



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**TEORÍA Y APLICACIÓN DE COCIENTES ESPECTRALES  
EN EXPLORACIÓN SÍSMICA SOMERA**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**INGENIERO GEOFÍSICO**

PRESENTA:  
**PATSY FRANCO CRUZ**

DIRECTOR DE TESIS:  
**DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA**



MÉXICO, D.F.

FEBRERO DE 2013.



# Agradecimientos

A Dios por haberme guiado hasta este momento de mi vida y permitirme cumplir este sueño.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por los conocimientos, experiencias, alegrías y momentos brindados en esta etapa de mi vida. Cada día que llegaba a Ciudad Universitaria me sentía muy orgullosa de ser parte de esta casa de estudios. ¡Gracias por ser mi hogar!

Al Dr. Sánchez-Sesma por compartir su conocimiento, por el evidente interés para que aprendiera; por ese buen ánimo, paciencia y comprensión mostrada en todo este tiempo y finalmente por compartir ese amor y pasión a la ciencia.

A mis compañeros y amigos que me apoyaron en el proceso de titulación: Juan Camilo, Nayeli y Marcela. Por compartir sus conocimientos, su amistad, por la ayuda brindada y por todos los momentos de alegría y diversión que pasamos.

A la Dra. Martha Suárez y a mi maestra Sara Valentina por su ayuda, por los conocimientos compartidos, consejos y por todo su cariño mostrado.

A mis sinodales por revisar este trabajo y darme sugerencias para el mejoramiento del mismo: Martha Suárez, Miguel Rodríguez, Arturo Iglesias, David Escobedo y Mathieu Perton.

A Marcial, Mauricio, Hugo, Gloria, Adela y por el apoyo brindado y siempre tener una sonrisa.

A ti por confiar en mí, por siempre brindarme ánimos y por siempre hacer de mi una mejor persona en todos los aspectos.

A mis padres, Patricia y Silverio por el apoyo en todos los aspectos y por creer en mí

A mis hermanos, Guadalupe y Emmanuel por siempre estar ahí y brindarme apoyo, ayuda, amistad y cariño. ¡Gracias mis niños!

A mis amigas, Liliana, Jazmín y Xochitl por su amistad incondicional en todos estos años.

A mis amigas y amigos que conocí durante la universidad, por su apoyo, amistad y por cada momento compartido.

A mis maestros que son parte fundamental en el proceso de aprendizaje, por el conocimiento transmitido, por las experiencias compartidas y por la amistad brindada. ¡Mil Gracias!

A Javier por ser mi mejor amigo y darme mucho amor, cariño y felicidad. Gracias por siempre escucharme y decirme las palabras y consejos precisos para cada situación.

A Tere, Javier y Octavio por su apoyo y amistad incondicional.

A mis abuelos, Dimas y Celia y a mis tías Sandra, Chelis, Ana y Jorge por preocuparse por mí y apoyarme.

Mil Gracias a todos y espero éste trabajo le pueda servir a alguien.

Patsy Franco Cruz

# Indice

<b>Resumen</b>	<b>VI</b>
<b>Abstract</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>3</b>
2.1. El cociente espectral $H/V$ de Nakamura . . . . .	3
2.1.1. Interpretación de Nogoshi: Enlace con las ondas superficiales . . . . .	4
2.1.2. Explicación de Nakamura: vínculo con las ondas de cuerpo . . . . .	5
2.2. Campos difusos . . . . .	7
2.2.1. Equipartición . . . . .	8
2.2.2. Observación de equipartición . . . . .	12
2.3. La Función de Green elastodinámica . . . . .	13
2.3.1. Esfuerzos, Deformaciones y desplazamiento . . . . .	13
2.3.2. Ecuación de Navier . . . . .	15
2.3.3. Ondas Planas y Transformada de Fourier . . . . .	16
2.3.4. Función de Green . . . . .	17
2.3.5. Función de Green para una fuerza horizontal . . . . .	18
2.4. Recuperación de la Función de Green a partir de correlaciones de un campo difuso . . . . .	19
2.4.1. Caso escalar 2D . . . . .	19
2.4.2. Caso vectorial 3D . . . . .	21
2.5. Cocientes Espectrales . . . . .	23
2.5.1. Cociente espectral $H/V$ para ruido ambiental . . . . .	23
2.5.2. Cociente espectral $H/V$ para sismos . . . . .	26
<b>3. Ejemplos de aplicación</b>	<b>31</b>
3.0.3. Modelo 1. Un estrato sobre un semi-espacio . . . . .	31
3.0.4. Modelo 2. Dos capas sobre un semi-espacio con inversión de velocidad . . . . .	34
3.0.5. Modelo 3. Capa rígida sobre tres estratos y el semi-espacio . . . . .	36
3.0.6. Modelo 4. Dos estratos sobre un semi-espacio, la velocidad aumenta con la profundidad . . . . .	39
3.0.7. Modelo 5. Tres capas sobre un semi-espacio . . . . .	40

<b>4. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>A. Resultados obtenidos con el método de Thomson-Haskell</b>	<b>45</b>

# Resumen

Cuando ocurre un terremoto las ondas viajan rápidamente a través de la corteza, produciendo movimientos en su superficie. La corteza actúa como un filtro atenuándolas o amplificándolas en ciertas frecuencias. El conocer la frecuencia fundamental del medio por donde las ondas atraviesan nos permite mitigar los efectos que un sismo pudiera tener en zonas densamente pobladas, al advertir de la construcción de estructuras que tengan una frecuencia natural de vibrar cercana a la del sitio donde se cimentan.

Para conocer la frecuencia fundamental del sitio una de las técnicas que suele aplicarse es la de obtener los cocientes espectrales dividiendo la componente horizontal de los desplazamientos entre la componente vertical (Técnica de Nakamura) que se puede explicar por medio de la teoría de campos difusos. En este trabajo, se fundamenta teóricamente esta técnica y se aplica a cinco modelos stratigráficos, validándola con otros dos métodos.

Los cocientes espectrales, se calculan de dos maneras: considerando una fuente profunda (sismo) en donde las ondas, al sufrir difracción múltiple, son consideradas como un campo difuso (propagación vertical); y la segunda consiste en fuentes distribuidas en la superficie (el campo es descrito en tres dimensiones).





# Abstract

When an earthquake occurs rapidly waves travel through the crust, and part of its energy results in surface movements. The crust acts as a filter attenuating or amplifying certain frequencies. When the fundamental frequency of the medium is known in which waves pass through, it allows us to mitigate the effects that an earthquake might have on densely populated areas, by constructing structures with a natural frequency of vibration far from that of the site one.

One of the techniques usually applied for computing the fundamental frequency of the site the Nakamura technique which consists in obtaining the spectral ratios from horizontal component of displacements related to the vertical ones. This technique can be explained by the diffuse field theory, and in this thesis it is theoretically grounded. Five stratigraphic models are analyzed considering two hypothesis to simulate the diffuse field: one consists in supposing a deep source where waves scattered all around the media (vertical propagation), the other corresponds to multiple sources distributed on the surface (the field is described in three dimensions). The results are validated with two different methods.



## Introducción

Los terremotos han ocurrido desde hace millones de años y continuaran ocurriendo. Algunos ocurren cerca de zonas densamente pobladas, donde se pueden ver afectados los habitantes y la infraestructura. Hasta ahora ha sido imposible predecir la ocurrencia de los terremotos, pero es posible mitigar sus efectos reduciendo la pérdida de vidas y los daños.

A los peligros asociados con sismos se le conoce como riesgos sísmicos. A la ingeniería sísmica le corresponde la identificación y mitigación de los riesgos sísmicos. El movimiento del suelo y el daño estructural son los riesgos sísmicos más importantes [1].

Cuando ocurre un sismo las ondas viajan rápidamente a través de la corteza; cuando estas llegan a la superficie producen movimientos del suelo, cuya duración depende de la localización y el tamaño del sismo y de las características del sitio. A pesar de que los viajes de las ondas sísmicas sean principalmente en roca, cuando llegan a superficie a menudo atraviesan capas de suelo, las cuales pueden tener una gran influencia en la determinación del movimiento del suelo. El suelo actúa como un filtro para las ondas sísmicas, ya que atenúa el movimiento en ciertas frecuencias y lo amplifica en otras frecuencias.

En un sismo, el daño estructural es la principal causa de muerte y de pérdida económica. Por ello es necesario conocer las características dinámicas del suelo en donde se cimentan las estructuras. Con el paso de los años, se han tenido grandes avances en materia del diseño por sismo en estructuras, por ello se han construido códigos de diseño cuyo contenido ha sido mejorado de acuerdo al avance en las áreas de Sismología, Geotecnia y estructuras.

Una característica dinámica del suelo es la frecuencia fundamental y se define como la frecuencia más baja a la que cualquier objeto vibra (en este caso, el suelo). El objetivo de esta tesis es la estimación de la frecuencia fundamental de cinco modelos propuestos para poder evaluar los efectos locales del sitio y de esta manera anticipar los daños causados por la ocurrencia de movimientos sísmicos, mediante la aplicación de la técnica de cocientes espectrales  $H/V$  de Nakamura suponiendo que el campo de ondas es difuso, validando los resultados obtenidos con el método de Thomson-Haskell, y con una formulación energética expresada en el manual de diseño por sismo de la Comisión Federal de Electricidad (CFE)[2].

Para conocer las características dinámicas del suelo existen diversas técnicas y métodos. El método de Thomson-Haskell [3] calcula la respuesta sísmica teórica de un medio formado por estratos horizontales, homogéneos y paralelos ante la incidencia de ondas planas y se obtiene el valor de la frecuencia donde la vibración del suelo es máxima (frecuencia de resonancia o frecuencia fundamental) y el valor de amplificación del movimiento sísmico. Pero se requiere conocer la estructura del subsuelo, esto se puede obtener realizando sondeos o estudios sísmicos.

En 1989 Nakamura afirmó que la respuesta del sitio ante incidencia de ondas S en un suelo blando se puede estimar a través del registro en las tres componentes (N-S, E-W y vertical) de ruido ambiental durante unos minutos, el procesamiento es sencillo y consiste en dividir el espectro de Fourier de las componentes de desplazamiento horizontales entre el espectro de la componente de desplazamiento vertical ( $H/V$ ) [4]. Ésta técnica revela solamente la frecuencia fundamental del sitio y ha recibido gran atención debido a la facilidad de obtención de resultados [5].

En esta tesis supondré que el ruido ambiental es un campo difuso (donde la energía promedio se distribuye en proporciones fijas, en un intervalo de tiempo) que contiene todo tipo de ondas [6]. Y que un sismo a profundidad en un medio con múltiples heterogeneidades también es un campo difuso. Con el objetivo de calcular el cociente espectral  $H/V$  de Nakamura teórico en superficie y obtener la frecuencia fundamental de modelos propuestos.

En el capítulo II se presentan los fundamentos teóricos necesarios para comprender este trabajo. Los temas tratados son los siguientes: La técnica de cocientes espectrales  $H/V$  de Nakamura y la interpretación de sus características.

Definición de campo difuso. El cual puede ser originado por una sola fuente y múltiples difractores ó con varias fuentes distribuidas en la superficie, donde la energía se distribuye de acuerdo al teorema de equipartición.

Los fundamentos de elastodinámica y definición de la Función de Green.

Se muestra la conexión entre los campos difusos y la función de Green, lo que implica la proporcionalidad entre la densidad de energía promedio de un campo difuso y la parte imaginaria de la función de Green en la fuente. Para poder expresar el cociente espectral  $H/V$  en superficie para ruido ambiental como la raíz cuadrada del cociente de las correspondientes partes imaginarias de las componentes del tensor de Green. Y el cociente  $H/V$  en superficie para sismos profundos de incidencia vertical como el cociente del módulo de las funciones de transferencia horizontales y verticales.

En el capítulo III se presentan los cocientes espectrales  $H/V$  obtenidos con la teoría de campos difusos para tres modelos propuestos y se comparan los resultados de la frecuencia fundamental con el método de Thomson-Haskell y con una formulación energética [7] para calcular el periodo fundamental establecida en el manual de diseño por sismos CFE 2008. Se comparan dos modelos obtenidos en estudios prácticos donde se calcula el  $H/V$  teórico de acuerdo al enfoque de la elipticidad de las ondas de Rayleigh con el  $H/V$  de campos difusos.

Finalmente, en el capítulo IV se presentan las conclusiones de este trabajo.

## Fundamentos teóricos

### 2.1. El cociente espectral $H/V$ de Nakamura

El daño provocado por un terremoto está relacionado con la amplificación de ondas sísmicas debido a efectos locales del suelo, el análisis de la respuesta de un sitio ante la incidencia de ondas es lo que se conoce como función de transferencia y es fundamental para la evaluación del peligro sísmico y para el establecimiento de estrategias de mitigación de riesgos sísmicos en las zonas propensas a sufrir un terremoto.

El tráfico, las industrias, el aire, el oleaje entre otros, son fuentes que provocan vibraciones en el suelo, a estas vibraciones se les conoce como ruido ambiental. Éste se clasifica de acuerdo a la fuente que los genera; si la fuente es de origen natural se le conoce como microsismo y el originado por la actividad humana se conoce como microtemores.

Se ha demostrado que los microtemores están compuestos en su mayoría por ondas superficiales [8], las cuales son las causantes de los daños producidos por los terremotos en las construcciones y por ello son de interés para la ingeniería.

Las ondas superficiales más importantes son: las ondas de Love y las de Rayleigh que se propagan en la superficie y sus amplitudes decaen con la profundidad. Las ondas Love se generan debido a la existencia de una capa sobre un semi-espacio y la frontera superior es el aire (superficie libre), y producen desplazamientos horizontales de corte en superficie. Las ondas de Rayleigh se generan debido a la frontera entre el semi-espacio y el aire, generan un movimiento elíptico retrógrado en el plano vertical del medio de propagación. Asimismo, el sentido de rotación de las partículas se invierte con la profundidad como se observa en la figura (2.1.1), hasta alcanzar puntos donde no se presenta movimiento, seguidos por oscilaciones correspondientes a modos superiores de las ondas de Rayleigh [9].

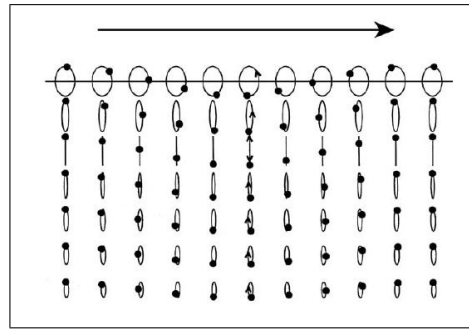


Figura 2.1.1: Movimiento de la partícula del modo fundamental de las ondas de Rayleigh en un semi-espacio, propagándose de izquierda a derecha. Se muestra una longitud de onda horizontal; los puntos están graficados en un tiempo fijo. El movimiento es retrógrado (opuesto a las manecillas del reloj) en la superficie, cambiando solamente a movimiento vertical a una profundidad de aproximadamente  $1/5$  de la longitud de onda, y llega a ser progrado (en dirección de las manecillas del reloj) a mayores profundidades. (Tomada de Shearer, 1999)

La técnica de Nakamura, propuesta por primera vez por Nogoshi y Igarashi [10], permite evaluar la frecuencia de resonancia del suelo con los registros de unos minutos de ruido ambiental con un sensor de tres componentes, el procesamiento es sencillo y consiste en dividir los espectros promedio de Fourier de las componentes horizontales de los desplazamientos entre la componente vertical de los desplazamientos [4].

Existen varias propuestas para la interpretación de las características del cociente  $H/V$ , las cuales dependen del tipo de ondas que generan el pico de  $H/V$ . Lo único en lo que están de acuerdo estas descripciones es que los microtemores están compuestos principalmente por ondas de Rayleigh. En las siguientes secciones se explicara cada enfoque.

### 2.1.1. Interpretación de Nogoshi: Enlace con las ondas superficiales

El cociente está relacionado con la elipticidad de las ondas de Rayleigh, debido a la predominancia de ondas de Rayleigh en la componente vertical, muchos autores (Nogoshi e Igarashi [10]; Konno y Ohmachi [11]) están de acuerdo con este argumento y con el argumento de que la elipticidad depende de la frecuencia y presenta un pico agudo alrededor de la frecuencia fundamental de los sitios que exhiben un alto contraste de impedancia entre los sedimentos superficiales y los más profundos.

El contraste de impedancias en promedio debe ser de 3 para que se observe el pico [8]. Este pico se relaciona con una singularidad de la componente vertical, correspondiente a una inversión del sentido de rotación de las ondas de Rayleigh de retrógrado en bajas frecuencias a trogrado en frecuencias intermedias, como se muestra en la siguiente figura:

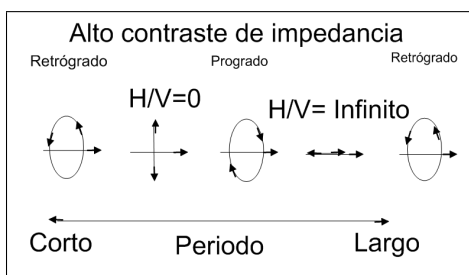


Figura 2.1.2: Movimiento de partícula del modo fundamental de las ondas de Rayleigh, para un modelo de una capa sobre un semi-espacio, el contraste de impedancia es alto. (Modificada a partir de Konno y Ohmachi , 1998)

Algunos autores creen que estos resultados son válidos para estructuras simples (una capa sobre un semi-espacio), pero el trabajo de Konno y Ohmachi [11] muestra las curvas de elipticidad de ondas de Rayleigh en suelos con perfiles de velocidad complejos, lo cual permite extender la validación para medios más complejos.

También se puede notar que la existencia de ondas de Love en el ruido sísmico no altera esta interpretación, ya que las ondas de Love no afectan la componente vertical. Por el contrario, la componente vertical es sensible a las ondas de cuerpo (ondas P y S) y esta interpretación no es válida si el campo de ondas de ruido incluye una parte significativa de ondas de cuerpo.

En muchos casos, las curvas de elipticidad  $H/V$  exhiben un pronunciado valle en frecuencias que son el doble de la frecuencia fundamental, que corresponde cuando se desvanece la componente horizontal (nueva inversión en el sentido de rotación de trogrado a retrógrado) este valle existe a pesar de que el contraste de impedancias sea bajo. Por lo tanto, un pico no tan evidente es seguido por un valle muy evidente, el cual puede ser usado para estimar la frecuencia fundamental.

Otra cuestión importante se refiere a la amplitud del pico  $H/V$  y su relación con la amplificación de ondas S. Estrictamente hablando, no puede existir ninguna correlación ya que el pico  $H/V$  es infinito en la frecuencia fundamental. Sin embargo, Konno y Ohmachi [11] argumentaron recientemente que, suavizando adecuadamente los espectros de H y V (antes de realizar el cociente  $H/V$ ), los valores resultantes para el pico del cociente espectral  $H/V$ , denominado  $R_b$ , están correlacionados con la amplitud de las ondas S,  $A_{H0}$ .

Otro paso que se requiere para relacionar la curva de elipticidad suavizada con la amplitud de la curva real obtenida  $A^{NHV}$  se refiere a la proporción de ondas Love y Rayleigh en el campo de ruido ambiental.

Sin embargo, cuando las ondas de Rayleigh y Love provienen de varias direcciones un análisis de elipticidad se vuelve muy complicado. A pesar de esto, se han implantado con éxito procedimientos para la inversión con base en la elipticidad de las ondas superficiales (Arai y Tokimatsu [12]).

