólo cuando todos ellos tengan la misma vida útil. Más todavía, proyectos con distinta vida útil no podrán ser comparados, aunque sí podrán serlo los programas que incluyen dichos proyectos, ejemplifiquemos considerando un programa que ordena invertir en el proyecto A por quince años y luego en el proyecto B por otros quince, éste programa puede ser comparado con otro que ordena invertir en C por 30 años. Los programas pueden ser comparados aunque la inversión en A no pueda ser comparada con la inversión en C; la razón es evidente. El incremento de valor presente motivado por invertir en B determina el valor del primer programa. Si tanto A como B proporcionaron tasas de recuperación mayores que C, entonces, el programa A-B tendría un valor presente mayor así como una tasa de recuperación también mayor.

Por el contrario si ambas son menores, C sería clasificado por encima del programa A-B usando otro criterio. Sin embargo, comparar A con C no tiene sentido a menos que la adopción de A implique algo respec to a la recuperación de B. Si suponemos que la tasa de recuperación de B es el costo del capital, entonces el uso del criterio del valor presente es correcto puesto que B no le agrega nada al valor presente. Si la tasa de recuperación de B es la misma que la de A, entonces el método de la tasa de recuperación es legítimo.

Si la tasa de recuperación de B ni es igual al costo del capital ni a la tasa de recuperación de A, entonces el incremento de B debe incluirse, pero en forma explícita, cuando se ordenan los proyectos en orden decreciente. Ahora si, ya correctamente clasificados los proyectos, el conjunto óptimo de proyectos de que hablan Lorie y Savage, puede determinarse a partir del primero y hasta agotar el presupuesto tal y como lo señala Dean. Esto, claro está se refiere a un sólo período y cuando son independientes y divisibles.

218. Proyectos divisibles independientes de períodos múltiples y con varias alternativas de inversión y beneficios

Sean los proyectos $P_1, \ldots, P_n$ cada uno de ellos presenta m_j $(j = 1, \ldots, n)$ alternativas de inversión, en cada uno de los períodos t $(t = 1, \ldots, T)$ del horizonte de planeación. Se supondrá también que los proyectos son divisibles y por tanto la alternativa i del proyecto P_j en el período t genera el beneficio b_{ijt} cuando se invierte en ella a_{ijt}.

En estas condiciones el modelo resulta:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} b_{ijt} \; x_{ij} \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} a_{ijt} \; x_{ij} \leq d_t \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1$$

de donde:

b_{ijt} = beneficio generados por la alternativa i del proyecto j en el período t.

a_{ijt} = inversión requerida por la alternativa i del proyecto j en el período t.

d_t = disponibilidad presupuestal en el período t.

x_{ij} = variable de decisión; igual a la unidad si es seleccionada la opción i del proyecto j, igual a cero en caso contrario.

219. <u>Ejemplo</u>

Se tienen cuatro proyectos divisibles de tres períodos y cada uno con dos opciones de inversión y de beneficios.

$$P_{1.1} = (5,8,4) \longrightarrow [3,4,2]$$
$$P_{1.2} = (10,3,6) \longrightarrow [5,2,3]$$
$$P_{2.1} = (6,5,8) \longrightarrow [4,3,6]$$
$$P_{2.2} = (6,10,10) \longrightarrow [5,6,7]$$
$$P_{3.1} = (8,8,5) \longrightarrow [5,4,3]$$
$$P_{3.2} = (10,12,8) \longrightarrow [6,7,5]$$
$$P_{4.1} = (8,6,10) \longrightarrow [4,3,6]$$
$$P_{4.2} = (9,4,8) \longrightarrow [5,2,6]$$

Se pregunta:

a) ¿Qué alternativas y de cuales proyectos se deben seleccionar si se desea que los beneficios en el primer período sean máximos?

b) Misma pregunta para el segundo período

c) Misma pregunta para el tercer período

d) Misma pregunta para todo el horizonte de planeación.

Las disponibilidades presupuestales son 20, 15 y 25 respectivamente.

El modelo resulta:

$$\max z = \begin{pmatrix}3\\4\\2\\9\end{pmatrix} x_{11} + \begin{pmatrix}5\\2\\3\\10\end{pmatrix} x_{21} + \begin{pmatrix}4\\3\\6\\13\end{pmatrix} x_{12} + \begin{pmatrix}5\\6\\7\\18\end{pmatrix} x_{22} + \begin{pmatrix}5\\4\\3\\12\end{pmatrix} x_{13} + \begin{pmatrix}6\\7\\5\\18\end{pmatrix}$$

$$x_{23} + \begin{pmatrix}4\\3\\6\\13\end{pmatrix} x_{14} + \begin{pmatrix}5\\2\\6\\13\end{pmatrix} x_{24}$$

s.a.

$$\begin{pmatrix}5\\8\\4\end{pmatrix} x_{11} + \begin{pmatrix}10\\3\\6\end{pmatrix} x_{21} + \begin{pmatrix}6\\5\\8\end{pmatrix} x_{12} + \begin{pmatrix}6\\10\\10\end{pmatrix} x_{22} + \begin{pmatrix}8\\8\\5\end{pmatrix} x_{13} + \begin{pmatrix}10\\12\\8\end{pmatrix}$$

$$x_{23} + \begin{pmatrix}8\\6\\10\end{pmatrix} x_{14} + \begin{pmatrix}9\\4\\8\end{pmatrix} x_{24} = \begin{pmatrix}20\\15\\25\end{pmatrix}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1$$

Las restricciones para resolver los cuatro problemas son comunes:

$$-42 + 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 8x_7 + 9x_8 \geq 0$$

$$-41 + 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 8x_5 + 12x_6 + 6x_7 + 4x_8 \geq 0$$

$$-34 + 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 8x_6 + 10x_7 + 8x_8 \geq 0$$

La función objetivo en cada caso es:

a) $\min z' = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 5x_8 - 37$

b) $\min z' = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 2x_8 - 31$

c) $\min z' = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 6x_8 - 33$

d) $\min z' = 9x_1 + 10x_2 + 13x_3 + 18x_4 + 12x_5 + 18x_6 + 13x_7 + 13x_8 - 106$

En resumen

Problema	Respuestas
(a)	$P_{1.2} \div P_{3.2}$
(b)	$P_{1.2} \div P_{3.2}$ y $P_{2.1} \div P_{2.2}$
(c)	$P_{2.1} \div P_{2.2}$ y $P_{2.2} \div P_{4.2}$
(d)	$P_{2.1} \div P_{2.2}$ y $P_{2.2} \div P_{4.2}$

220. Sensibilidad para la disponibilidad presupuestal en proyectos divisibles de períodos múltiples y con varias alternativas de inversión y beneficios.

En este caso la fórmula de recurrencia se generaliza considerando como vectores tanto la variable de estado como la función de beneficios.

El tratamiento es el acostumbrado.

221. Ejemplo

Usando el método de Ullman definir la solución para disponibilidades presupuestales cuya cota superior es respectivamente 40, 30 y 50. Resolver además los problemas planteados en el número 219.

(5,8,4) - ,4,2

Lista 0

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]

(10,3,6) - [5,2,3]

Lista 1.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]
$\left(\substack{1-1\\1-2},0,0,0\right)$	(15,11,10) - [8,6,5]

(6,10,10) - [5,6,7]

Lista 2.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) - [4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10) - [5,6,7]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,12) - [7,7,8]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) - [8,10,9]
$\left(0,\substack{2-1\\2-2},0,0\right)$	(12,15,18) - [9,9,13]
$\left(\substack{1-1\\1-2},0,0,0\right)$	(15,11,10) - [8,6,5]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) - [9,5,9]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) - [10,8,10]
$\left(1-1,\substack{2-1\\2-2},0,0\right)$	(17,23,22) - [12,13,15]
$\left(\substack{1-1\\1-2},2-1,0,0\right)$	(21,16,18) - [12,9,11]
$\left(\substack{1-1\\1-2},2-2,0,0\right)$	(21,21,20) - [13,12,12]
$\left(1-2,\substack{2-1\\2-2},0,0\right)$	(22,18,24) - [14,11,16]
$\left(\substack{1-1\\1-2},\substack{2-1\\2-2},0,0\right)$	(27,26,28) - [17,15,18]

Lista 1.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) -	[0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) -	[3,4,2]

(6,5,8 - 4,3,6

Lista 2.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) -	[0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) -	[3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) -	[4,3,6]
(2-1,0,0,0)	(10,3,6) -	[5,2,3]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,12) -	[7,7,8]
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},0,0,0\right)$	(15,11,10) -	[8,6,5]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) -	[9,5,9]
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},2-1,0,0\right)$	(21,16,18) -	[12,9,11]

(8,8,5) - 5,4,3

Lista 3.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) -	[0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) -	[3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) -	[4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10) -	[5,6,7]
(0,0,3-1,0)	(8,8,5) -	[5,4,3]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) -	[5,2,3]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,12) -	[7,7,8]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) -	[8,10,9]
$\left(0,\begin{smallmatrix}2-1\\2-2\end{smallmatrix},0,0\right)$	(12,15,18) -	[9,9,13]
(1-1,0,3-1,0)	(13,16,9) -	[8,8,5]
(0,2-1,3-1,0)	(14,13,13) -	[9,7,9]
(0,2-2,3-1,0)	(14,18,15) -	[10,10,10]
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},0,0,0\right)$	(15,11,10) -	[8,6,5]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) -	[9,5,9]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) -	[illegible]
$\left(1-1,\begin{smallmatrix}2-1\\2-2\end{smallmatrix},0,0\right)$	(17,23,22) -	[12,13,15]
(1-2,0,3-1,0)	(18,11,11) -	[10,6,6]
(1-1,2-1,3-1,0)	(19,21,17) -	[12,11,[illegible]]

(1-1,2-2,3-1,0)	(19,26,19) -	[13,14,12]
$(0,\substack{2-1\\2-2},3-1,0)$	(20,23,23) -	[14,13,16]
$(\substack{1-1\\1-2},2-1,0,0)$	(21,16,18) -	[12,9,11]
$(\substack{1-1\\1-2},2-2,0,0)$	(21,21,20) -	[13,12,12]
$(1-2,\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(22,18,24) -	[14,11,16]
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-1,0)$	(23,19,15) -	[13,10,8]
(1-2,2-1,3-1,0)	(24,16,19) -	[14,9,12]
(1-2,2-2,3-1,0)	(24,21,21) -	[15,12,13]
$(\substack{1-1\\1-2},\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(27,26,26) -	[17,15,18]
$(\substack{1-1\\1-2},2-1,3-1,0)$	(29,24,23) -	[17,13,14]
$(\substack{1-1\\1-2},2-2,3-1,0)$	(29,29,25) -	[16,16,15]
$(1-2,\substack{2-1\\2-2},2-1,0)$	(30,26,29) -	[19,15,19]

(10,12,8) - 6,7,5

Lista 3.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) -	[0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) -	[3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) -	[4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(5,10,10) -	[5,6,7]
(0,0,3-1,0)	(8,8,5) -	[5,4,3]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) -	[5,2,3]
(0,0,3-2,0)	(10,12,8) -	[7,6,5]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,12) -	[7,7,8]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) -	[8,10,9]
$(0,\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(12,15,18) -	[9,9,13]
(1-1,0,3-1,0)	(13,16,9) -	[illegible]
(0,2-1,3-1,0)	(14,18,16) -	[9,7,9]
(0,2-2,3-1,0)	(14,18,15) -	[10,10,10]
$(\substack{1-1\\1-2},0,0,0)$	(15,11,10) -	[8,6,5]
(1-1,0,3-2,0)	(15,20,12) -	[9,11,7]

(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14)	- [9,5,9]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16)	- [10,8,10]
(0,2-1,3-2,0)	(16,17,16)	- [10,10,11]
(0,2-2,3-2,0)	(16,22,18)	- [11,13,12]
$(1\text{-}1,\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(17,23,22)	- [12,13,15]
(1-2,0,3-1,0)	(18,11,11)	- [10,6,6]
$(0,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(18,20,18)	- [11,11,8]
(1-1,2-1,3-1,0)	(19,21,17)	- [12,11,11]
(1-1,2-2,3-1,0)	(19,26,19)	- [13,14,12]
(1-2,0,3-2,0)	(20,15,14)	- [11,9,8]
$(0,\substack{2-1\\2-2},3\text{-}1,0)$	(20,28,23)	- [14,13,16]
$(\substack{1-1\\1-2},2\text{-}1,0,0)$	(21,16,18)	- [12,9,11]
$(\substack{1-1\\1-2},2\text{-}2,0,0)$	(21,21,20)	- [13,12,12]
(1-1,2-1,3-2,0)	(21,25,20)	- [13,14,13]
$(1\text{-}2,\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(22,18,24)	- [14,11,16]
$(0,\substack{2-1\\2-2},3\text{-}2,0)$	(22,27,26)	- [15,16,18]
$(\substack{1-1\\1-2},0,3\text{-}1,0)$	(23,19,15)	- [13,10,8]
$(1\text{-}1,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(23,28,17)	- [14,15,10]
(1-2,2-1,3-1,0)	(24,16,19)	- [14,9,12]
(1-2,2-2,3-1,0)	(24,21,21)	- [15,12,13]
$(0,2\text{-}1,\substack{3-1\\3-2},0)$	(24,25,21)	- [15,14,14]
$(0,2\text{-}2,\substack{3-1\\3-2},0)$	(24,30,23)	- [16,17,15]
$(\substack{1-1\\1-2},0,3\text{-}2,0)$	(25,23,18)	- [14,13,10]
(1-2,2-1,3-2,0)	(26,20,22)	- [15,12,14]
(1-2,3-3,3-2,0)	(26,25,24)	- [16,15,15]
$(\substack{1-1\\1-2},\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(27,26,28)	- [[illegible],15,18]
$(1\text{-}2,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	([illegible],19)	- [16,13,11]
$(\substack{1-1\\1-2},2\text{-}1,3\text{-}1,0)$	(29,24,23)	- [17,13,14]

$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-2,3-1,0)$	(29,29,25) -	[18,16,15]
$(1-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2},2-1,0)$	(30,26,29) -	[19,15,19]
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},2-1,3-2,0)$	(31,28,26) -	[18,16,16]
$(1-2,\genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2},3-2,0)$	(32,30,32) -	[20,18,21]
$(1-2,2-1,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	(34,26,27) -	[20,16,17]

(8,6,10) - [4,3,6]

Lista 4.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) -	[0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) -	[3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(5,5,8) -	[4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10) -	[5,6,7]
(0,0,3-1,0)	(8,8,5) -	[5,4,3]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) -	[5,2,3]
(0,0,3-2,0)	(10,12,8) -	[6,7,5]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,12) -	[7,7,8]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) -	[8,10,9]
$(0,\genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2},0,0)$	(12,15,18) -	[9,9,13]
(1-1,0,3-1,0)	(13,16,9) -	[8,8,5]
(0,2-1,0,4-1)	(14,11,18) -	[8,6,12]
(0,2-1,3-1,0)	(14,13,13) -	[9,7,9]
(0,2-2,3-1,0)	(14,18,15) -	[10,10,10]
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2},0,0,0)$	(15,11,10) -	[8,6,5]
(1-1,0,3-2,0)	(15,20,12) -	[9,11,7]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) -	[9,5,9]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) -	[10,8,10]
(0,2-1,3-2,0)	(16,17,16) -	[10,10,11]
(0,2-2,3-2,0)	(16,22,18) -	[11,13,12]
$(1-1,\genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2},0,0)$	(17,23,22) -	[12,13,15]
(1-2,0,3-1,0)	(18,11,11) -	[10,6,6]
$(0,0,\genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2},0)$	(18,20,13) -	[11,11,8]
(1-1,2-1,0,4-1)	(19,19,22) -	[11,10,14]

(1-1,2-1,3-1,0),	(19,21,17) -	[12,11,11]
(1-1,2-2,3-1,0)	(19,26,19) -	[13,14,12]
(1-2,0,3-2,0)	(20,15,14) -	[11,9,8]
$\left(0,\substack{2-1\\2-2},0,4-1\right)$	(20,21,28) -	[13,12,19]
$\left(0,\substack{2-1\\2-2},3-1,0\right)$	(20,23,23) -	[14,13,16]
$\left(\substack{1-1\\1-2},2-1,0,0\right)$	(21,16,18) -	[12,9,11]
$\left(\substack{1-1\\1-2},2-2,0,0\right)$	(21,21,20) -	[13,12,12]
(1-1,2-1,3-2,0)	(21,25,20) -	[13,14,13]
$\left(1-2,\substack{2-1\\2-2},0,0\right)$	(22,18,24) -	[14,11,16]
(0,2-1,3-1,4-1)	(22,19,23) -	[13,10,15]
$\left(0,\substack{2-1\\2-2},3-2,0\right)$	(22,27,26) -	[15,16,18]
$\left(\substack{1-1\\1-2},0,3-1,0\right)$	(23,19,15) -	[13,10,8]
$\left(1-1,0,\substack{3-1\\3-2},0\right)$	(23,28,17) -	[14,15,10]
(1-2,2-1,0,4-1)	(24,14,24) -	[13,8,15]
(1-2,2-1,3-1,0)	(24,16,19) -	[14,9,12]
(1-2,2-2,3-1,0)	(24,21,21) -	[15,12,13]
(0,2-1,3-2,4-1)	(24,23,26) -	[14,13,17]
$\left(0,2-1,\substack{3-1\\3-2},0\right)$	(24,25,21) -	[15,14,14]
$\left(0,2-2,\substack{3-1\\3-2},0\right)$	(24,30,23) -	[16,17,15]
$\left(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,0\right)$	(25,23,18) -	[14,13,10]
$\left(1-1,\substack{2-1\\2-2},0,4-1\right)$	(25,29,32) -	[16,16,21]
(1-2,2-1,3-2,0)	(26,20,22) -	[15,12,14]
(1-2,2-2,3-2,0)	(26,25,24) -	[16,15,15]
$\left(\substack{1-1\\1-2},\substack{2-1\\2-2},0,0\right)$	(27,26,[illegible]) -	[[illegible],[illegible],18]
(1-1,2-1,3-1,4-1)	(27,27,27) -	[16,14,17]
$\left(1-2,0,\substack{3-1\\3-2},0\right)$	(28,23,19) -	[16,13,11]
$\left(0,\substack{2-1\\2-2},3-1,4-1\right)$	(28,29,[illegible]) -	[[illegible],[illegible],22]

$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},2-1,0,4-1\right)$	(29,22,28)	-	[16,12,17]
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},2-1,3-1,0\right)$	(29,24,23)	-	[17,13,14]
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},2-2,3-1,0\right)$	(29,29,25)	-	[18,16,15]
$\left(1-2,\begin{smallmatrix}2-1\\2-2\end{smallmatrix},0,4-1\right)$	(30,24,34)	-	[18,14,22]
$\left(1-2,\begin{smallmatrix}2-1\\2-2\end{smallmatrix},3-1,0\right)$	(30,26,29)	-	[19,15,19]
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},2-1,3-2,0\right)$	(31,28,26)	-	[18,16,16]
(1-2,2-1,3-1,4-1)	(32,22,29)	-	[18,12,18]
$\left(1-2,\begin{smallmatrix}2-1\\2-2\end{smallmatrix},3-2,0\right)$	(32,30,32)	-	[20,18,21]
(1-2,2-1,3-2,4-1)	(34,26,32)	-	[19,15,20]
$\left(1-2,2-1,\begin{smallmatrix}3-1\\3-2\end{smallmatrix},0\right)$	(34,28,27)	-	[20,16,17]
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},2-1,3-1,4-1\right)$	(37,30,33)	-	[21,16,20]

(9,4,8) - [5,2,6] Lista 4.2

(0,0,0,0)	(0,0,0)	-	[0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4)	-	[3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8)	-	[4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10)	-	[5,6,7]
(0,0,3-1,0)	(8,8,5)	-	[5,4,3]
(0,0,0,4-2)	(9,4,8)	-	[5,2,6]
(12-,0,0,0)	(10,3,6)	-	[5,2,3]
(0,0,3-2,0)	(10,12,8)	-	[6,7,5]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,12)	-	[7,7,8]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14)	-	[8,10,9]
$\left(0,\begin{smallmatrix}2-1\\2-2\end{smallmatrix},0,0\right)$	(12,15,18)	-	[9,9,13]
(1-1,0,3-1,0)	(13,16,9)	-	[8,8,5]
(0,2-1,0,4-1)	(14,11,18)	-	[[illegible],8,12]
(1-1,0,0,4-2)	(14,12,[illegible])	-	[8,6,8]
(0,2-1,3-1,0)	(14,13,13)	-	[9,7,[illegible]]
(0,2-2,3-1,0)	(14,[illegible])	-	[10,10,10]
(0,2-1,0,4-2)	(15, 9,16)	-	[9,5,12]
$\left(\begin{smallmatrix}1-1\\1-2\end{smallmatrix},0,0,0\right)$	(15,11,10)	-	[8,6,5]

(0,2-2,0,4-2)	(15,14,18) -	[10,8,12]
(1-1,0,3-2,0)	(15,20,12) -	[9,11,7]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) -	[9,5,9]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) -	[10,8,10]
(0,2-1,3-2,0)	(16,17,16) -	[10,10,11]
(0,2-2,3-2,0)	(16,22,13) -	[11,13,12]
(0,0,3-1,4-2)	(17,12,13) -	[10,6,9]
$(1-1,\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(17,23,22) -	[12,13,15]
(1-2,0,3-1,0)	(18,11,11) -	[10,6,6]
$(0,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(18,20,13) -	[11,11,8]
(1-2,0,0,4-2)	(19,7,14) -	[10,4,9]
(0,0,3-2,4-2)	(19,16,16) -	[11,9,11]
(1-1,2-1,0,4-1)	(19,19,22) -	[11,10,14]
(1-1,2-1,3-1,0)	(19,21,17) -	[12,11,11]
(1-1,2-2,3-1,0)	(19,26,19) -	[13,14,12]
(1-2,0,3-2,0)	(20,15,14) -	[11,9,8]
(1-1,2-1,0,4-2)	(20,17,20) -	[12,9,14]
$(0,\substack{2-1\\2-2},0,4-1)$	(20,21,28) -	[13,12,19]
(1-1,2-2,0,4-2)	(20,22,22) -	[13,12,15]
$(0,\substack{2-1\\2-2},3-1,0)$	(20,23,23) -	[14,13,16]
$(\substack{1-1\\1-2},2-1,0,0)$	(21,16,18) -	[12,9,11]
$(0,\substack{2-1\\2-2},0,4-2)$	(21,19,26) -	[14,11,19]
$(\substack{1-1\\1-2},2-2,0,0)$	(21,21,20) -	[13,12,12]
(1-1,2-1,3-2,0)	(21,25,20) -	[13,14,13]
$(1-2,\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(22,18,24) -	[14,11,16]
(0,2-1,3-1,4-1)	(22,19,23) -	[13,10,15]
(1-1,0,3-1,4-2)	(22,20,17) -	[13,10,11]
$(0,\substack{2-1\\2-2},3-2,0)$	(22,27,26) -	[15,16,18]
$(0,2-1,0,\substack{4-1\\4-2})$	(23,15,26) -	[13,8,18]
(0,2-1,3-1,4-2)	(23,17,[illegible]) -	[14,9,15]
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-1,0)$	(23,19,15) -	[13,10,8]
(0,2-2,3-1,4-2)	(23,22,23) -	[15,12,16]

$(1-1,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(23,28,17) -	[14,15,10]
(1-2,2-1,0,4-1)	(24,14,24) -	[13,8,15]
$(\substack{1-1\\1-2},0,0,4-2)$	(24,15,18) -	[13,8,11]
(1-2,2-1,3-1,0)	(24,16,19) -	[14,9,12]
(1-2,2-2,3-1,0)	(24,21,21) -	[15,12,13]
(0,2-1,3-2,4-1)	(24,23,26) -	[14,13,17]
(1-1,0,3-2,4-2)	(24,24,20) -	[14,13,13]
$(0,2-1,\substack{3-1\\3-2},0)$	(24,25,21) -	[15,14,14]
$(0,2-2,\substack{3-1\\3-2},0)$	(24,30,23) -	[16,17,15]
(1-2,2-1,0,4-2)	(25,12,22) -	[14,7,15]
(1-2,2-2,0,4-2)	(25,17,24) -	[15,10,16]
(0,2-1,3-2,4-2)	(25,21,24) -	[15,12,17]
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,0)$	(25,23,18) -	[14,13,10]
(0,2-2,3-2,4-2)	(25,26,26) -	[16,15,18]
$(1-1,\substack{2-1\\2-2},0,4-1)$	(25,29,32) -	[16,16,21]
(1-2,2-1,3-2,0)	(26,20,22) -	[15,12,14]
(1-2,2-2,3-2,0)	(26,25,24) -	[16,15,15]
$(1-1,\substack{2-1\\2-2},0,4-2)$	(26,27,30) -	[17,15,21]
(1-2,0,3-1,4-2)	(27,15,19) -	[15,8,12]
$(0,0,\substack{3-1\\3-2},4-2)$	(27,24,21) -	[16,13,14]
$(\substack{1-1\\1-2},\substack{2-1\\2-2},0,0)$	(27,26,26) -	[17,15,18]
$(1-2,0,\substack{3-1\\3-2},0)$	(28,23,19) -	[16,13,11]
$(1-1,2-1,0,\substack{4-1\\4-2})$	(28,23,30) -	[16,12,20]
(1-1,2-1,3-1,4-2)	(28,25,25) -	[17,13,17]
$(0,\substack{2-1\\2-2},3-1,4-1)$	(28,29,33) -	[18,16,22]
(1-1,2-2,3-1,4-2)	(28,30,[illegible]) -	[16,16,18]
(1-2 , 0 ,3-2,4-2)	(29,19,22) -	[16,11,14]
$(\substack{1-1\\1-2},2-1,0,4-1)$	(29,22,28) -	[16,12,17]

$(\substack{1-1\\1-2},2-1,3-1,0)$	(29,24,23) - [17,13,14]
$(0,\substack{2-1\\2-2},0,\substack{4-1\\4-2})$	(29,25,36) - [18,14,25]
$(0,\substack{2-1\\2-2},3-1,4-2)$	(29,27,31) - [19,15,22]
$(\substack{1-1\\1-2},2-2,3-1,0)$	(29,29,25) - [18,16,15]
$(\substack{1-1\\1-2},2-1,0,4-2)$	(30,20,26) - [17,11,17]
$(1-2,\substack{2-1\\2-2},0,4-1)$	(30,24,34) - [18,14,22]
$(\substack{1-1\\1-2},2-2,0,4-2)$	(30,25,28) - [18,14,18]
$(1-2,\substack{2-1\\2-2},3-1,0)$	(30,26,29) - [19,15,19]
$(1-1,2-1,3-2,4-2)$	(30,29,28) - [18,16,19]
$(1-2,\substack{2-1\\2-2},0,4-2)$	(31,22,32) - [19,13,22]
$(0,2-1,3-1,\substack{4-1\\4-2})$	(31,23,31) - [18,12,21]
$(\substack{1-1\\1-2},2-1,3-2,0)$	(31,28,26) - [18,16,16]
$(1-2,2-1,3-1,4-1)$	(32,22,29) - [18,12,18]
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-1,4-2)$	(32,23,23) - [18,12,14]
$(1-2,\substack{2-1\\2-2},3-2,0)$	(32,30,32) - [20,18,21]
$(1-2,2-1,0,\substack{4-1\\4-2})$	(33,18,32) - [18,10,21]
$(1-2,2-1,3-1,4-2)$	(33,20,27) - [19,11,18]
$(1-2,2-2,3-1,4-2)$	(33,25,29) - [20,14,19]
$(0,2-1,3-2,\substack{4-1\\4-2})$	(33,27,34) - [19,15,23]
$(0,2-1,\substack{3-1\\3-2},4-1)$	(33,29,29) - [20,16,20]
$(1-2,2-1,3-2,4-1)$	(34,26,32) - [19,15,20]
$(\substack{1-1\\1-2},0,3-2,4-2)$	(34,27,26) - [19,15,16]

$(1-2, 2-1, \genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2}, 0)$	(34,28,27) - [20,16,17]
$(1-2, 2-1, 3-2, 4-2)$	(35,24,30) - [20,14,20]
$(1-2, 2-2, 3-2, 4-2)$	(35,29,32) - [21,17,21]
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2}, \genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2}, 0, 4-2)$	(36,30-36) - [22,17,24]
$(1-2, 0, \genfrac{}{}{0pt}{}{3-1}{3-2}, 4-2)$	(37,27,27) - [21,15,17]
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2}, 2-1, 0, \genfrac{}{}{0pt}{}{4-1}{4-2})$	(38,26,36) - [21,14,23]
$(\genfrac{}{}{0pt}{}{1-1}{1-2}, 2-1, 3-1, 4-2)$	(38,28,31) - [22,15,20]
$(1-2, \genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2}, 0, \genfrac{}{}{0pt}{}{4-1}{4-2})$	(39,28,32) - [23,16,28]
$(1-2, \genfrac{}{}{0pt}{}{2-1}{2-2}, 3-1, 4-2)$	(39,30,37) - [24,17,25]

Para resolver los problemas del número 211, en primer lugar se obtendrán de la lista 4.2, los puntos que tomen en obligatoria alguna de las restricciones.

Estos son:

Primera restricción

(20,15,14) - [11,9,8]
(20,17,20) - [12,9,14]
(20,21,28) - [13,12,19]
(20,22,22) - [13,12,15]
(20,23,23) - [14,13,16]

Segunda restricción

(12,15,15) - [9,9,13]
(20,15,14) - [11,9,8]
(23,15,23) - [13,[illegible],16]
(24,15,15) - [13,5,11]
(27,15,19) - [15,[illegible],12]

Tercera restricción

(28,25,25) - [17,13,17]
(29,29,25) - [18,16,15]

En segundo lugar se obtienen de entre los anteriores los que son factibles para el problema planteado (satisfacen simultáneamente las tres restricciones).

(20,15,14) - [11,9,8]
(12,15,18) - [9,9,13]

La respuesta al problema (a) será:

1.- (20,15,14) - [11,9,8] $\longrightarrow P_{1,2} + P_{3,2}$ (z = 20)

La respuesta al problema (b) será:

2.- (20,15,14) - [11,9,8] $\longrightarrow P_{1.2} + P_{3.2}$ (z = 9)

3.- (12,15,18) - [9,9,13] $\longrightarrow P_{2.1} + P_{2.2}$

La respuesta al problema (c), y dado que ninguno de los puntos que tornan en obligatoria a la *tercera restricción* es *factible*, implica revisar la lista 4.2 buscando de entre todos los puntos factibles, cuales son los que suministran el mayor valor para el tercer elemento del vector beneficio. Estos son:

4.- (12,15,18) - [9,9,13] $\longrightarrow P_{2.1} + P_{2.2}$ (z = 13)

5.- (15,14,18) - [10,8,13] $\longrightarrow P_{2.2} + P_{4.2}$

Para obtener algunas de las respuestas al problema (d) se obtendrán los beneficios totales, al final del horizonte para los puntos anteriores y se seleccionan los máximos:

1.	28	4.	-31	$\Rightarrow (12,15,18) - [9,9,13] \rightarrow P_{2.1} + P_{2.2}$
2.	-28	5.	31	$(15,14,18) - [10,8,13] \rightarrow P_{2.2} + P_{4.2}$
3.	31			

$(z = 31)$

222. Restricciones adicionales

a) Cuando de un conjunto de proyectos o alternativas de inversión sólo se desea, a lo más, elegir uno de ellos será necesario imponer la condición

$$\sum_{j \in J} x_j \leq 1 \quad (J = \text{conjunto de proyectos}).$$

b) Cuando el proyecto P_r sólo puede llevarse a cabo si el proyecto P_s es llevado a cabo se deberá agregar la condición

$$x_r \leq x_s$$

c) Si los proyectos P_r y P_s son mutuamente exclusivos, esto es, la selección de uno impide la selección del otro, la condición será

$$x_r + x_s \leq 1$$

d) Si el proyecto P sólo puede llevarse a cabo cuando alguno de los proyectos P_r ó P_s son previamente realizado y estos últimos son mutuamente exclusivos, las condiciones que se deben agregar son:

$$x_r + x_s \leq 1$$

$$x \leq x_r + x_s$$

223. Proyectos interactuantes (dependientes) indivisibles y de un sólo período

Cuando dos proyectos P_r y P_s producen bienes complementarios, o el producto de un proyecto es insumo para el otro o se llevan a cabo con equipo común se dice que los dos proyectos son interactuantes entre sí.

En este caso si los beneficios del proyecto P_r son b_r - considerándolo aisladamente - y los del P_s son b_s aisladamente, los beneficios de aceptar los dos proyectos interactuantes serán $b_r + b_s + d_{rs}$. Al termino b_{rs} se le llama de beneficios o efectos de segundo orden. Puede ocurrir adicionalmente que si al considerar aisladamente los proyectos las inversiones sean respectivamente a_r y a_s, al considerar la interacción la inversión requerida sea $a_r + a_s + v_{rs}$. Al término v_{rs} se le suele llamar costo de la coordinación entre P_r y P_s. Los efectos pueden ser de orden superior al segundo cuando dejan de considerarse por pares los proyectos.

Una manera comoda de representar los beneficios de proyectos interactuantes, considerados por pares, es la matricial debida a Reiter.

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & d_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

en donde b_{ii} son los beneficios producidos por el proyecto P_i considerando aisladamente. d_{ij} son los efectos de segundo orden entre los proyectos interactivos P_i y P_j.

224. Ejemplo

Considérense los cuatro proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 cuyas características se describen a continuación

	Costo	Beneficio
P_1	2,000	1,000
P_2	3,000	2,000
P_3	1,000	1,000
P_4	4,000	3,000

con los beneficios adicionales por interacción siguientes

$$d_{12} = 0 \qquad d_{23} = 2,000$$
$$d_{13} = 3,000 \qquad d_{24} = 4,000$$
$$d_{14} = 1,000 \qquad d_{34} = 5,000$$

Si la disponibilidad presupuestal es de \$ 7,000.00 ¿cuál es la mejor selección?

Se tiene:

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

luego:

$$\max\ z = x_1^2 + 3x_1x_3 + x_1x_4 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 5x_3x_4 + 3x_4^2$$

s.a.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 7$$

$\bar{x}$	R	x_1^2	$3x_1x_3$	x_1x_4	$2x_2^2$	$2x_2x_3$	$4x_2x_4$	x_3^2	$5x_3x_4$	$3x_4^2$	2
0000	✓										0
0001	✓									3	3
0010	✓							1			1
0011	✓							1	5	3	9
0100	✓				2						2
0101	✓				2		4			3	9
0110	✓				2	2		1			5
0111	x				2	2	4	1	5	3	x
1000	✓	1									1
1001	✓	1		1						3	5
1010	✓	1	3					1			5
1011	✓	1	3	1				1	5	3	14 ←
1100	✓	1			2						3
1101	x	1		1	2		4			3	x
1110	✓	1	3		2	2		1			8
1111	x	1	3	1	2	2	4	1	5	3	x

Seleccionar los proyectos P_1, P_3 y P_4.

El beneficio obtenido es de $ 14,000.00

225. <u>Ejemplo</u>

Considérense los siguientes cuatro proyectos interactuantes entre sí

Proyecto	Beneficio	Costo
P_1	1,000	3,000
P_2	2,500	4,000
P_3	500	2,000
P_4	1,500	3,500

P_1 y P_2 son mutuamente exclusivos entre sí

P_3 y P_4 son mutuamente exclusivos entre sí.

La adopción de P_1 ó P_2 está condicionada a la adopción de P_3 ó P_4.

Si se adopta P_3 los efectos con P_1 se evaluan en \$ 500.00 y con P_2 en \$ 300.00

Si se adopta P_4 los efectos con P_1 se evaluan en \$ 400.00 y con P_2 en \$ 300.00

No se consideran gastos de coordinación y la disponibilidad presupuestal es de \$ 10,000.00

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0 & 500 & 400 \\ 0 & 2,500 & 300 & 300 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,500 \end{bmatrix}$$

$$\max z = 1000x_1^2 + 2500x_2^2 + 500x_3^2 + 1500x_4^2 + 500x_1x_3 + 400x_1x_4 + 300x_2x_3 + 300x_2x_4$$

s.a.

$$\begin{aligned} &R_1 \quad 3000x_1 + 4000x_2 + 2000x_3 + 3500x_4 \leq 10,000 \\ &R_2 \quad x_1 + x_2 \leq 1 \\ &R_3 \quad x_3 + x_4 \leq 1 \\ &R_4 \quad x_1 \leq x_3 + x_4 \\ &R_5 \quad x_2 \leq x_3 + x_4 \end{aligned}$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

No. 5.	1 2 3 4	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	$1x_1^2$	$2.5x_2^2$	$0.5x_3^2$	$1.5x_4^2$	$0.5x_1x_3$	$0.4x_1x_4$	$0.3x_2x_3$	$0.3x_2x_4$	z
1	0 0 0 0	✓	✓	✓	✓	✓									0
2	0 0 0 1	✓	✓	✓	✓	✓				1.5					1.5
3	0 0 1 0	✓	✓	✓	✓	✓			0.5						0.5
4	0 0 1 1	✓	✓	x	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
5	0 1 0 0	✓	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
6	0 1 0 1	✓	✓	✓	✓	✓		2.5		1.5				0.3	4.3
7	0 1 1 0	✓	✓	✓	✓	✓		2.5	0.5				0.3		3.3
8	0 1 1 1	✓	✓	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
9	1 0 0 0	✓	✓	✓	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
10	1 0 0 1	✓	✓	✓	✓	✓	1			1.5		0.4			2.9
11	1 0 1 0	✓	✓	✓	✓	✓	1		0.5		0.5				2
12	1 0 1 1	✓	✓	x	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
13	1 1 0 0	✓	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
14	1 1 0 1	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
15	1 1 1 0	✓	x	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
16	1 1 1 1	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Respuesta:

$$x_1 = x_3 = 0$$

$$x_2 = x_4 = 1$$

$$z = 4.3$$

Seleccionar los proyectos P_2 y P_4, se obtendrán \$ 4,300.00 de beneficios.

A continuación y a manera de ilustración se resolverá el mismo problema empleando el método de Mao - Wallingford.

$$\min z = -x_1^2 - 2.5x_2^2 - 0.5x_3^2 - 1.5x_4^2 - 0.5x_1x_3 - 0.4x_1x_4 - 0.3x_2x_3 - 0.3x_2x_4$$

s.a.

$$-x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-x_3 - x_4 \geq -1$$

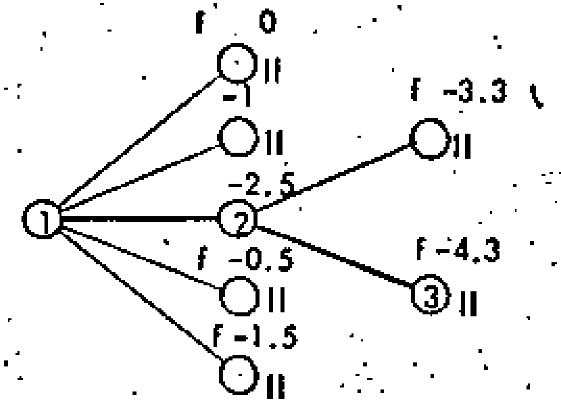
$$-x_1 + x_3 + x_4 \geq 0$$

$$-x_2 + x_3 + x_4 \geq 0$$

$$-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3.5x_4 \geq -10$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

No. de Sol.	Hoja Part.	$\bar{x}$	$\bar{x}^*-1$	M	$g_o'(\bar{x})-g_o''(\bar{x}^*-1)$	$\Delta \geq M$?	$g_{11}(\bar{x}^*-1)-g_{12}(\bar{x})$	$g_{21}(\bar{x}^*-1)-g_{22}(\bar{x})$	$g_{31}(\bar{x}^*-1)+g_{32}(\bar{x})$	$g_{41}(\bar{x}^*-1)-g_{42}(\bar{x})$	$g_{51}(\bar{x}^*-1)-g_{52}(\bar{x})$	$\Delta \geq 0$? alg. j	$g_{11}(\bar{x})-g_{12}(\bar{x})$	$g_{21}(\bar{x})-g_{22}(\bar{x})$	$g_{31}(\bar{x})-g_{32}(\bar{x})$	$g_{41}(\bar{x})-g_{42}(\bar{x})$	$g_{51}(\bar{x})-g_{52}(\bar{x})$	$\Delta \geq 0$? alg. j	$g_o'(\bar{x})-g_o''(\bar{x})$	$\Delta < M$?	z	Hoja lkg.
1	1	0000	0000	∞	0	no	1	1	0	0	10	no	1	1	0	0	10	no	0	si	0	
2	1	1000	1111	∞	-6	no	0	1	-1	2	7	no	0	1	-1	0	7	si	-	-	-1	
3	1	0100	0111	∞	-5.1	no	0	1	2	1	6	no	0	1	0	-1	6	si	-	-	-2.5	2
4	1	0010	0011	∞	-2	no	1	0	2	2	8	no	1	0	1	1	8	no	-0.5	si	-0.5	
5	1	0001	0001	∞	-1.5	no	1	0	1	1	6.5	no	1	0	1	1	6.5	no	-1.5	si	-1.5	
6	2	0110	0111	-1.5	-1.5	no	0	0	2	1	4	no	0	0	1	0	4	no	-3.3	si	-3.3	
7	2	0101	0101	-1.5	-4.3	no	0	0	1	0	2.5	no	0	0	1	0	2.5	no	-4.3	si	-4.3	3



$x_1 = x_3 = 0$

$x_2 = x_4 = 1$

$z = 4.3$

$$\min z = -x_1^2 - 2.5x_2^2 - 0.5x_3^2 - 1.5x_4^2 - 0.5x_1x_3 - 0.4x_1x_4 - 0.3x_2x_3 - 0.3x_2x_4$$

$$-x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-x_3 - x_4 \geq -1$$

$$-x_1 + x_3 + x_4 \geq 0$$

$$-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3.5x_4 \geq -10$$

$$z = -(1-x_1)^2 - 2.5(1-x_2)^2 - 0.5(1-x_3)^2 - 1.5(1-x_4)^2 - 0.5(1-x_1)(1-x_3) - 0.4(1-x_1)$$
$$(1-x_4) - 0.3(1-x_2)(1-x_3) - 0.3(1-x_2)(1-x_4)$$

$$-(1-x_1) - (1-x_2) \geq -1$$

$$-(1-x_3) - (1-x_4) \geq -1$$

$$-(1-x_2) + (1-x_3) + (1-x_4) \geq 0$$

$$-(1-x_2) + (1-x_3) + (1-x_4) \geq 0$$

$$-3(1-x_1) - 4(1-x_2) - 2(1-x_3) - 3.5(1-x_4) \geq -10$$

$$z = (1-2x_1+x_1^2) - 2.5(1-2x_2+x_2^2) - 0.5(1-2x_3+x_3^2) - 1.5(1-2x_4+x_4^2) - 0.5(1-x_1$$
$$-x_3+x_1x_3) - 0.4(1-x_1-x_4+x_1x_4) - 0.3(1-x_2-x_3+x_2x_3) - 0.3(1-x_2-x_4+x_2x_4)$$

$$-1 + x_1 + x_2 \geq -1$$

$$-1 + x_3 + x_4 \geq -1$$

$$-1 + x_1 + 1 - x_3 + 1 - x_4 \geq 0$$

$$-1 + x_2 + 1 - x_3 + 1 - x_4 \geq 0$$

$$-3 + 3x_1 - 4 + 4x_2 - 2 + 2x_3 - 3.5 + 3.5x_4 \geq -10$$

$$z = -1 + \underline{2x_1} - \underline{x_1^2} - 2.5 + \underline{5x_2} - \underline{2.5x_2^2} - 0.5 + \underline{x_3} - \underline{0.5x_3^2} - 1.5 + \underline{3x_4} - \underline{1.5x_4^2} - 0.5 +$$
$$\underline{0.5x_1} + \underline{0.5x_3} - \underline{0.5x_1x_3} - 0.4 + \underline{0.4x_1} + \underline{0.4x_4} - \underline{0.4x_1x_4} - 0.3 + \underline{0.3x_2} +$$
$$\underline{0.3x_3} - \underline{0.3x_2x_3} - 0.3 + \underline{0.3x_2} + \underline{0.3x_4} - \underline{0.3x_2x_4}$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_1 - x_3 - x_4 \geq -1$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3.5x_4 \geq 2.5$$

$$\min z = 2.9x_1 + 5.6x_2 + 1.8x_3 + 3.7x_4 - x_1^2 - 2.5x_2^2 - 0.5x_3^2 - 1.5x_4^2 - 0.5x_1x_3 -$$
$$0.4x_1x_4 - 0.3x_2x_3 - 0.3x_2x_4$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_1 - x_3 - x_4 \geq -1$$

$$x_2 - x_3 - x_4 \geq -1$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3.5x_4 \geq 2.5$$

$$\min z = 1.9x_1^2 + 3.1x_2^2 + 1.3x_3^2 + 2.2x_4^2 - 0.5x_1x_3 - 0.4x_1x_4 - 0.3x_2x_3 - 0.3x_2x_4$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad \begin{bmatrix} 1.9 & 0 & -0.5 & -0.4 \\ & 3.1 & -0.3 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.2 \end{bmatrix}$$

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_1 - x_3 - x_4 \geq -1$$

$$x_2 - x_3 - x_4 \geq -1$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3.5x_4 \geq 2.5$$

También a manera de ilustración se resolverá el mismo problema empleando el método de Loughhunn.

$\bar{z} = 2.7$

$\bar{x} = 1,0,1,0$

Luego la respuesta al problema de maximización será:

$x_1 = x_3 = 0$

$x_2 = x_4 = 1$

$z = 4.3$

226. Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos interactuantes indivisibles y de un solo período

Para este caso y razonando de la misma manera que en los anteriores se obtiene como fórmula de recurrencia.

$$\begin{cases} \Lambda_0(\xi, \bar{\eta}_0(\xi)) = 0 \\ \Lambda_{j+1}(\xi, \bar{\eta}_{j+1}(\xi)) = \max\limits_{x_1,\ldots,x_j} \Lambda_j(\xi, \bar{\eta}_j(\xi), b^1_{j+1} + \Lambda_j(\xi - A^1_{j+1}, \bar{\eta}_j(\xi - A^1_{j+1})) \end{cases}$$

en donde

$$b^1_{j+1} = b_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} (d_{i,j+1} \mid \eta_{ij}(\xi - A^1_{j+1}) = 1)$$

$$A^1_{j+1} = A_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} (V_{i,j+1} \mid \eta_{ij}(\xi - A^1_{j+1}) = 1)$$

Como en los casos anteriores $A_i(\xi - A^1_{i+1}, \eta_i(\xi - A^1_{i+1})) = -\infty$ si

$-A^1_{i+1} < 0$.

ξ = variable de estado de la disponibilidad presupuestal

$\bar{\eta}_i = (\eta_{0i}(\xi), \ldots, \eta_{ii}(\xi))$ = vector de decisión.

$$\eta_{ij}(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ si para una disponibilidad } \xi \text{ existe interacción entre } i \text{ y } j \ (i < j) \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

b_i = beneficio del proyecto P_i considerado aislado.

A_i = costo del proyecto P_i considerado aislado

d_{ij} = beneficio de seleccionar conjuntamente los proyectos P_i y P_j $(i < j)$

V_{ij} = costo de coordinación al seleccionar conjuntamente los proyectos P_i y P_j $(i < j)$.

A^1_i = es el costo programado de seleccionar el proyecto P_i mas los efectos de la interacción de P_i con los proyectos elegidos de entre $P_1, \ldots, P_{i-1}$.

b^1_i = es el valor neto de los beneficios actualizados aportados por seleccionar P_i y por la interacción con los proyectos seleccionados de entre $P_1, \ldots, P_{i-1}$.

227. Ejemplo

Usando la fórmula de recurrencia y considerando una disponibilidad presupuestal tope de $ 10,000.00 establecer las selecciones de entre los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 que a continuación se detallan, (datos del número 224).

ξ	$\eta(f)$	Λ_0	$\xi-2$	η_{00}	$1+\Lambda_0$	Λ_1	1x	$\xi-3$	η_{01}	η_{11}	$2+\Lambda_1$	Λ_2	1x	$\xi-1$	η_{02}	η_{1}	η_{2}	d_{13}	d_{23}	b_3	$b'_3+\Lambda_2$	Λ_3	1x	$\xi-4$	η_{03}	η_{13}	η_{23}	η_{33}	a_{14}	a_{24}	a_{34}	b'_4	$b'_4+\Lambda_3$	Λ_4	1x
0	1	0	-2		$-\infty$	0	83	-3			$-\infty$	0	88	-1						1	$-\infty$	0	00 00	-4								3	$-\infty$	0	88
0	0	0	-2		$-\infty$	0	"	-3			$-\infty$	0	"	-1						1	$-\infty$	0	"	-4								3	$-\infty$	0	00 00
1	1	0	-1		$-\infty$	0	"	-2			$-\infty$	0	"	0	1					1	1	1	00 10	-3								3	$-\infty$	1	00 10
1	0	0	-1		$-\infty$	0	"	-2			$-\infty$	0	"	0						1	1	1	"	-3								3	$-\infty$	1	00 10
2	1	0	0	1	1	1	10 00	-1			$-\infty$	1	10 00	1						1	1	1	"	-2								3	$-\infty$	1	10 00
2	0	0	0		1	1	"	-1			$-\infty$	1	"	1						1	1	1	"	-2								3	$-\infty$	1	00 10
3	1	0	1		1	1	"	0	1		2	2	01 00	2		1		3		4	5	5	10 10	-1								3	$-\infty$	5	10 10
3	0	0	1		1	1	"	0			2	2	"	2						1	2	2	01 00	-1								3	$-\infty$	3	00 01
4	1	0	2		1	1	"	1			2	2	"	3			1		2	3	5	5	01 10	0	1							3	3	5	01 10
4	0	0	2		1	1	"	1			2	2	"	3						1	3	3	11 00	0								3	3	3	00 01
5	1	0	3		1	1	"	2		1	3	3	11 00	4						1	3	3	11 00	1				1			5	8	9	9	00 11
5	0	0	3		1	1	"	2			3	3	"	4						1	3	3	11 00	1								3	4	4	00 01
6	1	0	4		1	1	"	3			3	3	"	5		1	1	3	2	6	9	9	11 10	2				1			5	8	9	9	00 01
6	0	0	4		1	1	"	3			3	3	"	5						1	4	4	"	2								3	4	4	00 01
7	1	0	5		1	1	"	4			3	3	"	6						1	4	4	"	3		1		1	1		5	9	14	14	10 11
7	0	0	5		1	1	"	4			3	3	"	6						1	4	4	"	3								3	5	5	00 01
8	1	0	6		1	1	"	5			3	3	"	7						1	4	4	"	4			1	1		4	5	12	17	17	01 11
8	0	0	6		1	1	"	5			3	3	"	7						1	4	4	"	4								3	6	6	00 01
9	1	0	7		1	1	"	6			3	3	"	8						1	4	4	"	5		1	1		1	4		8	11	11	00 01
9	0	0	7		1	1	"	6			3	3	"	8						1	4	4	"	5								3	6	6	00 01
10	1	0	8		1	1	"	7			3	3	"	9						1	4	4	"	6		1	1	1	1	4	5	13	22	22	11 11
10	0	0	8		1	1	"	7			3	3	"	9						1	4	4	"	6								3	7	7	"

	Costo	Beneficio
P_1	2,000	1,000
P_2	3,000	2,000
P_3	1,000	1,000
P_4	4,000	3,000

$d_{12} = 0$ $\qquad d_{23} = 2,000$

$d_{13} = 3,000$ $\qquad d_{24} = 4,000$

$d_{14} = 1,000$ $\qquad d_{34} = 5,000$

228. Método de Ullman

Al aplicar el método de Ullman el cálculo de A^1_{j+1} se hará de la siguiente manera:

$$A^1_{j+1} = A_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} (V_{i,\ j+1} \mid ? \quad ij(J_{jn}) = 1)$$

en donde J_{jn} es el costo en un punto cualquiera de la k-ésima lista.

Para completar el algoritmo para proyectos interactivos se deben tomar en cuenta las interacciones que involucran a los proyectos $P_{j+1}, \ldots, P_N$. Anteriormente si un candidato para la $(k+1)$-ésima lista era dominado por un miembro de la k-ésima lista, el elemento dominado se eliminaba, similarmente si un miembro recien generado de la $(k+1)$-ésima lista dominó a uno de la k-ésima el dominado se elimina. Sin embargo, al tratar con proyectos interactuantes se debe proceder con mayor cautela. Supóngase que existe un elemento

$R(\Lambda_i(J_{in}, J_{in})$ en la k-ésima lista tal que

$$\Lambda_i(J_{in}) \geq \Lambda_i(J_{is}) + b^1_{i+1}$$

$$J_{in} \leq J_{is} + A^1_{i+1}$$

De no existir interacciones de $P_{i+2}, \ldots, P_N$ con $P_1, \ldots, P_{i+1}$ entonces el elemento $\theta(\Lambda_i(J_{is}) + b^i_{i+1}, J_{is} + A^1_{i+1})$ puede eliminarse. Pero de existir interacción sólo podrá eliminarse cuando las interacciones con $P_{i+2}, \ldots,$ P_N hayan sido consideradas de la manera más favorable posible con relación a θ y aún así θ resulte dominada por R.

Sea

$$d_m = d_{i+1,m} + \sum_{i=1}^{i} (d_{im} \mid \eta_{ij}(J_{is}) = 1) - \sum_{i=1}^{i} (d_{im} \mid \eta_{ij}(J_{in}) = 1)$$

$$V_m = V_{i+1,m} + \sum_{i=1}^{i} (V_{im} \mid \eta_{ij}(J_{is}) = 1) - \sum_{i=1}^{i} (V_{im} \mid \eta_{ij}(J_{in}) = 1)$$

De seleccionar P_m, d_m y V_m son las contribuciones diferenciales a las interacciones de P_m con θ y R. $\quad m = i+2, \ldots, N.$

Luego,

$$d^{i+1} = \sum_{m=i+2}^{N} \max(0, d_m)$$

$$V^{i+1} = \sum_{m=i+2}^{N} \min(0, V_m)$$

son respectivamente el beneficio y el costo más favorables con respecto a y los menos favorables con respecto a R.

En estas condiciones se eliminará a θ si y sólo si:

$$\Lambda_j(J_{jn}) \geq \Lambda_j(J_{js}) + b^1_{j+1} + d^{j+1}$$

$$J_{jn} \leq J_{js} + A^1_{j+1} + V^{j+1}$$

En forma similar un elemento de la k-ésima lista $R(J_{jn}, \Lambda_j(J_{jn}))$ que es dominado por un candidato para la (k+1)-ésima lista será eliminado sí y sólo si:

$$\Lambda_j(J_{js}) + b^1_{j+1} + d^{j+1} \geq \Lambda_j(J_{jn})$$

$$J_{js} + A^1_{j+1} + V^{j+1} \leq J_{jn}$$

en donde

$$d^{j+1} = \sum_{m=j+2}^{N} \min(0, d_m)$$

$$V^{j+1} = \sum_{m=j+2}^{N} \max(0, V_m)$$

229. <u>Ejemplo</u>

Usando el método de Ullman resolver el problema del número 227.

$A_1 = 2 \qquad b_1 = 1 \qquad d_{12} = 0$

$A_2 = 3 \qquad b_2 = 2 \qquad d_{13} = 3$

$A_3 = 1 \qquad b_3 = 1 \qquad d_{14} = 1$

$A_4 = 4 \qquad b_4 = 3 \qquad d_{23} = 2$

$d_{24} = 4$

$d_{34} = 5$

0-0

Lista 0

(0,0,0,0)	0-0

2-1

Lista 1

(0,0,0,0)	0-0	$\eta_{01}(0) = 1$
(1,0,0,0)	2-1	$\eta_{11}(2) = 1$

3-2

Lista 2

(0,0,0,0)	0-0	$\eta_{02}(0) = 1$
(1,0,0,0)	2-1	$\eta_{12}(2) = 1$
(0,1,0,0)	3-2	$\eta_{22}(3) = 1$
(1,1,0,0)	5-3	$\eta_{12}(2) = \eta_{22}(3) = 1$

1-1

Lista 3

$b_3^1 = 1 + (3 \mid \eta_{12}(2) = 1) + (2 \mid \eta_{22}(3) = 1)$

(0,0,0,0)	0-0	
(0,0,1,0)	1-1	(a)
(1,0,0,0)	2-1	
(0,1,0,0)	3-2	(b)
(1,0,1,0)	3-5	
(0,1,1,0)	4-5	(c)
(1,1,0,0)	5-3	
(1,1,1,0)	6-9	

a) $J_{jn} = 2, \quad \wedge_i(J_{jn}) = 1 \longrightarrow R(2,1)$

$J_{js} = 0, \quad \wedge_i(J_{js}) = 0 \longrightarrow \theta(0+1,\ 0+1)$

$j+1 = 3$

$j = 2$

$i = 1,2$

$m = 4$

$$d_4 = d_{34} + (d_{14} \mid \eta_{12}(J_{js}) = 1) - (d_{14} \mid \eta_{12}(J_{jn}) = 1)$$
$$+ (d_{24} \mid \eta_{12}(J_{js}) = 1) - (d_{24} \mid \eta_{22}(J_{jn}) = 1)$$

$$V_4 = V_{34} + (V_{14} \mid \eta_{12}(J_{js}) = 1) - (V_{14} \mid \eta_{12}(J_{jn}) = 1)$$
$$+ (V_{24} \mid \eta_{22}(J_{js}) = 1) - (V_{24} \mid \eta_{22}(J_{jn}) = 1)$$

$$d_4 = 5 + (1 \mid \eta_{12}(0) = 1) - (1 \mid \eta_{12}(2) = 1) + (4 \mid \eta_{22}(0) = 1) - (4 \mid \eta_{22}(2) = 1)$$

$$V_4 = 0$$

$$d_4 = 5 + 0 - 1 + 0 - 0 = 4; \quad d^3 = 0$$

Se elimina R si:

$$0 + 1 + 0 \geq 1$$

$$0 + 1 + 0 \leq 2 \qquad \text{si se elimina R.}$$

b) $J_{jn} = 3, \ \Lambda_j(J_{jn}) = 2 \ \longrightarrow \ R(3,2)$

$J_{js} = 2, \ \Lambda_j(J_{js}) = 1 \ \longrightarrow \ \mathcal{D}(2+1,\ 1+4)$

$$d_4 = 5 + (1 \mid \eta_{12}(2) = 1) - (1 \mid \eta_{12}(3) = 1) + (4 \mid \eta_{22}(2) = 1) - (4 \mid \eta_{22}(3) = 1)$$

$$= 5 + 1 - 0 + 0 - 4 = 2$$

$$d_4 = 2, \ d^3 = 0 \qquad V^3 = 0$$

Se elimina R si:

$$1 + 4 + 0 \geq 2$$

$$2 + 1 + 0 \leq 3 \qquad \text{si se elimina R}$$

c) $J_{jn} = 5, \ \Lambda_j(J_{jn}) = 3 \ \longrightarrow \ R(5,3)$

$J_{js} = 3, \ \Lambda_j(J_{js}) = 2 \ \longrightarrow \ \mathcal{D}(3+1,\ 2+3)$

$$d_4 = 5 + (1 \mid \eta_{12}(3) = 1) - (1 \mid \eta_{12}(5) = 1) + (4 \mid \eta_{22}(3) = 1) - (4 \mid \eta_{22}(5) = 1)$$

$$d_4 = 5 + 0 - 1 + 4 - 4 = 4$$

$$d_4 = 4, \ d^3 = 0, \ V^3 = 0$$

se elimina R si:

$$2 + 3 + 0 \geq 3$$

$$3 + 1 + 0 \leq 5 \qquad \text{si se elimina R.}$$

Por lo tanto:

Lista 3

(0,0,0,0)	0-0	$\eta_{03}(0) = 1$
(0,0,1,0)	1-1	$\eta_{33}(1) = 1$
(1,0,1,0)	3-5	$\eta_{13}(2) = \eta_{33}(1) = 1$
(0,1,1,0)	4-5	$\eta_{23}(3) = \eta_{33}(1) = 1$
(1,1,1,0)	6-9	$\eta_{13}(2) = \eta_{23}(3) = \quad {}_{33}(1) = 1$

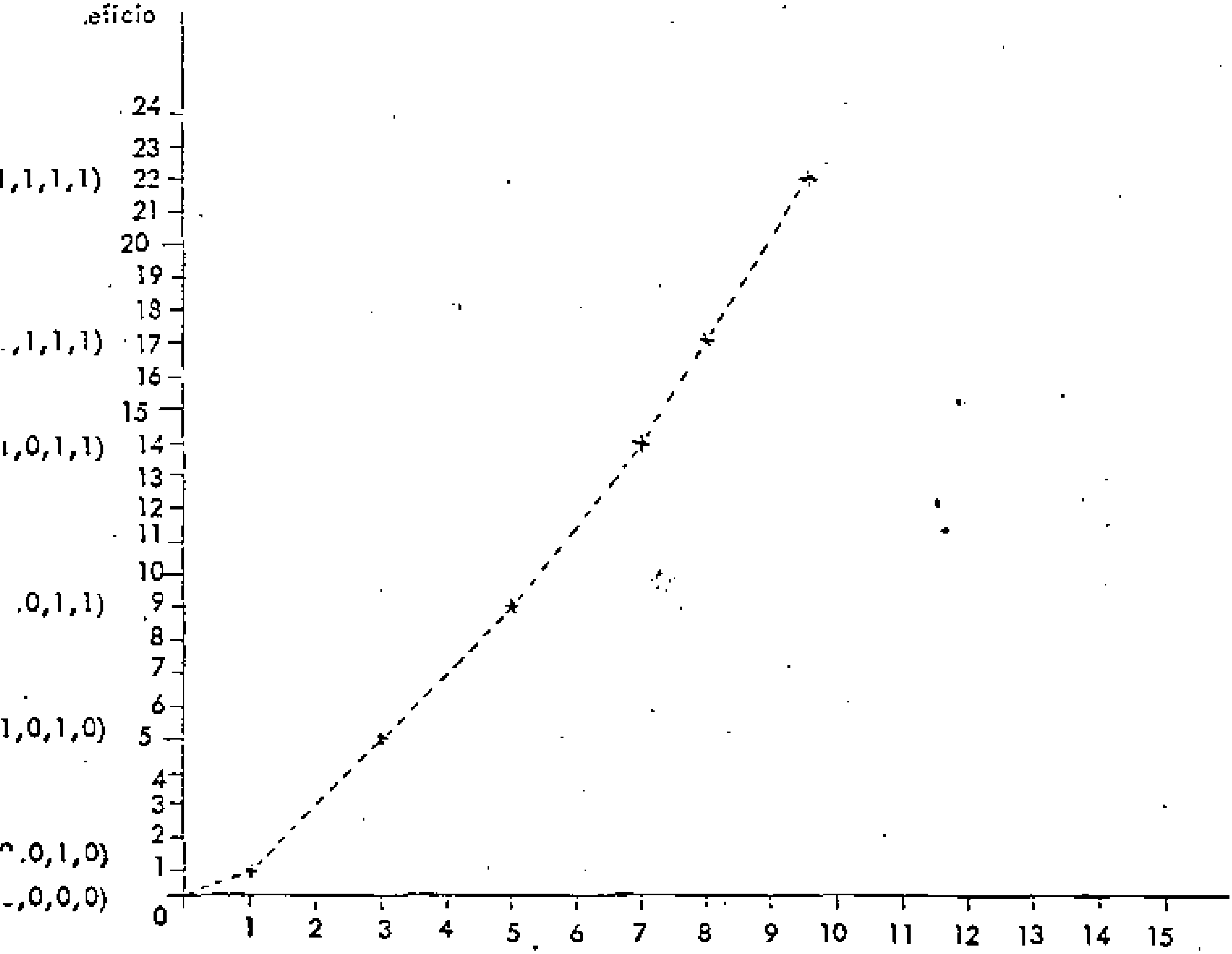
4-3

Lista 4

$$b_4^1 = 3 + (1 \mid \eta_{13}(2) = 1) + (4 \mid \eta_{23}(3) = 1) + (5 \mid \eta_{33}(1) = 1)$$

(0,0,0,0)	0-0
(0,0,1,0)	1-1
(1,0,1,0)	3-5
(0,0,1,1)	5-9
(1,0,1,1)	7-14
(0,1,1,1)	8-17
(1,1,1,1)	10-22

Obsérvese que no se analiza (3,5) contra (4,5) ya que ninguno de los dos puntos pertenece a la k-ésima lista.



Curva beneficio-costo

230. Exclusividad y precedencia en el método de Ullman

La exclusividad se toma en cuenta en el método de Ullman de la siguiente manera. Sean los proyectos $P_i(A_i, b_i)$ y $P_j(A_j, b_j)$ que son mutuamente exclusivos, y sea C la disponibilidad presupuestal tope. Se procederá de la siguiente manera antes de iniciar la formulación de las listas: $d_{ij} = 0$, $V_{ij} = M_1$.

La precedencia se toma en cuenta de la siguiente manera. Sea el proyecto

$P_j(A_j, b_j)$ cuya aceptación está condicionada a la aceptación de $P_i(A_i, b_i)$.

Entonces $A_j = M_2$ y $V_{ij} = A_j - M_2$

$$M_1 \gg M_2 \gg C.$$

231. <u>Ejemplo</u>

Sean los datos del problema del número 225 en donde la disponibilidad presupuestal tope es de $ 20,000.00

$A_1 = 50$	$b_1 = 1$	$d_{12} = 0$	$V_{12} = 100$
$A_2 = 50$	$b_2 = 2.5$	$d_{13} = 0.5$	$V_{13} = -47$
$A_3 = 2$	$b_3 = 0.5$	$d_{14} = 0.4$	$V_{14} = -47$
$A_4 = 3.5$	$b_4 = 1.5$	$d_{23} = 0.3$	$V_{23} = -46$
		$d_{24} = 0.3$	$V_{24} = -46$
		$d_{34} = 0$	$V_{34} = 100$

0–0

Lista 0

$(0,0,0,0) \mid 0\text{–}0 \quad \eta_{00}(0) = 1$

50–1

Lista 1

$(0,0,0,0) \mid 0\text{–}0 \quad \eta_{01}(0) = 1$

$(1,0,0,0) \mid 50\text{–}1 \quad \eta_{11}(50) = 1$

50–2.5

Lista 2

$A_2^1 = 50 + (100 \mid \eta_{11}(50) = 1)$

$b_2^1 = 2.5 + (0 \mid \eta_{11}(50) = 1)$

$$\begin{array}{l|l} (0,0,0,0) & 0\text{–}0 \\ (1,0,0,0) & \left.\begin{array}{l} 50\text{–}1 \\ 50\text{–}2.5 \end{array}\right\} (a) \\ (0,1,0,0) & \\ (1,1,0,0) & 150 - 3.5 \end{array}$$

a) $J_{jn} = 50$, $\wedge_j(J_{jn}) = 1 \rightarrow R(50,1)$

$J_{js} = 0$, $\wedge_j(J_{js}) = 0 \longrightarrow \delta(0 + 50,\ 0 + 2.5)$

$j + 1 = 2$ $\quad d_3 = d_{23} + (d_{13} \mid \eta_{11}(J_{js}) = 1) - (d_{13} \mid \eta_{11}(J_{jn}) = 1)$

$i = 1$ $\quad = 0.3 + (0.5 \mid \eta_{11}(0) = 1) - (0.5 \mid \eta_{11}(50) = 1)$

$i = 1$ $\quad = 0.3 + 0 - 0.5 = -0.2$

$m = 3,4$

$d_4 = d_{24} + (d_{14} \mid \eta_{11}(J_{js}) = 1) - (d_{14} \mid \eta_{11}(J_{jn}) = 1)$

$= 0.3 + (0.4 \mid \eta_{11}(0) = 1) - (0.4 \mid \eta_{11}(50) = 1)$

$= 0.3 + 0 - 0.4 = -0.1$

$d^2 = -0.2 - 0.1 = -0.3$

$V_3 = V_{23} + (V_{13} \mid \eta_{11}(J_{js}) = 1) - (V_{13} \mid \eta_{11}(50) = 1)$

$= -46 + 0 - (-47) = 1$

$V_4 = V_{24} + (V_{14} \mid \eta_{11}(J_{js}) = 1) - (V_{14} \mid \eta_{11}(50) = 1)$

$= -46 + 0 - (-47) = 1$

$V^2 = 1 + 1 = 2$

Se elimina R si y sólo si:

$0 + 2.5 - 0.3 \geq 1$

$0 + 50 + 2 \neq 50$ no se elimina R.

