



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

OPTIMIZACIÓN DEL REABASTECIMIENTO DE UNA RED DE CAJEROS AUTOMÁTICOS
CON ESTIMACIÓN DIFUSA DE LA DEMANDA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
RAMIRO JAVIER SALTOS ATIENCIA

TUTOR PRINCIPAL
RICARDO, ACEVES, GARCÍA, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. ENERO 2014

Jurado Asignado

Presidente:	Dr. Servio Tulio Guillen
Secretario:	Dra. Idalia Flores De La Mota
Vocal:	Dr. Ricardo Aceves García
Primer Suplente:	Dra. Hérica Sánchez Larios
Segundo Suplente:	M.I. Isabel Aguilar Juárez

Lugar donde se realizó la tesis: México D.F.

Tutor de Tesis
Dr. Ricardo Aceves García

Firma

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios por permitirme seguir avanzando en mis estudios y bendecirme con unos maravillosos padres.

Agradezco también a mi tutor, el Dr. Ricardo Aceves García por la guía brindada para enfocar mis ideas y plasmarlas en esta tesis.

Agradezco de manera especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por facilitarme el apoyo económico necesario para poder llevar a cabo con éxito el desarrollo de esta investigación.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres quienes siempre me han brindado su apoyo incondicional guiándome en los momentos difíciles de mi vida.

Resumen

Las instituciones financieras y aquellas que operan en la industria de los cajeros automáticos, cotidianamente se enfrentan a un problema de índole operativo que debe ser resuelto por las personas competentes en el menor tiempo posible. Este equipo de trabajo tiene a su cargo una red de cajeros automáticos dispersa por toda la ciudad o zona geográfica de interés, influyendo sobre ella una gran cantidad de factores económicos, sociales y jurídicos. El equipo de trabajo deberá elaborar una política de reabastecimiento para su red de cajeros que considere de manera integral las decisiones asociadas con el nivel de inventario guardado en cada cajero y las rutas de distribución que se utilizarán para abastecerlos dentro de un horizonte de tiempo determinado considerando todas las limitantes posibles. Adicionalmente, deben incorporar dentro del modelo que desarrollen, la incertidumbre que rodea a la demanda de los cajeros automáticos, la cual se propone sea considerada a través de la teoría de los números difusos. El tipo de problema que se aborda, sin considerar la incertidumbre de la demanda, suele ser conocido en la literatura científica como el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés).

La estructura del documento es la siguiente: En el primer capítulo se abordará brevemente la historia y evolución económica de la industria de los cajeros automáticos, se planteará la problemática a estudiar en el desarrollo del presente trabajo y los objetivos, tanto generales como específicos, a lograr durante el mismo. En el segundo capítulo se revisará el estado del arte relacionado con el problema de investigación tratado, se explicarán brevemente las bases conceptuales de la teoría de los números difusos y cómo ésta se relaciona con la programación matemática. Para finalizar, se describirá la teoría detrás del modelo matemático que servirá como base para resolver la problemática descrita.

En el tercer capítulo se formulará y validará el modelo matemático que representa al problema tratado considerando un entorno determinístico, para luego ser adaptado al entorno difuso. También se presentarán los conceptos básicos de la metaheurística *Harmony Search* y de los algoritmos de inserción y 2-opt, que servirán como base para el desarrollo del algoritmo que resuelve la problemática abordada en este trabajo. En el cuarto capítulo se describirá de forma detallada cómo está compuesto el algoritmo que se desarrolló para resolver el problema abordado. Se validará el mismo utilizando dos instancias diseñadas para ello y finalmente, se presentarán los resultados obtenidos al aplicarse la metodología desarrollada al caso concreto referido.

En el último capítulo se presentan las conclusiones, recomendaciones y líneas futuras de investigación creadas a partir de la presente investigación.

Abstract

Financial institutions and those operating in the ATM industry, daily face a problem of operational nature that should be resolved by those involved in the shortest time possible. This team has in front a network of ATMs scattered around the city or region of interest, influencing it, a lot of economic, social and legal factors. The team should develop a replenishment policy for ATM comprehensively consider the decisions associated with the level of inventory stored in each ATM and delivery routes to be used to supply them within a specified time horizon considering all possible constraints. Additionally, they must incorporate into the model to develop the uncertainty surrounding the demand for ATMs, which is proposed to be considered by the theory of fuzzy numbers. The type of problem being addressed, regardless of demand uncertainty, it is often known in the scientific literature as the Inventory Routing Problem (IRP for its acronym in English).

The paper is structured as follows: In the first chapter will address briefly the history and economic developments in the ATM industry, will consider the problem to study in the development of this work and objectives, both general and specific, to achieve. In the second chapter will review the state of the art related to the research problem treated, briefly explain the conceptual basis of the theory of fuzzy numbers and how it relates to mathematical programming. Finally, we describe the theory behind the mathematical model that will serve as a basis for resolving the problems described.

The third chapter will develop and validate the mathematical model representing the problem addressed by considering a deterministic environment, and later adapted to the fuzzy environment. Also present the basic concepts of metaheuristic Harmony Search and insertion and 2-opt algorithms, to serve as a basis for developing the algorithm that solves the problem addressed in this work. In the fourth chapter describes in detail how it is made the algorithm developed to solve the problem addressed. Be validated using two instances designed for it and finally present the results obtained when applying the methodology developed to the specific case referred.

The final chapter presents the conclusions, recommendations and future research lines created from this work.

Índice de Contenidos

Agradecimientos	3
Dedicatoria	4
Resumen.....	5
Abstract	6
Índice de Contenidos.....	7
Índice de Tablas.....	10
Índice de Figuras	11
Abreviaturas	12
Introducción	13
1. Antecedentes	15
1.1. Historia de los Cajeros Automáticos	15
1.2. Descripción del Problema	16
1.3. Proceso de Reabastecimiento.....	17
1.4. Descripción del Sistema de Interés	20
1.5. Objetivo General	21
1.6. Objetivos Específicos.....	21
2. Marco Teórico	22
2.1. Estado del Arte	22
2.1.1. Decisiones sobre Localización	22
2.1.2. Decisiones sobre Determinación de Tarifas.....	22
2.1.3. Pronóstico de la Demanda	23
2.1.4. Decisiones sobre Reabastecimiento	24
2.2. Teoría de Conjuntos y Números Difusos.....	25
2.2.1. Definiciones sobre Conjuntos Difusos.....	25
2.2.2. Operaciones con Números Difusos	27
2.2.3. Métodos de Comparación de Números Difusos	27
2.2.4. Teoremas sobre Conjuntos Difusos.....	29
2.3. Programación Matemática Difusa.....	29
2.3.1. Programación Lineal Entera con Lados Derechos Difusos	30
2.4. Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP).....	35

2.4.1. Origen del IRP	35
2.4.2. Descripción Matemática del IRP	36
2.4.3. Modelos Matemáticos para el IRP	38
3. Desarrollo del Modelo y de la Estrategia de Solución.....	42
3.1. Formulación del Modelo Matemático	42
3.1.1. Modelo Matemático: Entorno Determinístico.....	42
3.1.2. Modelo Matemático: Entorno Difuso	44
3.2. Validación del Modelo Matemático	45
3.3. Metaheurística Harmony Search (HS)	47
3.3.1. Descripción del Proceso de Optimización	47
3.3.2. Pseudocódigo de la Metaheurística Harmony Search	48
3.3.3. Variantes de la Metaheurística Harmony Search.....	49
3.4. Algoritmos para Ruteo de Vehículos.....	50
3.4.1. Algoritmo de Inserción	50
3.4.2. Algoritmo de Mejora 2-opt	51
4. Desarrollo del Algoritmo de Solución.....	52
4.1. Etapa 1: Creación de la Solución Inicial.....	52
4.1.1. Fase 1: Política de Inventario	52
4.1.2. Fase 2: Política de Distribución o Ruteo.....	53
4.2. Etapa 2: Proceso de Optimización.....	55
4.3. Validación del Algoritmo y Resultados Preliminares.....	57
4.4. Aplicación al Caso Real	63
4.4.1. Descripción de la Red y Pre-Procesamiento de la Información	63
4.4.2. Ejecución del Algoritmo y Resultados Finales	65
5. Conclusiones y Recomendaciones	68
5.1. Conclusiones.....	68
5.2. Recomendaciones	68
5.3. Líneas de Investigación	69
6. Bibliografía	70
Anexo 1: Datos para la Instancia de Validación con 25 Nodos	73
Anexo 2: Datos para la Instancia de Validación con 50 Nodos	74
Anexo 3: Resultados para la Instancia de Validación con 25 Nodos.....	76

Anexo 4: Resultados para la Instancia de Validación con 50 Nodos.....	78
Anexo 5: Datos para el Caso Real.....	81
Anexo 6: Resultados para el Caso Real	90
Anexo 7: Comentarios sobre la Eficiencia del Algoritmo	101

Índice de Tablas

Tabla 1: Datos de la Instancia de Validación	45
Tabla 2: Política de Reabastecimiento para la Instancia de Validación	46
Tabla 3: Resultados Preliminares usando Instancias de Validación.....	59
Tabla 4: Valores del Parámetro α	66
Tabla 5: Resultados Obtenidos con el Algoritmo Desarrollado	67
Tabla 6: Costos de las Políticas Convencionales	67
Tabla 7: Datos para la Instancia de Validación con 25 Nodos.....	73
Tabla 8: Datos para la Instancia de Validación con 50 Nodos.....	74
Tabla 9: Cantidad de Dinero enviado a cada Cajero de la Red	76
Tabla 10: Cantidad de Dinero guardado en Inventario al final del Día en cada Cajero de la Red	77
Tabla 11: Política de Envío de Dinero en Efectivo para la Instancia de Validación con 50 Nodos....	78
Tabla 12: Cantidad de Efectivo guardado en Inventario al Final del Día	79
Tabla 13: Información Geográfica de los Cajeros de la Red.....	81
Tabla 14: Demanda Diaria de una Semana de los Cajeros de la Red	85
Tabla 15: Política de Envío de Efectivo a los Cajeros del Caso Real	90
Tabla 16: Nivel de Inventario guardado en los Cajeros del Caso Real al Final del Día	94
Tabla 17: Hoja de Ruta del Caso Real diseñada por el Algoritmo para el Día 4	98
Tabla 18: Resultados para las Instancias de 5 Cajeros	102
Tabla 19: Resultados para las Instancias de 6 Cajeros	102
Tabla 20: Resultados para las Instancias de 7 Cajeros	102
Tabla 21: Resultados para las Instancias de 8 Cajeros	102

Índice de Figuras

Figura 1: Tipos de Costos Operativos de una Red de Cajeros Automáticos	16
Figura 2: Proceso de Reabastecimiento de las Redes de Cajeros Automáticos.....	17
Figura 3: Número Difuso Triangular	26
Figura 4: Gráfico de la Relación de Adamo	29
Figura 5: Plan de Ruteo del IRP	37
Figura 6: Ubicación de los Cajeros en la Red.....	45
Figura 7: Plan de Rutas para la Instancia de Validación	46
Figura 8: Ubicación de los Cajeros en Red para la Instancia de Validación con 25 nodos.....	58
Figura 9: Ubicación de los Cajeros de Red para la Instancia de Validación con 50 nodos.....	58
Figura 10: Rutas para los Días 1 y 2 Instancia de 25 Nodos	59
Figura 11: Rutas para los Días 3 y 4 Instancia de 25 Nodos	60
Figura 12: Rutas para los Días 5, 6 y 7 Instancia de 25 Nodos	60
Figura 13: Rutas para los Días 1 y 2 Instancia de 50 Nodos	61
Figura 14: Rutas para los Días 3 y 4 Instancia de 50 Nodos	61
Figura 15: Rutas para los Días 5 y 6 Instancia de 50 Nodos	62
Figura 16: Ruta para el Día 7 Instancia de 50 Nodos	62
Figura 17: Distribución Geográfica de los Cajeros en la Red del Banco	64
Figura 18: Ruta de Distribución del Caso Real para el Día 4	100

Abreviaturas

ATM	Automatic Teller Machine
ATMIA	ATM Industry Association
HS	Harmony Search
HM	Harmony Memory
HMS	Harmony Memory Size
HMCR	Harmony Memory Considerate Rate
PAR	Pitch Adjusting Rate
Bw	Band Width

Introducción

La consolidación de la industria y los retos económicos actuales, siguen poniendo presión en la industria bancaria, en especial, en el sector de los cajeros automáticos, donde los efectos han sido percibidos de varias maneras. Para algunas empresas, las bajas tasas de interés sobre el dinero en efectivo han abierto nuevas puertas, esto es, les ha permitido expandirse en el mercado a través de ubicar nuevos cajeros en su red, mientras que para otras, los márgenes de las utilidades han colapsado, teniendo que vender este servicio a empresas más grandes.

Operar una red de cajeros automáticos exige el manejo integrado de varios temas tales como: el monitoreo remoto, la interconexión en tiempo real con la institución bancaria del cliente que hace uso del cajero, pronósticos de la demanda en cada cajero, políticas de abastecimiento y consideraciones generales de seguridad para evitar robos, fraudes, etc. Por lo anterior, administrar este tipo de redes es una tarea bastante compleja, siendo necesario el uso de herramientas sofisticadas de apoyo tecnológico para poder tomar las mejores decisiones posibles en un mundo globalizado, donde las pequeñas ventajas y ahorros que se logren, pueden ser la diferencia entre seguir en el mercado o salir de él.

Por ello, las instituciones financieras y aquellas que operan en la industria de los cajeros automáticos, cotidianamente se enfrentan a un problema de índole operativo que debe ser resuelto por las personas competentes en el menor tiempo posible. Este equipo de trabajo tiene a su cargo una red de cajeros automáticos dispersa por toda la ciudad o zona geográfica de interés, influyendo sobre ella, una gran cantidad de factores económicos, sociales y jurídicos. El equipo de trabajo deberá elaborar una política de reabastecimiento para su red de cajeros que considere de manera integral las decisiones asociadas con el nivel de inventario guardado en cada cajero y las rutas de distribución que se utilizarán para abastecerlos dentro de un horizonte de tiempo determinado considerando todas las limitantes posibles. Adicionalmente, deben incorporar dentro del modelo que desarrollen, la incertidumbre que rodea a la demanda de los cajeros automáticos, la cual se propone sea considerada a través de la teoría de los números difusos. El tipo de problema que se aborda, sin considerar la incertidumbre de la demanda, suele ser conocido en la literatura científica como el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés).

Con base en lo mencionado en los párrafos anteriores, el presente trabajo de investigación busca principalmente:

- Describir la problemática que puede existir sobre el proceso de reabastecer los cajeros automáticos en cualquier red bancaria.
- Mencionar cuáles son las estrategias más utilizadas por los bancos para reabastecer sus cajeros automáticos.
- Proponer un modelo de programación matemática para optimizar el reabastecimiento de efectivo de los cajeros automáticos considerando la estimación de la demanda como un número difuso.

- Desarrollar e implementar computacionalmente un algoritmo para resolver el modelo matemático propuesto.

La estructura del documento es la siguiente: En el primer capítulo se abordará brevemente la historia y evolución económica de la industria de los cajeros automáticos, se planteará la problemática a estudiar en el desarrollo del presente trabajo y los objetivos, tanto generales como específicos, a lograr durante el mismo. En el segundo capítulo se revisará el estado del arte relacionado con el problema de investigación tratado, se explicarán brevemente las bases conceptuales de la teoría de los números difusos y cómo ésta se relaciona con la programación matemática. Para finalizar, se describirá la teoría detrás del modelo matemático que servirá como base para resolver la problemática descrita.

En el tercer capítulo se formulará y validará el modelo matemático que representa al problema tratado considerando un entorno determinístico, para luego ser adaptado al entorno difuso. También se presentarán los conceptos básicos de la metaheurística *Harmony Search* y de los algoritmos de inserción y 2-opt, que servirán como base para el desarrollo del algoritmo que resuelve la problemática abordada en este trabajo. En el cuarto capítulo se describirá de forma detallada cómo está compuesto el algoritmo que se desarrolló para resolver el problema abordado. Se validará el mismo utilizando dos instancias diseñadas para ello y finalmente, se presentarán los resultados obtenidos al aplicarse la metodología desarrollada al caso concreto referido.

En el último capítulo se presentan las conclusiones, recomendaciones y líneas futuras de investigación creadas a partir de la presente investigación.

1. Antecedentes

En este capítulo se abordará brevemente la historia y evolución económica de la industria de los cajeros automáticos, se planteará la problemática a estudiar en el desarrollo del presente trabajo y los objetivos, tanto generales como específicos, a lograr durante el mismo.

1.1. Historia de los Cajeros Automáticos

Un cajero automático es una máquina que permite a las personas obtener dinero en efectivo a través del uso de una tarjeta magnética, la cual relaciona al cliente con su cuenta bancaria. Fue inventado por IBM e introducido al mercado financiero por vez primera en 1969, presentando desde ahí una gran aceptación y crecimiento a nivel mundial. Los beneficios que ofrecen pueden ser variados y diversos, siendo los más relevantes el permitir al usuario poder disponer de su dinero en cualquier lugar y momento del día, sin estar restringido a los horarios de atención impuestos en las sucursales bancarias, y ofrecer relativamente menores costos para la institución financiera, en lo que se refiere a atender el servicio de retiro de dinero de un grupo de clientes [1].

Según un estudio realizado en el año 2006 por expertos del área [2], existen tres grandes fases en la evolución económica de la industria de los cajeros automáticos, las cuales se detallan a continuación:

Canal Emergente (1969-1996): En esta fase el cajero automático aparece como un canal alternativo viable para el retiro de dinero en efectivo, se integran las primeras redes de transferencias electrónicas de fondos, así como se presenta el desarrollo y crecimiento de este nuevo sector industrial. En esta fase, los servicios están orientados al cliente y a su conveniencia [2].

Era de los Recargos (1996-2005): Al inicio de esta fase, la industria obtiene nuevas fuentes de ingresos al imponer tasas por los servicios ofrecidos, existen nuevas entradas al mercado y crece el despliegue a nivel mundial de las redes de cajeros automáticos. Finalizando la misma, decrecen los niveles de transacciones por cajero provocando una disminución en los rendimientos percibidos e incrementando los costos [2].

Estratificación de la Industria (Desde el 2006): Las instituciones financieras implementan divisiones a lo largo de dimensiones estratégicas, estableciendo que el rol de un cajero automático es el de dispensar dinero y ser un canal de servicio completo, permitiendo así el acceso libre de tasas al servicio dependiendo de si el usuario es o no cliente de la institución bancaria dueña del cajero [2].

De acuerdo a las estimaciones realizadas por la ATMIA (ATM Industry Association) para el año 2007 existían alrededor de 1,6 millones de cajeros automáticos desplegados alrededor de todo el mundo [3], y de acuerdo a lo mencionado en [4], existe una tasa de crecimiento anual de aproximadamente el 9%.

1.2. Descripción del Problema

La consolidación de la industria y los retos económicos actuales, siguen poniendo presión en la industria bancaria, en especial, en el sector de los cajeros automáticos, donde los efectos han sido percibidos de varias maneras. Para algunas empresas, las bajas tasas de interés sobre el dinero en efectivo han abierto nuevas puertas, esto es, les ha permitido expandirse en el mercado a través de ubicar nuevos cajeros en su red, mientras que para otras, los márgenes de las utilidades han colapsado, teniendo que vender este servicio a empresas más grandes. A esto se agregan los incidentes que atentan contra la seguridad de los cajeros automáticos, lo cual incrementa los costos pagados a la empresa aseguradora [5].

Operar una red de cajeros automáticos exige el manejo integrado de varios temas tales como: el monitoreo remoto, la interconexión en tiempo real con la institución bancaria del cliente que hace uso del cajero, pronósticos de la demanda en cada cajero, políticas de abastecimiento y consideraciones generales de seguridad para evitar robos, fraudes, etc. Por lo anterior, administrar este tipo de redes es una tarea bastante compleja, siendo necesario el uso de herramientas sofisticadas de apoyo tecnológico para poder tomar las mejores decisiones posibles en un mundo globalizado, donde las pequeñas ventajas y ahorros que se logren, pueden ser la diferencia entre seguir en el mercado o salir de él.

Desde el punto de vista logístico, existen dos grandes tipos de costos en el mantenimiento y operación de una red de cajeros automáticos: los costos relacionados con el manejo de efectivo y los costos de equipo e infraestructura. El primero de ellos hace referencia a los costos de reaprovisionamiento, costos del dinero en el tiempo y costos administrativos, llegando a ser por lo menos, una tercera parte de los costos totales de operación (Ver Figura 1). Por otro lado, los costos de equipo e infraestructura, están relacionados con la inversión por instalar un nuevo cajero, por las operaciones de mantenimiento, la depreciación del activo, las telecomunicaciones, entre otros [4].



Figura 1: Tipos de Costos Operativos de una Red de Cajeros Automáticos

Dado que los costos relacionados con el manejo de efectivo, dependen esencialmente de la política de inventario que se diseñe y representan un gran porcentaje de los costos totales de operación de la red de cajeros automáticos y, considerando que uno de los principales problemas logísticos a resolver dentro de la administración de este efectivo, es el reabastecimiento de los mismos, el cual tiene estrecha relación con el costo de oportunidad del dinero, se hace necesario desarrollar políticas óptimas de aprovisionamiento que permitan disminuir los costos de oportunidad, inventario, distribución y nivel de servicio de la red.

1.3. Proceso de Reabastecimiento

Usualmente, por las políticas de seguridad establecidas en los bancos, el proceso de reabastecer los cajeros automáticos inicia en el banco matriz de la institución financiera donde los camiones blindados, sean propios o contratados, llegan a recoger los bultos de dinero ya empacados para ser trasladados a los respectivos cajeros. Para cada cajero hay un bulto asignado con el monto respectivo a ser cargado, esto se debe a que los riesgos que se incurren en el traslado de valores, no permiten a los ejecutivos del banco perder tiempo en contar el dinero que van a liberar en el cajero en el momento que arriban. Una vez que el camión llega al cajero, el ejecutivo del banco abre la bóveda de la máquina, revisa que los niveles de inventario en el cajero coincidan con los registrados en el sistema, procede a retirar ese dinero (según lo sugerido en [5]) y a cargar el nuevo monto en las ranuras dispensadoras así como registra el nuevo nivel de inventario en el sistema del cajero. Al final del proceso el camión blindado regresa al banco matriz, llevando los residuos de efectivo que se encontraron en cada cajero de su ruta (Ver Figura 2).

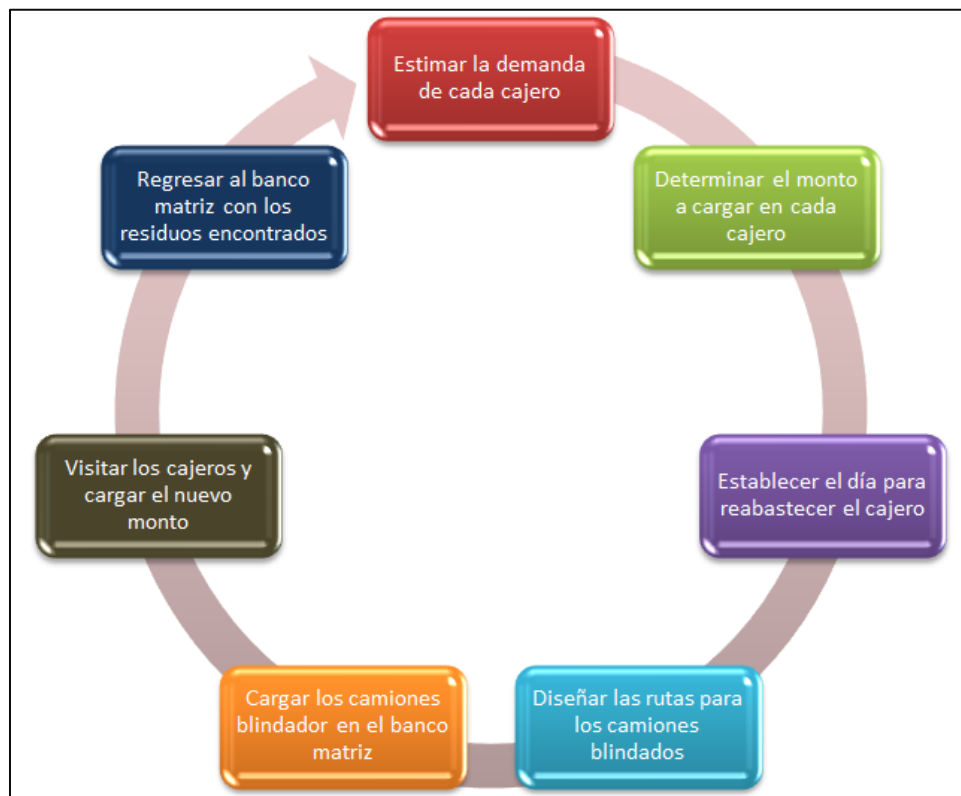


Figura 2: Proceso de Reabastecimiento de las Redes de Cajeros Automáticos

El primer inconveniente que sobresale del procedimiento anterior radica en que los residuos de dinero presentes en los cajeros, son llevados de regreso al banco matriz, con lo cual se incurren en gastos de procesamiento y traslado de dichos valores, cuando pudieron quedarse en la bóveda del cajero y el nuevo nivel de inventario ser establecido con base al nivel anterior a la recarga del mismo.

Otros inconvenientes están relacionados con la forma según la cual se estima los montos de efectivo a cargar en cada cajero y al procedimiento usado para establecer la hoja de ruta de cada camión blindado. El primero de estos, suele estar basado en los pronósticos de la demanda de cada cajero realizados por el banco, mientras que el segundo, está relacionado con la experiencia del conductor y su conocimiento sobre la red de vialidades, de tal forma, que le permitan reducir el tiempo de recorrido total.

Como se mencionará más adelante, la demanda de un cajero automático depende de muchos factores, tanto cualitativos como cuantitativos, los cuales hacen que su estimación sea un problema difícil de resolver, como el que se abordará en esta investigación. Por este motivo, un gran número de instituciones bancarias optan por estimar la demanda de sus cajeros usando métodos simples y rápidos que no ofrecen un alto nivel de confiabilidad, y en otros casos, simplemente se utiliza la estimación hecha por el administrador de la red basada en su experiencia previa.

Y es en este punto cuando se requiere de una técnica o herramienta que nos permita realizar una estimación de la demanda que considere que la información referente a la misma es ambigua (del tipo “es aproximadamente igual a”), no se tienen los suficientes datos para realizar un pronóstico confiable, o simplemente el comportamiento de ella es demasiado variable y dependiente de muchos factores, lo cual hace prácticamente imposible establecer una predicción acertada.

Dado que las redes de cajeros automáticos son monitoreadas en tiempo real y la información referente a los movimientos de efectivo se almacena en una base de datos, se dispone de una gran cantidad de información histórica sobre el comportamiento de la demanda, en cada uno de los cajeros de la red, sin embargo, como se menciona en [4], la demanda de efectivo es muy variable, lo cual imposibilita el poder hacer pronósticos confiables o ajustarla a una distribución de probabilidad. Por este motivo, y como el objetivo de los pronósticos es construir una capacidad de respuesta, se utilizará la teoría de los números difusos para estimar la demanda de efectivo y así, construir estrategias óptimas de reabastecimiento que cumplan con el objetivo principal de cualquier institución bancaria, responder ante las variaciones de la demanda de sus cajeros sin perder la calidad del servicio y minimizando los costos.

Una política de aprovisionamiento para las redes de cajeros automáticos bien desarrollada debe permitir al administrador de la red contestar de forma integral las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles y cuándo reabastecer los cajeros automáticos?
- ¿Qué monto cargar en los cajeros automáticos?
- ¿Cuáles serán las rutas que recorrerá el camión blindado?

Y relacionadas a éstas preguntas tenemos los siguientes costos:

- **Costo del Dinero:** Referente al costo de oportunidad por tener el dinero guardado y relacionado directamente con las tasas de interés.
- **Costo de Cargar el Dinero:** Referente al costo que pagamos a la empresa que nos ofrece el servicio de ir al cajero y cargar el dinero en el mismo. Suele estar relacionado con la longitud de las rutas que recorre el camión en el proceso de abastecimiento.

En la práctica, las empresas sólo perciben los costos directos, en este caso, los costos por cargar el dinero y no perciben los costos ocultos, como el que se incurre por tener guardado el efectivo en el cajero, pudiendo ser utilizado en otro tipo de inversiones que permitan a la institución expandirse. Por lo anterior, las instituciones bancarias en su mayoría, desarrollan políticas para el manejo del efectivo en los cajeros automáticos, que reducen los costos operativos relacionados con el aprovisionamiento y no los relacionados con el inventario guardado. Prueba de esto, las instituciones financieras tienen circulando en las redes de cajeros automáticos, al menos un 40% más dinero en efectivo del que realmente se necesita [6].

Por lo mencionado anteriormente, el problema a resolver en la presente investigación consiste en, desarrollar estrategias óptimas de reabastecimiento de efectivo para las redes de cajeros automáticos, considerando la estimación de la demanda como un número difuso y las decisiones de gestión de inventario y distribución desde un punto de vista holístico.

Usualmente, los enfoques más usados para afrontar el problema tratado en este trabajo consisten en contestar cada una de las preguntas arriba mencionadas individualmente, debido a que la respuesta de cada una de ellas se obtiene resolviendo problemas independientes, sin considerar el problema global. La desventaja de resolver cada problema por separado, radica en la pérdida de las relaciones que existen entre los componentes del sistema global, lo cual nos lleva a soluciones de menor calidad que las que se obtendrían si se resuelve el problema de una forma integral.

Por el gran nivel de dificultad que existe en el desarrollo de una política optimizada de reabastecimiento para los cajeros automáticos, un gran número de empresas optan por elaborar soluciones basadas generalmente en procedimientos ya establecidos. Un ejemplo es, la utilizada por la empresa de correos mencionada en [7], la cual consiste en:

- Garantizar el 100% de disponibilidad de dinero en los cajeros.
- Recargar el cajero al menos dos veces por semana.
- Evitar dos o más alertas del sistema en una semana, para evitar quedarse sin dinero.

