UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓNDE OPERACIONES

“SISTEMAS DIFUSOS”
UNA HERRAMIENTA PARA LA ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ACT. MARÍA CRISTINA DÍAZ GONZÁLEZ

TUTOR PRINCIPAL
DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. JUNIO 2013

JURADO ASIGNADO

Presidente:	Dr. José Jesús Acosta Flores
Secretario:	Dr. Javier Suárez Rocha
Vocal:	Dra. Idalia Flores De La Mota
1er. Suplente:	Dr. Ricardo Aceves García
2do. Suplente:	M.I. Sergio Macuil Robles

Lugar donde se realizó la tesis:

México, Distrito Federal

TUTOR DE TESIS:

Dra. Idalia Flores De La Mota

Índice general

Agradecimientos

A mi amigo, mi compañero, mi amor... George, por impulsarme en ese "último esfuerzo".. TE AMO.

A mi familia por estar siempre a mi lado, por su apoyo incondicional y por el infinito amor que me han dado.

A Chio, Alex, Angie, Salgado, Canito, Ale, Afro, Chucho, Jaz, Ixchel, mil gracias, este esfuerzo fue divertido gracias a ustedes...

A Marypaz porque a pesar de la tristeza, tuviste la paciencia para seguir ayudándonos, gracias por tus consejos y tu tiempo...

A la paciencia, el apoyo y la guia del Dr. Javier Suárez, y la Dra. Idalia Flores De La Mota.

0.1. Resumen

Uno de los factores de la problemática de gestión y control de inventarios se da a partir de las decisiones que toman los individuos responsables de la administración de los mismos. En este documento se presenta una metodología que incluye la programación lineal y las decisiones de los expertos, es decir, considera ideas que no necesariamente son precisas, sino por el contrario tienen niveles de incertidumbre y en consecuencia no se pueden expresar de forma “clásica”.

0.2. Abstract

One of the main problems in management and inventory control occurs from decisions taken by individuals responsible for the administration. This paper presents a methodology that involves linear programming and expert decisions, also considers ideas that are not necessary precise, but rather have uncertainty and therefore cannot be expressed by classical theories.

Capítulo 1

Introducción

El presente documento se deriva de una inquietud por mostrar nuevas técnicas que involucren el desarrollo de nuevas metodologías que consideran ideas que no necesariamente se pueden expresar como un todo o nada, es en este punto cuando podemos tomar en cuenta el *grado de* ...
En el día a día nos enfrentamos con toma de decisiones que involucran estos "grados" de decisión. Por ejemplo alguien puede preguntar si uno quiere crema en el café y la respuesta puede ser afirmativa, negativa o puede ser un tanto vaga. Por vaga o difusa, entenderemos que no ha dicho "si" o "no", la respuesta podría ser "poca" o "mucha", y esta respuesta no es ni una ni otra, sino que se maneja por grado, en este caso de subjetividad.

En particular los inventarios son de gran valor para las empresas y organizaciones dedicadas a la compra o venta, la óptima administración de los mismos trae consigo un sin fin de técnicas que apoyan a la toma de decisiones y que se verán afectadas por la experiencia de los responsables del manejo de los mismos, así como de las estrategias que deben llevar a cabo conforme a la misión y visión de las empresas.

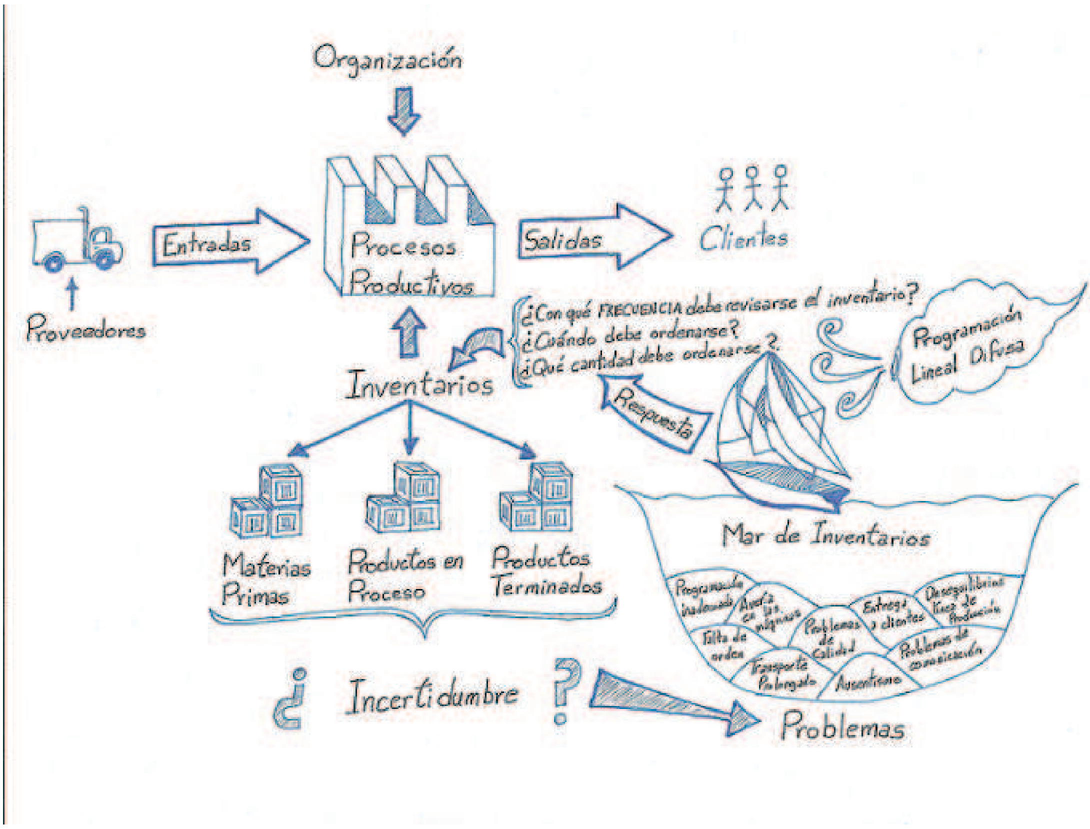

Figura 1.1: Panorama de estudio

1.1. Formulación de la problemática

Muchas ramas de las ciencias económico administrativas, e ingeniería han encontrado en la lógica difusa nuevas formas para resolver problemas que involucran elementos con cierto grado de incertidumbre o subjetividad.
La ingeniería industrial ha visto no sólo en la lógica, sino en otras técnicas heurísticas la oportunidad de encontrar soluciones alternas y óptimas a los problemas cotidianos.

Mostrar otras técnicas que permiten obtener soluciones "óptimas" a problemas como es la toma de decisiones y el pronóstico de inventarios bajo condiciones de incertidumbre involucrando variables que involucran el sentido humano, es decir, que se consideren variables que no necesariamente pueden ser interpretadas por un *si* (1) o un *no* (0), sino que tienen o toman un valor real entre ellos, este tipo de técnicas se conocen como herramientas heurísticas.
La importancia de estas herramientas radica en dejar de ver las cosas en los extremos, y poder tener una gama de opciones sin que esto sea "correcto" o "incorrecto".
A pesar de que hoy en día los algoritmos genéticos, la lógica difusa, redes neuronales, son consideradas como herramientas importantes para la solución de problemas más complejos, en México el desarrollo de este tipo de herramientas ha sido lento.

1.1.1. Problemática

Las diversas metodologías para encontrar la mejor forma de administrar los inventarios tienen la deficiencia de no considerar la opinión de los expertos o de poder definir las variables de una forma más adecuada involucrando los criterios de los expertos.
En el presente trabajo presentamos un modelo de programación lineal aplicado a la teoría de inventarios.

1.1.2. Planteamiento del problema

Uno de los problemas con los que se enfrentan día a día las organizaciones es el óptimo manejo de sus recursos de tal forma que puedan incluir elementos como opiniones de expertos y grados de certidumbre, sin que esto implique el uso de probabilidades.

1.2. Objetivo

Mostrar los modelos de programación lineal difusa como una herramienta para la administraicón de inventarios.

1.2.1. Objetivos específicos

- Proporcionar un panorama general del desarrollo de la lógica difusa.
- Describir las propiedades, operaciones y reglas de la lógica difusa,
- Describir la teoría de inventarios, así como su clasificación
- Incluir las propiedes de la lógica difusa en modelos de programación lineal aplicado a la teoría de inventarios.

1.3. Desarrollo del trabajo

El trabajo se presenta con la siguiente secuencia. En el segundo capítulo abordaremos la forma en cómo surgió la lógica difusa y cómo ha ido creciendo tanto en la parte teoríca como en sus aplicaciones.
El tercer capítulo nos dará las herramientas necesarias para poder abordar el capítulo principal.
El cuarto capítulo mostrará algunos aspectos importantes de los inventarios en las empresas.
Finalmente terminaremos con la programación lineal difusa aplicada a inventarios.

Capítulo 2

Estado del arte

El presente trabajo tiene la intención de aportar otra herramienta para la solución de los problemas de inventarios, utilizando para ello los conjuntos y teoría difusa principalmente[1].

2.1. Historia y aplicaciones de la lógica difusa

Lotfi Asker Zadeh profesor emérito de la Universidad de California, Berkeley, es considerado el fundador de la teoría de los conjuntos difusos o lógica difusa, al publicar en 1965, su artículo "Fuzzy Set" (Zadeh, 1965) [2] en la

[1]El término "fuzzy" se suele traducir indistintamente como borroso o difuso, aunque en ingeniería suele predominar el uso del primero de ellos. No obstante, a lo largo del documento, ambos términos serán utilizados de forma indistinta.0

[2]Zadeh. L.A. 1965. Fuzzy Sets. Information and Control, 8, pp. 338-353.

revista “Information and Control”. La primera intención de los conjuntos difusos era aplicarlos en los sistemas humanísticos o biológicos y en aquellos sistemas donde las técnicas convencionales basadas en ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y similares, no funcionaban tan bien como era de esperar. Desde los inicios de la lógica difusa ha trascurrido un periodo muy corto entre la introducción de la teoría y su implantación a nivel industrial, especialmente en Japón, se puede observar claramente en los electrodomésticos que incorporan algún mecanismo de control basado en la lógica difusa, originando lo que ha dado en llamarse “tecnología fuzzy”.

En 1972, Lotfi A. Zadeh publica el artículo titulado “A rationale for Fuzzy Control”[3] en la revista “Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control”; mostrando aplicaciones en los sistemas de control de la lógica difusa.

Durante la primera década de vida de la lógica difusa los recientes grupos de investigación fueron incorporando las estructuras matemáticas típicas: relaciones, funciones, grafos, grupos, autómatas, gramáticas, lenguajes, algoritmos y programas. Así, Bellman y Zadeh trabajaron en sistemas de toma de decisión en entornos difusos (Bellmany Zadeh, 1970). Gogüen investigó sobre metodologías para la caracterización de estructuras matemáticas difusas

[3]Zadeh. L.A. 1972. A Rationale for Fuzzy Control. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 34. pp.3-4

(Gogüen, 1969)[4]. R.E. Smith y M. Sugeno trabajaron en medidas difusas; J.C. Bezdeck en clustering difuso, C.V. Negoita en la recuperación de información difusa y Hans J. Zimmermann estudió la descripción y optimación de los sistemas difusos, para aplicarse a los problemas de programación lineal difusa.

En 1974, Assilian y Mamdani del Queen Mary College de la Universidad de Londres, establecieron el primer paso para la aplicación industrial del control difuso. Mediante un sistema basado en reglas lingüísticas consiguieron controlar un generador de vapor, ya que mediante técnicas convencionales que no habían sido capaces de mantener bajo control (Mamdani y Assilian, 1975). Posteriormente en 1976, las compañías Blue Circle Cement y SIRA desarrollaron en Dinamarca un controlador para un horno de cemento, el cual incorporaba el conocimiento de operadores experimentales para su funcionamiento (Mamdani, 1993)[5]. De esta forma la lógica borrosa comenzó a adentrarse en los ámbitos industriales.

