



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERIA DE SISTEMAS – OPTIMACION FINANCIERA**

VALUACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN A TRAVÉS DE OPCIONES REALES: EL  
CASO DE PROYECTO DE INVERSIÓN DE FABRICANTE AUTOMOTRIZ EN MEXICO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ALEJANDRO ROMÁN ACOSTA

TUTOR PRINCIPAL  
JORGE ELIECER SANCHEZ CERON, FACULTAD DE INGENIERIA

MÉXICO, D. F. MAYO 2013

JURADO ASIGNADO:

**Presidente: M.C. Jorge Eliecer Sánchez Cerón**

**Secretario: Dr. Jesús Hugo Meza Puesto**

**Vocal: Dr. Edgar Ortiz Calisto**

**1<sup>er.</sup> Suplente: M.I. Jorge Luis Silva Haro**

**2<sup>do.</sup> Suplente: Dr. Guillermo Sierra Juárez**

**Lugar donde se realizó la tesis: Ciudad de México, Distrito Federal**

TUTOR DE TESIS:

**M.C. Jorge Eliecer Sánchez Cerón**

-----  
FIRMA

## AGRADECIMIENTOS:

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la Universidad Nacional Autónoma de México por su apoyo y patrocinio para la realización de este proyecto de tesis

Mis sinceras gracias a mis tutores, quienes me asesoraron y atendieron mis dudas a lo largo de este trabajo

Por último y no menos importante, agradezco infinitamente a mi familia siempre me ha apoyado en todo lo que he emprendido a lo largo de mi vida y que sin ellos todo esto no habría sido posible

## Contenido

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	6
INTRODUCCION .....	6
Preguntas de investigación .....	6
Objetivos de la investigación.....	6
ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO .....	7
MODELOS TRADICIONALES DE EVALUACION DE INVERSIONES.....	8
OBJETIVO FINANCIERO DE LA EMPRESA .....	8
MODELOS DE EVALUACION SIN RIESGO .....	9
TASA MEDIA DE RETORNO CONTABLE.....	9
PERIODO DE RETORNO.....	10
TASA INTERNA DE RETORNO.....	10
VALOR PRESENTE NETO .....	11
INDICE DE RENTABILIDAD .....	13
METODOS DE EVALUACION CON RIESGO .....	13
MODELOS DE FLUJO DE CAJA DESCONTADOS .....	13
MODELOS CON BASE EN EL VALOR ECONOMICO RESIDUAL .....	27
MODELOS DE EVALUACION DE INCERTIDUMBRES .....	28
OPCIONES REALES COMO METODOLOGIA DE VALUACION.....	34
HISTORICO.....	34
OPCIONES FINANCIERAS .....	36
PRECIO DE LAS OPCIONES.....	37
VALOR INTRINSECO .....	37
VALOR TEMPORAL.....	38
MODELOS DE VALUACION DE OPCIONES .....	38
MODELO BINOMIAL .....	41
VALUACION NEUTRA AL RIESGO .....	44
ARBOLES BINOMIALES MULTIPLES.....	45
VALIDACION DEL MODELO BINOMIAL .....	48
PROCESOS ESTOCASTICOS Y LEMA DE ITÔ.....	49
EL MODELO DE BLACK & SCHOLES.....	54
VOLATILIDAD .....	58
EL METODO MONTECARLO .....	59
OPCIONES REALES .....	61

ANALOGIA ENTRE OPCIONES REALES Y FINANCIERAS .....	62
LOS TIPOS DE OPCIONES REALES .....	63
COMPARACION ENTRE EL ANALISIS POR OPCIONES REALES Y VALOR PRESENTE NETO.....	64
ANALISIS POR VPN.....	65
ANALISIS POR ARBOLES DE DECISION .....	66
ANALISIS POR OPCIONES REALES.....	67
IMPACTO DEL PROYECTO SEDAN SUBCOMPACTO EN EL VALOR DEL FABRICANTE AUTOMOTRIZ .....	72
VALUACION DEL PROYECTO SEDAN SUBCOMPACTO A TRAVES DE METODO DE FLUJO DESCONTADO.....	72
VALUACION DEL PROYECTO SEDAN SUBCOMPACTO A TRAVES DE OPCIONES REALES.....	74
ESTRUCTURA DEL CASO .....	74
CONCLUSIONES .....	77
BIBLIOGRAFIA.....	81

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### INTRODUCCION

A nivel global, la importancia de la industria automotriz en las economías nacionales y su papel como propulsor para el desarrollo de otros sectores de alto valor agregado, han provocado que diversos países tengan como uno de sus principales objetivos el desarrollo y/o fortalecimiento de esta industria. México no es la excepción, pues la industria automotriz en nuestro país ha representado históricamente un sector estratégico para el desarrollo de México. Su participación en las exportaciones la coloca como la industria más importante, superando incluso a las petroleras; En 2011 contribuyó con el 23% del valor de las exportaciones totales.

En 2011, 6 de cada 7 vehículos producidos en México se exportaron, lo que posiciona a nuestro país entre los más importantes a nivel mundial, ocupando la posición número 8 en manufactura y 5 en exportación de vehículos automotores.

Por su amplia proveeduría y las ventajas competitivas a nivel mundial que ofrece México en mano de obra calificada y competitiva, posición geográfica y acceso preferencial a otros mercados, la industria automotriz mexicana aún tiene un alto potencial de crecimiento y de generación de empleos de alta calidad. México puede incrementar su competitividad como productor de vehículos y autopartes y convertirse en un importante centro de diseño e innovación tecnológica, para lo cual el desarrollo del capital humano juega un papel fundamental, ya que un bajo nivel de Capital Humano limita la implementación de procesos de mayor valor. Pero debido al alto contenido de productos expuestos a distintas monedas de todo el mundo es necesario poner énfasis en la valuación de proyectos teniendo en consideración posibles efectos de tipo cambiario que podrían afectar la aportación de valor de los proyectos.

### Preguntas de investigación

- a) ¿Cómo destruye o genera el proyecto de inversión valor financiero en el fabricante automotriz?
- b) ¿Qué variables podrían modificarse a fin de generar mayor valor?
- c) ¿De qué manera se puede evitar destruir valor en la toma de decisiones?

### Objetivos de la investigación

Objetivo primario

- a) Medir el impacto en el valor de un fabricante automotriz asiático por el proyecto de inversión de un sedan subcompacto

Objetivos secundarios

- a. Mediante los conocimientos de ingeniería financiera y en específico con el uso de la técnica de análisis de opciones reales, analizar un proyecto de inversión bajo incertidumbre en el sector industrial manufacturero
- b. Identificar puntos importantes destructores o generadores de valor.

Por lo anterior se plantean las siguientes hipótesis:

El empleo de las opciones reales para la valuación de proyectos de inversión aumenta su valor mediante la consideración de oportunidades / hechos fortuitos que permitan incrementar el *valor mediante la flexibilidad*.

*El valor generado por el proyecto es mayor a la inversión requerida y este es recuperado en un tiempo razonable por lo cual, el fabricante automotriz debe seguir con dicho proyecto.*

## **ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO**

Capítulo primero, se trata de una introducción al problema a analizar, apoyado un poco de los antecedentes históricos.

Capítulo segundo, Métodos de evaluación tradicionales, se describen diversos métodos de evaluación existentes, así como diversos problemas encontrados con estos métodos.

Capítulo tercero, Opciones Reales como metodología de Valuación.- se revisa el concepto de derivados y opciones financieras, recorriendo los métodos de valuación de opciones más utilizados. Este capítulo establece el vínculo entre opciones financieras y reales, presentando la metodología, sus conceptos matemáticos y los tipos más comunes de opciones reales en la práctica.

Capítulo cuarto, se presenta un caso utilizando la metodología de opciones reales.

## MODELOS TRADICIONALES DE EVALUACION DE INVERSIONES

### OBJETIVO FINANCIERO DE LA EMPRESA

Inmerso en un contexto de mayor competencia, las fusiones, adquisiciones y privatizaciones, el área de la evaluación de inversiones se ha convertido en estos los recientes tiempos, en una de las áreas más importantes de las finanzas mundiales. Diversos teóricos y analistas se han dedicado en gran parte al desarrollo y mejora de los métodos que permitan evaluar con mayor precisión, conocer el verdadero valor e identificar las mejores opciones entre los proyectos de inversión.

Entre las varias razones para tal demanda de precisión podremos mencionar la compra venta de empresas, disolución y liquidación de empresas, fusiones y adquisiciones, así como privatizaciones. Aún más inusual es la necesidad de evaluación y seguimiento de la toma de decisiones.

La disciplina de la evaluación de la inversión utilizada en las decisiones de asignación de capital, se refiere a la distribución en los recursos a largo plazo de disponibles entre los diferentes proyectos de inversión existentes. Estas decisiones implican el sacrificio del consumo de hoy a cambio de consumo en periodos futuros, que representan la regla para las decisiones que debe de tomar una empresa o un individuo a diario.

Como regla general, los individuos tratan de tomar decisiones de inversión que maximizan su satisfacción o el consumo en el tiempo. Del mismo modo, las empresas se centran en maximizar la riqueza de sus accionistas, ayudándoles a lograr su objetivo de consumo máximo.

El análisis financiero tiene pues por objetivo proporcionar los medios para hacer más flexible decidirse por las inversiones más adecuadas y que ofrezcan mayores ventajas, pero siempre tomando en cuenta el equilibrio riesgo-rendimiento.

Al evaluar una inversión real, tratar de obtener su valor razonable, sin embargo vale la pena señalar que existe un valor de la inversión el cual se determinara teniendo en cuenta las diferentes perspectivas e incertidumbre.

El proceso de valuación, implica una serie de valuaciones subjetivas que influyen en el valor resultante. Las percepciones que se tienen sobre el valor pueden ser muy variadas, algunos pueden ver graves restricciones a la inversión, mientras que otros pueden ver posibilidades de aplicación de ajustes estratégicos y garantizar un buen rendimiento.

Además, varios factores influyen en las decisiones de inversión, tales como las condiciones de la demanda y los precios, los diferentes escenarios macroeconómicos, el comportamiento demográfico, los cambios en la legislación fiscal, las presiones de las nuevas tecnologías, las tasas de interés, tipos de cambio y la inflación.

En respuesta a este entorno turbulento y la creciente necesidad de la evaluación y valuación de proyectos alternativos para su elección, la disciplina financiera ha ofrecido a lo largo de su evolución los distintos métodos para calcular el valor de una inversión, es, sin embargo una formula exacta. Lo ideal sería que se obtuviera un resultado científico y perfecto, pero ningún

método parece ser absolutamente adecuado para todas las situaciones posibles del mundo real.

### **MODELOS DE EVALUACION SIN RIESGO**

Esta terminología engloba un conjunto de técnicas de evaluación en su estado más básico. Esto es sobre el supuesto de que el riesgo o la incertidumbre no son tomados en cuenta en los primeros análisis para la toma de decisiones. Las principales metodologías sobre este enfoque son:

- Tasa media de retorno contable
- Periodo de retorno
- Tasa interna de retorno
- Valor presente neto
- Índice de Rentabilidad

Es importante mencionar que estos mismos métodos pueden ser utilizados considerando el factor riesgo, lo cual será demostrado conforme vaya avanzando este trabajo. Todavía para fines de segregación y presentación, en esta sección se presentaran en su estado más básico, esto es, sin inclusión de incertidumbre.

### **TASA MEDIA DE RETORNO CONTABLE**

Este método es posiblemente el más antiguo para el análisis de inversiones. Está basado en la comparación de los flujos generados por los proyectos con el monto de la inversión inicial. Esta técnica falla debido a que no considera el valor del dinero en el tiempo de los flujos del proyecto, al utilizar esta regla de resultado contable como una medida.

El concepto de ingresos netos no muestra el potencial de valor agregado a la empresa, además entre las críticas al mismo se destacan las hechas por Rapaport (1995) y Copeland (1995):

- Los métodos alternativos contables pueden ser empleados
- Requerimientos de inversión son excluidos
- Valor del dinero en el tiempo es ignorado
- Efectos de estacionalidad
- Distorsión causada por inflación
- Efectos de partidas no recurrentes y extraordinarias

Usualmente, las demostraciones contables deben ser ajustadas para aproximarse a lo que sería la situación económico financiera (Valor económico) de la empresa. Ajustes típicos reflejan una manipulación sobre partidas como la depreciación, inventarios, activos intangibles y otros objetos que forman parte del patrimonio. Entre otros factores que dificultan el uso de las demostraciones contables como indicador de valor económico de una empresa se encuentran:

La información financiera se basa principalmente en costos históricos y no atribuyendo sus valores actuales y justos (de mercado)

## PERIODO DE RETORNO

Esta regla define el número de periodos (medidos en años) necesarios para la recuperación de la inversión inicial. Usualmente un proyecto con menor periodo de retorno será seleccionado en lugar de otro, debido a que este periodo calculado para este proyecto será más atractivo para la empresa.

La diferencia principal entre este método y la de la tasa media de retorno contable es que en este último es utilizado el beneficio neto contable, en cuanto a la regla del periodo de retorno hace uso de los ingresos de efectivo para el cálculo de la recuperación de la inversión.

El cálculo del periodo de retorno es extremadamente simple y rápido y por esto este método se presenta como ampliamente conocido y aplicado por analistas financieros. Sin embargo, el método tradicional no toma en cuenta el valor del dinero en el tiempo (ej. No hay diferencia entre un flujo ahora y en uno que será dentro de dos años) y tal como la tasa media de retorno contable no sirve como medida de rentabilidad, debido a que los flujos de caja posteriores al momento de la recuperación de la inversión son ignoradas.

Para aminorar tal deficiencia, se recomienda calcular el periodo de retorno a valor presente, esto es el periodo de recuperación descontado. Este método considera el espacio de tiempo entre el inicio del proyecto y el momento en el que la suma de los flujos de caja traídos a valor presente se torna positiva.

## TASA INTERNA DE RETORNO

La tasa interna de retorno es una medida de rentabilidad. Por definición, la TIR es una tasa de descuento que iguala el valor presente de los flujos de efectivo futuros a la inversión inicial, como lo demuestran los datos y gráfico a continuación:

Año	Flujo	5%	0%	10%	15%	20%
	-\$	-\$	-\$	-\$	-\$	-\$
0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	\$	\$	\$	\$	\$	\$
1	60.00	60.00	57.14	54.55	52.17	50.00
	\$	\$	\$	\$	\$	\$
2	60.00	60.00	54.42	49.59	45.37	41.67
		\$	\$	\$	-\$	-\$
<b>VPN</b>		<b>20.00</b>	<b>11.56</b>	<b>4.13</b>	<b>2.46</b>	<b>8.33</b>

Tabla. Flujo de caja comparando distintos TIR

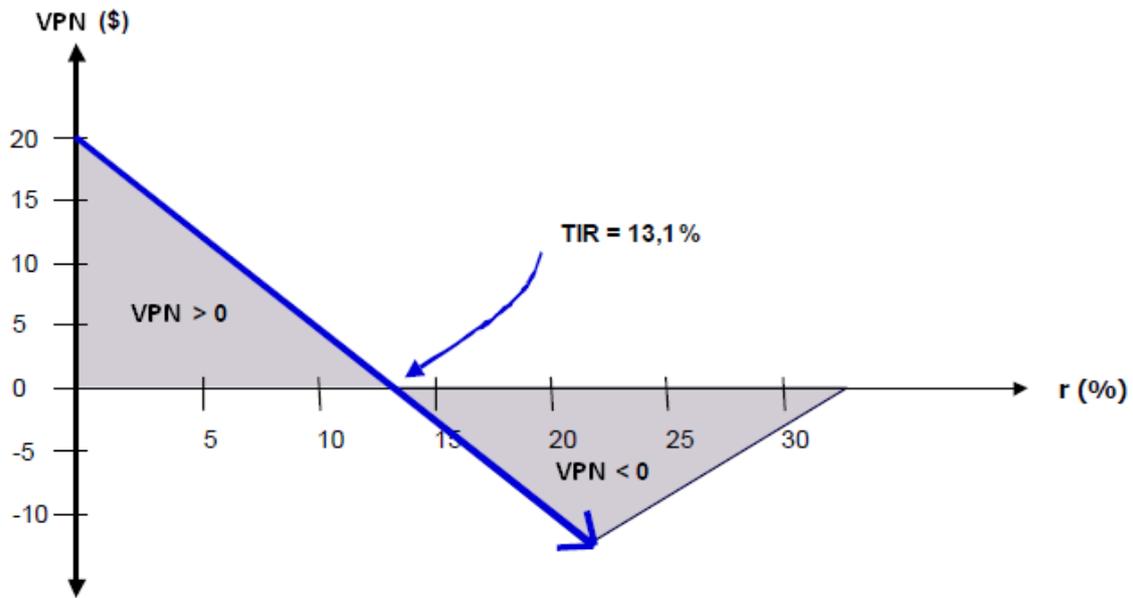


Figura. Perfil de la tasa interna de retorno

En análisis de inversiones se acostumbra a utilizar la TIR del proyecto con la tasa mínima o deseada, que debe ser menor a la TIR. Las empresas determinan sus tasas mínimas en base a su costo de financiamiento y en el riesgo del proyecto. Enseguida son proyectados los flujos de caja futuros y se calcula la TIR.

La TIR es extremadamente popular pues es intuitivo y hace posible la comparación entre otros proyectos. Sin embargo, a pesar de incorporar el concepto del valor del dinero en el tiempo y siendo una evolución de los métodos de periodo de retorno y de resultado contable, un análisis hecho solamente por TIR nos dará resultados no realistas. La TIR no nos servirá para aceptar reinversiones y mucho menos servirá como parámetro para la aceptación o rechazo de un proyecto.

Un segundo problema que existe con la TIR, es que es posible la existencia de múltiples soluciones de un único proyecto. En estos casos la difícil decisión de saber cual comparar con la tasa mínima o deseada la vuelve muy poco confiable.

### VALOR PRESENTE NETO

En ausencia de la flexibilidad administrativa; el concepto de VPN es considerado como el método más consistente como el objetivo de la empresa de maximizar la riqueza de los accionistas. Otros métodos alternativos (tales como la regla del periodo de retorno, retorno contable y tasa interna de retorno), a pesar de ser ampliamente utilizados en el mundo corporativo, han sido juzgados como inferiores al VPN en la literatura financiera.

El valor presente neto de una inversión es la diferencia del valor presente de las entradas y salidas de caja presentes y futuras, descontadas a la tasa de interés (tasa de descuento). De esta forma y una vez que los VPN son calculados, la riqueza de los accionistas será maximizada al escoger los proyectos con los VPN de valor positivo. Las empresas con restricción de capital buscan los proyectos con mayor VPN.

La formula de VPN de ingresos futuros puede ser escrito conforme se muestra a continuación:

$$VPN = \sum_{t=1}^T \frac{Ct}{(1+r)^t} - I$$

Donde:

r= tasa de descuento

Ct = el flujo de caja para el periodo t

I = inversión inicial

T = numero de periodos del proyecto

Las ventajas principales del método VPN son:

Al contrario del retorno contable, el método VPN usa flujos de caja en lugar de ingresos netos, incluyendo la depreciación como fuente de recursos. Esta característica hace que este enfoque sea consistente con la teoría financiera moderna;

El VPN al contrario del retorno contable y del periodo de retorno (simples) reconoce el valor del dinero en el tiempo

Al aceptar proyectos con VPN positivos, la empresa también aumentara su valor y no correrá el riesgo de aceptar un proyecto con retorno contable negativos y evita el problema del proyecto que tenga múltiples tasas internas de retorno;

En la comparación entre dos proyectos de inversión, el método VPN permite que sea encontrada una tasa de descuento ajustada al riesgo de cada proyecto, eliminando el problema de comparación de proyectos con distintos perfiles de riesgo.

Escoger entre dos proyectos de inversión mutuamente excluyentes (o independientes), donde distintas tasas de descuento pueden invertir el orden de preferencia entre los proyectos, el método VPN es siempre el más adecuado, pues evita que las decisiones erradas sean tomadas con base en la TIR individual de los proyectos.

El punto crítico del enfoque del VPN es la decisión sobre que tasa de descuento utilizar. Las tasas de descuento son influenciadas por el nivel de riesgo y duración del proyecto y tienden a subir tal como las tasas de interés e inflación.

Otra limitante de este enfoque reside en la capacidad de la administración de hacer proyecciones correctas de los flujos de caja futuros y es que los supuestos permanecen estáticos durante todo el proyecto.

En el mundo corporativo real, cuanto más largo sea el horizonte de tiempo más incertidumbre habrá y mas imprecisos serán las proyecciones de los flujos de caja, debido a que estos flujos son influenciados directamente por las ventas futuras, costos en general (mano de obra, materiales, costos indirectos), tasas de interés, políticas gubernamentales, aspectos climáticos,

cambios demográficos, políticas internacionales, preferencia de consumidores, nuevas tecnologías, etcétera.

De este modo el VPN con errores en la proyección de flujos pueden llevar a la aceptación de un proyecto que debería ser rechazado o viceversa. Además de que la estimación de las tasas de interés futuras es difícil e incierta, el supuesto de que dicha tasa es la misma durante todos los periodos del proyecto no es realista. Esta situación inclusiva también ocurre con la TIR y el periodo de retorno ajustado, que parten de la misma idea.

No obstante con estas limitaciones el VPN es considerado en un escenario con ausencia de flexibilidad administrativa, la más consistente con el objetivo de la empresa de maximizar la riqueza de sus accionistas por la literatura moderna y por sus practicantes.

### **INDICE DE RENTABILIDAD**

El índice de rentabilidad compara el valor presente de los ingresos de caja futuros con la inversión inicial de un proyecto, conforme a la siguiente fórmula:

$$IR = \frac{VP \text{ de flujo de caja}}{Inversión \text{ inicial}}$$

En este método, apenas proyectos son resultado mayor a 1 son aceptados, de esta forma, el mismo resultado es encontrado a través del VPN y el IR, debiendo ser tomadas las mismas precauciones en cuanto a la tasa de descuento a usar para el cálculo del valor presente de los flujos de caja.

### **MÉTODOS DE EVALUACION CON RIESGO**

En los modelos de evaluación que se presentan en la sección anterior incluyendo el VPN, las alternativas se presentan en su forma más simple, sin ajustar por riesgo, bajo el supuesto de que los valores del flujo de efectivos son precisos, sin posibilidad de errores en su preparación y que durante la vida del proyecto no existen cambio de planes (flexibilidad).

En este tema se trata de abordar la relación entre el costo de capital, inversión y riesgo, esto es dividiendo los enfoques en tres categorías:

- a) Modelos de valuación que se ajustan al concepto de flujo de caja descontados, agregando a los tradicionales análisis de valor presente neto el concepto de riesgo
- b) Los modelos basados en el valor económico residual, siguiendo el concepto de los resultados económicos en un enfoque de gestión
- c) Métodos probabilísticos que analizan la incertidumbre en la inversión y proponen soluciones matemáticas para agregar la flexibilidad en la gestión y la posibilidad de futuras decisiones por el análisis del modelo

### **MODELOS DE FLUJO DE CAJA DESCONTADOS**

Este enfoque se basa en la regla del Valor Presente” o el concepto del valor del dinero en el tiempo.

Como podemos ver, los métodos basados en el flujo de efectivo descontado (TIR, VPN e índice de rentabilidad) son significativamente superiores que los que no se basan en este concepto, puesto que incorporan la noción de que es importante saber la ubicación de estos flujos en el tiempo. Entre los métodos de flujo descontado destaca el del VPN como el más adecuado y el

mas recomendado por la literatura de finanzas tradicionales para el análisis de inversiones, con el objetivo de maximizar la riqueza de los accionistas y el de incrementar el valor de la empresa en el mercado.

Sin embargo, hasta este punto se supone un mundo libre de riesgos e incertidumbre en el cálculo del valor presente neto de las alternativas de inversión. Este supuesto está muy alejado de la realidad de las decisiones de inversión y resalta la necesidad de incorporar el concepto de riesgo en el análisis de inversiones de los métodos de flujo descontado.

En condiciones de incertidumbre, el valor de los flujos de efectivo individuales debe ser sustituido por una distribución de probabilidad de los posibles valores, cuya dispersión refleje el grado de riesgo de la variable.

### *Tasa de descuento ajustada*

En el cálculo del valor presente neto libre de riesgo, el objetivo de maximizar la riqueza de los accionistas se consigue mediante la selección de proyectos que, después de descontar los flujos futuros de efectivo por su costo de oportunidad (tasa libre de riesgo, tasa requerida por la empresa o de un sector similar), presenten un VPN positivo.

Al introducir la incertidumbre la misma idea básica permanece sin cambios, pero por inversiones del sector similares darán a entender un grado de riesgo similar. Así la tasa de descuento  $r$  se sustituye por  $k$ , que representa la suma de  $r$  (tasa libre de riesgo), mas una prima de riesgo ( $p$ ) utilizada para compensar el riesgo asociado del proyecto. Por lo tanto,  $k = r + p$  y la nueva fórmula del VPN es:

$$VPN = \sum_{t=1}^T \frac{E(C_t)}{(1+k)^t} - I$$

Donde:

$K$ = la tasa de descuento ajustada al riesgo

$C_t$ = el flujo de caja para el periodo  $t$

$I$ = inversión inicial

$T$ = número de periodos del proyecto

### *Costo promedio ponderado de capital (WACC)*

Normalmente, los proyectos de inversión que se ajustan al mismo perfil de riesgo de una empresa no afectan el riesgo global de la corporación y puede ser descontado con el costo promedio ponderado de capital (WACC Weighted average capital cost).