Otro tipo de estrategias de solución establecen periodos fijos de reabastecimiento, es decir, se fijan días de la semana en los cuales se irá recargar el cajero hasta llenarlo completamente.

Las principales desventajas al utilizar este tipo de métodos para reabastecer los cajeros automáticos radican en: los altos costos de oportunidad en que se incurre, no necesariamente se garantiza la disponibilidad total de efectivo en los mismos, lo cual implica que no se cumple ni con la demanda ni con las expectativas que tienen los clientes sobre la calidad del servicio, y en la pérdida de inversiones potenciales que permitirían a la institución bancaria crecer.

1.4. Descripción del Sistema de Interés

El caso concreto que se estudiará en esta investigación corresponde al de la segunda institución financiera más grande de la República del Ecuador. Actualmente existen 25 bancos privados en toda la nación, siendo las tres instituciones financieras más grandes aquellas que, en cuanto patrimonio, superan los 2,000 millones de dólares [8]:

- Banco Amarillo con USD\$ 5,139.2 millones.
- Banco Azul con USD\$ 2,420.1 millones.
- Banco Celeste con USD\$ 2,192.8 millones.

El Banco Azul fue fundado en la ciudad de Guayaquil en el año de 1923 por una empresa extranjera de capital italiano, la cual al estallar la segunda guerra mundial nacionalizó el banco para poder desvincularlo de las crisis económicas a las que se enfrentó Italia durante esa época. En la actualidad cuenta con una red nacional de aproximadamente 4266 puntos de atención, de los cuales, el 21% se encuentra en la ciudad de Guayaquil. En esta ciudad tiene una red de 235 cajeros automáticos distribuidos a lo largo de toda la urbe, convirtiéndose en la red más grande de cajeros que un banco tiene en una sola ciudad del país.

La administración de esta red juega un papel vital en la operación del banco, debido a que las leyes ecuatorianas impiden a las instituciones del sector financiero cobrar a sus clientes por los servicios relacionados al acceso a la información y manejo de los productos financieros propios del giro de negocio, por lo cual, no se perciben ingresos significativos en la operación de la red, siendo más bien un costo que hay que solventar. Por este motivo, el diseño de la política de reabastecimiento en las redes de cajeros automáticos, no sólo de este banco, sino de todos los bancos del país, no se puede tomar a la ligera usando herramientas simples o de papel y lápiz, siendo extremadamente necesario el uso de técnicas adecuadas de optimización que permitan establecer políticas óptimas que disminuyan severamente los costos incurridos al operar estas redes. La ley que prohíbe a las instituciones financieras cobrar por determinados servicios menciona específicamente lo siguiente:

*“... que la Superintendencia de Bancos y Seguros autorizará previamente los servicios a ser libremente aceptados y recibidos por los clientes y usuarios y determinará las actividades propias del giro del negocio que no constituyen servicios; **que las actividades bancarias propias del giro del negocio que implican transacciones básicas que realizan los clientes e información esencial respecto del manejo de sus cuentas, serán gratuitas;** que se prohíbe el cobro de tarifas que no impliquen una contraprestación de servicios...”*

Por lo anterior, servicios como el uso de los cajeros para retirar dinero y realizar consultas de saldos y movimientos, la banca por internet, transacciones electrónicas, pagos con tarjetas de crédito y débito, giro de cheques, manejo de cuenta, etc., no pueden ser cobrados por los bancos.

Esto último restringe severamente las fuentes de ingreso de las instituciones financieras, quienes deben buscar alternativas de inversión que les permita obtener rendimientos significativos, para lo cual, es necesario contar con el flujo de caja necesario para poder invertir sin afectar la liquidez del

banco. Sin embargo, si un gran porcentaje del efectivo se encuentra guardado innecesariamente en las bóvedas de los cajeros, se pierden estas oportunidades de inversión, lo cual se traduce en la reducción seria de los márgenes de utilidad.

1.5. Objetivo General

El objetivo general que se persigue con el presente trabajo de investigación es, optimizar el proceso de reabastecimiento de efectivo en las redes de cajeros automáticos, considerando la estimación de la demanda como un número difuso.

1.6. Objetivos Específicos

Los principales objetivos a lograr durante el desarrollo del proyecto son:

- Dar a conocer la industria de los cajeros automáticos y cómo ha evolucionado a través de la historia.
- Describir la problemática que puede existir sobre el proceso de reabastecer los cajeros automáticos en cualquier red bancaria.
- Mencionar cuáles son las estrategias más utilizadas por los bancos para reabastecer sus cajeros automáticos.
- Proponer un modelo de programación matemática para optimizar el reabastecimiento de efectivo de los cajeros automáticos considerando la estimación de la demanda como un número difuso.
- Desarrollar e implementar computacionalmente un algoritmo para resolver el modelo matemático propuesto.

2. Marco Teórico

En este capítulo se revisará el estado del arte relacionado con el problema de investigación, se explicarán brevemente las bases conceptuales de la teoría de los números difusos y cómo ésta se relaciona con la programación matemática. Para finalizar, se describirá la teoría detrás del modelo matemático que servirá como base para resolver la problemática descrita.

2.1. Estado del Arte

Existen varios tipos de decisiones a tomar relacionadas con la administración de las redes de cajeros automáticos, entre ellas tenemos:

- Decisiones sobre localización.
- Decisiones sobre determinación de tarifas.
- Pronóstico de la demanda.
- Decisiones sobre abastecimiento de dinero en efectivo.

2.1.1. Decisiones sobre Localización

Las decisiones sobre localización aparecen cuando una institución, no necesariamente bancaria, necesita determinar dónde ubicar uno o más cajeros automáticos en su red ya existente, o también cuando se desea crear una.

En [9] se resuelve el problema de localización de cajeros automáticos heterogéneos utilizando un algoritmo genético que considera el estrato económico de la zona y el comportamiento de los clientes del sector, mientras que en [10], se propone de similar manera, un algoritmo genético basado en rango, de tal forma, que se maximice la satisfacción de la demanda de los clientes de la red. Este último no especifica si los cajeros automáticos son homogéneos o heterogéneos.

Finalmente, [11] propone un algoritmo basado en la optimización por dispersión de partículas (PSO por sus siglas en inglés), considerando que todos los cajeros automáticos son del mismo tipo, esto es, son homogéneos.

2.1.2. Decisiones sobre Determinación de Tarifas

En el mercado de los cajeros automáticos, no necesariamente una institución bancaria es dueña de la red, sino que esta puede pertenecer a una empresa no financiera, la cual provee de toda la infraestructura necesaria para mantenerla completamente operativa. En este sentido, dicha empresa suele ofrecer membresías a los bancos para que sus clientes puedan usar cualquier cajero de la red [1]. En este contexto, la empresa propietaria de los cajeros automáticos, debe establecer ciertas tarifas a ser pagadas por los bancos miembros o por los clientes de los mismos de tal forma, que pueda obtener los ingresos necesarios para cubrir los costos de operación y despliegue de la red, así como generar utilidades. Lo mencionado anteriormente no implica que un banco dueño de sus propios cajeros no establezca este mismo tipo de cargos. Las tarifas usualmente cargadas son:

- **Tarifa de Interconexión:** Puesta por el dueño de la red y pagada por el banco en respuesta a los costos de rutear electrónicamente la transacción [1].

- **Tarifa de Intercambio:** Puesta por el dueño de la red y pagada por el banco en respuesta a los costos de desplegar y mantener los cajeros [1].
- **Tarifa Interna de Servicio:** Puesta por el banco y pagada por el cliente del banco por el uso de un cajero dentro de la misma red de la cual el banco es miembro o propietario [1]. En la actualidad son pocos los bancos que cobran a sus clientes por el uso del cajero automático propio de la institución.
- **Tarifa Externa de Servicio:** Puesta por el banco y pagada por un no-cliente del banco por el uso de un cajero que no pertenece a la red de la cual el banco del usuario es miembro o propietario [1].
- **Recargo sobre el Cajero Automático:** Puesto por el banco y pagada por los usuarios del cajero en respuesta a los costos de desplegar y mantener la red [1].

Dado que el monto que se establezca para cada una de las tarifas mencionadas anteriormente, influye significativamente en la competitividad del banco, se han realizado numerosos estudios económicos para determinar cuáles deberían ser estos valores y cómo impactarían en la decisión de un usuario para unirse o no a un determinado banco. En las referencias [12], [13], [14] y [15] se proponen y analizan diferentes modelos económicos asociados a este tipo de decisiones.

2.1.3. Pronóstico de la Demanda

Uno de los problemas más importantes en la administración de las redes de cajeros automáticos y que juega un papel fundamental para poder determinar la política óptima de abastecimiento, es el pronóstico de la demanda.

La demanda de un cajero automático depende de muchos factores, tanto cuantitativos como cualitativos. Entre los factores cuantitativos tenemos el día de la semana, el día del mes, el mes, el año, etc. Para ejemplificar esto, la demanda de efectivo no se comporta igual un lunes que un domingo, en quincena y fin de mes que en cualquier otro día, en diciembre que en julio y en junio de un año cualquiera que en junio del año que se celebra el mundial de fútbol.

Entre los factores cualitativos tenemos los relacionados con: el sector donde se ubica el cajero, el estrato económico de las personas que viven cerca del cajero, el comportamiento de los usuarios, etc. Ejemplificando, tenemos que el cajero ubicado en un centro comercial no tiene los mismos niveles de demanda que un cajero ubicado en un sector no comercial, las personas de estrato económico alto retirarían montos de dinero superiores que las personas de estrato económico medio o bajo, etc. Para finalizar, el comportamiento de la demanda no depende únicamente de éstos factores de forma aislada, sino que existen interacciones entre ellos que complican su pronóstico.

Dada la gran complejidad que existe en torno al pronóstico de la demanda de los cajeros automáticos, en las referencias [3], [6], [7], [16], [17] y [18] el lector podrá encontrar diferentes modelos y algoritmos desarrollados para establecer una predicción confiable de la misma. Muchos de estos trabajos están basados en el uso de redes neuronales artificiales y algoritmos genéticos, estableciendo un monto a cargar en cada cajero automático a partir de los resultados obtenidos.

2.1.4. Decisiones sobre Reabastecimiento

Sin duda alguna, el aspecto más significativo en la operación de las redes de cajeros automáticos tiene que ver con el reaprovisionamiento del efectivo en los mismos. Esto se debe a que si un cajero no tiene dinero cuando el cliente lo requiera, éste pierde la confianza en el servicio ofrecido y desmejora la imagen del banco al cual pertenece. A esto le podemos agregar los ingresos que se dejan de percibir por las transacciones no atendidas y los gastos que se incurren por tener un cajero en funcionamiento (costos de electricidad, renta del espacio, etc.), que no está cumpliendo las expectativas de servicio deseadas.

Sin embargo, a pesar de la importancia de este aspecto, no existen muchos estudios publicados referentes al mismo, en los que se considere de forma integral, la política de inventario con la estrategia de ruteo para reaprovisionar los cajeros. En este contexto, el único trabajo que considera las dos vertientes del problema es el referenciado en [4], en el cual se hace un extenso estudio teórico de los costos logísticos asociados a la operación, para al final mencionar un modelo matemático para resolver el problema, considerando un entorno determinístico para el comportamiento de la demanda a través del tiempo, e implementándolo en el modelizador AMPL con una instancia de 10 cajeros automáticos en la red.

El modelo propuesto en la referencia [4], corresponde a la formulación del Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés), el cual estudiaremos más adelante, siendo este un problema computacionalmente tan difícil de resolver que, para situaciones de gran escala, es necesario el uso de métodos heurísticos, puros o hibridados, que permitan obtener buenas soluciones en un tiempo de procesamiento aceptable.

Otro estudio que cabe mencionar es el referenciado en [19], el cual propone, analiza y resuelve numéricamente tres modelos de programación matemática estocástica, para establecer el monto a cargar en los cajeros automáticos. En la investigación referenciada se establecen los siguientes supuestos:

- Se conoce la distribución de probabilidad de la demanda de los cajeros.
- Se establecen periodos fijos de aprovisionamiento.
- Se pueden o no considerar costos fijos por aprovisionar.
- El tiempo que transcurre desde que se solicita el reabastecimiento del cajero hasta que se lo reabastece (lead-time en inglés) se asume constante e igual a cero.

Supuestos que simplifican demasiado la problemática real, en la cual, es muy difícil conocer con certeza la distribución de probabilidad de la demanda para cada cajero y que, el lead-time sea igual a cero. Por lo que se hace necesario contar con nuevas estrategias para estimar la demanda que permitan desarrollar políticas de operación acordes con la complejidad del problema.

2.2. Teoría de Conjuntos y Números Difusos

En esta sección se abordan aquellos elementos teóricos fundamentales que son necesarios para el desarrollo del resto de la investigación. No se ahondará en rigurosidad ni en profundidad de las definiciones y teoremas mencionados, debido a que el objetivo principal, es presentar las ideas elementales relativas a los conjuntos y números difusos.

2.2.1. Definiciones sobre Conjuntos Difusos

A continuación se mencionan de forma breve algunas de las definiciones más importantes a conocer sobre la teoría de conjuntos difusos.

Definición 1. (Conjunto Difuso [20])

Un conjunto difuso \tilde{A} de un conjunto universo X , es un subconjunto de la forma:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

Donde $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es un número real en el intervalo $[0,1]$ conocido como el grado de membresía o pertenencia del elemento $x \in X$ en el conjunto \tilde{A} . La función $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$ se define como la función de membresía del conjunto difuso \tilde{A} .

Definición 2. (Soporte de un Conjunto Difuso [21])

Dado un conjunto difuso \tilde{A} , se define el soporte de \tilde{A} , denotado por $Supp(\tilde{A})$, como el conjunto ordinario:

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Definición 3. (Núcleo de un Conjunto Difuso [20])

Dado un conjunto difuso \tilde{A} , se define el núcleo de \tilde{A} , denotado por $Ker(\tilde{A})$, como el conjunto ordinario:

$$Ker(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Se dice que \tilde{A} es un conjunto difuso normal si $Ker(\tilde{A}) \neq \emptyset$.

Definición 4. (α -corte de un Conjunto Difuso [20])

Dado un conjunto difuso \tilde{A} , se define el α -corte de \tilde{A} , denotado por \tilde{A}_α , como el conjunto:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Para cualquier $\alpha \in [0,1]$.

Definición 5. (Convexidad de un Conjunto Difuso [21])

Un conjunto difuso \tilde{A} es convexo, si y sólo si, para toda $x, y \in X$ y para toda $\lambda \in [0,1]$ se cumple que:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

Definición 6. (Número Difuso [20])

Se dice que \tilde{c} es un número difuso en el conjunto de los números reales si:

- \tilde{c} es normal.
- Para todo $\alpha \in (0,1]$, \tilde{c}_α es un intervalo cerrado.

Definición 7. (Número Difuso L – R)

Se dice que \tilde{c} es un número difuso triangular o del tipo L – R, si y sólo si, su función de membresía es de la forma:

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \begin{cases} L(x) = \frac{x - m + a}{a} & \text{si } x \leq m, a > 0 \\ R(x) = \frac{m - x + b}{b} & \text{si } x \geq m, b > 0 \\ 0 & \text{si } x < m - a \text{ ó } x > m + b \end{cases}$$

Donde m es la moda de \tilde{c} , a y b representan las amplitudes por izquierda y por derecha, $L(x)$ y $R(x)$ describen una función a la izquierda y a la derecha de m , respectivamente, siendo L no decreciente y R no creciente. El número difuso \tilde{c} del tipo L – R se lo denota por:

$$\tilde{c} = (m - a, m, m + b)_{LR}$$

Ejemplo 2.2.1.

Consideremos $m = 10$, $a = 5$ y $b = 7$. Entonces el número difuso triangular es $\tilde{c} = (5,10,17)_{LR}$ con la siguiente gráfica de su función de membresía:

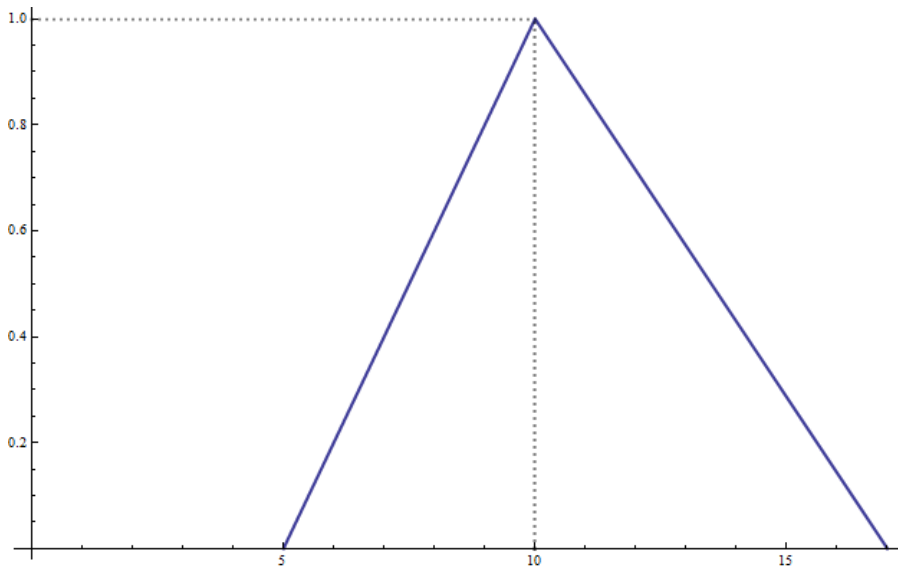


Figura 3: Número Difuso Triangular

2.2.2. Operaciones con Números Difusos

Conforme a lo mencionado en [20], las principales operaciones con números difusos del tipo $L - R$ se definen como:

Definición 8. (Suma de Números Difusos)

Sean $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ dos números difusos del tipo $L - R$ definidos sobre el conjunto de los números reales. La suma $\tilde{A} + \tilde{B}$ está dada por:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_{LR}$$

Definición 9. (Producto de un Escalar por un Número Difuso)

Sea $\tilde{A} = (a, b, c)$ un número difuso del tipo $L - R$ definido sobre el conjunto de los números reales y sea $k \in R$. El producto $k\tilde{A}$ está dado por:

$$k\tilde{A} = \begin{cases} (ka, kb, kc)_{LR} & \text{si } k \geq 0 \\ (-kc, kb, -ka)_{LR} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

2.2.3. Métodos de Comparación de Números Difusos

Sea $F(R)$ el conjunto de todos los números difusos en los reales y $g: F(R) \rightarrow R$ una función ordenadora lineal [21], es decir, que cumple con:

- $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F(R) \quad g(\tilde{A} + \tilde{B}) = g(\tilde{A}) + g(\tilde{B})$
- $\forall \alpha \in R^+ \quad \forall \tilde{A} \in F(R) \quad g(\alpha\tilde{A}) = \alpha g(\tilde{A})$

Entonces, dados dos números difusos cualesquiera $A, B \in F(R)$, se tiene que:

- $g(\tilde{A}) < g(\tilde{B}) \Leftrightarrow \tilde{A} < \tilde{B}$
- $g(\tilde{A}) > g(\tilde{B}) \Leftrightarrow \tilde{A} > \tilde{B}$
- $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$

Conforme a lo mencionado en [21], los principales métodos de comparación de números difusos basados en funciones ordenadoras lineales son:

Método 1. (Primer Índice de Yager)

Dado el número difuso $\tilde{A} = (m - a, m, m + b)$ del tipo $L - R$, el primer índice de Yager define la función lineal ordenadora g como:

$$g(\tilde{A}) = \frac{\int_{m-a}^{m+b} h(x)u_A(x)dx}{\int_{m-a}^{m+b} u_A(x)dx}$$

Donde $h(x)$ es una medida de la importancia del valor x . Si $h(x) = x$, este índice representa la abscisa del centro de gravedad del número difuso \tilde{A} . Resolviendo la expresión anterior, para el caso del número difuso triangular, el valor del índice está dado por:

$$g(\tilde{A}) = \frac{1}{3}(3m - a + b)$$

Método 2. (Tercer Índice de Yager)

Dado el número difuso $\tilde{A} = (m - a, m, m + b)$ del tipo $L - R$, el tercer índice de Yager define la función lineal ordenadora g como:

$$g(\tilde{A}) = \int_0^1 M(u_\alpha) d\alpha$$

Donde u_α es el α -corte del número difuso \tilde{A} y $M(u_\alpha)$ es el valor medio de los elementos que forman parte de u_α . Para el caso de un número difuso triangular, el conjunto u_α , el cual se obtiene resolviendo para la variable x el sistema de inecuaciones $L(x) \geq \alpha$ y $R(x) \geq \alpha$, es:

$$u_\alpha = [m - a(1 - \alpha), m + b(1 - \alpha)]$$

Luego, el valor medio de los elementos de u_α está dado por:

$$M(u_\alpha) = \frac{2m + (1 - \alpha)(b - a)}{2}$$

Finalmente, resolviendo la integral inicial, el valor del índice para el número difuso triangular está dado por:

$$g(\tilde{A}) = \frac{1}{4}(4m - a + b)$$

Método 3. (Relación de Adamo)

Dado el número difuso $\tilde{A} = (m - a, m, m + b)$ del tipo $L - R$, la relación de Adamo define la función lineal ordenadora g como:

$$g(\tilde{A}) = \max\{x | u_A(x) \geq \alpha\}$$

La cual establece un índice de α -preferencia con $\alpha \in [0,1]$. Luego, para el caso de los números difusos triangulares, el valor del índice está dado por:

$$g(\tilde{A}) = m + b(1 - \alpha)$$

Donde el valor de $\alpha \in [0,1]$ debe ser seleccionado por el decisor.

Ejemplo 2.2.2.

Consideremos los números difusos $\tilde{A} = (1,4,6)$ y $\tilde{B} = (2,3,7)$ del tipo $L - R$. Usando los tres métodos de comparación que se han mencionado tenemos:

- **Primer Índice de Yager:** $g(\tilde{A}) = \frac{11}{3}$ y $g(\tilde{B}) = \frac{12}{3}$, por lo tanto \tilde{B} es mayor que \tilde{A} .
- **Tercer Índice de Yager:** $g(\tilde{A}) = \frac{15}{4}$ y $g(\tilde{B}) = \frac{15}{4}$, por lo tanto \tilde{A} es igual a \tilde{B} .
- **Relación de Adamo:** $g(\tilde{A}) = 6 - 2\alpha$ y $g(\tilde{B}) = 7 - 4\alpha$, por lo tanto \tilde{B} es mayor que \tilde{A} sólo para determinados valores de α tal como se puede observar en la gráfica siguiente:

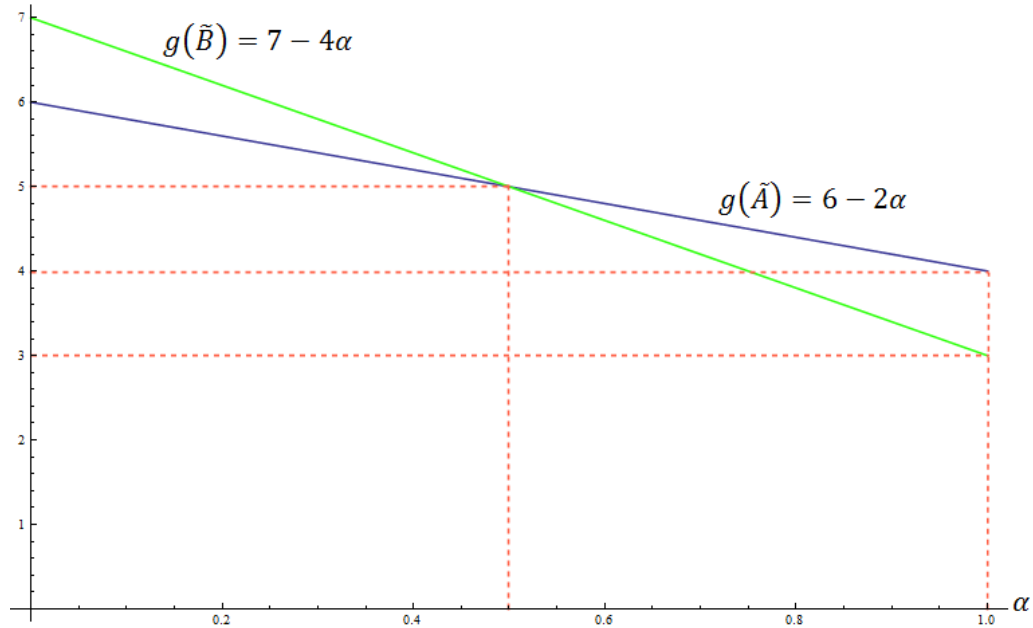


Figura 4: Gráfico de la Relación de Adamo

En el ejemplo se puede visualizar que una de las principales desventajas de usar números difusos consiste en establecer un mecanismo de comparación adecuado al problema, pues el resultado de ésta comparación varía significativamente dependiendo del método usado. Como podemos apreciar en el ejemplo, la jerarquía de orden de ambos números cambia conforme se cambia el método de comparación utilizado.

2.2.4. Teoremas sobre Conjuntos Difusos

Teorema 1. (Convexidad de Conjuntos Difusos [21])

Un conjunto difuso \tilde{A} es convexo, si y sólo si, para todo $\alpha \in [0,1]$, los α -cortes:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Son todos conjuntos convexos.

Teorema 2. (Teorema de Representación [21])

Dado un conjunto difuso cualquiera \tilde{A} , se cumple que:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$$

Donde $\alpha A_\alpha = \text{Min}\{\alpha, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$

2.3. Programación Matemática Difusa

La programación matemática difusa nace en el contexto de la Investigación de Operaciones, a raíz de la introducción de la teoría de conjuntos difusos, hecha por el profesor Lofti Zadeh en 1965. En este ámbito, y sin profundizar demasiado en el área, existen cuatro tipos de problemas de programación matemática difusa según se presente la ambigüedad de la información en las

variables de decisión, en los lados derechos de las restricciones, en los coeficientes de la función objetivo o en los coeficientes de la matriz tecnológica. En este trabajo de investigación, se abordarán únicamente los problemas de programación matemática donde la imprecisión de la información está presente en los lados derechos del modelo. El lector podrá estudiar los otros modelos revisando las referencias [20], [21] y [22].

2.3.1. Programación Lineal Entera con Lados Derechos Difusos

Un modelo de programación lineal entera, de forma genérica, puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} \\
 \sum_j a_{i,j} x_j &\leq b_i & \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Donde N es el conjunto de los números naturales, $c_j, b_i, a_{ij} \in R$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Este tipo de modelos consideran, entre sus supuestos, que la información que se tiene sobre el sistema que están representando es conocida con exactitud, lo cual en la práctica no sucede en la mayoría de los casos, debido a que estos datos son el producto de estimaciones hechas por parte de los expertos del sistema, de mediciones realizadas por el equipo de consultores que desarrollan el modelo, pronósticos, etc. En resumen, tienen un nivel de imprecisión que no considera el modelo, de ahí que muchas soluciones desarrolladas fracasen al momento de querer implantarlas en las empresas.

Para que la ambigüedad e imprecisión que rodea a los datos recolectados de un sistema, sea considerada dentro de los modelos matemáticos, se introdujo lo que hoy se conoce como Programación Matemática Difusa. En particular, el tema que aborda esta sección es la Programación Lineal Entera Difusa (FILP por sus siglas en inglés), donde la ambigüedad de la información se presenta en los lados derechos del modelo.

El modelo de programación lineal entera que considera los lados derechos de las restricciones como números difusos es:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} \\
 \sum_j a_{i,j} x_j &\leq_g \tilde{b}_i & \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Donde \tilde{b}_i es un número difuso y el símbolo \leq_g define algún método de comparación entre números difusos. N es el conjunto de los números naturales, $b_i, c_j \in R$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Estos modelos sirven para representar situaciones donde es difícil cumplir determinados estándares y se permite cierto grado de violación en el cumplimiento de dichos estándares. Dependiendo el tipo de problema que se modele, se escoge el tipo de número difuso a usar en el lado derecho.

Para resolver este tipo de modelos se suele recurrir a una transformación del mismo para convertirlo en un modelo de programación lineal entera paramétrica o a algún mecanismo de comparación de números difusos entre ambos lados de las restricciones.

Aplicación de Métodos de Comparación

Supongamos que el número difuso \tilde{b}_i es del tipo $L - R$. Utilizaremos alguno de los métodos de comparación de números difusos para transformar el problema de programación lineal entera difusa en un modelo equivalente de programación lineal entera determinístico. Para ejemplificar esto, sea $\tilde{b}_i = (b_i - l_i, b_i, b_i + r_i)$ con $b_i, l_i, r_i \in R^+$ un número difuso del tipo $L - R$ y, consideremos que un número real q puede ser representado como un número difuso haciendo $q = (q, q, q)$. Entonces, el problema de programación lineal entera difusa se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} \\ \left(\sum_j a_{i,j} x_j, \sum_j a_{i,j} x_j, \sum_j a_{i,j} x_j \right) &\leq_g (b_i - l_i, b_i, b_i + r_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Dependiendo del método de comparación utilizado, el modelo anterior se puede simplificar en cualquiera de los que se muestran a continuación:

Primer Índice de Yager

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} \\ \sum_j a_{i,j} x_j &\leq \frac{1}{3}(3b_i + r_i - l_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Tercer Índice de Yager

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} \\
 \sum_j a_{i,j} x_j &\leq \frac{1}{4}(4b_i + r_i - l_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j &\in N \quad \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Relación de Adamo

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} \\
 \sum_j a_{i,j} x_j &\leq b_i + r_i(1 - \alpha) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j &\in N \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 \alpha &\in [0, 1]
 \end{aligned}$$

Hay que recalcar el hecho de que, usando los dos primeros métodos de comparación de números difusos y resolviendo los problemas de programación matemática asociados, se obtienen soluciones puntuales para el problema inicial, mientras que el tercero nos reporta un conjunto con diversas soluciones al problema, las cuales se generan por cada variación que se haga al parámetro α y son puestas a consideración del decisor, quien será el que escoja la solución definitiva a implantar.