Lista 2

(0,0,0,0)	0-0	$\eta_{02}(0) = 1$
(1,0,0,0)	50-1	$\eta_{12}(50) = 1$
(0,1,0,0)	50-2.5	$\eta_{22}(50) = 1$
(1,1,0,0)	50-3.5	$\eta_{12}(50) = \eta_{22}(100) = 1$

2-0.5

Lista 3

$$A_3^1 = 2 + (-47 \mid \eta_{12}(50) = 1) + (-46 \mid \eta_{22}(\tfrac{50}{100}) = 1)$$

$$b_3^1 = 0.5 + (0.5 \mid \eta_{12}(50) = 1) + (0.5 \mid \eta_{22}(\tfrac{50}{100}) = 1)$$

(0,0,0,0)	0-0	$\eta_{03}(0) = 1$
(0,0,1,0)	2-0.5	$\eta_{33}(2) = 1$
(1,0,1,0)	5-2.5	$\eta_{13}(50) = \eta_{33}(-45) = 1$
(0,1,1,0)	6-3.3	$\eta_{23}(50) = \eta_{33}(-47) = 1$
(1,0,0,0)	50-1	$\eta_{13}(50) = 1$
(0,1,0,0)	50-2.5	$\eta_{23}(50) = 1$
(1,1,0,0)	150-3.5	$\eta_{13}(50) = \eta_{33}(100) = 1$

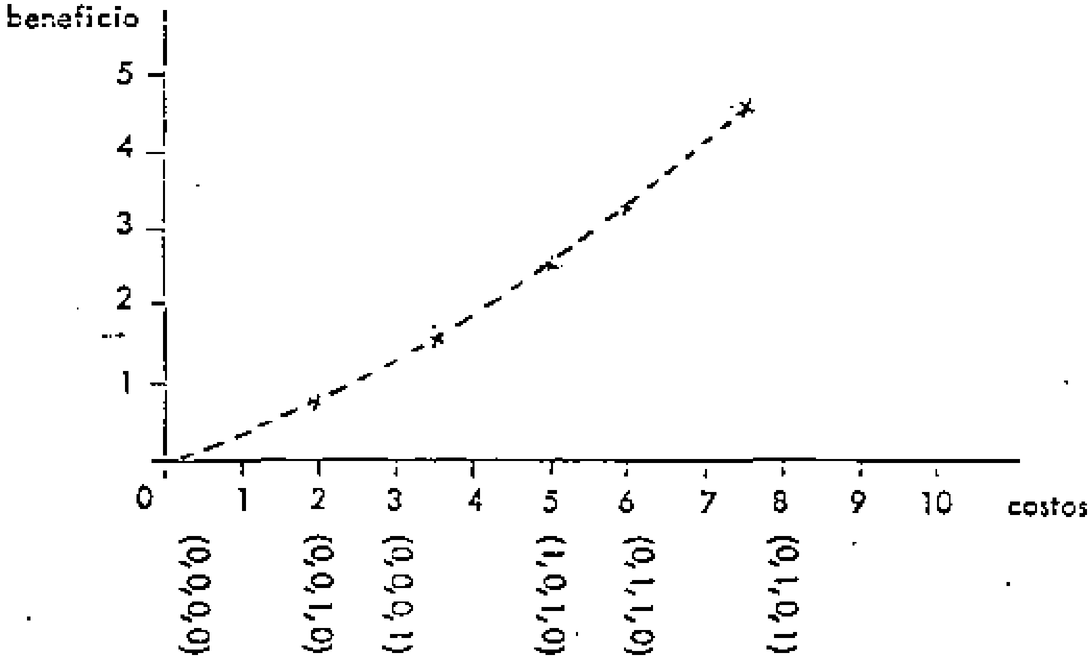
3.5 -1.5

Lista 4

$$A_4^1 = 3.5 + (-47 \mid \eta_{13}(50) = 1) + (-46 \mid \eta_{23}(\tfrac{50}{100}) = 1) + (100 \mid \eta_{33}(\begin{smallmatrix}2\\-45\\-49\end{smallmatrix}) = 1)$$

$$b_4^1 = 1.5 + (0.4 \mid \eta_{13}(50) = 1) + (0.3 \mid \eta_{23}(\tfrac{50}{100}) = 1) + (0 \mid \eta_{23}(\begin{smallmatrix}2\\-45\\-49\end{smallmatrix}) = 1)$$

(0,0,0,0)	0-0	
(0,0,1,0)	2-0.5	
(0,0,0,1)	3.5 - 1.5	
(1,0,1,0)	5 - 2.5	
(0,1,1,0)	6 - 3.3	
(0,1,0,1)	7.5 - 4.3	
(1,0,0,0)	50 - 1	puntos no factibles
(0,1,0,0)	50 - 2.5	
(1,0,1,1)	54.5 - 4.4	
(1,1,1,0)	59 - 4.8	
(1,1,0,1)	60.5 - 5.7	
(1,1,1,1)	69.5 - 7	
(0,0,1,1)	105.5 - 2	
(1,1,0,0)	150 - 3.5	



232. Proyectos interactuantes, indivisibles y de períodos múltiples

Las consideraciones son similares a las que se hicieron al tratar con los de un sólo período. La matriz de beneficios es la misma.

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & b_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Sin embargo, ahora se dispondrá de más de una restricción presupuestal, de hecho será una restricción por período en el horizonte de planeación.

233. Ejemplo

Sean los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 en donde P_1 y P_2 son mutuamente exclusivos, así como P_3 y P_4; P_1 y P_2 dependen de la aceptación de P_3 ó P_4. Se consideran tres períodos cuyas disponibilidades presupuestales son respectivamente $[15, 10, 10]$.

Por otra parte:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\max \; z = 3x_1^2 + x_1 x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + x_2x_4 + 4x_3^2 + x_4^2$$

s.a.,

$$\begin{array}{ll} R_1 & 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 \leq 15 \\ R_2 & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10 \\ R_3 & 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ R_4 & x_1 + x_2 \leq 1 \\ R_5 & x_3 + x_4 \leq 1 \\ R_6 & x_1 \leq x_3 + x_4 \\ R_7 & x_2 \leq x_3 + x_4 \\ & x_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array}$$

En este caso en que sólo se tienen cuatro variables la enumeración es el camino más simple.

$\bar{x}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	$3x_1^2$	x_1x_3	$2x_1x_4$	$2x_2^2$	$3x_2x_3$	x_2x_4	$4x_3^2$	x_4^2	z
0000	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0001	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
0010	✓	✓	✓	✓	✓	✓		x	x	x	x	x	x	x	x	x
0011	✓	✓	✓	✓	x	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
0100	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
0101	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
0110	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
0111	✓	✓	x	✓	x	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1000	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1001	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	3		2					1	6
1010	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	3	1					4		8 ←
1011	x	✓	x	✓	x	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1100	✓	✓	x	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1101	✓	✓	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1110	✓	x	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1111	x	x	x	x	x	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x

$z = \$\,8{,}000.00 \qquad x_1 = x_3 = 1$ seleccionar P_1 y P_3

234. Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos interactuantes, indivisibles y de períodos múltiples

Esta generalización implica simplemente el considerar a la variable de estado como vectorial, se obtiene así:

$$\begin{cases} \Lambda_0(\bar{\xi}, \bar{\eta}_0(\bar{\xi})) = 0 \\ \Lambda_{j+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_{j+1}(\bar{\xi})) = \max\limits_{x_j, \ldots, x_j} \left[\Lambda_j(\xi, \bar{\eta}_j(\bar{\xi}), b^1_{j+1} + \Lambda_j(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1}, \bar{\eta}_j(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1})) \right] \end{cases}$$

en donde:

$$b^1_{j+1} = b_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} (d_{i,j+1} \mid \eta_{ij}(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1}) = 1)$$

$$\bar{A}^1_{j+1} = \bar{A}_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} (\bar{V}_{i,j+1} i \; \eta_{ij}(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1}) = 1)$$

Si cualquiera de los elementos de $(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1})$ es negativo, $;(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1}, \bar{\eta}_j (\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1}))$ será igual a menos infinito. Obsérvese que ahora $\bar{A}_j$ y $\bar{V}_{ij}$ son vectores.

235. Ejemplo

Con los datos del número 233 estudiar la sensibilidad de la disponibilidad presupuestal. El tope superior será de $ 20,000.00 por período.

Se tiene:

$\bar{A}_1 = [50,50,50]$	$b_1 = 3$	$d_{12} = 0$	$\bar{V}_{12} = [100,100,100]$
$\bar{A}_2 = [50,50,50]$	$b_2 = 2$	$d_{13} = 1$	$\bar{V}_{13} = [-45,-47,-46]$
$\bar{A}_3 = [8, 3, 5]$	$b_3 = 4$	$d_{14} = 2$	$\bar{V}_{14} = [-45,-47,-46]$
$\bar{A}_4 = [5, 1, 3]$	$b_4 = 1$	$d_{23} = 3$	$\bar{V}_{23} = [-48,-44,-42]$
		$d_{24} = 1$	$\bar{V}_{24} = [-48,-44,-42]$
		$d_{34} = 0$	$\bar{V}_{34} = [100,100,100]$

(0,0,0) -

Lista 0

(0,0,0,0) | (0,0,0) - 0 $\eta_{00}(0,0,0) = 1$

(50,50,50) - 3

Lista 1

(0,0,0,0) | (0,0,0) - 0 $\eta_{01}(0,0,0) = 1$

(1,0,0,0) | (50,50,50) - 3 $\eta_{11}(50,50,50) = 1$

$(50,50,50) - 2$

Lista 2

$\bar{A}^{1}_{2} = (50,50,50) + [(100,100,100) \mid \varphi_{11}(50,50,50) = 1]$

$\bar{B}^{1}_{2} = 2 + (0 \mid \varphi_{11}(50,50,50) = 1)$

$$\left.\begin{array}{l|l} (0,0,0,0) & (0,0,0) - 0 \\ (0,1,0,0) & (50,50,50) - 2 \\ (1,0,0,0) & (50,50,50) - 3 \\ (1,1,0,0) & (150,150,150) - 5 \end{array}\right.$$

(a) [applies to the rows $(50,50,50) - 2$ and $(50,50,50) - 3$]

a) $\bar{J}_{jn} = (50,50,50) \quad \wedge_i(\bar{J}_{jn}) = 3 \qquad R \quad (50,50,50),\ 3$

$\bar{J}_{js} = (0,0,0) \quad \wedge_i(\bar{J}_{js}) = 0 \qquad \& \ (0+50, 0+50, 0+50),\ 0+2$

$j+1 = 2 \qquad d_3 = d_{23} + [d_{13} \mid \varphi_{11}(0,0,0) = 1] - [d_{13} \mid \varphi_{11}(50,50,50) = 1]$

$i = 1 \qquad d_3 = 3 + [1 \mid \varphi_{11}(0,0,0) = 1] - [1 \mid \varphi_{11}(50,50,50) = 1]$

$i = 1 \qquad d_3 = 3 + 0 - 1 = 2$

$m = 3,4$

$d_4 = d_{24} + [d_{14} \mid \varphi_{11}(0,0,0) = 1] - [d_{14} \mid \varphi_{11}(50,50,50) = 1]$

$d_4 = 1 + [2 \mid \varphi_{11}(0,0,0) = 1] - [2 \mid \varphi_{11}(50,50,50) = 1]$

$d_4 = 1 + 0 - 2 = -1$

$d^2 = 2 + 0 = 2$

$\bar{V}_3 = \bar{V}_{23} + [\bar{V}_{13} \mid \varphi_{11}(0,0,0) = 1] - [\bar{V}_{13} \mid \varphi_{11}(50,50,50) = 1]$

$\bar{V}_3 = (-48,-44,-42) + (0,0,0) - (-45,-47,-46)$

$\bar{V}_3 = (-3,3,4)$

$\bar{V}_4 = \bar{V}_{24} + [\bar{V}_{14} \mid \varphi_{11}(0,0,0) = 1] - [\bar{V}_{14} \mid \varphi_{11}(50,50,50) = 1]$

$\bar{V}_4 = (-48,-44,-42) + (0,0,0) - (-45,-47,-46)$

$$\overline{V}_4 = (-3,3,4)$$

$$\overline{V}^2 = (-6,0,0)$$

Se elimina θ si y sólo si:

$$3 \geq 0 + 2 + 2$$

$$(50,50,50) \leq (0,0,0) + (50,50,50) + (-6,0,0)$$

$$3 \not\geq 4$$

$(50,50,50) \not\leq (44,50,50)$ no se elimina θ

Lista 2

$$\begin{array}{l|ll}
(0,0,0,0) & (0,0,0) - 0 & \eta_{02}(0,0,0) = 1 \\
(0,1,0,0) & (50,50,50) - 2 & \eta_{22}(50,50,50) = 1 \\
(1,0,0,0) & (50,50,50) - 3 & \eta_{12}(50,50,50) = 1 \\
(1,1,0,0) & (150,150,150) - 5 & \eta_{12}(50,50,50) = \eta_{22}(100,100,100) = 1
\end{array}$$

$(8,7,5) - 4$

Lista 3

$$\overline{A}_3^1 = (8,3,5) + [(-45,-47,-46) \mid \eta_{12}(50,50,50) = 1] + [(-48,-44,-42) \mid \eta_{22}\left(\begin{matrix}50,50,50\\100,100,100\end{matrix}\right) = 1]$$

$$b_3^1 = 4 + (1 \mid \eta_{12}(50,50,50) = 1) + (3 \mid \eta_{22}\left(\begin{matrix}50,50,50\\100,100,100\end{matrix}\right) = 1$$

$$\begin{array}{l|ll}
(0,0,0,0) & (0,0,0) - 0 & \eta_{03}(0,0,0) = 1 \\
(0,1,0,0) & (50,50,50) - 2 & \eta_{23}(50,50,50) = 1 \\
(1,0,0,0) & (50,50,50) - 3 & \eta_{13}(50,50,50) = 1 \\
(0,0,1,0) & (8,3,5) - 4 & \eta_{33}(8,3,5) = 1 \\
(1,1,0,0) & (150,150,150) - 5 & \eta_{13}(50,50,50) = \eta_{23}(100,100,100) = 1 \\
(1,0,1,0) & (13,6,9) - 8 & \eta_{13}(50,50,50) = \eta_{33}(-37,-44,-41) = 1 \\
(0,1,1,0) & (10,9,13) - 9 & \eta_{23}(50,50,50) = \eta_{33}(-40,-41,-37) = 1 \\
(1,1,1,0) & (65,62,67) - 13 & \eta_{13}(50,50,50) = \eta_{23}(100,100,100) = \\
 & & = \eta_{33}(-85,-83,-83)
\end{array}$$

(5,1,3) - 1

Liste 4

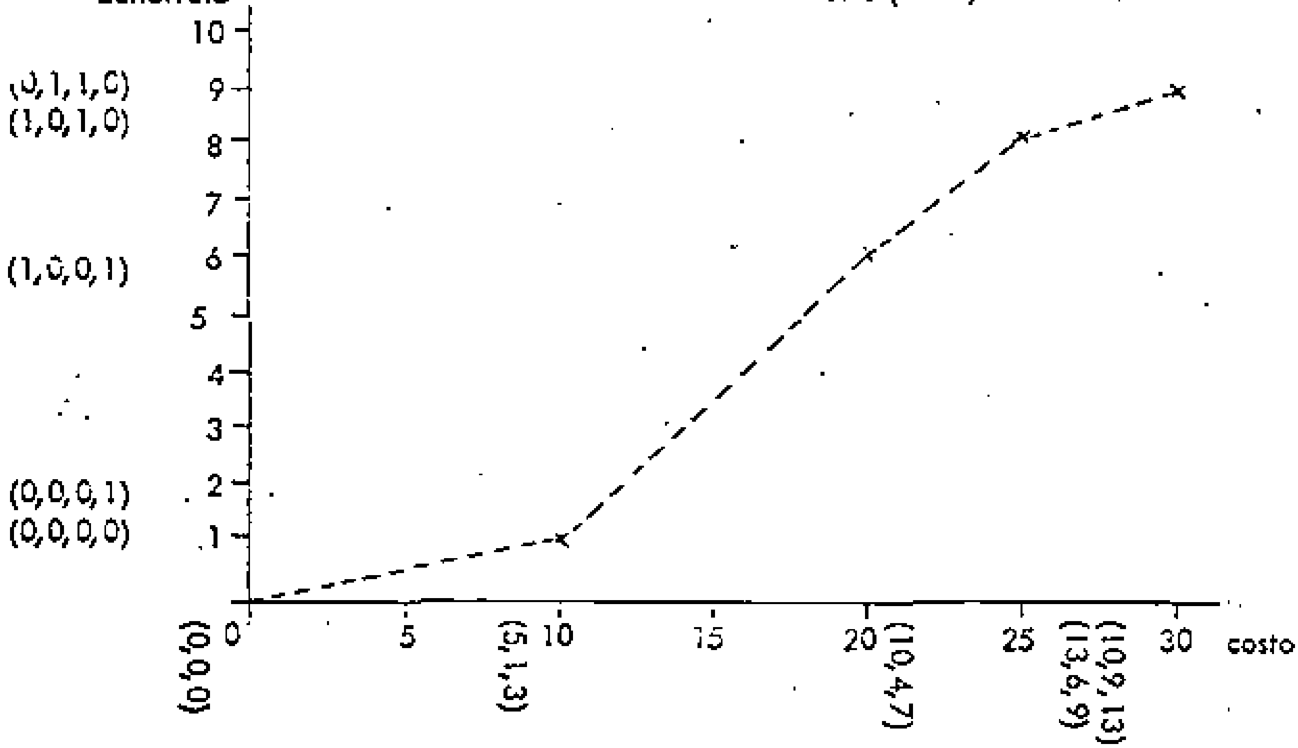
$$\overline{A}^1_4 = (5,1,3) + \left[(-45,-47,-46) \mid \eta_{13}(50,50,50) = 1 + (-48,-44,-42) \mid \eta_{23}\begin{pmatrix}50,50,50\\100,100,100\end{pmatrix} = 1\right]$$

$$+\left[(100,100,100) \mid \eta_{33}\begin{pmatrix}8,3,5\\-37,-44,-41\\-40,-41,-37\\-85,-88,-83\end{pmatrix} = 1\right]$$

$$b^1_4 = 1 + (2 \mid \eta_{13}(50,50,50) = 1) + (3 \mid \eta_{23}\begin{pmatrix}50,50,50\\100,100,100\end{pmatrix} = 1) + \left(0 \mid \eta_{33}\begin{pmatrix}8,3,5\\-37,-44,-41\\-40,-41,-37\\-85,-88,-83\end{pmatrix} = 1\right)$$

(0,0,0,0)	(0,0,0) - 0	
(0,0,0,1)	(5,1,3) - 1	
(0,1,0,1)	(7,7,11) - 6	
(1,0,0,1)	(10,4,7) - 6	
(1,0,1,0)	(13,6,9) - 8	
(0,1,1,0)	(10,9,13) - 9	
(0,1,0,0)	(50,50,50) - 2	puntos no factibles
(1,0,0,0)	(50,50,50) - 3	puntos no factibles
(1,1,0,0)	(150,150,150) -5	
(1,1,0,1)	(62,60,65) - 11	
(1,0,1,1)	(60,54,57) - 11	
(0,1,1,1)	(57,57,61) - 13	
(1,1,1,0)	(65,62,67) - 13	
(1,1,1,1)	(77,72,82) - 19	

Curva beneficio-costo (total).



236. <u>Proyectos indivisibles, interactuantes, con alternativas de inversión mutuamente exclusivas por proyecto, y de un sólo período</u>

En este caso basta completar el modelo del número 209 imponiendo las restricciones correspondientes a exclusividad.

Resulta así:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} b_{j.mj}\, x_{j.mj}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j.mj}\, x_{j.mj} \leq C$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{imj} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$x_j = 0 \text{ ó } 1$$

Si en el problema aparecen precedencias se agregarán las restricciones correspondientes (ver número [illegible]) y si existen otras interacciones aparecerán en la función objetivo los términos rectangulares correspondientes.

237. <u>Ejemplo</u>

Usando los datos del número 210 resolver el problema suponiendo exclusividad entre las opciones de un mismo proyecto así como los siguientes beneficios de segundo orden:

$$d_{1.2,\ 2.3} = 5 \qquad d_{2.2,\ 3.1} = 4, \quad d_{3.2,\ 4.2} = 6$$

Se tiene:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 8x_8 + 2x_9 + 5x_{10} + 5x_2x_6 + 4x_5x_7 + 6x_8x_{10}$$

s.a.

$$2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 + 8x_6 + 10x_7 + 12x_8 + 3x_9 + 10x_{10} \quad 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \le 1$$

$$x_7 + x_8 \le 1$$

$$x_9 + x_{10} \le 1$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

haciendo $x_1 = 1 - x_1$ y cambiando de signo a la función objetivo para minimizarla:

$$\min z = -(1 - x_1) - 2(1-x_2) - 3(1-x_3) - (1-x_4) - 3(1-x_5) - 2(1-x_6) - 4(1-x_7) - 8(1-x_8) - 2(1-x_9) - 5(1-x_{10}) - 5(1-x_2)(1-x_6) - 4(1-x_5)(1-x_7) - 6(1-x_8)(1-x_{10})$$

s.a.

$$2(1-x_1) + 5(1-x_2) + 10(1-x_3) + 5(1-x_4) + 10(1-x_5) + 8(1-x_6) + 10(1-x_7) + 12(1-x_8) + 3(1-x_9) + 10(1-x_{10}) \le 20$$

$$(1-x_1)+(1-x_2)+(1-x_3) \leq 1$$

$$(1-x_4)+(1-x_5)+(1-x_6) \leq 1$$

$$(1-x_7)+(1-x_8) \leq 1$$

$$(1-x_9)+(1-x_{10}) \leq 1$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 8x_8 + 2x_9 + 5x_{10} - x_2x_6 +$$

$$+ x_2 + x_6 - 4x_5x_7 + 4x_5 + 4x_7 - 6x_8x_{10} + 6x_8 + 6x_{10} - 46$$

s.c.

$$-2x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 5x_4 - 10x_5 - 5x_6 - 10x_7 - 12x_8 - 3x_9 - 10x_{10} + 75 \quad 20$$

$$-x_4 - x_5 - x_6 + 3 \leq 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 + 3 \leq 1$$

$$-x_7 - x_8 + 2 \leq 1$$

$$-x_9 - x_{10} + 2 \leq 1$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

$$\min z = \begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$-46 = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 + 7x_5^2 +$$

$$+ 3x_6^2 - x_2x_6 + 8x_7^2 - 4x_5x_7 + 14x_8^2 +$$

$$+ 2x_9^2 + 11x_{10}^2 - 6x_8x_{10} - 46 - 42$$

s.c.

$$(75) \qquad 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 + 3x_6 + 10x_7 + 12x_8 + 3x_9 + 10x_{10} \qquad 55$$

$$(3) \qquad x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$

$$(3) \qquad x_4 + x_5 + x_6 \geq 2$$

$$(2) \qquad x_7 + x_8 \geq 1$$

$$(2) \qquad x_9 + x_{10} \geq 1$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

El resultado es:

$$x_2 = x_8 = x_9 = 1$$

$$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_{10} = 0$$

$$z = 12$$

lo que implica seleccionar $P_{1.2}$, $P_{3.2}$ y $P_{4.1}$ (1-2,0,3-2,4-1).

238. <u>Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos interactuantes, con opciones mutuamente exclusivas, indivisibles y de un sólo período</u> (ejemplo).

Usando los datos anteriores el planteamiento del problema es como sigue:

a) *Matriz de beneficios*

$$\bar{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1\text{-}1 & 1\text{-}2 & 1\text{-}3 & 2\text{-}1 & 2\text{-}2 & 2\text{-}3 & 3\text{-}1 & 3\text{-}2 & 4\text{-}1 & 4\text{-}2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\text{-}1 \\ 1\text{-}2 \\ 1\text{-}3 \\ 2\text{-}1 \\ 2\text{-}2 \\ 2\text{-}3 \\ 3\text{-}1 \\ 3\text{-}2 \\ 4\text{-}1 \\ 4\text{-}2 \end{array}$$

b) Matriz de inversiones

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1\text{-}1 & 1\text{-}2 & 1\text{-}3 & 2\text{-}1 & 2\text{-}2 & 2\text{-}3 & 3\text{-}1 & 3\text{-}2 & 4\text{-}1 & 4\text{-}2 \end{array} \\
\overline{A} = & \left[\begin{array}{cccccccccc}
2 & 100 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 100 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1\text{-}1 \\ 1\text{-}2 \\ 1\text{-}3 \\ 2\text{-}1 \\ 2\text{-}2 \\ 2\text{-}3 \\ 3\text{-}1 \\ 3\text{-}2 \\ 4\text{-}1 \\ 4\text{-}2 \end{array}
\end{array}
$$

239. Ejercicio

Obtener la curva beneficio-costo para el planteamiento anterior, considerando una disponibilidad presupuestal tope de 40 (en miles de pesos).

240. Proyectos interactuantes, con opciones mutuamente exclusivas, indivisibles y de períodos múltiples

Este caso es una generalización del tratado en el número 236. El modelo resulta:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} b_{i,m_i} \, x_{i,m_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,m_i,t} \, x_{i,m_i} \leq C_t \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,m_i} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

241. Ejemplo

Usando los datos del número 214 y adicionándole beneficios de segundo orden se tiene:

$$
\bar{B} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1\text{-}1 & 1\text{-}2 & 2\text{-}1 & 2\text{-}2 & 3\text{-}1 & 3\text{-}2 & 4\text{-}1 & 4\text{-}2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1\text{-}1 \\ 1\text{-}2 \\ 2\text{-}1 \\ 2\text{-}2 \\ 3\text{-}1 \\ 3\text{-}2 \\ 4\text{-}1 \\ 4\text{-}2 \end{array}
$$

$$
\max z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 6x_8 + 5x_1x_4 + x_1x_8 + x_3x_8 + x_4x_5 + 2x_4x_7 + 4x_6x_7
$$

s.a.

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 10x_7 + 5x_8 &\leq 10 \\
3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 12x_8 &\leq 15 \\
2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 8x_6 + 8x_7 + 3x_8 &\leq 20 \\
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_3 + x_4 &\leq 1 \\
x_5 + x_6 &\leq 1 \\
x_7 + x_8 &\leq 1
\end{aligned}
$$

$$x_j = 0 \text{ ó } 1$$

haciendo $x_j = 1 - x_j$

$$\min z = 3(1-x_1)-4(1-x_2)-5(1-x_3)-3(1-x_4)-4(1-x_5)-6(1-x_6)-7(1-x_7)-6(1-x_8)-$$

$$-5(1-x_1)(1-x_4)-(1-x_1)(1-x_8)-(1-x_3)(1-x_8)-(1-x_4)(1-x_5)-2(1-x_4)(1-x_7)-$$

$$-4(1-x_6)(1-x_7)$$

s.a.

$$(47)\quad 4(1-x_1)+5(1-x_2)+8(1-x_3)+4(1-x_4)+5(1-x_5)+6(1-x_6)+10(1-x_7)+5(1-x_8) \leq 10$$

$$(44)\quad 3(1-x_1)+7(1-x_2)+2(1-x_3)+4(1-x_4)+10(1-x_5)+3(1-x_6)+3(1-x_7)+12(1-x_8) \leq 15$$

$$2(1-x_1)+5(1-x_2)+6(1-x_3)+6(1-x_4)+2(1-x_5)+8(1-x_6)+8(1-x_7)+3(1-x_8) \leq 20$$

$$(1-x_1)+(1-x_2) \leq 1$$

$$(1-x_3)+(1-x_4) \leq 1$$

$$(1-x_5)+(1-x_6) \leq 1$$

$$(1-x_7)+(1-x_8) \leq 1$$

$$\min z = 3x_1+4x_2+5x_3+3x_4+4x_5+6x_6+7x_7+6x_8+5x_1+5x_4-5x_1x_4+x_1+x_8-$$

$$-x_1x_8+x_3+x_8-x_3x_8+x_4+x_5-x_4x_5+2x_4+2x_7-2x_4x_7+4x_6+4x_7-$$

$$-4x_6x_7$$

s.a.

$$4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+5x_5+6x_6+10x_7+5x_8 \geq 37$$

$$3x_1+7x_2+2x_3+4x_4+10x_5+3x_6+3x_7+12x_8 \geq 29$$

$$2x_1+5x_2+6x_3+6x_4+2x_5+8x_6+8x_7+3x_8 \geq 20$$

$$x_1+x_2 \geq 1$$

$$x_3+x_4 \geq 1$$

$$x_5+x_6 \geq 1$$

$$x_7+x_8 \geq 1$$

$$x_i = 0 \text{ ó } 1$$

$$\min\ z = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array} -52$$

s.a.

$$(47)\quad 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 10x_7 + 5x_8 \geq 37 \qquad (1)$$

$$(44)\quad 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 12x_8 \geq 29 \qquad (2)$$

$$(40)\quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 8x_6 + 8x_7 + 3x_8 \geq 20 \qquad (3)$$

$$(2)\quad x_1 + x_2 \geq 1 \qquad (4)$$

$$(2)\quad x_3 + x_4 \geq 1 \qquad (5)$$

$$(2)\quad x_5 + x_6 \geq 1 \qquad (6)$$

$$(2)\quad x_7 + x_8 \geq 1 \qquad (7)$$

La respuesta será $x_1 = x_4 = 1,\ x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0,\ z = 11$

Se deberán seleccionar las alternativas $P_{1.1}$ y $P_{2.2}$

242. <u>Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos interactivos con opciones mutuamente exclusivas, indivisibles y de periodos múltiples</u> (ejemplo)

Considerando los mismos datos que en el ejemplo anterior y la disponibilidad presupuestal tope de $[20, 30, 40]$ se tiene:

(0,0,0) - 0

Lista 0.

(0,0,0,0)	(0,0,0) - 0

(4,3,2) - 3

Lista 1.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) - 0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) - 3

(5,7,5) - 4

Lista 1.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) - 4

(8,2,6) - 5

Lista 2.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) -4
(0,2-1,0,0)	(8,2,6) -5
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(1-2,2-1,0,0)	(13,9,11) -9

(4,4,6) - 3

Lista 2.2

$$b^1_{2.2} = 3 + (5|\eta_{11-21}(4,3,2) = 1)$$

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(0,2-2,0,0)	(4,4,6) -3
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) -4
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(1-1,2-2,0,0)	(8,7,8) -11
(1-2,2-2,0,0)	(9,11,11) -7
(1-2,2-1,0,0)	(13,9,11) -9

(5,10,2) - 4

Lista 3.1

$$b^1_{31} = 4 + (3|\eta_{12-22}(5,7,5) = 1) + (1|\eta_{22-22}(4,4,6) = 1)$$

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(0,2-2,0,0)	(4,4,6) -3
(0,0,3-1,0)	(5,10,2) -4
(1-2,0,0,0)	(6,7,5) -4
(1-2,2-2,0,0)	(9,11,11) -7
(1-1,0,3-1,0)	(9,13,4) -7
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(0,2-2,3-1,0)	(9,14,8) -8
(1-2,2-1,0,0)	(13,9,11) -9
(1-2,0,3-1,0)	(10,17,7) -11
(1-1,2-1,3-1,0)	(17,15,10) -12
(1-2,2-2,3-1,0)	(14,21,13) -15
(1-1,2-2,3-1,0)	(13,17,10) -16
(1-2,2-1,3-1,0)	(18,19,13) -16

(6,3,8) - 6

Lista 3.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(0,2-2,0,0)	(4,4,6) -3
(0,0,3-1,0)	(5,10,2) -4
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) -4
(0,0,3-2,0)	(6,3,8) -6
(1-2,2-2,0,0)	(9,11,11) -7
(1-1,0,3-1,0)	(9,13,4) -7
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(0,2-2,3-1,0)	(9,14,8) -8
(1-1,0,3-2,0)	(10,6,10) -9
(0,2-2,3-2,0)	(10,7,14) -9
(1-2,2-1,0,0)	(13,9,11) -9
(1-2,0,3-2,0)	(11,10,13) -10
(1-1,2-2,0,0)	(8,7,8) -11
(1-2,0,3-1,0)	(10,17,7) -11
(1-2,2-2,3-2,0)	(15,14,19) -13
(1-1,2-1,3-2,0)	(18,8,16) -14
(1-2,2-2,3-1,0)	(14,21,13) -15
(1-2,2-1,3-2,0)	(19,12,19) -15
(1-1,2-2,3-1,0)	(13,17,10) -16
(1-2,2-1,3-1,0)	(18,19,13) -16
(1-1,2-2,3-2,0)	(14,10,16) -17

(10,3,8) -7

Lista 4.1

$$b^1_{41} = 7 + (4 | \eta_{32-32} = 1) + (2 | \eta_{22-32})$$

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(0,2-2,0,0)	(4,4,6) -3
(0,0,3-1,0)	(5,10,2) -4
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) -4
(0,0,3-2,0)	(6,3,8) -6
(1-2,2-2,0,0)	(9,11,11) -7
(0,0,0,4-1)	(10,3,8) -7
(1-1,0,3-1,0)	(9,13,4) -7
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(0,2-2,3-1,0)	(9,14,8) -8
(1-1,0,3-2,0)	(10,6,10) -9
(0,2-2,3-2,0)	(10,7,14) -9
(1-2,2-1,0,0)	(13,9,11) -9
(1-2,0,3-2,0)	(11,10,13) -10
(1-1,0,0,4-1)	(14,6,10) -10
(0,2-2,0,3-1)	(14,7,14) -12
(1-1,2-2,0,0)	(8,7,8) -11
(1-2,0,3-1,0)	(10,17,7) -11
(0,0,3-1,4-1)	(15,13,10) -11
(1-2,0,0,4-1)	(15,10,13) -11
(1-1,2-1,3-1,0)	(17,15,10) -12
(1-2,2-2,3-2,0)	(15,14,19) -13
(1-2,2-2,0,4-1)	(19,14,19) -16
(1-1,0,3-1,4-1)	(19,16,12) -14
(1-1,2-1,3-2,0)	(18,8,16) -14
(0,2-2,3-1,4-1)	(19,17,16) -17
(1-2,2-2,3-1,0)	(14,21,13) -15
(1-2,2-1,3-2,0)	(19,12,19) -15
(1-1,2-2,3-1,0)	(13,17,10) -18
(1-2,2-1,3-1,0)	(18,19,13) -16
(0,0,3-2,4-1)	(16,6,16) -17
(1-1,2-2,3-2,0)	(14,10,16) -17
(1-1,2-2,0,4-1)	(18,10,16) -20
(1-2,0,3-1,4-1)	(20,20,15) -18
(1-1,0,3-2,4-1)	(20,9,18) -20
(0,2-2,3-2,4-1)	(20,10,22) -22

(5,12,3) -6

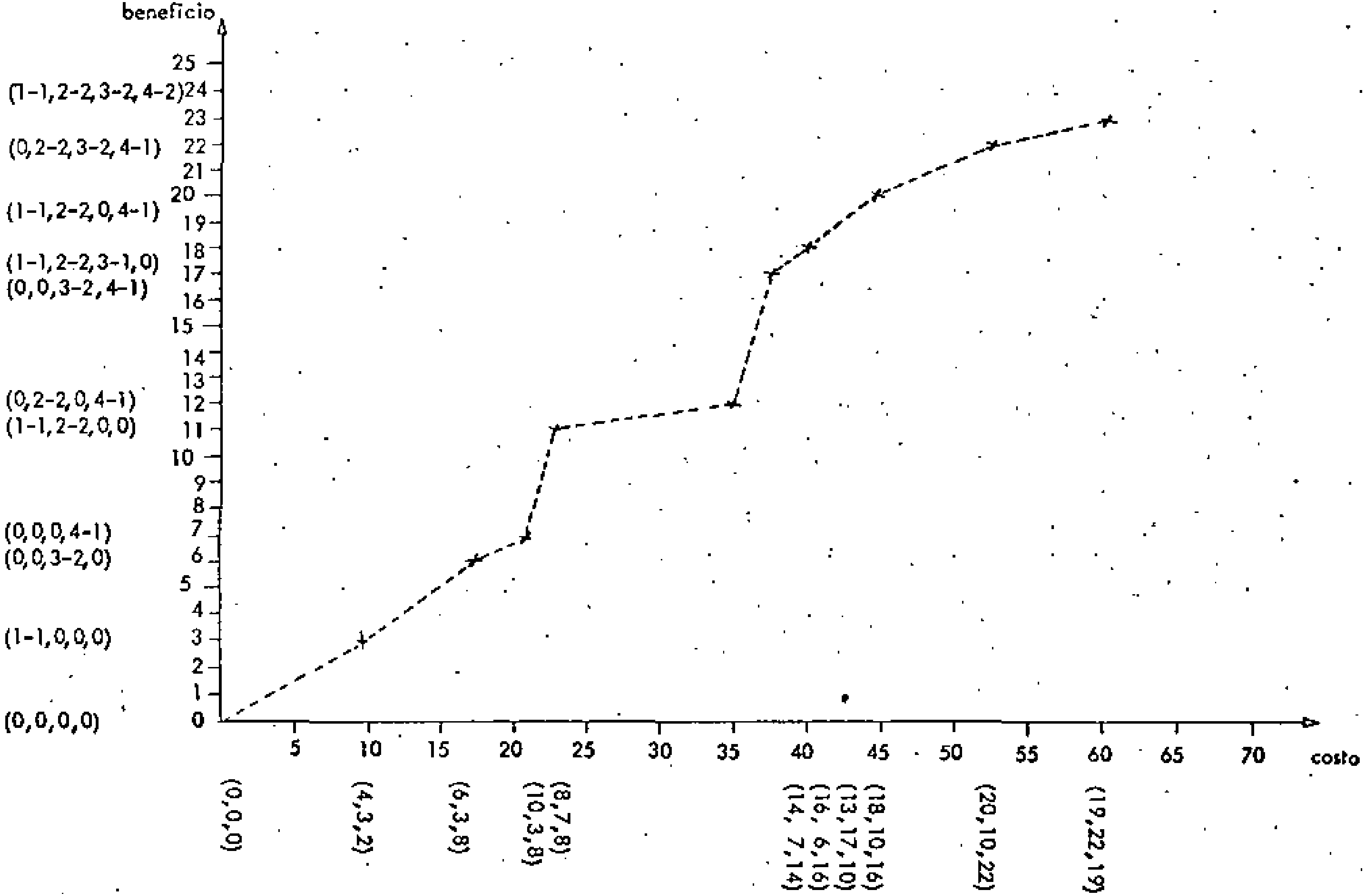
Lista 4.2

$$b^1_{42} = 6 + (1 | \eta_{11}) + (1 | \eta_{21})$$

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1-1,0,0,0)	(4,3,2) -3
(0,0,3-1,0)	(5,10,12) -4
(1-2,0,0,0)	(5,7,5) -4
(0,0,3-2,0)	(6,3,8) -6
(0,0,0,4-2)	(5,12,3) -6
(0,0,0,4-1)	(10,3,8) -7

(1-1,0,3-1,0)	(9,13,4) -7
(1-1,2-1,0,0)	(12,5,8) -8
(1-1,0,3-2,0)	(10,6,10) -9
(1-1,0,0,4-1)	(14,6,10) -10
(1-1,0,0,4-2)	(9,15,5) -10
(1-1,2-2,0,0)	(8,7,8) -11
(1-2,0,3-1,0)	(10,17,7) -11
(0,0,3-2,4-2)	(11,15,11) -12
(0,2-2,0,4-1)	(14,7,14) -12
(1-1,2-1,3-1,0)	(17,15,10) -12
(1-2,2-2,3-2,0)	(15,14,19) -13
(1-1,0,3-1,4-2)	(14,25,7) -14
(1-1,0,3-1,4-1)	(19,16,12) -14
(0,0,3-2,4-1)	(16,6,16) -17
(1-1,2-2,3-2,0)	(14,10,16) -17
(1-1,2-2,0,4-1)	(18,10,16) -20
(1-1,0,3-2,4-1)	(20,9,18) -20
(0,2-2,3-2,4-1)	(20,10,22) -22
(1-1,2-2,3-2,4-2)	(19,22,19) -24
(1-1,2-2,3-1,4-2)	(18,29,13) -25

Curva beneficio - costo (total).



243. Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos interactivos con opciones mutuamente exclusivas (por proyecto) divisibles y de períodos múltiples. (ejemplo).

Se consideran cuatro proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 cada uno con dos opciones de inversión (datos del número 219) y las interacciones definidas.

$P_{1.1} = (5,8,4) - [3,4,2]$

$P_{1.2} = (10,3,6) - [5,2,3]$ $\quad d_{1.1-3.1} = [2,3,1]$

$P_{2.1} = (6,5,8) - [4,3,6]$ $\quad d_{1.2-3.1} = [3,1,1]$

$P_{2.2} = (6,10,10) - [5,6,7]$ $\quad d_{2.1-4.1} = [1,2,2]$

$P_{3.1} = (8,8,5) - [5,4,3]$ $\quad d_{2.2-4.2} = [0,1,3]$

$P_{3.2} = (10,12,8) - [6,7,5]$ $\quad d_{3.1-4.1} = [2,0,2]$

$P_{4.1} = (8,6,10) - [4,3,6]$ $\quad d_{3.2-4.2} = [1,2,0]$

$P_{4.2} = (9,4,8) - [5,2,6]$

(0,0,0) - [0,0,0]

Lista 0

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]

(5,8,4) - [3,4,2]

Lista 1.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]

(10,3,6) - [5,2,3]

Lista 1.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]

(6,5,8) - [4,3,6]

Lista 2.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) - [4,3,6]

Lista 2.1 (continuación)

(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,14) - [7,7,8]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) - [9,5,9]

(6,10,10) - [5,6,7]

Lista 2.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) - [4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10) - [5,6,7]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) - [8,10,9]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,14) - [7,7,8]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) - [10,8,10]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) - [9,5,9]

(8,8,5) - [5,4,3]

Lista 3.1

$$b_{3.1} = [5,4,3] + \{[2,3,1]\ l_{\eta_{11}}\} + \{[3,1,1]\ l_{\eta_{12}}\}$$

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) - [4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10) - [5,6,7]
(0,0,3-1,0)	(8,8,5) - [5,4,3]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) - [8,10,9]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,14) - [7,7,8]
(1-1,0,3-1,0)	(13,16,9) - [10,11,6]
(0,1-2,3-1,0)	(14,13,13) - [9,7,9]
(0,2-2,3-1,0)	(14,18,15) - [10,10,10]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) - [10,8,10]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) - [9,5,9]
(1-2,0,3-1,0)	(18,11,11) - [13,7,7]
(1-1,2-2,3-1,0)	(19,26,19) - [15,17,13]
(1-1,2-1,3-1,0)	(19,21,19) - [14,14,12]
(1-2,2-2,3-1,0)	(24,21,21) - [18,13,14]
(1-2,2-1,3-1,0)	(24,16,19) - [17,10,13]

(10,12,8) - [6,7,5]

Lista 3.2.

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) - [4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10) - [5,6,7]
(0,0,3-1,0)	(8,8,5) - [5,4,3]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]
(0,0,3-2,0)	(10,12,8) - [6,7,5]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) - [8,10,9]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,14) - [7,7,8]
(1-1,0,3-1,0)	(13,16,9) - [10,11,6]
(0,2-1,3-1,0)	(14,13,13) - [9,7,9]
(0,2-2,3-1,0)	(14,18,15) - [10,10,10]
(1-1,0,3-2,0)	(15,20,12) - [9,11,7]
(0,2-1,3-2,0)	(16,17,16) - [10,10,11]
(0,2-2,3-2,0)	(16,22,18) - [11,13,12]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) - [10,8,10]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) - [9,5,9]
(1-2,0,3-1,0)	(18,11,11) - [13,7,7]
(1-1,2-2,3-1,0)	(19,26,19) - [15,17,13]
(1-1,2-1,3-1,0)	(19,21,19) - [14,14,12]
(1-2,0,3-2,0)	(20,15,14) - [11,9,8]
(1-1,2-2,3-2,0)	(21,30,22) - [14,17,14]
(1-1,2-1,3-2,0)	(21,25,22) - [13,14,13]
(1-2,2-2,3-1,0)	(24,21,21) - [18,13,14]
(1-2,2-1,3-1,0)	(24,16,19) - [17,10,13]
(1-2,2-2,3-2,0)	(26,25,24) - [16,15,15]
(1-2,2-1,3-2,0)	(26,20,22) - [15,12,14]

(8,6,10) - [4,3,6]

Lista 4.1

$$b_{4.1} = [4,3,6] + \{[1,2,2]\ l_{\eta_{21}}\} + \{[2,0,2]\ l_{\eta_{31}}\}$$

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) - [4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10) - [5,6,7]
(0,0,3-1,0)	(8,8,5) - [5,4,3]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]
(0,0,3-2,0)	(10,12,8) - [6,7,5]

Lista 4.1 (continuación)

(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) - [8,10,9]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,14) - [7,7,8]
(1-1,0,0,4-1)	(13,14,14) - [7,7,10]
(1-1,0,3-1,0)	(13,16,9) - [10,11,6]
(0,2-1,0,4-1)	(14,11,18) - [4,8,14]
(0,2-2,0,4-1)	(14,16,20) - [9,9,13]
(0,2-1,3-1,0)	(14,13,13) - [9,7,9]
(0,2-2,3-1,0)	(14,18,15) - [10,10,10]
(1-1,0,3-2,0)	(15,20,12) - [9,11,7]
(0,0,3-1,4-1)	(16,14,15) - [11,7,11]
(0,2-1,3-2,0)	(16,17,16) - [10,10,11]
(0,2-2,3-2,0)	(16,22,18) - [11,13,12]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) - [10,8,10]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) - [9,5,9]
(1-2,0,3-1,0)	(18,11,11) - [13,7,7]
(1-1,2-2,0,4-1)	(19,24,24) - [12,13,15]
(1-1,2-1,0,4-1)	(19,19,24) - [12,12,16]
(1-1,2-2,3-1,0)	(19,26,19) - [15,17,13]
(1-1,2-1,3-1,0)	(19,21,19) - [14,14,12]
(1-2,0,3-2,0)	(20,15,14) - [11,9,8]
(1-1,0,3-1,4-1)	(21,22,19) - [16,14,14]
(1-1,2-2,3-2,0)	(21,30,22) - [14,17,14]
(1-1,2-1,3-2,0)	(21,25,22) - [13,14,13]
(0,2-1,3-1,4-1)	(22,19,23) - [16,12,19]
(0,2-2,3-1,4-1)	(22,24,25) - [16,13,18]
(0,2-1,3-2,4-1)	(24,23,26) - [15,15,19]
(0,2-2,3-2,4-1)	(24,28,28) - [15,16,18]
(1-2,2-2,0,4-1)	(24,19,26) - [14,11,16]
(1-2,2-1,0,4-1)	(24,14,24) - [14,10,17]
(1-2,2-2,3-1,0)	(24,21,21) - [18,13,14]
(1-2,2-1,3-1,0)	(24,16,19) - [17,10,13]
(1-2,0,3-1,4-1)	(26,17,21) - [19,10,15]
(1-2,2-2,3-2,0)	(26,25,24) - [16,15,15]
(1-2,2-1,3-2,0)	(26,20,22) - [15,12,14]
(1-1,2-1,3-1,4-1)	(27,27,29) - [21,19,22]
(1-2,2-2,3-1,4-1)	(32,27,31) - [24,16,22]
(1-2,2-1,3-1,4-1)	(32,22,29) - [24,15,23]

(9,4,8) - [5,2,6]

Lista 4.2

$$b_{42} = [5,2,6] \div \{[0,1,3]\ h_{22}\} \div \{[1,2,0]\ h_{32}\}$$

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(5,8,4) - [3,4,2]
(0,2-1,0,0)	(6,5,8) - [4,3,6]
(0,2-2,0,0)	(6,10,10) - [5,6,7]
(0,0,3-1,0)	(8,8,5) - [5,4,3]
(0,0,0,4-2)	(9,4,8) - [5,2,6]
(1-2,0,0,0)	(10,3,6) - [5,2,3]
(0,0,3-2,0)	(10,12,8) - [6,7,5]
(1-1,2-2,0,0)	(11,18,14) - [8,10,9]
(1-1,2-1,0,0)	(11,13,14) - [7,7,8]
(1-1,0,0,4-1)	(13,14,14) - [7,7,10]
(1-1,0,3-1,0)	(13,16,9) - [10,11,6]
(1-1,0,0,4-2)	(14,12,12) - [8,6,8]
(0,2-1,0,4-1)	(14,11,18) - [9,8,14]
(0,2-2,0,4-1)	(14,16,20) - [9,9,13]
(0,2-1,3-1,0)	(14,13,13) - [9,7,9]
(0,2-2,3-1,0)	(14,18,15) - [10,10,10]
(0,2-1,0,4-2)	(15,9,16) - [9,5,12]
(0,2-2,0,4-2)	(15,14,18) - [10,9,16]
(1-1,0,3-2,0)	(15,20,12) - [9,11,7]
(0,0,3-1,4-1)	(16,14,15) - [11,7,11]
(0,2-1,3-2,0)	(16,17,16) - [10,10,11]
(0,2-2,3-2,0)	(16,22,18) - [11,13,12]
(1-2,2-2,0,0)	(16,13,16) - [10,8,10]
(1-2,2-1,0,0)	(16,8,14) - [9,5,9]
(0,0,3-1,4-2)	(17,12,13) - [10,6,9]
(1-2,0,3-1,0)	(18,11,11) - [13,7,7]
(1-2,0,0,4-2)	(19,7,14) - [10,4,9]
(0,0,3-2,4-2)	(19,16,16) - [12,11,11]
(1-1,2-2,0,4-1)	(19,24,24) - [12,13,15]
(1-1,2-1,0,4-1)	(19,19,24) - [12,12,16]
(1-1,2-2,3-1,0)	(19,26,19) - [15,17,13]
(1-1,2-1,3-1,0)	(19,21,19) - [14,14,12]
(1-1,2-2,0,4-2)	(20,22,22) - [13,13,18]
(1-1,2-1,0,4-2)	(20,17,22) - [12,9,14]
(1-2,0,3-2, 0)	(20,15,14) - [11,9,8]
(1-1,0,3-1,4-1)	(21,22,19) - [16,14,14]
(1-1,2-2,3-2,0)	(21,30,22) - [14,17,14]
(1-1,2-1,3-2,0)	(21,25,22) - [13,14,13]
(1-1,0,3-1,4-2)	(22,20,17) - [15,13,12]
(0,2-1,3-1,4-1)	(22,19,23) - [16,12,19]
(0,2-2,3-1,4-1)	(22,24,25) - [16,13,18]
(0,2-1,3-1,4-2)	(23,17,21) - [14,9,15]
(0,2-2,3-1,4-2)	(23,22,23) - [15,13,19]
(1-1,0,3-2,4-2)	(24,24,20) - [15,15,13]
(0,2-1,3-2,4-1)	(24,23,26) - [15,15,19]
(0,2-2,3-2,4-1)	(24,28,28) - [15,16,18]
(1-2,2-2,0,4-1)	(24,19,26) - [14,11,16]

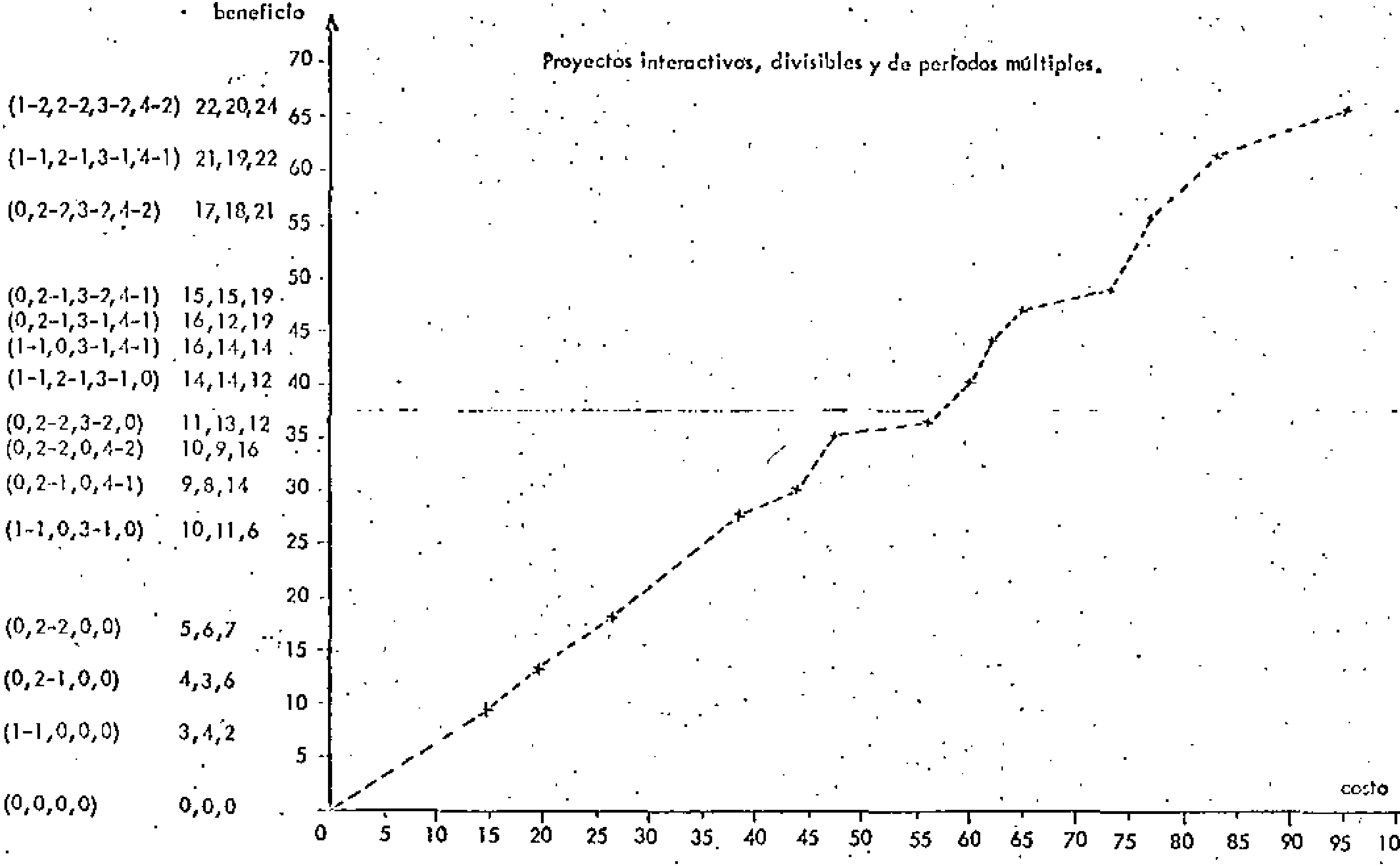
(1-2,2-1,0,4-1)	(24,14,24) - [14,10,17]
(1-2,2-2,3-1,0)	(24,21,21) - [18,13,14]
(1-2,2-1,3-1,0)	(24,16,19) - [17,10,13]
(0,2-1,3-2,4-2)	(25,21,24) - [16,14,17]
(0,2-2,3-2,4-2)	(25,26,26) - [17,18,21]
(1-2,2-2,0,4-2)	(25,17,24) - [15,11,19]
(1-2,2-1,0,4-2)	(25,12,22) - [14,7,15]
(1-2,0,3-1,4-1)	(26,17,21) - [19,10,15]
(1-2,2-2,3-2,0)	(26,25,24) - [16,15,15]
(1-2,2-1,3-2,0)	(26,20,22) - [15,12,14]
(1-2,0,3-1,0)	(27,15,19) - [18,9,13]
(1-1,2-1,3-1,4-1)	(27,27,29) - [21,19,22]
(1-1,2-2,3-1,4-2)	(28,30,27) - [20,20,22]
(1-1,2-1,3-1,4-2)	(28,25,27) - [19,16,18]
(1-2,0,3-2,4-2)	(29,19,22) - [17,13,14]
(1-1,2-1,3-2,4-2)	(30,29,30) - [19,18,19]
(1-2,2-2,3-1,4-1)	(32,27,31) - [24,16,22]
(1-2,2-1,3-1,4-1)	(32,22,29) - [24,15,23]
(1-2,2-2,3-1,4-2)	(32,25,29) - [23,16,23]
(1-2,2-1,3-1,4-2)	(33,20,27) - [22,12,19]
(1-2,2-2,3-2,4-2)	(35,29,32) - [22,20,24]
(1-2,2-1,3-2,4-2)	(35,24,30) - [21,16,20]

244. Reinversión en proyectos divisibles

Cuando los beneficios de los proyectos divisibles son susceptibles de capitalizarse y por tanto de reinvertirse posteriormente en el mismo proyecto, el análisis para seleccionar las mejores inversiones de acuerdo con la disponibilidad presupuestal sigue lineamientos diferentes y conduce a resultados distintos.

Sea b_k el beneficio total producido por el proyecto P_k. Este beneficio será:

$$b_k = \sum_{t=0}^{T} \frac{S_{tk} - Y_{t+1,k}}{(1+r)^t}$$



Curva beneficio (total) - costo (total)

en donde

S_{tk} = rendimiento del proyecto P_k al final del período t.

Y_{tk} = inversión requerida por el proyecto P_k al principio del período t.

T = horizonte de planeación.

r = factor de descuento (usualmente costo del capital).

En estas condiciones el desembolso requerido por el proyecto P_k al principio del período t será: $a_{tk} = Y_{tk} - S_{t-1,k}$.

De acuerdo con las expresiones anteriores, los datos sin actualizar se transforman antes de iniciar el análisis.

245. Ejemplo (Selección autofinanciable)

Considérense los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 cuyos datos sin descontar son

$$P_1 \longrightarrow (5,6,8) \longrightarrow [10,4,6] \qquad \text{Costo del capital} = 5\%$$

$$P_2 \longrightarrow (3,5,2) \longrightarrow [2,7,4]$$

$$P_3 \longrightarrow (6,4,3) \longrightarrow [5,8,4]$$

$$P_4 \longrightarrow (2,5,8) \longrightarrow [10,2,6]$$

Se tiene:

$$b_1 = \frac{0-5}{1} + \frac{10-6}{1.05} + \frac{4-8}{1.05^2} + \frac{6-0}{1.15^3} = 0.33$$

$$b_2 = \frac{0.3}{1} + \frac{2-5}{1.05} + \frac{7-2}{1.10} + \frac{4-0}{1.16} = 2.15$$

$$b_3 = \frac{0-6}{1} + \frac{5-4}{1.05} + \frac{8-3}{1.10} + \frac{4-0}{1.16} = 2.95$$

$$b_4 = \frac{0-2}{1} \div \frac{10-5}{1.05} \div \frac{2-8}{1.10} \div \frac{6-0}{1.16} = 2.48$$

$a_{11} = 5-0 = 5 \quad a_{12} = 3-0 = 3 \quad a_{13} = 6-0 = 6 \quad a_{14} = 2-0 = 2$

$a_{21} = 6-10 = -4 \quad a_{22} = 5-2 = 3 \quad a_{23} = 4-5 = -1 \quad a_{24} = 5-10 = -5$

$a_{31} = 8-4 = 4 \quad a_{32} = 2-7 = -5 \quad a_{33} = 3-8 = -5 \quad a_{34} = 8-2 = 6$

Los desemnolsos y beneficios totales transformados resultan:

P_1 —— (5,-4,4) - 0.33

P_2 —— (3,3,-5) - 2.15

P_3 —— (6,-1,-5) - 2.95

P_4 —— (2,-5,6) - 2.48

(0,0,0) - 0

Lista 0

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0

(5,-4,4) -0.33

Lista 1

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1,0,0,0)	(5,-4,4) -0.33

(3,3,-5) - 2.15

Lista 2

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(0,1,0,0)	(3,3,-5) -2.15
(1,0,0,0)	(5,-4,4) -0.33
(1,1,0,0)	(8,-1,-1) -2.48

(6,-1,-5) -2.95

Lista 3

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(0,1,0,0)	(3,3,-5) -2.15
(1,0,0,0)	(5,-4,4) -0.33
(0,0,1,0)	(6,-1,-5) -2.95
(1,1,0,0)	(8,-1,-1) -2.48
(0,1,1,0)	(9,2,-10) -5.10
(1,0,1,0)	(11,-5,-1) -3.28
(1,1,1,0)	(14,-2,-6) -5.43

(2,-5,6) -2.48

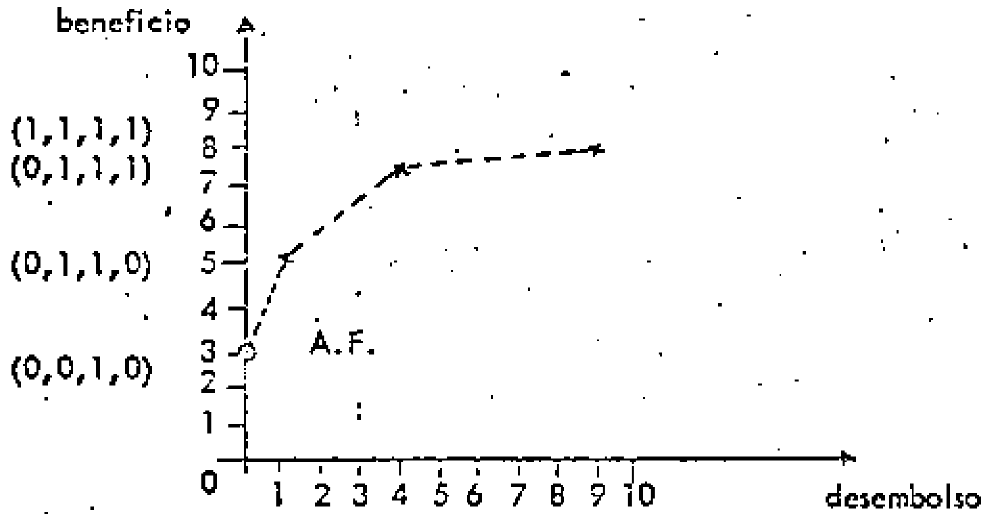
Lista 4

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(0,0,0,1)	(2,-5,6) -2.48
(0,1,0,0)	(3,3,-5) -2.15
(0,1,0,1)	(5,-2,1) -4.63
(1,0,0,0)	(5,-4,4) -0.33
(0,0,1,0)	(6,-1,-5) -2.95
(1,0,0,1)	(7,-9,10) -2.81
(1,1,0,0)	(8,-1,-1) -2.48
(0,0,1,1)	(8,-6,1) -5.43
(0,1,1,0)	(9,2,-10) -5.10
(1,1,0,1)	(10,-6,5) -4.96
(1,0,1,0)	(11,-5,-1) -3.20
(0,1,1,1)	(11,-3,-4) -7.58

Lista 4 (continuación)

(1,0,1,1)	(13,-10,5) -5.76
(1,1,1,0)	(14,-2,-6) -5.43
(1,1,1,1)	(16,-7,0) -7.91

Curva beneficio (total) - desembolso (total).



A la intersección con el eje de los beneficios se le llama combinación <u>autofinanciable</u> e implica un desembolso total nulo.