El costo de capital de una empresa sirve como un parámetro en la toma de decisiones de inversiones en general, refleja la tasa de rendimiento mínima para cubrir el costo de los fondos para financiar la inversión. En otras palabras el costo de capital es la tasa de rendimiento (costo) que la compañía debe pagar a los inversionistas para que estos tengan interés en la compra de bonos y acciones.

Los fondos disponibles para una empresa se derivan tanto de fuentes internas como externas. Las fuentes externas de financiamiento son los proveedores (cuentas por pagar), préstamos a largo plazo (principalmente bonos y obligaciones) y las acciones. Las fuentes internas, a su vez, son los ingresos cuyo costo puede ser comparado con el de la emisión de nuevas acciones.

Los costos de capital de una empresa reflejan su riesgo, pues están determinados por el mercado. Obviamente, si el riesgo es alto, el rendimiento requerido es elevado, y si el riesgo es

bajo, el rendimiento también será bajo, a menos que sea afectada por la incertidumbre económica.

También existe el riesgo por la duración de la inversión. Entre más largo sea el plazo de la inversión, mayor será la incertidumbre y por lo tanto, el costo de capital, que incluye el riesgo de pérdida en caso de quiebra o insolvencia de la empresa. Del mismo modo el rendimiento requerido por los inversionistas será mayor que el requerido en una inversión de corto plazo. Esto es debido a la demora y por que los inversionistas requirieren una prima adicional por el riesgo adicional al que se enfrentan por esta situación.

Así podemos dividir el costo de capital en dos categorías principales:

El costo de capital de terceros y el costo de capital propio.

El cálculo del costo de capital de terceros (o costo de la deuda) es un ejercicio relativamente sencillo, una vez que las tasas de interés son el resultado de las tasas de mercado y precios de los bonos emitidos por la empresa. Entre los factores que influyen en el costo de la deuda está el nivel actual de las tasas de interés, el riesgo de incumplimiento por la empresa y las ventajas fiscales asociadas a estos préstamos. Además dado que el costo de la deuda es deducible de impuestos, el cálculo de la misma debe ajustarse para reflejar esto.

El costo de capital propio a su vez, no es tan fácil de calcular y su cálculo requiere algunos enfoques que se pueden hacer mediante el cálculo del valor presente de los dividendos futuros esperados, o las metodologías que tratan de estimar el costo de capital teniendo en cuenta el riesgo de mercado, como el CAPM (Capital Asset Pricing Model) y el APT (Arbitrage Pricing Theory).

Para calcular el costo promedio ponderado de capital, tanto el costo de capital de terceros como el costo del capital propio se consideran en la siguiente ecuación:

$$WACC = K_i (1 - IR) \frac{P}{P + PL} + K_e \frac{PL}{P + PL}$$

Donde:

IR= tasa de impuesto sobre la renta

K<sub>i</sub>= costo de la deuda

K<sub>e</sub>= costo de capital

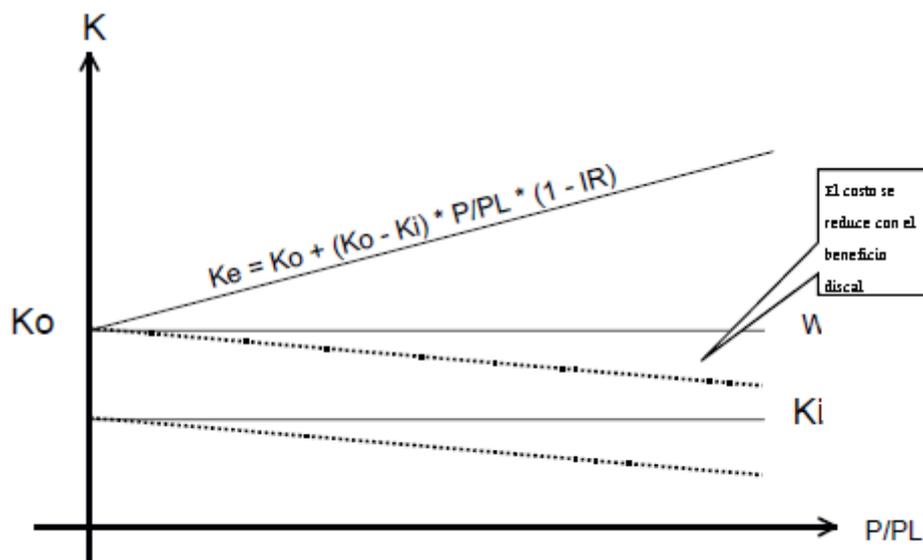
P= pago de pasivos (deudas)

PL= patrimonio neto

La formula anterior es el resultado de la propuesta de Modigliani y Miller (1988), y ya se considera el impuesto como una parte importante del cálculo del WACC. Antes de las publicaciones de Modigliani y Miller, la teoría convencional considera que los cambios en la estructura de capital influyen en el valor del WACC y, en consecuencia, el valor de la empresa. De esta manera sería posible para la empresa lograr una estructura financiera optima.

En su propuesta Modigliani y Miller, demuestran que el valor de la empresa dependerá de cómo se financia, ya que el costo promedio de capital permanecerá invariable independientemente de su estructura de capital. El modelo propuesto por los autores incluye dos suposiciones. La primera que establece que el valor de mercado de una empresa apalancada no depende del cambio en la estructura de capital, y la segunda afirma que el costo de capital aumenta cuanto mayor sea la proporción entre los pasivos y el patrimonio neto. Esto se justifica basado en el hecho de que cualquier aumento en la proporción de la deuda sobre los recursos totales de la empresa se vería compensado por la percepción de riesgo de mercado, que automáticamente aumentaría las tasas de captación de la empresa. Equilibrando el balance del WACC.

Sin embargo, al incorporar los impuestos, Modigliani y Miller concluyeron que los beneficios fiscales hacen que una mayor proporción de las deudas a terceros sea favorable para reducir el costo promedio ponderado de capital como se muestra en la siguiente grafica



Donde:

$K_o$  = el costo de capital de una empresa sin deuda

Cabe señalar aun, que la suposición presume la perfección del mercado (lo que no ocurre en la realidad), ya que un aumento en la proporción de la deuda puede llevar a la empresa a una situación no deseada de insolvencia. Además el uso de algunas fuentes de financiamiento (principalmente los subsidiados, ampliamente utilizados en diversos sectores económicos de América latina y otras regiones y que son independientes de los precios de mercado) también puede invalidar la propuesta de Modigliani y Miller pues el aumento o disminución de riesgo de la empresa puede no tener ningún efecto en el costo de la deuda.

A pesar de su indiscutible contribución a la teoría de las finanzas modernas, las propuestas de Modigliani y Miller puede aceptar junto con la teoría convencional de aceptar la idea de que el apalancamiento financiero otorga beneficios fiscales al valor de la empresa hasta cierto punto

y que las deudas en exceso causan efectos adversos sobre el costo de capital y el valor de la empresa.

### **Modelo de descuento por dividendos**

Una forma de estimar el costo de capital es a través del descuento de los dividendos futuros. Los dividendos son la única forma de flujo de efectivo que reciben los inversionistas como beneficio por su inversión mientras sean los dueños de las acciones de la empresa. Así, se dice que el valor de una acción es igual al valor presente de los dividendos esperados, es decir:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + K_e)^t}$$

Donde:

P<sub>0</sub>= Valor de la acción

D<sub>t</sub>= Dividendo por acción esperado en el periodo t

K<sub>e</sub>= Costo de capital propio.

Asumiendo que los dividendos por acción crecen a una tasa g por periodo y que las tasas g y K<sub>e</sub> son constantes (K<sub>e</sub> es mayor que g) Gordon y Shapiro (1953) llegaron a la siguiente conclusión simplificada:

$$P_0 = \frac{(D_0 \times (1 + g))}{(K_e - g)} = \frac{D_1}{(K_e - g)}$$

De donde se obtiene:

$$K_e = \frac{D_1}{P_0} + g$$

Donde g = 0 (no se espera crecimiento de los dividendos), o en acciones preferentes con dividendos fijos, el costo de capital es el siguiente:

$$K_p = \frac{D_p}{P_0(1 - U)}$$

Donde:

K<sub>p</sub>= tasa de retorno exigida por los tenedores de acciones preferenciales

D<sub>p</sub>= dividendo fijo por acción preferencial

P<sub>0</sub>= precio por acción preferencial

U= costo de colocación de acciones preferenciales, como proporción de P<sub>0</sub>

### **Modelo de fijación de precios de activos financieros (CAPM)**

El CAPM (Capital Asset Pricing Model) proporciona una metodología relacionada con el concepto de diversificación de los riesgos de relacionar el rendimiento esperado de un activo (WACC de la empresa o rendimiento del proyecto), el riesgo que representa el mercado (no diversificable). Esto es basado en la correlación del rendimiento de un activo y el del mercado como un todo.

Con el fin de facilitar la comprensión de este modelo es importante presentar algunos de los conceptos más básicos:

- **Rendimiento esperado**

El rendimiento esperado o  $E(r_j)$ , se refiere a cuanto un individuo espera recibir por una inversión en un determinado activo para un periodo futuro y es utilizado como medida de resultado de esta inversión. Debido a la falta de información precisa, este rendimiento puede basarse en expectativas individuales, en rendimientos obtenidos por datos históricos o en casos más raros, en información privilegiada.

Usualmente se utiliza la media de la distribución de frecuencia de los datos históricos de rendimientos como un estimado de rendimientos esperados.

- **Varianza y desviación estándar**

Entre las diversas maneras posibles para evaluar el riesgo en el rendimiento de una inversión, o su volatilidad, la varianza que representa una medida de cuadrados de las diferencias entre los rendimientos y su retorno esperado. Ha sido la medida más ampliamente utilizada y es expresada por la siguiente fórmula:

$$Var(r_j) = \frac{\sum (r_j - \bar{r}_j)^2}{n - 1}$$

Donde

$$\begin{aligned} r_j &= \text{tasa de rendimiento observada} \\ \bar{r}_j &= \text{tasa de rendimiento esperada} \\ n &= \text{numero de observaciones} \end{aligned}$$

El motivo de que se tome la media dividiéndose por (n-1) en vez de n es que eso da un mejor estimado de la varianza poblacional utilizando una muestra. Para los datos de muestra completa es mejor el uso de n.

La varianza se presenta como la versión estandarizada de la desviación estándar ( $\sigma$ ) o o raíz cuadra de la varianza ( $\sigma^2$ ). Para determinar la desviación estándar, se calcula la varianza y se toma la raíz cuadrada positiva del resultado. El amplio uso se debe al hecho de que la desviación estándar utiliza las mismas unidades que la medida de media. La varianza, por otro lado, se expresa en cuadrados de las unidades de la media.

- **Covarianza y correlación**

Tanto la covarianza como la correlación son medidas estáticas que hacen posible evaluar el grado de relación entre dos variables. Así, la fórmula de covarianza permite medir si las tasas de retorno tiene una asociación positiva (produciendo una covarianza positiva), o asociaciones negativas a través de covarianzas negativas. En los casos en los que no haya relación entre las variables, entonces la covarianza será cero. Suponiendo dos activos, A y B, pudiéramos escribir algebraicamente su covarianza de la siguiente manera:

$$\sigma_{A,B} = COV(r_A, r_B) = \frac{\sum (r_A - \bar{r}_A) \times (r_B - \bar{r}_B)}{n - 1}$$

Dónde:

$r_A$  y  $r_B$  = Retorno de efectivos de los dos activos

$\bar{r}_A$  y  $\bar{r}_B$  = Retornos esperados de los activos

Como el orden de los factores es irrelevante para el resultado, es posible afirmar que

$$COV(r_A, r_B) = COV(r_B, r_A)$$

A pesar de su indiscutible importancia estadística, la interpretación de la covarianza sobre los mismos problemas de varianza, pues es medida por el cuadrado de las unidades de la media, y por tanto, no puede ser directamente comparada a esta. Como solución a esta interrogante, podemos calcular la correlación, dividiendo la covarianza por las desviaciones estándar de los retornos de ambos activos en cuestión, según se muestra:

$$\rho_{A,B} = \text{Corr}(r_A, r_B) = \frac{COV(r_A, r_B)}{\sigma_A \sigma_B}$$

Donde  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$  son las desviaciones estándar de los activos A y B. una vez que las desviaciones estándar son siempre positivas, o sino la correlación será siempre el mismo de la covarianza, y el resultado siempre estará situado entre -1 y +1.

- **Diversificación**

Uno de los supuestos básicos adoptados por el CAPM y de la diversificación, es asumir que existe una relación estrecha entre los retornos de dos títulos individuales y los retornos de una cartera representativa del mercado, con base en la eficiencia de mercado de acciones (que asimila rápidamente toda la información disponible). Así, cuando los precios de distintas acciones se mueven en una misma dirección (o sea que sus retornos tienen una correlación positiva perfecta). Movimientos opuestos de otras acciones dentro de la misma cartera tienen a anular el efecto de este movimiento, de tal forma que la variabilidad de una cartera de acciones puede ser substancialmente menor que la variabilidad media de retorno de una acción individual.

En términos matemáticos, la varianza combinada de los retornos de dos activos  $r_1$  y  $r_2$  (negativamente relacionados) es menor que la suma de las varianzas individuales, dado que:

$$Var(r_1 + r_2) = Var(r_1) + Var(r_2) + 2Cov(r_1 r_2) < Var(r_1) + Var(r_2)$$

$$\text{Si } Cov(r_1 r_2) < 0$$

La volatilidad del mercado ofrece, de esta forma, un denominador común para la valuación de los grados de riesgo de activos, títulos o proyectos de inversión individuales. Por lo tanto, del punto de vista del accionista o del inversionista, el cual puede seleccionar cualquier título para su cartera, solamente el riesgo no diversificable (o premio por la contribución marginal del activo en cuestión para el riesgo de cartera) se considera relevante. Este premio depende, a su vez, de la covarianza entre los rendimientos de los activos y la cartera de mercado en su conjunto.

- **Portafolio Eficiente**

Al computar los efectos de la diversificación en varias combinaciones posibles proporciones de una cartera compuesta por dos valores A y B (correlación negativa), podemos trazar una curva, donde cada punto representa a la vez el rendimiento esperado como la desviación estándar de rendimiento. Observando el gráfico siguiente, tenga en cuenta el punto de MV, donde es la de mínima varianza o el riesgo a una combinación de bonos A y B:

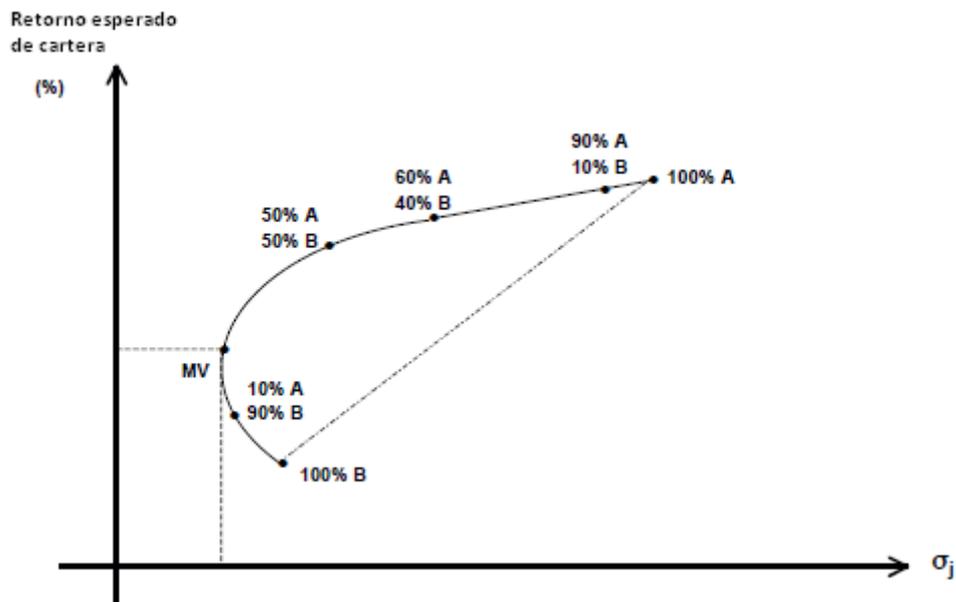


Figura. Conjunto eficiente de dos activos.

Sabiendo que todas las combinaciones posibles de A y B se muestran en la figura anterior, los inversores probablemente van a querer el punto más a la izquierda y arriba, donde le podría dar el menor riesgo para el aumento de la rentabilidad, asumiendo su aversión al riesgo. Del mismo modo, en ningún caso podrá ser de interés para los inversores de obtener una tarjeta con un rendimiento inferior a la cartera de mínima varianza, sería posible obtener un mayor rendimiento con menor riesgo. Por lo tanto, la parte pertinente de la curva anterior es tan sólo un punto entre la MT y el punto A, llamado eficiente.

Cuando la correlación entre dos valores es igual a uno, no hay efecto de diversificación, y su representación gráfica es la línea trazada entre los puntos A y B. Del mismo modo, menor es la correlación, mayor es la curvatura, llegando al extremo en el caso de una correlación igual a -1, extremadamente raro en los títulos comunes, pero puede ser creado artificialmente mediante la utilización de instrumentos derivados. Esta propiedad permite valorar los valores se correlacionaron negativamente, mientras que el otro baja y viceversa. Así que cada vez existe una correlación negativa entre dos activos A y B, un pequeño aumento de A actúa como una cobertura para una cartera compuesta sólo de B.

Del mismo modo es posible rastrear el conjunto eficiente de dos activos, una combinación de muchas combinaciones posibles de los activos se distribuyen en un área, pero en este caso el límite superior, llamada la frontera de eficiencia (que se llama la recta tangente mercado de capitales) representa el conjunto eficiente de todos los activos, incluso cuando se combinan sin los activos de riesgo y los activos en riesgo.

- **Línea Característica**

La línea característica se puede calcular matemáticamente, esta simplemente representa la relación entre los rendimientos del título y del rendimiento comercial. La inclinación o pendiente que se llama la versión beta ( $\beta$ ), y es precisamente el riesgo no diversificable, o sensibilidad o tasa de cambio en el rendimiento de un activo (o proyecto de título)  $r$ , dado un cambio de 1% mercado  $r_m$  ida y vuelta, la siguiente ecuación:

$$r_j = \alpha_j + \beta_j r_m + \varepsilon_j$$

Donde  $\varepsilon_t$  es el error aleatorio o residual, que representa la desviación de los retornos reales del activo  $j$  de su retorno previsto por la regresión e incorpora otros factores específicos del activo  $j$  y  $\alpha_j$  es la intersección.

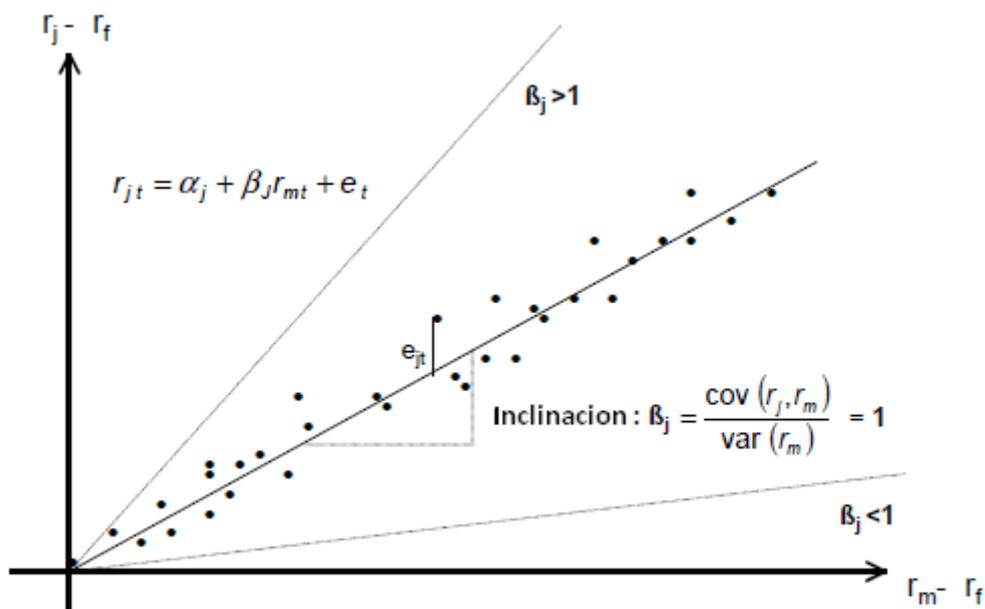


Figura. Línea Característica

Así, el modelo propone la división del riesgo total entre el riesgo diversificable (riesgo de mercado) y el riesgo no diversificable (específico del activo, empresa o industria en cuestión). Al medir el riesgo como la varianza de los retornos, se obtiene:

$$\begin{aligned} Var(r_j) &= Var(\alpha_j + \beta_j r_m + \varepsilon_j) \\ &= Var(\alpha_j) + Var(\beta_j r_m) + Var(\varepsilon_j) \\ &= \beta_j^2 Var(r_m) + Var(\varepsilon_j) \end{aligned}$$

Una vez que  $Var(\alpha_j) = 0$ , por ser  $\alpha_j$  una constante.

Una parte dada por el factor  $\beta_j^2 Var(r_m)$  se conoce como riesgo de mercado, sistemático o no diversificable, como surge de la correlación entre los rendimientos del activo en cuestión y del mercado (impulsada por las fuerzas macroeconómicas que afectan a todos los valores en

mercado, tales como la inflación, devaluación de la moneda, etc. y eso no puede ser diversificada).

El segundo término de la ecuación,  $\text{Var}(\epsilon_t)$  se conoce como riesgo diversificable o no sistemático, y representa el riesgo derivado de la variabilidad de los factores específicos de la empresa o su sector de actividad. Este riesgo, sin embargo, puede ser eliminado por un inversor con una cartera bien diversificada, y el único riesgo relevante (que se requiere de una prima suplementaria a cambio) es el riesgo sistemático,  $\beta_j^2 \text{Var}(r_m)$ . Una vez que  $\text{Var}(r_m)$  es también constante para todos los activos, una medida para distinguir entre el riesgo activo es el beta ( $\beta_j$ ), a su vez es igual a  $\frac{\text{Cov}(r_j, r_m)}{\text{Var}(r_m)}$ , y con denominador nuevamente constante para todos los activos.

Así, desde la dispersión en torno a la función de la línea no es muy grande (en caso de que las fuentes adicionales de riesgo también debe ser considerado), el CAPM proporciona una forma fácil de comparar los niveles de riesgo de los activos individuales, a través de su versión beta, como una buena aproximación del riesgo sistemático de un activo. Entre las posibles fuentes de riesgo adicional, podemos citar el clima económico en general, la evolución de la política, las tendencias del sector, los factores específicos de la empresa, la inflación, los cambios en la tasa de impuesto sobre la renta y de fuentes internacionales de riesgo.

Al revisar el CAPM, Trigeorgis (1995) lista los siguientes supuestos fundamentales de este modelo para la utilización de beta como factor único para determinar la compensación por el riesgo (premio):

- Inversionistas son racionales y su objetivo es la maximización de la utilidad esperada de su riqueza al final de un periodo;
- Los inversionistas son adversos al riesgo y diversifican sus carteras eficientemente con base en la media y la varianza de retorno de la cartera;
- Los inversionistas poseen expectativas homogéneas, ósea, estimados idénticos de los valores esperados, varianzas, covarianzas y retornos por activos de riesgo;
- Existe una tasa de interés libre de riesgo  $r_f$  al cual los inversionistas pueden prestar o tomar préstamos.
- No existen impuestos o costos de transacción y los costos de fracaso son inmateriales, además, toda información esta libremente disponible para los inversionistas;
- Todos los activos son perfectamente divisibles y líquidos;
- El mercado es competitivo, de tal forma que los inversionistas saben que no son capaces de influenciar el precio o el monto de activo con base en sus movimientos.

Los primeros tres se refieren a las hipótesis del comportamiento de los inversores, y los cuatro últimos están relacionados con el perfecto funcionamiento de los mercados de capitales.

Como puede ver, las hipótesis están sujetas a varias preguntas, y los académicos han dedicado un gran número de estudios y publicaciones sobre estos temas. En la práctica, a pesar de la dificultad de obtener las betas con alta precisión (aunque simplificado sin flexibilidad), el CAPM proporciona una medida aceptable y es ampliamente utilizado para medir el riesgo de un activo.