En 1977 Mamdani y King publicaron un trabajo que describía como emplear la lógica difusa como método de control para sistemas industriales complejos (King y Mamdani, 1977).

[4]Gogüen, J.A. 1969. "The Logic of inexact concepts". Synthese 325-373

[5]Ebrahim H. Mamdani. Twenty years of fuzzy control: experiences gained lessons learned. Second IEEE International Conference of Fuzzy Systems, pp. 339-344, March 1993.

A partir de los años 1980, las empresas japonesas comienzan a destacar en la utilización de la lógica difusa. Fuji Electric, desarrolló una planta de tratamiento de aguas que empleaba un sistema de control difuso, esto les permitió adquirir los conocimientos necesarios para desarrollar el primer controlador difuso de propósito general FRUITAX (Fuzzy Rule Information Processing Tool of Advanced control), lanzado al mercado en 1985, y que estaba constituido básicamente por un procesador de 16 bits junto con un sistema de inferencia difusa basado en FORTRAN. Al año siguiente se produjo otro de los hitos más importantes en la historia de la lógica difusa, nació el primer chip VLSI para la realización de inferencias difusas desarrollado por Togai y Watanabe (Togai y Watanabe, 1986). Los chips VLSI incrementaron en gran medida las posibilidades de elección de sistemas basados en reglas para aplicaciones de tiempo real.

En 1987, Seiji Yasunobu y sus colaboradores de la empresa Hitachi pusieron a punto el sistema de control de trenes subterráneos de la ciudad de Sendai (Yasunobu y Miyamoto, 1985), trabajo que llevó ocho años. El enorme éxito que tuvieron estos proyectos provocó en Japón un gran impulso de las aplicaciones basadas en la lógica difusa, favoreciendo que en 1988 el gobierno japonés pusiera en marcha un estudio sobre el establecimiento de proyectos de lógica difusa entre las Universidades y la industria. Producto de este estudio, se implantaron dos programas de investigación a nivel nacional sobre lógica difusa, uno de ellos liderado por el MITI (Ministry of International Trade and Industry), y el otro por la STA (Science and Technology Agency). El éxito de la lógica difusa en la industria (Gebhardt, 1993; Altrock et al., 1994), también ha alcanzado al mercado de consumo. En 1987, Matsushita Electric Industrial Co. (conocida fuera de Japón como Panasonic), fue la primera empresa en emplear la lógica difusa a un producto de consumo, en un sistema de ducha que controlaba la temperatura del agua. Esta misma compañía lanzó en 1990 una lavadora automática basada en lógica difusa. A partir de entonces, una gran cantidad de compañías japonesas se apresuraron a lanzar productos que utilizaban de una u otra forma la lógica difusa en: hornos, cocinas, refrigeradores, así como sistemas de aire acondicionado, sistemas de tráfico, ahorro energético, de combustible, etc.

Actualmente son muchos los aparatos de consumo que incluyen algún tipo de controlador difuso. Por ejemplo, las cámaras fotográficas, las de video suelen emplear un controlador difuso para realizar el enfoque automático o el ajuste del tiempo de exposición (Yongman et al., 1994; Chen et al., 1995). En las cocinas de las casas también esta presente la lógica difusa, ya que muchos electrodomésticos la emplean en sus sistemas de control para ahorrar energía o agua (Hofbauer et al., 1993), mejorando considerablemente su eficiencia.

La industria automotriz es otro de los sectores de aplicación de la lógica difusa con mucho éxito (Altrock et al., 1992). En sistemas de suspensión activa

(Rao y Prahlad, 1997), en sistemas de frenado (Kim et al., 1996) y en el control electrónico de motores (Vachtsevanos et al., 1993). Con la apremiante necesidad de eliminar la dependencia del petróleo, casi todos los fabricantes tienen abiertas lineas de investigación sobre vehículos híbridos. En este campo tan complejo también está triunfando la lógica difusa como un excelente método de control (Schouten et al., 2002).

Pese a los éxitos del control difuso y pese a estar presente en muchos de los productos tecnológicos que nos rodean, en México, existe un desconocimiento sobre la lógica difusa fuera de este ámbito. Quizás sea debido a la connotación negativa que ha presentado el término difuso, o a la inercia que ha presentado desde su inicio tanto en Europa como en Estados Unidos. El caso es que hasta hace relativamente poco tiempo las empresas no han empezado a publicitar la utilización de la lógica difusa en sus productos, aunque, sí, utilizando la expresión inglesa *fuzzy logic.*

Actualmente la lógica difusa está siendo muy utilizada para el control de aplicaciones y la modelación de problemas muy diversos. Se pueden destacar trabajos para la regulación del nivel del pH en la industria alimentaria (Chung et al., 2010), para el control de sistemas de recirculación de agua en plantas de acuicultura (Gutiérrez-Estrada et al., 2005; Soto-Zarazúa et al., 2011), para el manejo de tanques reactores en procesos industriales (Salehi y Shahrokhi, 2009; Mei et al., 2009; Banu y Uma, 2011), para el control automático de estaciones depuradoras de aguas residuales (Alferes e Irizar, 2010) para el diseño y la gestión óptima de redes hidráulicas a presión (Pulido-Calvo y Gutiérrez-Estrada, 2009; Ghatee y Hashemi, 2009), entre otras.

2.2. Inventarios

¿Por qué son importantes los inventarios? Actualmente los procesos productivos dentro de una organización son cada vez más complejos; asimismo, el entorno regional, nacional e internacional se ha vuelto sumamente incierto, acentuando la necesidad de indagar en otras herramientas para optimizar los procesos.
Desde tiempos inmemoriales, los egipcios y demás pueblos de la antig¨uedad, acostumbraban almacenar grandes cantidades de alimentos para ser utilizados en los tiempos de sequía o de calamidades. Es así como surge o nace de cierta manera el problema de los inventarios, como una forma de hacer frente a los periodos de escasez, de tal forma que les permitiera asegurar, a los pueblos antigüos, la subsistencia de la vida y el desarrollo de sus actividades normales. Esta forma de almacenamiento de todos los bienes y alimentos necesarios para sobrevivir motivó la existencia de los inventarios.

Definición 1 *Del latín* inventarium *'lo que se encuentra', 'lo que está allí',* *de donde proviene la palabra inventario*[6]

Definición 2 *Es el valor de cualquier artículo o recurso usado en una organización.*[7]

Un Sistema de Inventarios es el conjunto de políticas y controles que monitorean los niveles de inventario y determina que niveles deben ser mantenidos, cuando los valores deben ser remplazados, y que tan grandes deben ser las órdenes. Por otra parte, el control de inventarios representa una importante función de la dirección que ha sido muy exitosa tratada a través de métodos cuantitativos. Siendo aplicados en numerosas organizaciones, grandes y pequeñas, con resultados favorables.

Podemos decir que la función de los sistemas de inventarios es el resultado de diversas decisiones interrelacionadas y de políticas dentro de una organización, es por ello que una adecuada administración requiere de la comprensión tanto en su forma como su función dentro de la empresa.

[6]http://www.elcastellano.org/palabra.php?id=2280

[7]CHASE, Richard B.; JACOBS, F. Robert; AQUILANO, Nicholas J. Operations Management for Competitive Advantage. McGraw Hill, 2004, pg. 545.

Capítulo 3

Lógica y Sistemas Difusos

En este apartado se expondrá brevemente los principales conceptos e ideas sobre conjuntos, lógica difusa y sistemas difusos, que posteriormente nos servirán para el planteamiento y solución de nuestra problemática.

3.1. Conjuntos Difusos

La teoría de conjuntos difusos, definida según Zadeh [13], la cual a diferencia de la teoría clásica, considera una función de pertenencia al conjunto que toma valores entre 0 y 1. De esta forma se introduce el concepto de conjunto o subconjunto borroso o difuso asociado a un determinado valor lingüístico, definido por una palabra, adjetivo o etiqueta lingüística A.

Por ejemplo, consideremos un grupo de cuatro individuos y el término *ami-*

gable será la etiqueta del conjunto A.

En la teoría de conjuntos clásica, tendríamos que para cada uno de los individuos, digamos T, U, V y W se les daría un valor de cero o uno en caso que fueran considerados como "amigables". En el caso de los conjuntos borrosos, el término de "amigable", mostraría el grado de esta etiqueta para T, U, V y W, según la perspectiva que alguien más determine sobre ellos.

Individuo	Amigable	Teoría clásica	Teoría difusa
T	*Muy* Amigable	1	1
U	*Medio* amigable	No definido	0.5
V	*Poco* amigable	No definido	0.2
W	*No* amigable	0	0

De tal forma que gráficamente podríamos ver la definición del término amigable para los cuatro individuos como sigue:

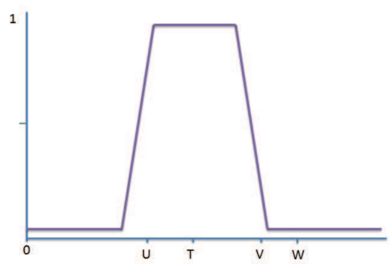

Figura 3.1: Término *amigable*

En términos formales tendríamos que para cada conjunto o subconjunto borroso se define una *función de pertenencia o de membresia* de la siguiente forma: $\mu_A(t)$ que indica el grado en que la variable t es incluida en el concepto representado por la etiqueta A.

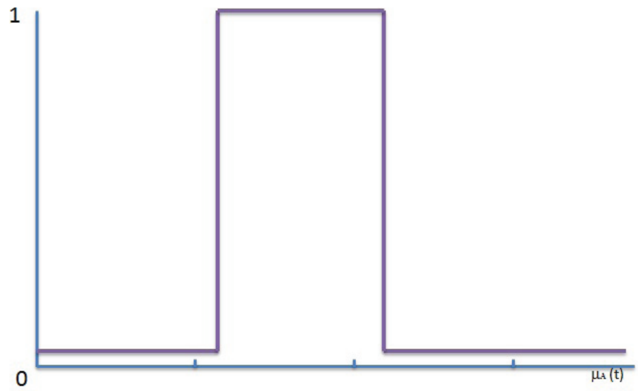

Figura 3.2: Funciones de conjuntos clásicos vs. conjuntos difusos

Los conjuntos difusos, en contraste con los conjuntos clásicos, nos permiten agrupar objetos o sucesos conforme a la magnitud o grado de pertenencia.

Definición 3 *Sea U un conjunto de objetos, por ejemplo, $U = \Re^n$, que se denominará* Universo*.*
Un conjunto difuso *F en U se caracteriza mediante una función de inclusión $\mu_{(F)}$ que toma valores en el rango $[0,1]$. Es decir, $\mu_F : U \rightarrow [0,1]$; donde $\mu_F(u)$ representa el grado de pertenencia de $u \in U$ al conjunto difuso F. [1]*

En el caso de los conjuntos clásicos, la función de pertenencia puede tomar únicamente los valores 0 o 1, sin embargo, para un conjunto difuso, la función puede tomar valores intermedios. A diferencia de la lógica clásica ésta no cumple con el principio de *Tercero excluido*. El no cumplimiento de este principio permite definir las lógicas multivalentes.