246. <u>Ejemplo</u>

P_1 - (3,5,4) - [6,3,9] $\quad d_{12} = [6,3,5] \quad$ 5%

P_2 - (4,5,6) - [3,7,4] $\quad d_{13} = [5,3,4] \quad V_{13} = (5,2,4)$

P_3 - (3,2,1) - [1,1,3] $\quad d_{14} = [4,2,6] \quad V_{14} = (3,1,5)$

P_4 - (4,2,8) - [5,6,5] $\quad d_{23} = [3,2,1] \quad V_{23} = (3,1,2)$

$d_{24} = [1,1,5] \quad V_{24} = (1,3,6)$

$d_{25} = [2,3,3]$

$$b_1 = \frac{0-3}{1} + \frac{6-5}{1.05} + \frac{3-4}{1.10} + \frac{9-0}{1.16} = 4.8$$

$$b_2 = \frac{0-4}{1} + \frac{3-5}{1.05} + \frac{7-6}{1.10} + \frac{4-0}{1.16} = -1.5$$

$$b_3 = \frac{0-3}{1} + \frac{1-2}{1.05} + \frac{1-1}{1.10} + \frac{3-0}{1.16} = 0.5$$

$$b_4 = \frac{0-4}{1} + \frac{5-2}{1.05} + \frac{6-8}{1.10} + \frac{5-0}{1.16} = 1.4$$

$$b_{12} = \frac{6}{1.05} + \frac{3}{1.10} + \frac{5}{1.16} = 12.8$$

$$b_{13} = \frac{0-5}{1} + \frac{5-2}{1.05} + \frac{3-4}{1.10} + \frac{4-0}{1.16} = 0.4$$

$$b_{14} = \frac{0-3}{1} + \frac{4-1}{1.05} + \frac{2-5}{1.10} + \frac{6-0}{1.16} = 2.3$$

$$b_{23} = \frac{0-3}{1} + \frac{3-1}{1.05} + \frac{2-2}{1.10} + \frac{1-0}{1.16} = 0.2$$

$$b_{24} = \frac{0-1}{1} + \frac{1-3}{1.05} + \frac{1-6}{1.10} + \frac{5-0}{1.16} = 3.1$$

$$b_{34} = \frac{2}{1.05} + \frac{3}{1.10} + \frac{5}{1.16} = 8.9$$

$a_{11} = 3 - 0 = 3$ $\quad a_{12} = 4 - 0 = 4$ $\quad a_{13} = 3 - 0 = 3$ $\quad a_{14} = 4 - 0 = 4$

$a_{21} = 5 - 6 = -1$ $\quad a_{22} = 5 - 3 = 2$ $\quad a_{23} = 2 - 1 = 1$ $\quad a_{24} = 2 - 5 = -3$

$a_{31} = 4 - 3 = 1$ $\quad a_{32} = 6 - 7 = -1$ $\quad a_{33} = 1 - 1 = 0$ $\quad a_{34} = 8 - 6 = 2$

$a_{1,12} = 0 - 0 = 0$ $\quad a_{1,13} = 5 - 0 = 5$ $\quad a_{1,14} = 3 - 0 = 3$ $\quad a_{1,23} = 3 - 0 = 3$

$a_{2,12} = 0 - 6 = -6$ $\quad a_{2,13} = 2 - 5 = -3$ $\quad a_{2,14} = 1 - 4 = -3$ $\quad a_{2,23} = 1 - 3 = -2$

$a_{3,12} = 0 - 3 = -3$ $\quad a_{3,13} = 4 - 3 = 1$ $\quad a_{3,14} = 5 - 2 = 3$ $\quad a_{3,23} = 2 - 2 = 0$

$a_{1,24} = 1 - 0 = 1$ $a_{1,34} = 0 - 0 = 0$

$a_{2,24} = 3 - 1 = 2$ $a_{2,34} = 2 - 2 = -2$

$a_{3,24} = 6 - 1 = 5$ $a_{3,34} = 0 - 3 = -3$

$\overline{A}_1 = (3,-1,1)$	$b_1 = 4.8$	$d_{12} = 12.8$	$\overline{V}_{12} = (0,-6,-3)$
$\overline{A}_2 = (4,2,-1)$	$b_2 = -1.5$	$d_{13} = 0.4$	$\overline{V}_{13} = (5,-3,1)$
$\overline{A}_3 = (3,1,0)$	$b_3 = 0.5$	$d_{14} = 2.3$	$\overline{V}_{14} = (3,-3,3)$
$\overline{A}_4 = (4,-3,2)$	$b_4 = 1.4$	$d_{23} = 0.2$	$\overline{V}_{23} = (3,-2,0)$
		$d_{24} = 3.1$	$\overline{V}_{24} = (1,2,5)$
		$d_{34} = 8.9$	$\overline{V}_{34} = (0,-2,-3)$

$(0,0,0) - 0$

Lista 0

$(0,0,0,0) \mid (0,0,0) - 0 \quad \eta_{00}(0,0,0) = 1$

$(3,-1,1) - 4.8$

Lista 1

$(0,0,0,0) \mid (0,0,0) - 0 \quad \eta_{01}(0,0,0) = 1$

$(1,0,0,0) \mid (3,-1,1) - 4.8 \quad \eta_{11}(3,-1,1) = 1$

$(4,2,-1) - (-1.5)$

$A_2^1 = (4,2,-1) + [(0,-6,-3) \mid \eta_{11}(3,-1,1) = 1]$

$b_2^1 = (-1.5) + [12.8 \mid \eta_{11}(3,-1,1) = 1]$

Lista 2

$(0,0,0,0) \mid (0,0,0) - 0 \quad \eta_{02}(0,0,0) = 1$

$(1,0,0,0) \mid (3,-1,1) - 4.8 \quad \eta_{12}(3,-1,1) = 1$

$(0,1,0,0) \mid (4,2,-1) - (-1.5) \quad \eta_{22}(4,2,-1) = 1$

$(1,1,0,0) \mid (7,-5,-3) - 16.3 \quad \eta_{12}(3,-1,1) = \eta_{22}(4,-4,-4) = 1$

(3,1,0) - 0.5

$$A_3^1 = (3,1,0) + \left[(5,-3,1) \mid \eta_{12}(3,-1,1) = 1\right] + \left[(3,-2,0) \mid \eta_{22}\begin{pmatrix}4,2,-1\\4,-4,-4\end{pmatrix} = 1\right]$$

$$b_3^1 = 0.5 + \left[0.4 \mid \eta_{12}(3,-1,1) = 1\right] + \left[0.2 \mid \eta_{22}\begin{pmatrix}4,2,-1\\4,-4,-4\end{pmatrix} = 1\right]$$

Lista 3

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0	$\eta_{03}(0,0,0) = 1$
(1,0,0,0)	(3,-1,1) -4.8	$\eta_{13}(3,-1,1) = 1$
(0,0,1,0)	(3,1,0) - 0.5	$\eta_{33}(3,1,0) = 1$
(0,1,0,0)	(4,2,-1) -(-1.5)	$\eta_{23}(4,2,-1) = 1$
(1,1,0,0)	(7,-5,-3) -16.1	$\eta_{13}(3,-1,1) = \eta_{23}(4,-4,-4) = 1$
(1,0,1,0)	(11,-3,2) -5.7	$\eta_{13}(3,-1,1) = \eta_{33}(8,-2,1) = 1$
(0,1,1,0)	(10,-2,-1) -(0.8)	$\eta_{23}(4,2,-1) = \eta_{33}(6,-4,0) = 1$
(1,1,1,0)	(18,-9,-2) -17.2	$\eta_{13}(3,-1,1) = \eta_{23}(4,-4,-4) = \eta_{33}(11,-4,1) = 1$

(4,-3,2) - 1.4

$$A_4^1 = (4,-3,2) + \left[(3,-3,3) \mid \eta_{13}(3,-1,1) = 1\right] + \left[(1,2,5) \mid \eta_{23}\begin{pmatrix}4,2,-1\\4,-4,-4\end{pmatrix} = 1\right]$$

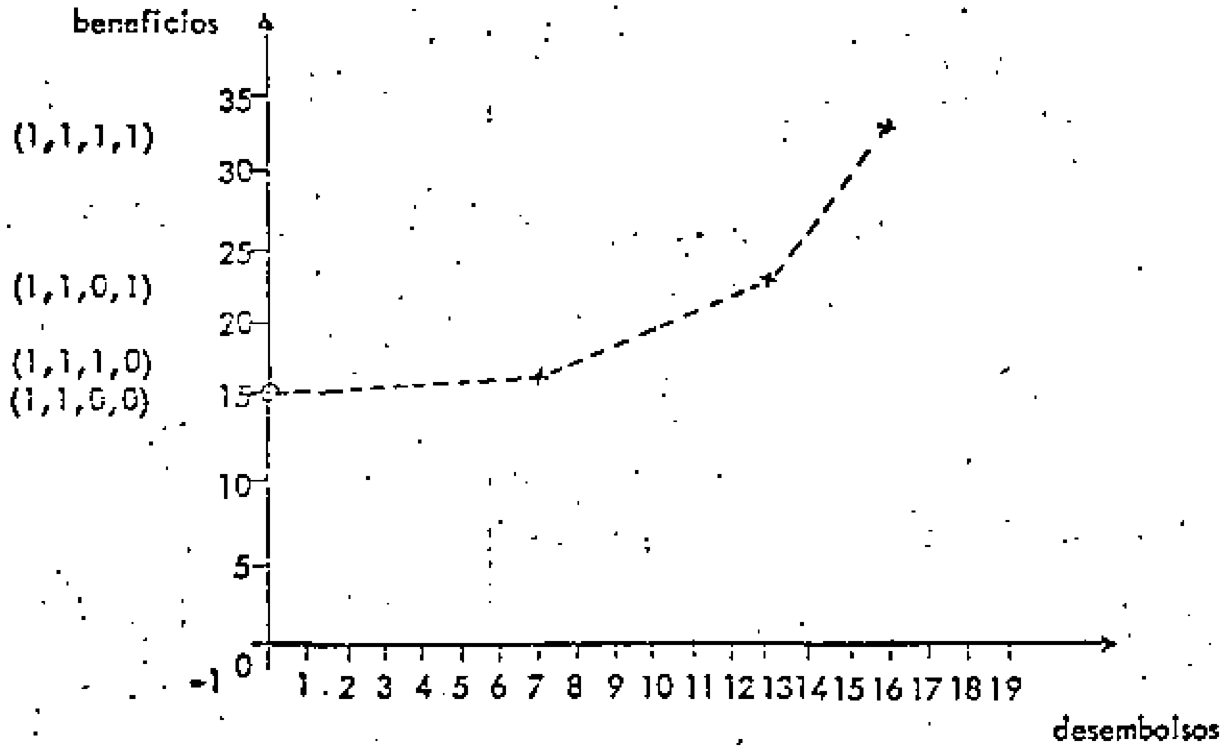
$$\left[(0,-2,-3) \mid \eta_{33}\begin{pmatrix}3,1,0\\8,-2,1\\6,-4,0\\11,-4,1\end{pmatrix} = 1\right]$$

$$b_4^1 = 1.4 + \left[2.3 \mid \eta_{13}(3,-1,1) = 1\right] + \left[3.1 \mid \eta_{23}\begin{pmatrix}4,2,-1\\4,-4,-4\end{pmatrix} = 1\right] +$$

$$+ \left[(8.9) \mid \eta_{33}\begin{pmatrix}3,1,0\\8,-2,1\\6,-4,0\\11,-4,1\end{pmatrix} = 1\right]$$

Lista 4

(0,0,0,0)	(0,0,0) - 0	(1,1,1,0)	(18,-9,-2) - 17.2
(1,0,0,0)	(3,-1,1) - 4.8	(1,1,0,1)	(15,-9,7) - 22.9
(0,0,1,0)	(3,1,0) - 0.5	(1,0,1,1)	(18,-11,4) - 18.3
(0,0,0,1)	(4,-3,2) -1.4	(1,1,1,1)	(26,-15,5) - 32.9
(0,1,0,0)	(4,2,-1) - (-1.5)		
(1,1,0,0)	(7,-5,-3) - 16.1		
(1,0,0,1)	(10,-7,6) - 8.5		



Curva beneficio (total) - desembolso (total).

$$P_1 \longrightarrow (10,5,15) \longrightarrow 3$$
$$P_2 \longrightarrow (15,10,15) \longrightarrow 4$$
$$P_3 \longrightarrow (20,10,15) \longrightarrow 5$$
$$P_4 \longrightarrow (5,10,5) \longrightarrow 1$$

se trata de seleccionar la combinación que reporte los mayores beneficios cuando la componente endógena de la disponibilidad presupuestal es de $25,000.00 por período y la exógena puede llegar a ser de otro tanto. El factor de descuento es de 5%. Los intereses a pagar son de 12% sobre saldos insolutos. El principal se repondrá por partes iguales. No existe tiempo de gracia y la liquidación se debe terminar tres períodos después de terminarse el grupo de proyectos seleccionados. Los beneficios se suponen actualizados al inicio de las actividades.

La lista 4, final, es como sigue:

1 -	(0,0,0,0)	(0,0,0) -0 $\bar{E}_1 = (0,0,0)$
2 -	(0,0,0,1)	(5,10,5) -1 $\bar{E}_2 = (0,0,0)$
3 -	(1,0,0,0)	(10,5,15) -3 $\bar{E}_3 = (0,0,0)$
4 -	(0,1,0,0)	(15,10,15) -4 $\bar{E}_4 = (0,0,0)$
5 -	(0,0,1,0)	(20,10,15) -5 $\bar{E}_5 = (0,0,0)$
6 -	(0,0,1,1)	(25,20,20) -6 $\bar{E}_6 = (0,0,0)$
7 -	(1,0,1,0)	(30,15,30) -8 $\bar{E}_7 = (5,0,5)$
8 -	(1,0,1,1)	(35,25,35) -9 $\bar{E}_8 = (10,0,10)$
9 -	(0,1,1,1)	(40,35,50) -10 $\bar{E}_9 = (15,10,25)$
10 -	(1,1,1,0)	(45,25,45) -12 $\bar{E}_{10} = (20,0,20)$
11 -	(1,1,1,1)	(50,35,50) -13 $\bar{E}_{11} = (25,10,25)$

se tiene:

$$u(e_{17}) = \frac{1+0.6}{1.05^2} + \frac{1+0.48}{1.05^3} + \frac{1+0.36}{1.05^4} + \frac{1+0.24}{1.05^5} + \frac{1+0.12}{1.05^6} - \frac{5}{1.05} = 0.92$$

$$u(e_{37}) = \frac{1.67+0.6}{1.05^4} + \frac{1.67+0.4}{1.05^5} + \frac{1.67+0.2}{1.05^6} - \frac{5}{1.05^3} = 0.59$$

$$U(\overline{E}_7) = 1.51$$

$$u(e_{18}) = \frac{2+1.2}{1.05^2} + \frac{2+0.96}{1.05^3} + \frac{2+0.72}{1.05^4} + \frac{2+0.48}{1.05^5} + \frac{2+0.24}{1.05^6} - \frac{10}{1.05} = 1.82$$

$$u(e_{38}) = \frac{3.33+1.2}{1.05^4} + \frac{3.33+0.8}{1.05^5} + \frac{3.33+0.4}{1.05^6} - \frac{10}{1.05^3} = 1.16$$

$$U(\overline{E}_8) = 2.98$$

$$u(e_{19}) = \frac{3+1.8}{1.05^2} + \frac{3+1.44}{1.05^3} + \frac{3+1.08}{1.05^4} + \frac{3+0.72}{1.05^5} + \frac{3+0.36}{1.05^6} - \frac{15}{1.05} = 2.70$$

$$u(e_{29}) = \frac{2.5+1.2}{1.05^3} + \frac{2.5+0.9}{1.05^4} + \frac{2.5+0.6}{1.05^6} - \frac{10}{1.05} = 1.45$$

$$u(e_{39}) = \frac{8.33+3}{1.05^4} + \frac{8.33+2}{1.05^5} + \frac{8.33+1}{1.05^6} - \frac{25}{1.05^3} = 2.97$$

$$U(\overline{E}_9) = 7.12$$

$$u(e_{1,10}) = \frac{4+2.4}{1.05^2} + \frac{4+1.92}{1.05^3} + \frac{4+1.44}{1.05^4} + \frac{4+0.96}{1.05^5} + \frac{4+0.48}{1.05^6} - \frac{20}{1.05} = 3.67$$

$$u(e_{2,10}) = \frac{6.67+2.4}{1.05^4} + \frac{6.67+1.6}{1.05^5} + \frac{6.67+0.8}{1.05^6} - \frac{20}{1.05^3} = 2.32$$

$$U(\overline{E}_{10}) = 5.99$$

$$u(e_{1,11}) = \frac{5+3}{1.05^2} + \frac{5+2.4}{1.05^3} + \frac{5+1.8}{1.05^4} + \frac{5+1.2}{1.05^5} + \frac{5+0.6}{1.05^6} - \frac{25}{1.05} = 4.5$$

$$u(e_{2,11}) = \frac{2.5+1.2}{1.05^3} + \frac{2.5+0.9}{1.05^4} + \frac{2.5+0.6}{1.05^5} + \frac{2.5+0.3}{1.05^6} - \frac{10}{1.05} = 1.45$$

$$u(e_{3,11}) = \frac{8.33+3}{1.05^4} + \frac{8.33+2}{1.05^5} + \frac{8.33+1}{1.05^6} - \frac{25}{1.05^3} = 2.87$$

$$U(\overline{E}_{11}) = 8.92$$

De donde:

	$N(\overline{J}_{iN})$	-	$U(\overline{E}_{iN})$	
1	0	-	0	= 0
2	1	-	0	= 1
3	3	-	0	= 3
4	4	-	0	= 4
5	5	-	0	= 5
6	6	-	0	= 6
7	8	-	1.51	= 6.49 ←
8	9	-	2.98	= 6.02
9	10	-	7.12	= 2.88
10	12	-	5.99	= 6.01
11	13	-	8.92	= 4.08

La selección óptima en estas condiciones es:

Realiza P_1 y P_3

la componente (óptima) exógena de capital es: $\overline{E}_7 = (5,0,5)$.

249. Uso del capital no asignado (financiamiento al exterior)

El problema de hacer uso del capital no asignado puede resolverse en forma similar. Basta para ello considerar:

$$i_{tNn} - c = e_{tn}$$

en donde $e_{tn} < 0$ implica capital no asignado que puede ponerse a trabajar.

Suponiendo que por el trabajo de e_t se recibe un pago de q^1_{t+1} por concepto de intereses y de q^1_w por el principal entonces

$$u(e_t) = -\left\{ \sum_{p=t+1}^{w} \frac{q^1_p}{(1+r)^p} - \frac{e_t}{(1+r)^t} \right\}, \text{ para } e_t < 0$$

El análisis posterior es similar.

250. Ejemplo

Los mismos datos y condiciones del número 248 pero ahora seleccionar buscando beneficios óptimos bajo la alternativa de prestar dinero no asignado. Disponibilidad endógena \$ 50,000.00/período.

En este caso:

$$\overline{E}_1 = (-50,-50,-50)$$
$$\overline{E}_2 = (-45,-40,-45)$$
$$\overline{E}_3 = (-40,-45,-35)$$
$$\overline{E}_4 = (-35,-40,-35)$$
$$\overline{E}_5 = (-30,-40,-35)$$
$$\overline{E}_6 = (-25,-30,-30)$$
$$\overline{E}_7 = (-20,-35,-20)$$
$$\overline{E}_8 = (-15,-25,-15)$$
$$\overline{E}_9 = (-10,-15, 0)$$
$$\overline{E}_{10} = (-5,-25,-5)$$
$$\overline{E}_{11} = (0,-15,0)$$

$$-u(e_{11}) = \frac{10+6}{1.05^2} + \frac{10+4.8}{1.05^3} + \frac{10+3.6}{1.05^4} + \frac{10+2.4}{1.05^5} + \frac{10+1.2}{1.05^6} - \frac{-50}{1.05} = 8.6$$

$$-u(e_{21}) = \frac{12.5+6}{1.05^3} + \frac{12.5+4.5}{1.05^4} + \frac{12.5+3}{1.05^5} + \frac{12.5+1.5}{1.05^6} - \frac{50}{1.05^2} = 6.7$$

$$-u(e_{31}) = \frac{16.6+6}{1.05^4} + \frac{16.6+4}{1.05^5} + \frac{16.6+2}{1.05^6} - \frac{50}{1.05^3} = 5.2$$

$$-U(\overline{E}_1) = 19.5$$

$$-u(e_{12}) = \frac{9+5.4}{1.05^2} + \frac{9+4.3}{1.05^3} + \frac{9+3.2}{1.05^4} + \frac{9+2.1}{1.05^5} + \frac{9+1.0}{1.05^6} - \frac{45}{1.05} = 7.6$$

$$-u(e_{22}) = \frac{10+4.8}{1.05^3} + \frac{10+3.6}{1.05^4} + \frac{10+2.4}{1.05^5} + \frac{10+1.2}{1.05^6} - \frac{40}{1.05^2} = 5.4$$

$$-u(e_{32}) = \frac{15+5.4}{1.05^4} + \frac{15+3.6}{1.05^5} + \frac{15+1.8}{1.05^6} - \frac{45}{1.05^3} = 5.0$$

$$-U(\overline{E}_2) = 18.0$$

$$-u(e_{13}) = \frac{8+4.8}{1.05^2} + \frac{8+3.84}{1.05^3} + \frac{8+2.88}{1.05^4} + \frac{8+1.92}{1.05^5} + \frac{8+0.96}{1.05^6} - \frac{40}{1.05} = 5.1$$

$$-u(e_{23}) = \frac{11.2+5.4}{1.05^3} + \frac{11.2+4.1}{1.05^4} + \frac{11.2+2.7}{1.05^5} + \frac{11.4+1.4}{1.05^6} - \frac{45}{1.05^2} = 5.4$$

$$-u(e_{33}) = \frac{11.6+4.2}{1.05^4} + \frac{11.7+2.8}{1.05^5} + \frac{11.7+1.4}{1.05^6} - \frac{35}{1.05^3} = 3.8$$

$$-U(\overline{E}_3) = 14.3$$

$$- u(e_{14}) = \frac{7+4.2}{1.05^2} + \frac{7+3.4}{1.05^3} + \frac{7+2.5}{1.05^4} + \frac{7+1.7}{1.05^5} + \frac{7+0.8}{1.05^6} - \frac{35}{1.05} = 6.3$$

$- u(e_{24}) = 5.4$

$- u(e_{34}) = 3.8$ $\qquad$ $- U(\bar{E}_4) = 15.5$

$$- u(e_{15}) = \frac{6+3.6}{1.05^2} + \frac{6+2.9}{1.05^3} + \frac{6+2.2}{1.05^4} + \frac{6+1.4}{1.05^5} + \frac{6+0.7}{1.05^6} - \frac{30}{1.05} = 5.3$$

$- u(e_{25}) = 5.4$

$- u(e_{35}) = 3.8$ $\qquad$ $- U(\bar{E}_5) = 14.5$

$$- u(e_{16}) = \frac{5+3}{1.05^2} + \frac{5+2.4}{1.05^3} + \frac{5+1.8}{1.05^4} + \frac{5+1.2}{1.05^5} + \frac{5+0.6}{1.05^6} - \frac{25}{1.05} = 4.5$$

$$- u(e_{26}) = \frac{7.5+3.6}{1.05^3} + \frac{7.5+2.7}{1.05^4} + \frac{7.5+1.8}{1.05^5} + \frac{7.5+0.9}{1.05^6} - \frac{30}{1.05^2} = 4.3$$

$$- u(e_{36}) = \frac{10+3.6}{1.05^4} + \frac{10+2.4}{1.05^5} + \frac{10+1.2}{1.05^6} - \frac{30}{1.05} = 3.3$$

$- U(\bar{E}_6) = 12.1$

$$- u(e_{17}) = \frac{4+2.4}{1.05^2} + \frac{4+1.9}{1.05^3} + \frac{4+1.4}{1.05^4} + \frac{4+1.0}{1.05^5} + \frac{4+0.5}{1.05^6} - \frac{20}{1.05} = 3.6$$

$$- u(e_{27}) = \frac{8.75+4.2}{1.05^3} + \frac{8.75+3.2}{1.05^4} + \frac{8.7+2.1}{1.05^5} + \frac{2.75+1.1}{1.05^6} - \frac{35}{1.05^2} = 5.1$$

$$- u(e_{37}) = \frac{6.67+2.4}{1.05^4} + \frac{6.66+1.6}{1.05^5} + \frac{6.67+0.8}{1.05^6} - \frac{20}{1.05^3} = 2.3$$

$- U(\bar{E}_7) = 11.0$

$$- u(e_{18}) = \frac{3+1.8}{1.05^2} + \frac{3+1.4}{1.05^3} + \frac{3+1}{1.05^4} + \frac{3+0.7}{1.05^5} + \frac{3+0.4}{1.05^6} - \frac{15}{1.05} = 2.6$$

$$- u(e_{28}) = \frac{6.25+3}{1.05^3} + \frac{6.25+2.25}{1.05^4} + \frac{6.25+1.5}{1.05^5} + \frac{6.25+0.75}{1.06^6} - \frac{25}{1.05^2} = 3.6$$

$$- u(e_{38}) = \frac{5+1.8}{1.05^4} + \frac{5+1.2}{1.05^5} + \frac{5+0.6}{1.05^6} - \frac{15}{1.05^3} = 1.7$$

$$U(\bar{E}_8) = 7.9$$

$$- u(e_{19}) = \frac{2+1.2}{1.05^2} + \frac{2+1.92}{1.05^3} + \frac{2+0.72}{1.05^4} + \frac{2+0.48}{1.05^5} + \frac{2+0.24}{1.05^6} - \frac{10}{1.05} = 1.7$$

$$- u(e_{29}) = \frac{3.75+1.8}{1.05^3} + \frac{3.75+1.35}{1.05^4} + \frac{3.75+0.9}{1.05^5} + \frac{3.75+0.45}{1.05^6} - \frac{15}{1.05^2} = 2.1$$

$$- u(e_{39}) = 0$$

$$U(\bar{E}_9) = 3.8$$

$$- u(e_{1,10}) = \frac{1+0.6}{1.05^2} + \frac{1+0.48}{1.05^3} + \frac{1+0.36}{1.05^4} + \frac{1+0.24}{1.05^5} + \frac{1+0.12}{1.05^6} - \frac{5}{1.05} = 0.8$$

$$- u(e_{2,10}) = 2.1$$

$$- u(e_{3,10}) = \frac{1.67+0.6}{1.05^4} + \frac{1.67+0.4}{1.05^5} + \frac{1.67+0.2}{1.05^6} - \frac{5}{1.05^3} = 0.6$$

$$U(\bar{E}_{10}) = 3.5$$

$$U(\bar{E}_{11}) = 2.1$$

	$\Lambda_N(\bar{J}_{N})$		$U(\bar{E}_n)$			
1	0	+	19.5	=	19.5	←
2	1	+	18.0	=	19.0	
3	3	+	14.3	=	17.3	
4	4	+	15.5	=	19.5	←
5	5	+	14.5	=	19.5	←
6	6	+	12.1	=	18.1	
7	8	+	11.0	=	19.0	
8	9	+	7.9	=	16.9	
9	10	+	3.8	=	13.8	
10	12	+	3.5	=	15.5	
11	13	+	2.1	=	15.1	

Existen tres posibilidades óptimas.

a) No llevar a cabo ninguno de los proyectos y prestar $ 50,000.00 por período.

b) Llevar a cabo P_2 y prestar el resto del dinero.

c) Llevar a cabo P_3 y prestar el resto del dinero.

251. Diferición de inversiones (Financiamiento al interior)

Cuando en una combinación de proyectos y para un período dado no se invierte la totalidad de la disponibilidad presupuestal, el resto del dinero puede usarse para financiar esa misma combinación, pero, en otro período. Supóngase así que la cantidad no asignada en el período t es g_t, entonces $g_t(1+p)$ se adiciona a la disponibilidad c_{t+1}, en donde p es la tasa de interes para préstamos internos.

En general

$$g_1 = c_1 - i_1$$

$$g_2 = c_2 + g_1\,(1+p) - i_2$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$g_t = c_t + (1+p)\,g_{t-1} - i_t$$

Este tipo de financiamiento interno suministra un criterio más para la selección de los proyectos.

252. <u>Ejemplo</u>

$$P_1 \longrightarrow (5,10,15) \quad -3$$
$$P_2 \longrightarrow (5,15,10) \quad -4$$
$$P_3 \longrightarrow (10,5,15) \quad -5$$
$$P_4 \longrightarrow (5,\ 5,10) \quad -2$$

(0,0,0) -0

Lista 0

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0

(5,10,15) -3

Lista 1

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1,0,0,0)	(5,10,15) -3

(5,15,10) -4

Lista 2

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1,0,0,0)	(5,10,15) -3
(0,1,0,0)	(5,15,10) -4
(1,1,0,0)	(10,25,25) -7

(10,5,15) - 5

Lista 3

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(1,0,0,0)	(5,10,15) -3
(0,1,0,0)	(5,15,10) -4
(0,0,1,0)	(10,5,15) -5
(1,1,0,0)	(10,25,25) -7
(1,0,1,0)	(15,15,30) -8 (a)
(0,1,1,0)	(15,20,25) -9
(1,1,1,0)	(20,30,40) -12 (b)

a) $g_1 = 25-15 = 10$

$g_2 = 25 + 10(1.12) - 15 = 21.2$

$g_3 = 25 + 21.2(1.12) - 30 = 18.7 > 0$

Si es permisible (15,15,30) - 8

b) $g_1 = 25-20 = 5$

$g_2 = 25 + 5\ (1.12) - 30 = 0.6$

$g_3 = 25 + 0.6\ (1.12) - 40 < 0$

(20,30,40) - 12 no es permisible

(5,5,10) -2

Lista 4

(0,0,0,0)	(0,0,0) -0
(0,0,0,1)	(5,5,10) -2
(1,0,0,0)	(5,10,15) -3
(0,1,0,0)	(5,15,10) -4
(0,0,1,0)	(10,5,15) -5
(0,1,0,1)	(10,20,20) -6
(1,1,0,0)	(10,25,25) -7
(0,0,1,1)	(15,10,25) -7
(1,0,1,0)	(15,15,30) -8
(0,1,1,0)	(15,20,25) -9
(1,0,1,1)	(20,20,40) -10 (a)
(0,1,1,1)	(20,25,35) -11 (b)

a) $g_1 = 25 - 20 = 5$

$g_2 = 25 + 5\ (1.12) - 20 = 10.6$

$g_3 = 25 + 10.6\ (1.12) - 40 < 0$

(20,20,40) - 10 no es permisible

b) $g_1 = 25 - 20 = 5$

$g_2 = 25 + 5\ (1.12) - 25 = 5.6$

$g_3 = 25 + 5.6\ (1.12) - 35 < 0$

(20,25,35) - 11 no es permisible

La selección óptima es (15,20,25) -9

253. Programación de inversiones en proyectos de un período (oportunidad de invertir).

Sean los proyectos P_1 a P_m de un sólo período y que previamente fueron seleccionados como una combinación óptima. Se desea programar las inversiones en ellos en un horizonte T de manera que, el beneficio total sea máximo y no se superen las disponibilidades presupuestales en cada uno de los períodos en el horizonte.

Se tiene:

$$\max z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} b_{it} \quad x_{it}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i_t} \; x_{i_t} \leq c_t \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{i_t} \leq 1 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$x_{i_t} = 0 \text{ ó } 1$$

en donde

b_{i_t} = beneficio producido por el proyecto i en el período "t"

a_{i_t} = inversión requerida por el proyecto i en el período "t"

x_{i_t} = variable de decisión, unitaria si se invierte en el proyecto i en el período t, nula en caso contrario

c_t = disponibilidad presupuestal en el período "t".

Obsérvese que la última restricción señala que para cada uno de los proyectos sólo se puede invertir en un período dado. Esto es, las alternativas de inversión por período son mutuamente exclusivas.

254. Ejemplo

Sean los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4. Dada la naturaleza de los proyectos se tiene:

	Costo			Beneficio.		
	t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3
P_1	8			5		
P_1		6			4	
P_1			5			3
P_2	5			2		
P_2		8			3	
P_2			6			5
P_3	6			1		
P_3		5			4	
P_3			5			2
P_4	5			3		
P_4		7			1	
P_4			6			4

$c = [10, 10, 10]$

$$\max z = 5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} + x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 3x_{41} +$$
$$+ x_{42} + 4x_{43}$$

s.a.

$$8x_4 + 5x_{21} + 6x_{31} + 5x_{41} \leq 10$$
$$6x_{12} + 8x_{22} + 5x_{32} + 7x_{42} \leq 10$$
$$5x_{13} + 6x_{23} + 5x_{33} + 6x_{43} \leq 10$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1$$
$$x_{it} = 0 \text{ ó } 1$$

La respuesta a este problema es:

$$x_{11} = x_{23} = x_{32} = 1, \; x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{22} = x_{31} = x_{33} = x_{41} = x_{42} =$$
$$= x_{43} = 0$$

$$z = 14$$

255. <u>Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en la programación de inversiones en proyectos de un período</u> (ejemplo)

Usando los datos del problema anterior se tiene:

1-1	(8,0,0)	$\longrightarrow$	[5,0,0]
1-2	(0,6,0)	$\longrightarrow$	[0,4,0]
1-3	(0,0,5)	$\longrightarrow$	[0,0,3]
2-1	(5,0,0)	$\longrightarrow$	[2,0,0]
2-2	(0,8,0)	$\longrightarrow$	[0,3,0]
2-3	(0,0,6)	$\longrightarrow$	[0,0,5]
3-1	(6,0,0)	$\longrightarrow$	[1,0,0]
3-2	(0,5,0)	$\longrightarrow$	[0,4,0]
3-3	(0,0,5)	$\longrightarrow$	[0,0,2]
4-1	(5,0,0)	$\longrightarrow$	[3,0,0]
4-2	(0,7,0)	$\longrightarrow$	[0,1,0]
4-3	(0,0,6)	$\longrightarrow$	[0,0,4]

Dado el modelo del número 253 se tratará como un problema de selección de la combinación óptima de proyectos divisibles (no capitalizables) con varias alternativas de inversión mutuamente exclusivas.

(0,0,0,0) - (0,0,0)

Lista 0

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]	

(8,0,0) - (5,0,0)

Lista 1.1

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-1,0,0,0)	(8,0,0) - [5,0,0]

(0,6,0) – (0,4,0)

Lista 1.2

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-2,0,0,0)	(0,6,0) - [0,4,0]

(0,0,5) - [0,0,3]

Lista 1.3

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-3,0,0,0)	(0,0,5) - [0,0,3]

Lista 1

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-3,0,0,0)	(0,0,5) - [0,0,3]
(1-2,0,0,0)	(0,6,0) - [0,4,0]
(1-1,0,0,0)	(8,0,0) - [5,0,0]

(5,0,0) - [2,0,0]

Lista 2.1

(0,2-1,0,0)	(5,0,0) - [2,0,0]
(1-3,2-1,0,0)	(5,0,5) - [2,0,3]
(1-2,2-1,0,0)	(5,6,0) - [2,4,0]
(1-1,2-1,0,0)	(10,0,0) - [7,0,0]

(0,8,0) - [0,3,0]

Lista 2.2

(0,2-2,0,0)	(0,8,0) - [0,3,0]
(1-3,2-2,0,0)	(0,8,5) - [0,3,3]
(1-2,2-2,0,0)	(0,14,0) - [0,7,0]
(1-1,2-2,0,0)	(8,8,0) [5,3,0]

(0,0,6) - [0,0,5]

Lista 2.3

(0,2-3,0,0)	(0,0,6) - [0,0,5]
(1-3,2-3,0,0)	(0,0,11) - [0,0,8]
(1-2,2-3,0,0)	(0,6,6) - [0,4,5]
(1-1,2-3,0,0)	(8,0,6) - [5,0,5]

Lista 2

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-3,0,0,0)	(0,0,5) - [0,0,3]
(0,2-3,0,0)	(0,0,6) - [0,0,5]
(1-3,2-3,0,0)	(0,0,11) - [0,0,8]
(1-2,0,0,0)	(0,6,0) - [0,4,0]
(1-2,2-3,0,0)	(0,6,6) - [0,4,5]
(1-3,2-2,0,0)	(0,8,5) - [0,3,3]
(1-2,2-2,0,0)	(0,14,0) - [0,7,0]
(0,2-1,0,0)	(5,0,0) - [2,0,0]
(1-3,2-1,0,0)	(5,0,5) - [2,0,3]
(1-2,2-1,0,0)	(5,6,0) - [2,4,0]
(1-1,0,0,0)	(8,0,0) - [5,0,0]
(1-1,2-3,0,0)	(8,0,6) - [5,0,5]
(1-1,2-2,0,0)	(8,8,0) - [5,3,0]
(1-1,2-1,0,0)	(10,0,0) - [7,0,0]

(6,0,0) - [1,0,0]

Lista 3.1

(0,0,3-1,0)	(6,0,0) - [1,0,0]
(1-3,0,3-1,0)	(6,0,5) - [1,0,3]
(0,2-3,3-1,0)	(6,0,6) - [1,0,5]
(1-3,2-3,3-1,0)	(6,0,11) - [1,0,11]
(1-2,0,3-1,0)	(6,6,0) - [1,4,0]
(1-2,2-3,3-1,0)	(6,6,6) - [1,4,5]
(1-3,2-2,3-1,0)	(6,8,5) - [1,3,3]
(1-2,2-2,3-1,0)	(6,14,0) - [1,7,0]
(0,2-1,3-1,0)	(11,0,0) - [3,0,0]
(1-3,2-1,3-1,0)	(11,0,5) - [3,0,3]
(1-2,2-1,3-1,0)	(11,6,0) - [3,4,0]
(1-1,0,3-1,0)	(14,0,0) - [6,0,0]
(1-1,2-3,3-1,0)	(14,0,6) - [6,0,5]
(1-1,2-2,3-1,0)	(14,8,0) - [6,3,0]
(1-1,2-1,3-1,0)	(16,0,0) - [8,0,0]

(0,5,0) - [0,4,0]

Lista 3.2.

(0,0,3-2,0)	(0,5,0) - [0,4,0]
(1-3,0,3-2,0)	(0,5,5) - [0,4,3]
(0,2-3,3-2,0)	(0,5,6) - [0,4,5]
(1-3,2-3,3-2,0)	(0,5,11) - [0,4,8]

Lista 3.2. (continuación)

(1-2,0,3-2,0)	(0,11,0) - [0,8,0]
(1-2,2-3,3-2,0)	(0,11,6) - [0,8,5]
(1-3,2-2,3-2,0)	(0,13,5) - [0,7,3]
(1-2,2-2,3-2,0)	(0,19,0) - [0,11,0]
(0,2-1,3-2,0)	(5,5,0) - [2,4,0]
(1-3,2-1,3-2,0)	(5,5,5) - [2,4,3]
(1-2,2-1,3-2,0)	(5,11,0) - [2,8,0]
(1-1,0,3-2,0)	(8,5,0) - [5,4,0]
(1-1,2-3,3-2,0)	(8,5,6) - [5,4,5]
(1-1,2-2,3-2,0)	(8,13,0) - [5,7,0]
(1-1,2-1,3-2,0)	(10,5,0) - [7,4,0]

(0,0,5) - [0,0,2]

Lista 3.3

(0,0,3-3,0)	(0,0,5) - [0,0,2]
(1-3,0,3-3,0)	(0,0,10) - [0,0,5]
(0,2-3,3-3,0)	(0,0,11) - [0,0,7]
(1-3,2-3,3-3,0)	(0,0,16) - [0,0,10]
(1-2,0,3-3,0)	(0,6,5) - [0,4,2]
(1-2,2-3,3-3,0)	(0,6,11) - [0,4,7]
(1-3,2-2,3-3,0)	(0,8,10) - [0,3,5]
(1-2,2-2,3-3,0)	(0,14,5) - [0,7,2]
(0,2-1,3-3,0)	(5,0,5) - [2,0,2]
(1-3,2-1,3-3,0)	(5,0,10) - [0,0,5]
(1-2,2-1,3-3,0)	(5,6,5) - [2,4,2]
(1-1,0,3-3,0)	(8,0,5) - [5,0,2]
(1-1,2-3,3-3,0)	(8,0,11) - [5,0,10]
(1-1,2-2,3-3,0)	(8,8,5) - [5,3,2]
(1-1,2-1,3-3,0)	(10,0,5) - [7,0,2]

Lista 3

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-3,0,0,0)	(0,0,5) - [0,0,3]
(0,2-3,0,0)	(0,0,6) - [0,0,5]
(1-3,2-3,0,0)	(0,0,11) - [0,0,8]
(1-3,2-3,3-3,0)	(0,0,16) - [0,0,10]
(0,0,3-2,0)	(0,5,0) - [0,4,0]
(1-3,0,3-2,0)	(0,5,5) - [0,4,3]
(0,2-3,3-2,0)	(0,5,6) - [0,4,5]
(1-3,2-3,3-2,0)	(0,5,11) - [0,4,8]
(1-2,0,3-2,0)	(0,11,0) - [0,8,0]
(1-2,2-3,3-2,0)	(0,11,6) - [0,8,5]
(1-3,2-2,3-2,0)	(0,13,5) - [0,7,3]
(1-2,2-2,3-2,0)	(0,19,0) - [0,11,0]
(0,2-1,0,0)	(5,0,0) - [2,0,0]
(1-3,2-1,0,0)	(5,0,5) - [2,0,3]
(1-3,2-1,3-3,0)	(5,0,10) - [2,0,5]
(0,2-1,3-2,0)	(5,5,0) - [2,4,0]
(1-3,2-1,3-2,0)	(5,5,5) - [2,4,3]
(1-2,2-1,3-2,0)	(5,11,0) - [2,8,0]
(0,2-3,3-1,0)	(6,0,6) - [1,0,5]
(1-3,2-3,3-1,0)	(6,0,11) - [1,0,11]
(1-2,2-3,3-1,0)	(6,6,6) - [1,4,5]
(1-1,0,0,0)	(8,0,0) - [5,0,0]
(1-1,0,3-3,0)	(8,0,5) - [5,0,2]
(1-1,2-3,0,0)	(8,0,6) - [5,0,5]
(1-1,2-3,3-3,0)	(8,0,11) - [5,0,7]
(1-1,0,3-2, 0)	(8,5,0) - [5,4,0]
(1-1,2-3,3-2,0)	(8,5,6) - [5,4,5]
(1-1,2-2,0,0)	(8,8,0) - [5,3,0]
(1-1,2-2,3-3,0)	(8,8,5) - [5,3,2]
(1-1,2-2,3-2,0)	(8,13,0) - [5,7,0]
(1-1,2-1,0,0)	(10,0,0) - [7,0,0]
(1-1,2-1,3-3,0)	(10,0,5) - [7,0,2]
(1-1,2-1,3-2,0)	(10,5,0) - [7,4,0]
(1-3,2-1,3-1,0)	(11,0,5) - [3,0,3]
(1-1,2-3,3-1,0)	(14,0,6) - [6,0,5]
(1-1,2-1,3-1,0)	(16,0,0) - [8,0,0]

(5,0,0) - [3,0,0]

Lista 4.1

(0,0,0,4-1)	(5,0,0) - [3,0,0]
(1-3,0,0,4-1)	(5,0,5) - [3,0,3]
(0,2-3,0,4-1)	(5,0,6) - [3,0,5]
(1-3,2-3,0,4-1)	(5,0,11) - [3,0,8]
(1-3,2-3,3-3,4-1)	(5,0,16) - [3,0,10]
(0,0,3-2,4-1)	(5,5,0) - [3,4,0]
(1-3,0,3-2,4-1)	(5,5,5) - [3,4,3]
(0,2-3,3-2,4-1)	(5,5,6) - [3,4,5]
(1-3,2-3,3-2,4-1)	(5,5,11) - [3,4,8]
(1-2,0,3-2,4-1)	(5,11,0) - [3,8,0]
(1-2,2-3,3-2,4-1)	(5,11,6) - [3,8,5]
(1-3,2-2,3-2,4-1)	(5,13,5) - [3,7,3]
(1-2,2-2,3-2,4-1)	(5,19,0) - [3,11,0]
(0,2-1,0,4-1)	(10,0,0(- [5,0,0]

Lista 4.1 (continuación)

(1-3,2-1,0,4-1)	(10,0,5) - [5,0,3]
(1-3,2-1,3-3,4-1)	(10,0,10) - [5,0,5]
(0,2-1,3-2,4-1)	(10,5,0) - [5,4,0]
(1-3,2-1,3-2,4-1)	(10,5,5) - [5,4,3]
(1-2,2-1,3-2,4-1)	(10,11,0) - [5,8,0]
(0,2-3,3-1,4-1)	(11,0,6) - [4,0,5]
(1-3,2-3,3-1,4-1)	(11,0,11) - [4,0,11]
(1-2,2-3,3-1,4-1)	(11,6,6) - [4,4,5]
(1-1,0,0,4-1)	(13,0,0) - [8,0,0]
(1-1,0,3-3,4-1)	(13,0,5) - [8,0,2]
(1-1,2-3,0,4-1)	(13,0,6) - [8,0,5]
(1-1,2-3,3-3,4-1)	(13,0,11) - [8,0,7]
(1-1,0,3-2,4-1)	(13,5,0) - [8,4,0]
(1-1,2-3,3-2,4-1)	(13,5,6) - [8,4,5]
(1-1,2-2,3-3,4-1)	(13,8,5) - [8,3,2]
(1-1,2-2,3-2,4-1)	(13,13,0) - [8,7,0]
(1-1,2-1,0,4-1)	(15,0,0) - [10,0,0]
(1-1,2-1,3-3,4-1)	(15,0,5) - [10,0,2]
(1-1,2-1,3-2,4-1)	(18,5,0) - [10,4,0]
(1-3,2-1,3-1,4-1)	(16,0,5) - [6,0,3]
(1-1,2-3,3-1,4-1)	(19,0,6) - [9,0,5]
(1-1,2-1,3-1,4-1)	(21,0,0) - [11,0,0]

(0,7,0) - [0,1,0]

Lista 4.2

(0,0,0,4-2)	(0,7,0) - [0,1,0]
(1-3,0,0,4-2)	(0,7,5) - [0,1,3]
(0,2-3,0,4-2)	(0,7,6) - [0,1,5]
(1-3,2-3,0,4-2)	(0,7,11) - [0,1,3]
(1-3,2-3,3-3,4-2)	(0,7,16) - [0,1,10]
(0,0,3-2,4-2)	(0,12,0) - [0,5,0]
(1-3,0,3-2,4-2)	(0,12,5) - [0,5,3]
(0,2-3,3-2,4-2)	(0,12,6) - [0,5,5]
(1-3,2-3,3-2,4-2)	(0,12,11) - [0,5,8]
(1-2,0,3-2,4-2)	(0,18,0) - [0,9,0]
(1-2,2-3,3-2,4-2)	(0,18,6) - [0,9,5]
(1-3,2-2,3-2,4-2)	(0,20,5) - [0,8,3]
(1-2,2-2,3-2,4-2)	(0,26,0) - [0,12,0]
(0,2-1,0,4-2)	(5,7,0) - [2,1,0]
(1-3,2-1,0,4-2)	(5,7,5) - [2,1,3]
(1-3,2-1,3-3,4-2)	(5,7,10) - [2,1,5]
(0,2-1,3-2,4-2)	(5,12,0) - [2,5,0]
(1-3,2-1,3-2,4-2)	(5,12,5) - [2,5,3]
(1-2,2-1,3-2,4-2)	(5,18,0) - [2,9,0]
(0,2-3,3-1,4-2)	(6,7,6) - [1,1,5]
(1-3,2-3,3-1,4-2)	(6,7,11) - [1,1,11]
(1-2,2-3,3-1,4-2)	(6,13,6) - [1,5,5]
(1-1,0,0,4-2)	(8,7,0) - [5,1,0]
(1-1,0,3-3,4-2)	(8,7,5) - [5,1,2]
(1-1,2-3,0,4-2)	(8,7,6) - [5,1,5]
(1-1,2-3,3-3,4-2)	(8,7,11) - [5,1,7]
(1-1,0,3-2,4-2)	(8,12,0) - [5,5,0]
(1-1,2-3,3-2,4-2)	(8,12,6) - [5,5,5]
(1-1,2-2,0,4-2)	(8,15,0) - [5,4,0]
(1-1,2-2,3-3,4-2)	(8,15,5(- [5,4,2]
(1-1,2-2,3-2,4-2)	(8,20,0) - [5,8,0]
(1-1,2-1,0,4-2)	(10,7,0) - [7,1,0]
(1-1,2-1,3-3,4-2)	(10,7,5) - [7,1,2]
(1-1,2-1,3-2,4-2)	(13,12,0) - [7,5,0]
(1-3,2-1,3-1,4-2)	(11,7,5) - [3,1,3]
(1-1,2-3,3-1,4-2)	(14,7,6) - [6,1,5]
(1-1,2-1,3-1,4-2)	(16,7,0) - [8,1,0]

(0,0,6) - [0,0,4]

Lista 4.3

(0,0,0,4-3)	(0,0,6) - [0,0,4]
(1-3,0,0,4-3)	(0,0,11) - [0,0,7]
(0,2-3,0,4-3)	(0,0,12) - [0,0,9]
(1-3,2-3,0,4-3)	(0,0,17) - [0,0,12]
(1-3,2-3,3-3,4-3)	(0,0,22) - [0,0,14]
(0,0,3-2,4-3)	(0,5,6) - [0,4,4]
(1-3,0,3-2,4-3)	(0,5,11) - [0,4,7]
(0,2-3,3-2,4-3)	(0,5,12) - [0,4,9]
(1-3,2-3,3-2,4-3)	(0,5,17) - [0,4,12]
(1-2,0,3-2,4-3)	(0,11,6) - [0,8,4]
(1-2,2-3,3-2,4-3)	(0,11,12) - [0,8,9]
(1-3,2-2,3-2,4-3)	(0,13,11) - [0,7,7]
(1-2,2-2,3-2,4-3)	(0,19,6) - [0,11,4]
(0,2-1,0,4-3)	(5,0,6) - [2,0,4]
(1-3,2-1,0,4-3)	(5,0,11) - [2,0,7]
(1-3,2-1,3-3,4-3)	(5,0,16) - [2,0,9]
(0,2-1,3-2,4-3)	(5,5,6) - [2,4,4]
(1-3,2-1,3-2,4-3)	(5,5,11) - [2,4,7]
(1-2,2-1,3-2,4-3)	(5,11,6) - [2,8,4]

Lista 4.3 (continuación)

(1-2,2-1,3-2,4-3)	(5,11,6) - [2,8,4]
(0,2-3,3-1,4-3)	(6,0,12) - [1,0,9]
(1-3,2-3,3-1,4-3)	(6,0,17) - [1,0,15]
(1-2,2-3,3-1,4-3)	(6,6,12) - [1,4,9]
(1-1,0,0,4-3)	(8,0,6) - [5,0,4]
(1-1,0,3-3,4-3)	(8,0,11) - [5,0,6]
(1-1,2-3,0,4-3)	(8,0,12) - [5,0,9]
(1-1,2-3,3-3,4-3)	(8,0,17) - [5,0,11]
(1-1,0,3-2,4-3)	(8,5,6) - [5,4,4]
(1-1,2-3,3-2,4-3)	(8,5,12) - [5,4,9]
(1-1,2-2,0,4-3)	(8,8,6) - [5,3,4]
(1-1,2-2,3-3,4-3)	(8,8,11) - [5,3,6]
(1-1,2-2,3-2,4-3)	(8,13,6) - [5,7,4]
(1-1,2-1,0,4-3)	(10,0,6) - [7,0,4]
(1-1,2-1,3-3,4-3)	(10,0,11) - [7,0,6]
(1-1,2-1,3-2,4-3)	(13,5,6) - [7,4,4]
(1-3,2-1,3-1,4-3)	(11,0,11) - [3,0,7]
(1-1,2-3,3-1,4-3)	(14,0,12) - [5,0,9]
(1-1,2-1,3-1,4-3)	(16,0,6) - [2,0,4]

Lista 4

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(1-3,0,0,0)	(0,0,5) - [0,0,3]
(0,2-3,0,0)	(0,0,6) - [0,0,5]
(1-3,2-3,0,0)	(0,0,11) - [0,0,8]
(0,2-3,0,4-3)	(0,0,12) - [0,0,9]
(1-3,2-3,3-3,0)	(0,0,16) - [0,0,10]
(1-3,2-3,0,4-3)	(0,0,17) - [0,0,12]
(1-3,2-3,3-3,4-3)	(0,0,22) - [0,0,14]
(0,0,3-2,0)	(0,5,0) - [0,4,0]
(1-3,0,3-2,0)	(0,5,5) - [0,4,3]
(0,2-3,3-2,0)	(0,5,6) - [0,4,5]
(1-3,2-3,3-2,0)	(0,5,11) - [0,4,8]
(0,2-3,3-2,4-3)	(0,5,12) - [0,4,9]
(1-3,2-3,3-3,4-2)	(0,7,16) - [0,1,10]
(1-3,2-3,3-2,4-3)	(0,5,17) - [0,4,12]
(1-2,0,3-2,0)	(0,11,0) - [0,8,0]
(1-3,0,3-2,4-2)	(0,12,5) - [0,5,3]
(1-2,2-3,3-2,0)	(0,11,6) - [0,8,5]
(1-3,2-3,3-2,4-2)	(0,12,11) - [0,5,8]
(1-2,2-3,3-2,4-3)	(0,11,12) - [0,8,9]
(1-3,2-2,3-2,0)	(0,13,5) - [0,7,3]
(1-3,2-2,3-2,4-3)	(0,13,11) - [0,7,7]
(1-2,0,3-2,4-2)	(0,18,0) - [0,9,0]
(1-2,2-3,3-2,4-2)	(0,18,6) - [0,9,5]
(1-2,2-2,3-2,0)	(0,19,0) - [0,11,0]
(1-2,2-2,3-2,4-3)	(0,19,6) - [0,11,4]
(1-3,2-2,3-2,4-2)	(0,20,5) - [0,8,3]
(1-2,2-2,3-2,4-2)	(0,26,0) - [0,12,0]
(0,0,0,4-1)	(5,0,0) - [3,0,0]
(1-3,0,0,4-1)	(5,0,5) - [3,0,3]
(0,2-3,0,4-1)	(5,0,6) - [3,0,5]
(1-3,2-3,0,4-1)	(5,0,11) - [3,0,8]
(1-3,2-3,3-3,4-1)	(5,0,16) - [3,0,10]
(0,0,3-2,4-1)	(5,5,0) - [3,4,0]
(1-3,0,3-2,4-1)	(5,5,5) - [3,4,3]
(0,2-3,3-2,4-1)	(5,5,6) - [3,4,5]
(1-3,2-3,3-2,4-1)	(5,5,11) - [3,4,8]
(1-2,0,3-2,4-1)	(5,11,0) - [3,8,0]
(1-3,2-1,3-2,4-2)	(5,12,5) - [2,5,3]
(1-2,2-3,3-2,4-1)	(5,11,6) - [3,8,5]
(1-3,2-2,3-2,4-1)	(5,13,5) - [3,7,3]
(1-2,2-1,3-2,4-2)	(5,18,0) - [2,9,0]
(1-2,2-2,3-2,4-1)	(5,19,0) - [3,11,0]
(0,2-3,3-1,0)	(6,0,6) - [1,0,5]
(1-3,2-3,3-1,0)	(6,0,11) - [1,0,11]
(1-3,2-3,3-1,4-3)	(6,0,17) - [1,0,15]
(1-2,2-3,3-1,0)	(6,6,6) - [1,4,5]
(1-2,2-3,3-1,4-3)	(6,6,12) - [1,4,9]
(1-3,2-3,3-1,4-2)	(6,7,11) - [1,1,11]
(1-1, 0, 0, 0)	(8,0,0) - [5,0,0]
(1-1,0,3-3,0)	(8,0,5) - [5,0,2]
(1-1,2-3,0,0)	(8,0,6) - [5,0,5]
(1-1,2-3,3-3,0)	(8,0,11) - [5,0,7]
(1-1,2-3,3-3,4-3)	(8,0,17) - [5,0,11]
(1-1,0,3-2,0)	(8,5,0) - [5,4,0]
(1-1,2-3,3-2,0)	(8,5,6) - [5,4,5]
(1-1,2-3,3-2,4-3)	(8,5,12) - [5,4,9]
(1-1,0,3-3,4-2)	(8,7,5) - [5,1,2]
(1-1,2-3,3-3,4-2)	(8,7,11) - [5,1,7]
(1-1,2-2,0,0)	(8,8,0) - [5,3,0]
(1-1,2-2,3-3,0)	(8,8,5) - [5,3,2]
(1-1,2-2,0,4-3)	(8,8,6) - [5,3,4]
(1-1,2-2,3-3,4-3)	(8,8,11) - [5,3,6]
(1-1,0,3-2,4-2)	(8,12,0) - [5,5,0]
(1-1,2-3,3-2,4-2)	(8,12,6) - [5,5,5]
(1-1,2-2,3-2,0)	(8,13,0) - [5,7,0]

Lista 4 (continuación)

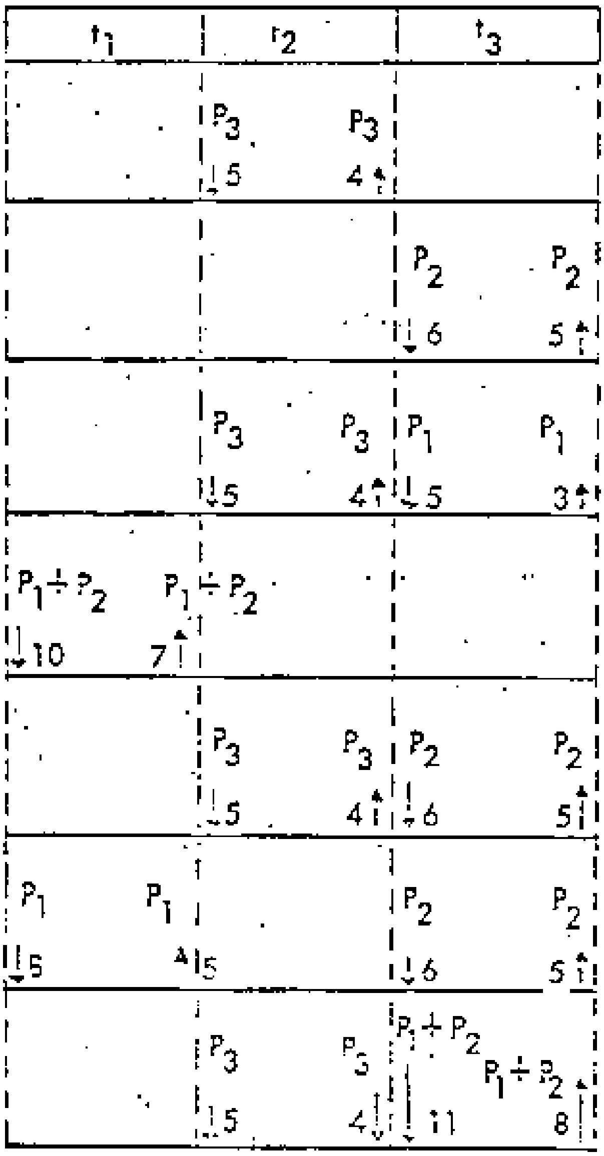
(1-1,2-2,3-2,4-3)	(8,13,6) - [5,7,4]
(1-1,2-2,3-3,4-2)	(8,15,5) - [5,4,2]
(1-1,2-2,3-2,4-2)	(8,20,0) - [5,8,0]
(1-1,2-1,0,0)	(10,0,0) - [7,0,0]
(1-1,2-1,3-3,0)	(10,0,5) - [7,0,2]
(1-3,2-1,0,4-1)	(10,0,5) - [5,0,3]
(1-1,2-1,0,4-3)	(10,0,6) - [7,0,4]
(1-1,2-1,3-3,4-3)	(10,0,11) - [7,0,6]
(1-1,2-1,3-2,0)	(13,5,0) - [7,4,0]
(1-3,2-1,3-2,4-1)	(10,5,5) - [5,4,3]
(1-1,2-1,3-2,4-3)	(13,5,6) - [7,4,4]
(1-1,2-1,3-3,4-2)	(10,7,5) - [7,1,2]
(1-1,2-1,3-2,4-2)	(13,12,0) - [7,5,0]
(1-2,2-1,3-2,4-1)	(10,11,0) - [5,8,0]
(1-3,2-1,3-1,0)	(11,0,5) - [3,0,3]
(0,2-3,3-1,4-1)	(11,0,6) - [4,0,5]
(1-3,2-3,3-1,4-1)	(11,0,11) - [4,0,11]
(1-1,0,0,4-1)	(13,0,0) - [8,0,0]
(1-1,0,3-3,4-1)	(13,0,5) - [8,0,2]
(1-1,2-3,0,4-1)	(13,0,6) - [8,0,5]
(1-1,2-3,3-3,4-1)	(13,0,11) - [8,0,7]
(1-1,0,3-2,4-1)	(13,5,0) - [8,4,0]
(1-1,2-3,3-2,4-1)	(13,5,6) - [8,4,5]
(1-1,2-2,3-3,4-1)	(13,8,5) - [8,3,2]
(1-1,2-2,3-2,4-1)	(13,13,0) - [8,7,0]
(1-1,2-1,0, 4 - 1)	(15,0,0) - [10,0,0]
(1-1,2-1,3-3,4-1)	(15,0,5) - [10,0,2]
(1-1,2-1,3-2,4-1)	(18,5,0) - [10,4,0]
(1-3,2-1,3-1,4-1)	(16,0,5) - [6,0,3]
(1-1,2-3,3-1,4-1)	(19,0,6) - [8,0,5]
(1-1,2-1,3-1,4-1)	(21,0,0) - [11,0,0]

Los puntos eficientes son:

(0,0,0,0)	(0,0,0) - [0,0,0]
(0,0,3-2,0)	(0,5,0) - [0,4,0]
(0,2-3,0,0)	(0,0,6) - [0,0,5]
(1-3,0,3-2,0)	(0,5,5) - [0,4,3]
(1-1,2-1,0,0)	(10,0,0) - [7,0,0]
(0,2-3,3-2,0)	(0,5,6) - [0,4,5]
(1-1,2-3,0,0)	(8,0,6) - [5,0,5]
(1-3,2-3,3-2,0)	(0,5,11) - [0,4,8]
(0,2-3,3-2,4-3)	(0,5,12) - [0,4,9]

(1-2,2-3,3-2,0)	(0,11,6) - [0,8,5]
(1-1,2-3,3-2,0)	(8,5,6) - [5,4,5]
(1-3,2-3,3-2,4-1)	(5,5,11) - [3,4,8]
(1-3,2-3,3-2,4-3)	(0,5,11) - [0,4,12]
(1-2,2-3,3-2,4-1)	(3,11,6) - [3,8,5]
(1-2,2-3,3-2,4-3)	(0,11,12) - [0,8,9]
(1-1,2-3,3-2,4-3)	(8,5,12) - [5,4,9]

Los programas óptimos de inversiones para diferentes disponibilidades son:



C.T. = 5, B.T. = 4

C.T. = 6, B.T. = 5

C.T. = 10, B.T. = 7

C.T. = 10, B.T. = 7

C.T. = 11, B.T. = 9

C.T. = 14, B.T. = 10

C.T. = 16, B.T. = 12

t_1	t_2	t_3	
	P_3 ↓5 — P_3 4↑	P_2+P_4 ↓12 — P_2+P_4 9↑	C.T. = 17, B.T. = 13
	P_1+P_3 ↓11 — P_1+P_3 8↑	P_2 ↓6 — P_2 5↑	C.T. = 17, B.T. = 13
P_1 ↓8 — P_1 5↑	P_3 ↓5 — P_3 4↑	P_2 ↓6 — P_2 5↑	C.T. = 19, B.T. = 14
P_4 ↓5 — P_4 3↑	P_3 ↓5 — P_3 4↑	P_1+P_2 ↓11 — P_1+P_2 8↑	C.T. = 21, B.T. = 15
	P_3 ↓5 — P_3 4↑	$P_1+P_2+P_4$ ↓17 — $P_1+P_2+P_4$ 12↑	C.T. = 22, B.T. = 16
P_4 ↓5 — P_4 3↑	P_1+P_3 ↓11 — P_1+P_3 8↑	P_2 ↓6 — P_2 5↑	C.T. = 22, B.T. = 16
	P_1+P_3 ↓11 — P_1+P_3 8↑	P_2+P_4 ↓12 — P_2+P_4 9↑	C.T. = 23, B.T. = 17
P_1 ↓8 — P_1 5↑	P_2 ↓5 — P_3 4↑	P_2+P_4 ↓12 — P_2+P_4 9↑	C.T. = 25, B.T. = 18

256. <u>Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en la programación de inversiones en proyectos indivisibles de períodos múltiples.</u> (ejemplo).

Sea un horizonte de cinco períodos $T = 5$ en el que se desea programar tres proyectos P_1, P_2 y P_3, cada uno de tres períodos de inversión, cuyo monto de cada uno de éstos variará con el período en que se realice, análogamente ocurre con los beneficios.

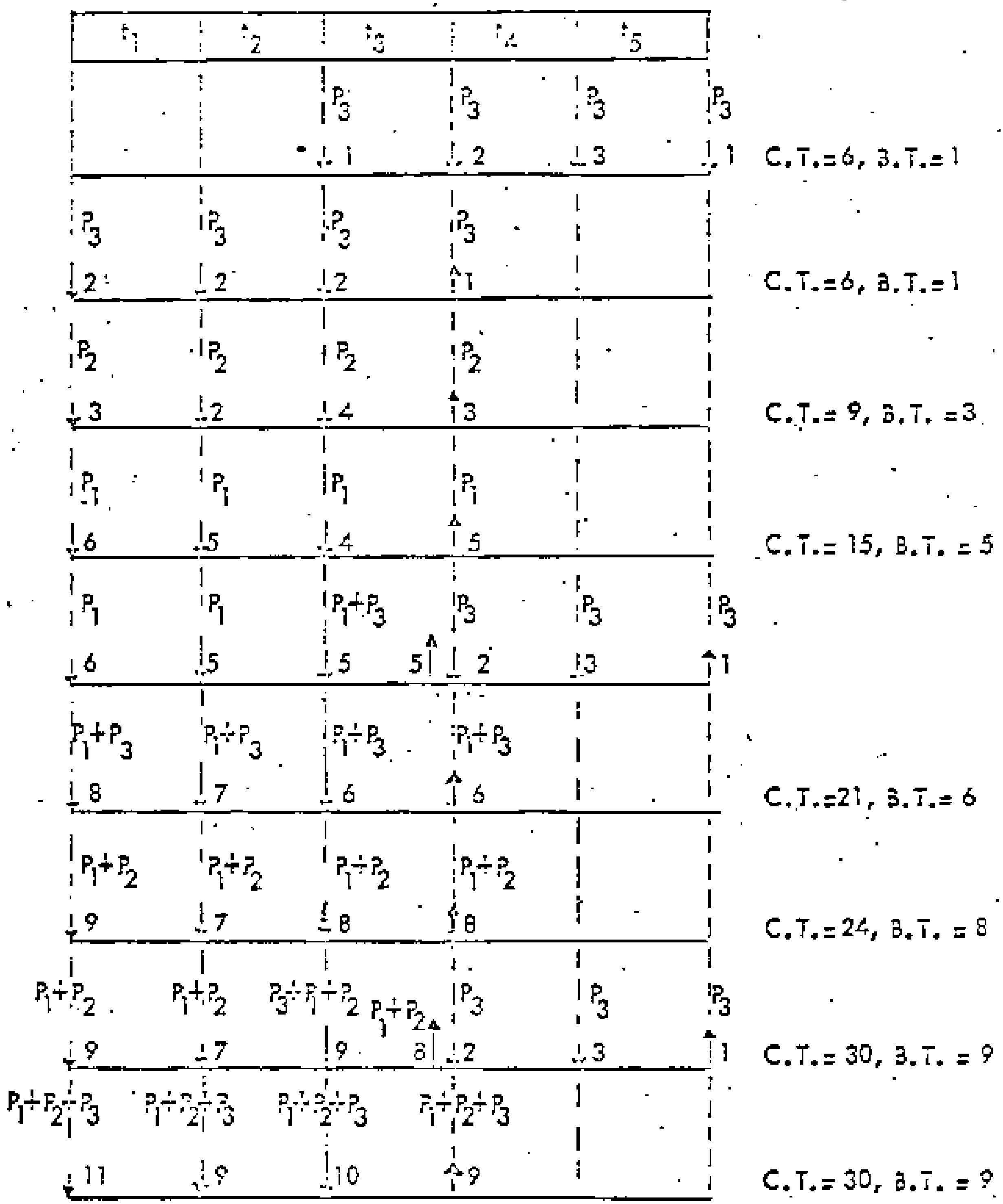
Los datos son como sigue:

	Costos					Beneficios				
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
P_1	6	5	4					5		
P_1		5	6	5					4	
P_1			4	5	6					4
P_2	3	2	4					3		
P_2		4	2	3					2	
P_2			2	5	1					1
P_3	2	2	2					1		
P_3		2	3	4					1	
P_3			1	2	3					1

Se tratará como un problema de selección óptima de proyectos divisibles (no capitalizables) con varias alternativas de inversión mutuamente exclusivas.