Aplicación de la Programación Paramétrica

J. L. Verdegay [23] supone que la función de membresía para la i – ésima restricción es lineal y demuestra, por medio del Teorema de Representación de los Números Difusos, que la solución óptima del problema de programación lineal entera con lados derechos difusos, se puede obtener resolviendo su equivalente en programación paramétrica, mostrado a continuación:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\
 \text{S. t:} \\
 a_i x &\leq b_i + d_i(1 - \alpha) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j &\in N \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 \alpha &\in [0, 1]
 \end{aligned}$$

Nótese cómo éste último modelo pareciera ser idéntico al que se obtiene al aplicar la relación de Adamo en los métodos de comparación de números difusos. Sin embargo, no lo es, pues como veremos más adelante para el caso de la igualdad, la relación de Adamo pierde la información relacionada con el extremo izquierdo del número difuso que se esté utilizando.

El problema anterior, al cual denotaremos P_α , puede ser resuelto por medio del enfoque utilizado en la programación lineal entera paramétrica [24], que consiste en:

- **Paso 1:** Hacer $\alpha = 0$ y resolver P_α utilizando cualquier método.
- **Paso 2:** Probar la solución encontrada en cada restricción para hallar el mínimo valor de α , denotado por α_1 , para el cual la solución aún permanece factible. Luego la solución hallada será óptima para la familia de problemas P_α para $\alpha \leq \alpha_1 \leq 1$.
- **Paso 3:** Si $\alpha_1 \geq 1$ finalizar y reportar todas las soluciones X_α encontradas. Caso contrario avanzar al paso 4.
- **Paso 4:** Hacer $\alpha = \alpha_1 + 0.01$, resolver P_α utilizando cualquier método y regresar al paso 2.

El conjunto solución para el problema P_α arriba mencionado, es el conjunto difuso $\tilde{S} = \{X_\alpha/\alpha\}$ para $\alpha \in [0,1]$. Este algoritmo también se puede aplicar para resolver el modelo obtenido después de aplicar la relación de Adamo en la sección anterior.

Ejemplo 2.3.1.

Considere el siguiente problema de programación lineal entera difusa tomado de [25]:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 5x_2 \\ \text{S. t:} \\ 2x_1 - x_2 &\lesssim 9 \\ 2x_1 + 8x_2 &\lesssim 31 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in N \end{aligned}$$

Suponiendo que $d_1 = 3$ y $d_2 = 4$, el problema auxiliar de programación paramétrica es:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 5x_2 \\ \text{S. t:} \\ 2x_1 - x_2 &\leq 9 + 3(1 - \alpha) \\ 2x_1 + 8x_2 &\leq 31 + 4(1 - \alpha) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in N \\ \alpha &\in [0,1] \end{aligned}$$

Procedimiento de Resolución

Iteración 1

Hacemos $\alpha = 0$ y resolvemos P_α utilizando el solver de Excel. La solución obtenida es $x_1 = 5$ y $x_2 = 3$ con $z_\alpha = 25$. Evaluando la solución obtenida en ambas restricciones obtenemos:

- $7 \leq 9 + 3(1 - \alpha)$
- $34 \leq 31 + 4(1 - \alpha)$

Resolviendo la primera inecuación se obtiene que $\alpha \leq 1.66$ mientras que para la segunda se obtiene que $\alpha \leq 0.25$. Se toma el menor valor de α y hacemos $\alpha_1 = 0.25$ y la solución encontrada $X_\alpha = (5,3)$ es óptima para la familia de problemas P_α para $\alpha \in [0,0.25]$.

Iteración 2

Hacemos $\alpha = \alpha_1 + 0.01 = 0.26$ y resolvemos P_α utilizando el solver de Excel. La solución obtenida ahora es $x_1 = 4$ y $x_2 = 3$ con $z_\alpha = 23$. Evaluando la solución obtenida en ambas restricciones obtenemos:

- $5 \leq 9 + 3(1 - \alpha)$
- $32 \leq 31 + 4(1 - \alpha)$

Resolviendo la primera inecuación se obtiene que $\alpha \leq 2.33$ mientras que para la segunda se obtiene que $\alpha \leq 0.75$. Se toma el menor valor de α y hacemos $\alpha_1 = 0.75$ y la solución encontrada $X_\alpha = (4,3)$ es óptima para la familia de problemas P_α para $\alpha \in (0.25, 0.75]$.

Iteración 3

Hacemos $\alpha = \alpha_1 + 0.01 = 0.76$ y resolvemos P_α utilizando el solver de Excel. La solución obtenida ahora es $x_1 = 3$ y $x_2 = 3$ con $z_\alpha = 21$. Evaluando la solución obtenida en ambas restricciones obtenemos:

- $3 \leq 9 + 3(1 - \alpha)$
- $30 \leq 31 + 4(1 - \alpha)$

Resolviendo la primera inecuación se obtiene que $\alpha \leq 3$ mientras que para la segunda se obtiene que $\alpha \leq 1.25$. Se toma el menor valor de α y hacemos $\alpha_1 = 1.25$ y la solución encontrada $X_\alpha = (3,3)$ es óptima para la familia de problemas P_α para $\alpha \in (0.75, 1]$.

Como $\alpha_1 = 1.25 \geq 1$, el algoritmo se detiene y la solución óptima para el problema planteado es el conjunto difuso $\tilde{S} = \{(5,3)/0.25\}, \{(4,3)/0.75\}, \{(3,3)/1\}$.

El Caso de la Igualdad

Hasta ahora se han estudiado los esquemas propuestos para resolver los modelos de programación lineal entera difusa donde las restricciones son desigualdades. Consideremos ahora el siguiente problema de optimización con restricciones de igualdad:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} \\ \sum_j a_{i,j} x_j &=_{g} \tilde{b}_i & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Donde \tilde{b}_i es un número difuso y el símbolo $=_g$ establece algún mecanismo de comparación de números difusos. Sea el número difuso del tipo $L - R$ o triangular \tilde{b}_i , es decir, tiene la forma $\tilde{b}_i = (b_i - l_i, b_i, b_i + r_i)$ con $b_i, l_i, r_i \in R^+$, la función de membresía de la i -ésima restricción estaría definida por:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i x \leq b_i - l_i \\ \frac{a_i x - b_i + l_i}{l_i} & \text{si } b_i - l_i \leq a_i x \leq b_i \\ 1 & \text{si } a_i x = b_i \\ \frac{b_i + r_i - a_i x}{r_i} & \text{si } b_i \leq a_i x \leq b_i + r_i \\ 0 & \text{si } a_i x \geq b_i + r_i \end{cases}$$

Reemplazando la restricción de igualdad por sus dos restricciones de desigualdad equivalentes, y siguiendo el enfoque propuesto en [26], el modelo anterior se puede resolver utilizando su equivalente en programación paramétrica, mostrado a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{S. t:} \\ \sum_j a_{i,j} x_j &\leq b_i + r_i(1 - \alpha) & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_j a_{i,j} x_j &\geq b_i - l_i(1 - \alpha) & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in N & \forall j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Cabe recalcar, que de no existir otras restricciones en el modelo, además de las que involucran los números difusos, el problema anterior tiene infinitas soluciones, las cuales se generan por cada variación que se haga en el parámetro α . Para evitar esto, se recomienda generar una solución para un conjunto de valores del parámetro α , los cuales pueden ser definidos por el decisor o por el modelizador del problema según convenga. Otro enfoque consiste en resolver el problema equivalente asociado con el uso de algunos de los métodos de comparación de números difusos ya mencionados.

2.4. Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP)

2.4.1. Origen del IRP

El Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés), nace en torno del ámbito logístico a raíz de la implantación, en medianas y grandes empresas, de los esquemas de Inventario Manejado por el Proveedor (VMI por sus siglas en inglés). Esta filosofía de trabajo consiste en que el proveedor deberá monitorear constantemente los niveles de inventario de sus clientes, determinar cuándo reabastecerlos y en qué cantidad, así como elaborar la hoja de ruta que deberán recorrer sus camiones al momento de realizarse la distribución.

Este esquema logístico plantea la necesidad al proveedor, de integrar en un sólo modelo las decisiones asociadas con el ruteo de los vehículos, la cantidad de producto a enviar a cada cliente cada día y el nivel de inventario que se deberá mantener en las bodegas de los mismos, de tal forma que se minimicen todos los costos operativos asociados. Dada la creciente necesidad de

desarrollar políticas óptimas de operación para este esquema logístico, en el año de 1984, Awi Federgruen y Paul Zipkin publican un artículo titulado “*A Combined Vehicle Routing and Inventory Allocation Problem*,” donde se propone un modelo integrado de ruteo de vehículos con localización de inventarios, dando origen a lo que hoy se conoce como *Inventory Routing Problem*.

Este modelo logístico se ajusta a la problemática tratada en el presente trabajo de investigación, debido a que el giro de negocio de la industria de los cajeros automáticos genera un esquema VMI de forma natural, es decir, no hay que establecer un contrato entre el proveedor y los clientes para que se adopte este esquema, dado que los cajeros (clientes) no tienen capacidad de decisión sobre cómo deben ser reabastecidos. Es obligación del proveedor (dueño de los cajeros), decidir sobre cómo estos serán atendidos, de tal forma que los costos de distribución, inventario, nivel de servicio sean minimizados y la calidad del servicio mantenida.

2.4.2. Descripción Matemática del IRP

El problema en su versión básica consiste en, dado un conjunto de clientes (cajeros) y un almacén central (banco matriz) desde el cual se los atenderá, determinar cuál es el conjunto de rutas de distribución, la cantidad de producto (dinero en efectivo) a enviar a cada cliente junto con los niveles de inventario que se deben mantener, para cada día o instante de tiempo dentro del horizonte de planificación, de tal forma que, se minimicen los costos de inventario y distribución. Nótese que, a diferencia del problema clásico de ruteo de vehículos, la cantidad a enviar a cada cliente es ahora una variable de decisión por lo cual no necesariamente se debe visitar a todos los clientes todos los días, considerando que los niveles de inventario en las bodegas de los mismos, deben ser suficientes para cubrir la demanda para los días que no son atendidos.

En la Figura 5 se puede apreciar cómo suelen ser diseñadas las rutas en un modelo de IRP. En el día 1 todos los clientes son visitados estableciéndose dos rutas, mientras que en el día 2, sólo algunos de ellos son visitados estableciéndose una única ruta para atenderlos. Este plan de visitas implica que los clientes que no son visitados en el día 2, tienen el suficiente nivel de stock en sus bodegas para cubrir la demanda de ese día.

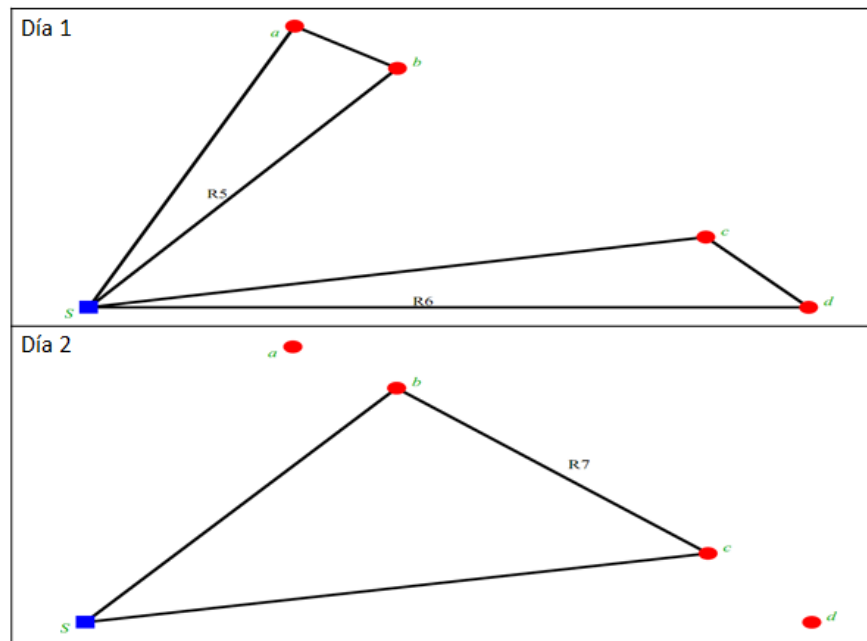


Figura 5: Plan de Ruteo del IRP

El modelo de programación matemática propuesto por Federgruen y Zipkin [27] considera un horizonte de tiempo continuo y una función objetivo no lineal, lo cual hace al problema muy difícil de tratar en periodos razonables de tiempo. Una formulación de programación lineal entera mixta se menciona en [28], sin embargo, ésta considera que se conocen todas las posibles rutas con anticipación y plantea un esquema de selección de ruta para el día que el cliente deba ser visitado, lo cual es difícil de manejar en problemas de gran escala, debido a que generar todas las rutas posibles exige demasiado tiempo computacional y no nos ayuda a resolver el problema de interés.

Los modelos de programación entera mixta considerando un horizonte de tiempo finito y discreto, facilitan en cierto grado el manejo de problema, debido a que se puede descomponer con base en dos decisiones; determinar qué clientes van a ser visitados cada día junto con la cantidad de producto que van a recibir, para luego decidir cómo rutear los vehículos para visitar dichos clientes. Este enfoque plantea la resolución de un problema de ruteo de vehículos (VRP) para cada instante de tiempo, el cual es un problema de la clase NP-Hard [29], por lo cual se puede deducir inmediatamente que el IRP también pertenece a la clase de problemas NP-Hard.

El Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP), ha sido ampliamente estudiado desde dos principales enfoques, el determinístico y el probabilístico. La principal diferencia entre estos radica en que la demanda de los clientes en el primer caso es conocida con certeza, mientras que en el segundo se ajusta a una distribución de probabilidad. De igual forma, se han propuesto varias estrategias de solución, que van desde el uso de métodos exactos como los algoritmos de Branch and Bound, hasta la implementación de métodos metaheurísticos como la Búsqueda Tabú. El lector podrá revisar los trabajos relacionados con estos temas en la referencias [28], [30], [31] y [32].

2.4.3. Modelos Matemáticos para el IRP

Siguiendo el esquema adoptado por Federgruen y Zipkin [27], el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios puede ser representado a través de un modelo de programación no lineal entera mixta, el cual se compone por:

Datos

- K es el número de vehículos disponibles.
- n es el número de clientes (nodos).
- b_k es la capacidad, en peso o volumen, del vehículo k .
- $c_{i,j}$ es el costo del viaje directo desde el nodo i al nodo j .
- $F_i(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de la demanda de un periodo en el nodo i , la cual se asume que es estrictamente creciente.
- h_i^+ es el costo por unidad de inventario almacenado en el nodo i .
- h_i^- es el costo por unidad de inventario faltante en el nodo i .
- β_i es el inventario inicial en el nodo i .
- A es el total de producto disponible en el almacén central.

Variables de Decisión

- $y_{i,k} = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } i \text{ es asignado a la ruta } k \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- $x_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si el vehículo } k \text{ viaja directamente desde el nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- $w_i = \text{cantidad de producto enviado al nodo } i$

El autor define una ruta ficticia $k = 0$ consistente en aquellos nodos o clientes a los cuales no se les va a enviar nada. De igual manera, al ser un modelo donde se considera que el horizonte de planificación es infinito, la función de costos de inventario está dada por:

$$q_i(w_i) = \int_{\beta_i+w_i}^{\infty} h_i^-(\xi - \beta_i - w_i)dF_i(\xi) + \int_0^{\beta_i+w_i} h_i^+(\beta_i + w_i - \xi)dF_i(\xi)$$

Modelo Matemático

$$\text{Min } z = \sum_{i,j,k} c_{i,j}x_{i,j,k} + \sum_i q_i(w_i) \quad (2.1)$$

S. t:

$$\sum_i w_i y_{i,k} \leq b_k \quad \forall k = 0, 1, \dots, K \quad (2.2)$$

$$\sum_i w_i \leq A \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^K y_{0,k} = K \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=0}^K y_{i,k} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

$$\sum_i x_{i,j,k} = y_{j,k} \quad \forall j = 0, \dots, n \quad (2.6)$$

$$\sum_j x_{i,j,k} = y_{i,k} \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (2.7)$$

$$\sum_{(i,j) \in S \times S} x_{i,j,k} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq \{1, \dots, n\} \quad (2.8)$$

$$x_{i,j,k} \in \{0,1\} \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (2.9)$$

$$y_{i,k} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \quad (2.11)$$

Donde la ecuación (2.1) es la función objetivo que busca minimizar los costos de ruteo y de inventario, la restricción (2.2) garantiza que la capacidad del vehículo no sea sobrepasada y la restricción (2.3) impide que se envíe más producto del que se tiene disponible en el almacén central. Las restricciones restantes aparecen en los modelos clásicos de ruteo de vehículos (VRP por sus siglas en inglés), donde las ecuaciones (2.4) y (2.5) asignan cada cliente a una única ruta, mientras que las restricciones de la (2.6) a la (2.8) definen un problema del agente viajero (TSP por sus siglas en inglés) para cada ruta creada. Finalmente, las restricciones (2.9), (2.10) y (2.11) imponen la condiciones lógicas que deben cumplir las variables de decisión.

Como podemos observar, el modelo matemático propuesto en [27] es no lineal por la presencia de la restricción (2.2). Para evitar esto, otros enfoques basados en programación entera mixta han sido propuestos en la literatura, uno de los más conocidos es el referenciado en [28], el cual se formula a través de una discretización del tiempo a lo largo del horizonte de planificación. En este modelo se asume que se conoce un conjunto de posibles rutas para visitar a los clientes en cada instante de tiempo. Los autores sugieren crear este conjunto de rutas utilizando algún mecanismo de zonificación de clientes (clustering en inglés), el cual, en la práctica, es también un problema difícil de tratar. La formulación matemática del Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios propuesta en [28], está compuesta por:

Datos

- $R = \{1, 2, \dots, r\}$ es el conjunto de rutas disponibles para visitar a los clientes.
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de clientes.
- $T = \{1, 2, \dots, t\}$ es el horizonte de tiempo, finito y discreto, a ser considerado.
- u_i es la tasa de consumo diaria (demanda) del cliente i .
- C_i es la capacidad de almacenamiento del cliente i .
- Q es la capacidad del vehículo.
- I_i es el inventario inicial disponible en el cliente i .
- $l_i^t = \max\{0, tu_i - I_i\}$ es la cantidad mínima de producto a ser enviado al cliente i en el instante de tiempo t .

- $u_i^t = C_i + tu_i - I_i$ es la cantidad máxima de producto a ser enviado al cliente i en el instante de tiempo t .
- c_r es el costo de la ruta r .

Variables de Decisión

- $x_{r,t} = \begin{cases} 1, & \text{si la ruta } r \text{ se usa en el día } t \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- $d_{i,r}^t = \text{cantidad de producto enviado al cliente } i \text{ usando la ruta } r \text{ en el día } t$

Modelo Matemático

$$\text{Min } z = \sum_{r,t} c_r x_{r,t} \quad (2.12)$$

$$\text{S. t: } l_i^t \leq \sum_{1 \leq s \leq t} \sum_{r \ni i} d_{i,r}^s \leq u_i^t \quad \forall i \in V \forall t \in T \quad (2.13)$$

$$\sum_{i \in r} d_{i,r}^t \leq Q x_{r,t} \quad \forall r \in R \forall t \in T \quad (2.14)$$

$$\sum_r x_{r,t} \leq m \quad \forall t \in T \quad (2.15)$$

$$x_{r,t} \in \{0,1\} \quad \forall r \in R \forall t \in T \quad (2.16)$$

$$0 \leq d_{i,r}^t \leq \min\{Q, C_i\} \quad \forall i \in V \forall r \in R \forall t \in T \quad (2.17)$$

En este modelo, la ecuación (2.12) es la función objetivo, que busca minimizar el costo total del ruteo a lo largo del horizonte de planificación. La restricción (2.13) asegura que los clientes no se queden sin stock en sus bodegas, (2.14) garantiza que no se sobrepase la capacidad del vehículo en cada ruta, mientras que (2.15) impone que no se usen más rutas que la cantidad de vehículos disponibles m . Para finalizar, las restricciones (2.16) y (2.17) aseguran las condiciones lógicas que deben cumplir las variables de decisión en el modelo.

Para finalizar, una formulación más simple de interpretar es mencionada en [33], la cual, al igual que la anterior, asume un horizonte de tiempo finito y discreto, así como también se conocen todas las posibles rutas para visitar a los clientes en cada instante de tiempo. El modelo de programación lineal entera mixta mencionado en [33] está compuesto por:

Datos

- $V = \{0,1,2, \dots, n\}$ es el conjunto de nodos o clientes. El nodo $i = 0$ representa el almacén central.
- $R = \{1,2, \dots, K\}$ es el conjunto de rutas disponibles.
- $T = \{1,2, \dots, H\}$ es el horizonte de planificación de longitud H .
- C_i es la capacidad de almacenamiento del cliente i .
- q_i es la tasa de consumo diaria (demanda) del cliente i .
- $r_{i,k}$ es igual a 1 si el nodo i pertenece a la ruta k , 0 si no pertenece.
- c_k es el costo de la ruta k .
- h_i es el costo por mantener inventario en el cliente i .

- Q es la capacidad de los vehículos.

VARIABLES DE DECISIÓN

- $y_k^t = \begin{cases} 1, & \text{si se usa la ruta } k \text{ en el día } t \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- $x_{i,k}^t = \text{cantidad de producto enviado al cliente } i \text{ usando la ruta } k \text{ en el día } t$
- $I_i^t = \text{cantidad de producto guardado en inventario al final del día } t \text{ en el cliente } i$

Modelo Matemático

$$\text{Min } z = \sum_k \sum_t c_k y_k^t + \sum_i \sum_t h_i I_i^t \quad (2.18)$$

S. t:

$$\sum_i x_{i,k}^t \leq Q y_k^t \quad \forall k \in R \forall t \in T \quad (2.19)$$

$$x_{i,k}^t \leq Q r_{i,k} \quad \forall i \in V \forall k \in R \forall t \in T \quad (2.20)$$

$$I_i^t = I_i^{t-1} + \sum_k x_{i,k}^t - q_i \quad \forall i \in V \forall t \in T \quad (2.21)$$

$$I_i^t + q_i \leq C_i \quad \forall i \in V \forall t \in T \quad (2.22)$$

$$y_k^t \in \{0,1\} \quad \forall k \in R \forall t \in T \quad (2.23)$$

$$I_i^t \geq 0 \quad \forall i \in V \forall t \in T \quad (2.24)$$

$$x_{i,k}^t \geq 0 \quad \forall i \in V \forall k \in R \forall t \in T \quad (2.25)$$

Donde la función objetivo (2.18) busca minimizar los costos de ruteo e inventario generados a lo largo del horizonte de planificación, (2.19) y (2.20) impiden que se sobrepase la capacidad de los vehículos en cada ruta, (2.21) garantiza que los clientes tengan suficiente inventario para cubrir su demanda diaria, mientras que (2.22) garantiza que no se exceda la capacidad de almacenamiento de cada cliente. Finalmente (2.23), (2.24) y (2.25) imponen las condiciones lógicas que deben cumplir las variables de decisión.

A través del desarrollo de la presente sección, se ha dado a conocer los principales enfoques de modelación matemática para resolver el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés), de los cuales, el primero corresponde a la formulación original del IRP propuesta por Federgruen y Zipkin [27] en 1984, siendo ésta un modelo no lineal, mientras que los dos restantes corresponden a formulaciones de programación lineal entera mixta.

Más adelante, se presentará una nueva formulación matemática de programación lineal entera mixta para el IRP considerando un entorno determinístico, para luego ser adaptada al entorno difuso. Éste es el motivo por el cual se abordó, en la sección anterior, la teoría de la programación lineal entera y su relación con la teoría de conjuntos y números difusos.

3. Desarrollo del Modelo y de la Estrategia de Solución

En este capítulo se formulará y validará el modelo matemático que describe al problema tratado considerando un entorno determinístico, para luego ser adaptado al entorno difuso. También se presentarán los conceptos básicos de la metaheurística *Harmony Search* y de los algoritmos de inserción y 2-opt, que servirán como base para el desarrollo del algoritmo que resuelve la problemática abordada en este trabajo.

3.1. Formulación del Modelo Matemático

Para la formulación del modelo matemático del problema tratado en esta investigación se tomó como base el modelo de tres índices para el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP por sus siglas en inglés) presentado en [29], y la consideración de que el IRP puede ser visto como un VRP multiperiodo.

3.1.1. Modelo Matemático: Entorno Determinístico

El modelo de programación lineal entera mixta que representa al problema tratado en esta investigación, considerando un entorno determinístico, está conformado por:

Datos

- $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de nodos, clientes o cajeros. El nodo $i = 0$ representa el depósito central o, en este caso particular, el banco matriz de la institución financiera.
- $T = \{1, 2, \dots, H\}$ es el conjunto finito y discreto de los instantes de tiempo pertenecientes al horizonte de planificación considerado.
- $K = \{1, 2, \dots, m\}$ es el conjunto de vehículos disponibles con capacidad de transporte homogénea.
- $CapV$ es la capacidad de carga de los vehículos.
- $CapC$ es la capacidad de almacenamiento de los cajeros.
- r es la tasa de mantenimiento del inventario.
- $c_{i,j}$ es el costo de transporte desde el nodo i al nodo j .
- Dem_i^t es la demanda del cajero i en el instante de tiempo t .

Variables de Decisión

- $Q_{i,k}^t =$ Cantidad de dinero enviado al cajero i usando el vehículo k en el tiempo t
- $s_i^t =$ Nivel de inventario guardado en el cajero i en el tiempo t
- $y_{i,k}^t = \begin{cases} 1, & \text{si el cajero } i \text{ es visitado por el vehículo } k \text{ en el tiempo } t \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- $x_{i,j}^{k,t} = \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (i, j) \text{ es usado por el vehículo } k \text{ en el tiempo } t \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

Modelo Matemático

$$\text{Min } z = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_t c_{i,j} x_{i,j}^{k,t} + \sum_i \sum_t r s_i^t \quad (3.1)$$

S. t:

$$\sum_k y_{i,k}^t \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.2)$$

$$\sum_k y_{0,k}^t \leq m \quad \forall t \in T \quad (3.3)$$

$$\sum_k x_{i,j}^{k,t} = y_{i,k}^t \quad \forall i \in V \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.4)$$

$$\sum_j x_{i,j}^{k,t} = \sum_j x_{j,i}^{k,t} \quad \forall i \in V \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \neq 0} Q_{i,k}^t \leq \text{Cap}V \quad \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.6)$$

$$Q_{i,k}^t \leq \text{Cap}C - s_i^{t-1} + M(1 - y_{i,k}^t) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.7)$$

$$Q_{i,k}^t \leq \text{Cap}C \cdot y_{i,k}^t \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.8)$$

$$s_i^t = s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - \text{Dem}_i^t \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{i,j}^{k,t} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V \ |S| \geq 2 \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.10)$$

$$Q_{i,k}^t \geq 0 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.11)$$

$$s_i^t \geq 0 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.12)$$

$$y_{i,k}^t \in \{0,1\} \quad \forall i \in V \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.13)$$

$$x_{i,j}^{k,t} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \in V \forall k \in K \forall t \in T \quad (3.14)$$

La ecuación (3.1) busca minimizar los costos de ruteo y de inventario, la (3.2) asegura que en cada instante de tiempo un cajero sea visitado máximo una vez, la (3.3) impone que del banco matriz no salgan más vehículos de los que se tienen disponibles en cada instante de tiempo, la (3.4) y la (3.5) son las restricciones de grado de los nodos de la red, la (3.6) garantiza que la capacidad de los vehículos no sea excedida, la (3.7) y la (3.8) aseguran que un cajero que no es visitado en un determinado instante de tiempo, no reciba dinero mientras que el que sí es visitado no reciba un monto superior a su capacidad menos el inventario que ya poseía almacenado, la (3.9) garantiza la continuidad en el flujo de inventario a través del tiempo, la (3.10) es la restricciones de eliminación de subciclos similares a las referenciadas en [29]. Finalmente, las ecuaciones de la (3.11) a la (3.14) imponen las condiciones de signo y lógica que deben cumplir las variables de decisión.

Un modelo similar al presentado en esta sección fue propuesto en [34], sin embargo, sus principales diferencias radican en que no se consideran en la función objetivo los costos de mantenimiento del inventario y que se utiliza una función de demanda acumulada para garantizar el abastecimiento de cada cajero y así no exceder la capacidad del mismo.

3.1.2. Modelo Matemático: Entorno Difuso

Como se describió en los capítulos anteriores, uno de los principales aportes de este trabajo de investigación consiste en la introducción de una nueva variante para el IRP, el IRP difuso. En el contexto del problema tratado, el único factor que se considerará difuso es la estimación de la demanda de los cajeros de la red bancaria, por lo cual, la única restricción que es influenciada directamente es la (3.9), la cual se reformularía como:

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t =_g \widetilde{Dem}_i^t \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.15)$$

Dependiendo del enfoque que se utilice para resolver el modelo matemático formado por las ecuaciones (3.1)-(3.8), (3.15), (3.10)-(3.14) y, suponiendo que la demanda estimada de los cajeros es un número difuso triangular dado por $\widetilde{Dem}_i^t = (Dem_i^t - \Delta L_i^t, Dem_i^t, Dem_i^t + \Delta R_i^t)$ con $\Delta L_i^t, \Delta R_i^t \geq 0 \forall i \in V \setminus \{0\}$ y $\forall t \in T$, la restricción (3.15) podría ser reemplazada por cualquiera de las siguientes opciones:

Programación Paramétrica

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \leq Dem_i^t + \Delta R_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.16)$$

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \geq Dem_i^t - \Delta L_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.17)$$

Primer Índice de Yager

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = \frac{1}{3}(3Dem_i^t + \Delta R_i^t - \Delta L_i^t) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.18)$$

Tercer Índice de Yager

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = \frac{1}{4}(4Dem_i^t + \Delta R_i^t - \Delta L_i^t) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.19)$$

Relación de Adamo

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = Dem_i^t + \Delta R_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (3.20)$$

En caso de utilizarse la programación paramétrica para resolver el problema, se deben establecer previamente los valores del parámetro α a utilizar, con el fin de evitar la infinidad de soluciones que se generarían por cada variación hecha a este parámetro.

