UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA EN SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

VALUACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS CON METODOLOGÍAS ALTERNATIVAS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERÍA

PRESENTA:

CATALINA TREVILLA ROMÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ
ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMÍA, INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

MÉXICO, D. F. AGOSTO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	DR. JOSÉ JESÚS ACOSTA FLORES
Secretario:	DR. GABRIEL DE LAS NIEVES SÁNCHEZ GUERRERO
Vocal:	DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ
1 er. Suplente:	DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA
2 do. Suplente:	DR. RICARDO ACEVES GARCÍA

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

FIRMA

Por ser parte esencial en mi vida, dedico el significado de esta tesis a:

Mis padres Consuelo y Antonio

Mis hermanos Antonio, Jorge y Oscar

Mi sobrino Oscar Uriel

Y a quienes con su amor, amistad, cariño y apoyo

contribuyeron a concluir este proyecto.

Agradecimientos

A Dios por el todo que es mi vida. A mis padres por su amor y apoyo. A mis hermanos por existir, por compartir nuestras vidas, por su complicidad y cariño. A Oscarín por su existencia iluminadora.

Al Dr. Francisco Venegas Martínez por aceptar dirigir este trabajo, por su paciencia y comprensión a pesar del tiempo, por su apoyo, sus enseñanzas desde mi época de estudiante, por impulsar y motivar la culminación de esta tesis.

A la Dra. Idalia Flores De la Mota, de quien además tuve la fortuna de ser su estudiante. Al Dr. José Jesús Acosta Flores, quien también fue mi maestro y tutor, al Dr. Gabriel De las Nieves Sánchez Guerrero y al Dr. Ricardo Aceves García a quienes tuve el gusto de conocer durante este proceso. A todos ellos les agradezco formar parte del jurado y también su apoyo en este importante proceso final, así como sus comentarios a esta tesis en un corto tiempo, lo cual contribuyó a complementar este trabajo.

Al Dr. Sergio Fuentes Maya por sus enseñanzas en el aula: una enriquecedora combinación académica y de sentido existencial.

A Mony por ser motor en esta tesis, por sus consejos en lo laboral, académico y personal, pero sobre todo por su amistad y cariño.

A Larry y a Rick por dibujar una sonrisa en mi rostro cuando las cosas no van bien.

A Xo por compartir su filosofía de vida: mezcla de oriente y occidente.

A Fernando por ayudarme a ver con claridad.

Al Dr. Carlos Hernández Garciadiego por sus enseñanzas y disipar mis dudas.

A Javier por ser mi maestro, por su apoyo constante y por siempre tener un espacio para mí en su ocupada agenda.

Amiga Luna, gracias por compartir ese espacio-tiempo.

A Marypaz por su invaluable apoyo moral y en todos los trámites administrativos que implica este proceso.

A todas las personas que me apoyaron en los trámites administrativos, principalmente SACC Sistemas, registro escolar y la UAP.

A mi familia y amigos les agradezco su comprensión por mi casi inexistencia durante este proceso.

A los seres de luz que iluminan mi camino.

Contenido

Introducción

El desarrollo de las tecnologías de información ha producido una revolución en el mundo financiero, de manera particular, en las formas de operar y de valuar las opciones en el mercado de productos derivados. En 1973 Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton encontraron la fórmula, usada actualmente, para la valuación de opciones; tarea nada sencilla pues implica resolver una ecuación diferencial parcial con tantas dimensiones como variables de estado tenga el problema.

Ante esta complejidad se han buscando métodos alternativos para facilitar la valuación de opciones, como los métodos numéricos, en particular el Monte Carlo. Este método aproxima de manera directa el comportamiento estocástico del valor del subyacente. Debido al número de cálculos e iteraciones necesarias para valuar opciones, este método es prácticamente imposible de aplicar sin el uso de una computadora.

Es importante mencionar que no son los únicos métodos de valuación de opciones, existe también el método Binomial de Cox, Ross y Rubinstein desarrollado en 1976. Este es un método numérico basado en la generación de árboles binomiales, el cual se explicará en el segundo capítulo y que, al igual que el método Monte Carlo, aproxima el valor del subyacente.

Otros métodos para valuar opciones son el de resolución por diferencias finitas propuesto en 1977 por Michael Brennan y Eduardo Schwartz; o bien, el método de integración numérica. Estos métodos se caracterizan por aproximar la ecuación diferencial parcial mencionada.

En el primer capítulo se presentará un marco de referencia donde se definen los conceptos generales de los productos derivados, como: su definición, historia, forma de operar, entre otros conceptos necesarios para comprender el tema. En el segundo capítulo se abordarán los conceptos teóricos sobre las opciones incluyendo los tipos de opciones y métodos de valuación. En el tercer capítulo se profundizará en el modelo de Black-Scholes-Merton. Se incluirán algunos conceptos importantes que ayudarán a entender este modelo de manera general y que serán necesarios para relacionarlo con el método Monte Carlo. Este capítulo concluirá con la valuación de algunas acciones que cotizan actualmente en la BMV, las cuales serán analizadas con el método Monte Carlo más adelante. En el último capítulo se describirá el método Monte Carlo, sus bases teóricas, un algoritmo para determinar el valor de una opción y la valuación de las mismas acciones del capítulo anterior. Se presentarán los resultados de las simulaciones con diferentes trayectorias y se analizarán También se incluirá el tiempo de ejecución en cada caso con el propósito de observar la relación tiempo-precisión.

Por último, se presentarán las conclusiones y el código del programa en lenguaje R, creado y utilizado para realizar las simulaciones. Este programa se ejecutará en una laptop Sony Vaio, Core i3, 4GB en RAM.

Objetivo

El objetivo del presente trabajo es realizar un *benchmark* con los métodos de Black-Scholes-Merton y Monte Carlo en la valuación de opciones europeas tomando como referencia los resultados obtenidos por el primero. Se tomarán datos reales de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). En general se pretende:

1. Mostrar la facilidad de instrumentación del método Monte Carlo en la valuación de opciones europeas.

2. Proporcionar un programa en lenguaje R para realizar simulaciones de más de 100 mil trayectorias en un equipo de cómputo de escritorio o laptop. De esta manera el usuario podrá analizar diferentes escenarios según las variables que decida modificar. El programa permitirá al usuario modificar las variables para analizar diferentes escenarios.

3. Obtener el número de trayectorias necesarias con el método Montecarlo para llegar el valor obtenido por Black-Scholes-Merton en cada ejemplo y ver si existe algún número fijo de trayectorias en todos los ejemplos para tal propósito. Lo anterior para verificar la efectividad del método.

Capítulo 1
Productos Derivados

1.1 Antecedentes

La liquidez ha jugado un papel fundamental para el productor de alguna mercancía desde siglos atrás. Sobre todo, cuando no existían los créditos financieros como los conocemos actualmente. Se sabe que algunos comerciantes europeos en el siglo XII firmaban contratos en los que se comprometían a entregar su producto en una fecha futura. De esta manera, el comerciante tenía dos beneficios: garantizaba tener recursos para su producción y asegurar su venta. Por otro lado, el comprador también tenía dos beneficios: garantizaba tener el producto en la fecha pactada y también que el comerciante "respetaría" el precio independientemente de cualquier eventualidad. Estas *garantías* son la base de lo que actualmente se conoce como *Productos Derivados*.

1.2 Definición de producto derivado

Un *producto derivado* es un contrato cuyo precio se establece de acuerdo al valor del bien a comerciar. A dicho bien se le conoce como *activo o subyacente*.

1.3 Tipos de subyacentes

Existen dos tipos de bienes subyacentes:

a) *Commodity*. Materia prima cuyo precio se cotiza en los mercados internacionales, como: trigo, oro, petróleo, entre otros.

b) Instrumento financiero. Acciones, índices, monedas (tipo de cambio), instrumentos de deuda.

1.4 Mercados donde operan los productos derivados

Actualmente, los productos derivados se operan en dos tipos de mercados: los organizados y los extrabursátiles, conocidos también como *Over The Counter* (*OTC*), mercados paralelos no organizados o mercados de contratos a la medida.

El primer mercado organizado en el mundo fue la Bolsa de Comercio de Chicago (*Chicago Board of Trade*, CBOT), creada en 1848. Los bienes subyacentes sobre los que creaban productos derivados eran los granos. Actualmente se ha especializado en *commodities*. De la mano de la CBOT surgieron la Bolsa Mercantil de Chicago (*Chicago Mercantile Exchange*, CME) en 1919 y la Bolsa de Comercio de Opciones de Chicago (*Chicago Board of Options Exchange*, CBOE) en 1973. A partir de este año la CME se especializó en futuros y opciones financieras como monedas e instrumentos de deuda y la CBOE en derivados de opciones sobre acciones e índices de acciones.

Un dato interesante es que la CBOT, la CME y la CBOE operan el 85% de los productos derivados a nivel mundial.[1]

La CBOT y la CME son las dos bolsas más grandes de Estados Unidos de Norteamérica. Mientras que en Europa destacan la Euronext, fusionada con la Bolsa de Valores de Nueva York en 2006 y Eurex, copropiedad de la Bolsa Alemana (*Deutsche Börse*) y de la Bolsa Suiza. También destacan la Bolsa de Mercadorias y Futuros de Sao Paulo, el Mercado Financiero de Tokio, la Bolsa de Singapur y la Bolsa de Futuros de Sydney.[2]

A diferencia de los mercados organizados, en los mercados OTC se negocian instrumentos financieros como acciones, bonos, materias primas, swaps o derivados de crédito, directamente entre dos partes. Normalmente es entre un banco de inversión y el cliente por

---

[1] De Lara, A. (2012). *Productos derivados financieros. Instrumentos, valuación y cobertura de riesgos.* México: Limusa. Pág. 25.

[2] Una lista de las principales bolsas que negocian futuros y opciones está en: Hull, J. C. (2009). *Introducción a los mercados de futuros y opciones* (6a ed.). México: Pearson Prentice Hall. Pág. 543.

vía telefónica o por medios electrónicos. Este tipo de mercados suelen ser más flexibles que los organizados, pues los participantes pueden negociar los acuerdos; sin embargo, tiene la desventaja de incrementar el riesgo de incumplimiento, mientras que en los mercados organizados prácticamente este riesgo es inexistente.

1.5 Para qué se usan los productos derivados

Los productos derivados se usan para:

a) Cobertura de riesgos o *hedging*. Para proteger un producto derivado de la volatilidad de los precios de los activos. De esta manera, se reduce o elimina el riesgo.

b) Especulación. Para apostar sobre el precio del producto derivado y obtener una ganancia o rendimiento de acuerdo a su riesgo.

c) Arbitraje. Para realizar operaciones con dos o más instrumentos financieros y garantizar una utilidad.

Al agente que se encarga de la cobertura de riesgos se le conoce como *hedger* o *coberturista*, al segundo como *especulador* y al último *árbitro*.

1.6 Tipos de productos derivados. Primera generación

Los productos derivados más simples o de primera generación, conocidos como *plain vanilla*, son los contratos:

a) Adelantados o *forwards*.

b) Futuros.

c) *Swaps*.

d) *Opciones.*

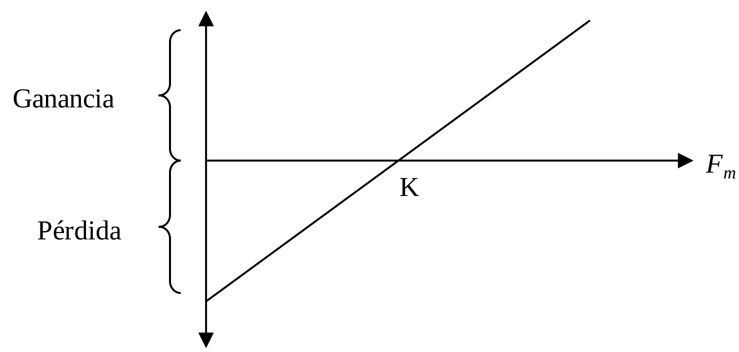
En este trabajo se profundizará en opciones.

1.7 Contratos adelantados o forwards

Un forward es un acuerdo entre dos partes donde están obligados a comprar o vender un activo en una fecha futura y a un precio pactado al momento de celebrar el contrato. Este tipo de contratos se operan sólo en el mercado OTC.

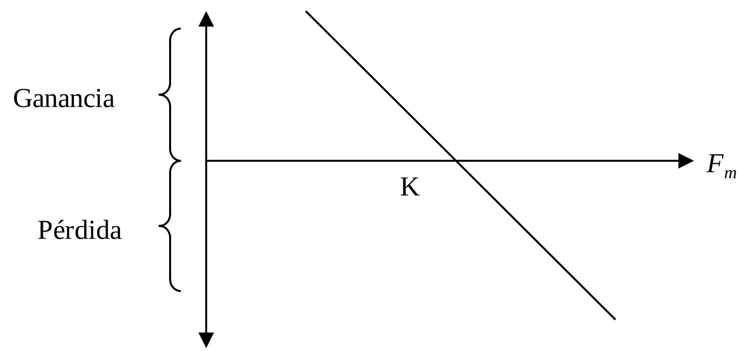
En estos contratos hay dos agentes: el comprador y el vendedor. Se dice que el comprador adquiere en una *posición larga*, mientras que el vendedor está en una *posición corta*.

Si se define como F_m el precio del activo en el mercado del forward y K el precio de venta pactado del activo, es claro que quien tiene la posición larga gana cuando F_m es mayor a K, pierde en caso contrario y ni pierde ni gana si son iguales (Gráfica 1).



Gráfica 1. Posición larga de un forward.

Por el contrario, quien está en la posición corta, gana cuando F_m es menor a K, pierde en caso contrario y ni pierde ni gana si son iguales (Gráfica 2). Se dice que el perfil de pago de una posición larga es $F_m - K$, mientras que el de una posición corta es $K - F_m$. De donde, si $F_m - K \geq 0$ el comprador al menos no pierde ni gana, pero el vendedor pierde. De manera análoga, si $F_m - K < 0$ el comprador pierde, pero el vendedor al menos no pierde ni gana.