1-1	(6,5,4,0,0)	-	[5,0,0]
1-2	(0,5,6,5,0)	-	[0,4,0]
1-3	(0,0,4,5,6)	-	[0,0,4]
2-1	(3,2,4,0,0)	-	[3,0,0]
2-2	(0,4,2,3,0)	-	[0,2,0]
2-3	(0,0,2,5,1)	-	[0,0,1]
3-1	(2,2,2,0,0)	-	[1,0,0]
3-2	(0,2,3,4,0)	-	[0,1,0]
3-3	(0,0,1,2,3)	-	[0,0,1]

Los resultados aparecen en el programa adjunto.


t1
t2
t3
t4
t5
C.T.=6, B.T.=1
C.T.=6, B.T.=1
C.T.= 9, B.T. =3
C.T.= 15, B.T. = 5
C.T.=21, B.T.= 6
C.T.=24, B.T. = 8
C.T.= 30, B.T. = 9
C.T.= 30, B.T. = 9

257. Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en la programación de inversiones en proyectos mixtos de períodos múltiples. (ejemplo)

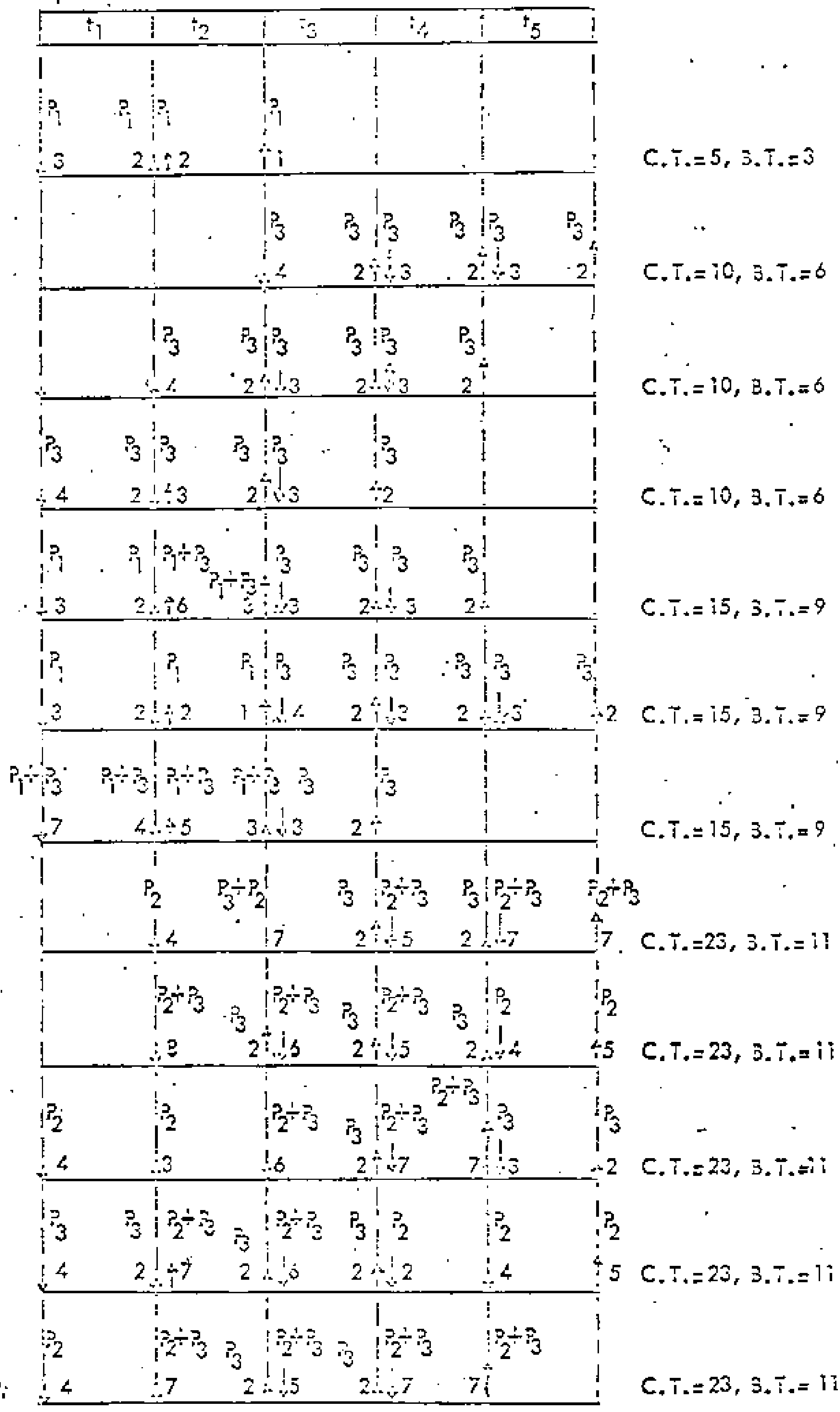
Considérese un horizonte de planeación de cinco períodos $T = 5$ y los proyectos P_1 divisible en dos períodos, P_2 indivisible de cuatro períodos de inversión y P_3 divisible de tres períodos de inversión y beneficios. Los datos se muestran en la tabla adjunta.

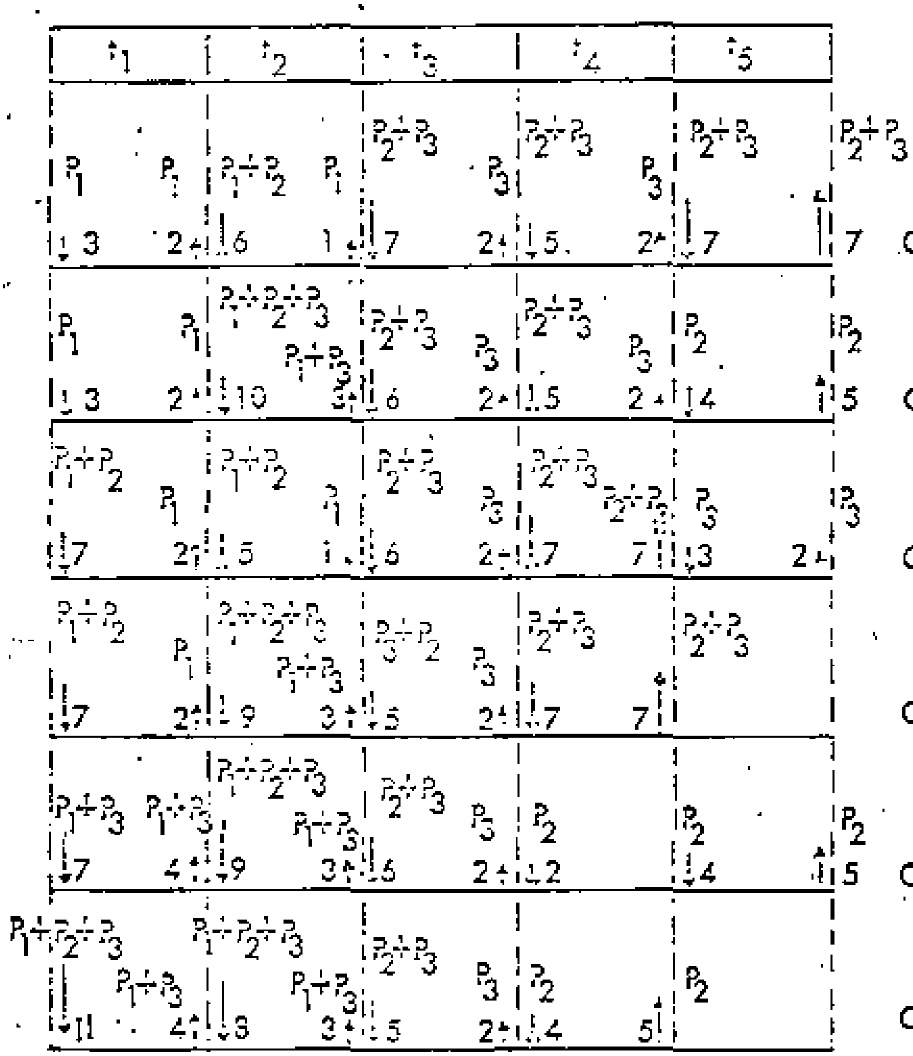
	Costos					Beneficios				
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
P_1	3	2				2	1			
P_1		4	3				2	1		
P_1			5	4				2	1	
P_1				4	5				2	1
P_2	4	3	2	4					5	
P_2		4	3	2	4					5
P_3	4	3	3			2	2	2		
P_3		4	3	3			2	2	2	
P_3			4	3	3			2	2	2

Se tratará como un problema de selección óptima de proyectos divisibles (no capitalizables) con varias alternativas de inversión mutuamente exclusivas.

1-1	(3,2,0,0,0)	-	(2,1,0,0,0)
1-2	(0,4,3,0,0)	-	(0,2,1,0,0)
1-3	(0,0,5,4,0)	-	(0,0,2,1,0)
1-4	(0,0,0,4,5)	-	(0,0,0,2,1)
2-1	(4,3,2,4,0)	-	(0,0,0,5,0)
2-2	(0,4,3,2,4)	-	(0,0,0,0,5)
3-1	(4,3,3,0,0)	-	(2,2,2,0,0)
3-2	(0,4,3,3,0)	-	(0,2,2,2,0)
3-3	(0,0,4,3,3)	-	(0,0,2,2,2)

Los resultados óptimos, para diferentes disponibilidades, aparecen en el programa de inversión adjunto.





C.T. = 28, B.T. = 14

C.T. = 28, B.T. = 14

C.T. = 28, B.T. = 14

C.T. = 28, B.T. = 14

C.T. = 28, B.T. = 14

C.T. = 28, B.T. = 14

ASPECTOS ALEATORIOS

258. Versión aleatoria del valor presente

Considérese una inversión que resultará en flujo de fondos durante algunos de los siguientes n períodos. Sea X_j la variable aleatoria asociada con el flujo en el j-ésimo período $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Se supondrá que X_j tiene una distribución $N(\mu_j, \quad_j)$. Se harán dos hipótesis con respecto a la relación de las v.a. X_j para diferentes valores de j.

i) Para distintos valores de j las X_j son totalmente independientes $(r = 0)$

ii) Para distintos valores de j las X_j se encuentran totalmente correlacionados $(r = 1)$.

Es claro que cualquier caso intermedio implicará una combinación de los resultados obtenidos con cada una de las hipótesis anteriores.

Ahora bien, es sabido que el valor presente de una inversión se define como:

$$P = \sum_{j=0}^{n} \frac{X_j}{(1+i)^j}$$

en donde i es la tasa de interés que refleja el valor que el inversor dá al valor con el tiempo de la moneda. Puesto que X_j es una variable aleatoria P a su vez será una variable aleatoria (suma ponderada de las v.a. X_j). De acuerdo con las propiedades de la suma de v.a., la esperanza matemática de P será:

$$\mu_p = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mu_i}{(1+i)^i}$$

Por otra parte, haciendo uso inicialmente de la hipótesis (I) y de las propiedades de la suma de variables, la variancia de P será:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i^2}{(1+i)^{2i}}$$

Haciendo ahora uso de la hipótesis (II), esto es, que si X_m se identifica con $m + K\sigma_m$ entonces X_i se identifica con $\mu_i + K\sigma_i$. Esta hipótesis de hecho establece que si ciertas circunstancias obligan al flujo a apartarse de lo esperado durante un período m, las mismas circunstancias lo obligarán a apartarse de lo esperado durante cualquier período i y exactamente de la misma manera. En estas condiciones la v.a. P se encontrará distribuída normalmente con una dispersión

$$\sigma_p = \sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{(1+i)^i}$$

Cualquier otro comportamiento será una combinación de los dos anteriores, entonces, X_i que son totalmente independientes y los $Z_i^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ que se encuentran perfectamente correlacionadas

$$X_i = Y_i + Z_i^{(1)} + Z_i^{(2)} + \ldots + Z_i^{(m)}$$

en donde el superíndice indica el período al que está asociada la variable con la que se encuentran perfectamente correlacionadas.

Empleando nuevamente los teoremas sobre la distribución de la suma

$$\mu_P = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mu_j}{(1+i)^j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{E(Y_j) + \sum_{k=1}^{m} E(Z_j^{(k)})}{(1+i)^j}$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=0}^{n} \frac{Var(Y_j)}{(1+i)^{2j}} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\sqrt{Var(Z_j^{(k)})}}{(1+i)^j} \right)^2$$

259. Versión aleatoria del costo anual

Puesto que el costo anual es:

$$A = - \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{(1+i)^j}$$

$$A = - \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} P$$

A y P son por tanto proporcionales y los parámetros μ_A y σ_A son consecuencia directa.

260. Versión aleatoria de la tasa interna de recuperación

La tasa interna de recuperación se ha definido como el valor de i para el cual $P = 0$. Entonces, para obtener la distribución de probabilidad de R, se obtendrá la distribución de P para diferentes valores de i, con objeto de encontrar la distribución acumulada de R y de ahí deducir la densidad correspondiente. Puesto que

$$\text{Prob}\left\{R < i\right\} = \text{Prob}\left\{P < 0 \mid i\right\}$$

Para obtener la distribución acumulada de R basta repetir los cálculos de Prob $\left\{P < 0 \mid i\right\}$ para tantos valores de i como se desee. Por otra parte cabe señalar que la densidad de R se aproxima fuertemente a la normal (como ha sido demostrado por diversos autores) y aprovechar este hecho para ajustar una curva de Gauss a la distribución de R y estimar sus parámetros mediante la distribución acumulada.

261. Observación

Puede pensarse que el suponer una distribución de probabilidad normal para las X_i es limitativo y dudoso, sin embargo, por el teorema central de límite se puede afirmar que aun en el caso en que la distribución real de las X_i se aparte de la Gaussiana no se afectarán los resultados finales, en particular cuando n es grande.

Comparación entre dos inversiones. (ejemplo)

Sean las inversiones A y B que se desean comparar con objeto de tomar una decisión usando un horizonte de planeación de $T = 6$ años.

Para un camino vecinal que servirá fundamentalmente para la transportación de productos forestales se consideran dos alternativas, hacerlo pavimentado (alternativa A) que implica una inversión inicial de cinco millones, costo que puede incrementarse o disminuirse debido a la falta de estudios previos, la experiencia indica que un millón de pesos de dispersión toma en cuenta esta ignorancia. La conservación en esta alternativa cuesta $300,000.00 considerando una dispersión de $200,000.00 ó $ 100,000.00 consecutivamente para estimar posibles incrementos al deterioro estándar, con excepción del último año en donde debe tomarse en cuenta una posible reconstrucción con $ 300,000.00. La otra opción (alternativa B) implica un empedrado con un costo inicial de dos millones de pesos reconstrucciones parciales cada dos años con costos de un millón, un millón y millón y medio respectivamente, medio millón por conservación en los años en que no hay reconstrucción. La incertidumbre se considera menor y se asigna una dispersión medio millón a la inicial y $200,000.00 a las restantes.

Año	Alternativa A		Alternativa B	
	μ_A	σ_A	μ_B	σ_B
0	50	10	20	5
1	3	2	5	2
2	3	1	10	2
3	3	2	5	2
4	3	1	10	2
5	3	2	5	2
6	3	3	15	2

(en cienmiles de pesos)

Se pregunta:

¿Cuál es la decisión a tomar considerando un costo de capital de 7%?

Usar como constantes en la función utilidad $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0.1$

¿Cuál sería la decisión en el caso determinista y para el mismo 7%?

Estudiar sensibilidad para factores de descuento comprendidos entre 1% y 15%.

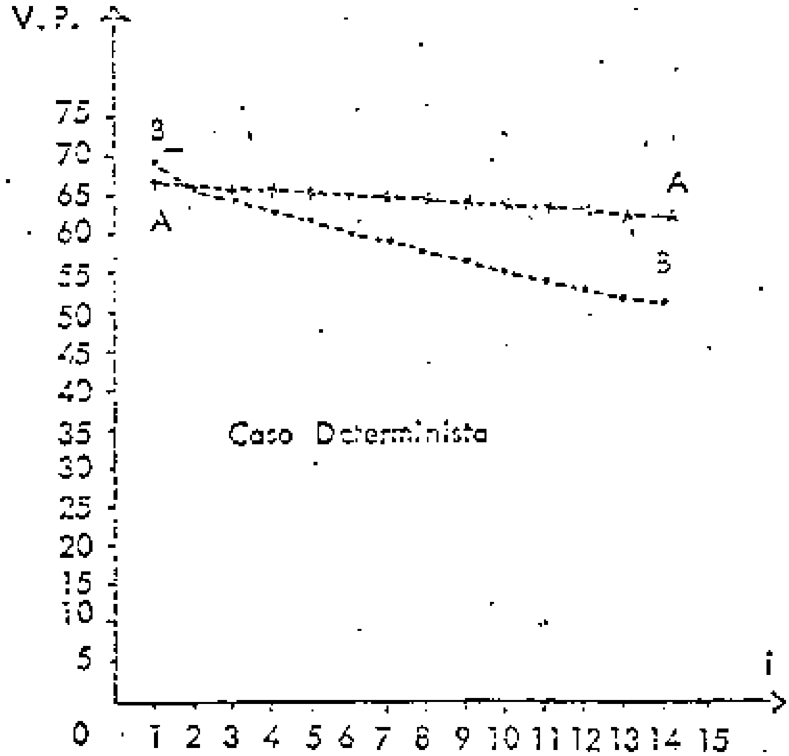
Alternativa A

	$E(Y)/(1+i)^i$							μ_{P_A}	$Var(Y_i)/(1+i)^{2i}$							σ^2_P
i \ j	0	1	2	3	4	5	6		0	1	2	3	4	5	6	
1	50	2.47	2.94	2.91	2.89	2.85	2.83	67.39	100	3.92	0.96	3.76	0.93	3.62	57.00	170.19
2	50	2.94	2.89	2.83	2.78	2.73	2.65	66.82	100	3.84	0.92	3.56	0.86	3.30	50.00	162.45
3	50	2.91	2.83	2.75	2.63	2.59	2.52	66.28	100	3.76	0.89	3.37	0.80	2.97	45.20	156.79
4	50	2.88	2.78	2.67	2.57	2.46	2.36	65.72	100	3.69	0.86	3.18	0.73	2.69	39.60	150.75
5	50	2.86	2.73	2.58	2.46	2.34	2.23	65.20	100	3.63	0.83	2.97	0.67	2.44	35.60	146.14
6	50	2.83	2.68	2.52	2.38	2.24	2.11	64.76	100	3.55	0.80	2.82	0.63	2.22	31.70	141.72
7	50	2.80	2.63	2.44	2.29	2.14	2.00	64.30	100	3.48	0.77	2.64	0.58	2.03	28.40	137.90
8	50	2.77	2.57	2.38	2.21	2.04	1.88	63.85	100	3.42	0.73	2.52	0.54	1.85	25.30	134.36
9	50	2.75	2.52	2.31	2.13	1.94	1.78	63.43	100	3.36	0.70	2.37	0.50	1.69	22.70	131.32
10	50	2.73	2.48	2.25	2.05	1.86	1.69	63.05	100	3.30	0.68	2.26	0.47	1.54	20.40	128.65
11	50	2.70	2.44	2.19	1.97	1.78	1.60	62.68	100	3.24	0.66	2.13	0.43	1.41	18.30	126.17
12	50	2.68	2.40	2.14	1.91	1.70	1.52	62.35	100	3.18	0.64	2.04	0.40	1.29	16.50	124.05
13	50	2.65	2.35	2.07	1.84	1.62	1.43	61.95	100	3.13	0.61	1.91	0.38	1.17	14.70	121.90
14	50	2.63	2.31	2.03	1.77	1.55	1.37	61.65	100	3.03	0.59	1.83	0.35	1.07	13.30	120.22
15	50	2.61	2.27	1.97	1.71	1.49	1.30	61.35	100	3.02	0.57	1.73	0.33	0.93	12.10	116.73

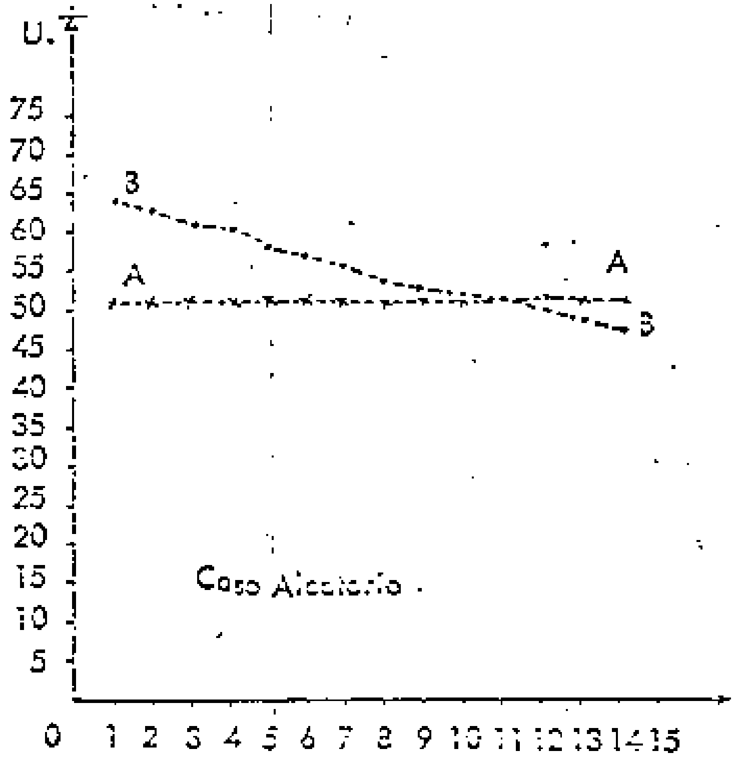
Alternative B

i	$E(Y_i)/(1+i)^i$ 0	1	2	3	4	5	6	μ_{P_B}	$Var(Y_i)/(1+i)^{2i}$ 0	1	2	3	4	5	6	$\sigma^2_{P_B}$
1	20	4.95	9.80	4.85	9.61	4.76	14.15	68.13	25	3.92	3.84	3.76	3.69	3.62	3.56	47.3[illegible]
2	20	4.90	9.61	4.71	9.25	4.54	13.25	66.27	25	3.84	3.69	3.55	3.43	3.30	3.12	45.9[illegible]
3	20	4.85	9.44	4.58	8.94	4.31	12.50	64.72	[illegible]	[illegible]	3.56	3.37	3.18	2.97	2.82	44.65
4	20	4.81	9.26	4.46	8.53	4.09	11.85	63.02	25	3.69	3.43	3.16	2.92	2.69	2.48	43.37
5	20	4.76	9.09	4.31	8.20	3.91	11.25	61.52	25	3.63	3.30	2.97	2.68	2.44	2.23	42.25
6	20	4.71	8.93	4.20	7.93	3.73	10.55	60.05	25	3.55	3.18	2.82	2.52	2.22	1.98	41.27
7	20	4.67	8.78	4.07	7.63	3.57	10.00	58.72	25	3.48	3.07	2.64	2.33	2.05	1.77	40.32
8	20	4.63	8.54	3.97	7.35	3.40	9.44	57.33	25	3.42	2.92	2.50	2.17	1.85	1.58	39.45
9	20	4.59	8.40	3.85	7.10	3.25	8.94	56.13	25	3.36	2.83	2.37	2.02	1.69	1.41	38.65
10	20	4.54	8.27	3.76	6.85	3.11	8.48	55.01	25	3.30	2.73	2.26	1.87	1.54	1.27	37.97
11	20	4.50	8.13	3.65	6.57	2.97	8.03	53.85	25	3.24	2.64	2.13	1.73	1.41	1.15	37.30
12	20	4.46	8.00	3.57	6.37	2.84	7.61	52.85	25	3.18	2.55	2.04	1.62	1.29	1.03	36.72
13	20	4.42	7.81	3.45	6.13	2.71	7.18	51.70	25	3.13	2.44	1.91	1.51	1.17	0.92	36.08
14	20	4.38	7.69	3.38	5.92	2.59	6.85	50.81	25	3.08	2.36	1.83	1.40	1.07	0.83	35.57
15	20	4.35	7.57	3.29	5.72	2.49	6.50	49.92	25	3.02	2.29	1.73	1.31	0.93	0.75	35.03

i	μ_{P_A}	$-0.1\sigma^2_{P_A}$	U_A	μ_{P_B}	$-0.1\sigma^2_{P_B}$	U_B
1	67.39	-17.02	50.37	68.13	-4.74	63.3[illegible]
2	66.82	-16.25	50.57	66.27	-4.59	61.6[illegible]
3	66.28	-15.70	50.58	64.72	-4.46	60.26
4	65.72	-15.08	50.64	63.02	-4.34	58.68
5	65.20	-14.61	50.59	61.52	-4.22	57.30
6	64.76	-14.17	50.59	60.05	-4.12	55.93
7	64.30	-13.79	50.51	58.72	-4.03	54.69
8	63.85	-13.44	50.41	57.33	-3.95	53.38
9	63.43	-13.13	50.30	56.13	-3.87	52.26
10	63.06	-12.87	50.19	55.01	-3.80	51.21
11	62.68	-12.62	50.06	53.85	-3.73	50.12
12	62.35	-12.40	49.95	52.85	-3.67	49.18
13	61.96	-12.20	49.76	51.70	-3.61	48.09
14	61.66	-12.02	49.64	50.81	-3.56	47.25
15	61.30	-11.87	49.43	49.92	-3.51	46.41



V.P.
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
i
A
B
Caso Determinista



U.
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
A
B
Caso Aleatorio

Para 7%, en el caso determinista, la decisión es alternativa B

Para 7%, en el caso aleatorio, la decisión es alternativa A.

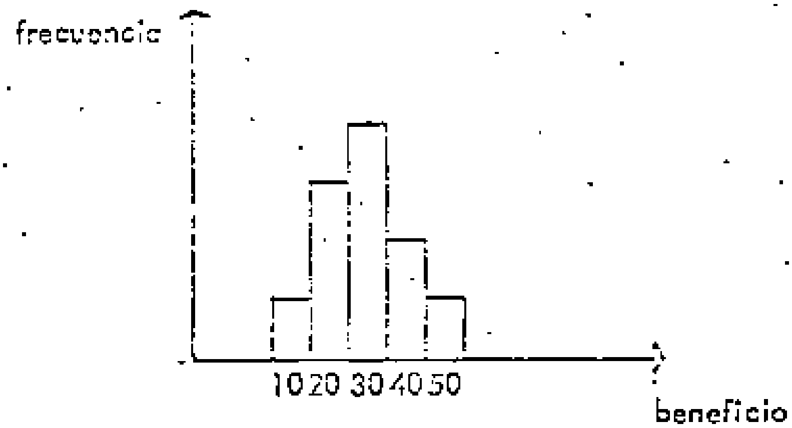
Obsérvese que el no considerar los aspectos aleatorios conduce o puede conducir a decisiones erróneas. Este problema se reanalizará más adelante.

263. Combinación de inversiones (Problema estático)

Los métodos del valor presente, costo anual, etc... en su versión aleatoria, toman en cuenta el riesgo, pero analizando cada una de las inversiones por separado. Los métodos descritos solamente permiten establecer un orden de preferencia considerando características internas, pero sin tomar en cuenta interrelaciones en los beneficios; o bien los beneficios derivados de una combinación de inversiones.

Cuando lo que se busca es una buena combinación de inversiones con objeto de lograr mejores beneficios se hace necesario disponer no sólo de las características aleatorias aisladas de cada uno de los proyectos, sino también, de aquellas que permiten relacionarlos: correlaciones y covariancias.

Así, un histograma de los beneficios, como el mostrado en la figura suministra información de caracter aleatorio sobre un tipo "A" de inversión aislado, pero no sobre como se ven afectados estos beneficios al considerar otro tipo de inversión B.



En resumen, al estudiar combinaciones de inversiones es necesario disponer de la esperanza matemática de la combinación, obtenida mediante la suma de esperanzas matemáticas de cada tipo de inversión (beneficios) por separado. La variancia de la combinación que nuevamente es la suma de las variancias correspondientes a los tipos de inversiones por separado. El coeficiente de correlación para cada par de combinaciones y las covariancias también para cada par por separado.

El cálculo de las variancias y covariancias permiten formular la matriz de covariancias

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ - & - & - & - \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

Misma de la que se hará uso posteriormente para el cálculo de las combinaciones eficientes.

264. Ejemplo

Obtener las características aleatorias de la combinación de los proyectos de inversión P_1, P_2 y P_3 si sus beneficios aislados son como a continuación se indica:

Monto del Beneficio	Frecuencia		
	P_1	P_2	P_3
10	5	9	2
20	6	12	4
30	10	8	7
40	8	5	9
50	3	1	8
60	1	0	5

Se tiene:

$$m_1 = 29.7 \ , \ m_2 = 23.4 \ , \ m_3 = 39.1$$

$$S_1^2 = 162.75 \ , \ S_2^2 = 122.57 \ , \ S_3^2 = 196.4$$

$$S_1 = 12.75 \ , \ S_2 = 11.05 \ , \ S_3 = 14.02$$

$$r_{12} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{35 \times 12.75 \times 11.05} = \frac{1}{4931} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{4,514.3}{4,931.0} = 0.915$$

$$r_{13} = \frac{1}{6256} \sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y}) = 0.942$$

$$r_{23} = \frac{1}{5422} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{4895.6}{5422} = 0.903$$

$$S_{12} = 0.915 \times 12.75 \times 11.05 = 129$$

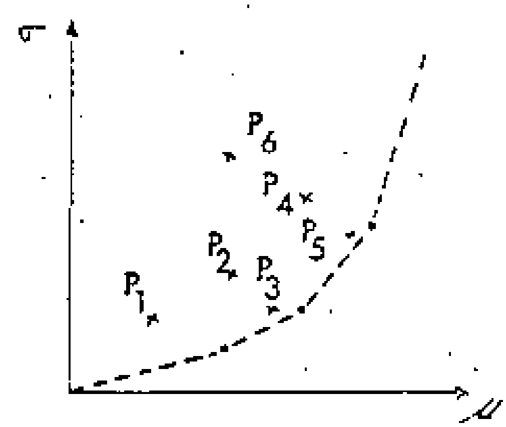
$$S_{13} = 0.942 \times 12.75 \times 14.02 = 168$$

$$S_{23} = 0.903 \times 11.05 \times 14.02 = 140$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 163 & 129 & 168 \\ 129 & 123 & 140 \\ 168 & 140 & 196 \end{bmatrix}$$

265. Combinaciónes de inversiones eficientes y líneas críticas

Se ha visto que a cada tipo de inversión considerada aisladamente se le pueden asociar dos parámetros definidos por el caracter aleatorio de los beneficios que genera: esperanza matemática y variancia $P_i(\mu_i, \sigma_i^2)$. Se pueden asociar puntos en un plano $\mu - \sigma^2$ a cada tipo de inversión.



Se observa que de esta manera se pueden clasificar los tipos de inversiones de acuerdo con sus beneficios. Por ejemplo P_3 será preferida sobre P_1 ya que a misma variancia corresponde mayor esperanza de beneficio para P_3. En forma análoga P_2 será preferida sobre P_6 puesto que ha misma esperanza ofrece mayor variancia. El principio de "Comportamiento Racional del Inversionista" hace uso de estas preferencias.

Ahora bien, si las inversiones son divisibles lo conveniente no es optar por un tipo aislado de ellas, sino aprovechar las relaciones entre beneficios buscando una combinación que ofrezca las dos siguientes características.

a) Para una esperanza dada la variancia será menor que para cualquier otra combinación (incluyendo las aisladas).

b) Para una variancia dada la esperanza será mayor que para cualquier otra combinación (incluyendo las aisladas).

Una combinación de inversiones que satisfaga los dos requisitos anteriores será eficiente. Al lugar geométrico de las combinaciones eficientes se le llama la línea crítica y ésta es una línea quebrada.

Puesto que la línea crítica es quebrada conviene definirla en términos de un parámetro λ de manera que resulta la familia $k = \lambda\mu - \sigma^2$, obsérvese que para definirla se está haciendo uso del comportamiento racional. ($k = 0$ si $\mu = \sigma^2 = 0$). Esta línea crítica es de la forma $U = a_0 + a_1\mu - a_2\sigma^2$ luego es una función utilidad como fué definida anteriormente.

266. Dosificación de las inversiones. Cálculo de la línea crítica.

El problema de las combinaciones eficientes se reduce a dosificar la intervención de cada uno de los tipos aislados, determinar porcentajes para dicha intervención, de acuerdo con aversión al riesgo del inversionista, con objeto de lograr dichas combinaciones eficientes.

Sea x_i el porcentaje con que intervendrá el tipo de inversión P_i en la combinación eficiente es claro que $\overline{x} = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n]$ tendrá como propiedad que

$$\sum_i x_i = 100\% = 1$$

se trata de un vector estocástico y determina una combinación eficiente.

Por la definición de esperanza matemática

$$E = \sum_i x_i \mu_i$$

será la esperanza de la combinación eficiente. Análogamente la variancia de dicha combinación será

$$V = \sum_i \sigma_i^2$$

o en términos de las x_i

$$V = \sum_{i,j} x_i x_j \sigma_{ij}$$

Si $\overline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ es el vector de las esperanzas

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & & \sigma_{1n} \\ - & - & - & & - \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \cdots & \sigma_{ii} & \cdots \sigma_{in} \\ - & - & - & & - \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} & \end{bmatrix}$$ es la matriz de las covariancias

entonces $\bar{E} = \bar{x}\bar{\mu}$, $V = \bar{x}\bar{c}\bar{x}$.

Para el cálculo de las combinaciones eficientes (línea crítica) se definirán también los siguientes vectores y matrices:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matriz } (n+1) \times (n+1)$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{vector } (n+1) \times 1$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{vector } (n+1) \times 1$$

La matriz $\tilde{\bar{M}}$ coincide con la $\bar{M}$ salvo que para los vectores no seleccionados en la etapa tiene cruces unitarios esto es, si x_i no es seleccionado en la etapa correspondiente la matriz $\tilde{\bar{M}}$ tendrá ceros en el renglón y en la columna i, salvo en su intersección en donde tendrá un uno. El vector $\tilde{\bar{S}}$ coincide con $\bar{S}$ salvo que si x_i no es seleccionado en la etapa el i-ésimo elemento es cero. λ_E es el parámetro en función del cual se describe la línea quebrada y medirá la aversión al riesgo del inversionista.

Markowits demuestra que la ecuación de la línea quebrada es:

$$\tilde{\overline{M}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \overline{R} + \tilde{\overline{S}} \lambda_E$$

$$\tilde{\overline{M}} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{\lambda} \end{bmatrix} = \overline{R} + \tilde{\overline{S}} \lambda_E$$

De donde se despejará la dosificación de acuerdo con la aversión al riesgo.

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{\lambda} \end{bmatrix} = (\tilde{\overline{M}})^{-1} \overline{R} + (\overline{M})^{-1} \tilde{\overline{S}} \lambda_E$$

El método procede por etapas describiendo en cada una de ellos el segmento de recta que identifica. Si i es la etapa, el segmento de recta será

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{\lambda} \end{bmatrix} = \overline{N}(i)\overline{R} + \overline{N}(i)\overline{S} \lambda_E$$

en donde $\overline{N}(i)$ coincide con $(\tilde{\overline{M}})^{-1}$ salvo que tendrá cruces de ceros para las x_i no seleccionadas.

En cada etapa será seleccionada la x_i de manera que la posición i sea la del mayor elemento de $\bar{\mu}$ no seleccionado previamente. λ_E será el mayor elemento de $\bar{\lambda}$ para la etapa correspondiente y para las variables que no se han seleccionado previamente.

Es posible distinguir pasos en el método para definir las combinaciones eficientes.

a) Identificar la $x_i^{(1)}$ que maximice a E

b) Encontrar la ecuación de la línea crítica asociada a $x_i^{(1)}$

c) Definir los valores de λ_E para los que la primera línea crítica intersecta otra línea crítica.

Para ello se definen

$$\bar{T}(1) = \bar{N}(1)\bar{R} \quad , \quad \bar{U}(1) = \bar{N}(1)\ \bar{S}$$

y para cada una de las variables no seleccionadas se plantea el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \bar{M}_i \cdot \bar{x} = \mu_i\ \lambda_E \\ \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \bar{T}(1) + \lambda_E\ \bar{U}\ (1) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (x_i \text{ variable no seleccionada}) \\ (\bar{M}_i \text{ . renglón i-ésimo de } \bar{M}) \end{array}$$

obteniéndose

$$\bar{M}_i \cdot \left[\bar{T}(1) + \lambda_E\, \bar{U}(1)\right] = \mu_i\ \lambda_E$$

despejar λ_E PARA CADA VARIABLE, será seleccionada la mayor λ_E. La i asociada a λ_E define $x_i^{(2)}$.

d) Encontrar la ecuación de la línea crítica asociada a $x_i^{(2)}$.

$\overline{N}(1)$ se modificará para proporcionar $\overline{N}(2)$ de la siguiente manera: Supóngase que i_0-ésima variable es seleccionada para la $(i+1)$-ésima línea crítica, sea $\overline{M}_{0\,i_0}$ la i_0-ésima columna de $\overline{M}$. Se definirá

$$\overline{B} = \overline{N}(i)\,\overline{M}_{0\,i_0}$$
$$b = \overline{B}\;\overline{M}_{0\,i_0}$$
$$c = m_{i_0 i_0} - b$$

Entonces los elementos g_{ij} de $\overline{N}(i+1)$ se expresan en términos de los f_{ij} de $\overline{N}(i)$ de la siguiente manera

$$g_{i_0 i_0} = \frac{1}{c}$$

$$g_{i\,i_0} = g_{i_0\,i} = -\frac{b_i}{c} \quad (i \neq i_0)$$

$$g_{ij} = f_{ij} + \frac{b_i\,b_j}{c} \quad (i \neq i_0 \neq j)$$

e) Definir, en la forma ya descrita, los valores de λ_E para los cuales la segunda línea crítica intersecta a otra y determinar los $x_i^{(3)}$ a partir de las ecuaciones de la línea crítica.

f) Repetir los pasos ya mencionados hasta que $\lambda_E = 0$.

g) Con los $x_i^{(k)}$ definidos en cada etapa encontrar los vértices de la línea crítica en el plano $\mu - \sigma^2$ mediante

$$E = \overline{x}\,\overline{\mu}\;,\quad \overline{V} = \overline{\overline{x}}\;\overline{c}\;\overline{x}$$

uno de los vértices en el origen.

h) Mediante la λ que corresponde a la aversión al riesgo del inversionista seleccionar la combinación eficiente correspondiente. Dada una λ se ubicará en el intervalo $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ que corresponde definiendo la razón $\lambda/\lambda_i = r$ y la x_3 buscada se expresará en términos de las x_i de los extremos.

$$x_3 = \frac{x_i + r\,x_{i+1}}{1 + r}$$

267. Ejemplo

Con los datos del número 264 encontrar la línea crítica.

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \end{bmatrix} \qquad \bar{C} = \begin{bmatrix} 163 & 129 & 168 \\ 129 & 123 & 140 \\ 168 & 140 & 196 \end{bmatrix}$$

las matrices y vectores adicionales resultan

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 163 & 129 & 168 & 1 \\ 129 & 123 & 140 & 1 \\ 168 & 140 & 196 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) La $x_i^{(1)}$ que maximiza a E es $x_3^{(1)}$ $\bar{x} = [0,0,1]$ es el primer vértice.

b) Cálculo de la línea crítica asociada a $x_3^{(1)}$.

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 196 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad (\tilde{M})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{N}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix}$$

luego:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_E$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.1 \end{bmatrix} \lambda_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.1\lambda_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 + 39.1\lambda_E \end{bmatrix}$$

c) Valores de λ_E para los que una línea crítica intersecta a otra.

$$\overline{T}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 \end{bmatrix} \qquad \overline{U}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.1 \end{bmatrix}$$

para $i = 1$

$$\begin{bmatrix} 168 & 129 & 168 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 + 39.1\lambda_E \end{bmatrix} = 29.7\,\lambda_E$$

$$168 + (196 + 39.1\lambda_E) = 29.7\lambda_E$$

$$-28 + 39.1\lambda_E = 29.7\lambda_E$$

$$\lambda_E = \frac{28}{9.4} = 2.97$$

para $i = 2$

$$\begin{bmatrix}129 & 123 & 140 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196+39.1\,\lambda_E \end{bmatrix} = 23.4\,\lambda_E$$

$$140+(-196+39.1\,\lambda_E) = 23.4\,\lambda_E$$

$$-56+39.1\,\lambda_E = 23.4\,\lambda_E$$

$$\lambda_E = \frac{56}{15.7} = 3.56687898$$

de donde $\lambda_E = \max\ \begin{bmatrix}2.97, 3.56687898\end{bmatrix} = 3.56687898$

y para $\bar{x} = \begin{bmatrix}0,0,1\end{bmatrix} = 3.56687898 \leq \lambda < \infty$

d) Ecuaciones de la línea crítica asociado a $x_2^{(2)}$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 129 \\ 123 \\ 140 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -56 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -56\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 129 \\ 123 \\ 140 \\ 1 \end{bmatrix} = 84$$

$$c = 123 - 84 = 39$$

$$\frac{1}{c} = 0.0256410$$

$$\overline{N}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0256410 & -0.0256410 & 1.435896 \\ 0 & -0.0256410 & 0.0256410 & -0.435896 \\ 0 & 1.435896 & -0.435896 & -115.589824 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.435896 \\ -0.435896 \\ -115.589824 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4025737 \\ 0.4025737 \\ 16.5564328 \end{bmatrix}$$

como comprobación

$$-0.435896 + 3.56687898\,(0.4025737) \doteq 1$$

e) Determinación de λ_E para el que la nueva línea crítica intersecta alguna otra.

La primera intersección ocurre cuando

$$x_3 = 0 = -\,0.435896 + 0.4025737\ \lambda_E$$

$$\lambda_E = \frac{0.435896}{0.4025737} = 1.08273732$$

La segunda intersección se calcula a partir de

$$\begin{bmatrix} 163 & 129 & .168 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.435896 - 0.4025737\ \lambda_E \\ -0.435896 + 0.4025737\ \lambda_E \\ -115.589824 + 16.5564328\ \lambda_E \end{bmatrix} = 29.7\,\lambda_E$$

$$185.230584 - 51.932007\,\lambda_E \quad -73.230528 + 67.632382\,\lambda_E - 115.589824$$

$$+\ 16.556433\,\lambda_E = 29.7\,\lambda_E$$

$$-3.589768 + 2.556808\,\lambda_E = 0$$

$$\lambda_E = \frac{3.589768}{2.556808} = 1.40400374$$

$$\lambda_E = \max \left[1.0827732,\ 140400374\right] = 1.40400374$$

El nuevo vértice es:

$x_1 = 0$

$x_2 = 1.435896 - (1.40400374)(0.4025737) = 1.435896 - 0.565215$

$x_3 = -0.435896 + (1.40400374)(0.4025737) = -0.435896 + 0.565215$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0.870681, \qquad x_3 = 0.129319$

$$1.404004 \leq \lambda \leq 3.566879$$

f) Ecuaciones de la nueva línea crítica.

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0256410 & -0.0256410 & 1.435896 \\ 0 & -0.0256410 & 0.0256410 & -0.435896 \\ 0 & 1.435896 & -0.435896 & -115.589824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 163 \\ 129 \\ 168 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3.307689 - 4.307688 + 1.435896 \\ -3.307689 + 4.307688 - 0.435896 \\ 185.230584 - 73.230528 - 115.589824 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0.435897 & 0.564103 & -3.589768 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 163 \\ 129 \\ 168 \\ 1 \end{bmatrix} = 56.230713 + 94.769304 - 3.589768$$

$b = 147.410\,120$

$c = 163 - 147.410120 = 15.589880 \qquad \frac{1}{c} = 0.0641442$

$$\overline{N}(3) = \begin{bmatrix} 0.0641442 & -0.0279603 & -0.0361839 & 0.230263 \\ -0.0279603 & 0.0378288 & -0.0098685 & 1.335525 \\ -0.0361839 & -0.0098685 & 0.0460525 & -0.565788 \\ 0.230263 & 1.335525 & -0.565788 & -114.763178 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.230263 \\ 1.335525 \\ -0.565788 \\ -114.763178 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} -0.-63978 \\ -0.331084 \\ 0.495068 \\ 15.967785 \end{bmatrix}$$

La comprobación es:

$$1.335525 - (1.404004)(0.331084) = 0.870681$$

$$-0.565788 + (1.404004)(0.495068) = 0.129319$$

g) Definición de intersecciones

$$x_2 = 1.335525 - 0.331084 \lambda_E = 0$$

$$\lambda_E = \frac{1.335525}{0.331084} = 4.033785$$

$$x_3 = -0.565788 + 0.495068 \lambda_E = 0$$

$$\lambda_E = \frac{0.565788}{0.495068} = 1.142849063$$

La primera intersección ocurre con una línea fuera del intervalo de la anterior. Interesará la segunda. $\lambda_E = 1.142849063$

Las coordenadas del nuevo vértice serán:

$$x_1 = 0.230263 - 0.187402 = 0.042861$$

$$x_2 = 1.335525 - 0.378379 = 0.957146$$

$$x_3 = -0.565788 + 0.565788 = 0.000000$$

$$1.142849 \leq \lambda \leq 1.404004$$

g) Ecuaciones de la nueva línea crítica.

Puesto que ahora se trata de eliminar una de las variables previamente seleccionadas, la x_3, las expresiones para obtener $\overline{N}(i+1)$ a partir de $\overline{N}(i)$ también se alteran. Las nuevas son:

$$g_{ij} = f_{ij} - \frac{f_{ijo}\, f_{joj}}{f_{jojo}}$$

$$\frac{1}{f_{jojo}} = 21.714348$$

$$\overline{N}(4) = \begin{bmatrix} 0.0357142 & -0.0357142 & 0 & -0.214282 \\ -0.0357142 & 0.0357142 & 0 & 1.214282 \\ 0 & 0 & 0 & \\ -0.214282 & 1.214282 & 0 & -121.714290 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.214282 \\ 1.214282 \\ 0 \\ -121.714290 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0.224801 \\ -0.224801 \\ 0 \\ 22.050024 \end{bmatrix}$$

La comprobación es análoga.

Puesto que λ_E ha alcanzado el valor cero el último punto es:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 0$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.142849$$

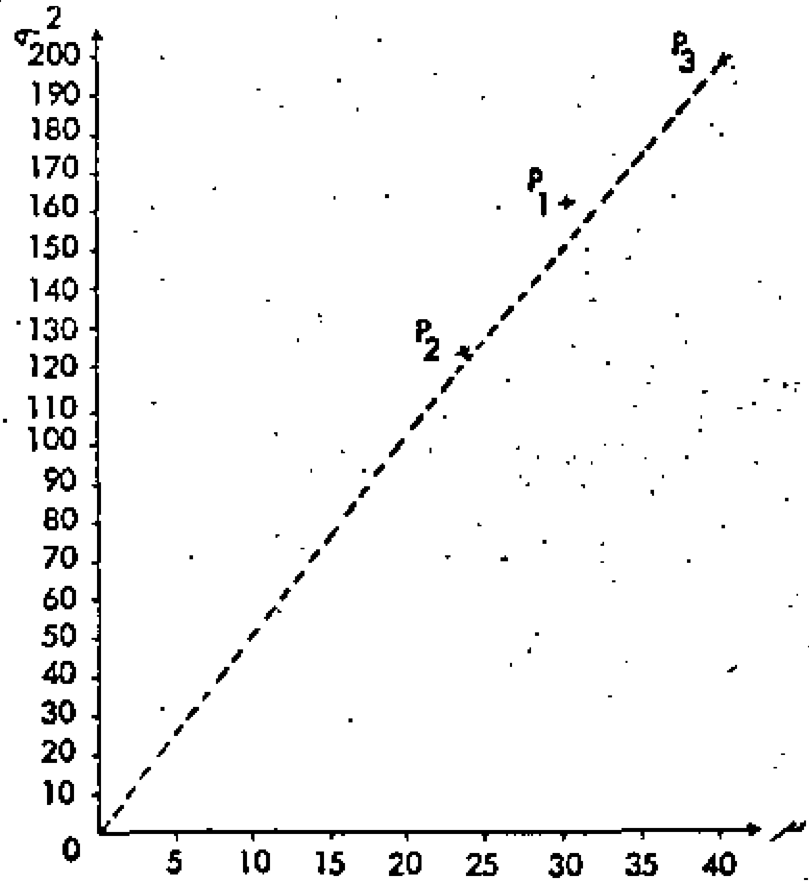
h) Los vértices en función de μ y σ^2.

Se tiene:

	V_1	μ_1	σ_1^2	V_2	μ_2	σ_2^2
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0.870681	20.36	107.91
x_3	1	39.10	196	0.129319	5.04	18.99
Σ		39.10	196		25.40	126.90

Continuación.....

V_3	μ_3	σ_3^2	V_4	μ_4	σ_4^2
0.042861	1.27	5.59	0	0	0
0.957146	22.40	117.98	1	23.4	123
0	0	0	0	0	0
	23.67	123.57		23.4	123



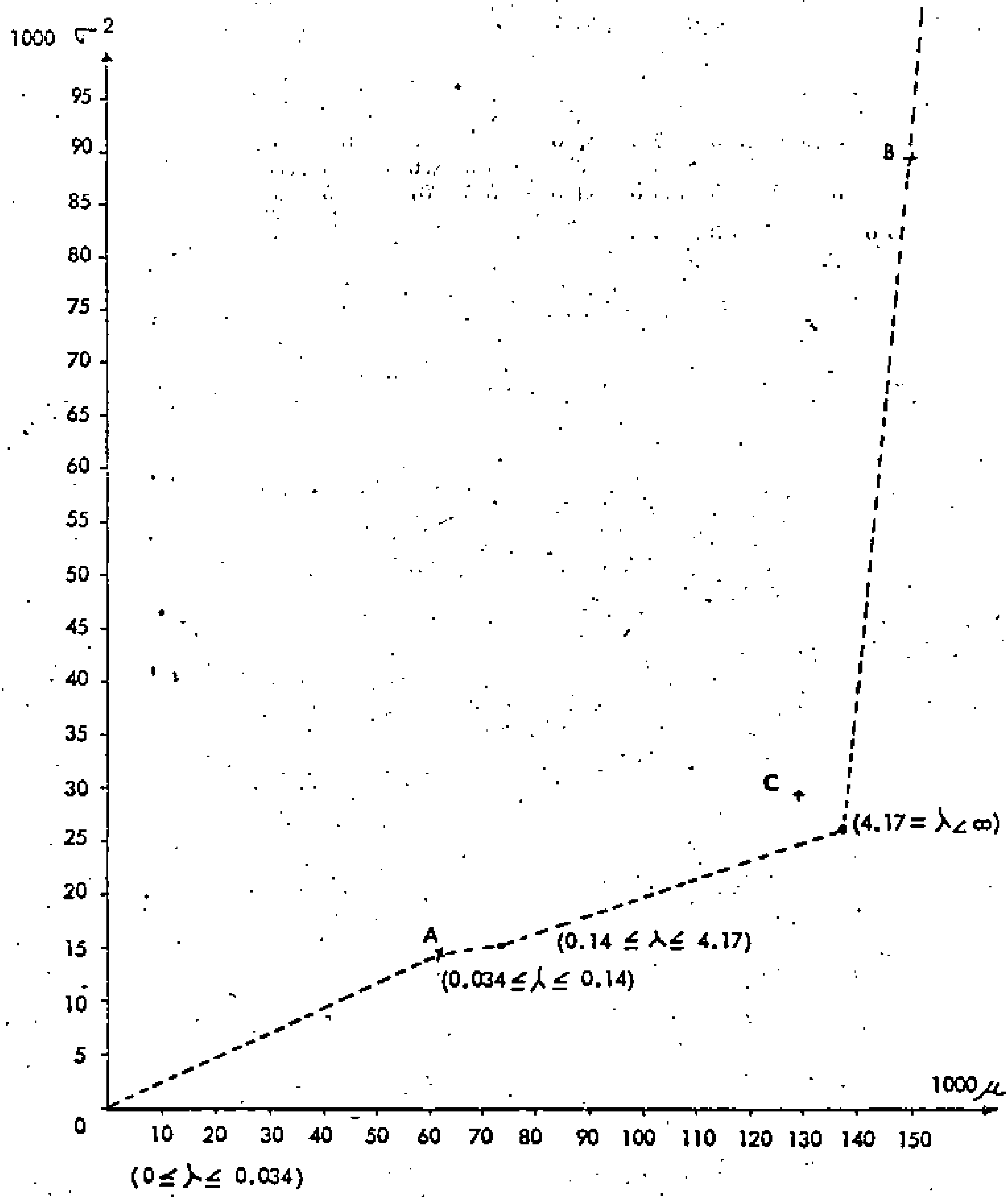
268. Ilustración (markowitz)

Sean tres tipos de inversiones A, B y C y se trata de dosificarlas

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} 0.062 \\ 0.146 \\ 0.128 \end{bmatrix} \qquad \bar{c} = \begin{bmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 \end{bmatrix}$$

Los resultados son como sigue:

	V_1	μ	σ_1^2	V_2	μ_2	σ_2^2	V_3	μ_3	σ_3^2	V_4	μ_4	σ_4^2
x_1	0	0	0	0	0		0.84	0.052	0.0123	0.99	0.061	0.0144
x_2	1	0.146	0.0854	0.22	0.032	0.0059	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0.72	0.103	0.0193	0.16	0.021	0.0027	0.01	0.001	0.0001
		0.146	0.0854		0.135	0.0252		0.073	0.0150		0.062	0.0145


1000 σ 2
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
B
C
A
(4.17 = λ < ∞)
(0.14 ≤ λ ≤ 4.17)
(0.034 ≤ λ ≤ 0.14)
1000 μ
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150
(0 ≤ λ ≤ 0.034)

269. Ejemplo

Se dispone de $ 50,000.00 ¿Cómo se invertiría esta suma considerando el primero de los dos problemas anteriores y

a) $\lambda = 10$

b) $\lambda = 3$

c) $\lambda = 1$

a) $\lambda = 10$

las ecuaciones de la línea crítica son:

$x_1 = 0 + 0\,\lambda$ luego $x_1 = 0 + 0\,(10) = 0$

$x_2 = 0 + 0\,\lambda$ $x_2 = 0 + 0\,(10) = 0$

$x_3 = 1 + 0\,\lambda$ $x_3 = 1 + 0\,(10) = 1$

Inversión en $P_1 = 0\,(50{,}000) = 0$

Inversión en $P_2 = 0\,(50{,}000) = 0$

Inversión en $P_3 = 1\,(50{,}000) = 50{,}000$

b) $\lambda = 3$

las ecuaciones de la línea crítica son:

$x_1 = 0 + \lambda(0)$

$x_2 = 1.44 + \lambda(-0.40)$

$x_3 = -0.44 + \lambda\,(0.40)$

luego para $\lambda = 3$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1.44 - 1.20 = 0.24$

$x_3 = -0.44 + 1.20 = 0.76$

Inversión en $P_1 = 0\ (50{,}000) = 0$

Inversión en $P_2 = 0.24\ (50{,}000) = 12{,}000$

Inversión en $P_3 = 0.76\ (50{,}000) = 38{,}000$

c) $= 1$

los ecuaciones de la línea crítica son:

$x_1 = -0.22 + 0.22\lambda$

$x_2 = 1.22 + (-0.22\lambda)$

$x_3 = 0 + 0\lambda$

luego para $\lambda = 1$

$x_1 = -0.22 + 0.22 = 0$

$x_2 = 1.22 - 0.22 = 1$

$x_3 = 0 - 0 = 0$

Inversión en $P_1 = 0$

Inversión en $P_2 = 50{,}000$

Inversión en $P_3 = 0$

270. Teorema de Markowitz – Wolfe

"Dado un conjunto finito de tipos de inversiones (I) todas ellas diversificables, el factor de diversificación x_i para una aversión al riesgo θ se encuentra haciendo máxima la función $U = \theta \bar{x}\, \bar{\mu} - \bar{x}\, \bar{c}\, \bar{x}$, cuando $\bar{x}$ es un vector estocástico".

Esto es:

$$\max z = \theta \; \bar{x}\bar{\mu} - \bar{x} \; c \; \bar{x}$$

s.a.

$$\sum_i x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Así para los datos del problema del número

$$\max z = 29.7\,\theta\, x_1 + 23.4\,\theta x_2 + 39.1\,\theta x_3 - 163\, x_1^2 - 129 x_1 x_2 - 168 x_1 x_3$$
$$- 129 x_1 x_2 - 123\, x_2^2 - 140\, x_2 x_3 - 140\, x_2 x_3 - 196\, x_3^2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$\max z = 29.7\,\theta x_1 + 23.4\,\theta x_2 + 39.1\,\theta x_3 - 163\, x_1^2 - 258\, x_1 x_2 -$$
$$336\, x_1 x_3 - 123\, x_2^2 - 280\, x_2 x_3 - 196\, x_3^2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Que es un problema de programación cuadrática paramétrica que puede resolverse con el método de Wolfe.

$\bar{b}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	ξ_1	μ_1	ν_1	ν_2	ν_3	θ	
	1	1	1							
	-326	-258	-336	-1	1	1			29.7	
	-258	-246	-280	-1	1		1		23.4	
	-336	-280	-392	-1	1			1	39.1	
z_1-c_1	12	0	44	1	-1	0	-1	0		
z_2-c_2	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
z_3-c_3	-3.8889	0	-7.1815	0	0	.1587	-.1587	0	0	
z_4-c_4	0	0	-4.2177	0	0	-.0733	-.0194	.0933	0	
z_5-c_5	15.019	0	0	0	0	-.5043	.2434	.2666		
z_6-c_6	3.7889	6.1609		0	0	0	-.059	.055	0	
z_7-c_7	0.6743	2.0183		-.24	.24			.24		
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	X	Y	θ			
Z	-246		-1		-246	-1				
x_2	1				1		∞			
ν_1	258	1			258	1	258			
μ_2	246		1		246	1*	246			
ν_3	280			1	280	1	280			
z						-1				
x_2	1				1					
ν_1	12	1	-1		12	6,3*	1.9047			
ξ_1	246		1		246	23.4	10.512			
ν_3	34		-1	1	34	15.7	2.1656			
z	1.9047	.1587	-.1587		1.9047	-8.8889				
x_2	1				1	1				
0	1.9047	.1587	-.1587		1.9047	-8.8889				
ξ_1	201.43	-3.7136	4.7136		201.43	187.9558				
ν_3	4.0962	-2.4916	1.4916	1	4.0962	95.5164*	.0428			
z	2.2851	-.0733	-.0194	.0933	2.2851	-4.2177				
x_2	.9572	.0261	-.0159	-.0105	.9572	0.7556	1			
6	2.2851	-.0733	-.0194	.0933	2.2851	-4.2177	-			
ξ_1	193.3855	1.092	1.7251	-1.9735	193.3855	117.0575	1			
x_1	.0428	-0.0261	.0159	.0105	.0428	0.2554*	.1676			
z	2.992	-.5043	.2434	.2666	2.992	-.5043				
x_2	0.8306	.1033	-.0620	-.0415	0.8306	.1033*	8.0406			
6	2.992	-.5043	.2434	.2666	2.992	-.5043	-			
ξ_1	173.7667	13.0553	-5.5676	-6.7846	173.7667	13.0553				
x_3	.1676	-.1022	.0623	.0411	.1676	-.1022	-			

	β_1	β_2	β_3	β_4	X	Y	θ			
z	7.0469		-.059	+.064	7.0469	-.059				
$\bar{v}_1$	8.0406	1	-.6	-.4017	8.0406	-.6				
θ	7.0469		-.059	+.069	7.0469	-.059				
$\bar{v}_1$	68.7943		2.2654	-1.5621	68.7943	2.2654*	30.3673			
x_3	1				1		∞			
	β_1	β_2	β_3	β_4	X	Y				
z	8.7383			.024	8.7383					
$\bar{v}_1$	26.4344	1		.8143	26.4344	-1.8143				
θ	8.7383			.024	8.7383	-.024				
$\bar{v}_2$	30.3673		1	-.6395	30.3673	-.3105	Solución no acotada.			FIN
x_3	1				1	0				

S	O	L	U	C	I	O	N

x_1	x_2	x_3		θ	k
0	1	0		0	1
0	1	0		1.9047	2
.0428	.9572	0		2.2851	3
0	.8306	.1676		2.992	4
0	0	1		7.0469	5

$$X^* = \left(1 - \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}\right) X^*_{k} + \left(\frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k}\right) X^*_{k+1}$$

271. Inversiones en proyectos

En los últimos números se han presentado métodos para seleccionar inversiones óptimas, pero no para seleccionar inversiones óptimas en proyectos. La principal diferencia es que el proyecto requiere, que si es seleccionado se invierta en él la totalidad de lo programado para realizarlo. No así las inversiones en bonos o acciones.

Aquí el problema es suministrar una lista de proyectos seleccionados y no un conjunto de factores de diversificación para inversiones.

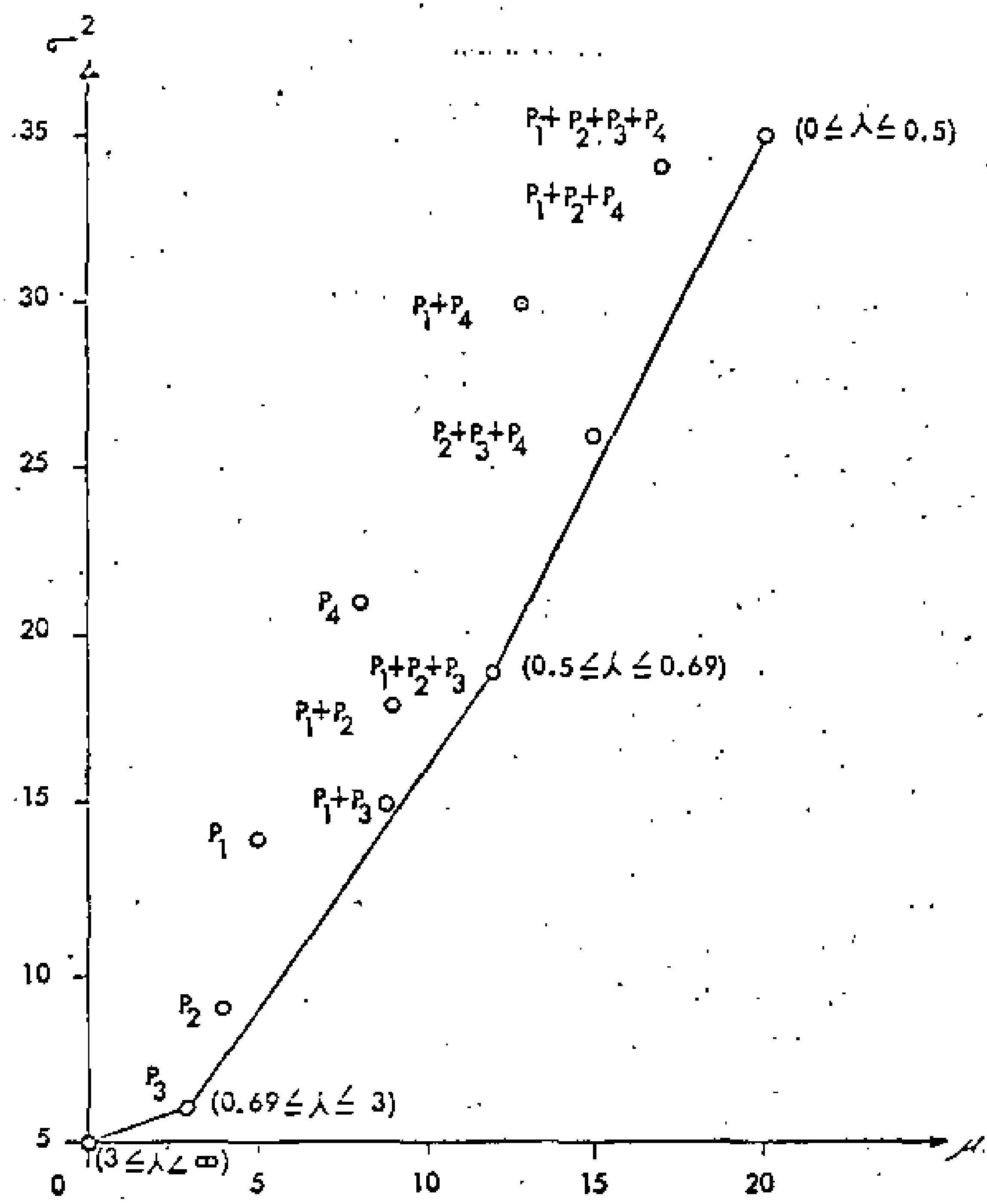
272. Selección de combinaciones óptimas de proyectos atendiendo únicamente a la eficiencia de los beneficios.