Después de determinar beta, el siguiente paso es su trabajo para obtener la prima de riesgo, o tasa de rendimiento requerida. Para ello, el modelo utiliza el principio de la línea del mercado de valores (SML - Security Market Line), que es una representación gráfica del CAPM, lo que sugiere que la prima de riesgo esperado de los activos de J en la tasa de interés libre de riesgo,  $E(r) - r_f$ , es directamente proporcional a su beta,  $\beta_j$ , y la prima de riesgo que esperaba el mercado,  $E(r_m) - r_f$ , dando como resultado la siguiente ecuación fundamental del CAPM para obtener la tasa de rendimiento requerida, de acuerdo con Ross (1995):

$$E(r_j) = r_f + \beta_j[E(r_m) - r_f]$$

Dado que el beta de un activo en particular es la medida apropiada de riesgo, se puede afirmar que el retorno esperado de un activo debe ser una relación positiva con su beta. Con los datos anteriores de la fórmula anterior, la tasa de rendimiento requerida se encuentra fácilmente en el SML, que es la línea descrita en la figura a continuación:

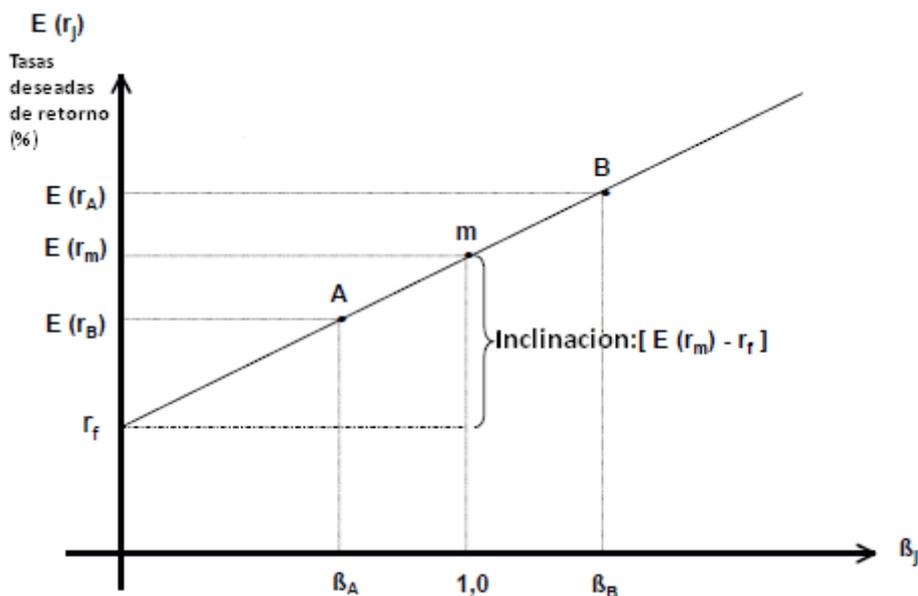


Figura. Línea de mercado de títulos (SML)

Con base en SML, podemos decir que cualquier activo con un retorno del riesgo tendrá una beta pre-determinado por la línea del mercado de valores. Esta relación se debe a la hipótesis de un mercado perfecto, un inversor puede invertir su dinero en el mercado de la cartera, con un retorno  $E(r_m)$ , y tomar préstamos al tipo de interés libre de riesgo, logrando de esta manera, cualquier combinación a lo largo de la SML.

Por lo tanto, el inversor sólo aceptará tener activos con un beta particular, si se recibe a cambio la devolución correspondiente dada por SML. Esta tasa de rendimiento, a su vez, será la tasa que se utiliza como un costo de capital para descontar los flujos futuros de efectivo de un proyecto de inversión específico, o para la determinación de la WACC de la empresa, si el proyecto en cuestión tiene el mismo perfil empresa de riesgo.

Los enfoques de CAPM y LME, sin embargo, se debe utilizar con precaución, ya que el uso de datos históricos para calcular las correlaciones y las variaciones pueden no ser apropiadas, ya

que el modelo se basa en los valores esperados en el futuro. Específicamente para los nuevos proyectos, que tienen poca información sobre su pasado, las estimaciones cuantitativas de la beta tienden a ser factibles.

Incluso como una limitación, Fama (1977) en sus estudios indica que el índice de mercado muestra poca correlación con los rendimientos esperados, y que las medidas tales como el tamaño y el contenido del valor contable sobre el precio serían indicadores más apropiados de los rendimientos de las acciones de las empresas y, por tanto, los índices de mercado pueden no ser los denominadores comunes para determinar la beta (riesgo no diversificable) y el SML.

A pesar de estas críticas, el CAPM es una herramienta alternativa importante para determinar el equilibrio entre riesgo y beneficio de primaria y los precios de los activos. Reconociendo sus limitaciones, el método sigue siendo uno de los más utilizados en la práctica, proporcionando una buena aproximación para la rentabilidad esperada de los activos en general.

### **ARBITRAGE PRICING THEORY (APT)**

Una alternativa al modelo CAPM para la relación entre riesgo y rendimiento se presentó en un artículo publicado por Ross (1976) en los años setenta y propone un modelo compuesto por múltiples factores económicos, la teoría de arbitraje de precios, para medir el riesgo no diversificable. El modelo asume que los activos individuales son en gran parte responsables de las características de las carteras que los contienen, y que por tanto la tasa de rendimiento de una acción deberá constar de dos partes:

- Retorno normal o esperado: influenciado por todas las informaciones que pudieran tener un efecto sobre el precio de la acción, y
- Retorno incierto o inesperado: influenciado por informaciones nuevas, que sorprenden al resultado de la acción.

La fórmula de APT para presentar la tasa de retorno de una acción es:

$$R = E(R) + U$$

Donde

R = tasa de retorno observada en el periodo

E(R) = tasa de retorno esperada

U = parte inesperada del retorno

Es evidente que hay un grado de dificultad en el factor de separación del factor inesperado esperada entre las diversas informaciones que afectan la rentabilidad de una acción. El modelo interpreta que cualquier anuncio se puede descomponer en dos partes, la parte que ya se anticipó por los inversionistas del mercado, y la sorpresa o la innovación. La parte esperada figura en el retorno esperado de la acción, E (R), y la sorpresa es la noticia que afecta al retorno inesperado de la acción, U.

La parte inesperada se corresponde con el riesgo real de una inversión, pero las distintas fuentes de riesgo requieren una distinción importante entre el riesgo sistemático o de

mercado (que afecta a los diferentes activos con diferentes grados de intensidad) y el riesgo no sistemático (que afecta sólo a una o un pequeño grupo de activos). Algunos ejemplos de estos riesgos son:

Riesgo sistemático ( $m$ ): anuncios sobre tasas de interés, PIB, inflación.

Riesgo no sistemático ( $\epsilon$ ): noticias sobre la competencia, nuevas tecnologías, fraudes contables, etc.

Esta distinción permite reformular la ecuación de la rentabilidad de una acción, teniendo en cuenta los dos tipos de riesgo, de la siguiente manera:

$$U = m + \epsilon$$

$$R = E(R) + m + \epsilon$$

APT también se considera la relación entre el riesgo sistemático y el mercado de valores distintos, reconociendo el coeficiente beta ( $\beta$ ) como la influencia del riesgo sistemático en una acción individual. En este sentido, el modelo es una generalización del concepto de beta utilizados en el CAPM, donde el coeficiente se utilizó para medir la sensibilidad de la tasa de rendimiento a un solo factor de riesgo, el retorno de la cartera de mercado. En la APT, se considera distintos tipos de riesgo sistemático, la mejora de las características de los distintos activos y su sensibilidad a cada tipo de riesgo (que puede ser incluso opuesto, en función del activo en cuestión).

Un ejemplo de serie con tres riesgos sistemáticos comunes podría ser descrito como sigue:

$$R = E(R) + \beta_I F_I + \beta_{PIB} F_{PIB} + \beta_r F_r + \epsilon$$

Donde,

$F_I$  = factor sorpresa en términos de inflación

$F_{PIB}$  = factor sorpresa en términos de PIB

$F_r$  = factor sorpresa en términos de tasas de interés

Las betas indican la sensibilidad del activo a cada uno de los factores de riesgo sistemático individual. Cuando la beta es menor que cero, el activo se correlacionó negativamente con el riesgo sistemático, y viceversa. Una versión beta de cero significa que el activo no tiene ninguna relación con el riesgo sistemático.

En la práctica, habla de lo que la combinación adecuada de factores, y, a menudo, los modelos de un solo factor final hasta que se adopten, por ejemplo, utilizando un índice de la bolsa de valores. Visto así, el modelo de factores se llama el modelo de mercado y las implicaciones del modelo son idénticas a las del CAPM.

### **TASA DE INTERES LIBRE DE RIESGO**

La estimación del valor un proyecto se puede obtener tanto descontando los flujos de efectivo futuros por la tasa de descuento ajustada al riesgo (como se discutió en la sección anterior), o

por el flujo de caja descontado previamente ajustado al riesgo por la tasa de interés libre de riesgo. Ambos métodos deben conducir a los mismos resultados.

Para ilustrar la equivalencia entre los dos métodos, podemos considerar el siguiente ejemplo de un solo periodo:

Un proyecto tiene una inversión inicial de \$4,000, un flujo de caja estimado en \$5,000 y un beta de 1.2, la tasa de interés libre de riesgo es de 8% y la tasa de retorno esperada de mercado es del 15%. Partiendo de esta información, podremos calcular la tasa de retorno esperada para el proyecto, para posteriormente calcular el VPN por la tasa de interés ajustada al riesgo, conforme a continuación:

$$VPN = \sum_{t=1}^T \frac{Ct}{(1+r)^t} - I = \sum_{t=1}^T \frac{E(Ct)}{\{1+r_f + [E(r_m) - r_f]\}^t} - I$$

Ya que por CAPM,  $r = E(r_j) = r_f + [E(r_m) - r_f]\beta_j$

$$\text{Por lo tanto, } VPN = \frac{\$5000}{1+0.08+(0.15-0.08) \times 1.2} - \$4000 = \$295.53$$

De acuerdo a las reglas del VPN, el proyecto sería aceptado.

El método de tasa neutral de riesgo trae los mismos resultados, sino por su metodología, el ajuste se realiza en el numerador, en lugar del denominador. De acuerdo con el CAPM, la beta de una empresa,  $\beta_j$ , se define como  $\frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$ , y, según Copeland (2001) si sustituimos r por su equivalente en la ecuación de valor presente para un solo período, tenemos:

$$VP = \frac{E(ct)}{1+r_j} \therefore r_j = \frac{E(ct)}{VP} - 1$$

$$\beta_j = \frac{Cov\left[\frac{E(ct)}{VP} - 1, r_m\right]}{Var(r_m)} = \frac{1}{VP} \left[ \frac{Cov(E(ct), r_m)}{Var(r_m)} \right]$$

$$VP \frac{E(ct)}{1+r_f + [E(r_m) - r_f] \left(\frac{1}{VP}\right) \left[\frac{Cov(E(ct), r_m)}{Var(r_m)}\right]}$$

Por el CAPM, el precio de mercado de riesgo,  $\lambda$ , es igual a  $\frac{[E(r_m) - r_f]}{Var(r_m)}$ , el cual nos permite reescribir la ecuación del valor presente:

$$VP = \frac{E(ct) - \lambda Cov[E(ct), r_m]}{1+r_f}$$

Este enfoque se ajusta el flujo de efectivo restando el componente de riesgo. En el ejemplo anterior, la prima de riesgo sería \$ 360.83, y el resultado de calcular el VAN sería indiferente, de la siguiente manera:

$$VPN = \frac{E(ct)}{1 + \text{tasa de interes ajustada al riesgo}} - I = \frac{\$5000}{1.08} - 4000 = \$295.53$$

$$VPN = \frac{E(ct) - \text{premio por riesgo}}{1 + \text{tasa de interes libre de riesgo}} - I = \frac{\$4639.17}{1.08} - 4000 = \$295.53$$

### MODELOS CON BASE EN EL VALOR ECONOMICO RESIDUAL

El enfoque de los resultados económicos o el valor residual (ingresos residuales) se basa en el concepto de beneficio económico, o el valor presente neto se traducido como un flujo capaz de medir los resultados de la empresa en su conjunto, que sirve para sustituir los ingresos netos como medida de rendimiento.

El modelo persigue el llamado resultado económico, o la utilidad de operación, neto de impuesto sobre la renta y los gastos financieros. Su característica principal (que lo diferencia de otros enfoques) es que el método permite un análisis por separado de las operaciones, las finanzas y la inversión en una organización.

Dentro de este enfoque más amplio, dos conceptos importantes se destacan: el Retorno de la Inversión (ROI) y el valor económico agregado (EVA<sup>®</sup>).

### RETORNO SOBRE INVERSION

El cálculo de retorno de la inversión es el primer paso para obtener el valor económico añadido de una empresa. Su formulación básica es la relación entre beneficio de explotación (después de impuestos y gastos financieros) y las inversiones. Tanto el retorno de la inversión como el ROA (retorno sobre activos) convergen a las mismas conclusiones, pero el retorno de la inversión proporciona mayor detalle de la información, y con frecuencia tienen una mejor relación con el beneficio de explotación.

El propósito básico de retorno de la inversión consiste en remunerar a los propietarios del capital. Por lo tanto, debe ser comparada con la remuneración de los propietarios del capital (WACC) para poder evaluar la capacidad de generar valor de la empresa o un proyecto de inversión en particular. Esta propiedad se debe a su composición básica (margen por giro), que refleja los cambios en todas las actividades operativas de la empresa, de acuerdo con el siguiente diagrama:

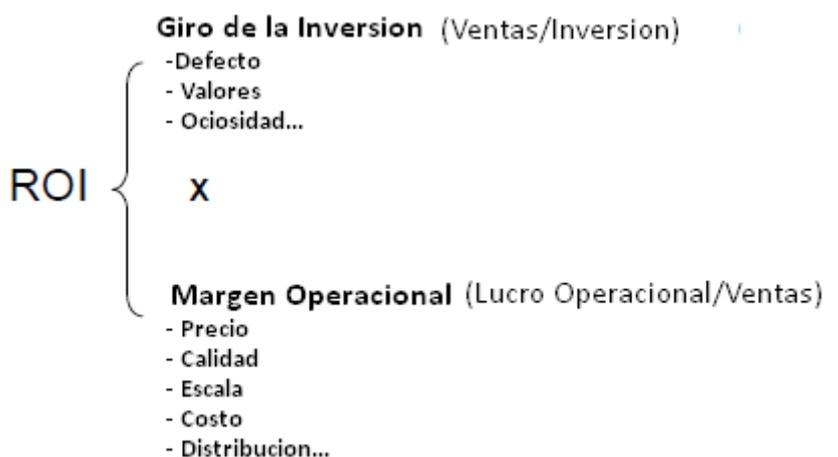


Figura. Formulación analítica ROI

### **VALOR ECONOMICO AGREGADO**

Aunque el concepto de beneficio económico o "superganancias" es algo discutido por más de un siglo, el enfoque simplificado de EVA<sup>®</sup>, desarrollado recientemente por Stewart (1991), condujo a su uso generalizado y la comprensión del concepto original se tradujo en un factor de rendimiento.

EVA<sup>®</sup>, con este o cualquier otro nombre que refleja la misma idea implícita incorpora brevemente y practica los conceptos ya presentados de coste promedio ponderado del capital (WACC), retorno de la inversión y VPN. De hecho, el resultado todas estas aplicaciones en la percepción de que el motor fundamental del valor económico son los ingresos netos y una tasa de rendimiento requerida es directamente proporcional al riesgo.

Así que cuando una empresa es capaz de producir una rentabilidad superior al requerido por el mercado, que alcanza su objetivo final de agregar valor para los accionistas. En otras palabras, cuando el retorno de la inversión es mayor que el WACC, la empresa tendrá un resultado positivo<sup>®</sup> EVA.

La popularidad de EVA<sup>®</sup> se debe mucho a su utilidad como herramienta de gestión. Si bien las medidas de rendimiento basados en los beneficios contables estáticos puede causar graves distorsiones en la rentabilidad a largo plazo de la empresa cuando son ligados a la remuneración de la alta dirección, el EVA<sup>®</sup> tiene en cuenta tanto los flujos futuros como el riesgo del proyecto. En este sentido, sus principales ventajas son:

- Lenguaje conceptual simplificado
- Instrumento único sirve a los intereses diferentes,  
La agregación de conceptos,
- Evaluación comparativa para el análisis externo,
- Resultados de la que realmente paga a todos los actores involucrados, teniendo en cuenta el riesgo.

Sin embargo, ya que es un concepto basado en una agregación de otros conceptos más elementales, el EVA<sup>®</sup> lleva todas las deficiencias que ya presentó estos conceptos de forma individual. Entre otras cuestiones, el EVA<sup>®</sup> por lo general no tiene en cuenta las diferentes probabilidades y diferentes escenarios de la flexibilidad que dispone la administración, mientras que un único tipo de descuento (WACC) como base para la obtención del valor económico agregado. Además, el método está sujeto a un cierto grado de subjetividad en los criterios que se ciernen sobre una solución de compromiso entre la simplicidad y la fácil comprensión, en contra de la complejidad y precisión.

### **MODELOS DE EVALUACION DE INCERTIDUMBRES**

Los modelos de evaluación tienen por objeto completar la incertidumbre al tradicional análisis de valor presente neto de preguntas acerca de las verdaderas fuentes de los valores del VAN positivo. A menudo, el simple tratamiento de los datos numéricos en un análisis de los flujos de caja descontados puede llevar a un falso positivo VPN sin el análisis de riesgos y las diferentes posibilidades abiertas a las empresas se tienen en cuenta.

En este sentido, esta sección busca presentar algunas de las herramientas de análisis adicionales que ayudan a los administradores hacer frente a los efectos de la incertidumbre sobre los flujos de efectivo incrementales.

### **ANALISIS DE SENSIBILIDAD**

La metodología para el análisis de sensibilidad pretende descubrir cómo el VAN de un proyecto si el cambio de ventas, costo de mano de obra o equipos, la tasa de descuento, u otros factores varían de un caso a otro. Dado que las estimaciones utilizadas en el cálculo de valor presente neto son invariablemente el resultado de otras variables primarias, el análisis de sensibilidad tiene por objeto conocer los detalles de estas previsiones, y señalar el impacto de los cambios en variables clave de forma individual.

Con la obtención de diversos análisis que consideran una serie de hipótesis de los cambios en variables clave, el análisis de sensibilidad que trata de responder que variable del proyecto es más sensible con el fin de volver más atención a estas variables clave, tanto calidad de las previsiones, así como la variabilidad del riesgo del proyecto como un todo. Por lo tanto, a mayor variación en el VPN por cambios en las variables de un proyecto, mas riesgosa será la inversión.

Una variable puede ser muy arriesgada (con una variación mucho mayor que las otras variables identificadas), pero su contribución al riesgo del proyecto es pequeña, menos arriesgada, mientras que otros pueden ser cruciales, e incluso errores marginales pueden tener impactos muy significativos en el valor presente neto de un proyecto.

El análisis de sensibilidad, sin embargo, tiene una grave limitación en términos de falta de información sobre las distribuciones de probabilidad de todas las variables. Por lo tanto, no es posible evaluar qué tan probable es una variación de las ventas en 10% de los inicialmente previstos, por ejemplo. Además, el análisis de sensibilidad no evalúa los efectos de las combinaciones de variables en el VAN del proyecto, haciendo caso omiso de la combinación simultánea de los errores de varias variables.

### **METODO TRADICIONAL DE SIMULACION**

Distribuciones de probabilidad en variables clave para calcular el VAN de un proyecto son, como se señala en la sección anterior, fundamentales al análisis de riesgo de un proyecto. El método tradicional de simulación busca producir una serie de situaciones hipotéticas, con la ayuda de aplicaciones (software) para equipos que utilizan generadores de variables aleatorias para crear diferentes escenarios, permitiendo el análisis de diversas distribuciones de probabilidad de los posibles valores adoptados por estas variables.

La simulación de eventos se utiliza en la presupuestación de capital para estudiar los diferentes valores del VPN de proyectos para diferentes flujos de efectivo, la producción de medias y desviaciones estándar del VPN. Obviamente, ese proyecto con mayor VPN y la menor desviación estándar promedio debe ser elegida porque representa el riesgo más bajo.

El primer paso en una simulación tradicional es la definición de distribución de frecuencias de los posibles valores de las variables a ser simuladas. Se recomienda como fuentes principales de información: a) las opiniones de expertos sobre el comportamiento de las variables, y b) la

conducta pasada de las variables, válido si el uso de distribuciones de probabilidad se pasa como un indicio de su comportamiento habitual.

El segundo paso consiste en la generación de múltiples combinaciones de números al azar por la computadora, por ejemplo, a través del método de Monte Carlo (ver los detalles de esta simulación en el capítulo III). Para cada número al azar se calcula los flujos de caja y VPN, como en el ejemplo siguiente, cuya variable analizada es la tasa de descuento:

		Hipótesis: -5%	Hipótesis: -2.5%	Situación Inicial	Hipótesis: +2.5%	Hipótesis: +5%
Año	Flujo de Caja (ct)	20%	22.50%	25%	27.5%	30.00%
0	-200000.00	200000.00	200000.00	200000.00	200000.00	200000.00
1	25000.00	20833.33	20408.16	20000.00	19607.84	19230.77
2	150000.00	104166.67	99958.35	96000.00	92272.20	88757.40
3	10000.00	5787.04	5439.91	5120.00	4824.69	4551.66
4	65000.00	31346.45	28864.83	26624.00	24596.46	22758.31
5	170000.00	68319.19	61626.64	55705.60	50454.28	45785.94
	VPN	30452.68	16297.89	3449.60	-8244.53	-18915.92

Tabla. Análisis de sensibilidad de un proyecto con variaciones en la tasa de descuento

Suponiendo una distribución de probabilidad y una muestra aleatoria de 50 números, como se representa en el cuadro siguiente, obtenemos los siguientes valores:

Tasa de descuento	Probabilidad	Numero aleatorio asociado a esa tasa
20%	10%	00 a 09
22.50%	20%	10 a 29
25%	35%	30 a 64
27.50%	15%	65 a 94
30%	5%	95 a 99

Tabla. Distribución de probabilidades de las tasas de descuento.

94	36	31	13	30
16	80	15	1	78
39	53	62	38	53
21	10	76	17	86
22	1	54	18	5
56	1	11	34	60
59	28	3	90	93
76	9	36	7	41
89	48	25	12	94
86	95	46	28	53

Tabla. Ejemplo de una muestra de números aleatorios.

Así, al contar la frecuencia de aparición de los números en la muestra aleatoria llega a la distribución de frecuencias siguientes:

Tasa de descuento	Frecuencia
20%	7
22.50%	13
25%	18
27.50%	9
30%	3
Total	50

Tabla. Distribución de frecuencias de tasas de descuento

Que a su vez permite calcular:

Tasa media de descuento: 24.4%

VPN medio: \$7,550.57

Desviación estándar de la tasa de descuento: 2.6%

Desviación estándar VPN: \$13,103.81

Coefficiente de variación (desviación estándar/media): 1.74

El proceso es entonces repetido muchas veces (hasta obtener, digamos, 500 muestras diferentes), para cada una de las variables claves, guardando el resultado del VPN medio de cada muestra, de forma que sea posible, al final, trazar una distribución de probabilidades de los flujos de caja de los VPN del proyecto, con media y desviación estándar.

Cuando se comparan dos proyectos diferentes, uno con el coeficiente más pequeño de variación (en promedio mayor y menor desviación estándar, o de mayor rendimiento y menor riesgo), será elegido sobre otro. En la siguiente figura, se puede comparar dos diferentes perfiles de proyectos, a través de su distribución de frecuencias (curva de la campana). El proyecto A representa un riesgo mayor (colas formato más plana y más grande - la dispersión más grande), mientras que el proyecto B es un proyecto con el perfil de riesgo más apropiado (de perfil alargado y cola más corta). Teniendo en cuenta que ambos tienen la misma media, el proyecto B sería la más adecuada en términos de una mejor relación riesgo-retorno.

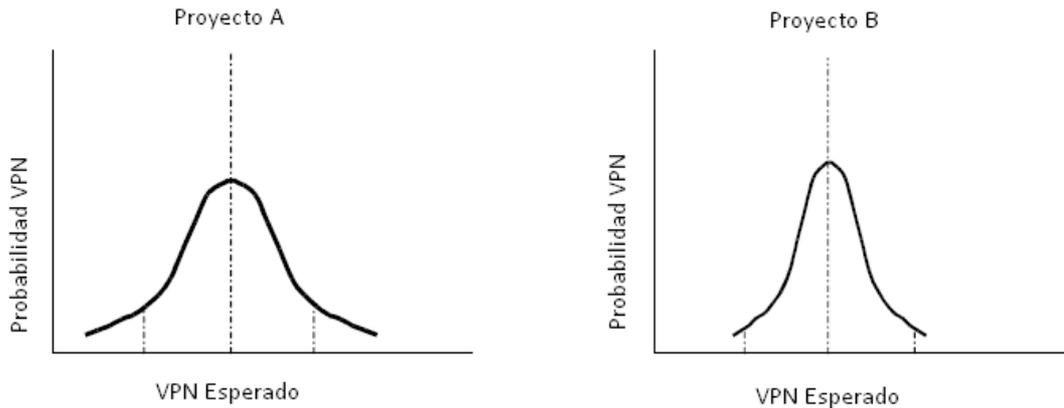


Figura. Curvas de simulación de VPN

La simulación tradicional puede manejar los problemas de decisión bastante complejos desde la perspectiva de riesgo, y también con la interacción de diversas variables y es una herramienta adicional de importancia en el análisis por el VPN. Sin embargo, su principal limitación está en la correcta captura de las interdependencias entre las variables, a pesar de que las probabilidades están libres de cualquier prejuicio.

Además, la simulación tradicional puede llevar a los analistas a utilizar el riesgo global del proyecto, en lugar del riesgo sistemático (que, como el acercamiento a la CAPM, el riesgo es el único realmente relevante para los accionistas que pueden diversificar parte de este riesgo en el mercado de bonos).

Con respecto a la flexibilidad en la administración, la simulación no es capaz de capturar las asimetrías de los cambios en las estrategias iniciales, ya que las simulaciones por computadora tienden a seguir las reglas para el que fueron programados inicialmente.

