



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA EN SISTEMAS – OPTIMACIÓN FINANCIERA

**Aproximación estocástica: una aplicación en el mercado accionario
mexicano**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

Jonathan Jesús López Tello

TUTOR PRINCIPAL

Federico Hernández Álvarez
División de estudios profesionales
Facultad de Ingeniería

MÉXICO, D. F. AGOSTO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Ortiz Calisto Edgar
Secretario: Dr. Acosta Flores José Jesús
Vocal: Dr. Hernández Álvarez Federico
1er. Suplente: Dr. Aceves García Ricardo
2do. Suplente: Dra. Balderas Cañas Patricia

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: México D. F.

TUTOR DE TESIS:
Federico Hernández Álvarez

FIRMA

Agradecimientos

A Dios, por permitirme concluir este proyecto y cerrar este círculo.

A la UNAM, porque ha sido para mí y para muchos una puerta abierta para el desarrollo y la adquisición de conocimiento y experiencias. Por ser una institución invaluable y permitirme ser parte de ella.

Al Programa de Posgrado de la Facultad de Ingeniería y sus profesores.

A Federico Hernández, por su apoyo y tiempo dedicado para la realización de este trabajo. Por su paciencia, consejos y enseñanzas.

A mis pequeños, Renata y Eitan, por ser la mayor alegría que me ha dado la vida y ser en todo momento mi principal motivo para seguir adelante. A Jennifer por su gran apoyo.

A mis padres Araceli y Jesús, a quienes les debo mucho además de contar siempre con su confianza apoyo y amor, a mis hermanas, por ser de muchas maneras uno de los motores que me impulsan.

A las personas que me ayudaron y motivaron a concluir con este proyecto.

A los profesores y demás involucrados que aportaron comentarios y sugerencias, siempre importantes, al presente trabajo.

A todos, muchas gracias

CONTENIDO

| | |
|--|----|
| Introducción | 1 |
| Capítulo I. Aproximación Estocástica..... | 4 |
| I.1 Principios de la Aproximación estocástica (AE)..... | 4 |
| I.1.1 Método Robbins-Monro..... | 4 |
| I.1.2 Método Kiefer-Wolfowitz | 21 |
| I.1.3 Ejemplo de Aplicaciones de la Aproximación Estocástica | 28 |
| I.2 Método de Diferencias-Finitas (MDF) | 30 |
| I.2.1 Antecedentes..... | 30 |
| I.2.2 Descripción general del Método de Diferencias-Finitas (MDF)..... | 31 |
| I.3 Método de Perturbaciones Simultáneas (MPS) | 32 |
| I.3.1 Antecedentes..... | 32 |
| I.3.2 Descripción general del método de Perturbaciones Simultáneas..... | 33 |
| Capítulo II. Algoritmo de Aproximación Estocástica para la decisión de venta de acciones | 36 |
| II.1 Antecedentes | 36 |
| II.2 Descripción del Problema..... | 37 |
| II.3 Algoritmo de aproximaciones estocásticas aplicado al problema..... | 40 |
| II.3.1 Algoritmo con restricción..... | 44 |
| II.3.2 Consideraciones del algoritmo | 45 |
| II.4 Pruebas de Sensibilidad..... | 46 |
| II.4.1 Iteraciones | 47 |
| II.4.2 Valores de Inicio | 48 |
| II.4.3 Constantes k_0 y k_1 | 50 |
| Capítulo III. Simulaciones y discusión de resultados..... | 51 |

| | |
|---|----|
| III.1. Simulación para el IPC | 52 |
| III.2. Simulación para otras acciones | 62 |
| Capítulo IV Conclusiones..... | 74 |
| Bibliografía y Referencias | 77 |
| Anexos | 78 |
| Anexo I. Pseudocódigo | 78 |
| Anexo II. Tablas y Datos | 85 |
| Anexo III. Cálculo del IPC (Índice de Precios y Cotizaciones) | 93 |
| Ponderación de las series..... | 94 |
| Ponderaciones máximas..... | 95 |
| Revisión y permanencia de la Muestra | 96 |
| Cálculo diario del Índice..... | 96 |

Índice de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 Cambios porcentuales absolutos en resultados de z^2 para diferente número de iteraciones y diferentes acciones. | 47 |
| Figura 2 Valores que toma el algoritmo partiendo de 4 diferentes valores de inicio de z^1 y z^2 . Serie de precios del IPC (agosto 07 – agosto 08)..... | 49 |
| Figura 3. Cambios porcentuales en los valores de salida de z^2 para un conjunto de acciones debido a cambios en el valor de k_0 | 50 |
| Figura 4. Cambios porcentuales en los valores de salida de z^2 para un conjunto de acciones debido a cambios en el valor de k_1 | 51 |
| Figura 5 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie. Primera señal ... | 54 |
| Figura 6 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie. Primeras cuatro señales | 55 |
| Figura 7 Resultados de z^2 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para cada fecha señalada por el algoritmo para vender. | 56 |
| Figura 8 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valor de z^1 para la misma serie (IPC). Primer evento. | 57 |
| Figura 9 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^1 para la misma serie (IPC). Cinco eventos..... | 58 |
| Figura 10 Resultados de z^1 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para cada fecha señalada por el algoritmo para vender. | 58 |
| Figura 11 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie. Primeras cinco señales. | 60 |
| Figura 12 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (ELEKTRA). Dos eventos..... | 63 |
| Figura 13 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (ELEKTRA). Cinco eventos. | 64 |
| Figura 14 Resultados de z^2 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para cada fecha señalada por el algoritmo para vender (ELEKTRA)..... | 65 |

| | |
|--|----|
| Figura 15 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (PEÑOLES). Dos eventos..... | 67 |
| Figura 16 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (PEÑOLES). Cinco eventos..... | 68 |
| Figura 17 Resultados de z^2 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para cada fecha señalada por el algoritmo para vender (PEÑOLES)..... | 69 |
| Figura 18 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^1 y z^2 para la misma serie (AMX-L). Seis eventos..... | 71 |
| Figura 19 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (AMX-L). Cuatro eventos..... | 72 |
| Figura 20 Resultados de z^2 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para tres fecha señalada por el algoritmo para vender (AMX-L)..... | 73 |
| Figura 21 Comparativo de rendimientos de IPyC, ELEKTRA, PEÑOLES y AMXL..... | 74 |

Índice de Tablas

| | |
|--|----|
| Tabla 1. Primeras 4 señales del algoritmo que indican la venta del índice..... | 55 |
| Tabla 2. Primeras 5 señales del algoritmo que indican la venta del índice cuando existen caídas en el IPC | 57 |
| Tabla 3 Primeras 5 señales del algoritmo que indican la venta del índice. Segundo periodo..... | 61 |
| Tabla 4. Primeras 5 señales del algoritmo que indican la venta de la acción ELEKTRA .. | 64 |
| Tabla 5. Primeras 5 señales del algoritmo que indican la venta de la acción PEÑOLES . | 67 |
| Tabla 6. Primeras 6 señales del algoritmo que indican la venta de la acción AMX-L. No consideradas por contar con poca información..... | 71 |
| Tabla 7. Sigüientes 3 señales del algoritmo que indican la venta de la acción AMX-L..... | 72 |
| Tabla A1 Cambio porcentual en los resultados de z^2 al ejecutar el algoritmo con diferente número de iteraciones y para 34 diferentes acciones. | 85 |
| Tabla A2 Diversos valores de inicio y el resultado del algoritmo en cada uno de los casos para el IPC..... | 86 |
| Tabla A3 Cambios porcentuales absolutos de los valores de z^2 debido al incremento de la constante k_0 . Para un grupo de 7 acciones. | 86 |
| Tabla A4 Diferentes resultados de los valores de z^2 debido al incremento de la constante k_1 . Para un grupo de 7 acciones. | 86 |
| Tabla A5 Cambios porcentuales absolutos de los valores de z^2 debido al incremento de la constante k_1 . Para un grupo de 7 acciones..... | 87 |
| Tabla A6 Diferentes resultados de los valores de z^2 debido al incremento de la constante k_1 . Para un grupo de 7 acciones. | 87 |
| Tabla A7 Serie de datos para el primer ejercicio con el índice IPC (cifras en unidades)*. | 88 |
| Tabla A 8 Serie de datos para el segundo ejercicio con el índice IPC (cifras en unidades)* | 89 |
| Tabla A9 Serie de datos de precios de cierre ajustados para el ejercicio con la acción de ELEKTRA (cifras en pesos)* | 90 |

Tabla A10 Serie de datos para el ejercicio con la acción de PEÑOLES (cifras en pesos) 91

Tabla A11 Serie de datos para el ejercicio con la acción de AMX-L (cifras en pesos)* 92

Introducción

El comportamiento del mercado bursátil (o accionario) ha sido objeto de estudio de investigadores y profesionales de distintas áreas, alrededor de este tema se han desarrollado diversas teorías y modelos que en cierta medida han intentado explicar y predecir el complejo comportamiento de este mercado.

El deseo de todo inversionista en el mercado accionario es encontrar el secreto para obtener ganancias más allá del promedio¹. En esta tesis se abordará una técnica propuesta por Yin, Zhang, Liu, Liu y Cheng (1) para la toma de decisiones de venta de acciones que ya se poseen utilizando un método de Aproximación Estocástica (AE) el cual se basa en la obtención de señales de venta utilizando principalmente la serie histórica de los precios de las mismas, y será aplicada a información de acciones listadas en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

La forma de analizar movimientos en los precios de las acciones utilizando sus series históricas es propia del llamado *Análisis Técnico* el cual basa sus teorías en los patrones de los movimientos históricos de sus series de datos (precios y volumen principalmente) mediante el uso de gráficas e indicadores.

En el caso del método aquí expuesto, al ser la serie histórica de precios su principal insumo puede ser considerado como dentro de las herramientas del Análisis Técnico. Aunque existe una gran discusión sobre la validez y eficiencia del Análisis Técnico, la realidad es que una gran cantidad de sus técnicas son ampliamente utilizadas actualmente.

En cualquier mercado accionario una de las estrategias para la decisión de venta de acciones puede ser el planteamiento basado en precios objetivo, esto es, tomar decisiones de venta cuando el precio de la acción suba hasta alcanzar cierto precio objetivo o cuando el precio caiga a un valor para el cual estemos dispuestos a vender con el fin de minimizar las pérdidas y no seguir perdiendo. La determinación óptima de estos precios objetivo (o valores límite) es de crucial importancia para maximizar las ganancias. Aun cuando pueda parecer que el problema de toma de decisiones de compra de acciones es muy parecido al problema de toma de decisiones de venta, éste método por

¹Estas ganancias son las que superan a los rendimientos que se supondrían esperar si se considera el riesgo que se asume.

la forma en que está construido, sólo aplica para las decisiones de venta ya que está basado en el valor presente de los rendimientos considerados (calculados) a partir del precio de adquisición de las mismas.

En su documento Zhang (2) propuso un modelo para el problema de decisiones de venta y mostró que se pueden determinar valores óptimos de manera analítica mediante la resolución de un problema de ecuaciones diferenciales con dos valores en la frontera. Cuando la cadena de Markov asociada al modelo tiene sólo dos estados la solución puede ser obtenida, sin embargo, cuando la cadena tiene más estados aumenta la complejidad de la resolución.

Considerando este aumento en la complejidad del problema los estudiosos del tema recurrieron como una buena alternativa a la teoría de la optimización estocástica. Yin, Liu y Zhang (3) basados en la técnica de la AE plantearon un algoritmo recursivo para la optimización de los precios objetivo. Entonces el problema se convirtió en un problema de optimización paramétrica en donde la función objetivo está en función de los valores límite. El propósito entonces, es llegar a estos precios objetivo. Éste es el método objeto de este trabajo y se basa en el uso de técnicas de Aproximaciones Estocásticas (AE) y optimización.

La AE cuenta con dos grandes ventajas que la hacen ideal para este tipo de problemas las cuales son: **1) no se necesita un modelo específico que describa el comportamiento de los precios de las acciones, las series históricas son suficientes y 2) los cálculos pueden hacerse de manera recursiva haciendo posible su implementación en tiempo real.**

La AE ha sido objeto de estudio de muchas investigaciones, tanto teóricas como aplicadas. Los orígenes formales de la AE provienen del trabajo Robbins y Monro (4) cuya motivación original fue la obtención de raíces de funciones continuas, donde la forma precisa de la función era desconocida o muy complicada para ser calculada. El algoritmo planteado por ellos consistió en una secuencia de estimaciones construidas de manera recursiva con el uso de mediciones con “ruido”.

Después de los trabajos de Robbins y Monro (4) en 1951 se desarrollaron varios estudios notables alrededor de la AE, como los de Kushner y Yin (5) en 2003. En años recientes, algoritmos han sido adaptados y aplicados a diversas áreas, por lo que su importancia práctica ha llamado mucho la atención en los últimos 50 años.

Los dos objetivos principales de esta tesis son: **verificar el funcionamiento de esta técnica aplicándola a series de datos de acciones que cotizan en el mercado bursátil mexicano y, proporcionar un pseudocódigo que ayude a la implementación de esta técnica con el fin de proveer una herramienta más para la toma de decisiones de quienes participen en dicho mercado.**

Para lograr estos objetivos este trabajo está dividido en cuatro capítulos, en el Capítulo I, primeramente, se presenta una breve descripción de la Aproximación Estocástica tomando como punto de partida el problema propuesto en Robbins y Monro (4). El planteamiento formal, las hipótesis y los resultados más relevantes de la convergencia del método sugerido por los autores son incluidos en este capítulo. Además, se esboza un problema de aplicación muy sencillo con el fin de proporcionar una introducción a esta herramienta. También, en esta sección, se revisan de manera más general algunas adaptaciones de la AE que son: el método Kiefer-Wolfowitz, el método de Diferencias Finitas y el método de Perturbaciones Simultáneas. Este primer capítulo sirve de marco teórico para el resto del documento.

En el Capítulo II se plantea ya el problema de decisión de venta de acciones utilizando el método de AE, se describe el algoritmo involucrado y se detallan tanto los parámetros que utiliza como los pasos que sigue. Así mismo, se incluyen algunas pruebas de sensibilidad del algoritmo respecto a los parámetros más relevantes obteniendo así una buena referencia al momento de analizar el comportamiento de una acción en particular.

En el Capítulo III se muestra la aplicación del algoritmo a la serie de precio del IPC, estableciendo los parámetros de entrada utilizados y subrayando los resultados obtenidos. También se aplicó el algoritmo a otras acciones cuyos parámetros de entrada y resultados de igual manera se encuentran detallados en esta sección.

Finalmente, en el Capítulo IV se exponen las conclusiones obtenidas de este trabajo con base en todo lo expuesto: teoría y resultados de la aplicación del algoritmo a las diferentes acciones que se tomaron de ejemplo.

En la sección de Anexos encontramos un pseudocódigo del algoritmo utilizado, las Tablas de datos que contienen la información numérica de las gráficas de las pruebas de sensibilidad y de los precios de las acciones a las que se aplicó el algoritmo.

Capítulo I. Aproximación Estocástica

I.1 Principios de la Aproximación estocástica (AE)

I.1.1 Método Robbins-Monro

Existe un sinfín de problemas de decisión formulados como problemas de optimización los cuales dependen de parámetros desconocidos. Este tipo de problemas representan un reto incluso desde su formulación y posteriormente en la resolución de los mismos, generalmente lo que se busca es obtener un modelo equilibrando su apego a la realidad con su complejidad de tal forma que pueda ser resuelto analíticamente o numéricamente. Como resultado de lo anterior encontramos que hay muchas maneras de plantear y resolver problemas de optimización bajo incertidumbre.

La Optimización Estocástica es aplicada en la resolución de problemas cuando hay presencia de aleatoriedad o incertidumbre ya sea en los datos de entrada (ruido) o en el procedimiento mismo. Dentro de esta familia de métodos podemos mencionar la Aproximación estocástica y los Algoritmos Genéticos, entre otros.

La Aproximación Estocástica es una herramienta que se basa en iteraciones para llegar al valor óptimo. Las primeras ideas de este método se pueden encontrar desde 1941 en un documento de H. Hotelling (6). Pero es años más tarde que Robbins y Monro (4) en 1951 le dan un tratamiento matemático más formal y llegan a la comprobación de valiosos resultados de esta técnica. A partir del trabajo de Robbins y Monro se han publicado un gran número de artículos tanto teóricos como prácticos que dejan ver su utilidad práctica y su importancia.

El documento de Robbins y Monro inicialmente atrajo la atención de las personas dedicadas a la estadística pero poco a poco esta herramienta fue desarrollada en áreas como sistemas de control y optimización. La AE ha servido como prototipo para el análisis de algoritmos recursivos utilizados en estimaciones en línea dentro del control de sistemas estocásticos.

Existen varias versiones modificadas de la AE generadas a partir del método propuesto por Robbins y Monro cuya motivación original fue la búsqueda de raíces de funciones continuas donde la forma de la función era desconocida o demasiado compleja para ser calculada.

Robbins y Monro plantearon el siguiente problema:

Sea $M(x)$ el valor esperado de cierto experimento para una x dada. $M(x)$ se supone una función monótona de x pero desconocida. Lo que se desea es encontrar la solución $x = \theta$ de la ecuación $M(x) = \alpha$, donde α es una constante dada. La idea que propusieron fue un método para llevar a cabo experimentos sucesivos para valores x_1, x_2, x_3, \dots de tal forma que x_n tienda a θ en probabilidad.

Descripción general del método de la AE

Sea $M(x)$ una función dada y α una constante dada tal que la ecuación:

$$(1) \quad M(x) = \alpha$$

tiene una única solución en $x = \theta$. La determinación del valor de θ se puede hacer a través de más de un método vía aproximaciones sucesivas. Muchos de estos métodos comienzan eligiendo valores x_1, x_2, \dots, x_r más o menos arbitrarios y entonces sucesivamente obtienen nuevos valores de x_n como función de: los valores previamente generados x_1, x_2, \dots, x_{n-1} o de los valores de $M(x_1), M(x_2), \dots, M(x_{n-1})$ y en algunos casos de alguna derivada $M'(x_1), M'(x_2), \dots, M'(x_{n-1})$, etc. Si se tiene que el límite

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \theta,$$

no importando los valores de inicio x_1, x_2, \dots, x_r que se hayan tomado, entonces el método es efectivo para esa función $M(x)$ en particular y ese valor α . La rapidez con que el método converge en (2) y la facilidad para re-calcular los valores de x_n son lo que determinan el uso práctico del mismo.

Ahora consideremos una **generalización estocástica** para el problema anterior en el cual la naturaleza $M(x)$ es desconocida. En su lugar, supongamos que para cada

valor de x corresponde una variable aleatoria $Y = Y(x)$ la cual cuenta con una función de distribución $\Pr[Y(x) \leq y] = H(y | x)$ tal que

$$(3) \quad M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y dH(y | x)$$

donde $M(x)$ es el valor esperado de Y para un valor de x determinado. Ni la naturaleza exacta de $H(y | x)$ ni la de $M(x)$ es conocida, pero se asume que la ecuación (1) tiene una raíz única θ , y se desea estimar θ haciendo observaciones sucesivas de Y para los valores x_1, x_2, \dots, x_r determinados de forma secuencial de acuerdo con algún procedimiento. Si (2) se cumple en probabilidad e independientemente de cualesquiera valores de inicio x_1, x_2, \dots, x_r , podríamos, de conformidad con terminología común de estadística, decir que el procedimiento es *consistente* para $H(y | x)$ y α dadas.

Robbins y Monro propusieron un método recursivo el cual, bajo ciertas restricciones sobre la naturaleza de $H(y | x)$, podría ser usado para encontrar la raíz deseada. Aun cuando las restricciones son rigurosas en la práctica en muchas ocasiones se satisfacen.

Convergencia estocástica

Supongamos en adelante que $H(y | x)$ es, para cada x , una función de distribución en y y que existe una constante positiva C tal que

$$(4) \quad \Pr[Y(x) \leq C] = \int_{-C}^C dH(y | x) = 1 \quad \text{para toda } x$$

Lo que significa en particular que para cada x el valor esperado $M(x)$ definido por (3) existe y es finito. Supongamos además, que existen unas constantes α y θ tal que

$$(5) \quad M(x) \leq \alpha \quad \text{para } x < \theta, \quad M(x) \geq \alpha \quad \text{para } x > \theta$$

Si $M(\theta) = \alpha$ es, por el momento, no tan importante.

Sea $\{a_n\}$ una secuencia fija de constantes positivas tal que

$$(6) \quad 0 < \sum_1^{\infty} a_n^2 = A < \infty$$

Definimos una cadena (no estacionaria) de Markov $\{x_n\}$ tomando a x_1 como una constante arbitraria y definiendo:

$$(7) \quad x_{n+1} - x_n = a_n(\alpha - y_n)$$

donde y_n es una variable aleatoria tal que

$$(8) \quad \Pr[y_n \leq y | x_n] = H(y | x_n)$$

Sea

$$(9) \quad b_n = E(x_n - \theta)^2$$

Se desea encontrar las condiciones bajo las cuales

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

no importando cual haya sido el valor inicial x_1 , lo que implicaría la convergencia de x_n a θ en probabilidad. Justificando así que este método es útil para resolver el problema propuesto.

De (7) tenemos que

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= E(x_{n+1} - \theta)^2 = E\left[E\left[(x_{n+1} - \theta)^2 \mid x_n\right]\right] \\ (11) \quad &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \{(x_n - \theta) - a_n(y - \alpha)\}^2 dH(y \mid x_n)\right] \\ &= b_n + a_n^2 E\left[\int_{-\infty}^{\infty} (y - \alpha)^2 dH(y \mid x_n)\right] - 2a_n E[(x_n - \theta)(M(x_n) - \alpha)] \end{aligned}$$

Haciendo

$$(12) \quad d_n = E[(x_n - \theta)(M(x_n) - \alpha)],$$

$$(13) \quad e_n = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} (y - \alpha)^2 dH(y | x_n) \right],$$

podemos escribir

$$(14) \quad b_{n+1} - b_n = a_n^2 e_n - 2a_n d_n$$

Notemos que de (5)

$$d_n \geq 0,$$

Mientras que de (4)

$$0 \leq e_n \leq [C + |\alpha|]^2 < \infty$$

Las observaciones anteriores junto con (6) implican que la serie de términos positivos $\sum_1^{\infty} a_n^2 e_n$, converge.

De (14) también obtenemos que

$$(15) \quad b_{n+1} = b_1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 e_j - 2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j d_j$$

como $b_{n+1} \geq 0$ entonces

$$(16) \quad \sum_{j=1}^n a_j d_j \leq \frac{1}{2} \left[b_1 + \sum_1^{\infty} a_n^2 e_n \right] < \infty$$

Luego

$$(17) \quad \sum_1^{\infty} a_n d_n, \text{ converge.}$$

Considerando (15) tenemos que

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_1 + \sum_1^{\infty} a_n^2 e_n - 2 \sum_1^{\infty} a_n d_n = b$$

existe y $b \geq 0$.

Ahora supongamos que existe una sucesión $\{k_n\}$ de constantes no negativas tal que

$$(19) \quad d_n \geq k_n b_n, \quad \sum_1^{\infty} a_n k_n = \infty$$

de la primer parte de (19) y la convergencia de (17) se sigue que

$$(20) \quad \sum_1^{\infty} a_n k_n b_n < \infty$$

De (20) y de la segunda parte de (19) se sigue que para cualquier $\varepsilon > 0$ debe existir infinitamente varios valores n tal que $b_n < \varepsilon$. Ya que sabemos que $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existe, se concluye que $b = 0$.

Entonces hemos demostrado

Lema 1. Si existe una sucesión $\{k_n\}$ de constantes no negativas que satisfagan (19) entonces $b = 0$.

Sea

$$(21) \quad A_n = |x_1 - \theta| + [C + |\alpha|](a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1});$$

Entonces de (4) y (7) se sigue que

$$(22) \quad \Pr[|x_n - \theta| \leq A_n] = 1$$

También, sea

$$(23) \quad \bar{k}_n = \inf \left[\frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} \right] \quad \text{para } 0 < |x - \theta| \leq A_n.$$

De la condición (5) se sigue que $\bar{k}_n \geq 0$. Además, sea $P_n(x)$ la distribución de probabilidad de x_n , tenemos que

$$(24) \quad d_n = \int_{|x-\theta| \leq A_n} (x-\theta)(M(x) - \alpha) dP_n(x)$$

$$\geq \int_{|x-\theta| \leq A_n} \bar{k}_n |x-\theta|^2 dP_n(x) = \bar{k}_n b_n$$

entonces la sucesión particular $\{k_n\}$ definida en (23) satisface la primera parte de (19).

Para verificar la segunda parte se deben hacer los siguientes supuestos:

$$(25) \quad \bar{k}_n \geq \frac{K}{A_n}$$

para alguna constante $K > 0$ y una n suficientemente grande, y además

$$(26) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(a_1 + \dots + a_{n-1})} = \infty$$

de (26) tenemos que

$$(27) \quad \sum_1^{\infty} a_n = \infty$$

de ahí que para una n suficientemente grande

$$(28) \quad 2[C + |\alpha|](a_1 + \dots + a_{n-1}) \geq A_n$$

con lo anterior y considerando (25) para una n suficientemente grande

$$(29) \quad a_n k_n \geq a_n \frac{K}{A_n} \geq \frac{a_n K}{2[C + |\alpha|](a_1 + \dots + a_{n-1})},$$

Así la segunda parte de (19) se obtiene de (29) y de (26). Con lo que queda probado

Lema 2. Si se cumplen (25) y (26) entonces $b = 0$.

Como ejemplo tenemos que la sucesión $\{a_n\}$ donde $a_n = 1/n$ satisface que (6) y (26) ya que

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)} \right] = \infty$$

De manera más general, cualquier sucesión $\{a_n\}$ para la que existan dos constantes positivas c' y c'' para las cuales

$$(30) \quad \frac{c'}{n} \leq a_n \leq \frac{c''}{n}$$

satisface (6) y (26). Llamaremos a cualquier sucesión $\{a_n\}$ la cual satisface (6) y (26), no importando si es de la forma (30), una sucesión de tipo $1/n$.

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de tipo $1/n$ entonces es fácil encontrar funciones $M(x)$ que satisfagan (5) y (25). Supongamos, por ejemplo, que $M(x)$ satisface las siguientes condiciones modificadas de la forma original de (5): para algún $\delta > 0$,

$$(5') \quad M(x) \leq \alpha - \delta \text{ para } x < \theta, \quad M(x) \geq \alpha + \delta \text{ para } x > \theta$$

Entonces para $0 < |x - \theta| \leq A_n$ tenemos

$$(32) \quad \bar{k}_n \geq \frac{\delta}{A_n},$$

lo cual es (25) con $K = \delta$. Del Lema 2 se concluye:

Teorema 1. Si $\{a_n\}$ es del tipo $1/n$, si (4) se cumple, y si $M(x)$ satisface (5') entonces $b = 0$.