Como no existe una regla en base a la cual se los pueda establecer, estos valores deberán ser determinados acorde al problema concreto que se esté resolviendo y a los deseos del decisor, o gerente de la institución bancaria.

3.2. Validación del Modelo Matemático

Para la validación del modelo matemático formulado en la sección anterior, se desarrolló una instancia del problema con las siguientes características:

- **Naturaleza de la Demanda:** Determinística y dinámica (cambia con el tiempo).
- **Función de Distancia:** Métrica de Manhattan.
- **Número de Cajeros en la Red:** 6 cajeros con sus coordenadas cartesianas.
- **Número de Vehículos:** 3 vehículos con capacidad homogénea.
- **Horizonte de Planificación:** 4 días.

En la Tabla 1 se muestran los datos referentes a la instancia desarrollada para validar el modelo planteado en la sección anterior, mientras que en la Figura 6 se observa la ubicación de los cajeros en la red creada.

Tabla 1: Datos de la Instancia de Validación

Nodos	Coordenadas		Demanda de Efectivo			
	X	Y	T1	T2	T3	T4
C0	-3	24	0	0	0	0
C1	46	44	940	385	700	305
C2	30	26	975	580	215	530
C3	-46	-25	575	200	850	735
C4	-1	35	675	340	260	320
C5	-2	38	625	900	230	670
C6	39	-35	290	910	270	890
Capacidad Vehículo	2500	Capacidad Cajero	1500	Tasa de Inventario		0,15

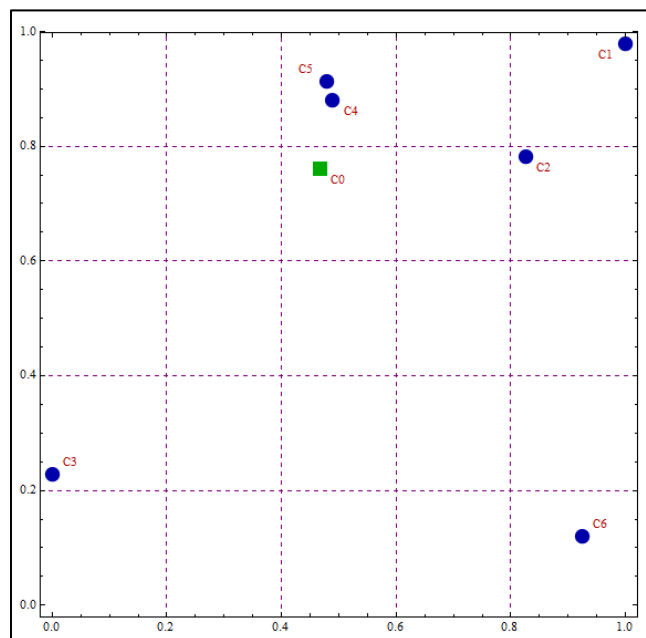


Figura 6: Ubicación de los Cajeros en la Red

El modelo matemático, asumiendo que el costo de ruteo es directamente proporcional a la distancia recorrida, fue implementado en el modelizador GAMS y resuelto utilizando el solver CPLEX de IBM, cuya versión actual es 12.3.0.0. El tiempo utilizado por el solver fue de 5 minutos 51 segundos con una laptop HP Pavilion g4-1085la con 4gb de RAM y un procesador Intel Core i5 de 2.3 GHz. La política de reabastecimiento resultante se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2: Política de Reabastecimiento para la Instancia de Validación

Cajero	Cantidad de Efectivo Enviada				Nivel de Inventario			
	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
C1	940	385	1005	0	0	0	305	0
C2	975	580	215	530	0	0	0	0
C3	775	0	850	735	200	0	0	0
C4	675	340	260	320	0	0	0	0
C5	625	900	230	670	0	0	0	0
C6	290	1180	0	890	0	270	0	0

En la Figura 7 se muestran las rutas a recorrerse cada día dentro del horizonte de planificación. El costo total de la política de reabastecimiento es de USD 1.482,25 siendo USD 1.366,00 parte del ruteo y USD 116,25 lo correspondiente al inventario manejado.

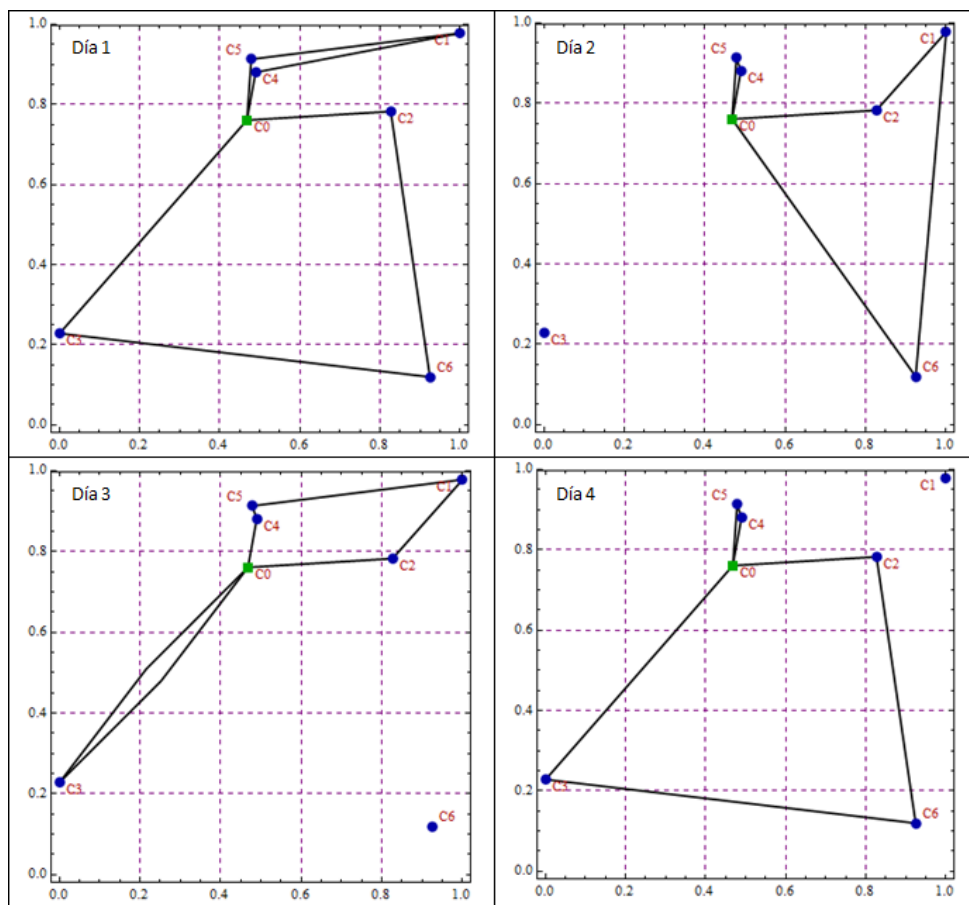


Figura 7: Plan de Rutas para la Instancia de Validación

3.3. Metaheurística Harmony Search (HS)

La metaheurística Harmony Search fue introducida por primera vez por Zong Woo Geem [35] en el año 2001 como respuesta a la creciente necesidad de desarrollar algoritmos de optimización para problemas de programación no lineal que no requieran información substancial sobre el gradiente de la función de objetivo. La filosofía de esta metaheurística se basa en el proceso musical para buscar un estado perfecto de la armonía. La armonía en la música es análoga con el vector de soluciones del problema de optimización, y el proceso de mejora de los músicos es comparable con los esquemas de búsqueda local y global de las técnicas de optimización [36].

El algoritmo utiliza un procedimiento de búsqueda estocástica aleatorizado basado en la información que se tiene en la memoria junto con otros parámetros que se definirán más adelante, de tal manera que la información del gradiente y el uso de las derivadas de la función objetivo del problema ya no es necesaria [36].

3.3.1. Descripción del Proceso de Optimización

Las actuaciones musicales tratan de encontrar una armonía agradable guiados por un patrón estético, tal y como, los procesos de optimización buscan encontrar la solución global a un problema guiados por la función objetivo. El tono de cada instrumento musical determina una calidad estética, de igual forma que el valor de la función objetivo es determinado por el conjunto de valores asignados a cada variable de decisión [36].

En las prácticas de los grupos musicales, cada miembro del grupo toca una nota seleccionada al azar de un rango posible de opciones, haciendo todos juntos una armonía (*Harmony Vector*). Si la armonía entonada es buena, la experiencia es recordada en la memoria de cada miembro (*Harmony Memory*) y la posibilidad de entonar una mejor armonía se incrementa para la próxima vez. De manera similar, en optimización, cada variable de decisión toma un valor seleccionado al azar dentro un intervalo posible, haciendo todas juntas un vector solución. Si todas las variables de decisión forman una buena solución del problema, el resultado es almacenado en la memoria de cada variable y la posibilidad de formar una mejor solución la próxima iteración aumenta [36].

Cuando un músico mejora un tono, usualmente sigue una de las siguientes tres reglas:

- Toca cualquier tono que se encuentre almacenado en su memoria.
- Toca un tono adyacente al tono actual basado en su memoria y en un ajuste de tono.
- Toca un nuevo tono al azar.

De manera similar, cuando una variable de decisión toma un valor dentro de la metaheurística Harmony Search, sigue uno de estos tres pasos:

- Toma un valor seleccionado al azar de entre los que se encuentran almacenados en la memoria de la variable.
- Toma un valor adyacente a uno de los valores que se encuentre en la memoria de la variable, determinado por el ancho de banda.
- Toma un valor seleccionado al azar dentro de un intervalo posible.

Las tres reglas en el algoritmo son dirigidas de manera efectiva por medio de la utilización de los siguientes parámetros:

- La probabilidad de consideración de memoria (*HMCR*).
- La probabilidad de ajuste de tono (*PAR*).
- El ajuste de ancho de banda (*Bw*).

Utilizando la harmony memory y las tres reglas mencionadas se puede crear una nueva armonía, la cual es análoga con encontrar una nueva solución del problema de optimización. Si la nueva armonía es mejor que alguna de las que se encuentran almacenadas en la harmony memory, ésta reemplaza a la peor de todas las armonías almacenadas. Caso contrario, se crea una nueva armonía siguiendo el procedimiento descrito. Se repiten los pasos anteriores hasta que el criterio de parada sea cumplido.

En resumen, la metaheurística Harmony Search se sintetiza en los siguientes pasos:

1. Inicializar los parámetros del algoritmo (*HMCR*, *PAR*, *Bw*).
2. Establecer el tamaño de la memoria (*HMS*) e inicializar la harmony memory (*HM*).
3. Crear una nueva armonía a partir de la harmony memory.
4. Actualizar la harmony memory.
5. Repetir los pasos 3 y 4 hasta que el criterio de parada sea cumplido.

3.3.2. Pseudocódigo de la Metaheurística Harmony Search

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ el vector de variables de decisión del problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{Max o Min } z = f(x) \\ & \text{S. t:} \\ & LB_i \leq x_i \leq UB_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Donde LB_i y UB_i son las cotas inferior y superior asociadas a la variable de decisión x_i .

Paso 1

Se inicializan los parámetros del algoritmo¹:

- $HMCR = 0.9, HMS = 10$
- $PAR = 0.5, Bw = 100$

Paso 2

Inicializar la harmony memory creando armonías aleatorias utilizando el siguiente procedimiento:

Para $k = 1$ hasta $k = HMS$
Para $i = 1$ hasta $i = n$
 $x_i^k = y \sim U(LB_i, UB_i)$
Fin Para
Fin Para

Paso 3

¹ Los valores mostrados sólo cumplen un papel informativo. No indican que esos son los valores con los cuales siempre se deben inicializar los parámetros.

Crear una nueva armonía considerando los parámetros del algoritmo y la harmony memory. Para ello se utiliza el siguiente procedimiento:

```
Para  $i = 1$  hasta  $i = n$ 
  Si  $r \sim U(0,1) \leq HMCR$ 
     $x'_i = x_i^k$  donde  $k \sim U(1, HMS)$ 
  Si  $u \sim U(0,1) \leq PAR$ 
     $x'_i = x'_i + r \cdot Bw$  donde  $r \sim U(-1,1)$ 
  Fin Si
Caso contrario
   $x'_i = y \sim U(LB_i, UB_i)$ 
Fin Si
Fin Para
```

Paso 4

Comparar la nueva armonía x' con la peor armonía almacenada en la harmony memory. Si x' es mejor que la que se tiene almacenada, reemplazar la peor armonía por x' .

Paso 5

Repetir los pasos 3 y 4 hasta que se alcance el criterio de parada establecido. La mejor solución almacenada en la harmony memory será la solución final encontrada para el problema de optimización que se esté resolviendo.

3.3.3. Variantes de la Metaheurística Harmony Search

Desde su reaparición en el año 2005, algunas variantes han sido propuestas para mejorar el rendimiento del algoritmo original desarrollado por Geem. Las variantes más conocidas son:

- **Improved Harmony Search [37]:** La cual propone un método adaptativo para ir actualizando algunos de los parámetros del algoritmo. El modelizador sólo necesita inicializar los parámetros PAR_{min} , PAR_{max} , Bw_{min} y Bw_{max} y, a través del método propuesto, se irán calculando iteración tras iteración los valores reales de PAR y Bw . La principal desventaja de este método radica en que se necesita inicializar los valores de Bw_{min} y Bw_{max} los cuales son muy dependientes del problema y difíciles de ajustar.
- **Global Best Harmony Search [38]:** La cual propone, en lugar de actualizar iterativamente el valor de Bw , eliminarlo del algoritmo y realizar el ajuste de tono asignándole a la variable de decisión que se está explorando, el valor que toma una de las variables de decisión (seleccionada de manera aleatoria) que forma parte de la mejor armonía almacenada hasta esa iteración en la harmony memory. Su principal desventaja radica en que las variables de decisión del problema pueden representar cosas completamente ajenas a lo que representa la variable que se explora en esa iteración.

3.4. Algoritmos para Ruteo de Vehículos

En la presente sección se describirán brevemente dos de los algoritmos más conocidos y fáciles de implementar para resolver el problema del agente viajero (TSP por sus siglas en inglés). El primero de ellos es un algoritmo constructivo, el cual, iteración tras iteración, va construyendo una solución para el problema que se desea resolver. El segundo, es un algoritmo de mejora, el cual, está basado en procedimientos de búsqueda local que exploran una porción del espacio de soluciones que se encuentra en los “alrededores” de una solución inicial dada. Las soluciones aportadas por los algoritmos de búsqueda local no necesariamente son soluciones óptimas.

Aunque estos algoritmos fueron diseñados exclusivamente para encontrar buenas soluciones al problema del agente viajero, se pueden adaptar para resolver rápidamente el problema de ruteo de vehículos (VRP por sus siglas en inglés), dado que el TSP no es más que un caso particular del VRP suponiendo que la capacidad de los vehículos es infinita.

3.4.1. Algoritmo de Inserción

Es uno de los algoritmos constructivos mayormente utilizados para el TSP, y que en general, suele reportar mejores soluciones que la heurística del vecino más cercano. Se ha demostrado a través de experimentos empíricos con instancias de prueba de dificultad teórica controlada, que el algoritmo de inserción, en cualquiera de sus tres variantes, reporta soluciones con una desviación promedio por debajo del 15%, mientras que para la heurística del vecino más cercano es del 20% [39].

Este algoritmo empieza con un ciclo que contenga al menos 3 elementos (escogidos o no al azar) del conjunto de ciudades a visitar. Luego, la siguiente ciudad en agregarse al ciclo es seleccionada entre aquellas que no forman parte aún de la solución construida hasta el momento utilizando cualquiera de los siguientes criterios:

- **Inserción Ciudad Más Cercana:** Consiste en seleccionar, de entre todas las ciudades candidatas a entrar, a la ciudad que se encuentra más cercana al ciclo parcialmente construido, es decir, la que se encuentre más cerca de cualquiera de los nodos que forman parte de la solución parcial actual [40].
- **Inserción Ciudad Más Lejana:** Consiste en seleccionar, de entre todas las ciudades candidatas a entrar, a la ciudad que se encuentra más lejos del ciclo parcialmente construido, es decir, la que se encuentre más lejos de cualquiera de los nodos que forman parte de la solución parcial actual [40].
- **Aleatoria:** Consiste en seleccionar al azar cualquiera de las ciudades que son candidatas a entrar al ciclo parcialmente construido [40].

Una vez determinada la ciudad que se va a insertar en el ciclo, la pregunta es en dónde hay que insertarla. El algoritmo de inserción se fundamenta principalmente en el hecho de que la inserción debe hacerse entre las ciudades donde el costo marginal sea el menor de entre todas las opciones posibles. El costo marginal se calcula a partir de la expresión:

$$s_{i,j} = c_{i,k} + c_{k,j} - c_{i,j}$$

Donde i, j pertenecen al ciclo construido hasta el momento y k representa la ciudad que se va a agregar a la solución actual. El pseudocódigo de este algoritmo es:

```

Inicio
  Genere un ciclo  $C = \{v_1, v_2, v_3\}$  escogiendo  $v_1, v_2, v_3$  al azar
  Mientras ( $|C| \neq n$ )
    Escoja un nodo  $k \in V/C$  usando cualquier criterio mencionado
    Para cada posible inserción  $i, j \in C$  con  $i \neq j$  calcule  $s_{i,j} = c_{i,k} + c_{k,j} - c_{i,j}$ 
    Inserte el nodo  $k$  entre los nodos  $i, j$  con menor valor de  $s_{i,j}$ 
  Fin Mientras
   $C = C \cup \{v_1\}$ 
  Return  $C$ 
Fin

```

3.4.2. Algoritmo de Mejora 2-opt

El algoritmo de mejora 2-Opt, a partir de una solución inicial creada con cualquier método constructivo, toma dos aristas no adyacentes de la misma y las intercambia para así obtener una nueva solución la cual se dice que es “vecina” a la actual. Si la nueva solución es mejor que la actual, se la reemplaza y se prosigue a realizar otro intercambio. El algoritmo termina cuando todos los posibles intercambios han sido explorados. El porcentaje de desviación respecto a la solución óptima de acuerdo a los experimentos realizados en [39], considerando como solución inicial la aportada por el vecino más cercano, es menor al 10%. El pseudocódigo de esta heurística, tomado de [39], es:

```

Inicio
   $opt = 1$ 
  Mientras( $opt = 1$ )
     $opt = 0$ 
    Etiquetar todos los vértices como no explorados
    Mientras(Queden vértices por explorar)
      Seleccionar un vértice  $i$  no explorado
      Examinar todos los intercambios 2 – opt que puedan realizarse
      entre la arista de  $i$  a su sucesor en el ciclo
      Si alguno de los intercambios mejora la solución actual
        Realizar el mejor de todos los intercambios
         $opt = 1$ 
      Caso contrario
        Etiquetar el vértice  $i$  como explorado
    Fin Si
  Fin Mientras
Fin Mientras
Fin

```

4. Desarrollo del Algoritmo de Solución

En este capítulo se describirá de forma detallada cómo está compuesto el algoritmo que se desarrolló para resolver el problema abordado en esta investigación, el cual se encuentra basado en la metaheurística Harmony Search, cuya filosofía guiará el proceso de optimización. Se utilizarán los algoritmos de inserción y mejora 2-opt para encontrar las soluciones a los problemas de ruteo generados en cada iteración. Luego se validará el algoritmo utilizando dos instancias diseñadas para ello y finalmente, se presentarán los resultados obtenidos al aplicarse la metodología desarrollada al caso concreto que se aborda.

El algoritmo consta de dos etapas, una donde se construyen una o varias soluciones del problema, y otra, donde a partir de dichas soluciones, se construyen soluciones mejoradas. Cada solución generada recibe el nombre de armonía, y está compuesta por:

- Política de envío de dinero a los cajeros.
- Nivel de inventario guardado en los cajeros.
- Rutas de distribución para cada día.
- Costo de ruteo.
- Costo de inventario.
- Costo total.

4.1. Etapa 1: Creación de la Solución Inicial

Esta etapa consta de dos fases: la primera se encarga de establecer la política de inventario de los cajeros de la red, mientras que la segunda toma las decisiones asociadas al ruteo tomando en cuenta la política de inventario generada en la fase 1.

4.1.1. Fase 1: Política de Inventario

La fase 1 del algoritmo se encarga de tomar las decisiones relacionadas con la política de inventario a manejar en los cajeros, es decir, determina qué día deben ser reabastecidos y cuál es el monto de dinero a enviar a cada uno de ellos, de tal manera que se cumplan las restricciones de capacidad de los cajeros y se cubra toda la demanda estimada por el administrador de la red, o el gerente de la institución bancaria.

Nótese que antes de ejecutar esta fase, la restricción (3.15) debe ser reemplazada por las restricciones equivalentes utilizando alguno de los métodos referenciados en el capítulo 3, al igual que se debe actualizar la información del lado derecho de dichas restricciones.

El algoritmo desarrollado utiliza el procedimiento que propone la metaheurística Harmony Search para crear una armonía, el cual consiste en:

Paso 0

Hacer $i = 1$

Paso 1

Hacer $t = 1$

Paso 2

Si $s_i^{t-1} \geq Dem_i^t$, asignar el valor de cero a las variables de decisión Q_i^t y y_i^t . Caso contrario, asignar a la variable de decisión Q_i^t un número aleatorio uniformemente distribuido entre cero y la capacidad máxima del cajero menos el inventario guardado al final del día anterior, y asignar el valor de 1 a la variable binaria y_i^t .

Paso 3

Actualizar el valor del inventario guardado en el cajero i al final del día t utilizando la expresión $s_i^t = s_i^{t-1} + Q_i^t - Dem_i^t$ e incrementar el valor del índice t haciendo $t = t + 1$.

Paso 4

Si $t > H$, aumentar el valor del índice i haciendo $i = i + 1$ y volver al paso 1. Caso contrario, volver al paso 2.

Una vez que se han explorado todos los cajeros de la red bancaria, se tiene almacenado en las variables de decisión Q_i^t y y_i^t las cantidades de dinero a enviar y cuáles cajeros son atendidos en cada día, respectivamente. Estas variables de decisión son enviadas a la segunda fase como datos de entrada para resolver el problema de ruteo asociado a la política de inventario generada en la fase 1.

4.1.2. Fase 2: Política de Distribución o Ruteo

Al haberse determinado en la fase anterior las cantidades de dinero a enviar, y los cajeros que deben ser visitados, el problema se simplifica al tener que resolver un problema de ruteo de vehículos por cada instante de tiempo. Para esta fase, primero se construye una solución inicial utilizando el algoritmo de inserción adaptado, considerando únicamente los cajeros que cuya variable de decisión y_i^t toma el valor de uno, debido a que esto nos indica qué cajeros se deben atender ese día, y la demanda de los mismos es la asociada a la variable Q_i^t .

Una vez obtenida esta solución inicial, las rutas que la conforman son mejoradas utilizando el algoritmo 2-opt, con lo cual se determina el costo total de ruteo asociado a la política de inventario determinada en la fase 1. El procedimiento para crear las rutas iniciales consiste en:

Paso 0

- Hacer $t = 1$

Paso 1

- Inicializar el vector de demandas dem_i^t con los valores Q_i^t correspondientes.
- Inicializar el conjunto V' con todos los cajeros cuya variable de decisión y_i^t sea igual a 1.
- Inicializar el conjunto de nodos explorados $nodExp = \emptyset$.
- Inicializar el conjunto de rutas $setR_t = \emptyset$.

Paso 2

- Inicializar la capacidad del vehículo $CapV$.
- Hacer $W = V' \setminus nodExp$.

- Hacer $D = \{i \in W / dem_i^t > CapV\}$.
- Hacer $C = W \setminus D$.
- Inicializar el conjunto $ruta = \{0,0\}$.

Paso 3

Mientras $C \neq \emptyset$, hacer:

- Si $Card(ruta) \leq 3$, entonces:
 - Seleccionar al azar un cajero del conjunto C .
 - Agregarlo al conjunto de nodos explorados.
 - Agregarlo a la ruta actual.
 - Restar la demanda de ese cajero de la capacidad del vehículo.
 - Hacer $W = V' \setminus nodExp$.
 - Hacer $D = \{i \in W / dem_i^t > CapV\}$.
 - Hacer $C = W \setminus D$.
- Caso contrario:
 - Seleccionar al azar un cajero del conjunto C .
 - Agregarlo al conjunto de nodos explorados.
 - Calcular los costos marginales $s_{i,j}$ asociados con la inserción del nodo seleccionado entre cada par de nodos $i, j \in ruta$.
 - Insertar en la ruta el nodo seleccionado entre el par de nodos con menor valor de $s_{i,j}$.
 - Restar la demanda de ese cajero de la capacidad del vehículo.
 - Hacer $W = V' \setminus nodExp$.
 - Hacer $D = \{i \in W / dem_i^t > CapV\}$.
 - Hacer $C = W \setminus D$.

Paso 4

- Agregar la ruta encontrada al conjunto de rutas $setR_t$.
- Si $nodExp \neq V'$, volver al paso 2, caso contrario, guardar el conjunto de rutas hallado e incrementar el valor del índice t haciendo $t = t + 1$.

Paso 5

- Si $t \leq H$, volver al paso 1, caso contrario finalizar y devolver las rutas generadas durante todo el proceso.

Al finalizar esta sub-fase, se tienen las rutas asociadas a la política de inventario determinada en la etapa 1 considerando únicamente aquellos cajeros que deben ser visitados. La siguiente sub-fase de esta etapa, consiste en aplicar el algoritmo de mejora 2-opt a estas rutas, utilizando el siguiente procedimiento:

Paso 0

- Hacer $t = 1$

Paso 1

- Extraer el conjunto de rutas $setR_t$ determinadas para el instante de tiempo t .
- Aplicar el algoritmo de mejora 2-opt a cada ruta en el conjunto $setR_t$.

Paso 2

- Actualizar el conjunto de rutas $setR_t$ con las rutas mejoradas e incrementar el valor del índice t haciendo $t = t + 1$.

Paso 3

- Si $t \leq H$, volver al paso 1, caso contrario, finalizar y devolver las rutas mejoradas.

Al finalizar la etapa 1 se cuenta con una solución inicial factible para el problema de ruteo de vehículos con inventarios (IRP por sus siglas en inglés), el cual describe matemáticamente el problema abordado en esta investigación. Hay que notar que esta etapa propone una heurística sencilla y rápida para crear soluciones al problema tratado, sin embargo, es difícil determinar la calidad de las soluciones generadas, dado que no existen problemas de prueba reportados en la literatura cuyas soluciones óptimas sean conocidas y la topología de red se asemeje a la tratada en el presente trabajo.

4.2. Etapa 2: Proceso de Optimización

En esta etapa se generaran nuevas y mejores soluciones para el problema tratado utilizando como guía el algoritmo principal que se describe en la metaheurística Harmony Search. Las soluciones generadas en la etapa 1 se almacenarán en la estructura computacional de la metaheurística conocida como *Harmony Memory*. La harmony memory puede almacenar tantas soluciones factibles del problema como se desee, sin embargo, la literatura recomienda, casi para todos los problemas de optimización, se almacenen 10 soluciones. Esta cantidad de soluciones no depende del tamaño del problema, teniendo empíricamente casi la misma calidad en los resultados si el problema es de gran escala o no lo es.

Otra de las cuestiones a resolver en el algoritmo tiene que ver con la calibración de los parámetros que utiliza para guiar el proceso de aprendizaje y mejora de las soluciones del problema. Los artículos referenciados en [35], [36], [37] y [38] recomiendan calibrarlos con los siguientes valores:

- $HMCR = 0.9$
- $PAR_{min} = 0.01$
- $PAR_{max} = 0.99$

Hay que tener en cuenta que el algoritmo desarrollado en la presente investigación, utilizará el mecanismo auto-adaptativo propuesto en [37] para ir calculando el valor del parámetro PAR a través de la expresión:

$$PAR = PAR_{min} + \frac{PAR_{max} - PAR_{min}}{NI} it$$

Donde NI es el número total de iteraciones a ejecutarse e it es el número de iteraciones ejecutadas hasta ese instante. Dado que este parámetro no depende de la naturaleza del problema, es más conveniente usar este método que fijarlo en un valor dado.

Otra de las consideraciones implementadas en el desarrollo del algoritmo es la eliminación del parámetro Bw , a través de la utilización del método propuesto en [38] y mejorado en [41], el cual consiste en asignar a la variable de decisión que se esté explorando, el valor que toma en la mejor solución almacenada hasta el momento en la harmony memory.

El proceso de optimización general del algoritmo desarrollado, incluyendo todos los procedimientos anteriormente descritos, consiste en:

Paso 0

- Inicializar el número de iteraciones $NI = 150$
- Inicializar $PAR_{min} = 0.01$, $PAR_{max} = 0.99$ y $HMCR = 0.9$
- Inicializar el tamaño de la harmony memory $HMS = 10$
- Inicializar la harmony memory (HM) ejecutando el procedimiento descrito en las fases 1 y 2 hasta completar la cantidad de soluciones indicadas por el parámetro HMS
- Ordenar las soluciones en HM de menor a mayor según el costo total
- Hacer $it = 1$

Paso 1

- Calcular el valor de $PAR = PAR_{min} + \frac{PAR_{max} - PAR_{min}}{NI} it$
- Inicializar los conjuntos $Qty = \emptyset$ y $Stk = \emptyset$
- Hacer $i = 1$

Paso 2

- Generar un número aleatorio $u \sim U(0,1)$
 - Si $u \leq HMCR$, entonces:
 - Generar un número aleatorio $rn \sim U(1, HMS)$
 - Asignar a los conjuntos Q_i y S_i los valores que tiene la política de envío y de inventario del cajero i almacenada en la solución que se encuentra en la posición rn de la harmony memory.
 - Generar un número aleatorio $v \sim U(0,1)$ y si $v \leq PAR$
 - ✓ Asignar a los conjuntos Q_i y S_i los valores que tiene la política de envío y de inventario del cajero i almacenada en la mejor solución de la harmony memory.
 - Caso contrario:
 - Crear una nueva política de envío e inventario utilizando el procedimiento descrito en la fase 1 de la etapa 1, únicamente para el cajero i .