Gráfica 2. Posición corta en un forward.

1.8 Contratos futuros

Un *futuro* también es un acuerdo entre dos partes donde están obligados a comprar o vender un activo en una fecha futura y a un precio pactado al momento de celebrar el contrato. Sin embargo, a diferencia de los forward, los contratos futuros son estandarizados y se operan en un mercado organizado o bolsa de productos derivados. El comprador y el vendedor, generalmente no se conocen. La presencia de un intermediario como el mercado organizado o bolsa de productos derivados, es una garantía para el cumplimiento del contrato. En este tipo de contratos no se especifica una fecha en transacción, sino más bien un periodo de tiempo que va desde unos días (menos de un mes) hasta un mes. Quien decide este periodo de tiempo es el agente en posición corta.

Los precios de los futuros obedecen a la oferta y la demanda en el mercado. Por ejemplo, si la bolsa publica el precio de un subyacente en K y hay más inversionista interesados en la posición larga que en la corta, entonces el precio sube. Si por el contrario es mayor el número de inversionistas en posición corta, el precio baja.

1.9 Contratos de swaps

Un *swap* es un contrato en el que los participantes en el mercado OTC acuerdan intercambiar flujos de efectivo en el futuro. Elaboran el contrato a modo.

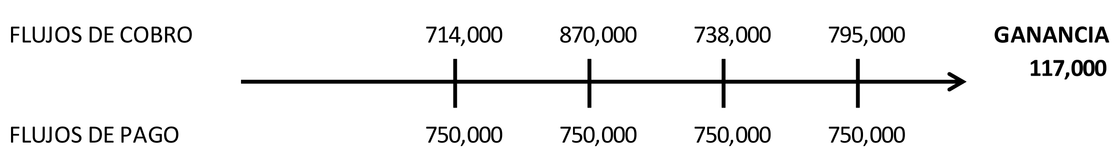
Existen swaps de tasa de interés, sobre divisas, commodities, sobre índices. El más común es un swap de tasa de interés conocido como *plain vanilla*. Se acuerda el pago de flujos de efectivo iguales a una tasa de interés fija predeterminada sobre un *principal nocional* (el bien en cuestión no se entrega físicamente, es sólo ficticio, por eso se le llama nocional) durante un número de años. Mientras que la contraparte recibe intereses a una tasa variable sobre el mismo principal nocional durante el mismo periodo. La tasa variable por excelencia es la LIBOR (*London Interbank Offered Rate*).

Por ejemplo, Bimbo y Tres Estrellas firman un swap bajo las siguientes condiciones:

1. El principal nocional será de 30 millones de pesos.
2. Los flujos de efectivo serán semestrales.
3. La duración del swap será de dos años.
4. Bimbo pagará a Tres Estrellas a una tasa del 5% anual (es la tasa fija).
5. Tres Estrellas pagará a Bimbo una tasa LIBOR (es la tasa variable) más dos puntos, a seis meses.
6. El swap se conviene el 1 de febrero de 2010.
7. El primer flujo será el 1 de agosto de 2010.

En este esquema, al vencimiento del swap Bimbo gana 117 mil pesos, los mismos que paga Tres Estrellas. A continuación se muestran en una línea de tiempo los flujos de efectivo.

FLUJOS DE EFECTIVO PARA BIMBO



	01-feb-10	01-ago-10	01-feb-11	01-ago-11	01-feb-12
TASA FIJA ANUAL		5%	5%	5%	5%
LIBOR A SEIS MESES	0.38%	0.90%	0.46%	0.65%	
LIBOR+2	2.38%	2.90%	2.46%	2.65%	
PRINCIPAL NOCIONAL	30,000,000				

1.10 Contratos de opciones

Una *opción* es un acuerdo mediante el cual se otorga el derecho, pero no la obligación, de ejercer el contrato, ya sea de compra o de venta del subyacente al final del contrato. Este beneficio lo compra quien posee la opción, llamado *tenedor*, mediante el pago de una prima. Esta prima no se devuelve al comprador de la opción. Existen dos tipos de opciones: de compra o *call option* y de venta o *put option*.

1.11 Tipos de productos derivados. Segunda generación

Estos productos comenzaron a operar en la última década del siglo pasado y son conocidos también como: *exóticos*. En realidad, siguen principios comunes con los de primera generación con alguna modificación estructural.

Una descripción detallada de estos productos derivados se puede consultar en el documento de investigación de Pablo Fernández del Instituto de Estudios Superiores de la Empresa de la Universidad de Navarra (IESE Business School) titulado *Derivados exóticos*. Algunos ejemplos de los derivados exóticos son:

a) Opciones digitales. Se diferencian de las de primera generación en el valor intrínseco, no es $S-K$ ni $K-S$, donde S es el valor del subyacente. Se dividen en: pulsos o binarias, opción sobre el subyacente, opción sobre otro activo distinto al subyacente, opción digital correlacionada y opción con pago diferido.

b) Opciones con valor dependiente de la trayectoria del subyacente. Estas opciones son: *lookback* (su valor depende de la cotización máxima o mínima alcanzada por el subyacente), asiáticas (su valor depende del promedio de los valores del subyacente durante toda o parte de la vida de la opción), pseudo-asiáticas (el precio de ejercicio es el promedio de los valores del subyacente durante toda o parte de la vida de la opción), asiáticas geométricas (opciones que pueden replicarse), barrera o condicionales (put o call ordinaria con una barrera que hace que la opción adquiera un valor fijo si el máximo o el mínimo de los valores del subyacente han topado con la barrera), opciones cuyo precio de ejercicio es el subyacente antes del ejercicio, *Boom* y *CashK* (tienen como precio de ejercicio una rentabilidad, por ejemplo, la rentabilidad de un índice; se necesita un valor nocional).

c) Opciones sobre opciones. Denominadas también opciones compuestas y son todas las combinaciones: call sobre call, call sobre put, put sobre put, put sobre call.

d) Opciones que dependen de varios subyacentes. Por ejemplo: cambiar un activo por otro, opciones sobre el mejor o el peor de los precios, sobre el producto de los precios.

e) Otras opciones exóticas como las opciones con inicio diferido (se compran antes de que comience el contrato), las opciones americanas con pago diferido (el flujo se recibe hasta el vencimiento, a pesar de que se pueden ejercer antes), las opciones apalancadas, las opciones exponenciales, entre otras.

f) Forwards exóticos, como: forward prorrogable (forward a un año sobre una acción de una empresa que puede prorrogarse otro año, si el tenedor del forward lo desea), contrato forward flexible (se ejercerá dentro de un año, el vendedor del contrato podrá entregar una o dos acciones de una empresa o uno o dos bonos cupón cero).

1.12 Panorama de los productos derivados en México

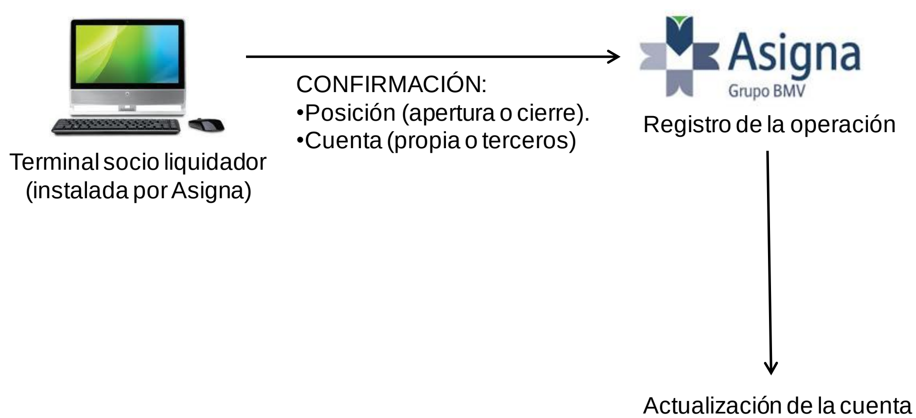
Los productos derivados en México comenzaron a operarse en la única institución financiera capaz de hacerlo en nuestro país: la BMV. La manera de operar, hasta hace un par de décadas, era en lo que se conoce como *piso de remates*, un área en la que convergían los financieros para comprar y vender por *viva voz,* como en un mercado sobre ruedas.

Con el advenimiento de las computadoras y la creación de software especializado, así como la propagación del internet en medios masivos, ha sido posible operar desde un escritorio.

El 15 de diciembre de 1998 se crea la Bolsa de Derivados en México, *MexDer*: Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. la cual ofrece contratos de futuros y opciones. Los mercados de derivados estandarizados cuentan con una Cámara de Compensación, quien se encarga de supervisar y garantizar que todas las operaciones en la bolsa de derivados se lleven a cabo en tiempo y forma. El organismo encargado de esta labor en nuestro país es *Asigna*, la Cámara de Compensación y Liquidación del MexDer. Asigna es un fideicomiso de Banamex Citigroup, BBVA Bancomer, JPMorgan, Santander-Serfin, Scotiabank-Inverlat y del Instituto para el Depósito de Valores S.D. (Indeval) constituido en 1998 en BBVA Bancomer. Tanto el MexDer como Asigna, están bajo la supervisión de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), Banco de México (BM) y de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV).

1.13 La operación de los productos derivados

El siguiente esquema muestra el proceso que lleva a cabo Asigna en la operación en los mercados organizados. Asigna, como órgano regulador de los productos derivados, instala una terminal a cada socio liquidador. En cuanto el socio liquidador hace una operación, debe avisar a Asigna su posición y la cuenta donde se hará el depósito o retiro. Una vez que Asigna registra la operación, procede a actualizar la cuenta. Diariamente Asigna realiza un proceso de liquidación llamado *mark-to-market*.



En cuanto a la operación OTC, los contratos no siguen un protocolo estandarizado, sino más bien a la medida de los involucrados. Las operaciones se confirman por medios electrónicos o por vía telefónica y son grabadas. No obstante el riesgo de incumplimiento implícito, toda vez que no existe un intermediario para regular el proceso, la mayoría de las operaciones son OTC.

Capítulo 2

Opciones

2.1 Antecedentes

Las opciones surgieron como una necesidad de contar con un instrumento con características generales de un futuro pero flexible. Esto es, realizar un contrato de compra o venta, con dos salvedades fundamentales y características de las opciones: la primera es que quien compra la opción adquiere un derecho de ejercer o no la compra o venta del subyacente al precio pactado y en el tiempo determinado; y la segunda se refiere al pago de una prima por adquirir la opción. En un futuro no existe un pago inicial por celebrar el contrato.

Es importante conocer algunos conceptos elementales de las opciones, toda vez que ya se han ubicado como un producto derivado según lo expuesto en el capítulo anterior, así como la forma de operar con estos productos derivados. Lo anterior para tener un contexto general al momento de pasar a la exposición del modelo de Black-Scholes-Merton y el método Monte Carlo en los siguientes capítulos.

2.2 Tipos de opciones por su naturaleza

Existen dos tipos de opciones:

a) De compra o *call*.

b) De venta o *put.*

Como se vio en el capítulo anterior, una *call* le da al tenedor el derecho, pero no la obligación de comprar un activo llamado *subyacente* durante la vigencia del contrato o en una fecha específica a cierto precio. El vendedor de la *call* tiene la obligación de vender, en caso de ejercerse el derecho de compra.

Por otro lado, la *put* le da al tenedor el derecho, pero no la obligación de vender un *subyacente* durante la vigencia del contrato o en una fecha específica a cierto precio. De manera análoga, si se ejerce el derecho de esta opción la contraparte está obligada a comprar el subyacente. El precio establecido en el contrato se conoce como *precio de ejercicio* o *precio strike* (K), la fecha estipulada en el contrato es la *fecha de vencimiento* (T).

2.3 Tipos de opciones por su fecha de vencimiento

De acuerdo al momento de ejercer la compra o venta se dividen en:

a) Europeas. Se ejerce sólo en la fecha de vencimiento.

b) Americanas. Se puede ejercer en cualquier momento de su vida. Un gran porcentaje de las opciones negociadas en las bolsas de valores son de este tipo.

La bolsa más grande del mundo para negociar opciones sobre acciones es la CBOE.

2.4 Tipos de opciones según el subyacente

Las opciones pueden elaborarse sobre:

a) Acciones. La mayoría se realizan en bolsas de valores. Normalmente se negocian en lotes de 100.

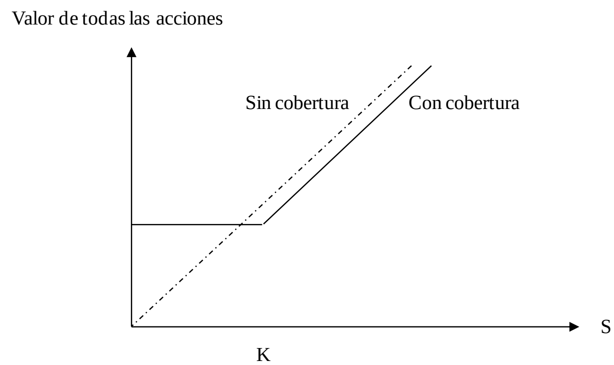
b) Divisas. La mayoría se realizan en el mercado OTC. Los lotes dependen del tipo de divisa a negociar.

c) Índices. Se negocian en ambos mercados sobre los índices de todo el mundo.

d) Futuros. Se negocian en bolsa.