Un caso más interesante ocurre cuando $M(x)$ satisface las siguientes condiciones:

$$(33) \quad M(x) \text{ es no decreciente,}$$

$$(34) \quad M(\theta) = \alpha,$$

$$(35) \quad M'(\theta) > 0.$$

Probemos que (25) se cumple en este caso también. De (34) se tiene que

$$(36) \quad M(x) - \alpha = (x - \theta)[M'(\theta) + \varepsilon(x - \theta)],$$

Donde $\varepsilon(t)$ es una función tal que

$$(37) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

de lo anterior podemos decir entonces que existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$(38) \quad \varepsilon(t) \geq -\frac{1}{2}M'(\theta) \text{ para } |t| \leq \delta, \quad \text{tal que}$$

$$(39) \quad \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} = \frac{1}{2} M'(\theta) > 0 \quad \text{para} \quad |x - \theta| \leq \delta.$$

entonces, para $\theta + \delta \leq x \leq \theta + A_n$, como $M(x)$ es no decreciente,

$$(40) \quad \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} \geq \frac{M(\theta + \delta) - \alpha}{A_n} \geq \frac{\delta M'(\theta)}{2A_n},$$

mientras que para $\theta - A_n \leq x \leq \theta - \delta$,

$$(41) \quad \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} = \frac{\alpha - M(x)}{\theta - x} \geq \frac{\alpha - M(\theta - \delta)}{A_n} \geq \frac{\delta M'(\theta)}{2A_n},$$

Por lo tanto, asumiendo sin pérdida de generalidad que $\delta/A_n \leq 1$,

$$(42) \quad \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} \geq \frac{\delta M'(\theta)}{2A_n}, \quad \text{para} \quad 0 < |x - \theta| \leq A_n$$

de tal suerte que (25) se cumple con $K = \delta M'(\theta)/2 > 0$. Esto prueba el siguiente teorema

Teorema 2. Si $\{a_n\}$ es del tipo $1/n$, si (4) se cumple, y si $M(x)$ satisface (33), (34) y (35), entonces $b = 0$.

Con todo lo anterior se ha mostrado la convergencia en probabilidad hacia la solución del método de AE propuesto por Robbins y Monro demostrando así su factibilidad para la resolución de este tipo de problemas de obtención de raíces de una función.

La principal ventaja de este método es que no se necesita saber la naturaleza de la función M . Lo que sí interesa saber es la convergencia y el modo en que converge la secuencia generada por el método.

Es importante mencionar que este método para encontrar raíces propuesto por Robbins-Monro ha jugado un papel central en el área de la optimización aplicado al problema clásico de encontrar el valor de $x = \theta$ tal que $g(x) = \partial L / \partial x = 0$, en donde $L = L(x)$ es, por ejemplo, una función de pérdida que se busca minimizar. Esto es, mediciones del gradiente $g(x)$ (con ruido) de una función son utilizadas para el método de AE. Por esta razón, este algoritmo es llamado en ocasiones el algoritmo de gradiente estocástico. Muchos problemas prácticos han sido resueltos vía esta formulación de gradiente estocástico.

Ejemplo de aplicación

El siguiente problema es un caso muy simple de la aplicación del método de Robbins y Monro pero que es de gran ayuda para ilustrar las técnicas matemáticas que involucra el mismo. (Wasan (7), 1969).

Ejemplo. Existen varios casos de pruebas biológicas uno obtiene datos de **respuesta - no respuesta** sobre un determinado experimento. Por ejemplo, en la prueba de insecticidas uno observa si un insecto responde o no a cierta dosis. Entonces el problema es determinar la dosis crítica para una cantidad de respuesta dada. Matemáticamente, el problema puede ser formulado como sigue:

Sea Z una variable aleatoria con función de distribución M . Si x es un número real y $Y(x)$ es una variable aleatoria tal que

$$Y(x) = 1 \text{ si } Z \leq x \quad \text{y} \quad Y(x) = 0 \text{ si } Z > x$$

Entonces

$$P[Y(x) = 1] = P[Z \leq x] = M(x),$$

$$P[Y(x) = 0] = P[Z > x] = 1 - M(x),$$

$$E[Y(x)] = 1 * M(x) + 0 * (1 - M(x)) = M(x)$$

Ahora bien, $Y(x)$ es la respuesta observable a la dosis x . El problema es determinar el valor de x para una cantidad de respuesta dada α . Esto se puede resolver planteándolo como en el siguiente teorema.

Teorema 3. Sea M una función de distribución y α un número real tal que existe un número real θ dado que cumpla que $M(\theta) = \alpha$; sea M diferenciable en θ y $M'(\theta) > 0$. Sea x_1 un número real y n un entero positivo. Sea

$$(43) \quad X_{n+1} = X_n - \frac{1}{n}(Y_n - \alpha),$$

donde Y_n es una variable aleatoria tal que

$$P[Y_n = 1 | X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{n-1}] = M(X_n),$$

$$P[Y_n = 0 | X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{n-1}] = 1 - M(X_n),$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - \theta)^2 = 0$, de tal forma que la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ converge a θ en media cuadrada y entonces en probabilidad. Notemos que en este caso la $a_n = 1/n$ del método general antes descrito.

Prueba

Sea $\xi_n = E(X_n - \theta)^2$ queremos mostrar que el $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$.

De (43) tenemos

$$X_{n+1} - \theta = X_n - \theta - \frac{1}{n}(Y_n - \alpha),$$

$$E(X_{n+1} - \theta)^2 = E(X_n - \theta)^2 - \frac{2}{n}E[(X_n - \theta)(Y_n - \alpha)] + \frac{1}{n^2}E(Y_n - \alpha)^2$$

Sea

$$d_n = E[(X_n - \theta)(Y_n - \alpha)],$$

$$e_n = E(Y_n - \alpha)^2,$$

Entonces
$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{2}{n}d_n + \frac{e_n}{n^2},$$

$$\sum_{j=1}^n (\xi_{j+1} - \xi_j) = -2 \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{j} + \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{j^2},$$

$$\xi_{n+1} - \xi_1 = -2 \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{j} + \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{j^2},$$

Ya que $0 \leq e_n = E(Y_n - \alpha)^2 \leq 1$, $\sum_{j=1}^n \frac{e_j}{j^2}$ es no decreciente y acotada,

y $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j}{j^2}$ converge porque $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\begin{aligned} d_n &= E[(X_n - \theta)(Y_n - \alpha)] = E\{E[(X_n - \theta)(Y_n - \alpha) \mid X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{n-1}]\} \\ &= E[(X_n - \theta)(M(X_n) - \alpha)] \geq 0 \end{aligned}$$

ya que $(X_n - \theta)(M(X) - \alpha) \geq 0$ para toda X .

Por lo anterior
$$2 \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{j} = \xi_1 - \xi_{n+1} + \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{j} \leq \xi_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j}{j^2}$$

y entonces
$$\sum_{j=1}^n \frac{d_j}{j}$$

es acotado y no decreciente, lo que implica que

$$\sum_1^{\infty} \frac{d_j}{j}$$

converge. De ahí que $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n+1} = \xi_1 - 2 \sum_1^{\infty} \frac{d_j}{j} + \sum_1^{\infty} \frac{e_j}{j^2} = \xi$ existe. Lo que debemos demostrar es que $\xi = 0$.

Supongamos que tenemos una sucesión de números reales $\{k_n\}$ tal que

- (i) $k_n \geq 0$ para toda n ,
- (ii) $d_n \geq k_n \xi_n$ para toda n ,
- (iii) $\sum_1^{\infty} \frac{k_n}{n} = \infty$ diverge,

con estos supuestos tenemos que $\xi = 0$. Para verlo, veamos que (i) y (ii) implican que

$$0 \leq \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} k_n \xi_n \leq \sum_1^{\infty} \frac{d_n}{n} < \infty$$

Ahora supongamos que $\xi > 0$. Como el $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$ entonces existe un número natural $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $\xi_n > \xi/2$.

Entonces

$$\infty > \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k_n \xi_n}{n} \geq \frac{\xi}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k_n}{n},$$

lo que implica que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k_n}{n}$ es finito, lo cual es una contradicción al supuesto (iii), entonces $\xi = 0$. Sólo falta mostrar que existe tal sucesión $\{k_n\}$ que satisfaga los supuestos antes señalados (i), (ii) y (iii).

Empecemos, sea $A_1 = |x_1 - \theta|$ para $n = 1$

$$A_n = |x_1 - \theta| + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \quad \text{si } n > 1$$

De (43) tenemos que $(X_{j+1} - X_j) = -\frac{1}{j}(Y_j - \alpha)$

$$X_n - x_1 = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{Y_j - \alpha}{j},$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad |X_n - \theta| &= \left| x_1 - \theta - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{Y_j - \alpha}{j} \right| \\ &\leq |x_1 - \theta| + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} |Y_j - \alpha| \leq |x_1 - \theta| + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

porque $|Y_j - \alpha| \leq 1$ para toda j .

De aquí que $|X_n - \theta| \leq A_n, \quad n \geq 1$

Sea $k_n = \inf \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta}$

Claramente $\{k_n\}$ satisface (i) y $\{k_n\}$ también satisface (ii), debido a que

$$\begin{aligned} d_n &= E[(X_n - \theta)(M(X_n) - \alpha)] = E\left[(X_n - \theta)^2 \frac{M(X_n) - \alpha}{X_n - \theta}\right] \\ &\geq E(X_n - \theta)^2 \inf_{|X - \theta| < A_n} \frac{M(X) - \alpha}{X - \theta} \end{aligned}$$

como $|X_n - \theta| \leq A_n \geq \xi_n k_n$.

Ya que $\lim_{x \rightarrow \theta} \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} = \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{M(x) - M(\theta)}{x - \theta} = M'(\theta) > 0$

existe una $\delta > 0$ tal que si $|x - \theta| < \delta$ entonces

$$\frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} > \frac{1}{2}M'(\theta)$$

Luego
$$\inf_{|x - \theta| < \delta} \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} > \frac{1}{2}M'(\theta).$$

Supongamos que N es un número natural positivo tal que si $n > N$ entonces $A_n > \delta$. Consideremos $n > N$. Si $\delta \leq |x - \theta| \leq A_n$ entonces

$$\frac{1}{|x - \theta|} \geq \frac{1}{A_n} \text{ y } |M(x) - \alpha| \geq k,$$

donde $k = \min\{M(\theta + \delta) - \alpha\} > 0$. Entonces

$$\inf_{\delta < |x - \theta| < A_n} \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} \geq \frac{k}{A_n}$$

y

$$k_n = \inf_{|x - \theta| < A_n} \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} \geq \min \left\{ \inf_{|x - \theta| < \delta} \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta}, \inf_{\delta < |x - \theta| < A_n} \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} \right\}$$

$$\geq \min \left\{ \frac{M'(\theta)}{2}, \frac{k}{A_n} \right\} \geq \frac{k}{A_n} \text{ para } n > N_1 \text{ digamos.}$$

Veamos que

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} \frac{k_n}{n} \geq k \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{nA_n} \geq \frac{k}{k_1} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$$

ya que
$$\log n = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{t} dt \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$$

$$\begin{aligned} A_n &= |x_1 - \theta| + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \leq (|x_1 - \theta| + 1) \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \\ &= \{|x_1 - \theta| + 2\} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \{|x_1 - \theta| + 2\} \log n = k_1 \log n \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra que también se cumple (iii).

Entonces se ha mostrado que uno puede obtener la solución al problema de respuesta-no respuesta a través del método de aproximaciones estocásticas.

I.1.2 Método Kiefer-Wolfowitz

Dentro del desarrollo de la teoría de la Aproximación Estocástica otro de los primeros documentos importantes es el desarrollado por Kiefer-Wolfowitz (8) en 1952 en el cual se expone un método para determinar el máximo de una función de regresión, si es que existe.

El problema se plantea de manera similar al método anterior.

Sea $M(x)$ una función de regresión la cual tiene un máximo en un punto desconocido θ . Siendo $M(x)$ también desconocida pero existiendo la posibilidad de tomar observaciones de ella en para cualquier valor de x . Veremos un esquema en el que partiendo de un valor arbitrario x_1 , es posible obtener sucesivamente valores x_2, x_3, \dots tal que x_n converge a θ en probabilidad en la medida que $n \rightarrow \infty$.

Empecemos, sea $H(y|x)$ una familia de funciones de distribución que dependen del parámetro x , y sea

$$(1) \quad M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y dH(y|x)$$

Supongamos que

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 dH(y|x) \leq S < \infty,$$

y que $M(x)$ es estrictamente creciente para $x < \theta$, y $M(x)$ es estrictamente decreciente para $x > \theta$. Sean $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones infinitas de números positivos tales que

$$(3) \quad c_n \rightarrow 0,$$

$$(4) \quad \sum a_n = \infty,$$

$$(5) \quad \sum a_n c_n < \infty,$$

$$(6) \quad \sum a_n^2 c_n^{-2} < \infty,$$

Por ejemplo sean $a_n = 1/n$, $c_n = 1/n^3$.

Podemos ahora describir el esquema recursivo como sigue. Sea z_1 un número arbitrario. Para todo número entero positivo n tenemos

$$(7) \quad z_{n+1} = z_n + a_n \frac{(y_{2n} - y_{2n-1})}{c_n},$$

donde y_{2n+1} y y_{2n} son variables independientemente distribuidas con distribuciones $H(y|z_n - c_n)$ y $H(y|z_n + c_n)$ respectivamente. Bajo condiciones de regularidad en $M(x)$ las cuales se establecerán a continuación se probará que z_n converge estocásticamente a θ conforme $n \rightarrow \infty$.

Aun cuando no hemos postulado la existencia de la derivada de $M(x)$ (de hecho, $M(x)$ puede ser discontinua), el espíritu de los supuestos de regularidad es el siguiente.

a) Si $M(x)$ tiene derivada ésta debería ser cero en el punto $x = \theta$. De aquí que podríamos esperar que la derivada no sea muy grande en una vecindad de $x = \theta$.

b) Si, a una distancia de θ , $M(x)$ fuera muy plana, entonces el movimiento hacia θ sería muy lento. De aquí que fuera de una vecindad de $x = \theta$ nos gustaría que el valor absoluto de la derivada esté acotado inferiormente por un número positivo.

c) Si $M(x)$ se incrementara abruptamente en algunos lugares podríamos por error tener un movimiento de z_n , el cual podría mandarnos muy lejos de θ . Si hubiera muchos

lugares con incrementos abruptos z_n podría aproximarse a $+\infty$ o $-\infty$ con probabilidad positiva. Tendríamos por lo tanto que postular una condición de Lipschitz.

Ahora bien, en cualquier situación práctica uno siempre puede dar a priori un intervalo $[C_1, C_2]$ tal que $C_1 \leq \theta \leq C_2$. Y con esto sería suficiente que las condiciones se cumplieran en dicho intervalo.

Supongamos, sin embargo, que algunos $z_n \pm c_n$ caen fuera del intervalo $[C_1, C_2]$ y que no es posible tener las observaciones en esos valores. Si en ese caso movemos a z_n de tal forma que el valor excedido $z_n \pm c_n$ se convierta en C_1 o C_2 , según sea el caso, y seguimos el procedimiento descrito en (7), entonces las conclusiones se mantienen válidas.

Postulamos las siguientes condiciones de regularidad en $M(x)$.

Condición 1. Existen positivos β y B tales que

$$(8) \quad |x' - \theta| + |x'' - \theta| < \beta \text{ implica que } |M(x') - M(x'')| < B |x' - x''|$$

Condición 2. Existen positivos ρ y R tales que

$$(9) \quad |x' - x''| < \rho \text{ implica que } |M(x') - M(x'')| < R$$

Condición 3. Para cada $\delta > 0$ existe un positivo $\pi(\delta)$ tal que

$$(10) \quad |z - \theta| > \delta \text{ implica que } \inf_{\frac{1}{2}\delta > \varepsilon > 0} \frac{|M(z + \varepsilon) - M(z - \varepsilon)|}{\varepsilon} > \pi(\delta)$$

Convergencia estocástica

Veamos que en el esquema sugerido $z_n - \theta$ converge estocásticamente a cero.

Sean

$$(11) \quad b_n = E(z_n - \theta)^2,$$

$$(12) \quad U_n(z) = (z_n - \theta)E\{y_{2n} - y_{2n-1} \mid z_n = z\},$$

$$(13) \quad U_n^+(z) = \frac{1}{2}(U_n(z) + |U_n(z)|), \quad U_n^-(z) = \frac{1}{2}(U_n(z) - |U_n(z)|),$$

$$(14) \quad P_n = E(U_n^+(z_n)), \quad N_n = E(U_n^-(z_n))$$

$$(15) \quad e_n = E(y_{2n} - y_{2n-1})^2$$

De (7) tenemos que

$$(16) \quad b_{n+1} = b_n + 2\frac{a_n}{c_n}(P_n + N_n) + \frac{a_n^2}{c_n^2}e_n$$

Agregando la expresión obtenida en (16) para $b_{j+1} - b_j$ para $1 \leq j \leq n$, obtenemos

$$(17) \quad b_{n+1} = b_1 + 2\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{c_j} P_j + 2\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{c_j} N_j + \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{c_j^2} e_j.$$

Notemos que $U_n^+(z) \geq 0$ y $U_n^+(z) > 0$ implican que $|z - \theta| < c_n$ porque $M(x)$ es monótona para $x < \theta$ y para $x > \theta$, se sigue de (8) que, para toda n para la cual $c_n < \frac{1}{2}\beta$, tenemos que

$$(18) \quad 0 \leq U_n^+(z) < 2Bc_n^2$$

De (5) y de (18) se sigue que la siguiente serie de términos positivos

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} P_n$$

converge, digamos a α . De (9) tenemos

$$(20) \quad [M(z_n + c_n) - M(z_n - c_n)]^2 < R^2$$

para n suficientemente grandes. También para valores de n grandes,

$$(21) \quad \begin{aligned} & E\{(y_{2n} - y_{2n-1}) | z_n\} = \\ & = E\{(y_{2n} - M(z_n + c_n))^2 + (y_{2n-1} - M(z_n - c_n))^2 | z_n\} + [M(z_n + c_n) - M(z_n - c_n)]^2 \leq 2S + R^2 \end{aligned}$$

por (2) y (20). De aquí que para n suficientemente grandes

$$(22) \quad E[y_{2n} - y_{2n-1}]^2 \leq 2S + R^2.$$

En consecuencia de (6) obtenemos que la siguiente serie de términos positivos

$$(23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{c_n^2} e_n$$

converge, digamos a γ . Por lo que, como $b_{n+1} \geq 0$, se sigue de (17) que

$$(24) \quad 2 \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{c_j} N_j \geq -b_1 - 2\alpha - \gamma > -\infty,$$

de tal suerte que la siguiente serie de términos negativos

$$(25) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} N_n \quad \text{converge.}$$

Por otro lado, sea

$$(26) \quad K_n = \left| \frac{M(z_n + c_n) - M(z_n - c_n)}{c_n} \right|$$

Entonces

$$(27) \quad E\{K_n \mid z_n - \theta\} = \frac{P_n - N_n}{c_n}.$$

De la convergencia de (19) y (25) y de la divergencia de $\sum a_n$, se sigue que

$$(28) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} E\{K_n \mid z_n - \theta\} = 0$$

Sea $n_1 < n_2 < \dots$ una sucesión de enteros positivos tales que

$$(29) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} E\{K_{n_j} \mid z_{n_j} - \theta\} = 0$$

Podemos afirmar que $(z_n - \theta)$ converge estocásticamente a cero mientras $j \rightarrow \infty$. Si no fuera así, podrían existir dos números positivos δ y ε y unas sucesiones $\{t_j\}$ de $\{n_j\}$ tal que, para toda j ,

$$(30) \quad P\{|z_{t_j} - \theta| > \delta\} > \varepsilon,$$

lo que implica que

$$(31) \quad E\{K_{t_j} \mid z_{t_j} - \theta\} \geq \delta \varepsilon \pi \left(\frac{\delta}{2} \right) > 0$$

para toda j para la cual $c_{t_j} < \frac{1}{2}\delta$. Pero (31) contradice (29) con lo que la convergencia estocástica a cero de $(z_n - \theta)$ es demostrada.

Sean η y ε números positivos arbitrarios. La prueba del teorema se completa si podemos mostrar la existencia de un entero $N(\eta, \varepsilon)$ tal que

$$(32) \quad P\{|z_n - \theta| \geq \eta\} \leq \varepsilon \quad \text{para } n > N(\eta, \varepsilon).$$

Sea s un número positivo tal que

$$(33) \quad \frac{s^2 + s}{\eta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como z_{n_j} converge estocásticamente a θ existe un entero N_0 tal que

$$(34) \quad P\{|z_{N_0} - \theta| \geq s\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Podríamos también elegir N_0 tan grande que

$$(35) \quad c_n < \min\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \quad \text{para toda } n \geq N_0,$$

$$\text{y} \quad (36) \quad \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{a_n^2}{c_n^2} < \frac{s}{2R^2 + 4S},$$

$$\text{y} \quad (37) \quad \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n c_n < \frac{s}{8B}.$$

Prosiguiendo de manera similar a la utilizada para obtener (17), tenemos que, para cada $n > N_0$,

$$(38) \quad \begin{aligned} E\{(z_n - \theta)^2 \mid z_{N_0} = z\} &= (z_n - \theta)^2 + 2 \sum_{j=N_0}^{n-1} \frac{a_j}{c_j} E\{U_j \mid z_{N_0} = z\} + 2 \sum_{j=N_0}^{n-1} \frac{a_j^2}{c_j^2} E\{(y_{2j} - y_{2j-1})^2 \mid z_{N_0} = z\} \\ &\leq (z_n - \theta)^2 + 2 \sum_{j=N_0}^{\infty} \frac{a_j}{c_j} E\{U_j^+ \mid z_{N_0} = z\} + (R^2 + 2S) \sum_{j=N_0}^{\infty} \frac{a_j^2}{c_j^2} < (z_n - \theta)^2 + s. \end{aligned}$$

Usando (33), (38) y la desigualdad de Tchebycheff, tenemos

$$(39) \quad P\{|z_n - \theta| > \eta \mid |z_{N_0} - \theta| < s\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Las desigualdades (34) y (39) muestran que (32) se cumple para $N(\eta, \varepsilon) = N_0$, con lo que la comprobación está completa.

I.1.3 Ejemplo de Aplicaciones de la Aproximación Estocástica

Algunos de los ejemplos mencionados en la literatura (Wasan (7), 1969) en los cuales es factible el uso de la aproximación estocástica son los siguientes:

a) Es sabido que la dureza de la aleación de cobre-acero está determinada en gran medida por el tiempo durante el cual la aleación es expuesta a 500°C. Sea x el tiempo y $Y(x)$ la dureza de la aleación, el problema es encontrar los valores de x los cuales puedan dar como resultado una aleación de un promedio de dureza α dado. Es bien sabido que la dureza varía de una aleación a otra.

b) En la prueba de insecticidas, se da el problema de determinar la dosis crítica para una cantidad de respuesta dada. (Es el caso del ejemplo mostrado en una sección anterior)

c) Consideremos el problema en que la cantidad de fertilizante x es aplicado a un terreno de cultivo y $Y(x)$ representa la cantidad de granos que es producido. La producción será probablemente más pequeña si la cantidad de fertilizante utilizado es menor, pero también si el fertilizante usado es demasiado. En algún valor intermedio la producción máxima puede ser alcanzada. La producción podrá, por supuesto, variar de año en año aun cuando la x se mantenga constante.

Es necesario mencionar que los problemas anteriores también pueden ser resueltos con otros métodos estadísticos, en algunos casos con el método de mínimos cuadrados.

Kushner (9) en 1962 concluyó que el método de mínimos cuadrados es superior al método de aproximaciones estocásticas en cuanto a la eficacia de los dos métodos.

El método de mínimos cuadrados intenta encontrar una función que mejor se aproxime a un conjunto de datos dados (justo lo que se necesita en los ejemplos anteriores) utilizando el criterio del mínimo error cuadrático. Sin embargo, para el uso de este método es necesario conocer la forma de la función que se desea estimar. Sólo cuando el problema es de aproximación lineal en los coeficientes de funciones (llamadas funciones base que se suponen linealmente independientes) este método tiene una solución general.

Otra alternativa para la estimación de parámetros es la llamada Máxima Verosimilitud, la cual es una técnica con la que dada una muestra es posible estimar los parámetros de la función de distribución que describe el comportamiento de cierto experimento o fenómeno, sin embargo para esto es necesario tener claro qué tipo de distribución sigue el experimento, una vez más necesitamos la función que explica el modelo.

En contraste con estas dos técnicas muy utilizadas, el método de aproximaciones estocásticas tiene la gran ventaja de que uno no necesita saber acerca de las entradas del sistema; ni de la forma de la función de regresión o la estimación de parámetros desconocidos como sería el caso de mínimos cuadrados. Todo lo que se necesita es conocer la salida la cual es, normalmente, fácil de obtener en la práctica. De ahí que este método sea una buena opción para los problemas anteriores y en particular para el problema que se trata en este trabajo.

1.2 Método de Diferencias-Finitas (MDF)

1.2.1 Antecedentes

Dentro del desarrollo teórico de la Aproximación estocástica existe el método denominado de Diferencias Finitas (DF) cuyo caso particular es el método Kiefer-Wolfowitz antes descrito.

En una sección anterior, se mostró que el método de aproximaciones estocásticas es una buena herramienta para la obtención de raíces de una función no lineal. También se mencionó que en el área de la optimización es factible su aplicación considerando el problema clásico de encontrar el valor de $x = \theta$ tal que $g(x) = \partial L / \partial x = 0$, en donde $L = L(x)$ es, por ejemplo, una función de pérdida² que se busca minimizar. Sin embargo, para este problema el método supone que la información con la que se cuenta es con una medición (con ruido) del gradiente $g(x) = \partial L / \partial x$ el cual es desconocido.

El método de diferencias finitas (MDF), en cambio, supone que en vez de tener información estocástica del gradiente de una función (como en la aplicación del método de Robbins-Monro en la optimización), sólo se cuenta con información (generalmente con ruido) de la propia función. Esta consideración tiene un valor muy importante ya que en muchos problemas la información del gradiente estocástico es difícil o imposible de obtener. En su lugar, el MDF se basa en una aproximación del gradiente formado de mediciones (generalmente con ruido) de L .

El más antiguo de este método se basa en pequeños cambios, uno a la vez, de cada uno de los elementos de x , después de cada cambio, el valor de L es calculado.

Una vez que los valores de L son obtenidos después de cada uno de los cambios de los elementos de x , la aproximación del gradiente puede ser formada. El MDF está basado directamente en la definición de gradiente como la colección de las derivadas de cada uno de los componentes de x , manteniendo los demás componentes fijos. Como

² Función de pérdida es una función que relaciona un evento con un número real que representa el costo asociado con el evento.

puede deducirse, este método es costoso a medida que la dimensión del problema va creciendo, en este caso, la dimensión del vector x .

I.2.2 Descripción general del Método de Diferencias-Finitas (MDF)

Veamos la descripción de este método para el caso en el que sólo se cuenta con mediciones de $y(x) = L(x) + \varepsilon(x)$ para varios valores de x .

El procedimiento de recursión es de la forma general que se utiliza en la aproximación estocástica, es decir

$$(1) \quad x_{k+1} = x_k - a_k \hat{g}_k(x_k)$$

donde $\hat{g}_k(x_k)$ es la estimación del gradiente $\partial L / \partial x$ en la iteración x_k basada en mediciones de la función de pérdida. Como podemos observar, los elementos son los mismos, la ganancia $a_k > 0$, tiene la misma función que en los métodos anteriores. Bajo condiciones apropiadas, la iteración (1) converge a $x = \theta$ en probabilidad.

Es fácil observar que la parte esencial de (1) es la aproximación del gradiente $\hat{g}_k(x_k)$. Este gradiente lo obtendremos utilizando el MDF. Existen dos formas de aproximación del gradiente, de *un lado* que involucra mediciones de $y_k(x_k)$ y $y_k(x_k + \text{perturbación})$ y la de *dos lados* que involucra mediciones de la forma $y_k(x_k \pm \text{perturbación})$. El método de DF utilizando la aproximación por los dos lados quedaría

$$(2) \quad \hat{g}_k(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{y(x_k + c_k e_1) - y(x_k - c_k e_1)}{2c_k} \\ \vdots \\ \frac{y(x_k + c_k e_p) - y(x_k - c_k e_p)}{2c_k} \end{bmatrix}$$

donde e_i es un vector con un 1 en la i -ésima entrada y 0's en las demás entradas y $c_k > 0$ define la magnitud de la diferencia. El par $\{a_k, c_k\}$ son llamadas las ganancias para el método. Las condiciones que deben cumplir estas ganancias son las siguientes:

para a_k debe cumplir $a_k > 0$, $a_k \rightarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$

para c_k debe cumplir $c_k > 0$, $c_k \rightarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 / c_k^2 < \infty$

La teoría sobre la convergencia del MDF es similar a la teoría de convergencia del algoritmo de AE para encontrar las raíces de una función. Sin embargo, debido a que se toma $\hat{g}_k(x_k)$ como estimador de $g_k(x_k)$ y al control de la ganancia c_k surgen algunas consideraciones que hay que justificar. En el caso del método para encontrar raíces se supone que los valores de entrada son estimadores insesgados.