#### **ANÁLISIS POR ARBOLES DE DECISION**

El análisis de árbol de decisión tiene su origen en las escuelas de negocios, donde se lleva a cabo por los estudiosos y practicantes de la ciencia "Decisión". Cuando se relaciona con la disciplina financiera, este enfoque resulta muy útil cuando se trata de incorporar la incertidumbre y la flexibilidad en la gestión dentro de un modelo teórico, la estructuración de un problema de decisión mediante la asignación de todas las alternativas posibles de las acciones de gestión, en orden de probabilidad de ocurrencia.

En una comparación con el análisis de la VPN, en el que las decisiones se adoptan sobre la decisión inicial (aceptar o rechazar) el análisis de árbol de decisión tiene que ver con la estrategia operacional y las interdependencias entre la primera y todas las decisiones posteriores de otros. Esta característica garantiza el análisis de árboles de decisión enorme poder para evaluar las decisiones de inversión secuenciales, particularmente cuando estos están dispuestos en forma discreta en el tiempo.

El método tiene la siguiente estructura básica:

- a) La gestión debe tener uno o una secuencia de decisiones entre los diferentes cursos de acción;

- b) Cada decisión depende de acontecimientos futuros inciertos, o eventos que puede ser descrito por una distribución de probabilidad sobre la base de la información del pasado;
- c) La gestión elige entre las diversas vías disponibles, aquellas que maximizan su función de utilidad, o el valor presente neto ajustado por riesgo, de acuerdo con sus preferencias o aversión al riesgo.

La metodología de los árboles de decisión usa de esta manera, la visión de la empresa individual, de acuerdo a sus propias creencias y preferencias, sin tener en cuenta el ajuste de riesgos para las perspectivas de mercado. Otra característica de este tipo de análisis es que existe una concentración en la toma inmediata de medidas en el presente, con poca consideración a la capacidad de gestión para realizar los ajustes futuros a fin de crear valor en las circunstancias adecuadas.

## OPCIONES REALES COMO METODOLOGIA DE VALUACION

### HISTORICO

Hace 40 años, que fue la primera publicación de lo método de valuación de opciones de Black & Scholes (1972). Desde entonces lo complejos modelos matemáticos utilizados en la teoría financiera han tenido una influencia directa y amplia en la práctica de las finanzas corporativas.

El amplio reconocimiento y el rápido avance de la relativamente nueva teoría de valuación de opciones marcarían, junto con otros descubrimientos notables la aceptación generalizada para su aceptación en la práctica de las finanzas modernas.

Según Merton (1998), de acuerdo a alguno de sus trabajos, el inicio del uso de las matemáticas sofisticadas en las finanzas se debió a un trabajo de Louis Bachelier en 1900 sobre la teoría de la especulación, planteada como un problema de valuación de opciones. Esta obra marco el nacimiento de los procesos estocásticos y de la valuación de los derivados y títulos.

El desarrollo del cálculo estocástico en los años cuarenta y cincuenta por parte de Kiyoshi Itô (1987) fue extremadamente influenciado por Bachelier, pasando a ser una herramienta esencial en finanzas. La teoría de Paul A. Samuelson sobre valuación racional de warrants publicada en 1965 también fue motivada por el mismo trabajo.

Sin embargo, el trabajo de Bachelier estaba, por así decirlo, adormecido, por mucho tiempo. Según Merton (1998), antes de los trabajos pioneros de Markowitz, Modigliani, Miller, Sharpe, Lintner, Fama y Samuelson en los años cincuenta y sesenta, la teoría financiera era un poco más que una serie de anécdotas, reglas prácticas y manejo de información contable.

No fue hasta finales de los sesenta y setenta que los modelos desarrollados por los estudiosos de las finanzas se han vuelto mucho más sofisticadas, que involucran incertidumbre y las dimensiones intertemporales. Los nuevos modelos de teoría de la cartera, valoración de activos de capital, y los precios de los derivados utilizados cálculos y ecuaciones diferenciales estocásticas. Estas herramientas matemáticas se utilizan hoy en día y tienen una complejidad infinitamente mayor que las que había sido utilizado anteriormente en las finanzas.

Sin embargo, paradójicamente, el modelo matemático de “Black & Scholes” fue desarrollado íntegramente en la dimensión teórica y sin ninguna referencia a la valuación empírica de opciones. La publicación de este modelo a su vez, casi de inmediato extendió los fundamentos de la teoría de valuación de opciones, formando una base sólida para mejoras, ampliaciones y una amplia gama de aplicaciones más allá de las finanzas.

Como una extensión practica del trabajo de “Black & Scholes”, la bolsa de Chicago (CBOE – Chicago Board Options Exchange) que comenzó a operar en 1973 y para 1975 operadores de la CBOE estaban utilizando el modelo para valuar y proteger sus posturas sobre las opciones. Su rápida adopción ha sido muy impresionante, sobre todo, por que las matemáticas utilizadas no son parte de la formación de economistas y operadores profesionales.

Algunas hipótesis, algunas especialmente ligadas a cambios estructurales en el escenario económico de los años sesentas y setentas de los Estados Unidos (con mayor incertidumbre y gran volatilidad), ayudan a explicar la extraordinaria velocidad de propagación de la cultura del manejo de riesgo financiero y de los modelos financieros que ayudan a valorar las opciones y su exposición al riesgo.

En México, la bolsa que negocia opciones es el MexDer, que negocia opciones sobre activos financieros como tasas de cambio, de interés y commodities como oro, café, petróleo, soya y otros.

Es importante señalar que la influencia de la teoría de valuación de opciones en la práctica de las finanzas no se limita a las opciones financieras que cotizan en bolsas y mercados. A medida que analizamos el marco conceptual utilizado inicialmente para obtener la fórmula para valorar opciones se pueden utilizar para valorar y evaluar el riesgo en una serie de recursos financieros y no financieros.

La teoría de valuación de opciones tuvo un papel fundamental en la creación de nuevos productos y de mercados financieros en todo el mundo. Actualmente y en un futuro, este papel continuara expandiéndose en las instituciones financieras, especialmente en la toma de decisiones de alta dirección y en la formulación de políticas de los sistemas financieros.

Black y Scholes (1972, 1973) y Merton (1970, 1974) reconocen en su investigación que el mismo criterio para valuación de opciones podría ser aplicado a una variedad de otros problemas de valuación. Tal vez el desarrollo más grande en este sentido ha sido la valuación de pasivos corporativos. Este enfoque de valuación trataba el lado derecho del balance como derivados, con sus flujos de egresos contractuales y arrojando el valor de la empresa como un todo. Comparando con los métodos de valuación de la época, este enfoque ofrece una teoría única de valuación para estos pasivos.

La aplicación del modelo de Black & Scholes no requiere un histórico de negociación de algún instrumento en particular para que el mismo sea valuado. Por esta razón, la teoría paso a servir a los nuevos tipos de valores emitidos por empresas creadas en un nicho de innovación. Por consiguiente, las aplicaciones a las finanzas corporativas del modelo de valuación de opciones han crecido rápidamente.

Desde entonces, objetos con características similares a las opciones, comenzaron a ser encontradas en diversos escenarios y ambientes, para luego ser abordados por investigadores y así aparecen un gran número de trabajos aplicando la teoría de valuación de opciones.

Algunos ejemplos de estas aplicaciones son:

- Pólizas de seguros valuadas como opciones de venta – Merton, 1977 – (da el derecho de vender un determinado activo a una aseguradora por un determinado precio “de ejercicio” en una determinada fecha “de vencimiento”);
- Arrendamiento de automóviles – da al cliente el derecho, mas no la obligación de comprar un automóvil al final del periodo de arrendamiento;

- Patentes – la decisión para la compra de patentes dependerá del valor intrínseco de tal, el cual podrá ser calculado como una opción de compra;
- Compra de inmuebles – El contrato, firmado antes de la escrituración, en el que el comprador adquiere el derecho de comprar un inmueble mediante el pago de un anticipo;
- En la privatización de empresas públicas.

Muchos de los ejemplos anteriores no se tratan de instrumentos financieros. La familia de estas aplicaciones se llama las opciones "reales". El sector de mayor desarrollo para la aplicación de "opciones reales" son las decisiones de inversión de las empresas. Sin embargo, el análisis de opciones reales también se ha utilizado en inversiones inmobiliarias y la investigación y desarrollo.

El elemento común en la valuación de opciones para su aplicación en estos casos es el mismo en todos los ejemplos: el futuro es incierto (si lo fuera, no habría necesidad de crear opciones porque ya sabrían qué hacer en el futuro) y un entorno de incertidumbre. Tener la flexibilidad para decidir qué hacer después de la resolución de algunas de estas incertidumbres sin duda tiene un valor, y la teoría de valoración de opciones proporciona los medios para medir este valor.

### OPCIONES FINANCIERAS

Las opciones financieras son parte de un conjunto de instrumentos llamados "derivados". Los derivados tienen este nombre porque no tiene valor propio - su valor se deriva del valor de algún otro activo más básico (activo subyacente). Surgieron de la necesidad de reducir la incertidumbre al limitar el riesgo de las fluctuaciones inesperadas de los precios de los activos subyacentes.

De entre los tipos de derivados más comunes, están los contratos a plazo, los futuros, los swaps y finalmente las opciones, que serán el objetivo de este trabajo.

Las opciones fundamentalmente se diferencian de los contratos de duración determinada y futuros, en que dan al tenedor el derecho pero no la obligación de hacer algo en el futuro. Por lo tanto, el titular de una opción puede optar por ejercer o no, según consideren más atractivo. En los futuros, al contrario, las dos partes están obligadas a comprar y vender las cantidades estipuladas en el futuro.

Una segunda diferencia entre los contratos futuros y las opciones es que entrar a un contrato futuro no implica un costo inicial, mientras que la opción requiere un anticipo (prima), el cual deberá reflejar un valor de su flexibilidad.

Existen dos tipos básicos de opciones:

- CALL OPTION (Opción de compra): otorga al titular el derecho-no la obligación, de comprar un determinado activo en una fecha determinada a un precio pre-establecido;
- PUT OPTION (opción de venta): confiere al tenedor el derecho pero no la obligación, de vender un determinado activo en una fecha determinada a un precio preestablecido.

La fecha especificada en el contrato que se conoce como la fecha de vencimiento, fecha de ejercicio o strike price, el precio o el precio de ejercicio o strike price.

Las opciones pueden ser Americanas o Europeas. Esta connotación no tiene nada que ver con la ubicación geográfica. Las opciones Americanas son las que se puede ejercer en cualquier momento hasta su fecha de caducidad, y las opciones europeas sólo pueden ejercerse en su fecha de caducidad. La mayoría de las opciones cotizadas son americanas, pero las opciones europeas son típicamente más fáciles de analizar, y algunas propiedades de opciones americanas se han deducido de las opciones Europeas.

Con respecto a la probabilidad de ejercicio de una opción (la relación entre su precio de ejercicio para el precio del activo subyacente), se dan las opciones de la siguiente manera:

Clasificación	Opción de compra	Opción de venta
In-the-Money	Precio de objeto es mayor que el precio de ejercicio	Precio de objeto es menor que el precio de ejercicio
At-the-Money	Precio de objeto es igual al del precio de ejercicio	Precio de objeto es igual que el precio de ejercicio
Out-of-the-Money	Precio de objeto es menor que el del precio de ejercicio	Precio de objeto es mayor que el precio del ejercicio

Tabla 1: Clasificación de opciones por las probabilidades de ejercicio

Conforme analizaremos adelante, es de fundamental importancia determinar si una opción está dentro o fuera de dinero para poder valorar correctamente su prima.

## PRECIO DE LAS OPCIONES

La prima o precio de la opción términos son sinónimos, y se refieren a la cantidad pagada por el titular de la opción por la adquisición del derecho a ejercer en plazo. Debido a que son sometidos a las fuerzas de la oferta y la demanda del mercado, las opciones tienen un precio como cualquier otro activo, salvo que estén directamente vinculadas al precio del activo subyacente. Así, la prima de la opción debe ser una función del precio del activo subyacente.

Desde el punto de vista teórico, en el precio de una opción están involucrados los siguientes elementos: valor intrínseco y el valor del tiempo.

$$\text{VALOR INTRINSECO} + \text{VALOR TEMPORAL} = \text{PRECIO OPCION}$$

## VALOR INTRINSECO

El valor intrínseco aparece solamente en las opciones clasificadas como “dentro de dinero”. En este tipo de opción, existe algún lucro que el prestador o el comprador puede ejercer inmediatamente la opción de tipo americano. El beneficio se deriva de una diferencia entre el precio de mercado del activo subyacente de la opción y el precio de la opción, a continuación un ejemplo:

Cotización del activo subyacente:	\$230
Precio de ejercicio de la opción:	\$210
Precio de la opción	\$44
<b>Valor intrínseco:</b>	<b>\$230 - \$210 = \$20</b>
<b>Valor temporal:</b>	<b>\$44 - \$20 = \$24</b>

Entonces, una opción tiene valor intrínseco cuando en una call el precio de ejercicio fue menor que el precio del activo subyacente y cuando en una put el precio de ejercicio fue mayor que el precio del activo subyacente.

Cuando una opción es “no dinero” o su valor intrínseco será “zero” y cuando sea “sin dinero”, su valor intrínseco será negativo.

### VALOR TEMPORAL

El valor temporal es la diferencia entre el valor de la opción y su valor intrínseco en un determinado momento. Es en este valor en el cual se enfocan las teorías de valuación de opciones y este puede ser considerado como el valor de una especulación continua sobre un movimiento favorable de los precios de un activo subyacente. Cuando se compra una opción, además de poder aprovechar de inmediato el valor intrínseco (si existe), se adquiere la posibilidad de tomar ventaja de las futuras grandes variaciones en el precio (en caso de una opción de compra), lo que limita la pérdida para el peor de los casos.

El valor temporal es simplemente la valuación del mercado, partiendo de que el valor de la opción está en función de la posibilidad de que el valor intrínseco pueda aumentar en un futuro.

Así, cuanto mayor sea el tiempo para el vencimiento, mayor será el precio de la opción, ya que la probabilidad de aumentar el valor intrínseco disminuye a medida que se reduce el tiempo para la expiración. De esa forma, cuando sean mayores las probabilidades de movimientos en los precios del activo subyacente de la opción, mayor deberá de ser su valor temporal.

### MODELOS DE VALUACION DE OPCIONES

En este tema, se ha tratado de examinar los principales modelos de valuación de opciones, ya que para el presente trabajo es interesante dar una idea de su aplicación y conceptos teóricos.

Los métodos de valuación de opciones, normalmente se utilizan con métodos matemáticos avanzados. Con todo, debido a su rápida capacidad de respuesta y por ser programables en computadoras, los modelos han mostrado amplia aceptación y uso por parte de los profesionales del mercado.

Cualquiera de los principales métodos de valuación de opciones (Binomial y Black & Scholes) necesariamente utilizan un conjunto de variables básicas, que deben ser conocidos o estimados de forma que puedan proporcionar el valor de la opción. Estas variables son:

- Precio del activo subyacente(S): es el precio del mercado del activo sobre el que la opción de compra o venta se basa en un momento determinado;
- Precio de ejercicio (K): es el precio al que el tenedor de la opción puede ejercerla;
- Tiempo hasta el vencimiento (T): fracción anual del vencimiento de la opción;
- Tasas de interés (r): es la tasa de interés que influye en el precio de la acción;

- La volatilidad ( $\sigma$ ): es el movimiento que afecta al activo subyacente en el tiempo. Indica la incertidumbre (o riesgo) y la rentabilidad ofrecida por el activo.

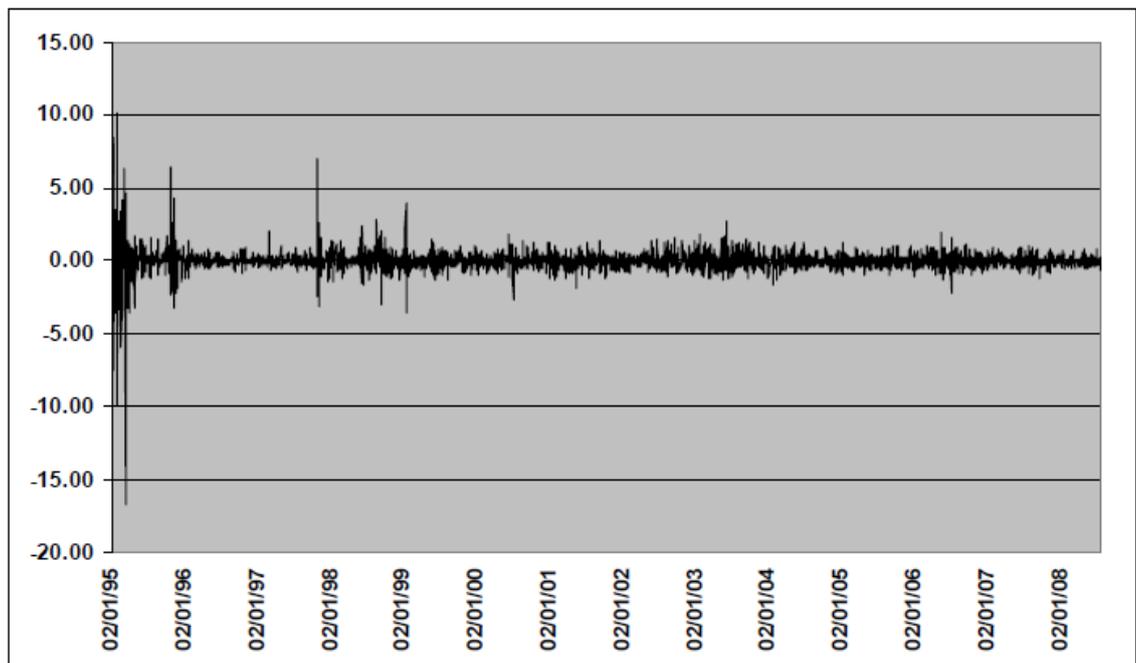
Sobre algunas otras variables a considerar, indican algunos autores que uno de los principales determinantes del valor de una opción, es el precio de mercado del objeto. Y este varía de manera incierta en el tiempo. Además de otros factores determinantes tales como tasas de interés y la política de dividendos de la empresa emisora de la acción, la cual también podría variar durante la vigencia de la opción.

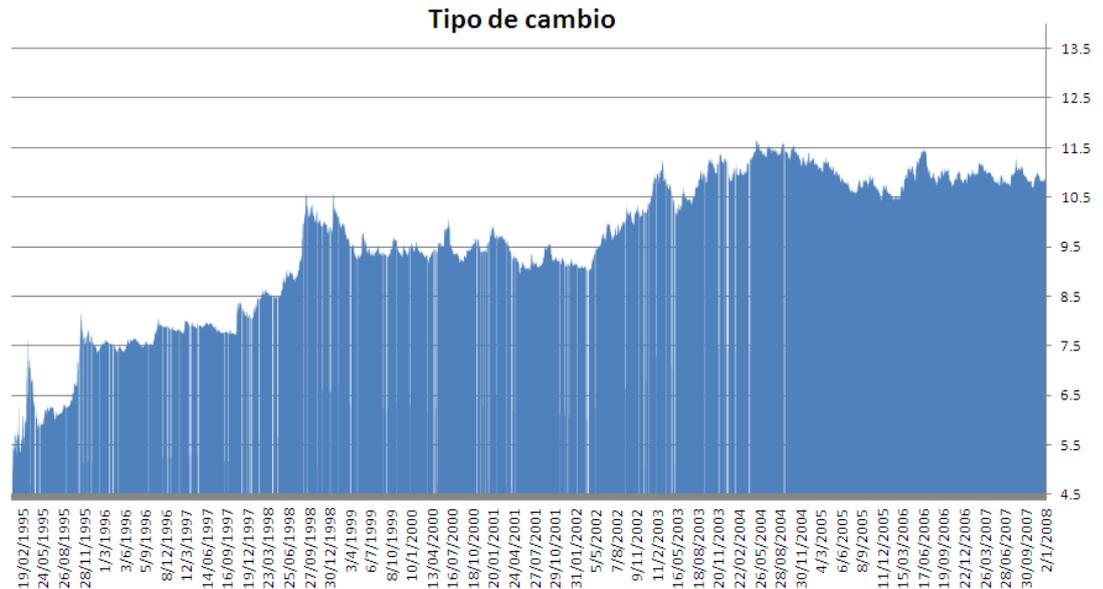
De las variables presentadas, las primeras cuatro son intuitivas y se entienden fácilmente. Sin embargo la volatilidad ( $\sigma$  – sigma) es la más difícil de determinar debido a que no es directamente observada y precisa, por lo tanto debe ser estimada.

La volatilidad histórica es normalmente medida por la desviación estándar de los movimientos en el precio del activo subyacente en el pasado, expresada en porcentaje, y se calcula, en su mayoría por períodos cortos y recientes. En la práctica, sin embargo, hay inversionistas que utilizan períodos más largos o incluso el análisis gráfico.

Un activo con muy baja volatilidad no debe sufrir grandes cambios en el precio de futuros, lo que supone un pequeño riesgo en las operaciones del activo. Del mismo modo, un activo subyacente con volatilidad alta, sufrirá grandes cambios en los precios.

Los gráficos siguientes son ejemplos de cambios en precios de los activos (precio del peso frente al dólar), y su influencia en el valor de la volatilidad diaria. El primer gráfico muestra la variación diaria en la cotización del dólar durante el período de un año, y el segundo muestra, para el mismo activo, la tendencia de la volatilidad diaria en términos porcentuales.





Nótese que periodos de altas volatilidad (como enero del 2008) coinciden con periodos de alta variación de precios del peso contra el dólar. Los cambios son tanto positivos como negativos, lo que significa mayores ganancias o pérdidas.

Por lo tanto, se puede argumentar que en ambientes volátiles, o con un mayor grado de incertidumbre o de riesgo son también grandes oportunidades, siempre que se gestionan adecuadamente.

Este impacto se traduce en un precio más alto para la opción que cuenta con mayor volatilidad del activo con mayor volatilidad del activo subyacente. El impacto de la variable sobre el precio de la opción será determinado por los modelos de valuación de opciones.

Sin embargo, podemos decir que de forma simplificada, la prima es el resultado de distintas variables que se presentan como sigue:

$$C = f(S, T, K, r, \sigma)$$

Los efectos de los cambios en las variables sobre el precio de una opción se dan de la siguiente forma:

Movimiento de la variable	Efecto en el valor de la call	Efecto en el valor de la put
Activo sube	Aumenta	Cae
Activo baja	Cae	Aumenta
Volatilidad aumenta	Aumenta	Aumenta
Volatilidad cae	Cae	Cae
El paso del tiempo	Cae	Cae
Tasa de interés sube	Cae	Cae
Tasa de interés baja	Aumenta	Aumenta

Tabla 2: Efectos de los cambios en las variables sobre el precio de una opción

## MODELO BINOMIAL

El modelo Binomial, desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein (1979), es el modelo visualmente más simple e intuitivo para la valuación de opciones. Debido a esta ventaja grafica, que evita que se le etiquete como “caja negra” a veces atribuida a los modelos más complejos matemáticamente hablando, el modelo Binomial también ha sido el modelo más utilizado por los profesionales que buscan opciones en la gestión de inversiones en activos reales.

La técnica de construcción del modelo se basa en los arboles binomiales que representan los diversos caminos a seguir por el precio del activo subyacente durante la vida de la opción. La premisa básica aprobada por el modelo es la de no-arbitraje, es decir, el mercado se ajusta a las eventuales oportunidades de arbitraje (retorno sin riesgo).

Considerando una situación simple en la que el precio del activo subyacente es de \$100, y sabiendo que al final de un periodo de seis meses el precio del activo puede ser de \$120 a \$80, tendríamos la siguiente ilustración:

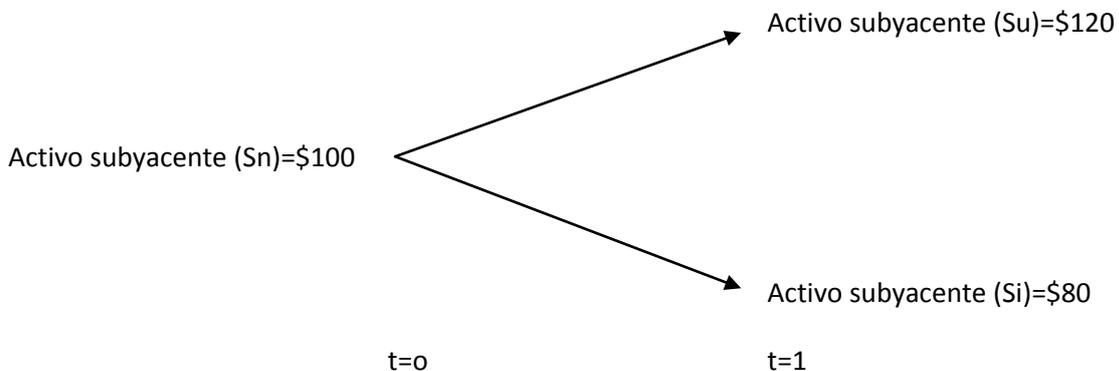


Figura 1: Ejemplo 1 – modelo Binomial

Suponiendo que tenía una opción de este activo subyacente, con un precio de ejercicio (K) igual a 100 dólares, esta opción tenía un valor en la madurez:

$$C(T) = \text{Max}(S(T) - K, 0)$$

Donde: T es la fecha de vencimiento;

C(T) es el valor de la opción de compra en la fecha T;

S(T) es el precio del activo subyacente en la fecha T;

K es el precio del ejercicio;

Max es el dato más grande.