Paso 3

- Agregar los conjuntos Q_i y S_i a los conjuntos Qty y Stk , respectivamente.
- Incrementar el valor del índice i haciendo $i = i + 1$.

Paso 4

- Si $i \leq n$, entonces:
 - Volver al paso 2.
- Caso contrario:
 - Crear la política de distribución utilizando el procedimiento descrito en la fase 2 de la etapa 1, enviando como datos de entrada la política de envío de los cajeros almacenada en el conjunto Qty .

Paso 5

- Si la nueva solución es mejor que alguna de las que se encuentran almacenadas en la harmony memory, entonces:
 - Introducir la nueva solución a la harmony memory.
 - Eliminar la peor solución almacenada en la harmony memory.
 - Ordenar nuevamente las soluciones en la harmony memory de menor a mayor según el costo total.
 - Incrementar el valor de it haciendo $it = it + 1$
- Caso contrario:
 - Descartar la nueva solución.
 - Incrementar el valor de it haciendo $it = it + 1$

Paso 6

- Si $it \leq NI$, volver al paso 1, caso contrario, finalizar y devolver la harmony memory resultante del todo el proceso de optimización. La solución que se encuentre en la primera ubicación es la mejor solución hallada para el problema.

Hay que recalcar que la solución encontrada a través de la ejecución del presente algoritmo, no es necesariamente la solución óptima del problema, dado que este algoritmo es un procedimiento metaheurístico, por lo cual reporta buenas soluciones al problema en un tiempo de cómputo razonable.

4.3. Validación del Algoritmo y Resultados Preliminares

Para validar que las soluciones que arroja el algoritmo desarrollado sean coherentes con el problema tratado en la presente investigación, se diseñaron dos instancias de validación de 25 y 50 cajeros en la red, las cuales se basaron en las desarrolladas por Solomon [42] para el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW por sus siglas en inglés).

La información sobre las instancias diseñadas en el presente trabajo se especifica en la Tabla 7 y en la Tabla 8 mostradas en el Anexo 1 y en el Anexo 2, respectivamente. La ubicación de los

cajeros en la red así como la ubicación del banco matriz (cuadrado color naranja) se aprecian en la Figura 8 y en la Figura 9.

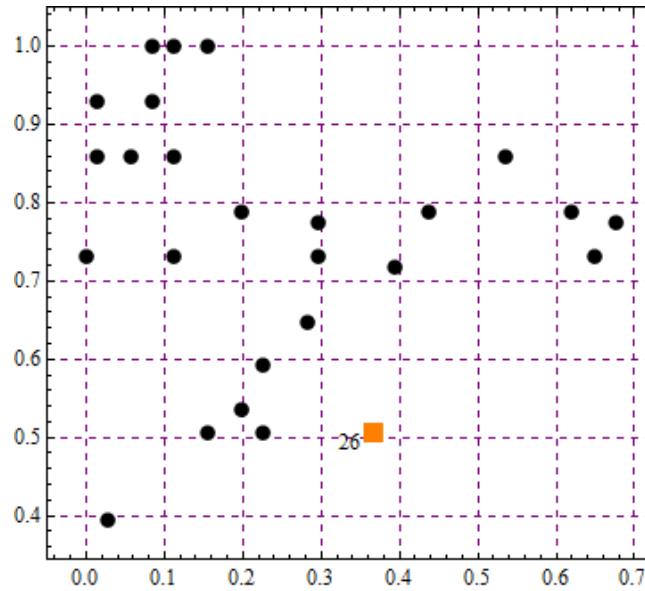


Figura 8: Ubicación de los Cajeros en Red para la Instancia de Validación con 25 nodos

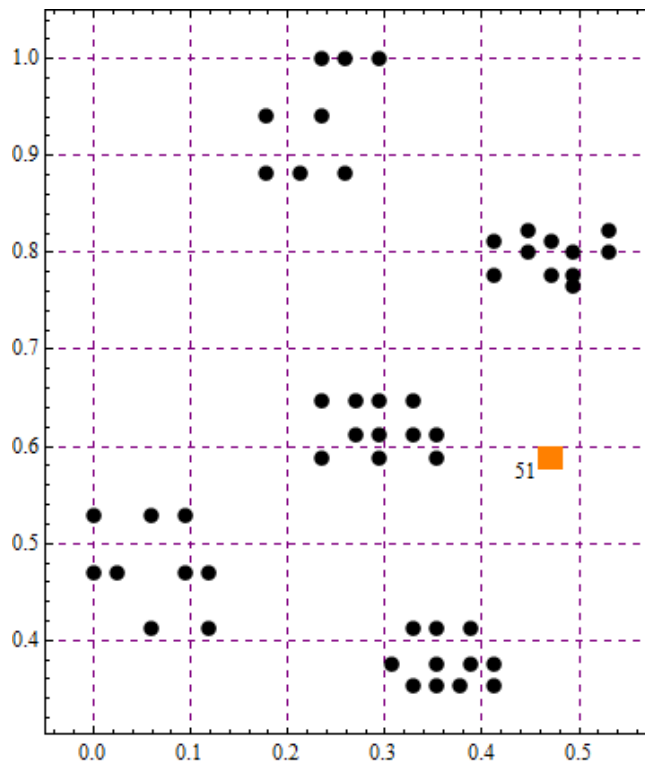


Figura 9: Ubicación de los Cajeros de Red para la Instancia de Validación con 50 nodos

El algoritmo se implementó en el software *Mathematica 7* y se ejecutaron 300 iteraciones para cada instancia diseñada, utilizando una laptop HP Pavilion g4-1085la con 4gb de RAM y un procesador Intel Core i5 de 2.3 GHz. Los resultados más importantes sobre la eficiencia del algoritmo se resumen a continuación:

Tabla 3: Resultados Preliminares usando Instancias de Validación

<i>Instancia de 25 Nodos</i>	<i>Costo Total</i>	<i>Costo de Ruteo</i>	<i>Costo de Inventario</i>	<i>Tiempo (Seg.)</i>
<i>Mejor Solución Inicial en la HM</i>	4,876.74	1,530	3,346.74	2.79
<i>Mejor Solución Final en la HM</i>	3,114.31	1,508	1,606.31	120.69
<i>Instancia de 50 Nodos</i>	<i>Costo Total</i>	<i>Costo de Ruteo</i>	<i>Costo de Inventario</i>	<i>Tiempo (Seg.)</i>
<i>Mejor Solución Inicial en la HM</i>	8,853.06	2,046	6,807.06	7.5
<i>Mejor Solución Final en la HM</i>	5,657.19	2,054	3,603.19	326.8

Podemos observar que el algoritmo desarrollado es capaz de generar 10 soluciones factibles para el IRP en menos de 3 segundos para instancias de 25 nodos y menos 8 segundos, para instancias de 50 nodos. De igual forma se puede resaltar como el costo de inventario en la mejor solución inicial es disminuido en un gran porcentaje respecto a la mejor solución final. Esto resalta una vez más la importancia que tiene el desarrollar una adecuada política de inventario para administrar las redes de cajeros automáticos.

Hay que recalcar que las validaciones realizadas al modelo matemático formulado en el capítulo 3 y al algoritmo desarrollado en el presente capítulo consideran un entorno determinístico del problema abordado en esta investigación. Las validaciones considerando el entorno difuso no son necesarias, debido a que una vez que se aplica alguno de los métodos referenciados en el capítulo 3, el problema se transforma a uno equivalente en el entorno determinístico.

Para concluir con las validaciones hechas al modelo, en las figuras siguientes se muestran las rutas generadas para cada día dentro del horizonte de planificación mientras que en los anexos 3 y 4 se muestran los resultados obtenidos referentes a las políticas de envío y de inventario diseñadas. Todo esto para las instancias de 25 y 50 nodos, respectivamente.

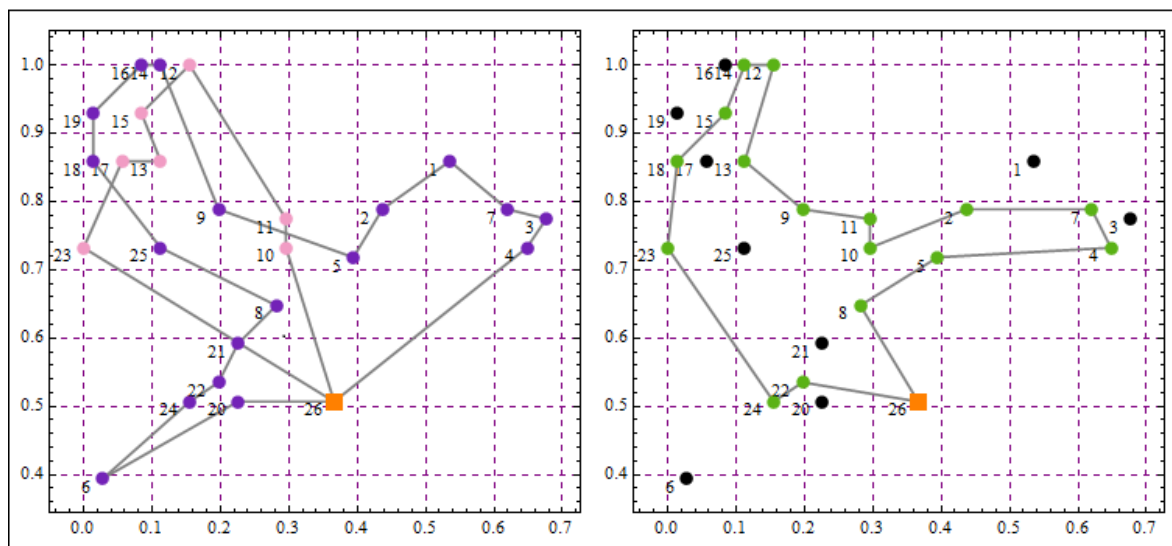


Figura 10: Rutas para los Días 1 y 2 Instancia de 25 Nodos

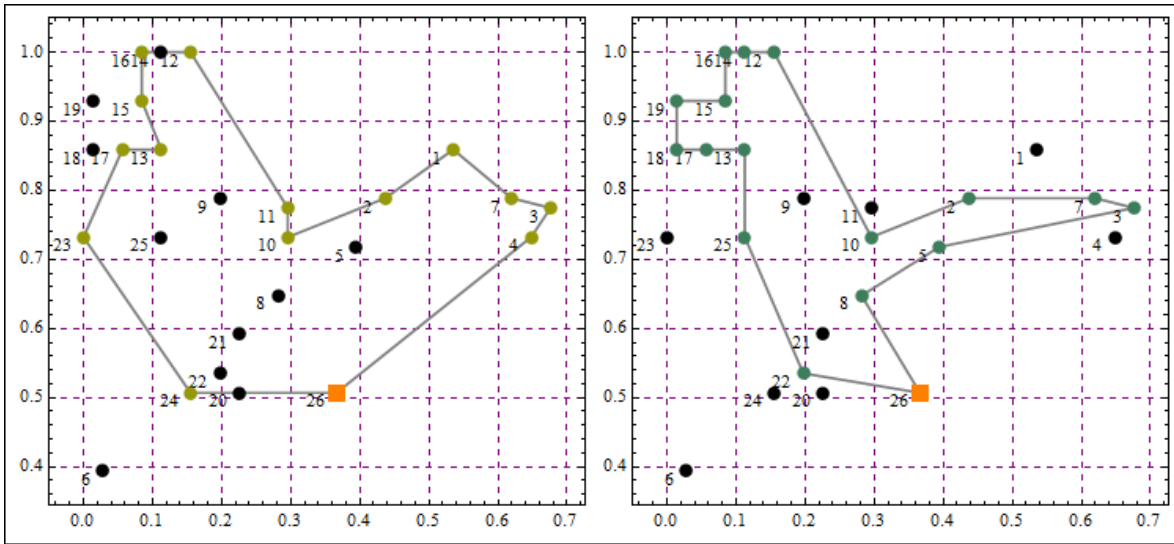


Figura 11: Rutas para los Días 3 y 4 Instancia de 25 Nodos

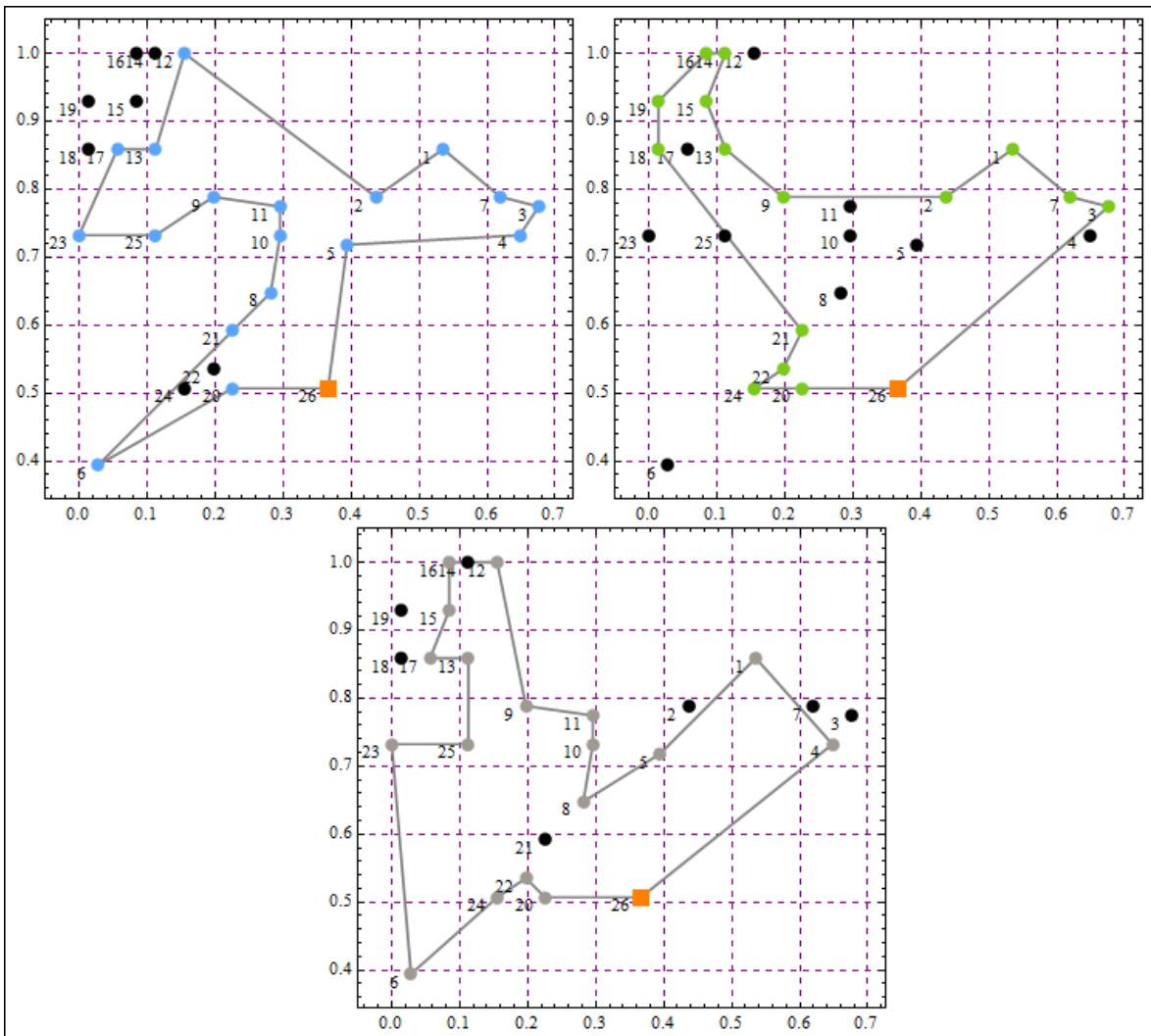


Figura 12: Rutas para los Días 5, 6 y 7 Instancia de 25 Nodos

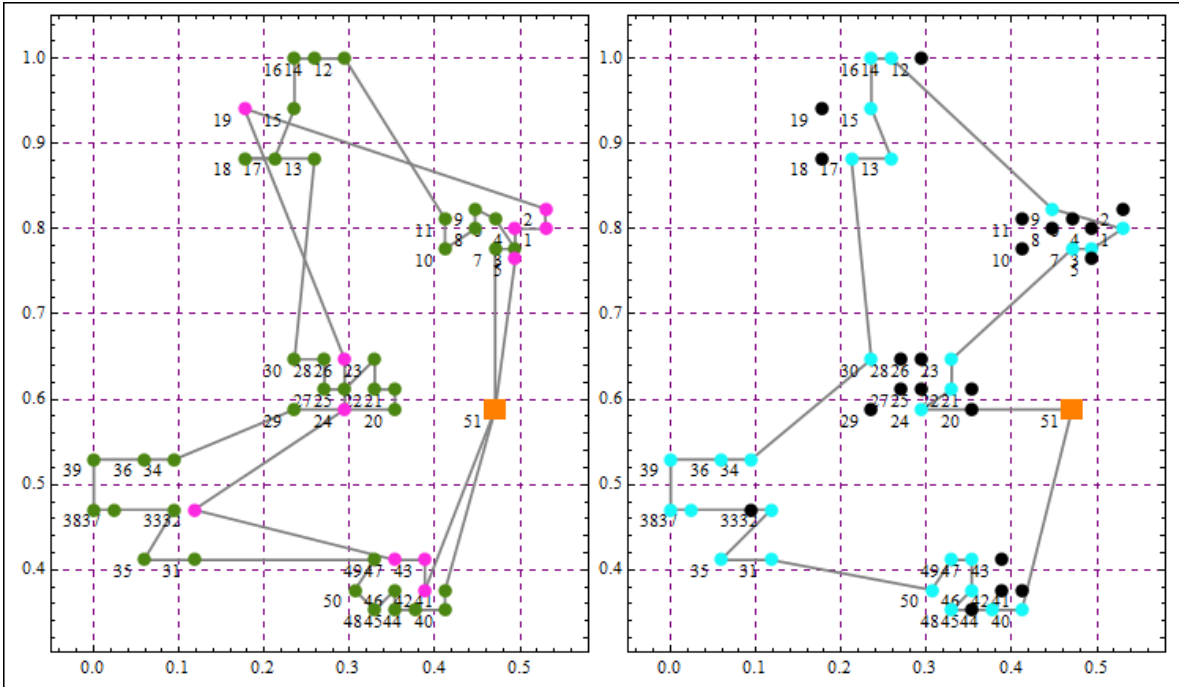


Figura 13: Rutas para los Días 1 y 2 Instancia de 50 Nodos

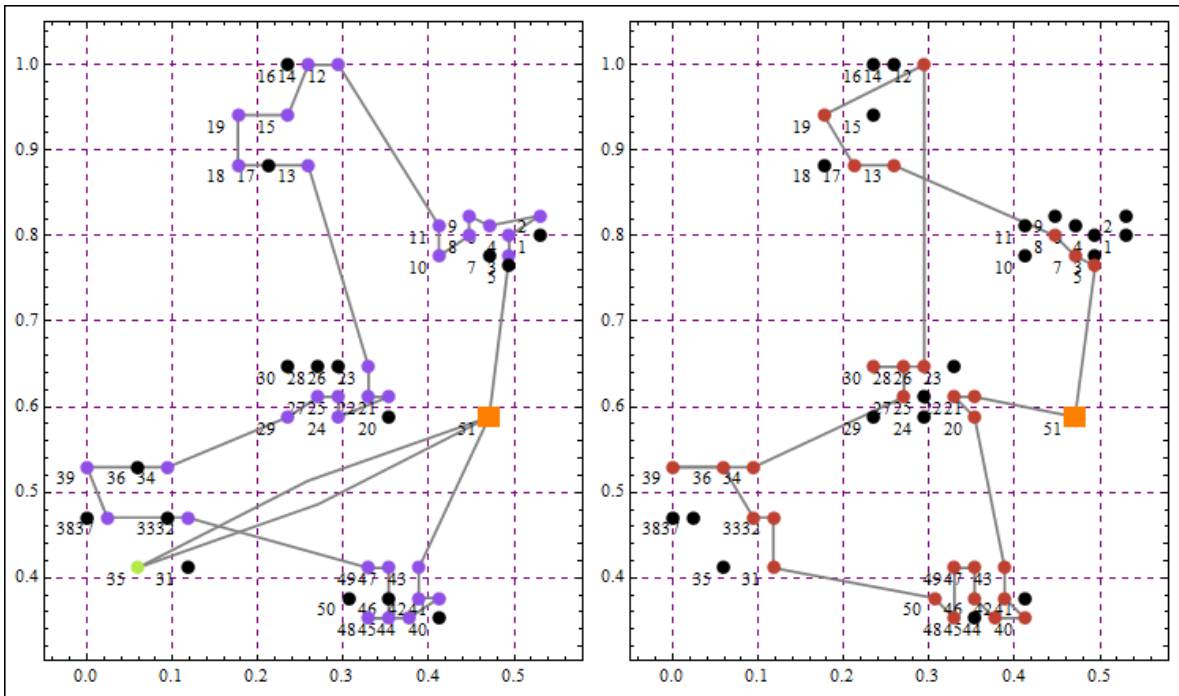


Figura 14: Rutas para los Días 3 y 4 Instancia de 50 Nodos

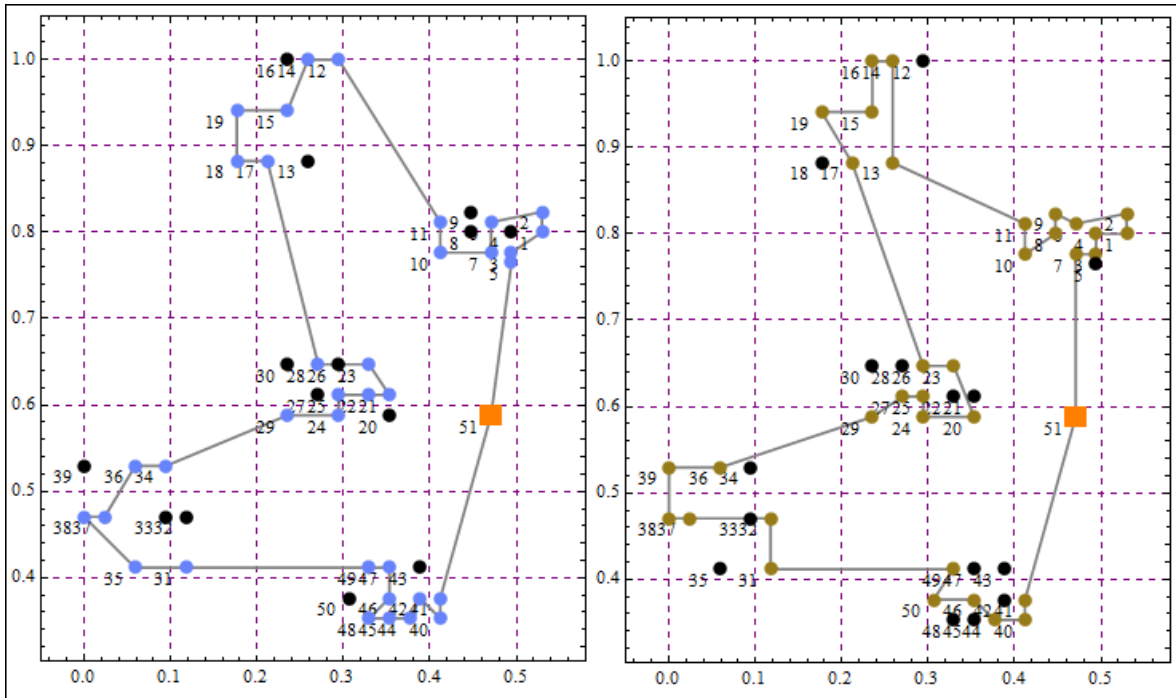


Figura 15: Rutas para los Días 5 y 6 Instancia de 50 Nodos

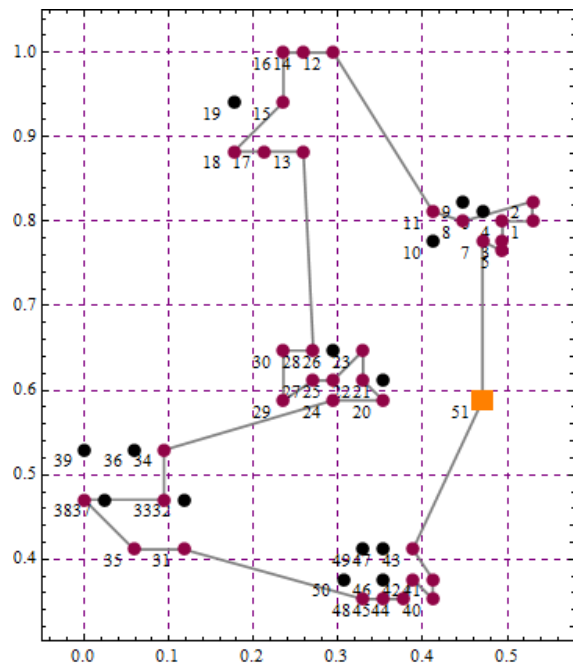


Figura 16: Ruta para el Día 7 Instancia de 50 Nodos

Hay que recalcar que las bases conceptuales sobre las cuales se desarrolló al algoritmo de mejora 2-opt consideran que la métrica es euclidiana. En este caso se utilizó la métrica de Manhattan, por lo cual, aunque gráficamente se aprecien cruces en las rutas, esto no implica que al eliminar dicho cruce la solución mejorará. Más aún, el lector curioso podrá verificar esto por su cuenta debido a que en este trabajo de investigación se otorga toda la información necesaria para que él realice sus propios cálculos y verifique los resultados que se muestran.

4.4. Aplicación al Caso Real

4.4.1. Descripción de la Red y Pre-Procesamiento de la Información

Como se mencionó en el capítulo 1, el Banco Azul cuenta con una red de aproximadamente 4266 puntos de atención a nivel nacional distribuidos entre agencias, sucursales, ventanillas, bancos del barrio, cajeros, etc.

Específicamente, en la ciudad de Guayaquil, donde tiene su matriz principal, el banco cuenta con una red de 235 cajeros automáticos homogéneos a lo largo de toda la urbe, siendo la más grande en todo el país. Adicionalmente, el banco cuenta dentro de su división corporativa con el servicio de traslado de valores, el cual se ofrece a toda clase de clientes externos al banco así como también lo utiliza para reabastecer sus propios cajeros. Por lo cual, en nuestro modelo, para los costos de ruteo, se considerará únicamente los gastos asociados con el consumo de combustible, debido a que los demás rubros, como el mantenimiento del vehículo blindado y la nómina del personal, son gastos hundidos que la institución debe pagar independientemente de la política de reabastecimiento que se diseñe.

Otro de los aspectos que se ha tomado en cuenta en la resolución de nuestro modelo tiene que ver con el hecho de que existen varios puntos geográficos dentro de la red de cajeros que tienen ubicados más de un cajero, como es el caso de la ciudadela Alborada, donde el banco tiene 5 cajeros. Algo similar ocurre en otros lugares como son los centros comerciales, la matriz del banco, aeropuerto, terminal de autobuses, etc. Por lo cual, para simplificar el trabajo del algoritmo se ha realizado un pre-procesamiento de la información geográfica de la red agrupando como un solo cajero a todos aquellos lugares donde existen más de un cajero. En este pre-procesamiento se ha garantizado que los cajeros agrupados tengan una capacidad máxima igual al número de cajeros que contienen y que la demanda del mismo sea la acumulada de todos esos cajeros.

Lo anterior es posible debido a que la demanda de los cajeros ubicados en un mismo punto geográfico, y separados únicamente por escasos metros de distancia, no es afectada de manera significativa. Esto se debe a que en el momento de efectuar un retiro de dinero, el cliente se acerca al lugar donde están los cajeros y utiliza el que primero se desocupe, es decir, al cliente le es indiferente cuál cajero utilizará para realizar su transacción.

Una vez realizado el pre-procesamiento de la información, el tamaño de la red se reduce a 158 cajeros heterogéneos más el nodo matriz del banco. Otra de las ventajas que nos brinda el pre-procesamiento es eliminar, de manera implícita del problema, las soluciones que consistían en un día ir a reabastecer un cajero y al día siguiente visitar el que se encuentra a lado, haciendo dos visitas seguidas innecesarias al mismo punto geográfico de la red.

La capacidad de los cajeros es determinada en base a las consideraciones técnicas que vienen especificadas en el manual de mantenimiento de los mismos. Estas establecen que cada una de las tres ranuras del cajero puede almacenar máximo 10,000 billetes nuevos de una determinada denominación. Considerando que en el país donde se realiza el estudio, los cajeros únicamente dispensan billetes de USD\$ 5.00, USD\$ 10.00 y de USD\$ 20.00, la capacidad del mismo es de

exactamente USD\$ 350,000.00. Si los cajeros dispensaran únicamente billetes de una sola denominación, entonces la capacidad del cajero sería de 10,000 por la denominación del billete que se dispensa.

La capacidad del vehículo viene establecida de acuerdo a políticas de seguridad que indican que un camión blindado no puede llevar sumas de dinero que superen la capacidad de 10 cajeros, es decir, que si se decide llenar por completo el cajero, el camión blindado únicamente puede visitar máximo 10 cajeros.

La información simplificada de la red de cajeros del caso concreto que se trabaja se encuentra disponible en la Tabla 13 mostrada en el Anexo 5 de este documento, mientras que en la Figura 17 se puede observar la distribución geográfica de los cajeros en la red. El punto de color naranja indica dónde se encuentra la matriz del banco.