La demostración de la convergencia de este algoritmo puede ser encontrada en varias referencias, una de ellas es Spall (10).

1.3 Método de Perturbaciones Simultáneas (MPS)

1.3.1 Antecedentes

Aunque en el problema que vamos a tratar en este trabajo no se refiere a un caso muy extenso (de dimensión p grande) es importante hacer mención del MPS para tener un panorama más completo de la aproximación estocástica.

En las dos secciones anteriores hemos expuesto dos presentaciones de la aproximación estocástica; en la inmediata anterior se mostró el método de diferencias finitas generalizado al caso multivariado, es decir, cuando la entrada es un vector en R^p con $p \geq 1$. Este método (MDF) tiene el inconveniente que cuando la dimensión del vector de entrada es grande también lo es el número de cálculos que hay que hacer para

obtener el gradiente en cada iteración. De ahí que surge esta versión de la aproximación estocástica llamada Método de Perturbaciones Simultáneas (MPS) por su relativa eficiencia respecto al MDF.

Al igual que con el MDF partimos del hecho de que la información con que se cuenta se refiere a mediciones de la función de pérdida $L(x)$ (con o sin ruido) y no del gradiente de dicha función. El MPS implementa una aproximación altamente eficiente del gradiente, dicha aproximación requiere de sólo dos mediciones de la función de pérdida independientemente del número de parámetros a ser optimizados (es decir, no importa cuán grande sea p). Esto difiere del algoritmo del MDF en el cual se necesitan de $2p$ número de mediciones de la función de pérdida para calcular el gradiente en cada iteración.

Se han hecho estudios sobre la eficiencia del MDF y el MPS y existe un resultado teórico en Spall (11) de 1992 que dice:

“Bajo condiciones generales razonables, el MPS y el MDF alcanzan el mismo nivel de efectividad para un número de iteraciones dado aun cuando el MPS utiliza p veces menos evaluaciones de la función de pérdida respecto al MDF.”

Este resultado teórico ha sido confirmado en diversos estudios numéricos aun cuando p es del orden de cientos. También es cierto que este resultado puede no cumplirse en algunos casos prácticos finitos porque éste está derivado de la teoría asintótica la cual se basa en condiciones que pueden ser violadas en algunas aplicaciones prácticas.

I.3.2 Descripción general del método de Perturbaciones Simultáneas

Continuando con el mismo problema de minimizar una función de pérdida $L = L(x)$ con $x \in R^p$. El algoritmo basado en el MPS trabaja de manera iterativa partiendo de un valor inicial. La aproximación del gradiente en este método es el siguiente:

$$\hat{g}_k(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{y(x_k + c_k \Delta_k) - y(x_k - c_k \Delta_k)}{2c_k \Delta_{k1}} \\ \vdots \\ \frac{y(x_k + c_k \Delta_k) - y(x_k - c_k \Delta_k)}{2c_k \Delta_{kp}} \end{bmatrix}$$

en donde $\Delta_k = (\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots, \Delta_{kp})^T$ es un vector, definido por el usuario, de perturbaciones aleatorias que satisfacen las siguientes condiciones: las $\{\Delta_{ki}\}$ deben ser independientes y simétricamente distribuidas alrededor de 0 con inversa de momentos finita $E(|\Delta_{ki}|^{-1})$ para toda k, i . El par $\{a_k, c_k\}$ son llamadas las ganancias para el método. Las condiciones que deben cumplir estas ganancias son las siguientes:

para a_k debe cumplir $a_k > 0, a_k \rightarrow 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$

para c_k debe cumplir $c_k > 0, c_k \rightarrow 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 / c_k^2 < \infty$

Una distribución para las Δ_{ki} que cumple esas condiciones en particular es la Bernoulli ± 1 , también podemos decir que dos distribuciones que no cumplen con las condiciones descritas son la Uniforme y la Normal (en particular la condición de la inversa de los momentos, la cual es crítica).

Podemos ver que todos los elementos de x son afectados de manera conjunta siendo necesario solamente dos mediciones de $y(x)$, sin embargo cada componente de $\hat{g}_k(x_k)$ está formado por la diferencia de estas dos mediciones y un radio que involucra los componentes individuales del vector de perturbación.

Algoritmo

A continuación veremos los pasos que sigue el algoritmo que utiliza el MPS.

Paso1. Determinar un valor inicial para \hat{x}_0 . $k = 0$.

Paso2. Determinar el vector de perturbaciones $\Delta_k = (\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots, \Delta_{kp})^T$

Paso3. Determinar los dos valores de la función de pérdida $L(\cdot)$ basado en el vector de perturbaciones simultáneas alrededor del valor actual de \hat{x}_0 (recordemos que $x \in R^p$).

$\hat{x}_k : L(\hat{x}_k + c_k \Delta_k)$ y $\hat{x}_k : L(\hat{x}_k - c_k \Delta_k)$ con c_k conforme se describió en el método.

Paso4. Determinar el gradiente:

$$\hat{g}_k(\hat{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{y(\hat{x}_k + c_k \Delta_k) - y(\hat{x}_k - c_k \Delta_k)}{2c_k} \\ \Delta_{k1}^{-1} \\ \Delta_{k2}^{-1} \\ \vdots \\ \Delta_{kp}^{-1} \end{bmatrix}$$

Se puede observar que el común numerador en cada una de las p entradas de $\hat{g}_k(x_k)$ refleja la perturbación simultánea de todos los componentes de x , en contraste con el MDF.

Paso5. Actualizar el valor estimado de x usando la forma estándar de la AE.

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - a_k \hat{g}_k(\hat{x}_k)$$

con a_k conforme se describió en el método.

Paso6. Regresar al Paso 2 con $k = k + 1$. Terminar el algoritmo si el cambio entre valores estimados de sucesivas iteraciones son muy pequeños o se ha alcanzado el máximo de iteraciones permitidas.

Capítulo II. Algoritmo de Aproximación Estocástica para la decisión de venta de acciones

II.1 Antecedentes

En México la institución autorizada para ser el foro en el cual se lleven a cabo las operaciones del mercado de valores es la Bolsa Mexicana de Valores, la cual es considerada como mercado listado.

La bolsa de valores en un país es de gran importancia ya que a través de ella se permite que tanto empresas como gobierno puedan financiar proyectos productivos y de desarrollo que generen empleo y riquezas. Por el otro lado, la gente que invierte o aporta ese dinero tiene acceso a una gran diversidad de opciones que permite diversificar el riesgo con el fin de obtener mejores rendimientos comparados con los instrumentos tradicionales.

El riesgo asociado a estos “posibles” rendimientos altos y la falta de información han sido, entre otros, una de las barreras para que la gente se acerque a este tipo de mercado.

Una vez que alguien con los suficientes conocimientos sobre el funcionamiento del mercado, obtiene acceso a éste, se enfrenta al problema de decidir en cuales acciones invertir, en qué momento comprar, en qué momento vender, que montos invertir, etc. Lo más sencillo para tratar de dar respuestas a estas interrogantes sería escuchar los consejos de los asesores y seguirlos al pie de la letra. Sin embargo, ciertas personas con el afán de ir aprendiendo y ganar experiencia prefieren correr los riesgos ellos mismos y tomar sus propias decisiones.

En este trabajo abordaremos el problema de decidir en qué momento es conveniente vender acciones que poseamos ya sea para realizar (hacer efectivas) las ganancias o bien para evitar el seguir perdiendo cuando el precio de la acción va cayendo. Se utilizará un método propuesto por Yin, G., Zhang, Q., Liu, F., Liu, R. H. y Cheng, Y. (1) y que se basa en la aplicación de la teoría de aproximaciones estocásticas, para lo cual el insumo principal es la serie histórica de precios de la acción en cuestión lo cual en la práctica es muy fácil de obtener.

II.2 Descripción del Problema

En el caso de la inversión en el mercado accionario una estrategia para la decisión de venta de acciones se puede plantear basándonos en precios objetivos, esto es, tomar decisiones de venta cuando el precio de la acción suba hasta alcanzar cierto precio objetivo o cuando el precio caiga a cierto valor para el cual estemos dispuestos a vender con el fin de minimizar las pérdidas ya generadas. La determinación óptima de estos valores o precios límite para maximizar las ganancias es de crucial importancia.

El problema entonces es determinar un intervalo (S_L, S_U) para el precio de la acción S . En dónde S_L es precio límite al cual estamos dispuestos a vender con el fin de minimizar las pérdidas y S_U es el precio al cual podemos vender esperando realizar las ganancias ya obtenidas hasta ese momento. En este caso, la búsqueda de estos valores S_L y S_U se harán de tal forma que se maximice la función de rendimientos obtenidos.

La motivación de los autores referidos al inicio de este capítulo para la utilización de la AE como herramienta para resolver este problema proviene del documento de Zhang (2) cuyo planteamiento se describe a continuación.

En Matemáticas Financieras, para el estudio de los precios de activos (en este caso acciones) se ha considerado que su comportamiento puede ser modelado como un movimiento Browniano Geométrico, (véase Merton (12)), el cual está determinado por dos parámetros: su rendimiento esperado y su volatilidad. Tales parámetros se asumen determinísticos en algunos análisis de precios de opciones dando como resultado un modelo que es bueno por un periodo de tiempo relativamente corto ya que podría no responder a cambios aleatorios a esos parámetros.

Zhang (2) en 2001 apunta que la tendencia general del mercado tiene gran impacto en los precios de las acciones individuales. Si el mercado en general va a la alza, muchas de las acciones suben; si el mercado va a la baja, muchas acciones lo siguen.

Con el fin de incorporar la tendencia general del mercado de acciones, Zhang planteó una modificación al modelo de movimiento Browniano para permitir que el rendimiento esperado y la volatilidad dependan de los movimientos del mercado en general. Para lo cual propuso introducir una cadena de Markov $\beta(\cdot)$ con estados finitos la cual pudiera representar la dirección general del movimiento del mercado.

Por ejemplo, se podría considerar $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$, donde $\beta_1(t) \in \{1,2\}$ sea una tendencia primaria (tendencia de varios años) y en la que 1 representa una tendencia alcista y 2 una tendencia a la baja; y $\beta_2(t) \in \{1,2\}$ sea una tendencia secundaria. En este caso la cadena de Markov sería

$$\beta(t) \in \{(2,2), (1,2), (2,1), (1,1)\}$$

De manera más general, Zhang formuló el siguiente modelo. Supongamos que $\beta(\cdot)$ es una cadena de Markov con estados finitos de tiempo continuo con un espacio de estados $E = \{1,2,\dots,m\}$ el cual podría representar las tendencias del mercado y otros factores económicos. Sea $S(t)$ el precio de una acción sin dividendos que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(\beta(t))dt + \sigma(\beta(t))dw(t), \\ S(0) = S_0 \quad \text{precio inicial} \end{cases}$$

donde $w(\cdot)$ es un movimiento Browniano estándar que es independiente de $\beta(\cdot)$. Éste es el modelo del comportamiento del precio de una acción basado en el movimiento browniano geométrico y puede verse como un modelo de movimiento browniano híbrido o como un modelo cambiante de Black-Scholes.

A través de una transformación, se obtiene que $S(t) = S_0 \exp(X(t))$ es una solución de la ecuación (1), donde

$$(2) \quad X(t) = \int_0^t \left(\mu(\beta(s)) - \frac{\sigma^2(\beta(s))}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(\beta(s)) dw(s)$$

Notemos que las tasas de rendimiento esperada $\mu(\cdot)$ y de volatilidad $\sigma(\cdot)$ dependen de la cadena de Markov.

Como se mencionó al principio, lo que se busca es una regla para poder tomar decisiones de venta de acciones de manera óptima. La regla que utilizaremos, como también se comentó, se basa en establecer un intervalo para el precio de la acción cuyos extremos indiquen por un lado, un precio objetivo (extremo superior) y un precio mínimo (extremo inferior). Una vez que el precio alcanza o rebasa alguno de los dos extremos es una señal de que es momento de vender las acciones para realizar las ganancias acumuladas o por el contrario para evitar seguir perdiendo.

Una manera de expresar esta regla es la siguiente:

$$\tau_0 = \inf \{t > 0 : S(t) \notin (S_L, S_U)\}$$

donde τ_0 es el momento de vender para $0 < S_L \leq S_0 \leq S_U < \infty$ específicos.

En su documento Zhang planteó la obtención de estos dos valores S_L y S_U de tal forma que se maximizara una función de rendimiento esperado. Adicionalmente, obtendría el periodo esperado (duración) y la probabilidad de ganar y perder dinero. La solución al problema así planteado consistía en resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales con dos valores en la frontera. Zhang probó la existencia y unicidad de la solución a esas ecuaciones.

Partiendo de este planteamiento del problema de decisión de venta y bajo diversos supuestos, Zhang mostró que en el caso en el cual la cadena de Markov $\beta(t)$ tiene sólo dos estados es posible obtener una regla (solución) explícita a través de la resolución de un problema con valores en la frontera de dos puntos.

Por otro lado, cuando la cadena tiene más de dos estados ($m > 2$) como resultado de pretender un estudio más detallado de las influencias de distintas tendencias que existen en el mercado, los cálculos se vuelven más complejos porque se tendrían un conjunto de problemas con valores en la frontera de dos puntos, y estas soluciones de forma cerrada son muy difíciles de obtener. Como resultado de tal complejidad se hace

atractiva la búsqueda de algoritmos factibles que alcancen una buena aproximación a la solución óptima.

Con el fin de reducir la complejidad y número de cálculos Yin, Liu y Zhang (3) desarrollaron una alternativa para la solución de este problema. Enfocándose principalmente en los valores frontera para la regla de venta, en lugar de la solución del conjunto de problemas con valores en la frontera de dos puntos, formularon el problema con un procedimiento de aproximación estocástica y propusieron una clase de algoritmo recursivo para su solución el cual veremos a continuación.

II.3 Algoritmo de aproximaciones estocásticas aplicado al problema.

En esta sección vamos a dar una descripción del algoritmo a utilizar, el cual se basa en la Aproximación Estocástica como herramienta para atacar el problema de toma de decisiones de ventas de acciones.

La alternativa propuesta por Yin, Liu y Zhang (3) en 2002 se apoyó en la aproximación estocástica (AE) desarrollando así un método recursivo de optimización en línea de implementación factible.

En el desarrollo de su documento estos autores subrayan que este método de aproximaciones estocásticas no requiere de un modelo preciso para el comportamiento de los precios de las acciones y que únicamente la serie de precios observados $S(t)$ es necesaria. Para fines de cálculos numéricos, para evitar posibles errores debido al uso de funciones exponenciales, en lugar de utilizar $S(t)$ propusieron el uso de $X(t) = \log(S(t)/S_0)$ en el algoritmo, que representa el rendimiento en el momento t suponiendo un esquema de interés continuo.

Como decíamos anteriormente, una manera de expresar una regla de venta era encontrar el momento τ en que:

$$\tau = \inf \{t > 0 : S(t) \notin (S_L, S_U)\}$$

Es decir, el momento en que el precio de la acción salga de un intervalo determinado por S_L y S_U .

Reescribiendo el problema utilizando $X(t)$, sean $z = (z^1, z^2)' \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ los nuevos límites, tenemos entonces que siempre que el precio de la acción rebese el límite superior $S_0 \exp(z^2)$ o el límite inferior $S_0 \exp(-z^1)$ es momento de vender la acción. El problema se convierte en

$$\tau = \inf \{t > 0 : S(t) \notin (S_0 \exp(-z^1), S_0 \exp(z^2))\}$$

O su equivalente

$$\tau = \inf \{t > 0 : X(t) \notin (-z^1, z^2)\}$$

Observemos que τ es independiente de S_0 , lo que se desea es encontrar los valores límites óptimos $z_* = (z_*^1, z_*^2)' \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ de tal forma que una función objetivo apropiada (en este caso el valor presente de la ganancia esperada) sea máxima. El problema se puede describir como:

$$(3) \quad \text{Problema } P \begin{cases} \text{Encontrar } z \text{ que maximice } \varphi(z) = E[\Phi(X(t)) \exp(-\tilde{\rho}\tau)], \\ z = (z^1, z^2)' \in (0, \infty) \times (0, \infty) \end{cases}$$

donde $\Phi(\cdot)$ es una función real elegida convenientemente (en este caso por ejemplo: $\Phi(x) = e^x - 1$ ya que deseamos que la función objetivo sea el valor presente de las ganancias obtenidas) y $\tilde{\rho} > 0$ es la tasa a la que se descuenta.

Este método o algoritmo fue diseñado para obtener los valores de las cotas inferior y superior $z = (z^1, z^2)'$ de (3) que hagan que se maximice las ganancias al momento de hacer la venta de las acciones.

La idea básica inmersa es construir una secuencia de estimaciones de los valores límites óptimos z_* , usando $z_{n+1} = z_n + \{\text{salto}\} \cdot \{\text{gradiente estimado de } \varphi(z)\}$, en donde el salto puede ser una secuencia decreciente de números reales o una constante positiva muy pequeña. La construcción del gradiente de $\varphi_z(z)$ es una parte importante en el algoritmo, en este caso se utilizará el modelo de diferencias finitas (MDF) para calcularlo.

El algoritmo comienza con una aproximación inicial de los valores límite $z_0 = (z_0^1, z_0^2)'$, construimos una secuencia de estimadores $\{z_n\}$ de manera recursiva. En la n -ésima iteración, con los valores límite fijos en $z_n = (z_n^1, z_n^2)' \in \mathfrak{R}^2$ ³, calculamos τ_n definido como la primera vez que $X(t)$ salió del intervalo $I_{z_n} = (-z_n^1, z_n^2)'$ por medio de:

$$(4) \quad \tau_n = \inf \{t > 0 : X(t) \notin I_{z_n}\}$$

Se define un proceso combinado $\xi_n = (X(\tau_n), \tau_n)$ que incluye los efectos aleatorios de $X(t)$ y los tiempos τ_n y lo denominaremos como la secuencia de ruido colectivo $\{\xi_n\}$. Sea $\varphi(\cdot, \cdot)$ una función real definida en $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2$ tal que $\varphi(z, \xi)$ es el valor con ruido observado de $\varphi(z)$ cuando los valores límite son z y el ruido es ξ . Asumimos además que $E\varphi(z, \xi) = \varphi(z)$ para cada z .

Usando estimaciones del gradiente del tipo de diferencias finitas con $Y_n^\pm = (Y_n^{\pm,1}, Y_n^{\pm,2})' \in \mathfrak{R}^2$ que representan los resultado de dos observaciones tomadas de datos reales en la n -ésima iteración, donde $Y_n^{\pm,i} = Y_n^{\pm,i}(z_n, \xi_n^\pm)$ con

³ Para efectos de la descripción del algoritmo se permitirá que el valor de z^1 y z^2 puedan tomar cualquier valor real y no sólo positivos.

$$(5) \quad Y_n^{\pm,i}(z_n, \xi_n^{\pm}) = \tilde{\varphi}(z \pm \delta_n e_i, \xi_n^{\pm}), \quad \text{para } i = 1, 2$$

donde δ_n es el tamaño del incremento de la diferencia finita, e_i el vector unitario estándar ($e_1 = (1,0)'$ y $e_2 = (0,1)'$), y ξ_n^{\pm} dos diferentes ruidos (colectivos) tomados de los valores $z \pm \delta_n e_i$, respectivamente. Por simplicidad en la notación, de ahora en adelante, usaremos ξ_n para representar tanto a ξ_n^+ y a ξ_n^- siempre que no haya confusión.

El gradiente estimado al tiempo n está dado por $D\tilde{\varphi}(z_n, \xi_n) \stackrel{def}{=} (Y_n^+ - Y_n^-)/(2\delta_n)$. Entonces el algoritmo de AE toma la forma de:

$$(6) \quad z_{n+1} = z_n + \varepsilon_n D\tilde{\varphi}(z_n, \xi_n),$$

donde $\{\varepsilon_n\}$ es una secuencia de números reales que satisface $0 \leq \varepsilon_n \rightarrow 0$ y $\sum_n \varepsilon_n = \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Y $\{\delta_n\}$ es una secuencia de números reales que satisface $0 \leq \delta_n \rightarrow 0$ y $\varepsilon_n / \delta_n^2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Además,

$$\limsup_n \frac{\varepsilon_{n+i}}{\varepsilon_n} < \infty, \quad \limsup_n \frac{\delta_{n+i}}{\delta_n} < \infty, \quad \limsup_n \frac{(\varepsilon_{n+i} / \delta_{n+i}^2)}{(\varepsilon_n / \delta_n^2)} < \infty \quad \text{para cualquier } i \geq 1.$$

II.3.1 Algoritmo con restricción

En la descripción anterior, consideramos que los valores de $z_n = (z_n^1, z_n^2)' \in \mathfrak{R}^2$ no tenían restricciones, en realidad lo que se necesita es que $z = (z^1, z^2)' \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. En la práctica, para asegurar que en las iteraciones estos valores se encuentren acotados utilizamos un esquema para truncar. Por lo que es necesario dar una versión con restricciones del algoritmo antes descrito.

Definamos las restricciones de tal forma que para toda n , $z^1 \in [\theta_l^1, \theta_u^1]$ y $z^2 \in [\theta_l^2, \theta_u^2]$, donde θ_l^i y θ_u^i para $i=1,2$ son valores predeterminados. De acuerdo con la restricción de que $z_n^i > 0$ elegimos cotas estrictamente positivas. Esto es, $\theta_l^i > 0$ para $i=1,2$. Entonces la región restringida queda:

$$B = [\theta_l^1, \theta_u^1] \times [\theta_l^2, \theta_u^2] \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$$

El algoritmo que resulta se convierte en uno con la siguiente restricción:

$$z_{n+1} = \prod [z_n + \varepsilon_n D\tilde{\varphi}(z_n, \xi_n)]$$

o por componentes

$$z_{n+1}^i = \prod_{[\theta_l^i, \theta_u^i]} [z_n^i + \varepsilon_n (D\tilde{\varphi}(z_n, \xi_n))^i] \quad \text{para } i=1,2$$

donde para cada valor de x

$$\prod_{[\theta_l^i, \theta_u^i]} x = \begin{cases} \theta_l^i, & \text{si } x < \theta_l^i \\ \theta_u^i, & \text{si } x > \theta_u^i \\ x, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para cada componente i , después de cada incremento $z_n^i + \varepsilon_n D\varphi(z_n^i, \xi_n)$ es comparado con las cotas θ_l^i y θ_u^i . Si este valor es menor que la cota inferior θ_l^i , tomamos θ_l^i ; si el valor es mayor a θ_u^i tomamos θ_u^i ; en otro caso se conserva el valor calculado.

II.3.2 Consideraciones del algoritmo

En esta sección se tratará de dar una breve descripción general del algoritmo en términos menos formales.

Como se comentó en la sección anterior (parte teórica) el algoritmo necesita como datos de entrada, entre otras cosas, una serie histórica de precios de la(s) acción(es) a analizar; aunque no se trabaja directamente con estos datos sino con la diferencia logarítmica de ellos (o logaritmo del cociente). Para esto primero debe elegirse el dato que va a funcionar como precio inicial S_0 y que corresponde al precio de compra de la acción; posteriormente hacer el cálculo de $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ para cada elemento de la serie de datos histórica.

Para el caso de las sucesiones $\{\varepsilon_n\}$ y $\{\delta_n\}$ tomando en cuenta las sugerencias del documento de Yin, Liu y Zhang (3) se están tomando de la siguiente forma:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+k_0} \quad \text{y} \quad \delta_n = \frac{1}{n^{1/6}+k_1} \quad \text{donde } k_0 \text{ y } k_1 \text{ son constantes positivas.}$$

Otra consideración que debe hacerse para la implementación es la de los límites para poder acotar los valores que se van generando en las iteraciones del algoritmo y que no se disparen ocasionando problemas en la convergencia o que caigan en una región para la cual no exista forma de obtener datos.

Para θ_l^1 que es el límite inferior puede proponerse, por ejemplo, el valor 0.01 lo que representaría aproximadamente una pérdida del 1% de la inversión en un periodo, para θ_u^1 el valor de 0.223 lo que representaría aproximadamente una pérdida del 25% de la inversión en un periodo; estos valores dependerían de la aversión al riesgo de cada persona. Para θ_l^2 puede proponerse, por ejemplo, el valor 0.01 lo que representaría aproximadamente una ganancia del 1% de la inversión en el periodo, para θ_u^2 el valor de 2.3 lo que representaría aproximadamente una ganancia de 897% de la inversión; obviamente este último valor es prácticamente imposible que se alcance, simplemente es para dar una cota superior a las ganancias.

Con lo anterior, hemos descrito con palabras el procedimiento que sigue el algoritmo y mencionamos algunas consideraciones que utilizaremos en el mismo.

En la siguiente sección veremos los análisis realizados sobre algunos de los parámetros del algoritmo que aquí hemos mencionado.

II.4 Pruebas de Sensibilidad

Durante la descripción del algoritmo encontramos que hay parámetros como lo son: el número de iteraciones en cada ejecución, los valores de inicio que puede tomar el algoritmo, los valores de las constantes k_0 y k_1 los cuales influyen directamente en su ejecución y en los resultados que arroja. Para probar el impacto que tienen dichos parámetros se hicieron una serie de ejecuciones cambiando, en cada ejecución, uno de los elementos mencionados y dejando fijos los demás con el fin de observar que tan sensible es el algoritmo a estos parámetros.

En el Anexo I. Pseudocódigo se encuentran las líneas que se desarrollaron como parte de este trabajo y con base en éstas fue posible crear una aplicación. Con ella se realizaron corridas del algoritmo cuyos resultados sirvieron como pruebas de la sensibilidad a cambios en los parámetros.

A continuación mostraremos los resultados.

II.4.1 Iteraciones

Uno de los aspectos más importantes es la decisión del número de iteraciones que el algoritmo debe ejecutar.

Como una prueba se corrió el algoritmo tomando los precios de una muestra de 34 acciones y del índice de la bolsa mexicana (IPC) para diferentes números de iteraciones. Partiendo de 200 iteraciones se fue incrementando el número de 100 en 100 hasta llegar a 1,500 para cada serie de precios.

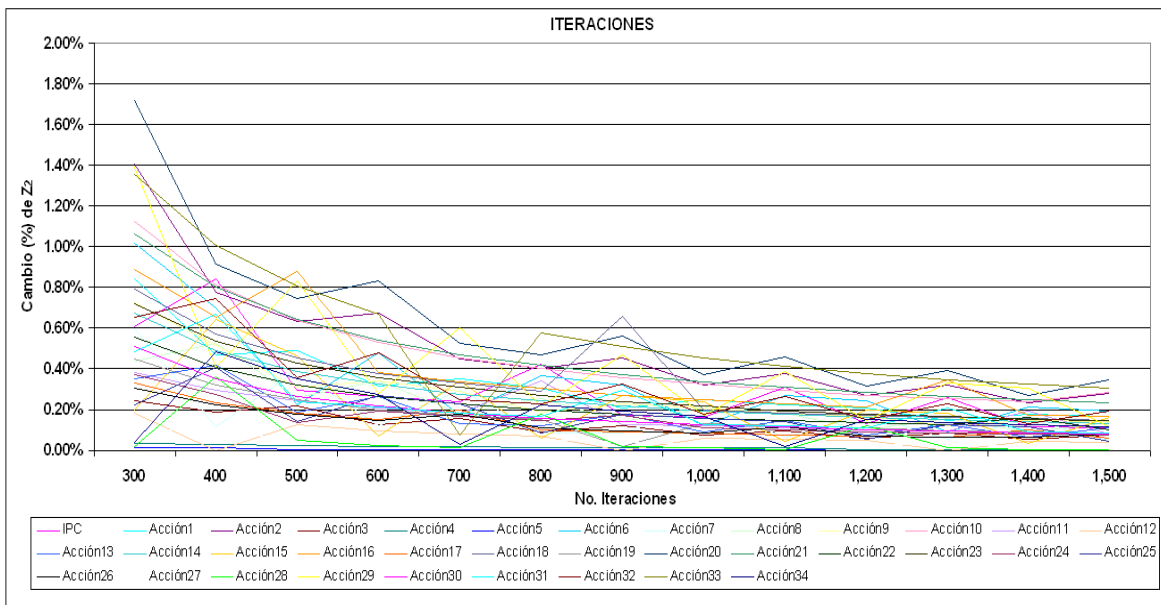


Figura 1 Cambios porcentuales absolutos en resultados de z^2 para diferente número de iteraciones y diferentes acciones.

Cómo se ha mencionado en la sección anterior, el objetivo del algoritmo es encontrar el valor óptimo del vector $z = (z^1, z^2)'$. Con esta prueba sobre el número de iteraciones, se obtuvieron 14 resultados de z para cada acción, en la gráfica (Figura 1) se muestran los cambios porcentuales entre un resultado de z^2 y el siguiente cuando se incrementa en 100 el número de iteraciones.

Como se puede apreciar el cambio porcentual en los resultados obtenidos va decayendo conforme el número de iteraciones aumenta como era de esperarse. Incluso a partir de 1,000 iteraciones dicho cambio, en la mayoría de las acciones, es menor al 0.5%. Lo que equivale a un rendimiento aproximado de 0.1348 %.

En la Tabla A1 del Anexo II. Tablas y Datos podemos ver los datos numéricos de los resultados de z^2 que forman esta gráfica. El periodo de información que se utilizó corresponde a los precios de cierre diarios de agosto de 2007 a agosto de 2008 (13).

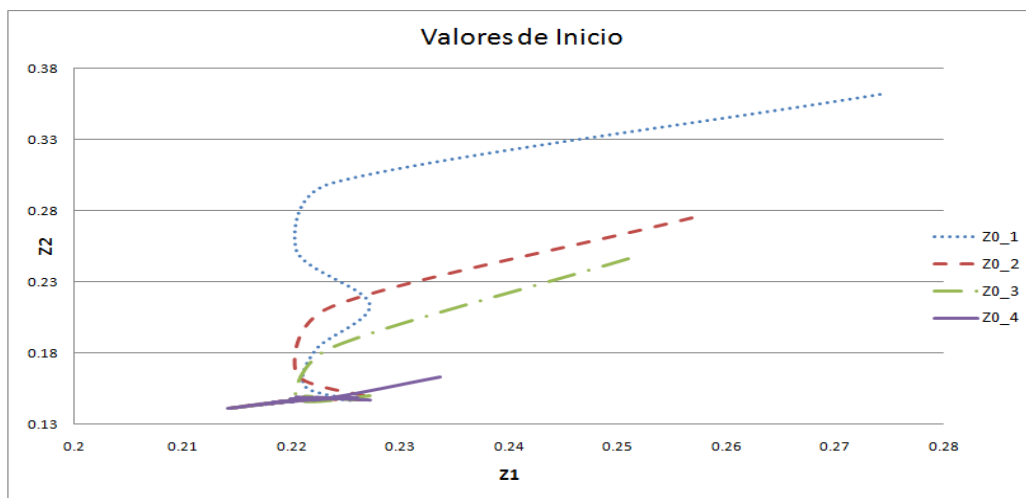
II.4.2 Valores de Inicio

Una de las características que la convergencia del algoritmo implica es que no importa desde que valores de inicio partamos el resultado del algoritmo converge a soluciones muy parecidas. Para poder verificar el comportamiento del algoritmo en este aspecto se generaron 15 corridas cada una con diferentes valores de inicio para la serie de precios del IPC.

En el siguiente gráfico (Figura 2) se muestra el comportamiento del algoritmo para cuatro valores de inicio diferentes. Cada línea muestra los valores que fue arrojando el algoritmo para cada corrida con los diferentes valores de inicio $z_0 = (z_0^1, z_0^2)'$.

Los valores de inicio que se utilizaron pueden identificarse en la gráfica como los puntos donde inician cada una de las líneas (extremo derecho).

Es claro en la figura que conforme el algoritmo va avanzando en iteraciones las soluciones encontradas cada vez se aproximan más y más a la misma región de soluciones no importando su origen. Como esperábamos el algoritmo converge a soluciones parecidas no importando los valores de inicio.



**Figura 2 Valores que toma el algoritmo partiendo de 4 diferentes valores de inicio de z^1 y z^2 .
Serie de precios del IPC (agosto 07 – agosto 08)**

En la Tabla A2 del Anexo II. Tablas y Datos podemos ver las soluciones encontradas para cada uno de estos valores de inicio.

II.4.3 Constantes k_0 y k_1

Otros parámetros que intervienen en el algoritmo son las constantes k_0 y k_1 para las sucesiones:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+k_0} \quad \text{y} \quad \delta_n = \frac{1}{n^{1/6}+k_1}$$

Para obtener el impacto en el algoritmo debido a cambios en estas constantes se hicieron pruebas 7 acciones.

El procedimiento consistió en mantener fija la constante $k_1 = 10$ e ir variando los valores de k_0 . Los valores tomados fueron desde 5 hasta 30 cambiando de 5 en 5.

En la siguiente gráfica (Figura 3) están representados los cambios porcentuales en los valores de salida de z^2 derivados del cambio en la constante k_0 para las 7 series de acciones. En la Tabla A3 y la Tabla A4 del Anexo II encontramos los datos numéricos.

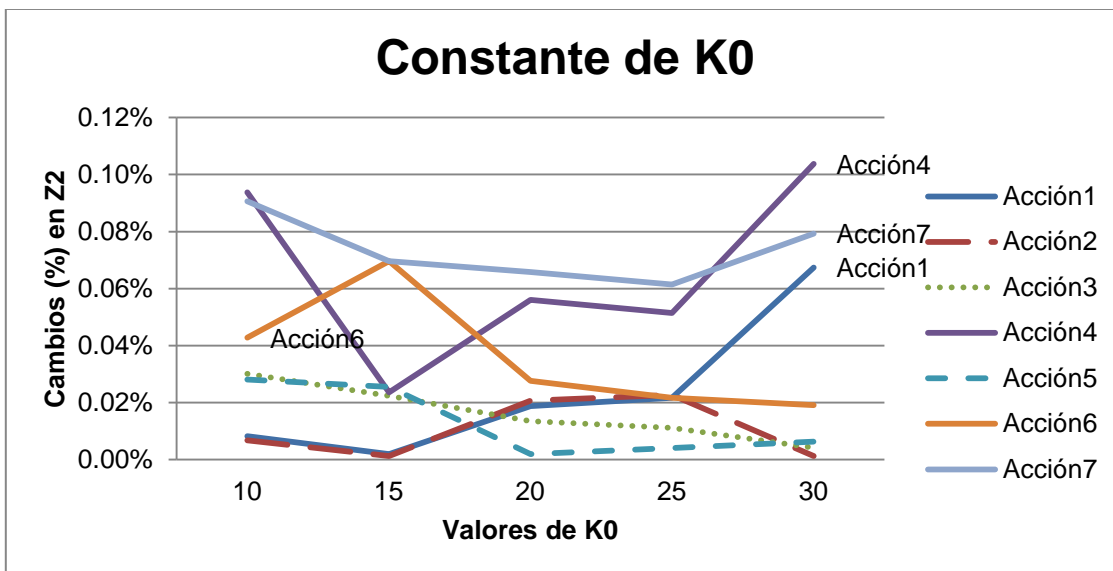


Figura 3. Cambios porcentuales en los valores de salida de z^2 para un conjunto de acciones debido a cambios en el valore de k_0 .

En la Figura 3 podemos apreciar que los cambios en los resultados de z^2 aunque un tanto desordenados no rebasan más del 0.11% para las siete acciones de la muestra. Estos cambios por sus magnitudes no son muy significativos.

Por el otro lado, para el caso de la constante k_1 se hizo lo mismo manteniendo fijo el valor de $k_0 = 10$ y variando la primera desde 5 hasta 30 de 5 en 5. Obteniendo los siguientes resultados.

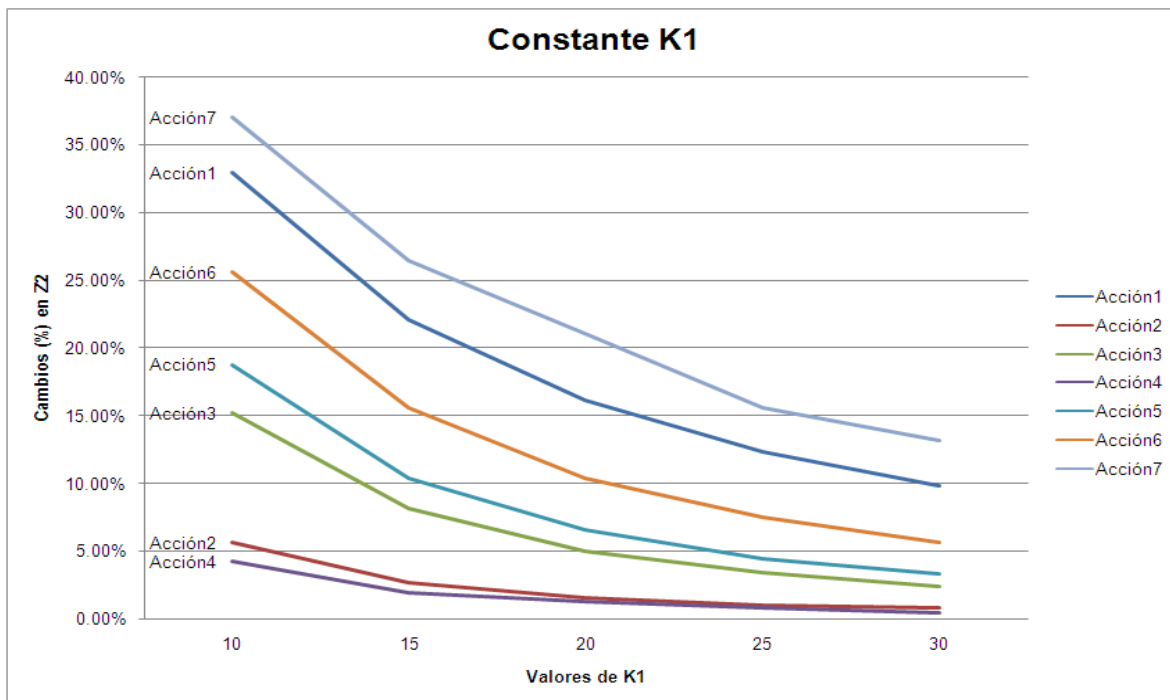


Figura 4. Cambios porcentuales en los valores de salida de z^2 para un conjunto de acciones debido a cambios en el valor de k_1 .

En la Figura 4 podemos apreciar que el algoritmo es muy sensible a los cambios en esta constante, en algunos casos el cambio porcentual de los resultados debido a un cambio en el valor de k_1 es casi del 40% en términos absolutos. En la Tabla A5 y Tabla A6 del Anexo II encontramos los datos numéricos.

Lo anterior muestra que el algoritmo es más sensible a cambios en los valores de la constante k_1 que a los cambios en k_0 .

Capítulo III. Simulaciones y discusión de resultados

III.1. Simulación para el IPC

A continuación mostraremos la corrida del algoritmo para la serie de datos del IPC (Índice de Precios y Cotizaciones) que es el indicador más relevante en el mercado accionario mexicano. Aun cuando el IPC no es una acción *per se* que se pueda comprar o vender existe el NAFTRAC⁴ el cual tiene como objetivo reproducir el comportamiento de este índice, esta acción cotiza en los mercados bursátiles como cualquier otra. Por lo anterior, es válido que demos el tratamiento de acción al IPC y analicemos su serie de precios.

Empezaremos por establecer los parámetros que utiliza el algoritmo:

$\theta_l^1 = 0.01$ y $\theta_u^1 = 0.223$ Intervalo de ejecución para z^1

$\theta_l^2 = 0.009$ y $\theta_u^2 = 2.33$ Intervalo de ejecución para z^2

Recordemos que $[\theta_l^1, \theta_u^1]$ es un intervalo para los valores que puede tomar z^1 , si durante la ejecución del algoritmo z^1 toma un valor fuera del intervalo correspondiente, dicho valor se ajusta a alguno de los extremos del intervalo, según sea el caso. Lo mismo sucede para valores de z^2 con el intervalo $[\theta_l^2, \theta_u^2]$.

El valor $\theta_l^1 = 0.01$ equivale a una tasa de rendimiento en interés compuesto del 1% efectivo en el periodo, para $\theta_u^1 = 0.223$ su equivalencia es del 25% aproximadamente. Lo anterior significa que la máxima pérdida aceptada es de 25%. Por otro lado, $\theta_l^2 = 0.009$ equivale a una tasa del 0.9% y $\theta_u^2 = 2.33$ equivale a 927%.

Número de Iteraciones 1,000

⁴ El NAFTRAC es un instrumento emitido por Nacional Financiera (Nafinsa) en abril de 2002 y cuyo objetivo es reproducir el comportamiento del IPC de la Bolsa Mexicana de Valores, cotiza en los mercados como cualquier otra acción sólo que se encuentra avalado por una canasta de acciones.

Después del análisis de la sección anterior se concluye que este puede ser un número de iteraciones conveniente ya que un mayor número implicaría tiempo adicional de ejecución obteniendo prácticamente resultados muy similares.

$$z_0^1 = \max(x_i) / 2 \quad \text{Valor inicial en cada iteración para } z^1.$$

$$z_0^2 = \text{abs}(\min(x_i)) / 2 \quad \text{Valor inicial en cada iteración para } z^2.$$

En donde $\max(x_i)$ es el máximo de las $x_i = \log(S(i)/S_0)$ en cada ejecución del algoritmo, por lo que estos valores de inicio pueden cambiar conforme se agregan datos a la serie de precios observados. De manera similar $\min(x_i)$ es el mínimo de las $x_i = \log(S(i)/S_0)$.

Para las constantes k_0 y k_1 los valores elegidos son

$k_0 = 10$ y $k_1 = 10$ quedando las sucesiones en cada iteración como sigue

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+10} \quad \text{y} \quad \delta_n = \frac{1}{n^{1/6}+10}$$

Ambas definiciones cumplen con las condiciones descritas en la descripción del algoritmo.

Con todo lo anterior hemos definido los parámetros de nuestra corrida, sólo falta elegir el periodo de las serie de datos de los precios del IPC:

Para este primer ejemplo se tomó como precio inicial el del día 01/08/2007, el IPC en esa fecha estaba en $S_0 = 30,659.66$ unidades (13). Esto a manera de ver el comportamiento que hubiera tenido de haberlo utilizado a partir de esa fecha. La Tabla A7 del Anexo II muestra los valores de la serie.

En esta corrida, el algoritmo irá agregando datos después de cada ejecución. Se agrega información cada dos días de los últimos dos datos de cierre nuevos, y se estará evaluando si es o no el momento de vender. El primer resultado que arroja el algoritmo es vender el índice al cierre del 04/10/2007 cuando el índice esta en 31,178.84 unidades y se obtendría un rendimiento en el periodo de 1.69% que en términos anuales representa un 9.91%. En la siguiente gráfica (Figura 5) se muestra el comportamiento de la serie en ese lapso de tiempo.

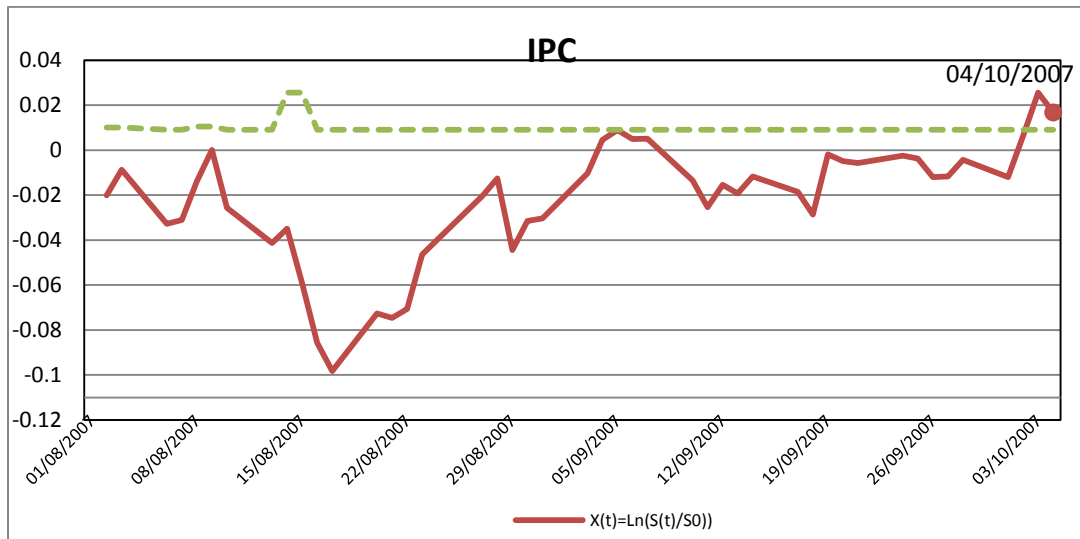


Figura 5 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie. Primera señal

Algo que hay que considerar al momento de decidir vender la acción es la existencia de comisiones cuando se comprar o se vende. Por esta razón podríamos pensar que el 1.69% de rendimiento tal vez no es suficiente respecto de la comisión que nos van a cobrar y entonces decidamos esperar un poco más antes de vender las acciones.

Suponiendo que no vendemos las acciones y esperamos otro momento, la siguiente señal para vender nos la da el 8/10/2007 cuando el IPC está en 31,540.94 unidades generando un rendimiento en el periodo de 2.874% y en términos anuales el 16.187%. Esta parece una mejor oportunidad de venta puesto que el rendimiento es mejor.

| Fecha | IPC (unidades) | Rendimiento | |
|------------|----------------|-------------|---------|
| | | Periodo | Anual |
| 04/10/2007 | 31,178.84 | 1.6934% | 9.906% |
| 08/10/2007 | 31,540.94 | 2.8744% | 16.187% |
| 10/10/2007 | 31,801.69 | 3.7249% | 20.693% |
| 18/10/2007 | 32,721.82 | 6.7260% | 35.045% |

Tabla 1. Primeras 4 señales del algoritmo que indican la venta del índice

En la Tabla 1 anterior, mostramos las primeras 4 señales de venta que arroja el algoritmo y sus respectivos rendimientos.

Con los resultados anteriores podemos observar que en ocasiones una primera señal del algoritmo debe ser confirmada con los resultados de días subsecuentes. En la Figura 6 tenemos los resultados de z^2 conforme se van agregando datos a la serie de los precios.

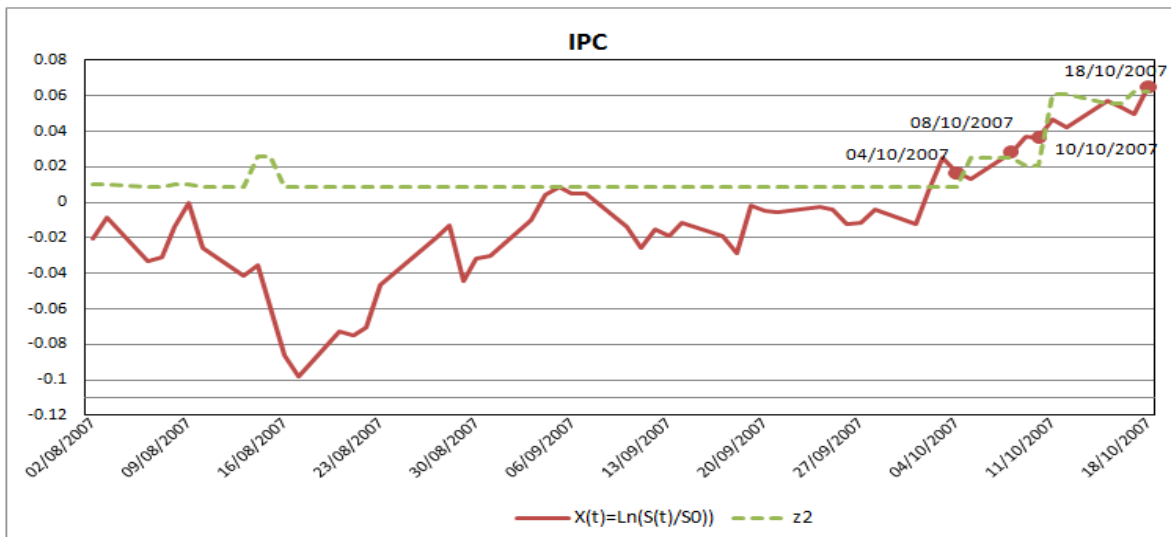


Figura 6 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie. Primeras cuatro señales

La línea punteada es el valor de z^2 para cada día por lo que cuando la línea del IPC cruza por arriba o se mantiene arriba de la punteada es una señal que da el algoritmo para vender la acción. En la misma figura se observan las cuatro fechas en las que el algoritmo indica la de venta.

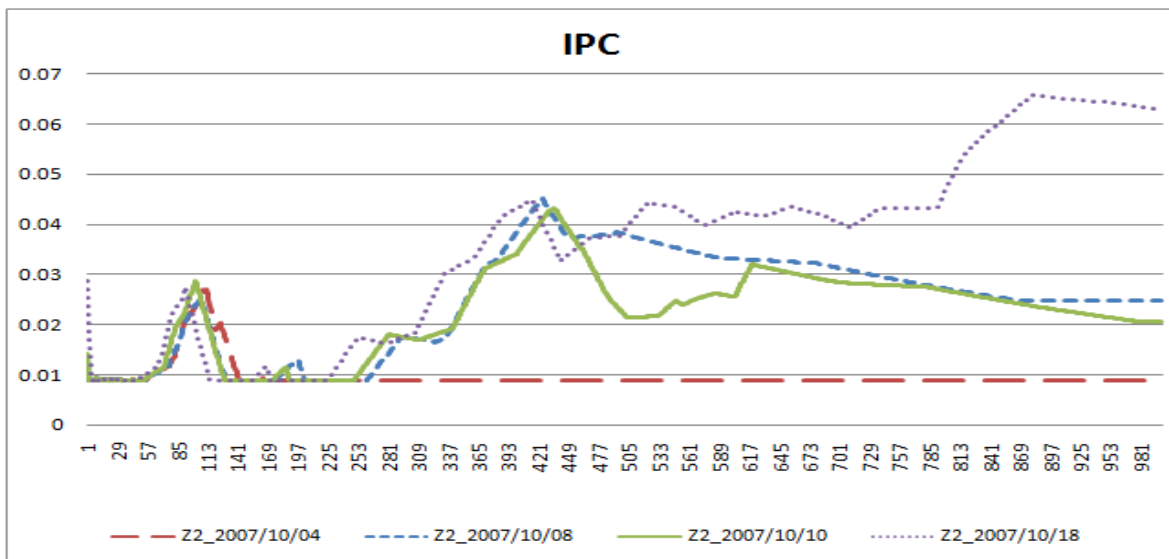


Figura 7 Resultados de z^2 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para cada fecha señalada por el algoritmo para vender.

En la Figura 7 podemos ver cómo el algoritmo va calculando cada uno de los valores de z^2 a través de las 1,000 iteraciones para las fechas de la Tabla 1 anterior. Además, se observa cómo al contar con más información de la serie de datos, los resultados se van ajustando incorporando la información nueva.

Los cuatro resultados anteriores del algoritmo señalan la venta de la acción por haber superado el valor de z^2 . Ahora bien, supongamos que a pesar de las señales de venta hubiéramos querido mantener la inversión en las acciones.

En fechas posteriores el IPC tuvo caídas significativas. Veamos cómo funciona el algoritmo en estos casos.

La primer señal de venta del algoritmo por una disminución en el precio la da el 6/11/2007 cuando el IPC vale 30,157.69 y se obtendría un rendimiento negativo en el periodo de -1.64% que en términos anuales representa un -5.943%. En la siguiente gráfica (Figura 8) se muestra el comportamiento de la serie en ese lapso de tiempo. En la misma podemos ver que el algoritmo va obteniendo diferentes valores de z^1 pero en ningún caso cruza la línea que representa al movimiento del IPC, excepto para la fecha del 6/11/2007 que mencionamos anteriormente.

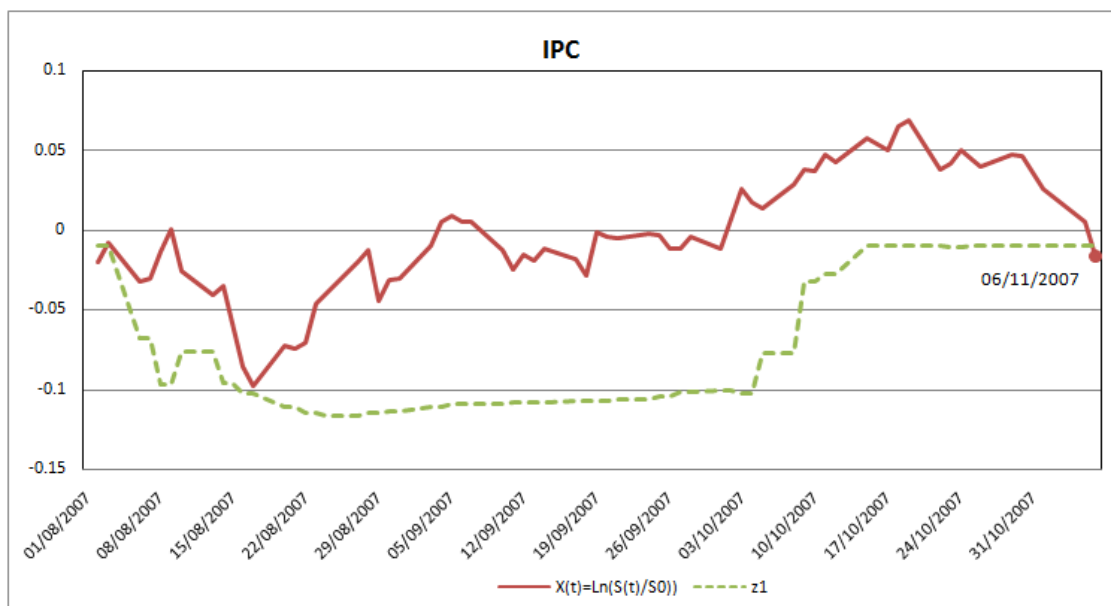


Figura 8 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valor de z^1 para la misma serie (IPC). Primer evento.

Pensando que esta primera señal del algoritmo no representa una pérdida tan grande y que queremos esperar un poco más, veamos que sucede si mantenemos las acciones. La segunda señal aparece inmediatamente, a la siguiente ejecución. Recordemos que el algoritmo se ejecuta de nuevo después de agregar dos precios de cierre posteriores a la fecha del último.

De igual manera que en el ejemplo anterior, veamos las siguientes señales que arroja el algoritmo con sus respectivos resultados.

| Fecha | IPC (unidades) | Rendimiento | |
|------------|----------------|-------------|----------|
| | | Periodo | Anual |
| 06/11/2007 | 30,157.69 | -1.6372% | -5.943% |
| 08/11/2007 | 29,582.21 | -3.5142% | -12.198% |
| 12/11/2007 | 29,158.86 | -4.8950% | -16.089% |
| 14/11/2007 | 29,484.78 | -3.8320% | -12.538% |
| 16/11/2007 | 29,170.90 | -4.8558% | -15.420% |

Tabla 2. Primeras 5 señales del algoritmo que indican la venta del índice cuando existen caídas en el IPC

Como podemos ver en la Tabla 2 el algoritmo da señales consecutivas para la venta del IPC. En la Figura 9 tenemos la serie del comportamiento del IPC y de los valores de z^1 que genera el algoritmo, a partir del 6/11/2007 los puntos $X(t)$ están debajo de los

valores de z^1 . En caso de no vender la acción y esperar, por ejemplo, hasta el día 27/11/2007 cuando el IPC vale 27,883.01 unidades, tendríamos una pérdida en el periodo de -9.0564% que equivale al -25.145% anual. Sin embargo, aunque en la gráfica se ve que después del 27/11/2007 el movimiento es positivo no estamos seguros de que pasaría después. Haciendo caso al algoritmo podríamos reducir pérdidas.

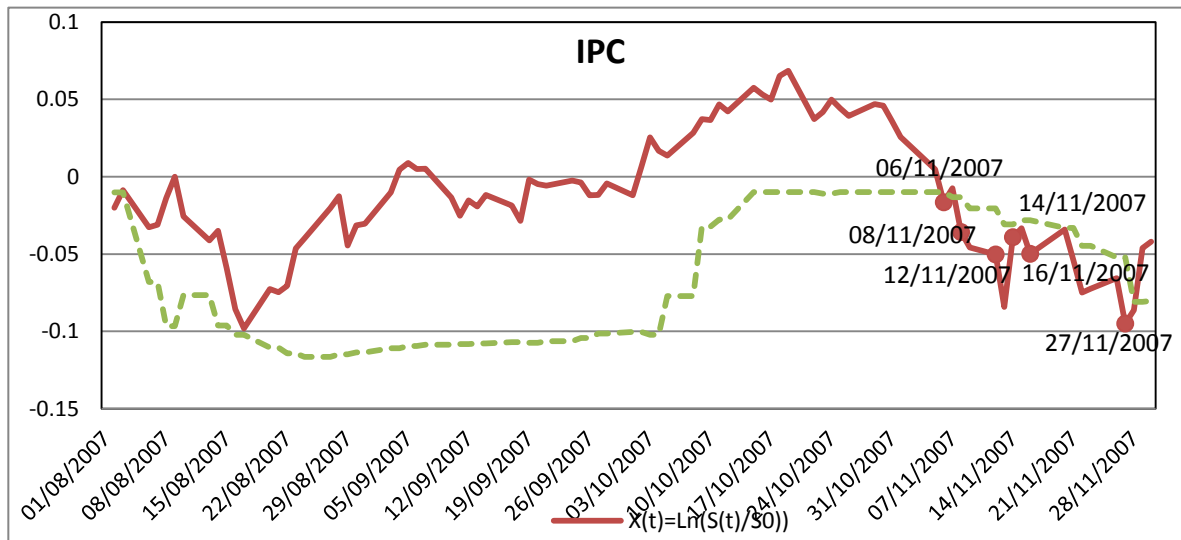


Figura 9 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^1 para la misma serie (IPC). Cinco eventos.

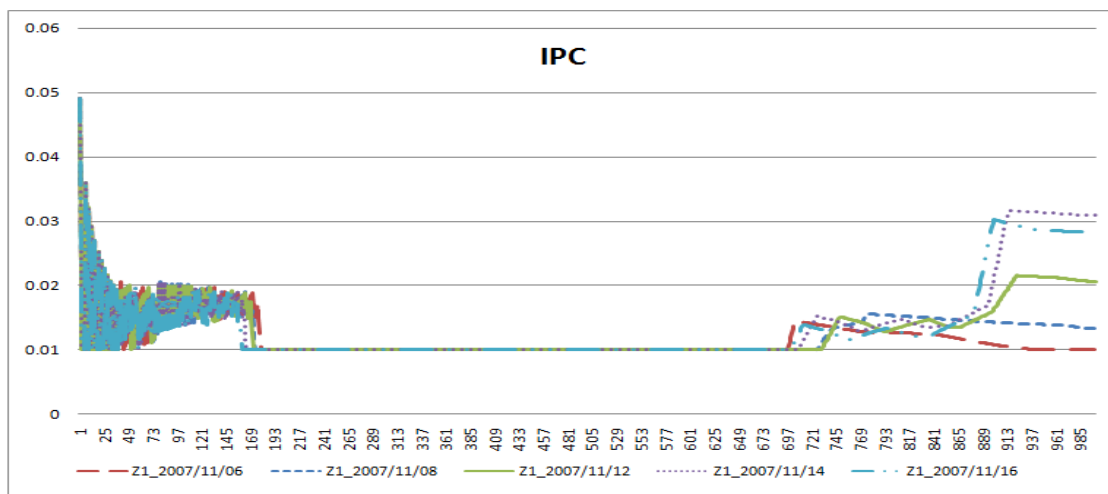


Figura 10 Resultados de z^1 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para cada fecha señalada por el algoritmo para vender.

En la Figura 10 se muestran los valores de z^1 que fueron tomando en cada una de las 1,000 iteraciones. Las corridas que se observan son las que corresponden a las fechas en las que el algoritmo da señales de venta y que se listan en la Tabla 2 anterior.

Los valores que se van generando en las primeras iteraciones son muy parecidas en las 5 corridas, después pasan varias iteraciones en las que z^1 se queda en 0.01 y a partir de las 700 iteraciones, aproximadamente, para cada corrida se genera una trayectoria diferente la cual es el resultado de la nueva información que se va agregando y que es incorporada al algoritmo.

Simulación del IPC para otro periodo

Veamos ahora el comportamiento del algoritmo para un periodo de fechas diferentes. Volvamos a establecer los parámetros de inicio para esta nueva corrida:

$$\theta_l^1 = 0.01 \text{ y } \theta_u^1 = 0.223 \quad \text{Intervalo de ejecución para } z^1$$

$$\theta_l^2 = 0.009 \text{ y } \theta_u^2 = 2.33 \quad \text{Intervalo de ejecución para } z^2$$

$$z_0^1 = \max(x_i) / 2 \quad \text{Valor inicial en cada iteración para } z^1.$$

$$z_0^2 = \text{abs}(\min(x_i)) / 2 \quad \text{Valor inicial en cada iteración para } z^2.$$

$$k_0 = 10 \text{ y } k_1 = 10 \quad \text{quedando las sucesiones en cada iteración como sigue}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+10} \text{ y } \delta_n = \frac{1}{n^{1/6} + 10}$$

Para este segundo ejemplo se tomó como precio inicial el primer día hábil de 2008, es decir, el 02/01/2008, el IPC en esa fecha estaba en $S_0 = 29,536.83$ unidades (13). Esto a manera de ver el resultado que se hubiera tenido de haberlo utilizado a partir de esa fecha. La Tabla A 8 del Anexo II. Tablas y Datos muestra los valores de la serie.

En esta corrida, como en la anterior, el algoritmo irá agregando datos después de cada ejecución cada dos fechas y se estará evaluando si es o no el momento de vender. El primer resultado que arroja el algoritmo es casi inmediato, vender al cierre del 04/01/2008 cuando el índice esta en 28,860.78 unidades y se obtendría un rendimiento en el periodo de -2.29% que en términos anuales representa un 98.45%. Esta señal no se considerará ya que el algoritmo tan sólo cuenta con un par de datos lo que hace que este

resultado sea muy apresurado. Algo parecido sucede con la segunda señal de venta para el 22/01/2008 cuando el IPC tiene un valor de 25,284.88 unidades, el algoritmo en ese momento cuenta con 15 datos.

Las siguientes tres señales parecen más interesantes, la primera sucede para el 26/02/2008 cuando el valor del IPC es de 29,692.88 lo que representaría un rendimiento en el periodo de 1.4424% que equivaldría al 9.827% en términos anuales. Este rendimiento positivo es muy bajo debido considerando las comisiones que se cobran por la compra y venta de acciones. La siguiente señal se da para el 03/04/2008 cuando el IPC vale 31,467.87 unidades, con un rendimiento en el periodo de 6.5377% y en términos anuales de 28.122%. Inmediatamente, en la siguiente iteración aparece otra señal de venta para el 07/04/2008 cuyo valor del IPC para esa fecha es de 31,545.37 unidades, con un rendimiento en el periodo de 6.8001% y anual de 27.981%.

En la siguiente gráfica (Figura 5) se muestra el comportamiento de la serie en ese lapso de tiempo.

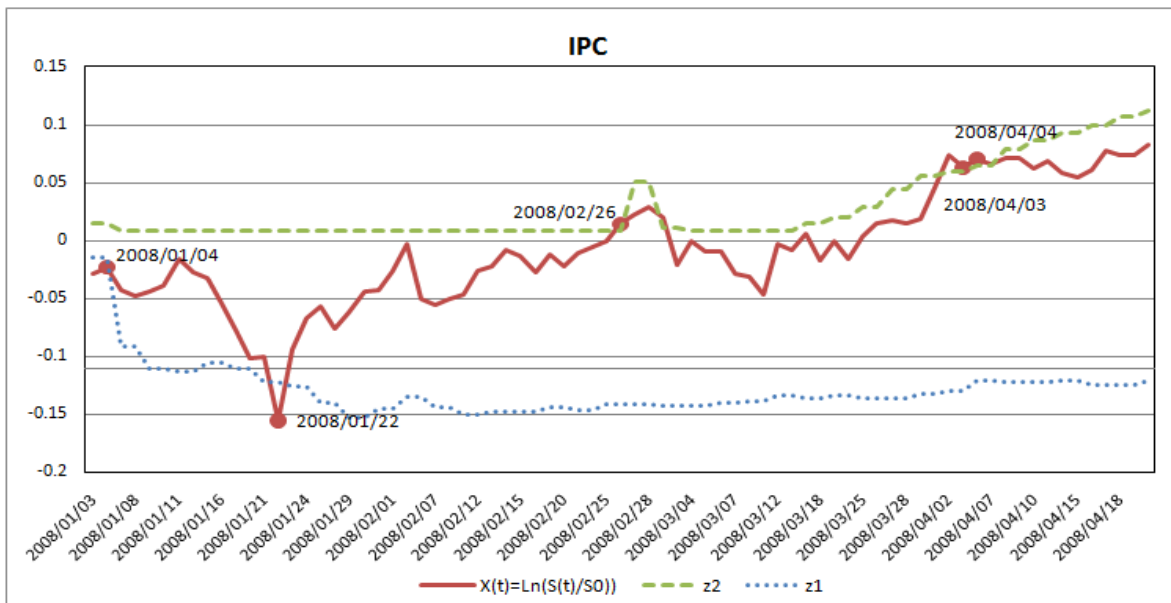


Figura 11 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie. Primeras cinco señales.

En la Tabla 3, mostramos las primeras 5 señales de venta que arroja el algoritmo y sus respectivos rendimientos.

| Fecha | IPC (unidades) | Rendimiento | |
|------------|----------------|-------------|----------|
| | | Periodo | Anual |
| 04/01/2008 | 28,860.78 | -2.2888% | -98.451% |
| 22/01/2008 | 25,284.88 | -14.3954% | -93.905% |
| 26/02/2008 | 29,962.88 | 1.4424% | 9.827% |
| 03/04/2008 | 31,467.87 | 6.5377% | 28.122% |
| 07/04/2008 | 31,545.37 | 6.8001% | 27.981% |

Tabla 3 Primeras 5 señales del algoritmo que indican la venta del índice. Segundo periodo.

Con este par de ejercicios con los datos del IPC podemos decir que el algoritmo da señales congruentes con lo que parece que está sucediendo con el valor del índice en el mercado.

III.2. Simulación para otras acciones

III.2.1 Simulación acción: ELEKTRA

A continuación mostraremos la corrida del algoritmo para la serie de precios de la acción de Elektra la cual está listada en el mercado accionario mexicano.

Empezaremos por establecer los parámetros que utiliza el algoritmo:

$$\theta_l^1 = 0.01 \text{ y } \theta_u^1 = 0.223 \text{ Intervalo de ejecución para } z^1$$

$$\theta_l^2 = 0.009 \text{ y } \theta_u^2 = 2.33 \quad \text{Intervalo de ejecución para } z^2$$

Número de Iteraciones 1,000

$$z_0^1 = \max(x_i) / 2 \quad \text{Valor inicial en cada iteración para } z^1.$$

$$z_0^2 = \text{abs}(\min(x_i)) / 2 \quad \text{Valor inicial en cada iteración para } z^2.$$

Para las constantes k_0 y k_1 los valores elegidos son

$$k_0 = 10 \text{ y } k_1 = 7 \quad \text{quedando las sucesiones en cada iteración como sigue}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+10} \text{ y } \delta_n = \frac{1}{n^{1/6} + 7}$$

Ambas definiciones cumplen con las condiciones descritas en la descripción del algoritmo.

Para este ejemplo se tomó también como precio inicial el del día 01/08/2007, en pesos $S_0 = 214.06$ (13). Veamos el comportamiento que hubiera tenido el algoritmo de haberlo utilizado a partir de esa fecha. La Tabla A9 del Anexo II muestra los valores de la serie.

Como en el ejemplo anterior, el algoritmo irá agregando datos después de cada ejecución. Se agrega información cada dos días de los últimos dos datos de cierre nuevos, y se estará evaluando si es o no el momento de vender. El primer resultado que arroja el algoritmo es vender la acción de ELEKTRA al cierre del 13/08/2007 cuando la acción vale 205.57 pesos y se obtendría un rendimiento en el periodo de -3.966% que en términos anuales representa un -70.3% que parece muy alto por el plazo tan corto. Considerando que en este momento el algoritmo no cuenta con suficiente información (tan sólo ha utilizado 8 precios) es conveniente no hacer caso de este primer aviso.

La segunda señal se da el 01/11/2007 cuando el precio de la acción es de 244.50 pesos lo que significa un rendimiento en el periodo de 14.2203% y en términos anualizados es 68.249%. La siguiente señal ocurre inmediatamente a la siguiente ejecución para el 06/11/2007 cuando el precio de ELEKTRA es de 248.99 pesos lo que en rendimiento por periodo implica un 16.3179% y anual de 75.241%. En la siguiente gráfica (Figura 12) se muestra el comportamiento de la serie en ese lapso de tiempo.

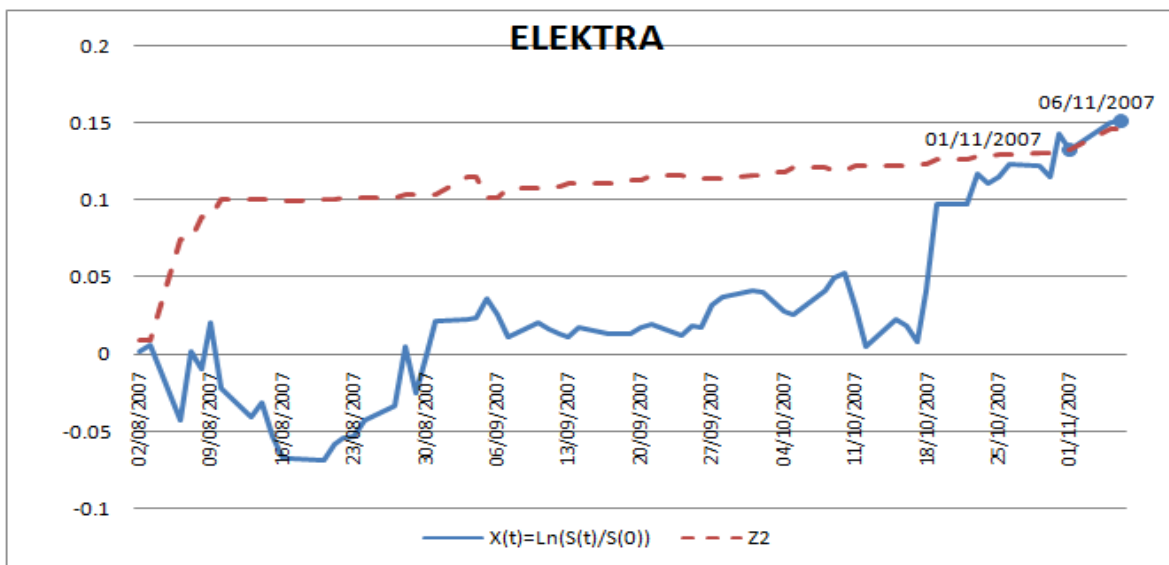


Figura 12 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (ELEKTRA). Dos eventos.

A continuación, en la Tabla 4 mostramos las primeras 5 señales de venta que arroja el algoritmo y sus respectivos rendimientos. Sin considerar, como se mencionó anteriormente la del 13/08/2007.

| Fecha | ELEKTRA | Rendimiento | |
|------------|---------|-------------|----------|
| | | Periodo | Anual |
| 01/11/2007 | 244.50 | 14.2203% | 68.249% |
| 06/11/2007 | 248.99 | 16.3179% | 75.241% |
| 05/12/2007 | 290.00 | 35.4760% | 138.095% |
| 07/12/2007 | 302.80 | 41.4557% | 165.228% |
| 11/12/2007 | 296.00 | 38.2790% | 142.036% |

Tabla 4. Primeras 5 señales del algoritmo que indican la venta de la acción ELEKTRA

En la Figura 13 tenemos los resultados de z^2 conforme se van agregando datos a la serie de los precios. La línea punteada es el valor de z^2 para cada día por lo que cuando la línea de ELEKTRA cruza por arriba o se mantiene arriba de la punteada es una señal que da el algoritmo para vender la acción. En la misma figura se observan las cinco fechas en las que el algoritmo indica la de venta.

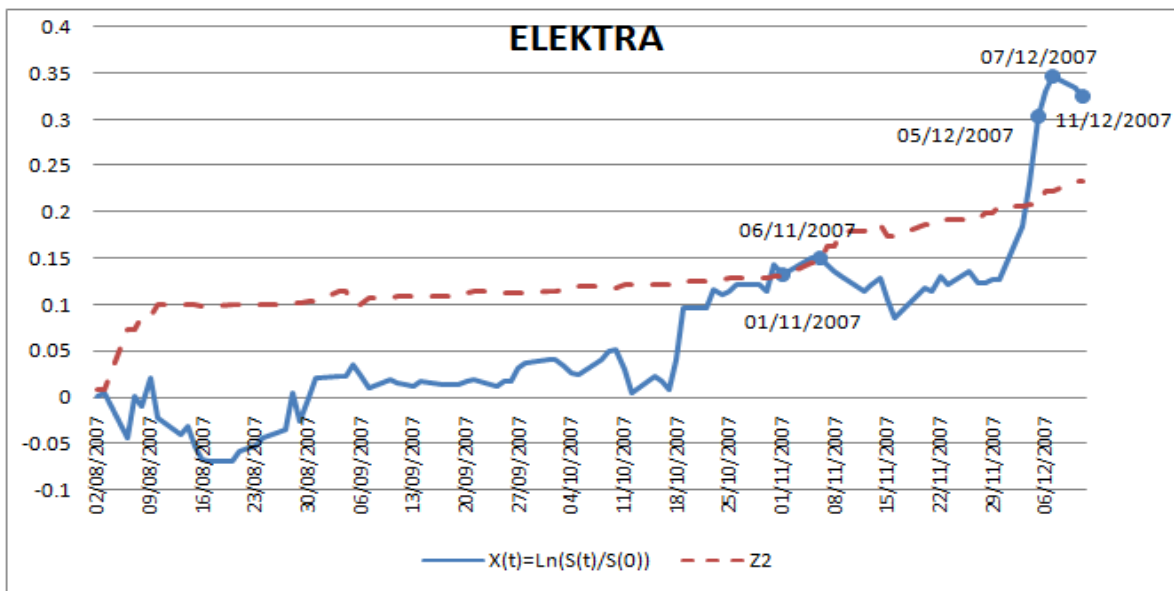


Figura 13 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (ELEKTRA). Cinco eventos.

En la Figura 14 podemos ver cómo el algoritmo va calculando cada uno de los valores de z^2 a través de las 1,000 iteraciones. Además, se observa cómo al contar con más información los resultados se van ajustando.

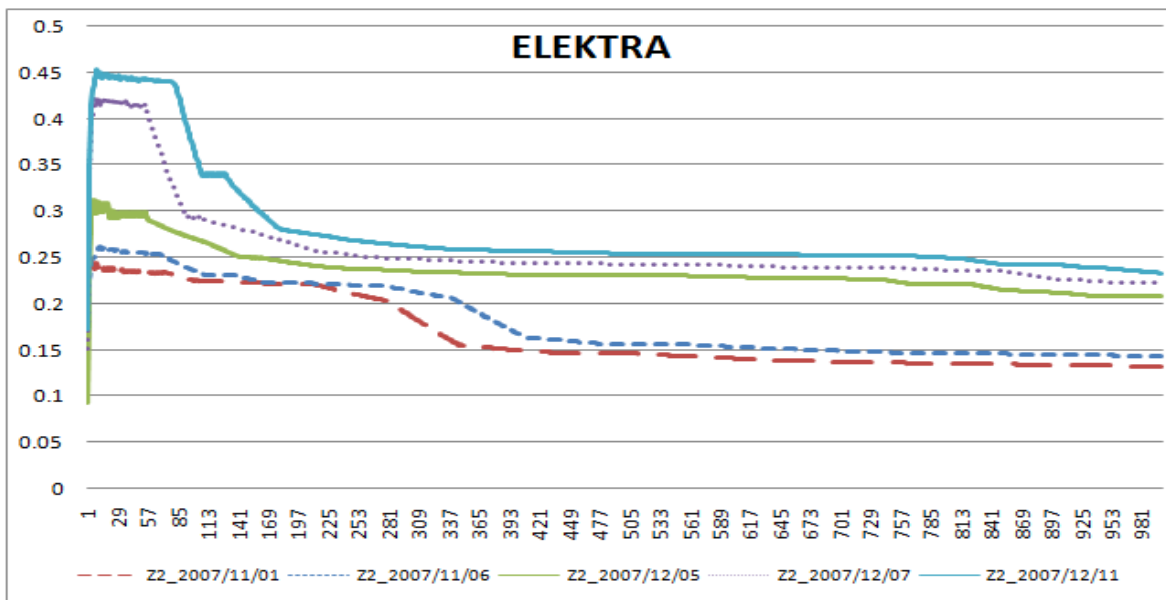


Figura 14 Resultados de z^2 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para cada fecha señalada por el algoritmo para vender (ELEKTRA).

Aun cuando las señales para los días de noviembre parecen muy claras uno podría pensar en mantener la acción para seguir ganando y en efecto, de haber mantenido la acción de ELEKTRA un par de días más, el rendimiento hubiera podido ser de 56.498% en el periodo y 197.256% en términos anuales. Sin embargo, eso no lo sabemos sino a posteriori, el algoritmo es simplemente una herramienta más, al final de cuentas el nivel de aceptación del riesgo de cada uno nos hace decidir si vender o no.

III.2.2 Simulación acción: PEÑOLES

A continuación mostraremos la corrida del algoritmo para la serie de precios de la acción de PEÑOLES la cual está listada en el mercado accionario mexicano.

Empezaremos por establecer los parámetros que utiliza el algoritmo:

$$\theta_l^1 = 0.01 \text{ y } \theta_u^1 = 0.4 \quad \text{Intervalo de ejecución para } z^1$$

$$\theta_l^2 = 0.009 \text{ y } \theta_u^2 = 2.33 \quad \text{Intervalo de ejecución para } z^2$$

Número de Iteraciones 1,000

$$z_0^1 = \max(x_i) / 2 \quad \text{Valor inicial en cada iteración para } z^1.$$

$$z_0^2 = \text{abs}(\min(x_i)) / 2 \quad \text{Valor inicial en cada iteración para } z^2.$$

Para las constantes k_0 y k_1 los valores elegidos son

$$k_0 = 10 \text{ y } k_1 = 3 \quad \text{quedando las sucesiones en cada iteración como sigue}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+10} \text{ y } \delta_n = \frac{1}{n^{1/6} + 3}$$

Ambas definiciones cumplen con las condiciones descritas en la descripción del algoritmo.

Para este ejemplo se tomó también como precio inicial el del día 01/08/2007, en pesos $S_0 = 144.04$ (13). Veamos el comportamiento que hubiera tenido el algoritmo de haberlo utilizado a partir de esa fecha. La Tabla A10 del Anexo II muestra los valores de la serie.

Como en el ejemplo anterior, el algoritmo irá agregando datos después de cada ejecución. Se agrega información cada dos días de los últimos dos datos de cierre nuevos, y se estará evaluando si es o no el momento de vender. El primer resultado que arroja el algoritmo es vender la acción de PEÑOLES al cierre del 03/08/2007 cuando la acción vale 142.26 pesos y se obtendría un rendimiento en el periodo de -1.2358% que en términos anuales representa un -89.335% que parece alto por el plazo tan corto. La segunda señal es casi inmediata con fecha de venta al cierre del 07/08/2007 también con un rendimiento negativo de -2.8048% en el periodo y anual de -81.858%. Considerando, igual que en el caso de ELEKTRA, que en estas primeras señales el algoritmo no cuenta con suficiente información (tan sólo ha utilizado 5 precios) es conveniente no hacer caso de estos primeros avisos.

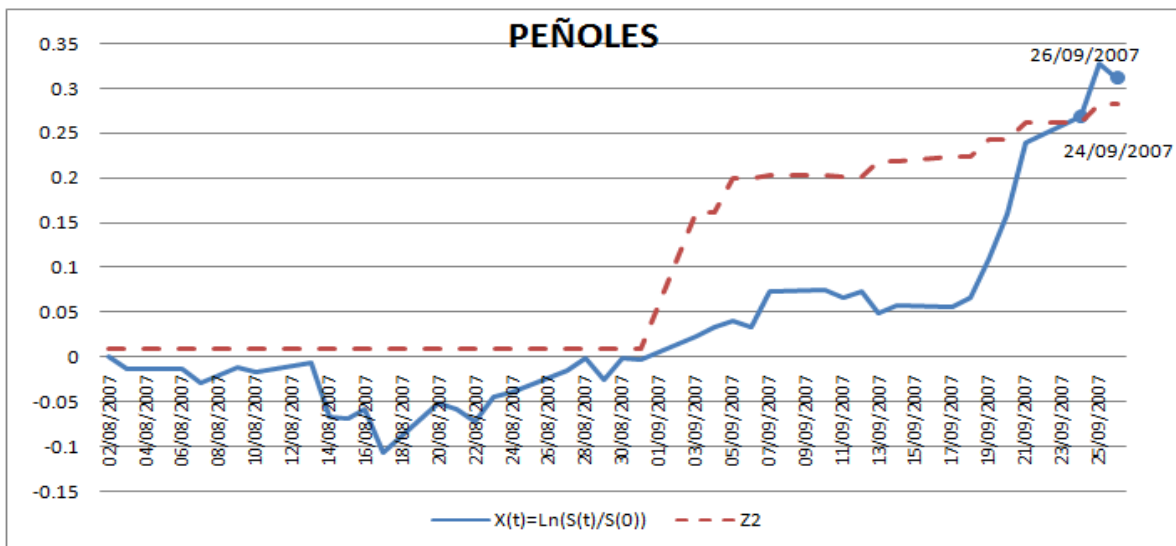


Figura 15 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (PEÑOLES). Dos eventos.

La siguiente señal se da el 24/09/2007 cuando el precio de la acción es de 188.43 pesos lo que significa un rendimiento en el periodo de 30.817% y en términos anualizados es 499.487%. Inmediatamente, en la siguiente ejecución el algoritmo señala venta para el 26/09/2007 cuando el precio de PEÑOLES es de 196.69 pesos lo que en rendimiento por periodo implica un 36.552% y anual de 640.935%. En la gráfica anterior (Figura 15) se muestra el comportamiento de la serie en ese lapso de tiempo.

A continuación, en la Tabla 5 mostramos las primeras 5 señales de venta que arroja el algoritmo y sus respectivos rendimientos. Sin considerar, como se mencionó anteriormente la del 03/08/2007 y 07/08/2007.

| Fecha | PEÑOLES | Rendimiento | |
|------------|---------|-------------|----------|
| | | Periodo | Anual |
| 24/09/2007 | 188.43 | 30.8178% | 499.487% |
| 26/09/2007 | 196.69 | 36.5523% | 640.935% |
| 16/10/2007 | 234.00 | 62.4549% | 895.882% |
| 30/10/2007 | 250.67 | 74.0280% | 817.227% |
| 07/12/2007 | 308.25 | 114.0031% | 749.779% |

Tabla 5. Primeras 5 señales del algoritmo que indican la venta de la acción PEÑOLES

Como podemos ver en la Tabla 5 PEÑOLES es una acción que de agosto de 2007 a diciembre del mismo año obtuvo muy buenas ganancias.

En la Figura 16 tenemos los resultados de z^2 conforme se van agregando datos a la serie de los precios. La línea punteada es el valor de z^2 para cada día por lo que cuando la línea de PEÑOLES cruza por arriba o se mantiene arriba de la punteada es una señal que da el algoritmo para vender la acción. En la misma figura se observan las cinco fechas en las que el algoritmo indica la de venta.

Es fácil ver en la misma figura que esta acción tuvo un crecimiento superior al de los otros dos ejemplos mostrados anteriormente, en este caso el algoritmo marca una tendencia a la alza que va siguiendo muy de cerca al precio de la acción y además indica buenos momentos de venta.

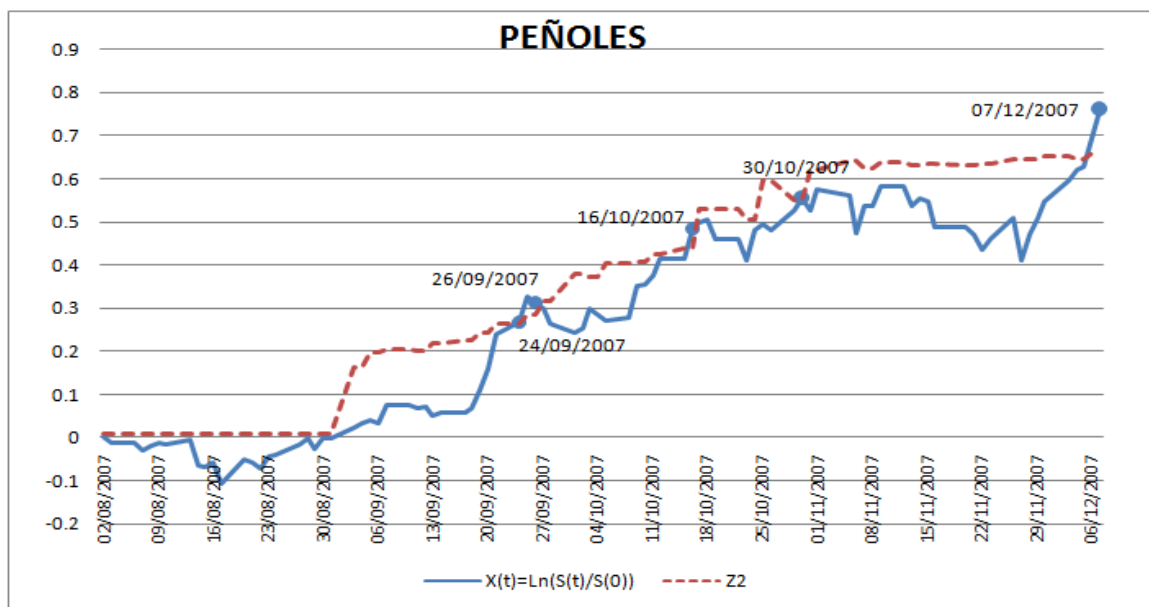


Figura 16 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (PEÑOLES). Cinco eventos.

Como en los ejemplos anteriores, en la Figura 17 podemos ver cómo el algoritmo va calculando cada uno de los valores de z^2 a través de las 1,000 iteraciones. Además, se observa cómo al contar con más información los resultados se van ajustando.

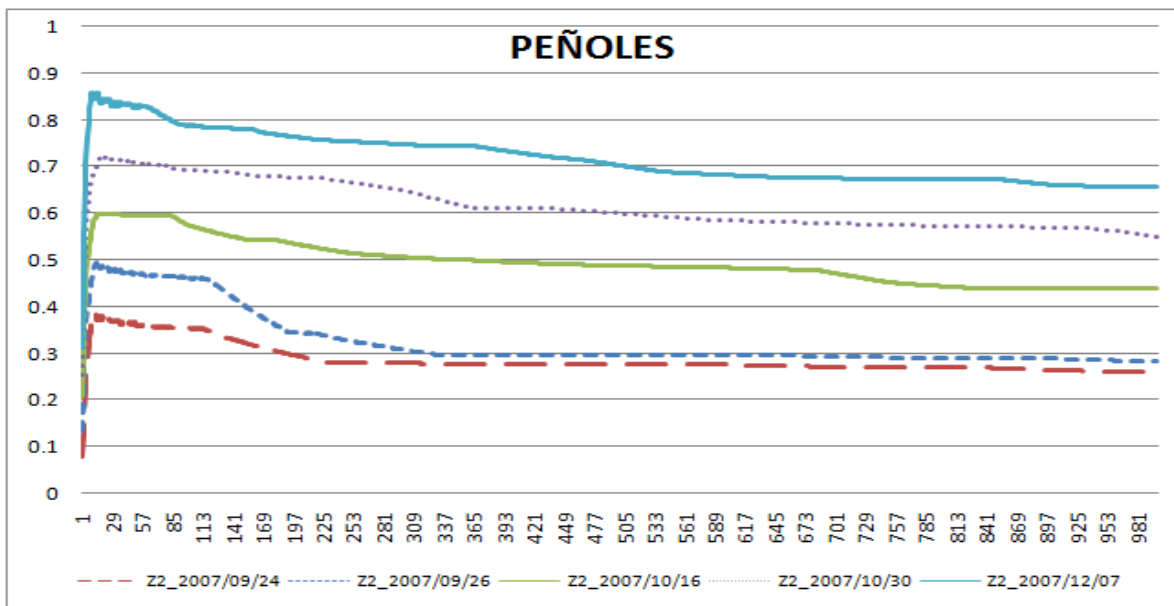


Figura 17 Resultados de z^2 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para cada fecha señalada por el algoritmo para vender (PEÑÓLES).

III.2.3 Simulación acción: AMX-L

A continuación mostraremos la corrida del algoritmo para la serie de precios de la acción de Amx-L la cual está listada en el mercado accionario mexicano.

Empezaremos por establecer los parámetros que utiliza el algoritmo:

$$\theta_l^1 = 0.01 \text{ y } \theta_u^1 = 0.223 \text{ Intervalo de ejecución para } z^1$$

$$\theta_l^2 = 0.009 \text{ y } \theta_u^2 = 2.33 \text{ Intervalo de ejecución para } z^2$$

Número de Iteraciones 1,000

$$z_0^1 = \max(x_i) / 2 \text{ Valor inicial en cada iteración para } z^1.$$

$$z_0^2 = \text{abs}(\min(x_i)) / 2 \text{ Valor inicial en cada iteración para } z^2.$$

Para las constantes k_0 y k_1 los valores elegidos son

$k_0 = 10$ y $k_1 = 20$ quedando las sucesiones en cada iteración como sigue

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+10} \text{ y } \delta_n = \frac{1}{n^{1/6} + 20}$$

Ambas definiciones cumplen con las condiciones descritas en la descripción del algoritmo.

Para este ejemplo se tomó también como precio inicial el del día 01/08/2007, en pesos $S_0 = 32.71$ (13). Veamos el comportamiento que hubiera tenido el algoritmo de haberlo utilizado a partir de esa fecha. La Tabla A11 del Anexo II muestra los valores de la serie.

Como en el ejemplo anterior, el algoritmo irá agregando datos después de cada ejecución. Se agrega información cada dos días de los últimos dos datos de cierre nuevos, y se estará evaluando si es o no el momento de vender. El primer resultado que arroja el algoritmo es vender la acción de AMX-L al cierre del 07/08/2007 cuando la acción vale 32.03 pesos y se obtendría un rendimiento en el periodo de -2.0789% que en términos anuales representa un -71.648% que parece muy alto por el plazo tan corto. Considerando que en este momento el algoritmo no cuenta con suficiente información (tan sólo ha utilizado 4 precios) es conveniente no hacer caso de este primer aviso.

La segunda señal se da el 09/08/2007 cuando el precio de la acción es de 33.11 pesos lo que significa un rendimiento en el periodo de 1.2229% y en términos anualizados es 72.798%. La siguiente señal ocurre inmediatamente a la siguiente ejecución para el 13/08/2007 cuando el precio de AMX-L es de 31.51 pesos lo que en rendimiento por periodo implica un -3.6686% y anual de -67.414%. Las 3 siguientes señales ocurren de manera temprana nuevamente, hasta ese momento el algoritmo cuenta con tan sólo 21 observaciones por lo que estas señales no las consideramos como relevantes.

En la siguiente gráfica (Figura 18) se muestra el comportamiento de la serie en ese lapso de tiempo.

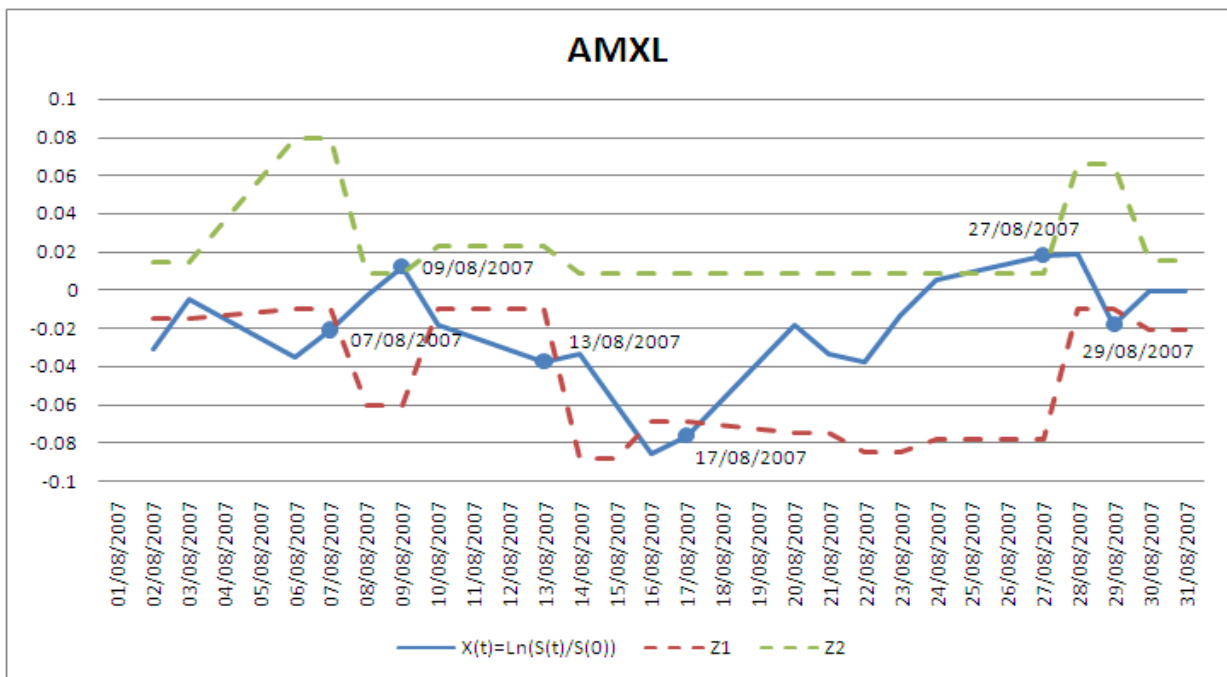


Figura 18 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^1 y z^2 para la misma serie (AMX-L). Seis eventos.

A continuación, en la Tabla 6 se muestran las primeras 6 señales de venta que arroja el algoritmo y sus respectivos rendimientos. Como mencionamos anteriormente estas primeras no las consideraremos como relevantes por tomar poca información.

| Fecha | AMXL | Rendimiento | |
|------------|-------|-------------|----------|
| | | Periodo | Anual |
| 07/08/2007 | 32.03 | -2.0789% | -71.648% |
| 09/08/2007 | 33.11 | 1.2229% | 72.798% |
| 13/08/2007 | 31.51 | -3.6686% | -67.414% |
| 17/08/2007 | 30.31 | -7.3372% | -81.996% |
| 27/08/2007 | 33.31 | 1.8343% | 28.618% |
| 29/08/2007 | 32.13 | -1.7732% | -20.548% |

Tabla 6. Primeras 6 señales del algoritmo que indican la venta de la acción AMX-L. No consideradas por contar con poca información.

A continuación, en la Tabla 7 se muestran las siguientes 3 señales de venta que arroja el algoritmo y sus respectivos rendimientos. Estos resultados ya consideran más información que en las primeras 6 anteriores.

| Fecha | AMXL | Rendimiento | |
|------------|-------|-------------|---------|
| | | Periodo | Anual |
| 02/10/2007 | 35.70 | 9.1409% | 66.178% |
| 18/10/2007 | 36.87 | 12.7178% | 73.766% |
| 22/10/2007 | 37.15 | 13.5738% | 74.858% |

Tabla 7. Siguietes 3 señales del algoritmo que indican la venta de la acción AMX-L.

En la Figura 19 tenemos los resultados de z^2 conforme se van agregando datos a la serie de los precios. La línea punteada es el valor de z^2 para cada día por lo que cuando la línea de AMX-L cruza por arriba o se mantiene arriba de la punteada es una señal que da el algoritmo para vender la acción. En la misma figura se observan las tres fechas en las que el algoritmo indica la de venta.

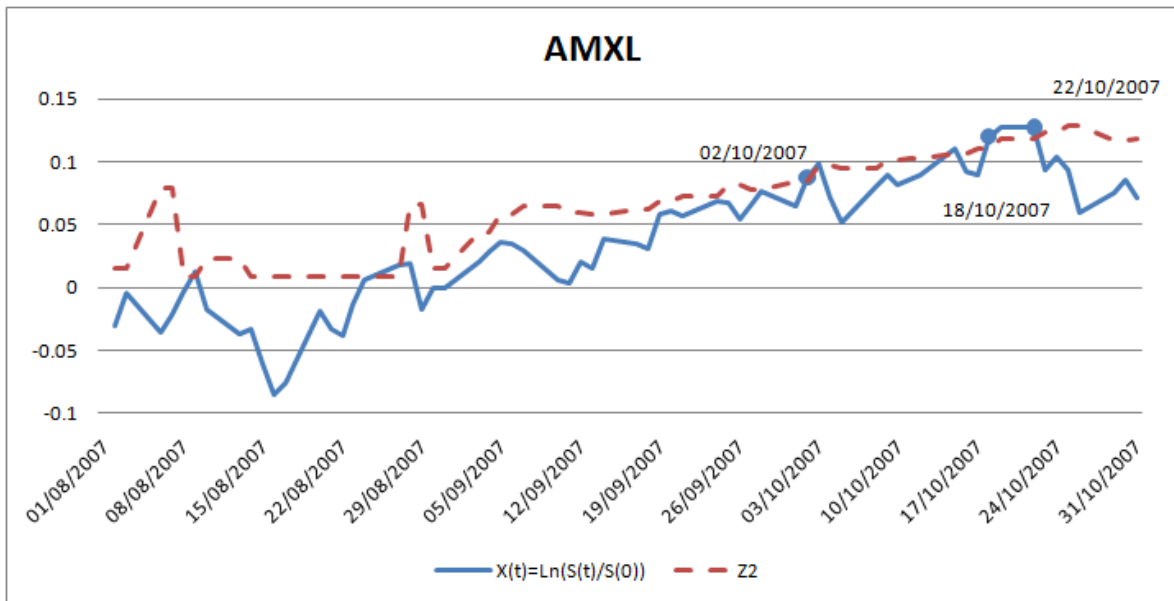


Figura 19 Serie $X(t) = \ln(S(t)/S_0)$ y los valores de z^2 para la misma serie (AMX-L). Cuatro eventos.

En la Figura 20 podemos ver cómo el algoritmo va calculando cada uno de los valores de z^2 a través de las 1,000 iteraciones. Además, se observa cómo al contar con más información los resultados se van ajustando.

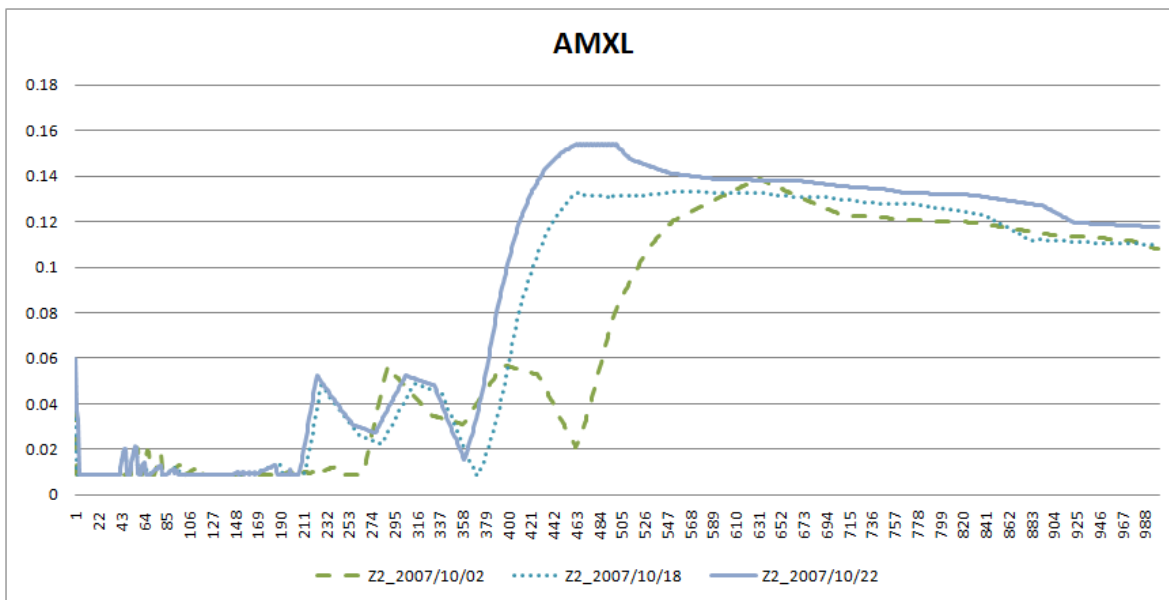


Figura 20 Resultados de z^2 en cada una de las 1,000 iteraciones. Para tres fecha señalada por el algoritmo para vender (AMX-L).

Las dos últimas señales que marca el algoritmo dan una buena señal de venta respecto a lo que sucedió después ya que de haber mantenido la acción por un mes más, por ejemplo, el precio de la acción cayó hasta 31.82 el día 22/11/2007 lo que hubiera resultado en una pérdida. Sin embargo, como lo mencionamos anteriormente eso no lo sabemos sino a posteriori, el algoritmo es simplemente una herramienta más, al final de cuentas el nivel de aceptación del riesgo de cada uno nos hace decidir si vender o no.

Capítulo IV Conclusiones

En el capítulo anterior se realizaron varias corridas del algoritmo con diferentes series de datos: IPC, ELEKTRA, PEÑOLES y AMXL; durante el desarrollo de estas pruebas se encontró que al tener cada una de estas acciones un comportamiento diferente entre ellas, los parámetros del algoritmo no pueden ser los mismos para todas las series de datos.

En la Figura 21 se observa dichos comportamientos comparando los rendimientos acumulados de las series de datos que se utilizaron como ejemplos. Si observamos la línea del IPC, al ser un promedio de un conjunto de acciones, su movimiento es menos brusco en relación a las otras tres acciones. La acción de mayor volatilidad (lo que implica movimientos más bruscos) es la de PEÑOLES y también es la de mayor rendimiento

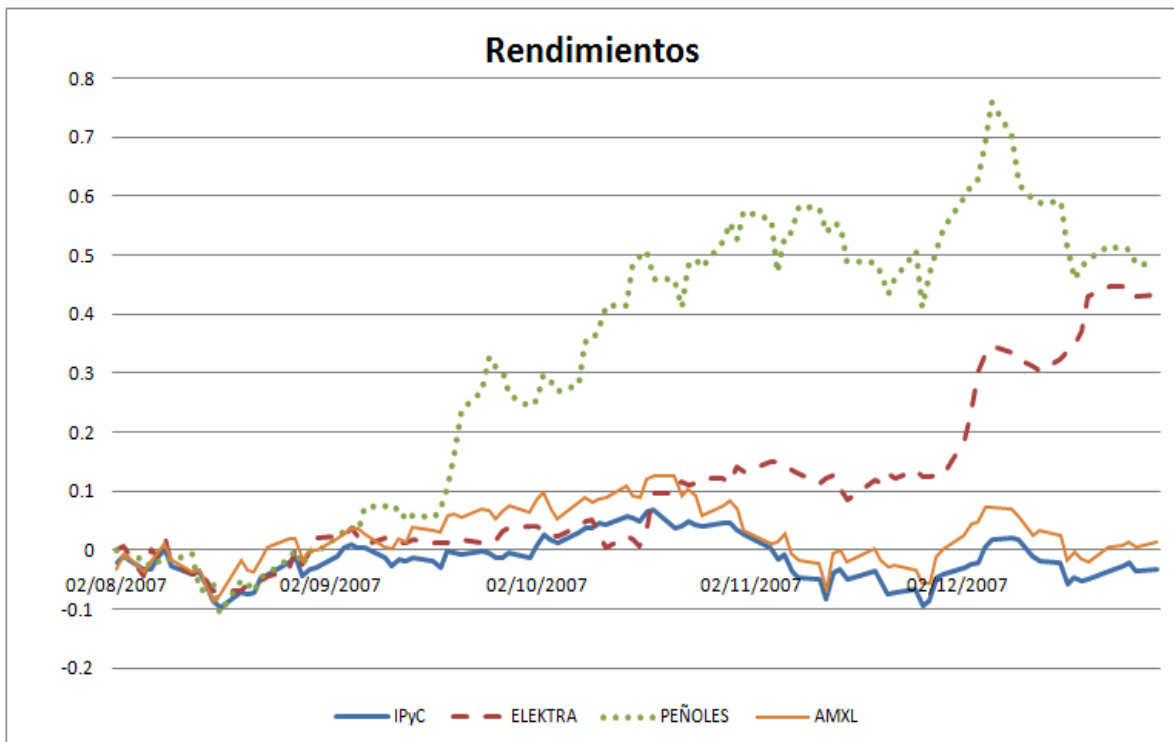


Figura 21 Comparativo de rendimientos de IPyC, ELEKTRA, PEÑOLES y AMXL.

Para los ejercicios se eligió inicialmente al IPC porque como índice del mercado accionario mexicano es un promedio ponderado de las acciones más representativas del mismo y su movimiento es más estable en el tiempo. Obtener los parámetros para esta serie fue de gran ayuda para tomarlos de punto medio y ajustar los de las otras tres acciones.

En el Capítulo II, como observamos en las pruebas de sensibilidad, uno de los parámetros a los que es más sensible el algoritmo es al valor de la constante k_1 lo cual se confirmó al momento de realizar las ejecuciones de las distintas series de acciones. Éste parámetro resultó ser distinto, al momento de realizar las pruebas, en cada serie de datos: $k_1 = 10$ para el IPC, $k_1 = 7$ para ELEKTRA y $k_1 = 3$ para PEÑOLES.

Entonces, con base en las simulaciones detalladas en la sección anterior y con la experiencia adquirida en el desarrollo de este trabajo se puede concluir que para las series de acciones seleccionadas, la aproximación estocástica implementada con el método sugerido por los autores Yin, Zhang, Liu, Liu R. H. y Cheng (1) es una buena herramienta para el problema de elegir el momento de vender acciones que uno posee.

La ventaja principal de este algoritmo, como se mencionó en capítulos anteriores, es que los principales insumos para el mismo no van más allá de la serie histórica de los precios de las acciones de las cuales queremos dar seguimiento, haciendo su uso más atractivo para gente que no se dedica de tiempo completo al monitoreo del comportamiento del mercado y/o de las acciones.

Este algoritmo aunque aparentemente simple tiene su justificación fundamentada ampliamente en la literatura referida en la bibliografía. Sin embargo, existe el desafío para el usuario que consiste en la mejor determinación de los diversos parámetros que intervienen en él unos más sensibles para el algoritmo que otros. Y que su determinación puede ir variando de acción en acción.

La efectividad del algoritmo requiere de la familiarización con el mismo para entender su comportamiento y entonces hacer ajustes racionales a los parámetros que lo afectan.

Este algoritmo, como muchas otras herramientas no pretende ser la única sino que forma parte de la serie de instrumentos que existen actualmente que utilizados de manera complementaria pueden dar luz acerca del complejo comportamiento del mercado de capitales.

En el Anexo I se muestra el pseudo-código propuesto, con el cual al no estar escrito en ninguna sintaxis fija podría servir dando la libertad de implementarlo en el lenguaje que se desee.

Bibliografía y Referencias

1. *Stock Liquidation via Stochastic Approximation using Nasdaq daily and intra-day data.* **Yin, G., y otros, y otros.** 1, 2006, *Mathematical Finance*, Vol. 16, págs. 217-236.
2. *Stock Trading: An Optimal Selling Rule.* **Zhang, Q.** 1, 2001, *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 40, págs. 64–87.
3. *Recursive Algorithms for Stock Liquidation: A Stochastic Optimization Approach.* **Yin, G., Liu, R. H. y Zhang, Q.** 1, 2002, *SIAM J. Optim.*, Vol. 13, págs. 240–263.
4. *A Stochastic Approximation Method.* **Robbins, H. y Monro, S.** 3, 1951, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 22, págs. 400-407.
5. **Kushner, H. J. y Yin, G.** *Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications.* New York : Springer-Verlag, 2003.
6. *Experimental determination of the maximum of a function.* **Hotelling, H.** 12, 1941, *Ann. Math. Stat.*, págs. 20-46.
7. **Wasan, M. T.** *Stochastic Approximation.* s.l. : Cambridge University, 1969.
8. *Stochastic Estimation of the Maximum of a Regression Function.* **Kiefer, J. y Wolfowitz, J.** 3, 1952, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 23, págs. 462-466.
9. *Methods for the adaptive optimization of binary detection systems.* **Kushner, H. J.** 1962, Lincoln Laboratory MIT, págs. 22G-2.
10. **Spall, James C.** *Introduction to stochastic search and optimization : estimation simulation and control.* s.l. : John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2003.
11. *Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation.* **Spall, James C.** 3, 1992, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, págs. 332-341.
12. *Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case.* **Merton, R. C.** 1969, *Rev. Econom. Statist.*, págs. 247-257.
13. Yahoo! México Finanzas. [En línea] <http://mx.finance.yahoo.com/>.
14. Bolsa Mexicana de Valores. [En línea] <http://www.bmv.com.mx/>.
15. *Statistical Versus Clinical Prediction of the Stock Market.* **Roberts, Harry.** University of Chicago : s.n., May, 1967, Unpublished manuscript, CRSP, University of Chicago.

Anexos

Anexo I. Pseudocódigo

A continuación se muestra una propuesta de pseudo-código del algoritmo de AE para el problema de toma de decisiones de venta de acciones. Este código supone que los parámetros son pasados a las funciones por referencia.

Variables Globales

| | |
|------------|--|
| Z1, Z2 | 'Valores límite que se desean obtener |
| P0 | 'Precio cero o precio de compra de la acción |
| NumPrecios | 'Tamaño de la serie de precios de la acción |
| K1, K2 | 'Constantes para el cálculo de las series de delta y épsilon |
| rho | 'Tasa de descuento |
| D1, D2 | 'Gradiente para cada componente (Z1 , Z2) |
| Z1_l, Z1_s | 'Límites para los valores que puede tomar Z1 |
| Z2_l, Z2_s | 'Límites para los valores que puede tomar Z2 |

PRINCIPAL()

{

'Variables Locales

| | |
|------------------|--|
| MPrecios[2 , N] | ' Matriz de precios por fecha ya con datos ordenados de 'forma ascendente respecto a la fecha. Primer arreglo contiene la fecha. Segundo arreglo contiene los precios. |
| MXt [3 , N] | ' Matriz de diferencias logarítmicas de precios. Primer arreglo contiene la fecha. Segundo arreglo contiene |

las diferencias logarítmicas. Tercer arreglo contiene las veces que se ha utilizado ese dato.

| | |
|--------------|------------------------|
| Z0_1, Z0_2 | 'Valores de inicio |
| LIteraciones | 'Número de Iteraciones |
| i | 'Contador |
| maxXt | 'Máximo de la serie Xt |
| minXt | 'Mínimo de la serie Xt |

'Este procedimiento calcula la diferencia logarítmica de la serie de datos,

'asigna valores MXt

maxXt = 0

minXt = 0

CALCULA_Xt(MPrecios, MXt, maxXt, minXt)

'Se asignan valores de inicio

Z0_1 = abs(minXt) / 2, Z0_2 = abs(maxXt) / 2 'Valores de inicio

Z1= Z0_1, Z2= Z0_2

P0 = MPrecios[1 , 0] 'Precio inicial de la acción

K1 = 10 'Constante para el cálculo de la delta

K2 = 10 'Constante para el cálculo de la epsilon

rho = (8.08 / 100) * (1 / 360) 'Tasa de descuento diaria en este caso 8.08% anual

Z1_I = 0.01 'Límites para Z1, Inferior y Superior

Z1_S = 0.233

Z2_I = 0.01 'Límites para Z2, Inferior y Superior

Z2_S = 2.33

'Se calculan los datos para cada iteración

Literaciones=1,000

Para i=1 hasta Literaciones

 'Ejecuta una iteración

 CALCULA_ITERACIÓN (i +1 , MXt , Z1, Z2)

 Siguiente i

'Muestra los valores resultantes para Z1 y Z2

IMPRIME Z1 , Z2 'Si el precio de día de mañana de la acción sale de este intervalo (-Z1, Z2) significaría que el algoritmo da una señal de venta

}

CALCULA_Xt(MPrecios , MXt , maxXt , minXt)

{ 'Calcula la diferencia logarítmica de la serie de los precios de la acción

'Variables

 i 'Contador

 'Llena el arreglo MXt

 Para i = 0 hasta NumPrecios - 1

 'Asigna fechas y diferencias logarítmicas

 MXt(1 , i+1) = MPrecios (1 , i+1)

 MXt(2 , i+1) = LogN(MPrecios (2 , i+1)) - LogN(P0)

 Si maxXt < MXt(2 , i+1) entonces

 maxXt = MXt(2 , i+1)

 Fin Si

Si $\min X_t > M X_t(2, i+1)$ entonces

$\min X_t = M X_t(2, i+1)$

Fin Si

Siguiente i

}

CALCULA_ITERACIÓN (i, MXt, Z1, Z2)

{ 'Ejecuta lo equivalente a una iteración en el algoritmo

'Variables

$\Delta = 1 / (i^{1/6} + K1)$

'Incrementos en los valores de las Z's

$\text{Epsilon} = 1 / (i + K2)$

'Ponderación del gradiente

T1, T2, T3, T4

'Diferentes momentos durante la búsqueda del 'gradiente

Phi1, Phi2, Phi3, Phi4

'Diferentes valores extremos para el cálculo 'del gradiente

'Incremento en Z1

$Z1c = Z1 + \Delta$

T1 = 0

Phi1 = 0

'Busca el primer momento $t > 0$ en el que el valor X_t sale del intervalo $(-Z1c, Z2)$

ENCUENTRA_t (MXt, Z1c, Z2, T1, Phi1)

'Decremento en Z1

$Z1c = Z1 - \Delta$

T2 = T1

$$\text{Phi2} = 0$$

'Busca el primer momento $t > 0$ en el que el valor X_t sale del intervalo $(-Z1c, Z2)$

$$\text{ENCUENTRA}_t(\text{MXt}, \text{Z1c}, \text{Z2}, \text{T2}, \text{Phi2})$$

'Incremento en Z2

$$\text{Z2c} = \text{Z2} + \text{Delta}$$

$$\text{T3} = 0$$

$$\text{Phi3} = 0$$

'Busca el primer momento $t > 0$ en el que el valor X_t sale del intervalo $(-Z1, \text{Z2c})$

$$\text{ENCUENTRA}_t(\text{MXt}, \text{Z1}, \text{Z2c}, \text{T3}, \text{Phi3})$$

'Decremento en Z2

$$\text{Z2c} = \text{Z2} - \text{Delta}$$

$$\text{T4} = \text{T3}$$

$$\text{Phi4} = 0$$

' Busca el primer momento t en el que X_t sale del intervalo $(-Z1, \text{Z2c})$

$$\text{ENCUENTRA}_t(\text{MXt}, \text{Z1}, \text{Z2c}, \text{T4}, \text{Phi4})$$

'Calculamos el gradiente para cada componente $(Z1, Z2)$

'Para Z1

$$\text{D1} = (-\text{Phi1} + \text{Phi2}) / (2 * \text{Delta})$$

'Para Z2

$$\text{D2} = (-\text{Phi3} + \text{Phi4}) / (2 * \text{Delta})$$

'Se calculan los nuevos datos para (Z1, Z2) según cada uno de los gradientes y
'considerando la ganancia Épsilon

'Para Z1

$$Z1 = Z1 - \text{Epsilon} * D1$$

'Para Z2

$$Z2 = Z2 + \text{Epsilon} * D2$$

PROYECCION (Z1, Z2)

}

ENCUENTRA_t (MXt, Z1, Z2, T, Phi)

{ 'Hace un recorrido sobre el arreglo de MXt para determinar el momento t en el que
el elemento MXt(2, i) sale del intervalo (-Z1 , Z2)

'Variables

j 'Contador

MaxVeces 'Máximo de veces que puede ser utilizado ese dato

MaxVeces = (Literaciones / NumPrecios) * 4

Para j = 1 a NumPrecios - 1

Si -Z1 > MXt (2, j) o Z2 < MXt (2, j) entonces

Si MaxVeces <= MXt(3, j) & j ≠ T entonces

MXt (3, j) = MXt(3, j) + 1

T = j

Sal Ciclo Para

Fin Si

Fin Si

Siguiente j

Si $T = 0$ entonces

$T = 1$

Fin Si

'Calcula el valor de la función a través de la cual se va a calcular el gradiente

$\text{Phi} = [\exp(\text{MXt}(T)) - 1] * \exp(-\text{rho} * T)$

}

PROYECCION (Z1, Z2)

{ 'Corrige los nuevos valores de Z1 y Z2 en caso de que se salga de la región definida

'Para el valor de Z1

Si $Z1 < Z1_I$ entonces

$Z1 = Z1_I$

Fin Si

Si $Z1 > Z1_S$ entonces

$Z1 = Z1_S$

Fin Si

'Para el valor de Z2

Si $Z2 < Z2_I$ entonces

$Z2 = Z2_I$

Fin Si

Si $Z2 > Z2_S$ entonces

$Z2 = Z2_S$

Fin Si

}

Anexo II. Tablas y Datos

Tabla A1 Cambio porcentual en los resultados de z^2 al ejecutar el algoritmo con diferente número de iteraciones y para 34 diferentes acciones.

| Iteraciones | IPC | Acción1 | Acción2 | Acción3 | Acción4 | Acción5 | Acción6 |
|-------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 300 | 0.605% | 0.844% | 1.403% | 0.246% | 0.034% | 0.011% | 1.017% |
| 400 | 0.845% | 0.469% | 0.781% | 0.190% | 0.025% | 0.008% | 0.699% |
| 500 | 0.297% | 0.491% | 0.634% | 0.219% | 0.019% | 0.006% | 0.220% |
| 600 | 0.262% | 0.311% | 0.675% | 0.123% | 0.016% | 0.005% | 0.483% |
| 700 | 0.236% | 0.352% | 0.448% | 0.154% | 0.014% | 0.005% | 0.170% |
| 800 | 0.420% | 0.304% | 0.399% | 0.092% | 0.012% | 0.004% | 0.370% |
| 900 | 0.174% | 0.207% | 0.457% | 0.120% | 0.011% | 0.004% | 0.321% |
| 1000 | 0.163% | 0.247% | 0.320% | 0.074% | 0.010% | 0.003% | 0.118% |
| 1100 | 0.306% | 0.223% | 0.376% | 0.098% | 0.009% | 0.003% | 0.269% |
| 1200 | 0.132% | 0.204% | 0.269% | 0.062% | 0.008% | 0.003% | 0.243% |
| 1300 | 0.257% | 0.144% | 0.320% | 0.084% | 0.007% | 0.002% | 0.092% |
| 1400 | 0.112% | 0.177% | 0.232% | 0.053% | 0.007% | 0.002% | 0.212% |
| 1500 | 0.108% | 0.165% | 0.280% | 0.073% | 0.006% | 0.002% | 0.196% |

| Iteraciones | Acción7 | Acción8 | Acción9 | Acción10 | Acción11 | Acción12 | Acción13 |
|-------------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|
| 300 | 0.594% | 0.440% | 0.726% | 1.123% | 0.385% | 0.183% | 0.349% |
| 400 | 0.115% | 0.522% | 0.513% | 0.809% | 0.297% | 0.001% | 0.417% |
| 500 | 0.397% | 0.258% | 0.305% | 0.638% | 0.244% | 0.124% | 0.187% |
| 600 | 0.116% | 0.343% | 0.342% | 0.530% | 0.207% | 0.098% | 0.267% |
| 700 | 0.298% | 0.183% | 0.290% | 0.455% | 0.181% | 0.081% | 0.129% |
| 800 | 0.086% | 0.257% | 0.190% | 0.400% | 0.340% | 0.069% | 0.118% |
| 900 | 0.084% | 0.143% | 0.229% | 0.357% | 0.126% | 0.000% | 0.180% |
| 1000 | 0.214% | 0.206% | 0.205% | 0.323% | 0.117% | 0.058% | 0.093% |
| 1100 | 0.067% | 0.185% | 0.185% | 0.295% | 0.109% | 0.052% | 0.146% |
| 1200 | 0.178% | 0.105% | 0.170% | 0.272% | 0.102% | 0.047% | 0.077% |
| 1300 | 0.056% | 0.157% | 0.118% | 0.253% | 0.096% | 0.000% | 0.124% |
| 1400 | 0.152% | 0.091% | 0.148% | 0.236% | 0.196% | 0.042% | 0.066% |
| 1500 | 0.049% | 0.137% | 0.138% | 0.289% | 0.079% | 0.038% | 0.108% |

| Iteraciones | Acción14 | Acción15 | Acción16 | Acción17 | Acción18 | Acción19 | Acción20 |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 300 | 0.674% | 0.198% | 0.884% | 0.328% | 0.791% | 0.451% | 1.718% |
| 400 | 0.493% | 0.641% | 0.656% | 0.232% | 0.573% | 0.319% | 0.912% |
| 500 | 0.391% | 0.466% | 0.883% | 0.182% | 0.453% | 0.247% | 0.745% |
| 600 | 0.324% | 0.070% | 0.383% | 0.150% | 0.379% | 0.202% | 0.830% |
| 700 | 0.277% | 0.341% | 0.337% | 0.201% | 0.328% | 0.171% | 0.525% |
| 800 | 0.243% | 0.060% | 0.300% | 0.104% | 0.289% | 0.149% | 0.469% |
| 900 | 0.216% | 0.271% | 0.272% | 0.093% | 0.660% | 0.014% | 0.562% |
| 1000 | 0.195% | 0.236% | 0.248% | 0.085% | 0.199% | 0.129% | 0.376% |
| 1100 | 0.178% | 0.041% | 0.228% | 0.078% | 0.186% | 0.116% | 0.462% |
| 1200 | 0.163% | 0.201% | 0.211% | 0.072% | 0.174% | 0.106% | 0.315% |
| 1300 | 0.151% | 0.182% | 0.346% | 0.067% | 0.165% | 0.097% | 0.394% |
| 1400 | 0.140% | 0.031% | 0.175% | 0.101% | 0.156% | 0.090% | 0.272% |
| 1500 | 0.131% | 0.161% | 0.165% | 0.057% | 0.148% | 0.084% | 0.344% |

| Iteraciones | Acción21 | Acción22 | Acción23 | Acción24 | Acción25 | Acción26 | Acción27 |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 300 | 1.063% | 0.557% | 0.719% | 0.374% | 0.221% | 0.301% | 0.114% |
| 400 | 0.798% | 0.406% | 0.534% | 0.273% | 0.405% | 0.221% | 0.082% |
| 500 | 0.644% | 0.320% | 0.427% | 0.135% | 0.140% | 0.176% | 0.065% |
| 600 | 0.542% | 0.265% | 0.357% | 0.194% | 0.272% | 0.147% | 0.040% |
| 700 | 0.469% | 0.227% | 0.307% | 0.165% | 0.225% | 0.178% | 0.048% |
| 800 | 0.414% | 0.198% | 0.268% | 0.144% | 0.086% | 0.106% | 0.052% |
| 900 | 0.372% | 0.176% | 0.238% | 0.175% | 0.180% | 0.095% | 0.036% |
| 1000 | 0.338% | 0.159% | 0.214% | 0.111% | 0.159% | 0.087% | 0.032% |
| 1100 | 0.310% | 0.145% | 0.195% | 0.101% | 0.142% | 0.113% | 0.030% |
| 1200 | 0.286% | 0.133% | 0.179% | 0.093% | 0.056% | 0.071% | 0.027% |
| 1300 | 0.266% | 0.123% | 0.165% | 0.086% | 0.124% | 0.066% | 0.025% |
| 1400 | 0.249% | 0.161% | 0.153% | 0.081% | 0.114% | 0.062% | 0.024% |
| 1500 | 0.234% | 0.104% | 0.143% | 0.076% | 0.046% | 0.084% | 0.022% |

| Iteraciones | Acción28 | Acción29 | Acción30 | Acción31 | Acción32 | Acción33 | Acción34 |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 300 | 0.016% | 1.388% | 0.510% | 0.484% | 0.654% | 1.356% | 0.035% |
| 400 | 0.361% | 0.407% | 0.350% | 0.672% | 0.745% | 1.008% | 0.489% |
| 500 | 0.046% | 0.833% | 0.267% | 0.238% | 0.356% | 0.805% | 0.353% |
| 600 | 0.023% | 0.281% | 0.216% | 0.209% | 0.479% | 0.671% | 0.277% |
| 700 | 0.010% | 0.600% | 0.182% | 0.186% | 0.249% | 0.075% | 0.027% |
| 800 | 0.180% | 0.215% | 0.157% | 0.167% | 0.226% | 0.580% | 0.224% |
| 900 | 0.018% | 0.471% | 0.139% | 0.295% | 0.325% | 0.510% | 0.193% |
| 1000 | 0.011% | 0.175% | 0.124% | 0.125% | 0.180% | 0.457% | 0.169% |
| 1100 | 0.007% | 0.389% | 0.113% | 0.117% | 0.266% | 0.413% | 0.016% |
| 1200 | 0.121% | 0.149% | 0.103% | 0.110% | 0.151% | 0.377% | 0.149% |
| 1300 | 0.010% | 0.332% | 0.095% | 0.205% | 0.226% | 0.347% | 0.135% |
| 1400 | 0.007% | 0.304% | 0.088% | 0.090% | 0.130% | 0.322% | 0.124% |
| 1500 | 0.005% | 0.115% | 0.082% | 0.086% | 0.197% | 0.301% | 0.114% |

Tabla A2 Diversos valores de inicio y el resultado del algoritmo en cada uno de los casos para el IPC

| No. | Valores de inicio | | Valores de encontrados | |
|-----|-------------------|-----------|------------------------|-----------|
| | Z1 | Z2 | Z1* | Z2* |
| 1 | 0.2741676 | 0.3619683 | 0.2145703 | 0.1408584 |
| 2 | 0.2568032 | 0.2751460 | 0.2145703 | 0.1408982 |
| 3 | 0.2510150 | 0.2462052 | 0.2145703 | 0.1408602 |
| 4 | 0.2336506 | 0.1629408 | 0.2145703 | 0.1409413 |

Tabla A3 Cambios porcentuales absolutos de los valores de z^2 debido al incremento de la constante k_0 . Para un grupo de 7 acciones.

| K0 | Acción1 | Acción2 | Acción3 | Acción4 | Acción5 | Acción6 | Acción7 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 5 | | | | | | | |
| 10 | 0.01% | 0.01% | 0.03% | 0.09% | 0.03% | 0.04% | 0.09% |
| 15 | 0.00% | 0.00% | 0.02% | 0.02% | 0.03% | 0.07% | 0.07% |
| 20 | 0.02% | 0.02% | 0.01% | 0.06% | 0.00% | 0.03% | 0.07% |
| 25 | 0.02% | 0.02% | 0.01% | 0.05% | 0.00% | 0.02% | 0.06% |
| 30 | 0.07% | 0.00% | 0.00% | 0.10% | 0.01% | 0.02% | 0.08% |

Tabla A4 Diferentes resultados de los valores de z^2 debido al incremento de la constante k_0 . Para un grupo de 7 acciones.

| K0 | Acción1 | Acción2 | Acción3 | Acción4 | Acción5 | Acción6 | Acción7 |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 5 | 0.0949192 | 0.7720193 | 0.2586219 | 1.0452737 | 0.2010511 | 0.1348084 | 0.0791021 |
| 10 | 0.0949269 | 0.7720717 | 0.2586999 | 1.0462537 | 0.2009947 | 0.1348660 | 0.0790304 |
| 15 | 0.0949251 | 0.7720624 | 0.2586420 | 1.0465002 | 0.2009434 | 0.1347722 | 0.0789754 |
| 20 | 0.0949073 | 0.7719027 | 0.2586071 | 1.0459142 | 0.2009396 | 0.1348094 | 0.0789234 |
| 25 | 0.0948868 | 0.7720783 | 0.2586359 | 1.0464520 | 0.2009315 | 0.1348386 | 0.0788749 |
| 30 | 0.0949507 | 0.7720683 | 0.2586466 | 1.0453660 | 0.2009189 | 0.1348644 | 0.0788123 |

Tabla A5 Cambios porcentuales absolutos de los valores de z^2 debido al incremento de la constante k_1 . Para un grupo de 7 acciones.

| K1 | Acción1 | Acción2 | Acción3 | Acción4 | Acción5 | Acción6 | Acción7 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 5 | | | | | | | |
| 10 | 32.90% | 5.66% | 15.24% | 4.22% | 18.78% | 25.63% | 37.06% |
| 15 | 22.08% | 2.70% | 8.15% | 1.94% | 10.43% | 15.60% | 26.50% |
| 20 | 16.10% | 1.56% | 4.99% | 1.28% | 6.59% | 10.43% | 21.02% |
| 25 | 12.29% | 1.00% | 3.42% | 0.83% | 4.48% | 7.49% | 15.60% |
| 30 | 9.81% | 0.84% | 2.39% | 0.47% | 3.36% | 5.66% | 13.16% |

Tabla A6 Diferentes resultados de los valores de z^2 debido al incremento de la constante k_1 . Para un grupo de 7 acciones.

| K1 | Acción1 | Acción2 | Acción3 | Acción4 | Acción5 | Acción6 | Acción7 |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 5 | 0.14148047 | 0.81843371 | 0.30522328 | 1.09234376 | 0.24748220 | 0.18134793 | 0.12556600 |
| 10 | 0.09492694 | 0.77207175 | 0.25869989 | 1.04625374 | 0.20099470 | 0.13486604 | 0.07903043 |
| 15 | 0.07396302 | 0.75120617 | 0.23762576 | 1.02600641 | 0.18002696 | 0.11382551 | 0.05808444 |
| 20 | 0.06205758 | 0.73949563 | 0.22576435 | 1.01291481 | 0.16816535 | 0.10195553 | 0.04587289 |
| 25 | 0.05442787 | 0.73212844 | 0.21804844 | 1.00448289 | 0.16063668 | 0.09432031 | 0.03871582 |
| 30 | 0.04908619 | 0.72597098 | 0.21284276 | 0.99974529 | 0.15523384 | 0.08898103 | 0.03362218 |

Tabla A7 Serie de datos para el primer ejercicio con el índice IPC (cifras en unidades)*

| Fecha | IPyC | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ | Fecha | IPyC | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ | Fecha | IPyC | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ |
|------------|-----------|-----------------------|------------|-----------|-----------------------|------------|-----------|-----------------------|
| 01/08/2007 | 30,659.66 | | 10/09/2007 | 30,252.77 | -0.013360033 | 18/10/2007 | 32,721.82 | 0.06509435 |
| 02/08/2007 | 30,048.37 | -0.020139367 | 11/09/2007 | 29,893.18 | -0.025317423 | 19/10/2007 | 32,836.12 | 0.068581345 |
| 03/08/2007 | 30,394.81 | -0.008675914 | 12/09/2007 | 30,191.14 | -0.01539928 | 22/10/2007 | 31,823.40 | 0.037254084 |
| 06/08/2007 | 29,671.77 | -0.032751695 | 13/09/2007 | 30,076.33 | -0.0192093 | 23/10/2007 | 31,969.48 | 0.041833914 |
| 07/08/2007 | 29,721.63 | -0.03107272 | 14/09/2007 | 30,302.23 | -0.011726477 | 24/10/2007 | 32,228.57 | 0.049905631 |
| 08/08/2007 | 30,239.92 | -0.013784878 | 17/09/2007 | 30,096.03 | -0.018554515 | 25/10/2007 | 32,048.18 | 0.044292611 |
| 09/08/2007 | 30,661.87 | 7.20791E-05 | 18/09/2007 | 29,794.49 | -0.028624307 | 26/10/2007 | 31,886.10 | 0.039222394 |
| 10/08/2007 | 29,883.96 | -0.025625902 | 19/09/2007 | 30,603.42 | -0.001836017 | 29/10/2007 | 32,136.76 | 0.047052762 |
| 13/08/2007 | 29,420.47 | -0.041257093 | 20/09/2007 | 30,512.64 | -0.00480676 | 30/10/2007 | 32,100.76 | 0.045931922 |
| 14/08/2007 | 29,607.20 | -0.034930209 | 21/09/2007 | 30,485.75 | -0.005688423 | 31/10/2007 | 31,783.62 | 0.036003279 |
| 15/08/2007 | 28,895.73 | -0.059253951 | 24/09/2007 | 30,583.07 | -0.002501196 | 01/11/2007 | 31,458.67 | 0.025726837 |
| 16/08/2007 | 28,140.73 | -0.085729791 | 25/09/2007 | 30,543.45 | -0.003797524 | 05/11/2007 | 30,806.30 | 0.004771431 |
| 17/08/2007 | 27,793.16 | -0.098157837 | 26/09/2007 | 30,294.77 | -0.011972694 | 06/11/2007 | 30,157.69 | -0.016507835 |
| 20/08/2007 | 28,510.66 | -0.072669732 | 27/09/2007 | 30,303.18 | -0.011695127 | 07/11/2007 | 30,430.50 | -0.007502389 |
| 21/08/2007 | 28,453.55 | -0.074674851 | 28/09/2007 | 30,528.00 | -0.004303489 | 08/11/2007 | 29,582.21 | -0.035774617 |
| 22/08/2007 | 28,568.43 | -0.070645522 | 01/10/2007 | 30,296.19 | -0.011925822 | 09/11/2007 | 29,289.72 | -0.045711183 |
| 23/08/2007 | 29,269.34 | -0.046407232 | 02/10/2007 | 30,855.68 | 0.006373066 | 12/11/2007 | 29,158.86 | -0.050188972 |
| 24/08/2007 | 29,459.82 | -0.039920483 | 03/10/2007 | 31,451.79 | 0.025508113 | 13/11/2007 | 28,185.90 | -0.084125931 |
| 27/08/2007 | 30,041.54 | -0.020366693 | 04/10/2007 | 31,178.84 | 0.016791876 | 14/11/2007 | 29,484.78 | -0.039073586 |
| 28/08/2007 | 30,275.84 | -0.012597749 | 05/10/2007 | 31,078.33 | 0.013563008 | 15/11/2007 | 29,655.68 | -0.033294109 |
| 29/08/2007 | 29,326.76 | -0.044447374 | 08/10/2007 | 31,540.94 | 0.028338601 | 16/11/2007 | 29,170.90 | -0.049776147 |
| 30/08/2007 | 29,710.78 | -0.031437841 | 09/10/2007 | 31,825.51 | 0.037320385 | 20/11/2007 | 29,631.57 | -0.034107437 |
| 31/08/2007 | 29,744.07 | -0.030318 | 10/10/2007 | 31,801.69 | 0.036571649 | 21/11/2007 | 29,050.52 | -0.053911401 |
| 03/09/2007 | 30,347.86 | -0.01022178 | 11/10/2007 | 32,129.40 | 0.046823715 | 22/11/2007 | 28,446.45 | -0.074924412 |
| 04/09/2007 | 30,797.60 | 0.004488981 | 12/10/2007 | 31,980.95 | 0.042192629 | 23/11/2007 | 28,520.16 | -0.072336578 |
| 05/09/2007 | 30,932.71 | 0.008866416 | 15/10/2007 | 32,473.47 | 0.057475664 | 26/11/2007 | 28,710.87 | -0.065671987 |
| 06/09/2007 | 30,809.55 | 0.004876923 | 16/10/2007 | 32,335.86 | 0.053229047 | 27/11/2007 | 27,883.01 | -0.094930241 |
| 07/09/2007 | 30,816.95 | 0.005117079 | 17/10/2007 | 32,230.82 | 0.049975354 | 28/11/2007 | 28,124.65 | -0.086301368 |

*Valores de cierre del día inmediato anterior. (Yahoo! México Finanzas)

Tabla A 8 Serie de datos para el segundo ejercicio con el índice IPC (cifras en unidades)*

| Fecha | IPyC | X(t)=Ln(S(t)/S(0)) | Fecha | IPyC | X(t)=Ln(S(t)/S(0)) | Fecha | IPyC | X(t)=Ln(S(t)/S(0)) |
|------------|-----------|--------------------|------------|-----------|--------------------|------------|-----------|--------------------|
| 2008/01/02 | 29,536.83 | | 2008/02/12 | 28,789.55 | -0.025625485 | 2008/03/26 | 29,981.08 | 0.014928557 |
| 2008/01/03 | 28,699.12 | -0.028771499 | 2008/02/13 | 28,869.96 | -0.022836351 | 2008/03/27 | 30,057.26 | 0.01746627 |
| 2008/01/04 | 28,860.78 | -0.023154379 | 2008/02/14 | 29,306.76 | -0.007819753 | 2008/03/28 | 29,987.05 | 0.015127663 |
| 2008/01/07 | 28,317.92 | -0.042143139 | 2008/02/15 | 29,138.92 | -0.013563222 | 2008/03/31 | 30,089.90 | 0.018551608 |
| 2008/01/08 | 28,152.56 | -0.047999667 | 2008/02/18 | 28,744.81 | -0.02718073 | 2008/04/01 | 30,912.99 | 0.045538525 |
| 2008/01/09 | 28,267.78 | -0.043915319 | 2008/02/19 | 29,172.21 | -0.012421415 | 2008/04/02 | 31,787.68 | 0.073440834 |
| 2008/01/10 | 28,401.61 | -0.039192126 | 2008/02/20 | 28,899.97 | -0.021797402 | 2008/04/03 | 31,467.87 | 0.063329066 |
| 2008/01/11 | 29,069.56 | -0.015946381 | 2008/02/21 | 29,224.44 | -0.010632614 | 2008/04/04 | 31,689.61 | 0.070350908 |
| 2008/01/14 | 28,729.38 | -0.027717667 | 2008/02/22 | 29,361.32 | -0.005959797 | 2008/04/07 | 31,545.37 | 0.065788868 |
| 2008/01/15 | 28,607.45 | -0.031970786 | 2008/02/25 | 29,528.79 | -0.00027224 | 2008/04/08 | 31,715.44 | 0.071165669 |
| 2008/01/16 | 27,961.85 | -0.054796878 | 2008/02/26 | 29,962.88 | 0.014321323 | 2008/04/09 | 31,726.86 | 0.071525681 |
| 2008/01/17 | 27,343.57 | -0.077156559 | 2008/02/27 | 30,228.08 | 0.023133334 | 2008/04/10 | 31,417.83 | 0.061737607 |
| 2008/01/18 | 26,698.66 | -0.101024582 | 2008/02/28 | 30,424.76 | 0.029618791 | 2008/04/11 | 31,649.05 | 0.069070173 |
| 2008/01/21 | 26,713.83 | -0.10045655 | 2008/02/29 | 30,130.47 | 0.019898993 | 2008/04/14 | 31,302.57 | 0.058062244 |
| 2008/01/22 | 25,284.88 | -0.155431371 | 2008/03/03 | 28,918.52 | -0.021155739 | 2008/04/15 | 31,192.48 | 0.054539081 |
| 2008/01/23 | 26,892.74 | -0.093781598 | 2008/03/04 | 29,526.70 | -0.00034302 | 2008/04/16 | 31,375.95 | 0.060403717 |
| 2008/01/24 | 27,620.33 | -0.067085863 | 2008/03/05 | 29,261.11 | -0.009378629 | 2008/04/17 | 31,910.21 | 0.077288062 |
| 2008/01/25 | 27,905.13 | -0.056827416 | 2008/03/06 | 29,277.35 | -0.00882378 | 2008/04/18 | 31,785.99 | 0.073387667 |
| 2008/01/28 | 27,379.92 | -0.075828061 | 2008/03/07 | 28,717.04 | -0.028147284 | 2008/04/21 | 31,795.68 | 0.073692472 |
| 2008/01/29 | 27,758.93 | -0.062080369 | 2008/03/10 | 28,612.75 | -0.031785537 | 2008/04/22 | 32,095.04 | 0.083063542 |
| 2008/01/30 | 28,263.95 | -0.044050818 | 2008/03/11 | 28,207.29 | -0.046057504 | 2008/04/23 | 32,039.72 | 0.081338424 |
| 2008/01/31 | 28,296.80 | -0.042889235 | 2008/03/12 | 29,466.17 | -0.002395134 | 2008/04/24 | 31,847.98 | 0.075335998 |
| 2008/02/01 | 28,793.64 | -0.02548343 | 2008/03/13 | 29,283.40 | -0.008617157 | 2008/04/25 | 31,746.23 | 0.072136019 |
| 2008/02/05 | 29,429.93 | -0.003625776 | 2008/03/14 | 29,703.09 | 0.005613122 | 2008/04/28 | 31,009.02 | 0.048640171 |
| 2008/02/06 | 28,086.97 | -0.050332191 | 2008/03/18 | 29,048.51 | -0.016670768 | 2008/04/29 | 30,623.39 | 0.036126137 |
| 2008/02/07 | 27,929.29 | -0.055962 | 2008/03/19 | 29,515.55 | -0.000720716 | 2008/04/30 | 30,270.64 | 0.024540307 |
| 2008/02/08 | 28,088.32 | -0.050284128 | 2008/03/24 | 29,071.34 | -0.01588515 | 2008/05/02 | 30,281.41 | 0.024896034 |
| 2008/02/11 | 28,185.26 | -0.046838813 | 2008/03/25 | 29,634.16 | 0.003289791 | 2008/05/05 | 30,551.47 | 0.033774843 |

*Valores de cierre del día inmediato anterior. (Yahoo! México Finanzas)

Tabla A9 Serie de datos de precios de cierre ajustados para el ejercicio con la acción de ELEKTRA (cifras en pesos)*

| Fecha | ELEKTRA | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ | Fecha | ELEKTRA | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ | Fecha | ELEKTRA | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ |
|------------|---------|-----------------------|------------|---------|-----------------------|------------|---------|-----------------------|
| 01/08/2007 | 214.06 | | 13/09/2007 | 216.50 | 0.011334198 | 26/10/2007 | 242.00 | 0.122681377 |
| 02/08/2007 | 214.37 | 0.001447144 | 14/09/2007 | 217.69 | 0.016815683 | 29/10/2007 | 241.95 | 0.122474744 |
| 03/08/2007 | 215.25 | 0.005543794 | 17/09/2007 | 217.00 | 0.013641004 | 30/10/2007 | 240.00 | 0.114382574 |
| 06/08/2007 | 205.01 | -0.043197591 | 18/09/2007 | 217.00 | 0.013641004 | 31/10/2007 | 246.90 | 0.142727047 |
| 07/08/2007 | 214.40 | 0.00158708 | 19/09/2007 | 217.00 | 0.013641004 | 01/11/2007 | 244.50 | 0.132958959 |
| 08/08/2007 | 212.00 | -0.009670075 | 20/09/2007 | 217.86 | 0.017596305 | 05/11/2007 | 248.66 | 0.149830152 |
| 09/08/2007 | 218.54 | 0.020712715 | 21/09/2007 | 218.15 | 0.01892655 | 06/11/2007 | 248.99 | 0.151156385 |
| 10/08/2007 | 209.41 | -0.021962297 | 24/09/2007 | 216.62 | 0.011888317 | 07/11/2007 | 247.00 | 0.143131987 |
| 13/08/2007 | 205.57 | -0.040469741 | 25/09/2007 | 218.00 | 0.018238713 | 08/11/2007 | 245.35 | 0.136429413 |
| 14/08/2007 | 207.50 | -0.03112501 | 26/09/2007 | 217.78 | 0.017229029 | 09/11/2007 | 244.00 | 0.130911876 |
| 15/08/2007 | 203.02 | -0.052951853 | 27/09/2007 | 221.00 | 0.031906352 | 12/11/2007 | 239.99 | 0.114340906 |
| 16/08/2007 | 200.00 | -0.067938983 | 28/09/2007 | 222.04 | 0.036601196 | 13/11/2007 | 241.62 | 0.121109895 |
| 17/08/2007 | 199.99 | -0.067988984 | 01/10/2007 | 223.10 | 0.041363752 | 14/11/2007 | 243.50 | 0.128860593 |
| 20/08/2007 | 199.82 | -0.068839388 | 02/10/2007 | 222.85 | 0.04024255 | 15/11/2007 | 238.04 | 0.106182377 |
| 21/08/2007 | 202.00 | -0.057988652 | 03/10/2007 | 221.52 | 0.034256529 | 16/11/2007 | 233.18 | 0.085554338 |
| 22/08/2007 | 202.70 | -0.054529296 | 04/10/2007 | 220.00 | 0.027371197 | 20/11/2007 | 241.13 | 0.119079858 |
| 23/08/2007 | 203.00 | -0.053050371 | 05/10/2007 | 219.50 | 0.025095883 | 21/11/2007 | 240.00 | 0.114382574 |
| 24/08/2007 | 205.00 | -0.04324637 | 08/10/2007 | 223.00 | 0.040915422 | 22/11/2007 | 244.00 | 0.130911876 |
| 27/08/2007 | 206.90 | -0.034020765 | 09/10/2007 | 225.00 | 0.049844053 | 23/11/2007 | 242.00 | 0.122681377 |
| 28/08/2007 | 215.00 | 0.004381679 | 10/10/2007 | 225.50 | 0.052063809 | 26/11/2007 | 245.50 | 0.137040598 |
| 29/08/2007 | 208.75 | -0.025118986 | 11/10/2007 | 220.66 | 0.030366706 | 27/11/2007 | 242.19 | 0.123466193 |
| 30/08/2007 | 214.00 | -0.000280335 | 12/10/2007 | 215.10 | 0.004846687 | 28/11/2007 | 242.28 | 0.123837733 |
| 31/08/2007 | 218.70 | 0.021444578 | 15/10/2007 | 219.00 | 0.02281538 | 29/11/2007 | 243.15 | 0.127422187 |
| 03/09/2007 | 218.90 | 0.022358655 | 16/10/2007 | 218.00 | 0.018238713 | 30/11/2007 | 243.00 | 0.126805094 |
| 04/09/2007 | 219.10 | 0.023271897 | 17/10/2007 | 215.83 | 0.008234711 | 03/12/2007 | 257.57 | 0.185035178 |
| 05/09/2007 | 222.00 | 0.036421032 | 18/10/2007 | 223.00 | 0.040915422 | 04/12/2007 | 270.00 | 0.232165609 |
| 06/09/2007 | 219.50 | 0.025095883 | 19/10/2007 | 236.00 | 0.097575455 | 05/12/2007 | 290.00 | 0.303624573 |
| 07/09/2007 | 216.39 | 0.010825986 | 22/10/2007 | 236.00 | 0.097575455 | 06/12/2007 | 297.89 | 0.330467941 |
| 10/09/2007 | 218.43 | 0.020209248 | 23/10/2007 | 240.50 | 0.11646374 | 07/12/2007 | 302.80 | 0.346816172 |
| 11/09/2007 | 217.50 | 0.015942501 | 24/10/2007 | 239.09 | 0.110583701 | 10/12/2007 | 298.94 | 0.333986535 |
| 12/09/2007 | 216.99 | 0.01359492 | 25/10/2007 | 240.00 | 0.114382574 | 11/12/2007 | 296.00 | 0.324103105 |

*Valores de cierre ajustado para dividendos y fraccionamientos del día inmediato anterior. (Yahoo! México Finanzas)

Tabla A10 Serie de datos para el ejercicio con la acción de PEÑOLES (cifras en pesos)

| Fecha | PEÑOLES | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ | Fecha | PEÑOLES | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ | Fecha | PEÑOLES | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ |
|------------|---------|-----------------------|------------|---------|-----------------------|------------|---------|-----------------------|
| 01/08/2007 | 144.04 | | 13/09/2007 | 151.40 | 0.049834302 | 26/10/2007 | 232.79 | 0.480045721 |
| 02/08/2007 | 144.08 | 0.000277662 | 14/09/2007 | 152.72 | 0.058515141 | 29/10/2007 | 243.66 | 0.525682772 |
| 03/08/2007 | 142.26 | -0.012434669 | 17/09/2007 | 152.40 | 0.056417604 | 30/10/2007 | 250.67 | 0.554046294 |
| 06/08/2007 | 142.11 | -0.013489633 | 18/09/2007 | 154.01 | 0.066926497 | 31/10/2007 | 244.09 | 0.527445971 |
| 07/08/2007 | 140.00 | -0.028448616 | 19/09/2007 | 160.88 | 0.110567707 | 01/11/2007 | 255.93 | 0.574812931 |
| 08/08/2007 | 141.06 | -0.020905707 | 20/09/2007 | 169.06 | 0.160162643 | 05/11/2007 | 252.68 | 0.562032827 |
| 09/08/2007 | 142.45 | -0.011099978 | 21/09/2007 | 182.94 | 0.239067191 | 06/11/2007 | 231.00 | 0.472326672 |
| 10/08/2007 | 141.60 | -0.017084858 | 24/09/2007 | 188.43 | 0.268635546 | 07/11/2007 | 246.10 | 0.535646919 |
| 13/08/2007 | 143.04 | -0.006966727 | 25/09/2007 | 199.99 | 0.328176327 | 08/11/2007 | 246.81 | 0.538527771 |
| 14/08/2007 | 134.83 | -0.066076313 | 26/09/2007 | 196.69 | 0.311537846 | 09/11/2007 | 258.00 | 0.582868546 |
| 15/08/2007 | 134.48 | -0.06867555 | 27/09/2007 | 194.40 | 0.299826853 | 12/11/2007 | 257.50 | 0.580928681 |
| 16/08/2007 | 135.95 | -0.057803868 | 28/09/2007 | 187.25 | 0.262353584 | 13/11/2007 | 246.60 | 0.537676552 |
| 17/08/2007 | 129.46 | -0.106719086 | 01/10/2007 | 183.99 | 0.24479037 | 14/11/2007 | 251.02 | 0.555441578 |
| 20/08/2007 | 136.94 | -0.050548165 | 02/10/2007 | 185.89 | 0.255064062 | 15/11/2007 | 249.40 | 0.548966994 |
| 21/08/2007 | 136.00 | -0.057436153 | 03/10/2007 | 194.03 | 0.297921748 | 16/11/2007 | 235.02 | 0.489579578 |
| 22/08/2007 | 134.14 | -0.071207008 | 04/10/2007 | 191.63 | 0.285475391 | 20/11/2007 | 234.30 | 0.486511307 |
| 23/08/2007 | 137.89 | -0.043634773 | 05/10/2007 | 188.59 | 0.269484308 | 21/11/2007 | 230.50 | 0.470159824 |
| 24/08/2007 | 138.50 | -0.039220713 | 08/10/2007 | 190.47 | 0.279403663 | 22/11/2007 | 222.41 | 0.434431487 |
| 27/08/2007 | 141.91 | -0.014897985 | 09/10/2007 | 204.95 | 0.352675008 | 23/11/2007 | 227.86 | 0.458640366 |
| 28/08/2007 | 144.00 | -0.000277739 | 10/10/2007 | 205.60 | 0.355841495 | 26/11/2007 | 239.49 | 0.508420624 |
| 29/08/2007 | 140.35 | -0.025951736 | 11/10/2007 | 209.94 | 0.376730737 | 27/11/2007 | 217.28 | 0.411095806 |
| 30/08/2007 | 144.00 | -0.000277739 | 12/10/2007 | 218.20 | 0.415321035 | 28/11/2007 | 230.41 | 0.469769292 |
| 31/08/2007 | 143.67 | -0.002572036 | 15/10/2007 | 218.06 | 0.414679215 | 29/11/2007 | 239.40 | 0.508044754 |
| 03/09/2007 | 147.33 | 0.02258393 | 16/10/2007 | 234.00 | 0.485230077 | 30/11/2007 | 248.99 | 0.547321696 |
| 04/09/2007 | 148.90 | 0.033183901 | 17/10/2007 | 236.94 | 0.497715906 | 03/12/2007 | 261.37 | 0.595845989 |
| 05/09/2007 | 149.96 | 0.040277553 | 18/10/2007 | 239.17 | 0.507083557 | 04/12/2007 | 267.99 | 0.620858628 |
| 06/09/2007 | 148.90 | 0.033183901 | 19/10/2007 | 228.00 | 0.45925459 | 05/12/2007 | 270.00 | 0.62833092 |
| 07/09/2007 | 155.11 | 0.074043504 | 22/10/2007 | 228.00 | 0.45925459 | 06/12/2007 | 288.08 | 0.693147181 |
| 10/09/2007 | 155.16 | 0.074365804 | 23/10/2007 | 217.50 | 0.412107812 | 07/12/2007 | 308.25 | 0.760820103 |
| 11/09/2007 | 154.00 | 0.066861564 | 24/10/2007 | 233.11 | 0.481419406 | 10/12/2007 | 290.81 | 0.702579094 |
| 12/09/2007 | 155.00 | 0.073334078 | 25/10/2007 | 236.00 | 0.493740766 | 11/12/2007 | 268.00 | 0.620895942 |

*Valores de cierre ajustado para dividendos y fraccionamientos del día inmediato anterior. (Yahoo! México Finanzas)

Tabla A11 Serie de datos para el ejercicio con la acción de AMX-L (cifras en pesos)*

| Fecha | AMX-L | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ | Fecha | AMX-L | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ | Fecha | AMX-L | $X(t)=\ln(S(t)/S(0))$ |
|------------|-------|-----------------------|------------|-------|-----------------------|------------|-------|-----------------------|
| 01/08/2007 | 32.71 | | 13/09/2007 | 33.19 | 0.014567784 | 26/10/2007 | 34.72 | 0.059635048 |
| 02/08/2007 | 31.73 | -0.030418236 | 14/09/2007 | 33.99 | 0.038385522 | 29/10/2007 | 35.25 | 0.074784688 |
| 03/08/2007 | 32.55 | -0.004903473 | 17/09/2007 | 33.86 | 0.034553535 | 30/10/2007 | 35.62 | 0.085226436 |
| 06/08/2007 | 31.57 | -0.035473539 | 18/09/2007 | 33.72 | 0.030410292 | 31/10/2007 | 35.11 | 0.070805149 |
| 07/08/2007 | 32.03 | -0.021007878 | 19/09/2007 | 34.67 | 0.058193918 | 01/11/2007 | 33.87 | 0.034848825 |
| 08/08/2007 | 32.62 | -0.002755244 | 20/09/2007 | 34.74 | 0.060210919 | 05/11/2007 | 33.09 | 0.01155028 |
| 09/08/2007 | 33.11 | 0.01215451 | 21/09/2007 | 34.62 | 0.056750708 | 06/11/2007 | 33.14 | 0.01306017 |
| 10/08/2007 | 32.13 | -0.017890668 | 24/09/2007 | 35.04 | 0.068809425 | 07/11/2007 | 33.61 | 0.0271428 |
| 13/08/2007 | 31.51 | -0.037375886 | 25/09/2007 | 34.97 | 0.06680971 | 08/11/2007 | 32.50 | -0.006440752 |
| 14/08/2007 | 31.63 | -0.033574804 | 26/09/2007 | 34.53 | 0.05414767 | 09/11/2007 | 32.12 | -0.018201952 |
| 15/08/2007 | 30.81 | -0.059841529 | 27/09/2007 | 34.94 | 0.065951463 | 12/11/2007 | 31.95 | -0.023508661 |
| 16/08/2007 | 30.02 | -0.085817015 | 28/09/2007 | 35.30 | 0.076202122 | 13/11/2007 | 30.58 | -0.067334641 |
| 17/08/2007 | 30.31 | -0.07620315 | 01/10/2007 | 34.89 | 0.064519414 | 14/11/2007 | 32.48 | -0.007056326 |
| 20/08/2007 | 32.12 | -0.018201952 | 02/10/2007 | 35.70 | 0.087469847 | 15/11/2007 | 32.71 | 0 |
| 21/08/2007 | 31.64 | -0.033258699 | 03/10/2007 | 36.11 | 0.098888994 | 16/11/2007 | 32.04 | -0.020695719 |
| 22/08/2007 | 31.50 | -0.037693296 | 04/10/2007 | 35.12 | 0.071089927 | 20/11/2007 | 32.84 | 0.003966443 |
| 23/08/2007 | 32.29 | -0.012923257 | 05/10/2007 | 34.45 | 0.051828156 | 21/11/2007 | 32.15 | -0.017268391 |
| 24/08/2007 | 32.90 | 0.005791816 | 08/10/2007 | 35.47 | 0.081006427 | 22/11/2007 | 31.82 | -0.027585819 |
| 27/08/2007 | 33.31 | 0.018176811 | 09/10/2007 | 35.75 | 0.088869428 | 23/11/2007 | 31.87 | -0.026015713 |
| 28/08/2007 | 33.34 | 0.019077036 | 10/10/2007 | 35.51 | 0.082133505 | 26/11/2007 | 31.65 | -0.032942693 |
| 29/08/2007 | 32.13 | -0.017890668 | 11/10/2007 | 35.63 | 0.085507138 | 27/11/2007 | 30.90 | -0.056924658 |
| 30/08/2007 | 32.70 | -0.000305764 | 12/10/2007 | 35.77 | 0.089428712 | 28/11/2007 | 30.91 | -0.056601085 |
| 31/08/2007 | 32.70 | -0.000305764 | 15/10/2007 | 36.52 | 0.110179214 | 29/11/2007 | 32.38 | -0.010139893 |
| 03/09/2007 | 33.37 | 0.019976451 | 16/10/2007 | 35.85 | 0.091662725 | 30/11/2007 | 32.79 | 0.002442749 |
| 04/09/2007 | 33.65 | 0.028332215 | 17/10/2007 | 35.75 | 0.088869428 | 03/12/2007 | 33.55 | 0.025356022 |
| 05/09/2007 | 33.93 | 0.036618737 | 18/10/2007 | 36.87 | 0.119717371 | 04/12/2007 | 34.25 | 0.046005723 |
| 06/09/2007 | 33.88 | 0.035144028 | 19/10/2007 | 37.15 | 0.12728293 | 05/12/2007 | 34.35 | 0.048921177 |
| 07/09/2007 | 33.68 | 0.029223348 | 22/10/2007 | 37.15 | 0.12728293 | 06/12/2007 | 35.23 | 0.074217151 |
| 10/09/2007 | 32.91 | 0.006095721 | 23/10/2007 | 35.89 | 0.092777864 | 07/12/2007 | 35.15 | 0.071943777 |
| 11/09/2007 | 32.83 | 0.00366189 | 24/10/2007 | 36.28 | 0.103585784 | 10/12/2007 | 35.08 | 0.069950326 |
| 12/09/2007 | 33.40 | 0.020875058 | 25/10/2007 | 35.90 | 0.093056454 | 11/12/2007 | 34.64 | 0.057328242 |

*Valores de cierre ajustado para dividendos y fraccionamientos del día inmediato anterior. (Yahoo! México Finanzas)

Anexo III. Cálculo del IPC (Índice de Precios y Cotizaciones)

En la página de la BMV (14) podemos encontrar la nota metodológica del IPC. Veamos a grandes rasgos el método usado hasta antes del 11 de abril de 2012.

Como sabemos el IPC es el principal indicador de la Bolsa Mexicana de Valores; es un índice que muestra el rendimiento del mercado accionario en función de los rendimientos de una muestra de acciones balanceada, ponderada y representativa que cotizan en la Bolsa.

El objetivo de este índice es constituirse como un indicador representativo del Mercado Mexicano y servir como subyacente de productos financieros.

El número de series accionarias que conforman la muestra del índice es de 35 series, las cuales podrían variar durante el periodo de vigencia por movimientos corporativos. La muestra debe cumplir con ciertos criterios de selección.

Esta selección se basa en dos indicadores: la rotación diaria y el valor de mercado ajustado por acciones flotantes:

- a) Primer filtro. Son elegibles las series accionarias cuyo valor de capitalización ajustado por acciones flotantes (utilizando el porcentaje de acciones flotantes redondeado de acuerdo a las bandas definidas por la BMV) sea mayor o igual al 0.1% del valor de capitalización del IPC al momento de la selección.

- b) Segundo filtro. Son elegibles las series accionarias que ocupen los primeros 45 lugares de acuerdo a la rotación de aquellas que hayan pasado el primer filtro.

Las emisoras que hayan pasados los filtros se ordenarán de acuerdo a su rotación y valor de mercado ajustado por acciones flotantes de mayor a menor, y se calificarán con base en el lugar que ocupen en cada criterio, de acuerdo a la siguiente tabla:

| Lugar | Calificación |
|-------|--------------|
| <= 35 | 1 |
| 36 | 2 |
| 37 | 3 |
| ... | ... |
| 44 | 10 |
| 45 | 11 |

Se sumarán las calificaciones, y se ordenarán las series de menor a mayor con base en esta suma.

Formarán parte del índice las 35 series accionarias que ocupen los primeros 35 lugares de acuerdo a esta calificación.

Si existieran dos o más series que presenten la misma calificación final, y no hubiera suficientes lugares disponibles en la muestra, se seleccionan las series con mayor valor de mercado ajustado por acciones flotantes.

No serán consideradas para la muestra, aquellas series accionarias que tengan menos de 3 meses de operación continua (emisoras de reciente inscripción), así como aquellas que por alguna causa exista la posibilidad concreta de ser suspendidas o retiradas del mercado.

Ponderación de las series

La ponderación de las series se calcula considerando el Valor de Mercado Flotado o ajustado por Acciones Flotantes.⁵

Para ponderación se utilizará la siguiente fórmula:

$$\omega_i = \frac{VMAF_i}{VMAF}$$

⁵ Las acciones flotantes son aquellas que se encuentran efectivamente disponibles para el público inversionista. No se consideran acciones flotantes las que están en posesión de: Accionistas de control, Directivos claves y consejeros no independientes, Empresas tenedoras, Fondos de pensiones u opciones de empleados y Socios estratégicos.

Donde:

ω_i = Peso relativo de cada serie accionaria dentro de la muestra del Índice.

$VMAF$ = Valor de Mercado ajustado por acciones flotantes del total de series accionarias de la muestra del índice.

$VMAF_i$ = Valor de Mercado ajustado por acciones flotantes de la serie accionaria i

$$VMAF_i = (FAF_i * Q_i) * P_i$$

donde:

FAF_i = Factor de ajuste por acciones flotantes de la serie accionaria i

Q_i = Número de acciones inscritas en Bolsa de la serie accionaria i

P_i = Último precio registrado en Bolsa de la serie accionaria i

Ponderaciones máximas

Con el fin de evitar concentraciones en los pesos o ponderaciones de los componentes del IPC y siguiendo las mejores prácticas internacionales, la participación máxima que una serie accionaria puede tener al inicio de la vigencia de la muestra es de 25%. Las 5 series accionarias más importantes de la muestra, no podrán tener una ponderación conjunta de más del 60%.

En caso de que los límites antes mencionados se rebasen, los pesos relativos se ajustarán a estos límites redistribuyendo el o los excesos de peso relativo proporcionalmente entre las series que integran la muestra.

Para el caso del límite del 60%, si durante la vigencia de la muestra ya ajustada se volviera a rebasar el límite por 45 días consecutivos de negociación, la BMV realizará nuevamente el ajuste correspondiente para cumplir con los límites de concentración estipulados para el Índice IPC.

Revisión y permanencia de la Muestra

La revisión de las series accionarias que forman el IPC se realizará una vez al año en el mes de agosto y entrará en vigor el primer día hábil del mes de septiembre, siempre y cuando no se presente alguna situación especial, ya que de ser así se harían las modificaciones necesarias de acuerdo al evento corporativo o de mercado que lo propicie.

La Bolsa informará al mercado con la mayor oportunidad posible sobre los cambios relativos a este apartado.

Cálculo diario del Índice

En la mecánica de Cálculo del índice se utiliza la siguiente fórmula:

$$I_t = I_{t-1} \left(\frac{\sum P_{it} * (Q_{it} * FAF_i)}{\sum P_{it-1} * (Q_{it-1} * FAF_i) * f_{it-1}} \right)$$

donde:

I_t = Índice en el día t

P_{it} = Precio de la serie accionaria i en el día t

Q_{it} = Acciones de la serie accionaria i en el día t

FAF_i = Factor de ajuste por Acciones Flotantes de la serie accionaria i

f_i = Factor de ajuste por ex -derechos de la serie accionaria i en el día t

i = 1, 2, 3, ..., n

Base 0.78 = 30 de octubre de 1978

La fórmula seleccionada para el cálculo del Índice IPC, considera el cambio en el número de acciones inscritas producto de un evento corporativo incide en los pesos relativos de las series accionarias dentro de la muestra, ya sea al momento de su rebalanceo periódico o al momento de su aplicación, según sea el caso.

Los eventos corporativos considerados que hacen que se ajuste la muestra son:

- Recompras
- Pago de dividendo en accione
- Suscripción
- Canje de Títulos
- Split y Split Inverso
- Reembolso
- Escisión
- Fusión
- No está catalogado como derecho corporativo

A partir de 11 de abril de 2012 existe una nueva metodología la cual puede ser consultada en la página de la BMV (14)