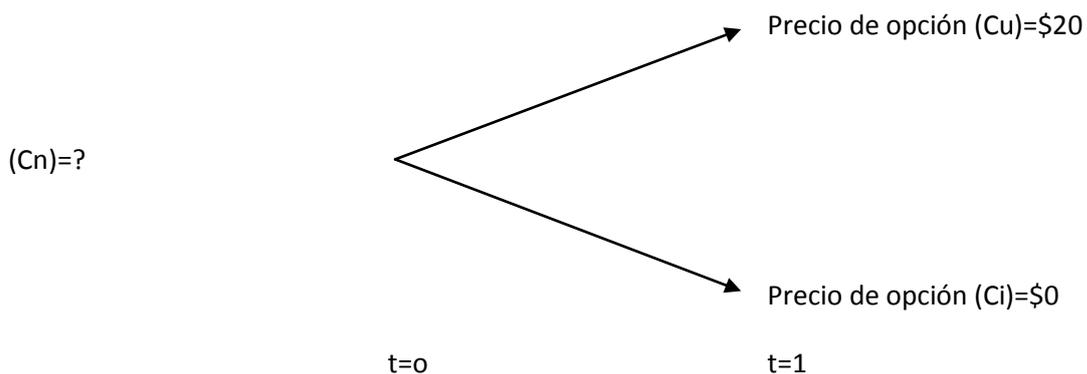


Figura 2: Ejemplo 2 – Modelo Binomial

Para valuar la opción en el tiempo  $t = 0$ , el modelo asume el no arbitraje, al formar una cartera con sólo dos títulos (importe que será determinado de activos subyacentes y opciones), por lo que no existen dudas sobre el valor esta cartera al final del período.

Se argumenta además que la cartera no tiene riesgo, por lo tanto el rendimiento debe ser igual a la de tasa de interés libre de riesgo. Esto permite la evaluación del precio de la opción en el tiempo  $t = 0$ .

Considerando esta cartera compuesta por una cantidad  $\Delta$  (delta) de los activos, y una posición corta en una opción de compra, tendríamos la siguiente igualdad:

$$120\Delta - 20 = 80\Delta - 0$$

$$40\Delta = 20$$

$$\text{Que nos da } \frac{40}{20} = \Delta = 0.5$$

Sustituyendo  $\Delta$  en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene el valor equivalente de la cartera, que es igual a  $80 \times 0,50 - 0 = 40$  dólares o  $120 \times 0,50 - 20 = \$ 40$ . Por lo tanto, independientemente de las variaciones del precio del activo subyacente (hacia arriba o hacia abajo), el valor equivalente de la cartera será siempre 40 dólares al vencimiento de la opción ( $t = 1$ ).

Al igual que en la ausencia de arbitraje, la cartera sin riesgo debe pagar la tasa de interés libre de riesgo, sabemos que el valor de la cartera en el tiempo  $t = 0$  debe ser el valor presente de \$ 40, descontado por la tasa libre de riesgo ( $r = 10\%$  por ejemplo), de la siguiente manera:

$$\frac{40}{(1 + 0.10)} = 36.363$$

Conociendo el valor de los activos subyacentes de hoy es de \$ 100, la ecuación equivalente de la cartera en  $t = 0$  es:

$$100 \times 0,50 - S(0) = 36.364$$

$$S(0) = 13.636$$

Esto demuestra que, a falta de oportunidades de arbitraje, el valor actual de la opción debe 13.636 dólares. Si el precio de la opción fue mayor, la cartera que costaría menos de 36,364 dólares para ser formada, y daría más que la tasa de interés libre de riesgo. Si el valor de opción fuera más bajo, podríamos vender la cartera y, por tanto prestar dinero a un costo menor que el interés libre de riesgo.

#### ARBITRAJE EN EL CASO DE OPCION CARA

Suponiendo el caso de una opción de un precio de \$ 15 (sería caro porque su precio era \$ 13, 636), puede realizar la siguiente operación de arbitraje:

En La fecha inicial	Al vencimiento	Con el Activo al precio:
	+\$80	+\$120
Compra de 0.5 acciones por \$100 = -\$50	+\$40	+\$60
Préstamo de \$36.636 =+ \$36.636	-\$40	-\$40
Venta de opción = +\$15	\$0	-\$20
Resultado = +\$1.634	\$0	\$0

El arbitraje en el caso de opción cara

En la madurez, sea cual sea el precio del activo subyacente, este arbitraje no genera ningún beneficio o pérdida. En el período  $t = 0$ , tiene una ganancia segura de \$ 1.364.

#### ARBITRAJE EN EL CASO DE OPCION BARATA

Suponiendo el caso de una opción de un precio de \$ 10 (sería barato porque su precio era \$ 13, 636), puede realizar la siguiente operación de arbitraje:

En La fecha inicial	Al vencimiento	Con el Activo al precio:
	+\$80	+\$120
Compra de 0.5 acciones por \$100 = +\$50	-\$40	-\$60
Préstamo de \$36.636 =+ \$36.636	+\$40	+\$40
Venta de opción = +\$15	\$0	+\$20
Resultado = +\$1.634	\$0	\$0

El arbitraje en el caso de opción barata

La venta en corto del activo subyacente se puede hacer con un préstamo de la acción, o a través de la venta de un instrumento derivado. Si existe al menos una institución financiera atenta para llevar a cabo este negocio con cuidado, entonces no habrá oportunidades de arbitraje disponibles con esta opción, lo que implica que el precio de la opción es de \$ 13.636 (según modelo).

Aunque el modelo no hace ninguna consideración de la probabilidad de aumento o disminución en el precio del activo subyacente, estos ya han sido incorporados en el precio de las acciones. Asimismo, la volatilidad también está incorporada, es fácil demostrar que el precio justo de una opción debe ser mayor si la amplitud de los movimientos del activo subyacente es de \$ 140 o \$ 60

El modelo también considera los siguientes supuestos para el funcionamiento del mercado:

- Hay comprador y el vendedor de cualquier cantidad del activo subyacente al precio de mercado;
- no hay precio de venta y compra de un solo precio;
- ningún riesgo de crédito en las transacciones;
- tasa de interés para cualquier período de tiempo es conocido y no cambia.

### VALUACION NEUTRA AL RIESGO

Los argumentos presentados en el tema anterior pueden ser resumidos en una regla general, considerando un activo subyacente, cuyo precio es  $S$ , y una opción de este activo con valor  $C$ . Suponiendo además que la opción tiene un plazo  $T$ , y que durante la vida activa puede moverse tanto hacia arriba como a un nuevo nivel  $S_u$ , o hacia abajo un nivel  $S_d$ , ( $u > 1$ ,  $d < 1$ ), conforme a la ilustración de abajo:

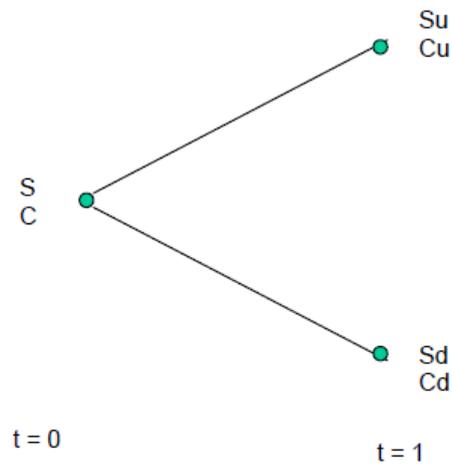


Ilustración. Valuación neutra al riesgo.

Del mismo modo, hemos creado una cartera equivalente compuesta de una cantidad  $\Delta$  del activo subyacente y una opción, y calculamos el valor de  $\Delta$  que hace que la cartera sin riesgo, de la siguiente manera:

$$S_u \Delta - C_u = S_d \Delta - C_d$$

O

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \text{ (Ecuación 1)}$$

Por ser una cartera sin riesgo, debe remunerar una tasa de interés libre de riesgo  $r$ , que nos da el siguiente valor de cartera:

$$\frac{[S_u \Delta - C_u]}{(1+r)}$$

Que igualando al costo de creación de esta cartera:

$$S \Delta - C = \frac{[S_u \Delta - C_u]}{(1+r)}$$

Sustituyendo los datos en la ecuación 1 y simplificando tenemos:

$$C = S\Delta - \frac{[Su\Delta - Cu]}{(1+r)}$$

Donde:

$$C = S\Delta - \frac{[pCu + (1+p)Cd]}{(1+r)} \text{ (Ecuación 2)}$$

$$p = \frac{(1+r) - d}{u - d} \text{ (Ecuación 3)}$$

Utilizando las ecuaciones 2 y 3 para el cálculo del valor de la opción conforme al ejemplo anterior, tendríamos:

$$u = 1.2, d = 0.8, r = 0.10, T = 0.50, Cu = 20, e Cd = 0$$

$$p = \frac{(1 + 0.1) - 0.8}{1.2 - 0.8} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

$$C = \frac{[0.75 \times 20 + (1 - 0.75) \times 0]}{(1 + 0.10)}$$

$$C = 13.636$$

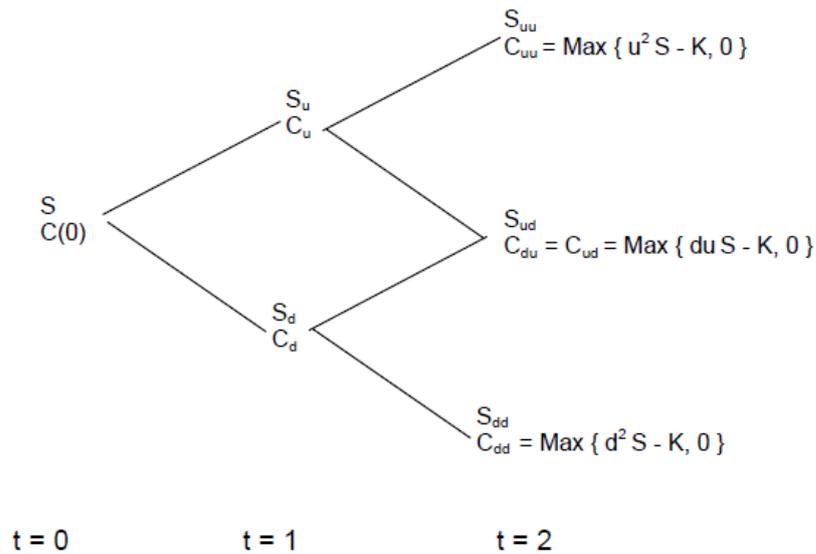
Esto está de acuerdo con las estimaciones previas. Así, se calcula el precio de la opción como si el valor esperado de esta opción, calculado de acuerdo con una probabilidad  $p$ , que no tiene relación con las probabilidades originales  $u$  y  $d$ . Esta probabilidad se conoce como la medida equivalente martingala o probabilidades neutras al riesgo.

El precio calculado de esta manera es igual a al rendimiento de la opción a tasa de interés libre de riesgo, como en un mundo donde todos los inversionistas fueran indiferentes al riesgo. Por esta razón, esta técnica se llama valoración neutra al riesgo. El precio obtenido por esta técnica también es válido en un mundo donde los inversores no son neutros al riesgo, porque la tasa de rendimiento esperado no entra en el cálculo del precio de la opción.

### ARBOLES BINOMIALES MÚLTIPLES

El modelo Binomial, desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein (en realidad una idea sugerida por William Sharpe), se aplica solamente para árboles binomiales simples, como también sobre árboles binomiales con múltiples ramificaciones, que representan la gran mayoría de los problemas con opciones encontrados en la práctica.

Con las definiciones obtenidas, es posible aplicar un movimiento Binomial para el precio de la acción, como se aprecia a continuación:



### Ejemplo – Arboles binomiales múltiples

De acuerdo con la valuación neutra al riesgo, el precio de la acción se calcula recorriendo hacia atrás el árbol Binomial.

$$Cd = \frac{[pCdu + (1 + p)Cdd]}{(1 + r)}$$

$$Cu = \frac{[pCu + (1 + p)Cd]}{(1 + r)}$$

$$C(0) = \frac{[ + (1 + )]}{(1 + )}$$

Y una vez que los cambios en el activo subyacente durante la vida de la opción están determinados por la volatilidad de este activo para el período, podemos derivar de la volatilidad del porcentaje de alta o baja del activo subyacente:

$$= \sqrt{\dots} = \frac{-\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n}}$$

Dónde:

T= el plazo de la opción con la medida de volatilidad (por ejemplo, si tenemos la volatilidad anual y la opción tiene 6 meses de vida, entonces T=1/2)

$\sigma$  = Medida de volatilidad del activo subyacente

n = número de periodos en los que el activo subyacente se puede mover

u = probabilidad de alta del activo subyacente

d = probabilidad de baja del activo subyacente

A continuación, presentamos un ejemplo de cálculo utilizando la hoja de cálculo, de una opción sobre un activo subyacente en particular a través del modelo Binomial de 10 periodos:

Precio del ejercicio (k): \$2,022

Precio del activo subyacente (S): \$455.60

Tasa de interés: 5%

Volatilidad anual ( $\sigma$ ): 10%

Número de días hábiles: 50

Número de días hábiles en un año: 252

Haciendo  $n=10$  periodos, tenemos:

$T = 0,2096$ ,  $d = 0,9563$ ,  $u = 1,0365$ ,  $r = 0,0022$  y  $p = 0,5760$

a) Árbol Binomial para el precio del activo subyacente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Periodo										
\$132.50	\$134.38	\$136.29	\$138.22	\$140.18	\$142.17	\$144.19	\$146.23	\$148.30	\$150.41	\$152.54
	\$130.65	\$132.50	\$134.38	\$136.29	\$138.22	\$140.18	\$142.17	\$144.19	\$146.23	\$148.30
		\$128.82	\$130.65	\$132.50	\$134.38	\$136.29	\$138.22	\$140.18	\$142.17	\$144.19
			\$127.02	\$128.82	\$130.65	\$132.50	\$134.38	\$136.29	\$138.22	\$140.18
				\$125.24	\$127.02	\$128.82	\$130.65	\$132.50	\$134.38	\$136.29
					\$123.49	\$125.24	\$127.02	\$128.82	\$130.65	\$132.50
						\$121.76	\$123.49	\$125.24	\$127.02	\$128.82
							\$120.06	\$121.76	\$123.49	\$125.24
								\$118.38	\$120.06	\$121.76
									\$116.72	\$118.38
										\$115.09

b) Cálculo del precio de la opción.

Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\$2.80	\$3.66	\$4.70	\$138.22	\$7.33	\$8.88	\$10.53	\$12.24	\$13.98	\$15.75	\$17.54
	\$1.61	\$2.21	\$134.38	\$3.98	\$5.18	\$6.60	\$8.18	\$9.86	\$11.57	\$13.30
		\$0.76	\$130.65	\$1.62	\$2.31	\$3.22	\$4.40	\$5.85	\$7.51	\$9.19
			\$127.02	\$0.42	\$0.66	\$1.03	\$1.57	\$2.39	\$3.56	\$5.18
				\$0.05	\$0.09	\$0.15	\$0.26	\$0.44	\$0.75	\$1.29
					\$-	\$-	\$-	\$-	\$-	\$-
						\$-	\$-	\$-	\$-	\$-
							\$-	\$-	\$-	\$-
								\$-	\$-	\$-
									\$-	\$-
										\$-

De esta forma, se tiene que el precio justo de las opciones negociadas sobre el activo subyacente en cuestión, calculado por el modelo Binomial, es de \$ 2.80.

## VALIDACION DEL MODELO BINOMIAL

En la Tabla 2 “Efectos de los cambios en las variables sobre el precio de una opción” se presentan los efectos de los movimientos en cada una de las variables básicas en el precio de la opción. En esta sección, la validación se basará en el ejemplo numérico presentado:

- a) Aumento de volatilidad  
Volatilidad anual ( $\sigma$ ) anterior = 10%  
Volatilidad anual ( $\sigma$ ) propuesta = 20%

En este escenario, el precio de la nueva opción C (0) es de \$ 5.20, lo que confirma la proposición de aumentar el valor de la opción con el aumento de grado de incertidumbre.

- b) Aumento del periodo T  
Número de días anterior = 50  
Número de días propuesto = 100

En esta situación, el precio de la nueva opción C (0) es 5.73 dólares, que también apoya la hipótesis de que períodos más largos (mayor incertidumbre) se incrementa el valor de la opción.

- c) Aumento en la tasa de interés  
Tasa de interés diaria efectiva anterior = 0.05%  
Tasa de interés diaria efectiva propuesta = 0.10%

En este caso particular, los cálculos muestran que el aumento aislado de las tasas de interés provoca un aumento en el precio de la opción C (0) a 4.86 dólares, mientras que la proposición inicial sugiere lo contrario: una disminución en el precio. Sin embargo, se nota que existe una sensibilidad hacia el valor de la acción (o un objeto activo) a cualquier cambio en los tipos de interés hasta cierto punto, medido por la volatilidad del objeto. Por lo tanto, el aumento de la tasa de interés no se puede probar de forma aislada, sino que también tienen impactos significativos en otras variables en el modelo, en concreto el precio del activo subyacente y la volatilidad.

- d) Aumento en el precio del activo subyacente  
Precio del activo (S) anterior = 132.50  
Precio del activo (S) propuesto = 134.00

Una vez más, esta prueba confirma la proposición inicial de aumentar el valor de la opción (por \$ 3.72), causado por un aumento en el precio del activo subyacente. Esta relación es lógica, debido a que, mayor será el precio del activo, más probable será de ejercer el call, y el razonamiento indica que a la inversa debe ser exactamente lo mismo (Put)

## PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y LEMA DE ITÔ

A fin de proporcionar una base mínima para la comprensión de los fundamentos de los métodos de fijación de precios teóricos de los activos y las opciones en tiempo continuo, es necesario comprobar (sin el rigor de las matemáticas y la física), algunas hipótesis y conceptos matemáticos que se utilizaron como base para el desarrollo de estos modelos, en especial, introducir el concepto de procesos estocásticos, en particular el proceso de Wiener (o movimiento browniano) y su generalización llamado el lema de Itô.

### *Procesos estocásticos*

Un proceso estocástico describe una variable que se comporta al menos en parte al azar a través del tiempo, tomando valores impredecibles. Un ejemplo clásico es el precio de la acción, que puede ser modelado como una variable que se mueve con cualquier tendencia, pero fluctúa aleatoriamente en torno a esto. Procesos estocásticos pueden ser continuos o discontinuos, dependerá de la variable de tiempo si es continua o discreta, respectivamente.

### *Propiedad de Markov*

Esta propiedad dice que la distribución de probabilidad de  $x_1$  depende sólo de  $x_t$ , y no además de lo que sucedió antes del momento  $t$ . Por lo tanto, la propiedad de Markov significa que los acontecimientos pasados no son importantes para predecir los valores futuros, y que el valor actual de la variable es suficiente para estimar el futuro.

Los precios de los activos financieros son constantemente modelados como procesos de Markov, ya que la información pública se absorbe rápidamente en el valor actual de los activos, por lo que el pasado tiene poco o ningún poder de predicción sobre su valor futuro. En las finanzas, esto se conoce como la eficiencia del mercado débil.

### *Proceso de Wiener*

El proceso de Wiener, también llamado movimiento browniano, una a largo plazo estocástico proceso continuo, a menudo utilizado para explicar la evolución de los activos depreciados.

Este proceso tiene tres características principales:

1. La primera es que el proceso de Wiener es un proceso de Markov, y por lo tanto la distribución de probabilidad de los valores futuros del proceso sólo depende de su valor actual, no se ven afectados por el pasado;
2. La segunda es que el proceso de Wiener tiene incrementos independientes, lo que significa que la distribución de probabilidad de las variaciones de proceso en cualquier intervalo de tiempo son independientes de cualquier otro momento;
3. La característica tercera y última es que las variaciones en el proceso en cualquier intervalo finito de tiempo tienen una distribución normal con varianza proporcional al intervalo de tiempo se produjo.

Suponiendo un proceso de Wiener con una variable  $z(t)$ , podríamos estudiar en pequeños intervalos de tiempo  $\Delta t$  y  $\Delta z$  define como el cambio en  $z$  en el intervalo  $\Delta t$ . Por tanto, escribimos el proceso de Wiener como:

$$\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

Cuando  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria con distribución normal estándar con cero media y la desviación estándar de 1 o  $N(0,1)$ . Los valores de  $\Delta z$ , para cualquier intervalo de tiempo  $\Delta t$  son independientes.

Con base en el teorema central del límite, se aplica a la suma de todos los intervalos de tiempo  $\Delta t$  (o  $T$ ), podemos decir que  $\Delta z$  también sigue una distribución normal con cero  $\Delta t$  media y desviación estándar. Este hecho (que depende de  $\Delta z \Delta t$  lugar de  $\Delta t$ ), es particularmente importante porque la variación del cambio de  $z$  en un proceso de Wiener aumenta linealmente con el horizonte temporal, es decir, a medida que aumenta el tiempo, la incertidumbre la predicción (mayor desviación estándar) y la curva normal se sustituye por uno más aplanada.

Si consideramos un cambio infinitesimal de tiempo, es decir, se calcula el límite de la variable dependiente  $\Delta z$  como variable independiente  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos escribir:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

Y como  $\varepsilon_t$  tiene cero media y desviación estándar igual a 1, se tiene que:

$$\begin{aligned} E(dz) &= 0 \\ \text{Var}(dz) &= dt \end{aligned}$$

Para desarrollar el concepto y aplicación en el futuro cambio en el precio de un activo, es necesario hacer una generalización del proceso de Wiener para una variable  $s$ . Esta generalización se denomina movimiento Browniano con tendencia, y se puede escribir como sigue:

$$ds = \mu dt + \sigma dz$$

En la ecuación,  $\mu$  representa el parámetro de la tendencia en el tiempo (o crecimiento),  $\sigma$  el parámetro de variación, que expresa la incertidumbre o el ruido en el proceso, y  $s$  es un proceso estocástico. Si tenemos en cuenta el cambio en el valor de  $s$  en poco tiempo  $\Delta t$  intervalo de tiempo, tenemos:

$$\Delta s = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

Como hemos visto,  $\Delta s$  estará, en esas condiciones, como una distribución normal con media  $\Delta \mu$  y desviación estándar  $\sigma \Delta t$ .

Suponiendo un ejemplo con los siguientes datos:

- Valor inicial del activo igual a cero
- Tendencia de crecimiento ( $\mu$ ) igual a 0.17 al año
- Varianza ( $\sigma^2$ ) igual a 0.8 al año

Podríamos escribir la siguiente ecuación:

$$ds = 0.17dt + \varepsilon_t \sqrt{0.8dt}$$

Para lo cual tendríamos una aproximación discreta y mensual:

$$s_t = s_{t-1} + \frac{0.17}{12} + \sqrt{\frac{0.8}{12}} \varepsilon_t$$

$$s_t = s_{t-1} + 0.014167 + 0.258199\varepsilon_t$$

La siguiente tabla muestra dos caminos posibles para la ecuación anterior, con valores de  $\varepsilon_t$  producida por el generador de números aleatorios de una distribución normal estándar. Fue utilizado para la generación de números aleatorios en este ejemplo, el software estadístico Minitab versión 13.30.

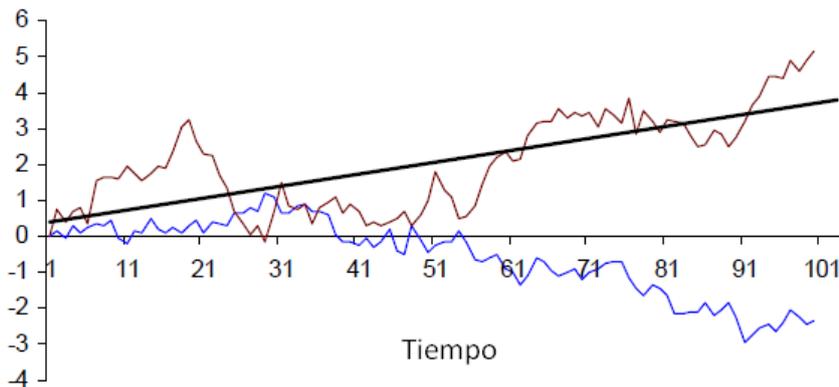


Figura. Movimiento browniano con tendencia

Cabe señalar que los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  están expresadas en términos mensuales, es decir, una tendencia de 0.17 a 0,17 años de media  $12 = 0,014167$  y una varianza de 0,8 a 0,8 años promedio / 12 = 0.66667 al mes, o una desviación estándar de 0,258199 por mes.

Debido a la propiedad de Markov, podemos hacer predicciones sobre la evolución de este proceso estocástico, ya que sólo el valor de  $s(t)$  es necesario para construir el futuro escenario.