A continuación definiremos algunos elementos importantes de los conjuntos difusos. Dado un conjunto difuso F se definen los siguientes términos:

Definición 4 *El* conjunto soporte *es el conjunto clásico de todos los valores de U para los que $\mu_F(u) > 0$. Los* puntos de cruce *son aquellos valores para los que $\mu_F(u) = 0{,}5$.*

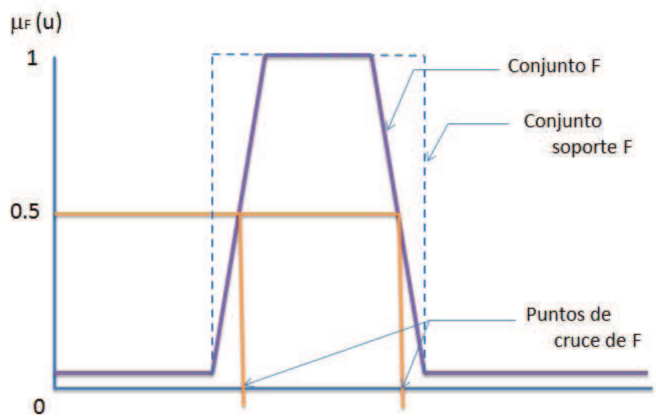

Figura 3.3: Representación gráfica del conjunto soporte

Definición 5 *Diremos tambien que un conjunto difuso es de tipo* singular *si su conjunto soporte es de un solo valor.*

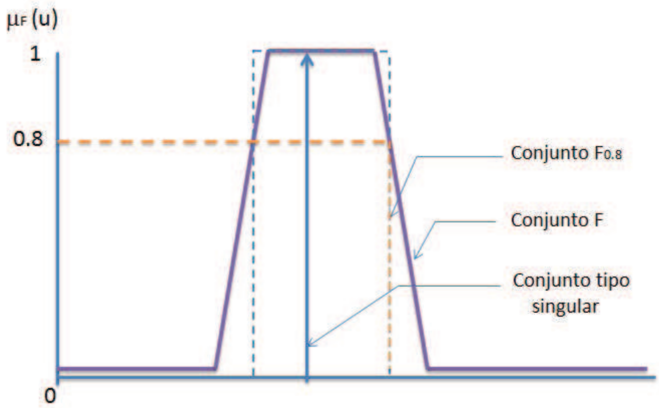

Figura 3.4: Conjuntos difusos y sus elementos

Definición 6 *Definimos la cardinalidad de un conjunto difuso $M(A)$ como:*

$$M(A) = \sum \mu_A(u), \qquad u \in U$$

Definición 7 *Se denomina cortadura-α de un conjunto difuso F, al conjunto clásico de todos los puntos $u \in U$ para los que se cumple $\mu_F(u) > \alpha$ y lo denotamos como F_α.*

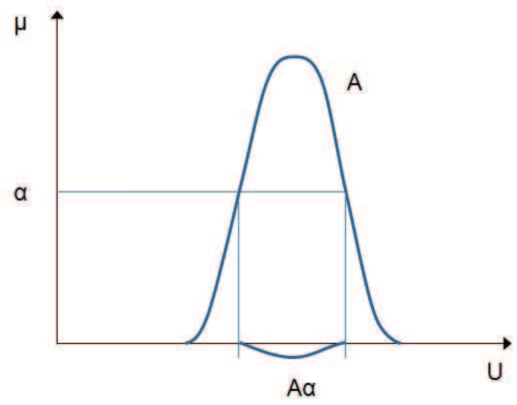

Figura 3.5: Cortadura α

Definición 8 *Se dice que un conjunto borroso está* normalizado *si el máximo de su función de inclusión es 1.*

3.1.1. Propiedades

Algunas de las propiedades de los conjuntos difusos son las siguientes[1]:

- Todo conjunto difuso se puede representar por su cortadura-α, que se puede definir como débil o fuerte.

  La cortadura-α de un conjunto difuso A es un subconjunto A_α del universo U que consiste en los valores que pertenecen al conjunto difuso A con un grado de pertenencia mayor (cortadura débil), o mayor o igual (cortadura fuerte) al valor $\alpha \in [0, 1]$

- Una de las propiedades que tiene poco tiempo de ser introducida es la *"subsethood", Vecindad*, que es una medida que indica hasta que grado el universo U pertenece a sus subconjuntos difusos. De aquí que todo es subjetivo y depende del punto de vista.

3.1.2. Funciones de conjuntos difusos

La *función de inclusión o pertenencia* de un conjunto difuso consiste en un conjunto de pares ordenados $F = \{(u, \mu_F(u)) \mid u \in U\}$ si la variable es discreta, o una función continua si no lo es.

Tipos de funciones

A continuación describiremos las funciones más comunmente utilizadas.

La *función trapezoidal* se define por cuatro puntos a, b, c, d. Esta función es cero para valores menores de a y mayores de d, vale uno entre b y c y toma valores entre $[0, 1]$ entre a y b y entre c y d. Comúnmente se utiliza en sistemas borrosos sencillos dado que permite definir un conjunto difuso con pocos datos y determinar el valor de pertenencia con pocos cálculos.

Definición 9 *Definimos la* función trapezoidal *como sigue:*

$$S(u;a,b,c,d)=\begin{cases} 0 & u<a \\ (\frac{u-a}{b-a}) & a\leq u\leq b \\ 1 & b\leq u\leq c \\ (\frac{d-u}{d-c}) & c\leq u\leq d \\ 0 & u>d \end{cases}$$

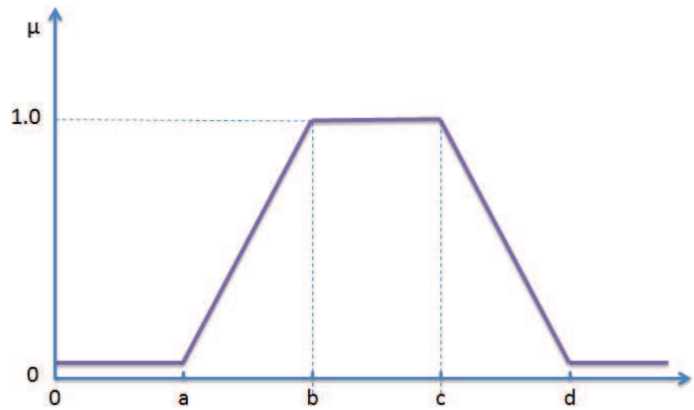

Figura 3.6: Función Trapezoidal

La función singular tiene valor 1 solo para un punto a y 0 para el resto. Comúnmente se utiliza en sistemas difusos simples para definir los conjuntos difusos de las particiones de las variables de salida.

Definición 10 *Definimos la* función singular *o singleton como sigue:*

$$S(u;a)=\begin{cases} 1 & u=a \\ 0 & u\neq a \end{cases}$$

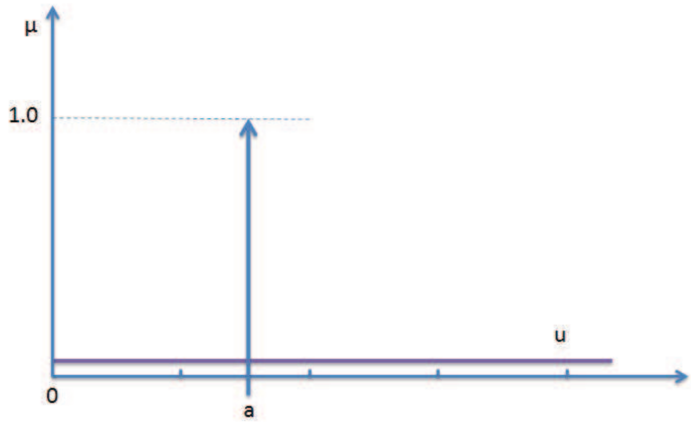

Figura 3.7: Función singular

Definición 11 *Definimos la* función triangular *como sigue:*

$$T(u;a,b,c) = \begin{cases} 0 & u < a \\ (\frac{u-a}{b-a}) & a \leq u \leq b \\ (\frac{c-a}{c-b}) & b \leq u \leq c \\ 0 & u > c \end{cases}$$

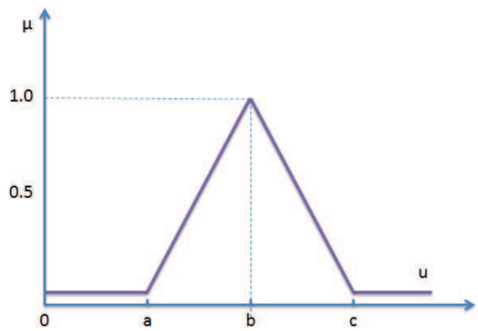

Figura 3.8: Función Triangular

Definición 12 *Definimos la* función de tipo S *como sigue:*

$$S(u;a,b,c) = \begin{cases} 0 & u < a \\ 2(\frac{u-a}{c-a})^2 & a \leq u \leq b \\ 1 - 2(\frac{u-a}{c-a})^2 & b \leq u \leq c \\ 1 & u > c \end{cases}$$

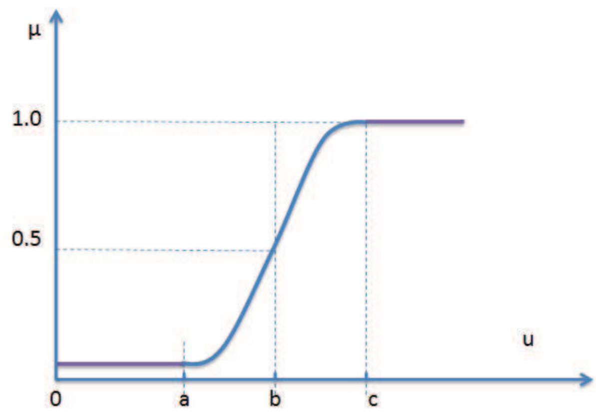

Figura 3.9: Función tipo S

Definición 13 *Finalmente definimos la* función de tipo π *como sigue:*

$$\pi(u;b,c) = \begin{cases} S(u; c-b, c-b/2, c) & u \leq c \\ 1 - S(u; c-b, c-b/2, c) & u \geq c \end{cases}$$

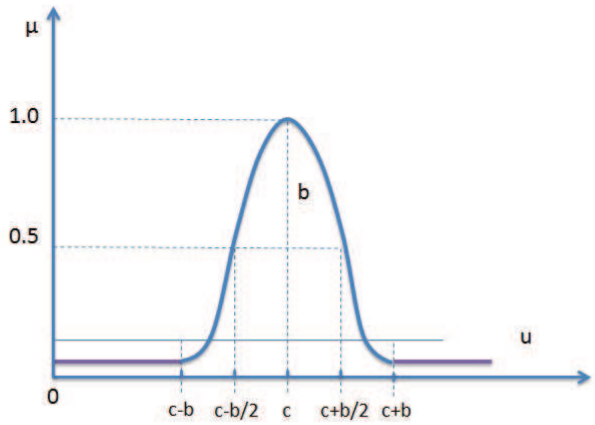

Figura 3.10: Función tipo π

3.1.3. Variables lingüísticas

Se le llama *variable lingüística* a aquella que puede tomar valores en términos del lenguaje natural y desempeñan el papel de etiquetas en el conjunto difuso.

Definición 14 *Una* variable linguística *se define por una tupla*

$$(A, T(A), U, G, M),$$

donde A es el nombre de la variable, $T(A)$ es el conjunto de términos que nombran los valores x que puede tomar A, es decir, valores que son conjuntos difusos en U, el conjunto de valores numéricos que puede tomar para una variable discreta, o el rango de valores para una continua. Se conoce como *universo de discurso de la variable* x *y se nombra como* U*, finalmente* G *es la regla sintáctica para la generación de los nombres de los valores de* x *y* M *es una regla semántica para asociar un significado a cada valor.*

3.2. Particiones difusas

Dada una variable A, definida en un rango entre u_1 y u_2, es posible establecer en ella diversas particiones. Se conoce como *partición* a un conjunto de los conjuntos difusos que se han definido para la variable A. Una partición de A es uno de los subconjuntos que pueden formarse con los elementos de $T(A)$, denominados *términos*.

Se dice que una *partición es completa* si para todos los valores posibles de U existe en la partición un conjunto con pertenencia no nula, es decir, los conjuntos definidos cubren todo U.

Así la *completud* es el porcentaje de los elementos de U si existe en la partición un conjunto con pertenencia no nula frente al total de elementos de U.

Se dice que dos conjuntos borrosos están *solapados* si su intersección es no vacía o nula; de este modo, el solapamiento de un conjunto difuso es la relación del número de elementos que comparte con otros conjuntos de la misma partición, respecto del número total de elementos que lo forman [1].

Medidas difusas

Dado un conjunto difuso A, se definen ciertas magnitudes medibles del conjunto, que se conocen como *medidas difusas*. Una de las principales es el *difusividad*. Si llamamos C al conjunto discreto de los valores x en los que $\mu_A > 0$, la magnitud de difusividad mide cuál es el grado de difusividad de un conjunto.

Por otro lado la *distancia entre dos conjuntos difusos* A y C se puede definir utilizando diversas medidas. Las más frecuentes son las siguientes:

- **Hamming**

$$f(A) = \sum |\mu_A(x) - \mu_C(x)| \tag{3.1}$$

- **Euclídea**

$$f(A) = \left(\sum (\mu_A(x) - \mu_C(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

- **Minkowski**

$$f(A) = \left(\sum (\mu_A(x) - \mu_C(x))^W\right)^{\frac{1}{W}} \tag{3.3}$$

  con $w \in [1, \infty]$

Otra medida que pude definirse es la *similitud*, la cual mide el parecido entre dos conjuntos, y en su forma básica es una extensión de la distancia entre conjuntos.

Por su parte, la *entropía difusa* nos informa sobre cuánta información aporta este conjunto a la descripción de la variable x. Se define para un conjunto difuso A como:

$$f(A) = \sum \{\mu_A(x) \log \mu_A(x) + [1 - \mu_A(x)] \log [1 - \mu_A(x)]\} \tag{3.4}$$

Por último, el *agrupamiento difuso* o *clustering* es una técnica que se introduce para alcanzar una determinada representación de un espacio vectorial de vectores de entrada. Se basa en la medición de las distancias euclídeas entre vectores, y se utiliza para determinar las reglas borrosas que describen un sistema desconocido o *caja negra*.

Uno de los métodos más conocidos para realizar el agrupamiento difuso es el método denominado de las k-medias, aunque existen muchas otras técnicas, como las basadas en la entropía, o bien en los métodos de minimización energética.

3.3. Operaciones difusas

A los subconjuntos difusos se les puede aplicar determinados operadores, o bien pueden realizarse operaciones entre ellos. Al aplicar un operador sobre un solo conjunto difuso se obtiene otro conjunto difuso; de la misma manera al combinar dos o más subconjuntos mediante alguna operación, se obtendrá otro conjunto.

Sean los subconjuntos difusos identificados por las etiquetas A y B, asociados a una variable lingüística x, para ellos pueden definirse tres operaciones básicas: complemento, unión e intersección. Estas operaciones básicas pueden expresarse de la siguiente manera, en términos de las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos A y B, que coinciden con las operaciones del mismo nombre que se definen habitualmente para los conjuntos clásicos [1].

- *Complemento*

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{3.5}$$

- *Unión*

$$\mu_{A\cup B}(x) = \text{máx}[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{3.6}$$

- *Intersección*

$$\mu_{A\cap B}(x) = \text{mín}[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{3.7}$$

Cabe mencionar que estas operaciones básicas funcionan de forma análoga a las correspondientes en la teoría clásica de conjuntos, tal como lo habíamos comentado, la teoría clásicaa es un caso particular de la lógica difusa.

Las funciones ya descritas de unión e intersección pueden ser generalizadas al cumplir ciertas condiciones. En caso que las funciones cumplan con estas condiciones, las llamaremos *Conorma Triangular* (T-Conorma) y *Norma Triangular*(T-Norma). A continuación mostramos algunas de las normas más usadas.

Conormas	*Normas*
$\max(a, b)$	$\min(a, b)$
$(a + b - ab)$	$(a\ b)$
$a \dot{+} b = \min(1,\ a + b)$	$a * b = \max(0,\ a + b - 1)$

Las normas y conormas cumplen con las leyes de Morgan.

3.3.1. Operaciones

- *Igualdad* $\mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad x \in U$
- *Unión* $\mu_{A\cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall x \in U$
- *Intersección* $\mu_{A\cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall x \in U$
- *Complemento* $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad x \in U$
- *Norma* $\mu_{\text{Norma}(A)}(x) = \frac{\mu_A(x)}{\max[\mu_A(x)]} \qquad x \in U$

- *Concentración* $\mu_{Conc(A)}(x) = \mu_A(x)^2 \qquad x \in U.$

  Esta operación se utiliza como un modificador de "muy"

- *Dilatación* $\mu_{Dilat(A)}(x) = \mu_A(x)^{0,5} \qquad x \in U.$

  Esta operación se utiliza como un modificador " más o menos"

- *Subconjunto* $A \subseteq B: \quad \mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ para toda $u \in U$

- *Producto algebráico,* $A \cdot B: \quad \mu_{AB}(u) = \mu_A(u) \cdot \mu_B(u)$ para todo $u \in U$

- *Suma Acotada* $\text{máx}\{1, \mu_A(u) + \mu_B(u)\}$ para todo $u \in U$

- *Diferencia Acotada,* $A \mid - \mid B$

  $\text{mín}\{0, \mu_A(u) \ - \ \mu_B(u)\}$ para todo $u \in U$

- *Producto Acotado* $\text{máx}\{0, \mu_A(u) + \mu_B(u) - 1\}$ para todo $u \in U$

- *Suma Algebráica* $\mu_{A+B}(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u)\}$ para todo $u \in U$

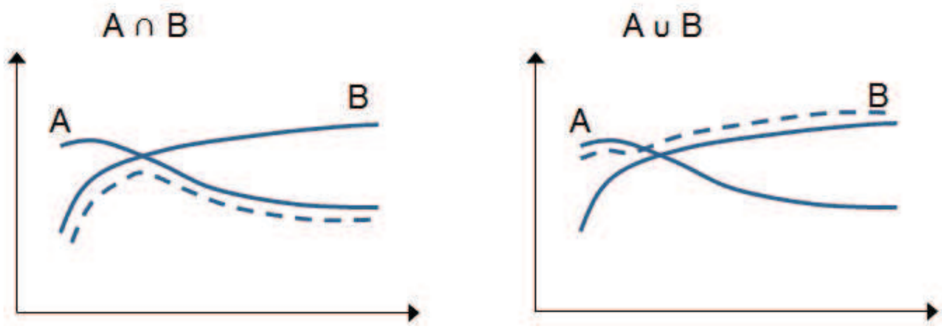

Figura 3.11: Representación de la unión e intersección

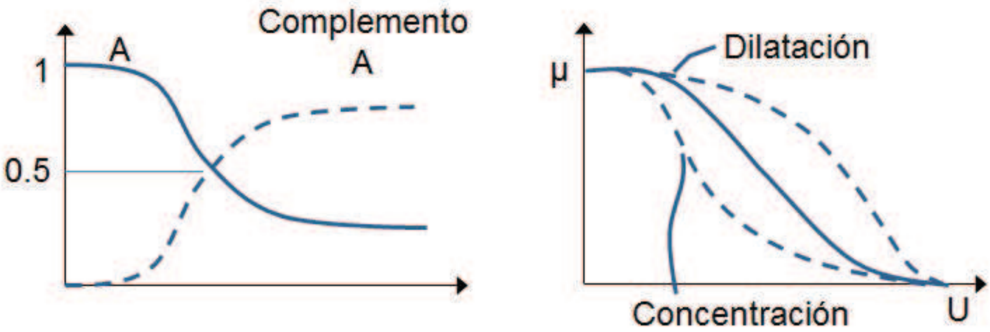

Figura 3.12: Representación del complemento, dilatación y concentración

3.4. Lógica difusa

Inferencia difusa

Al igual que la lógica clásica, la lógica difusa se ocupa del razonamiento formal con proposiciones, pero a diferencia de ésta, los valores de las proposiciones pueden tomar valores intermedios entre verdadero y falso. De la misma forma que se define un isomorfismo entre la lógica y la teoría de conjuntos clásica, es posible definir también un isomorfismo entre la lógica y la teoría de conjuntos difusos, y de éstas a su vez con un Álgebra de Boole. Es así, los conjuntos difusos también representan predicados en la lógica proposicional. El objeto de la lógica borrosa es proporcionar un fundamento formal al razonamiento basado en el lenguaje natural, que se caracteriza por tratarse de un razonamiento de tipo aproximado, que hace uso de unas proposiciones que a su vez expresan información de caracter poco [11].

Principio de Extensión

El principio de extensión permite convertir conceptos no difusos en difusos, siendo además la base de la inferencia en los sistemas difusos. Sean U y V universos. En general, para un conjunto difuso A en U el *principio de extensión* define un conjunto borroso B en V dado por

$$\mu_{\sup\{u \in f^{-1}(v)\}}(x) = \mu_A(u)$$

es decir, $\mu_B(v)$ es el máximo de $\mu_A(u)$ para todos los $u \in U$ que cumplen que $f(u) = v$, donde $v \in V$ y suponemos que $f^{-1}(v)$ es no vacía. Si f^v es vacía para algún $v \in V$, definiremos $\mu_B(v) = 0$.

Relación difusa

Para dos universos U y V, una relación difusa se define como un conjunto difuso R y S en $U \times V$ y $V \times W$, respectivamente, como otra relación difusa con otra relación de inclusión

$$\mu_{R \circ S}(u, w) = \sup_{v \in V} \left[\mu_R(u, v) * \mu_S(v, w)\right] \tag{3.9}$$

donde $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ y el operador $*$ puede ser cualquier $t-$norma.

Implicación difusa

Si se definen dos conjuntos difusos A y B en U y V, respectivamente, una *implicación difusa* de A en B, que indica con $A \to B$, es una relación borrosa de $U \times V$, que puede venir definida por alguna de las siguientes funciones de inclusión en la literatura de la lógica difusa:

Conjunción difusa

$$\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_A(u) * \mu_B(v) \tag{3.10}$$

Disyunción difusa

$$\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_A(u) \dot{+} \mu_B(v) \tag{3.11}$$

Implicación material

$$\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_{\bar{A}}(u) \dot{+} \mu_B(v) \tag{3.12}$$

Cálculo proposicional

$$\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_{\bar{A}}(u) \dot{+} \mu_{A*B}(v) \tag{3.13}$$

Modus ponens generalizado

$$\mu_{A\to B}(u,v) = \sup\{c \in [0,1] \mid \mu_A(u) * c \leq \mu_B(v)\} \tag{3.14}$$

Modus tolens generalizado

$$\mu_{A\to B}(u,v) = \text{ínf}\left\{c \in [0,1] \mid \mu_B(v) \dot{+} c \leq \mu_A(u)\right\} \tag{3.15}$$

3.5. Reglas difusas

Las reglas difusas combinan uno o más conjuntos difusos de entrada, llamados *antecedentes* o *premisas* y les asocian un conjunto difuso de salida, llamado *consecuente* o *consecuencia*. Los conjuntos difusos de la premisa se asocian mediante conjuntivas lógicas como *y*, *o*, etc.

Las reglas difusas permiten expresar el conocimiento que se tiene sobre la relación entre antecedentes y consecuentes. Para expresar este conocimiento de forma completa normalmente se requieren de varias reglas, que se agrupan formando lo que se conoce como una *base de reglas*, es decir, el conjunto de reglas que expresan las relaciones como una *base de reglas*, es decir, el conjunto de reglas que expresan las relaciones conocidas entre antecedentes y consecuentes.

La base de reglas se pueden representar bien como una tabla de las reglas que la forman, o bien como una *memoria asociativa borrosa o (FAM)*. Las FAM son matrices que representan la consecuencia de cada regla definida para cada combinación de dos entradas.

Las FAM permiten realizar una representación gráfica clara de las relaciones entre dos variables linguísticas de entrada y la variable linguística de salida, pero requiere que se indique explícitamente todas las reglas que se pueden formar con estas dos variables de entrada. Cuando el número de conjuntos de cada una de las particiones de entrada crece las FAM se hacen difícilmente manejables.

Es posible también definir FAM de más de dos dimensiones, pero su tamaño es excesivo y son mucho más complejas de manejar. En su lugar se suele trabajar con varias FAM de dimensión dos, para definir subconjuntos de reglas que asocien las entradas de dos en la base de reglas general [11].

Definición 15 *Una* base de reglas difusas *es una colección de reglas* $\Re^{(l)}$ *con el formato*

$$\Re^{(l)} : Si\ x_1\ \ es\ F_1^l\ y\ \cdots y\ x_n es\ F_n^l entonces\ y\ es\ G^1 \tag{3.16}$$

donde F_1^l *y* G_1^l *son conjuntos difusos en* $U_i \subset \Re$ *y* $V \subset \Re$*, respectivamente, y* $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in U_1 \times U_n, y \in V$ *son variables lingüísticas.*

Este formato de reglas se conoce como *difuso puro de tipo Mamdani*, por ser quien primero las propuso en 1974 para realizar un controlador difuso que estabiliza un sistema en torno a su punto de trabajo.

Otro formato frecuente para las reglas es el llamado *de tipo Sugeno*. En este caso, la función de salida es una combinación lineal de las variables de entrada, o en su caso más general, una función genérica de las variables de entrada.

$$\Re^{(l)} : \text{Si } x_1 \text{ es } F_1^l\text{y } \cdots \text{ y } x_n\text{si } F_n^l \text{ entonces } y^l = f^{(l)}(x) \tag{3.17}$$

Si llamamos M al número de reglas *Si* - *Entonces* de la base de reglas entonces $l = 1, 2, \ldots, M$ en las ecuaciones. El vector x representa el conjunto de las entradas, mientras que y es la salida del sistema borroso. Los sistemas difusos descritas con n entradas, mientras que y es la salida del sistema difuso. Los sistemas difusos descritos con n entradas x_i y una sola salida y, se conocen como *MISO* (múltiples entradas una sola salida, de acuerdo con sus siglas en inglés), mientras que los que tienen varias salidas (de 1 hasta k se conocen como *MIMO* (múltiples entradas múltiples salidas).
Para estos últimos sistemas se puede generalizar el formato anterior de las reglas, o bien descomponerlo en k sistemas de tipo MISO.

3.6. Dispositivos de Inferencia Borrosa

Se llaman *dispositivos de inferencia borrosa* a los sistemas que interpretan las reglas de tipo *Si* - *entonces* de una base de reglas, con el fin de obtener los valores de salida a partir de los actuales valores de las variables lingüísticas de entrada al sistema.
En un sistema difuso las reglas del tipo de ecuación se interpretan como una implicación difusa de $F_1^l \times F_n^l \rightarrow G^l$ en $U \times V$, con $U = U_1, \ldots, \times U_n \subset \Re^n, V \subset \Re$. Si llamamos A' a la entrada en U del dispositivo de inferencia di-

fusa, cada regla l define un conjunto difuso B^l en V utilizando la composición Sup-Star

$$\mu_{B^l}(y) : \sup_{x \in U} \left[\mu_{F_1^l \times F_n^l \to G^l}(x, y) * \mu_{A'}(x) \right] \tag{3.18}$$

Se vieron seis formas de implicación difusa anteriormente, por lo que podemos proponer seis interpretaciones de la ecuación 3.6 para la ejecución de la implicación difusa, definida por una regla de la ecuación 15, dependiendo de las normas y conormas concretas que se empleen. Para simplificar las las ecuaciones siguientes llamaremos $F_1^l \times F_n^l \equiv A$ y $G^l \equiv B$ con lo que la ecuación puede expresarse simplemente como $A \to B$.

- Implicación borrosa por la regla del mínimo

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \tag{3.19}$$

- Implicación borrosa por la regla del producto

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \mu_A(x)\mu_B(y)$$

- Implicación borrosa por la regla aritmética

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \text{mín}\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\} \tag{3.20}$$

- Implicación borrosa por la regla Max-min

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \text{máx}\{\text{mín}[\mu_A(x), \mu_B(y)], 1 - \mu_A(x)(3.21)$$

- Implicación borrosa por la regla Booleana

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \text{máx}\left\{1-\mu_A(\underline{x}),\mu_B(y)\right\} \tag{3.22}$$

- Implicación borrosa por la regla de Gogüen

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \begin{cases} 1 & \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y)/\mu_A(\underline{x}) > & \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}$$

donde $\mu_{F_1^l \times F_n^l}(x)$ que a su vez puede ser definido por la regla del mínimo

$$\mu_{F_1^l \times F_n^l}(x) = \text{mín}\left\{\mu_{F_1^l}(x),\ldots,\mu_{F_n^l}(x)\right\} \tag{3.23}$$

o por la regla del producto

$$\mu_{F_1^l \times F_n^l}(x) = \text{mín}\left\{\mu_{F_1^l}(x)\ldots\mu_{F_n^l}(x)\right\} \tag{3.24}$$

Para concluir, la salida final de un dispositivo de inferencia difusa puede consistir en:

- M conjuntos difusos B^l, con $l = 1,2,\ldots,M$, según la ecuación 3.6 cada uno de los cuales es el resultado de aplicar la entrada A' a cada una de las M reglas de la base de reglas.

- Un conjunto difuso B', que es la unión de los M conjuntos borrosos B^l calculando según

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B^1}(y)\dot{+}\ldots\dot{+}\mu_{B^M}(y)$$

- M escalares y^l, con $l = 1, 2, \ldots, M$, si las reglas son del tipo Sugeno, según la ecuación 3.5, cada uno de los cuales es el resultado de aplicar la entrada A' a cada una de las M reglas de la base de reglas.

3.7. Fuzificador

El fuzificador establece una relación de entrada no difusa al sistema $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, y sus correspondientes conjuntos difusos A en U (las variables procedentes del exterior serán en general, valores no difusos, y habrá que fuzificarlas previamente). Se pueden utilizar diversas estrategias de fuzificación:

- *Fuzificación singular.* Es el método de fuzificación más utilizado, principalmente en sistemas de control, y consiste en considerar los propios valores discretos como conjuntos borrosos. De otra forma, para cada valor de entrada x se define de un conjunto soporte A', con función de pertenencia $\mu_A(x')$, de modo que $\mu_A(x) = 1$, $(x' = x)$ y $\mu_A(x') = 0$, para todos los otros $x' \in U$ en los que $x' \neq x$

- *Fuzificador no singular.* En este método de fuzificación se utiliza una función exponencial del tipo siguiente:

$$\mu_{A'}(x') = a.\exp\Big[-\big(\frac{x'-x}{\sigma}\big)^2\Big] \quad (3.25)$$

función con forma de campana centrada en el valor x de entrada, de anchura σ y amplitud a [11].

3.8. Defuzificador

El defuzificador es la función que transforma un conjunto difuso en V, normalmente salida de un dispositivo de inferencia difusa, en un valor no difuso $y \in V$. Para esta tarea se utilizan diversos métodos:

- *Defuzificador por máximo,* definido como $y = \arg\sup_{y \in V}(\mu_B(y))$ es decir , y es el punto de V en que $\mu_{B'}(y)$ está definido según la ecuación unión de los B^l de salida.

- *Defuzificador por medio de centros*, definido como

$$y = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l(\mu_{B'}(\bar{y}^l))}{\sum_{l=1}^{M}(\mu_{B'}(\bar{y}^l))}$$

donde $\bar{y}^l$ representa el centro del conjunto borroso G^l (definido como en el punto de V en el que μ_{G^l} alcanza su valor máximo, y $\mu_{B'}(y)$

- *Defuzificador por centro de área,* definido como

$$y = \frac{\sum_{l=1}^{M} M^l(\mu_{B'}(\bar{y}^l))}{\sum_{l=1}^{M} A^l(\mu_{B'}(\bar{y}^l))} = \frac{\sum_{l=1}^{M} \int_V (\mu_{B'}(\bar{y}^l)^2) dy M^l(\mu_{B'}(\bar{y}^l))}{\sum_{l=1}^{M} \int_V \mu_{B'}(\bar{y}^l) dy}$$

donde M^l es el momento (en torno al eje y del universo de discurso de la salida V) de la función de inclusión del conjunto borroso G^l, A^l es el área, y

$\mu_{B'}(y)$ está definida según la ecuación

Estos métodos de defuzificación son los empleados para obtener el valor de salida no difusa de un dispositivo de inferencia borrosa que utiliza reglas de tipo Mamdami. Di las reglas utilizadas son del tipo Sugeno el valor de salida no borrosa se obtiene como media ponderada de las salidas de cada regla de la base de reglas según

$$y = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l(\mu_{A'}(x))}{\sum_{l=1}^{M}(\mu_{A'}(x))}$$

donde y^l es la salida de la regla l, y el término $\mu_{A^l}(x)$ se calcula utilizando reglas del mínimo y del producto, respectivamente. Este valor y^l de la salida de una regla tipo Sugeno se calcula frecuentemente como una combinación lineal de entradas [11]:

$$y^l = f_l(\underline{x}) = a_{l,0} + \sum_{i=1}^{n} a_{l,i} x_i$$

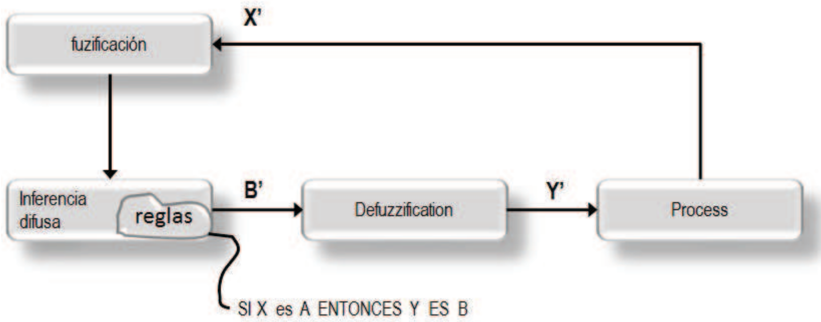

Figura 3.13: Fuzificador - Defuzificador

3.9. Probabilidad vs difuso

Se debe evitar desde el principio confundir la función de pertenencia de un conjunto difuso con una función de desnidad de probabilidad. Debe tenerse siempre presente que la función de pertenencia de un conjunto difuso indica hasta qué punto cierto valor de una magnitud puede ser incluido en un conjunto difuso, mientras que la probabilidad, por su parte, indica la frecuencia con que los diversos valores de una magnitud se presentan.

Aunque muchas expresiones de la matemática difusa son similares a otras del campo de la probabilidad, su sentido es distinto. Las funciones de pertenencia a un conjunto son fijadas arbitrariamente por el observador, indicando e significado que éste asigna a cada una de las variables lingüísticas que definen los conjuntos. Por el contrario, la probabilidad se determina por la observación de la ocurrencia de los valores de una magnitud, en algunos casos ose realiza la medida de esta probabilidad, y en otros se supone un modelo y se comprueba su validez.

3.10. Información de recuperación difusa y bases de datos difusas

Hoy en día los sistemas de información son más eficientes en cuanto a almacenar y obtener fragmentos de la información, sin embargo cuando se trata de una variable que involucra argumentos difusos, o vagos, el artículo del que se trata no es almacenado, es por ello que se necesitan métodos y herramientas que faciliten el almacenamiento y recuperación de este tipo de datos. Estos requerimientos se pueden lograr utilizando información métodos de recuperación difusa y bases de datos difusas de igual forma [11].

3.10.1. Recuperación de Información difusa

La recuperación de la información se considera como un proceso de recuperación importante de un almacén de información , por ejemplo, la recuperación de información de documentos relevantes se lleva a cabo especificando palabras clave cuando todos los documentos han sido almacenados y para cada documento almacenado se tiene una lista de palabras clave conocido.

3.10.2. Sistemas expertos difusos

Los sistemas expertos difusos surgen como resultado de aplicar la teoría de lógica difusa al consutruir sistemas expertos.

Características de un sistema difuso

Un sistema experto difuso se define en el mismo modo como un sistema experto ordinario, sin embargo, en este tipo de sitemas, se aplican métodos de lógica difusa, entre los cuales se consideran datos difusos, reglas difusas e inferencia difusa [11].

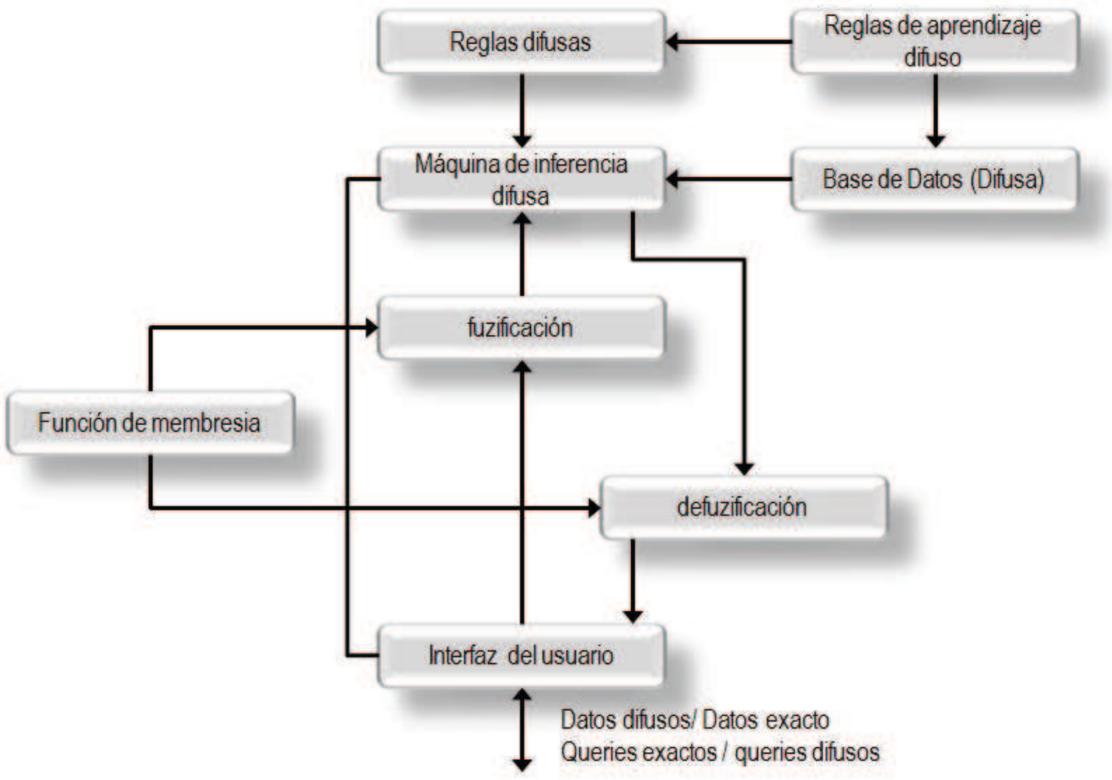

Figura 3.14: Sistema experto difuso

Las reglas de inferencia y las funciones de pertenencia componen el sistema. En la figura 3.14 se puede observar el diseño del mismo.
Algunos sistemas usan reglas de producción extendidas con sistemas expertos difusos, variables difusas y factores confiables.
Los datos pueden ser exactos o difusos. Una máquina de inferenica difusa, que activa todas las reglas en cada ciclo, es diferente de la secuencia de inferencia del sistema, pero el control y la búsqueda del mecanismo que se implementa en este último y puede ser utilizado exitosamente durante el proceso de razonamiento difuso.
Una característica de un sistema experto difuso es llevar a cabo la coincidencia parcial entre los hechos exactos o difusos y elementos difusos de condición en los antecedentes de las reglas. Una medida de grado de coincidencia se calcula en cada caso, esto es, dato difuso-condición difusa; dato exacto - condición difusa; dato difuso - condición exacta.
La fuzificación y defuzificación puede ser utilizado en un sistema experto difuso dependiendo del tipo de inferencia utilizado del lado izquierdo de la ecuación.

Diseño de Sistemas difusos

Las principales fases para diseñar un sistema difuso son:

1. Identificar el problema y elegir el tipo de sistema difuso que mejor se

adecue a los requerimientos del problema. Un sistema modular puede ser diseñado a partir de varios módulos difusos vinculados entre sí. Una aproximación modular puede ser de ayuda si se reduce la complejidad y puede ser más comprensible.

2. Definir las variables de entrada y salida, los valores difusos y su función de pertenencia.

3. Articular el conjunto de las reglas difusas.

4. Elegir los métodos de inferencia difusa, métodos de fuzificación y defusificación si es necesario, algunos experimentos pueden ser necesarios en lo que se elige un método de inferencia.

5. Experimentar con el prototipo de los sistemas difusos, trazar la función final entre la entrada y la salida de las variables difusas, cambiando las funciones de pertenencia y las reglas difusas en caso de ser necesario, poner en marcha el sistema difuso y validar los resultados [11].

El principal problema de un sistema experto difuso se encuentra al tratar de articular las reglas difusas para los términos difusos, por ello mencionamos algunos métodos para obtener las reglas difusas.

El primero sería entrevistar a un experto. La comunicación entre los expertos y los entrevistadores puede complicarse debido a una falta de entendimiento entre ellos. La forma de las funciones de pertenencia, el número de etiquetas, etc. deben ser definidas por el experto, sin embargo, puede suceder que el experto no se encuentre familiarizado con los conjuntos difusos y lógica difusa, lo que podría dificultar el entendimiento.

1. Los datos se cuantifican de forma difusa y se definen las funciones de pertenencia.

2. Todos los ejemplos de datos se fuzifican. Se obtienen clases que también pueden fuzificarse utilizando ciertos grados de fusificación en caso que la información este disponible.

3. Cada instancia se representa por una regla difusa, donde las etiquetas difusas de cada atributo pertenecen al máximo valor tomado. El grado de cada una de las reglas se calcula multiplicando el grado de pertenencia de las condiciones de cada elemento, por el grado del antecedente y por el factor de confianza que valida el dato.

4. Las reglas difusas obtenidas se incluyen y la ambigüedad en las reglas se solucionan utilizando el principio del factor de confianza, es decir, si hay dos reglas que tienen los mismos antecedentes y diferentes consecuentes, se deja aquel que tiene el mayor factor de confianza.

5. El producto de la inferencia difusa se utiliza por el conjunto de las reglas difusas extraídas basados en los operadores del producto entre

los grados de pertenencia que refieren a la función de pertenencia del antecedente y el método de defusificación.

Sistemas difusos para la predicción

Predicciones complejas como el problema de predecir el inventario de un segmento de mercado se caracterizan por el tiempo de variabilidad e información ambigüa. Para dicho problema se pueden utilizar diferentes técnicas o una combinación de ellas, por ejemplo reglas difusas, redes neuronales o algoritmos genéticos.

Reglas difusas para resolver predicciones difusas complejas

En las predicciones complejasse aproximan a los valores por predecir en diversas variables, en general de distintos tipos. Estas tareas se resuelven en dos etapas:

- Reconocimiento del estado.

  Para esta etapa, las series de tiempo podrían ser una buena herramienta.

- Evaluación de los escenarios. En este caso las reglas de inferencia podrían ser la opción idónea para sugerir la decisión de inversión.

Optimización y teoría de decisiones

La optimización y la toma de decisiones se traducen en encontrar la respuesta óptima de entre un conjunto de soluciones a un problema. Este tipo de procedimiento se vuelve complejo cuando se involucran opciones que involucran el sentido común, sobre todo al involucrar un grupo de procesos de toma de decisiones.

Optimizar

Al optimizar los problemas en ocasiones no se definen de forma adecuada los parámetros y sus valores, es justo en estos casos en los que se vuelve más complejo encontrar la solución.

Toma de decisiones

Cuando la lógica difusa se aplica a los problemas de decisión se obtiene una metodología formal para resolver el problema y ser consistente con el sentido común del ser humano. Las principales características de un sistema de decisión difuso deben contener la siguiente funcionalidad:

- Explicar la solución que le da el usuario.
- Dar un razonamiento riguroso y “justo”.
- Adaptar el conocimiento subjetivo.
- Considerar el abanico de posibles soluciones.

Capítulo 4

Inventarios

4.1. Teoría de decisiones y los inventarios

Hoy en día las empresas compiten en muchas formas y en diferentes ámbitos, esto se presenta principalmente en sus procesos productivos, sus inventarios en diversas áreas. En las empresas e industrias, los inventarios pueden ser desde materias primas, bienes terminados o sus stocks de diferentes áreas.

La administración de inventarios y planeación de la producción, así como los métodos de planeación que pudieron ser considerados hace algunos años como imposibles hoy en día son muy comunes. La revolución de tecnologías de la información y las redes computacionales permiten a los fabricantes rastrear la demanda de consumo base, y de ahí comparar la producción con la demanda.

Algunas de estas iniciativas incluyen Intercambio electrónico de datos (EDI Electronic Data Interchange por sus siglas en ingls). Respuesta eficiente del consumidor (ECR Efficient Consumer Response) y Administración de inventarios del vendedor (VMI Vendor Management Inventory) .

EDI es el intercambio común de documentos de negocios de computadora a computadora, tales como pedidos, órdenes de servicio, pagos, etc. ECR es un conjunto de estrategias logísticas orientadas al mercado en la que los distribuidores y proveedores trabajan en conjunto para generar un valor agregado a la cadena, a travs de la información se puede intercambiar los bienes de manera rápida, eficiente y confiable en beneficio de todos los involucrados.

Las estrategias del ECR son:

1. Clasificación de Almacén eficiente. Permite optimizar la productividad de los inventarios y almacenar en un espacio de la interfaz del consumidor.

2. Abastecimiento eficiente permite optimizar el tiempo y costos en el sistema de abastecimiento.

3. Promoción eficiente, pretende maximizar la completa eficiencia del sistema del negocio y el consumidor.

4. Introducción a la producción eficiente, pretende maximizar la efectivi-

dad de desarrollar un nuevo producto e introducirlo en las actividades. VMI es un mecanismo de coordinación en el que el proveedor maneja el inventario desde el estante de su cliente, decidiendo cuando y en qu cantidad debe ordenar.

En algunas compañias de negocios se tienen cuatro niveles de estrategias:

1. Estrategia empresarial. Se refiere al rol que debe jugar la empresa en la economía y en la sociedad, misión y visión.

2. Estrategia corporativa. Se refiere al conjunto de mercados con los que debe relacionarse la empresa.

3. Estrategia de negocio. Se refiere a cómo debe de competir la organización en cada industria, producto o segmento de mercado. En la base del precio, servicio u otros factores.

4. Estrategia de área funcional. En este nivel el principal foco de estrategia es maximizar la producción de los recursos y desarrollar competencias distintivas. A pesar de que cada nivel de estrategias puede ser visto diferente, cada pieza debe encajar para formar un todo.

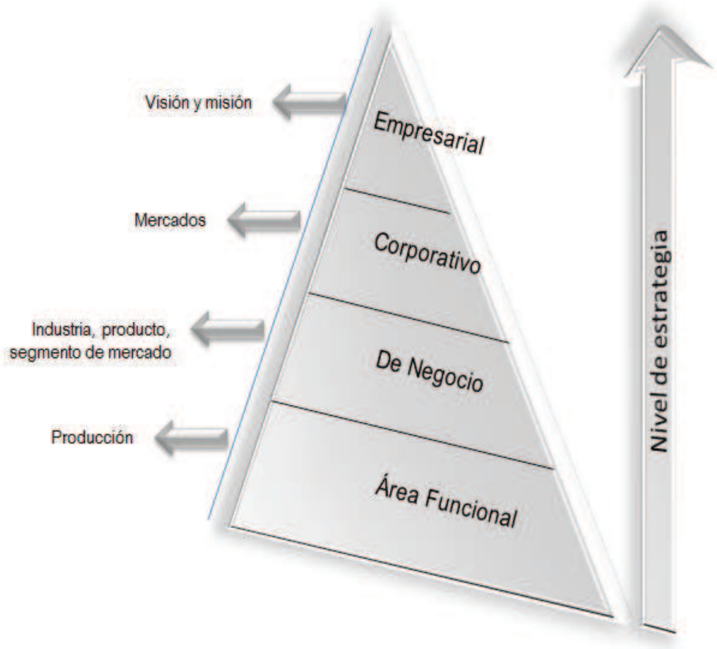

Figura 4.1: Estrategias de inventarios

4.1.1. Esquemas para la planificación de la gestión de inventarios, la producción y la programación

Los artículos producidos y mantenerlos en el inventario pueden diferir en diversas formas, como en precio, peso, volumen, color o forma. Pueden ser almacenados de varias formas, en cajas de cartón, barriles, estantes, etc. Pueden ser empaquetados de uno en uno o por cientos. Algunos artículos pueden ser almacenados contra el polvo, controlados por la temperatura o dejados a la intemperie.

La demanda de los artículos tambin se da de diferentes formas, la solicitud puede ser por cientos, en docenas o por unidad. Puede haber sustitutos de cada uno de tal forma si algún artículo no se encuentra se puede elegir otro al menos que ste último tampoco se encuentre disponible. Algunos clientes pueden esperar cierto tipo de productos o comprarlos en caso de que exista un complemento. Pueden ir a comprarlo o solicitar le sea enviado por una compaía.

La toma de decisiones en la planeación de la producción y administración de inventarios es básicamente un problema de hacer frente a un gran número de diversos factores externos e internos de la organización. Dado un ítem en específico que será almacenado con una localización en particular, se deben resolver tres puntos:

1. ¿Qué tan seguido se debe determinar el inventario?

2. ¿Cuándo debe llevarse a cabo una solicitud de ese ítem?

3. ¿Qué cantidad debe solicitarse?

Simon A. Herbert, comentó que todos los tomadores de decisiones se aproximan a un problema complejo mediante un modelo o marco que permita simplificar la situación real. Un cerebro humano por sí solo es incapaz de absorber y racionalizar todos los factores relevantes en una situación de decisión compleja. Un tomador de decisiones no concibe efectivamente todas las posibles soluciones de un gran sistema sin ayuda.

Todos los tomadores de decisión se ven forzados a ignorar algunos aspectos importantes de un problema complejo y basar las decisiones en un número de factores cuidadosamente seleccionado. Los factores seleccionados por el tomador de decisiones, comúnmente refleja sus sesgos, habilidades, y percepciones de la realidad que creen que enfrentarán, así como la tecnología de decisión disponible en el momento.

Las decisiones de la administración de inventarios y planeación de la producción y programación son complejas. Se extienden más allá de la intuición de la mayoría de los tomadores de decisiones, derivado de las muchas interconexiones entre los sistemas, tanto físicos como conceptuales, mismos que deben ser coordinados, racionalizados, adaptados y controlados. Las decisiones se deben visualizar simultáneamente desde el punto de vista del artículo y de artículos similares, la inversión total de los inventarios, el plan maestro de la organización, el sistema de la distribución de la producción de los proveedores y clientes,, y la economía como un todo.

De aquí que el reto sea doble, ya que la capacidad de un tomador de decisiones para hacer frente a la diversidad está limitada, los sistemas de decisiones y reglas deben ser diseados para ayudar a expandir los límites por encima de las habilidades de los individuos para racionalizar. Sin embargo, dado que muchos tomadores de decisiones han desarrollado aproximaciones a los inventarios y decisiones de producción, los sistemas de decisión se diseñaron, y su uso se enfoca, en el contexto de los recursos existentes y capacidades de administración.

Los siguientes son una lista parcial de la ayuda conceptual para la toma de decisiones

- Las decisiones en una organización se pueden considerar como una jerarquía que se extiende desde la planificación estratégica de largo alcance, pasando por una planificación táctica de mediano alcance hasta un control operacional. Típicamente, los diferentes niveles de administración tratan con las tres clases de decisiones.

- Un tipo de jeraquía relacionado puede conceptualizarse con una toma de decisiones en la adminisración de inventarios, así como la planeación y la programación de los mismos. En el nivel más alto se elige un tipo de sistema de control, en el siguiente nivel se debe elegir los parámetros específicos para el sistema electo. Finalmente se opera el sistema y se incluyen las bases de datos, cálculos, reportes de resultados, etc.

- Los inventarios pueden subclasificarse en categorías homogeneas, de tal forma que pueda administrarse el inventario en un menor número de posibles decisiones.

- La complejidad en la planeación de la producción y administración de las decisiones sobre el inventario se pueden reducir identificando, las variables más importantes.

Figura 4.2: Jerarquía de las decisiones.

4.2. Costo de inventarios

Para cada artículo de un inventario, loscostos de tenerlo deben ser menores a los costos de no tenerlo, esta es la principal razón por la que existen los inventarios. Los costos en ocasiones son difíciles de cuantificar adecuadamente, a continuación mencionaremos los principales tipos de inventarios:

- Costo de envío, de mantenimiento y posesión. Incluyen cargos por manejo, cargos por las instalaciones para su almacenamiento, el costo del equipo para manear el inventario, trabajo y operación. En sí el costo involucra todos aquellos costos asociados con tener el artículo.

- Costo de ordenar. Estos costos incluyen el costo de administración y aquellos en los que se incurren por la identificación y asignación de una orden a un proveedor. Los costos de los artículos de línea se refieren al costo de agregar una línea a la orden de compra.

  El intercambio electrónico de datos entre el proveedor y el cliente tienen por objeto reducir estos costos.

- Costo por la no existencia. son los costos en que se incurren al no tener los artículos cuando y en donde sean necesarios. Estos costos en muchas ocasiones son díficiles de determinar, sin embargo, en algunos casos estos costos pueden ser sustanciales y en ocasiones mayores que los costos de traslado.

- Costo por variación de precios. Estos costos se relacionan con la cantidad de artículos, ya que en algunos casos los proveedores involucran descuentos en el precio y transportación cuando las cantidades son mayores, en contraparte podemos decir que en ocasiones las compras en cantidades pequeñas pueden resultar en costos mayores.

4.3. Clasificación de inventarios

La siguiente clasificación la sigirió Britney[1], quien muestra las diversas funciones que desempeñan los inventarios.

- *Inventario en tránsito o en distribución.* Este tipo de inventarios se ocupan para abastecer las líneas de suministro y distribución que enlazan una organización con sus proveedores y clientes, de igual forma con los puntos de transportación interna, su existencia se deriva de movilizar los materiales de un punto a otro.
  Las decisiones tomadas que afecten los inventarios en tránsiito, muy probablemente repercutirá en otras clases de inventarios funcionales.

- *Inventarios cíclicos.* Se refiere a las existencias que se incrementan a causa de decisiones gerenciales para comprar, producir, o vender en lotes con cierta preferencia. La magnitud del lote es intermedia entre el costo de mantener inventarios y el costo de efectuar órdenes frecuentes o la organización de las mismas.

[1] R. R. Britney, "Inventories, their Functions, Forms and Control", trabajo presentado en la Canadian Association for Production and Inventory Control, 1971.

- *Inventarios de seguridad.* Existen como resultado de la incetidumbre en la demanda o en la oferta de unidades en varios puntos del sistema de producción.

- *Inventarios Anticipados.* Las existencias de artículos se acumulan derivado de una necesidad futura bien definida. Difieren de los inventarios de seguridad en que se constituyen considerando una certeza mayor y por ende un menor riesgo asociado.

- *Inventarios Independientes.* Estos inventarios permiten realizar actividades independientes en los principales puntos de enlace. Estos inventarios dependen de los costos y de la flexibilidad de operación que aumenta los beneficios de tenerlos. Los inventarios de este tipo pueden ser sustanciales para muchas operaciones que se planean para un producto, especialmente cuando se necesitan máquinas que se ocupan simultáneamente para producir otros artículos.

Finalmente podemos decir que los sistemas, la clasificación y la toma de decisiones para la planeación de inventarios son escenciales en las organizaciones, el resultado de de ellos, derivan de diversas políticas y decisiones dentro de la organización.
Las estrategías para la planeación de la producción y la progamación dependerán en qué tan fácilmente se relacionen las materias primas a los requer-

imientos de los artículos a producir.

Capítulo 5

Aplicaciones de los sistemas difusos en los inventarios

En los últimos años la ingeniería industrial ha sufrido cambios, especialmente en lo relativo con la mejora de tecnologías de la información, en este tenor, la planeación de la producción, y en particular el análisis de la demanda de algún producto considera hoy en día diversas variables además de la satisfacción de la demanda al costo más bajo. Los desarrollos en las nuevas tecnologías, tanto en software como en hardware, permiten considerar variables difusas, es decir variables con cierto tipo de ambigüedad.
Los modelos que consideran lógica difusa con aplicaciones en la manufactura se fundamentan en la interacción del tomador de decisiones y un especialista.

En general los conjuntos difusos han tenido una cantidad enorme de aplicaciones en la ingeniería industrial en campos como planeación, control de calidad, ergonomía, y distribuciones de planta entre otros.
La lógica difusa en la programación matemática consiste, al igual que con la lógica clásica, en transformar la teorías clásicas en modelos difusos equivalentes.
A continuación mostramos cómo se plantea un problema de programación lineal.

5.1. Modelo de Programación Lineal con números difusos en las restricciones

En este caso tanto la función objetivo como las restricciones consideran tanto números como variables difusas.[5]

5.1.1. Problema clásico

Antes vamos a mostrar cómo definir el modelo de Programación lineal clásico.

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & z = & \sum_{j=}^{n} c_j x_j \\
& \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in N_m) \\
& & x_j \geq 0 \qquad (j \in N_n)
\end{array} \tag{5.1}
$$

Ahora bien en el caso de programación lineal difusa, $\bar{A}_{ij}$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_j$ son números difusos, en tanto que X_i son variables difusas

5.1.2. Problema difuso

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & z = & \sum_{j=}^{n} c_j x_j \\
& \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in N_m) \\
& & x_j \geq 0 \qquad (j \in N_n)
\end{array} \tag{5.2}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & z = & \sum_{j=i}^{n} \bar{c}_j x_j \\
& \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \geq \bar{B}_i \quad (i \in N_m) \\
& & x_j \geq 0 \qquad (j \in N_n)
\end{array} \tag{5.3}
$$

Para resolver el problema consideraremos los siguientes supuestos:

5.1.3. Caso 1

B_t es un número difuso de la siguiente forma:

$$\bar{B}_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq bi + pi \\ \frac{x-bi}{pi} & \text{si} \quad bi < x < bi + pi \\ 0 & \quad\quad x \leq bi \end{cases}$$

Para cada vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, primero se calcula el grado, $D_i(x)$, con el que x satisface la restricción i ($i \in N_m$) con la fórmula:

$$D_i(x) = B_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{5.4}$$

$D_i(x)$ es un conjunto difuso en R_n, y su intersección, $\cap_{i=1}^{m} D_i$, es un conjunto difuso factible. Con el fin de determinar el conjunto difuso de valores óptimos, se calculan los límites inferior y superior entre los cuales se encontrarían dichos valores. Para hallar el límite inferior de los valores óptimos (z^-) y el límite superior (z^+) del mismo conjunto, se resuelven los siguientes problemas de programación lineal estándar [3]:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad z^- = \quad & \textstyle\sum_{j=i}^{n} c_j x_j \\ \text{s.a.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i \in N_m) \\ & x_j \geq 0 \quad\quad (j \in N_n) \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad z^+ = \quad & \textstyle\sum_{j=i}^{n} c_j x_j \\
\text{s.a.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in N_m) \\
& x_j \geq 0 \qquad (j \in N_n)
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

5.1.4. Caso 2

Se considera el conjunto difuso de valores óptimos (U), el cual es un subconjunto difuso de $\Re^n$ donde el grado de satisfacción del decisor (λ) aumenta en la medida en que la respuesta uobtenida se acerca a z^- (ver figura 2). La ecuación se define por:

$$
U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq z^- \\ \frac{z^+ - x}{z^+ - z^-} & \text{si} \quad z^- < x < z^+ \\ 0 & \quad x \leq z^+ \end{cases}
$$

La solución óptima se encuentra resolviendo el siguiente modelo de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \lambda \\
\text{s.a.} \quad & \lambda(z^+ - z^-) + \textstyle\sum_{j=i}^{n} c_j x_j \leq z^+ \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \lambda p_i \geq 0 \qquad (i \in N_m) \\
& x_j, \lambda \geq 0 \qquad (j \in N_n)
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

λ es el nivel que como mínimo tienen que alcanzar todas las funciones de pertenencia. Lo anterior se interpretará como el nivelde aspiración o de satisfacción de un decisor. Este problema es un modelo para encontrar $x \in \Re^n$ sujeto a que la siguiente ecuación alcance el valor mínimo.

$$\left[(\bigcap_{i=1}^{m} D_i) \cap U \right] (X) \tag{5.8}$$

Esta metodología es llamada método simétrico (las restricciones y metas son tratadas simétricamente).

5.2. Modelo de programación lineal con coeficientes tecnológicos difusos

En este caso suponemos que el modelo de programación lineal tiene coeficientes tecnológicos difusos; es decir, la matriz de coeficientes A_{ij} tendría valores definidos en los intervalos $[a_{ij}, a_{ij} + d_{ij}]$, por lo que un modelo de programación matemática difusa de minimización tendría la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} \quad z = & \sum_{j=i}^{n} c_j X_j & \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} \bar{A}_{ij} X_j \leq b_i & (i \in N_m) \\ & X_j \geq 0 & (j \in N_n) \end{array} \tag{5.9}$$

5.2.1. Caso 3

El conjunto difuso de las i restricciones C_i, el cual es un subconjunto de $\Re^m$, está definido por:

$$\bar{C}_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \\ \frac{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+_{ij})x_j - b_i}{\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j} & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i < \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij})x_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i \geq \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij})x_j \end{cases}$$

5.2.2. Caso 4

La función de pertenencia para el conjunto difuso de valores óptimos (U), se define igual al que definimos en el caso 2 (ecuación **??**), lo que nos lleva a escribir la ecuación 5.2.2 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \lambda \\ &\text{s.a.} \quad \lambda(z^+ - z^-) + \textstyle\sum_{j=i}^{n} c_j x_j \leq z^+ \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + d_{ij} - \lambda d_{ij})x_j \geq b_i \quad (i \in N_m) \\ &x_j, \lambda \geq 0 \quad (j \in N_n) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Cabe mencionar que las restricciones que contiene el product λx_j, son restricciones no lineales, lo que hace que el problema sea un modelo no lineal.

5.3. Modelo de plan de requerimiento de materiales con lógica difusa

El sistema de un modelo de planificacin de materiales (MRP por sus siglas en inglés), es el ejemplo ideal para mostrar las aplicaciones de la programación lineal difusa en los sistemas de producción, dado que este sistema tiene una gran complejidad en lo referente a la cantidad de información que debe de ser considerada.

La información que debemos conocer es la siguiente:

- Tiempo de suministro.
- Cantidad mínima de producción o de compra.
- El nivel de inventario actual.
- Los componentes necesarios, es decir, la lista de materiales (BOM).

Si consideramos un producto final, compuesta por dos etapas anteriores con dos subelementos cada una, y suponemos una demanda en los próximos n periodos. El resultado del MRP dará origen al plan de requerimientos de los componentes que lo conforman, según la lista de materiales [3].

Definamos pues las variables a considerar en la tabla 5.1.

En este caso una función objetivo sería, llevar a cabo los pedidos teniendo en cuenta el tamaño mínimo pedir y el nivel de stock promedio que se genera en el horizonte de planeación. Es decir, hacer el pedido con el tiempo máximo posible, pero sin sobrepasar la fecha del requerimiento. Es así como la función objetivo sería:

$$\text{mín}\, x = \sum_{i=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} (T = t) x_{ij} \tag{5.11}$$

Esta función tiene por objetivo solicitar el mayor número de unidades del componente i tan trde como sea posible, garantizando así un nivel de inventario bajo y con las siguientes restricciones:

- La cantidad de materiales requeridos, más las existencias en inventario, deben ser iguales o superior a la demanda del periodo correspondiente, así como el tamaño del pedido del componente i en el periodo t debe

Variable	Definición
P	Número de componentes
T	Horizonte de planeación
$R(i,j)$	Número de componentes i necesarios para realizar componentes j
$D(i,j)$	Demanda externa para el componente i en el periodo t
$I(i,O)$	Inventario inicial del componente i
$LS(i)$	Tamaño de lote mínimo para el componente i
$X(i,t)$	Cantidad de pedido del componente i solicitado en el periodo t
M	Número muy grande height

Cuadro 5.1: Definición de variables

ser cero o superior al tamaño de lote mínimo para el componente i.

$$X_{i,t} \geq \delta_{i,t} LS(i)$$

donde $\delta_{i,t}$ es un indicador de producción que puede ser uno, en caso que el componente i inicia en el periodo t o cero en caso contrario.

- Para $\delta_{i,t} \in [0,1]$.
- No negatividad $x_{i,t} \geq 0$

Si consideramos la demanda de tipo determinista cuando en realidad ésta es incierta, la solución que tendremos no es la óptima cuando la demanda es diferente al valor pronosticado. En este caso tendremos una situación difusa, dado que no conocemos y la estimación de la demanda no se conoce o no sería precisa. Entonces una forma de flexibilizar la estimación de la demanda sin tener que definirla como un valor único para cada uno de los periiodos de tiempo, sería definir un intervalo en el cual la probabilidad de que la demanda se encuentre en éste sea muy alta, y para definir este intervalo se puede estimar con datos históricos y mediante expertos un valor mínimo y un máximo para la demanda decada uno de los periodos.

Es así como nos vemos obligados a tratar la incertidumbre en la demanda y los coeficientes tecnológicos del modelo de programación.

5.3.1. MRP con incertidumbre en la demanda

Este modelo se plantea como un odelos determinístico que puede ser resuelto por algunos paquetes de optimización, sin embargo, el modelo piede volverse complejo al considerar la demanda ($D(i,t)$) como un valor que puede estar entre un valor mínimo ($D(i,t)$)y uno máximo ($D(i,t)+p(i,t)$).Esto nos permitereecribir el modelo de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{máx} \quad \lambda \\
&\text{s.a.} \qquad \lambda(z^+ - z^-) + \textstyle\sum_{i=1}^{P} \sum t = i^T(T-t)x_{ij} \ \leq z^+ \\
&\textstyle\sum_{\tau=1}^{t-LT(i)} x_{i\tau} + I(i,O) - \sum_{\tau=1}^{t}(D(i,\tau) + \sum_{J=1}^{P}(R(i,j)x_{j\tau} - \lambda p_{ij})) \geq 0 \\
&\lambda \leq 0 \\
&x \geq 0
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

5.3.2. MRP con incertidumbre en los coeficientes tecnológicos

En este caso consideramos los modelos MRP, en donde el factor de número de componentes i, necesarios para realizar componentes j, es decir $R(ij)$, no se encuentra completamente definido para algunos componentes, esto es derivado de los posibles desperdicios que se generan en el proceso de producción. A pesar de ello es posible definir un intervalo de valores $[R(i,j), R(i,j)+d(i,j)]$ que pueden tomar. Es así como podemos escribir, a partir del problema en la sección anterior, el modelo de la siguiente forma [3]:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \lambda \\
\text{s.a.} \quad & \lambda(z^+ - z^-) + \textstyle\sum_{i=1}^{P} \sum t = 1^T (T-t) x_{ij} \ \leq z^+ \\
& \textstyle\sum_{\tau=1}^{t-LT(i)} x_{i\tau} + I(i,O) - \sum_{\tau=1}^{t} (D(i,\tau) + \sum_{j=1}^{P} (R(i,j) - \lambda d(i,j)) x_{j\tau}) \geq 0 \\
& \lambda \leq 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

La aplicación de la lógica difusa en el campo de la producción y en específico al considerarlos en los sistemaas MRP, permite evaluar el resultado con respecto al máximo beneficio que se tendría, si consideramos demanda determinista. Podemos observar que la fortaleza de la lógica difusa aplicada a la toma de decisiones puede involucrar información correspondiente a datos históricos como opiniones de expertos en el campo de análisis. Esto nos permite tratar de forma matemática la vagüedad de algunos parámetros y dejar de eliminar incetidumbre de los modelos.

Capítulo 6

Conclusiones

La importancia de la lógica difusa es el corto periodo entre la introducción de la teoría y su implementación a nivel industrial. Herramientas como las técnicas heuísticas, la lógica difusa, redes neuronales, proporcionan soluciones que integran los estudios formales de las ciencias exactas y la expertiz de los usuarios, lo que permite reflejar circunstancias más reales de los sucesos.

Pese a los éxitos del control difuso y pese a estar presente en muchos de los productos tecnológicos que nos rodean, en México, existe una falta de desarrollo sobre la lógica difusa fuera de este ámbito.

La programación lineal difusa es una herramienta que reduce la incertidumbre y responde a las cuestiones de . . . ¿Qué tan seguido se debe determinar el inventario?, ¿Cuándo debe llevarse a cabo una solicitud de ese ítem?, ¿Qué cantidad debe ordenarse? Ya que a través de trabajar con rnagos más apegados a la realidad, acorde a a experiencia de consultores y los reportes históricos de los inventarios.

Dentro de las desventajas de las lógica difusa se encuentra poder determinar y establecer de forma adecuada los parámetros y la oportuna integración de las variables definidas por los expertos.

Bibliografía

[1] Bojadziev, George; Bojadziev, Maria. *Fuzzy Logic for Business, Finance and Management* World Scientific Publishing Singapore, 1997.

[2] Chase, Richard, et al. *Operation Management for Competitive Advantage* Mc Graw Hill, 2004.

[3] Cardenas J.M., Verdegay, VJ. L. *Métodos y Modelos de Progamación Lineal Borrosa*. Universidad de Murcia. Servicios de Publicaciones. 2004.

[4] J.A. Gögen. *The Logic of inexact Concepts*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Holland. Synthese 19, 1968 (325-373).

[5] Gutiérrez, Valentina, Vidal, Carlos Julio. *Modelos de Gestión de Inventarios en Cadenas de abastecimiento: Revisión de la*

Literatura. Revista Facultad de Ingeniería Universidad Antioquia No. 43. Marzo 2008 (134-149).

[6] Herrera F., Verdegay, J.L. *Thre models of fuzzy integer linear programming.* European Journal of Operational Research 83, 1995, (581-593).

[7] Kasabov, Nikola K. *Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering* Massachusetts Institute of Technology, England, 1998.

[8] Leenders, Michiel, et al. *Administración de Compras y Materiales*, Grupo Editorial Patria, México, 2010.

[9] López Ospina, Héctor Andrés, Restrepo López, Mauricio. *Programación lineal flexible con restricciones difusas.* Revista Ingeniería e Investigación. vol. 28 No.1, Abril 2008, (162-168).

[10] Mallo, Paulino Eugenio, et al. *Administración de inventarios en condiciones de incertidumbre.* Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Nacional de Mar de Plata, 2004.

[11] Martín del Brío, Bonifacio, San Molina, Alfredo. *Redes neuronales y Sistemas borrosos.* Alfaomega, México 2007.

[12] Martín del Brío,Bonifacio; Sanz Molina, Alfredo, *Redes Neuronales y Sistemas Borrosos*, Alfaomega Grupo Editor, México, 2007.

[13] L.A. Zadeh. *Fuzzy Sets* Information and Control 8. 1965, pp. 338-353.

Índice alfabético

ÍNDICE ALFABÉTICO