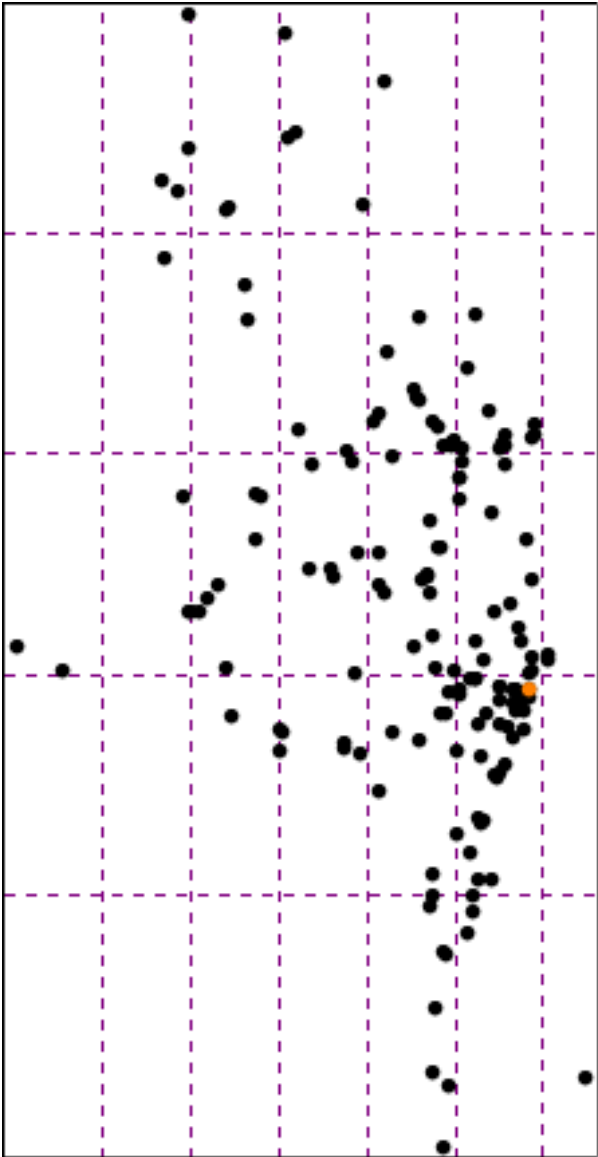


Figura 17: Distribución Geográfica de los Cajeros en la Red del Banco

4.4.2. Ejecución del Algoritmo y Resultados Finales

Para ejecutar el algoritmo desarrollado para el caso concreto se consideraron las siguientes características de la red:

- **Naturaleza de la Demanda:** Difusa y dinámica (cambia con el tiempo).
- **Función de Distancia:** Métrica de Manhattan.
- **Número de Cajeros en la Red:** 158 cajeros con sus coordenadas cartesianas.
- **Número de Vehículos:** Determinados por el algoritmo.
- **Capacidad del Vehículo:** 10 veces la capacidad de un cajero simple.
- **Capacidad del Cajero Simple:** USD\$ 350,000.00
- **Capacidad de Cajero Anidado:** Cantidad de cajeros contenidos por USD\$ 350,000.00
- **Tasa de Inventario:** 0.10 anual (sugerida por el gerente)
- **Horizonte de Planificación:** 7 días

Para determinar el tipo de número difuso que modelará la demanda de los cajeros de la red bancaria se consideró los deseos del gerente, quien quiere conocer cuáles serían las políticas de reabastecimiento si se ofrece un nivel de servicio mínimo del 95% y máximo del 100% variando en un 1% el incremento del mismo. Esto se traduce en que se desea conocer las políticas de reabastecimiento óptimas si se cubre el 95%, 96%, 97%, 98%, 99% y 100% de la demanda estimada por ellos.

Lo anterior se traduce en un número difuso del tipo triangular donde ΔL será la variación de la demanda no cubierta y $\Delta R = 0$ en todos los casos.

Recordemos que para resolver el problema, la restricción difusa debe ser sustituida por su equivalente de acuerdo a uno de los siguientes enfoques:

Programación Paramétrica

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \leq Dem_i^t + \Delta R_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (4.1)$$

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \geq Dem_i^t - \Delta L_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (4.2)$$

Primer Índice de Yager

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = \frac{1}{3}(3Dem_i^t + \Delta R_i^t - \Delta L_i^t) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (4.3)$$

Tercer Índice de Yager

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = \frac{1}{4}(4Dem_i^t + \Delta R_i^t - \Delta L_i^t) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (4.4)$$

Relación de Adamo

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = Dem_i^t + \Delta R_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (4.5)$$

En el caso real, la Relación de Adamo carece de sentido pues el valor de ΔR_i^t es cero. Por otra parte, las inecuaciones (4.1) y (4.2) se simplifican a:

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \leq Dem_i^t \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (4.6)$$

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t \geq Dem_i^t - \Delta L_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (4.7)$$

Debido a la dirección de optimización del modelo, la cual busca minimizar los costos de ruteo e inventario, la restricción (4.7) será activa satisfaciendo la igualdad, puesto que enviar una unidad adicional incurre en un costo extra de inventario, y dejando redundante la inecuación (4.6). Por lo cual, las dos inecuaciones anteriores pueden ser reemplazadas por:

$$s_i^{t-1} + \sum_k Q_{i,k}^t - s_i^t = Dem_i^t - \Delta L_i^t(1 - \alpha) \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \forall t \in T \quad (4.8)$$

Siguiendo los deseos del decisor, los valores de α que permiten modelar sus preferencias de nivel de servicio para el caso de la programación paramétrica se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4: Valores del Parámetro α

Nivel de Servicio	Valor de α
95%	0
96%	0.2
97%	0.4
98%	0.6
99%	0.8
100%	1

Finalmente, los dos enfoques restantes no se utilizarán para resolver el problema, debido a que no nos permiten representar las preferencias del gerente en cuanto a los niveles de cobertura de demanda deseados. Para el caso real, los parámetros de ejecución del algoritmo fueron:

- $HMS = 15$
- $HMCR = 0.90$
- $PAR_{min} = 0.01$
- $PAR_{max} = 0.99$
- Número Máximo de Iteraciones: 100
- Tiempo Máximo de Ejecución: 5400 segundos (1h30)

Los resultados obtenidos con el algoritmo de acuerdo a cada valor de α establecido en la Tabla 4 se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5: Resultados Obtenidos con el Algoritmo Desarrollado

α	<i>Costo Ruteo</i>	<i>Costo Inventario</i>	<i>Costo Total</i>	<i>Tiempo (Seg.)</i>
0	634.19	5,280.74	5,914.93	1123.82
0.2	599.42	5,606.79	6,206.21	1239.91
0.4	599.37	5,759.69	6,359.06	1234.57
0.6	598.26	6,027.17	6,625.43	997.29
0.8	609.92	5,980.05	6,589.97	1247.33
1	620.71	5,531.74	6,152.45	1118.99

Para verificar la eficiencia de las políticas propuestas por el algoritmo desarrollado, se procede a compararlas contra una de las políticas convencionales usadas por los bancos, la cual considera dos días fijos (lunes y viernes) para el reabastecimiento de los cajeros y no se regresan los residuos de efectivo al banco matriz. Los montos de efectivo que se cargan a los cajeros también son fijos, sin embargo, se utilizarán diferentes montos de reabastecimiento, los cuales se estimaron a través de una inspección breve de los datos de demanda disponibles. Los resultados obtenidos con esta política se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6: Costos de las Políticas Convencionales

<i>Monto de Reabastecimiento</i>	<i>Costo de Ruteo</i>	<i>Costo de Inventario</i>	<i>Costo Total</i>	<i>Stockout</i>
350,000.00	ND ²	205,658.05	205,658.05	No
200,000.00	ND	107,741.38	107,741.38	No
150,000.00	ND	75,102.49	75,102.49	No
100,000.00	ND	42,463.60	42,463.60	No
75,000.00	ND	26,583.88	26,583.88	Si

Claramente se puede apreciar que las políticas de reabastecimiento generadas por el algoritmo superan por mucho a las políticas convencionales aplicadas por los bancos, adicionando el hecho de que estas últimas no garantizan que un cajero se quede sin dinero, mientras que las propuestas en este trabajo de investigación si lo hacen. Un ejemplo de los reportes arrojados por el algoritmo se encuentra disponible en el Anexo 6.

Finalmente, se realizó una experiencia computacional implementando el modelo matemático formulado en el capítulo 3 en el modelizador GAMS y resolviéndolo con el Solver CPLEX 12.4.0.0 en una laptop HP Pavilion g4-1085la con un procesador Intel Core i5 con 4gb de RAM, sin obtener solución inicial factible alguna después de más de 5 horas de ejecución, con que se resalta la clara necesidad de desarrollar algoritmos metaheurísticos que nos permitan obtener soluciones del problema en un tiempo de cómputo razonable aunque esto signifique sacrificar de cierta manera la calidad de las mismas.

² No disponible

5. Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un algoritmo evolutivo basado en la metaheurística Harmony Search para resolver el problema de ruteo de vehículos con inventarios considerando la demanda de los nodos de la red como un número difuso y se lo aplicó para diseñar políticas óptimas de reabastecimiento para las redes de cajeros automáticos. A través de los experimentos computacionales se comprobó que el algoritmo resultó ser una herramienta adaptativa muy eficaz para resolver este tipo de problemas hallando las soluciones óptimas para problemas de tamaño relativamente pequeños en un intervalo corto de tiempo (Ver Anexo 7).

La adecuada planificación del reabastecimiento de las redes de cajeros automáticos es de vital importancia en las áreas operativas de una institución financiera, debido a que una mala planificación puede acarrear grandes pérdidas económicas para la misma. Gracias a la tecnología existente se pueden evitar estos problemas, porque la planificación de los reabastecimientos ya no se realizarán usando el sentido común del administrador de la red que hasta ahora lo hacía usando los procedimientos ya establecidos por el banco en su manual de operaciones y dejando al conductor del camión blindado decidir libremente sobre cómo realizar las visitas a los cajeros y cuáles vialidades utilizar.

Por lo mencionado anteriormente, salta a la luz la necesidad de desarrollar aplicaciones eficientes y fáciles de usar de manera que la planificación del reabastecimiento elaborada por el software sea sofisticada y optimice los recursos de la institución bancaria. Esto es minimice el gasto que se incurre en el uso de rutas de distribución no optimizadas y en el costo de oportunidad del efectivo guardado en inventario innecesariamente, lo cual mejora el nivel de servicio ofrecido por el banco a sus clientes. Finalmente, el algoritmo desarrollado puede ser utilizado como motor para la creación de este tipo de soluciones empresariales.

5.2. Recomendaciones

En el presente trabajo no se desarrolló una metodología para implementar la solución creada en las instituciones financieras, por lo que se recomendaría considerar los siguientes puntos para diseñar una:

- Crear la interfaz de usuario amigable que permita a los ejecutivos del banco adaptarse rápidamente al software.
- Hacer participar desde el inicio hasta el final a los altos directivos del banco, así como también a los funcionarios de las áreas que tengan una vinculación directa con el reabastecimiento de los cajeros automáticos.
- Capacitar a los usuarios del sistema para reducir la curva de aprendizaje, enseñarles cómo realizar sus propios estudios y análisis de escenarios de tal manera que se sientan motivados a proponer mejoras al programa.
- Implementar el programa en pequeñas porciones de la red para realizar pruebas de pilotaje y asimilación de los nuevos procedimientos.

5.3. Líneas de Investigación

Las líneas de investigación creadas en el presente trabajo son:

1. Para el modelo matemático del IRP:
 - Considerar a los coeficientes de la función objetivo como números difusos.
 - Considerar que la capacidad de carga de los vehículos es un número difuso.
 - Considerar que tanto la demanda de los nodos de la red, la capacidad de los vehículos y los coeficientes de la función objetivo son números difusos.
 - Considerar que las variables de decisión asociadas con la cantidad de producto enviado a los nodos de la red son números difusos. Por consiguiente, las variables de decisión asociadas con los niveles de inventario también serán números difusos.
 - Probar el enfoque de resolución de estos modelos difusos propuesto por la teoría de la posibilidad.
2. Para el algoritmo desarrollado:
 - Mejorar el procedimiento de construcción de las soluciones iniciales.
 - Mejorar el procedimiento de búsqueda local.
 - Rediseñar el algoritmo para que pueda ser implementado en paralelo.
 - Desarrollar instancias de prueba con dificultad teórica controlada de tal manera que se puedan contrastar las soluciones de los algoritmos contra la solución exacta del modelo.

6. Bibliografía

- [1] J. McAndrews, "Automated Teller Machine Network Pricing - A Review of the Literature," *Review of Network Economics*, vol. 2, no. 2, Junio 2003.
- [2] C. D'Ambrosio, M. Fox, and T. Hayes, "2006 ATM Deployer Studio," Boston, Working Paper 2006.
- [3] R. Simutis, D. Dilijonas, and L. Bastina, "Cash Demand Forecasting for ATM using Neural Networks and Support Vector Regression Algorithms," in *20th EURO Mini Conference Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies*, 2008.
- [4] M. Wagner, "The Optimal Cash Deployment Strategy - Modeling a Network of Automated Teller Machines," Swedish School of Economics and Business Administration, Master of Science Thesis 2007.
- [5] Cash Connect, "ATM Vault Cash Management - Five Strategies for Optimizing a Cash Program," *A Guide from ATMmarketplace.com*, 2010.
- [6] R. Simutis, D. Dilijonas, L. Bastina, J. Friman, and P. Drobinov, "Optimization of Cash Management for ATM Network," *Information Technology and Control*, vol. 36, no. 1A, 2007.
- [7] R. Armenise, C. Birtolo, E. Sangianantoni, and L. Troiano, "A Generative Solution for ATM Cash Management," Poste Italiane S.p.A., 2010.
- [8] America Economía. (2012, Marzo) Los 250 Bancos más grandes de la Región. [Online]. <http://xurl.es/jy9vk>
- [9] A. Qadrei and S. Habib, "Allocation of Heterogeneous Bank's Automated Teller Machines," in *First International Conference on Intensive Applications and Services*, 2009.
- [10] A. Alhaffa, O. Al Jadaan, W. Abdubal, and A. Jabas, "Rank Based Genetic Algorithm for Solving the Banking ATM's Location Problem using Convolution," in *IEEE Symposium on Computers and Informatics*, 2011.
- [11] Y. Li, M. Sun, C. Zhang, and G. Li, "Sites Selection of ATMs based on Particle Swarm Optimization," in *International Conference on Information Technology and Computer Science*, 2009.
- [12] J. Donze and I. Dubec, "Paying for ATM usage: Good for Costumers, Bad for Banks?," *The Journal of Industrial Economics*, vol. LVII, no. 3, Septiembre 2009.
- [13] J. McAndrews, "A Model of ATM Pricing: Foreign Fees and Surcharges," Federal Reserve Bank of New York, Working Paper 2001.
- [14] H. Snellman and M. Virén, "ATM Networks and Cash Usage," *Bank of Finland Research Discussion Papers*, 2006.
- [15] J. Ishii, "Interconnection Pricing and Compatibility in Network Industries: ATM Networks in the Banking Industry," Harvard University, Working Paper 2004.
- [16] A. Brentnall, M. Crowder, and D. Hand, "Predictive Sequential Forecasting System Development for Cash Machine Stocking," *International Journal of Forecasting*, 2010.

- [17] R. Simutis, D. Dilijonas, L. Bastina, and J. Friman, "A Flexible Neural Network for ATM Cash Demand Forecasting," in *6th WSEAS Int. Conference on Computational Intelligence, Man-Machine Systems and Cybernetics*, 2007.
- [18] S. D. Teddy and S. K. Ng, "Forecasting ATM Cash Demands using Local Learning Model of Cerebellar Associative Memory Network," *International Journal of Forecasting*, 2011.
- [19] M. H. Chen, "How Much Cash Should a Bank Maintain? - An Optimization Approach," Massachusetts Institute of Technology, Master of Science Thesis 1991.
- [20] C. Bing-Yuan, *Optimal Models and Methods with Fuzzy Quantities*, Springer Verlag, Ed. Berlín, Alemania, 2010.
- [21] J.M. Cadenas and J.L. Verdegay, *Modelos de Optimización con Datos Imprecisos*. Murcia, España, 1999.
- [22] J. M. Cadenas and J. L. Verdegay, "Fuzzy Optimization Models based Metaheuristics," *Revista Investigación Operativa*, vol. 29, no. 3, pp. 253-273, 2008.
- [23] J. L. Verdegay, "Fuzzy Mathematical Programming," in *Fuzzy Information and Decision Processes*, M. M. Gupta and E. Sánchez, Eds. Amsterdam: North-Holland, 1982, pp. 231-237.
- [24] M. G. Bailey and B. E. Gillett, "Parametric Integer Programming Analysis: A Contraction Approach," *The Journal of Operational Research Society*, vol. 31, pp. 257-262, 1980.
- [25] F. Herrera and J. L. Verdegay, "Three Models of Fuzzy Integer Linear Programming," *European Journal of Operational Research*, 1995.
- [26] R. Zhao, R. Govind, and G. Fan, "The Complete Decision Set of the Generalized Symmetrical Fuzzy Linear Programming Problem," *Fuzzy Sets and Systems*, no. 51, pp. 53-65, 1992.
- [27] A. Federgruen and P. Zipkin, "A Combined Vehicle Routing and Inventory Allocation Problem," *Operation Research*, vol. 32, no. 5, pp. 1019-1037, Sep-Oct 1984.
- [28] A. Campbell, L. Clarke, A. Kleywegt, and M. Savelsbergh, "The Inventory Routing Problem," Mayo 1997.
- [29] P. Toth and D. Vigo, *The Vehicle Routing Problem*, Primera ed.: SIAM, 2002.
- [30] A. Kleywegt, V. Nori, and M. Savelsbergh, "The Stochastic Inventory Routing Problem with Direct Deliveries," Junio 1999.
- [31] A. Campbell and M. Savelsbergh, "A Decomposition Approach for the Inventory Routing Problem," *Transportation Science*, vol. 38, no. 4, pp. 488-502, Noviembre 2004.
- [32] C. Archetti, L. Bertazzi, A. Hertz, and M. G. Speranza, "A Hybrid Heuristic for an Inventory Routing Problem," 2009.
- [33] L. Bertazzi, M. Savelsbergh, and M. Speranza, "Inventory Routing," *VRP Latest Advances*, pp. 49-72, 2008.
- [34] T. Henry, "A New Solution Approach for the Inventory Routing Problem: Using Vehicle Routing Problem Constructive Heuristics," Universidad de Singapore, Singapore, Tesis de Maestría 2005.

- [35] Z. W. Geem, J. H. Kim, and G. V. Loganathan, "A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search," *Simulation*, vol. 2, pp. 60-68, 2001.
- [36] K. S. Lee and Z. W. Geem, "A New Metaheuristic Algorithm for Continuous Engineering Optimization: Harmony Search Theory and Practice," *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, no. 194, pp. 3902-3933, 2005.
- [37] M. Mahdavi, M. Fesanghary, and E. Damangir, "An Improved Harmony Search Algorithm for Solving Optimization Problems," *Applied Mathematics and Computation*, no. 188, pp. 1567-1579, 2007.
- [38] M. Omran and M. Mahdavi, "Global Best Harmony Search," *Applied Mathematics and Computation*, no. 198, pp. 643-656, 2008.
- [39] R. Martí, "Procedimientos Metaheurísticos en Optimización Combinatoria," Universidad de Valencia, Valencia, Artículo Académico.
- [40] J. Gross and J. Yellen, *Handbook of Graph Theory.*: CRC Press, 2003.
- [41] Q. Pan, P. N. Suganthan, M. Tasgetiren, and J. J. Liang, "A self-adaptive global best harmony search algorithm for continuous optimization problems," *Applied Mathematics and Computation*, no. 216, pp. 830-848, 2010.
- [42] Solomon. (2007, Marzo) VRP Web. [Online]. <http://xurl.es/op8ci>
- [43] ATMmarketplace.com, "2010 ATM Software Trends and Analysis," *A Guide from ATMmarketplace.com*, 2010.
- [44] Wincor Nixdorf, "New Solution Concepts for Cash Management at Banks and Retail Companies," *A Guide from ATMmarketplace.com*, 2010.
- [45] J. Brito, J. A. Moreno, and J. L. Verdegay, "Fuzzy Optimization in Vehicle Routing Problems," Working Paper 2009.
- [46] D. Dilijonas and L. Bastina, "Retail Banking Optimization System based on Multi-agents Technology," in *6th WSEAS Int. Conference on Computational Intelligence, Man-Machine Systems and Cybernetics*, 2007.
- [47] P. Dutta, D. Chakraborty, and A. Roy, "An Inventory Model for Single Period Products with Reordering Opportunities under Fuzzy Demand," *An International Journal Computers and Mathematics with Applications*, 2007.
- [48] G. Klir and B. Yuan, "Fuzzy Decision Making," in *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications.*: Prentice Hall, 1995, ch. 15, pp. 390-417.

Anexo 1: Datos para la Instancia de Validación con 25 Nodos

La instancia de validación del algoritmo tiene las siguientes características:

- **Naturaleza de la Demanda:** Determinística y dinámica (cambia con el tiempo).
- **Función de Distancia:** Métrica de Manhattan.
- **Número de Cajeros en la Red:** 25 cajeros con sus coordenadas cartesianas.
- **Capacidad del Cajero:** 350000 unidades monetarias.
- **Capacidad del Vehículo:** 8 veces la capacidad de un cajero.
- **Horizonte de Planificación:** 7 días.
- **Tasa de Inventario:** 0.15 anual.

Tabla 7: Datos para la Instancia de Validación con 25 Nodos

Cajero	Coordenadas		Demanda de Efectivo						
	X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	52	75	114510	29500	25980	66770	167445	168835	44095
C2	45	70	152855	124810	168930	36720	114465	181195	54305
C3	62	69	102075	111315	96825	71060	195295	160960	49460
C4	60	66	93635	198515	106275	39730	17035	66390	36510
C5	42	65	57305	175985	60525	166560	170495	57790	48965
C6	16	42	141040	23070	86265	23405	25820	142705	122410
C7	58	70	102185	84105	144500	165295	176660	42585	63920
C8	34	60	12900	193970	149845	133590	64700	13250	166600
C9	28	70	157370	117065	96305	41875	38695	178820	60545
C10	35	66	51025	6850	157715	17640	50660	5875	79730
C11	35	69	133870	37110	158550	34195	166725	98890	179360
C12	25	85	129270	83050	160265	155855	159295	38515	95235
C13	22	75	110900	122850	180210	46975	93900	137965	76385
C14	22	85	38350	107685	108045	129985	61005	45475	18760
C15	20	80	162810	161975	183395	152470	33190	39820	117970
C16	20	85	109430	90685	167275	67705	10690	188770	109365
C17	18	75	135490	140320	179015	131475	193370	113145	62915
C18	15	75	101560	142465	90695	103835	1320	52365	180870
C19	15	80	199000	18360	61060	73420	5375	109090	36575
C20	30	50	39440	84885	64025	8285	23230	164345	172205
C21	30	56	73085	180420	11725	34115	121370	113225	4715
C22	28	52	197135	159955	67295	70440	97810	196915	97895
C23	14	66	105535	97845	64680	89025	113035	93595	150420
C24	25	50	130140	199165	4010	23110	141965	147365	170925
C25	22	66	5705	106785	33870	193295	149090	64970	97480
C26	40	50	0	0	0	0	0	0	0

Anexo 2: Datos para la Instancia de Validación con 50 Nodos

La instancia de validación del algoritmo tiene las siguientes características:

- **Naturaleza de la Demanda:** Determinística y dinámica (cambia con el tiempo).
- **Función de Distancia:** Métrica de Manhattan.
- **Número de Cajeros en la Red:** 50 cajeros con sus coordenadas cartesianas.
- **Capacidad del Cajero:** 350000 unidades monetarias.
- **Capacidad del Vehículo:** 15 veces la capacidad de un cajero.
- **Horizonte de Planificación:** 7 días.
- **Tasa de Inventario:** 0.15 anual.

Tabla 8: Datos para la Instancia de Validación con 50 Nodos

Cajero	Coordenadas		Demanda de Efectivo						
	X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	45	68	114510	29500	25980	66770	167445	168835	44095
C2	45	70	152855	124810	168930	36720	114465	181195	54305
C3	42	66	102075	111315	96825	71060	195295	160960	49460
C4	42	68	93635	198515	106275	39730	17035	66390	36510
C5	42	65	57305	175985	60525	166560	170495	57790	48965
C6	40	69	141040	23070	86265	23405	25820	142705	122410
C7	40	66	102185	84105	144500	165295	176660	42585	63920
C8	38	68	12900	193970	149845	133590	64700	13250	166600
C9	38	70	157370	117065	96305	41875	38695	178820	60545
C10	35	66	51025	6850	157715	17640	50660	5875	79730
C11	35	69	133870	37110	158550	34195	166725	98890	179360
C12	25	85	129270	83050	160265	155855	159295	38515	95235
C13	22	75	110900	122850	180210	46975	93900	137965	76385
C14	22	85	38350	107685	108045	129985	61005	45475	18760
C15	20	80	162810	161975	183395	152470	33190	39820	117970
C16	20	85	109430	90685	167275	67705	10690	188770	109365
C17	18	75	135490	140320	179015	131475	193370	113145	62915
C18	15	75	101560	142465	90695	103835	1320	52365	180870
C19	15	80	199000	18360	61060	73420	5375	109090	36575
C20	30	50	39440	84885	64025	8285	23230	164345	172205
C21	30	52	73085	180420	11725	34115	121370	113225	4715
C22	28	52	197135	159955	67295	70440	97810	196915	97895
C23	28	55	105535	97845	64680	89025	113035	93595	150420
C24	25	50	130140	199165	4010	23110	141965	147365	170925
C25	25	52	5705	106785	33870	193295	149090	64970	97480
C26	25	55	117685	59495	52965	187745	22155	131425	188765
C27	23	52	97710	195385	125150	156155	111450	59725	19795
C28	23	55	88875	16405	26720	38180	140615	94835	108935

Cajero	Coordenadas		Demanda de Efectivo						
	X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C29	20	50	83490	26705	80225	87070	187430	176435	153040
C30	20	55	57125	155190	183650	116995	175530	20275	44425
C31	10	35	16355	163175	99475	83465	78080	66895	162250
C32	10	40	66625	161880	178345	145855	20010	140860	90760
C33	8	40	132690	9445	29875	32175	22805	21570	51630
C34	8	45	138175	80070	17050	87075	88185	30635	82365
C35	5	35	96030	173015	197005	131490	128765	17690	22135
C36	5	45	179130	166110	89755	91545	94375	181375	82855
C37	2	40	129440	170985	148830	89580	102185	38390	119625
C38	0	40	31240	103485	74770	41420	139230	147640	114490
C39	0	45	125395	76705	184690	137665	14295	114725	138475
C40	35	30	115155	50575	22590	190420	62985	173695	103180
C41	35	32	80260	56375	78290	119535	49685	11015	170190
C42	33	32	8770	60330	125690	125970	85635	3240	153815
C43	33	35	16825	98705	108795	170880	9910	67135	34055
C44	32	30	19245	126705	193575	188185	69680	180525	145310
C45	30	30	69755	176425	46855	82875	11755	55935	92375
C46	30	32	35910	174535	85385	150590	91355	82045	49670
C47	30	35	196415	40075	176110	1115	40725	198900	7700
C48	28	30	148215	177285	192045	132440	199080	50220	33790
C49	28	35	92010	193945	126065	135845	21665	29825	161575
C50	26	32	112900	179925	27725	167650	84475	166980	115055
C51	40	50	0	0	0	0	0	0	0

Anexo 3: Resultados para la Instancia de Validación con 25 Nodos

La política de envío de dinero a cada cajero de la red de 25 nodos se muestra en la Tabla 9, mientras que los niveles de inventario guardados al final de cada día se muestran en la Tabla 10.

Tabla 9: Cantidad de Dinero enviado a cada Cajero de la Red

Cajero	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	114510	55480	0	66770	167445	212930	0
C2	277665	0	205650	0	114465	235500	0
C3	102075	208140	0	71060	195295	210420	0
C4	93635	198515	106275	39730	119935	0	0
C5	57305	175985	60525	166560	170495	106755	0
C6	250375	0	0	191930	0	0	122410
C7	102185	84105	144500	165295	219245	0	63920
C8	12900	343815	0	133590	64700	13250	166600
C9	157370	117065	176875	0	0	239365	0
C10	51025	164565	0	74175	0	0	79730
C11	170980	0	192745	0	265615	0	179360
C12	129270	83050	160265	155855	197810	0	95235
C13	233750	0	180210	140875	0	137965	76385
C14	38350	107685	238030	0	106480	0	18760
C15	162810	161975	183395	152470	73010	0	117970
C16	109430	257960	0	78395	0	188770	109365
C17	135490	140320	179015	324845	0	113145	62915
C18	101560	233160	0	105155	0	52365	180870
C19	217360	0	139855	0	0	109090	36575
C20	196635	0	0	0	23230	164345	172205
C21	73085	192145	0	34115	121370	117940	0
C22	197135	297690	0	0	97810	294810	0
C23	203380	0	153705	0	113035	93595	150420
C24	130140	226285	0	0	141965	147365	170925
C25	5705	140655	0	193295	149090	162450	0

Tabla 10: Cantidad de Dinero guardado en Inventario al final del Día en cada Cajero de la Red

Cajero	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	0	0	25980	0	0	0	44095	0
C2	0	124810	0	36720	0	0	54305	0
C3	0	0	96825	0	0	0	49460	0
C4	0	0	0	0	0	102900	36510	0
C5	0	0	0	0	0	0	48965	0
C6	0	109335	86265	0	168525	142705	0	0
C7	0	0	0	0	0	42585	0	0
C8	0	0	149845	0	0	0	0	0
C9	0	0	0	80570	38695	0	60545	0
C10	0	0	157715	0	56535	5875	0	0
C11	0	37110	0	34195	0	98890	0	0
C12	0	0	0	0	0	38515	0	0
C13	0	122850	0	0	93900	0	0	0
C14	0	0	0	129985	0	45475	0	0
C15	0	0	0	0	0	39820	0	0
C16	0	0	167275	0	10690	0	0	0
C17	0	0	0	0	193370	0	0	0
C18	0	0	90695	0	1320	0	0	0
C19	0	18360	0	78795	5375	0	0	0
C20	0	157195	72310	8285	0	0	0	0
C21	0	0	11725	0	0	0	4715	0
C22	0	0	137735	70440	0	0	97895	0
C23	0	97845	0	89025	0	0	0	0
C24	0	0	27120	23110	0	0	0	0
C25	0	0	33870	0	0	0	97480	0

Anexo 4: Resultados para la Instancia de Validación con 50 Nodos

La política de envío de dinero a cada cajero de la red de 50 nodos se muestra en la Tabla 11, mientras que los niveles de inventario guardados al final de cada día se muestran en la Tabla 12.