La tendencia puede ser obtenida igualando  $E(st) = 0$

$$E(st) = \hat{s}_{t+k} = 1 + 0.014167k$$

Y el intervalo de confianza se puede construir alrededor de esta tendencia. Por ejemplo, para un rango de probabilidad del 95%, la variable  $s$  debe estar dentro de  $\pm 1,645$  desviaciones estándar:

$$\hat{s}_{t+k} = st + 0.014167 \pm 1645 * 0.258199\sqrt{k}$$

Donde  $k$  es el número de meses

Con la ampliación de la tendencia, esta ecuación da la siguiente predicción de las trayectorias de los escenarios presentados en la siguiente figura para los próximos 50 meses:

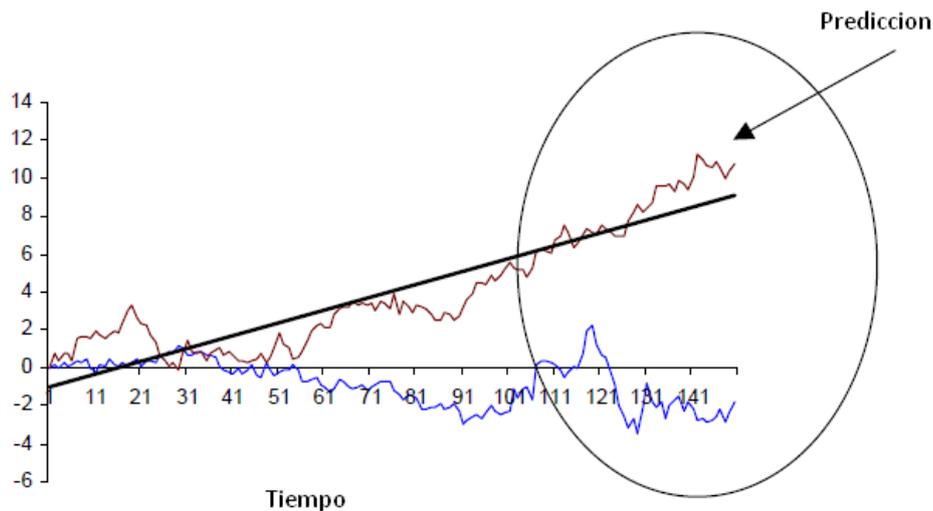


Figura. Predicción de escenarios.

Se puede observar, por tanto, que en el largo plazo un proceso de Wiener con el movimiento browniano, la tendencia parámetro es predominante, mientras que en el corto plazo es la varianza domina. Esta característica, así como el concepto de proceso de Wiener en su conjunto, sirve de base para el modelado de una amplia gama de variables estocásticas. Sin embargo, a pesar de la proximidad, el modelo presentado hasta el momento no permite la modelización del comportamiento de un precio de activos financieros, ya que, como hemos visto en los gráficos, el movimiento browniano simple (MBS) acepta valores negativos, que no es posible que los precios de los activos financieros. Asimismo, la tasa de rentabilidad de este activo no se puede modelar ya que se limita a  $-100\%$  y  $100\%$ .

Por lo tanto concluimos que la variación en el precio de un activo no es una variable apropiada para modelar la forma habitual. Del mismo modo, la tasa de variación discreta tampoco sirve, ya que puede presentar una variación de menos de  $-100\%$

Para resolver este problema, Varga propone la tasa de uso para el cambio continuo en el precio, ya que puede lograr una variación negativa de menos de  $100\%$ . El índice es la variación continua del logaritmo natural del precio. Así que si ella tiene una distribución normal, el precio se dice que tienen una distribución logarítmica normal.

La fórmula para calcular la tasa continua de retorno es:  $\ln\left(\frac{s_t}{s_{t-1}}\right)$

Una variable aleatoria, cuya tasa de interés tiene distribución normal continua puede ser descrita por el llamado movimiento browniano geométrico (GBM):

$$ds = \mu s dt + \sigma s dt$$

o

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dz$$

Donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes arbitrarias.

Para manipular esta ecuación precisamos de un resultado de cálculo estocástico, conocido como lema de Itô.

### Lema de Itô

Como indican Dixit y Pindyck (1994), un proceso estocástico continuo  $x(t)$  se le llama proceso de Itô, representada por la ecuación:

$$dx = a(x, t) \cdot dt + b(x, t) \cdot dz$$

Donde  $x(t)$  es la función de la tendencia no aleatoria,  $b(x, t)$  es la función de varianza no aleatoria,  $z(t)$  es un proceso de Wiener y  $t$  es el tiempo. Puede verse, pues, que el movimiento browniano geométrico es un caso especial del proceso de Itô, en el que las coordenadas  $a(x, t) = \mu s$  y  $b(x, t) = \sigma s$ .

Dada una función  $F(s, t)$ , por lo menos dos veces diferenciable en  $s$ , y una vez en  $t$ , el lema de Itô demuestra que se sigue el siguiente proceso:

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + a(s, t) \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2} b^2(s, t) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \right] dt + b(s, t) \frac{\partial F}{\partial s} dz$$

Este lema es la base de fórmulas y métodos para evaluar el precio de los derivados, ya que,  $F(s, t)$  puede ser el precio de un contrato de futuros o el precio de una opción de compra. Sin embargo, como se indica anteriormente, es razonable suponer que las variaciones en el precio de una acción o los activos financieros siguen una distribución normal, porque el precio de un activo no podrá ser inferior a cero. Así, uno puede asumir que los precios de una acción a seguir una distribución logarítmica normal, es decir, las variaciones en el logaritmo del precio siguen una distribución normal.

De esa forma, siendo  $s$  el proceso browniano geométrico que describe el precio de un activo y  $F(s) = \ln s$  y siendo  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{s}$ ,  $e \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = -\frac{1}{s^2}$ , siendo el lema de Itô:

$$ds = \mu s dt + \sigma s dz$$

$$dF = \left[ 0 + \mu s \frac{1}{s} + \frac{1}{2} (\sigma s)^2 \frac{-1}{s^2} \right] dt + \sigma + \sigma s \frac{1}{s} dz = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

Por lo tanto, en cada intervalo de tiempo finito  $T$ , la variación en  $\ln s$  es normalmente distribuida, con media  $\left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T$  y varianza  $\sigma^2 T$ .

Una aproximación discreta a la ecuación anterior puede ser:

$$\ln \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t$$

O

$$S_{t+1} = S_t e^{\left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t \right]}$$

Porque  $\Delta z$  es un proceso de Wiener ( $\Delta z = \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t$ ) y  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria que sigue una distribución normal estándar, el tiempo  $t+1$  es igual a  $t + \Delta t$ ,  $\Delta F = F_{t+1} - F_t = \ln s_{t+1} - \ln s_t = \ln \left( \frac{s_{t+1}}{s_t} \right)$ , y  $\Delta F$ ,  $\Delta t$  y  $\Delta z$  son las versiones discretas de  $dF$ ,  $dt$  y  $dz$ , respectivamente.

En un ambiente neutral al riesgo, donde la tasa de rendimiento de todos los activos es igual a la tasa de interés libre de riesgo, la tendencia en  $\mu$  es igual a la tasa libre de riesgo  $r$ .

Suponiendo un ejemplo con los siguientes datos:

Valor inicial del activo igual a \$0.50;

Tendencia de crecimiento ( $\mu$ ) igual a 0.09 al año;

Varianza ( $\sigma^2$ ) igual a 0.2 al año.

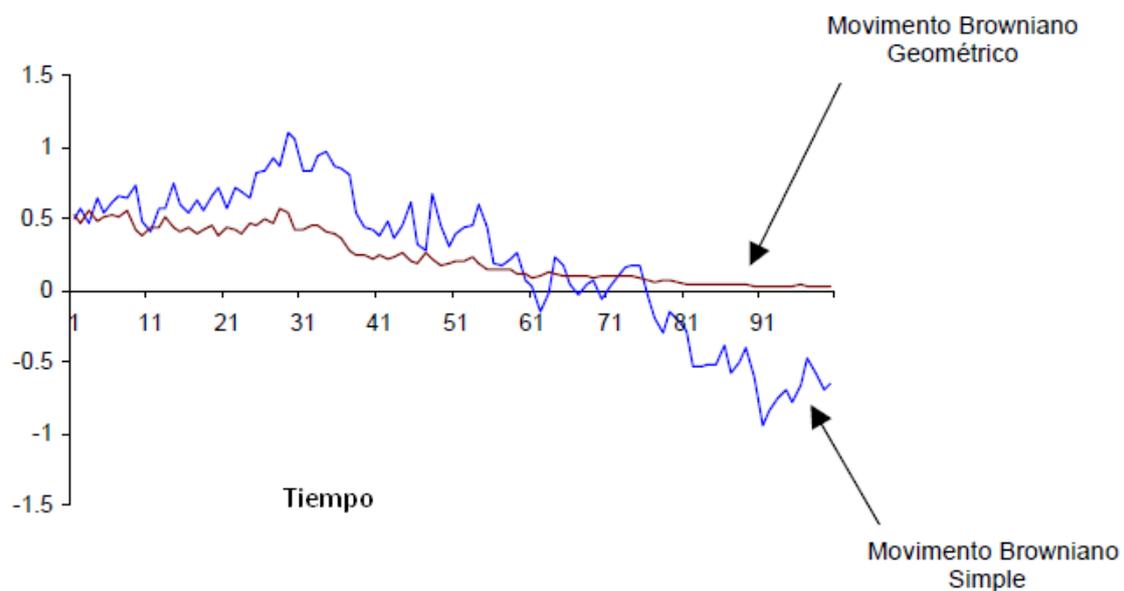


Figura. Comparación entre MBG y MBS

Donde se muestra que el MBG (movimiento browniano geométrico) nunca asume valores negativos, y es, por lo tanto, más adecuado para representar el precio de activos financieros.

### EL MODELO DE BLACK & SCHOLES

El modelo Black-Scholes, publicado en 1973 en el Journal of Political Economy, parte del concepto presentado en la sección anterior de que el activo subyacente de una opción sigue un comportamiento estocástico continuo en forma de una MBG (el movimiento browniano geométrico). Esto significa que se supone que la distribución de probabilidad de los precios del activo subyacente de una operación en una fecha futura, es log normal y, en consecuencia, la distribución de probabilidad de las tasas de retorno calculada en forma continua e integrada por dos fechas es normal.

Para desarrollar la fórmula, que es ampliamente utilizado por los mercados financieros, sus autores han adoptado los supuestos básicos siguientes:

- Los precios de los activos tiene una distribución logarítmica normal con  $\mu$   $\sigma$  y constante
- La tasa de interés libre de riesgo ( $r$ ) es constante
- No hay costos de transacción, impuestos y márgenes, y todos los activos son perfectamente divisibles;
- El objeto activo (acción) no paga dividendos u otros ingresos durante la vida de la opción;
- No hay oportunidades de arbitraje sin riesgos (principio de no arbitraje es válido);
- Lidiar con el activo subyacente es continuo (no discreto) y los activos sean divisibles;
- Las ventas cortas se les permite y puede tomar cualquier cantidad a la tasa de interés actual.

El análisis del modelo Black-Scholes utiliza el mismo principio de no arbitraje, adoptado por el modelo Binomial. Crea una billetera sin correr el riesgo, compuesto por una posición en el activo subyacente y una posición en la opción, y su retorno debe ser también el riesgo de tipo de interés libre.

En el modelo Black-Scholes, sin embargo, la posición de montaje en la cartera sólo es equivalente libre de riesgo para períodos muy cortos, casi instantánea, lo que indica una diferencia fundamental del modelo Binomial presentado.

Así suponiendo que  $C(s,T)$  indica el valor de una opción de compra europea, con una función de precio de acción  $s$  y de tiempo  $T$ . se tiene que el lema de Itô es:

$$dC = \left[ \frac{\partial C}{\partial T} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} (\sigma^2 S^2) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] dT + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dz$$

Que puede tener las siguientes aproximaciones discretas:

$$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta T + \sigma \cdot S \cdot \Delta z$$

Y

$$\Delta C = \left[ \frac{\partial C}{\partial T} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \right] \Delta T + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \Delta z$$

Tal como se presenta, el proceso de Wiener para las dos ecuaciones anteriores son las mismas, es decir,  $\Delta z \in T \Delta T =$ . Así, una cartera compuesta por el activo subyacente y su opción puede eliminar el proceso de Wiener, o el componente aleatorio. Para ello, utiliza una cartera con una posición vendida en opciones y una posición comprada en  $\frac{\partial C}{\partial S}$  objetos activos. El valor de la cartera esta dado por  $P$ :

$$P = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S$$

La variación de la cartera dentro de un intervalo de tiempo  $\Delta T$  es:

$$\Delta P = -\Delta C + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S$$

Substituyendo la versión discreta del proceso del movimiento browniano geométrico del precio del activo subyacente y el proceso del precio de la opción en la ecuación anterior se llega a:

$$\Delta P = - \left[ \left( \frac{\partial C}{\partial T} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \mu^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta T + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \Delta z \right] + \frac{\partial C}{\partial S} (\mu S \Delta T + \sigma S \Delta z)$$

$$\Delta P = - \left[ \left( \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta T \right]$$

Nótese que en la ecuación anterior el componente aleatorio fue eliminado, por lo que el  $\Delta T$  período, la cartera P no tiene ningún riesgo. Por el principio de no arbitraje, la cartera de P tendrá en el período  $\Delta T$ , el rendimiento igual al tipo de interés libre de riesgo ( $r$ ):

$$\Delta P = P \cdot r \cdot \Delta T$$

Cuando se substituye la ecuación anterior en la ecuación de variación de cartera se tiene que:

$$- \left( \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta T = P \cdot r \cdot \Delta T$$

$$- \left( \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta T = \left( -C + \frac{\partial C}{\partial S} S \right) \cdot r \cdot \Delta T$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial S} \cdot r \cdot S = r \cdot C$$

La ecuación diferencial anterior es la ecuación Black-Scholes, que tiene como solución la función  $C(S, T)$ , que puede ser el precio de un derivado de cualquiera, no sólo una opción de compra del tipo en Europeo. El método de construcción de la cartera es muy importante, ya que presenta una forma de eliminar el componente aleatorio y obtener las ecuaciones diferenciales que logren soluciones analíticas para los precios de opciones. La cartera está libre de riesgos dentro de un intervalo de tiempo infinitesimal, y para mantenerlo permanentemente libre de riesgos es necesario cambiar los importes de activos y las opciones de frecuencia.

Para una opción de compra europea, cuyo activo subyacente tiene una opción que no paga dividendos durante la vida del derivado, tenemos las siguientes condiciones de frontera:

$$C(S, T) = \text{Maximo} \{S - K; 0\}$$

Donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción y  $T$  es el tiempo de vida de la opción medido en años.

Usando la ecuación anterior y el supuesto de que los precios de los activos financieros siguen una distribución logarítmica normal, Black y Scholes llegaron a la siguiente solución para su ecuación diferencial presentada:

$$C = SN(d_1) - K \cdot e^{-rT} N(d_2)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Donde C es el precio de una opción de compra europea con precio de ejercicio K, la vida T, r tasa libre de riesgo, la volatilidad de rendimiento de la población  $\sigma$ , y N es la función de distribución de probabilidades acumuladas estándar normal.

Del mismo modo, la fórmula Black-Scholes para calcular el precio de una opción de venta europea (V) es la siguiente:

$$V = K \cdot e^{-rT} N(-d_2) - S N(-d_1)$$

Dado que el precio de una opción americana de los activos sin contrapartida (por ejemplo, dividendos) es igual a la de una opción europea, la fórmula Black-Scholes también se aplica a estas opciones. Por desgracia, el Black-Scholes no tienen formulación analítica para el cálculo de opciones de venta de tipo americano.

La fórmula Black-Scholes fue formulada para el cálculo de las tasas de interés continuas. Sin embargo, ya que en la práctica el tipo de interés se trabaja discretamente, en vez de convertir su expresión que se hable de continuo, y utilizando la fórmula Black-Scholes presentado, se utiliza la tasa de interés ligeramente, ya que es la expresión normal del mercado.

Para ello, cambios en la fórmula Black-Scholes, cambiando el tipo de manifestaciones de interés, la introducción de la tasa de interés de los mismos discretos (no continuo). Así, la fórmula Black-Scholes es la siguiente:

$$C = S \cdot N(d_1) - \frac{K}{(1+i)^n} N(d_2)$$

Calculando  $d_1$  y con la tasa i discreta:

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{S(1+i)^n}{K}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{n}{252}\right)}{\sigma\sqrt{\frac{n}{252}}}$$

Por lo tanto:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\frac{n}{252}}$$

Así, considerando el mismo ejemplo utilizado para la demostración del modelo Binomial, podemos calcular el precio de la opción por el modelo Black-Scholes de la siguiente manera:

Precio de ejercicio (K) = \$135

Precio de objeto activo (S) = \$132.50

Tasa de interés diaria efectiva = 0.05%

Volatilidad anual ( $\sigma$ ) = 10%

Número de días hábiles = 50

Número de días hábiles al año = 252

$$d_1 = \frac{\ln \left[ \frac{132.50(1 + 0.05\%)^{50}}{135} \right] + \frac{10\%^2}{2} (50/252)}{10\% \sqrt{\frac{50}{252}}} = 0.1637$$

$$d_2 = d_1 - 10\% \sqrt{\frac{50}{252}} = 0.1192$$

N (d1) = 0.5650

N (d2) = 0.5474

$$C = 132.50 \cdot 0.5650 - \frac{135}{(1 + 0.05\%)^{50}} \cdot 0.5474 = 2.79$$

Según se observa el resultado es coherente con el presentado a través del método Binomial (\$2.80)

## VOLATILIDAD

La volatilidad es uno de los conceptos más relevantes en las finanzas actuales, y sin duda el factor más importante en el cálculo del precio de una opción. Está representada por el símbolo "sigma", indica el movimiento de los precios del activo subyacente. De hecho, cuanto mayor sea el movimiento o la "velocidad" del mercado y los activos que lo componen, mayor será el valor de la opción de estos activos.

Se describen los siguientes tipos de volatilidad:

**Volatilidad Futura:** la volatilidad que todo operador de mercado quisiera saber, es decir, la volatilidad que mejor describe la distribución futura de los precios de un activo subyacente en particular, y que en teoría podría producir el precio más exacto para una opción cuando se utiliza en un modelo evaluación de las opciones. Obviamente, esta volatilidad no es descrita por la imposibilidad de prever el futuro.

**Volatilidad histórica:** si bien no es posible predecir el futuro, para utilizar un modelo para evaluar el precio de las opciones es necesario hacer estimaciones de la volatilidad futura. Una forma de hacerlo es mediante el uso de datos históricos.

Hay varias maneras de calcular la volatilidad histórica, pero la mayoría de los métodos depende de la elección de dos parámetros: el período histórico en que la volatilidad será estimado y el intervalo de tiempo entre sucesivas variaciones de los precios. Períodos

históricos más largos tienden a aumentar la volatilidad media, mientras que períodos más cortos pueden resultar volatilidad extrema.

Volatilidad implícita: a diferencia de la volatilidad histórica y el futuro, que están directamente vinculadas a un activo subyacente, la volatilidad implícita se asocia con el precio de la opción, es decir, es igual al valor teórico de una opción con el precio de mercado de los mismos, logrando así como el parámetro de volatilidad. La volatilidad implícita se conoce como la predicción de la volatilidad del mercado, teniendo en cuenta las expectativas del mercado sobre el futuro de la volatilidad ha, incorporando la información del pasado.

Volatilidad estacional: esta volatilidad está directamente relacionada con el movimiento de ciertos productos o los bienes agrícolas en el mercado (maíz, soja, trigo, café, etc.) que presentan volatilidad más sensible a los cambios climáticos en los últimos años. Por lo tanto, la volatilidad de algunos activos aumenta o disminuye debido a las sequías, las lluvias o la llegada simple de una nueva temporada.

El método más común para la obtención de la volatilidad histórica es la de calcular la variación del logaritmo natural de la serie de precios. La volatilidad no es más que la desviación estándar de esta serie:

$$Volatilidad_{Estimada} = Desviacion\ estandar \left\{ \left[ \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \right]_{t=1}^T \right\}$$

Si las variaciones en la muestra son todos los días (es decir, t es el número de días de trabajo), tenemos la volatilidad diaria. Para calcular la volatilidad anual simplemente se multiplica por la raíz cuadrada del número de días laborables en el año.

## EL METODO MONTECARLO

El nombre "Monte Carlo" tiene su origen en el famoso casino de Mónaco, fundado en 1862, y la analogía de los casinos a los mercados financieros. Se puede decir que el método de Monte Carlo se aproxima al comportamiento de los precios de los activos, a través de simulaciones por computadora que generan caminos aleatorios.

El concepto básico del método de Monte Carlo es la simulación repetidas veces (por ejemplo 1000) de un proceso estocástico para una variable financiera, simulando la mayor cantidad posible de las situaciones y resultados. Un modelo estocástico de uso común es el movimiento Browniano geométrico (GBM), que, como se explicó anteriormente, puede ser descrito por:

$$ds = \mu s dt + \sigma s dz$$

Donde dz es una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y varianza dt. Teniendo en cuenta la variación de s en un pequeño intervalo de tiempo Δt tenemos:

$$\Delta s = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

Donde  $\varepsilon_t$  es ahora una variable aleatoria normal estandarizada. Para simular la trayectoria de los precios de  $S_{t+1}$ , se inicia con  $S_t$ , y se genera una secuencia de Épsilones ( $\varepsilon$ ) para r.

Utilizando el lema de Itô, se llega a la siguiente aproximación discreta para la ecuación anterior:

$$S_{t+1} = S_t e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t\right]}$$

Con base en los mismos datos utilizados en los ejemplos anteriores de cálculo de precio de una opción (modelo Binomial y el modelo Black-Scholes), se presenta una metodología de evaluación del precio de las opciones en el modelo de Monte Carlo (suponiendo que la generación de números aleatorios 1000):

Precio de ejercicio (K) = \$135

Precio de objeto activo (S) = \$132.50

Tasa de interés diaria efectiva = 0.05%

Volatilidad anual ( $\sigma$ ) = 10%

Número de días hábiles = 50

Número de días hábiles al año = 252

$$S_{t+1} = 132.50 e^{\left[\left(12.3\% - \frac{10\%^2}{2}\right)0.2096 + 10\%\sqrt{0.2096}\varepsilon_t\right]}$$

Sabiendo que el valor de la opción en la madurez es  $C(T) = \text{Max}(S(T) - K, 0)$ , tenemos:

Numero aleatorio $\varepsilon_t$	Precio en la madurez	Valor de la opción
-0.154489044	134.79	-
-0.922254912	130.26	-
0.328201395	137.72	2.72
2.265223884	150.13	15.13
-1.164983132	128.86	-
0.118120624	136.43	1.43
1.280457127	143.68	8.68
-1.091407285	129.28	-
-0.003786909	135.7	0.7
0.862451088	141.03	6.03
-0.317643298	133.81	-
0.545505827	139.06	4.06
0.109880602	136.38	1.38
-0.938412086	130.16	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
0.581007953	139.28	4.28
2.135548129	149.26	14.26
-1.900907591	124.7	-
0.154411737	136.66	1.66

1.380526555	144.33	9.33
0.313061719	137.62	2.62
0.834490947	140.86	5.86
-1.544358383	126.7 -	
-0.527835482	132.56 -	
-0.35830567	133.57 -	
0.671204816	139.84	4.84
0.73928959	140.26	5.26
1.445055204	144.74	9.74
1.676548891	146.24	11.24

Tabla. Ejemplo de cálculo de valor de opción por Monte Carlo

El valor medio de la opción es \$2.87 y su valor presente es:

$$2.87e^{-0.123 \times 0.2096} = \$2.80$$

### OPCIONES REALES

En una definición restringida, el enfoque de evaluación a través de opciones reales es una extensión de la teoría de opciones financieras, aplicado a la evaluación de los bienes raíces, o no financieras, como las inversiones en nuevas plantas, la investigación y el desarrollo o expansión de la capacidad productiva. Así, mientras que las opciones financieras se detallan a través de contratos, las opciones reales están incrustadas en las inversiones estratégicas, y por lo tanto, requieren un cuidadoso trabajo para ser debidamente identificados y especificados.

Amram y Kulatilaka (1999) sugieren que el cambio de opciones financieras a las opciones reales requieren de una nueva forma de pensar, una manera que hace la conexión entre la disciplina de los mercados financieros y la realización de inversiones estratégicas de las empresas nacionales. Otros autores añaden que el término "opciones reales" llena el vacío existente entre las disciplinas de la planificación financiera y estratégica, la reducción de la brecha entre la teoría y la realidad financiera de las empresas, al tiempo que ofrece información importante sobre el comercio y las inversiones estratégicas (puntos de vista cada vez más importantes debido al rápido ritmo de cambio en la economía mundial).

En la actualidad, se reconoce el hecho de que la simple evaluación por el método tradicional de flujo de caja descontado no representan adecuadamente la flexibilidad con que el tomador de decisiones para adoptar y revisar las decisiones en una fecha posterior, en respuesta al despliegue de inesperados factores externos del mercado. Al pronosticar los escenarios "esperados" de los flujos de efectivo, el método tradicional supone la pasividad de la administración y su compromiso rígido con una determinada "estrategia operacional".

Sin embargo, la realidad de las empresas y tomadores de decisiones es muy diferente de las hipótesis de la irreversibilidad adoptado la técnica de flujo de caja descontado. Como se obtiene nueva información, y la incertidumbre sobre el futuro se reduce, la administración puede utilizar su valiosa flexibilidad para cambiar su estrategia inicial con el fin de aprovechar las oportunidades de futuro, o reducir las posibles pérdidas. A modo de ejemplo, la administración puede aplazar, ampliar, reducir, suspender o tomar otras acciones con respecto a un proyecto de inversión, en particular, en sus diversas etapas.

Es precisamente esta flexibilidad operativa de la inversión "real" que se refiere a las opciones financieras. Como ya se ha definido, una opción de compra confiere a su titular el derecho pero no la obligación, de comprar un determinado activo en una fecha determinada a un precio preestablecido. Del mismo modo, una opción de venta da al tenedor el derecho pero no la obligación, de vender un determinado activo en una fecha determinada a un precio preestablecido.

Al utilizar el enfoque de opciones reales para el análisis de una inversión real, suponemos, como en el caso de una opción de compra, una ganancia potencial positiva y una pérdida limitada a la inversión en cuestión. Así, determinadas inversiones poco atractivas (o con valor presente neto negativo, según el método de flujo de caja descontado) podría convertirse atractivas.

Al darse cuenta de que el acceso a estos potenciales se lleva a cabo mediante la identificación, el mantenimiento o la adquisición de opciones, y en particular el manejo adecuado de ellos (con la opción adecuada y las acciones disciplinarias que deben tomarse en los momentos críticos) la teoría de las finanzas corporativas ofrece a los administradores una herramienta de gran alcance en la teoría de opciones reales para evaluar y entrar en la deseada seguridad a las inversiones consideradas al menos dudosas por la teoría tradicional, esto es, disciplinar la intuición estratégica con el rigor analítico apropiado.

Así, como en las opciones financieras, la flexibilidad de la administración para adaptar sus acciones futuras en respuesta a las condiciones del mercado y reacciones que no se adaptaron al plan previsto, ampliando el valor de oportunidad de inversión, en contraposición a la actitud pasiva adoptada como una premisa en la evaluación tradicionales.

En este sentido, Trigeorgis (1996) se pronuncia a favor de un criterio ampliado o estratégico, que refleja dos componentes del valor: el Valor Presente Neto (estática tradicional o pasiva) de los flujos de efectivo descontados, y el valor de la opción de flexibilidad e interacciones estratégicas. Las opciones reales complementan la teoría del VPN, añadiendo una dimensión importante de la flexibilidad.

#### **ANALOGIA ENTRE OPCIONES REALES Y FINANCIERAS**

Por analogía con opciones financieras, el valor de las opciones reales depende de cinco variables básicas, a continuación:

- Precio del activo subyacente (S): En el caso de las opciones reales, el activo subyacente es un proyecto, la inversión o adquisición de activos reales. A diferencia de las opciones financieras, tenedores de la opción puede afectar el valor real de sus activos subyacentes, aumentando el valor de sus opciones ligadas;
- Precio de Ejercicio (K) es el monto invertida para "ejercer" una opción real cuando se está comprando un activo, o la cantidad recibida cuando están vendiendo. Al igual que las opciones financieras, si el precio de ejercicio de la opción aumenta, el valor de opción de compra se reducirá, y el valor de la opción de venta se incrementará;
- Tiempo hasta el vencimiento (T): fracción de la madurez anual de la opción real. Cuanto más largo el plazo, mayor será el valor de la opción;

- Las tasas de interés ( $r$ ) es la tasa de interés que influye en el precio de la opción. Cuanto mayor sea la tasa de interés, mayor será el valor de la opción real;
- La volatilidad ( $\sigma$ ) es el movimiento que afecta el activo subyacente en el tiempo. Indica la incertidumbre (o riesgo) y la rentabilidad ofrecida por este proyecto o la inversión en activos reales. Cuanto mayor sea la volatilidad, mayor será el valor de opción real.

En el siguiente cuadro se comparan las variables básicas que determinan el valor de las opciones financieras, y su correspondencia en las opciones reales:

OPCION FINANCIERA	OPCION REAL
Precio del activo subyacente ( $S$ )	Valor presente esperado de la inversión
Precio del ejercicio ( $K$ )	Monto de inversión
Tiempo al vencimiento ( $T$ )	Tiempo al vencimiento
Tasa de interés ( $r$ )	Valor de dinero en el tiempo
Volatilidad ( $\sigma$ )	Incertidumbre (volatilidad) sobre el valor presente de los activos del proyecto

Tabla. Variables básicas- Opciones reales vs. Opciones financieras

### LOS TIPOS DE OPCIONES REALES

Las opciones financieras tienen un vocabulario muy propio, que está vinculado a ellos. Además de los términos ya presentados, las opciones reales se pueden clasificar principalmente por el grado de flexibilidad que ofrecen. Las clasificaciones más comunes son:

- Opción de aplazamiento: se trata de una opción de compra americana encontrada en la mayoría de los proyectos en los que es posible posponer (o aplazar) el inicio del proyecto;
- Opción de abandonar: es una opción de venta americana, que puedan ser abandonar el proyecto permanentemente y liquidar los activos invertidos;
- Opción de retracción: se trata de una opción de venta americana de parte del proyecto por un valor fijo, valiosas cuando las condiciones se vuelven adversas para la inversión;
- Opción para ampliar: lo opuesto a la opción de reducción (o contracción), la opción de expansión es una opción de compra americana que permite un aumento de inversión o proyecto, a través de nuevas inversiones en un entorno idóneo;
- Opción de prórroga: una opción de compra de americana, que permite la continuación o extensión de la vida útil del proyecto, previo pago de un precio de ejercicio;
- Opción de crecimiento: una opción americana que permite comprar otras opciones adicionales. La inversión inicial es el enlace con varias nuevas inversiones como en nueva tecnología que puede dar lugar a varios productos nuevos, mercados y otros descubrimientos científicos, que contiene una potencial rentabilidad financiera y estratégica de alta importancia, incluso en inversiones con un VPN inicial negativo.

Además de estos tipos básicos, son comunes las opciones de alternar (carteras de opciones sobre acciones y ventas que permiten el cambio a un costo o los costos fijos entre dos modos de operación: la entrada y la salida de un sector del mercado, o iniciar y dejar de una determinada línea de producción debido a cambios en la demanda o los precios), las opciones compuestas y múltiples opciones, que implican un conjunto de opciones diferentes, cuyo valor combinado es diferente de la suma de decisiones individuales. La mayoría de los proyectos reales caen en las clasificaciones recientes, como la exploración y producción, investigación y desarrollo y desarrollo de nuevos productos.

Las primeras publicaciones sobre las opciones reales, a pesar de su indiscutible contribución teórica, tenían poco valor práctico, ya que su atención se centró en los distintos tipos de opciones reales individuales, y no compuestas. Las investigaciones más recientes, específicamente de Trigeorgis (1993) aborda la naturaleza de la interacción entre las opciones, señalando que la presencia de las opciones siguientes puede aumentar el valor del activo subyacente de las opciones anteriores.

### **COMPARACION ENTRE EL ANALISIS POR OPCIONES REALES Y VALOR PRESENTE NETO**

Como se indica en el punto de vista convencional, el modelo de flujos de caja descontados o VPN, es sin duda la estructura más utilizada en el análisis de inversiones. Tradicionalmente, el VPN de un proyecto representa el valor que el mismo añade o reduce del valor de la empresa en su conjunto, del mismo modo, el valor de la empresa se puede obtener por medio del descuento de flujos de caja futuros por el costo promedio ponderado del capital.

En los últimos años, el aumento significativo en la velocidad y la incertidumbre sobre las decisiones financieras, han provocado que el método de valor presente neto haya sufrido algunos cuestionamientos, relacionadas con su capacidad de abordar la flexibilidad, o las opciones que están ligadas a un proyecto de inversión. Desde esta perspectiva, varios estudios han tratado de demostrar que la presencia, o la identificación de opciones reales puede hacer que una inversión tenga más valor que el resultado del método VPN.

El principio, sin embargo, tanto el enfoque del valor actual neto como las opciones reales se basan en la misma premisa de descontar los flujos de efectivo de un proyecto, utilizando tipos de descuento ajustada por riesgo. Por lo tanto, ambos enfoques pueden ser considerados como "flujo de caja descontado."

Sin embargo, el enfoque del valor presente neto simplemente descuenta los flujos de efectivo esperados sobre la base de información disponible hoy, y no considera que la flexibilidad inherente en el proceso de toma de decisiones. Así, algunos autores consideran que el valor presente neto es una clase especial dentro del enfoque de opciones reales: el caso de una opción donde hay flexibilidad en el que los resultados de la toma de decisiones se puede resumir en una variable discreta puede asumir sólo dos parámetros excluyentes entre sí ("sí o no").

El enfoque de opciones reales adopta una perspectiva diferente, considerando que las decisiones posibles son múltiples y se pueden tomar en el futuro basándose en la información que hoy se desconocen, y que se dará a conocer con el tiempo. Los cambios futuros en los flujos de caja esperados y de la tasa de descuento, también implican cambios en el VPN.

Para demostrar esta diferencia, vamos a usar un ejemplo de una compañía que tiene una licencia de un año para construir una nueva fábrica con una inversión inicial de \$ 95, que después de un año habría un flujo de caja de \$ 136 o \$ 64, si el mercado se mueve favorable o desfavorablemente, con la misma probabilidad de 50% en cualquiera de estas unidades.

### ANALISIS POR VPN

Para poder calcular el VPN de este proyecto, debe obtener la tasa de descuento apropiada a su riesgo, ya que los flujos de efectivo futuros y sus probabilidades son ya conocidos. Como puede observarse, la mayoría de las metodologías utilizadas para obtener este tipo de descuento está dada por el CAPM, para la búsqueda de las betas de las empresas que, presumiblemente, tienen el riesgo mismo proyecto evaluado. Suponiendo que si era posible encontrar un título equivalente, con un valor actual de mercado de \$ 10, y sus flujos de caja están perfectamente correlacionados, tenemos:

	Proyecto a ser valuado	Título equivalente
Vu	\$136	\$17
Vd	\$64	\$8
Vo	\$80	\$10
K	25%	25%
Q	50%	50%
(1-q)	50%	50%

Donde:

Vu = precio de alta (up state)

Vd = precio de baja (down state)

Vo = Valor actual de mercado

K = tasa de descuento ajustada al riesgo

q y (q-1) = probabilidades objetivas de un movimiento de subida o bajada

Para obtener el costo de mercado del título, la fórmula utilizada será la del método del valor presente neto descontado al tipo de interés ajustado con riesgo, como se muestra a continuación:

$$V_o = \frac{q(Vu) + (1 - q)(Vd)}{1 + k}$$

Que nos da k = 25%, un valor presente para el proyecto de \$80 y un Valor presente neto de (\$6.36). Si consideramos que el desembolso de \$95 será al final del periodo de la licencia de un año y que podemos descontarlo a la tasa de interés libre de riesgo de 10%, tenemos:

$$VPN = 80 - \frac{95}{1 + 0.10} = 80 - 86.36 = (\$6.36)$$

Lo cual sugiere un rechazo de la inversión.

## ANÁLISIS POR ARBOLES DE DECISION

Como vimos en el capítulo 2, el simple cálculo del VPN no puede ser un buen parámetro para analizar un proyecto con flexibilidad. Por lo tanto, al hacer su comparación con el método de las opciones reales sólo se necesita para incorporar enfoques tales como árboles de decisión para VPN, que sin duda sería parte del marco de las técnicas utilizadas por un analista o la toma de decisiones que estaba dispuesto a evaluar la propuesta inversión realizada.

Por lo tanto, el problema podría estar estructurado como se muestra gráficamente a continuación:

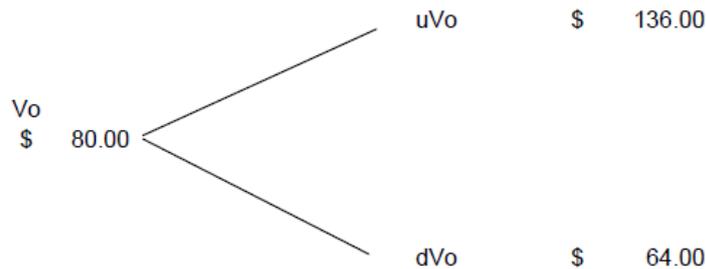


Figura. Análisis por arboles de decisión.

Y el valor de la flexibilidad para cada nodo sería calculado utilizándose una tasa de descuento encontrada a través del título equivalente:

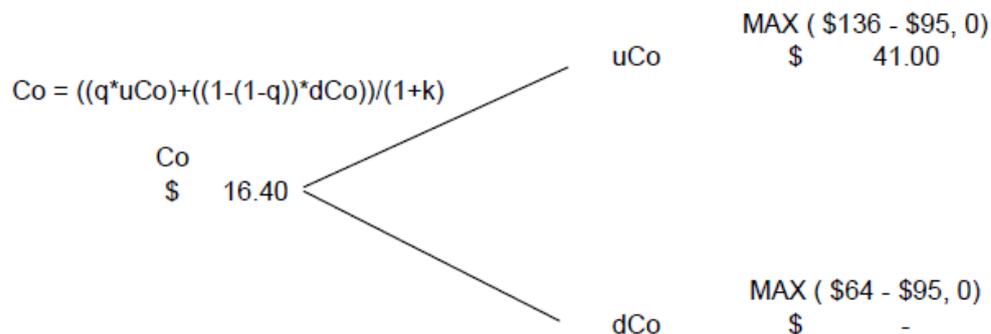


Figura. Valor de la flexibilidad contemplada por arboles de decisión.

Considerando que el VPN ampliado se refiere a la suma del VPN tradicional más la prima de la opción (o el valor de la flexibilidad), tenemos el VPN calculado tras el análisis de árboles de decisión es:

$$VPN = \frac{0.50 \times \$41 + 0.50 \times \$0}{1.25} = 16.40$$

Eso demuestra que la introducción de la flexibilidad a través del método de arboles de decisión es capaz de transformar un VPN tradicional negativo en un proyecto de VPN aceptable tomándose en cuenta los criterios expandidos.

Así, el método de árboles de decisión presenta un equivalente al resultado operacional de las opciones reales, ya que ambos enfoques se centran en las decisiones de modelado e incertidumbres relacionados con las inversiones. Sin embargo, a pesar de la aparente semejanza, entre los principales problemas de la metodología de los árboles de decisión, y sus diferencias con el método de valoración de opciones reales son:

En los árboles de decisión, la atención se centra en valor presente neto resultante del análisis, no las decisiones que deben tomarse después de la resolución de ciertas incertidumbres. Por lo tanto, aceptar la propuesta de inversión inicial, cuando el valor actual neto positivo como se sugirió anteriormente, sin la evolución del proyecto es un seguimiento adecuado (buscando el correcto ejercicio de la opción), nada añade riesgos adicionales más allá del análisis tradicional por VPN;

El análisis de los árboles de decisión se aplican generalmente a un único escenario, que como se ha indicado, se basa principalmente en el juicio de la administración sobre la probabilidad de ocurrencia de los hechos analizados, no es posible considerar la volatilidad de los mercados asociados a la inversión en el mismo también lo hizo el modelo y Black Scholes valoración sobre sus opciones financieras, cuyo énfasis está más relacionado con el objetivo de crear valor para los accionistas;

El enfoque del árbol de decisión considera que la tasa de descuento o ajustada al riesgo constante única para los flujos asimétricos, lo que no reflejan verdaderamente la realidad del mercado. En el ejemplo anterior, la tasa de 25% de descuento se aplica sólo 50-50% de la probabilidad de obtener flujos de efectivo de \$ 64 o \$ 136, cuya correlación con el título equivalente es perfecto. Sin embargo, no existe una correlación entre este tipo y los flujos de efectivo de la opción (\$ 0 y \$ 46), y su uso puede traer resultados muy divergentes. Así que se podría calcular el valor de los flujos de efectivo derivados de esta opción requerirá la obtención de aplazamiento de un título equivalente a los flujos nuevos de la opción, para cada uno de los nodos (en el caso de las opciones con períodos múltiples).

### **ANÁLISIS POR OPCIONES REALES**

Para ilustrar los diferentes métodos existentes para calcular el valor de un proyecto a través de la teoría de opciones reales, usamos el mismo ejemplo de una opción de aplazamiento simple que se usa en las secciones anteriores.

#### ***Método Binomial***

El método Binomial, tal como se presenta en este capítulo entre las metodologías para la fijación de precios de opciones financieras, pueden ser aplicadas directamente en el cálculo de opciones reales, dadas las semejanzas entre un proyecto de inversión real y opciones financieros negociadas en el mercado.

Para el ejemplo anterior, teníamos:

Precio de ejercicio (k)    \$95

Precio de activo (S)    \$80

D	0.8
U	1.7
Rf	10%
P	0.3333

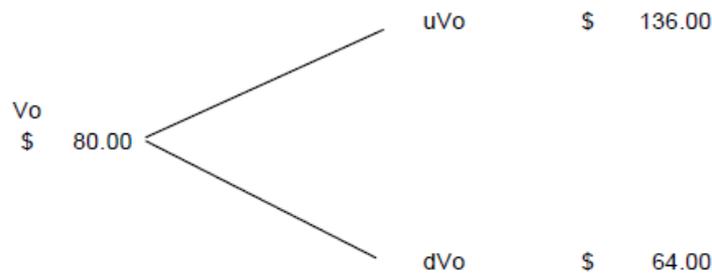


Figura. Análisis de caso por modelo Binomial.

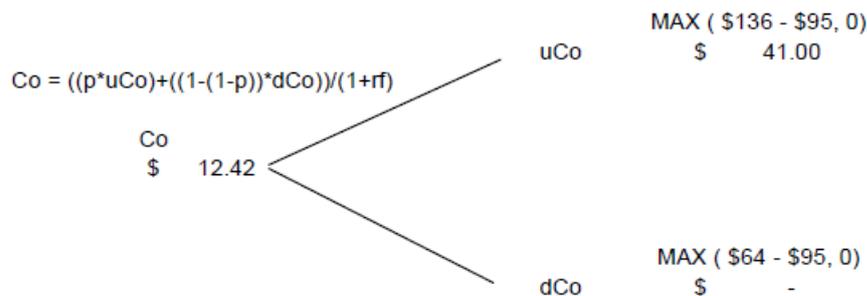


Figura. Análisis del precio de la opción por el modelo Binomial

Cabe resaltar que el cálculo del valor de la opción por el método binomial utiliza probabilidades  $p$  (martingala equivalente), que no tienen relación alguna con la probabilidad  $q$ , siendo calculado conforme se muestra:

$$p = \frac{(1 + r) - d}{u - d}$$

$$p = \frac{(1 + 0.10) - 0.80}{1.70 - 0.80} = 0.33$$

Además del método anterior utiliza la tasa de interés libre de riesgo, y por lo tanto no requiere ningún ajuste de la cartera se calculan como valores equivalentes en cada uno de los nodos.

Sabiendo que el ampliado VPN es la suma del VPN tradicional con la prima de la opción, podemos calcular el valor de la opción de aplazar la siguiente manera:

$$\text{Premio opción} = \text{VPN ampliado} - \text{VPN tradicional}$$

$$\text{Premio opción} = \$12.42 - (\$6.36) = \$18.79$$

### Cartera Equivalente

De conformidad con el principio de no arbitraje, es posible evaluar la opción de aplazar por un equivalente cartera compuesta por las unidades  $m$  de un equivalente de activos a un precio de 10 dólares, y las unidades de la moneda B de un riesgo de seguridad gratuita, con valor actual \$ 1. Dado que los flujos de efectivo de la cartera debe ser el mismo equivalente de la opción, tenemos:

$$C_u = m(\$17) + B(1+r_f) = \$41$$

$$C_d = m(\$8) + B(1+r_f) = \$0$$

Utilizando la función solver de Excel, obtenemos

$$m = 4.56$$

$$B = -\$33.13$$

Esto significa que un inversor podría comprar 4,56 unidades equivalentes de activos, y tomar prestado 33,13 dólares a las tasas de interés libre de riesgo (10%), logrando el mismo resultado en términos de flujo de caja que el proyecto con flexibilidad para posponer.

De esta forma, podemos calcular el valor de la opción, de la siguiente manera:

$$C_0 = m(\$10) + B = 4.56(\$10) - \$33.13 = \$12.42$$

Cuyo resultado es coherente con el presentado por el modelo binomial.

Para la cartera de equivalentes, aún es posible calcular directamente el valor de prima de esta opción de aplazar, sin la necesidad de restar el VPN tradicional al extendido, de la siguiente manera:

	Proyecto con flexibilidad (A)	Proyecto sin flexibilidad (B)	Flujo de caja (A-B)
u	MAX (\$136-\$95,0)= \$41	\$136 - \$95 = \$41	\$0
d	MAX (\$64-\$95,0)= \$0	\$64 - \$95 = \$31	\$31

Tabla. Calculo directo del valor de la opción.

$$C_u = m(\$17) + B(1+r_f) = \$0$$

$$C_d = m(\$8) + B(1+r_f) = \$31$$

Lo que da:

$$m = -3.44$$

$$B = \$53.23$$

Ó:

$$C_0 = m(\$10) + B = -3.44 (\$10) + \$53.23 = \$18.79$$

Cuyo resultado es igual al obtenido mediante el método binomial, al restar el VPN tradicional (proyecto sin flexibilidad) de la extensión del valor presente neto extendido (proyecto con flexibilidad).

### **Marketed Asset Disclaimer (MAD)**

Uno de los mayores problemas que se plantean en el enfoque de cartera equivalente cuando se utiliza en la práctica es la enorme dificultad de encontrar un título equivalente al de cada uno de los flujos del proyecto y la opción. En este sentido, Copeland (2001) aboga por la utilización de uso de los flujos de efectivo del proyecto en sí, sin flexibilidad, ya que el activo de riesgo subyacentes. Según el autor, no hay nada mejor correlacionado con el proyecto que él mismo.

Así, podríamos describir la siguiente igualdad:

$$C_u = m (\$136) + B (1+rf) = \$0$$

$$C_d = m (\$64) + B (1+ rf) = \$31$$

Donde:

$$V_u = \$136$$

$$V_d = \$64$$

$$C_u = \$0$$

$$C_d = \$31$$

$$\text{Flujo incremental de la opción} = C_u - C_d = -\$31$$

$$\text{Variación del valor del título equivalente: } V_u - V_d = \$136 - \$64 = \$72$$

$m = \text{variación en el valor del título equivalente} / \text{flujo incremental de la opción}$

$$m = -0.43$$

$$B = \frac{C_u - m \times V_u}{1 + rf} = \frac{\$0 + 0.43 \times \$136}{1.10} = \$53.23$$

$$V_0 = \$80 \text{ (VP de proyectosin riesgo)}$$

Con esta información tenemos que:

$$C_0 = m (\$80) + B = -0.43 (\$80) + \$53.23 = \$18.79$$

Con los mismos resultados a los obtenidos por el enfoque del método binomial y el de cartera equivalente

La importancia del Marketed Asset Disclaimer – MAD (Según Copeland), se encuentra en el hecho de que la valoración de opciones reales en sus primeras aplicaciones dependía de la

analogía (imperfecta y arbitraria a menudo) con los precios de los productos en el mercado financiero y su volatilidad. De hecho, la mayoría de los proyectos de inversión real no tiene una cualificación activa o equivalente que se puede comparar directamente, y para estos casos, MAD pone de manifiesto que los flujos de efectivo reales del proyecto sin flexibilidad puede ser utilizado como un buen parámetro para reemplazar los activos libremente negociados en el mercado.

Obviamente, esta premisa adopta otros supuestos básicos, que son las mismas aprobadas en el tradicional cálculo del VPN. Pero como Copeland afirma que "es aceptable para el análisis de VPN, a continuación, podemos suponer razonablemente que el valor presente de un proyecto sin flexibilidad es el valor que se vendería por si fuera objeto de comercio en el mercado."

### *Análisis por Black-Scholes*

La famosa formulación Black-Scholes, cuya importancia para el desarrollo de los mercados de derivados y financieros en todo el mundo tiene un valor incalculable, se basa fundamentalmente en el concepto de la cartera equivalente, con la principal diferencia de la utilización de cálculo estocástico (lema de Itô) como base mientras que el modelo Binomial utiliza un enfoque algebraico para el mismo resultado.

Para aplicaciones sencillas de las opciones reales, tales como la opción de aplazar la que usamos en esta sección, u otras personas que tenían una única fuente de incertidumbre y de una sola fecha para dictar resolución, el modelo Black-Scholes puede funcionar bien.

A modo de ejemplo, podemos presentar como sería el ejemplo anterior según la formulación de Black-Scholes, suponiendo una volatilidad de 46%:

Precio de ejercicio (k):	\$95.00
Precio de objeto activo (S):	\$80.00
Tasa de interés diaria efectiva:	0.03%
Volatilidad anual:	46%
Número de días:	365
Días del año:	365
T	1.0000
r (periodo)	10.52%

### Modelo Black-Scholes

d1	0.0771
d2	(0.3869)
N(d1)	0.5307

N(d2) 0.3494

Co \$12.42

Entre las limitaciones de este modelo para la utilización en el análisis de opciones reales, están:

La compleja formulación utilizada por el modelo Black-Scholes a menudo transmite una sensación de "Caja negra", haciendo que los resultados parezcan poco fiables a los que no están familiarizados con su metodología. En el caso de los proyectos de inversión real, que debe ser presentado a las distintas etapas de aprobación antes de que puedan implementarse de manera efectiva en el mundo corporativo, el método Black-Scholes puede reducir el impacto potencial y la importancia del valor real de la flexibilidad, que se presentará a la alta dirección, a menudo poco interesado en los detalles técnicos y teóricos, pero familiarizado con la técnica de la VPL;

La presentación visual del método binomial, a través de árboles de decisión, confiere a las opciones reales un papel más importante que la mera valuación del proyecto, el uso de Black-Scholes limita a las opciones reales a un simple caso del cálculo del valor de proyectos que es en verdad, apenas una de sus diversas aplicaciones;

Los supuestos del método Black-Scholes dificultan el análisis de la mayoría de problemas en las opciones reales, que generalmente requieren de un análisis en diferentes etapas, con diferentes fuentes de riesgo que no puede evaluarse adecuadamente, o que necesitan de simplificación inadecuada para que se calcule por el modelo.

## **IMPACTO DEL PROYECTO SEDAN SUBCOMPACTO EN EL VALOR DEL FABRICANTE AUTOMOTRIZ**

### **VALUACION DEL PROYECTO SEDAN SUBCOMPACTO A TRAVES DE METODO DE FLUJO DESCONTADO**

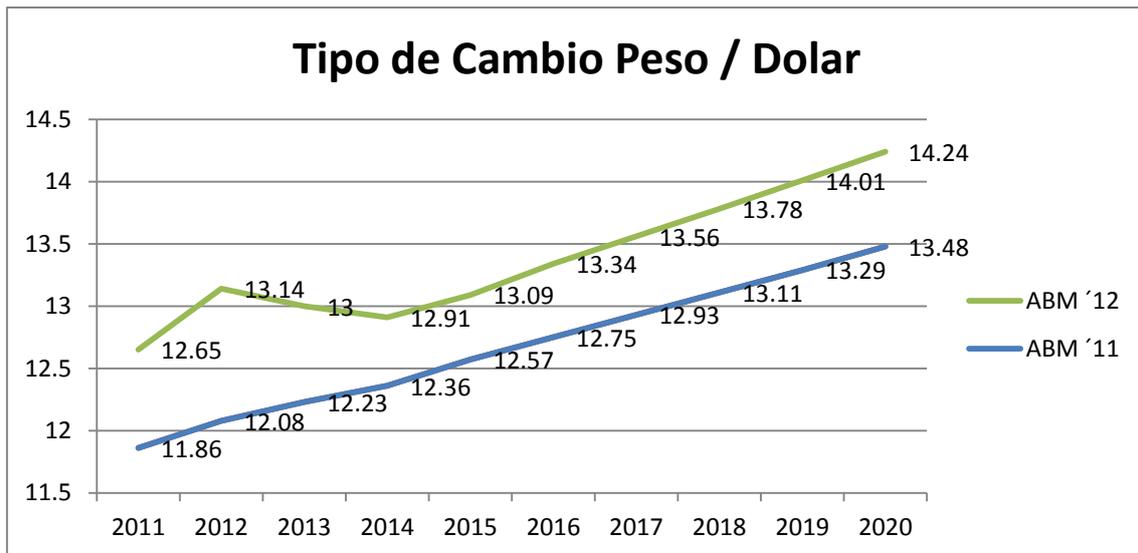
De acuerdo con el estudio de viabilidad realizado por el fabricante automotriz, el costo de la inversión será de \$2,022 millones de pesos. El proyecto considera la introducción de un sedán subcompacto al mercado mexicano con un volumen promedio anual de 36,500 unidades a una vida total de 5 años. Se estima que el valor presente del proyecto es de 455.6 Millones de pesos a una tasa WACC del 11%

### Modelo Financiero

Model Life average w/options (5 years)	
	MXN/Unit
Sales Volume	36,548
M.S.R.P. [with VAT]	180,149
M.S.R.P. [without VAT, without Tax]	155,301
Dealer Margin	19,097
Sales Revenue	138,581
Cost of Goods Sold	114,158
Research & Development Expenses	5,704
M&S Expenses (incl. SI, D, M&S-G&A)	11,306
G&A Expenses	2,887
G&A Expenses -Global Function	1,223
Program Provision	0
Program Provision-Depreciation (Direct D&D, In-house Depreciation, Vendor Tooling)	113
FOREX Provision	0
COP (including After Sales and Sales Financing)	14,138
COP (including After Sales and Sales Financing) (%)	<b>10.2%</b>

El modelo financiero plantea que se está generando valor a la empresa. El motivo es sencillo, la demanda esperada de producción y venta del modelo en cuestión es elevada y los gastos de desarrollo son bajos debido a que es una plataforma compartida. El problema de esta valuación es que cae en una zona de especulación y de valores hipotéticos futuros que no se cumplirán a menos que todos los supuestos del proyecto caigan en una realidad de mercado a sus necesidades. Al ser mucha esta proyección basada gran parte en costo de origen dolarizado el valor de la empresa se ve afectado por cualquier sobrecosto originado.

Se utilizaron las proyecciones de un estudio interno a global que marca los tipos de cambio a utilizar para todas las operaciones de la compañía.



Gráfica. Supuesto de tipo de cambio utilizado para el proyecto

Al día de hoy el tipo de cambio de los dos primeros años cerraron en 12.65 y 13.14 Pesos por dólar, respectivamente. Esto demuestra que los supuestos hacen que el proyecto sea frágil ante la situación de tipo de cambio.

#### VALUACION DEL PROYECTO SEDAN SUBCOMPACTO A TRAVES DE OPCIONES REALES

La incertidumbre, que va de la mano de las decisiones en proyectos de inversión en ambientes de alta volatilidad, ha provocado a lo largo de los años que inversionistas potenciales retiren sus intenciones, en gran parte debido a la inseguridad del retorno de sus inversiones. Muchas veces re direccionan sus inversiones a lugares o mercados más “seguros” y en donde las tasas de descuento menores generan un VPN más alto de acuerdo a la teoría tradicional.

En este capítulo, con el caso de opciones reales se busca establecer el impacto que genera agregar el valor de la incertidumbre en escenarios donde el inversionista puede tomar decisiones a la llegada de nueva información, reduciendo así el potencial de pérdidas o ampliando las oportunidades de éxito y altos retornos de un proyecto de inversión.

#### ESTRUCTURA DEL CASO

Después de un análisis detallado por parte del fabricante, cuyos supuestos incorporan las mejores proyecciones de la dirección y especialistas, se construyó el escenario de flujos del cual vendrá en los anexos de este trabajo.

Para tal efecto se tomó en cuenta las tendencias de oferta y demanda nacional e internacional, el comportamiento del tipo de cambio, así como el contenido dolarizado del costo del proyecto.

Calculando S:

Precio del ejercicio (k): \$2,022 M MXN

Precio del activo subyacente (S): \$455.6 M MXN

Tasa de interés anual efectiva: 11%

Volatilidad anual ( $\sigma$ ): 9.67% (Volatilidad tipo de cambio MXN/USD)

Haciendo  $n=5$  periodos, tenemos:

$T = 0,1984$ ,  $d = 0,9589$ ,  $u = 1,0428$ ,  $r = 0,0025$  y  $p = 1,567$

a) Árbol Binomial para el precio del activo subyacente

0	1	2	3	4	5
					\$ 561
				\$ 538	\$ 1,460
			\$ 515	\$ 1,483	\$ 515
		\$ 494	\$ 1,506	\$ 494	\$ 1,506
	\$ 474	\$ 1,527	\$ 474	\$ 1,527	\$ 474
\$ 455	\$ 1,547	\$ 455	\$ 1,547	\$ 455	\$ 1,547
\$ 1,567	\$ 436	\$ 1,567	\$ 436	\$ 1,567	\$ 436
	\$ 1,585	\$ 418	\$ 1,585	\$ 418	\$ 1,585
		\$ 1,603	\$ 401	\$ 1,60	\$ 401
			\$ 1,620	\$ 384	\$ 1,620
				\$ 1,637	\$ 368
					\$ 1,653

b) calculando el precio del activo a través de Montecarlo

$$S_{t+1} = 455.6 e^{[(4.28\%) + 10.18\% \varepsilon_t]}$$

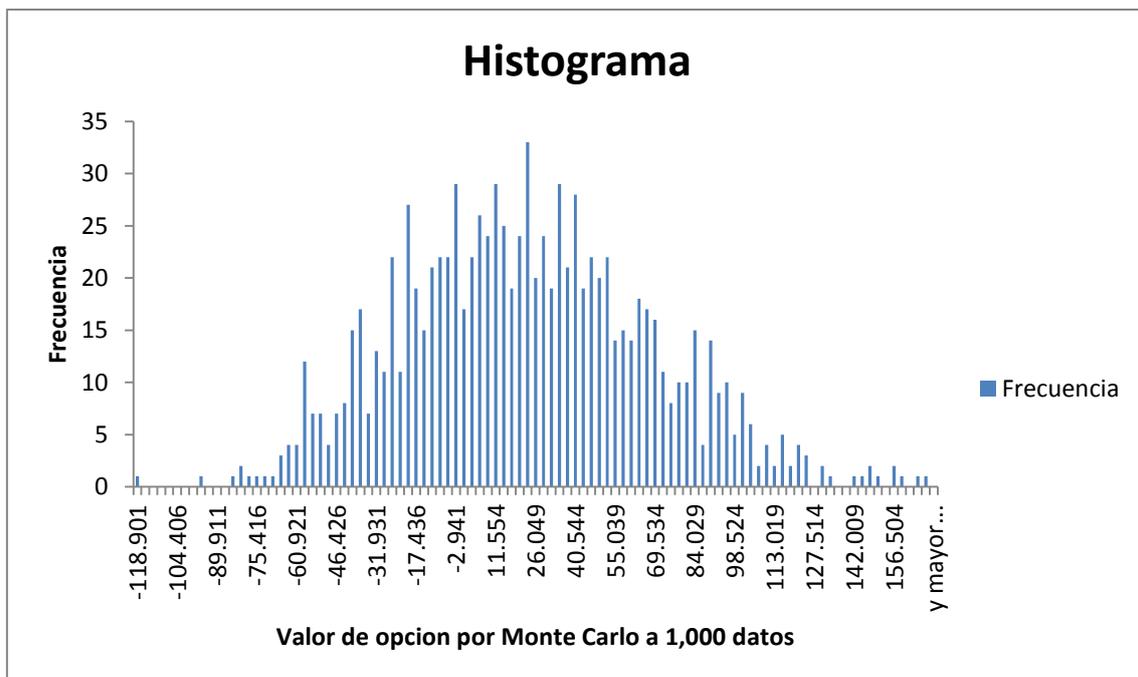
Aleatorio	Valor Madurez	Valor Opcion
1.019957381	522.4	66.8
0.02031129	474.2	18.6
-		
0.523795052	449.9	-5.7
-		
1.819807949	396.9	-58.7
0.428825615	493.3	37.7
-		
0.606189587	446.4	-9.2
-		
0.150000687	466.5	10.9
-		
2.504311851	371.5	-84.1
0.014267698	474.0	18.4
0.505456228	497.0	41.4
0.645550244	503.8	48.2
-	444.6	-11.0

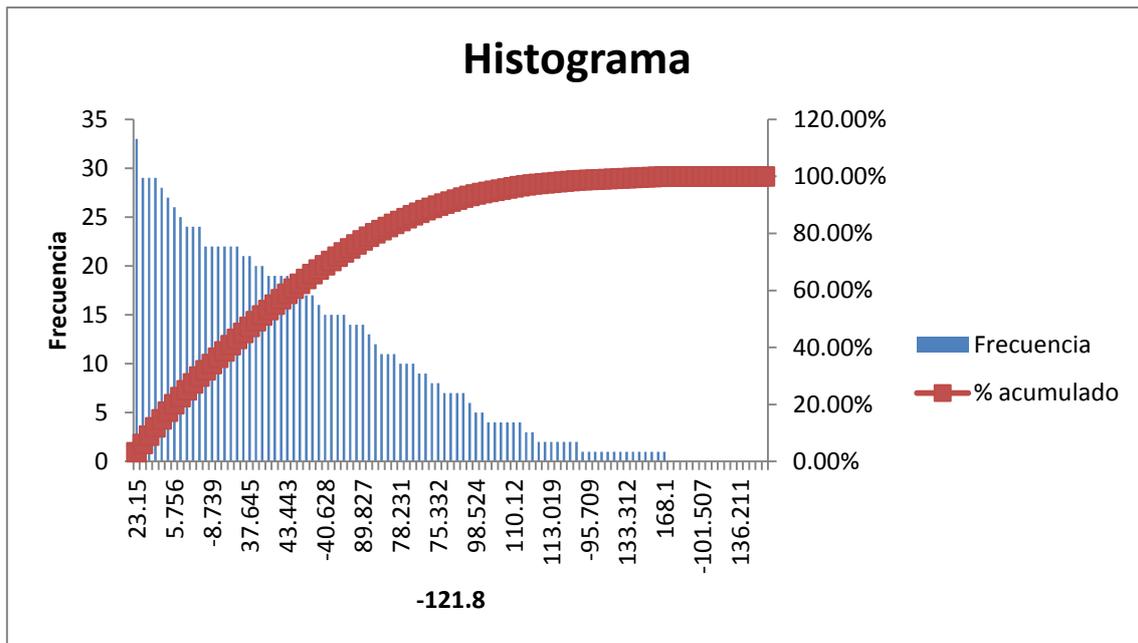
0.646116405		
0.66718485	504.8	49.2
0.191687377	482.2	26.6
-		
0.167974576	465.7	10.1
0.417865067	492.8	37.2
0.23080247	484.0	28.4
-		
0.236776714	462.6	7.0
-		
0.508500761	450.6	-5.0
0.286734121	486.6	31.0
-		
1.545117811	407.6	-48.0
1.673747647	556.5	100.9
-		
1.945636541	392.1	-63.5

El valor medio de la opción es \$21.49 y su valor es:

$$21.49e^{-0.0428} = \$18.90$$

Siendo \$18.90 el resultado de la opción de compra en millones de pesos, se determina como una oportunidad de agregar valor a la compañía por dicha inversión. De tal manera se rechaza la hipótesis planteada, El fabricante automotriz a través de la inversión aumentaría su valor y se confirma que es una oportunidad de crecimiento para la empresa. Por lo tanto se recomienda al tomador de decisiones seguir con el proyecto.





### CONCLUSIONES

En los últimos años, varios estudios sobre la teoría de opciones reales se han publicado, llamando la atención de los profesionales y académicos que, debido a un entorno cada vez más incierto, han buscado en la teoría de opciones de precios una metodología coherente para análisis de las inversiones reales en diversas áreas, cuyo valor no se ve reflejado en análisis través de los métodos tradicionales de flujo de efectivo.

Durante este trabajo, hemos tratado de presentar brevemente los métodos tradicionales de evaluación, centrándose en sus limitaciones y las dificultades para medir y reconocer como una estructura formal para evaluar y ayudar en la toma de decisiones, flexibilidad en la gestión y la incertidumbre que impera en la toma de decisiones de inversiones.

Entonces tratamos de presentar los conceptos más relevantes relacionados con las opciones financieras, y los modelos más importantes de valoración de las opciones (binomial y Black-Scholes) con el fin de facilitar la comprensión de la metodología para la evaluación de las inversiones a través de la teoría de opciones reales.

Comparativamente, el análisis de valor presente neto y la teoría de opciones reales puede ser visualizada de la siguiente manera:



#### Proceso de decisión comparado: VPN vs. Opciones Reales

La investigación también pretendía presentar y discutir la volatilidad como una cuestión clave, ejemplificando con un ejercicio, sugiriendo que el reconocimiento incertidumbre como una característica de algunos entornos corporativos (que se refleja en alta volatilidad de las tasas de retorno de los activos financieros y reales) puede representar inversiones con mayor potencial de valor para los accionistas cuando las regiones seleccionadas consideran altamente volátiles, en comparación con la inversión en regiones con entornos similares más "estables". Este valor no es reconocido por los métodos de valoración tradicionales, que ven en un ambiente de mayor incertidumbre riesgos que deben ser evitados, traducido en tasas de descuento mayores, así como valores de VPN menores.

Sin embargo, el reconocimiento de la capacidad de gestión para ejercer sus "opciones" o cambiar la ruta de la inversión, si los resultados obtenidos no son satisfactorios, se traduciría en un mayor alcance de resultados positivos y evitar los resultados negativos. Este hallazgo es consistente con el objetivo financiero de la empresa de maximizar el valor para los accionistas y el concepto de beneficio económico, ya que refleja con mayor precisión los flujos de efectivo futuros posibles de la empresa.

En este contexto, teniendo que en México y el mercado energético se presenta una alta volatilidad, Se traduce en que la divulgación y un mayor uso de la teoría de opciones reales de los gobiernos o las empresas podrán hacer uso de la flexibilidad en la gestión de sus proyectos de inversión, la cual es posible capturar, a través de un modelo estadístico consistente, en el que el modelado de la incertidumbre se traduce en una distribución de posibles VPN (en lugar de una serie única y estática, la probabilidad de que representan la verdadera naturaleza de la inversión es muy pequeña)

Esta tesis busca hacer un repaso sobre la teoría de opciones reales, sus principales conceptos y usos de búsqueda y su aplicación como metodología para el análisis de las inversiones en entornos altamente volátiles, que buscan obtener el valor de la incertidumbre que impregna este entorno. La metodología y los objetivos de este trabajo se reflejan en el capítulo 1.

En este trabajo, se puede ver en el capítulo 2 las principales metodologías empleadas en el análisis tradicional de las inversiones, desde el punto de vista de la incertidumbre y la flexibilidad, con énfasis en el flujo de caja descontado y sus principales supuestos, tales como el modelo CAPM para la estimación de la tasa de descuento y los métodos de análisis para los árboles de decisión, una extensión de la teoría del valor presente neto en un escenario de probabilidades.

Debido a la gran velocidad de cambio y el alto grado de incertidumbre que impregnan el ambiente de negocios en el mundo, vimos que el amplio desarrollo de la teoría de valoración de opciones financieras ofrece una analogía útil entre opciones financieras y las inversiones reales, mediante el uso de métodos reconocidos de valoración de opciones, tales como el método binomial y Black-Scholes.

Un paso importante para comprender el funcionamiento de estos modelos de fijación de precios viene de buena comprensión de sus supuestos y los conceptos matemáticos básicos como son los procesos estocásticos en los que se basan. En este sentido, se presentan en el capítulo 3 opciones financieras, sus aspectos principales y su relación con la inversión real desde la perspectiva de la teoría de opciones reales.

Con respecto a la volatilidad, tratamos de revisar su importancia y algunas de las diversas clasificaciones y mediciones posibles, como la metodología de Monte Carlo, que trata de simular escenarios repetidamente por una distribución de probabilidad aleatoria de los posibles resultados de la inversión realizada en condiciones de incertidumbre y la flexibilidad.

Con base a estos aspectos, se presenta en el capítulo 4 el caso del proyecto automotriz, la simulación de la inversión en un entorno de alta volatilidad, cuyo reconocimiento y evaluación demostró matemáticamente el valor de las inversiones en ambientes de gran incertidumbre.

Este trabajo pretende haber contribuido a la comprensión de los mecanismos de evaluación de proyectos de inversión y las opciones financieras aplicadas a las inversiones reales y describir los principales tipos de opciones reales utilizados en la mayoría de las inversiones en condiciones de incertidumbre.

Sin duda el tema es muy amplio y susceptible a ser más investigado, pues llama la atención sus aspectos específicos y su importancia en las finanzas corporativas.

Cabe señalar también que a pesar de la aparente complejidad de los modelos matemáticos de las opciones reales, tanto en la formulación como la solución de ecuaciones diferenciales, esto no significa que el usuario necesita tener ningún conocimiento matemático sofisticado. Sin embargo, esto puede ser un factor de resistencia para la adopción más amplia de estas metodologías. Pero, existe software con una interfaz sencilla que permite a los usuarios crear fácilmente simulaciones y cuya difusión, podría popularizar esta teoría de opciones reales. Además, la teoría cuenta escasamente con difusión de investigaciones con ejemplos prácticos en México.

De acuerdo con los métodos aplicados, los resultados de la valuación del proyecto refinería bicentenario son los siguientes:

Método	Valor en millones de pesos
Descuento de flujo de efectivo	\$455.60
Opciones Reales	\$474.50

Resulta notable el contraste entre el resultado por el método de descuento de flujo de efectivo y opciones reales, esto puede explicarse por el valor que otorga la flexibilidad en las decisiones sobre la empresa en cuanto a continuar operando, expansión, contracción y venta. Pudiera decirse que ante el método de descuento de flujo de efectivo este proyecto sería rechazado, dada la destrucción de valor, y al analizarlo a través de opciones reales se dejaría a la refinería dentro de nuestra cartera de inversiones. **Se confirma la hipótesis planteada, El fabricante automotriz a través de la inversión aumentaría su valor y se confirma que es una oportunidad de crecimiento para la empresa.**

## BIBLIOGRAFIA

- AMRAM, M., KULATILAKA, N., "Strategy and Shareholder Value Creation: The Real Options Frontier". *Journal of Applied Corporate Finance*. v.13, n.2, Summer 2000.
- AMRAM, M., KULATILAKA, N., *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*. Boston: Harvard Business School Press, 1999.
- BACHELIER, Louis. "Théorie de la Spéculation". Tese de Ph.D. l'Ecole Normale Supérieure, 1900.
- COOTNER, Paul H. *The random character of stock market prices*. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.
- BARHAM, J. "Risky Business all Around". *Latin Finance*. n.139, Coral Gables: July 2002. p.20
- BLACK F., SCHOLES M. S. , "The Pricing of Options and Corporate Liabilities".  
*Journal of Political Economy*, May-June 1973. p.637-54.
- BLACK F., SCHOLES M. S., "The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency".  
*Journal of Finance*, May 1972.
- BORISON, A., Decision Analysis (DA) and Real Option Valuation (ROV).  
PricewaterhouseCoopers, March, 1999.
- COPELAND, T.E., ANTIKAROV, V., *Real Options: A Practitioner's Guide*. New York: Texere, 2001.
- COPELAND, T.E., KEENAN, P.T., "How Much Flexibility is Worth?". *McKinsey Quarterly*, n.2,  
New York: McKinsey & Company, 1998.
- COPELAND, T.E., KEENAN, P.T., "Making Real Options Real". *McKinsey Quarterly*, n.3, New  
York: McKinsey & Company, 1998.
- COPELAND, T.E., KOLLER T., MURRIN, J., *Valuation: Measuring and Managing the Value of  
Companies*, 2.ed. New York, NY: John Wiley & Sons, 1994.
- COX, J., ROSS, S., RUBINSTEIN, M., "Option pricing: a simplified approach", *Journal of Financial  
Economics*, 7, October, 1979.
- DIXIT, A. K., PINDYCK, R. S., *Investment under Uncertainty*, Princeton, New Jersey: Princeton  
University Press, 1994.
- ELTON, E. J., GRUBER, M.J., *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5.ed., John Wiley  
& Sons, Inc., 1995.
- FAIZ, S. "Real Options Application: From Successes in Asset Valuation to Challenges for an  
Enterprise-Wide Approach". *Society of Petroleum Engineers Technical Conference and  
Exhibition*, Dallas, Texas, Oct, 2000.

FAMA, E. "Risk-adjusted discount rates and capital budgeting under uncertainty". *Journal of Financial Economics*. v. 5, n. 1:3-24, 1977.

FINK, R. "Reality Check for Real Options". *CFO Magazine*. Sep, 2001.

GORDON, M.J., SHAPIRO, E. "Capital Equipment Analysis: *The Required Rate of Profit*", *Management Science*, Vol. 3. Oct/1953, p.102-110.

HARVEY, C.R., "Identifying Real Options". *National Bureau of Economic Research*, Cambridge, MA, 1999.

HULL, J. C., *Introduction to Futures & Options Markets*. 2.ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1995.

ITÔ Kiyoshi. *Kiyoshi Itô selected papers*. New York: Springer-Verlag, 1987.

KEENAN, P. *Real Option Thinking - Strategy Under Uncertainty*. McKinsey & Company, Inc., 1999.

LUEHRMAN, T. "Investment Opportunities as Real Options". *Harvard Business Review*. July-August, 1998.

MAUBOUSSIN, M. "Get Real - Using Real Options in Security Analysis". *Frontiers of Finance - Credit Suisse First Boston*. v.10, June, 1999.

MCGRATH, R.G., MAC MILLAN, I., *The Entrepreneurial Mindset Strategies for Continuously Creating Opportunity in an Age of Uncertainty*. Boston, MA: Harvard Business School Press, 2000.

MERTON, R. C., "Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later". *The American Economic Review*. June 1998.

MILANO, G. V., "EVA® and the 'New Economy'" - Stern & Stewart, *Journal of Applied Corporate Finance*. v.13, n.2, Summer 2000.

MILLER, M. H., "The History of Finance: An Eyewitness Account". *Journal of Applied Corporate Finance*. v.13, n.2, Summer 2000.

MODIGLIANI, F., MILLER, M. H. "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". *American Economic Review*, XLVII, p.655-69, junio, 1958.

NATENBERG, S., *Option Volatility & Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques*, McGraw-Hill, 1994.

RAGSDALE, C.T., *Spreadsheet Modeling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Management Science*. Cambridge, MA: Course Technology Inc., 1995.

RAPPAPORT, A., *Creating Shareholder Value: The New Standard for Business Performance*. New York: The Free Press, 1996.

SAMUELSON, Paul A. "Rational Theory of Warrant Pricing". *Industrial Management Review*, Spring 1965.

SMITH, J., *Much Ado About Options?*, Duke University, July, 1999.

STEWART, G., *The Quest for Value*. New York: Harper Business, 1991.

TRIAANTIS, A., "Real Options and Corporate Risk Management". *Journal of Applied Corporate Finance*. v.13, n.2, Summer 2000.

TRIAANTIS, A., BORISON, A., "Real Options: State of the Practice". *Price WaterhouseCoopers*, 2000.

TRIGEORGIS, L., "The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.26, n. 3, 1993.

TRIGEORGIS, L., *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1996.

VAN HORNE, J., *Financial Management and Policy*. 11.ed., Prentice Hall (NJ), 1997.

VANDERVEEN, J.D., MARTENS, C.M., "Know who you're doing business with", *World Trade*, v.15. n.7. Troy: July, 2002. p. 40-42.