Cuando se consideran únicamente los beneficios aportados por los proyectos, el criterio para seleccionar combinaciones atiende exclusivamente a la eficiencia por concepto de esperanza y variancia. Puesto que se trata de suministrar una lista de proyectos, ésta estará constituída por aquellos que se encuentran en la línea crítica. Para determinar ésta última basta situar todas las combinaciones en el plano $\mu - \sigma^2$ y [illegible] la envolvente máxima (abajo y a la derecha) de los puntos dibujados.

a) Proyectos independientes (ejemplo)

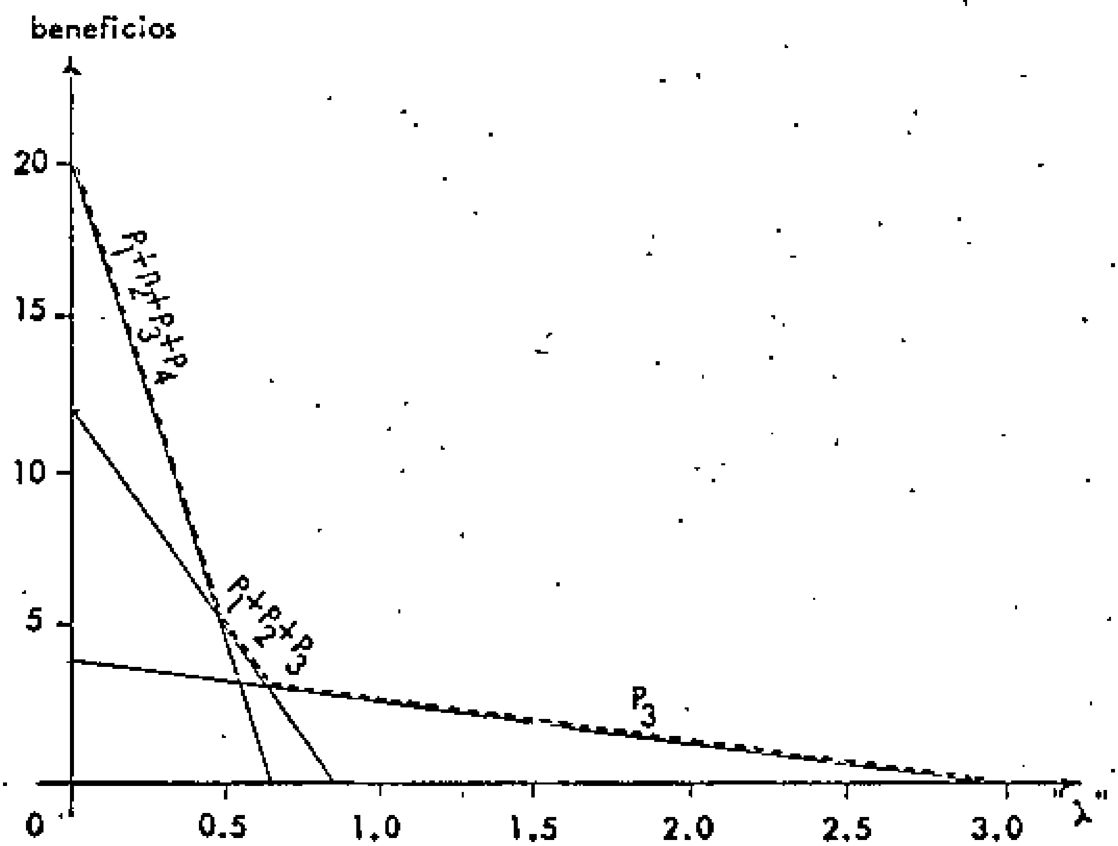
Sean los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 cuyos beneficios son respectivamente

$$P_1 \longrightarrow [5 - 9\lambda] \;,\; P_2 \longrightarrow [4 - 4\lambda],\; P_3 \longrightarrow [3 - \lambda] \;,\; P_4 \longrightarrow [8 - 16\lambda]$$



Las combinaciones eficientes son P_3, $P_1+P_2+P_3$, $P_1+P_2+P_3+P_4$

Mediante un plano λ - b (b = beneficio) se ratifica la solución anterior y se determinan los intervalos de "λ". Para ello basta trazar la envolvente superior.



$$P_3 \longrightarrow [3 - \lambda] \quad (0.69 \leq \lambda \leq 3.0)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 \longrightarrow [8 - 10\lambda] \quad (0.50 \leq \lambda \leq 0.69)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \rightarrow [20 - 30\lambda] \quad (0.0 \leq \lambda \leq 0.5)$$

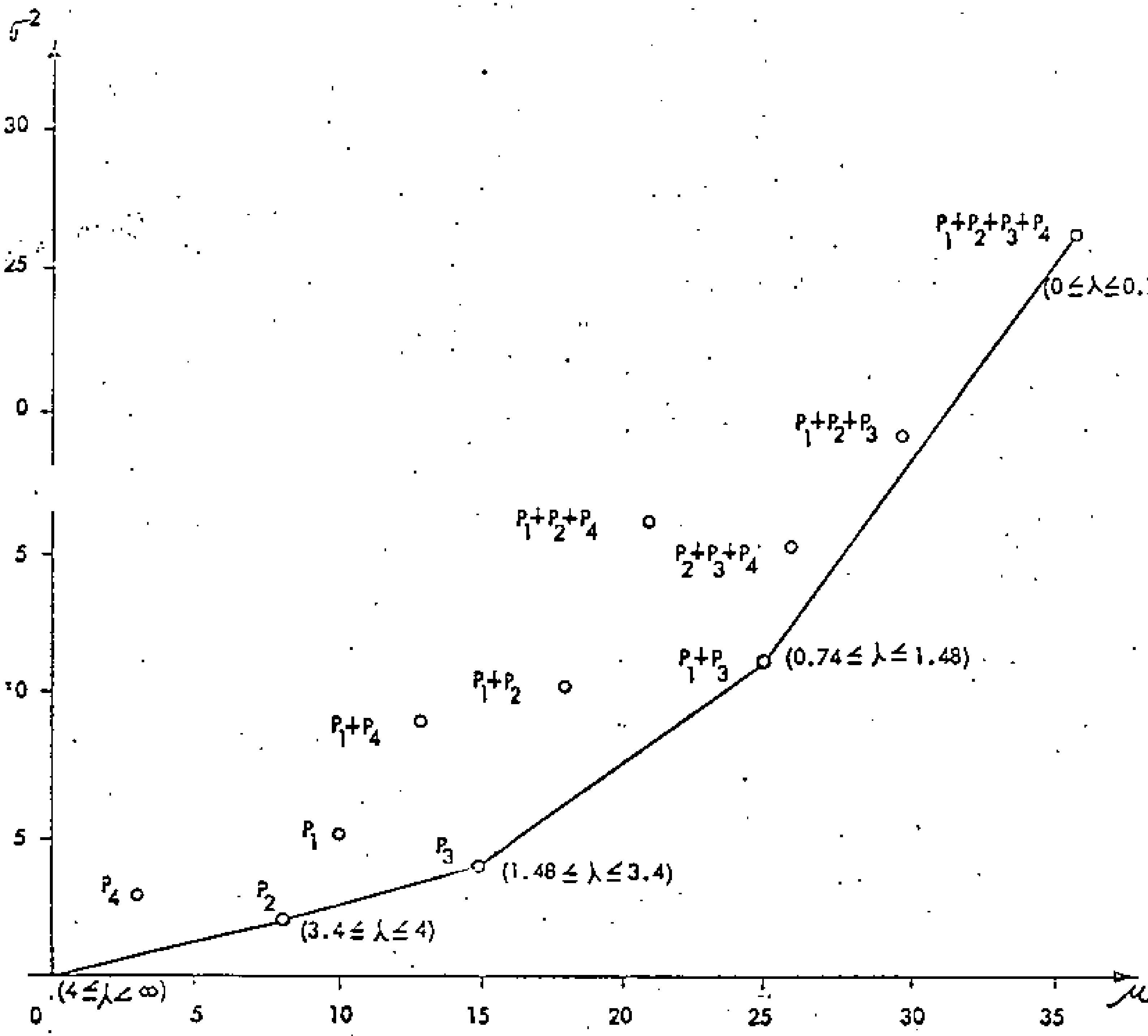
b) <u>Proyectos interrelacionados</u> (ejemplo)

Sean los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 tales que:

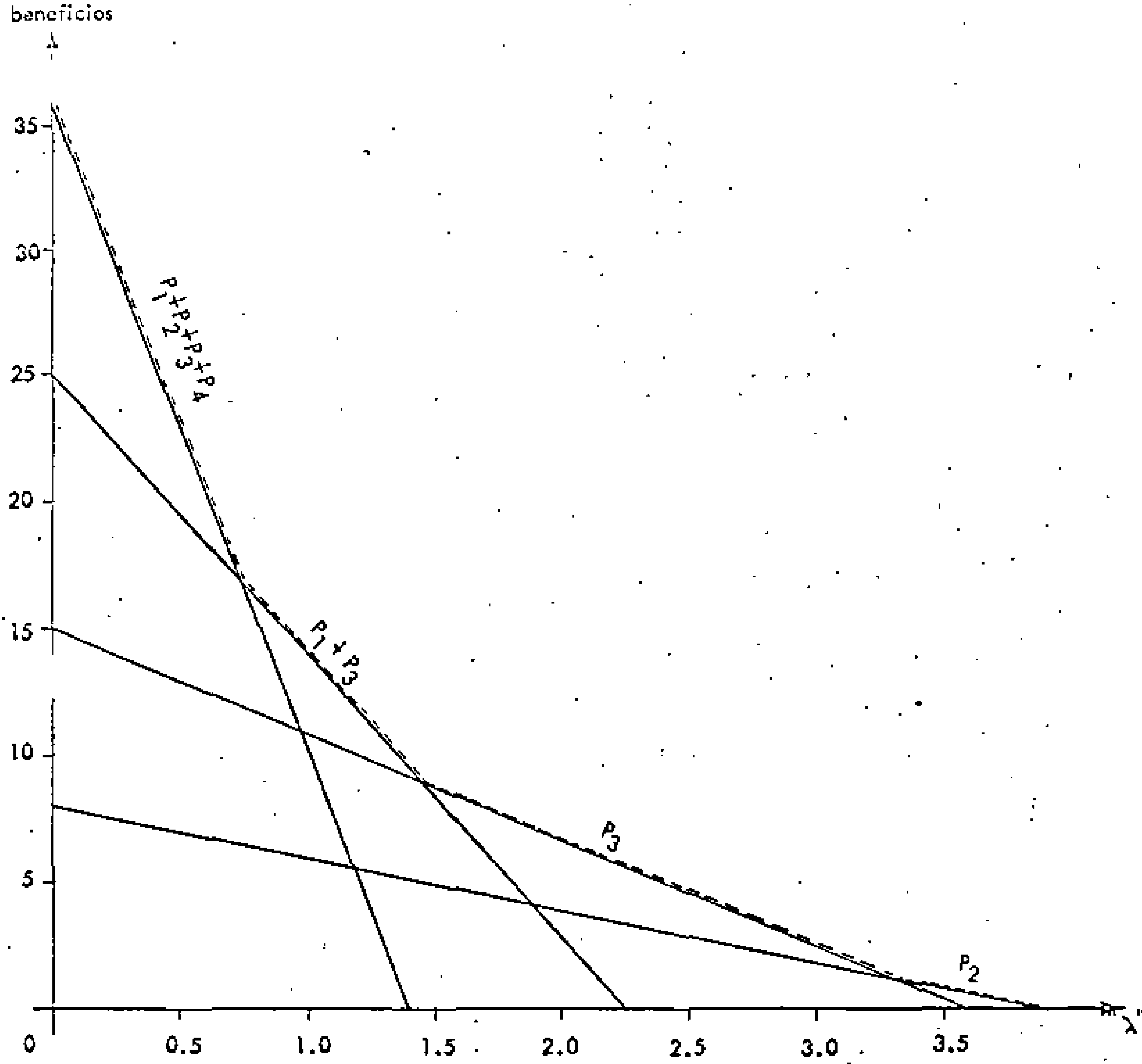
$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mu} - \lambda\,\sigma^2 = \begin{bmatrix} 10-5\lambda & -3\lambda & -2\lambda & -\lambda \\ 0 & 8-2\lambda & -3\lambda & -2\lambda \\ 0 & 0 & 15-4\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3-3\lambda \end{bmatrix}$$

La línea crítica es la envolvente mostrada.



Queda ahora la determinación del intervalo para "λ" en cada combinación eficiente.



$P_2 \rightarrow [8-2\lambda] \quad (3.4 \leq \lambda \leq 4)$

$P_3 \rightarrow [15-4\lambda] \quad (1.48 \leq \lambda \leq 3.4)$

$P_1+P_3 \rightarrow [25-11\lambda] \quad (0.74 \leq \lambda \leq 1.48)$

$P_1+P_2+P_3+P_4 \rightarrow [36-26\lambda] \quad (0 \leq \lambda \leq 0.74)$

273. Selección de combinaciones óptimas de proyectos atendiendo a beneficios y a costos. Modelo General (estático).

Siguiendo a Weingartner se tiene:

$$\max z = \bar{\mu}\ \bar{x} - \lambda\ \bar{x}\ \bar{\sigma}^2\ \bar{x}$$
$$\text{s.a.}$$
$$\bar{A}\ \bar{x} = \bar{b}$$
$$\bar{x} = \left\{ x_i \mid x_i = 0 \text{ ó } 1 \right\}$$

$\bar{\mu}$ = vector de las esperanzas matemáticas de los beneficios.

$\bar{\sigma}^2$ = matriz de las covariancias de los beneficios.

$\bar{A}$ = matriz de los costos.

λ = coeficiente de aversión al riesgo.

Si los proyectos son por definición independientes, los coeficientes de correlación son nulos y la matriz es diagonal.

Si existen proyectos mutuamente exclusivos o uno es contingente a otro se tomará en cuenta agregando las restricciones correspondientes.

274. Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal

El método de Ullmann es aplicable en su versión para proyectos interactuantes. Para aplicar criterios de dominancia y dado que ahora los beneficios son de la forma $(a - b\ \lambda.)$ se deben cumplir dos requisitos:

i) El término independiente en la combinación que domina es mayor que en el dominado.

ii) El valor de λ para beneficios nulos debe ser mayor en la combinación que domina que en la dominada.

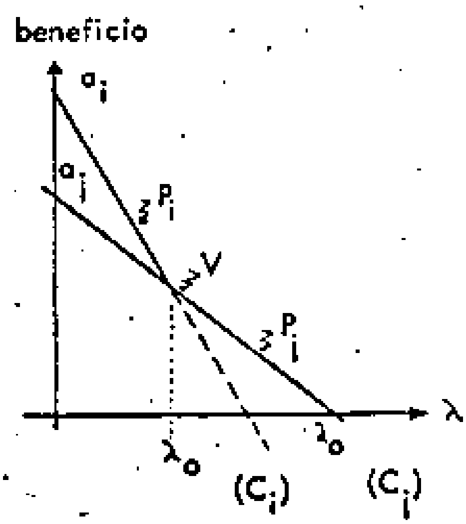
Así por ejemplo, la combinación cuyos beneficios son $(a - b\,\lambda)$ domina a la combinación cuyos beneficios son $(c - d\,\lambda)$ si:

i) $a > c$

ii) para $0 = a - b\,\lambda_1$; $\lambda_1 = \dfrac{a}{b}$

para $0 = c - d\,\lambda_2$; $\lambda_2 = \dfrac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$



Una vez obtenida la última lista se procede a calcular el intervalo para " λ ", esto se hará gráficamente en un plano λ - b. Dibujando los beneficios de todos los puntos de la lista final, asociando a cada recta sus costos, y por simple inspección se definen los intervalos de " λ " en que las distintas combinaciones son aceptables.

Así para el caso de la figura se tiene una combinación P_i con un costo C_i y beneficios $a_i - \lambda_i b_i$ y otra P_i con costo C_i $(C_i > C_i)$ y beneficios $a_i - \lambda_i b_i$. Las rectas de beneficios intersectan al eje λ en los puntos λ_o y λ_o' respectivamente, y se cortan en el punto V (cuya abscisa es λ_o). Puesto que el costo C_i es mayor que C_i, la combinación P_i será aceptable mientras produzca mayores beneficios que la P_i esto es hasta el punto V y por tanto, $0 \leq \lambda_i \leq \lambda_o$. Por su parte $0 \leq \lambda_i \leq \lambda_o'$.

Cabe señalar, por último, que en vez de una sola curva beneficio-costo se tendrá toda una familia de ellas, según varía .

275. <u>Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos independientes de un período, caso aleatorio (ejemplo).</u>

Sean los proyectos independientes P_1, P_2, P_3 y P_4 tales que :

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \sigma_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$0 - [0 - 0\lambda]$

Lista 0

(0,0,0,0)	$[0 - 0 - 0\lambda]$

$7 - [3 - 5\lambda]$

Lista 1

(0,0,0,0)	$0 - [0 - 0\lambda]$
(1,0,0,0)	$7 - [3 - 5\lambda]$

$3 - [6 - 4\lambda]$

Lista 2

(0,0,0,0)	$0 - [0 - 0\lambda]$
(0,1,0,0)	$3 - [6 - 4\lambda]$
(1,1,0,0)	$10 - [9 - 9\lambda]$

$5 - [2 - 2\lambda]$

Lista 3

(0,0,0,0)	$[0 - 0 - 0\lambda]$
(0,1,0,0)	$[3 - 6 - 4\lambda]$
(0,1,1,0)	$[8 - 8 - 6\lambda]$
(1,1,1,0)	$[15 - 11 - 11\lambda]$

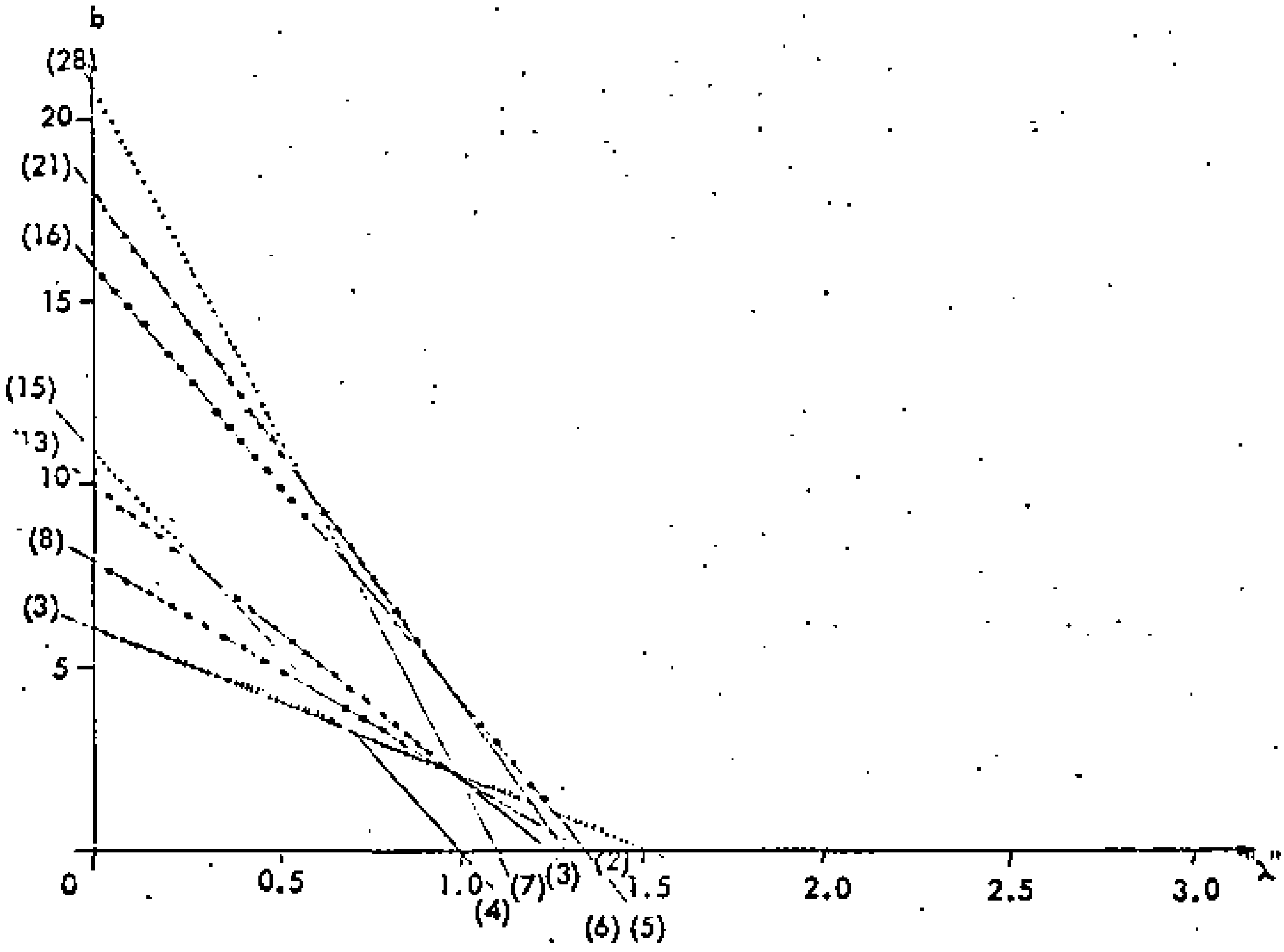
$13 - [10 - 8\lambda]$

Lista 4

(0,0,0,0)	$0 - [0 - 0\lambda]$
(0,1,0,0)	$3 - [6 - 4\lambda]$(1)
(0,1,1,0)	$8 - [8 - 6\lambda]$(2)
(0,0,0,1)	$13 - [10 - 8\lambda]$(3)

Lista 4 (continuación)

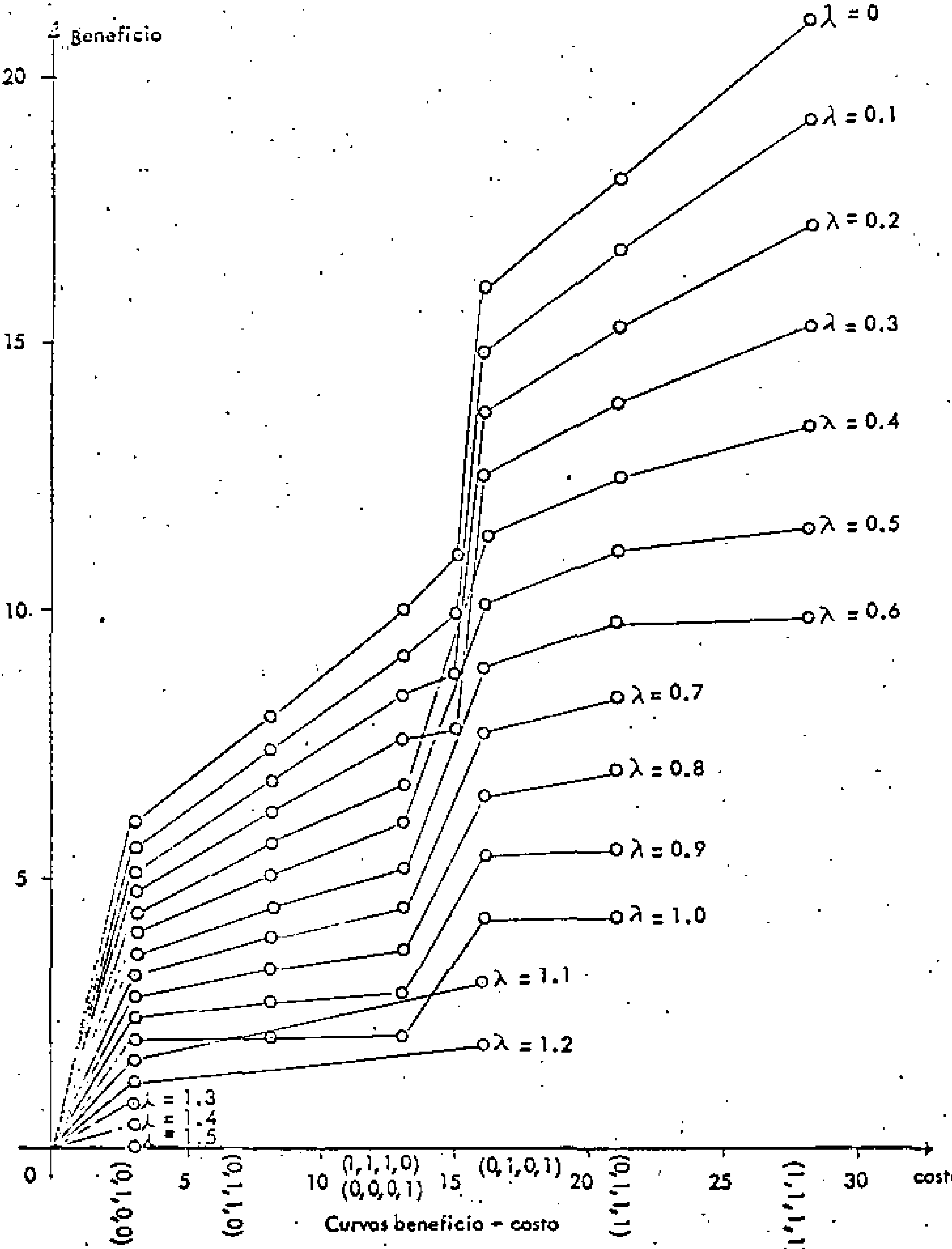
(1,1,1,0)	15 - [11-11λ](4)
(0,1,0,1)	16 - [16 - 12λ](5)
(0,1,1,1)	21 - [18 - 14λ](6)
(1,1,1,1)	28 - [21 - 19λ](7)



Résulta

(1)	(0,1,0,0)	[3 - 6 - 4λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.5$
(2)	(0,1,1,0)	[8 - 8 - 6λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.0$
(3)	(0,0,0,1)	[13 - 10 - 8λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.0$
(4)	(1,1,1,0)	[15 - 11 - 11λ]	$0 \leq \lambda \leq 0.3$
(5)	(0,1,0,1)	[16 - 16 - 12λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.25$
(6)	(0,1,1,1)	[21 - 18 - 14λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.00$
(7)	(1,1,1,1)	[28 - 21 - 19λ]	$0 \leq \lambda \leq 0.6$

La familia de curvas beneficio - costo es como se muestra a continuación:



Curvas beneficio – costo

Proyectos independientes de un período

275. Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos interrelacionados indivisibles y de varios períodos. Caso aleatorio (ejemplo).

Consideremos los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 de los cuales P_1 y P_2 son mutuamente exclusivos y la aceptación de P_3 depende de la aceptación de P_2.

Las características son como sigue. Costos y beneficios descontados

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{\mu} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \sigma^2_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & - & - & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se tiene

$(0,0,0) - [0 - 0\lambda]$

Lista 0

$$\begin{array}{l|l} (0,0,0,0) & (0,0,0) - [0 - 0\lambda] \end{array}$$

$(5,4,3) - [5 - 3\lambda]$

Lista 1

$$\begin{array}{l|l} (0,0,0,0) & (0,0,0) - [0 - 0\lambda] \\ (1,0,0,0) & (5,4,3) - [5 - 3\lambda] \end{array}$$

$(3,5,2) - [3 - \lambda]$

Lista 2

$$\begin{array}{l|l} (0,0,0,0) & (0,0,0) - [0 - 0\lambda] \\ (0,1,0,0) & (3,5,2) - [3 - \lambda] \\ (1,0,0,0) & (5,4,3) - [5 - 3\lambda] \end{array}$$

$(4,2,4) - [6 - 3\lambda]$

$b'_3 = [6 - 3\lambda] + \{-\lambda \mid \eta_{22}\}$

Lista 3

$$\begin{array}{l|l} (0,0,0,0) & (0,0,0) - [0 - 0\lambda] \end{array}$$

Lista 3 (continuación)

$$\begin{array}{l|l} (0,1,0,0) & (3,5,2) - [3 - \lambda] \\ (1,0,0,0) & (5,4,3) - [5 - 3\lambda] \\ (0,1,1,0) & (7,7,6) - [9 - 5\lambda] \end{array}$$

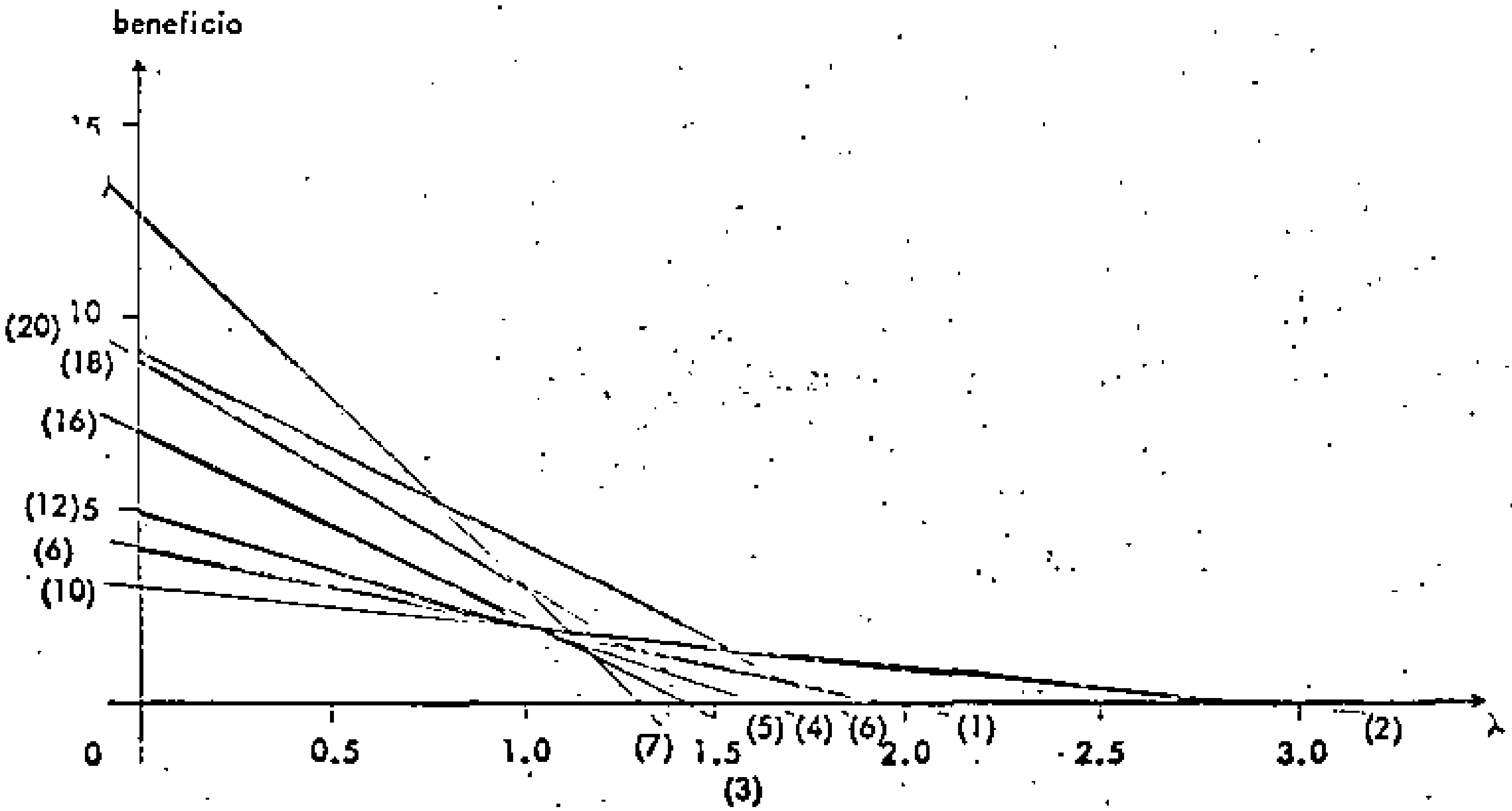
$(1,3,2) - 4 - 2\lambda$

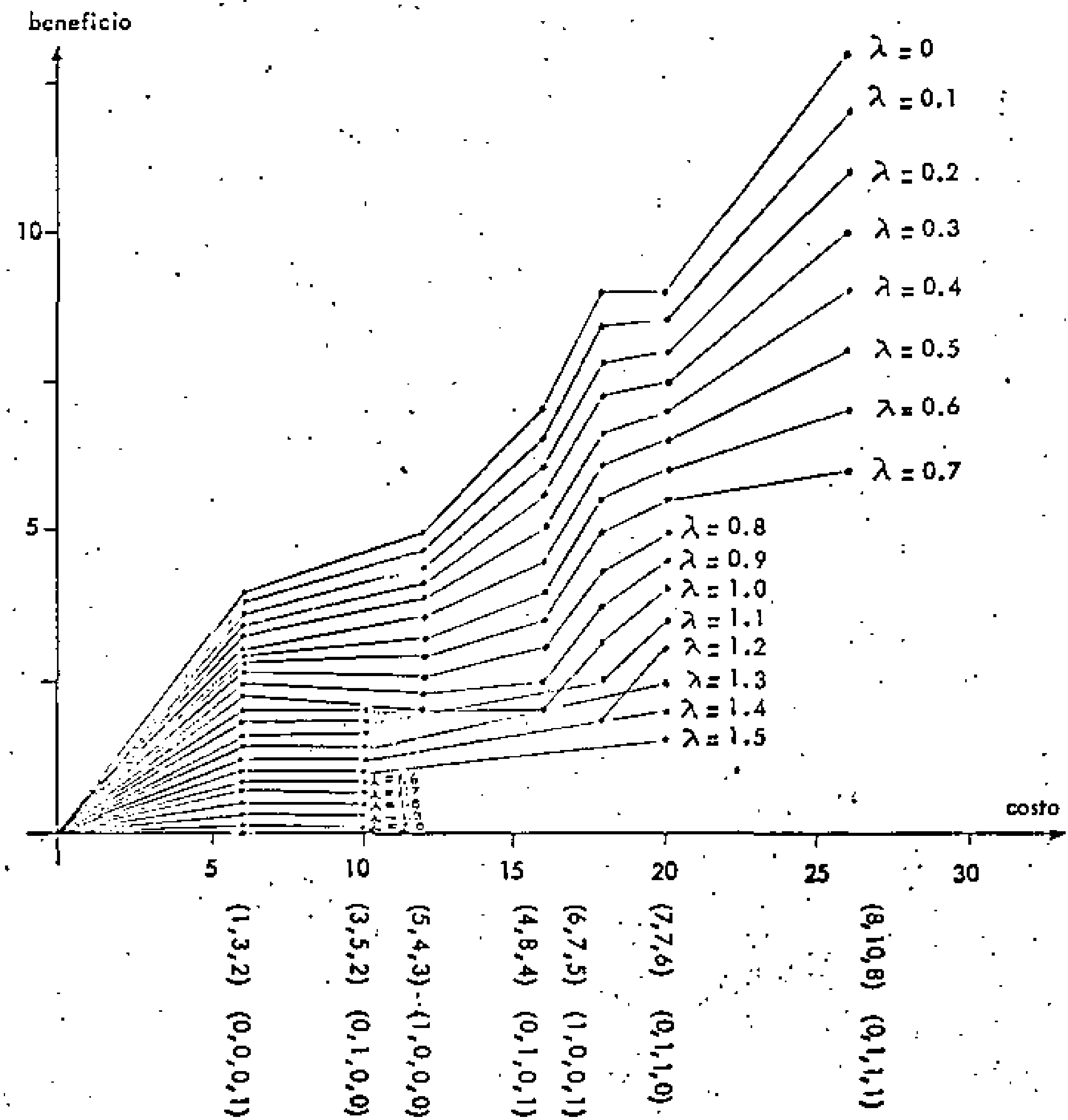
$$b'_4 = [4 - 2\lambda] + \{-\lambda \mid \eta_{13}\} + \{-2\lambda \mid \eta_{23}\} + \{-\lambda \mid \eta_{33}\}$$

Lista 4

$$\begin{array}{l|ll} (0,0,0,0) & (0,0,0) - [0 - 0\lambda] & \\ (0,0,0,1) & (1,3,2) - [4 - 2\lambda] & (1) \\ (0,1,0,0) & (3,5,2) - [3 - \lambda] & (2) \\ (0,1,0,1) & (4,8,4) - [7 - 5\lambda] & (3) \\ (1,0,0,0) & (5,4,3) - [5 - 3\lambda] & (4) \\ (1,0,0,1) & (6,7,5) - [9 - 6\lambda] & (5) \\ (0,1,1,0) & (7,7,6) - [9 - 5\lambda] & (6) \\ (0,1,1,1) & (8,10,8) - [13 - 10\lambda] & (7) \end{array}$$

(1)	(0,0,0,1)	(1,3,2) - [4 - 2λ]	$0 \leq \lambda \leq 2.0$
(2)	(0,1,0,0)	(3,5,2) - [3 - λ]	$1 \leq \lambda \leq 3.0$
(3)	(0,1,0,1)	(4,8,4) - [7 - 5λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.0$
(4)	(1,0,0,0)	(5,4,3) - [5 - 3λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.0$
(5)	(1,0,0,1)	(6,7,5) - [9 - 6λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.2$
(6)	(0,1,1,0)	(7,7,6) - [9 - 5λ]	$0 \leq \lambda \leq 1.55$
(7)	(0,1,1,1)	(8,10,8) - [13-10λ]	$0 \leq \lambda \leq 0.75$





Curvas beneficio – costo

276. Observación

En forma análoga se tratarán los restantes casos: proyectos divisibles, proyectos con varias opciones de inversión, autofinanciables, etc...

Intervención del ámbito del sistema en la selección de inversiones

277. Generalidades

Se ha dicho en capítulos anteriores que un sistema influye sobre el ámbito y a la vez es influído por éste. Ahora bien, éstas influencias generalmente se manifiestan por demandas al sistema y alteraciones a la demanda por acciones en el sistema. Un sistema carretero sufre alteraciones por la demanda en su zona de influencia. Se construyen caminos de penetración que alteran las condiciones iniciales de demanda al sistema, etc... Es indudable que la asignación de recursos en un sistema, en particular inversiones, debe tomar en cuenta la acción del ámbito: la demanda, con objeto de aproximarse mejor a la realidad.

288. Tipificación de la demanda

Dada la incertidumbre en la cuantificación de la demanda, se acostumbra tipificarla en estados $E_1, \dots, E_n$ y estudiar los cambios de estado con el transcurso del tiempo. A la vez, conviene distinguir etapas (períodos en el horizonte de planeación) al estudiar la demanda, y cuantificar la frecuencia de los cambios, al transcurrir las diferentes etapas, con objeto de estimar una probabilidad para cada cambio de estado. Se estima así la probabilidad de una transición de un estado E_i a otro E_j. La matriz estocástica definida por las distintas probabilidades, recibe el nombre de matriz de transiciones. El vector fijo asociado al considerar comportamiento ergódico de la Cadena de Markov especificada por la matriz suministra una estimación de la probabilidad de que la demanda se encuentre en alguno de los estados $E_1, \ldots, E_n$.

289. <u>Ejemplo</u>

Estimar la matriz de transiciones para los estados E_1, E_2, E_3 de los escurrimientos anuales de un río en un punto y tipificarlos mediante una estimación de su probabilidad de ocurrencia. Si en 1960 fué bajo (E_1), en 1961 fué alto (E_3) en 1962 bajo (E_1) en 1963 medio (E_2) bajo en 1964, alto en 1965, medio en 1966, medio en 1967, alto en 1968, alto en 1969, bajo en 1970.

Se tiene la siguiente tabla de cambios

	B	M	A
B	0	1	2
M	1	1	1
A	11	1	1

luego y con base en la experiencia disponible una estimación de la matriz de transición entre estados es:

$$T_r = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Para tipificar los escurrimientos se planteará:

$$\begin{bmatrix} x, y, 1-x-y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, y, 1-x-y \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} y + \frac{2}{4} (1-x-y) = x$$

$$\frac{1}{3} x + \frac{1}{3} y + \frac{1}{4} (1-x-y) = y$$

$$\frac{2}{3} x + \frac{1}{3} y + \frac{1}{4} (1-x-y) = 1-x-y$$

Se estima que los estados de los escurrimientos se pueden tipificar de la siguiente manera:

Bajos	(E_1)	30%
Medios	(E_2)	54.5%
Altos	(E_3)	15.5%

y trabajar con el vector estocástico $[0.300, 0.545, 0.155]$

290. Proceso decisional discreto

Dado que la demanda generalmente cambia de estado al variar el tiempo, el inversionista congruentemente debe tomar decisiones en varios puntos en el tiempo. Se ve así confrontado con un proceso decisional discreto.

En un proceso decisional discreto se distinguen cuatro conceptos: etapa, estado, transición y valor. Como ya se ha visto, intuitivamente, etapa es un período cualquiera en el horizonte del proceso, el estado expresa las condiciones en que se encuentra el proceso, la transición determina el estado en que se encuentra un proceso o al menos señala la probabilidad de que para una etapa dada el proceso se encuentre en un estado dado. El valor es un índice de la utilidad, que para el que toma la decisión, implica un cambio de estado del proceso.

Rigurosamente un proceso decisional discreto se define mediante un conjunto de números naturales $T = \left\{1,2,\ldots,t,\ldots\right\}$ naturales $S = \left\{1,2,\ldots,S,\ldots\right\}$ llamado de índices de estado una función $f(S,t)$ cuyo dominio es $T \times S$ llamado de transición y una segunda función $F(s,t)$ con el mismo dominio $F(s,t)$.

Si la función $f(s,t)$ es escalar, esto es, a cada par (s,t) corresponde un sólo número real se dice que el proceso es determinista. Por elcontrario si la función es vectorial, esto es, a cada par (s,t) le corresponde un vector y éste es estocástico se dice que el proceso es estocástico.

A un proceso decisional discreto se le llama histórico cuando la transición no depende de los pares estado-etapa que siguen a la etapa bajo análisis, sino únicamente de los pares anteriores a ella. En particular se dirá que el proceso es Markoviano cuando sólo depende del par inmediatamente anterior. Se dirá que el proceso es independiente cuando sólo depende de la etapa bajo análisis.

Cuando la transición depende de todos los pares estado-etapa se dirá que es un proceso general.

Dado que la demanda no se puede definir con precisión y sólo se aspira a conocer la probabilidad de que se encuentre en un cierto estado los procesos decisionales discretos que se presentan al analizar inversiones son de tipo estocástico.

291. Objetivo al analizar inversiones bajo la intervención de la demanda

El objetivo primordial que busca un inversionista mediante un proceso decisional discreto es definir que acción debe llevar a cabo en cada etapa para maximizar los beneficios acumulados esperados (esperanza matemática de los beneficios acumulados) al finalizar el proceso y conforme al estado en que se encuentre la demanda.

Dado que el proceso decisional discreto es eminentemente dinámico no es de extrañar que una de las herramientas matemáticas más eficientes para su estudio sea la Programación Dinámica.

292. Demanda no tipificada; función de transición constante

El caso más simple ocurre cuando la carencia de estudios estadísticos previos impide tipificar la demanda; los estados de la misma corresponden a apreciaciones sujetivas v.g. fuerte, débil, etc... Por otra parte las probabilidades de transición de un estado a otro se juzga que se mantienen constantes a lo largo del proceso.

Para este caso Howard demuestra que las acciones a tomar, con objeto de maximizar los beneficios acumulados esperados al final del proceso, se obtienen con la fórmula de recurrencia:

$$\Lambda_1(s) = \max_{x_1} \quad f_s(x_1) \qquad ; s = 1, \ldots, m$$

$$\Lambda_t(s) = \max_{x_t} \left\{ f_s(x_t) + \beta \sum_{k=1}^{m} \left[p_{sk}(x_t)\ \Lambda_{t-1}(k) \right] \right\} \qquad s = 1, \ldots, m; \quad t = 2, \ldots, n$$

en donde

$\Lambda_t(s)$ = esperanza de los beneficios acumulados desde la etapa 1 hasta la t, como función del estado inicial s.

$f_s(x_t)$ = beneficio esperado, cuando el proceso se encuentra en el estado s, por la decisión x_t tomada en la etapa t.

$p_{sk}(x_t)$ = probabilidad de que el proceso cambie del estado k en la etapa $(t-1)$ al estado s en la etapa t cuando se toma la decisión x_t en la etapa t.

$\beta = \dfrac{1}{(1+i)^t}$ = factor de descuento.

En resumen, las fórmulas anteriores indican que para la primera etapa y para cada estado s se consideren todas las posibles decisiones disponibles para dicha etapa. Para cada estado se seleccione la decisión que produce la mayor esperanza de beneficios. Que para todas las etapas subsecuentes se multipliquen las esperanzas de beneficios acumulados máximas por las probabilidades de cambios de estado y se sumen. Al resultado de ésta suma se le agregará la esperanza de beneficio máximo bajo cada una de las decisiones que se encuentran disponibles para dicha etapa. Obsérvese que dado que por hipótesis las probabilidades de transición se mantienen constantes para todas las etapas y los beneficios bajo cada decisión, son iguales.

$$f_s(x_1) = f_s(x_2) = \ldots = f_s(x_i) = \ldots = f_s(x_n).$$

293. Aplicación a la política de conservación de carreteras (ejemplo)

Un tramo de camino de cuota ($10.00) puede encontrarse en uno de los tres siguientes estados: bueno, deteriorado pero transitable, intransitable. Los aforos de tránsito hacen ver que cuando se encuentra en buen estado circulan 5,000 vehículos diariamente, que cuando se encuentra deteriorado, varios usuarios prefieren una ruta alterna y la circulación se reduce a 3,000 vehículos diarios. Si se encuentra intransitable el número de vehículos que circula es mínimo y se puede considerar que no hay circulación. Se pueden tomar tres decisiones: reconstruirlo, que requiere una inversión de $ 5,000,000 anuales, repararlo con un costo de $ 1,000,000 o no invertir en él. Es evidente que el tránsito hace que cambie el estado de un camino y de bueno puede pasar a intransitable, etc...

Diseñar el programa de acción óptimo para un sexenio, de acuerdo con el estado en que se encuentre el camino al principio de éste.

Convencionalmente

E_1 = bueno

E_2 = deteriorado

E_3 = intransitable.

Las probabilidades de transición bajo cada decisión se estima que son:

a) No tomar ninguna acción

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Invertir $ 1,000,000 y repararlo

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

c) Invertir $ 5,000,000 y reconstruirlo

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los beneficios serán los incrementos en la circulación ocasionados por el cambio de estado del camino y son:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{(en miles de vehículos)}$$

Para encontrar los beneficios netos basta considerar 365 días y los \$ 10.00 por vehículo resultan, así las tres siguientes matrices de beneficios netos (restando el costo) respectivamente para cada decisión:

a)
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -7.20 & -18.25 \\ 7.20 & 0 & -10.95 \\ 18.25 & 10.95 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -8.2 & -19.25 \\ 6.2 & -1 & -11.95 \\ 17.25 & 9.95 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -5 & -12.2 & -23.25 \\ 2.2 & -5 & -15.95 \\ 13.25 & 5.95 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

294. Uso de la Teoría de Decisiones Bayesianas

Al manejar la demanda que influye sobre un sistema, una muy útil herramienta la suministra, la Teoría de Decisiones Bayesianas ya que permite tanto el ir mejorando el conocimiento del estado probable de la demanda colectado inicialmente por medios estadísticos (ejemplo del número 269) como el incluir la opinión sujetiva sobre las acciones a tomar dado un estado de la demanda. Se obtienen probabilidades a posteriori sobre los estados de la demanda a partir de las probabilidades a priori, tanto objetivas como sujetivas del inversionista.

La fórmula de Bayes resulta así:

$$P(E_i/a_i) = \frac{P(a_i/E_i)\ P(E_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(a_i/E_i) P(E_i)} \ ; \ i = 1, \ldots, n.$$

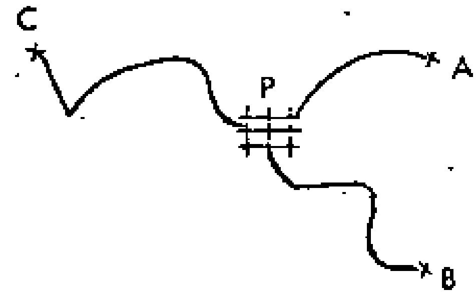
en donde

$P(E_i/a_i)$ = probabilidad a posteriori de que la demanda se encuentre en un estado E_i cuando se ha tomado la acción a_i.

$P(a_i/E_i)$ = probabilidad a priori de llevar a cabo la acción a_i si la demanda se encuentra en un estado E_i.

$P(E_i)$ = probabilidad a priori de que la demanda se encuentre en un estado E_i.

295. Aplicación a la planeación carretera



Se desea definir el orden en que deben llevarse a cabo las inversiones, en tres períodos sucesivos, para la construcción de las carreteras desde una capital de estado P, a las ciudades A, B y C, cuando la demanda puede ser fuerte (E_1) o débil (E_2). En términos de vehículos por día la demanda se expresa mediante

$$\begin{array}{r} \\ \bar{D} = P\text{-}A \\ P\text{-}B \\ P\text{-}C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 200 \\ 500 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los aforos de tránsito permiten tipificarla a priori en $[0.5\ ,\ 0.5]$. La inversión anual requerida para la construcción es respectivamente $ 700,000.00 , $ 1,000,000.00 , $ 1,000,000.00 de pesos. Considerando un beneficio por viaje y por vehículo de $ 10,00 . Los beneficios netos resultan

$$\begin{array}{r} \\ \bar{B} = P - A \\ P - B \\ P - C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3.95 & 0.3 \\ 4.60 & -2.7 \\ 8.25 & -6.35 \end{bmatrix} \end{array}$$

Considerando, por simplicidad, beneficios no descontados en la vida útil de la carretera.

La opinión sujetiva y a priori de los inversionistas sobre la demanda (propensión a tomar una decisión) es como sigue:

$$\bar{P} = \begin{array}{c|cc} & E_1 & E_2 \\ \hline P\text{-}A & 0.8 & 0.2 \\ P\text{-}B & 0.5 & 0.5 \\ P\text{-}C & 0.4 & 0.6 \end{array}$$

El criterio de selección es el usual de maximizar la esperanza de los beneficios.

Las probabilidades a posteriori requeridas son:

$$P(E_1/a_1) = \frac{0.8 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5} = 0.8$$

$$P(E_1/a_2) = \frac{0.5 \times 0.5}{0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5} = 0.5$$

$$P(E_1/a_3) = \frac{0.4 \times 0.5}{0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5} = 0.4$$

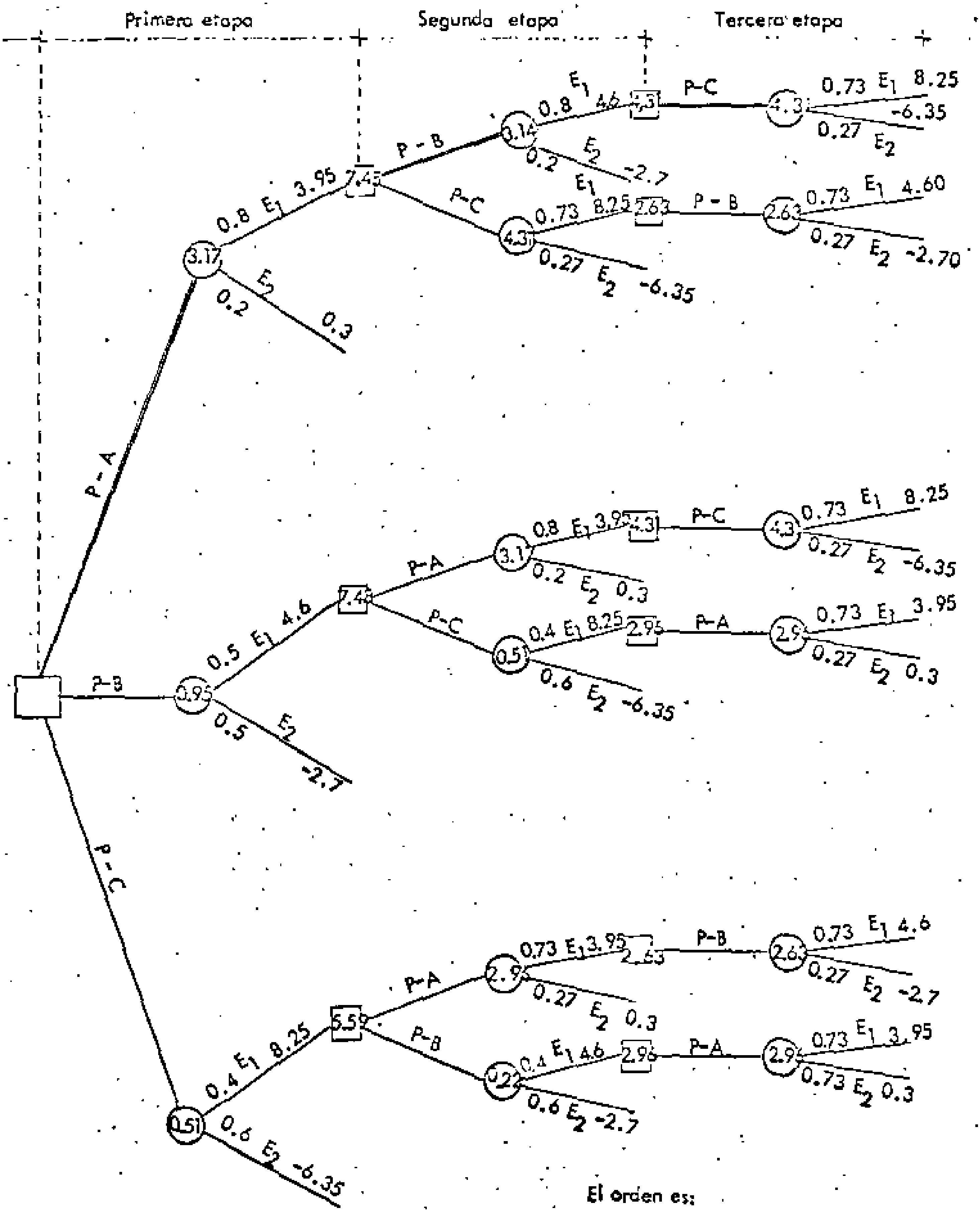
$$P(E_1/a_1a_2) = \frac{0.8 \times 0.5 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5 \times 0.5} = 0.8$$

$$P(E_1/a_1a_3) = \frac{0.8 \times 0.4 \times 0.5}{0.8 \times 0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.2 \times 0.5} = 0.73$$

$$P(E_1/a_2a_3) = \frac{0.5 \times 0.4 \times 0.5}{0.5 \times 0.4 \times 0.5 + \times 0.6 \times 0.5} = 0.4$$

$$P(E_1/a_1a_2a_3) = \frac{0.8 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5 \times 0.6 \times 0.5} = 0.73$$

El árbol de decisiones es como sigue:



El orden es:

Primer periodo PA
Segundo periodo PB
Tercer periodo PC

296. Uso combinado de decisiones Bayesianas y procesos Markovianos al trabajar con la demanda tipificada

Al tratar de aplicar el modelo común para la toma de decisiones bajo incertidumbre se encuentra el siguiente panorama:

a) Existen estados de la demanda que condicionan las acciones a llevar a cabo.

b) Asociado a cada par acción-estado existe un resultado .

c) A cada resultado se le puede asociar un beneficio o un índice de utilidad.

d) La distribución de probabilidad para la demanda, de existir, es independiente de las acciones (a priori).

e) La definición y clasificación de estados de la demanda es arbitraria y vaga.

f) Los estados son tan generales y amplios que a un par acción-estado puede asociársele más de un resultado, o la distribución de la demanda sea dependiente de alguna acción realizada.

g) El modelo usual de decisiones presupone que un inversionista primero selecciona información, posiblemente en forma secuencial, hasta colectar una cantidad óptima y después de esto lleva a cabo un acto que es el final del proceso de decisión, sin embargo, esto frecuentemente es falso. En general una acción decidida en una etapa afecta las consecuencias inmediatas de su acto en la etapa y la nueva información concerniente al estado de la demanda en la que se basará para decisiones futuras.

Buscando subsanar las deficiencias señaladas, apegarlo más al proceso decisional discreto real y , fundamentalmente permitir modificar las decisiones conforme se va logrando un mejor conocimiento de la tipificación de la demanda, Ying modifico el modelo de Howard de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \Lambda_T \left[\overline{P}_T (S \mid x_{iT}, \theta_{iT}) \right] = \max\limits_{\overline{x}_T} \left\{ f_s (\overline{x}_T) \right\} \\ \Lambda_t \left[\overline{P}_t (S) \right] = \max\limits_{\overline{x}_t} \left\{ f_S (\overline{x}_t) + \beta \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}(t) \Lambda_{t+1} \left[\overline{P}_t (S \mid x_{it}, \theta_{jt}) \right] \right\} \end{cases}$$

$$t = 1, \ldots, T-1$$

en donde

β = Factor de descuento.

$\overline{x}_t = \left\{ x_{1t}, \ldots, x_{nt} \right\}$ = vector de decisiones disponibles para la etapa "t".

$\overline{\theta}_t = \left\{ \theta_{1t}, \ldots, \theta_{nt} \right\}$ = vector de consecuencias de las decisiones disponibles para la etapa "θ".

$i = 1, \ldots, n$ = Indice de las decisiones.

$j = 1, \ldots, n$ = Indice de las consecuencias de las decisiones.

$t = 1, \ldots, T$ = Indice de las etapas.

$S = 1, \ldots, m$ = Indice de los estados de la demanda.

$P_t (S)$ = vector de probabilidades de que la demanda se encuentre en cualquiera de los estados $\overline{S}$ en la etapa t.

$\overline{P}_t (S \; x_{it}, \theta_{jt})$ = vector de probabilidades condicionales de que la demanda se encuentre a posteriori en cualquiera de los estados $\overline{S}$ cuando se ha tomado la decisión x_{it} con la consecuencia θ_{jt}, en la etapa t.

$\overline{P}_t (S \mid x_{it}, \theta_{jt}) = P_{t+1}(S)$

$r_{ij}(t) =$ probabilidad, percibida al inicio de la etapa t de que la acción x_{it} tenga la consecuencia θ_{jt}.

$r_{ij}(t) =$ es una probabilidad de un evento compuesto por eventos mutuamente exclusivos.

$$r_{ij}(t) = \sum_{S=1}^{m} P_t(S)\, p_{ij}^{S}(t)$$

$p_{ij}^{S}(t) =$ probabilidad de que la decisión x_{it} tenga la consecuencia θ_{jt} en la etapa t cuando la demanda se encuentra en el estado S. Son probabilidades de transición y se mantienen constantes al variar t.

$b_{ij}(t) =$ beneficio o índice de utilidad logrado al tomar la decisión x_{it} y obtener la consecuencia θ_{jt}. Se mantienen constantes al variar t.

$f_S(x_{it}) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}(t)\, b_{ij}(t) =$ esperanza de los beneficios en la etapa t al tomar la decisión x_{it} y encontrarse la demanda en los estados.

$\Lambda_t \left[\overline{P}_t(s)\right] =$ esperanza de los beneficios acumulados desde la etapa T hasta la "t".

Las probabilidades condicionales se obtienen con la fórmula de Bayes

$$p_t(S / x_{it}, \theta_{jt}) = \frac{P_t(S)\; p_{ij}^{S}(t)}{r_{ij}(t)}$$

Este modelo permite únicamente definir la mejor decisión al principio de la primera etapa, pero tomando en cuenta las consecuencias y los beneficios en todo el horizonte de planeación.

297. Aplicación a planeación de tarifas

Considerando que cada dos años se revisan las tarifas de un camino de cuota y tomando como horizonte de planeación un sexenio, definir cual es la mejor acción a llevar a cabo al principio del mismo de entre duplicar la tarifa existente o mantener la actual. Las consecuencias de esta decisión pueden ser tanto incrementar como disminuir la circulación actual. Los beneficios que el par acción-consecuencia puede suministrar se reflejan mediante su índice de utilidad en la siguiente tabla.

Acción		Consecuencia		
		Aum.	Dism.	
	a_1	2	-1	(Duplicar tarifa)
	a_2	1	-2	(Mantener tarifa)
		θ_1	θ_2	

La decisión deberá analizarse considerando tres posibles estados de la demanda: baja, alta, media. La tipificación a priori arrojó los siguientes resultados respectivamente $\left[0.33, 0.34, 0.33\right]$. La probabilidad a priori, de obtener los beneficios mostrados en la tabla en opinión de los expertos es como sigue:

Para demanda baja $(s = 1)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\theta_1 & \theta_2\end{array} \\ \begin{array}{c}a_1 \\ a_2\end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}\end{array}$$

Para demanda alta ($s = 2$)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\theta_1 & \theta_2\end{array} \\ \begin{array}{c}a_1 \\ a_2\end{array} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}\end{array}$$

Para demanda media ($s = 3$)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\theta_1 & \theta_2\end{array} \\ \begin{array}{c}a_1 \\ a_2\end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}\end{array}$$

El primer paso para resolver este problema es calcular, para cada etapa, de que la acción tenga la consecuencia prevista.

Se tiene:

$$\bar{P}_1 = \left[0.33\ ,\ 0.34\ ,\ 0.33\right]$$

$$p^1_{ij} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix},\ p^2_{ij} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix},\ p^3_{ij} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\bar{R}(1) = \left[r_{ij}(1)\right] = \begin{array}{ll} a_1 & 0.33(0.3)+0.34(0.4)+(0.33)0.5, 0.33(0.7)+(0.34)0.6+ \\ & +(0.33)\ 0.5 \\ a_2 & 0.33(0.6)+0.34(0.8)+0.33(0.7), 0.33(0.4)+(0.34)0.2+ \\ & +(0.33)\ 0.3 \end{array}$$

$$\overline{R}(1) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$P_1(1/a_1,\theta_1) = \frac{0.33 \times 0.3}{0.4} = 0.25 \qquad P_1(1/a_1,\theta_2) = 0.38$$

$$P_1(2/a_1,\theta_1) = \frac{0.34 \times 0.4}{0.4} = 0.34 \qquad P_1(2/a_1,\theta_2) = 0.35$$

$$P_1(3/a_1,\theta_1) = \frac{0.33 \times 0.5}{0.4} = 0.41 \qquad P_1(3/a_1,\theta_2) = 0.27$$

$$P_1(1/a_2,\theta_1) = 0.28 \qquad P_1(1/a_2,\theta_2) = 0.44$$

$$P_1(2/a_2,\theta_1) = 0.39 \qquad P_1(2/a_2,\theta_2) = 0.23$$

$$P_1(3/a_2,\theta_1) = 0.33 \qquad P_1(3/a_2,\theta_2) = 0.33$$

$$\overline{P}_2 = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad\theta_1\qquad & \qquad\theta_2\qquad \end{array} \\ \begin{bmatrix} [0.25,\ 0.34,\ 0.41] & [0.38,\ 0.35,\ 0.27] \\ [0.28,\ 0.39,\ 0.33] & [0.44,\ 0.23,\ 0.33] \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\overline{R}(2) = \begin{array}{c} \\ a_1\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array}\right. \\ a_2\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \underbrace{\theta_1 \quad \theta_2}_{} {}^{\theta_1} & \underbrace{\theta_1 \quad \theta_2}_{} {}^{\theta_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} [0.42,\ 0.58] & a_1\ [0.39,\ 0.61] \\ [0.71,\ 0.29] & a_2\ [0.69,\ 0.31] \\ [0.40,\ 0.60] & a_1\ [0.39,\ 0.61] \\ [0.71,\ 0.29] & a_2\ [0.68,\ 0.32] \end{bmatrix} \end{array}$$

Se tiene para $a_1 - \theta_1$ en la primera etapa:

$$P_2(1/a_1,\theta_1) = 0.28 \qquad P_2(1/a_1,\theta_2) = 0.30$$

$$P_2(2/a_1,\theta_1) = 0.32 \qquad P_2(2/a_1,\theta_2) = 0.35$$

$$P_2(3/a_1,\theta_1) = 0.40 \qquad P_2(3/a_1,\theta_2) = 0.35$$

$p_2(1/a_2,\theta_1) = 0.21$ $\qquad$ $p_2(1/a_2,\theta_2) = 0.34$

$p_2(2/a_2,\theta_1) = 0.38$ $\qquad$ $p_2(2/a_2,\theta_2) = 0.23$

$p_2(3/a_2,\theta_1) = 0.41$ $\qquad$ $p_2(3/a_2,\theta_2) = 0.43$

Para $a_1 - \theta_2$ en la primera etapa:

$p_2(1/a_1,\theta_1) = 0.29$ $\qquad$ $p_2(1/a_1,\theta_2) = 0.44$

$p_2(2/a_1,\theta_1) = 0.36$ $\qquad$ $p_2(2/a_1,\theta_2) = 0.34$

$p_2(3/a_1,\theta_1) = 0.35$ $\qquad$ $p_2(3/a_1,\theta_2) = 0.22$

$p_2(1/a_2,\theta_1) = 0.33$ $\qquad$ $p_2(1/a_2,\theta_2) = 0.49$

$p_2(2/a_2,\theta_1) = 0.41$ $\qquad$ $p_2(2/a_2,\theta_2) = 0.23$

$p_2(3/a_2,\theta_1) = 0.26$ $\qquad$ $p_2(3/a_2,\theta_2) = 0.28$

Para $a_2 - \theta_1$ en la primera etapa:

$p_2(1/a_1,\theta_1) = 0.21$ $\qquad$ $p_2(1/a_1,\theta_2) = 0.33$

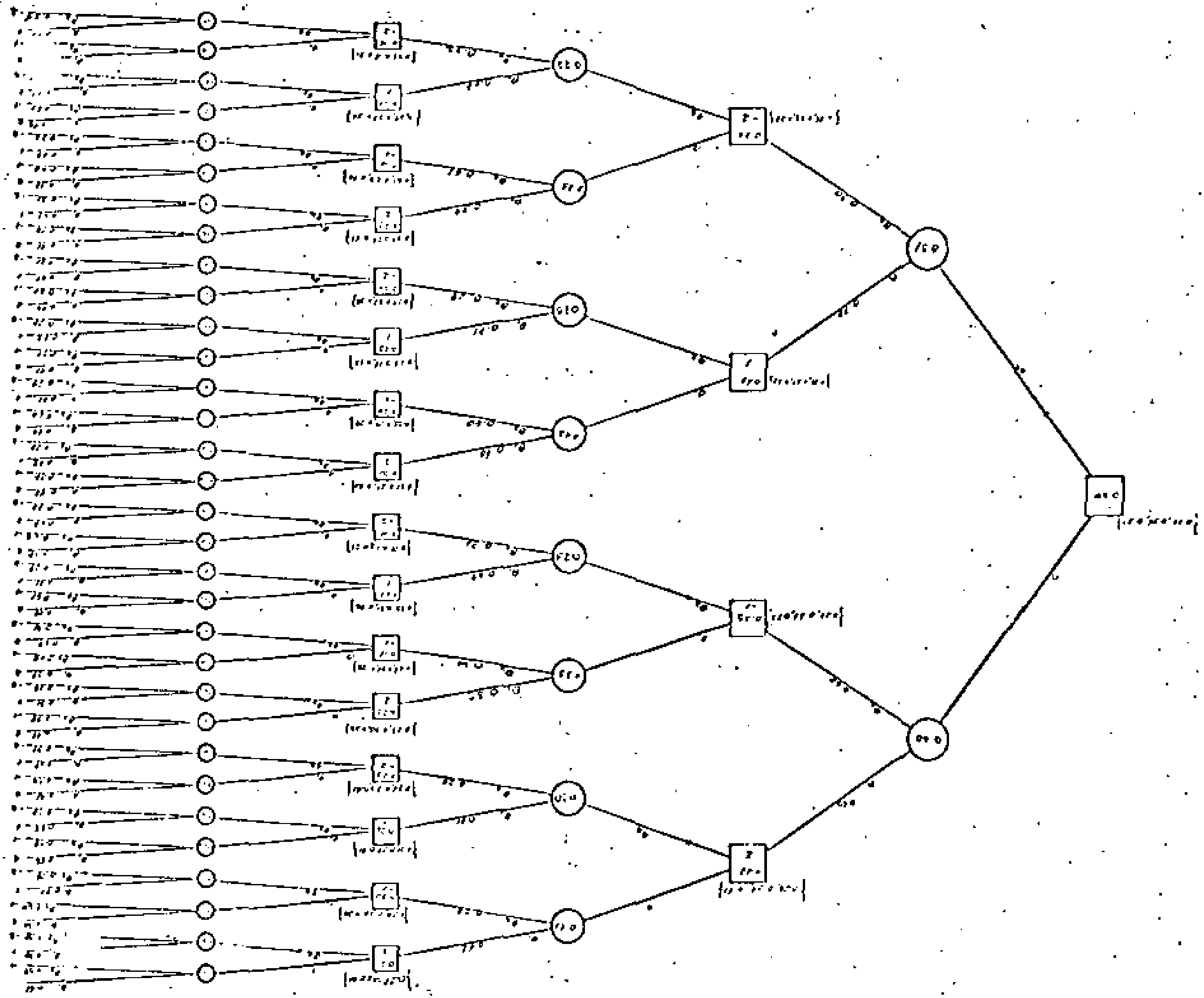
$p_2(2/a_1,\theta_1) = 0.39$ $\qquad$ $p_2(2/a_1,\theta_2) = 0.39$

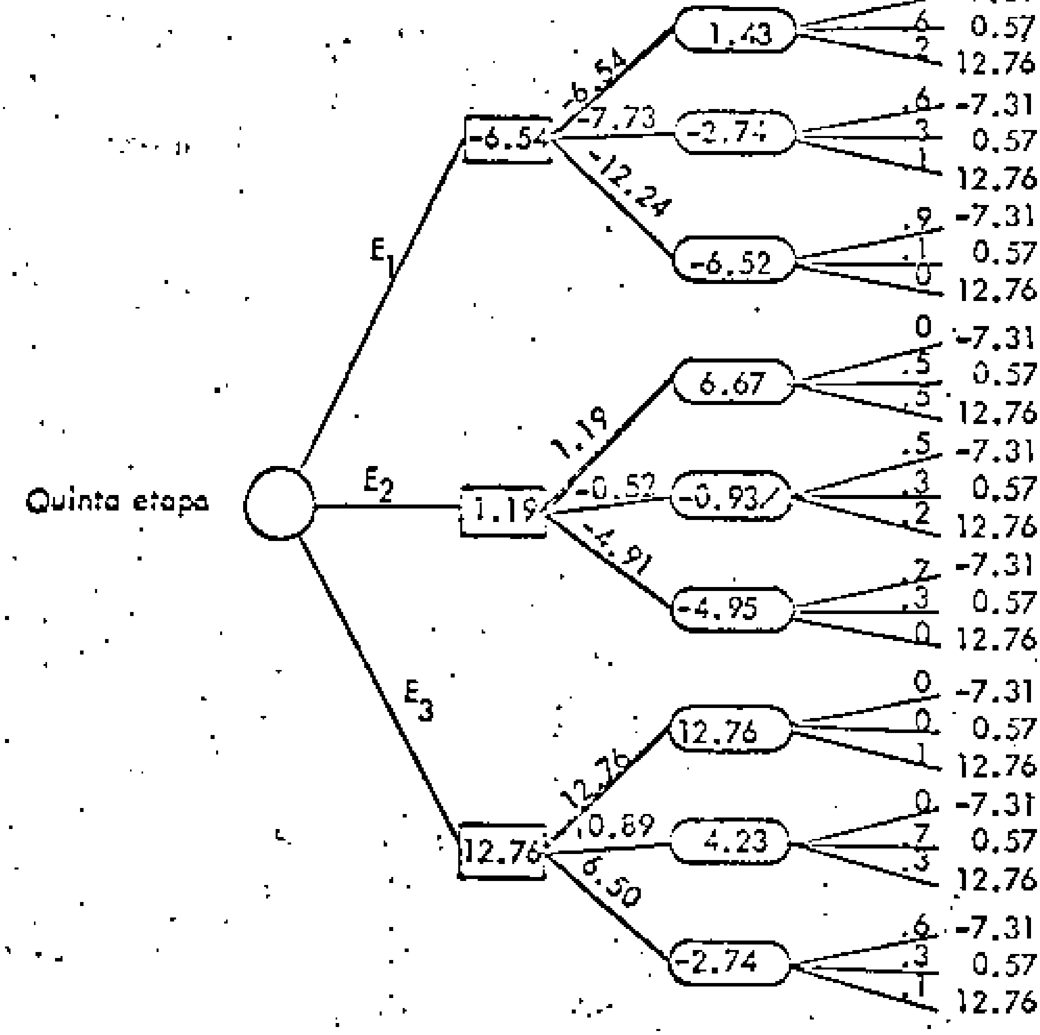
$p_2(3/a_1,\theta_1) = 0.40$ $\qquad$ $p_2(3/a_1,\theta_2) = 0.29$