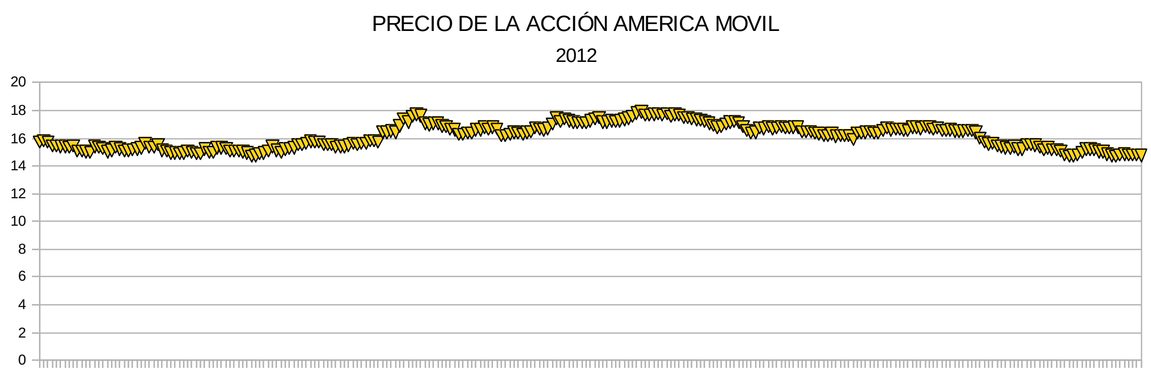
2.5 Cobertura

Una opción se usa para garantizar que el agente no perderá más de lo previsto ante un posible cambio en los mercados. Por ejemplo, si un agente tiene *n* número de acciones de una empresa con un valor de S_0, y quiere protegerse de una posible baja en el precio, decide comprar una opción con un precio *p*, en la que en el tiempo *T* puede vender sus acciones a un precio *K*. Si al tiempo *T*, resulta que S_T, el precio del mercado del subyacente es superior a *K*, decidirá no ejercer su derecho de venta y sólo pierde *p*. Si por el contrario $S_T < K$, entonces decidirá ejercer la opción y vender. La siguiente gráfica muestra el valor de la acción con cobertura y sin cobertura (Gráfica 3), contempla el pago de la prima. Se observa que el valor total de las acciones se asegura al comprar la opción ante el riesgo de una baja en el precio. Si no se comprara la opción se incurriría una pérdida considerable. En caso de no disminuir el precio de la acción al tiempo *T*, lo único que se pierde es el pago de la prima *p*.



Gráfica 3. Valor de las acciones con y sin cobertura.

Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra el comportamiento de la acción *America Movil, S.A B. de C.V.* (AMXL.MX) durante 2012. El 31 de diciembre de 2012 cerró en 14.76. El 1 de enero de 2013 tuvo un valor de 14.9. Un agente piensa comprar 1,000 acciones el 1 de marzo de 2013. Para cubrirse de una posible alza en el precio, adquiere una call en 0.5 con un precio de ejercicio de 14.86, con lo que garantiza un precio tope.



El agente paga 500 por la call. Al paso de los dos meses, el 1 de marzo de 2013, el valor de la opción es de 16.19, por lo que ejerce la call y compra a 14.86. De esta manera, paga 14,860 por las 1,000 acciones, con lo que obtiene una ganancia bruta de 1,330 y neta (descontando la prima) de 830. En el caso de haber bajado el precio de la acción en menos de 14.86, no habría ejercido el derecho de compra y habría perdido sólo los 500 de la prima.

2.6 Especulación

Para ejemplificar la especulación en las opciones, considérese la acción de *Industrias Peñoles S.A.B. de C.V.* (PE&OLES.MX) con un precio de 440 pesos. Un agente especulador desea invertir 44,000 pesos, apuesta por el aumento del precio de PE&OLES.MX y le ofrecen una call en 5 pesos con un precio de ejercicio de 442 pesos a 3 meses. Lo que significa que con 44,000 pesos podrá comprar 88 contratos de call de 100 acciones cada uno. Si al cabo de tres meses resulta que el especulador acertó y PE&OLES.MX cuesta 460 pesos, el especulador ejerce su derecho y obtiene una ganancia neta de 114,400 pesos. Si en lugar de arriesgarse a comprar la call hubiera optado por comprar las acciones en ese momento, después de tres meses habría tenido una ganancia de sólo 2,000 pesos. Sin embargo, de haber bajado PE&OLES.MX habría perdido 44,000.

2.7 Arbitraje

Con el arbitraje se asegura una utilidad libre de riesgo por medio de transacciones simultáneas. Por ejemplo, la compra de acciones y la compra de una call y una put con el mismo vencimiento y precio de ejercicio. De manera más específica, considérese el precio de la acción de la embotelladora *Coca-Femsa S.A.B. de C.V.* (KOFL.MX) en 184 pesos. Un agente estaría libre de riesgo si compra 100 acciones KOFL.MX, o una call con un precio de ejercicio de 184 a un peso y vende una put con los mismos precios de ejercicio y prima. Si al término de contrato KOFL.MX sube, el agente ejerce la call y quien compró la put, no vende. Si por el contrario el precio baja, el agente no ejerce la call, pero le exigen el cumplimiento de la put y es como si hubiera comprado las acciones desde el principio. Con esta operación prácticamente no gana ni pierde, no importa cómo se mueva el mercado.

2.8 Posturas en las opciones. Perfil de pérdidas y ganancias de una opción

Las opciones son un juego de suma cero, es decir, lo que gana uno lo pierde el otro y viceversa, por lo que sólo se analizará el caso de una posición en cada tipo, el análisis para la otra posición es análogo.

Es muy importante recordar que las posiciones largas las toma el comprador o tenedor de la opción, mientras que el vendedor toma la posición corta. El análisis se realizará con opciones europeas. Considérese lo siguiente:

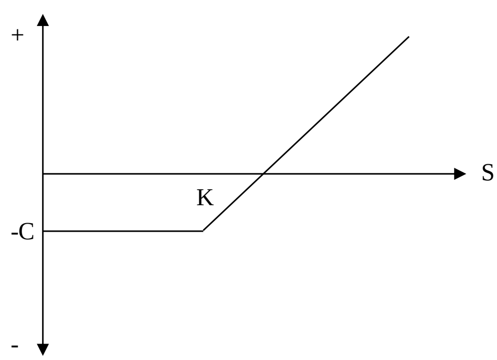
S : Valor de mercado del activo o subyacente.

T : La fecha de vencimiento.

S_T : Valor del subyacente en la fecha de vencimiento.

K : Precio de ejercicio. El valor del subyacente pactado en la fecha de vencimiento *T*.

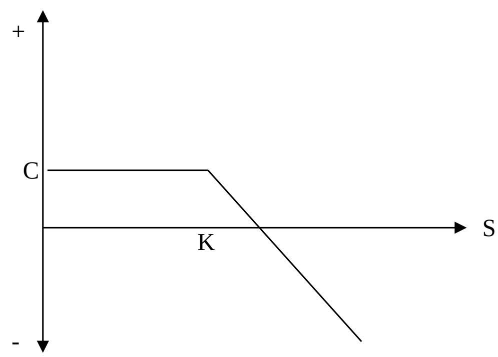
Call option, posición larga. El comprador de una call tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar el subyacente a un precio pactado *K*. Paga una prima *c* por este derecho.



Gráfica 4. *Call option*, posición larga. El comprador sólo pierde la prima si S<K en la fecha de vencimiento, pero asegura que ésa sería su máxima pérdida en la operación.

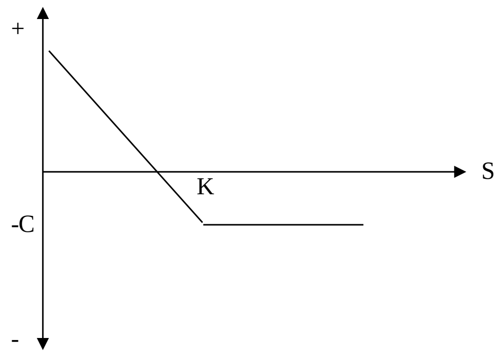
El tenedor de la opción gana cuando el valor del subyacente supera el precio de ejercicio. Esto es, cuando $S-K>0$. En este momento el tenedor de la opción comienza a recuperar la prima pagada y en el mejor de los casos, obtiene una ganancia real. Si $S_T = K$, es decir, si $S_T - K = 0$, es indiferente entre ejercer o no; sin embargo, pierde lo que pagó de la prima. En general, el tenedor de la call pierde si $S_T < K$. Dicho en otras palabras: el tenedor de la call ejercerá su derecho si el *valor intrínseco* de la opción es positivo. Esto es, si $\max(S_T - K, 0) > 0$.

Call option, posición corta. El vendedor debe entregar el subyacente si el tenedor de la call decide ejercer su derecho de compra. Recibe una prima *c* al celebrar el contrato. Si el comprador decide no ejercer la opción, gana *c*.



Gráfica 5. *Call option*, posición corta. El vendedor gana la prima si *s<k* en la fecha de vencimiento. Ésa sería su máxima ganancia en la operación.

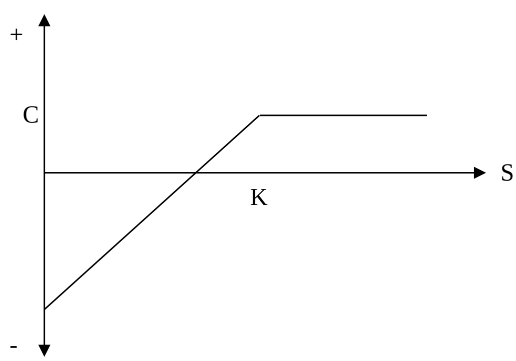
Put option, posición larga. El comprador de una put tiene el derecho, pero no la obligación, de vender el subyacente a un precio pactado *K*. Paga una prima *p* por este derecho. Mientras que la contraparte tiene la obligación de comprar, si el tenedor de la opción decide ejercer su derecho.



Gráfica 6. *Put option*, posición larga. La pérdida máxima del comprador es la prima, pues si $s>k$ en la fecha de vencimiento, no ejerce su derecho de venta.

En este caso, el valor intrínseco de la opción está dado por $\max(K-S_T,0)>0$. Entonces, la ganancia del tenedor de una put se presenta cuando el precio de ejercicio resulte mayor al subyacente, es decir, cuando $\max(K-S_T,0)>0$; en ese momento vende. Es decir, el precio al que vendería es más bajo que el precio de mercado. Y al igual que en la call, podría ganar más que sólo recuperar la prima pagada por este derecho.

Put option, posición corta. El vendedor debe comprar el subyacente si el tenedor de la put decide ejercer su derecho de venta. Recibe una prima *p*, la cual nunca devuelve al comprador.



Gráfica 7. *Put option*, posición corta. El vendedor gana la prima si $s>k$ a la fecha de vencimiento, ésa es su máxima ganancia en la operación.

2.9 *In the money, at the money* y *out of the money*

Se dice que una opción está *in the money* cuando $S > K$, esto es, cuando el precio de ejercicio queda por debajo del valor de mercado. En este momento se ejerce la call. Cuando el precio de ejercicio y el de mercado son iguales, se dice que la opción está *at the money* y cuando $S < K$, es decir, cuando el precio de mercado queda rebasado por el precio de ejercicio, se dice que la opción está *out of the Money*.

2.10 Valuación de una opción

Para valuar una opción, es decir, para encontrar la prima a pagar, es necesario considerar los siguientes factores:

1. Valor intrínseco de la opción ($\max(K - S_T, 0) > 0$ o $\max(S_T - K, 0) > 0$, según el caso).
2. Valor temporal de la opción.
    a. Tiempo al vencimiento (*T*).
    b. Volatilidad (σ).
    c. Tasa de interés libre de riesgo (*r*).
    d. Dividendos.

Existen varios métodos para valuar opciones, como:

a) Modelo de Black-Scholes-Merton.

b) Método Monte Carlo.

c) Modelo de Cox-Rubinstein o binomial.

d) Modelo de Garman-Kohlhagen.

A continuación se menciona brevemente en qué consiste cada uno y en los capítulos posteriores se profundizará en Black-Scholes-Merton y Monte Carlo, pues son los que se usarán en el benchmark de este trabajo.

2.11 Modelo de Black-Scholes-Merton

Este modelo fue creado por Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton en 1973 para valuar opciones sobre acciones. Las opciones de compra (*c*) y de venta (*p*) se determinan de la siguiente manera:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

donde:

S_0 : el valor de la acción en el tiempo 0, es decir, al momento de valuar la opción

$N(d_1)$: la función de probabilidad acumulativa para una variable normal estandarizada d_1

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

σ : la volatilidad del precio de la acción

K : el precio de ejercicio

r : la tasa de interés libre de riesgo

T : el tiempo de vencimiento

$N(d_2)$: la función de probabilidad acumulativa para una variable normal estandarizada d_2

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \ .$$

Lo anterior, bajo los siguientes supuestos:

1. r es conocida y constante durante la vida del contrato.

2. K tiene un comportamiento de movimiento geométrico Browniano.

3. σ es constante durante la vida del contrato.

4. No hay pago de dividendos.

5. Se consideran opciones europeas.

2.12 Método Monte Carlo

Este método consiste en generar aleatoriamente los precios del subyacente durante el tiempo que dura el contrato, bajo el supuesto de que sigue un comportamiento de movimiento geométrico Browniano en un mundo neutral al riesgo. Este movimiento está representado por el modelo de Wiener (W_t) de la siguiente manera:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

donde:

$dW_t \sim N(0, dt)$.

Los precios de la call y put quedan determinados por:

$$c(S_t, T) = e^{-r(T-t)} E[\max(S_{T-t} - K, 0) \mid F_0]$$

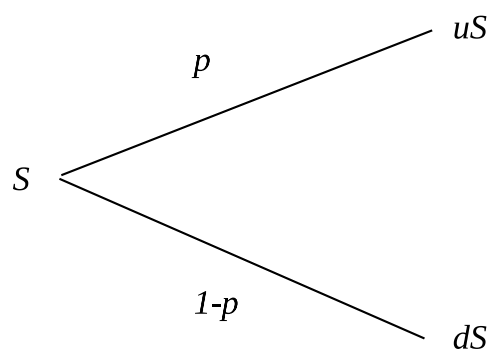
$$p(S_t, T) = e^{-r(T-t)} E[\max(K - S_{T-t}, 0) \mid F_0]$$

donde:

F_0: la σ-álgebra del espacio de la muestra aleatoria

2.13 Modelo de Cox-Rubinstein o Binomial

Con este modelo es posible valuar opciones americanas. El supuesto principal es asumir que el valor del subyacente sigue un comportamiento multiplicativo binomial en periodos discretos.