### 2.1.2. Explicación de Nakamura: vínculo con las ondas de cuerpo

Algunos autores favorecen la hipótesis del predominio de ondas de cuerpo (ondas P y ondas S) alrededor del pico del  $H/V$  (Bonney-Claudet [13] y Nakamura [14]). Por ejemplo Nakamura se basa en la suposición de que el efecto de las ondas superficiales puede ser eliminado, de modo que el resultado final, está en

relación directa con las funciones de transferencia para las ondas S [4].

$$QTS = \frac{H_f(\omega)}{V_f(\omega)} \quad (2.1.1)$$

donde:

QTS= cuasi-espectro de transferencia,

$H_f(\omega)$ = Transformada de Fourier del movimiento horizontal en la superficie, y

$V_f(\omega)$ =Transformada de Fourier del movimiento vertical en la superficie.

Cabe aclarar que  $H_f(\omega)$  y  $V_f(\omega)$ , por si solos, no permiten identificar las frecuencias naturales del sitio porque también contienen las frecuencias dominantes de las fuentes que generaron las ondas.

Nakamura propone dos cocientes espectrales llamado  $T_h(\omega)$  y  $T_v(\omega)$ :

$$T_h(\omega) = \frac{H_f(\omega)}{H_b(\omega)} \quad T_v(\omega) = \frac{V_f(\omega)}{V_b(\omega)} \quad (2.1.2)$$

donde:

$T_h(\omega)$ = Función de transferencia entre los movimientos horizontales en la superficie y en la roca basal, y

$T_v(\omega)$ = Función de Transferencia entre los movimientos verticales en la superficie y en la roca basal.

Si se dispusiera de  $T_h(\omega)$ , se podría inferir las frecuencias naturales del sitio, pero el problema es que usualmente no se dispone de la misma, debido a la dificultad de obtener  $H_b(\omega)$ . Nakamura propone usar una función de la frecuencia que se define como el cociente entre las funciones de transferencias  $T_h(\omega)$  y  $T_v(\omega)$ :

$$T_h^*(\omega) = \frac{T_h(\omega)}{T_v(\omega)} = \frac{\frac{H_f(\omega)}{H_b(\omega)}}{\frac{V_f(\omega)}{V_b(\omega)}} = \frac{H_f(\omega)}{V_f(\omega)} \frac{1}{\frac{H_b(\omega)}{V_b(\omega)}} \quad (2.1.3)$$

Utilizando resultados de sus propias mediciones experimentales, Nakamura considera que el cociente  $H_b(\omega)$  y  $V_b(\omega)$  es aproximadamente 1. De esta manera se obtiene la expresión del cociente espectral  $H/V$  (2.1.1).

Muchos autores han concentrado su esfuerzo en estudiar y comparar los resultados obtenidos por la técnica del cociente espectral  $H/V$  y otras técnicas de uso más conocido y extendido, empleando tanto registros de movimiento fuerte como de microtemores. La mayoría concluye que el empleo de microtemores en la técnica del cociente  $H/V$  provee una buena estimación de la frecuencia fundamental del sitio, no así para el factor de amplificación, el cual suele ser inferior al obtenido a partir de registros de movimiento fuerte (Dravinski et al., 1996)).

Hoy en día los bajos presupuestos destinados a las investigaciones del sitio, hacen que la técnica  $H/V$  sea utilizada en muchos países debido a su confiabilidad y bajo costo. El problema es que esta técnica se ha desarrollado empíricamente, y se han realizado pocas investigaciones teóricas para conocer su fundamento físico, por lo tanto, es probable que la técnica  $H/V$  sea empleada de mal manera y conlleve a resultados erróneos.

Por ello, se creó SESAME ( Evaluación del efecto de sitio utilizando ruido, en ingles: Site Effects Assessment Using Ambient Excitations) un equipo de investigadores europeos encargados de analizar la técnica  $H/V$  con el fin de; (a) entender su fundamento físico, (b) evaluar su significado real en vista de la estimación del efecto de sitio, y (c) formulación de un reglamento y del software para el procesamiento



de datos para poder asegurar su uso correcto. Este amplio conjunto de investigaciones indica básicamente que las mediciones de ruido ambiental, si son procesadas y analizadas con cautela”, puede proporcionar información (aunque limitada) cualitativa y cuantitativa útil sobre las condiciones del lugar [15].

Lermo y Chávez-García [16] utilizaron registros de microtemores de tres ciudades en México con características geológicas y regímenes tectónicos diferentes: Oaxaca, Acapulco y la Ciudad de México. Aplicaron tres técnicas diferentes que sirven para evaluar la respuesta dinámica del suelo: cálculo del espectro de amplitudes, cocientes espectrales relativos a una estación ubicada en terreno firme y el cociente espectral de la componente horizontal del desplazamiento entre la componente vertical. Los resultados obtenidos fueron comparados con cocientes espectrales estándar de la parte intensa de las ondas S de registros de sismos obtenidos en el mismo sitio. Comparando estas técnicas, el mejor resultado lo presentó la técnica de Nakamura que permitió calcular la frecuencia fundamental del sitio.

## 2.2. Campos difusos

La luz que nos llega del sol en un día nublado sufre de dispersión múltiple cuando atraviesa las nubes y por ello, casi no generamos sombra. Esto también pasa en la calle y en la casa cuando hay varias fuentes de iluminación (focos) lo que genera varias sombras. Por lo tanto, cuando la luz llega de varias fuentes con distintas ubicaciones o cuando la luz no es directa, se genera una iluminación difusa porque esta llega de la pared, de los techos, de las reflexiones del suelo, de los muebles, de todos lados, entonces se dice que la luz que tiene múltiples interacciones por lo tanto es difusa. Por analogía, en la litosfera las múltiples heterogeneidades que existen hacen que los registros de los sismos no sean muy limpios y que lleguen, después de las ondas principales, ondas reflejadas, refractadas y difractadas de todos lados.

El concepto de campo difuso proviene de una aproximación estadística para ondas acústicas dentro de un cuarto acústico y se basa en tres restricciones básicas [17]:

1. El campo de ondas es un campo de ruido, es decir que las fases de las ondas son aleatorias.
2. Las ondas inciden de todas direcciones con igual intensidad, es decir, el campo de ondas es acimutalmente isotrópico.
3. La amplitud de las ondas es la misma en cualquier punto del dominio espacial, es decir, el campo de ondas es espacialmente homogéneo en escala local.

Weaver [18] estableció dos definiciones de campo difuso, la primera:

Un medio en vibración puede ser descrito en función de sus modos normales, para el caso de un campo difuso se dice que los modos normales del sistema son proporcionales a la cantidad de energía mecánica en el sistema, es decir, que la energía está equitativamente distribuida entre todos los modos normales.

La segunda definición es la más usual y establece que:

En cada punto de un medio en vibración, el campo difuso puede ser representado como una superposición isotrópica y aleatoria de ondas planas.

Cuando un movimiento sísmico es dominado por múltiples difracciones, las ondas difractadas muestrean al medio por el que se propaga con sus diversas trayectorias y sus densidades de energía adquieren un comportamiento de tipo difusivo, esto es, el campo se genera por una iluminación equiparticionada. La equipartición se logra por un conjunto de fuerzas aleatorias uniformemente distribuidas y se espera que el campo de ondas conste de las contribuciones de todos los modos posibles de propagación. Por ejemplo en el espacio completo (full space) los modos de propagación son ondas planas P y S

### 2.2.1. Equipartición

La equipartición es un principio en propagación de ondas y significa que en el espacio de fase la energía disponible se distribuye en proporciones fijas, entre todos los posibles “estados” (modos y ondas planas). Una proporción fija implica que la contribución relativa de ondas P y S a la energía total se estabiliza a un cociente de energías ( $E_S/E_P$ ) constante, el cual es independiente de los detalles particulares de difracción [19].

#### 2.2.1.1. Equipartición en el espacio infinito

Weaver [18] calculó este cociente para un medio homogéneo e infinito 3D utilizando un conteo de modos (ver Sánchez-Sesma y Campillo [20]) y es el siguiente:

$$\frac{E_S}{E_P} = 2 \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \quad (2.2.1)$$

Para un solido Poissoniano (materiales de la corteza), donde  $\alpha/\beta = \sqrt{3}$ , su cociente de energías es 10.4

Para el caso en que el medio es anelástico, Margerin, van Tiggelen y Campillo [21] demostraron que aún cuando exista absorción preferencial en uno de los modos (P o S), el cociente de energías se estabiliza en el régimen de difracción múltiple. Si uno de los modos es más absorbente que otro, entonces el cociente  $E_S/E_P$  tiene un nuevo valor, el cual está desplazado en favor del modo más absorbente.

Para un medio homogéneo e infinito en **2D** se realizan aproximaciones similares, en el caso de la aproximación por ondas planas, solo se considera una polarización de las ondas S y los cocientes quedan de la siguiente manera:

$$\frac{E_S}{E_P} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \quad (2.2.2)$$

La equipartición es una condición necesaria para recuperar la función de Green exacta a partir de las correlaciones del campo elástico. Si no existe un régimen equiparticionado la función de Green exacta no se recuperará, pero las correlaciones pueden proporcionar resultados valiosos de significado físico como la reconstrucción de arribos específicos.

La difusión de un campo se basa en la equipartición de energía, la cual se describe usualmente en términos de la polarización y dirección de las ondas. Pero existe otro punto de vista alternativo de la equipartición el cual asocia igualdad de energías con los modos de vibración. Estas dos aproximaciones son equivalentes y describen dos maneras en las que ocurre la equipartición. Perton *et al.* [22] evaluaron las

densidades de energía para ambos enfoques y encontraron que las densidades son las mismas.

En un espacio elástico completo 3D, las ondas longitudinales (onda P) y transversales (onda S) tienen densidades de energía en cantidades fijas y su suma es la misma si se considera el tipo de onda o los grados de libertad (direcciones).

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = E^P + E^{SV} + E^{SH} \quad (2.2.3)$$

Considerando los grados de libertad, cualquier dirección ortogonal  $i$  del espacio tridimensional tienen la misma densidad de energía promedio  $E_i$ , y es un tercio de la densidad de energía total.

### 2.2.1.2. Equipartición en un semi-espacio

Para el caso del semi-espacio, el teorema de equipartición también se puede expresar como en el caso del espacio completo como la suma de las densidades de energía considerando las direcciones o los tipos de onda, solamente se le agrega la densidad de energía debido a ondas de Rayleigh.

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = E^P + E^{SV} + E^{SH} + E^R \quad (2.2.4)$$

Debido a la aparición de las ondas superficiales se observan fluctuaciones de las densidades de energía cerca de la superficie. Este efecto prevalece solamente dentro de una profundidad de aproximadamente una longitud de onda Rayleigh.

Para ilustrar gráficamente estos resultados, en la figura 2.2.1 se presentan las densidades de energía para un sólido de Poisson ( $\lambda = \mu$ ) para cada tipo de onda incidente y su suma contra la profundidad normalizada  $x_3/\lambda_R$ , donde  $\lambda_R$  =longitud de onda de Rayleigh. En esta figura se observa que para un campo difuso las ondas Rayleigh y SH toman la mayor parte de la energía, mientras que las ondas P y SV pierden un poco de su energía cerca de la superficie. El efecto de la superficie libre tiende a desaparecer a una profundidad igual a la longitud de onda de las ondas Rayleigh.

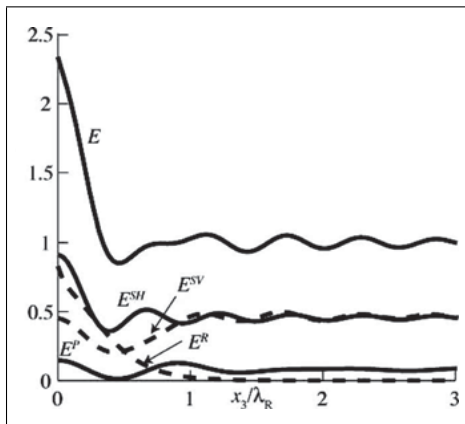


Figura 2.2.1: Densidades de energía para ondas P, SV, SH y Rayleigh contra la profundidad normalizada  $x_3/\lambda_R$  utilizando la ec. (2.2.4). (Tomada de Perton *et al.*, 2009)

En la figura 2.2.2 se muestran las densidades de energía que se asocian con las tres direcciones ortogonales, y su suma, contra la profundidad normalizada. Se ilustra el caso de un sólido de Poisson ( $\lambda = \mu$ ). En esta figura la curva  $E_2$  es igual a la curva  $E_1$ . En la superficie libre los valores de  $E_1$  y  $E_3$  son muy cercanos.

Mientras  $E_1$  y  $E_2$  tienen su máximo en la superficie,  $E_3$  tiene un pico a una profundidad de  $\lambda_R/6$ . Este resultado exhibe que en la superficie de un sólido poissoniano, el cociente de energías horizontal entre vertical es:

$$\frac{E_H}{E_V} = \frac{E_1 + E_2}{E_3} \approx 1.76 \quad (2.2.5)$$

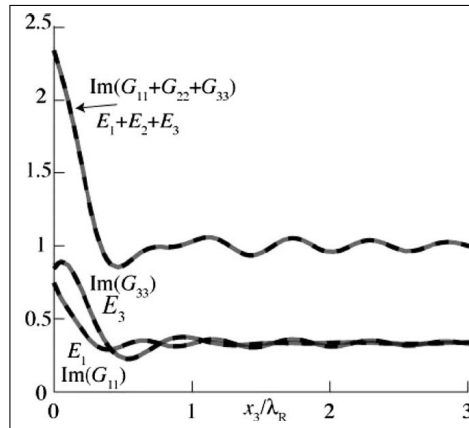


Figura 2.2.2: Densidades de energía para las tres direcciones ortogonales contra la profundidad normalizada. Las amplitudes están normalizadas en términos de la densidad de energía del espacio completo (full space). Las líneas grises son las partes imaginarias de la función de Green en la fuente (Tomada de Pertou *et al.* 2009)

Weaver [23] determinó las densidades de energía para los movimientos en la superficie libre y obtuvo factores de partición en términos de direcciones y tipo de ondas contra el coeficiente de Poisson ( $0 \leq \nu \leq 1/2$ ). Para fuerzas superficiales horizontales y verticales se expresa como:

$$\Pi_j^{HSS}(0, \omega) = \Pi_j^{FS}(\omega) x p_{j,W}^{HSS} \quad (2.2.6)$$

donde:

$p_{j,W}^{HSS}$  = coeficiente de partición en la superficie de un semi-espacio (half-space surface, HSS) para la dirección  $j$  y el tipo de onda  $W$  (ya sea P, SV, SH o Rayleigh).

La figura 2.2.3 muestra las particiones de energía.

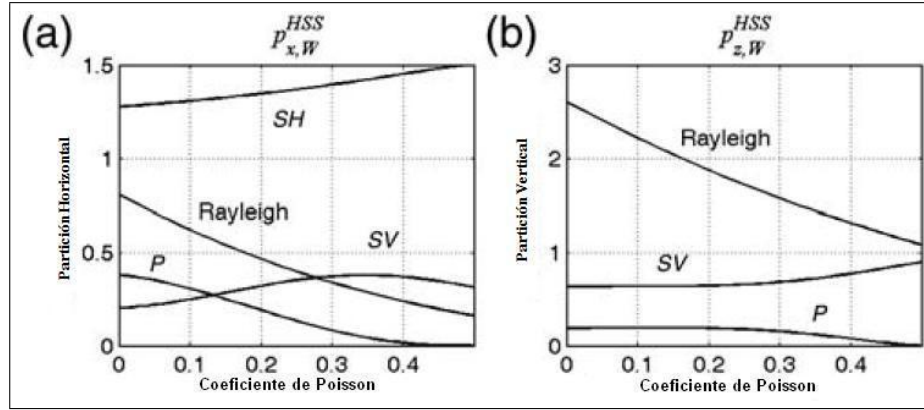


Figura 2.2.3: Coeficientes de partición para la dirección  $j$  ( $x$  o  $z$ ) y tipo de onda (P,SV,SH, o Rayleigh) contra el coeficiente de Poisson. En (a) particiones horizontales, en (b) particiones verticales.(Modificada a partir de Sánchez-Sesma *et al.* 2011)

De las curvas de la figura 2.2.3, para  $\nu = 1/4$ , la potencia asociada a una fuerza vertical es:

$$\Pi_z^{HSS}(0, \omega) = \Pi_1^{FS}(\omega) \times (p_{z,R}^{HSS} + p_{z,SV}^{HSS} + p_{z,P}^{HSS}) = \frac{\omega^2(1+R)}{24\pi\alpha^3} \times (1.71 + 0.66 + 0.20) = 1.209 \frac{\omega^2}{\pi\rho\alpha^3} \quad (2.2.7)$$

donde:

$$R = 2\alpha^3/\beta^3.$$

$\omega$  = frecuencia angular.

$\rho$  = densidad de masa y  $\alpha$  = velocidad de las ondas P.

Esta ecuación es la misma que obtuvieron en sus trabajos pioneros Miller y Pursey [24], ellos calcularon la potencia irradiada en forma de ondas P, S y superficiales cuando se aplica una fuerza vertical armónica en la superficie de un sólido isotrópico semi- infinito. Tal cantidad está particionada entre las diferentes ondas. Para ondas P le corresponde 6.89 %, 25.76 % de SV y 67.35 % de Rayleigh. Se observa que aproximadamente 2/3 de la energía que sale del punto de aplicación de la fuerza lo hace como ondas de Rayleigh.

Para este caso, la suma para cada dirección no es 1 como en el caso del espacio completo, si no excede esta cantidad debido a la presencia de la frontera libre. Para un sólido de Poisson ( $\nu = 1/4$ ) las particiones verticales son:  $1.71+0.66+0.20=2.57$  y las horizontales son:  $1.37+0.41+0.36+0.14=2.28$ . Estos valores se pueden observar en la figura 2.2.3. Para el caso de fuerza horizontal la energía se reparte de la siguiente manera: 18 % para las ondas Rayleigh, 60 % para las SH, 16 % para SV y 6 % para las ondas P. Su patron de irradiación espacial es complicado, pero la característica distintiva es que aproximadamente 2/3 partes de la energía que sale del punto de aplicación de la fuerza lo hace como ondas S.

Estos dos casos exhiben claramente el carácter distintivo de la energía radiada en  $\text{Im}G_{11}$  y  $\text{Im}G_{33}$  en la superficie. Se destaca que las densidades de energía en la superficie libre son independientes de la frecuencia.

Las ondas de cuerpo producidas por fuerzas horizontales pueden interactuar con las capas estratificadas; mientras que las ondas superficiales producidas por una fuerza vertical, en alta frecuencia son insensibles a las capas profundas. Estos hechos tienen alguna relación con la interpretación del cociente  $H/V$  de campos

difusos, pero esto se discutirá en el capítulo de cocientes espectrales.

### 2.2.2. Observación de equipartición

Hennino [25] realizaron un experimento para observar el fenómeno de equipartición en la coda de los sismos. Este consistió en un arreglo de cuatro receptores localizados en las esquinas de un arreglo cuadrangular de 50m de cada lado, fue establecido temporalmente cerca de la ciudad de Chilpancingo (México), se registraron sismos durante 3 meses con magnitudes de 4 y 5 con una distancia epicentral de aproximadamente 300 km. Seleccionaron 12 sismos que exhiben una coda pronunciada en la banda de frecuencias de 1-3 Hz. La figura 2.2.4 muestra un sismograma de un evento de magnitud 4.3 a una distancia de 35 Km. En el régimen de coda los cocientes  $S/P$ ,  $K/(S+P)$ ,  $I/(S+P)$  y  $H^2/V^2$  (donde  $K$  es la energía cinética,  $P$  y  $S$  son las densidades de energía de onda  $P$  y de onda  $S$ ,  $I$  es un término de interferencia) fluctúan al rededor de un valor constante hasta que el nivel señal-ruido es alcanzado.