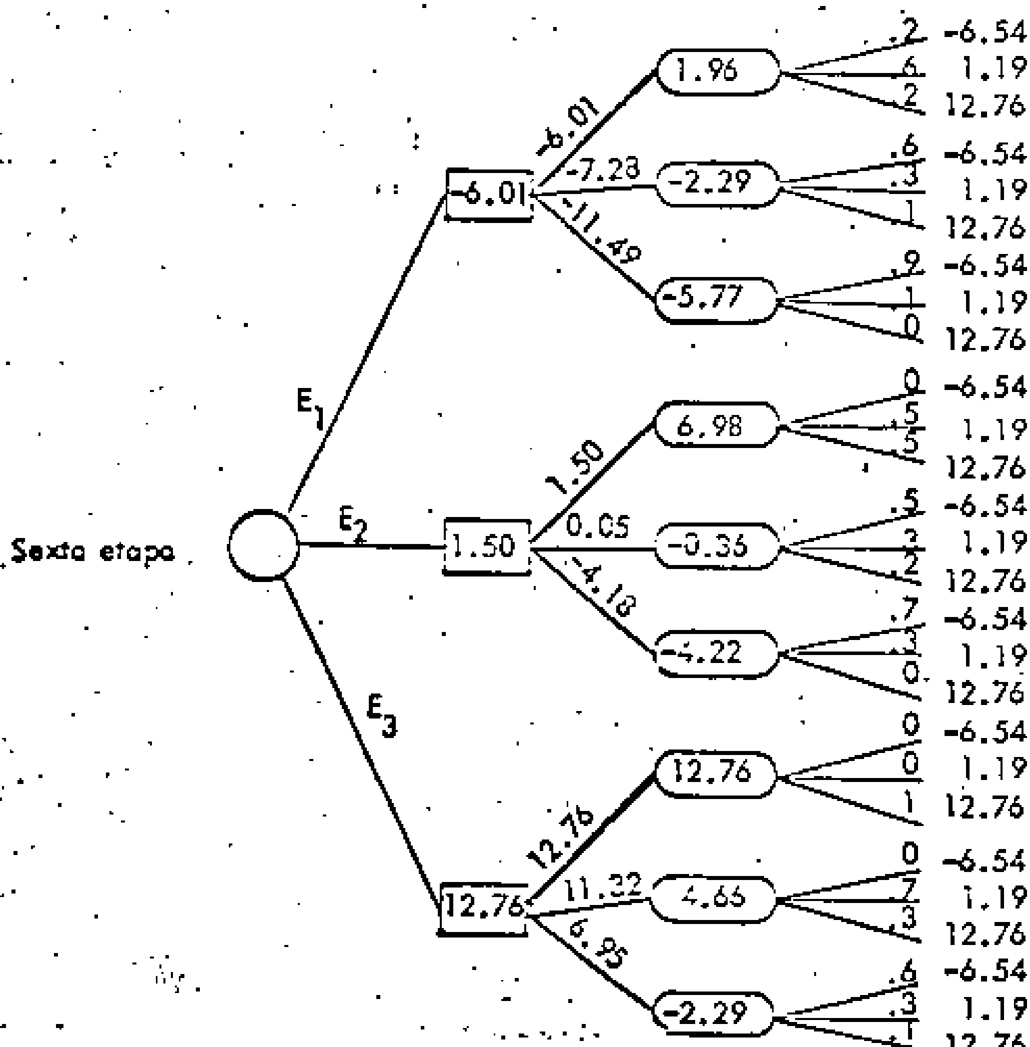
$p_2(1/a_2,\theta_1) = 0.24$ $\qquad$ $p_2(1/a_2,\theta_2) = 0.39$

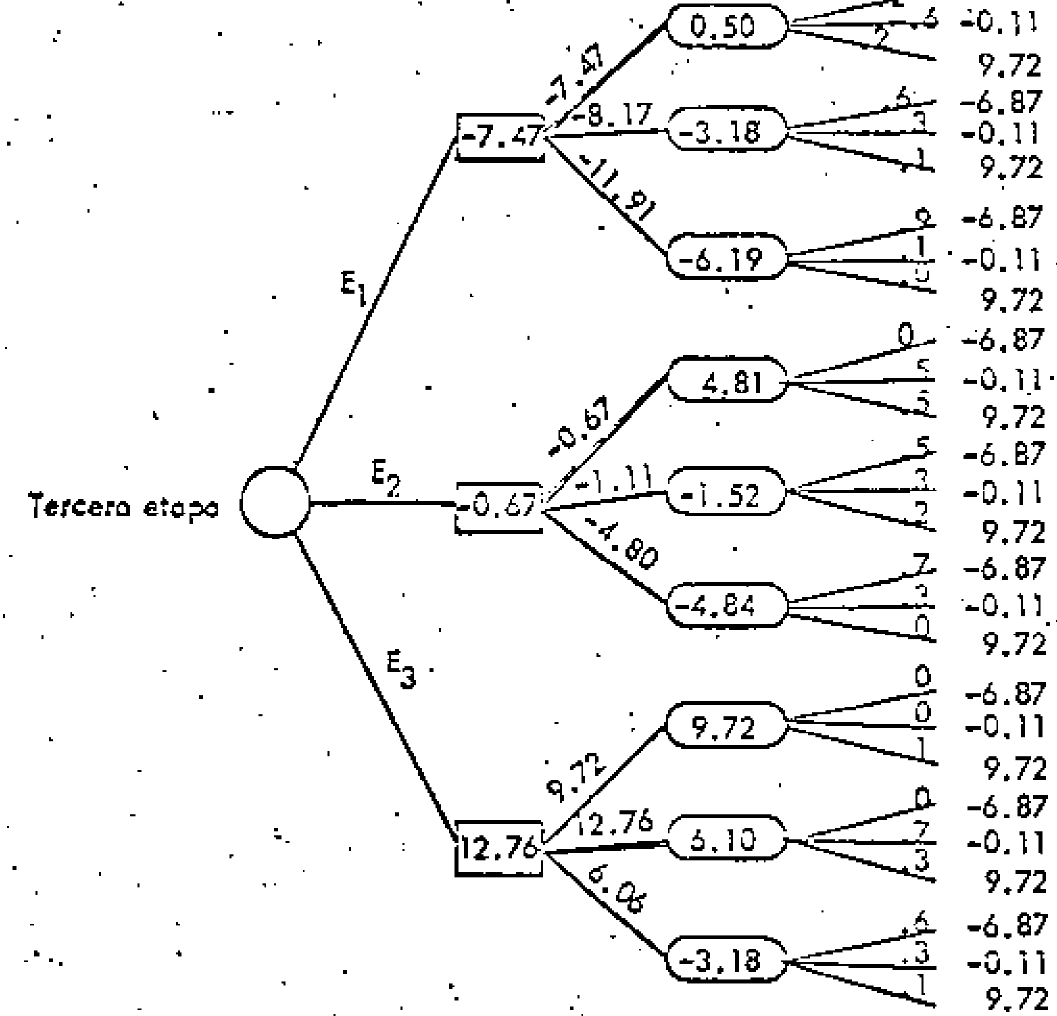
$p_2(2/a_2,\theta_1) = 0.44$ $\qquad$ $p_2(2/a_2,\theta_2) = 0.27$

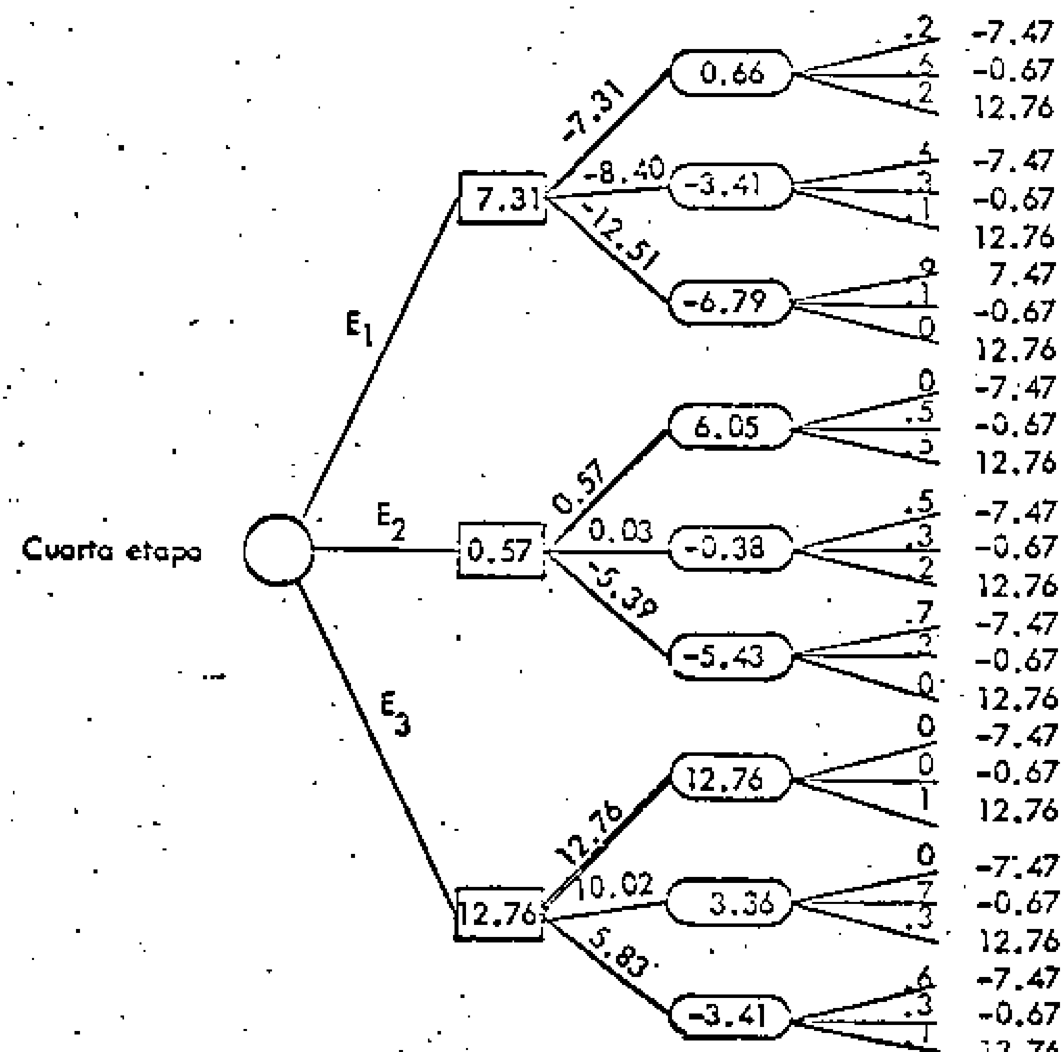
$p_2(3/a_2,\theta_1) = 0.32$ $\qquad$ $p_2(3/a_2,\theta_2) = 0.34$

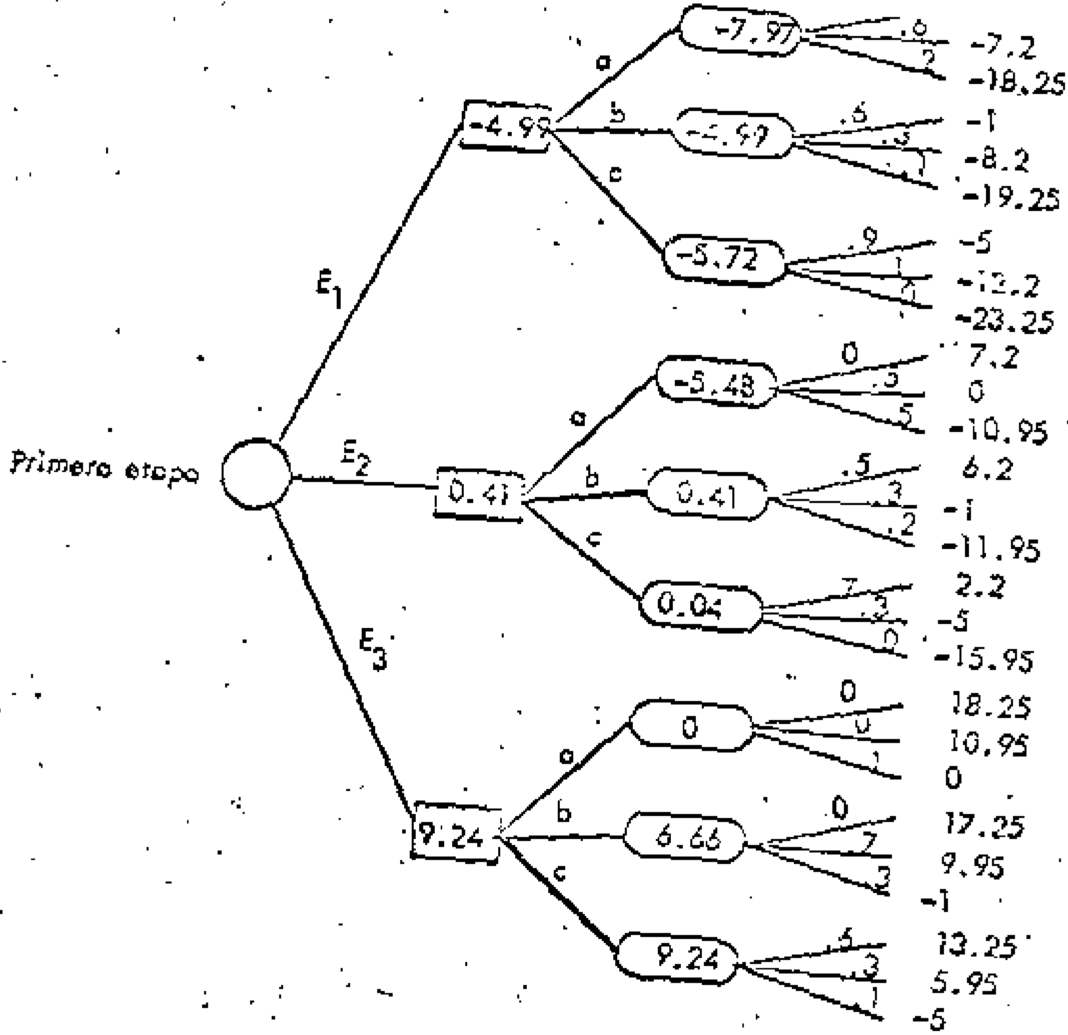


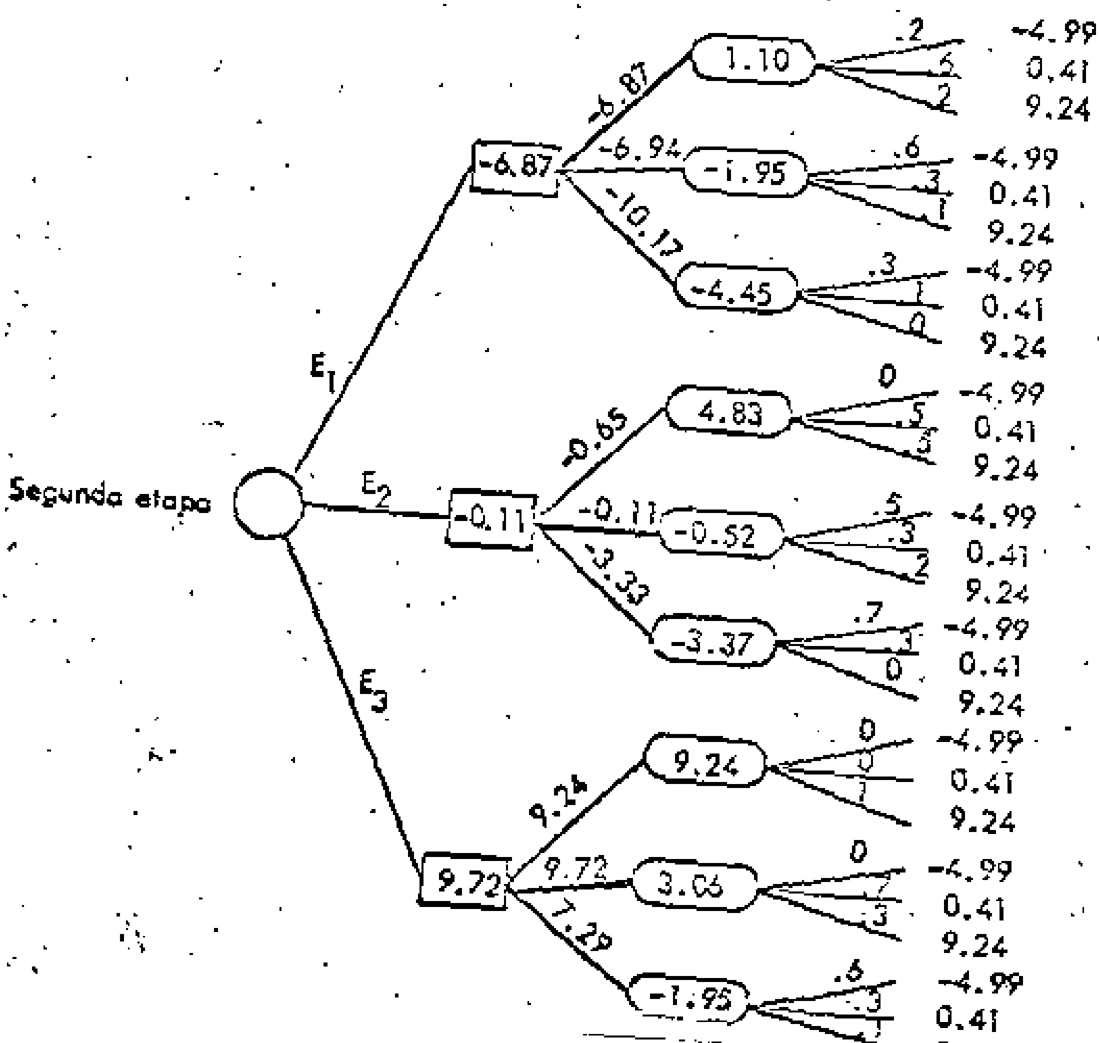

Quinta etapa
E1
E2
E3
-6.54
1.19
12.76
-6.54
-7.73
-12.24
1.19
-0.52
-4.91
12.76
10.89
6.50
1.43
-2.74
-6.52
6.67
-0.93
-4.95
12.76
4.23
-2.74
-7.31
0.57
12.76


Sexta etapa
E1
E2
E3
-6.01
1.50
12.76
-6.01
-7.28
-11.49
1.50
0.05
-4.18
12.76
11.32
6.95
1.96
-2.29
-5.77
6.98
-0.36
-4.22
12.76
4.66
-2.29
-6.54
1.19
12.76


Tercera etapa
E1
E2
E3
-7.47
-0.67
12.76
0.50
-3.18
-6.19
4.81
-1.52
-4.84
9.72
6.10
-3.18
-6.87
-0.11
9.72


Cuarta etapa
E1
E2
E3
7.31
0.57
12.76
0.66
-3.41
-6.79
6.05
-0.38
-5.43
12.76
3.36
-3.41
-7.47
-0.67
12.76


Primera etapa
E1
E2
E3
-4.99
0.41
9.24
a
b
c
-7.97
-4.99
-5.72
-5.48
0.41
0.04
0
6.66
9.24
-7.2
-18.25
-1
-8.2
-19.25
-5
-12.2
-23.25
7.2
0
-10.95
6.2
-1
-11.95
2.2
-5
-15.95
18.25
10.95
0
17.25
9.95
-1
13.25
5.95
-5


Segunda etapa
E1
E2
E3
-6.87
-0.11
9.72
-6.87
-6.94
-10.17
-0.65
-0.11
-3.33
9.24
9.72
7.29
1.10
-1.95
-4.45
4.83
-0.52
-3.37
9.24
3.06
-1.95
-4.99
0.41
9.24

Para $a_2 - \theta_2$ en la primera etapa:

$p_2(1/a_1,\theta_1) = 0.34$ $\qquad$ $p_2(1/a_1,\theta_2) = 0.51$

$p_2(2/a_1,\theta_1) = 0.24$ $\qquad$ $p_2(2/a_1,\theta_2) = 0.23$

$p_2(3/a_1,\theta_1) = 0.42$ $\qquad$ $p_2(3/a_1,\theta_2) = 0.26$

$p_2(1/a_2,\theta_1) = 0.39$ $\qquad$ $p_2(1/a_2,\theta_2) = 0.55$

$p_2(2/a_2,\theta_1) = 0.27$ $\qquad$ $p_2(2/a_2,\theta_2) = 0.14$

$p_2(3/a_2,\theta_1) = 0.34$ $\qquad$ $p_2(3/a_2,\theta_2) = 0.31$

De donde:

$$\bar{P}_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\begin{array}{cc}\theta_1 & \theta_2\end{array}}^{\theta_1} & \overbrace{\begin{array}{cc}\theta_1 & \theta_2\end{array}}^{\theta_2} \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ \\ a_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.28,0.32,0.40] & [0.30,0.35,0.35] \\ [0.21,0.38,0.41] & [0.34,0.23,0.43] \end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc} [0.29,0.36,0.35] & [0.44,0.34,0.22] \\ [0.33,0.41,0.26] & [0.49,0.23,0.28] \end{array}\right] \\ \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.21,0.39,0.40] & [0.33,0.39,0.28] \\ [0.24,0.44,0.32] & [0.39,0.27,0.34] \end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc} [0.34,0.24,0.42] & [0.51,0.23,0.26] \\ [0.39,0.27,0.34] & [0.55,0.14,0.31] \end{array}\right] \end{array}\right] \end{array}$$

$$\bar{R}(3) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\begin{array}{cc}\theta_1 & \theta_2\end{array}}^{\theta_1} & \overbrace{\begin{array}{cc}\theta_1 & \theta_2\end{array}}^{\theta_2} \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ \\ \\ \\ a_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \begin{array}{c}a_1\\ \\ a_2\end{array}\left[\begin{array}{c} \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.41,0.59] & [0.40,0.60] \\ [0.70,0.30] & [0.71,0.29] \end{array}\right] \\ \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.42,0.58] & [0.41,0.59] \\ [0.72,0.28] & [0.69,0.31] \end{array}\right] \end{array}\right] & \begin{array}{c}a_1\\ \\ a_2\end{array}\left[\begin{array}{c} \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.41,0.59] & [0.38,0.62] \\ [0.71,0.29] & [0.69,0.31] \end{array}\right] \\ \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.39,0.61] & [0.38,0.62] \\ [0.71,0.29] & [0.67,0.33] \end{array}\right] \end{array}\right] \\ \begin{array}{c}a_1\\ \\ a_2\end{array}\left[\begin{array}{c} \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.42,0.58] & [0.40,0.60] \\ [0.72,0.28] & [0.71,0.29] \end{array}\right] \\ \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.41,0.59] & [0.40,0.60] \\ [0.72,0.28] & [0.69,0.31] \end{array}\right] \end{array}\right] & \begin{array}{c}a_1\\ \\ a_2\end{array}\left[\begin{array}{c} \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.41,0.59] & [0.38,0.62] \\ [0.69,0.31] & [0.67,0.33] \end{array}\right] \\ \begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\left[\begin{array}{cc} [0.38,0.62] & [0.38,0.62] \\ [0.66,0.34] & [0.66,0.34] \end{array}\right] \end{array}\right] \end{array}\right] \end{array}$$

El segundo paso es aplicar la fórmula de recurrencia tal y como se muestra en el árbol adjunto.

Obsérvese que por muy ligera ventaja la decisión se inclina hacia duplicar las tarifas al iniciar el sexenio. De hecho la decisión no es clara y la conclusión es conocer mejor la demanda, y revisar el criterio de los expertos.

298. Matrices de información sobre la demanda

Como fué posible apreciar en el ejemplo anterior, el conocimiento de la demanda desempeña un papel primordial para una buena toma de decisiones; la información por escasa que resulte deberá incorporarse en el proceso decisional. Surge así la necesidad de establecer un sistema de información sobre la demanda.

Ahora bien, un sistema de información se caracteriza por su matriz estructural. Esta matriz es estocástica y de probabilidades condicionales $\left[q_{ij}\right]$ esto es, probabilidades de recibir un cierto mensaje dado un estado de la demanda

$$q_{ij} = p(Y_i/s_j)$$

$$\mathcal{Y} = \overline{Q} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ - & - & - & - \\ q_{L1} & q_{L2} & \cdots & q_{Lm} \end{array}\right] \end{array}$$

en donde y_i $(i = 1, \ldots, L)$ son posibles mensajes y s_j $(j = 1, \ldots, m)$ son posibles estados de la demanda. Se acostumbra representar una estructura de información mediante η.

Entonces para una η dada la probabilidad a priori de recibir un mensaje es $p(y_i/s_j)$ y la probabilidad a posteriori de que prevalezca un cierto estado de la demanda s_j habiéndose recibido un mensaje y_i se encuentra por la fórmula de Bayes

$$p(s_j/y_i) = \frac{p(s_j)\, q_{ij}}{\sum_{h=1}^{m} \left[p(s_h)\, q_{ih} \right]}$$

Sea ahora b_{kh} el beneficio de llevar a cabo una acción a_k con una secuencia θ_h. Entonces el beneficio esperado cuando el mensaje y_i ha sido recibido será:

$$W(a_k/y_i) = \sum_{h=1}^{n} r_{kh}(y_i)\, b_{kh}$$

en donde

$r_{kh}(y_i) = \sum_{j=1}^{m} p(s_j/y_i)\, p^j_{kh}$ = probabilidad de que el acto a_k resulte en una consecuencia θ_h cuando el mensaje y_i se ha recibido.

Se entiende por una regla de decisión bayesiana $\alpha^*(y)$ aquella que para cada mensaje $\underline{y}$ selecciona una acción $\underline{a}$, de manera que suministra el máximo beneficio esperado cuando el mensaje $\underline{y}$ ha sido recibido

$$\max_{\alpha} W(a/y) = W\left[\alpha^*(y) \mid y\right]$$

Se entiende por valor bayesiano de una estructura de información η y se representa con $B(\eta)$ al beneficio esperado al considerar todas las posibles acciones elegidas con una regla bayesiana, dado una estructura de información y un vector estocástico $\overline{P}(S_i)$ que tipifica la demanda

$$B(\eta) = \sum_{i=1}^{L} \left\{ q\left[y_i \mid \overline{P}(S_i), \eta \right] \quad W\left[\alpha^* (Y_i) \mid y_i\right] \right.$$

en donde:

$$q\left[y_i \mid \overline{P}(S_i), \eta \right] = \sum_{j=1}^{m} p(S_i)\, q_{ij}$$

299. Ejemplo

Para los datos del problema del número 297 determinar el valor bayesiano de la estructura de información η que a continuación se define

$$\eta = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Los datos son

$$p_{ij}^{1} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, \; p_{ij}^{2} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \; p_{ij}^{3} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \; b_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P} = \left\{ 0.33, 0.34, 0.33 \right\}$$

$$P_1(S_1/Y_1) = \frac{0.33 \times 0.2}{0.33 \times 0.2 + 0.34 \times 0.6 + 0.33\,(0.2)} = \frac{0.066}{0.336} = 0.196$$

$$P_1(S_2/Y_1) = \frac{0.34 \times 0.6}{0.336} = \frac{0.204}{0.336} = 0.608$$

$$P_1(S_3/Y_1) = \frac{0.33 \times 0.2}{0.336} = 0.196$$

$$P_1(S_1/Y_2) = \frac{0.33 \times 0.6}{0.33 \times 0.6 + 0.34 \times 0.1 + 0.33 \times 0.3} = \frac{0.198}{0.331} = 0.598$$

$$P_1(S_2/Y_2) = \frac{0.34 \times 0.1}{0.331} = \frac{0.034}{0.331} = 0.103$$

$$P_1(S_1/Y_3) = \frac{0.33 \times 0.4}{0.33 \times 0.4 + 0.34 \times 0.2 + 0.33 \times 0.4} = \frac{0.132}{0.332} = 0.397$$

$$P_1(S_2/Y_3) = \frac{0.34 \times 0.2}{0.332} = 0.205$$

$$P_1(S_3/Y_3) = \frac{0.33 \times 0.4}{0.332} = \frac{0.132}{0.332} = 0.397$$

Se tiene:

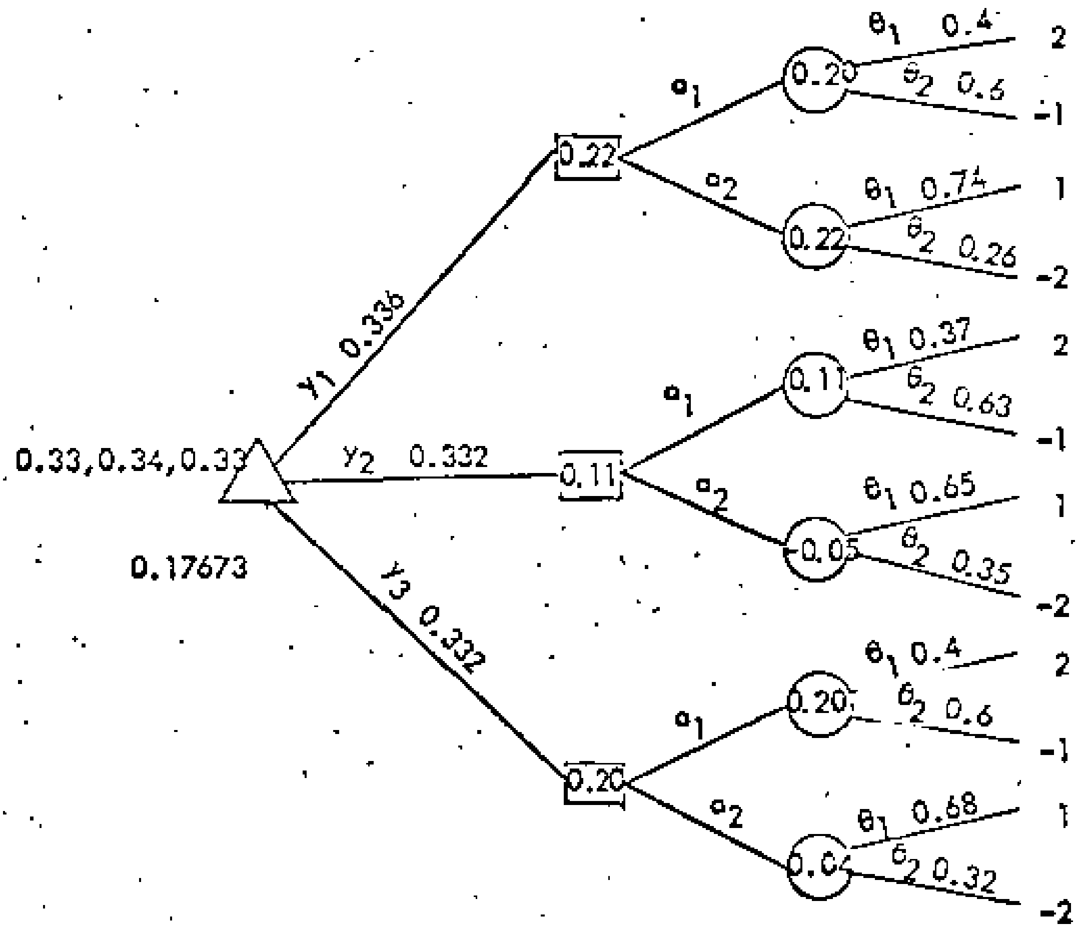
$$\overline{R}\,(1) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.74 & 0.26 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}\,(2) = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.65 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}\,(3) = \begin{bmatrix} 0.3(0.397) + 0.4(0.206) + 0.5(0.397), 0.7(0.397) + 0.6(0.206) + 0.5(0.397) \\ 0.6(0.397) + 0.8(0.206) + 0.7(0.397), 0.4(0.397) + 0.2(0.206) + 0.3(0.397) \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}\,(3) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.68 & 0.32 \end{bmatrix}$$

En resumen



Las reglas de decisión Bayesianas son como sigue:

$$\alpha^*(y_1) = a_2, \quad \alpha^*(y_2) = a_1, \quad \alpha^*(y_3) = a_1$$

Los beneficios esperados, bajo dichas reglas de decisión, cuando se ha recibido el mensaje son:

$$W\left[\alpha^*(y_1) \mid y_1\right] = 0.22, \quad W\left[\alpha^*(y_2) \mid y_2\right] = 0.11, \quad W\left[\alpha^*(y_3) \mid y_3\right] = 0.20$$

Calculando el valor Bayesiano de la estructura de información se tiene:

$$q\left[y_1 \mid \bar{P}(S_i), \eta\right] = 0.33 \times 0.2 + 0.34 \times 0.6 + 0.33 \times 0.2 = 0.336$$

$$q\left[y_2 \mid \bar{P}(S_i), \eta\right] = 0.33 \times 0.6 + 0.34 \times 0.1 + 0.33 \times 0.3 = 0.332$$

$$q\left[y_3 \mid \bar{P}(S_i), \eta\right] = 0.33 \times 0.4 + 0.34 \times 0.2 + 0.33 \times 0.4 = 0.332$$

$$B(\eta) = 0.336 \times 0.22 + 0.331 \times 0.11 + 0.332 \times 0.20 = 0.17673$$

Este resultado se usará más adelante para estimar la calidad de la estructura de información considerada.

300. Indice de calidad de una estructura de información

Con objeto de apreciar lo adecuado o no de una estructura de información para un problema dado, se compara su valor Bayesiano con los que resultan para una estructura de información perfecta y para una estructura nula.

Así para el problema anterior, la estructura perfecta sería:

$$\eta^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la estructura nula sería

$$\eta^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

En la estructura perfecta se tiene certeza de cada mensaje (observación o señal) llegará al que toma la decisión para cada estado de la demanda. En la estructura nula por el contrario, existe la misma probabilidad de que un mensaje cualquiera llegue al inversionista cualquiera que sea el estado de la demanda.

Ahora bien, un sistema de información carece de valor para la toma de decisiones, si el valor bayesiano de su estructura es igual al valor bayesiano de la estructura del sistema nulo. Entonces el valor absoluto de la estructura del ejemplo anterior será:

$$B(\eta) - B(\eta^{o}) = V$$

Calculando $B(\eta^{o})$ se tiene:

$$q\left[y_1 \mid \overline{P}(S_i), \eta^{o}\right] = q\left[y_2 \mid \overline{P}(S_i), \eta^{o}\right] = q\left[y_3 \mid \overline{P}(S_i), \eta^{o}\right] = 0.33\left(\frac{1}{3}\right) + 0.34\left(\frac{1}{3}\right) +$$

$$+ 0.33\left(\frac{1}{3}\right) = 0.3333$$

de donde

$$B(\eta^{o}) = 0.3333 \times 0.22 + 0.3334 \times 0.11 + 0.3333 \times 0.20 = 0.17666$$

$$V = 0.17673 - 0.17666 = 0.00007$$

Los cálculos de los valores bayesianos se han hecho considerando una sola etapa. El valor absoluto obtenido deberá compararse con el de dos etapas, con objeto de decidir si conviene, dado el sistema de información, proseguir a más etapas.

301. Proceso decisional discreto markoviano con decisiones bayesianas y sistema de Información

Sea $p_1(S_h)$ la probabilidad apriori asociada con el h-ésimo estado de la demanda al principio de la primera etapa y que el mensaje y_i se recibe durante dicha primera etapa y que de ello se deriva la acción a_j con una consecuencia θ_k al final de la etapa, entonces si $p_1(S_h/y_i, a_j, \theta_k)$ es la probabilidad a posteriori asociada con el h-ésimo estado de la demanda al final de la etapa dado el hecho de que se ha recibido el mensaje y_i, se ha tomado la acción a_j y se ha obtenido la consecuencia θ_k.

$$p_1(S_h | y_i, a_j, \theta_k) = \frac{p_1(S_h/y_i)\, p_{jk}^h}{\sum_{h=1}^{m} p_1(S_h/y_i)\, p_{jk}^h} \quad ; h = 1, \ldots, m$$

Como consecuencia la probabilidad a priori asociada con el h-ésimo estado de la demanda al principio de la segunda etapa será:

$$p_2(S_h) = p_1(S_h | y_i, a_j, \theta_k)$$

Luego, para la segunda etapa

$$p_2(S_h/y_j) = \frac{p_2(S_h)\, q_{jh}}{\sum_{k=1}^{m} p_2(S_k)\, q_{jk}}$$

$$r_{ik}(2|\ y_i) = \sum_{h=1}^{m} p_2({}^{S_h}/y_i)\, p_{ik}^{h}\ ;\ q_2(y_i) = \sum_{k=1}^{m} p_2(S_k)\, q_{ik}$$

disponiéndose así de todos los elementos necesarios para entrar al cálculo del proceso markoviano; la fórmula general de recurrencia resulta

$$\begin{cases} \Lambda_T \left[\bar{P}_T(S) \,|\, \alpha(y_k), \theta_i, y_k ; \eta\right] = \max\limits_{\alpha} \left\{ f_s\left[\alpha(y_k)\right] \right\} \\ \Lambda_t \left[\bar{P}_t(s) ; \eta\right] = \max\limits_{\alpha} \left\{ f_s(\alpha(y_k)\right] + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} r_{l[\alpha(y_k)],i}\,(t/y_k)\Lambda_{t+1}\left[\bar{P}_t(s)\right. \end{cases}$$

$$\left. \alpha(y_k), \theta_i, y_k ; \eta\right]$$

expresión análoga a las anteriores usadas en procesos markovianos.

302. Ejemplo

Resolver el problema del número 297 pero considerando la estructura de información del número 299.

En el número 299 se calculó

$p_1(S_1/y_1) = 0.196$	$p_1(S_1/y_2) = 0.598$	$p_1(S_1/y_3) = 0.397$
$p_1(S_2/y_1) = 0.603$	$p_1(S_2/y_2) = 0.103$	$p_1(S_2/y_3) = 0.206$
$p_1(S_3/y_1) = 0.196$	$p_1({}^{S}2/y_2) = 0.299$	$p_1({}^{S}3/y3) = 0.397$

De donde

$$p_1({}^{S_1}/y_1, a_1, \theta_1) = \frac{p_1({}^{S_1}/y_1)\, p_{11}^{1}}{\sum\limits_{h=1}^{3} p_1({}^{S_h}/y_1)\, p_{11}^{h}} = \frac{0.196 \times 0.3}{0.196\times0.3+0.603\times0.4+0.196\times0.5} = 0.147$$

análogamente se calculan los restantes, obteniendo:

$$p_1\,(^{S}1/y_1,a_1,\theta_2) = 0.228$$

$$p_1\,(^{S}2/y_1,a_1,\theta_1) = 0.607 \qquad p_1\,(^{S}2/y_1,a_1,\theta_2) = 0.608$$

$$p_1\,(^{S}3/y_1,a_1,\theta_1) = 0.246 \qquad p_1\,(^{S}3/y_1,a_1,\theta_2) = 0.164$$

$$p_1\,(^{S}1/y_2,a_1,\theta_1) = 0.485 \qquad p_1\,(^{S}1/y_2,a_1,\theta_2) = 0.664$$

$$p_1\,(^{S}2/y_2,a_1,\theta_1) = 0.111 \qquad p_1\,(^{S}2/y_2,a_1,\theta_2) = 0.098$$

$$p_1\,(^{S}3/y_2,a_1,\theta_1) = 0.404 \qquad p_1\,(^{S}3/y_2,a_1,\theta_2) = 0.238$$

$$p_1\,(^{S}1/y_3,a_1,\theta_1) = 0.297 \qquad p_1\,(^{S}1/y_3,a_1,\theta_2) = 0.463$$

$$p_1\,(^{S}2/y_3,a_1,\theta_1) = 0.207 \qquad p_1\,(^{S}2/y_3,a_1,\theta_2) = 0.206$$

$$p_1\,(^{S}3/y_3,a_1,\theta_1) = 0.496 \qquad p_1\,(^{S}3/y_3,a_1,\theta_2) = 0.331$$

$$p_1\,(^{S}1/y_1,a_2,\theta_1) = 0.158 \qquad p_1\,(^{S}1/y_1,a_2,\theta_2) = 0.303$$

$$p_1\,(^{S}2/y_1,a_2,\theta_1) = 0.656 \qquad p_1\,(^{S}2/y_1,a_2,\theta_2) = 0.469$$

$$p_1\,(^{S}3/y_1,a_2,\theta_1) = 0.185 \qquad p_1\,(^{S}3/y_1,a_2,\theta_2) = 0.228$$

$$p_1\,(^{S}1/y_2,a_2,\theta_1) = 0.551 \qquad p_1\,(^{S}1/y_2,a_2,\theta_2) = 0.684$$

$$p_1\,(^{S}2/y_2,a_2,\theta_1) = 0.127 \qquad p_1\,(^{S}2/y_2,a_2,\theta_2) = 0.059$$

$$p_1\,(^{S}3/y_2,a_2,\theta_1) = 0.322 \qquad p_1\,(^{S}3/y_2,a_2,\theta_2) = 0.257$$

$$p_1\,(^{S}1/y_3,a_2,\theta_1) = 0.349 \qquad p_1\,(^{S}1/y_3,a_2,\theta_2) = 0.497$$

$$p_1\,(^{S}2/y_3,a_2,\theta_1) = 0.242 \qquad p_1\,(^{S}2/y_3,a_2,\theta_2) = 0.129$$

$$p_1\,(^{S}3/y_3,a_2,\theta_1) = 0.409 \qquad p_1\,(^{S}2/y_3,a_2,\theta_2) = 0.374$$

De donde, en resumen se tiene:

para y_1:

$$\bar{P}_2 = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ [0.147,\ 0.607,\ 0.246] & [0.228,\ 0.608,\ 0.164] \\ [0.158,\ 0.656,\ 0.186] & [0.303,\ 0.469,\ 0.228] \end{bmatrix}$$

para y_2:

$$\bar{P}_2 = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ [0.485,\ 0.111,\ 0.404] & [0.664,\ 0.098,\ 0.238] \\ [0.551,\ 0.127,\ 0.322] & [0.684,\ 0.059,\ 0.257] \end{bmatrix}$$

para y_3:

$$\bar{P}_2 = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ [0.297,\ 0.207,\ 0.496] & [0.463,\ 0.206,\ 0.331] \\ [0.349,\ 0.242,\ 0.409] & [0.497,\ 0.129,\ 0.374] \end{bmatrix}$$

Calculando ahora, para cada condición de demanda, la probabilidad de recibir un mensaje al principio del segundo período, se tiene:

Bajo $[0.147,\ 0.607,\ 0.246]$, la probabilidad de recibir y_1 es:

$$0.147\ (0.2) + 0.607\ (0.6) + 0.246\ (0.2) = 0.461$$

Procediendo de la misma manera para todos los mensajes y todas las condiciones de demanda resulta:

$$\bar{Y}_2 = \begin{array}{c} \\ \\ a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ y_1 \quad y_2 \quad y_3 & y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ [0.461, 0.241, 0.298] & [0.454, 0.257, 0.289] \\ [0.497, 0.230, 0.288] & [0.391, 0.300, 0.309] \\ [0.226, 0.405, 0.369] & [0.206, 0.447, 0.347] \\ [0.229, 0.418, 0.353] & [0.189, 0.458, 0.353] \\ [0.286, 0.351, 0.363] & [0.269, 0.385, 0.346] \\ [0.295, 0.354, 0.351] & [0.236, 0.407, 0.357] \end{bmatrix}$$

Iniciando la segunda etapa:

a) $\overline{P}_2 = [0.147,\ 0.607,\ 0.246]$

$$P_2(^{S}1/y_1) = \frac{0.147 \times 0.2}{0.147 \times 0.2 + 0.60 \times 0.6 + 0.24 \times 0.2} = 0.066$$

$P_2(^{S}2/y_1) = 0.822$ $\quad$ $P_2(^{S}1/y_3) = 0.211$

$P_2(^{S}3/y_1) = 0.112$ $\quad$ $P_2(^{S}2/y_3) = 0.435$

$P_2(^{S}1/y_2) = 0.396$ $\quad$ $P_2(^{S}3/y_3) = 0.354$

$P_2(^{S}2/y_2) = 0.273$

$P_2(^{S}3/y_2) = 0.331$

entonces

$$\overline{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.066(0.3)+0.822(0.4)+0.112(0.5), 0.066(0.7)+ \\ +0.822(0.6)+0.112(0.5) \\ 0.066(0.6)+0.822(0.8)+0.112(0.7), 0.066(0.4)+ \\ +0.822(0.2)+0.112(0.3) \end{bmatrix}$$

$\overline{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.405 & 0.595 \\ 0.776 & 0.224 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\overline{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.394 & 0.606 \\ 0.688 & 0.312 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\overline{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.414 & 0.586 \\ 0.722 & 0.278 \end{bmatrix}$

procediendo análogamente se llega a los siguientes resultados

b) $\overline{P}_2 = [0.228,\ 0.608,\ 0.164]$

$\overline{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.397 & 0.603 \\ 0.772 & 0.228 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\overline{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.364 & 0.633 \\ 0.669 & 0.331 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\overline{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.391 & 0.609 \\ 0.711 & 0.289 \end{bmatrix}$

c) $\bar{P}_2 = [0.158, 0.656, 0.186]$

$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.401 & 0.599 \\ 0.778 & 0.222 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.382 & 0.618 \\ 0.687 & 0.313 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.404 & 0.596 \\ 0.725 & 0.275 \end{bmatrix}$$

d) $\bar{P}_2 = [0.303, 0.469, 0.228]$

$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.396 & 0.604 \\ 0.757 & 0.243 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.362 & 0.638 \\ 0.655 & 0.345 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.390 & 0.610 \\ 0.691 & 0.309 \end{bmatrix}$$

e) $\bar{P}_2 = [0.485, 0.111, 0.404]$

$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.393 & 0.607 \\ 0.687 & 0.313 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.360 & 0.640 \\ 0.634 & 0.366 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.392 & 0.608 \\ 0.655 & 0.345 \end{bmatrix}$$

f) $\bar{P}_2 = [0.664, 0.098, 0.238]$

$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.364 & 0.636 \\ 0.669 & 0.331 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.332 & 0.668 \\ 0.619 & 0.381 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.355 & 0.645 \\ 0.635 & 0.365 \end{bmatrix}$$

g) $\bar{P}_2 = [0.551, 0.127, 0.322]$

$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.382 & 0.618 \\ 0.687 & 0.313 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.347 & 0.653 \\ 0.628 & 0.372 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.376 & 0.624 \\ 0.648 & 0.352 \end{bmatrix}$$

h) $\bar{P}_2 = [0.684, 0.059, 0.257]$

$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.362 & 0.638 \\ 0.655 & 0.345 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.332 & 0.668 \\ 0.618 & 0.382 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.356 & 0.644 \\ 0.633 & 0.367 \end{bmatrix}$$

i) $\bar{P}_2 = [0.297, 0.207, 0.496]$

$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.414 & 0.586 \\ 0.723 & 0.277 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.391 & 0.609 \\ 0.655 & 0.345 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.422 & 0.578 \\ 0.679 & 0.321 \end{bmatrix}$$

j) $\bar{P}_2 = [0.463,\ 0.206,\ 0.331]$

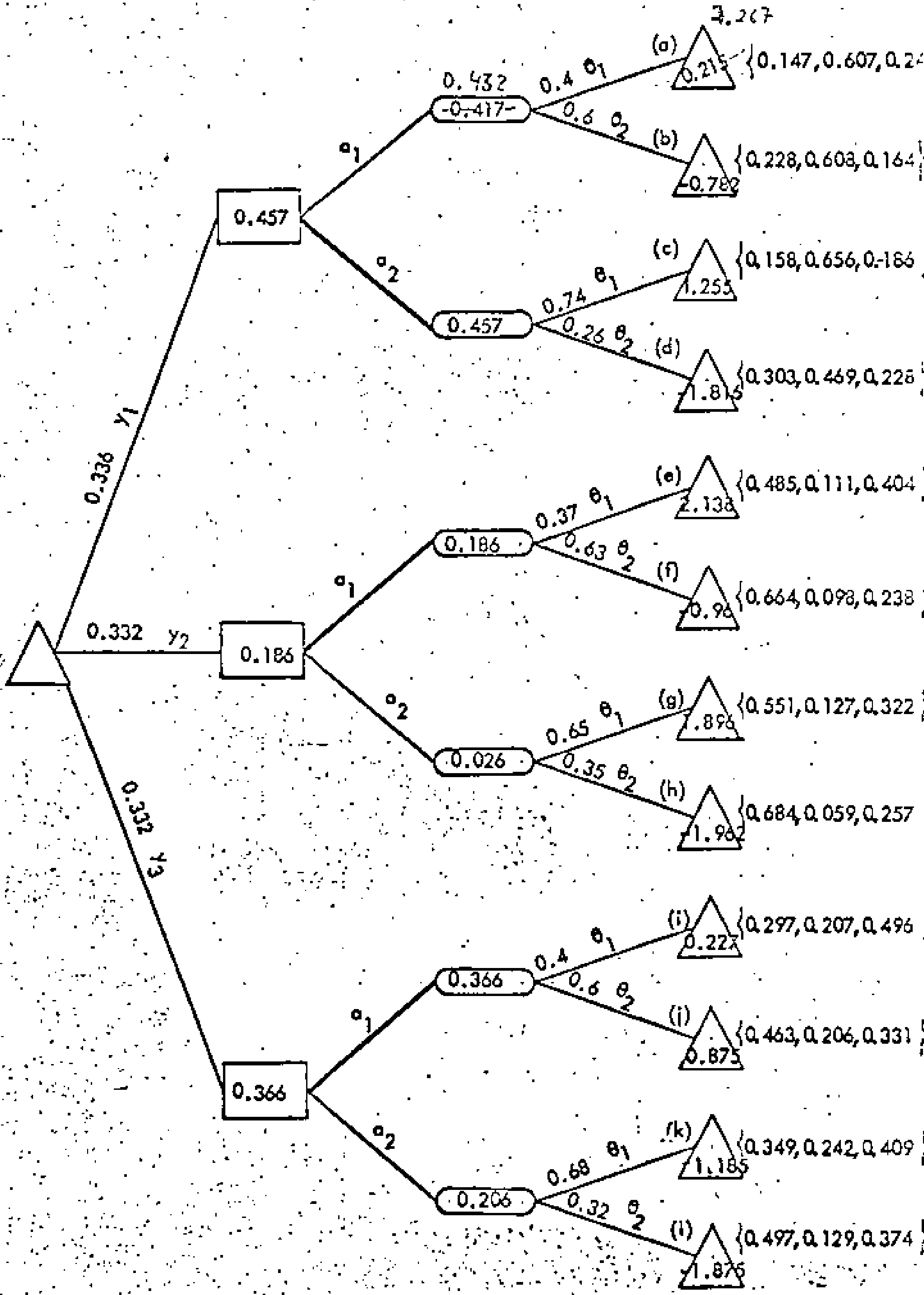
$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.391 & 0.609 \\ 0.711 & 0.289 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.355 & 0.645 \\ 0.635 & 0.365 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.385 & 0.615 \\ 0.660 & 0.340 \end{bmatrix}$$

k) $\bar{P}_2 = [0.349,\ 0.242,\ 0.409]$

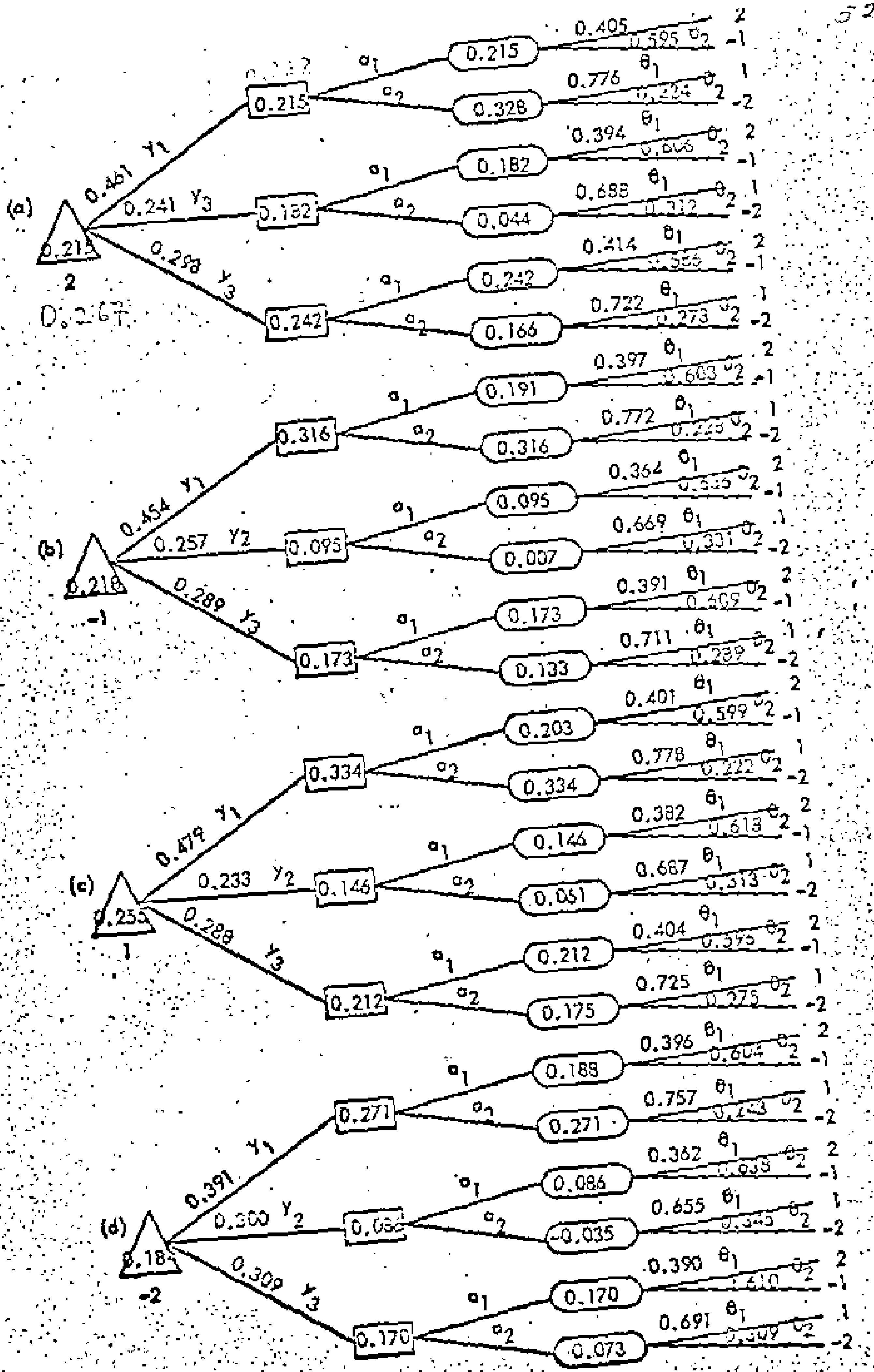
$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.404 & 0.596 \\ 0.725 & 0.275 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.376 & 0.624 \\ 0.648 & 0.352 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.407 & 0.593 \\ 0.674 & 0.326 \end{bmatrix}$$

l) $\bar{P}_2 = [0.497,\ 0.129,\ 0.374]$

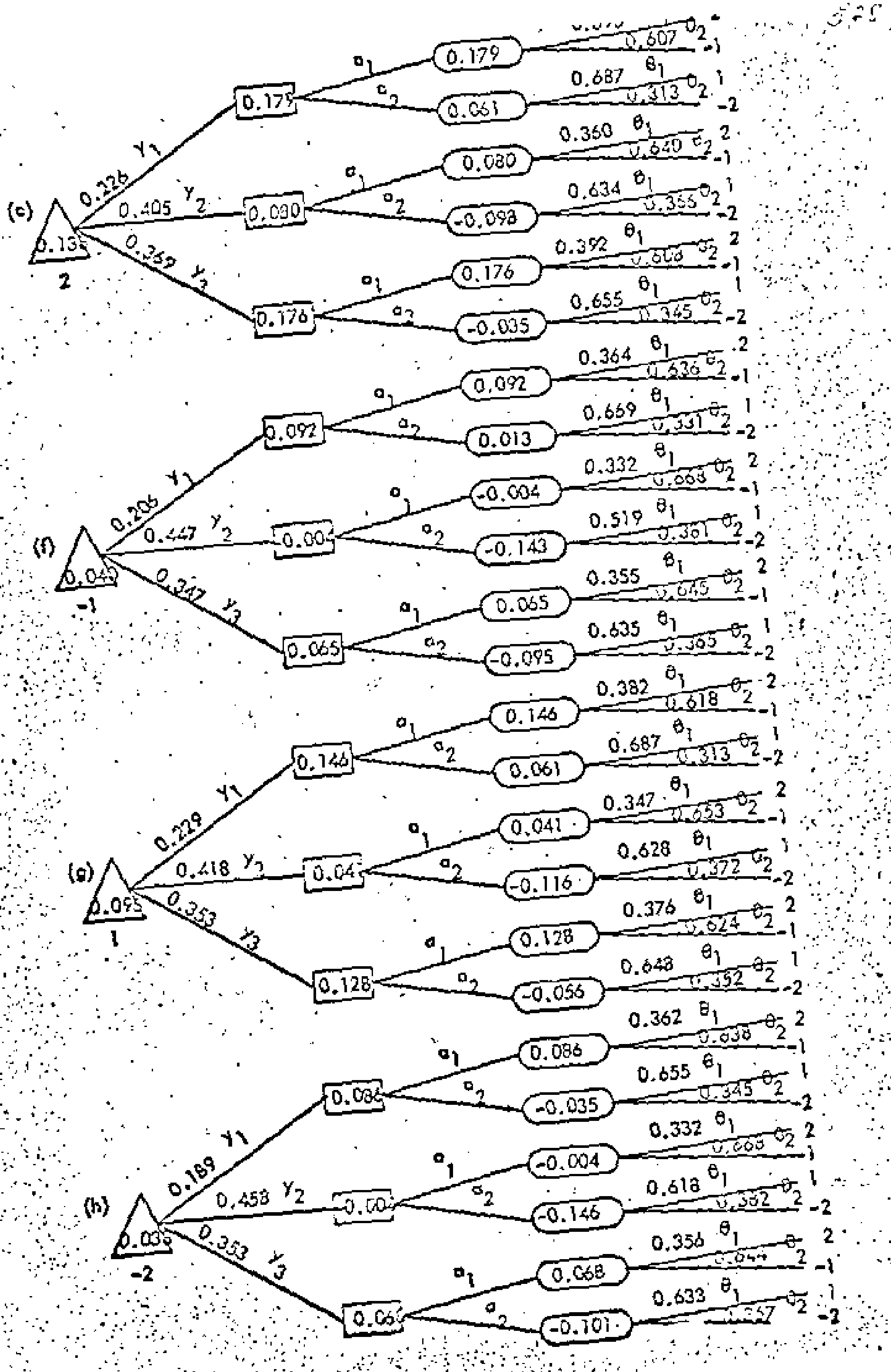
$$\bar{R}(2/y_1) = \begin{bmatrix} 0.390 & 0.610 \\ 0.691 & 0.309 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_2) = \begin{bmatrix} 0.356 & 0.644 \\ 0.633 & 0.367 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2/y_3) = \begin{bmatrix} 0.387 & 0.613 \\ 0.654 & 0.346 \end{bmatrix}$$



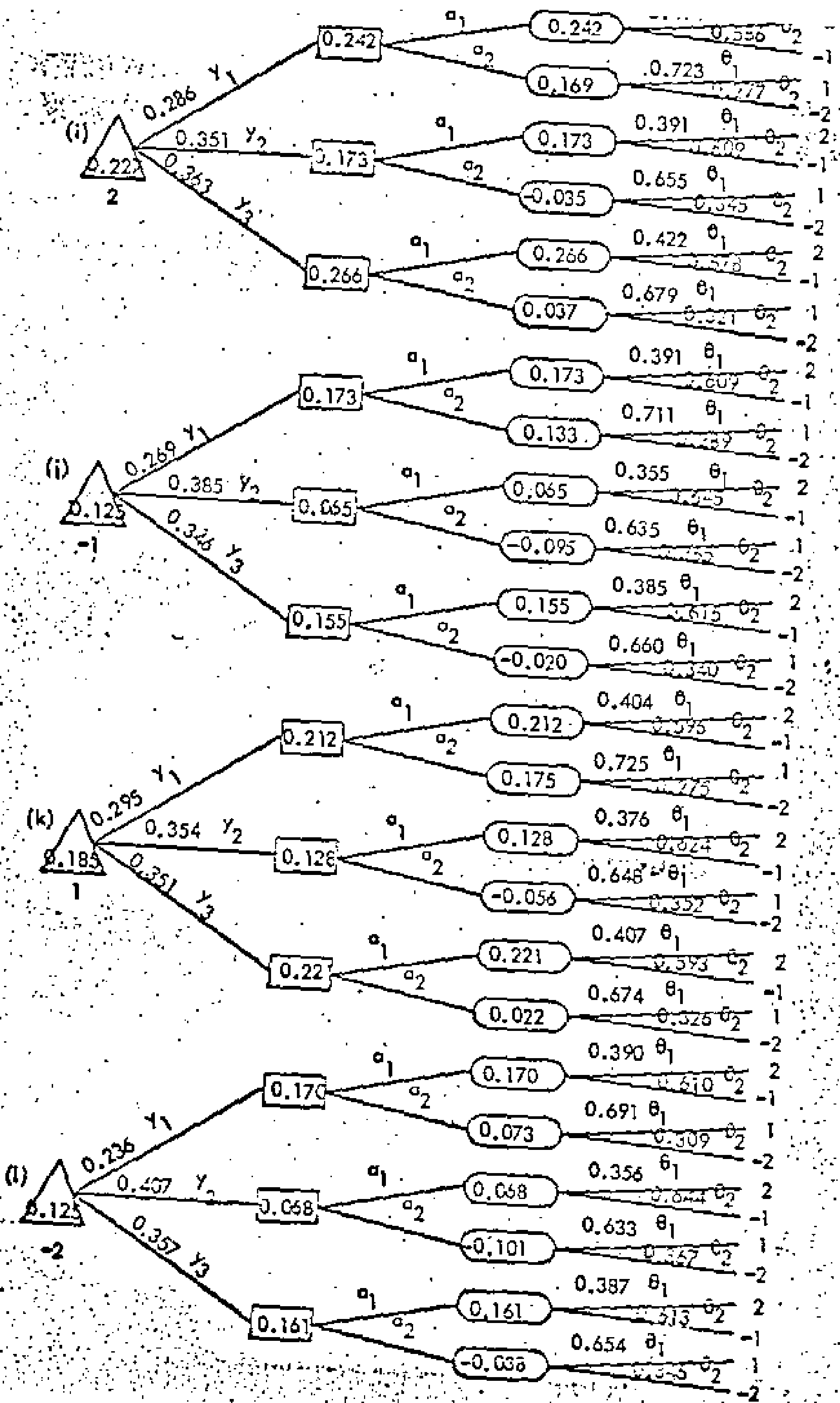
3.267
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
(j)
(k)
(l)
0.215
-0.782
1.255
-1.816
2.136
-0.96
1.896
-1.962
0.227
0.875
1.185
-1.875
{0.147, 0.607, 0.24
{0.228, 0.608, 0.164}
{0.158, 0.656, 0.186
{0.303, 0.469, 0.228
{0.485, 0.111, 0.404
{0.664, 0.098, 0.238
{0.551, 0.127, 0.322
{0.684, 0.059, 0.257
{0.297, 0.207, 0.496
{0.463, 0.206, 0.331
{0.349, 0.242, 0.409
{0.497, 0.129, 0.374
0.432
-0.417-
0.457
0.186
0.026
0.366
0.206
0.4 θ1
0.6 θ2
0.74 θ1
0.26 θ2
0.37 θ1
0.63 θ2
0.65 θ1
0.35 θ2
0.4 θ1
0.6 θ2
0.68 θ1
0.32 θ2
a1
a2
a1
a2
a1
a2
0.457
0.186
0.366
0.336 y1
0.332 y2
0.332 y3



(a)
0.215
2
0.267
0.461 Y1
0.241 Y3
0.298 Y3
0.215
0.182
0.242
a1
a2
0.215
0.328
0.182
0.044
0.242
0.166
0.405
0.595 θ2
0.776 θ1
0.224 θ2
0.394 θ1
0.606 θ2
0.688 θ1
0.312
0.414 θ1
0.586 θ2
0.722 θ1
0.273 θ2
2
-1
1
-2
(b)
0.218
-1
0.454 Y1
0.257 Y2
0.289 Y3
0.316
0.095
0.173
0.191
0.316
0.095
0.007
0.173
0.133
0.397 θ1
0.603 θ2
0.772 θ1
0.228 θ2
0.364 θ1
0.636 θ2
0.669 θ1
0.331 θ2
0.391 θ1
0.609 θ2
0.711 θ1
0.289 θ2
(c)
0.255
1
0.479 Y1
0.233 Y2
0.288 Y3
0.334
0.146
0.212
0.203
0.334
0.146
0.061
0.212
0.175
0.401 θ1
0.599 θ2
0.778 θ1
0.222 θ2
0.382 θ1
0.618 θ2
0.687 θ1
0.313 θ2
0.404 θ1
0.595 θ2
0.725 θ1
0.275 θ2
(d)
0.18
-2
0.391 Y1
0.300 Y2
0.309 Y3
0.271
0.086
0.170
0.188
0.271
0.086
-0.035
0.170
0.073
0.396 θ1
0.604 θ2
0.757 θ1
0.243 θ2
0.362 θ1
0.638 θ2
0.655 θ1
0.345 θ2
0.390 θ1
0.410 θ2
0.691 θ1
0.309 θ2



(e)
0.135
2
0.226 y1
0.405 y2
0.369 y3
0.179
0.080
0.176
a1
a2
0.179
0.061
0.080
-0.098
0.176
-0.035
0.607
0.687 θ1
0.313 θ2
0.360 θ1
0.640 θ2
0.634 θ1
0.366 θ2
0.392 θ1
0.608 θ2
0.655 θ1
0.345 θ2
(f)
0.045
-1
0.206 y1
0.447 y2
0.347 y3
0.092
0.004
0.065
0.092
0.013
-0.004
-0.143
0.065
-0.095
0.364 θ1
0.636 θ2
0.669 θ1
0.331 θ2
0.332 θ1
0.668 θ2
0.519 θ1
0.361 θ2
0.355 θ1
0.645 θ2
0.635 θ1
0.365 θ2
(g)
0.095
1
0.229 y1
0.418 y2
0.353 y3
0.146
0.04
0.128
0.146
0.061
0.041
-0.116
0.128
-0.056
0.382 θ1
0.618 θ2
0.687 θ1
0.313 θ2
0.347 θ1
0.653 θ2
0.628 θ1
0.372 θ2
0.376 θ1
0.624 θ2
0.648 θ1
0.352 θ2
(h)
0.035
-2
0.189 y1
0.458 y2
0.353 y3
0.086
0.004
0.068
0.086
-0.035
-0.004
-0.146
0.068
-0.101
0.362 θ1
0.638 θ2
0.655 θ1
0.345 θ2
0.332 θ1
0.668 θ2
0.618 θ1
0.382 θ2
0.356 θ1
0.644 θ2
0.633 θ1
0.367 θ2
2
-1
1
-2


(i)
0.227
2
0.286 y_1
0.351 y_2
0.363 y_3
0.242
0.173
0.266
a_1
a_2
0.242
0.169
0.173
-0.035
0.266
0.037
0.723 θ_1
0.391 θ_1
0.655 θ_1
0.422 θ_1
0.679 θ_1
θ_2
2
-1
1
-2
(j)
0.125
-1
0.269 y_1
0.385 y_2
0.346 y_3
0.173
0.065
0.155
0.173
0.133
0.065
-0.095
0.155
-0.020
0.391 θ_1
0.711 θ_1
0.355 θ_1
0.635 θ_1
0.385 θ_1
0.660 θ_1
(k)
0.185
1
0.295 y_1
0.354 y_2
0.351 y_3
0.212
0.128
0.221
0.212
0.175
0.128
-0.056
0.221
0.022
0.404 θ_1
0.725 θ_1
0.376 θ_1
0.648 θ_1
0.407 θ_1
0.674 θ_1
(l)
0.125
-2
0.236 y_1
0.407 y_2
0.357 y_3
0.170
0.068
0.161
0.170
0.073
0.068
-0.101
0.161
-0.038
0.390 θ_1
0.691 θ_1
0.356 θ_1
0.633 θ_1
0.387 θ_1
0.654 θ_1

308. Clasificación de los procesos adaptivos

Tipo I) El estado del ámbito es determinista pero el que toma las decisiones lo desconoce, resultado un proceso decisional bajo incertidumbre.