Tabla 11: Política de Envío de Dinero en Efectivo para la Instancia de Validación con 50 Nodos

Cajero	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	114510	122250	0	0	167445	168835	44095
C2	277665	0	205650	0	114465	181195	54305
C3	102075	111315	167885	0	195295	160960	49460
C4	292150	0	163040	0	0	66390	36510
C5	293815	0	0	166560	228285	0	48965
C6	164110	0	109670	0	25820	265115	0
C7	102185	228605	0	165295	176660	42585	63920
C8	206870	0	149845	198290	0	13250	166600
C9	157370	117065	176875	0	0	239365	0
C10	57875	0	175355	0	50660	85605	0
C11	170980	0	192745	0	166725	98890	179360
C12	212320	0	160265	155855	197810	0	95235
C13	110900	122850	180210	140875	0	137965	76385
C14	38350	107685	238030	0	61005	45475	18760
C15	162810	161975	335865	0	33190	39820	117970
C16	109430	336355	0	0	0	188770	109365
C17	135490	319335	0	131475	193370	113145	62915
C18	244025	0	194530	0	53685	0	180870
C19	217360	0	61060	73420	5375	145665	0
C20	188350	0	0	31515	0	164345	172205
C21	253505	0	11725	34115	239310	0	0
C22	197135	159955	67295	70440	294725	0	97895
C23	105535	97845	153705	0	113035	93595	150420
C24	130140	199165	27120	0	141965	147365	170925
C25	112490	0	227165	0	149090	64970	97480
C26	230145	0	0	209900	0	320190	0
C27	293095	0	125150	267605	0	59725	19795
C28	132000	0	0	38180	235450	0	108935
C29	110195	0	167295	0	187430	176435	153040
C30	57125	338840	0	312800	0	0	44425
C31	16355	262650	0	83465	78080	66895	162250
C32	66625	161880	178345	165865	0	231620	0
C33	172010	0	0	76550	0	0	51630
C34	138175	80070	17050	87075	118820	0	82365
C35	96030	173015	328495	0	146455	0	22135

Cajero	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C36	179130	255865	0	91545	94375	264230	0
C37	129440	170985	238410	0	102185	158015	0
C38	31240	219675	0	0	139230	147640	114490
C39	125395	76705	184690	151960	0	253200	0
C40	115155	73165	0	190420	62985	173695	103180
C41	136635	0	197825	0	49685	11015	170190
C42	69100	0	125690	125970	88875	0	153815
C43	115530	0	108795	247925	0	0	34055
C44	19245	126705	193575	188185	69680	180525	145310
C45	246180	0	129730	0	67690	0	92375
C46	35910	259920	0	150590	91355	131715	0
C47	196415	40075	176110	1115	247325	0	0
C48	148215	177285	192045	132440	249300	0	33790
C49	92010	193945	126065	135845	21665	191400	0
C50	112900	207650	0	252125	0	282035	0

Tabla 12: Cantidad de Efectivo guardado en Inventario al Final del Día

Cajero	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	0	0	92750	66770	0	0	0	0
C2	0	124810	0	36720	0	0	0	0
C3	0	0	0	71060	0	0	0	0
C4	0	198515	0	56765	17035	0	0	0
C5	0	236510	60525	0	0	57790	0	0
C6	0	23070	0	23405	0	0	122410	0
C7	0	0	144500	0	0	0	0	0
C8	0	193970	0	0	64700	0	0	0
C9	0	0	0	80570	38695	0	60545	0
C10	0	6850	0	17640	0	0	79730	0
C11	0	37110	0	34195	0	0	0	0
C12	0	83050	0	0	0	38515	0	0
C13	0	0	0	0	93900	0	0	0
C14	0	0	0	129985	0	0	0	0
C15	0	0	0	152470	0	0	0	0
C16	0	0	245670	78395	10690	0	0	0
C17	0	0	179015	0	0	0	0	0
C18	0	142465	0	103835	0	52365	0	0
C19	0	18360	0	0	0	0	36575	0
C20	0	148910	64025	0	23230	0	0	0
C21	0	180420	0	0	0	117940	4715	0
C22	0	0	0	0	0	196915	0	0
C23	0	0	0	89025	0	0	0	0

Cajero	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C24	0	0	0	23110	0	0	0	0
C25	0	106785	0	193295	0	0	0	0
C26	0	112460	52965	0	22155	0	188765	0
C27	0	195385	0	0	111450	0	0	0
C28	0	43125	26720	0	0	94835	0	0
C29	0	26705	0	87070	0	0	0	0
C30	0	0	183650	0	195805	20275	0	0
C31	0	0	99475	0	0	0	0	0
C32	0	0	0	0	20010	0	90760	0
C33	0	39320	29875	0	44375	21570	0	0
C34	0	0	0	0	0	30635	0	0
C35	0	0	0	131490	0	17690	0	0
C36	0	0	89755	0	0	0	82855	0
C37	0	0	0	89580	0	0	119625	0
C38	0	0	116190	41420	0	0	0	0
C39	0	0	0	0	14295	0	138475	0
C40	0	0	22590	0	0	0	0	0
C41	0	56375	0	119535	0	0	0	0
C42	0	60330	0	0	0	3240	0	0
C43	0	98705	0	0	77045	67135	0	0
C44	0	0	0	0	0	0	0	0
C45	0	176425	0	82875	0	55935	0	0
C46	0	0	85385	0	0	0	49670	0
C47	0	0	0	0	0	206600	7700	0
C48	0	0	0	0	0	50220	0	0
C49	0	0	0	0	0	0	161575	0
C50	0	0	27725	0	84475	0	115055	0

Anexo 5: Datos para el Caso Real

En la Tabla 13 se muestra la información referente a los cajeros que forman la red bancaria de la institución financiera que se considera en esta investigación. Las primeras dos columnas dan información descriptiva del cajero mientras que la tercera columna indica cuántos cajeros están ubicados en ese punto geográfico. Las dos columnas siguientes corresponden a las coordenadas geográficas del lugar en grados decimales mientras que las dos últimas columnas son las coordenadas cartesianas o UTM obtenidas después de realizar la transformación respectiva.

Tabla 13: Información Geográfica de los Cajeros de la Red

<i>ID</i>	<i>Descripción</i>	<i># Cajeros</i>	<i>Latitud</i>	<i>Longitud</i>	<i>Coord. X</i>	<i>Coord. Y</i>
C1	Cruz Azul 4 de Noviembre	1	-2.210	-79.908	621.443	9755.656
C2	Porta Malecón	1	-2.192	-79.880	624.577	9757.623
C3	9 de Octubre	4	-2.189	-79.890	623.424	9757.978
C4	Finansur	2	-2.188	-79.894	623.012	9758.154
C5	Porta 9 de Octubre	2	-2.192	-79.882	624.315	9757.711
C6	Claro 9 de Octubre	1	-2.191	-79.882	624.287	9757.724
C7	Ag. Boulevard	2	-2.191	-79.885	623.974	9757.829
C8	Consulado USA	1	-2.189	-79.891	623.307	9758.011
C9	Casino Hotel Hampton	1	-2.191	-79.883	624.263	9757.753
C10	Comandato	2	-2.190	-79.885	623.963	9757.844
C11	Aguirre	2	-2.193	-79.885	623.939	9757.553
C12	Unicentro 1	3	-2.194	-79.883	624.206	9757.477
C13	Unicentro 4	3	-2.194	-79.881	624.408	9757.474
C14	Terpel El Éxito	1	-2.191	-79.893	623.111	9757.747
C15	Garzocentro	1	-2.144	-79.894	622.988	9762.935
C16	Gasolinera Villagómez	1	-2.201	-79.915	620.685	9756.676
C17	Centenario	2	-2.222	-79.891	623.330	9754.383
C18	Ag. Río Centro Sur	1	-2.241	-79.896	622.807	9752.254
C19	Mall del Sur	11	-2.230	-79.898	622.527	9753.476
C20	Puerto Marítimo	1	-2.277	-79.896	622.796	9748.243
C21	Aki 25 de Julio	2	-2.251	-79.897	622.631	9751.147
C22	Porta Río Centro Sur	2	-2.241	-79.896	622.794	9752.284
C23	Sumédica Sur	1	-2.226	-79.898	622.538	9753.919
C24	Hospital del IESS	1	-2.232	-79.899	622.485	9753.244
C25	Petro 25 de Julio	1	-2.264	-79.898	622.526	9749.760
C26	Supermaxi Garzota	1	-2.145	-79.896	622.802	9762.832
C27	Cruz Azul Sauces 2	1	-2.139	-79.888	623.709	9763.580
C28	Cruz Azul Sauces 9	1	-2.131	-79.891	623.293	9764.458
C29	Metrovía Norte	1	-2.141	-79.879	624.682	9763.283
C30	Big Outlet	1	-2.154	-79.931	618.882	9761.819
C31	Coral Centro	1	-2.183	-79.901	622.187	9758.682

ID	Descripción	# Cajeros	Latitud	Longitud	Coord. X	Coord. Y
C32	Hipermarket Albán Borja	1	-2.170	-79.917	620.481	9760.130
C33	Mi Comisariato Plaza Quil	1	-2.169	-79.899	622.414	9760.170
C34	Cruz Azul Cayetano	1	-2.149	-79.920	620.051	9762.427
C35	Terminal Terrestre	3	-2.143	-79.879	624.666	9763.053
C36	Mi Comisariato La Garzota	1	-2.145	-79.885	623.979	9762.901
C37	C. Convenciones	3	-2.158	-79.887	623.756	9761.469
C38	Terpel América	1	-2.145	-79.885	624.046	9762.855
C39	Mobil Beneficencia	1	-2.145	-79.886	623.921	9762.813
C40	Aeropuerto	3	-2.149	-79.884	624.057	9762.465
C41	Claro Terminal Terrestre	1	-2.144	-79.879	624.622	9763.017
C42	Avícola Fernández	1	-2.143	-79.884	624.082	9763.092
C43	Rio Centro Los Ceibos	1	-2.176	-79.943	617.503	9759.402
C44	Mobil Ceibos	1	-2.171	-79.938	618.080	9759.955
C45	Piazza Ceibos	2	-2.176	-79.942	617.678	9759.392
C46	Porta Rio Centro Ceibos	1	-2.163	-79.931	618.846	9760.897
C47	Megamaxi Ceibos	1	-2.174	-79.940	617.865	9759.682
C48	Mini Comisariato	1	-2.192	-79.893	623.086	9757.651
C49	Pharmacys Kennedy	1	-2.173	-79.898	622.516	9759.766
C50	Mi Comisariato Domingo Comín	1	-2.227	-79.890	623.478	9753.806
C51	Mobil Pradera	1	-2.237	-79.891	623.302	9752.680
C52	El Universo	1	-2.233	-79.890	623.402	9753.108
C53	Terpel Domingo Comín	1	-2.230	-79.891	623.377	9753.483
C54	City Mall	3	-2.141	-79.909	621.296	9763.327
C55	Hipermarket Norte	1	-2.128	-79.906	621.629	9764.773
C56	Mobil Kennedy	1	-2.164	-79.897	622.688	9760.714
C57	Porta Cetrum	1	-2.164	-79.897	622.695	9760.749
C58	Gasolinera Vergeles	1	-2.100	-79.911	621.097	9767.880
C59	Terpel Garzota	1	-2.151	-79.893	623.119	9762.191
C60	Mobil Garzota	1	-2.148	-79.892	623.186	9762.527
C61	Cruz Azul Alborada	1	-2.135	-79.902	622.154	9763.996
C62	Alborada 1	5	-2.136	-79.901	622.196	9763.858
C63	Sumédica Alborada	1	-2.145	-79.894	622.955	9762.831
C64	Pharmacys Garzota	1	-2.151	-79.893	623.115	9762.173
C65	Mucho Lote 1	2	-2.087	-79.925	619.565	9769.271
C66	Mucho Lote 3	1	-2.086	-79.924	619.687	9769.361
C67	Mobil Ecológico	1	-2.146	-79.914	620.782	9762.720
C68	Mobil Pegaso	1	-2.147	-79.905	621.723	9762.627
C69	Mall del Sol	7	-2.155	-79.893	623.121	9761.722
C70	Registro Civil Norte	1	-2.142	-79.923	619.766	9763.164
C71	Facso	1	-2.166	-79.908	621.422	9760.594

ID	Descripción	# Cajeros	Latitud	Longitud	Coord. X	Coord. Y
C72	Gasolinera Petrocentro	1	-2.185	-79.888	623.621	9758.388
C73	Mobil Fae 2	2	-2.163	-79.881	624.494	9760.888
C74	Sala de Velación	1	-2.182	-79.890	623.461	9758.797
C75	Hospital Universitario	1	-2.097	-79.945	617.273	9768.135
C76	Texaco Perimetral	1	-2.068	-79.925	619.510	9771.424
C77	Metrovía Sur	2	-2.264	-79.869	625.739	9749.689
C78	Univ. Industrial	1	-2.148	-79.913	620.891	9762.494
C79	C.C. Plaza Mayor	1	-2.141	-79.898	622.574	9763.338
C80	Porta Alborada	1	-2.137	-79.901	622.252	9763.796
C81	Mi Comisariato Alborada	1	-2.142	-79.897	622.648	9763.215
C82	Terpel Bellavista	1	-2.188	-79.913	620.913	9758.077
C83	Aki Domingo Comín	2	-2.266	-79.895	622.914	9749.510
C84	Terpel Maioli	1	-2.196	-79.896	622.816	9757.270
C85	Celular Center	1	-2.191	-79.883	624.201	9757.769
C86	Mi Comisariato Centenario	2	-2.218	-79.894	623.041	9754.747
C87	Pharmacys Puerto Azul	1	-2.188	-79.967	614.837	9758.138
C88	Claro Garzota	1	-2.145	-79.895	622.922	9762.907
C89	La Rotonda	1	-2.139	-79.908	621.423	9763.502
C90	Policentro	4	-2.170	-79.900	622.308	9760.065
C91	Porta San Marino	4	-2.170	-79.899	622.451	9760.113
C92	Albán Borja	3	-2.169	-79.917	620.421	9760.258
C93	Aki Atarazana	1	-2.176	-79.887	623.815	9759.395
C94	Las Orquídeas	1	-2.076	-79.907	621.566	9770.440
C95	Mobil Puerto Azul	1	-2.183	-79.976	613.876	9758.679
C96	Universidad de Guayaquil	2	-2.181	-79.898	622.564	9758.857
C97	Ceibos Norte	1	-2.155	-79.944	617.384	9761.777
C98	Ecuavisa Cerro del Carmen	1	-2.180	-79.882	624.355	9759.033
C99	La Bahía	1	-2.198	-79.884	624.120	9756.964
C100	Hotel Continental	1	-2.195	-79.883	624.263	9757.331
C101	Mobil Centenario	1	-2.216	-79.888	623.609	9755.024
C102	Pharmacys Centenario	1	-2.216	-79.889	623.563	9754.970
C103	Metrovía Astillero	1	-2.207	-79.886	623.862	9755.971
C104	Aki Astillero	1	-2.208	-79.886	623.865	9755.908
C105	Ecuafarmacia	1	-2.215	-79.889	623.525	9755.091
C106	Mobil Córdova	1	-2.185	-79.880	624.596	9758.458
C107	La Góndola	1	-2.200	-79.883	624.213	9756.767
C108	Mi Comisariato Eloy Alfaro	1	-2.207	-79.885	623.960	9756.025
C109	La Universal	1	-2.205	-79.884	624.067	9756.215
C110	Cruz Azul Gómez Rendón	1	-2.199	-79.906	621.688	9756.871
C111	Mi Comisariato Fénix	1	-2.203	-79.893	623.079	9756.505

ID	Descripción	# Cajeros	Latitud	Longitud	Coord. X	Coord. Y
C112	Cruz Azul Lisboa	1	-2.204	-79.889	623.562	9756.380
C113	Gasolinera Primax	1	-2.201	-79.900	622.280	9756.716
C114	Samanes	2	-2.121	-79.901	622.274	9765.545
C115	Sumédica Sauces 5	1	-2.121	-79.890	623.448	9765.570
C116	Universidad Espíritu Santo	1	-2.168	-79.921	620.010	9760.277
C117	Hospital Luis Vernaza	1	-2.182	-79.881	624.395	9758.759
C118	Hilton Colón	1	-2.159	-79.898	622.507	9761.296
C119	Aje Ecuador	1	-2.064	-79.944	617.448	9771.807
C120	Supermaxi California	1	-2.110	-79.948	616.962	9766.760
C121	Induauto	1	-2.155	-79.930	618.999	9761.795
C122	Mi Comisariato Ceibos	1	-2.177	-79.944	617.487	9759.385
C123	Claro Paseo Vía Daule	1	-2.115	-79.933	618.647	9766.166
C124	Cruz Azul La 29	1	-2.203	-79.926	619.386	9756.502
C125	Categ Garzota	1	-2.146	-79.893	623.161	9762.794
C126	Botica Barcia	1	-2.196	-79.888	623.684	9757.240
C127	Pys Los Ríos	1	-2.192	-79.895	622.860	9757.682
C128	Avícola Fernández 2	1	-2.196	-79.896	622.717	9757.276
C129	Claro Av. Machala	1	-2.189	-79.890	623.459	9758.002
C130	Malecon del Salado	1	-2.187	-79.897	622.621	9758.223
C131	Municipio de Guayaquil	1	-2.195	-79.881	624.458	9757.294
C132	Malecón	3	-2.198	-79.881	624.438	9756.955
C133	Espol Las Peñas	1	-2.185	-79.877	624.931	9758.491
C134	Malecon Imax	1	-2.185	-79.876	624.954	9758.387
C135	Caraguay	1	-2.227	-79.887	623.781	9753.798
C136	Metrovía Caja del IESS	1	-2.198	-79.885	623.969	9757.028
C137	Matriz	7	-2.191	-79.880	624.557	9757.744
C138	Claro California 1	1	-2.095	-79.949	616.897	9768.386
C139	Claro California 2	1	-2.101	-79.937	618.237	9767.780
C140	California	5	-2.100	-79.936	618.287	9767.793
C141	Matriz Ecuatel	1	-2.193	-79.882	624.374	9757.559
C142	Maternidad Antonio Sotomayor	1	-2.198	-79.889	623.495	9757.053
C143	Sumédica Pichincha	1	-2.194	-79.881	624.391	9757.441
C144	Portete	3	-2.199	-79.927	619.356	9756.906
C145	Secomático La 11	1	-2.203	-79.911	621.072	9756.421
C146	Ag. Nueva Portete	2	-2.202	-79.914	620.735	9756.559
C147	Farmacia Carmita	1	-2.199	-79.926	619.428	9756.847
C148	Mobil Portete	1	-2.196	-79.935	618.392	9757.190
C149	Autolasa	1	-2.170	-79.879	624.617	9760.056
C150	Hospital Alejandro Mann	1	-2.175	-79.883	624.182	9759.568
C151	Colonial	1	-2.188	-79.879	624.625	9758.157

ID	Descripción	# Cajeros	Latitud	Longitud	Coord. X	Coord. Y
C152	Rocafuerte	2	-2.188	-79.880	624.554	9758.080
C153	Terminal de Víveres	1	-2.089	-79.944	617.489	9769.040
C154	San Eduardo	2	-2.187	-79.937	618.259	9758.194
C155	Pepsi	1	-2.121	-79.933	618.704	9765.488
C156	Almacenes Adams	1	-2.165	-79.912	620.989	9760.620
C157	Claro Urdesa	1	-2.173	-79.907	621.534	9759.751
C158	Urdesa	2	-2.171	-79.908	621.432	9759.941
C159	Matriz del Banco	NA	-2.191	-79.880	624.557	9757.744

Tabla 14: Demanda Diaria de una Semana de los Cajeros de la Red

ID	# Cajeros	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	1	9955	8095	11660	9955	7820	11585	8695
C2	1	14600	14015	16395	14610	14820	16705	15405
C3	4	56700	58260	65640	60360	59280	66120	65400
C4	2	28410	29290	24400	25650	26080	27000	26610
C5	2	26480	26700	26770	30240	27450	28160	27850
C6	1	13490	13515	15435	14105	14100	15400	14050
C7	2	31270	27670	28700	29280	27630	29300	30930
C8	1	12765	11805	12945	12145	10370	11085	12315
C9	1	11565	11830	12870	13930	11995	12775	13390
C10	2	28160	33030	30220	27270	30190	32660	27060
C11	2	26690	21040	25110	19850	24480	24340	22790
C12	3	38190	36720	36915	47655	41775	34350	48150
C13	3	37380	47160	49980	49245	48840	40035	39480
C14	1	10145	10305	9645	10460	12820	10615	12340
C15	1	10815	15885	11625	11095	16160	13100	17115
C16	1	10205	9460	9635	10425	7975	8900	10030
C17	2	18690	14610	16540	13890	13820	16250	14000
C18	1	14380	16105	18345	15780	17265	14040	14980
C19	11	176605	191235	207735	187055	183975	173910	200035
C20	1	11055	9810	7280	10500	8465	11770	11080
C21	2	16770	25530	21460	25490	23420	19890	24780
C22	2	29020	27730	31800	35180	29750	28560	37180
C23	1	8335	10385	10925	7540	10695	12015	10935
C24	1	9655	8415	8725	7680	10095	7870	8670
C25	1	5715	8410	7570	6245	6890	7385	9490
C26	1	16695	15320	10125	16700	13115	16395	11595
C27	1	14615	16285	11295	16665	9550	9680	9665
C28	1	9405	13385	12815	8715	11590	7855	10355
C29	1	10705	14490	9460	9380	8860	8600	12505
C30	1	8990	8990	9635	7230	9435	8610	8355

ID	# Cajeros	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C31	1	8800	8185	7045	7780	6625	6880	8870
C32	1	11605	9525	14900	13445	17705	11240	10045
C33	1	17260	8655	9715	17605	10430	10930	12325
C34	1	7250	11400	10445	8450	11820	6775	12025
C35	3	66870	77655	52215	39945	64080	60075	39960
C36	1	15445	14420	16605	17645	15180	13605	11505
C37	3	19860	25740	22740	30270	30240	25695	17820
C38	1	7240	7235	11060	10665	8555	9810	6400
C39	1	11095	9725	10760	7240	10180	9445	8730
C40	3	42480	38625	41820	30630	42105	23400	24045
C41	1	15280	17530	13740	17085	16440	16150	17750
C42	1	8660	7290	5925	8655	6210	8175	9140
C43	1	17010	18765	25470	20935	20130	26395	17690
C44	1	15620	11835	13700	17550	14130	13415	16270
C45	2	31510	18830	20420	23090	26700	21070	24350
C46	1	9965	12540	16655	10020	14065	18115	15250
C47	1	10290	10480	15570	14715	18590	9570	11425
C48	1	12010	8570	11475	7565	10120	10855	7545
C49	1	11335	7890	9305	9635	10505	8545	10130
C50	1	9820	8885	11210	12305	11240	13200	10715
C51	1	6085	9745	10765	11710	9835	11380	9660
C52	1	10680	6060	7520	8080	9345	11045	9585
C53	1	8835	9720	7555	8860	7505	7860	9690
C54	3	82965	61470	52515	81195	77835	59760	60225
C55	1	16155	26585	15290	27535	27330	25950	20160
C56	1	12515	9735	11760	13085	11970	10290	13180
C57	1	12500	11645	12465	11090	13315	11740	9495
C58	1	6835	9955	9420	9675	8585	5830	7440
C59	1	9115	8025	8555	9630	10695	7080	10400
C60	1	7595	9330	6675	9635	6355	11010	10430
C61	1	10575	11550	13500	11460	10050	10415	14610
C62	5	123700	94675	110475	130250	89000	128625	112425
C63	1	14715	13585	12995	17185	17845	16895	9710
C64	1	10115	8330	9730	8630	8600	9290	8455
C65	2	14920	17300	15750	20000	12860	21790	13300
C66	1	8410	9880	10340	10345	8485	8090	11055
C67	1	10065	9100	8140	8440	6785	8380	7810
C68	1	8590	7890	8045	8510	8905	5620	8010
C69	7	167090	167895	178885	126840	132615	160160	143500
C70	1	5700	7615	7550	6385	8665	6015	6185

ID	# Cajeros	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C71	1	6860	5195	8965	4570	8935	3920	5675
C72	1	4520	8625	8110	8910	6655	8740	8805
C73	2	17130	7680	12540	7620	9710	11650	8330
C74	1	7155	6485	9640	7485	8845	7795	8230
C75	1	8015	8185	12630	12730	9055	12235	7975
C76	1	9270	7590	3755	5095	6775	5555	9165
C77	2	11490	15090	14060	16400	14720	13790	13890
C78	1	5445	5990	8850	3935	3890	5880	6735
C79	1	17745	12415	12335	15165	10780	10415	11920
C80	1	12260	14105	11130	10925	11090	12050	15585
C81	1	10140	14930	15805	11770	18355	11220	17405
C82	1	8645	10065	9440	5930	6165	10170	5650
C83	2	30480	20010	28730	20680	30010	19680	19530
C84	1	8090	8240	9745	8105	5765	6100	8660
C85	1	10890	11495	8080	11670	5990	8815	9215
C86	2	18670	25950	27000	22480	26740	21550	27770
C87	1	10670	11320	9430	11530	9460	11965	10960
C88	1	10130	9975	7590	7645	8945	7990	7750
C89	1	15825	16515	8400	7580	8435	6810	16300
C90	4	50020	25020	54640	62120	57040	25080	57060
C91	4	63060	74780	80960	109060	91780	91440	55160
C92	3	25590	49980	40125	29910	43755	40770	51795
C93	1	13940	13575	13725	13140	12305	15540	12265
C94	1	7465	8740	8870	3910	7970	5395	6535
C95	1	7255	6200	6190	4945	6405	4970	4555
C96	2	12580	20030	19640	11870	13400	19120	12290
C97	1	8170	4675	4570	5395	4180	6235	4425
C98	1	7300	4105	4260	3740	3850	5340	7120
C99	1	10055	7585	14200	13760	17240	12600	17975
C100	1	12620	13645	13640	10540	11690	11345	15575
C101	1	10360	7580	8205	8360	11655	7550	8925
C102	1	9105	9960	10180	9330	9375	8885	8125
C103	1	9125	8475	8715	7250	6545	7565	7690
C104	1	9920	8450	7495	9280	7180	9610	8715
C105	1	7135	9330	7190	5955	6255	9070	6555
C106	1	9210	6235	10790	6215	6400	9110	5665
C107	1	7925	10950	9785	8730	7610	8950	10410
C108	1	9955	11350	11155	11375	8330	11965	8900
C109	1	13855	10135	6580	9495	9850	5600	11780
C110	1	8690	7715	8270	7915	9210	8830	9230

ID	# Cajeros	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C111	1	9185	10405	11675	9545	7705	12210	10025
C112	1	10015	8425	9610	8415	8370	9175	7565
C113	1	10925	7160	10605	11510	9470	11530	9475
C114	2	8210	10300	9870	10180	8590	9130	9840
C115	1	8900	4945	8285	6280	6200	6670	4195
C116	1	8225	6490	5880	4515	7830	6870	5350
C117	1	10310	12300	11695	15480	14220	13025	10500
C118	1	15980	15550	15250	13735	17285	15530	12670
C119	1	7290	9115	8815	6250	7530	8865	8810
C120	1	11590	11735	13740	8215	8640	13345	13270
C121	1	8705	3910	3885	8030	5955	7565	5785
C122	1	11510	10845	9800	10185	10735	9440	10000
C123	1	6410	5000	5670	6530	6105	5000	4160
C124	1	4440	2060	4065	2110	2415	4450	3160
C125	1	13855	14810	14405	15340	17630	12200	13340
C126	1	7805	8645	8755	8410	6530	6185	7860
C127	1	13895	13040	13890	12530	13825	11740	12465
C128	1	14400	14865	13435	14085	12180	12520	15150
C129	1	4780	7435	5765	5865	5035	3905	5485
C130	1	11850	9865	11925	9425	11325	11950	11700
C131	1	14870	15340	15810	13830	13450	12935	12875
C132	3	63405	46200	55335	47565	55875	44265	50625
C133	1	15100	13945	13150	13210	12620	12660	13625
C134	1	14215	17125	18815	17825	19705	20285	17795
C135	1	10390	9825	10420	10355	10950	8100	9265
C136	1	14810	17695	18520	13910	17990	14160	15150
C137	7	121310	143500	181930	163765	163520	162890	120190
C138	1	10105	15465	10175	12775	15335	14230	15085
C139	1	13025	11915	13380	10145	15615	9330	12075
C140	5	73450	57850	49075	73425	48375	71700	65750
C141	1	12985	11865	10780	13685	11230	9635	11260
C142	1	12275	12990	10290	9990	10755	10045	10540
C143	1	10080	12530	11940	9930	8380	12450	9770
C144	3	19920	19605	24060	11310	13140	14625	17670
C145	1	4775	5365	3895	4065	5145	5430	4345
C146	2	10570	10210	9260	7510	10980	8990	8790
C147	1	4420	4240	5215	5210	5205	5495	4055
C148	1	4155	6365	4440	5480	7430	4945	5215
C149	1	9970	9305	7570	11095	10120	9290	8365
C150	1	7805	10725	7730	11095	8525	7605	10975

ID	# Cajeros	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C151	1	14460	14430	14935	13945	15145	15375	14770
C152	2	29150	29620	26830	29410	31030	26820	27630
C153	1	11020	12055	14990	7665	8285	15370	13840
C154	2	12720	8690	10620	7920	9490	9520	8190
C155	1	8780	9125	7000	6800	6065	8930	8495
C156	1	11195	10700	11955	8070	10150	10575	9350
C157	1	8095	11800	9750	11690	7605	8785	8720
C158	2	33690	28980	32080	37270	35110	29650	34320
C159	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

Anexo 6: Resultados para el Caso Real

En la Tabla 15 y en la Tabla 16 se muestran las políticas de envío y de inventario diseñadas por el algoritmo desarrollado en la presente investigación para el caso real, mientras que en la Tabla 17 se muestra la hoja de ruta arrojada por el algoritmo que será entregada al conductor del camión blindado, todo esto considerando un horizonte de planificación de 7 días.