Gráfica 8. Árbol binomial de un paso con probabilidad p de que aumente S y $1-p$ de que disminuya.

donde:

$uS = (1+U)$

U : el incremento porcentual del valor del subyacente

$dS = (1+D)$

D : el decremento porcentual del valor del subyacente

Los supuestos son tener una tasa libre de riesgo, constante y positiva durante la vida del contrato, y que no hay pagos adicionales. En este caso los precios si sube C_u o si baja C_d son:

$$C_u = máx(uS - K, 0)$$

$$C_d = máx(dS - K, 0)$$

2.14 Modelo de Garman-Kohlhagen

Este modelo se creó para la valuación de opciones de divisas. Los precios de la call (c) y de la put (p) se encuentran de la siguiente manera:

$$c = Se^{-RT}N(d_1) - Ke^{rT}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{-RT}N(-d_1)$$

donde:

S : el tipo de cambio *spot*

R : la tasa de interés externa

T : el tiempo de vencimiento

$N(d_1)$: la función de probabilidad acumulativa para una variable normal estandarizada d_1

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - R + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

K : el precio de ejercicio

σ : la volatilidad del precio de la acción

r : la tasa de interés doméstica

$N(d_2)$: la función de probabilidad acumulativa para una variable normal estandarizada d_2

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - R - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\ .$$

2.15 Método de diferencias finitas

Mediante este método es posible valuar el derivado al resolver la ecuación diferencial satisfecha por el mismo. Hull (1993:418) plantea convertir la ecuación diferencial en un conjunto de ecuaciones en diferencias, las cuales se resuelven de forma iterativa. Para ilustrarlo, considérese una put americana sobre una acción que no paga dividendos. La ecuación diferencial que debe satisfacer dicha opción de acuerdo a Black-Scholes-Merton es:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

donde

S : precio de la acción

f : función de S y t

r : tasa libre de riesgo

σ : volatilidad

∂f : cambio en f

∂S : cambio en S

∂t : pequeño intervalo de tiempo t

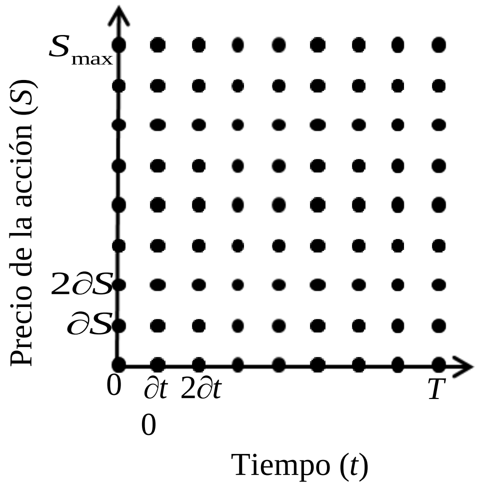
Supóngase que la vida de la opción es T, la cual se divide en N intervalos igualmente espaciados de longitud $\partial t = \frac{T}{N}$. Se consideran $N+1$ intervalos de tiempo:

$$0, \partial t, 2\partial t, ..., T$$

Supóngase también que $S_{\max}$ es el precio de una acción suficientemente grande, de tal manera que cuando se alcance la put no tiene valor virtualmente. Se define $\partial S = \frac{S_{\max}}{M}$ y se considera un total de $M+1$ precios de la acción igualmente espaciados:

$$0, \partial S, 2\partial S, ..., S_{\max}$$

El nivel de $S_{\max}$ se elige de tal manera que uno de estos es el precio actual de la acción. Los puntos en el tiempo y los de los precios de la acción forman una malla de $(M+1)\times(N+1)$ puntos como se muestra a continuación:



El punto (i, j) en la malla corresponde al tiempo $i\partial t$ y al precio de la acción $j\partial S$. La variable $f_{i,j}$ denotará el valor de la opción en el punto (i, j). Para un punto interior (i, j) de la malla, $\frac{\partial f}{\partial S}$ puede aproximarse por

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\partial S}.$$

Para el caso de $\frac{\partial f}{\partial t}$ la aproximación está dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\partial t}.$$

Y por otro lado, $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ puede aproximarse por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + 2 f_{i,j}}{\partial S^2}.$$

Para realizar el *benckmark* se considerará el modelo de Black-Scholes-Merton como punto de referencia para probar la eficiencia del método Monte Carlo. Esta prueba se realizará mediante la ejecución de un programa elaborado en lenguaje R para acciones que cotizan en la BMV. Los datos tomados de los precios de las acciones son reales, tanto los actuales como los históricos.

Capítulo 3
Modelo de Black-Scholes-Merton

3.1 Introducción

En mayo-junio de 1973 Fischer Black, de la Universidad de Chicago, y Myron Scholes, del Instituto Tecnológico de Massachusetts, publicaron el artículo titulado *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* en el *Journal of Political Economy* que revolucionó el mundo de las opciones. Este artículo fue enviado en su versión original el 11 de noviembre de 1970 y en su versión final el 9 de mayo de 1972. A la par, en la primavera de 1973, Robert C. Merton publicó *Theory of Rational Option Princing* en el *Bell Journal of Economics and Management Science* donde también abordaba el tema de la valuación de opciones. Esta aportación les valió ganar el Premio Nobel de Economía en 1997. Dicho reconocimiento lo entregaron a Myron Scholes y Robert C. Merton, pues Fischer Black había fallecido dos años antes.

3.2 Supuestos

Sin pérdida de generalidad, supóngase que el subyacente es una acción. La fórmula sigue los siguientes supuestos:

1. La tasa de interés a corto plazo es conocida y constante durante la vida de la opción.

2. El precio de la acción sigue un movimiento geométrico Browniano en el tiempo continuo neutral al riesgo, es decir, el precio es lognormal.

3. La volatilidad del precio de la acción se mantiene constante a través del tiempo.

4. La acción no paga dividendos u otros pagos.

5. La acción es europea.

6. No hay costos de transacción por comprar o vender la acción o la opción.

7. Es posible pedir prestado alguna fracción del precio de un derivado para comprarlo o mantenerlo, a una tasa de interés a corto plazo.

8. No hay sanciones en la venta en corto. Un vendedor que no posee un derivado, simplemente aceptará el precio del derivado del comprador y acordará con el comprador alguna fecha futura para pagarle una cantidad igual al precio del derivado en esa fecha.

9. El mercado opera en forma continua, es decir, no hay sábados, domingos ni días festivos.

10. Todos los agentes comparten la misma información.

Es importante mencionar que el rendimiento esperado depende del riesgo de la acción y del nivel de las tasas de interés de la economía. Si el riesgo es mayor, el rendimiento esperado también será mayor. De manera análoga con las tasas. Por otro lado, la volatilidad de una acción es una medida de incertidumbre sobre los rendimientos de la acción.

3.3 Movimiento Geométrico Browniano

El movimiento Browniano debe su nombre al médico y botánico escocés Robert Brown (1773-1858), quien observó un movimiento aleatorio en unas partículas de polen bajo el microscopio en presencia de agua hacia 1827. Este movimiento se asoció posteriormente al movimiento aleatorio de los precios de las acciones. Tal fue su éxito que se construyeron modelos matemáticos para describirlo.

En este andar es conocida actualmente, aunque no reconocida en su momento, la contribución del matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) quien hizo una formulación matemática del movimiento Browniano en 1900 para describir el comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa parisina.

Para describir dicho movimiento, considérese un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$. El movimiento Browniano estándar y unidimencional es una función

$$W:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$$

tal que para cada $t \geq 0$, la función

$$W(t,.): \Omega \to \mathbb{R}$$

es una variable aleatoria en $(\Omega, \Im)$. Mientras que para cada $\omega \in \Omega$ la función

$$W(.,\omega): [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

es continua en $[0,\infty)$. La familia de variables aleatorias $W(t,.)$ o $\{W_t\}_{t\geq 0}$ satisface las siguientes condiciones:

i) El proceso siempre empieza en $t = 0$, esto es.

$$P\{\omega \in \Omega \,|\, W_0(\omega) = 0\} = 1$$

ii) Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, los incrementos

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son estocásticamente independientes.

iii) Para cualquier par de tiempos *t* y *s* con $0 \leq s < t, W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$.

De lo anterior, se deduce que:

i) $W_t \sim \mathrm{N}(0,t)$

ii) El incremento del proceso $\Delta W \sim \mathrm{N}(0, \Delta t)$

Luego entonces, el precio de la acción está determinado por

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

o bien,

$$\frac{dS_t}{S} = rdt + \sigma dW_t$$

donde:

dS_t : cambio del precio de la acción en un intervalo pequeño de tiempo dt

r : tasa de interés constante

S_t : precio de la acción en el tiempo t

σ : volatilidad

W_t : movimiento geométrico Browniano, $dW_t \sim \mathrm{N}(0, dt)$

Resolver la ecuación y seguir el proceso para obtener las fórmulas siguientes no forman parte del objetivo del presente trabajo, sin embargo, en la bibliografía se incluyen textos donde puede consultarse, como los de Venegas o Hull.

3.4 Precio de la call y de la put

Las opciones de compra (*c*) y de venta (*p*) se determinan de la siguiente manera:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

donde:

S_0 : el valor de la acción en el tiempo cero, es decir, al momento de valuar la opción

$N(d_1)$: la función de probabilidad acumulativa para una variable normal estandarizada d_1

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

σ : la volatilidad del precio de la acción

K : el precio de ejercicio

r : la tasa de interés libre de riesgo

T : el tiempo de vencimiento

$N(d_2)$: la función de probabilidad acumulativa para una variable normal estandarizada d_2

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Obsérvese que el precio de la opción dependerá sólo del precio actual de la acción, del tiempo de vencimiento y de un conjunto de parámetros conocidos. El valor de la opción queda en función del precio de ejercicio (K), la fecha de vencimiento (T), el precio de contado de la acción en el momento de celebrar el contrato (S_t), la volatilidad (σ) y la tasa de interés (r). A continuación se realizará la valuación con Black-Scholes-Merton de algunas opciones para compararlas en el siguiente capítulo con los resultados obtenidos con el método Monte Carlo.

3.5 Ejemplos

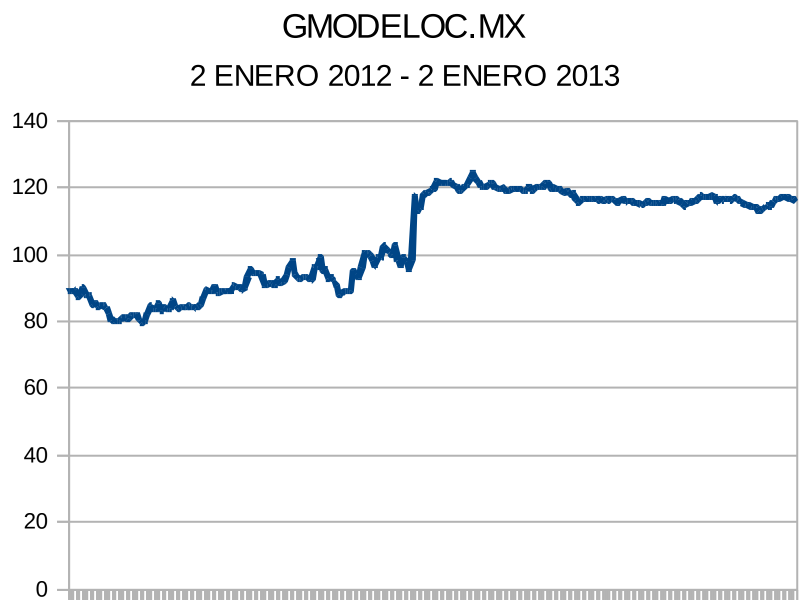
GMODELOC.MX

Supóngase que el 2 de enero de 2012 se adquiere una call sobre 100 acciones de *Grupo Modelo S.A.B. de C.V.* (GMODELOC.MX) a un año. Ese día el precio está en 88.49 y se pacta un precio de ejercicio de 95. La tasa libre de riesgo es del 3% y la volatilidad del 15%.

De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la call.

$$S_0 = 88.49$$
$$K = 100$$
$$r = 0.03 \qquad\qquad c = 2.28$$
$$\sigma = 0.15$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción GMODELOC.MX al 2 de enero de 2013 es de 115.23. Por lo que el tenedor de la call ejerce su derecho y compra las 100 acciones a un precio de 100 cada una. El valor intrínseco de la opción es de 15.23, que es su ganancia sin descontar el costo de la call que es de 2.28. A continuación se muestra el comportamiento de los precios de esta acción durante un año.

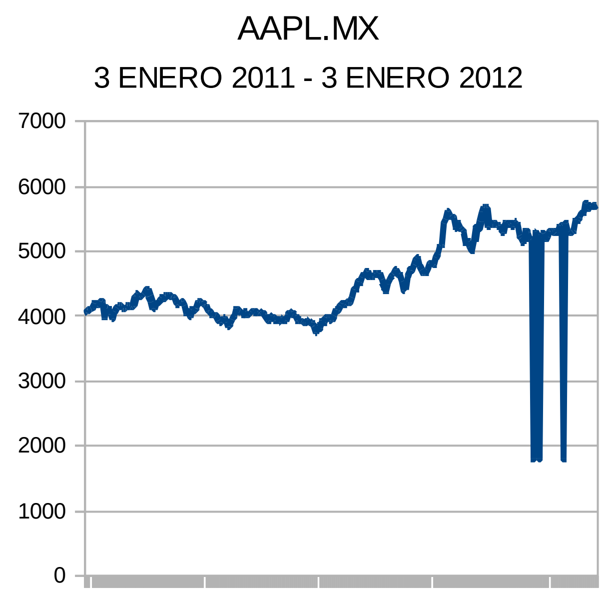


AAPL.MX

Supóngase que el 3 de enero de 2011 se adquiere una call sobre 100 acciones de *Apple Inc.* (AAPL.MX) a un año. Ese día el precio está en 4,030. La confianza en el éxito de los lanzamientos de sus múltiples productos promueve el pacto de un precio de ejercicio de 6,000. La tasa libre de riesgo es del 4% y la volatilidad del 20%. De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la call.

$$S_0 = 4030$$
$$K = 6000$$
$$r = 0.04 \qquad\qquad c = 14.06$$
$$\sigma = 0.2$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción AAPL.MX al 3 de enero de 2012 es de 5,629. Por lo que el tenedor de la call no ejerce su derecho y sólo pierde el precio de la call por 14.06. A continuación se muestra el comportamiento de los precios de esta acción durante un año.



AXTELCPO.MX

Supóngase que el 15 de noviembre de 2011 se adquiere una put sobre 100 acciones de *Axtel S.A.B. de C.V.* (AXTELCPO.MX) a un año. Ese día el precio está en 5.29. Se pacta un precio de ejercicio de 4.5. La tasa libre de riesgo es del 5% y la volatilidad del 25%. De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la put.

$$S_0 = 5.29$$
$$K = 4.5$$
$$r = 0.045 \qquad\qquad p = 0.13$$
$$\sigma = 0.25$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción AXTELCPO.MX al 15 de noviembre de 2012 es de 2.4. Por lo que el tenedor de la put ejerce su derecho de venta a 4.5, por lo que gana 2.1 por acción y pagó sólo 0.13 por la opción. A continuación se muestra el comportamiento de los precios de esta acción durante un año.

CEMEXCPO.MX

Supóngase que el 31 de mayo de 2012 se adquiere una put sobre 100 acciones de *Cemex S.A.B. de C.V.* (CEMEXCPO.MX) a un año. Ese día el precio está en 8.05. Se pacta un precio de ejercicio de 7.8. La tasa libre de riesgo es del 4% y la volatilidad del 20%. De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la put.

$$S_0 = 8.05$$
$$K = 7.8$$
$$r = 0.04 \qquad\qquad p = 0.38$$
$$\sigma = 0.2$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción CEMEXCPO.MX al 31 de mayo de 2013 es de 14.93. Por lo que el tenedor de la put no ejerce su derecho de venta y sólo pierde 0.38 que corresponde a lo que ya había pagado por adquirir la put. A continuación se muestra el comportamiento de los precios de esta acción durante un año.

GMEXICOB.MX

Supóngase que el 13 de junio de 2012 se adquiere una call sobre 100 acciones de *Grupo Mexico S.A.B. de C.V.* (GMEXICOB.MX) a un año. Ese día el precio está en 34.93. Se pacta un precio de ejercicio de 36. La tasa libre de riesgo es del 3.5% y la volatilidad del 24%. De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la call.

$$S_0 = 34.93$$
$$K = 36$$
$$r = 0.035 \qquad\qquad c = 3.41$$
$$\sigma = 0.24$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción GMEXICOB.MX al 13 de junio de 2013 es de 36.9. Por lo que el tenedor de la call ejerce su derecho de compra pues gana 0.9 sin considerar lo que pago por la opción. A continuación se muestra el comportamiento de los precios de esta acción durante un año.

ALFAA.MX

Supóngase que el 30 de abril de 2012 se adquiere una put sobre 100 acciones de *Alfa S.A.B. de C.V.* (ALFAA.MX) a un año. Ese día el precio está en 18.64. Se pacta un precio de ejercicio de 17.5. La tasa libre de riesgo es del 3% y la volatilidad del 15%. De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la put.

$$S_0 = 18.64$$
$$K = 17.5$$
$$r = 0.03 \qquad\qquad p = 0.43$$
$$\sigma = 0.15$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción ALFAA.MX al 30 de abril de 2013 es de 28.2. Por lo que el tenedor de la put no ejerce su derecho de venta y sólo pierde 0.43 que corresponde a lo que ya había pagado por adquirir la put. No obstante, tiene en su poder una acción que cuesta 10.7 más de lo que pensaba que podría valer según el precio de ejercicio pactado y 9.56 más de lo que valía inicialmente. A continuación se muestra el comportamiento de los precios de esta acción durante un año.

ICA.MX

Supóngase que el 2 de enero de 2012 se adquiere una put sobre 100 acciones de *Empresas ICA, S.A.B. de C.V.* (ICA.MX) a un año. Ese día el precio está en 17.5. Se pacta un precio de ejercicio de 17. La tasa libre de riesgo es del 4% y la volatilidad del 25%. De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la put.

$$S_0 = 17.5$$
$$K = 17$$
$$r = 0.04 \qquad p = 1.16$$
$$\sigma = 0.25$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción ICA.MX al 2 de enero de 2013 es de 33.31. Por lo que el tenedor de la put no ejerce su derecho de venta y sólo pierde 1.16 que corresponde a lo que ya había pagado por adquirir la put. No obstante, tiene en su poder una acción que cuesta 16.31 más de lo que pensaba que podría valer según el precio de ejercicio pactado y 15.81 más de lo que valía inicialmente. A continuación se muestra el comportamiento de los precios de esta acción durante un año.

GFNORTEO.MX

Supóngase que el 2 de febrero de 2012 se adquiere una put sobre 100 acciones de *Grupo Financiero Banorte, S.A.B. de C.V.* (GFNORTEO.MX) a un año. Ese día el precio está en 51. Se pacta un precio de ejercicio de 45. La tasa libre de riesgo es del 3% y la volatilidad del 20%. De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la put.

$$S_0 = 51$$
$$K = 45$$
$$r = 0.03 \qquad\qquad p = 1.18$$
$$\sigma = 0.20$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción GFNORTEO.MX al 2 de febrero de 2013 es de 87.7. Por lo que el tenedor de la put no ejerce su derecho de venta y sólo pierde 1.18 que corresponde a lo que ya había pagado por adquirir la put. No obstante, tiene en su poder una acción que cuesta 42.7 más de lo que pensaba que podría valer y 36.7 más de lo que valía inicialmente. A continuación se muestra el comportamiento de los precios de esta acción durante un año.

Este mismo ejemplo se resolverá también en el caso de una call para analizar los resultados obtenidos con el método Monte Carlo en el siguiente capítulo. Supóngase que el 2 de febrero de 2012 se adquiere una call sobre 100 acciones de Grupo Financiero Banorte, S.A.B. de C.V. (GFNORTEO.MX) a un año. Ese día el precio está en 51. Se pacta un precio de ejercicio de 55. La tasa libre de riesgo es del 3% y la volatilidad del 20%. De acuerdo a los datos anteriores, se obtendrá el precio de la put.

$$S_0 = 51$$
$$K = 55$$
$$r = 0.03 \qquad\qquad c = 3.08$$
$$\sigma = 0.20$$
$$T = 1$$

Resulta que el precio de la acción GFNORTEO.MX al 2 de febrero de 2013 es de 87.7. Por lo que el tenedor de la call ejerce su derecho de compra y adquiere una acción que cuesta 36.7 más que lo que valía.

3.6 Resumen

A continuación se presenta una tabla con la información de los ejemplos anteriores.

	GMODELOC.MX	APPL.MX	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	GMEXICOB.MX	ALFAA.MX	ICA.MX	GFNORTEO.MX	GFNORTEO.MX
S_0	88.49	4030	5.29	8.05	34.93	18.64	17.5	51	51
K	100	6000	4.5	7.8	36	17.5	17	45	55
r	0.03	0.04	0.05	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.03
σ	0.15	0.2	0.25	0.2	0.24	0.15	0.25	0.2	0.2
T	1	1	1	1	1	1	1	1	1
c	**2.28**	**14.06**			**3.41**				**3.08**
p			**0.13**	**0.38**		**0.43**	**1.16**	**1.18**	

Capítulo 4
Método Monte Carlo

4.1 Historia

El método Monte Carlo cobró importancia en la década de 1940, cuando se usó para aproximar integrales múltiples definidas en física matemática. Este método se basa en la ley de los grandes números, enunciada por primera vez por Jacob Bernoulli en 1689. Como breviario cultural, Jacob hizo grandes aportaciones a la ciencia, por mencionar algunas: fue la primera persona en usar el término *integral* como lo usamos actualmente; también fue el primero en resolver la hoy conocida *ecuación Bernoulli*, la cual representa el principio de la conservación de la energía para flujo de fluidos; creó los llamados *números Bernoulli*: una sucesión de números racionales de gran importancia en teoría de números; y expresó las probabilidades con números, lo que antes sólo era un concepto.

En la década de 1950 tuvo gran auge debido a los avances computacionales. El principal motivo del desarrollo de este método fue bélico, como muchos avances científicos y tecnológicos de esa época. El interés de los físicos en aquel momento radicaba en conocer el comportamiento de los neutrones y de otras partículas radioactivas para la construcción de armas nucleares. Justo el nombre de Monte Carlo, surgió mientras diseñaban y probaban la bomba de hidrógeno.

En esa época coincidieron ni más ni menos que tres grandes científicos: John von Neumann, Stanislaw Ulam y Nicholas Constantine Metropolis. Este último fue quien dio el nombre de Monte Carlo al método. John von Neumann (1903-1957) fue un reconocido matemático húngaro-estadounidense quien contribuyó en los campos de física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, economía, análisis numérico, hidrodinámica, estadística, cibernética y computación.

Stanislaw Marcin Ulam (1909-1984) fue un matemático polaco-estadounidense quien participó en el proyecto Manhattan y propuso el diseño Teller-Ulam de las armas termonucleares. Hizo grandes contribuciones en teoría de números, teoría de conjuntos, teoría ergódica y topología algebráica. Tenía un especial gusto por los juegos de azar.

Nicholas Constantine Metropolis (1915-1999) fue un matemático, físico y erudito en ciencias de la computación de nacionalidad greco-estadounidense. Participó con Enrico Fermi y Edward Teller en la construcción de los primeros reactores nucleares. Metropolis realizó diversas pruebas estadísticas a las primeras computadoras, junto con Ulam y von Neumann. En particular, utilizó un método que nombró *Método Monte Carlo* para tales propósitos. La razón del nombre se debió al gusto de su colega Ulam por los juegos de azar. En esta época se consideraba a la ciudad de Monte Carlo, capital de Mónaco, Italia, como la Meca de estos menesteres.

La analogía es precisa en el siguiente sentido: los juegos de azar en Monte Carlo daban ganancias a “la casa” debido al enorme número de jugadores. En promedio, y debido a una pequeña ventaja en las reglas de los juegos, la casa siempre ganaba. En el caso del método Monte Carlo es necesario realizar un número de iteraciones lo suficientemente grandes para obtener resultados útiles.

Ha sido claro el papel de las computadoras en el desarrollo y aplicaciones de este método. En 1945 John von Neumann pidió a Metropolis crear un modelo computacional para probar la ENIAC (*Electronic Numerial Integrator and Computer*), considerada la primera computadora de propósito general. Funcionó perfectamente. Por lo que Ulam sugirió el uso de la ENIAC como una herramienta en las investigaciones. En 1947, Metropolis y Ulam la usaron para realizar los cálculos del método Monte Carlo.

4.2 Bases del método Monte Carlo

El método Monte Carlo se basa en dos importantes teoremas matemáticos: la ley de los grandes números y el teorema de límite central. En un análisis con este método se busca obtener un estimado de un valor esperado:

$$\langle z \rangle = \int_a^b z(x) f(x) dx$$

Un estimado sería: $\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z(x_i)$. La ley de los grandes números establece que si la media existe y la varianza es acotada, entonces

$$\lim_{N \to \infty} \bar{z} = \langle z \rangle$$

Esta ley establece que con el tiempo la suma normalizada $\bar{z}$ se aproxima al valor esperado $\langle z \rangle$.

Pero con el método Monte Carlo no sólo se puede obtener un estimado de un valor esperado, también se puede obtener una estimación de la incertidumbre en la estimación mediante el teorema del límite central. De esta manera no sólo se tiene la respuesta sino qué tan buena es la estimación de la misma. Este teorema establece que para una $\bar{z}$ obtenida mediante muestras de una distribución con media $\langle z \rangle$ y varianza $\sigma(z)$, entonces

$$\lim_{N \to \infty} \text{Prob}\left\{ \alpha \le \frac{\bar{z} - \langle z \rangle}{\sigma(z)/\sqrt{N}} \le \beta \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-u^2/2} du$$

o bien:

$$\lim_{N \to \infty} \text{Prob}\left\{ \frac{\left|\bar{z} - \langle z \rangle\right|}{\sigma(z)/\sqrt{N}} \le \lambda \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-u^2/2} du \, .$$

Esto es, $\bar{z}$ se distribuye asintóticamente normal con media $\mu = \langle z \rangle$ y desviación estándar $\sigma(z)/\sqrt{N}$. El gran poder de este teorema es que la función de distribución para generar las N muestras de z es indistinta. La media muestral $\bar{z}$ tiene una distribución normal aproximada para grandes muestras.

Por otro lado, cuando $\lambda \to 0$, el lado derecho del límite anterior se aproxima a cero. Por lo tanto, cuando $N \to \infty$ la media muestral $\bar{z}$ se aproxima a la media real $\langle z \rangle$, lo que corrobora la ley de las grandes números.

4.3 El método Monte Carlo

Determinar el precio de una opción con el método de Black-Scholes-Merton es encontrar

$E(e^{-r(T-t)}G(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\varepsilon\sqrt{T-t}}))$ con $\varepsilon \sim N(0,1)$ y $G:[0,\infty)\to[0,\infty)$ la función de ganancias. $G(S)=\max\{S_T-K,0\}$ para una call y $G(S)=\max\{K-S_T,0\}$ para una put. Esto es, el valor de la opción queda determinado por

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\varepsilon\sqrt{T-t}})e^{-\varepsilon^2/2}d\varepsilon\ .$$

Con el método Monte Carlo dicho valor se aproxima al obtener

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{N}\sum_{i=1}^{N} G(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\varepsilon_i\sqrt{T-t}})$$

donde ε_i es una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno.

El algoritmo para encontrar los precios de las opciones *call* y *put* mediante el método Monte Carlo descrito por Venegas (2007: 856) es el siguiente:

1. Simular el comportamiento del subyacente, partiendo con el valor del subyacente en el presente, S_0, y continuando hasta la fecha de expiración de la opción *T*, lo cual proporciona una posible trayectoria (realización) de los precios del subyacente. Esto es, calcular cada valor de la trayectoria con la siguiente fórmula:

$$S_{t+\Delta t}=S_t\exp\{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon\}$$

2. Calcular para cada realización el valor intrínseco de la opción.

3. Repetir *n* veces los pasos anteriores.

4. Calcular el promedio de los valores intrínsecos obtenidos.

5. Calcular el valor presente del promedio anterior, lo cual finalmente proporciona el valor de la opción.

Para obtener el precio del subyacente se requiere el valor de ε para cada Δt, lo cual se logrará mediante la generación de números aleatorios para la construcción de una distribución Normal (0,1). Existen diferentes métodos para lograrlo, uno muy usado es el algoritmo de Box-Muller, el cual es descrito a continuación:

1. Generar dos variables aleatorias uniformes independientes $U_1, U_2 \sim U(0,1)$
2. Hacer $R = \sqrt{-2\ln(U_1)}$ y $\theta = 2\pi U_2$
3. Obtener $x = R\cos\theta; y = R\sin\theta$. Ambas, *x* y *y* son normales independientes.

Por ejemplo, considérense los siguientes datos:

$$S_0 = 88.49 \qquad \sigma = 0.15$$
$$K = 100 \qquad T = 1$$
$$r = 0.03 \qquad \Delta t = 0.01$$

En una hoja de Excel pueden obtenerse fácilmente los 100 precios que conforman una trayectoria. A continuación se muestran 10 de estos precios:

	U1	U2	R	THETA	X	Y	St
0			raiz(-2ln(U1))	2piU2	rcosTheta	rsenoTheta	88.49
1	0.7	0.53	0.84	3.33	-0.83	-0.16	87.42
2	0.4	-0.26	1.36	-1.62	-0.07	-1.36	87.34
3	0.63	0.34	0.95	2.16	-0.53	0.79	86.66
4	0.7	0.52	0.85	3.28	-0.84	-0.12	85.59
5	0.77	0.74	0.72	4.66	-0.04	-0.72	85.56
6	0.54	0.1	1.11	0.62	0.9	0.65	86.74
7	0.24	-0.69	1.68	-4.35	-0.6	1.57	85.98
8	0.26	-0.64	1.64	-4	-1.06	1.24	84.64
9	0.11	-1.22	2.1	-7.69	0.35	-2.07	85.1
10	0.62	0.3	0.98	1.9	-0.32	0.93	84.71

Otro método es el de congruencias lineales propuesto por Lehmer en 1949 y consiste en generar un número aleatorio tomando como base el anterior. En este método, es importante dar el primer valor de la serie. El resto de los números se generan de la siguiente forma:

$$X_{n+1} \equiv (aX_n + b) \pmod m$$

donde:

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

X_0 : valor inicial dado o semilla

m : módulo, $m > 0$

a : constante, multiplicador, $0 \le a < m$

b : incremento, $0 \le b < m$

Luego entonces, $X_{n+1} = (aX_n + b) - [(aX_n + b)/m]m$. Es importante mencionar que $[(aX_n + b)/m]$ se refiera a la parte entera de la división. El número aleatorio $n+1$ se encuentra al realizar la división X_{n+1}/m. Por ejemplo, si se desean generar 20 números aleatorios con la semilla de 8, el multiplicador de 7, el incremento de uno y el módulo de 10 se tiene lo siguiente:

$X_0 = 8$
$a = 7$
$b = 1$
$m = 10$

	Xn	aXn+b	(aXn+b)/m	parte entera	multiplicación	Número aleatorio
0	8					
1	7	57	5.7	5	50	0.7
2	0	50	5	5	50	0
3	1	1	0.1	0	0	0.1
4	8	8	0.8	0	0	0.8
5	7	57	5.7	5	50	0.7
6	0	50	5	5	50	0
7	1	1	0.1	0	0	0.1
8	8	8	0.8	0	0	0.8
9	7	57	5.7	5	50	0.7
10	0	50	5	5	50	0
11	1	1	0.1	0	0	0.1
12	8	8	0.8	0	0	0.8
13	7	57	5.7	5	50	0.7
14	0	50	5	5	50	0
15	1	1	0.1	0	0	0.1
16	8	8	0.8	0	0	0.8
17	7	57	5.7	5	50	0.7
18	0	50	5	5	50	0
19	1	1	0.1	0	0	0.1
20	8	8	0.8	0	0	0.8

Obsérvese que los números aleatorios obtenidos están entre cero y uno.

4.4 Ejemplos

Se aplicará el método Monte Carlo a los mismos ejemplos resueltos con Black-Scholes-Merton. La generación de números aleatorios se llevará a cabo mediante la función *rnorm(n)* de R, la cual genera *n* números aleatorios distribuidos normalmente (0,1). Cada uno de estos números se utiliza para obtener una simulación del precio de la acción. Una trayectoria completa del precio de la acción se obtiene al finalizar las *n* simulaciones.

Para cada uno de los ejemplos del capítulo anterior se realizarán tantas trayectorias como sean necesarias para obtener el valor de la opción del modelo de referencia, esto es, el de Black-Scholes-Merton. Se comenzará con 25 trayectorias, luego 100 trayectorias y posteriormente se incrementarán en potencias de 10. En cada uno de los ejemplos se mostrará el tiempo de ejecución para cada conjunto de trayectorias.

Con el propósito de recordar los datos utilizados en el capítulo anterior, así como los resultados obtenidos, a continuación se muestra una tabla resumen. Aparecen en negritas los valores de la call o la put, según el caso.

	GMODELOC.MX	APPL.MX	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	GMEXICOB.MX	ALFAA.MX	ICA.MX	GFNORTEO.MX	GFNORTEO.MX
S_0	88.49	4030	5.29	8.05	34.93	18.64	17.5	51	51
K	100	6000	4.5	7.8	36	17.5	17	45	55
r	0.03	0.04	0.05	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.03
σ	0.15	0.2	0.25	0.2	0.24	0.15	0.25	0.2	0.2
T	1	1	1	1	1	1	1	1	1
c	**2.28**	**14.06**			**3.41**				**3.08**
p			**0.13**	**0.38**		**0.43**	**1.16**	**1.18**	

GMODELOC.MX

Esta es una acción de Grupo Modelo. Los datos utilizados se muestran a continuación:

$$S_0 = 88.49$$
$$K = 100$$
$$r = 0.03$$
$$\sigma = 0.15$$
$$T = 1$$

El precio de la call obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 2.28. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

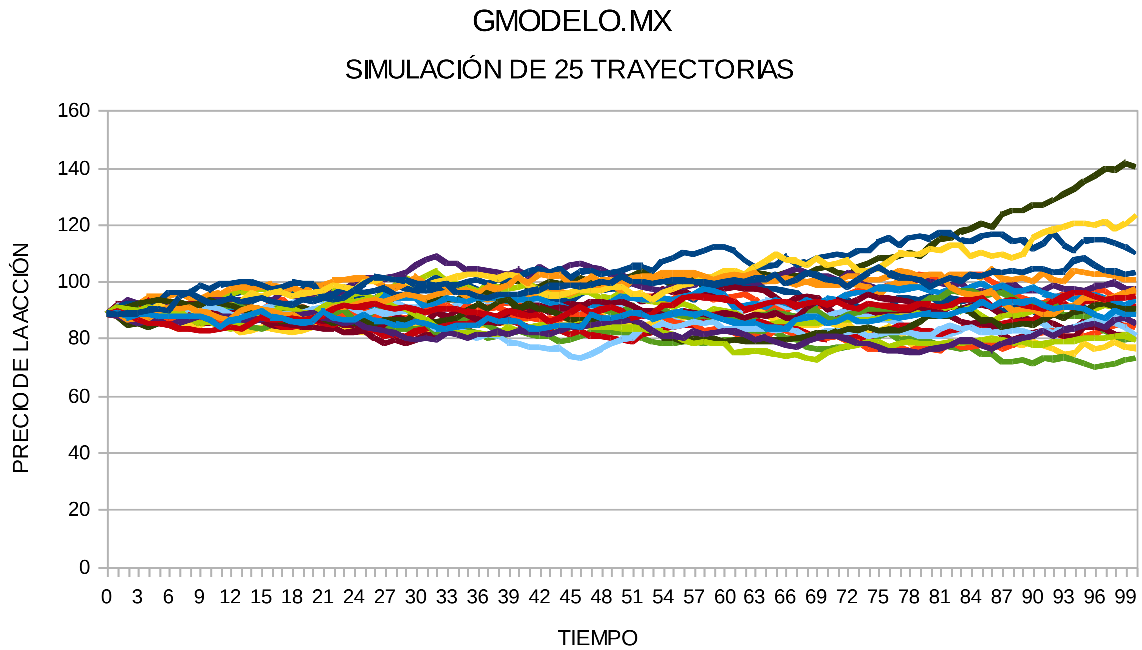
Trayectorias	Precios por trayectoria	Call	Iteraciones	Tiempo (seg)	Tiempo (min)
25	100	1.22	2,500	0.02	0.00
100	100	1.98	10,000	0.08	0.00
1,000	100	2.3	100,000	0.70	0.01
10,000	100	2.28	1,000,000	7.28	0.12

Se observa lo siguiente:

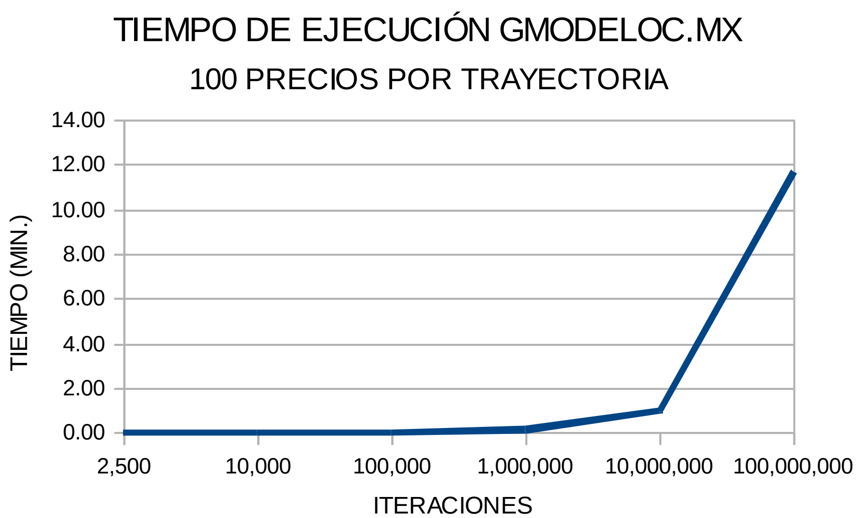
1. Bastan 10 mil trayectorias para tener el resultado de Black-Scholes-Merton.
2. El tiempo de ejecución fue menor a 10 segundos.
3. Los valores de la call son crecientes, excepto cuando ya se aproximó demasiado al precio final.

4. La diferencia entre los dos últimos valores es muy pequeña comparada con el primero y segundo valor, o el segundo y el tercero.

A continuación se muestra la simulación de los precios de la acción de 25 trayectorias:



En cuanto a los tiempos de ejecución se observa que crecen exponencialmente conforme aumenta el número de iteraciones como se puede observar en la siguiente gráfica:



Las gráficas del tiempo de ejecución para los otros ejemplos son similares, por lo que no se incluyen.

APPL.MX

Esta es una acción de Apple. Los datos se muestran a continuación:

$$S_0 = 4030$$
$$K = 6000$$
$$r = 0.04$$
$$\sigma = 0.2$$
$$T = 1$$

El precio de la call obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 14.06. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

Trayectorias	Precios por trayectoria	Call	Iteraciones	Tiempo (seg)	Tiempo (min)
25	100	40.73	2,500	0.02	
100	100	12.23	10,000	0.80	
1,000	100	13.44	100,000	0.72	
10,000	100	13.65	1,000,000	6.24	
100,000	100	13.93	10,000,000	41.00	
1,000,000	100	14.22	100,000,000		8.12
10,000,000	100	14.08	1,000,000,000		1,189

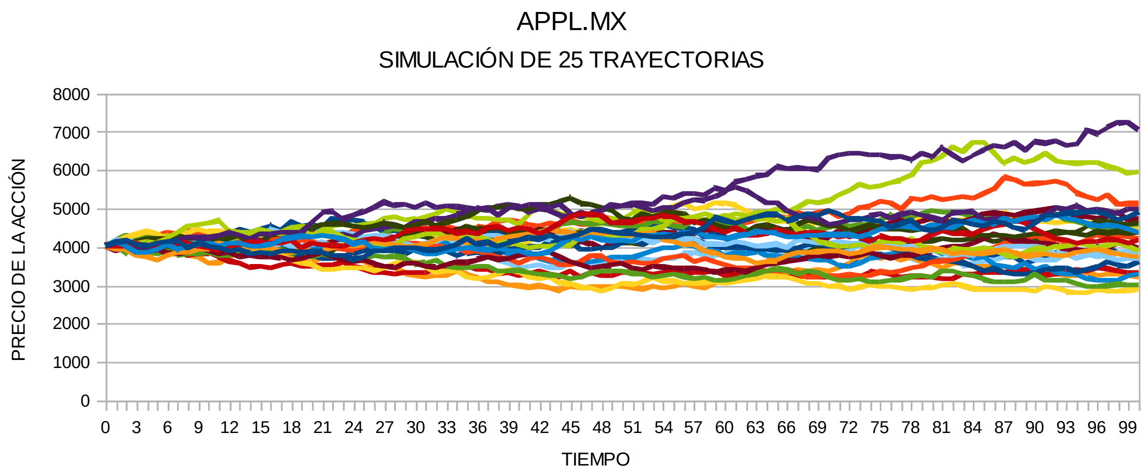
Se observa lo siguiente:

1. Con 10 millones de iteraciones aún no se obtenía el resultado de Black-Scholes-Merton. La mejor aproximación, que fue la última, estuvo dos centésimas abajo.

2. El tiempo invertido fue de casi 20 horas, por lo que ya no se hicieron más iteraciones por resultar impráctico.

3. Los valores de la call no presentan un comportamiento estrictamente creciente o decreciente.

A continuación se muestra la simulación de los precios de la acción de 25 trayectorias:



AXTELCPO.MX

Esta es una acción de Axtel. Los datos se muestran a continuación:

$$S_0 = 5.29$$
$$K = 4.5$$
$$r = 0.05$$
$$\sigma = 0.25$$
$$T = 1$$

El precio de la put obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 0.13. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

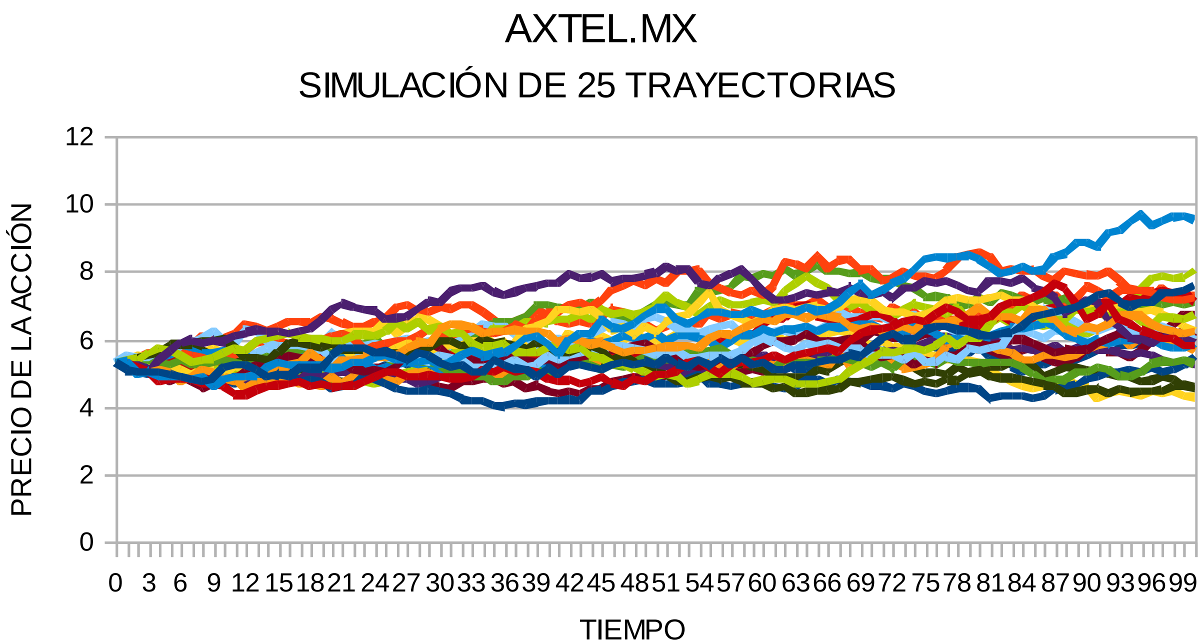
Trayectorias	Precios por trayectoria	Put	Iteraciones	Tiempo (seg)	Tiempo (min)
25	100	0.59	2,500	0.02	0.00
100	100	0.2	10,000	0.74	0.01
1,000	100	0.12	100,000	0.76	0.01
10,000	100	0.13	1,000,000	7.27	0.12

Se observa lo siguiente:

1. Bastan 10 mil trayectorias para tener el resultado de Black-Scholes-Merton.
2. El tiempo invertido fue menor a 10 segundos.
3. No se observa un comportamiento estrictamente creciente o decreciente en los valores de la put.

4. La diferencia entre los dos últimos valores es muy pequeña comparada con el primero y segundo valor, o el segundo y el tercero.

A continuación se muestra la simulación de los precios de la acción de 25 trayectorias:



CEMEXCPO.MX

Esta es una acción de Cemex. Los datos se muestran a continuación:

$$S_0 = 8.05$$
$$K = 7.8$$
$$r = 0.04$$
$$\sigma = 0.2$$
$$T = 1$$

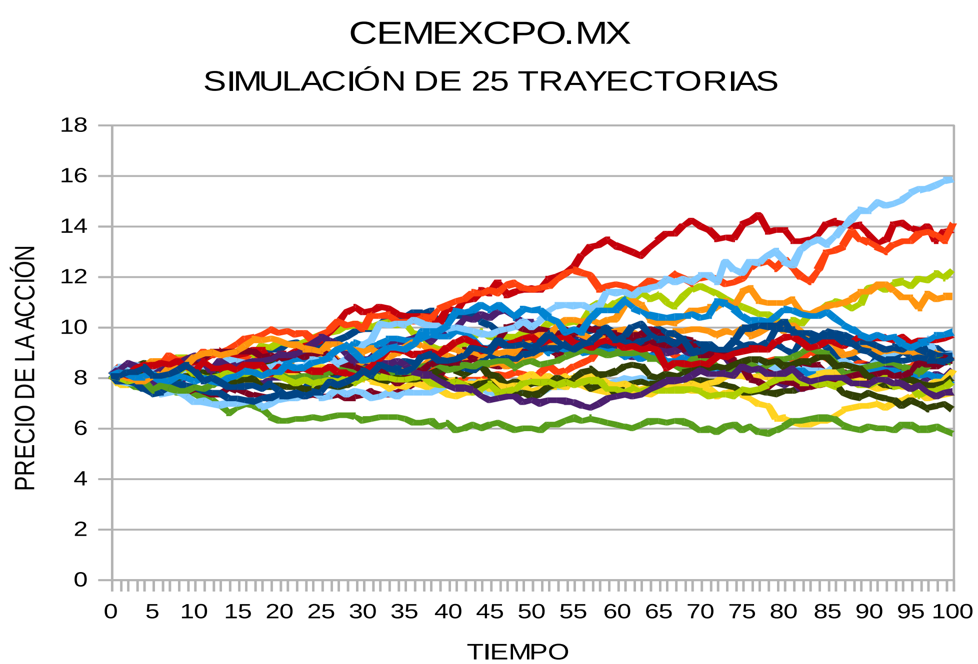
El precio de la put obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 0.38. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

Trayectorias	Precios por trayectoria	Put	Iteraciones	Tiempo (seg)
25	100	0.51	2,500	0.05
100	100	0.33	10,000	0.09
1,000	100	0.36	100,000	0.73
10,000	100	0.38	1,000,000	6.13

Se observa lo siguiente:

1. Bastan 10 mil trayectorias para tener el resultado de Black-Scholes-Merton.
2. El tiempo invertido fue menor a 10 segundos.
3. No se observa un comportamiento estrictamente creciente o decreciente en los valores de la put.
4. La diferencia entre los dos últimos valores es menor comparada con el primero y segundo valor, o el segundo y el tercero, pero no demasiado como en el primer ejemplo.

A continuación se muestra la simulación de los precios de la acción de 25 trayectorias:



GMEXICOB.MX

Esta es una acción de Grupo México. Los datos se muestran a continuación:

$$S_0 = 34.93$$
$$K = 36$$
$$r = 0.035$$
$$\sigma = 0.24$$
$$T = 1$$

El precio de la call obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 3.41. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

Trayectorias	Precios por trayectoria	Call	Iteraciones	Tiempo (seg)
25	100	3.28	2,500	0.02
100	100	3.54	10,000	0.76
1,000	100	3.39	100,000	0.69
10,000	100	3.4	1,000,000	5.63
100,000	100	3.41	10,000,000	55.79

Se observa lo siguiente:

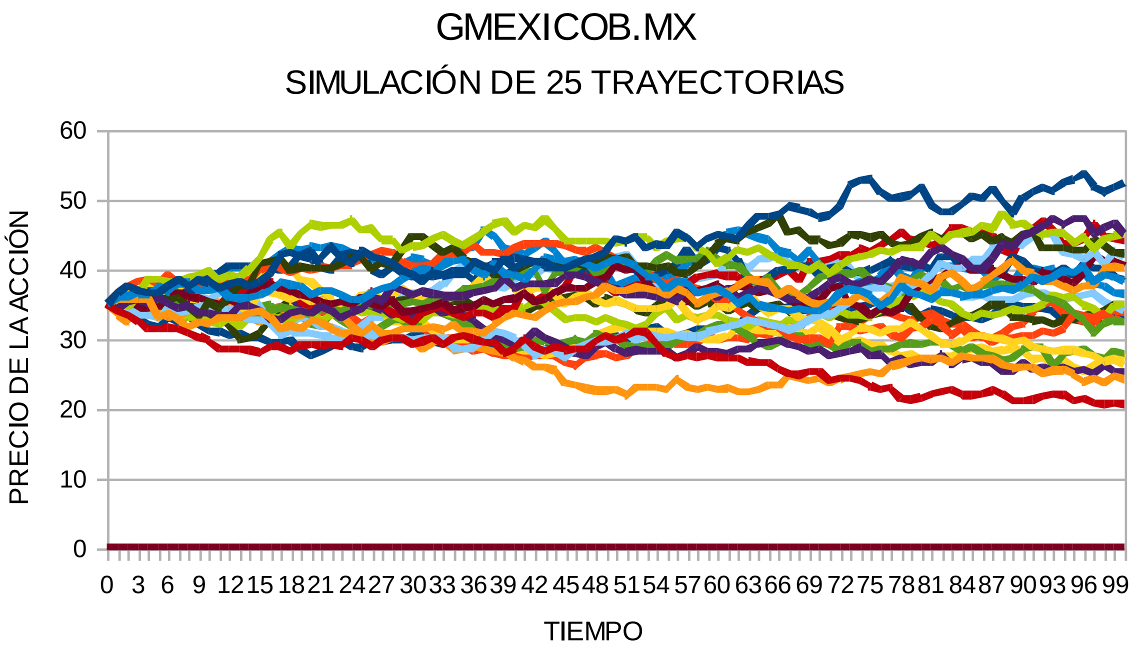
1. En este caso se requirieron de 100 mil trayectorias para tener el resultado de Black-Scholes-Merton.

2. El tiempo invertido fue menor a un minuto.

3. No se observa un comportamiento estrictamente creciente o decreciente en los valores de la put.

4. La diferencia entre los últimos valores (tercero y cuarto, cuarto y quinto) es muy pequeña comparada con el primero y segundo valor, o el segundo y el tercero.

A continuación se muestra la simulación de los precios de la acción de 25 trayectorias:



ALFAA.MX

Esta es una acción de Alfa. Los datos se muestran a continuación:

$$S_0 = 18.64$$
$$K = 17.5$$
$$r = 0.03$$
$$\sigma = 0.15$$
$$T = 1$$

El precio de la put obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 0.43. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

Trayectorias	Precios por trayectoria	Put	Iteraciones	Tiempo (seg)
25	100	0.23	2,500	0.02
100	100	0.39	10,000	0.80
1,000	100	0.41	100,000	0.69
10,000	100	0.43	1,000,000	5.24

Se observa lo siguiente:

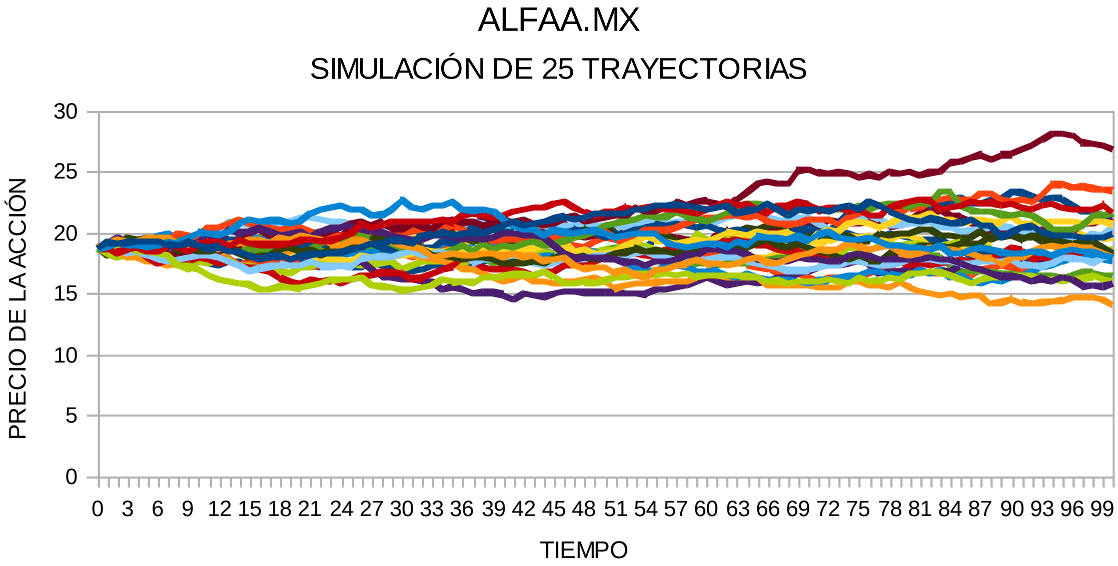
1. Bastan 10 mil trayectorias para tener el resultado de Black-Scholes-Merton.

2. El tiempo invertido fue menor a 10 segundos.

3. Se observa un comportamiento estrictamente creciente en los valores de la put.

4. No hay diferencias significativas entre los valores, excepto con el primero.

A continuación se muestra la simulación de los precios de la acción de 25 trayectorias:



ICA.MX

Esta es una acción de Grupo ICA. Los datos se muestran a continuación:

$$S_0 = 17.5$$
$$K = 17$$
$$r = 0.04$$
$$\sigma = 0.25$$
$$T = 1$$

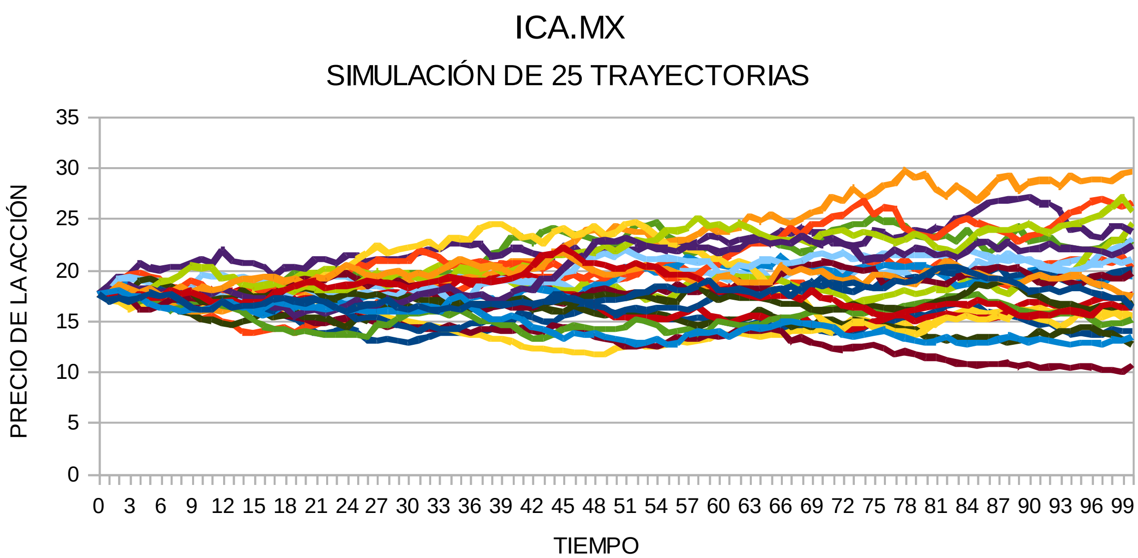
El precio de la put obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 1.16. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

Trayectorias	Precios por trayectoria	Put	Iteraciones	Tiempo (seg)	Tiempo (min)
25	100	0.71	2,500	0.06	
100	100	1.02	10,000	0.76	
1,000	100	1.09	100,000	0.74	
10,000	100	1.18	1,000,000	7.20	
100,000	100	1.16	10,000,000	70.80	1.18

Se observa lo siguiente:

1. Bastan 100 mil trayectorias para tener el resultado de Black-Scholes-Merton.
2. El tiempo invertido fue ligeramente mayor a un minuto.
3. Se observa un comportamiento estrictamente creciente en los valores de la put excepto en el valor final.
4. La diferencia entre los dos últimos valores es pequeña.

A continuación se muestra la simulación de los precios de la acción de 25 trayectorias:



GFNORTEO.MX

Esta es una acción de Grupo Banorte. Los datos se muestran a continuación:

$$S_0 = 51$$
$$K = 45$$
$$r = 0.03$$
$$\sigma = 0.20$$
$$T = 1$$

El precio de la put obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 1.18. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

Trayectorias	Precios por trayectoria	Put	Iteraciones	Tiempo (seg)
25	100	0.45	2,500	0.02
100	100	1.49	10,000	0.75
1,000	100	1.18	100,000	0.80

Se observa lo siguiente:

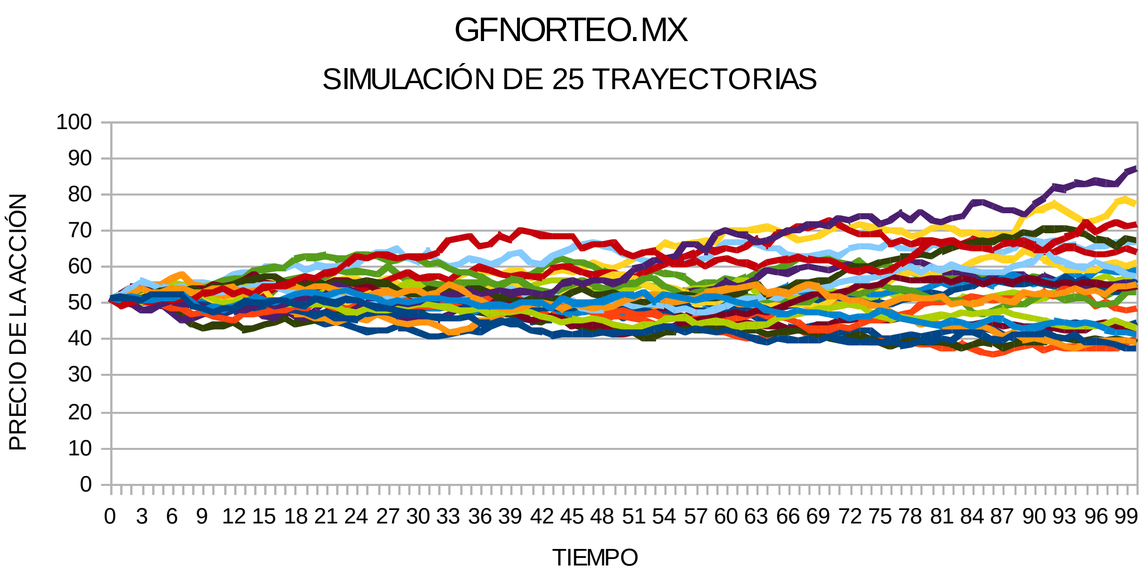
1. Bastan mil trayectorias para tener el resultado de Black-Scholes-Merton.

2. El tiempo invertido fue ligeramente menor a un segundo.

3. No se observa un comportamiento estrictamente creciente o decreciente en los valores de la put.

4. La diferencia entre todos los valores es grande en comparación con los resultados obtenidos en los otros ejemplos.

A continuación se muestra la simulación de los precios de la acción de 25 trayectorias:



Ahora se realizará el mismo procedimiento para obtener el valor de una call. Los datos se muestran a continuación:

$$S_0 = 51$$
$$K = 55$$
$$r = 0.03$$
$$\sigma = 0.20$$
$$T = 1$$

El precio de la call obtenido por el método de Black-Scholes-Merton es 3.08. A continuación se muestran los resultados obtenidos con R mediante el método Monte Carlo:

Trayectorias	Precios por trayectoria	Call	Iteraciones	Tiempo (seg)	Tiempo (min)
25	100	4.44	2,500	0.02	
100	100	2.84	10,000	0.78	
1,000	100	3.18	100,000	0.79	
10,000	100	3.16	1,000,000	6.23	
100,000	100	3.08	10,000,000	73.20	1.22

Se observa lo siguiente:

1. Bastan 100 mil trayectorias para tener el resultado de Black-Scholes-Merton.
2. El tiempo invertido fue ligeramente mayor a un minuto.
3. No se observa un comportamiento estrictamente creciente o decreciente en los valores de la call.
4. A partir de mil trayectorias, la diferencia entre valores es relativamente pequeña.

Conclusiones

Las bases sobre los cuales descansan los resultados obtenidos en el presente trabajo son: las matemáticas, especialmente la estadística, y las ciencias de la computación. Lo anterior, debido a que los métodos utilizados para realizar el benchmark son puramente matemáticos. De manera particular, contar con un ordenador encargado de realizar más de un millón de trayectorias, representa una herramienta indispensable y útil para obtener los precios de las opciones. No obstante, la generación de números de manera aleatoria por el ordenador puede dar resultados variados, por lo que es importante realizar varios ensayos.

El método Monte Carlo proporciona una manera sencilla para encontrar el precio de una opción, por lo que es recomendable su uso en lugar de la fórmula de Black-Scholes. En cuanto a los requerimientos de cómputo, para los ejemplos trabajados, no fue necesario un ordenador más potente.

En general, bastan 10 mil trayectorias con el método Monte Carlo para valuar opciones y obtener resultados similares o iguales a los de Black-Scholes-Merton. Este número de trayectorias es independiente de la valuación de una call y una put. El único ejemplo que sale de esta generalidad es aquel cuya diferencia entre el precio de ejercicio y el valor inicial es muy alto. Cabe mencionar también que las aproximaciones mejoran conforme aumentan las trayectorias. Estas aproximaciones pueden ser de forma creciente u oscilatoria, no existe un patrón definido. En cuanto al tiempo para realizar las simulaciones se observa que es aceptable y muy rápido obtener los resultados deseados con la generalidad de las 10 mil trayectorias, incluso se recomiendo hasta un millón de trayectorias. Después de este número se vuelve impráctico pues el tiempo incrementa a horas de ejecución y la mejora en cuanto al valor de la opción no es significativo (del orden de centésimas).

Aún quedan muchas interrogantes que resolver, las cuales surgieron al realizar el presente trabajo, como:

1. ¿Será posible determinar si la convergencia al valor de Black-Scholes-Merton obtenida por el método de Monte Carlo sigue algún comportamiento conocido o en su defecto uno nuevo?

2. ¿Existe alguna relación entre la diferencia de los precios de ejercicio y del subyacente con el número de trayectorias necesarias para alcanzar el valor obtenido por Black-Scholes?

3. ¿Por qué 10 mil.trayectorias resulta una constante en la mayoría de los ejemplos?

4. ¿Será posible afinar el método Monte Carlo tomando como pivote la primera simulación de los precios para mejorarlos en las siguientes trayectorias?

5. ¿Qué tan distintos son los resultados al utilizar diferentes métodos de generación de números aleatorios en la valuación por el método Monte Carlo? O tal vez los resultados sean los mismos. Pero en caso de no serlo, ¿qué tan significativas son esas diferencias?

Estas preguntas dan pie a nuevos temas de investigación. Por último, es importante señalar que el lenguaje de programación R en R versión 3.0.1 (2013-05-16) usado para la simulación Monte Carlo resultó ser eficiente en el sentido de la programación y de las iteraciones permitidas debido a las funciones estadísticas definidas en el mismo lenguaje y la forma en que está propiamente estructurado. Lo anterior debido a que R está diseñado para cálculos estadísticos, esto lo convierte en un lenguaje especializado. Por mencionar un ejemplo, R tiene una función específica para generar *n* números normales (0,1): *rnorm(n)*; no es necesario generar números aleatorios con métodos alternativos como Box-Muller, lo cual representa una ventaja muy importante sobre otros lenguajes de programación como por ejemplo: lenguaje C.

Anexo 1

A continuación se muestra el código en R desarrollado para el cálculo del valor de una opción europea. Los valores de las variables S0, K, r, sigma y T las proporciona el usuario.

```
#Programa realizado por Catalina Trevilla Román
#Forma parte de la tesis: "Valuación de Opciones Europeas con Metodología
#Alternativas" dirigida por el Dr. Francisco Venegas Martínez
#Año 2013
opciones<- function(nT,n) #nT es el número de trayectorias y n el número de
#simulaciones de los precios
{
ejec <- Sys.time()
S0<-4030
K<- 6000
r<- 0.04
sigma<- 0.2
T<- 1
DT<- 1/n
e1<- (r-((sigma*sigma)/2))*DT
e2<- sigma*sqrt(DT)
e<- exp(-r*T)
STc=1:nT
STp=1:nT
for(i in 1:nT)
{
S<- S0
norm<- rnorm(n)
for(j in 1:n)
S<- S*exp(e1+e2*norm[j])
Difc<- S-K
Difp<- K-S
if(Difc>0) STc[i]<- Difc
else STc[i]<- 0
if(Difp>0) STp[i]<- Difp
else STp[i]<- 0
}
c<- e*mean(STc)
p<- e*mean(STp)
print(c)
print(p)
Sys.time() -
print(ejec)
}
```

Bibliografía

Black, F. y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Dagpunar, J. S. (2007). *Simulation and Monte Carlo with applications in finance and MCMC*. Inglaterra: Wiley.

De Lara, A. (2012). *Productos derivados financieros. Instrumentos, valuación y cobertura de riesgos.* México: Limusa.

Díaz Tinoco, J. y Hernández Trillo, F. (2003). *Futuros y opciones financieras: una introducción*. México: Limusa.

Hull, J. C. (2009). *Introducción a los mercados de futuros y opciones* (6a ed.). México: Pearson, Prentice Hall.

Hull, J. C. (1993). *Options, futures, and other derivative securities* (5a ed.). USA: Prentice Hall.

Ross, S. M. (1999). *Simulación* (2a ed.). México: Pearson, Prentice Hall.

Rubinstein, R. Y. (1981). *Simulation and the Monte Carlo Method*. USA: John Wiley & Sons.

Venegas Martínez, F. (2007). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. México: Thomson.

Fuentes electrónicas

Boletín Over the Counter. Consultado el 12 de abril de 2013, http://www.otcbb.com/

BMV y Bolsas de Valores del Mundo. Consultada el 17 de junio de 2013, http://mx.advfn.com/

Fernández López, P. (1996). Instituto de Estudios Superiores de la Empresa (IESE, Business Scholl), Universidad de Navarra. *Derivados exóticos*. Documento de investigación del IESE No. 308. Consultada el 25 de mayo de 2013, http://web.iese.edu/pablofernandez/docs/7.exoticos.pdf

Portal de la *MexDer*, la Bolsa de Derivados de México. Consultada el 12 de abril de 2013, http://www.mexder.com.mx/

Portal de finanzas de yahoo. Consultado el 12 de abril de 2013, http://mx.finanzas.yahoo.com

Referencias de los datos empleados

AMXL.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q?s=AMXL.MX&ql=0

GMODELOC.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=GMODELOC.MX&a=00&b=3&c=2000&d=06&e=24&f=2013&g=d

AAPL.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=AAPL.MX

AXTELCPO.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=AXTELCPO.MX

CEMEXCPO.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=CEMEXCPO.MX

GMEXICOB.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=GMEXICOB.MX

ICA.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=ICA.MX

ALFAA.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=ALFAA.MX

FEMSAUBD.MX

http://mx.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=FEMSAUBD.MX

Software y manuales

http://www.r-project.org/