Tipo II) El estado del ámbito es aleatorio pero dado el estado de la historia del proceso su decisión es determinista.

309. Pasos en un proceso adaptivo del segundo tipo

i) Recepción del vector de información histórica a priori incluyendo beneficios logrados.

ii) Determinación de la acción óptima a realizar. Una vez determinada esta acción se genera el vector de decisiones óptimas.

iii) Transformación de los beneficios y del vector de información histórica.

iv) Envío de estos resultados para su uso en la siguiente etapa.

310. Proceso adaptivo económico

Dado que un proceso económico lo que busca es asignar recursos con objeto de lograr un objetivo, un proceso adaptivo será calificado de económico cuando asigna recurso, con objeto de lograr la mayor tasa de crecimiento de los beneficios.

311. Elementos analíticos de un proceso adaptivo económico (tipo I y II).

a) Distribución de la probabilidad sujetiva sobre el estado del ámbito.

b) Distribución de probabilidad de tomar una cierta decisión en una etapa dada.

c) Una relación funcional que defina la función de beneficios.

d) Una relación funcional que defina la función de recursos.

e) Una medida de la información lograda con los registros históricos.

f) Una función de transición para cambiar probabilidades sujetivas sobre el estado del ámbito de etapa a etapa.

g) Una función de transición para cambiar probabilidades de tomar una cierta decisión de etapa a etapa.

312. Distribución de la probabilidad sujetiva (binomial) sobre el estado del ámbito.

Una de las distribuciones que más se presta, dada su flexibilidad, para expresar la opinión sujetiva sobre el estado del ámbito es la binomial generalizada o distribución Beta.

Esta distribución que ofrece una gran variedad de formas (figura adjunta), es contínua, se describe mediante dos parámetros r y t y su rango es $[0, 1]$.

La densidad es:

$$f(p) = \frac{p^{r-1}(1-p)^{t-r-1}}{B} \quad ; \quad 0 \leq p \leq 1$$

en donde

$$B = \frac{(r-1)!\,(t-r-1)!}{(t-1)!} \quad ; \quad r \text{ y } (t-r) > 0$$

cuando t y r son enteros.

O bien

$$B = \frac{\Gamma(r)\,\Gamma(t-r)}{\Gamma(t)} \quad ; \quad r \text{ y } (t-r) > 0$$

cuando t y r son reales.

Su esperanza matemática es $E(p) = \frac{r}{t}$

su variancia es

$$V_{ar}(p) = \frac{r(t-r)}{t^2(t+1)}$$

Específicamente cuando se usa para expresar probabilidades sujetivas se utiliza el llamado "vector de convicción del ejecutivo"

$$\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$$

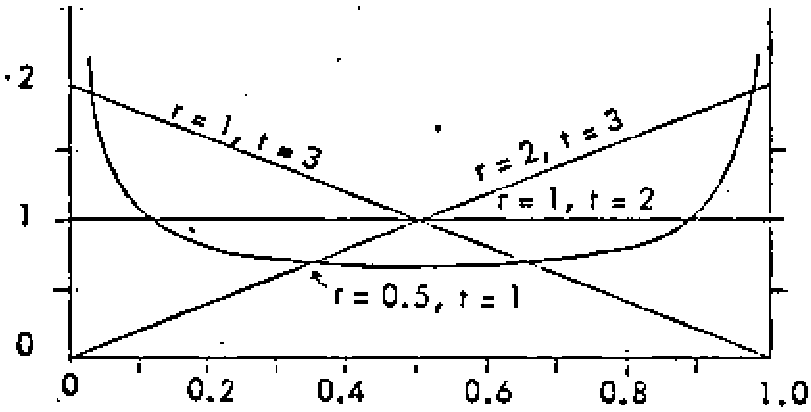
en donde

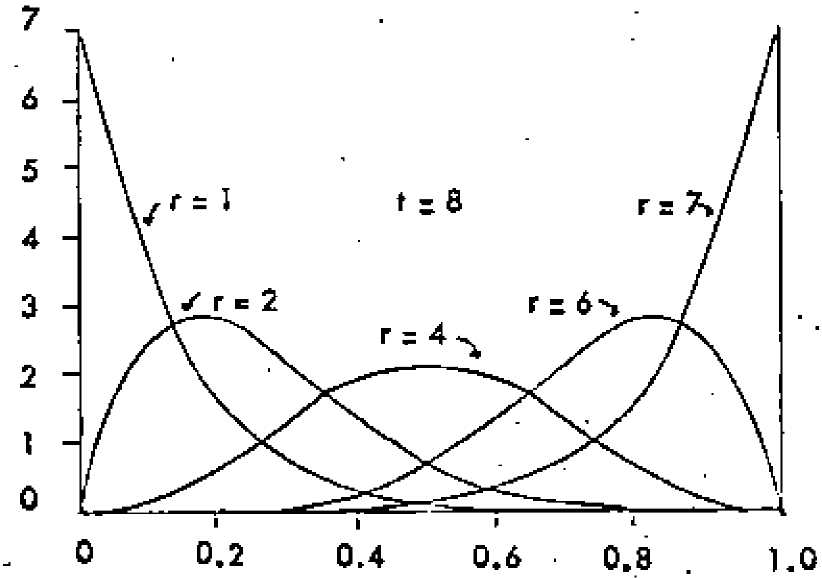
$$\alpha_1 = r$$

$$\alpha_2 = t - r$$

Entonces

$$f(p) = \frac{p^{\alpha_1 - 1}(1-p)^{\alpha_2 - 1}}{B} \quad ; \quad 0 \leq p \leq 1$$


2
1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
r = 1, t = 3
r = 2, t = 3
r = 1, t = 2
r = 0.5, t = 1


7
6
5
4
3
2
1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
r = 1
t = 8
r = 7
r = 2
r = 6
r = 4

$$B = \frac{(\alpha_1 - 1)!\,(\alpha_2 - 1)!}{(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)!} \quad \text{si } \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \text{ enteros y positivos} \; ; \; B = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{si } \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \text{ reales positivos}$$

$$E(p) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \; ; \quad V_{ar}(p) = \frac{\alpha_1 \, \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \, (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}$$

Con el vector de convicción del que toma las decisiones se define el tipo de distribución aunque no el valor del parámetro "p" conduciendo así a un caso de incertidumbre parcial.

313. El proceso económico del ámbito del sistema

El ámbito económico o proceso generador de eventos puede actuar sobre el sistema incrementa o disminuyendo la tasa de crecimiento de los beneficios. Cuando esto ocurre se dice que el ámbito actua generando una sucesión de eventos binomiales y que el sistema se encuentra en un ámbito económico binomial. Cuando la situación es que uno de entre varios eventos puede ocurrir el ámbito económico del sistema será multinomial. El ámbito económico será markoviano cuando los eventos en cada etapa son mutuamente exclusivos pero dependen del evento generado en la etapa anterior.

Obsérvese que en un proceso adaptivo se tiene tanto el proceso del ámbito económico como el proceso decisional propiamente.

Con gran frecuencia en los procesos de inversiones el ámbito es binomial o a lo más multinomial.

314. Ambito económico multinomial

Con objeto de estudiar el proceso generador de eventos mutuamente exclusivos e independientes del tiempo (binomial o multinomial) se especificará el conjunto M de todos los eventos que pueden ocurrir como resultado de un ámbito multinomial. Se incluirán únicamente aquellos eventos que tengan algún significado económico en el estado del proceso, esto es aquellos que tengan influencia sobre cambios en los beneficios. Se definirá como una etapa en el proceso del ámbito el intervalo de tiempo lo suficientemente corto como para que uno y solamente uno de los eventos del conjunto M pueda ocurrir durante el intervalo.

Bajo estas condiciones se definirá un conjunto de probabilidades que describan el proceso del ámbito y que se llamará la función de probabilidad del proceso estocástico del ámbito económico del sistema.

a) La probabilidad de que un evento del conjunto M ocurra en una etapa es igual a la unidad.

b) La probabilidad de que dos o mas eventos del conjunto M ocurran simultáneamente en una etapa es cero.

c) La probabilidad de que el i-ésimo evento del conjunto M ocurra en la t-ésima etapa es p_i.

d) Las variables x_{it} descriptivas de eventos son binarias aleatorias e independientes.

$$x_{it}\begin{cases} = 0 \text{ si el i-ésimo evento de } M \text{ no ocurrió en la etapa } t. \\ = 1 \text{ si el i-ésimo evento de } M \text{ sí ocurrió en la etapa } t. \end{cases}$$

La hipótesis (d) conduce a que la función de probabilidad del proceso estocástico del ámbito económico del sistema pueda expresarse como un producto de distribuciones marginales:

$$f(x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{mt}; p_1, p_2, \ldots, p_m) = \prod_{i \in M} p_i^{x_{it}}$$

en donde:

$$x_{it} = 0 \text{ ó } 1 \;; \quad \sum_{i \in M} x_{it} = 1, \; i \quad M, \; t = 1, \ldots, T$$

$$p\,i \geq 0 \;; \quad \sum_{i \in M} p_i = 1.$$

Supóngase ahora que el proceso ha operado por T etapas. El encargado de las decisiones ha acumulado una secuencia de vectores que describen la historia de las T etapas.

$$X_T = \left\{ x_{11}, \ldots, x_m \,;\, x_{12}, \ldots, x_{m2} \,;\, \ldots \,;\, x_{1T}, \ldots, x_{mT} \right\}$$

De ahí se pueden extraer algunas conclusiones:

a) $\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in M} x_{it} = T$

b) $\displaystyle\sum_{i \in M} x_{it} = 1$

c) Frecuencia del i-ésimo evento (n_i)

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} = n_i \;;\; n_i \in N$$

d) $\sum_{i \in M} n_i = T$

Mediante N será posible estimar los parámetros de P (función de probabilidad del ámbito económico del sistema).

315. Vector de probabilidad sujetiva para la función de probabilidad del proceso estocástico de un ámbito multinomial.

Cuando el encargado de las decisiones principia a recabar información histórica sobre el proceso estocástico del ámbito de un sistema generalmente tiene ya una idea preliminar de su distribución, misma que expresa mediante un vector de convicción, que para el caso de ámbito multinomial será $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M)$. Posteriormente recaba información sobre T etapas obteniendo frecuencias del i-ésimo evento (n_i) con esto se encuentra en condiciones de estimar los parámetros de P mediante la expresión.

$$\widehat{p}_{iT} = \frac{n_i + \alpha_i}{T + \sum_{i \in M} \alpha_i}$$

Al vector $\widehat{P} = (\widehat{p}_{1T}, \widehat{p}_{2T}, \ldots, \widehat{p}_{mT})$ que es un estimador consistente e insesgado de P se le llama el vector de probabilidad sujetiva para la función de probabilidad del proceso estocástico de un ámbito multinomial.

316. Ambito binomial

El ámbito binomial es un caso particular del multinomial, entonces M consistirá de sólo dos eventos y se tiene:

a) Función de probabilidad del proceso estocástico del ámbito binomial para una etapa t cualquiera

$$f(x_{1t}, x_{2t}; p_1\,(1-p) = p^{x_{1t}}\,(1-p)^{x_{2t}}$$

$$x_{it} = 0 \text{ ó } 1 \quad , \quad i = 1, 2 .$$

$$p \geq 0$$

b) El vector de probabilidad sujetiva cuando el de convicción es $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ y se ha recabado información de T etapas con frecuencia de eventos n_1 y n_2 respectivamente es

$$p_{1T} = \frac{n_1 + \alpha_1}{T + \alpha_1 + \alpha_2} \quad ; \quad q = (1-p) = \frac{n_2 + \alpha_2}{T + \alpha_1 + \alpha_2}$$

317. Ejemplo

En una carretera se hacen aforos de tránsito mensualmente y se opina que la probabilidad de que al llevar a cabo un aforo se detecte un incremento del 10% en la circulación es muy baja y de hecho en esa observación no se encontró. ¿Cuál es la función de probabilidad del proceso estocástico del ámbito para esa etapa?

En este caso:

$x_1 =$ existe un incremento del 10% en la circulación.

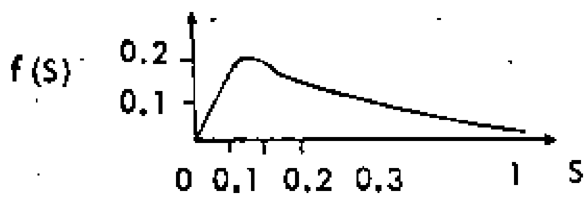
$x_2 =$ no existe un incremento del 10% en la circulación.

se está considerando que el ámbito es binomial y

$$f(x_1, x_2; p, 1-p) = f(0,1; p, (1-p) = p^0 (1-p)^1 = 1-p$$

la función buscada es $1-p$.

Con objeto de estimar la probabilidad de "p" se logró como opinión la gráfica adjunta sobre probabilidad de que se observara un incremento del 10% en la circulación en una observación cualquiera.



$s =$ probabilidad de que en una observación cualquiera se observe un incremento en la circulación del 10%.

Comparando dicha gráfica con las de la distribución Beta se concluyó que podría corresponder con la de parámetros $r = 2$, $t = 8$ de donde el vector de convicción del que emitió la opinión es:

$$\overline{\alpha} = (2, 6).$$

Por otra parte al observar los registros de los cinco meses anteriores se pudo cons tatar que se había observado un incremento en el primero y en el cuarto mes, ¿Cuál es la mejor estimación para p?

El horizonte es $T = 5$ (para el registro histórico).

El registro es $X_5 = (1,0;0,1;0,1;1,0;0,1)$

de donde $n_1 = 2$, $n_2 = 3$

$$\hat{P}_5 = \frac{2+2}{5+2+6} = \frac{4}{13} = 0.308$$

Esto es, la probabilidad de que en una etapa "t" cualquiera se observe un incremento del 10% en la circulación es del 30.8%.

El vector de probabilidad sujetiva será $\overline{P} = \left\{0.308\ ,\ 0.692\right\}$.

318. <u>Ejemplo</u>

Al estudiar la demanda horaria en una carretera mediante observaciones mensuales se clasificó la circulación en 10,20,30,40 ó 50 vehículos por hora. El vector de convicción se estableció en $\overline{\alpha} = (2,4,8,6,2)$. El registro histórico de 8 etapas es como sigue:

$$x_8 = \left\{0,0,1,0,1;1,0,0,0,0;0,0,1,0,0;0,1,0,0,0;0,0,0,1,0;0,1,0,0,0;0,0,1,0,1;\ 0,0,0,1,0\right\}$$

¿Cuál es el vector de probabilidad sujetiva?

Se tiene:

$n_1 = 1$ (10 vehículos por hora)

$n_2 = 2$ (20 vehículos por hora)

$n_3 = 3$ (30 vehículos por hora)

$n_4 = 2$ (40 vehículos por hora)

$n_5 = 0$ (50 vehículos por hora)

entonces:

$$\hat{p}_{18} = \frac{1+2}{8+22} = \frac{3}{30} \; ; \; \hat{p}_{28} = \frac{2+4}{8+22} = \frac{6}{30} \; ; \; \hat{p}_{38} = \frac{3+8}{8+22} \; ; \; \hat{p}_{48} = \frac{2+6}{8+22} = \frac{8}{30}$$

$$\hat{p}_{58} = \frac{0+2}{8+22} = \frac{2}{30}$$

$$\hat{p} = \frac{3}{30}, \frac{6}{30}, \frac{11}{30}, \frac{8}{30}, \frac{2}{30}$$

Si la última observación (novena) fué $x_{19} = 0,\ x_{29} = 1,\ x_{39} = 0,\ x_{49} = 0,\ x_{59} = 0$

¿Cuál es la función de probabilidad, para la novena etapa, del ámbito económico multinomial del sistema?

$$f(x_{19}, x_{29}, x_{39}, x_{49}, x_{59}; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \prod_{i=1}^{5} p_i^{x_{i9}}$$

$$f(0,1,0,0,0; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = p_1^0 \cdot p_2^1 \cdot p_3^0 \cdot p_4^0 \cdot p_5^0 = p_2^1$$

y usando

$$f(0,1,0,0,1; p_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4, \hat{p}_5) = \frac{6}{30}$$

319. Información mutua

Se estudiarán, ahora, medidas de la información disponible. La primera de ellas es la llamada información mutua.

Considerese un sistema decisional de dos etapas. En la primera de ellas se decidirá si se encuentra deteriorado o intrasitable; en la segunda etapa de decidirá si se invierte un millón o cinco millones.

a_{11} = camino deteriorado

a_{12} = camino intrasitable

a_{21} = se invierte un millón

a_{22} = se invierten cinco millones.

Supóngase que se conocen las siguientes probabilidades:

$$p\,(a_{11} \text{ y } a_{21}) = 0.4 \qquad p\,(a_{12} \text{ y } a_{21}) = 0.2$$

$$p\,(a_{11} \text{ y } a_{22}) = 0.3 \qquad p\,(a_{12} \text{ y } a_{22}) = 0.1$$

entonces:

$$p\,(a_{11}) = p\,(a_{11} \text{ y } a_{21}) + p\,(a_{11} \text{ y } a_{22})$$

$$p\,(a_{12}) = p\,(a_{12} \text{ y } a_{21}) + p\,(a_{12} \text{ y } a_{22})$$

$$p\,(a_{21}) = p\,(a_{11} \text{ y } a_{21}) + p\,(a_{12} \text{ y } a_{21})$$

$$p\,(a_{22}) = p\,(a_{11} \text{ y } a_{22}) + p\,(a_{12} \text{ y } a_{22})$$

de donde:

$$p(a_{11}) = 0.7$$

$$p(a_{12}) = 0.3$$

$$p(a_{21}) = 0.6$$

$$p(a_{22}) = 0.4$$

y las siguientes probabilidades condicionales

$$p(a_{21}/a_{11}) = \frac{p(a_{21} \text{ y } a_{11})}{p(a_{11})} = 0.57$$

$$p(a_{22}/a_{11}) = \frac{p(a_{22} \text{ y } a_{11})}{p(a_{11})} = 0.43$$

$$p(a_{21}/a_{12}) = \frac{p(a_{21} \text{ y } a_{12})}{p(a_{12})} = 0.67$$

$$p(a_{22}/a_{12}) = \frac{p(a_{22} \text{ y } a_{12})}{p(a_{12})} = 0.33$$

Por otra parte se sabe ahora con certeza que el camino se encuentra deteriorado, esto es, que ocurrió a_{11} ¿Qué tanta información se ha ganado con ello con relación a las decisiones de la segunda etapa?

Para contestar a esta pregunta se definirá la siguiente medida de información:

$I(a_{21}; a_{11}) =$ información mutua para a_{21} cuando se conoce a_{11}

$I(a_{22}; a_{11}) =$ información mutua para a_{22} cuando se conoce a_{11}

$$I(a_{21}; a_{11}) = L \frac{p(a_{21}/a_{11})}{p(a_{21})} = L(0.57) - L(0.6)$$

$$= -0.56212 - (-0.51083)$$

$$= -0.05129 \text{ nats.}$$

$$I(a_{22}; a_{21}) = L \frac{p(a_{22}/a_{11})}{p(a_{22})} = L(0.43) - L(0.4)$$

$$= 0.0\ 6771 \text{ nats.}$$

Cuando los eventos de la segunda etapa son independientes de los de la primera, la información mutua es nula.

320. Autoinformación

Supóngase ahora que rige la regla: "se invierte un millón si y solo si el camino se encuentra deteriorado; se invierten cinco millones si y solo si el camino se encuentre intrasitable".

Entonces: $p(a_{21}/a_{11}) = 1$; $p(a_{22}/a_{12}) = 1$.

De donde la información mutua resulta:

$$I(a_{21}; a_{11}) = I(a_{21}) = -L\, p(a_{21}) = -L(0.6) = 0.51083 \text{ nats.}$$

$$I(a_{22}; a_{12}) = I(a_{22}) = -L\, p(a_{22}) = -L(0.4) = 0.91630 \text{ nats.}$$

$I(a_{21})$, $I(a_{22})$ reciben el nombre de autoinformación de los eventos de la segunda etapa. La autoinformación es la cantidad de información suministrada por el conocimiento de los resultados de una etapa dada del proceso.

323. Entropia condicional de un sistema

El concepto anterior se puede generalizar para considerar todas las etapas transcurridas hasta la t. Para ello se empleará la siguiente notación: $z_1, \ldots, z_t$ son los efectos en el sistema de los eventos ocurridos en el ámbito en cada una de las distintas etapas. Como se ha dicho si el ámbito es multinomial serán eventos mutuamente exclusivos, uno por etapa, de entre los m del conjunto M, así z_3 será el efecto en el sistema del evento producido por el ámbito en la tercera etapa. Si se representa con U_{τ} al conjunto de efectos en el sistema de todos los posibles eventos que puede producir el ámbito en la etapa resulta

$$U_{\tau} = \left\{ u_{\tau 1}, u_{\tau 2}, \ldots, u_{\tau m} \right\} \qquad \tau = 1, \ldots, t$$

Como anteriormente se hizo se definirá una sucesión de funciones de probabilidad una para cada etapa, mediante

$$P(z_1) = \left[P(z_1 = u_i) ; i \in M \right]$$
$$P(z_2/z_1) = \left[P(z_2 = u_j/z_1 = u_i) ; i, j \in M \right]$$
$$P(z_t/z_{t-1}, \ldots, z_2, z_1) = \left[P(z_t = u_k/z_{t-1} = u_j, \ldots, z_1 = u_i)\ k, j, \ldots, i \in M \right]$$

Con estas probabilidades condicionales formar la función de probabilidad conjunta

$$P(z_1, z_2, \ldots, z_t) = P(z_1)\, P(z_2/z_1) \ldots P(z_t/z_{t-1}, \ldots, z_1)$$

y se definirá como entropia condicional del sistema

$$H(U_t/U_{t-1}, \ldots, U_1) = - \sum_{U_t, \ldots, U_1} P(z_1, z_2, \ldots, z_t)\, L\, P(z_t/z_{t-1}, \ldots, z_1)$$

321. Entropia de un proceso para una etapa dada

A la esperanza matemática de la autoinformación de los resultados de una etapa se le llama la entropia de la información sobre los resultados de una etapa dada del proceso.

Así para el proceso considerado la entropia para la segunda etapa es:

$$E(I(A_2)) = -p(a_{21})\,L\,p(a_{21}) - p(a_{22})\,L\,p(a_{22})$$

$$= 0.6\,(0.51083) + 0.4\,(0.91630)$$

$$E(I(A_2)) = 0.67302 \text{ nats.} = H(U_2)$$

y en general

$$H(U_t) = -\sum_{i \in M} p(u_{ti})\,L\,p(u_{ti})$$

Se demuestra, por otra parte, que la entropia máxima en una etapa t de un proceso con m eventos mutuamente exclusivos es:

$$H^*(U_t) = L\,(m)$$

322. Entropia condicional de un proceso en una etapa dada

Supóngase ahora el caso inverso, esto es, se desea medir que tanta información se gana con el conocimiento de que se invirtió o no un millón de pesos con la condición de que se conoce con certeza que el camino se encuentra deteriorado.

Se tiene así la medida de información de a_{21} condicionada a a_{11}

$$I(a_{21}/a_{11}) = I(a_{21}) - I(a_{21}; a_{11})$$

la información condicional es la diferencia de la autoinformación menos la información mutua.

$$I(a_{21}/a_{11}) = -L\,p(a_{21}) - \left[L(p(a_{21}/a_{11}) - L\,p(a_{21})\right]$$

$$I(a_{21}/a_{11}) = -L\,p(a_{21}/a_{11}) = 0.56212 \text{ nats.}$$

en forma análoga resultan las siguientes informaciones condicionales

$$I(a_{21}/a_{12}) = -L\,p(a_{21}/a_{12}) = -L(0.67) = 0.40048 \text{ nats.}$$

$$I(a_{22}/a_{11}) = -L\,p(a_{22}/a_{11}) = -L(0.43) = 0.84397 \text{ nats.}$$

$$I(a_{22}/a_{12}) = -L\,p(a_{22}/a_{12}) = -L(0.33) = 1.10867 \text{ nats.}$$

Entonces la entropia condicional resulta

$$E\left[I(A_2/A_1)\right] = -p(a_{21}\ y\ a_{11})\,L\,p(a_{21}/a_{11}) - p(a_{21}\ y\ a_{12})\,L\,p(a_{21}/a_{12})$$
$$- p(a_{22}\ y\ a_{11})\,L\,p(a_{22}/a_{11}) - p(a_{22}\ y\ a_{12})\,L\,p(a_{22}/a_{12})$$

$$E\left[I(A_2/A_1)\right] = -0.4(-0.56212) - 0.2(-0.40048) - 0.3(-0.84397)$$
$$E\left[I(A_2/A_1)\right] \quad -0.1(-1.10867) = 0.66900 \text{ nats.} = H(U_2/U_1)$$

y en general

$$H(U_t/U_{t-1}) = -\sum_{i,j\in M} p(u_{ti}\ y\ u_{t-1,j})\,L\,p(u_{ti}/u_{t-1,j})$$

Se tiene así la medida de información de a_{21} condicionada a a_{11}

$$I(a_{21}/a_{11}) = I(a_{21}) - I(a_{21}; a_{11})$$

la información condicional es la diferencia de la autoinformación menos la información mutua.

$$I(a_{21}/a_{11}) = -L\,p(a_{21}) - \left[L(p(a_{21}/a_{11}) - L\,p(a_{21})\right]$$

$$I(a_{21}/a_{11}) = -L\,p(a_{21}/a_{11}) = 0.56212 \text{ nats.}$$

en forma análoga resultan las siguientes informaciones condicionales

$$I(a_{21}/a_{12}) = -L\,p(a_{21}/a_{12}) = -L(0.67) = 0.40048 \text{ nats.}$$

$$I(a_{22}/a_{11}) = -L\,p(a_{22}/a_{11}) = -L(0.43) = 0.84397 \text{ nats.}$$

$$I(a_{22}/a_{12}) = -L\,p(a_{22}/a_{12}) = -L(0.33) = 1.10867 \text{ nats.}$$

Entonces la entropía condicional resulta

$$E\left[I(A_2/A_1)\right] = -p(a_{21} \text{ y } a_{11})\,L\,p(a_{21}/a_{11}) - p(a_{21} \text{ y } a_{12})\,L\,p(a_{21}/a_{12}) - p(a_{22} \text{ y } a_{11})\,L\,p(a_{22}/a_{11}) - p(a_{22} \text{ y } a_{12})\,L\,p(a_{22}/a_{12})$$

$$E\left[I(A_2/A_1)\right] = -0.4(-0.56212) - 0.2(-0.40048) - 0.3(-0.84397)$$

$$E\left[I(A_2/A_1)\right] \quad -0.1(-1.10867) = 0.66900 \text{ nats.} = H(U_2/U_1)$$

y en general

$$H(U_t/U_{t-1}) = -\sum_{i,j \in M} p(u_{ti} \text{ y } u_{t-1,j})\,L\,p(u_{ti}/u_{t-1,j})$$

expresión que define la información ganada por el conocimiento del resultado del t-ésimo evento cuando se conoce el resultado de los $t-1$ eventos anteriores.

Convencionalmente se representará mediante

$$H_t = H(U_t/U_{t-1}, \ldots, U_1)$$

324. Entropía condicional sujetiva del que toma las decisiones

Anteriormente fué definido el vector de probabilidades sujetivas mediante p_{it}. Con objeto de definir la entropía condicional sujetiva se conviene en que

$$\widehat{P}_{it} = \widehat{P}(z_t/z_{t-1}, \ldots, z_1) \; ; \; i \in M$$

y

$$\widehat{H}_t = - \sum_{U_t, \ldots, U_1} P(z_t, \ldots, z_1) \, L \, \widehat{P}(z_t/z_{t-1}, \ldots, z_1)$$

es la entropía condicional sujetiva del encargado de las decisiones

325. Ejemplo

Calcule la entropía condicional de la situación siguiente:

Se ha adquirido un terreno. Los geólogos opinan que existe una probabilidad de 0.2 que no exista petróleo, 0.5 de que se puedan extraer 500 000 barriles y 0.3 de que los barriles extraídos sean 2 000 000.

Se piensa además efectuar una prueba en el terreno cuyos resultados $U_2 = \{u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24}\} = \{$No hay, poco, regular, mucho$\}$ proporcionan una estimación cualitativa sobre la existencia o no de petróleo.

Si no hay petróleo, no se tiene ningún interés en conservar el terreno y por lo tanto se venderá.

Así: $U_1 = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\}$

donde
u_{11} = No hay petróleo
u_{12} = Existen 500 000 barriles
u_{13} = Existen 2 000 000 barriles

$U_2 = \{u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24}\}$

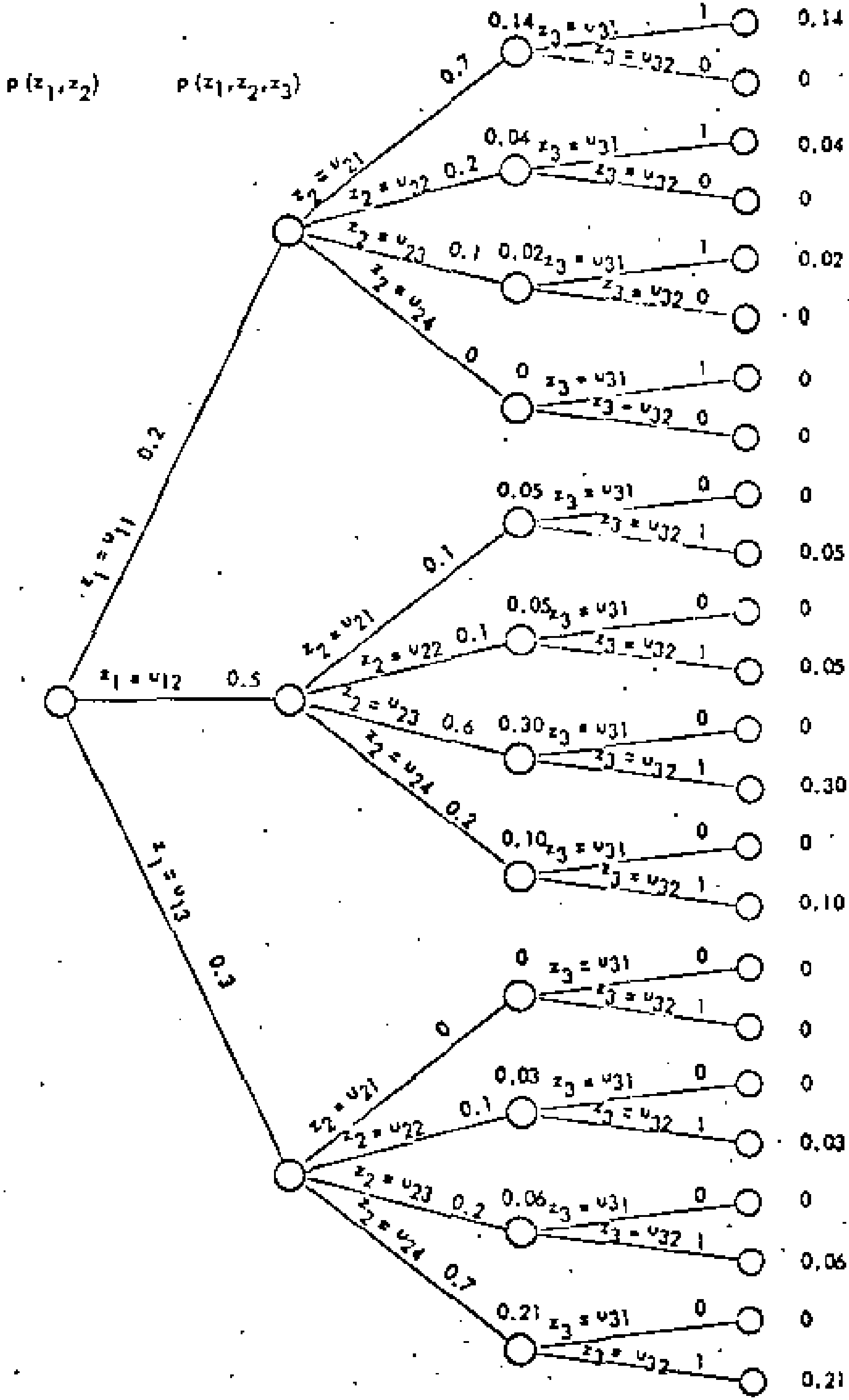
donde
u_{21} = Información "No hay"
u_{22} = Información "Poco"
u_{23} = Información "Regular"
u_{24} = Información "Mucho"

y
$U_3 = \{u_{31}, u_{32}\}$
u_{31} = Vender el terreno
u_{32} = No venderlo.

Se conoce la probabilidad de obtener una información u_{2j} si el terreno se encuentra en el estado u_{1i}.

$$
\left[P(u_{2j} \mid u_{1i}) \right] = \begin{array}{c} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Se forma así el siguiente árbol:



p (z1, z2)
p (z1, z2, z3)
z1 = u11 0.2
z1 = u12 0.5
z1 = u13 0.3
z2 = u21 0.7
z2 = u22 0.2
z2 = u23 0.1
z2 = u24 0
z2 = u21 0.1
z2 = u22 0.1
z2 = u23 0.6
z2 = u24 0.2
z2 = u21 0
z2 = u22 0.1
z2 = u23 0.2
z2 = u24 0.7
0.14
0.04
0.02
0
0.05
0.05
0.30
0.10
0
0.03
0.06
0.21
z3 = u31
z3 = u32
1
0
0.14
0
0.04
0
0.02
0
0
0
0
0.05
0
0.05
0
0.30
0
0.10
0
0
0
0.03
0
0.06
0
0.21

$$H(U_3 | U_2) = -0.14\,L(1) - 0.04\,L(1) - 0.02\,L(1) - 0.05\,L(1) - 0.05\,L(1) -$$
$$- 0.30\,L(1) - 0.10\,L(1) - 0.03\,L(1) - 0.06\,L(1) - 0.21\,L(1) = 0$$

$$H(U_2 | U_1) = -0.14\,L(0.7) - 0.04\,L(0.2) - 0.02\,L(0.1) - 0.05\,L(0.1) - 0.05\,L(0.1) -$$
$$- 0.30\,L(0.6) - 0.10\,L(0.2) - 0.03\,L(0.1) - 0.06\,L(0.2) - 0.21\,L(0.7) = 0.946$$

$$H(U_1) = -0.2\,L(0.2) - 0.5\,L(0.5) - 0.3\,L(0.3) = 1.029$$

de manera que $H(U_3 | U_2, U_1) = 0 + 0.946 + 1.029 = 1.975$

Nota: *Si* se tuviera incertidumbre total en las tres etapas, la entropía máxima del sistema H^* sería igual a $L\,3 + L4 + L2 = 3.172$

326. <u>Proceso Económico Dinámico Determinista</u>

Suponga que se tiene un sistema económico en un horizonte finito, el cual es descrito en cada etapa por un vector S_t, compuesto de componentes $s_t \in S_t$. Se conoce el vector del estado inicial S_0 para $t = 0$. El sistema cambia en etapas o períodos discretos de tiempo, y en cada etapa suceden una secuencia de eventos y decisiones.

Cada etapa puede dividirse en:

a) El que toma las decisiones conoce el estado de la etapa anterior.

b) El que toma las decisiones calcula el efecto de cada vector de acción a_t A_t, sobre los futuros vectores de estado.

c) Se escoge el vector de decisión óptimo $a^*_t \in A_t$, el cual maximiza la función objetivo del proceso.

d) S_{t-1} se transforma por el vector de decisión óptimo en S_t.

Por el principio de optimalidad, se puede escribir para la T-ésima y última etapa del proceso:

$$F_1(S_{T-1}) = \max_{a_T \in A_T} \left\{ \beta(S_T ; A_T) \right\}$$

donde $F_1(S_{T-1})$ es el valor óptimo de un proceso de una etapa, conocido el estado S_{T-1} y $\beta(S_T ; A_T)$ es la función objetivo del proceso

Para el resto de los períodos del proceso

$$F_{T-t+1}(S_{t-1}) = \max_{a_t \in A_t} \left\{ F_{T-t}(S_t ; A_t) \right\}$$

donde $F_{T-t}(S_t)$ es el valor óptimo de un proceso de $(T-t)$ etapas, dado S_t. El conjunto A^*_t está formado por las decisiones que en cada etapa producen el máximo $\beta(S_T : A_T)$ para la última etapa.

327. Ejemplo

Se tiene una economía cuyo capital inicial es $K_o = 200$ millones de pesos. El producto que se logra es $0.5\ K_t$, inicialmente 100 millones. Se considera una depreciación de $0.10\ K_t$, 20 millones.

Se utilizará un horizonte de planeación de 3 años. Y se piensa que las exportaciones serán

t	E_t
0	20
1	20.3
2	20.6
3	21.2

y el consumo

t	C_t
0	70
1	77
2	85
3	94

Se desea que el saldo de la balanza de pagos (exportaciones menos importaciones) sea lo más favorable. ¿Cuánto deberá invertirse en cada etapa si $M_0 \leq 40$, $M_1 \leq 40$, $M_2 \leq 40$?

Recordando que:

Producto al finalizar el período t = Lo que se consumió durante el período t + la inversión al inicio del período $t+1$ + Depreciación del capital al final del período t + exportaciones durante el período t - Importaciones durante el período t.

$P_t = C_t + a_{t+1} + D_t + E_t - M_t$ donde a_{t+1} es la inversión.

$\therefore \quad 0 \leq a_{t+1} \leq 1$

se sabe que:

$$K_t = (K_{t-1} + a_t)$$

La situación puede dibujarse:

K_0 K_1 K_2 K_3

a_1 $t = 1$ a_2 $t = 2$ a_3 $t = 3$

1o. Considerando únicamente un período se tiene:

$$\max_{a_3} (E_3 - M_3) = P_3 - C_3 - D_3$$

pero: $P_3 = 0.5\,K_3 = 0.5\,(K_2 + a_3)$

$C_3 = 94$

$D_3 = 0.1\,K_3 = 0.1\,(K_2 + a_3)$

así:

$$F_1\,(S_2) = \max_{a_3} (21.2 - M_3)\ ;\ 0.4\,K_2 + 0.4\,a_3 - 94 = 21.2 - M_3$$

$$\text{s.a.} \qquad 0 \leq a_3 \leq P_2$$

El máximo se obtiene cuando $M_3 = 0$ de manera que $a_3^* = \dfrac{115.2 - 0.4\,K_2}{0.4}$

2o. Considerando dos períodos

$$F_2\,(S_1) = \max_{a_2}\ (21.2 - M_3)$$

$$21.2 - M_3 = 0.4\,(K_1 + a_2) + 0.4\,a_3^* - 94$$

esta función se maximizará cuando tome a_2 su máximo valor permisible

se sabe que: $P_2 = C_2 + a_3^* + D_2 + E_2 - M_2$

$$0.5\,K_2 = 85 + \frac{115.2 - 0.4K_2}{0.4} + 0.1K_2 + 20.6 - M_2;\ K_2 = \frac{393.6 - M_2}{1.4}$$

o sea:

$$a_2^* = \frac{393.6 - M_2}{1.4} - K_1 \qquad \ldots (1)$$

3o. Considerando tres períodos

$$F_3\,(S_0) = \max_{a_1}\ (21.2 - M_3)$$

$$21.2 - M_3 = 0.4\,K_1 + 0.4\,(a_2^* + a_3^*) - 94$$

$$= 0.4\,(K_0 + a_1) + 0.4\,(a_2^* + a_3^*) - 94$$

conociendo además $P_1 = C_1 + a_2^* + D_1 + E_1 - M_1$

$$0.5\,K_1 = 77 + \frac{393.6 - M_2}{1.4} - K_1 + 0.1\,K_1 + 20.3 - M_1$$

$$K_1 = \frac{97.3 - M_1}{1.4} + \frac{393.6 - M_2}{1.4^2}$$

pero $K_1 = a_1 + K_0$

$$\therefore \quad a_1^* = \frac{97.3 - M_1}{1.4} + \frac{393.6 - M_2}{1.4^2} - K_0 \qquad \ldots (2)$$

Debiéndose cumplir que

$$P_0 = C_0 + a_1^* + D_0 + E_0 - M_0$$

$$0.5\,K_0 = C_0 + a_1^* + D_0 + E_0 - M_0$$

$$100 = 70 + a_1^* + 20 + 20 - M_0$$

Una posible decisión es importar la mayor cantidad permisible, $M_0 = 40$

con lo cual $a_1^* = 30$

sustituyendo en la ecuación (2).

$$.712\,M_1 + .51\,M_2 = 39.5$$

Si $M_1 = 40$

entonces $M_2 = 21.4$.

Conociendo además que $K_1 = a_1^* + K_0 = 30 + 200 = 230$

Sustituyendo en (1)

$$a_2^* = \frac{393.6 - 21.4}{1.4} - 230 = 34.7$$

entonces $K_2 = a_2^* + K_1 = 34.7 + 230 = 264.7$

y $$a_3^* = \frac{115.2 - 0.4\,(264.7)}{0.4} = 21.6$$

En la tabla siguiente se muestran los resultados obtenidos

Año t.	Capital K_t	Producto P_t	Consumo C_t	Inversión a_{t+1}	Depreciación D_t	Exportación E_t	Importación M_t
0	200	100	70	30	20	20	40
1	230	115	77	34.7	23	20.3	40
2	264.7	132.3	85	21.6	26.5	20.6	21.4
3	286.3	143.1	94		28.6	21.2	0

Se cumplió con el objetivo de maximizar el saldo de la Balanza de Pagos en el año 3. La deuda exterior es de 19.3 millones.

328. Proceso Económico Dinámico Estocástico

Ahora se supone que el sistema económico está condicionado por un proceso estocástico del ámbito. El vector de estado, S_{t+1}, ya no es conocido, a priori, porque es perturbado por la variable aleatoria del ámbito. Se supone que es posible conocer la función de probabilidad del ámbito.

Como un resultado del principio de optimalidad se tiene para la T-ésima etapa

$$F_1(S_{T-1}) = \max_{a_T \in A_T} \left\{ \sum_{i \in M} p_i \phi \left(S_T ; A_T \mid u_{iT} \right) \right\}$$

y para las etapas restantes

$$F_{T-t+1}(S_{t-1}) = \max_{a_t \in A_t} \left\{ \sum_{i \in M} p_i \; F_{T-t} \left(S_t ; A_t \mid u_{it} \right) \right\}$$

se define

i	:	índice de un evento estocástico del ámbito.
M	:	conjunto de índices correspondientes a todos los posibles eventos del ámbito
p_i	:	probabilidad del i-ésimo evento
$F_{T-t}(S_t;A_t \mid u_{it})$	:	máximo valor esperado de un proceso óptimo para las etapas T-t, con la condición que el evento i del ámbito sucederá en la t-ésima etapa
$\phi(S_T;A_T \mid u_{iT})$	:	función que será maximizada en la T-ésima etapa, dado que el i-ésimo evento sucederá en esa etapa.

329. Ejemplo

Un tramo de camino de cuota ($10.00) puede encontrarse en uno de los tres siguientes estados: bueno, deteriorado pero transitable, intransitable. Se pueden tomar dos decisiones: reconstruirlo, que requiere una inversión de $5,000.000 anuales o repararlo con un costo de un millón. Es evidente que el tránsito (ámbito) hace que cambie el estado de un camino y de bueno puede pasar a intransitable, etc.

Diseñar el programa de acción óptimo para un sexenio, de acuerdo con el estado en que se encuentre el camino al principio de éste.

Se tiene: Estado del sistema $S_t = [s_1, s_2, s_3]$ $t = 1, 2, 3$

Ambito $U_t = [u_1, u_2]$ $t = 1, 2, 3$

Decisiones $A_t = [a_1, a_2]$ $t = 1, 2, 3$

donde:

s_1 = bueno

s_2 = deteriorado

s_3 = intransitable

u_1 = tránsito intenso

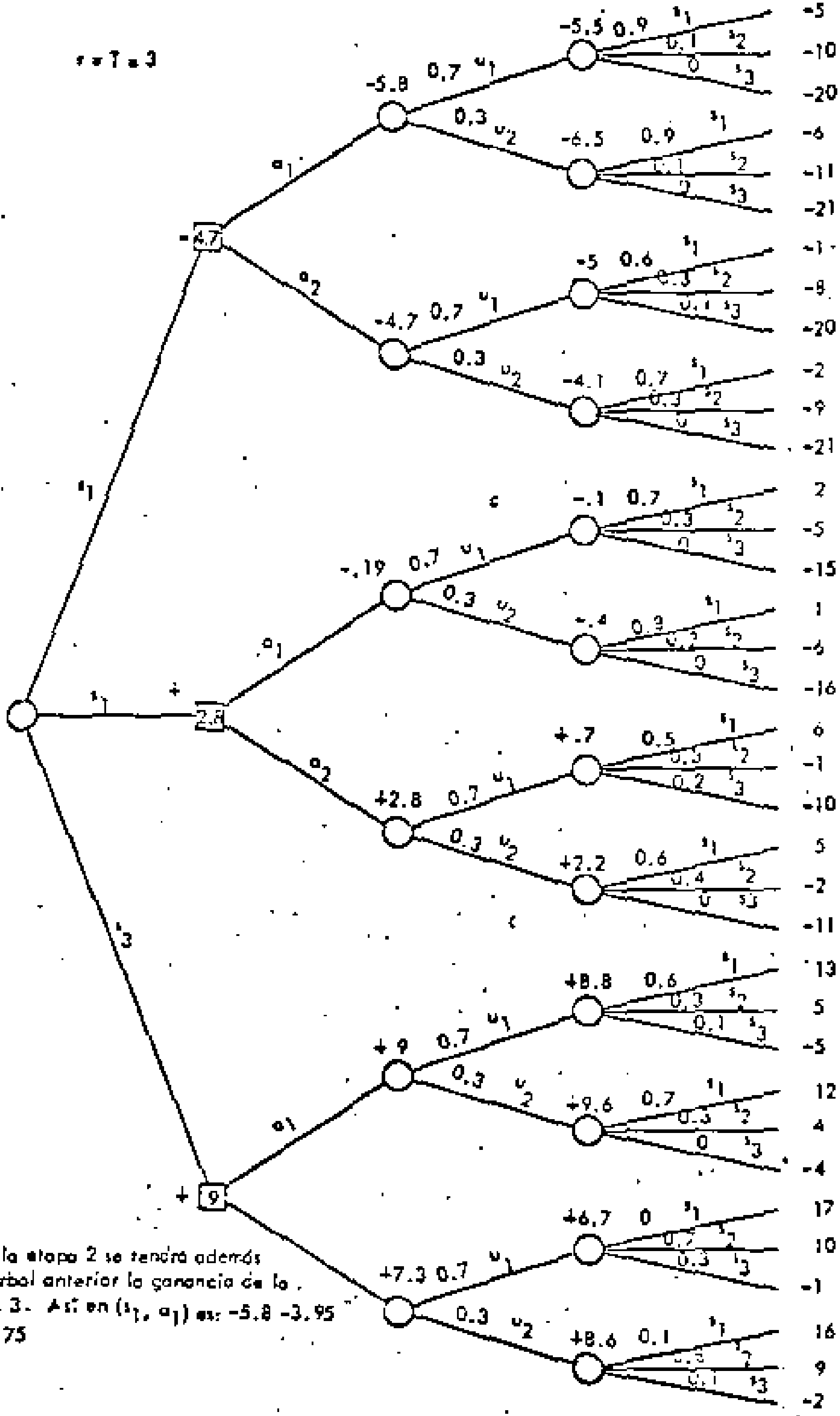
u_2 = tránsito normal

a_1 = invertir 5 000 000

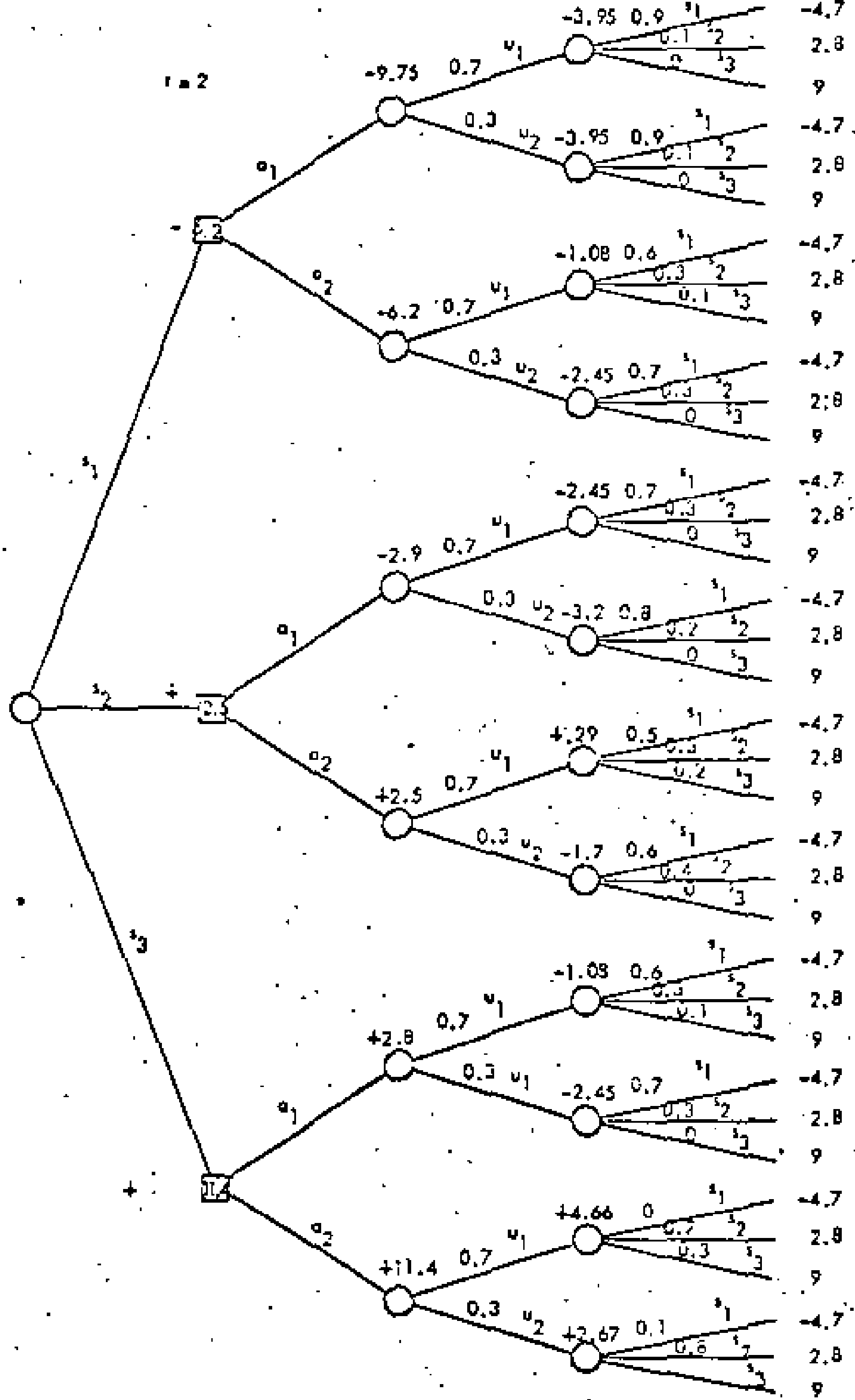
a_2 = invertir 1 000 000

Para la tercera y última etapa se tiene:

t = T = 3

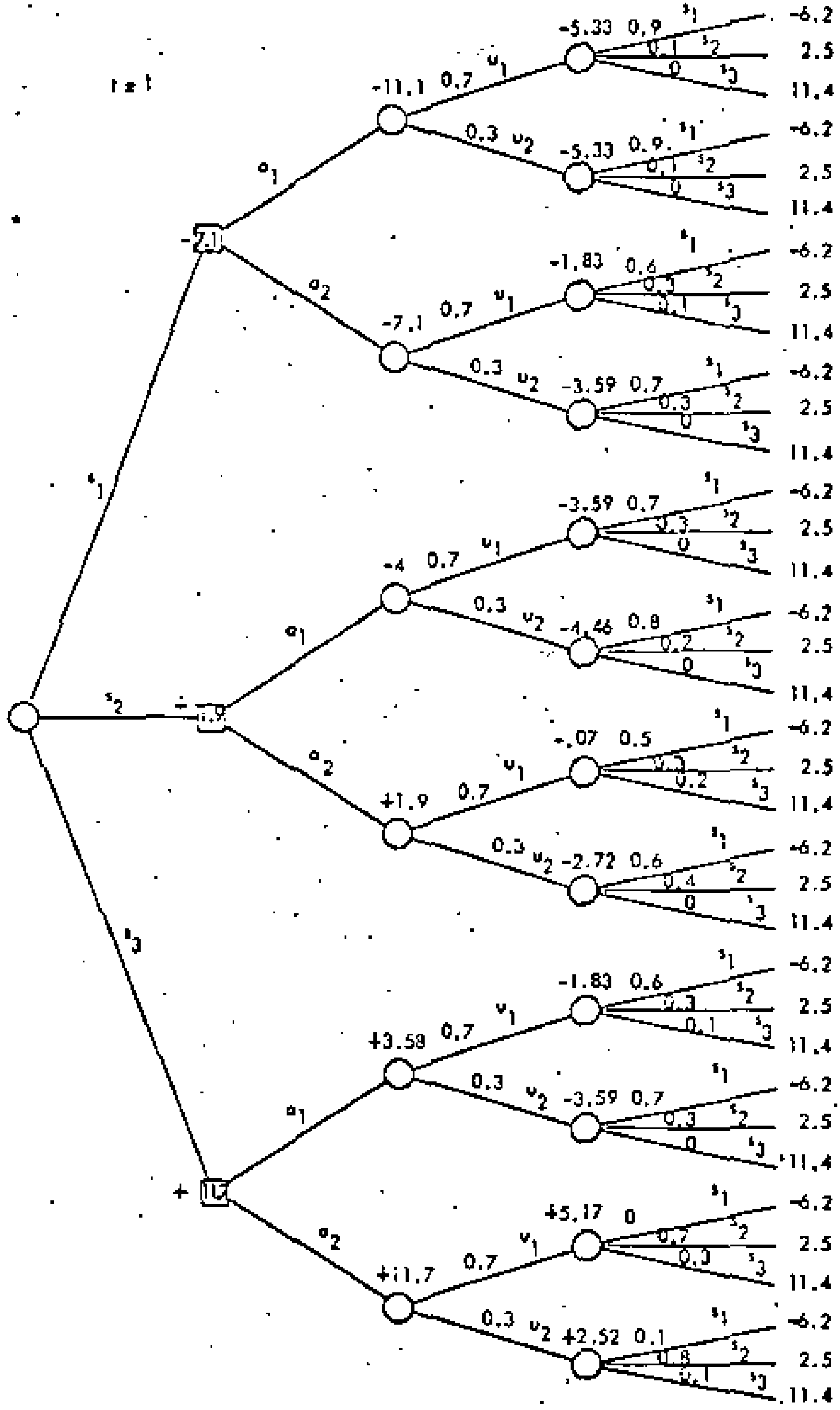


Para la etapa 2 se tendrá además del árbol anterior la ganancia de la etapa 3. Así en (s_1, a_1) es: $-5.8 - 3.95 = -9.75$



r = 2
s_1
s_2
s_3
a_1
a_2
u_1
u_2
-9.75
+6.2
-2.9
+2.5
+2.8
+11.4
-3.95
-1.08
-2.45
-3.2
+1.29
-1.7
+4.66
+2.67
0.7
0.3
0.9
0.1
0.6
0.5
0.8
0.2
0.4
0
-4.7
2.8
9

14



t = 1
s_1
s_2
s_3
a_1
a_2
-11.1
-7.1
-4
+1.9
+3.58
+11.7
0.7 v_1
0.3 v_2
-5.33 0.9 0.1 0
-5.33 0.9 0.1 0
-1.83 0.6 0.3 0.1
-3.59 0.7 0.3 0
-3.59 0.7 0.3 0
-4.46 0.8 0.2 0
-.07 0.5 0.3 0.2
-2.72 0.6 0.4 0
-1.83 0.6 0.3 0.1
-3.59 0.7 0.3 0
+5.17 0 0.7 0.3
+2.52 0.1 0.8 0.1
-6.2
2.5
11.4

15

En la primera y segunda etapas la decisión debe ser invertir 1 000 000 y en la tercera si el camino está bueno o deteriorado invertir 1 000 000, y si está intransitable invertir los 5 000 000.

330. Proceso Económico Dinámico Estocástico Adaptivo

El sistema económico tiene un ámbito que se comporta como un proceso estocástico, pero se desconocen los parámetros de la función de probabilidad de este proceso. Pero pueden calcularse probabilidades subjetivas conociendo los eventos del ámbito que han sucedido en el pasado.

Usando el principio de optimalidad se tiene, desde el punto de vista del que tiene que decidir, para la última etapa

$$f_1 (S_{T-1}; \hat{P}_T) = \max_{a_T \in A_T} \sum_{i \in M} \hat{p}_{iT}\, \beta (S_T; A_T \quad u_{iT})$$

y para los demás etapas

$$f_{T-t+1} (S_{t-1} ; \hat{P}_t) = \max_{a_t \in A_T} \sum_{i \in M} \hat{p}_{it}\, f_{T-t} (S_t; \quad u_{it})$$

Se define:

$\hat{P}_t$ función de probabilidad subjetiva aposteriori proveniente de la etapa anterior

$\hat{p}_{it}$ un elemento de $\hat{P}_t$, probabilidad subjetiva del i-ésimo evento en la etapa t.

Además: $\hat{P}_{t+1} = T(\hat{P}_t \mid i)$

donde i es el evento actual que ocurrió en la t-ésima etapa y $T(\cdot \mid \cdot)$ es la función de transición; o sea la función que transforma una función subjetiva de probabilidad a priori en una aposteriori.

Desde el punto de vista del mercado, para la última etapa:

$$F_1(S_{T-1} ; P) = \sum_{i \in M} p_i \, \emptyset (S_T ; A_T^* \mid u_{iT})$$

y para los restantes

$$F_{T-t+1}(S_{t-1} ; P) = \sum_{i \in M} p_i \, F_{T-t}(S_t ; A_t^* \mid u_{it})$$

P es la función de probabilidad actual del ámbito y $a_t^* \in A_t^*$ es el vector de decisión óptimo de la t-ésima etapa, determinado desde el punto de vista del que hace la decisión.

331. Ejemplo

Teniendo dos opciones, invertir en un camino de cuota 1 000 000 ó 5 000 000 para reconstrucción parcial o total respectivamente y tomando como horizonte de planeación dos etapas, defina cuál es la mejor acción que se debe llevar a cabo en la primera etapa.

La circulación actual de vehículos puede incrementarse o disminuirse, obteniéndose los siguientes beneficios:

		u_1 - Aumento	u_2 - Disminución
a_1	invertir 1 000 000	1	-1
a_2	invertir 3 000 000	1.5	-2

En ese camino se han observado 20 incrementos y 5 disminuciones durante 25 etapas.

Se piensa que la función de probabilidad del ámbito está definida por el vector de convicción $\vec{\alpha}$ (6, 2) (distribución β).

Y se considera como función de transición

$$\hat{P}_{1\,t+1} = \begin{cases} 0.4\,\hat{P}_{1t} + (1 - 0.4) & \text{si sucede } u_1 \\ 0.9\,\hat{P}_{1t} + (1 - 0.9) & \text{si sucede } u_2 \end{cases}$$

$$\hat{P}_{2\,t+1} = 1 - \hat{P}_{1\,t+1}$$

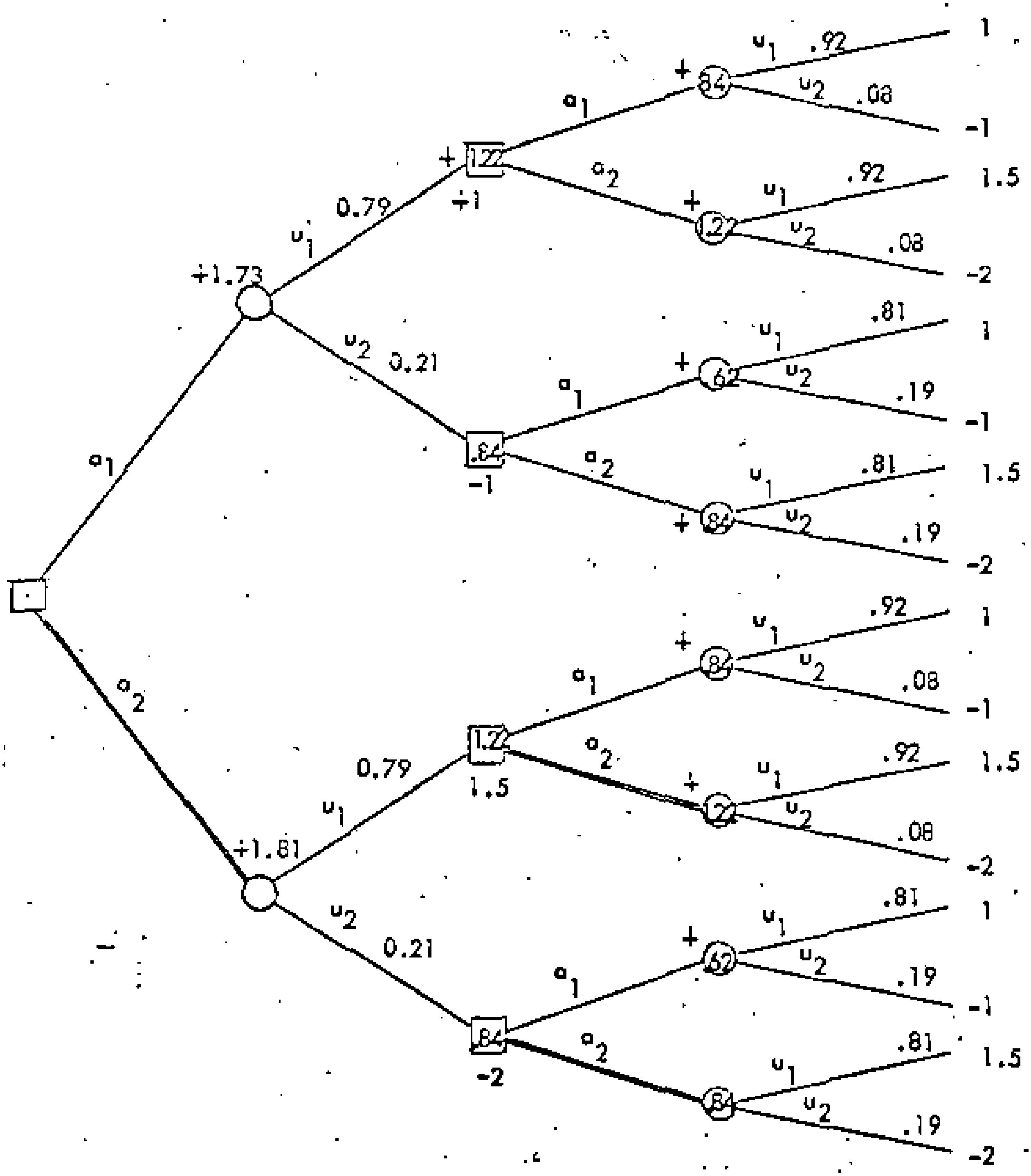
La probabilidad subjetiva a priori de tener un aumento en la circulación se calcu la aplicando la fórmula dada en 316.

$$\hat{P}_{1\,t} = \frac{n_1 + \alpha_1}{t + \alpha_1 + \alpha_2} \quad ; \quad \hat{P}_1 = \frac{20+6}{25+8} = \frac{26}{23} = 0.79$$

$$y \quad \hat{P}_2 = 0.21$$

Con estas probabilidades y la función de transición se obtienen las probabilidades a posteriori.

Obteniéndose el siguiente árbol:



Se debe tomar la decisión a_2.

332. Modelo de Inversión sin Liquidez

Considérese la ecuación para interés compuesto contínuo

$$K_t = K_0 e^{g_t t}$$

donde g_t es la tasa de crecimiento medida en la etapa t, K_0 es el capital inicial y K_t el capital en la t-ésima etapa del proceso.

Luego la tasa esperada de crecimiento es:

$$\bar{g}_t = \frac{1}{t} E\left[L \frac{K_t}{K_0}\right] = \frac{1}{t}\left\{ E\left[L K_t\right] - L K_0 \right\}$$

En los tres modelos siguientes se maximizará la tasa esperada de crecimiento del capital sujeta a las cantidades finitas de capital en cada etapa. (Maximizar la esperanza del logaritmo del capital es igual que maximizar la tasa de crecimiento).

Suponga que un inversionista debe decidir la fracción de su capital que habrá de tener en acciones de una cierta compañía (a).