Tabla 15: Política de Envío de Efectivo a los Cajeros del Caso Real

Cajero	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	29710	0	0	17775	0	11585	8695
C2	45010	0	0	29430	0	16705	15405
C3	180600	0	0	60360	59280	66120	65400
C4	82100	0	0	51730	0	27000	26610
C5	53180	0	26770	30240	55610	0	27850
C6	86045	0	0	0	0	0	14050
C7	87640	0	0	86210	0	0	30930
C8	24570	0	46545	0	0	0	12315
C9	11565	76790	0	0	0	0	0
C10	91410	0	0	57460	0	59720	0
C11	47730	0	44960	0	48820	0	22790
C12	38190	36720	84570	0	124275	0	0
C13	134520	0	0	138120	0	0	39480
C14	63990	0	0	0	0	0	12340
C15	26700	0	51980	0	0	0	17115
C16	10205	29520	0	0	7975	8900	10030
C17	63730	0	0	0	30070	0	14000
C18	14380	96515	0	0	0	0	0
C19	176605	586025	0	0	183975	173910	200035
C20	38645	0	0	0	20235	0	11080
C21	157340	0	0	0	0	0	0
C22	29020	124460	0	0	0	65740	0
C23	47880	0	0	0	0	12015	10935
C24	26795	0	0	7680	26635	0	0
C25	27940	0	0	0	14275	0	9490
C26	32015	0	67930	0	0	0	0
C27	58860	0	0	0	9550	9680	9665
C28	35605	0	0	20305	0	18210	0
C29	52895	0	0	0	0	8600	12505
C30	34845	0	0	0	9435	8610	8355
C31	8800	8185	37200	0	0	0	0
C32	11605	9525	14900	52435	0	0	0
C33	25915	0	9715	51290	0	0	0

Cajero	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C34	56140	0	0	0	0	0	12025
C35	236685	0	0	0	64080	100035	0
C36	46470	0	0	17645	40290	0	0
C37	128850	0	0	0	0	25695	17820
C38	60965	0	0	0	0	0	0
C39	31580	0	0	26865	0	0	8730
C40	195660	0	0	0	0	23400	24045
C41	32810	0	30825	0	32590	0	17750
C42	30530	0	0	0	23525	0	0
C43	61245	0	0	41065	0	44085	0
C44	72835	0	0	0	0	29685	0
C45	70760	0	0	95210	0	0	0
C46	39160	0	0	24085	0	18115	15250
C47	10290	59355	0	0	0	20995	0
C48	12010	27610	0	0	20975	0	7545
C49	57215	0	0	0	0	0	10130
C50	29915	0	0	36745	0	0	10715
C51	26595	0	0	21545	0	11380	9660
C52	16740	0	35990	0	0	0	9585
C53	18555	0	31780	0	0	0	9690
C54	144435	0	133710	0	77835	119985	0
C55	42740	0	15290	54865	0	25950	20160
C56	22250	0	11760	13085	22260	0	13180
C57	24145	0	23555	0	25055	0	9495
C58	35885	0	0	0	21855	0	0
C59	17140	0	46360	0	0	0	0
C60	61030	0	0	0	0	0	0
C61	10575	25050	0	46535	0	0	0
C62	328850	0	0	219250	0	128625	112425
C63	93220	0	0	0	0	0	9710
C64	28175	0	0	26520	0	0	8455
C65	80830	0	0	0	0	21790	13300
C66	47460	0	0	0	0	19145	0
C67	50910	0	0	0	0	0	7810
C68	33035	0	0	0	22535	0	0
C69	334985	0	305725	0	292775	0	143500
C70	5700	30215	0	0	0	6015	6185
C71	44120	0	0	0	0	0	0
C72	13145	0	32415	0	0	0	8805
C73	66330	0	0	0	0	0	8330

Cajero	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C74	23280	0	0	32355	0	0	0
C75	41560	0	0	0	29265	0	0
C76	9270	16440	0	0	21495	0	0
C77	26580	0	30460	0	28510	0	13890
C78	11435	0	16675	0	0	12615	0
C79	17745	24750	0	25945	0	10415	11920
C80	26365	0	33145	0	0	12050	15585
C81	40875	0	0	11770	18355	11220	17405
C82	40245	0	0	0	0	10170	5650
C83	50490	0	49410	0	30010	19680	19530
C84	34180	0	0	0	11865	0	8660
C85	56940	0	0	0	0	0	9215
C86	94100	0	0	0	76060	0	0
C87	21990	0	30420	0	0	22925	0
C88	10130	9975	15235	0	24685	0	0
C89	79865	0	0	0	0	0	0
C90	191800	0	0	0	82120	0	57060
C91	137840	0	281800	0	0	146600	0
C92	145605	0	0	0	43755	92565	0
C93	41240	0	0	53250	0	0	0
C94	7465	21520	0	0	7970	11930	0
C95	30995	0	0	0	0	4970	4555
C96	52250	0	0	44390	0	0	12290
C97	12845	0	9965	0	4180	6235	4425
C98	15665	0	0	20050	0	0	0
C99	62840	0	0	0	0	30575	0
C100	39905	0	0	22230	0	11345	15575
C101	10360	7580	8205	36490	0	0	0
C102	47950	0	0	0	0	17010	0
C103	26315	0	0	29050	0	0	0
C104	9920	15945	0	9280	25505	0	0
C105	51490	0	0	0	0	0	0
C106	47960	0	0	0	0	0	5665
C107	37390	0	0	0	16560	0	10410
C108	73030	0	0	0	0	0	0
C109	67295	0	0	0	0	0	0
C110	16405	0	8270	17125	0	18060	0
C111	70750	0	0	0	0	0	0
C112	10015	18035	0	8415	8370	9175	7565
C113	70675	0	0	0	0	0	0

Cajero	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C114	28380	0	0	10180	8590	9130	9840
C115	13845	0	31630	0	0	0	0
C116	32940	0	0	0	0	6870	5350
C117	34305	0	0	15480	27245	0	10500
C118	46780	0	0	59220	0	0	0
C119	56675	0	0	0	0	0	0
C120	45280	0	0	0	8640	26615	0
C121	24530	0	0	0	19305	0	0
C122	42340	0	0	0	10735	19440	0
C123	29715	0	0	0	0	5000	4160
C124	15090	0	0	0	0	4450	3160
C125	13855	44555	0	0	43170	0	0
C126	33615	0	0	0	12715	0	7860
C127	53355	0	0	0	38030	0	0
C128	56785	0	0	0	12180	12520	15150
C129	17980	0	0	20290	0	0	0
C130	21715	0	44625	0	0	0	11700
C131	30210	0	29640	0	13450	12935	12875
C132	164940	0	0	147705	0	0	50625
C133	68025	0	0	0	0	26285	0
C134	67980	0	0	0	19705	20285	17795
C135	30635	0	0	10355	28315	0	0
C136	32505	0	18520	31900	0	29310	0
C137	264810	0	509215	0	0	162890	120190
C138	25570	0	22950	0	15335	14230	15085
C139	13025	11915	48470	0	0	0	12075
C140	302175	0	0	0	0	137450	0
C141	60545	0	0	0	0	20895	0
C142	35555	0	0	41330	0	0	0
C143	10080	55230	0	0	0	0	9770
C144	120330	0	0	0	0	0	0
C145	28675	0	0	0	0	0	4345
C146	30040	0	0	27480	0	0	8790
C147	13875	0	0	15910	0	0	4055
C148	27870	0	0	0	0	10160	0
C149	19275	0	46440	0	0	0	0
C150	18530	0	34955	0	0	0	10975
C151	88290	0	0	0	0	0	14770
C152	29150	56450	0	29410	57850	0	27630
C153	11020	58365	0	0	0	0	13840

Cajero	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C154	67150	0	0	0	0	0	0
C155	46700	0	0	0	0	0	8495
C156	21895	0	20025	0	10150	10575	9350
C157	48940	0	0	0	0	17505	0
C158	132020	0	0	0	99080	0	0

Tabla 16: Nivel de Inventario guardado en los Cajeros del Caso Real al Final del Día

Cajero	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C1	0	19755	11660	0	7820	0	0	0
C2	0	30410	16395	0	14820	0	0	0
C3	0	123900	65640	0	0	0	0	0
C4	0	53690	24400	0	26080	0	0	0
C5	0	26700	0	0	0	28160	0	0
C6	0	72555	59040	43605	29500	15400	0	0
C7	0	56370	28700	0	56930	29300	0	0
C8	0	11805	0	33600	21455	11085	0	0
C9	0	0	64960	52090	38160	26165	13390	0
C10	0	63250	30220	0	30190	0	27060	0
C11	0	21040	0	19850	0	24340	0	0
C12	0	0	0	47655	0	82500	48150	0
C13	0	97140	49980	0	88875	40035	0	0
C14	0	53845	43540	33895	23435	10615	0	0
C15	0	15885	0	40355	29260	13100	0	0
C16	0	0	20060	10425	0	0	0	0
C17	0	45040	30430	13890	0	16250	0	0
C18	0	0	80410	62065	46285	29020	14980	0
C19	0	0	394790	187055	0	0	0	0
C20	0	27590	17780	10500	0	11770	0	0
C21	0	140570	115040	93580	68090	44670	24780	0
C22	0	0	96730	64930	29750	0	37180	0
C23	0	39545	29160	18235	10695	0	0	0
C24	0	17140	8725	0	0	16540	8670	0
C25	0	22225	13815	6245	0	7385	0	0
C26	0	15320	0	57805	41105	27990	11595	0
C27	0	44245	27960	16665	0	0	0	0
C28	0	26200	12815	0	11590	0	10355	0
C29	0	42190	27700	18240	8860	0	0	0
C30	0	25855	16865	7230	0	0	0	0
C31	0	0	0	30155	22375	15750	8870	0
C32	0	0	0	0	38990	21285	10045	0
C33	0	8655	0	0	33685	23255	12325	0

Cajero	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C34	0	48890	37490	27045	18595	6775	0	0
C35	0	169815	92160	39945	0	0	39960	0
C36	0	31025	16605	0	0	25110	11505	0
C37	0	108990	83250	60510	30240	0	0	0
C38	0	53725	46490	35430	24765	16210	6400	0
C39	0	20485	10760	0	19625	9445	0	0
C40	0	153180	114555	72735	42105	0	0	0
C41	0	17530	0	17085	0	16150	0	0
C42	0	21870	14580	8655	0	17315	9140	0
C43	0	44235	25470	0	20130	0	17690	0
C44	0	57215	45380	31680	14130	0	16270	0
C45	0	39250	20420	0	72120	45420	24350	0
C46	0	29195	16655	0	14065	0	0	0
C47	0	0	48875	33305	18590	0	11425	0
C48	0	0	19040	7565	0	10855	0	0
C49	0	45880	37990	28685	19050	8545	0	0
C50	0	20095	11210	0	24440	13200	0	0
C51	0	20510	10765	0	9835	0	0	0
C52	0	6060	0	28470	20390	11045	0	0
C53	0	9720	0	24225	15365	7860	0	0
C54	0	61470	0	81195	0	0	60225	0
C55	0	26585	0	0	27330	0	0	0
C56	0	9735	0	0	0	10290	0	0
C57	0	11645	0	11090	0	11740	0	0
C58	0	29050	19095	9675	0	13270	7440	0
C59	0	8025	0	37805	28175	17480	10400	0
C60	0	53435	44105	37430	27795	21440	10430	0
C61	0	0	13500	0	35075	25025	14610	0
C62	0	205150	110475	0	89000	0	0	0
C63	0	78505	64920	51925	34740	16895	0	0
C64	0	18060	9730	0	17890	9290	0	0
C65	0	65910	48610	32860	12860	0	0	0
C66	0	39050	29170	18830	8485	0	11055	0
C67	0	40845	31745	23605	15165	8380	0	0
C68	0	24445	16555	8510	0	13630	8010	0
C69	0	167895	0	126840	0	160160	0	0
C70	0	0	22600	15050	8665	0	0	0
C71	0	37260	32065	23100	18530	9595	5675	0
C72	0	8625	0	24305	15395	8740	0	0
C73	0	49200	41520	28980	21360	11650	0	0

Cajero	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C74	0	16125	9640	0	24870	16025	8230	0
C75	0	33545	25360	12730	0	20210	7975	0
C76	0	0	8850	5095	0	14720	9165	0
C77	0	15090	0	16400	0	13790	0	0
C78	0	5990	0	7825	3890	0	6735	0
C79	0	0	12335	0	10780	0	0	0
C80	0	14105	0	22015	11090	0	0	0
C81	0	30735	15805	0	0	0	0	0
C82	0	31600	21535	12095	6165	0	0	0
C83	0	20010	0	20680	0	0	0	0
C84	0	26090	17850	8105	0	6100	0	0
C85	0	46050	34555	26475	14805	8815	0	0
C86	0	75430	49480	22480	0	49320	27770	0
C87	0	11320	0	20990	9460	0	10960	0
C88	0	0	0	7645	0	15740	7750	0
C89	0	64040	47525	39125	31545	23110	16300	0
C90	0	141780	116760	62120	0	25080	0	0
C91	0	74780	0	200840	91780	0	55160	0
C92	0	120015	70035	29910	0	0	51795	0
C93	0	27300	13725	0	40110	27805	12265	0
C94	0	0	12780	3910	0	0	6535	0
C95	0	23740	17540	11350	6405	0	0	0
C96	0	39670	19640	0	32520	19120	0	0
C97	0	4675	0	5395	0	0	0	0
C98	0	8365	4260	0	16310	12460	7120	0
C99	0	52785	45200	31000	17240	0	17975	0
C100	0	27285	13640	0	11690	0	0	0
C101	0	0	0	0	28130	16475	8925	0
C102	0	38845	28885	18705	9375	0	8125	0
C103	0	17190	8715	0	21800	15255	7690	0
C104	0	0	7495	0	0	18325	8715	0
C105	0	44355	35025	27835	21880	15625	6555	0
C106	0	38750	32515	21725	15510	9110	0	0
C107	0	29465	18515	8730	0	8950	0	0
C108	0	63075	51725	40570	29195	20865	8900	0
C109	0	53440	43305	36725	27230	17380	11780	0
C110	0	7715	0	0	9210	0	9230	0
C111	0	61565	51160	39485	29940	22235	10025	0
C112	0	0	9610	0	0	0	0	0
C113	0	59750	52590	41985	30475	21005	9475	0

Cajero	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C114	0	20170	9870	0	0	0	0	0
C115	0	4945	0	23345	17065	10865	4195	0
C116	0	24715	18225	12345	7830	0	0	0
C117	0	23995	11695	0	0	13025	0	0
C118	0	30800	15250	0	45485	28200	12670	0
C119	0	49385	40270	31455	25205	17675	8810	0
C120	0	33690	21955	8215	0	0	13270	0
C121	0	15825	11915	8030	0	13350	5785	0
C122	0	30830	19985	10185	0	0	10000	0
C123	0	23305	18305	12635	6105	0	0	0
C124	0	10650	8590	4525	2415	0	0	0
C125	0	0	29745	15340	0	25540	13340	0
C126	0	25810	17165	8410	0	6185	0	0
C127	0	39460	26420	12530	0	24205	12465	0
C128	0	42385	27520	14085	0	0	0	0
C129	0	13200	5765	0	14425	9390	5485	0
C130	0	9865	0	32700	23275	11950	0	0
C131	0	15340	0	13830	0	0	0	0
C132	0	101535	55335	0	100140	44265	0	0
C133	0	52925	38980	25830	12620	0	13625	0
C134	0	53765	36640	17825	0	0	0	0
C135	0	20245	10420	0	0	17365	9265	0
C136	0	17695	0	0	17990	0	15150	0
C137	0	143500	0	327285	163520	0	0	0
C138	0	15465	0	12775	0	0	0	0
C139	0	0	0	35090	24945	9330	0	0
C140	0	228725	170875	121800	48375	0	65750	0
C141	0	47560	35695	24915	11230	0	11260	0
C142	0	23280	10290	0	31340	20585	10540	0
C143	0	0	42700	30760	20830	12450	0	0
C144	0	100410	80805	56745	45435	32295	17670	0
C145	0	23900	18535	14640	10575	5430	0	0
C146	0	19470	9260	0	19970	8990	0	0
C147	0	9455	5215	0	10700	5495	0	0
C148	0	23715	17350	12910	7430	0	5215	0
C149	0	9305	0	38870	27775	17655	8365	0
C150	0	10725	0	27225	16130	7605	0	0
C151	0	73830	59400	44465	30520	15375	0	0
C152	0	0	26830	0	0	26820	0	0
C153	0	0	46310	31320	23655	15370	0	0

Cajero	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
C154	0	54430	45740	35120	27200	17710	8190	0
C155	0	37920	28795	21795	14995	8930	0	0
C156	0	10700	0	8070	0	0	0	0
C157	0	40845	29045	19295	7605	0	8720	0
C158	0	98330	69350	37270	0	63970	34320	0

Tabla 17: Hoja de Ruta del Caso Real diseñada por el Algoritmo para el Día 4

ID Lugar	#Cajeros	Dirección del Lugar en la Ruta 1
Matriz	0	P. Icaza 105 y Pichincha
C2	1	9 de Octubre 100 y Malecón
C13	3	Aguirre entre Pedro Carbo y Pichincha
C100	1	Chile y 10 de Agosto
C132	3	Malecón y Colón, C.C. Malecón
C136	1	Olmedo y Boyacá
C142	1	Pedro Pablo Gómez y 6 de Marzo
C112	1	Gómez Rendón y Lorenzo de Garaicoa
C103	1	Chile y Letamendi
C104	1	Chile y San Martín Esquina
C101	1	Chile y Azuay
C135	1	Mercado Caraguay (Barrio Cuba)
C50	1	Av. Domingo Comín entre Calle G y la H
C51	1	Av. Domingo Comín y Calle 11
C24	1	Av. 25 de Julio, Hospital del IESS
C1	1	4 de Noviembre y Leonidas Plaza
C146	2	Portete y la 15
C147	1	Portete y la 29
C45	2	Av. Del Bombero Frente a Reice
C43	1	Av. Del Bombero
C46	1	Av. Del Bombero Vía a la Costa Km. 6
C32	1	Av. Carlos Julio Arosemena km. 2,5 Vía a Daule
C110	1	Gómez Rendón 2836 y Guerrero Martínez
C3	4	9 de Octubre 1404 y Machala
C129	1	Machala 912 y 9 de Octubre
C4	2	9 de Octubre 1911 y Los Ríos
C96	2	Cdla. Universitaria Salvador Allende
C33	1	Av. Carlos Luis Plaza Dañín. C.C. Plaza Quil
C56	1	Av. Francisco de Orellana Junto al WTC
C118	1	Kennedy Norte, Av. Francisco de Orellana
C81	1	Av. Rodolfo Baquerizo Nazur y José María Roura
C79	1	Av. Rodolfo Baquerizo Nazur
C62	5	Av. Guillermo Pareja y José Ma. Egas

ID Lugar	#Cajeros	Dirección del Lugar en la Ruta 1
C61	1	Av. Guillermo Pareja y Benjamín Carrión
C55	1	Av. Francisco de Orellana
C114	2	José Luis Tamayo e Isidro
C28	1	Av. Antonio Parra Velasco, Sauces 9, Mz. 516, Villa 1
C36	1	Av. De las Américas e Isidro Ayora
C39	1	Av. De las Américas y Presidente Jaime Roldós
C64	1	Av. Guillermo Pareja, Frente a Mobil Garzota
C93	1	Cdla. Atarazana
C74	1	Av. Pedro Menéndez y Av. Quito
C98	1	Cerro del Carmen, Instalaciones de Ecuavisa
C117	1	Julián Coronel y Escobedo
C152	2	Rocafuerte y Roca
C10	2	9 de Octubre y García Avilés
C7	2	9 de Octubre entre García Avilés y Rumichaca
C5	2	9 de Octubre 426 y Chile
Matriz	0	P. Icaza 105 y Pichincha

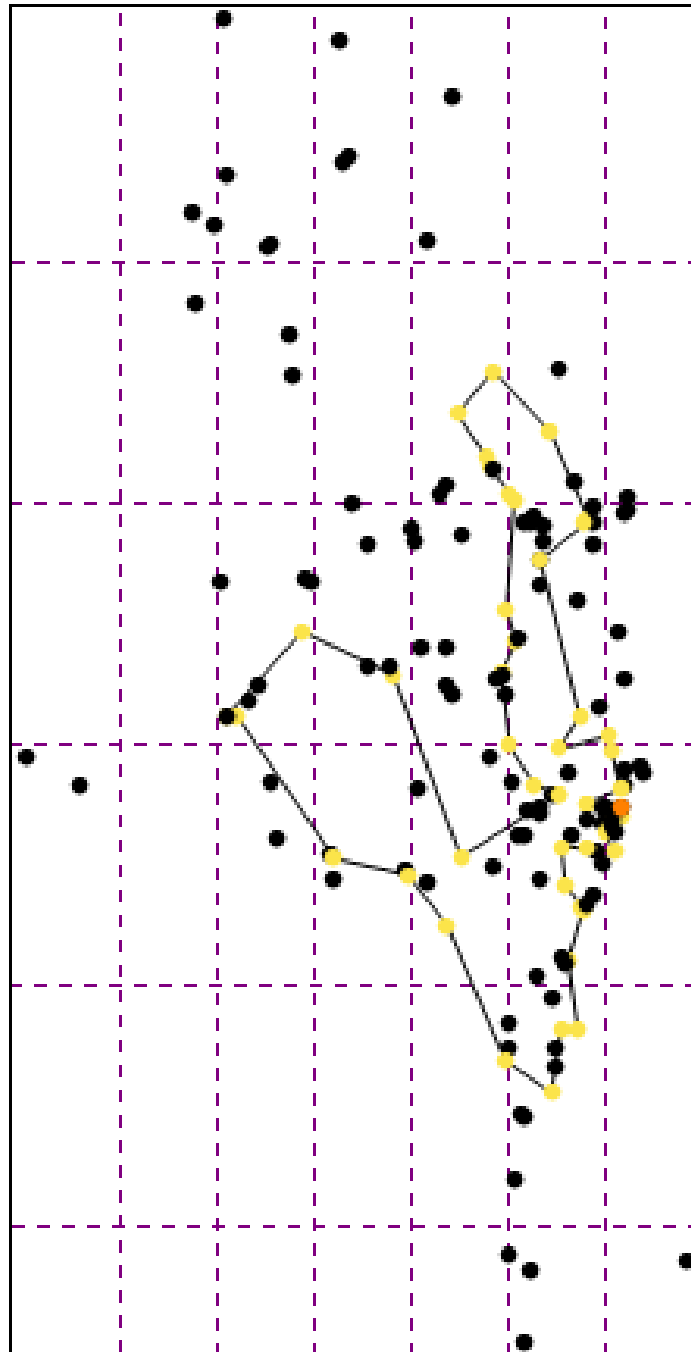


Figura 18: Ruta de Distribución del Caso Real para el Día 4

Anexo 7: Comentarios sobre la Eficiencia del Algoritmo

Dado que el modelo matemático que se resolvió en este trabajo considera que los lados derechos de las restricciones son números difusos, no existe una solución óptima como usualmente se la define en los modelos determinísticos. Lo anterior dificulta establecer el nivel de eficiencia computacional del algoritmo en dicho aspecto, además que por la topología del problema estudiado, no se encuentran disponibles instancias del modelo cuya solución óptima en el entorno determinístico sea conocida.

Para tener una aproximación de la eficiencia del algoritmo desarrollado en este trabajo, se diseñaron 20 instancias aleatorias que tienen las siguientes características:

- **Naturaleza de la Demanda:** Determinística y dinámica (cambia con el tiempo).
- **Función de Distancia:** Métrica de Manhattan.
- **Número de Cajeros en la Red:** entre 5 y 8 cajeros con sus coordenadas cartesianas.
- **Capacidad del Cajero:** 350000 unidades monetarias.
- **Capacidad del Vehículo:** 3 veces la capacidad de un cajero.
- **Horizonte de Planificación:** 7 días.
- **Tasa de Inventario:** 0.10 anual.

Las instancias se implementaron en el modelizador GAMS y resolvieron utilizando el solver CPLEX de IBM, cuya versión actual es 12.3.0.0. Los parámetros del solver fueron:

- **Tiempo Máximo de Ejecución:** 3600 segundos para las instancias de 5 a 7 cajeros y 5400 segundos para las de 8 cajeros.
- **Número Máximo de Iteraciones:** Las permitidas por el nivel de precisión de la máquina.
- **Consumo de Memoria:** Se almacenó el árbol en el disco duro de la computadora.

Las mismas instancias fueron resueltas por el algoritmo propuesto considerando los siguientes parámetros para el mismo:

- **Tiempo Máximo de Ejecución:** 3600 segundos para todas las instancias.
- **Número Máximo de Iteraciones:** 2000
- **Tamaño de la Harmony Memory:** 100
- **HMCR:** 0.90
- **PARmin:** 0.01
- **PARmax:** 0.99

En ambos casos, los programas se ejecutaron en una laptop HP Pavilion g4-1085la con 4gb de RAM y un procesador Intel Core i5 de 2.3 GHz. Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes tablas, donde el tiempo está dado en segundos.

Tabla 18: Resultados para las Instancias de 5 Cajeros

Nombre Instancia	GAMS/CPLEX				Metaheurística HS				GAP
	TOTAL	RUTEO	INV	TIEMPO	TOTAL	RUTEO	INV	TIEMPO	
IRP01N05	2519.14	1894	625.14	318.83	2519.14	1894	625.14	3.49	0.00%
IRP02N05	2209.75	1626	583.75	3493.39	2234.79	1824	410.79	3.58	1.13%
IRP03N05	1990.06	1372	618.06	293.37	1990.06	1372	618.06	6.06	0.00%
IRP04N05	2180.03	1548	632.03	3600.30	2264.12	1664	600.12	7.89	3.86%
IRP05N05	2017.53	1314	703.53	466.52	2061.16	1384	677.16	8.25	2.16%

Tabla 19: Resultados para las Instancias de 6 Cajeros

Nombre Instancia	GAMS/CPLEX				Metaheurística HS				GAP
	TOTAL	RUTEO	INV	TIEMPO	TOTAL	RUTEO	INV	TIEMPO	
IRP01N06	2800.54	2198	602.54	3600.47	2858.48	2198	660.48	9.09	2.07%
IRP02N06	2402.36	1724	678.36	3600.53	2427.86	1672	755.86	9.39	1.06%
IRP03N06	2509.18	1994	515.18	594.23	2652.04	1898	754.04	14.82	5.69%
IRP04N06	1885.52	1438	447.52	3600.28	1939.07	1422	517.07	12.27	2.84%
IRP05N06	2160.42	1432	728.42	372.62	2160.42	1432	728.42	10.64	0.00%

Tabla 20: Resultados para las Instancias de 7 Cajeros

Nombre Instancia	GAMS/CPLEX				Metaheurística HS				GAP
	TOTAL	RUTEO	INV	TIEMPO	TOTAL	RUTEO	INV	TIEMPO	
IRP01N07	2732.85	2258	474.85	3600.59	2787.63	2184	603.63	13.72	2.00%
IRP02N07	3070.93	2380	690.93	3601.65	3096.15	2404	692.15	15.80	0.82%
IRP03N07	2213.99	1454	759.99	3601.34	2306.48	1834	472.48	15.11	4.18%
IRP04N07	3729.15	2890	839.15	3600.31	3726.14	3106	620.14	16.91	-0.08%
IRP05N07	3235.58	2530	705.58	3600.40	3332.97	2578	754.97	22.41	3.01%

Tabla 21: Resultados para las Instancias de 8 Cajeros

Nombre Instancia	GAMS/CPLEX				Metaheurística HS				GAP
	TOTAL	RUTEO	INV	TIEMPO	TOTAL	RUTEO	INV	TIEMPO	
IRP01N08	2929.13	2192	737.13	5400.72	3122.65	2298	824.65	25.97	6.61%
IRP02N08	2937.71	2258	679.71	5400.80	2976.24	1974	1002.24	37.19	1.31%
IRP03N08	3053.79	2510	543.79	5401.59	3330.72	2842	488.72	32.99	9.07%
IRP04N08	3319.10	2548	771.10	5401.92	3463.01	2484	979.01	32.76	4.34%
IRP05N08	3419.35	2214	1205.35	5400.83	3459.77	2414	1045.77	25.50	1.18%

Como se puede apreciar en las tablas anteriores, el algoritmo propuesto desarrolla políticas de reabastecimiento con costos muy cercanos a las desarrolladas por el solver y en algunos casos el costo de inventario es menor en la propuesta del algoritmo que en la propuesta del solver, lo cual puede ser interesante de considerar. Adicionalmente, el algoritmo desarrollado le gana en tiempo de cómputo al solver de manera decisiva pues mientras que el solver requirió en la mayoría de los casos el tiempo máximo permitido, el algoritmo se demoró escasos segundos.

El tiempo de cómputo es importante porque permite facilitar el análisis de escenarios propuestos por el decisor, lo cual no es factible si se desea usar el solver, debido a que requería demasiado tiempo obtener dichos resultados.

Para finalizar, cabe recalcar que el tiempo máximo de cómputo que se estableció en el solver fue con el fin de obtener la solución a estas instancias rápidamente, en consecuencia, no en todos los casos es la solución óptima de las misma, por lo que es normal observar, en algún caso particular, que la solución arrojada por el algoritmo sea menor que la solución arrojada por el solver.