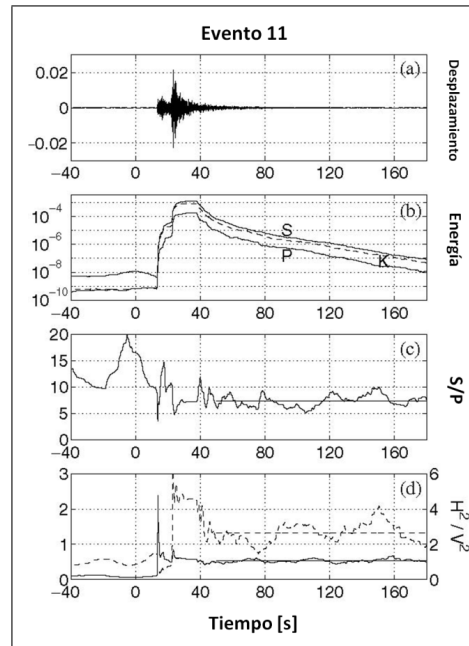


Figura 2.2.4: Sismogramas observados en la banda de 1 a 3 Hz. (a) Gráfica lineal del desplazamiento medido como función del tiempo. (b) Gráfica semilogarítmica de la densidad de energía, se hace distinción entre energía cinética (K), energía de ondas S y energía de ondas P. (c) Gráfica lineal del cociente de energía  $S/P$ . (d) Gráfica lineal de cocientes de energía  $K/(S+P)$  y  $H^2/V^2$ . Las líneas horizontales indican el tiempo promedio estimado. (Tomada de Hennino *et al.*, 2001)

Las líneas horizontales en las figuras 1c y 1d localizan el tiempo promedio. Se hace hincapié que en este régimen, la densidad de energía local decae 4 ordenes de magnitud. Los autores interpretan los cocientes de energía independientes del tiempo observados en la coda como una señal de equipartición.

Apesar de las grandes variaciones de magnitud y distancia de las fuentes, se demuestra que los cocientes de energía medidos son aproximadamente los mismos para todas las fuentes, además dependen de la

profundidad si se asume equipartición.

## 2.3. La Función de Green elastodinámica

### 2.3.1. Esfuerzos, Deformaciones y desplazamiento

Considerando un plano infinitesimal de orientación arbitraria dentro de un medio elástico y homogéneo. La orientación del plano puede ser especificado por su vector normal unitario,  $\mathbf{n}$ . La fuerza por unidad de área ejercida sobre un lado del plano en dirección de  $\mathbf{n}$  se le denomina **tracción** y se representa por el vector  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ . La parte de  $\mathbf{t}$  que es normal al plano se le denomina esfuerzo normal; mientras que la parte paralela se le denomina esfuerzo cortante.

El tensor de esfuerzo  $\sigma$ , en coordenadas cartesianas (figura 2.3.1), puede ser definido por las tracciones a través de los planos  $yz, xz$  y  $xy$ :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

El tensor de esfuerzos contiene solo seis elementos independientes, y son suficientes para describir completamente el estado de esfuerzo en un punto dado.

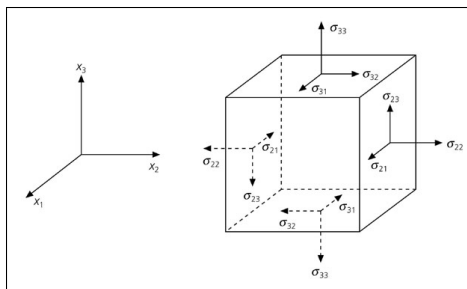


Figura 2.3.1: Componentes de esfuerzos sobre las caras de una partícula orientada a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  (Tomada de Stein, 2009)

El equilibrio en una frontera sujeta a tracciones o a fuerzas por unidad de área conduce a la ecuación de Cauchy  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$  la cual relaciona el tensor de esfuerzos en un punto con la tracción asociada a un vector normal dado, como se representa en la figura 2.3.2

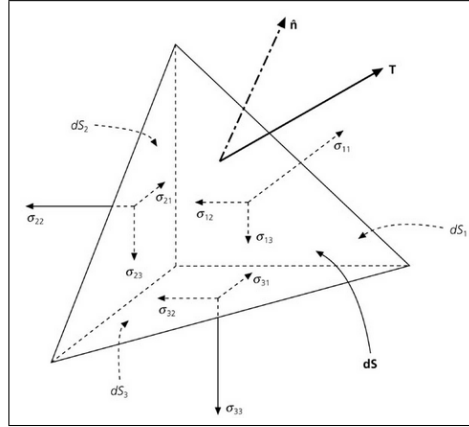


Figura 2.3.2: Vector tracción sobre un plano con normal  $n_j$  (Tomada de Stein, 2009)

El movimiento en el punto  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  permite obtener una descripción de primer orden si está dentro de una pequeña cercanía de  $\mathbf{x}$  y puede ser expresado en términos de los valores de  $\mathbf{x}$  por medio de:

$$u_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = u_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \quad (2.3.2a)$$

$$= u_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_k \quad (2.3.2b)$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_k \quad (2.3.2c)$$

El primer y tercer término de esta ecuación exhibe el movimiento en  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  como una composición de traslación y rotación de un cuerpo rígido, los cuales no producen deformación. El término medio es el que implica las deformaciones y es el producto del tensor de deformaciones de Cauchy,

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.3.3)$$

### Ecuación de movimiento

Asumiendo coordenadas cartesianas y estudiando el equilibrio dentro de un medio continuo se puede establecer de forma moderna la segunda ley de Newton por unidad de volumen utilizando tanto notación índice como derivadas parciales. Esto es posible gracias al concepto de tensor de esfuerzos desarrollado por Cauchy. Por lo tanto se expresa la segunda ley de Newton como:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t^2} \quad (2.3.4)$$

Donde:

$u_i(\mathbf{x}, t)$  = vector de desplazamiento en el punto  $\mathbf{x}$  (representado por  $x_j$ , con  $j= 1, 2$  y  $3$ )

$\sigma_{ji}(\mathbf{x}, t)$  = componentes del tensor esfuerzo (fuerza por unidad de área) sobre las caras de un cuerpo orientado a lo largo de los ejes  $j$  (ver figura 2.3.1).

$f_i$  = fuerzas de cuerpo por unidad de volumen.

$\rho$  = densidad de masa.



Y el término de la derecha es masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración.

Esta ecuación se le conoce como la ecuación de movimiento y se satisface en cualquier lugar dentro de un medio continuo. Como se observa esta ecuación expresa la segunda ley de Newton en términos de fuerzas superficiales y de cuerpo. La aceleración resulta de las fuerzas de cuerpo y de  $\sigma_{ji,j}$  (esta expresado en notación índice y es la divergencia del tensor de esfuerzos)

## Ley de Hooke

El comportamiento mecánico de un material continuo se define por la relación entre esfuerzo y deformación. Para un cuerpo elástico y lineal, esta relación esta dada por la ley de Hooke, la cual establece que las deformaciones  $\epsilon_{kl}$  son proporcionales a los esfuerzos  $\tau_{ij}$  en un punto. La formulación de Cauchy en forma de tensor es:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \quad (2.3.5)$$

Las propiedades elásticas aparecen en el tensor de cuarto orden  $C_{ijkl}$  y tiene 81 componentes, pero debido a la simetría de  $\sigma_{ij}$  y  $e_{kl}$  se tienen 36 componentes y para una elasticidad perfecta, existen una función energía-deformación y permite que  $C_{ijkl} = C_{klij}$  y el número de coeficientes es reducido a 21 constantes (Malvern [26]). El caso mas simple para las coeficientes corresponde a un medio isotrópico. Para este medio, todas las componentes de  $C_{ijkl}$  se pueden expresar por las constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ :

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (2.3.6)$$

### 2.3.2. Ecuación de Navier

Sustituyendo la ley de Hooke (ecuación (2.3.6)) en la ecuación de movimiento (ecuación (2.3.4)) y considerando la definición de deformación (ecuación (2.3.3)), se puede escribir la ecuación que gobierna el movimiento en un medio elástico:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.3.7)$$

Esta ecuación es muy difícil de resolver, es mas fácil expresar el campo de desplazamientos en términos de dos funciones,  $\phi$  y  $\psi$ , las cuales son conocidas como potenciales:

$$u(x, t) = \nabla\phi(x, t) + \nabla \times \psi(x, t) \quad (2.3.8)$$

El desplazamiento es la suma del gradiente de un campo escalar  $\phi(x, t)$  y el rotacional del potencial vectorial  $\psi(x, t)$ , ambos son función del tiempo y el espacio y se le conoce como descomposición de Helmholtz. Aun que esta descomposición parece compleja, en realidad aclara el problema, debido a que las identidades vectoriales:

$$\nabla \times (\nabla\phi(x, t)) = 0 \quad , \quad \nabla \cdot (\nabla \times \psi(x, t)) = 0 \quad (2.3.9)$$

separan el campo de desplazamiento en dos partes. La parte asociada con el potencial escalar cuyo rotacional vale cero, es decir, no hay rotación y da lugar a ondas compresionales (Ondas P). Por el contrario, la parte asociada con el potencial vectorial su divergencia es cero y por ello no hay cambio de volumen y

corresponde a las ondas de corte (ondas S). Sustituyendo los potenciales de la ecuación (2.5.3) en la ecuación de Navier (2.3.7), reagrupando terminos y usando (2.3.9) y utilizando la identidad vectorial:

$$\nabla^2 u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \times (\nabla \times u) \quad (2.3.10)$$

Cuyas soluciones de la ecuación correspondiente son:

Para el potencial escalar:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.3.11)$$

donde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.3.12)$$

es la velocidad de las ondas compresionales. Para el potencial vectorial:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.3.13)$$

donde:

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.3.14)$$

es la velocidad de las ondas de corte

Las ecuaciones de onda (2.3.11) y (2.3.13) son validas para medios homogéneos ya que fueron calculadas suponiendo nulas las derivadas de las constantes elásticas. Aunque estas ecuaciones se calcularon en coordenadas cartesianas, son validas para cualquier sistemas coordenado.

### 2.3.3. Ondas Planas y Transformada de Fourier

Considerando la representación de una función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.3.15)$$

donde  $F(\omega)$  = Transformada de Fourier de  $f(t)$  dada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.3.16)$$

La ecuación (2.3.15) exhibe una función arbitraria en términos de una superposición continua de senos y cosenos. Esta propiedad fundamental puede ser explotada prácticamente bajo el supuesto de que las señales son discretas y periódicas.

Como la variable  $t$  en la ecuación (2.3.15) es una variable nula se puede sustituir por el argumento de D'Alembert ( $t-s/c$ ). Por lo tanto, es posible escribir:

$$F(t-s/c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp(-i\omega(t-s/c)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp(i\omega s/c) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.3.17)$$

Se observa el argumento de D'Alembert en la exponencial compleja y la contribución de ondas planas es dada por la función de transferencia que multiplica la transformada de Fourier de la señal. Considerando la función de transferencia:

$$\exp(-i\omega s/c) = \exp[-i(\omega/c)\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}] = \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] \quad (2.3.18)$$

El cual representa una onda plana armónica propagándose en dirección del vector de onda  $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario ( $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ ). Es posible extender la idea de que el vector unitario  $\mathbf{n}$  tenga valores complejos y se tendrían ondas planas inhomogéneas.

Como un ejemplo del significativo poder de representación de ondas planas podemos expresar una onda esférica armónica como una superposición tanto de ondas planas homogéneas como de ondas planas inhomogéneas utilizando la integral de Weyl<sup>1</sup> (ver Aki y Richards [27]):

$$\frac{1}{R} \exp\left(-i\omega \frac{R}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\exp(-ik_x x - ik_y y - \gamma |z|)}{\gamma} dk_x dk_y \quad (2.3.19)$$

$\gamma = \sqrt{\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2}$  el signo se escoge de acuerdo a que  $\text{Re} \gamma > 0$  y  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Las ondas planas son bloques que nos permiten construir soluciones a los problemas del semi-espacio y de los medios estratificados. Por lo tanto, tienen un papel importante en Sismología.

#### 2.3.4. Función de Green

Las fuerzas internas de la ecuación de movimiento pueden ser utilizadas para representar los procesos que generan los terremotos. Un tipo de fuerzas de gran interés por su sencillez y utilidad en Sismología son las fuerzas impulsivas unidireccionales en el espacio y tiempo, que se puede expresar matemáticamente por medio de la Delta de Dirac :

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \xi)\delta(t)\delta_{ij} \quad (2.3.20)$$

Esta fuerza es aplicada en un punto de coordenadas  $\xi$  y tiempo  $t$ . Su orientación esta dada por sus tres componentes representadas por el subíndice  $j$ . Si sustituimos esta fuerza en la ecuación de movimiento (2.3.4) su solución son los desplazamientos elásticos para cada punto de coordenadas  $\mathbf{x}$  y para cada instante  $t$  en un cierto volumen  $V$  rodeado por una superficie  $S$ .

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G_{kj}}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \rho \frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{x} - \xi)\delta(t - \tau)\delta_{ij} \quad (2.3.21)$$

La solución de esta ecuación representa el desplazamiento debido a una fuerza impulsiva unitaria en espacio y tiempo. Por esta razón el tensor  $G$  es llamado función de Green de la elastodinámica o la respuesta de un medio a una excitación impulsiva. La forma de esta función dependen de las características del medio, sus coeficientes elásticos y su densidad. Para cada medio existe una función de Green diferente que define como reacciona el medio mecánicamente a una fuerza impulsiva y por lo tanto es una propiedad característica de cada medio.

En un medio finito, homogéneo, isotrópico y elástico Stokes encontró la solución analítica a mediados del siglo XIX y 50 años después Lamb [28] encontró la solución para fuerza vertical en la superficie de un semi-espacio. La solución para fuerza horizontal fue desarrollada por Chao [29].

<sup>1</sup>Esta integral utiliza como base las ondas planas y las suma para dar la solución de una fuente puntual

G. G. Stokes (1849) obtuvo la solución exacta para el campo de desplazamientos debido a una fuerza dentro de un medio elástico infinito. Sin saberlo, el había concebido el primer modelo matemático de un sismo. La solución se puede expresar de la siguiente manera:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \xi; t) = \frac{1}{4\pi\mu r} \{f_1 \gamma_i \gamma_j + f_2 (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j)\} \quad (2.3.22)$$

donde:

$$r = |\mathbf{x} - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

$\gamma_j = (x_j - \xi_j)/r$  es el vector unitario de  $\xi$  a  $\mathbf{x}$

Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  están dadas por:

$$f_1(r, t) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \delta(t - r/\alpha) + 2\beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - r\kappa) \kappa d\kappa \quad (2.3.23)$$

$$f_2(r, t) = \delta(t - r/\beta) - \beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - r\kappa) \kappa d\kappa \quad (2.3.24)$$

Como se observa en (2.3.22) tiene un decaimiento de  $1/r$  y está modulada por senos y cosenos. Es notable que el pulso longitudinal de la onda P tiene la misma dependencia del tiempo que la fuente seguido por un pulso transversal de mucho mayor amplitud. Entre los arribos principales P y S se encuentra un disturbio que decae más rápidamente lejos de la fuente.

Para el caso estático donde  $\omega = 0$ , los valores de las funciones son  $f_1 = 1$  y  $f_2 = (1 + \beta^2/\alpha^2)/2$  que corresponden a la solución de Kelvin para una fuerza unitaria en el espacio infinito (full space).

La solución de Stokes para el espacio infinito se utiliza frecuentemente en la formulación del BEM o IBEM. Los métodos de Fourier para medios estratificados permiten formular los problemas en forma integral. Para obtener los campos de desplazamiento y de esfuerzos se requiere una adecuada discretización. Un compendio notable de soluciones fundamentales se encuentran en Kausel [30].

### 2.3.5. Función de Green para una fuerza horizontal

Para la aplicación de una fuerza horizontal en dirección  $x_1$ , el valor de coseno director  $\gamma_1 = 1$ , los cosenos  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  son cero. De la ecuación (2.3.22) se tiene:

$$G_{11}(\mathbf{x}, \xi; t) = \frac{1}{4\pi\mu r} \{f_1 \gamma_1 \gamma_1 + f_2 (\delta_{11} - \gamma_1 \gamma_1)\} = \frac{f_1}{4\pi\mu r} \quad (2.3.25)$$

Aplicando transformada de Fourier a  $f_1$  nos queda:

$$f_1(r, \omega) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \exp(-i\omega r/\alpha) + 2\beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \exp(-i\omega r\kappa) \kappa d\kappa \quad (2.3.26)$$

Considerando  $Im[f_1]$  se aplica el límite cuando  $r \rightarrow 0$  y sustituyendo en (2.3.25)

$$Im[G_{11}(0, 0; \omega)] = \frac{-\omega}{12\pi\rho\alpha^3} \left[ 1 + 2\frac{\alpha^3}{\beta^3} \right] \quad (2.3.27)$$

Se observa el cociente de energías  $E_S/E_P = 2\alpha^3/\beta^3$  obtenido por el principio de equipartición.

## 2.4. Recuperación de la Función de Green a partir de correlaciones de un campo difuso

Se demuestra que la transformada de Fourier del promedio de las correlaciones cruzadas de los desplazamientos entre dos puntos es proporcional a la parte imaginaria de la función de Green entre esos puntos, demostrando que los cocientes de energía son:  $E_s/E_p = (\alpha/\beta)^2$  para el caso en dos dimensiones y  $2(\alpha/\beta)^3$  para tres dimensiones.

La reconstrucción de la función de Green se basa en dos diferentes aproximaciones. La primera consiste en promediar un gran número de fuentes (con 5000 fuentes se tiene una excelente aproximación), esta aproximación es independiente del régimen de propagación pero las fuentes deben estar distribuidas de manera homogénea y no se requiere que exista difracción. Segunda, la reconstrucción se realiza en un campo difuso, donde se lleva a cabo la difracción múltiple y el campo de ondas resultante será equiparticionado e incluso solamente se necesita una fuente.

Es notable observar que la relación existente entre las correlaciones de registros de ruido y la función de Green (respuesta del sistema al aplicar una fuerza externa) fue formulada originalmente para el ruido térmico. Derode *et al.* [31] y Larose *et al.* [32] mostraron la importancia de la difracción múltiple en la mejora de la eficiencia de la reconstrucción de la función de Green con un número limitado de fuentes y registros de duración finita, en condiciones parecidas a la sismología.

Aplicaciones de campos producidos por fuentes determinísticas tales como sismos se han desarrollado para recuperar la función de Green. Campillo y Paul [33] reconstruyeron la parte de ondas superficiales de la Función de Green entre tres pares de estaciones en México y Paul *et al.* [34] usaron datos de un arreglo temporal en Alaska utilizando registros de 100 sismos y haciendo correlaciones entre pares de estaciones.

Para el caso en el cual se utilizan registros de ruido para recuperar la función de Green, Shapiro *et al.* [35] presentaron el primer ejemplo del uso del ruido ambiental para estimar y representar las variaciones de velocidad de grupo de las ondas Rayleigh, usaron registros continuos de ruido en 62 estaciones de banda ancha en California durante un mes y realizaron correlaciones cruzadas entre todos los pares de estaciones.

### 2.4.1. Caso escalar 2D

En un medio homogéneo y elástico con incidencia de ondas SH. La propagación se da en el plano  $x_1 - x_3$ . El desplazamiento es perpendicular a este plano y es  $v(x,t)$  y satisface la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.4.1)$$

Una onda plana armónica y homogénea se escribe como:

$$v(\mathbf{x}, \omega, t) = F(\omega, \psi) \exp(-ikx_j n_j) \exp(i\omega t) \quad (2.4.2)$$

donde:

$k = \omega/\beta =$  número de onda S,

$F(\omega, \psi) =$  Forma de onda compleja,

$(x_1, x_3) =$  coordenadas cartesianas.

En coordenadas polares:

$$x_1 = r \cos \theta = r \gamma_1$$

$$x_3 = r \sin \theta = r \gamma_3$$

$n_j$  = cosenos directores tal que,  $n_1 = \cos \psi$  y  $n_3 = \sin \psi$  que definen la propagación de las ondas.

Considerando la correlación del movimiento descrito en (2.4.2), evaluando en posiciones  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , respectivamente. Por simplicidad se asume  $\mathbf{y}$  en el origen. Para que el producto escalar  $n_j x_j = n_j \gamma_j = r \cos[\psi - \theta]$ . Se puede escribir.

$$v(\mathbf{y}, \omega) v^*(\mathbf{x}, \omega) = F(\omega, \psi) F^*(\omega, \psi) \exp(ikr \cos[\psi - \theta]) \quad (2.4.3)$$

El factor  $\exp(i\omega t)$  sera omitido en los futuros cálculos. Si se asume un campo isotrópico en el cual las ondas se propagan hacia adelante y hacia atrás en direcciones dadas por  $\psi$  tal que su densidad espectral promedio es  $F(\omega, \psi) F^*(\omega, \psi) = |F(\omega)|^2$ , aproximadamente independiente de  $\psi$ , entonces el promedio azimutal sobre  $\psi$  nos lleva a:

$$\langle v(\mathbf{y}, \omega) v^*(\mathbf{x}, \omega) \rangle = |F(\omega)|^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ikr \cos[\psi - \theta]) d\psi = |F(\omega)|^2 J_0(kr) \quad (2.4.4)$$

donde:

$J_0(kr)$  = función de Bessel de orden cero y primera especie de argumento  $kr$ .

Este resultado es derivado de la expansión de Neumann para la exponencial compleja.

$$\exp(ikr \cos[\psi - \theta]) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n[\psi - \theta] \quad (2.4.5)$$

donde:

$\epsilon_n$  = factor de Neumann (es 1 si  $n=0, 2$  para  $n > 0$ ).

El resultado de la ecuación (2.4.4) fue obtenido por Aki [36] de su estudio de microtremores. Esta es la base del método de autocorrelación espacial (SPAC).

Considerando la función de Green en el dominio de la frecuencia

$$G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) = \frac{1}{4i\mu} [J_0(kr) - iY_0(kr)] \quad (2.4.6)$$

donde:

$Y_0(kr)$  = función de Neumann de orden cero,

$\mu$  = modulo de cortante

De las ecuaciones (2.4.4) y (2.4.6) es claro que  $J_0(kr)$  es proporcional a la parte imaginaria de la función de Green. De hecho, si  $E_{SH} = \rho \omega^2 |F(\omega)| / 2$  es la densidad de energía para ondas SH, se puede escribir:

$$\langle v(\mathbf{y}, \omega) v^*(\mathbf{x}, \omega) \rangle = \frac{2}{\rho \omega^2} E_{SH} J_0(kr) = \frac{-8E_{SH}}{k^2} \text{Im}[G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)] \quad (2.4.7)$$

Es conveniente establecer que  $J_0(kr)$  contiene toda la información de la función de Green.

Tomando la transformada inversa de Fourier de (2.4.6), se tiene:

$$G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) \exp(i\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{H(t - r/\beta)}{\sqrt{t^2 - r^2/\beta^2}} \quad (2.4.8)$$

donde:

H = función escalón unitario de Heaviside .

**Transformada de Fourier de la función de Green.**

$$G_{22}(x, y; \omega) = \frac{-1}{4\mu} [Y_0(kr) + iJ_0(kr)] \quad (2.4.9)$$

$$G_{22}(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{22}(x, y; \omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.4.10)$$

Sustituyendo (2.4.9) en (2.4.10), separando las integrales y considerando que  $-J_0(kr)$  es una función impar y  $-Y_0(kr)$  es una función par se tiene:

$$G_{22}(x, y; t) = \frac{-2}{8\pi\mu} \int_0^{\infty} Y_0(kr) \cos(\omega t) d\omega - \frac{-2(i)^2}{8\pi\mu} \int_0^{\infty} J_0(kr) \sin(\omega t) d\omega \quad (2.4.11)$$

$$G_{22}(x, y; t) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ - \int_0^{\infty} Y_0(kr) \cos(\omega t) d\omega + \int_0^{\infty} J_0(kr) \sin(\omega t) d\omega \right] \quad (2.4.12)$$

Utilizando la integral de Weber-Schafheitlin (ver Abramowitz y Stegun [37], pag: 487) se obtiene:

$$= \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{H(|t| - r/\beta)}{\sqrt{t^2 - r^2/\beta}} + \operatorname{sgn} \frac{H(|t| - r/\beta)}{\sqrt{t^2 - r^2/\beta^2}} \right] \quad (2.4.13)$$

donde:

$\operatorname{sgn}(x)$  es la función signo y toma valores de 1, -1 y 0.

La transformada inversa de Fourier de la parte real de  $G_{22}$  nos da una función real no causal par y la parte imaginaria de  $G_{22}$  nos da una función real no causal impar. Por ello para tiempos negativos se cancelan ambas funciones y para tiempo positivos contribuyen de la misma manera. De esta manera la función de Green es causal.

**2.4.1.1. Relación de la función de Green con la Densidad de energía**

La densidad de energía en el punto  $x$  se puede obtener reescribiendo la ecuación (2.4.7) asumiendo que  $x=y$ :

$$E(x) = \rho\omega^2 \langle v_m(\mathbf{x}) v_m^*(\mathbf{x}) \rangle = -4\mu E_s \operatorname{Im}[G_{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega)] \quad (2.4.14)$$

donde:

$E_s$  = promedio de la densidad de energía de ondas de corte, la cual es una medida de la potencia de la iluminación del campo difuso. La densidad de energía total en un punto es proporcional a la parte imaginaria de la función de Green para receptor coincidente con la fuente.

**2.4.2. Caso vectorial 3D**

Ahora se consideraran ondas P, SV y SH en un medio homogéneo elástico e isotrópico. La propagación se lleva a cabo en tres dimensiones y el desplazamiento  $u_i(\mathbf{x}, t)$  donde  $i= 1, 2, 3$ , satisface la ecuación de Navier:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.4.15)$$

tanto  $i$  como  $j$  toman los valores de 1,2 y 3.

De Sánchez-Sesma y Luzón [38] el tensor de Green está dado por:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) = \frac{1}{4\pi\mu r} = [f_2\delta_{ij} + (f_1 - f_2)\gamma_i\gamma_j] \quad (2.4.16)$$

Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  se expresan en términos de funciones de Hankel de segundo tipo. Considerando la propagación de ondas P, SV y SH y asumiendo que el campo está compuesto de ondas planas homogéneas y armónicas:

$$u_i(\mathbf{x}, \omega, t) = P(\omega, \theta_0, \varphi_0)n_i \exp(-iqx_j n_j) + S_v(\omega, \theta_1, \varphi_1)m'_i \exp(-ikx_j m_j) + S_H(\omega, \theta_2, \varphi_2)h'_i \exp(-ikx_j h_j) \quad (2.4.17)$$

donde:

$$K = \omega/\beta \text{ y } q = \omega/\alpha$$

$P$ ,  $S_v$  y  $S_H$  = formas de onda complejas,

$n_j$ ,  $m_j$ ,  $h_j$  = cosenos directores.

Se realizan las correlaciones cruzadas y el promedio azimutal como en el caso 2D, teniendo en cuenta que las densidades espectrales  $P^2$ ,  $S_v^2$  y  $S_H^2$  son independientes del ángulo de propagación. Asumiendo que las densidades espectrales satisface la relación  $P^2\alpha^3 = S_v^2\beta^3 = S_H^2\beta^3$ , lo cual expresa que, en promedio, el cociente de energía de ondas S a P esta dado por el cociente de equipartición para campos elásticos difusos 3D  $E_s/E_p = 2\alpha^3/\beta^3$ . Donde  $E_s = \rho\omega^2 S^2/2$ , con  $S^2 = S_v^2 + S_H^2$ . De Sánchez-Sesma y Campillo [20] se obtiene:

$$\langle u_i(\mathbf{y}, \omega)u_j^*(\mathbf{x}, \omega) \rangle = \frac{-4\pi E_s}{k^3} \text{Im}[G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)] \quad (2.4.18)$$

donde:

$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  = el desplazamiento en el punto  $\mathbf{x}$  en dirección  $i$  producido por una fuerza armónica, puntual y unitaria que actúa en el punto  $\mathbf{y}$  en dirección  $j$ ,  $k = \omega/\beta$  = número de onda S,

$E_s = \rho\omega^2 S^2$  densidad de energía promedio de las ondas S y es una medida de la fuerza de la iluminación difusa,

$S^2$  = densidad espectral promedio de las ondas S,

los paréntesis  $\langle \rangle$  indican promedio y el asterisco  $*$  indica el complejo conjugado.

La ecuación (2.4.18) es la consecuencia analítica de un teorema de representación de tipo correlación, también se asume que existe la equipartición de energía y el uso de las propiedades de las ondas S o de las ondas P es arbitraria.

Debido a que tanto la correlación promedio azimutal, como la función de Green son tensores, esta igualdad sigue siendo válida para cualquier sistema de referencia. Por lo tanto, la ecuación (2.4.18) es válida para cualquier  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ .

Sin equipartición,  $P^2\alpha^2 \neq S_v^2\beta^2 \neq S_H^2\beta^2$ , no se podría reconstruir de manera exacta la función de Green



### 2.4.2.1. Relación de la función de Green con la Densidad de energía

La densidad de energía en el punto  $x$  se puede obtener reescribiendo la ecuación (2.4.18) asumiendo que  $x=y$ :

$$E(x) = \rho\omega^2 \langle u_m(\mathbf{x})u_m^*(\mathbf{x}) \rangle = \frac{-4\pi\mu E_s}{k} \text{Im}[G_{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega)] \quad (2.4.19)$$

donde:  $\rho\beta^2 = \mu$ .

Esta ecuación muestra la relación fundamental entre la densidad de energía y la parte imaginaria de la función de Green cuando fuente y receptor coinciden. La parte imaginaria representa la potencia inyectada por una fuerza armónica unitaria en un punto dado. Esta cantidad detecta energías que son tanto radiadas por la fuente, como las que regresan a esta. Se puede reemplazar  $E(x)$  por  $E_m(x)$ , que corresponde a la densidad de energía asociada con una dirección  $m$  dada (Pertou *et al* [22]). Entonces se puede considerar que las densidades de energía direccional muestran la proporcionalidad entre las autocorrelaciones promedio y la parte imaginaria de la función de Green en un dirección específica.

En los casos prácticos no se tienen expresiones explícitas para la parte imaginaria de la función de Green, en cambio, se tienen datos. Si los datos muestran estabilidad y el promedio converge es muy probable que los datos converjan a la parte imaginaria de la función de Green.

De las ecuaciones (2.4.14) y (2.4.19) se propone normalizar las autocorrelaciones, de tal manera que el promedio de cada ventana de tiempo contenga la misma energía en la banda de frecuencias seleccionada. Por lo tanto, salvo por la multiplicación de una constante, la autocorrelación normalizada en el dominio de la frecuencia puede revelar las frecuencias de resonancia, los patrones de amplificación y los sismogramas de pseudo-reflexión que pueden dar pistas para descubrir la geometría o propiedades del medio.

## 2.5. Cocientes Espectrales

El uso de cocientes espectrales  $H/V$  de los sismos, así como de los microtemores, ha sido discutido durante mucho tiempo. Bard [8] proporcionó una amplia revisión de estudios sobre microtemores, comenzando por los estudios observacionales de Kanai y su grupo en Japón a principios de 1950. De hecho, el cociente  $H/V$  ha sido sujeto a innumerables estudios para conocer sus beneficios y limitaciones ([4]; [16]; [?]; [12]; [39]).

Para el caso de los sismos la técnica de cocientes espectrales  $H/V$  se estableció por primera vez para las onda P a distancias telesísmicas [40] como cociente espectral de la componente radial entre la vertical ( $R/V$ ), en 1980 esta técnica se expandió al dominio del tiempo (respuesta impulsiva), conocido como el método de función receptor. Estos desarrollos son aplicados principalmente para ondas P y S de periodo largo de los movimientos sísmicos a distancias telesísmicas.

Es común caracterizar los efectos de sitio por medio de relaciones espectrales de los movimientos registrados con respecto a un sitio de referencia en roca. Estas relaciones son llamadas funciones de transferencia empíricas (FTE) y en sitios donde existe actividad sísmica se pueden obtener fácilmente. Por otra parte, para zonas más tranquilas el ruido sísmico puede proporcionar información útil.

### 2.5.1. Cociente espectral H/V para ruido ambiental

Desde 1957, Keiiti Aki propuso el uso de ruido para reconstruir las propiedades de la propagación del subsuelo y en 1968 Claerbout también sugirió el uso de ruido para reconstruir el perfil de reflectividad.

Las ondas que componen el ruido se distribuyen aleatoriamente debido a la difracción producida por las heterogeneidades de la tierra, por ello, se espera que se lleve a cabo la equipartición.

En dominios de frecuencias bajas ( $f < 0,3$  Hz) el ruido ambiental es dominado por la interacción del océano con la tierra sólida [41]. En altas frecuencias, el ruido es producido tanto por la actividad humana, como por el viento y, debido a la atenuación, no se puede propagar a largas distancias. En cualquier caso el ruido se produce por fuentes superficiales las cuales generan predominantemente ondas superficiales. Por lo tanto se espera que las señales que son extraídas de los registros de ruido contengan principalmente ondas superficiales.

A pesar de que las fuentes de ruido se ubican en la superficie y la difracción ocurre debido a la fuerte heterogeneidad de las capas superficiales y a la topografía, el resultado es el acoplamiento entre las ondas superficiales y las ondas de cuerpo. La eficiencia de este proceso en la tierra se ilustra mediante la observación de equipartición entre los diferentes modos de las ondas superficiales y de cuerpo.

Se asume que el ruido es un campo difuso que contiene todo tipo de onda elásticas [6]. Esto permite relacionar los campos difusos con la función de Green (Sánchez-Sesma y Campillo [20], Campillo y Paul [33]), lo cual implica la proporcionalidad entre la densidad de energía media de un campo difuso y la parte imaginaria de la función de Green en la fuente. La hipótesis de que el ruido es un campo difuso no está en conflicto con la naturaleza de la función de Green en 3D (implica que la fuerza y los puntos de observación deben estar en el mismo punto sobre la superficie).

Arai y Tokimatsu [12] expresan el cociente espectral de ruido  $H/V$  como:

$$\frac{H}{V}(\omega) = \sqrt{\frac{E_1(\mathbf{x}, \omega) + E_2(\mathbf{x}, \omega)}{E_3(\mathbf{x}, \omega)}} \quad (2.5.1)$$

Donde:

Las  $E$ 's son las densidades de energía direccional (DED).

1 y 2 son las direcciones horizontales y 3 la dirección vertical.

Expresando el  $H/V$  en términos de las DED's de un campo difuso, las cuales son proporcionales a las partes imaginarias de la función de Green en la fuente. Considerando las ecuaciones (2.4.19) y (2.5.1), se puede escribir:

$$\frac{H}{V}(\omega) = \sqrt{\frac{Im[G_{11}(\mathbf{x}, \omega)] + Im[G_{22}(\mathbf{x}, \omega)]}{Im[G_{33}(\mathbf{x}, \omega)]}} \quad (2.5.2)$$

Esta ecuación relaciona la medidas promedio expresadas a la izquierda (obtenidas en la práctica) con la parte imaginaria de la función de Green, la cual es una propiedad intrínseca del medio, y naturalmente permite la inversión del cociente de Nakamura  $H/V$ , considerando la contribución de las ondas superficiales y las de cuerpo.

### 2.5.1.1. Modelado 3D de ruido

Para obtener las funciones de Green se utiliza un método basado en potenciales, el cual resuelve el caso de un conjunto de  $N$  estratos elásticos paralelos, con espesor  $h_j$  sobre un semi-espacio. Como se observa en la figura 2.5.1:

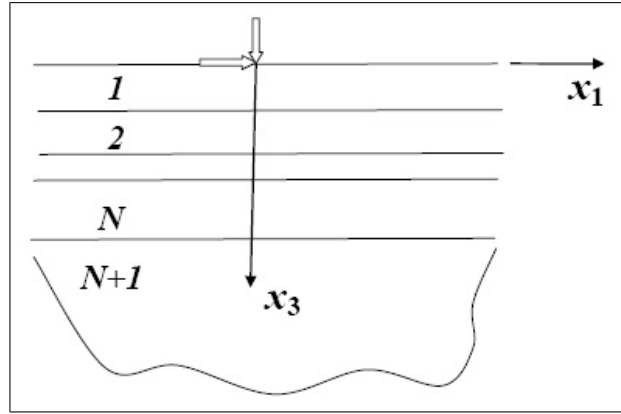


Figura 2.5.1: Conjunto de N capas elásticas paralelas en 3D sobre un semi-espacio. Se muestran las cargas unitarias superficiales (Tomada de Sánchez-Sesma *et al.*, 2011)

Para la resolución del problema se debe considerar que en las interfaces hay continuidad de desplazamientos y tracciones y condiciones de frontera libre para las tracciones en la superficie. En la superficie se aplican fuerzas unitarias y concentradas en dirección vertical y horizontal, la fuerza vertical producirá ondas P-SV y de acuerdo con Aki y Richards [27] los potenciales respectivos  $\phi(r, z)$  (onda P) y  $\psi(r, z)$  (onda SV) son soluciones de las ecuaciones de onda reducida:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{\beta^2} \psi = 0 \quad (2.5.3)$$

Los potenciales que resuelven las ecuaciones (2.5.3) son:

$$\phi(r, z) = A_1 \exp[i\gamma(z - z_{j+1})] + A_2 \exp[-i\gamma(z - z_j)] J_0(kr) \quad (2.5.4)$$

$$\psi(r, z) = B_1 \exp[i\nu(z - z_{j+1})] + B_2 \exp[-i\nu(z - z_j)] J_0(kr) \quad (2.5.5)$$

Con estos potenciales se puede obtener los desplazamientos radiales y verticales, así como los esfuerzos cortantes y normales. Para mayor detalle, los cálculos se encuentran realizados en Sánchez-Sesma *et al* [6]. La parte imaginaria de la función de Green para fuerza horizontal es:

$$\begin{aligned} \text{Im}[G_{11}(0, 0; \omega)] = \text{Im} \left\{ \int_0^\infty [A_1 \exp(-i\gamma_1 h_1) + A_2 + B_1 \nu_1 i \exp(-i\nu_1 h_1) - B_2 \nu_1 i] \frac{k}{2} dk \right. \\ \left. + \int_0^\infty [C_1 \exp(-i\nu_1 h_1) + C_2] \frac{k}{2} dk \right\} \quad (2.5.6) \end{aligned}$$

La parte imaginaria de la función de Green para fuerza vertical es:

$$\text{Im}[G_{33}(0, 0; \omega)] = \text{Im} \left\{ \int_0^\infty [i\gamma A_1 \exp(-i\gamma h_1) - i\gamma A_2 + k^2 B_1 \exp(-i\nu h_1) + k^2 B_2] k dk \right\} \quad (2.5.7)$$

Los coeficientes  $A_1, A_2, B_1$  y  $B_2$  corresponden a las ondas ascendentes y descendentes, para saber su valor, se requiere resolver un sistema de ecuaciones del tipo:  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  donde  $\mathbf{A}$  es un sistema de ecuaciones lineales de  $(4N+2) \times (4N+2)$  y  $N$  es el número de estratos. El vector de términos independientes  $\mathbf{b}$  sólo tiene un término distinto de cero en la primera componente:

$$\mathbf{b} = [-k/2\pi\mu, 0, \dots, 0]^T \quad (2.5.8)$$

El vector de coeficientes desconocido es:

$$\mathbf{x} = [A_2, ikB_2, A_1, ikB_1, \dots, A_{2N+2}, ikB_{2N+2}]^T \quad (2.5.9)$$

Una vez que la solución es conocida, se pueden calcular las integrales en el dominio del número de onda radial.

### 2.5.2. Cociente espectral $H/V$ para sismos

Las ondas superficiales pueden contener la mayoría de los efectos de las heterogeneidades laterales, por lo tanto tienen una naturaleza tridimensional. Excluyendo estas ondas, se puede forzar para que la propagación de las ondas este descrito por una sola dimensión. Esto se logra considerando que las fuentes están tan profundas que no se generan ondas superficiales. Las densidades espectrales de los movimientos sísmicos se asumen que son dependientes de la profundidad. Así las autocorrelaciones se pueden relacionar, a través del formalismo de campos difusos, con la parte imaginaria de la función de Green 1D para fuente y receptor en el mismo punto.

Para un medio estratificado 1D Claerbout [42] descubrió que el sismograma de reflexión de una fuente y receptor en superficie es un lado de la autocorrelación del sismograma de fuente a profundidad. Una extensión del resultado de Claerbout es el hallazgo de que la parte imaginaria de la función de Green en 1D en la superficie para fuente en la superficie es proporcional al cuadrado de la función de transferencia para onda de cuerpo de incidencia vertical proveniente del semi-espacio.

$$\text{Im}[G(0, 0; \omega)] = \frac{|TF(\omega)|^2}{(4\rho_h c_h \omega)} \quad (2.5.10)$$

donde:

$\rho$  y  $c$  = densidad y la velocidad del semi-espacio.

Para el caso elástico 3D se sustituye la  $c$  con  $\alpha$  o  $\beta$  para el caso de ondas P o S. El desplazamiento sera vertical u horizontal dependiendo cada caso. Este resultado esta implícito en los desarrollos de Claerbout (1968). Pero para el caso de campos difusos, la importancia radica en la relación que existe entre la parte imaginaria de la función de Green 1D en la superficie y la función de transferencia de ondas provenientes del semi-espacio. Este resultado (2.5.10) también es valido para un apilamiento de capas.

Se considera que la mayoría de los sismos están compuestos por ondas de cuerpo, las cuales sufren múltiples reflexiones y refracciones como se muestra en la figura 2.5.2.

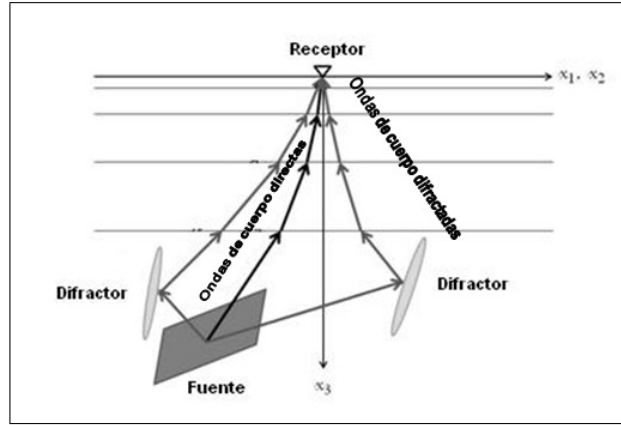


Figura 2.5.2: Ilustración esquemática del campo de ondas directo y difractado iluminado por fuentes profundas en un semi-espacio estratificado 1D (Modificada a partir de Sánchez-Sesma *et al.*, 2011)

Debido a que las propiedades del medio dependen de la profundidad, se asume equivalencia en las direcciones horizontales. De la ecuación (2.4.19) y asumiendo  $x=0$  se puede escribir:

$$\langle H^2 \rangle \propto \text{Im}[G_{11}^{1D}(0,0;\omega)] + \text{Im}[G_{22}^{1D}(0,0;\omega)] \quad (2.5.11a)$$

$$\langle V^2 \rangle \propto \text{Im}[G_{33}^{1D}(0,0;\omega)] \quad (2.5.11b)$$

donde:

$E_1 + E_2 = \langle H^2 \rangle$  y  $\langle V^2 \rangle$  = autocorrelaciones promedio horizontal y vertical, respectivamente,  
 $G_{ij}^{1D}(x,y;\omega)$  = función de Green en 1D, los subíndices  $i$  y  $j$  son reemplazados por 1 y 2 que indican las direcciones horizontales, mientras que el número 3 indica la dirección vertical. Se puede escribir el cociente espectral de la siguiente manera:

$$\frac{H(\omega)}{V(\omega)} = \sqrt{\frac{\text{Im}[G_{11}^{1D}(0,0;\omega)] + \text{Im}[G_{22}^{1D}(0,0;\omega)]}{\text{Im}[G_{33}^{1D}(0,0;\omega)]}} \quad (2.5.12)$$

Las ecuaciones (2.5.2) y (2.5.12) son consecuencias directas de la teoría de campos difusos para la reconstrucción de la función de Green, cuando los puntos de observación coinciden (se toma la autocorrelación). Como en 1D, existe equivalencia matemática en las componentes horizontales  $G_{11}^{1D} = G_{22}^{1D}$ , se puede escribir:

$$\frac{H(\omega)}{V(\omega)} = \sqrt{\frac{2\text{Im}[G_{11}^{1D}(0,0;\omega)]}{\text{Im}[G_{33}^{1D}(0,0;\omega)]}} \quad (2.5.13)$$

Considerando (2.5.13) y (2.5.10):

$$\frac{H(0,\omega)}{V(0,\omega)} = \sqrt{\frac{2\alpha_H}{\beta_H} \left| \frac{TF_1(0,\omega)}{TF_3(0,\omega)} \right|} \quad (2.5.14)$$

donde:

$TF_1(\omega)$  = función de transferencia del movimiento horizontal debido a una onda S,

$TF_3(\omega)$  = función de transferencia del movimiento vertical debido a una onda P.

El cero dentro de esta ecuación representa la profundidad de la fuente y el receptor.

El cociente espectral  $H/V$  también puede ser evaluado para el caso  $z=h$ , es decir cuando la fuente y receptor se encuentran en la interfase con el semi-espacio:

$$\frac{H(h, \omega)}{V(h, \omega)} = \sqrt{\frac{2\alpha_H}{\beta_H} \left| \frac{TF_1(h, \omega)}{TF_3(h, \omega)} \right|} \quad (2.5.15)$$

Se observa que es la misma ecuación que cuando fuente y receptor están en superficie y puede ser utilizada para la inversión de una estructura estratificada que contenga receptores en pozos.

En un campo de ondas real de movimientos sísmicos, ya sea la parte de las ondas de cuerpo o las ondas de coda, las ondas no se limitan a ser de incidencia vertical, como se supone en la teoría anterior y además las ondas P y SV están acopladas. Entonces se puede considerar que las ecuaciones (2.5.14) y (2.5.15) son válidas sólo para el caso en que el epicentro del sismo este cerca del sitio de medición.

### 2.5.2.1. Particiones de energía y el cociente $H/V$

En la figura 2.5.3 se muestran las particiones totales para fuerza vertical y horizontal en función del coeficiente de Poisson. Esto permite la determinación del valor teórico para el cociente  $H/V$  sobre la superficie de un semi-espacio. Considerando que las componentes horizontales son iguales, se puede obtener el cociente espectral  $H/V$  usando (2.4.19) y las particiones:

$$\frac{H}{V} = \sqrt{\frac{2\langle u(0, 0; \omega)^2 \rangle}{\langle w(0, 0; \omega)^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{2\text{Im}G_{11}^{HS}(0, 0; \omega)}{\text{Im}G_{33}^{HS}(0, 0; \omega)}} = \sqrt{\frac{2p_x^{HSS}}{p_z^{HSS}}} \quad (2.5.16)$$

El cual es independiente de la frecuencia y esta graficado contra el coeficiente de Poisson en la figura 2.5.3.

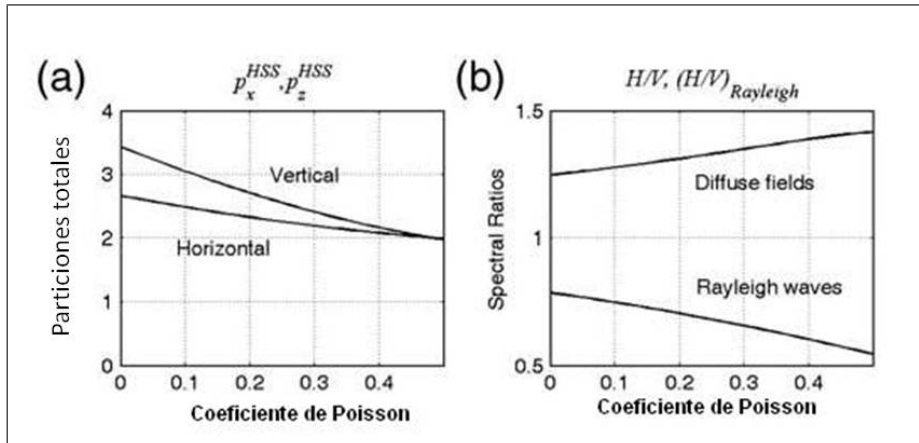


Figura 2.5.3: (a) Coeficientes de partición totales para direcciones horizontal y vertical (x o z) contra el coeficiente de Poisson. (b) Cocientes  $H/V$  teóricos para campos difusos y ondas de Rayleigh (Modificada de Sánchez-Sesma *et al.*, 2011)

Una aproximación útil es  $H/V \approx 1.245 + 0.348\nu$ . El cociente  $H/V$  es una propiedad intrínseca del medio y depende del coeficiente de Poisson. Para un sistema estratificado, el cociente teórico  $H/V$  del semi-espacio

proporciona valores asintóticos para altas y bajas frecuencias que dependen del coeficiente de Poisson de la capa superior y del basamento, respectivamente.

Cuando se está trabajando con ruido, es común comparar  $H/V$  con la elipticidad de las ondas Rayleigh,  $(H/V_{Rayleigh})$ , el cual tiene un claro significado si se conoce la dirección de propagación. Dentro de la teoría de campos difusos, el cociente  $H/V$  incluye ondas P, SV, SH y Rayleigh. Para estimar las diferencias con la elipticidad de las ondas de Rayleigh, se representa en la figura 2.5.3 (b) el cociente  $H/V$  para un campo difuso y para las ondas de Rayleigh propagándose en una dirección dada, en  $x$ , la cual puede ser obtenida de la expresión (ejemplo, Aki y Richards [27]):

$$\frac{H}{V_{Rayleigh}} = \frac{2\delta\sqrt{\delta^2 - 1}}{2\delta^2 - 1} \quad (2.5.17)$$

Donde:  $\delta = \beta/c_R$  y  $c_R =$  velocidad de las ondas de Rayleigh. Como se observa las diferencias son significativas y muestra que para el semi-espacio, el campo difuso  $H/V$  está lejos de la elipticidad de las ondas de Rayleigh. En sistemas estratificados, la semejanza de  $H/V$  medido con  $(H/V_{Rayleigh})$  ha sido usado para inversión.

La extensión de estos conceptos para un medio estratificado implica un tratamiento numérico.





## Ejemplos de aplicación

Se evalúan diversas configuraciones de estratigrafía para calcular frecuencias fundamentales de cinco modelos utilizando la técnica de cocientes espectrales de un campo difuso. Se comprueba el valor obtenido de la frecuencia fundamental con el método de Thomson-Haskell utilizando la incidencia vertical de ondas S y con la formulación planteada en el Manual de diseño de obras civiles del 2008. Para el caso particular del modelo 2 se realiza un análisis mayor utilizando el método de Thomson-Haskell para observar la amplificación del sitio bajo varios ángulos de incidencia.

### 3.0.3. Modelo 1. Un estrato sobre un semi-espacio

El modelo 1 tiene las siguientes propiedades:

Capa	Espesor [m]	$\alpha$ [m/s]	$\beta$ [m/s]	$\rho$ [Ton/m <sup>3</sup> ]	$\nu$
1	12.86	584	350	2.2	0.22
Semi-espacio	$\infty$	1583	875	2.7	0.22

Tabla 3.0.1: Modelo considerado para modelar  $H/V$  de ruido.

En la figura (3.0.1) se representa la parte imaginaria de la función de Green en superficie  $G_{11}(0, 0; \omega)$  y  $G_{33}(0, 0; \omega)$  contra la frecuencia. Se observa la tendencia a crecer con la frecuencia y el valor de cero en bajas frecuencias es debido a que no hay radiación de ondas. En la respuesta vertical ( $\text{Im } G_{33}$ ) aparece un pico en 12[Hz] que no tiene un claro significado, pero corresponde aproximadamente al doble de la frecuencia fundamental del pico  $H/V$ , esta frecuencia no cambia con respecto a la velocidad de las ondas P, pero su amplitud disminuye si el contraste de velocidades entre las ondas P y S es mayor.

La respuesta  $\text{Im}G_{11}$ (Horizontal) muestra un salto, este comportamiento tipo cuántico en la respuesta horizontal puede ser explicado por el hecho de que aproximadamente 2/3 partes de la energía inyectada al medio por una fuerza horizontal es transportada por las ondas S que están resonando en los estratos (como se explica en la sección 2.2.1.2).

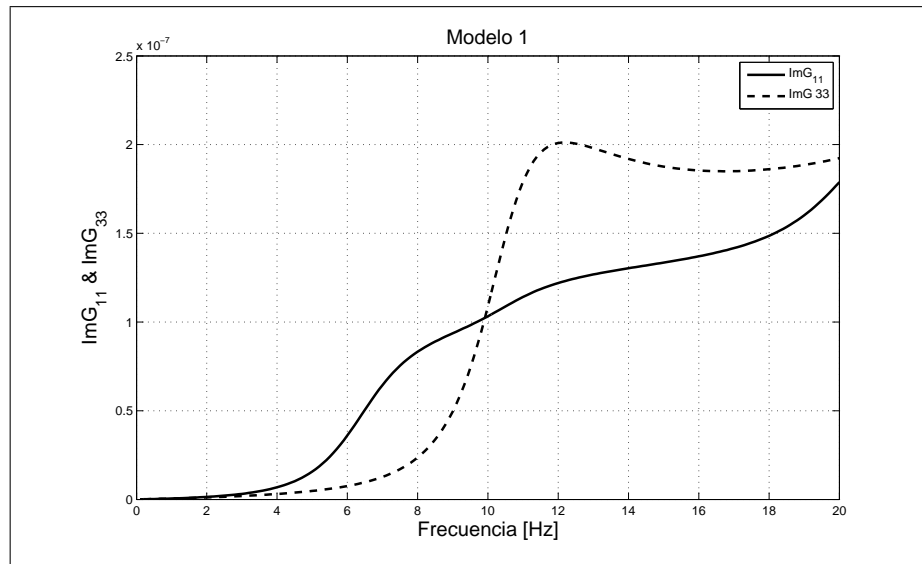


Figura 3.0.1: Parte imaginaria de la función de Green. En línea continua  $\text{Im}G_{11}$  y en línea discontinua  $\text{Im}G_{33}$

De la ecuación (2.5.2) se puede obtener el cociente  $H/V$ . La figura (3.0.2) muestra el cociente espectral considerando propagación en 3D (ruido), propagación 1D (sismos profundos) y la función de transferencia obtenida con Thomson-Haskell.

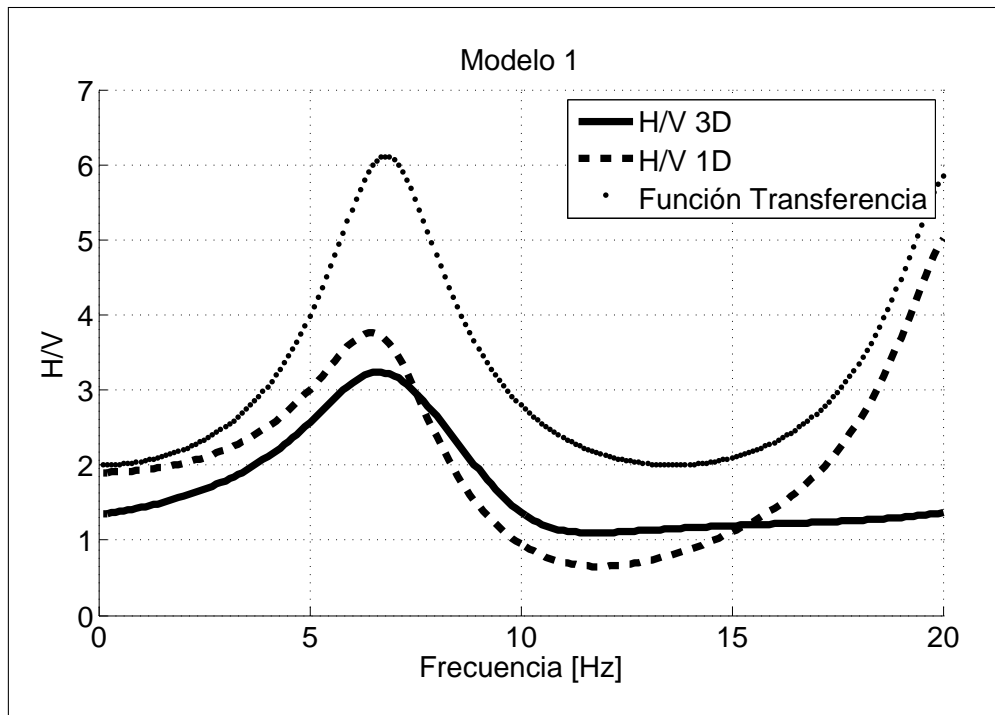


Figura 3.0.2: Cocientes espectrales  $H/V$ . Con línea continua  $H/V$  en 3D, línea discontinua  $H/V$  1D y con diamantes la función de transferencia.

El pico obtenido proviene del cociente de dos funciones que crecen con la frecuencia ( $ImG_{11}$  y  $ImG_{33}$ ), la frecuencia de resonancia es de 6.6[Hz] para el caso  $H/V$  en 1D y 3D, para la función de transferencia la frecuencia esta en 6.8 [Hz]. Para comparar con otro método se utiliza la formulación de Gómez (1993) [7] establecida en el Manual de Diseño de Obras Civiles (2008):

$$T_s = \frac{4}{\sqrt{g}} \sqrt{\left( \sum_{n=1}^N \frac{h_n}{G_n} \right) \left( \sum_{n=1}^n \gamma_n h_n (w_n^2 + w_n w_{n-1} + w_{n-1}^2) \right)} \quad (3.0.1)$$

donde:

$\gamma_n$ = el peso específico del n-ésimo estrato,

$g$ =la aceleración de la gravedad,

$h_n$ = espesor del estrato,

$G_n$ = módulo de rigidez del n-ésimo estrato,

$N$ = número de estratos y

$$w_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{h_i}{G_i}} \quad (3.0.2)$$

Aplicando ésta ecuación se obtiene una frecuencia de 6.8 [Hz], que concuerda con la función de transferencia, y existe una variación de 0.2 [Hz] con respecto a la obtenida con campos difusos.

**3.0.4. Modelo 2. Dos capas sobre un semi-espacio con inversión de velocidad**

Las propiedades del modelo 2 son las siguientes:

Capa	Espesor [m]	$\alpha$ [m/s]	$\beta$ [m/s]	$\rho$ [Ton/m <sup>3</sup> ]	$\nu$
1	55	2600	1600	2.0	0.19
2	70	2400	1100	1.9	0.21
Semi-espacio	$\infty$	4000	2000	2.20	0.33

Tabla 3.0.2: Modelo considerado para modelar  $H/V$  de ruido.

Se obtuvieron las siguientes gráficas:

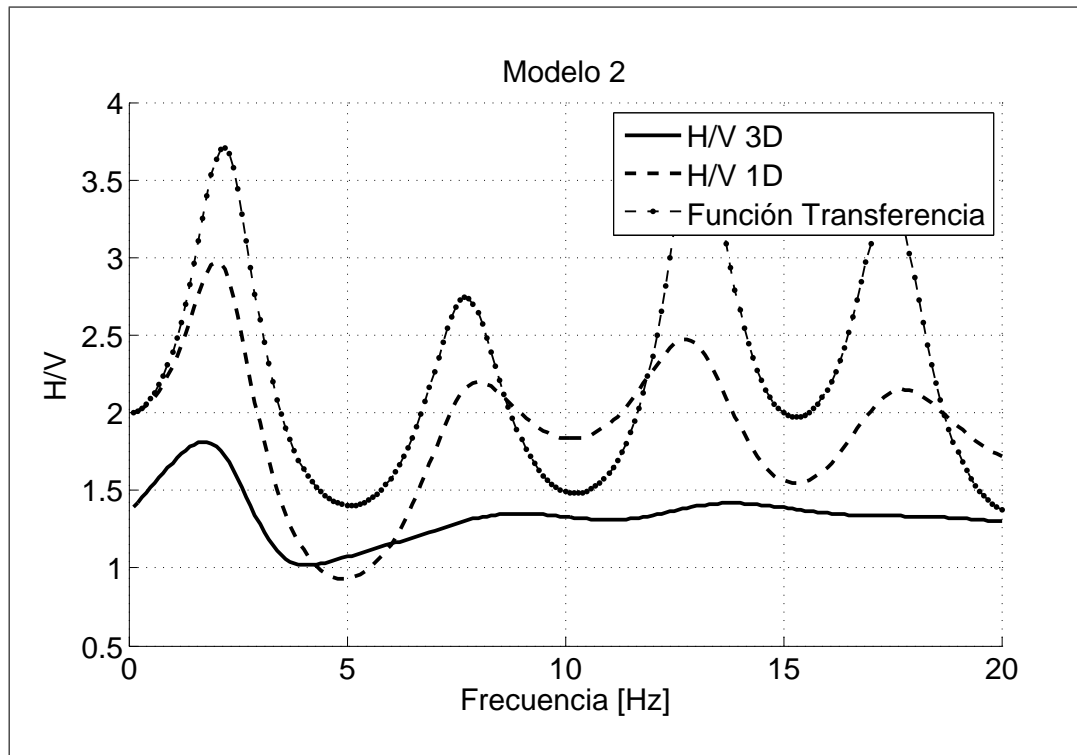


Figura 3.0.3: Cocientes espectrales  $H/V$ . Con línea continua  $H/V$  en 3D, línea discontinua  $H/V$  1D y con línea discontinua y punto la función de transferencia.

El cocientes espectral  $H/V$  con el enfoque 3D se obtiene una frecuencia fundamental de 1.8 [Hz], se observa que los modos superiores están aplanados por el cociente en un factor de 3.8 unidades con respecto a la respuesta en 1D.

Para el enfoque 1D el valor asintótico en bajas frecuencias es  $\sqrt{2\alpha_H/\beta_H} = \sqrt{2(4000)/2000} = 2.0$  (de la ecuación 2.5.14), se observa la aparición de los modos superiores que en el enfoque 3D no aparecen. La frecuencia fundamental esta en 2.1 [Hz], la diferencia entre el enfoque 1D y 3D en la frecuencia fundamental del sitio es de 0.3 [Hz] se desconocen las causas de esta variación. Así que a continuación se calculara la función de transferencia para este modelo.

Cálculo de las funciones de trasferencia utilizando el método de Thomson-Haskell (1953) [3] para incidencia de ondas S con varios ángulos de incidencia y azimut cero.

Este método calcula la función de transferencia en superficie de un medio formado por N estratos horizontales, homogéneos y paralelos que están ubicados sobre un semi-espacio. Se puede demostrar que bajo incidencia de ondas SH provenientes del semi-espacio, la superficie libre provocará una amplificación de dos en el desplazamiento, por lo tanto, este fenómeno se observará en las gráficas obtenidas por el método de Thomson- Haskell.

Para el caso particular de ondas polarizadas horizontalmente (SH) este factor de amplificación (dos) se observara independientemente del ángulo de incidencia y no existirá una variación local causada por la superficie libre. Esto se observa en el desplazamiento V de las gráficas mostradas en el apéndice A en las figuras A.0.2, A.0.4, A.0.7, A.0.10 y A.0.13 para cualquier incidencia comenzando desde la vertical hasta la de  $60^\circ$  el desplazamiento es el mismo en todos los casos. En estas figuras también se observa que la amplificación decrece conforme se incrementa el ángulo de incidencia como lo demostró Burridge *et al.* (1980) [43]. Sin embargo, para las ondas SV se tiene un comportamiento muy complejo en la superficie para cuando el ángulo de incidencia esta cerca del ángulo crítico. En el ángulo crítico, la componente horizontal de la lentitud de las ondas S coincide con la lentitud de la onda P, y un fuerte acoplamiento se produce, incluyendo la generación de ondas P provocadas por la incidencia de ondas SV y estas se propagan a lo largo de la superficie.

Varios efectos se esperan para la incidencia con ángulos cercanos al crítico de ondas SV. Primero, la componente horizontal del desplazamiento en la superficie muestra un fuerte pico para la incidencia de ondas SV incidiendo con ángulo crítico como se muestra en la figura A.0.9 su factor de amplificación es aproximadamente 17.8, también en la componente vertical se muestra este pico a la misma frecuencia pero con amplitud de 4.3.

En general, para incidencias menores a  $30^\circ$  se muestra un comportamiento periódico en todas las direcciones con amplificaciones y deamplificaciones, pero para la incidencia de  $15^\circ$  el desplazamiento W presenta un comportamiento diferente, ya que hay una deamplificación en 11.8 [Hz] (figura A.0.5) pero si se observan los valores de la gráfica son muy pequeños. Para incidencias cercanas al ángulo crítico comienza aparecer picos irregulares en los desplazamientos U y W (Figuras A.0.6 y A.0.8). Para incidencia de  $60^\circ$  el comportamiento se vuelve periódico con amplificaciones y deamplificaciones en el desplazamiento V y W (figuras A.0.13 y A.0.14), mientras que el desplazamiento U se comporta de manera irregular pero sus amplitudes son muy pequeñas.

En el apéndice A se da una descripción particular del comportamiento del desplazamiento en relación a la polarización y las máximas amplificaciones y deamplificaciones que aparecen.

Con base a lo observado utilizando el método de Thomson- Haskell se puede concluir que los valores de amplificación son en promedio de 1.5 unidades, lo cual sugiere un efecto de sitio mínimo, además las frecuencias fundamentales del suelo obtenidas mediante  $H/V$  difieren en 0.4 (modelo 3D) y 0.2 [Hz] (modelo 1D) con la frecuencia fundamental de 2.2 [Hz] del primer pico de las funciones de transferencia obtenidas. Debido a la diferencia en los resultados, ahora se calcula el periodo dominante del sitio aplicando la ecuación (3.0.1) se obtiene una frecuencia de 2.1 [Hz], se puede concluir que la frecuencia fundamental para este modelo es de 2.1 [Hz] que es la obtenida por el enfoque 1D.

### 3.0.5. Modelo 3. Capa rígida sobre tres estratos y el semi-espacio

El siguiente modelo presenta dos capas rígidas, la primera es de espesor delgado y es la capa superficial del modelo, que físicamente podría ser una capa de asfalto y la segunda capa rígida esta sobre el semi-espacio. El objetivo es evaluar la influencia de la capa rígida superficial en el cociente espectral  $H/V$  para el caso práctico de cuando se toman mediciones sobre el asfalto.

Las propiedades de las capas son las siguientes:

Capa	Espesor [m]	$\alpha$ [m/s]	$\beta$ [m/s]	$\rho$ [Ton/m <sup>3</sup> ]	$\nu$
1	0.20	381	220	2.1	0.24
2	1.80	130	80	1.9	0.19
3	2.7	326	200	1.9	0.2
4	10	245	150	1.9	0.2
Semi-espacio	$\infty$	489	300	2.2	0.2

Tabla 3.0.3: Modelo considerado para modelar  $H/V$  de ruido.

Primero obtenemos el caso donde no existe la capa rígida en superficie, para ver el efecto que produce en la determinación de la frecuencia fundamental.

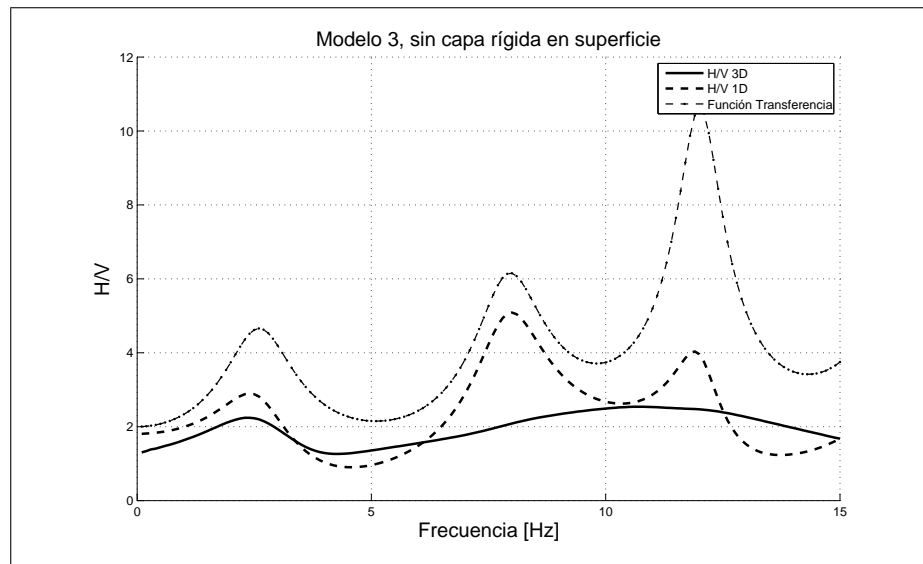


Figura 3.0.4: Cociente espectral  $H/V$  para el modelo 3, SIN capa rígida en superficie. Con línea continua  $H/V$  en 3D, línea discontinua  $H/V$  1D y con línea discontinua y punto la función de transferencia.

Se observan la frecuencia fundamental para  $H/V$  en 1D y 3D es de 2.4 [Hz] y para la función de transferencia de 2.6 [Hz], los valores entre la teoría de campos difusos y la función de transferencia son totalmente diferentes, ahora se calcula el cociente  $H/V$  considerando el modelo completo:

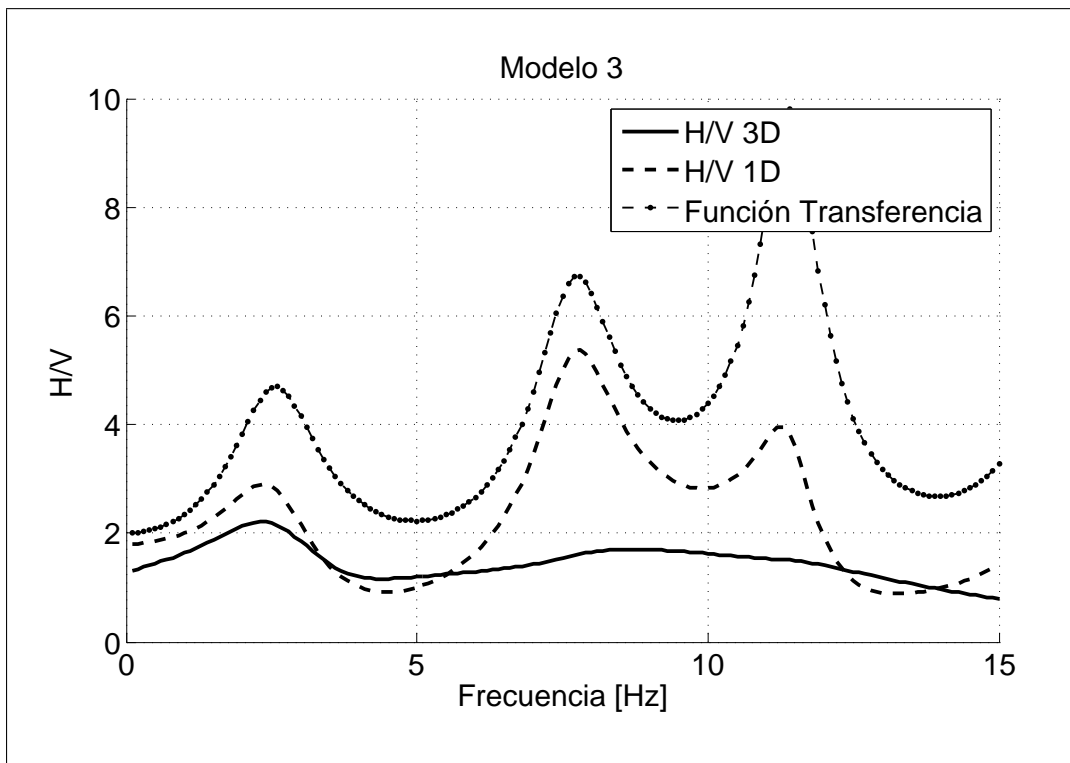


Figura 3.0.5: Cociente espectral  $H/V$  para el modelo 3. Con línea continua  $H/V$  en 3D, línea discontinua  $H/V$  1D y con línea discontinua y punto la función de transferencia.

Las frecuencias fundamentales son: para el caso 3D de 2.4 [Hz], para 1D de 2.4 [Hz] y para la función de transferencia es de 2.6[Hz], estos valores no cambiaron con respecto al caso anterior, lo único que cambio fue las frecuencias de los segundos picos que aparecen en la función de transferencia y en el caso 1D debido a que se desplazaron a frecuencias más altas. Se puede concluir que la capa rígida en superficie no altera el valor de la frecuencia fundamental.

Ahora cambiamos el espesor de la capa 1 rígida a 1 [m] esto provoca que la frecuencia fundamental se desplace hacia bajas frecuencias y que este en 2.1[Hz] para el caso 1D y 3D. Si aumentamos el espesor progresivamente de la capa 1 a 10 [m] la frecuencia fundamental esta en 1.2 [Hz] para el caso 1D y 3D. Se observa que el aumento de espesor de la capa 1 juega un papel importante si éste es mayor o igual a los demás espesores de las capas, si su espesor es insignificante no modifica el valor de la frecuencia fundamental.

Para verificar el valor de la frecuencia fundamental del modelo completo, se calcula el periodo dominante del sitio utilizando la formulación de Gómez (1993) [7] establecida en el Manual de Diseño de Obras Civiles (2008):

Utilizando la ecuación (3.0.1) la frecuencia fundamental es de 2.75 [Hz] que difiere con el obtenido por el enfoque 1D y 3D en 0.35 [Hz] y en 0.15 [Hz] con la función de transferencia ante incidencia vertical de ondas S, para obtener un resultado similar entre la función de transferencia y la formulación del manual de CFE, se evalúa la función de transferencia para los ángulos de incidencia de 30° y 45°, los resultados son los siguientes:

Incidencia de 30°= 2.7[Hz],



Incidencia de  $45^\circ = 2.8$  [Hz]

Se concluye que para este modelo el cociente espectral  $H/V$  enfoques 1D y 3D no concuerdan con la frecuencia fundamental del sitio, y también existen variaciones de 0.2 [Hz] entre la incidencia vertical de ondas S y la incidencia de  $45^\circ$ . Por lo tanto, sacando un promedio de las frecuencias fundamentales obtenidas con la función de transferencia del modelo y con la ecuación (3.0.1) la frecuencia del sitio es de 2.75[Hz].

### 3.0.6. Modelo 4. Dos estratos sobre un semi-espacio, la velocidad aumenta con la profundidad

Se comparan los resultados prácticos de un estudio donde calculan los cocientes espectrales utilizando sismos de magnitud entre 5.9 y 7.5 donde también se cálculo el cociente espectral teórico bajo el enfoque de la elipticidad de las ondas de Rayleigh (Flores-Estrella, 2009 [44]). El modelo de velocidades obtenido es el siguiente:

Capa	Espesor [m]	$\alpha$ [m/s]	$\beta$ [m/s]	$\rho$ [Ton/m <sup>3</sup> ]	$\nu$
1	20	250	34	1.9	0.49
2	40	600	79	1.9	0.49
Semi-espacio	$\infty$	1800	475	2.2	0.46

Tabla 3.0.4: Modelo considerado para modelar  $H/V$  de ruido.

Para este caso se calcula el cociente  $H/V$  bajo los enfoques 1D y 3D, la función de transferencia y la formulación del manual de CFE. El cociente espectral de campos difusos bajo ambos enfoques tiene una frecuencia fundamental de 0.3 [Hz]. La frecuencia fundamental del  $H/V$  práctico es de 0.3 [Hz]. Como se observa en la siguiente gráfica:

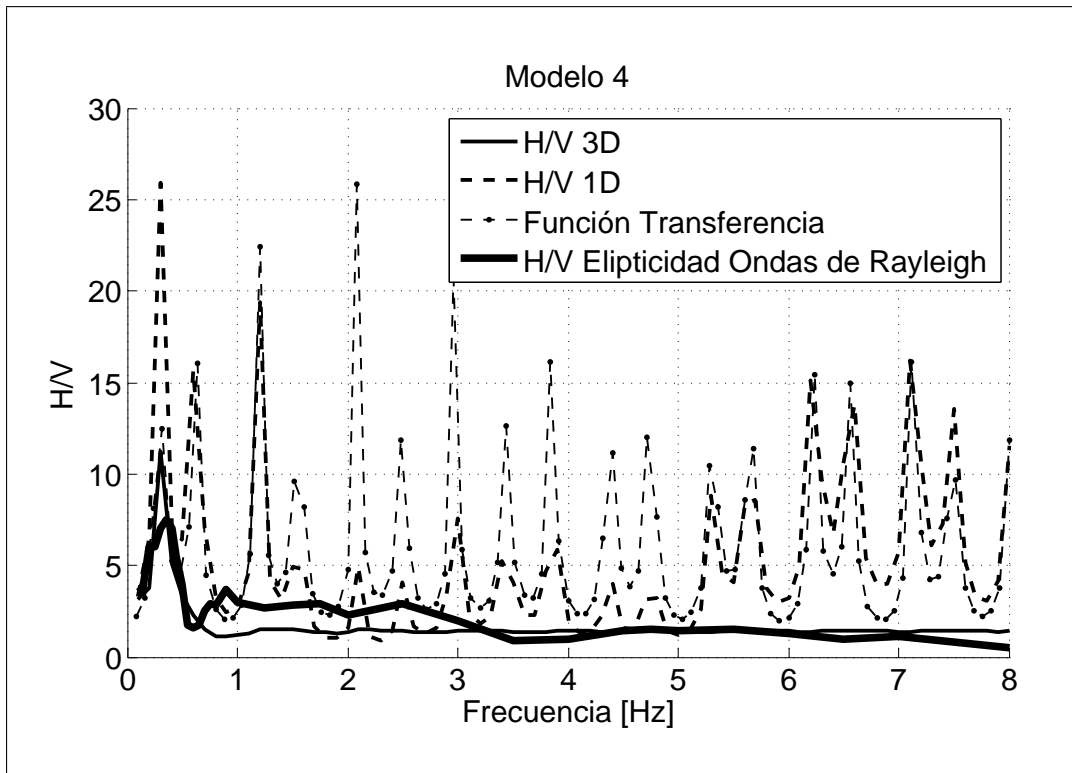


Figura 3.0.6: Cociente espectral  $H/V$  para el modelo 4. Con línea continua  $H/V$  en 3D, línea continua gruesa Elipticidad de las ondas de Rayleigh, línea discontinua gruesa  $H/V$  en 1D y línea discontinua delgada la función de transferencia

Con la función de transferencia la frecuencia fundamental es de 0.3 [Hz] y con la formulación de la ecuación (3.0.1) la frecuencia es de 0.3 [Hz]. Para este modelo las descripciones 1D, 3D, la función de transferencia y la ecuación (3.0.1) coinciden en la frecuencia fundamental del sitio, pero la amplitud del cociente espectral  $H/V$  está sobrestimada en todo el rango de frecuencias.

### 3.0.7. Modelo 5. Tres capas sobre un semi-espacio

El siguiente es otro ejemplo práctico (acuerdo con el autor), donde se utilizaron registros de un mes de ruido y se calculó el cociente espectral teórico bajo el enfoque de la elipticidad de las ondas de Rayleigh realizado en un sitio que presenta las siguientes características:

Capa	Espesor [m]	$\alpha$ [m/s]	$\beta$ [m/s]	$\rho$ [Ton/m <sup>3</sup> ]	$\nu$
1	28	442	250	1.7	0.26
2	30	991	650	1.8	0.1
3	120	1356	900	1.9	0.1
Semi-espacio	$\infty$	3290	1900	2.2	0.24

Tabla 3.0.5: Modelo considerado para modelar  $H/V$  de ruido.

La siguiente gráfica muestra la comparación de los cocientes espectrales  $H/V$ :

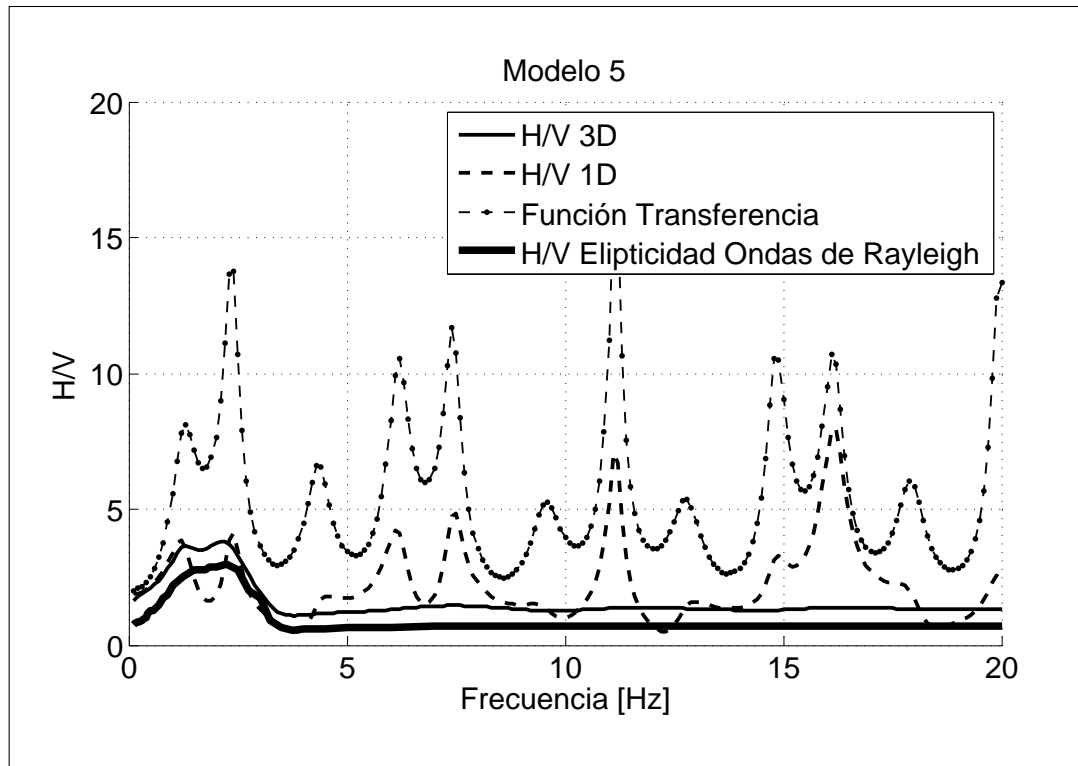


Figura 3.0.7: Cociente espectral  $H/V$  para el modelo 5. Con línea continua  $H/V$  en 3D, línea continua gruesa Elipticidad de las ondas de Rayleigh, línea discontinua gruesa  $H/V$  en 1D y línea discontinua delgada la función de transferencia

Para el  $H/V$  de campos difusos se observa un pico con dos crestas, la segunda cresta desaparece al disminuir el coeficiente de poisson  $\nu$  en 1 unidad para todas las capas, se observa que para el caso de la elipticidad de las ondas de Rayleigh el pico presenta una parte plana y después un máximo. Para el caso de campos difusos y la elipticidad de ondas de Rayleigh, el primer pico esta en 1.3 [Hz] y el segundo en 2.1 [Hz]. Para saber cual frecuencia reportar como la fundamental se cálculo la función de transferencia y la ecuación (3.0.1) y el resultado es de 1.3 [Hz]. Se concluye que para este modelo el cociente espectral  $H/V$  de campos difusos proporciona adecuadamente la frecuencia fundamental del sitio que es de 1.3 [Hz]



## Conclusiones

En esta tesis se demostró que se puede modelar el cociente espectral  $H/V$  o técnica de Nakamura utilizando la teoría de campos difusos. La base de esta teoría está en el comportamiento de la energía de un campo de desplazamientos producido por fuentes aleatorias o por difracción múltiple mediante el teorema de equipartición y considerando una iluminación isotrópica se puede llegar a la proporcionalidad de la parte imaginaria de la función de Green tanto con las correlaciones cruzadas, como con las autocorrelaciones de los desplazamientos de un campo difuso. Con este enlace se puede obtener el cociente espectral expresado a partir de las partes imaginarias de la función de Green.

Existen dos enfoques principales de la teoría  $H/V$ . En el primero se supone que se trata con un problema 1D y se aplica para el estudio de sismos profundos con incidencia de ondas casi vertical (se desprecia el efecto de las ondas superficiales) y se demuestra que la parte imaginaria de Green es proporcional al cociente de los módulos de las funciones de transferencia del medio, además en el cociente  $H/V$  se excitan los modos superiores. Con el segundo enfoque se consideran las contribuciones de las ondas superficiales y las de cuerpo, por lo que se trata con un problema 3D, esta descripción es muy sensitiva a las capas someras de la estructura de las formaciones y se obtienen con las funciones imaginarias de Green en direcciones horizontales y verticales, actualmente se está investigando si la atenuación implica límites para la aproximación expuesta.

El cálculo de la función de Green en la fuente misma para una serie de estratos paralelos, se realizó usando el formalismo del método del número de onda discreto. La importancia de los picos del espectro de energía que se obtienen radica en que con ellos se puede predecir la influencia en la respuesta sísmica de un sitio para sismos futuros. Además, también puede ser útil para propósitos de exploración ya que del análisis de su variación espacial y de la frecuencia se pueden detectar rasgos de la estructura subterránea.

El cociente espectral  $H/V$  se puede comparar con la función de transferencia del sitio si este tiene una estructura cercana a la de un modelo unidimensional o tridimensional. Para ello es necesario conocer las propiedades de los estratos que se obtienen de forma directa a partir de exploraciones con pozos, o que se infieren con estudios que permiten la inversión de la curva de dispersión para calcular sus velocidades

Se realizaron ejemplos utilizando modelos propuestos y modelos de estudios teórico-prácticos realizados bajo el enfoque de la elipticidad de las ondas de Rayleigh para evaluar el cociente espectral  $H/V$  bajo

el enfoque de campos difusos y obtener las frecuencias fundamentales para todos los modelos. Para los modelos 1, 3, 5 y 5 se estima el cociente espectral utilizado los enfoques 1D y 3D es indistinto cual se utilice por que se obtiene la misma frecuencia fundamental. Para el modelo 2 coinciden la frecuencia fundamental del enfoque 1D y la formulación del manual de CFE. Para el modelo 3 que tiene dos inversiones de velocidades la frecuencia fundamental obtenida con  $H/V$  bajo el enfoque de campos difusos (2.4 [Hz]) es errónea, ya que con la función de transferencia y la formulación planteada por el manual de diseño de obras civiles se obtiene una frecuencia diferente (2.75 [Hz]). Las amplitudes de los picos máximos no son un parámetro cuantitativo confiable ya que en realidad no es un indicador de la amplificación del sitio que se pueda tener cuando ocurra un sismo, pero es mejor tener un dato de referencia a no tener nada.

Para obtener la amplificación del sitio bajo incidencias de ondas S que llegan con diferentes ángulos de incidencia se utilizó el método de Thompson-Haskell en el modelo 2 y se obtuvieron unas gráficas de frecuencia contra amplitud, su comportamiento es regular excepto para los casos de incidencia de ángulos cercanos e iguales al crítico y se observó un efecto de sitio mínimo, ya que las gráficas tienen poca amplitud en general.

Para la comparación con casos prácticos (modelos 4 y 5) se observa que se obtiene la misma frecuencia fundamental aplicando todos los métodos pero la forma de los picos y el espectro es diferente al igual que la amplitud.

## Resultados obtenidos con el método de Thomson-Haskell

Gráficas obtenidas con el programa Haskell para un azimut de 0 en todas las gráficas, número de frecuencias = 200 y frecuencia máxima de 20 [Hz].

- Incidencia 0° (vertical)

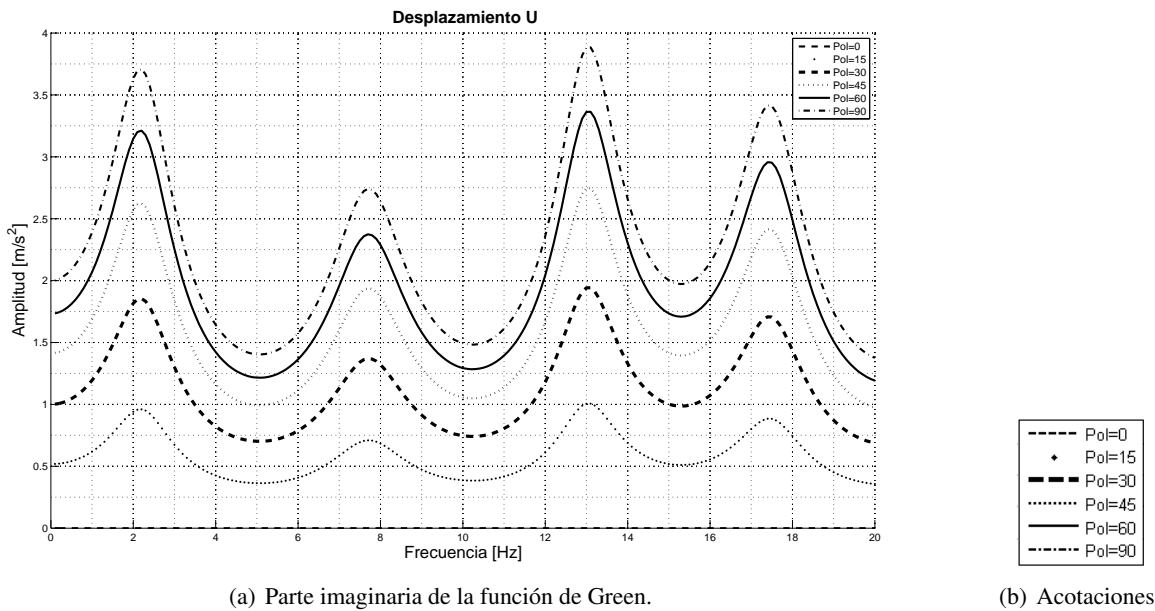


Figura A.0.1: Considerando los efectos de los dos estratos juntos, se producen cuatro picos en las frecuencias 2.2, 7.7, 13.1 y 17.4 [Hz] donde la máxima amplitud corresponde a 13.1 [Hz] de amplitud relativa de 3.88. Como se observa, la amplitud depende de la polarización. Conforme aumenta el ángulo de polarización, aumenta la amplitud. También se observan deamplificaciones en 5, 10.2, 15.9 [Hz]. En esta dirección se observa el caso particular de que polarización 0 (ondas SH) no produce desplazamiento en x.

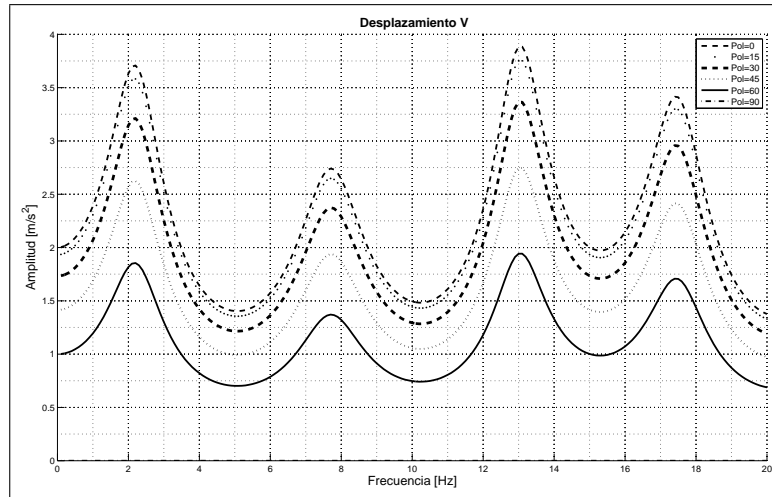


Figura A.0.2: Para la dirección antiplana (y) el comportamiento es similar en las gráficas, se observan amplificaciones y deamplificaciones cuya amplitud depende del ángulo de polarización. La relación entre la amplitud y la polarización es inversa. Se observan dos hechos interesantes. El pico de máxima amplitud relativa es de 3.88 esta en la frecuencia de 13.1 [Hz] y corresponde a polarización 0, es decir, son ondas SH. Por el contrario, para ondas SV (polaridad 90) no existe desplazamiento en dirección y.

Como se está incidiendo ondas S verticalmente, no hay desplazamiento en la dirección vertical, solo existiría un tipo de desplazamiento para este caso, si estuviéramos trabajando con ondas P.

■ Incidencia de 15°

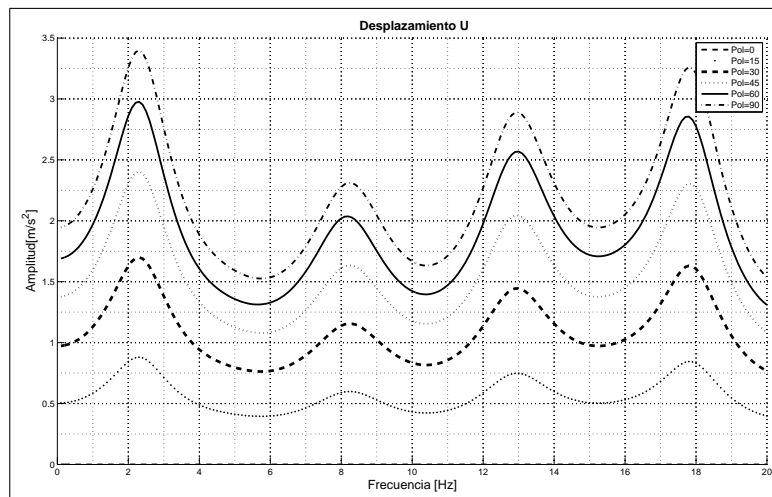


Figura A.0.3: Se observa casi el mismo comportamiento que la incidencia 0 para esta dirección. La onda SV (polarización 90) es la que presenta la máxima amplitud relativa de 3.4 en la frecuencia de 2.3 [Hz]. Las otras amplificaciones corresponde a los picos en 8.2 ,13 y 17.8 [Hz], mientras que las deamplificaciones están en 5.6, 10.4 y 15.3 [Hz]. Existe la misma relación directamente proporcional entre la polaridad y la amplitud.



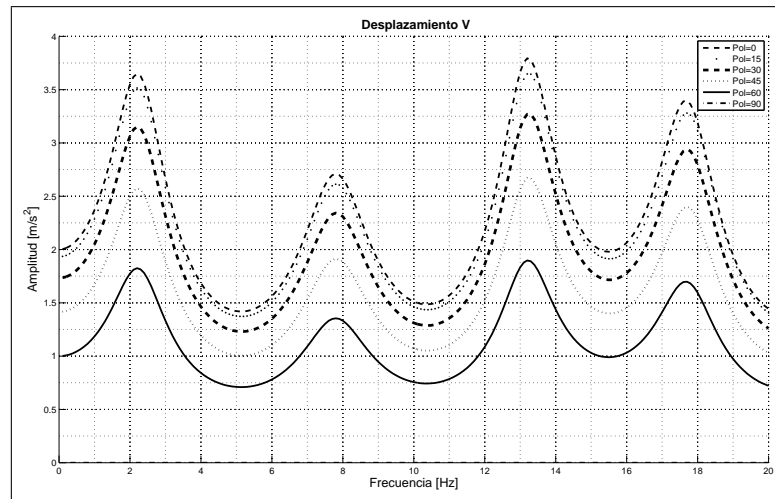


Figura A.0.4: La máxima amplitud corresponde a las ondas SH y es de 3.79 en una frecuencia de 13.2 [Hz], los otros 3 máximos corresponden a 2.2, 7.8 y 17.7 [Hz]. Las deamplificaciones están en 5.1, 10.5 y 15.5 [Hz]. La polarización aumenta y disminuye la amplitud.

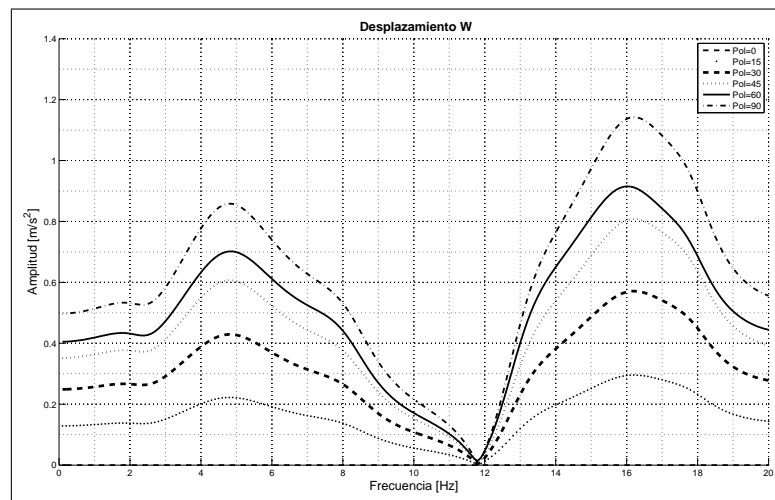


Figura A.0.5: Existe una amplificación relativa de 1.19 en 16.2 [Hz], se observa otro pico en 4.8 [Hz] pero su amplitud es muy despreciables. De hecho se puede decir que no existe amplificación ni tan siquiera para las ondas SV que son las que tienen más presencia en esta dirección. En la parte que corresponde a bajas frecuencias [0-3 Hz] la respuesta es plana, pero en 11.8[Hz] se observa un mínimo el cual se presenta independientemente de la polarización.

■ Incidencia 30°

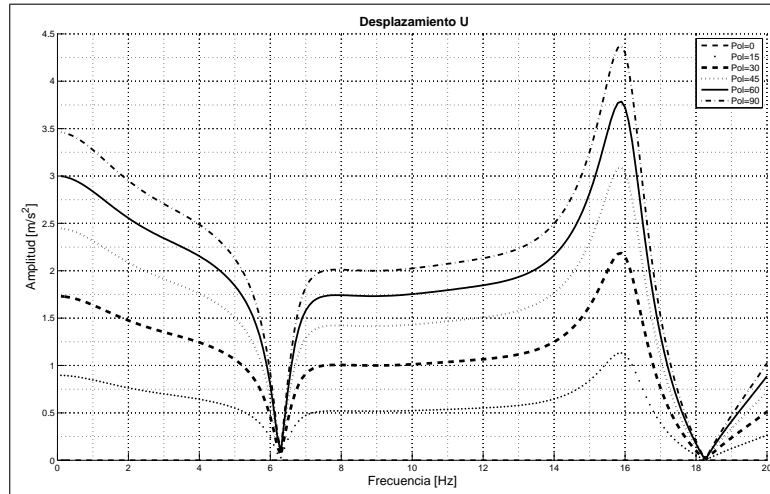


Figura A.0.6: Para incidencia de 30 se observa un comportamiento muy diferente en esta dirección comparada con las incidencias de 0 y 15. Presenta un pico de amplificación en 15.9 [Hz] con una amplitud relativa de 4.371. Presenta dos deamplificaciones en 6.3 [Hz] y 18.3 [Hz]. Una parte plana entre 7.4 y 12.1 Hz. En frecuencias bajas se observa un decaimiento que llega hasta 6.3 [Hz]. La máxima amplitud corresponde a las ondas SV y de nuevo las ondas SH no se propagan en esta dirección.

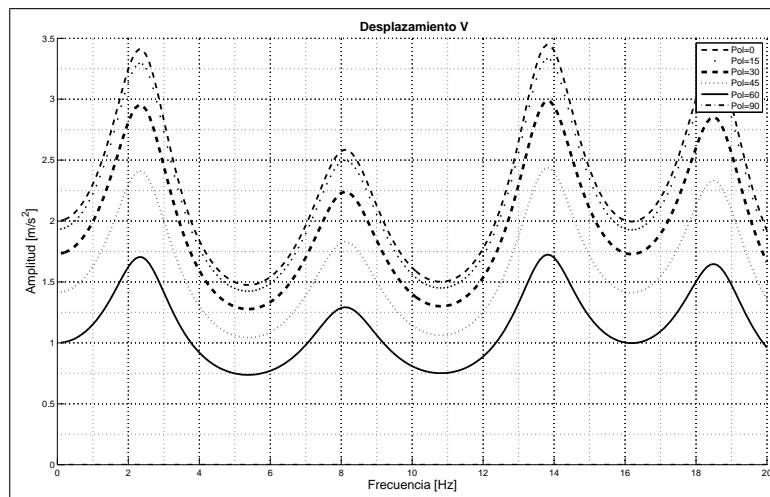


Figura A.0.7: Vuelve aparecer un comportamiento periódico con amplificaciones en 2.3, 8.1, 13.8 y 18.5 [Hz], esta última es la máxima amplitud relativa de 3.44 y corresponde a las ondas SH. Las deamplificaciones son en 5.4, 10.8 y 16.3 [Hz].

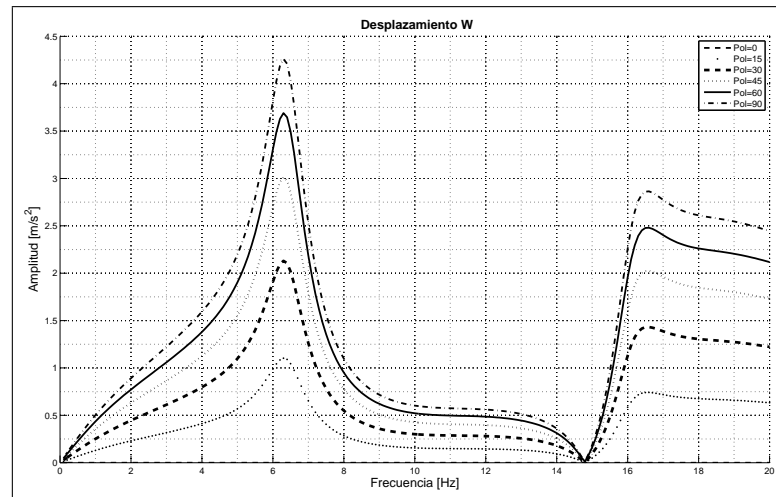


Figura A.0.8: En esta dirección no hay un comportamiento periódico de la función de transferencia. Existe un pico de máxima amplitud 4.26 en 6.3 [Hz], después se observa una parte plana entre 10 y 13 Hz que decae en 14.8 [Hz] sin importar en ángulo de polarización para después ascender a otra frecuencia de amplificación en 16.6 [Hz]

■ Incidencia 45°

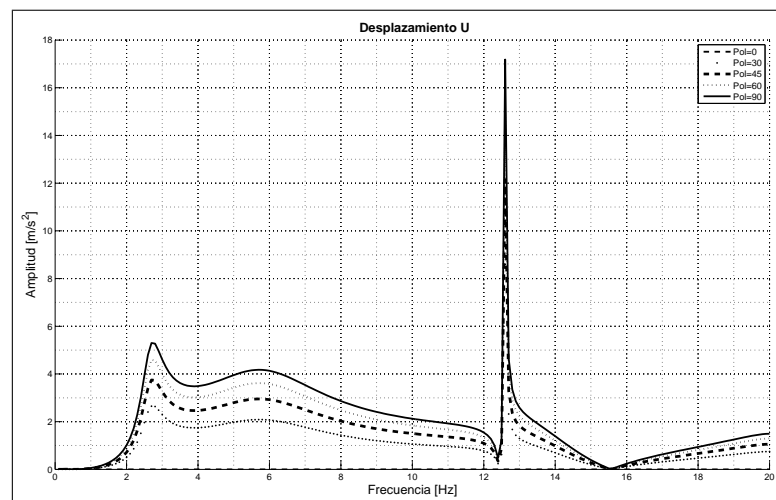


Figura A.0.9: En esta dirección se observa un pico muy abrupto en 12.4 [Hz] cuya amplitud máxima es de 17.8 y corresponde a la polarización de 90 (ondas SV). Se observa en frecuencias muy bajas no hay amplificación, hasta que llegas al primer pico en 2.8 [Hz]. Posteriormente la respuesta es plana en un rango de frecuencias de 8.9 - 12 [Hz]. Existen dos frecuencias de deamplificación a los 12 y 15.5 [Hz].

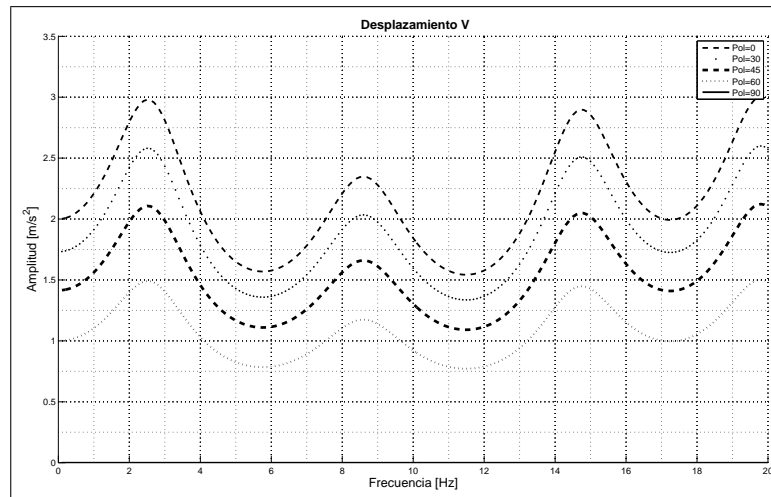


Figura A.0.10: En la dirección y el comportamiento es periódico con amplificaciones en 2.5, 8.6, 14.7 y 19.8 [Hz]. El pico mayor esta en 2.5 [Hz] con una amplitud de 2.98. Las deamplificaciones están en 5.8, 11.5 y 17.3 [Hz].

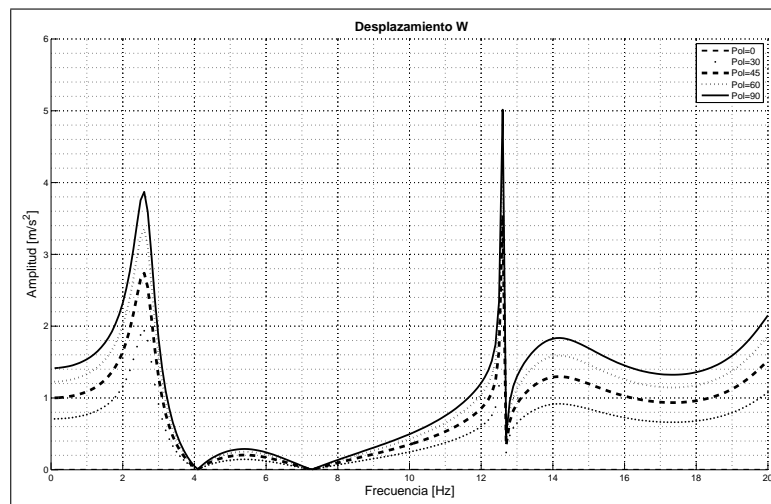


Figura A.0.11: Para esta incidencia el comportamiento de la amplitud es muy rara, ya que en esta dirección (al igual que la x) presenta un pico abrupto en 12.6 [Hz] cuya amplitud depende de la polarización. El pico más razonable esta en 2.6 [Hz] con amplitud relativa de 3.87. Presenta deamplificaciones en 4.1 y 7.3 [Hz].

■ Incidencia  $60^\circ$

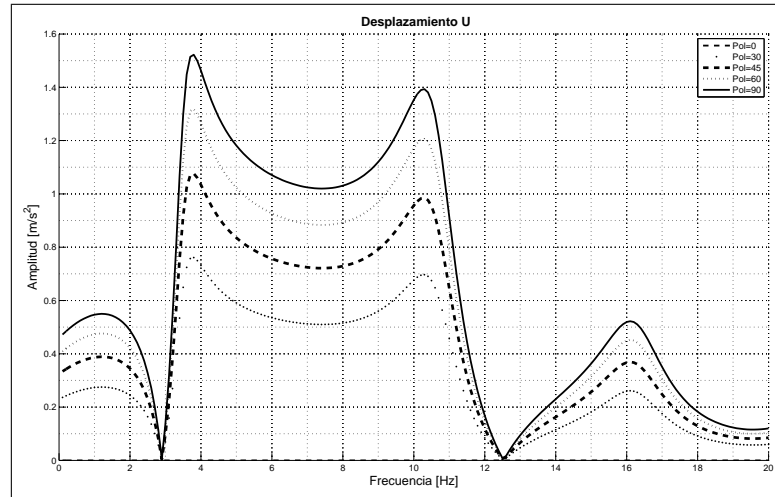


Figura A.0.12: El pico de máxima amplitud aparece en 3.8 [Hz] con amplitud de 1.52, el segundo pico importante esta en 10.3 [Hz] con amplitud de 1.39, se observan dos deamplificaciones en 2.9 y 12.6 [Hz]. Solo en esta dirección bajo la incidencia de  $60^\circ$  se presenta este comportamiento.

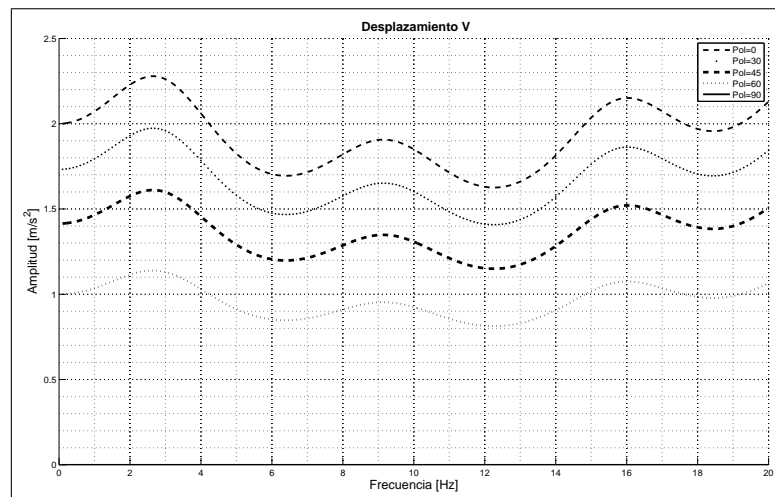


Figura A.0.13: En general las curvas están ligeramente planas, el comportamiento ya es periódico y presenta amplificaciones moderadas, el pico máximo esta en 2.6 [Hz] con amplitud de 2.27.

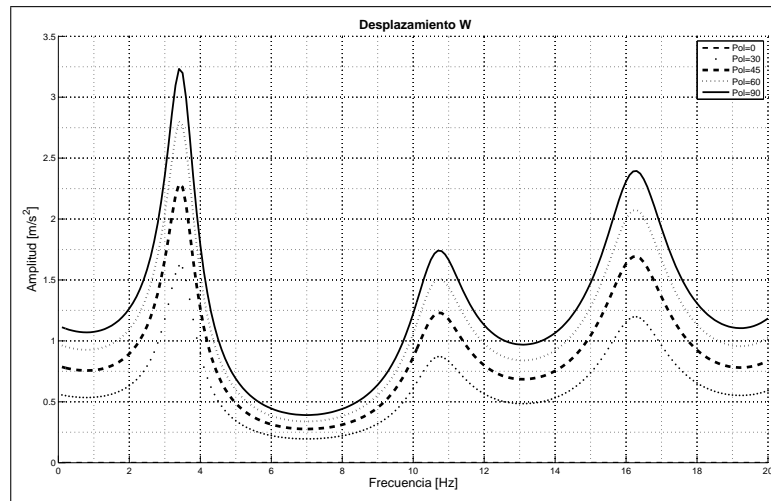


Figura A.0.14: El comportamiento vuelve a ser periódico con amplificaciones y deamplificaciones, el pico máximo se observa en  $3.4 \text{ [Hz]}$  con amplitud de  $3.23$  y la deamplificación máxima es de  $0.39$  en  $7 \text{ [Hz]}$ . La polarización modifica ligeramente la amplitud.

# Bibliografía

- [1] Steven L Kramer. Geotechnical earthquake engineering. *Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall,— c1996, 1, 1996.*
- [2] Dr. Ulises Mena Hernández y Dr. Luis Eduardo Pérez Rocha. *Manual de Diseño de Obras Civiles, diseño por sismo.* Comisión Federal de Electricidad, 2008.
- [3] N.A. Haskell. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1):17–34, 1953.
- [4] Y. Nakamura. A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface. *Railway Technical Research Institute, Quarterly Reports*, 30(1), 1989.
- [5] C. Lachetl and P.Y. Bard. Numerical and theoretical investigations on the possibilities and limitations of nakamura’s technique. *Journal of Physics of the Earth*, 42(5):377–397, 1994.
- [6] F.J. Sánchez-Sesma, M. Rodríguez, U. Iturrarán-Viveros, F. Luzón, M. Campillo, L. Margerin, A. García-Jerez, M. Suarez, M.A. Santoyo, and A. Rodríguez-Castellanos. A theory for microtremor h/v spectral ratio: application for a layered medium. *Geophysical Journal International*, 2011.
- [7] y Jara J. M. Gómez C., Rosenblueth E. Estudio paramétrico de estructuras con disipadores de energía. Technical report, Boletín del centro de Investigación sísmica, Fundación Javier Barros Sierra, Vol.3, N 1, 1993.
- [8] PY Bard. Microtremor measurements: a tool for site effect estimation. *The effects of surface geology on seismic motion*, 3:1251–1279, 1999.
- [9] Thorne Lay and Terry C Wallace. *Modern global seismology*, volume 58. Academic press, 1995.
- [10] M. Nogoshi and T. Igarashi. On the propagation characteristics of microtremors. *J. Seism. Soc. Japan*, 23:264–280, 1970.
- [11] K. Konno and T. Ohmachi. Ground-motion characteristics estimated from spectral ratio between horizontal and vertical components of microtremor. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(1):228–241, 1998.
- [12] H. Arai and K. Tokimatsu. S-wave velocity profiling by inversion of microtremor h/v spectrum. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94(1):53–63, 2004.

- 
- [13] Sylvette Bonnefoy-Claudet, Andreas Köhler, Cécile Cornou, Marc Wathelet, and Pierre-Yves Bard. Effects of love waves on microtremor h/v ratio. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(1):288–300, 2008.
- [14] Y. Nakamura. Clear identification of fundamental idea of nakamuras technique and its applications. 2000.
- [15] PY Bard. the sesame team 2005 guidelines for the implementation of the h/v spectral ratio technique on ambient vibrations measurements, processing and interpretations sesame european research project. *SESAME European research project*.
- [16] J. Lermo and F.J. Chávez-García. Are microtremors useful in site response evaluation? *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84(5):1350–1364, 1994.
- [17] Murray Hodgson. When is diffuse-field theory applicable? *Applied Acoustics*, 49(3):197–207, 1996.
- [18] R.L. Weaver. On diffuse waves in solid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 71:1608, 1982.
- [19] L. Ryzhik, G. Papanicolaou, and J.B. Keller. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave motion*, 24(4):327–370, 1996.
- [20] F.J. Sánchez-Sesma and M. Campillo. Retrieval of the greens function from cross correlation: the canonical elastic problem. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96(3):1182–1191, 2006.
- [21] L. Margerin, B. van Tiggelen, and M. Campillo. Effect of absorption on energy partition of elastic waves in the seismic coda. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 91(3):624–627, 2001.
- [22] M. Perton, FJ Sánchez-Sesma, A. Rodríguez-Castellanos, M. Campillo, and RL Weaver. Two perspectives on equipartition in diffuse elastic fields in three dimensions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 126:1125, 2009.
- [23] R.L. Weaver. Diffuse elastic waves at a free surface. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 78:131, 1985.
- [24] GF Miller and H. Pursey. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 233(1192):55–69, 1955.
- [25] R. Hennino, N. Tregoures, NM Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, BA Van Tiggelen, and RL Weaver. Observation of equipartition of seismic waves. *Physical Review Letters*, 86(15):3447–3450, 2001.
- [26] L.E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Number Monograph. 1969.
- [27] K. Aki and P.G. Richards. *Quantitative seismology*. Univ Science Books, 2002.
- [28] H. Lamb. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 203(359-371):1–42, 1904.
- [29] C.C. Chao. Dynamical response of an elastic half-space to tangential surface loadings. *Journal of Applied Mechanics*, 27:559, 1960.



- 
- [30] E. Kausel. *Fundamental solutions in elastodynamics: a compendium*. Cambridge Univ Pr, 2006.
- [31] A. Derode, E. Larose, M. Campillo, and M. Fink. How to estimate the greens function of a heterogeneous medium between two passive sensors? application to acoustic waves. *Applied Physics Letters*, 83(15):3054–3056, 2003.
- [32] E. Larose, A. Derode, M. Campillo, and M. Fink. Imaging from one-bit correlations of wideband diffuse wave fields. *Journal of Applied Physics*, 95(12):8393–8399, 2004.
- [33] M. Campillo and A. Paul. Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science*, 299(5606):547–549, 2003.
- [34] A. Paul, M. Campillo, L. Margerin, E. Larose, and A. Derode. Empirical synthesis of time-asymmetrical green functions from the correlation of coda waves. *Journal of Geophysical research*, 110(B8):B08302, 2005.
- [35] N.M. Shapiro, M. Campillo, L. Stehly, and M.H. Ritzwoller. High-resolution surface-wave tomography from ambient seismic noise. *Science*, 307(5715):1615–1618, 2005.
- [36] K. Aki. Space and time spectra of stationary stochastic waves, with special reference to microtremors. 1957.
- [37] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Dover publications, 1964.
- [38] F.J. Sanchez-Sesma and F. Luzon. Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident p, s, and rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85(1):269–284, 1995.
- [39] M. Pilz, S. Parolai, F. Leyton, J. Campos, and J. Zschau. A comparison of site response techniques using earthquake data and ambient seismic noise analysis in the large urban areas of santiago de chile. *Geophysical Journal International*, 178(2):713–728, 2009.
- [40] R.A. Phinney. Structure of the earth’s crust from spectral behavior of long-period body waves. *Journal of Geophysical Research*, 69(14):2997–3017, 1964.
- [41] S. Kedar and F.H. Webb. The ocean’s seismic hum. *Science*, 307(5710):682–683, 2005.
- [42] J.F. Claerbout. Synthesis of a layered medium from its acoustic transmission response. *Geophysics*, 33:264, 1968.
- [43] R. Burridge, F. Mainardi, and G. Servizi. Soil amplification of plane seismic waves. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 22(2):122–136, 1980.
- [44] Flores Estrella Hortencia Citlali. *El Campo de Ondas en la zona del Lago de Texcoco: Implicaciones en el estudio del Riesgo Sísmico de la zona del lago de la Cuenca de México*. PhD thesis, Posgrado en Ciencias de la Tierra, UNAM, 2009.