Puesto que no existe liquidéz esa fracción a debe permanecer constante durante todas las etapas del proceso..

Si p_1 = Probabilidad de que el precio aumente en r_1 puntos

p_2 = Probabilidad de que el precio de las acciones disminuya en r_2 puntos.

Maximizando la tasa esperada de crecimiento se obtiene que la fracción óptima es:

$$a^* = \frac{p_1 \ r_1 - p_2 \ r_2}{r_1 \ r_2}$$

sujeto a la condición $0 < a^* < 1$

y la tasa máxima esperada

$$\bar{g}_t^* = H^* - H + Y$$

donde H^* es la entropía cuando se tiene incertidumbre total. $(p_1 = p_2 = \frac{1}{2})$

$$H^* = -\frac{1}{2} L \frac{1}{2} - \frac{1}{2} L \frac{1}{2} = L\,2$$

H es la entropía del sistema.

$$H = -p_1 L p_1 - p_2 L p_2$$

y Y es el coeficiente de asimetría

$$Y = L\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) - p_1 L r_2 - p_2 L r_1$$

Numéricamente suponga que se tienen \$ 100 000 y se desea conocer qué cantidad se debe comprar de acciones. La cantidad restante se guarda en efectivo ya que existe la posibilidad de pérdida.

Se conoce que en el ámbito pueden suceder únicamente dos resultados. O suben las acciones en 0.3 (r_1) o bajan en 0.1 (r_2), con probabilidades respectivas de $p_1 = 0.3$ y $p_2 = 0.7$. (En la compañía A).

Así $$a^* = \frac{p_1 r_1 - p_2 r_2}{r_1 \cdot r_2} = \frac{0.3 \times 0.3 - 0.7 \times 0.1}{0.3 \times 0.1} = 0.75$$

Inicialmente se tendrán \$ 75 000 en acciones de la Cía. A y en las siguientes etapas $0.75\ K_t$.

Con esta decisión la tasa esperada de crecimiento es:

$$\bar{g}_t^* = H^* - H + Y$$

$$H^* = L\,2 = 0.692$$

$$H = -0.3\, L\, 0.3 - 0.7\, L\, 0.7 = 0.61$$

$$Y = L\ \left(\frac{.4}{2}\right) - 0.3\, L\, 0.1 - 0.7\, L\, 0.3 = -0.08$$

$$\bar{g}_t^{\,*} = 0.002$$

En 10 etapas el capital será

$$K_{10} = 100\,000\ e^{\;0.02} = 102\,020$$

333. Modelo de Inversión con liquidez total

Como existe liquidez se pueden comprar y vender acciones en el momento que se quiera, de manera que la relación de cartera a_t puede variar en los diferentes etapas del proceso.

En este caso se llegó a la siguiente conclusión:

Si se cumple que:

1) r_1 y r_2 son constantes durante las T etapas del proceso
2) p_1 y p_2 no varían en todo el proceso
3) $p_1, p_2 \geqq 0,\ p_1 + p_2 = 1$
4) $r_1\ \ r_2 \geqq p_1 r_1 - p_2 r_2 \geqq 0$ y
5) sucede el principio de optimalidad

entonces:

i) La solución de un proceso de $(T - t)$ etapas para quien tiene que decidir en la etapa $t-1$ es

$$F_{T-t}(K_t) = \max \left\{ L\, K_T \right\} = L\, K_t + (T-t)(H^* - H + Y)$$

ii) la relación de cartera óptima es:

$$a_t^* = \frac{p_1\ r_1 - p_2\ r_2}{r_1\ \ r_2} = a^* \quad \text{para } t = 1, 2, \ldots, T$$

De lo anterior se puede concluir que la liquidez no influye cuando se conocen las probabilidades de ocurrencia de los eventos del ámbito.

Considérese: $K_0 = \$\ 10\,000$

$p_1 = 0.8$

$p_2 = 0.2$

$r_1 = 0.7$

$r_2 = 0.7$

$$a^* = \frac{p_1\ r_1 - p_2\ r_2}{r_1\ \ r_2} = \frac{0.56 - 0.14}{0.49} = \frac{.42}{.49} = 0.86$$ se comprarán acciones por 8 600

Para 5 etapas y $t = 0$

$$L\,K_5 = L\,K_0 + 5\,(H^* - H + Y)$$

$H^* = L\,2$

$H = -p_1\, L\, p_1 - p_2\, L\, p_2 = -0.8\, L\, 0.8 - 0.2\, L\, 0.2$

$Y = 0$ puesto que existe simetría, $r_1 = r_2$

Luego:

$K_5 = 25\,000$

334. Proceso de inversión adaptivo. Completa liquidez

En el proceso adaptivo existe riesgo e incertidumbre ya que se desconocen los parámetros de la función de probabilidad del ámbito. Se tiene:

Si r_1 y r_2 son constantes en las T etapas del proceso de inversión, es válido el principio de optimalidad y en ninguna etapa del proceso se viola la condición $0 < \hat{p}_{1t}\, r_1 - \hat{p}_{2t}\, r_2 < r_1\, r_2$, para $t = 1, 2, \ldots T$ entonces:

i) $$f_{T-t}(K_t) = L\,K_t + (T-t)\,H^* + \sum_{\zeta = t+1}^{T} \hat{Y}(R_\zeta \mid R_{\zeta-1} \ldots R_1) - \sum_{\zeta = t+1}^{T} \hat{H}(R_\zeta \mid R_{\zeta-1}, \ldots, R_1)$$

donde

$$f_{T-t}(K_t) = \max \left\{ L\,K_T \right\} \text{ considerando } T-t \text{ etapas.}$$

$$\hat{H}(R_\zeta \mid R_{\zeta-1}) = \hat{p}_{1\zeta}\; L\; \hat{p}_{1\zeta} - \hat{p}_{2\zeta}\; L\; \hat{p}_{2\zeta}$$

y

$$\hat{Y}(R_\zeta \mid R_{\zeta-1} \ldots R_1) = L\,\frac{r_1 + r_2}{2} - \hat{p}_{1\zeta}\; L\,r_2 - \hat{p}_{2\zeta}\; L\,r_1$$

ii) La relación óptima de cartera es:

$$a_t^* = \frac{\hat{p}_{1t}\, r_1 - \hat{p}_{2t}\, r_2}{r_1\; r_2} \quad ; t = 1, 2, \ldots, T$$

iii) Desde el punto de vista del mercado la tasa máxima de crecimiento de capital es:

$$\hat{g}_t^* = H^* + Y - \frac{1}{t} \sum_{=1}^{t} \hat{H}(R_\zeta \mid R_{\zeta-1} \ldots R_1)$$

donde $\hat{H}(R_{\tau} | R_{\tau-1} \dots R_1) = - p_1 \, L \, \hat{p}_{1\tau} - p_2 \, L \, \hat{p}_{2\tau}$

La diferencia entre p_1 y $\hat{p}_{1t}$ es que la primera es desconocida para el que toma las decisiones y la segunda es la probabilidad subjetiva calculada a partir de la información histórica.

334. Ejemplo

Considere $K_{100} = \$\ 10\ 000$ $r_1 = 1$ punto $r_2 = 1$ punto

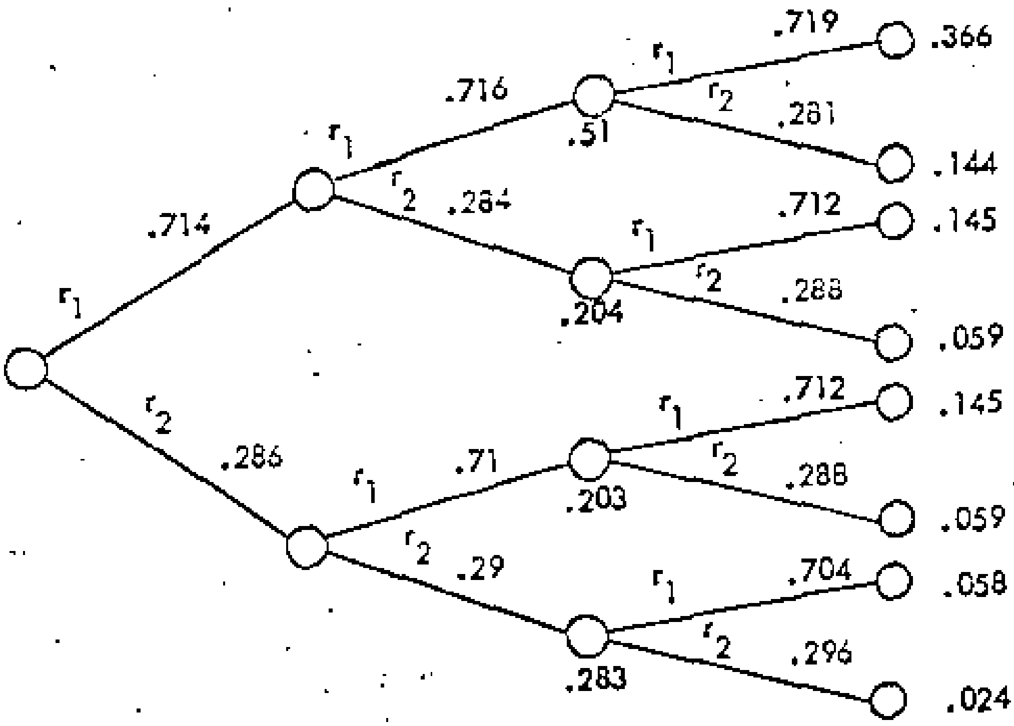
Vector de convicción α (30, 10) (distribución β)

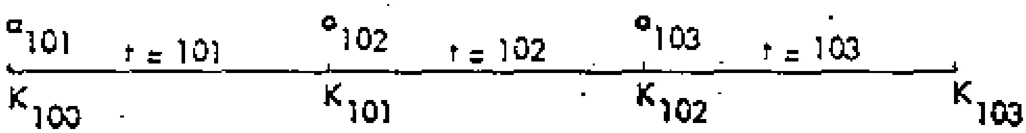
Observaciones		
t	n_1	n_2
100	70	30

donde n_1 = número de etapas en que ocurrió r_1

n_2 = número de etapas en que sucedió r_2

Aplicando la ecuación $\hat{p}_{it} = \dfrac{n_{it} + \alpha_i}{t + \alpha_1 + \alpha_2}$ para $i = 1,2$.





En la figura las probabilidades dentro de los círculos son conjuntas y las demás condicionales;

Así: $\hat{p}_{1,101} = 0.714$

$\hat{p}_{2,101} = 0.286$

$$\hat{P}_{1,102} = 0.51 + 0.203 = 0.713$$

$$\hat{P}_{2,102} = 0.204 + 0.083 = 0.287$$

$$\hat{P}_{1,103} = 0.366 + 0.145 + 0.145 + 0.058 = 0.714$$

$$\hat{P}_{2,103} = 0.144 + 0.059 + 0.059 + 0.024 = 0.286$$

luego

$$a^*_{101} = 0.428, \; a^*_{102} = 0.426 \; , \; a^*_{103} = 0.428$$

$$\hat{H}(R_{101} \mid R_{100} \dots R_1) = -.714 \; L \; .714 - .286 \; L \; .286 = .598$$

$$\hat{H}(R_{102} \mid R_{101} \dots R_1) = -.713 \; L \; .713 - .287 \; L \; .287 = .600$$

$$\hat{H}(R_{101} \mid R_{102} \dots R_1) = -.714 \; L \; .714 - .286 \; L \; .286 = .598$$

$$\overline{1.796}$$

De manera que

$$f_3(K_{100}) = L\,10\,000 + 3\,L\,2 - 1.796 = 9.484$$

o sea

$$L\,K_{103} = 9.484$$

por lo que

$$K_{103} = \$\,13\,000.$$

336. Distribución de capital en procesos de actividades múltiples

Se considerarán actividades entre los que no existe interacción y con todos los beneficios positivos.

Llegándose a las siguientes conclusiones:

Si es cierto que:

1) $r_i > 0$

2) $\hat{Q}_{kt} = \left\{ q_{kit} : \sum_{i \in M} \hat{q}_{kit} = 1, \hat{q}_{kit} \geq 0 \text{ para toda } i \in \bar{M} \right\}$

3) $\hat{g}_{kt}$ es una función convexa contínua, de la cual se pueden obtener primera y segunda, derivadas con respecto a $a_{kit} \in A_{kt}$ y

4) ocurre el principio de optimalidad;

entonces:

i) para la t-ésima etapa (desde el punto de vista de la késima persona que tiene que decidir) se tiene:

$$f_{T-t+1}(K_{kt-1}) = L\,K_{kt-1} + \sum_{=t}^{T} \hat{G}_k (R_{\zeta} | R_{\zeta-1} \cdots R_1)\, H_k^*(R_{\zeta} | R_{\zeta-1} \cdots R_1) -$$

$$- \sum_{\zeta=t}^{T} \hat{G}_k (R_{\zeta} | R_{\zeta-1} \cdots R_1)\, \hat{H}_k (R_{\zeta} | R_{\zeta-1} \cdots R_1) +$$

$$+ \sum_{\zeta=t}^{T} \hat{G}_k (R_{\zeta} | R_{\zeta-1} \cdots R_1)\, \hat{Y}_k (R_{\zeta} | R_{\zeta-1} \cdots R_1)$$

ii) el vector de distribución óptima de capital en la t-ésima etapa para la k-ésima persona que toma las decisiones está compuesto de elementos dados por

$$a^*_{kit} = \hat{p}_{kit} \left(1 + \sum_{\underline{i} \notin M^*_{kt}} 1/r_{\underline{i}}\right) - 1/r_i \quad \text{para} \quad i \in M^+_{kt}$$

y

$$a^*_{kit} = 0 \quad \text{para} \quad i \notin M^o_{kt}$$

iii) la *máxima* tasa esperada de crecimiento de capital para un proceso de T etapas desde el punto de vista del mercado es:

$$\hat{G}^*_{kt} = \frac{1}{T} \sum_{\tau=1}^{T} \sigma_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) H^*_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) -$$

$$- \frac{1}{T} \sum_{\tau=1}^{T} \sigma_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) \hat{H}_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) +$$

$$+ \frac{1}{T} \sum_{\tau=1}^{T} \sigma_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) Y_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1)$$

Se define:

$$\hat{\sigma}_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) = \sum_{i \in M^+_{k\tau}} \hat{q}_{ki}$$

$$H^*_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) = L\, m^+_{k\tau}$$

$$\hat{H}_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) = - \sum_{i \in M^+_{k\tau}} \hat{p}_{ki\tau}\, L\, \hat{p}_{ki\tau}$$

$$\hat{Y}_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) = \sum_{i \in M^+_{k\tau}} \hat{p}_{ki\tau}\, L\, r_i + L \left(1 + \sum_{\underline{i} \in M^+_{k\tau}} 1/r_{\underline{i}}\right) - L\, m^+_{k\tau}$$

$$\sigma_k (R_\tau | R_{\tau-1} \cdots R_1) = \sum_{i \in M^+_{k\tau}} q_i$$

$$\hat{H}_k (R_\zeta \mid R_{\zeta-1} \cdots R_1) = - \sum_{i \in M^+_{k\zeta}} \hat{p}_i \; L \; \hat{p}_{ki\zeta}$$

$$Y_k (R_\zeta \mid R_{\zeta-1} \cdots R_1) = \sum_{i \in M^+_k} p_i \; L \, r_i + L \, (1 + \sum_{i \in M^+_{k\zeta}} 1/r_i) - L \, m^+_{k\zeta}$$

además:

$$\sigma = \sum_{i \in M^+} q_i$$

$$p_i = q_i / \sigma$$

y para determinar los elementos que constituyen M^+_{kt} :

1o. Se ordenan de mayor a menor los productos $\hat{q}_{kit} \; r_i$:

2o. Haga $m = 1$ y $M^+_{kt} = \{ 1 \}$

3o. ¿ Se cumple

$$\hat{q}_{kmt} \; r_m > \frac{\sum_{i \in M^+_{kt}} \hat{q}_{kit}}{1 + \sum_{i \in M^+_{kt}} \frac{1}{r_i}} \geq \hat{q}_{km+1t} \quad ?$$

4o. Si si: Se tiene M^+_{kt}

Si no: Haga $m = m + 1$

$$M^+_{kt} = M^+_{kt} \cup \{ m \}$$ regrese al paso 3o.

337. <u>Aplicación a conservación de carreteras</u>

Se determinará en este ejemplo el presupuesto óptimo P que se debe destinar a conservación de carreteras y su distribución en éstas. Esta determinación estará basada en los beneficios obtenidos y en la necesidad de cada tipo de carretera de conservarse en buen estado.

Se considerará que $K_{t+1} = \sum_i (a_{it} K_t + r_i a_{it} K_t) = K_t (1 + \sum_i r_i a_{it})$.

Si $r_i < 0$ no vale la pena conservar ese tipo de carreteras y únicamente se considerarán aquellas cuyo $r_i > 0$.

Se supondrá que existen tres tipos de carreteras $r_1 = 0.10$, $r_2 = 0.06$, $r_3 = 0.01$

El registro histórico indica que se han obtenido 3, 5 y 8 veces estos beneficios (o sea que se ha requerido conservación).

Se piensa además que la necesidad de conservación sigue una distribución multinomial, obteniéndose de encuestas sobre los expertos en este renglón el siguiente vector de convicción. $\bar{\alpha}$ (2, 3, 4)

De manera que

$$\hat{q}_{11} = \frac{3+2}{16+9} = 0.20$$

$$\hat{q}_{21} = \frac{5+3}{16+9} = 0.32$$

$$\hat{q}_{31} = \frac{8+4}{16+9} = 0.48$$

Luego

Tipo I $\hat{q}_{11} \; r_1 = 0.0200$

Tipo II $\hat{q}_{21} \; r_2 = 0.0192$

Tipo III $\hat{q}_{31} \; r_3 = 0.0048$

Se determinarán a continuación los elementos que constituyen M_t^+

$$m = 1 \quad M_1^+ = \{1\}$$

Se investigará si se cumple la restricción

$$\hat{q}_{11}\ r_1 > \frac{\hat{q}_{11}}{1+\frac{1}{r_1}} \geq \hat{q}_{21}\ r_2$$

$$0.0200 > \frac{0.20}{1+\frac{1}{0.10}} \geq 0.0192$$

$$0.0200 > .018 \not\geq 0.0192$$

$$m = 2 \quad M_1^+ = \{1, 2\}$$

la restricción es:

$$\hat{q}_{21}\ r_2 > \frac{\hat{q}_{11}+\hat{q}_{21}}{1+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}} \geq \hat{q}_{31}\ r_3$$

$$0.0192 > \frac{0.52}{1+\frac{1}{0.10}+\frac{1}{.06}} \geq 0.0048$$

$$0.0192 > 0.0186 \geq 0.0048 \quad \text{de manera que } M_1^+ = \{1,2\}$$

Por lo que $\sigma_t = \sum_{i \in M^+} \hat{q}_{it} = 0.20 + 0.32 = 0.52$

$$\hat{P}_{11} = \frac{\hat{q}_{11}}{\sigma} = 0.385 \qquad \hat{P}_{21} = \frac{\hat{q}_{21}}{\sigma} = 0.615$$

así

$$a^*_{11} = 0.385\left(1 + \frac{1}{0.10} + \frac{1}{.06}\right) - \frac{1}{0.10} = 0.6$$

$$a^*_{21} = 0.615\left(1 + \frac{1}{0.10} + \frac{1}{.06}\right) - \frac{1}{.06} = 0.4$$

$$a^*_{31} = 0$$

Se considerará la siguiente función de transición.

$$\hat{q}_{1\,t+1} = \begin{cases} 0.8\ \hat{q}_{1t} & \text{si} \quad a^*_{1t} \neq 0 \\ \hat{q}_{1t} & \text{si} \quad a^*_{1t} = 0 \end{cases}$$

$$\hat{q}_{2\,t+1} = \begin{cases} 0.8\ \hat{q}_{2t} & \text{si} \quad a^*_{2t} \neq 0 \\ \hat{q}_{2t} & \text{si} \quad a^*_{2t} = 0 \end{cases}$$

$$\hat{q}_{3\,t+1} = 1 - (\hat{q}_{1\,t+1} + \hat{q}_{2\,t+1})$$

Por lo anterior para la etapa 2 se tendrá:

$\hat{q}_{12} = 0.16$ $\qquad \hat{q}_{22} = 0.256$ $\qquad \hat{q}_{32} = 0.584$

Tipo I $\qquad \hat{q}_{12}\ r_1 = 0.0160$

Tipo II $\qquad \hat{q}_{22}\ r_2 = 0.0154$

Tipo III $\qquad \hat{q}_{32}\ r_3 = 0.0059$

$m = 1 \qquad M_2^+ = \{1\}$

como $\quad 0.0160 > \dfrac{0.16}{1 + \dfrac{1}{0.10}} \ngtr 0.0154$

$m = 2 \qquad M_2^+ = \{1,2\}$

$$0.0154 > \frac{.416}{1+\frac{1}{0.10}+\frac{1}{.06}} \geq 0.0059$$

se cumplen las desigualdades luego $M_2^+ = \{1,2\}$

$\sigma = 0.416$

$\hat{P}_{12} = \frac{0.160}{0.416} = 0.385 \qquad \hat{P}_{22} = \frac{0.256}{0.416} = 0.615$

$a^*_{12} = 0.6$

$a^*_{22} = 0.4$

$a^*_{32} = 0$

Aplicando nuevamente la función de transición.

$\hat{q}_{13} = 0.128 \qquad \hat{q}_{23} = 0.205 \qquad \hat{q}_{33} = 0.667$

Tipo I $\qquad \hat{q}_{13}\ r_1 = 0.0128$

Tipo II $\qquad \hat{q}_{23}\ r_2 = 0.0123$

Tipo III $\qquad \hat{q}_{33}\ r_3 = 0.0067$

$m = 1 \qquad M_3^+ = \{1\}$

$$0.0128 > \frac{0.128}{1+\frac{1}{0.10}} \not\geq 0.0123$$

$m = 2 \qquad M_1^+ = 1,2$

$$0.0123 > \frac{0.333}{1+\frac{1}{0.10}+\frac{1}{0.06}} \geq 0.0067$$

luego $\sigma = 0.333$

$$\hat{P}_{13} = \frac{0.128}{0.333} = 0.385 \qquad \hat{P}_{23} = \frac{0.205}{0.333} = 0.615 \qquad \hat{P}_{33} = 0$$

Luego se debe destinar 0.6 P a las carreteras tipo I, 0.4 P a las carreteras tipo II y nada a las tipo III.

Las cantidades requeridas para una conservación total en todas las carreteras dentro de los tres grupos son:

Tipo	I	50
Tipo	II	75
Tipo	III	20

luego debe cumplirse que $0.6\ P \leq 50$

$0.4\ P \leq 75$

$P = 86$ verifica ambas restricciones.

por lo que al final de tres etapas se tendrá:

$$L\,K_3 = L\,86 + 0.52\,L\,2 + 0.416\,L\,2 + 0.333\,L\,2 + 0.52\,(0.385\,L\,.385$$

$$+ .615\,L\,.615) + 0.416\,(0.385\,L\,.385 + 0.615\,L\,.615) + 0.333\,(.385\,L\,.385$$

$$+ .615\,L\,.615) + 0.52\quad 0.385\,L\,0.10 + 0.615\,L\,.06 + L\,27.6 - L\,2 \quad +$$

$$+ 0.416\quad 0.385\,L\,0.10 + 0.615\,L\,.06 + L\,27.6 - L\,2 \quad +$$

$$+ 0.333\quad 0.385\,L\,0.10 + 0.615\,L\,.06 + L\,27.6 - L\,2$$

$$L\,K_3 = 4.46 + 0.0318 \quad ; \qquad K_3 = 89$$

337. [illegible] del proceso adaptivo [illegible] en el límite:

Cuando el número de etapas tiende a infinito, entonces:

$$\underset{T\to\infty}{\text{plim}} \ \hat{Q}_{kiT} = q_i \quad \text{para} \quad i \in N$$

$$\underset{T\to\infty}{\text{plim}} \ m_{kT} = m^*$$

$$\underset{T\to\infty}{\text{plim}} \ \hat{p}_{kiT} = p_i$$

$$\underset{T\to\infty}{\text{plim}} \ H_k^* \ (R_T \mid R_{T-1} \ \ldots \ R_1) = H^*$$

$$\underset{T\to\infty}{\text{plim}} \ \hat{H}_k \ (R_T \mid R_{T-1} \ \ldots \ R_1) = H$$

$$\underset{T\to\infty}{\text{plim}} \ Y_k \ (R_T \mid R_{T-1} \ \ldots \ R_1) = Y \text{ para cada } T = 1, 2, \ldots, T.$$

o sea que la distribución de probabilidad subjetiva, la entropía y el coeficiente de asimetría en el límite son los del ámbito.

338. Equilibrio estadístico o información total.

Suponiendo que el coeficiente de inversión, $\sigma_k(.)$, es igual a 1 y constante para cualquier t, se demuestra matemáticamente que:
$\hat{H}_k(.) \geqq H$.
Esta propiedad significa que el proceso adaptivo reduce la entropía del sistema a la entropía del ámbito, siendo ésta una cota inferior. Además, en esta cota la entropía subjetiva debe ser constante; por consiguiente el que toma las decisiones se encuentra en un estado de equilibrio estadístico con su ámbito.

Se dice que un proceso adaptivo está en el estado de información total cuando la diferencia de la entropía subjetiva del proceso y la del ámbito es $\pm\,\delta$ de cero para al menos η veces. En este estado se obtiene que: $E^*(L\,K_{kt'}) - K_{ko'} = \sum_{i \in N} h_i\, L(1 + a_i^*\, r_i)$.

339. Trayectoria de entropía subjetiva:

Se define como trayectoria de entropía subjetiva:

$$\mathcal{H}_{kt} = \sum_{i \in N} p_i \, L \, L \left[\hat{p}_{kit} \right]$$

donde
$$E\left[\hat{p}_{iit}\right] = \frac{\alpha_{ii} + t p_i}{\sum_{i \in N} \alpha_{i} + t}$$

Es posible demostrar que $\frac{d_{Ht}}{dt}$ es negativa, y por tal motivo la pendiente de la trayectoria de entropía subjetiva lo es así también, o sea que se trata de una función del tiempo de entropía monotónicamente decreciente.

Ejemplo:

Se puede invertir en tres actividades, siendo la distribución de probabilidad del ámbito $\{0.2, 0.3, 0.5\}$ o sea la probabilidad de obtener una ganancia en cada una de las actividades. Se desea graficar la trayectoria de entropía subjetiva si el vector de convicción es (5, 3, 2).

$$t = 0 \qquad \left\{E\left[\hat{p}_{i0}\right]\right\} = \left\{\frac{\alpha_i}{\sum_{i \in N} \alpha_i}\right\} = \left\{0.5\ ,\ 0.3\ ,\ 0.2\right\}$$

$$H_0 = -\sum_{i \in N} p_i \, L \, E\left[\hat{p}_{i0}\right] = -(0.2 \, L\, 0.5 + 0.3 \, L \, 0.3 + 0.5 \, L \, 0.2) = 1.303$$

$$t = 10 \qquad \left\{E\left[\hat{p}_{i10}\right]\right\} = \left\{\frac{\alpha_i + t p_i}{\sum_{i \in N} \alpha_i + t}\right\} = \left\{\frac{5 + 2}{10 + 10}\ ,\ \frac{3 + 3}{10 + 10}\ ,\ \frac{2 + 5}{10 + 10}\right\} = \left\{0.35,\ 0.30,\ 0.35\right\}$$

$$H_{10} = -(0.2 \, L 0.35 + 0.3 \, L 0.30 + 0.5 \, L 0.35) = 1.095$$

$$t = 20 \quad \left\{E\left[\hat{p}_{i20}\right]\right\} = \left\{0.3\ ,\ 0.3\ ,\ 0.4\right\}$$

$$H_{20} = -(0.2 \, L 0.3 + 0.3 \, L 0.3 + 0.5 \, L 0.4) = 1.060$$

$$t = 30 \quad \left\{E\left[\hat{p}_{i30}\right]\right\} = \left\{0.275,\ 0.300,\ 0.425\right\}$$

$$H_{30} = -(0.2 \, L 0.275 + 0.3 \, L 0.3 + 0.5 \, L 0.425) = 1.043$$

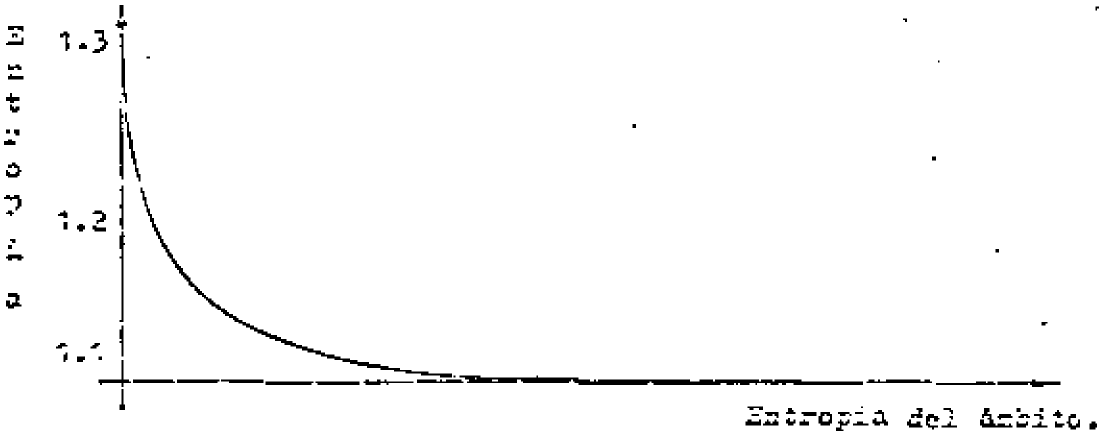
$$t = 50 \quad \left\{E\left[\hat{p}_{i50}\right]\right\} = \left\{0.25\ ,\ 0.30\ ,\ 0.45\right\}$$

$$_{50} = -(0.2\,L0.25 + 0.3L0.30 + 0.5\,L0.45) = 1.03$$

$$t = 100 \quad \left\{ E\left[\hat{P}_{i100}\right] \right\} = \left\{ 0.227,\ 0.300,\ 0.473 \right\}$$

$$_{100} = -(0.2\,L0.227 + 0.3\,L0.300 + 0.5\,L0.473) = 1.032$$

$$H = -(0.2\,L0.2 + 0.3\,L0.3 + 0.5\,L0.5) = 1.029$$



340. <u>Comportamiento de la trayectoria de entropía subjetiva:</u>

Conociendo que
$$\hat{H}_{k0} = -\sum_{i\in M} p_i \; L \frac{\alpha_{ki}}{\sum_{i\in M} \alpha_{ki}}$$

$$H = -\sum_{i\in M} p_i \, L\, p_i$$

y utilizando la siguiente aproximación :

$$_{kt} \cong (\hat{H}_{k0} - H)\,\varepsilon^{t} + H$$

donde $0 < \varepsilon < 1$ es un parámetro característico de cada sistema, se tiene:

$$E\left[L\,K_{kt}\right] \cong L\,K_{k0} + t(H^{*} - H) - (1 - \varepsilon^{t})\,\frac{\hat{H}_{k0} - H}{1 - \varepsilon} + t\,Y$$

En esta ecuación se pueden observar las siguientes propiedades:

a) Si la entropía del ámbito es máxima, $H = H^*$ el crecimiento del capital es bajo. Cuando el que tiene que decidir no conoce este hecho tomará pérdidas hasta que esté consciente de él.

$$E\left[L\, K_{kt}\right] \cong L\, K_{ko} - (1 - \epsilon^*)\ \frac{\hat{H}_{kt} - H^*}{1 - \epsilon} + t\, Y$$

Sin embargo, si él conoce que la entropía del ámbito es la máxima sus pérdidas esperadas son cero.

$$E\left[L\, K_{kt}\right] \cong L\, K_{ko} + t\, Y$$

b) Suponga que la entropía del ámbito $0 < H < H^*$. El que tiene las decisiones tendrá una pérdida irrecuperable en lo que se adapta al ámbito. En cuanto él conozca la entropía del ámbito será capaz de aumentar su capital con la tasa máxima.

$$E\left[L\, K_{kt}\right] \cong L\, K_{ko} + (H^* - H + Y)\, t$$

541. <u>Representación del espacio de estados económicos:</u>

Se pueden clasificar todos los que tienen que tomar decisiones en cualquier período de tiempo de acuerdo con la cantidad de información que posean. Se llamará a esta variable de clasificación el estado de información. Las personas que tengan la misma cantidad de información se encontrarán en un estado de información.

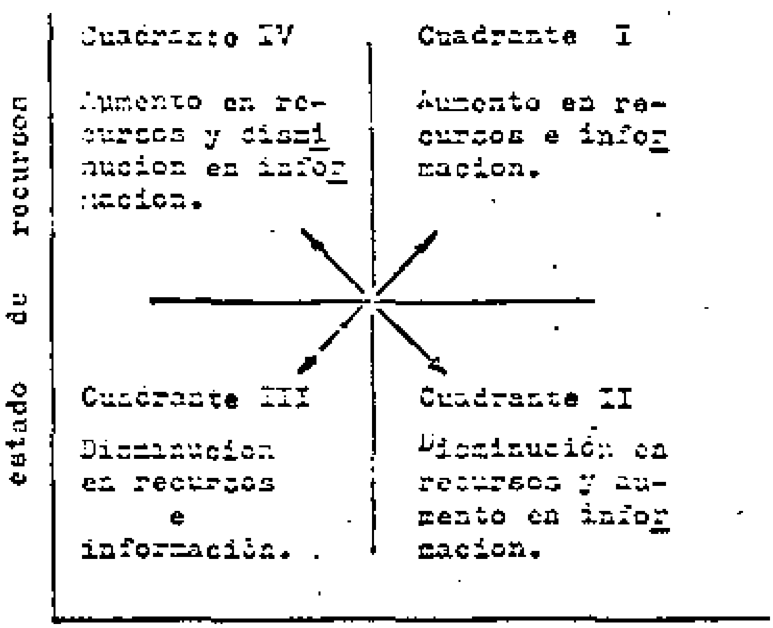
La entropía de un sistema, H, es una medida de la tasa con la cual la información es transmitida por el ámbito. La existencia en información de la k-ésima persona que tiene que decidir en la t-ésima etapa es la cantidad $H^* - H_{kt}$. En otras palabras, si él conoce los parámetros de la función de probabilidad del ámbito, la información en existencia es máxima; de otra manera, si él supone la hipótesis Laplaciana donde todos los eventos son equiprobables la existencia de información será cero, o sea, $H^* = H_{kt}$. Esta existencia se definirá como el estado de información para el que toma las decisiones.

La entropía del ámbito, H, es el límite asintótico de todas las trayectorias de comportamiento adaptivo en el espacio de estados. La distancia entre el eje cero y el límite H es una medida del riesgo económico en el sistema. La distancia entre H_{kt} y H es la medida de la incertidumbre económica del k-ésimo individuo que decide en la etapa t. El riesgo es comun a todos los que toman decisiones en el sistema, pero la incertidumbre es algo personal -una característica de cada persona. La entropía del ámbito es un parámetro clave de cualquier sistema economico ya que establece la naturaleza estocástica de éste en los niveles de riesgo e incertidumbre para cada miembro del sistema.

El comportamiento de quienes tienen que decidir será diferente dependiendo de los recursos economicos (por ejemplo, capital) que posean aún cuando tengan la misma cantidad de informacion. Cuando varias de estas personas tienen la misma cantidad de recursos economicos, se dira que estan en el mismo estado de recursos.

Por consiguiente, cada uno de los que toman decisiones se pueden clasificar por su estado de informacion y su estado de recursos. Los que deciden cambiaran de una celda a otra como un resultado de ciertos eventos.

Las transiciones posibles en el espacio de estados son:



... de informacion ($H^* - H$)

Se describirán trayectorias en el espacio de estados en los ejemplos siguientes:

342. <u>Tres inversionistas con igual información pero con diferente capital inicial.</u>

Se consideran tres actividades en las que $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.2$ y $r_3 = 0.119$. Sus probabilidades de ocurrencia son 0.2 y 0.5 respectivamente. En estas condiciones $\sigma = 1$. El capital inicial de los tres inversionistas es: $K_{10} = 3$, $K_{20} = 4$ y $K_{30} = 5$.

Se piensa además que para este sistema $\varepsilon = 0.85$.

Puesto que
$$Y = \sum_{i \in M} p_i \, L r_i + L\left(1 + \sum_{i \in M} 1/r_i\right) - Ln$$

$$Y = 0.2 \, L0.4 + 0.3 \, L0.2 + 0.5 \, L0.119 + L(1 + 15.9) - L3$$

$$Y = 0.003$$

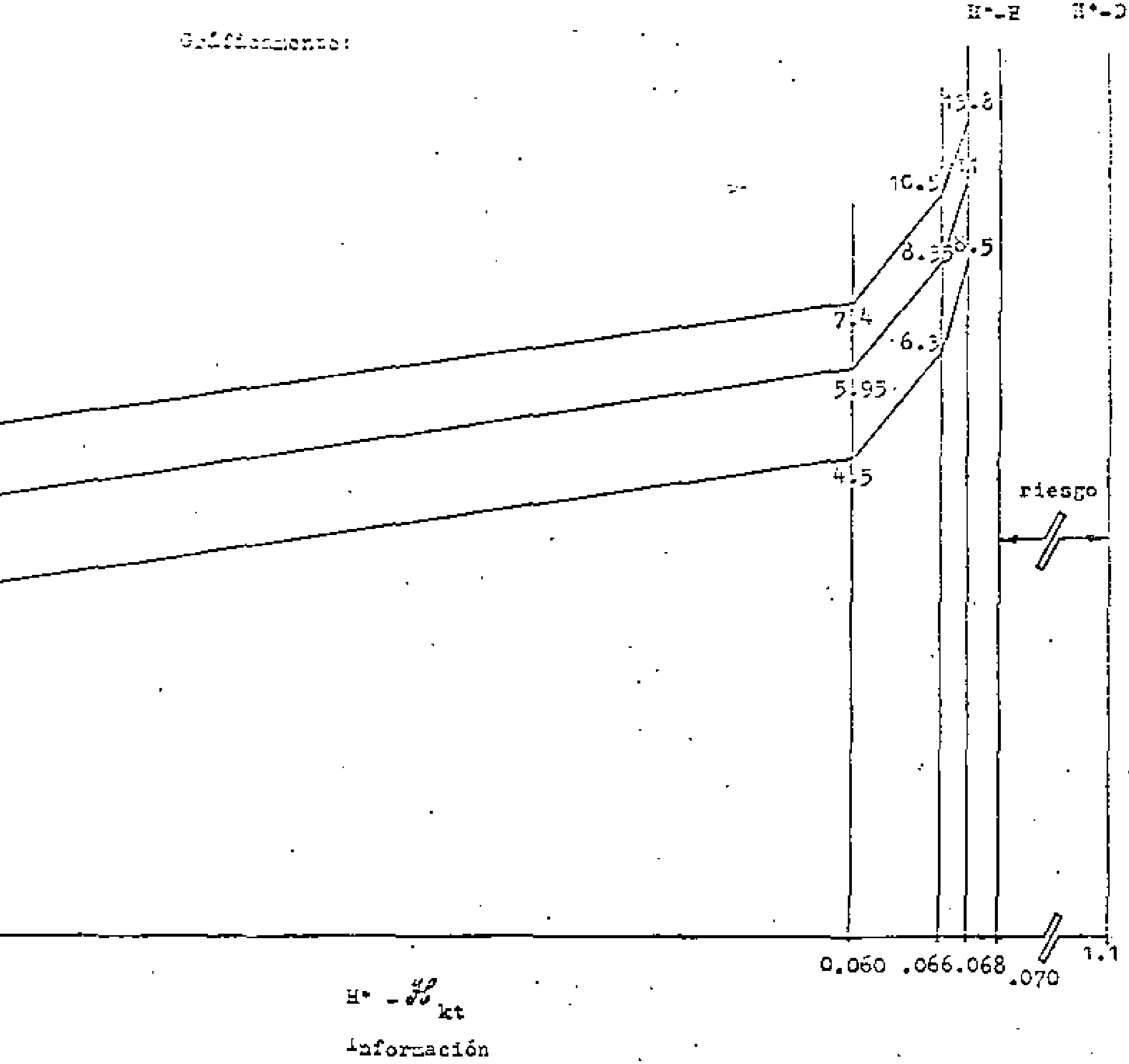
Aplicando la ecuación

$$E\left[LK_{kt}\right] \cong LK_{k0} + (H^{*} - H + Y) \frac{L\left[(H_{kt} - H)/(\hat{H}_{k0} - H)\right]}{L\,\varepsilon} - \frac{\hat{H}_{k0} - \mathcal{H}_{kt}}{1 - \varepsilon}$$

se obtiene:

t	$E\left[L\,K_{1t}\right]$	$E\left[L\,K_{2t}\right]$	$E\left[L\,K_{3t}\right]$
10	1.504	1.784	2.014
20	1.840	2.120	2.350
30	2.116	2.396	2.626

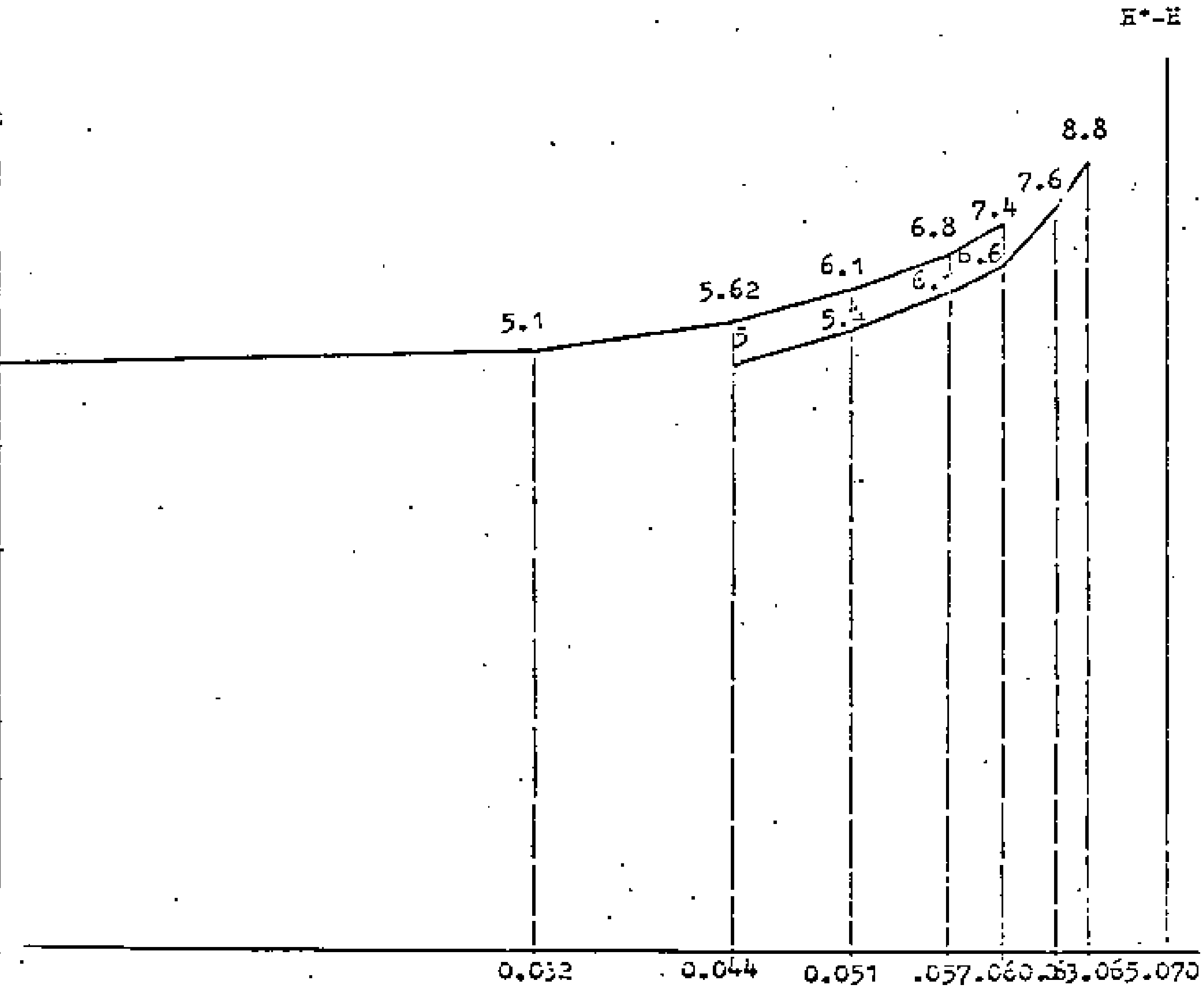
Gráficamente:



343. <u>Dos inversionistas con igual capital inicial pero con diferente información:</u>

Se utilizan los datos y ecuaciones del inciso anterior con excep-ción de $K_{10} = 5$, $K_{20} = 5$, $H^* - \mathcal{H}_{10} = 0$, $H^* - \mathcal{H}_{20} = 0.044$, obteniéndose:

t	$H^* - \mathcal{H}_{1t}$	$\Sigma\left[\Delta K_{1t}\right]$	$H^* - \mathcal{H}_{2t}$	$\Sigma\left[\Delta K_{2t}\right]$
0	0	1.610	0.044	1.610
2	0.032	1.632	0.051	1.693
4	0.044	1.723	0.057	1.810
6	0.051	1.810	0.060	1.890
8	0.057	1.922	0.063	2.026
10	0.060	2.014	0.065	2.172



$H^* - \mathcal{H}_{1t}$

DECISIONES ESTADISTICAS

1. Decisiones estadísticas

Una decisión estadística implica un análisis lógico de varios posibles cursos de acción cuando las consecuencias de optar por cualquiera de ellos depende del estado en que se encuentre la naturaleza; éste comunmente será desconocido pero con cierto costo es posible obtener información sobre él. La selección de un cursos de acción se hará tomando en cuenta las preferencias básicas, del que toma las decisiones, con respecto a las consecuencias de sus posibles acciones, así como sus juicios básicos concernientes al verdadero estado de la naturaleza.

2. Datos básicos para la toma de una decisión estadística

Se supondrá que el que toma las decisiones puede especificar los siguientes datos que definen su problema de decisión.

a) Un espacio de las acciones $\overline{A} = \{a\}$; cursos de acción abiertos al que toma las decisiones

b) Un espacio de estados $\overline{\Theta} = \{\theta\}$. El que toma las decisiones cree que las consecuencias de tomar una acción a dependen del estado $\theta \in \overline{\Theta}$ el cual no pueda predecir con certeza

c) Una familia de experimentos $\overline{E} = \{e\}$ que se realizarán, con objeto de obtener más información de la importancia que se le debe asociar a cada $\theta \in \bar{\theta}$

d) Un <u>espacio muestral</u> $\bar{Z} = \{z\}$. Cada posible resultado de cada posible experimento se identificará con $z \in \bar{Z}$

e) Una <u>función utilidad</u> $u(e, z, a, \theta)$ con dominio en $\bar{E} \times \bar{Z} \times \bar{A} \times \bar{\theta}$ que evalue la utilidad de llevar a cabo un <u>e</u> en particular observando un <u>z</u> en particular cuando se ha tomado un curso de acción <u>a</u> y se encuentra con que ha obtenido un cierto <u>θ</u>

f) Una <u>probabilidad</u> $P_{\theta,z}\{.,./e\}$ en $\bar{\theta} \times \bar{Z}$. Para cada $\bar{e} \in E$ el que toma las decisiones directa o indirectamente asigna una probabilidad conjunta $P_{\theta,z/e} = P_{\theta,z}\{.,./e\}$ medida del espacio $\bar{\theta} \times \bar{Z}$ llamado de las posibilidades.

En esta forma se definen cuatro nuevas medidas probabilísticas:

i) La probabilidad marginal $P'_{\theta}\{.\} = P'_{\theta}$ en $\bar{\theta}$, en el espacio $\bar{\theta}$

ii) La probabilidad marginal $P_z\{./e\} = P_{z/e}$ en el espacio $\bar{Z}$ para una <u>e</u> dada, pero sin especificar <u>θ</u> .

iii) La probabilidad condicional $P_z\{./e, \theta\} = P_{z/e,\theta}$ en el espacio $\bar{Z}$ y para un <u>e</u> y un θ dados

iv) La probabilidad condicional $P''_{\theta}\{./z\} = P'_{\theta/z}$ en el espacio $\bar{\theta}$ para un <u>e</u> y <u>z</u> dados.

P'_{θ} = probabilidad que el que toma las decisiones asigna a $\underline{\theta}$ antes de conocer el resultado $\underline{z}$ del experimento $\underline{e}$ (a priori) .

$P''_{\theta/z}$ = probabilidad que el que toma las decisiones asigna a $\underline{\theta}$ cuando conoce el resultado $\underline{z}$ del experimento $\underline{e}$.

3. Variables aleatorias y esperanzas

Frecuentemente los estados $\{\theta\}$ y los resultados $\{z\}$ son descritos por números reales o por sucesiones de $\underline{n}$ números reales. En estos casos se definirán las variables aleatorias $\tilde{\theta}$ y $\tilde{z}$ mediante

$$\tilde{\theta}(\theta, z) = \theta \; ; \; \tilde{z}(\theta, z) = z$$

usando la tilde $(\sim)$ para distinguir a la variable aleatoria de un valor particular.

Para representar a las esperanzas matemáticas se empleará la siguiente notación

$E'(\tilde{\theta}) = E'_{\theta}$ esperanza respecto a P'_{θ}

$E''(\tilde{\theta}/z) = E''_{\theta/z}$ esperanza respecto a $P''_{\theta/z}$

$E(\tilde{z}/e, \theta) = E_{z/e,\theta}$ esperanza respecto a $P_{z/e,\theta}$

$E(\tilde{z}/e) = E_{z/e}$ esperanza respecto a $P_{z/e}$

$E = E_{\theta;z/e}$ esperanza respecto a $P_{\theta,z}\{\cdot,\cdot/e\}$

4. El problema de decisión en general

El problema de decisión en general puede establecerse de la siguiente manera:

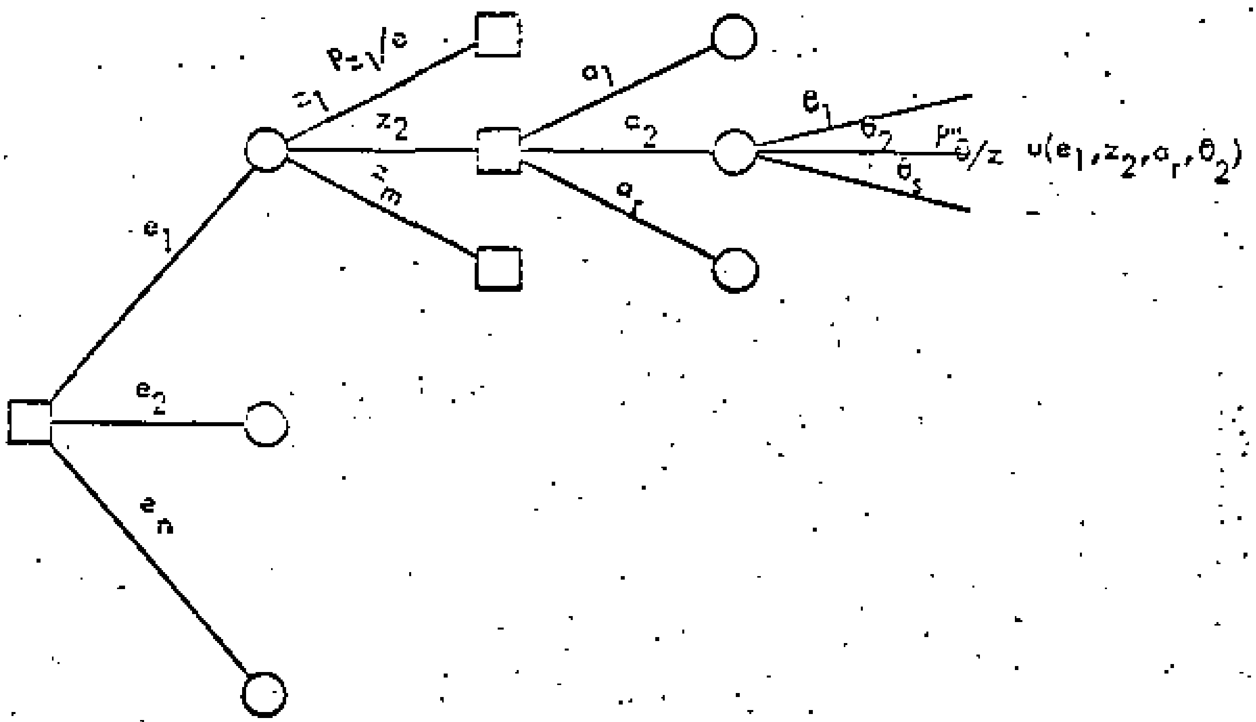
"Dados $\bar{E}$, $\bar{Z}$, $\bar{A}$, $\bar{\theta}$, u y $P_{\theta,z/e}$ ¿Cómo debe seleccionarse $\underline{e}$ y una vez observado $\underline{z}$ como debe elegirse $\underline{a}$, de manera que el que toma las decisiones maximice su utilidad?

Este problema puede verse como un juego en el que se realizan cuatro jugadas:

Primera jugada: el que toma la decisión selecciona un $e \in E$.
Segunda jugada: el azar selecciona un $z \in \bar{Z}$ de acuerdo con la probabilidad $P'_{z/e}$.
Tercera jugada: el que toma las decisiones selecciona una $\underline{a} \in \bar{A}$.
Cuarta jugada: el azar selecciona un $\theta \in \bar{\theta}$ de acuerdo con la probabilidad $P''_{\theta/z}$.

El que toma las decisiones gana $u(e, z, a, \theta)$.

Para visualizar mejor esta rutina, suele emplearse un diagrama llamado árbol de decisiones.



5. Tipos de análisis del problema de decisión

Existen dos modos básicos de análisis que pueden emplearse para encontrar el curso de acción que maximice la utilidad esperada del que toma las decisiones: la llamada forma extensiva y la forma normal. Ambas son equivalentes y desde un punto de vista técnico cada una tiene algunas ventajas particulares.

6. Análisis en forma extensiva

Esta forma procede analizando hacia atrás a partir del extremo del árbol de decisiones y hacia el punto de partida. En vez de iniciarse preguntando que experimento debe llevar a cabo el que toma la decisión en la primera jugada, cuando no sabe nada sobre la jugada que llevará a cabo el azar, se inicia preguntando que acción debería elegir en la tercera jugada si ha llevado a cabo algún experimento en particular $\underline{e}$ y observado un resultado en particular $\underline{z}$. Aún en este punto y con una historia conocida (e, z), las utilidades de las varias acciones todavía son inciertas, dado que θ será elegido por azar en la cuarta jugada que es desconocida; pero esta dificultad se resuelve fácilmente tratando la utilidad derivada de una cierta $\underline{a}$ para un (e, z) dado como una variable aleatoria $u(e, z, a, \tilde{\theta})$ con respecto a la probabilidad condicional $P''_{\theta/z}$.

Esto es, se puede calcular para cualquier historia (e, z) y para cualquier acción la esperanza

$$u^*(e, z, a) = E''_{\theta/z}\, u(e, z, a, \tilde{\theta})$$

que es la utilidad hasta antes de que el azar realice su cuarta jugada y defina una $\underline{\theta}$ en particular.

Ahora bien, puesto que el objetivo del que toma las decisiones es maximizar la utilidad esperada, lo que hará cuando se encuentre confrontado con una historia (e, z) es elegir la acción $\underline{a}$ para la que $u^*(e, z, a)$ es máximo y puesto que está en libertad de elegir la acción que quiera, se puede decir que la utilidad al iniciarse la tercera jugada, con una historia (e, z) y todavía sin efectuar la selección de $\underline{a}$ es

$$u^*(e, z) = \max_{a} u^*(e, z, a)$$

Ya que se ha calculado $u^*(e, z)$, en la forma antes indicada y para todas las posibles historias (e, z) es posible atacar el problema de la selección de un experimento $\underline{e}$. La dificultad para llevar a cabo la primera jugada radica en que no se conoce el resultado $\underline{z}$ del experimento, entonces se procederá como en la tercera jugada considerando la variable aleatoria $u^*(e, \tilde{z})$ y por tando

$$u^*(e) = E_{z/e}\, u^*(e, \tilde{z})$$

Nuevamente el que toma las decisiones elegirá aquella $\underline{e}$ para la que $u^*(e)$ es máxima, y por tanto la utilidad en la primera jugada cuando la selección de $\underline{e}$ no se ha realizado es

$$u^* = \max_{e} u^*(e) = \max_{e} E_{z/e} \max_{a} E''_{\theta/z}\, u(e, \tilde{z}, a, \tilde{\theta})$$

A este proceso de trabajar hacia atrás se le suele llamar retroinducción.

7. Ejemplo

Al revisar un diseño para la cimentación de un edificio, un consultor opina que se debe considerar como resistencia del suelo $10\ kg/cm^2$ en vez de los $6\ kg/cm^2$ que originalmente se habían utilizado. Al responsable del diseño se le presenta la siguiente situación:

a) Si diseña con $6\ kg/cm^2$ y la resistencia es de $6\ kg/cm^2$ no pierde ni gana

b) Si diseña con 6 y la resistencia es de 10 está desperdiciando recursos y haciendo una mala inversión que penaliza en $ 50,000.00

c) Si diseña con 10 y la resistencia es 6, sufrirá daños la construcción, etc... que evalúa en $ 300,000.00

d) Si diseña con 10 y la resistencia es 10, estará ahorrando $ 200,000.00.

Puede también llevar a cabo un muestreo con un costo de $ 20,000.00

¿Qué debe hacer el responsable del diseño?

El panorama que se le ofrece al responsable es como sigue:

i) Acciones

$$\overline{A}\begin{cases} a_1: \text{ordena modificar la resistencia de diseño a } 10\ kg/cm^2. \\ a_2: \text{no lo ordena} \end{cases}$$

ii) Estados de la naturaleza

$$\Theta \begin{cases} \theta_1: & \text{la resistencia real es de } 6\ kg/cm^2 \\ \theta_2: & \text{la resistencia real es de } 10\ kg/cm^2 \end{cases}$$

iii) Experimentos

$$E \begin{cases} e_1: & \text{ordena llevar a cabo un muestreo en el campo} \\ e_2: & \text{no lo ordena.} \end{cases}$$

iv) Espacio muestral

$$Z \begin{cases} z_1: & \text{resultado de } e_1 \text{ favorable a } \theta_1 \\ z_2: & \text{resultado de } e_1 \text{ favorable a } \theta_2 \\ z_3: & \text{resultado de } e_2 \text{ (artificial)} \end{cases}$$

v) Función utilidad

$$u(e_1, z_1, a_1, \theta_1) = -320{,}000$$

$$u(e_1, z_1, a_1, \theta_2) = 180{,}000$$

$$u(e_1, z_1, a_2, \theta_1) = -20{,}000$$

$$u(e_1, z_1, a_2, \theta_2) = -70{,}000$$

$$u(e_1, z_2, a_1, \theta_1) = -320{,}000$$

$$u(e_1, z_2, a_1, \theta_2) = 180{,}000$$

$$u(e_1, z_2, a_2, \theta_1) = -20{,}000$$

$$u(e_1, z_2, a_2, \theta_2) = -70{,}000$$

$$u(e_2, z_3, a_1, \theta_1) = -300{,}000$$

$$u(e_2, z_3, a_1, \theta_2) = 200{,}000$$

$$u(e_2, z_3, a_2, \theta_2) = 0$$

$$u(e_2, z_3, a_2, \theta_2) = -50{,}000$$

La opinión del consultor puede precisarse en las siguientes dos tablas:

a) La probabilidad, a priori, de que la resistencia sea de 6 kg/cm^2 es de 30%. La de que sea 10 kg/cm^2 es de 70%.

b) Dado el tipo de muestreo que se llevará a cabo la opinión es que si la resistencia real es de 6 kg/cm^2 la probabilidad de que reporte 6 kg/cm^2 es de un 60% y que si la resistencia real es de 10 kg/cm^2 la probabilidad de que reporte 10 kg/cm^2 es de 80%.

Esto es:

Probabilidad marginal sobre θ (P'_θ)

θ	P'_θ
θ_1	0.30
θ_2	0.70

Probabilidad condicional sobre $\bar{Z}$ ($P_{z/e,\theta}$)

$\bar{Z}$	$\bar{E}$			
	e_1		e_2	
	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
Z_1	0.6	0.2	0	0
Z_2	0.4	0.8	0	0
Z_3	0	0	1	1

A partir de estas opiniones se calculará la probabilidad asociada con e_1

$\overline{Z}$	Probabilidad conjunta sobre $\overline{\theta} \times \overline{Z} (P_{\theta,z/e})$		Probabilidad marginal sobre $(P_{z/e})$
	θ_1	θ_2	
Z_1	0.18	0.14	0.32
Z_2	0.12	0.56	0.68
Z_3	0	0	0
Probabilidad marginal sobre θ $(P_{\theta/e})$	0.30	0.70	1.00

y de ahí la probabilidad, a posteriori, condicional sobre $\overline{\theta}$ $(P''_{\theta/z})$

$\overline{Z}$	θ_1	θ_2	Suma
z_1	0.565	0.435	1.000
z_2	0.176	0.824	1.000
z_3	0.300	0.700	1.000

Ya es posible iniciar el análisis. Conviene resumir los resultados en un arbol.

Se tiene:

En el árbol se han hecho los cálculos que a continuación se ilustran:

1) Evaluar $u^*(e, z, a)$ para todos los (e, z, a)

$$u^*(e_1, z_1, a_1) = u(e_1, z_1, a_1, \theta_1)\, P''_{\theta}\{\theta_1 \mid z_1\} + u(e_1, z_1, a_1, \theta_2)\, P''_{\theta}\{\theta_2 \mid z_1\}$$

$$= (-320,000)(0.565) + (180,000)(0.435)$$

$$= -102,700$$

análogamente se calcularán $u^*(e_1, z_1, a_2)$, $u^*(e_1, z_2, a_1)$, $u^*(e_1, z_2, a_2)$, $u^*(e_2, z_3, a_1)$, $u^*(e_2, z_3, a_2)$.

2) Encontrar $u^*(e, z)$ para todos los (e, z)

$$u^*(e_1, z_1) = \max\{u^*(e_1, z_1, a_1), u^*(e_1, z_1, a_2)\}$$

$$= \max\{(-102,700), (-41,750)\}$$

$$= -41,750$$

En forma análoga se calculan $u^*(e_1, z_2)$ y $u^*(e_2, z_3)$.

3) Evaluar $u^*(e)$ para e_1 y e_2

$$u^*(e_1) = u^*(e_1, z_1)\, P_z\{z_1 \mid e_1\} + u^*(e_1, z_2)\, P_z\{z_2 \mid e_1\}$$

$$= (-41,750)(0.32) + (91,800)(0.68)$$

$$= 50,650$$

4) Encontrar u^*.

$$u^* = \max\{u^*(e_1), u^*(e_2)\}$$

$$= \max \{50, 650, 50,000\}$$

$$= 50,650$$

El resultado del análisis (indicado con doble línea en el árbol) es como sigue:

"Llevar a cabo el muestreo pagando los $ 20,000.00 que cuesta. Si el resultado es favorable a 6 kg/cm^2 (z_1) no ordenar cambio (a_2). Si el resultado es favorable a 10 kg/cm^2 (z_2) ordenar modificar la resistencia de diseño a 10 kg/cm^2 (a_1)".

5. Análisis en forma normal

El producto final de un análisis en forma extensiva puede considerarse como una descripción de una estrategia constituída por dos partes:

1) La prescripción del experimento que debe llevarse a cabo.

2) Una regla de decisión que prescriba la acción óptima para cada posible resultado del experimento que debe llevarse a cabo.

La forma normal del análisis también tiene como producto final la descripción de una estrategia óptima que coincide con la que se obtiene del análisis en forma extensiva, aunque se llega a ella en forma diferente. En vez de determinar primero el acto óptimo para cualquier posible resultado de un experimento y definir así implícitamente la regla de decisión para un experimento, la forma normal principia estableciendo explícitamente todas y cada una de las posibles reglas de decisión para un experimento e y eligiendo posteriormente la óptima para e; una vez que

$u(e, \tilde{z}, d(\tilde{z}), \tilde{\theta})$ respecto a la probabilidad condicional $P_{z/e,\theta}$ se tiene:

$$u_*(e, d, \theta) = E_{z/e,\theta}\ u\left[e, \tilde{z}, d(\tilde{z}), \theta\right]$$

que se llamará la utilidad condicional de (e, d) para un estado dado θ. Calculando a continuación la esperanza sobre $\tilde{\theta}$ con respecto a la probabilidad marginal P'_{θ} (incondicional) se obtiene

$$u_*(e, d) = E'_{\theta}\ (e, d, \tilde{\theta})$$

que se llamará la utilidad incondicional de (e, d).

Entonces

$$u(e) = \max_{d}\ u_*(e, d)$$

y finalmente

$$\begin{aligned} u_* &= \max_{e}\ u_*(e) \\ &= \max_{e}\ \max_{d}\ E'_{\theta}\, E_{z/e,\theta}\left[e, \tilde{z}, d(\tilde{z}), \tilde{\theta}\right] \end{aligned}$$

10. <u>Características de una regla de decisión: comportamiento, error, utilidad</u>

a) Dada una estrategia (e, d) y un estado θ, es posible calcular la probabilidad de que una regla $\underline{d}$ conduzca a una acción $\underline{a}$. Formalmente se definirá para cualquier subconjunto $\bar{A}_0 \subset A$:

$$P_a\left\{\bar{A}_0 \mid e, d, \theta\right\} = P_z\left\{z : d(z) \in \bar{A}_0 \mid e, \theta\right\} = P_z\left\{d^{-1}(\bar{A}_0) \mid e, \theta\right\}$$

y se dirá que la probabilidad $P_{z/e,\theta}$ sobre $\tilde{z}$ induce la probabilidad $P_{a/e,\theta}$

será posible calcular u_* (e, d, θ) para toda (e, d, θ), de manera que para una estrategia (e, d) dada se puede considerar a $u_*(e, d, .)$ como otra función definida en $\bar{\Theta}$. Esta función recibe el nombre de característica de utilidad de la estrategia (e, d).

11. Ejemplo

Analizar en forma normal el problema del ejemplo anterior.

Se considerarán cuatro posibles estrategias

i) no muestrear y no ordenar cambio en la resistencia de diseño; equivale a: usar e_2 y d_{22}, en donde $d_{22}(z_3) = a_2$

ii) no muestrear pero ordenar cambio en la resistencia de diseño; equivale a: usar e_2 y d_{21}, en donde $d_{21}(z_3) = a_1$

iii) ordenar cambio en la resistencia de diseño si y sólo si el resultado del muestreo es favorable a $10\ kg/cm^2$; equivale a: usar e_1 y d_{11}, en donde $d_{11}(z_1) = a_2$, $d_{11}(z_2) = a_1$

iv) ordenar cambio en la resistencia de diseño si y sólo si el resultado del muestreo es favorable a $6\ kg/cm^2$; equivale a: usar e_1 y d_{12}, en donde $d_{12}(z_1) = a_1$, $d_{12}(z_2) = a_2$

Se tiene: