UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

ANÁLISIS DEL AVANCE ESCOLAR A NIVEL LICENCIATURA APLICANDO CADENAS DE MARKOV

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
NGEL LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO

TUTOR PRINCIPAL

DRA. MAYRA ELIZONDO CORTÉS. FACULTAD DE INGENIERÍA.

MÉXICO, D. F. OCTUBRE DE 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	DR.JOSÉ DE JESÚS ACOSTA FLORES
Secretario:	DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA
Vocal:	DRA. MAYRA ELIZONDO CORTÉS
1 er. Suplente:	DR. ABEL CAMACHO GALVÁN
2 do. Suplente:	M.I. ISABEL PATRICIA AGUILAR JUÁREZ

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM.

TUTOR DE TESIS:

DRA. MAYRA ELIZONDO CORTÉS

FIRMA

(Segunda hoja)

A Naye.

No hay día ni minuto,
que no te lleve a mi lado,
porque eres mi mundo,
y de ti estoy enamorado.

Agradecimientos

A la mujer de mi vida: motor, corazón e ilusión de todo lo bueno de mi vida.

A mi familia: papá, mamá y hermanos, por todo lo que son, me enseñan y representan para mí.

A Mayra, por la paciencia y consejos para desarrollar este trabajo.

A mis sinodales, por la confianza.

A Pablo, por el apoyo brindado.

A Norma y Elia, por su responsabilidad y apoyo.

A la Facultad de Ingeniería, por ser mi alma máter.

Índice

Resumen

En el presente trabajo, se desarrolla una aplicación de las cadenas de Markov en el avance escolar de los estudiantes de licenciatura de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, definiendo los estados en función del porcentaje de créditos y calculando las probabilidades de transición utilizando promedios de hasta cuatro semestres para mejorar la estimación. Con la matriz de transición definida, se procede a un análisis de cadenas absorbentes con lo que se determinan entre otras, las probabilidades de: terminar los créditos de la carrera, abandonar los estudios y avanzar de un semestre a otro; así como el número de semestres que un alumno permanece en promedio en un estado o intervalo de créditos. Esta información sirve en la planeación escolar y para localizar los semestres más conflictivos en la carrera, con la intención de proponer acciones específicas que incrementen la probabilidad de titulación y reduzcan el tiempo de permanencia en la Facultad. Finalmente, se realiza un análisis de sensibilidad para vislumbrar los efectos en las probabilidades y tiempos para concluir la carrera, al modificar las probabilidades de transición que tienen mayor impacto en la población estudiantil.

Abstract

In this paper is developed an application of Markov chains in the academic progress of students from the Faculty of Engineering of the UNAM, this is done by defining the states based on the percentage of credits and transition probabilities calculated by using averages up to four semesters to improve the estimation.
With the defined matrix transition, proceeds an analysis of absorbing Markov chains determining, among other things, the chances of: finishing the career credits, leaving school studies, moving from one semester to another; as well as the average number of semesters that a student remains in a state or in an interval of credits. This information is useful in school planning and to find troubled semesters in the career, with the intention of proposing specific actions that increase the probability of graduation and reducing the time spent in the Faculty. Finally, is performed a sensitivity analysis to discern the effects in the probabilities and in the time of graduation, when modifying the transition probabilities that have the greatest impact on the student population.

Introducción

Antecedentes

Para la escuelas de educación superior incluyendo las que imparten Ingeniería, la baja tasa de titulación es un problema constante, que se ha tratado de resolver de muchas formas. En la Facultad de Ingeniería (FI) de la UNAM, se han desarrollado a lo largo de varias décadas importantes proyectos, algunos de los cuales se han mantenido y renovado. Dentro de los proyectos que destacan para los alumnos de nuevo ingreso están:

- El examen diagnóstico, que busca determinar el nivel de antecedentes con el que ingresan los estudiantes de la FI, y que actualmente se aplica en línea a los estudiantes;
- Los cursos propedéuticos, que se impartieron por más de una década y que diversas universidades imitaron para sus propios estudiantes;
- La tutoría grupal a los alumnos de primer semestre, que con ajustes y modificaciones, se sigue programando;
- Las asesorías académicas, que se han generalizado a todas las asignaturas de ciencias básicas;
- Los talleres de ejercicios, que buscan mejorar la preparación de los alumnos en su habilidad de resolver problemas y ejercicios;
- Los talleres de antecedentes, que buscan subsanar las deficiencias del bachillerato con que ingresan los estudiantes.

Estos y otros proyectos buscan coadyuvar en la mejora del avance escolar de los alumnos de la FI; sin embargo, para concentrar los esfuerzos dónde más se requiere, es necesario iniciar con un estudio que demuestre las etapas o semestre que lo requieran en un mayor grado que el resto.

De lo anterior se desprende el objetivo del presente trabajo, el cual se describe a continuación.

Objetivo

Aplicar Cadenas de Markov en el análisis del comportamiento del avance escolar para una materia del primer semestre y por créditos durante toda la carrera de la generación 2008 en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, para la toma de decisiones en la planeación escolar y distinguir las etapas de problemáticas en el avance escolar, a fin de proponer estrategias para un mejor aprovechamiento de recursos determinando el impacto con base en un análisis de sensibilidad.

Objetivos específicos

- Investigar las aplicaciones de la Investigación de operaciones en ámbitos de planeación escolar (estado del arte);
- Justificación del uso de Cadenas de Markov en el estudio del avance escolar;
- Presentar la teoría básica de las Cadenas de Markov;
- Determinar el número de grupos a programarse en asignaturas de primer semestre para alumnos recursadores;
- Determinar el número de grupos a programarse en una asignatura de segundo semestre, con seriación antecedente;
- Calcular el tiempo promedio que tarda un estudiante en terminar los créditos de su plan de estudios;
- Determinar el impacto en el avance escolar, al reducir los cuellos de botella generados en algún semestre.

Estructura del trabajo

Para el desarrollo de la investigación, el presente trabajo se divide en cuatro capítulos.

El primer capítulo describirá la problemática actual y el estado del arte en estudios semejantes en otras universidades del mundo, así como el problema concreto a resolver.

El capítulo dos desarrollará la teoría básica de las Cadenas de Markov, para realizar el análisis del avance escolar de los alumnos de la FI, clasificando los estados y las Cadenas de Markov, y también describirá la forma en la que se planteará el problema y la forma de recolección de datos.

El capítulo tres presentará el desarrollo de la investigación, aplicando Cadenas de Markov al avance escolar de los alumnos de la FI, estudiando el caso de una asignatura de primer semestre así como el avance por créditos para una carrera de cada División profesional de la Facultad.

En el capítulo cuatro se desarrollará un análisis de sensibilidad para determinar el impacto al modificar las probabilidades de transición de la Cadena.

Finalmente, se presentarán conclusiones y recomendaciones basadas en los resultados obtenidos y la interpretación que la experiencia en el área he obtenido a lo largo de los años.

Capítulo 1
Cadenas de Markov en el avance escolar

1.1 Antecedentes y situación actual

En 1792 se funda el Real Seminario de Minería, antecedente directo de lo que hoy es la Facultad de Ingeniería. El programa de estudios del Seminario incluía Matemáticas Superiores, Física, Química, Topología, Dinámica, Hidráulica entre otras. En el año 1813, el Real Seminario de Minería se traslada al Palacio de Minería, edificio que fue terminado en 1813.

En 1825, se le nombra Colegio de Minería y en 1910, al crearse la Universidad Nacional, se reconoce a la escuela como: Escuela Nacional de Ingenieros. Dos décadas después se transforma en la Escuela Nacional de Ingeniería y en 1959, al crearse la División de Investigación y la de Estudios Superiores, se transforma en Facultad.

Actualmente la Facultad de Ingeniería (FI) de la UNAM, imparte 12 carreras a nivel licenciatura y se encuentra en el diseño de una carrera adicional, y para ello cuenta con aproximadamente 2000 académicos, de los cuales 254 son profesores de carrera y 1134 son profesores de asignatura (Tabla 1.1). Atiende a más de 11 000 alumnos y durante los últimos años puede observarse un incremento en la matrícula (Tabla 1.2), debido al incremento en los alumnos de nuevo ingreso (Tabla 1.3), y probablemente a una disminución en la deserción escolar de la Facultad. Adicionalmente, la FI ha desarrollado programas y proyectos para mejorar los índices de acreditación y el avance escolar, destacando:

- La aplicación de un Examen Diagnóstico desde los años ochentas, que ha evolucionado y su aplicación es ahora en línea, lo que permite un ahorro de recursos humanos en la aplicación y una calificación más rápida, puesto que ya no es necesario procesar las hojas de respuesta;

- Los Cursos Propedéuticos, que iniciaron en 1992 siendo voluntarios para aquellos alumnos que consideraran carecer de las bases necesarias para iniciar su primer semestre de forma completa y terminando en 2005, con resultados que parecen ser contradictorios, pues algunos consideran que fueron un éxito e inclusive fue replicado por otras universidades y otros consideran que no cubrieron las expectativas;

- La continua actualización y renovación de los planes y programas de estudio.

Tabla 1.1. Nombramientos de Personal Académico

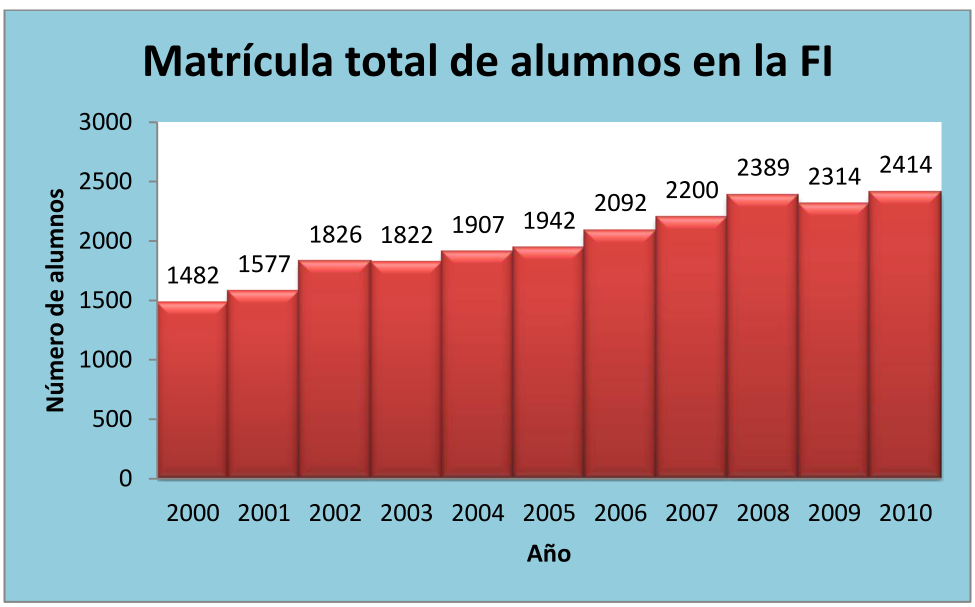
Categoría	Total
Profesores de carrera	**254**
Profesores de asignatura	**1134**
Técnicos académicos	**164**
Investigadores	**3**
Profesores eméritos	**5**
Ayudantes de profesor	**395**
TOTAL	**1937**

Fuente: Nómina de personal académico, DGAPA, quincena 8 de 2011.
http://www.ingenieria.unam.mx/paginas/estadisticas/nombramientos.php

Tabla 1.2. Matrícula total de alumnos en la FI

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Matrícula	8376	7942	8291	8581	9040	9765	10505	10912	11436	11715	12089

Fuente: Facultad de Ingeniería.
http://www.ingenieria.unam.mx/paginas/estadisticas/matricula.php

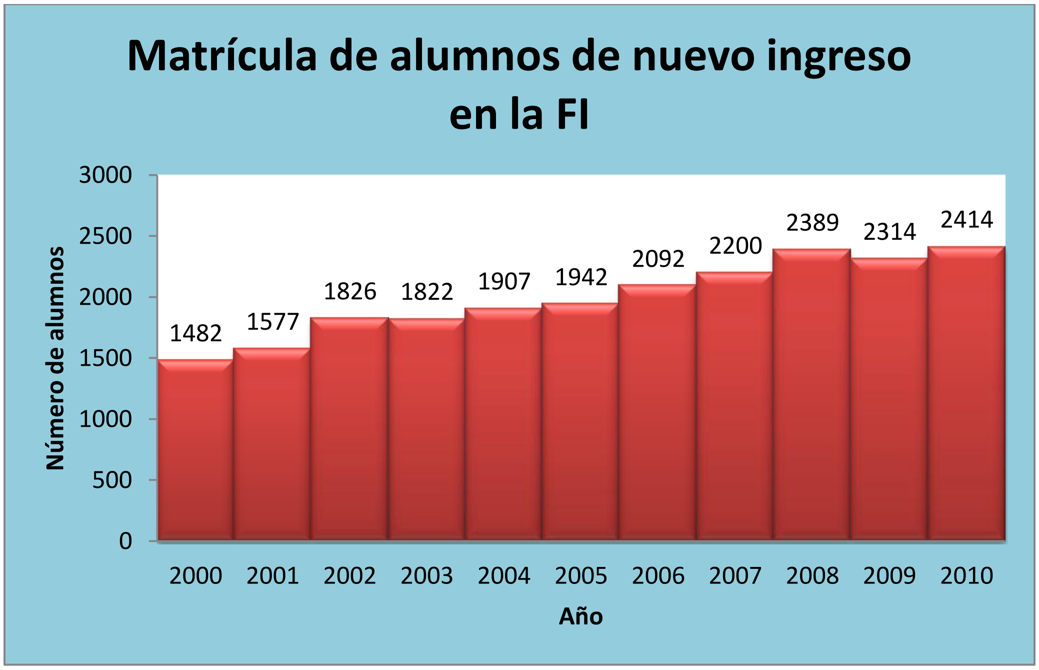


Gráfica 1.1 Matrícula total de alumnos en la FI

Tabla 1.3. Matrícula de alumnos de nuevo ingreso en la FI

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Matrícula	1482	1577	1826	1822	1907	1942	2092	2200	2389	2314	2414

Fuente: Facultad de Ingeniería.
http://www.ingenieria.unam.mx/paginas/estadisticas/matricula.php



Gráfica 1.2 Matrícula de alumnos de nuevo ingreso en la FI

Es claro que la FI, considera siempre dentro de sus líneas de acción, proyectos que le permitan realizar una mejora continua de sus procesos y mejorar la formación de sus estudiantes.

Los planes y programas de estudio actuales fueron aprobados por el Consejo Técnico de la FI en el 2008, y contienen cambios menores con respecto a los planes y programas de estudio aprobados, destacan programas como el de Tutoría Nueva Era, que está formado por tres etapas que dependen del avance escolar de cada uno de los alumnos.

Por otro lado, en la División de Ciencias Básicas se tiene el proyecto de exámenes extraordinarios en tres etapas, que busca incrementar la acreditación en las asignaturas en las que se han generado los mayores problemas por cuestión de rezago. De esta forma, desde el semestre 2012-1, se aplicaron exámenes en tres etapas en las asignaturas de Álgebra, Ecuaciones diferenciales y Geometría analítica, obteniéndose mejoras significativas en la aprobación de los sustentantes (Tabla 1.4). La selección de las asignaturas está basada en las estadísticas de reprobación, pues en estas asignaturas es donde se generan mayores problemas debido a la gran demanda que tienen.

Tabla 1.4. Comparativo de exámenes extraordinarios

Asignatura	Extraordinario común 2011-1			Extraordinario en 3 etapas 2012-1		
	Inscritos	Aprobados	%	Inscritos	Aprobados	%
Álgebra	93	3	3.2	133	27	20.3
Ecuaciones diferenciales	201	4	2	136	47	34.6
Geometría analítica	105	9	8.6	173	25	14.5

Fuente: ComparativoExtraordinarios_200111-2012-1.xlsx-FSR-110913

Son muchos los esfuerzos para mejorar la acreditación, y las medidas realizadas han resultado ser valiosas; sin embargo, no es tarea sencilla medir el impacto marginal que tiene cada uno de estos esfuerzos en el avance escolar de los alumnos. A pesar de que es casi imposible cuantificar la contribución de cada proyecto, la FI continuará aplicando los existentes y posiblemente incorporando nuevas ideas para mejorar continuamente.

Parece adecuado, por lo tanto, no atribuir el avance escolar a solo uno o algunos de estos esfuerzos, y considerar el proceso de avance escolar como un proceso estocástico y modelarlo a partir del avance escolar que los alumnos presentan en un momento dado.

1.2 Estado del arte

Las cadenas de Markov toman su nombre del autor ruso Andrey Andreyevich Markov (1856-1922) que publicó un estudio estadístico sobre el lenguaje del poema Eugene Onegin de Alejandro L. Pushkin contando la frecuencia de aparición de vocales y consonantes y tomó en cuenta sus posibles conexiones, descubriendo de primera instancia que tenían distribución normal, comprobando que en el idioma se encuentra un proceso aleatorio y que el lenguaje puede ser comprendido cuando se incluyen las relaciones entre los elementos que lo componen. Durante la segunda guerra mundial, se encontraron diversas aplicaciones por ejemplo: cálculo de dinámica de gases, en comunicaciones, reconocimiento de patrones, modelado de Monte Carlo, teoría de colas, etc. En los últimos tiempos se han encontrado diversas aplicaciones como: algoritmos de composición de música para desarrollar software, simulaciones de las funciones del cerebro, secuencias genéticas, ranking de páginas web de internet del motor de búsqueda de Google, detección de spam, así como el sistema T9 para los teléfonos móviles.

Como puede observarse, las aplicaciones de cadenas de Markov son múltiples y el ámbito de la educación no es la excepción, así, se han aplicado en:

- Diagnóstico y tratamiento de conductas y procesos de aprendizaje.
- Como un auxiliar en la evaluación de aprendizaje.

- Para realizar perfiles de usuario en plataformas *e-learning*.

El uso de cadenas de Markov aplicadas a la planeación escolar data de algunos años atrás, por ejemplo, en 1980 se publicó el artículo "*Student flow in a University Department: Results of a Markov Analysis*" (*University of Texas*), en el cual se estudia el progreso de los estudiantes de doctorado hasta la finalización del mismo, también se plantea tener más control sobre la planta docente. (BessentReviewed, 1980).

En 1985, se publicó el artículo *"Tertiary Education Faculty Planning: an application of substantially new direct control model*" (*Swinburne Institute of Tecnology, Hawthorn, Australia*) , en el cual se estudian los flujos de estudiantes en licenciatura. (NICHOLS, 1985).

En 1999, se publicó el artículo "*An application of data mining to the problem of the University Students' dropout using Markov chains*" (*University of Genova, Ita*ly), en el cual se estudia la deserción universitaria. (Puliafito, 1999).

En 2007, se realizó "*The 1st. Arab Statistical Conference*", de la cual surge el artículo "*An application of absorbing markov analysis to the student flow in an academic institution*" (Konsowa, 2007) respondiendo a las siguientes preguntas:
1. En un momento dado, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante que ha sido admitido se gradué de la Facultad de Ciencias?
2. En un momento dado, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante que ha sido admitido deserte de la Facultad de Ciencias?
3. ¿Cuál es el tiempo promedio que un estudiante invertirá en cada nivel del programa de estudios?

En 2009, se publicó el artículo "*Analysis of students' study paths using finite Markov chains*" (ENSO IKONEN, 2009), en el cual se estudia la ruta por la que avanza un estudiante tomando en cuenta también los créditos del plan de estudios para aumentar la eficiencia terminal, la finalidad es proponer un plan de estudios considerando diversos factores como la seriación entre materias. Se analizó la carrera de ingeniería Ambiental de la Universidad de Oulu (Finlandia).

En Latinoamérica también se ha estudiado este fenómeno, en el 2000 el artículo "Modelo Markoviano para el estudio de cohortes de estudiantes de un programa académico", se obtiene información del comportamiento de los estudiantes de la Universidad de EAFIT (Medellìn, Colombia), que sirva en la toma de decisiones con el fin de planear recursos. (Eugenia, 2000)

En 2008, se publicó "Modelo Probabilístico para los fenómenos de transferencia entre programas de pregrado y de deserción estudiantil", de la Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. En este artículo se concluye sobre los programas en los cuales hay mayor deserción de estudiantes. (GIRALDO G., ZAPATA G., & TORO O., 2008).

En el 2009, se publicó el artículo "Predicciones de Markov Aplicadas en el Programa de Ingeniería Industrial de la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET)" (San Cristóbal, Venezuela) (Ibarra, 2009) en el cual se pronostica:

a) El número esperado de semestres para que un alumno se gradúe o retire;
b) El número esperado de lapsos académicos que un alumno pasa en cualquier semestre, y finalmente;
c) Las probabilidades de retiro o graduación para cualquier aspirante al título de Ingeniero Industrial en la Universidad Nacional Experimental del Táchira.

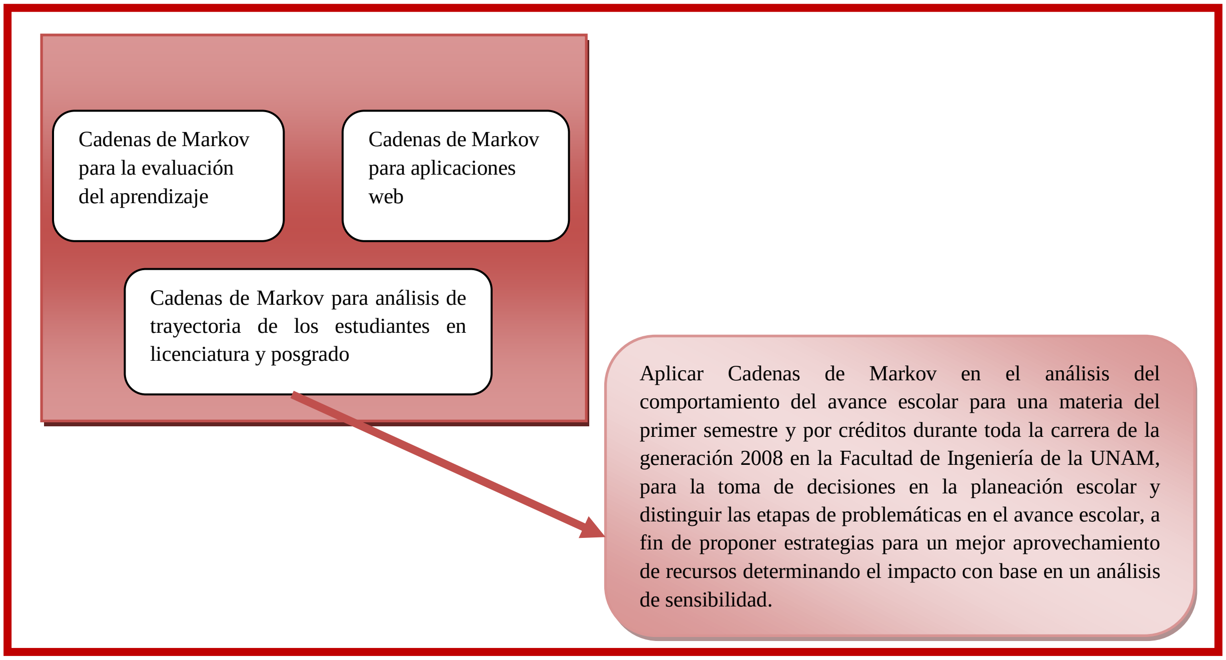


Figura 1.1 Marco de Referencia
Fuente: Elaboración propia

No solamente se ha estudiado el avance escolar utilizando cadenas de Markov, ha habido otras herramientas utilizadas por ejemplo:

Minería de datos utilizando redes bayesianas, para encontrar patrones en la matrícula de los estudiantes, para desarrollar los planes y programas de estudio, lo cual puede derivar en menor deserción de los estudiantes y por lo tanto aumentar el número de graduados, en el artículo *"Using Bayesian Network for Planning Course Registration Model for Undergraduate student*" (Bangkok, Tailandia) (Pathom Pumpuang, 2008).

Estadística básica, para establecer la situación de los alumnos en relación a otros compañeros que impactan en su éxito escolar y poder modificar escenarios académicos (Cruz, 2011).

Sin embargo, la información que se analiza en estos casos no hace las consideraciones necesarias para la toma de decisiones como probabilidades de transición de un estado a otro, es por ello que este trabajo se concentra en el uso de cadenas de Markov.

A continuación se muestra un resumen que muestra las diversas herramientas utilizadas para el estudio de la trayectoria escolar de un estudiante (Tabla 1.5).

Tabla 1.5. Resumen de herramientas utilizadas para el estudio de trayectoria escolar

Año, autores	Título	Objetos de estudio	Tipo de población analizada	Criterio de análisis	Herramientas de análisis
1980 **E. W ailand Bessent and Authella M. Bessent**	*Student flow in a University Department: Results of a Markov Analysis*	Progreso de los estudiantes de doctorado hasta la finalización del también se plantea tener más mismo, control sobre la planta docente	Doctorado (1969-1978)	Por semestres	**Cadenas de Markov**
1985 **Miles G. Nicholls**	*Tertiary Education Faculty Planning: an application of substancially new direct control model*	Flujos de estudiantes en licenciatura	Licenciatura (1977-1980) (1982-1985)	Por semestres	**Cadenas de Markov**
1999 **S. Massa and P.P. Puliafito**	*An application of data mining to the problem of the University Students' dropout using Markov chains*	Deserción universitaria	Licenciatura: Ingeniería (1978 a 1998) 15000 estudiantes	Número de exámenes aprobados,	**Minería de datos y cadenas de Markov**
2007 **Shafiqah A. Al-Awadhi and Mokhtar Konsowa**	*An application of absorbing Markov analysis to the student flow in an academic institution*	1. En un momento dado, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante que ha sido admitido se gradué de la Facultad de Ciencias? 2. En un momento dado, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante que ha sido admitido y deserte de la Facultad de Ciencias? 3. ¿Qué promedio de tiempo que un estudiante invertirá en cada nivel del programa?	Doctorado. Datos históricos 250 estudiantes Facultad de ciencias de Kuwait	Por semestres y créditos	**Cadenas de Markov**

Tabla 1.5. Resumen de herramientas utilizadas para el estudio de trayectoria escolar (continuación)

Año, autores	Título	Objetos de estudio	Tipo de población analizada	Criterio de análisis	Herramientas de análisis
2008 Pathom Pumpuang, Anongnart Srivihok, Prasong Praneetpolgrang and Somchai Numprasertchai	*Using Bayesian Network for Planning Course Registration Model for Undergraduate students*	Patrones en la matrícula de los estudiantes, para desarrollar los planes y programas de estudio lo cual puede derivar en menor deserción.	Licenciatura: Ingeniería en computación y en ciencias de la computación. Primer y segundo año. (1997-2005) 759 estudiantes	Por materias	Minería de datos: Redes Bayesianas
2008 Giraldo G., Andrés; Zapata G., Carlos J.;Toro O.,Eliana M.	*Modelo Probabilístico para los fenómenos de transferencia entre programas de pregrado y de deserción estudiantil*	Análisis de los programas en los cuales hay mayor deserción	Licenciatura 2000 al 2007 15 semestres académicos	Por carrera	Cadenas de Markov
2009 Enso Ikonen, Manne Tervaskanto and Kaddour Najim	*Analysis of students' study paths using finite Markov chains*	Ruta por la que avanza un estudiante tomando en cuenta también los créditos del plan de estudios para aumentar la eficiencia terminal.	Licenciatura 1990-2006	Por créditos	Cadenas de Markov
2009 Luis Fernando Ibarra	*Predicciones de Markov Aplicadas en el Programa de Ingeniería Industrial de la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET)*	a) El número esperado de semestres para que un alumno se gradúe o retire b) El número esperado de lapsos académicos que un cursante pasa en cualquier semestre, y finalmente; c) Las probabilidades de retiro o graduación para cualquier aspirante al título de Ingeniero Industrial en la Universidad Nacional Experimental del Táchira.	Licenciatura. Ingeniería industrial (1982-2009)	Por créditos	Cadenas de Markov

Tabla 1.5. Resumen de herramientas utilizadas para el estudio de trayectoria escolar (continuación)

Año, autores	Título	Objetos de estudio	Tipo de población analizada	Criterio de análisis	Herramientas de análisis
2011 Gema Cruz Estévez	*Evaluación del perfil de ingreso.*	Establecer la situación de los alumnos en relación a otros compañeros que impactan en su éxito escolar y poder modificar escenarios académicos.	Licenciatura en pedagogía Grupos de Primer semestre del 2009 (161 alumnos)	Interés por estudiar, estado civil, escuela de procedencia, promedio de bachillerato, etc.	Estadística Básica
2011 Ernesto Pathros Ibarra García, Pablo Medina Mora	*Model Prediction of Academic Performance for First Year Students*	Predecir el comportamiento académico de la generación siguiente a la estudiada.	Licenciatura. FI. UNAM. Generaciones 2008,2009 y 2010 6584 alumnos	Materias aprobadas	Minería de datos: Naïve Bayes

Fuente: Diversas
Elaboración propia

En el presente trabajo, se realizará un estudio de la trayectoria escolar por créditos de los Alumnos de la Facultad de Ingeniería de la UNAM de la generación 2008 utilizando cadenas de Markov.

1.3 Problema concreto a resolver

Mejor aprovechamiento de los recursos de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, analizando el avance escolar de primer semestre por materias y luego durante toda la carrera de la generación 2008 por créditos.

¿Para quién es importante?

Para la Facultad de Ingeniería, ya que el análisis de avance en créditos permitirá tomar decisiones en las áreas involucradas.

¿Por qué es importante?

- Porque de esta manera habrá una mejor planeación del número de grupos que deben abrirse de las asignaturas de primer semestre para los alumnos que van a recursar y por lo tanto habrá mejor aprovechamiento de los recursos.

- Porque se realizará un análisis para determinar los semestres que interfieren en el bajo avance escolar apoyando la toma de decisiones y el mejor aprovechamiento de los recursos, al determinar cuántos alumnos terminan la carrera, cuántos desertan y en dónde está la mayor concentración de ellos.

¿Quiénes serán los posibles usuarios?

Las áreas involucradas en la toma de decisiones de apertura de grupos y coordinaciones de materias; esto es, las Divisiones de la Facultad de Ingeniería, así como la Secretaría de Servicios Académicos.

Capítulo 2
Instrumento de análisis

2.1 Cadenas de Markov

El problema que da razón de ser a esta tesis requiere la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, por lo cual en este capítulo se desarrolla una de las técnicas para ello. En este capítulo se estudiará una técnica que permite analizar problemas que involucran procesos estocásticos para la toma de decisiones, basada principalmente en el comportamiento del sistema en el largo plazo.

La técnica fue desarrollada por el matemático ruso *Andréi Andréyevich Márkov*, quien estudiara en la universidad de San Petesburgo y fuera discípulo de *Pafnuti Chebyshev*.

2.1.1 Procesos estocásticos

Para formalizar el estudio de las Cadenas de Markov, se requiere el concepto de proceso estocástico.

Definición 2.1
Un proceso estocástico se define como una colección indexada de variables aleatorias $\{X_t\}$, en donde el índice t toma valores de un conjunto T dado.

Un proceso estocástico de tiempo discreto es simplemente una descripción de la relación entre las variables aleatorias X_0, $X_1, \ldots$, o dicho en otras palabras, es un proceso que evoluciona de forma aleatoria a lo largo del tiempo tomando valores (estados) de un conjunto dado. Las cadenas de Markov son un caso particular de los procesos estocásticos. Un ejemplo muy ilustrativo es el que se conoce como "La ruina del jugador".

La ruina del jugador

En el tiempo *0* (cero) el jugador tiene \$2. En los tiempos *1, 2, 3,...* participa en un juego en el que apuesta \$1, gana con una probabilidad p y pierde con una probabilidad $1- p$.

El objetivo del juego es aumentar el capital a \$4. El juego se suspende si el capital se reduce a cero. Este juego puede terminar en 2 apuestas o no terminar nunca, lo que lo convierte en un proceso estocástico. El problema de la ruina del jugador puede representarse en un diagrama de árbol, indicando los eventos que representan el dinero que posee el jugador.

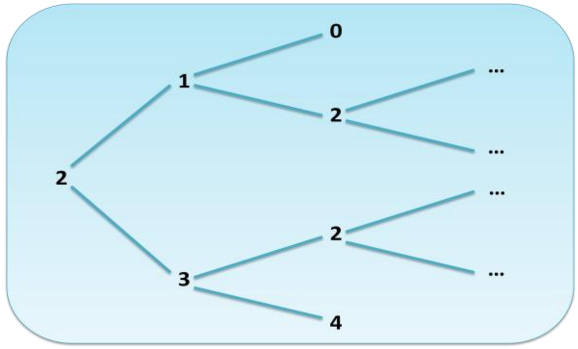


Figura 2.1. Ruina del jugador
Fuente: elaboración propia

La ruina del jugador puede describirse entonces como un proceso estocástico $\{X_t\}$ = $\{X_0, X_1, X_2,\ldots\}$, con t = 0, 1, 2,…, donde las variables aleatorias X_t toman los valores 0, 1, 2, 3 ó 4; esto es, una posibilidad del juego es: $X_0 = 2$, $X_1 = 3$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 4$.

Un proceso estocástico se puede modelar mediante una cadena de Markov, si la probabilidad de la variable aleatoria de tomar un siguiente valor depende de los valores que ha tenido con anterioridad, a esto se le llama propiedad markoviana.

2.1.2 Cadenas de Markov de Primer Orden

Las cadenas de Markov de primer orden quedan caracterizadas a través de las siguientes propiedades:

Propiedades
1. El conjunto de sucesos (estados) posibles es finito.
2. La probabilidad del siguiente suceso depende solamente del suceso inmediato anterior
   $\boldsymbol{P (X_{t+1} = j \mid X_t = i)}$
   (Propiedad markoviana)
3. Estas probabilidades permanecen constantes con el tiempo.

Definiciones básicas

Estado. Es cada suceso individual. Se denota $\boldsymbol{E_i}$, y significa el i-ésimo estado de un total de $\boldsymbol{m}$ posibles, con $\boldsymbol{2 \leq m} < \infty$. Es una caracterización de la situación en la que se encuentra el sistema en un instante determinado.

Para el ejemplo de la ruina de un jugador los estados son:
E_1 (0 pesos)
E_2 (1 peso)
E_3 (2 pesos)
E_4 (3 pesos)
E_5 (4 pesos)

Representación gráfica de estados. Es una gráfica de círculos y arcos, en la que se indican las relaciones entre los estados.

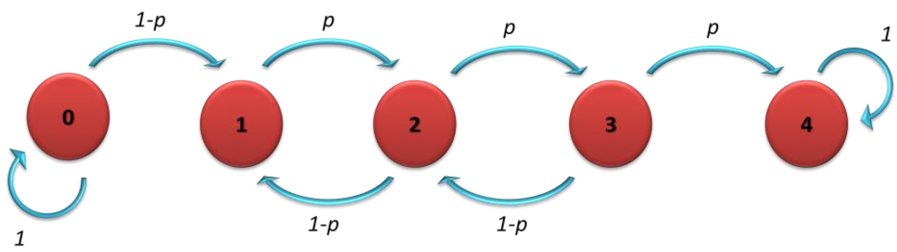


Figura 2.2. Representación gráfica
Fuente: elaboración propia

Si esta información se escribe en forma matricial se tiene la matriz de transición.

Matriz de transición. Matriz que contiene las probabilidades de transición de un estado a otro se denota mediante ***P***.

Para el ejemplo de la ruina del jugador:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc}
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\boldsymbol{1\text{-}p} & \mathbf{0} & \boldsymbol{p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \boldsymbol{1\text{-}p} & \mathbf{0} & \boldsymbol{p} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{1\text{-}p} & \mathbf{0} & \boldsymbol{p} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Obsérvese la forma en la que se escriben las probabilidades en la matriz de transición, donde los renglones indican el estado actual (desde) y las columnas el estado futuro (hasta).

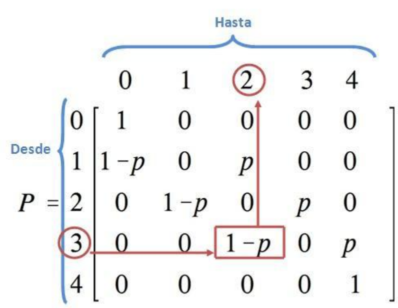


Figura 2.3. Interpretación de probabilidades
Fuente: elaboración propia

Una matriz de transición debe cumplir con las siguientes condiciones:

1) Cada elemento es una probabilidad.
2) Cada renglón (fila) suma exactamente 1.

Los elementos de la matiz de transición se denotan $\boldsymbol{p_{ij}}$, de manera que en general se tiene:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & \cdots & E_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{donde } \boldsymbol{0 \leq p_{ij} \leq 1}\,; \qquad \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{p_{ij} = 1}, \quad \boldsymbol{i = 1, 2, \dots, m}$$

2.1.3 Vector de probabilidades en el periodo n y probabilidades de n pasos

Si $\boldsymbol{\bar{V}_n}$ representa el vector que describe la probabilidad de los sucesos en $\boldsymbol{n}$ pasos cuando el estado actual es $\boldsymbol{E_i}$; entonces, en particular, el vector que describe el comportamiento actual o inicial es el $\boldsymbol{\bar{V}_0}$, mientras que en el periodo uno, o después de una transición el vector es $\boldsymbol{\bar{V}_1}$. Estos vectores se encuentran a partir de la matriz de transición y de la condición inicial del problema.

Por ejemplo, si se modela el problema del clima de cierta ciudad, considerando los estados soleado y nublado, con los siguientes estados y matriz de transición

$$E_1 \triangleq soleado, \qquad\qquad E_2 \triangleq nublado$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{E_1} \\ \boldsymbol{E_2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{E_1} & \boldsymbol{E_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0.9} & \mathbf{0.1} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.8} \end{bmatrix} \end{array}$$

y el día de hoy es soleado, entonces $\boldsymbol{\bar{V}_0} = [\,\mathbf{1}, \mathbf{0}\,]$ y las probabilidades para el día uno están dadas por:

$$\boldsymbol{\bar{V}_1} = \boldsymbol{\bar{V}_0 P} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{0.9} & \mathbf{0.1} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.8} \end{bmatrix} = [\mathbf{0.9} \quad \mathbf{0.1}]$$

esto es, la probabilidad de que el día 1 (mañana) sea soleado es 0.9, mientras que la probabilidad de que esté nublado es 0.1.

Para el día 2 (pasado mañana), se realiza un procedimiento análogo, partiendo ahora del vector en el tiempo 1, teniéndose:

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 &= \bar{V}_1 P = [0.9 \quad 0.1]\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= [\ 0.9\,(0.9) + 0.1\,(0.2) \quad 0.9\ (\,0.1\,) + 0.1\,(0.8)] \\ &= [\ 0.83 \quad 0.17] \end{aligned}$$

vector que proporciona las probabilidades para el día 2.

En general, se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 &= \bar{V}_1\, P \\ \bar{V}_3 &= \bar{V}_2\, P = (\,\bar{V}_1\, P\ )P = \bar{V}_1\, P^2 \\ &\ \vdots \\ \bar{V}_n &= \bar{V}_{n-1}\, P = (\,\bar{V}_1\, P^{n-2}\,)P = \bar{V}_1\, P^{n-1} \end{aligned}$$

Si el día de hoy (estado inicial, $n = 0$), fuera nublado en lugar de soleado, tendría que rehacerse el diagrama de árbol, para obtener las probabilidades para el día 2; pero utilizando el vector $\bar{V}_1 = [0.2 \quad 0.8]$ y la expresión $\bar{V}_2 = \bar{V}_1\, P$ se tiene

$$\bar{V}_2 = [0.2 \quad 0.8]\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = [\ 0.34 \quad 0.66]$$

En realidad, si se desea conocer el resultado después de n pasos, partiendo de cualquier estado, la matriz P^n proporciona la información requerida.

Obsérvese que para este caso

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad P^2 = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix} \qquad P^4 = \begin{bmatrix} 0.7467 & 0.2533 \\ 0.5066 & 0.4934 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.72269 & 0.27731 \\ 0.55462 & 0.44538 \end{bmatrix} \qquad P^6 = \begin{bmatrix} 0.705883 & 0.294117 \\ 0.588234 & 0.411766 \end{bmatrix}$$

$$P^{100} = \begin{bmatrix} 0.66666 & 0.33333 \\ 0.66666 & 0.33333 \end{bmatrix} \qquad P^{200} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz de transición de n pasos, P^n, se denotan mediante $p_{ij}^{(n)}$.

2.1.4 Clasificación de Estados

Estado accesible Se dice que el estado $\boldsymbol{j}$ es accesible desde el estado $\boldsymbol{i}$ si $\boldsymbol{p_{ij}}^{(n)} > \boldsymbol{0}$ para alguna $\boldsymbol{n \geq 1}$. Si el estado $\boldsymbol{j}$ es accesible desde el estado $\boldsymbol{i}$ y viceversa entonces se dice que los estados $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ se comunican. Dos estados que se comunican pertenecen a la misma clase.

Estado recurrente Si $\boldsymbol{f_{ij}}$ denota la probabilidad de que el proceso regrese al estado $\boldsymbol{i}$ dado que comienza en el estado $\boldsymbol{i}$, entonces el estado es recurrente si $\boldsymbol{f_{ii} = 1}$. Puede demostrarse que el estado $\boldsymbol{i}$ es recurrente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{p_{ii}^{(n)}} \rightarrow \infty$.

Estado transitorio Es aquel en el que $\boldsymbol{f_{ii}} < \boldsymbol{1}$. Los estados que no son transitorios son recurrentes.

Estado absorbente Es aquel que tiene una probabilidad de ser abandonado igual a cero. Es un caso especial de un estado recurrente.

Estado con periodo i Un estado con periodo $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{1}$, es aquel en el que $\boldsymbol{i}$ es el número más pequeño de pasos para regresar al estado inicial. Si un estado recurrente no es periódico, entonces se le llama aperiódico.

La recurrencia es una propiedad de clase, *i. e*. todos los estados de una clase son recurrentes o transitorios. Otra propiedad de las cadenas de Markov es la periodicidad. El periodo de un estado $\boldsymbol{i}$ es el número $\boldsymbol{t}$ de pasos, con $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{1}$, para el cual el proceso regresa (o puede regresar) al estado $\boldsymbol{i}$. Si el proceso puede regresar a $\boldsymbol{i}$ en el siguiente paso al estado se llama aperiódica.

2.1.5 Clasificación de cadenas de Markov

Cadena Ergódica

Es aquella que describe un proceso en el cual es posible avanzar desde un estado hasta cualquier otro estado.

Una matriz ergódica cumple que $\boldsymbol{lim_{n\rightarrow\infty} P^n}$ existe. Si todos los estados de una cadena son recurrentes, de una misma clase y aperiódicos entonces la cadena es ergódica.

Cadena Absorbente

Cuando en una cadena de Markov existe por lo menos un estado absorbente y es posible ir a él, desde cada estado no absorbente en cierto número de pasos, entonces la cadena se llama absorbente. Una cadena con estado absorbente no puede ser regular.

2.1.6 Condiciones de estado estable

Para la matriz de transición $\boldsymbol{P}$, del ejemplo de los días soleados o nublados, se observa que a medida que $\boldsymbol{n}$ aumenta, los valores $\boldsymbol{p_{ij}}^{\boldsymbol{n}}$ tienden hacia un límite fijo y los vectores $\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{n}}$ tienden a hacerse iguales, es decir:

1) Para un valor de $\boldsymbol{n}$ suficientemente grande, el vector de probabilidad $\overline{\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}}_{\boldsymbol{n}}$ no cambia.
2) Puesto que $\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{n+1}} = \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{P}$ y $\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{n+1}} = \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{n}}$ entonces existe un vector $\overline{\boldsymbol{V}}^{*}$ tal que: $\overline{\boldsymbol{V}}^{*} = \overline{\boldsymbol{V}}^{*}\,\boldsymbol{P}$

Los elementos del vector $\overline{\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}}^{*}$ de estado estable se suelen denotar con la letra griega $\boldsymbol{\pi}$

Para obtener el vector $\overline{\boldsymbol{V}}^{*}$ se utiliza

$$[\boldsymbol{\pi_1} \quad \boldsymbol{\pi_2} \quad \boldsymbol{\pi_3} \quad \dots \quad \boldsymbol{\pi_m}]\,\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\pi_1} \quad \boldsymbol{\pi_2} \quad \dots \quad \boldsymbol{\pi_m}]$$

de donde se descarta una ecuación, y de la condición $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\pi_j} = \boldsymbol{1}$ se obtienen $\boldsymbol{m}$ ecuaciones con $\boldsymbol{m}$ incógnitas.

Para el ejemplo de los días

$$[\boldsymbol{\pi_1} \quad \boldsymbol{\pi_2}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{0.9} & \boldsymbol{0.1} \\ \boldsymbol{0.2} & \boldsymbol{0.8} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\pi_1} \quad \boldsymbol{\pi_2}]$$

$$\boldsymbol{0.9\pi_1 + 0.2\,\pi_2 = \pi_1 \dots (1)}$$
$$\boldsymbol{0.1\pi_1 + 0.8\,\pi_2 = \pi_2 \dots (2)}$$
$$\boldsymbol{\pi_1 + \pi_2 = 1 \dots (3)}$$

descartando (2)

$$\boldsymbol{0.9\pi_1 + 0.2\,\pi_2 = \pi_1}$$
$$\boldsymbol{\pi_1 + \pi_2 = 1}$$

de donde

$$\boldsymbol{\pi_1 = \frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{\pi_2 = \frac{1}{3}}$$

Antes de obtener las condiciones de estado estable se debe verificar si la cadena es ergódica.

2.1.7 Cadenas absorbentes

Para una cadena de Markov absorbente, se puede requerir la siguiente información:

1. El número esperado de pasos antes de que el proceso sea absorbido;

2. El número esperado de veces que el proceso está en cualquier estado dado no absorbente;
3. La probabilidad de absorción por cualquier estado dado.

Para obtener esta información, la matriz de transición debe reescribirse agrupando cuatro submatrices.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix}$$

Considerando $\boldsymbol{a}$ estados absorbentes y $\boldsymbol{n}$ no absorbentes, por lo que se tienen $\boldsymbol{a + n = m}$ estados en total.

$\boldsymbol{I}$ matriz identidad $\boldsymbol{a \times a}$.
$\boldsymbol{O}$ matriz cero $\boldsymbol{a \times n}$.
$\boldsymbol{A}$ A matriz de $\boldsymbol{n \times a}$ Probabilidades de no absorbente a absorbente.
$\boldsymbol{N}$ matriz de $\boldsymbol{n \times n}$ Probabilidades de no absorbente a no absorbente.

El número esperado de veces que el proceso puede estar en un estado no absorbente $\boldsymbol{j}$ es la suma de los siguientes términos.

Número esperado de veces en j = (1) (prob. de estar en j al inicio)
+ (1)(prob. de estar en j después de un paso)
+ (1)(prob. de estar en j después de dos paso)
+ …

Las probabilidades de estar en un estado no absorbente $\boldsymbol{j}$ están dadas por la matriz $\boldsymbol{N}$, por lo que la expresión puede reescribirse como:

Número esperado de veces en j $\boldsymbol{= (1)\, N^0 + (1)\, N + (1)\, N^2 + \ldots}$
$\boldsymbol{= I + N + N^2 + \ldots}$

Puesto que los elementos de $\boldsymbol{N}$ son probabilidades entre 0 y 1, $\boldsymbol{0 \le p_{ij} \le 1}$, y en el proceso existen estados absorbentes, a medida que aumenta el número de pasos $\boldsymbol{n}$, la probabilidad de permanecer en un estado no absorbente disminuye, es decir $\boldsymbol{N^n}$ tiende a cero, por lo que la suma converge.

Recordando la serie de potencias

$$\boldsymbol{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1 - x}}\ , \qquad |\boldsymbol{x}| < 1$$

se puede demostrar, de manera análoga que

$$\boldsymbol{I + N + N^2 + N^3 + \ldots = (I - N)^{-1}}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es una matriz identidad de $\boldsymbol{n \times n}$.

Fórmula 2.1. ***Número esperado de veces en el estado no absorbente j***

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1}$$

La suma de los elementos de $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1}$ por renglón representa el número esperado de pasos antes de la absorción, mientras que cada elemento representa el número esperado de veces que el proceso está en un estado no absorbente partiendo de un estado no absorbente cualquiera.

Para obtener la probabilidad de absorción por cualquier estado absorbente dado se utiliza casi el mismo análisis.

Si ***j*** denota un estado absorbente, entonces:

Prob. de terminar en j = Prob de ir desde i hasta j en 1 paso + Prob. de ir desde i hasta j en 2 pasos + …

Prob. de ir desde i hasta j en 1 paso = A

Prob. de ir desde i hasta j en 2 pasos = (Prob. de ir desde i hasta k en 1 paso) **X** ***(Prob. de ir desde k hasta j en 1 paso), sumada para todos los valores de k= NA***

Prob. de ir desde i hasta j en 3 pasos = (Prob. de ir desde i hasta k en 2 pasos) **X** ***(Prob. en ir desde k hasta j en 1 paso), sumada para todos los valores de k=*** N^2A

Prob. de ir desde i hasta j en 4 pasos = N^3A

Prob. de ir desde i hasta j en 4 pasos = $N^{n-1}A$

Por lo que la probabilidad de ir desde hasta es la suma de los términos de una serie convergente.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Probabilidad\ de\ ir\ desde\ i\ hasta\ j} &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{NA} + \boldsymbol{N^2A} + \cdots \\ &= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{N^2} + \ \dots)\boldsymbol{A} \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1}\ \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

Los elementos de la matriz $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1}\ \boldsymbol{A}$ proporcionan las probabilidades de ir desde un estado no absorbente, hasta uno absorbente.

Fórmula 2.2. Probabilidad de absorción

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1}\,\boldsymbol{A}$$

2.1.8 Costo promedio esperado

Sin duda una de las principales aplicaciones de las cadenas de Markov ergódicas, es la del cálculo de costos promedio. A partir de las probabilidades de estado estable, y con el costo que tiene cada estado se calcula el costo promedio, lo que permite evaluar la conveniencia entre varias alternativas a partir del criterio de costo o de utilidad.

Definición 2.2
Dada una cadena de Markov con probabilidades de estado estable π_i, entonces el costo promedio esperado por unidad de tiempo, está dado por:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t-1}^{n} c\,(X_t)\right] = \sum_{j=0}^{M} \pi_j\, c(\,j\,)$$

donde $\boldsymbol{c}(\,\boldsymbol{X_t}\,)$es el costo cuando el proceso se encuentra en el estado $\boldsymbol{X_t}$ en el tiempo $\boldsymbol{t}$.

Entonces, si $\boldsymbol{C}$ es el costo por unidad de tiempo, se utilizará la expresión:

$$\boldsymbol{E}\,[\boldsymbol{C}] = \sum_{j=0}^{M} \boldsymbol{\pi_j}\, \boldsymbol{c}(\,\boldsymbol{j}\,)$$

para evaluar el costo promedio esperado por unidad de tiempo.

2.1.9 Tiempos de primera pasada

Para las cadenas ergódicas, es común calcular lo que se conoce como tiempos de primera pasada, que en realidad se refiere al número de pasos (o transiciones) que en promedio toma ir del estado i al estado j.

Definición 2.3
El número esperado de transiciones para ir por primera vez al estado j, dado que actualmente se está en el estado i se llama tiempo de primera pasada o tiempo promedio de primer pasaje y se denota por $\boldsymbol{\mu_{ij}}$.

El número de pasos (o transiciones) que toma ir del estado i al estado j es una variable aleatoria.

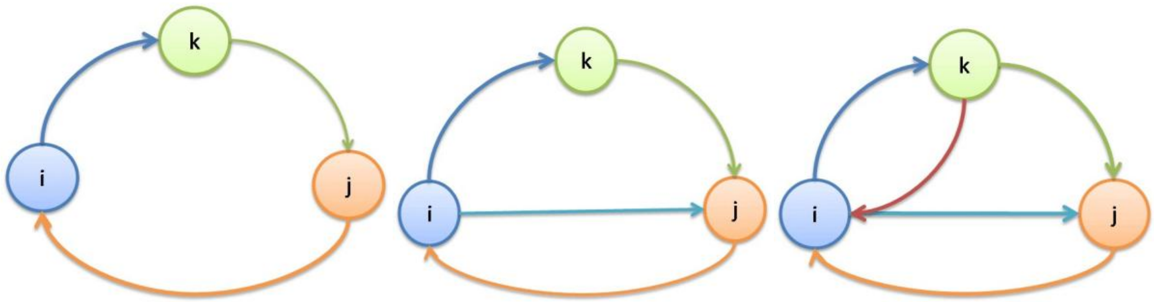


Figura 2.4 a **Figura 2.4 b** **Figura 2.4 c**

Fuente: elaboración propia

Por ejemplo en la figura 2.4 a, el ir de $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$ simplemente toma 2 pasos, pero en la figura 2.4 b puede tomar 1 ó 2 pasos. En la figura 2.4 c puede tomar 1, 2, 3,... pasos, por lo que se ve claramente, que el número de pasos es una variable aleatoria. Su función de probabilidad se denota mediante $\boldsymbol{f_{ij}^{(n)}}$esto es, si $\boldsymbol{n}$ es el número de pasos para ir de $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$ por primera vez, se tiene

N	1	2	3	4	…
$f_N^{(n)}$	$f_{ij}^{(1)}$	$f_{ij}^{(2)}$	$f_{ij}^{(3)}$	$f_{ij}^{(4)}$	…

donde

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

$$f_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)}\, p_{jj}$$

$$f_{ij}^{(3)} = p_{ij}^{(3)} - f_{ij}^{(1)}\, p_{jj}^{(2)} - f_{ij}^{(2)} p_{jj}$$

$$\vdots$$

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)}\, p_{jj}^{(n-1)} - f_{ij}^{(2)}\, p_{jj}^{(n-2)} - \ldots - f_{ij}^{(n-1)}\, p_{jj}$$

Sin embargo, la última ecuación recursiva para el cálculo de las probabilidades $f_{ij}^{(n)}$ puede replantearse de la siguiente forma

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

$$f_{ij}^{(2)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(1)}$$

$$\vdots$$

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}$$

Las probabilidades obtenidas son las mismas por cualquiera de los dos métodos, el segundo método es más elaborado porque requiere el cálculo de probabilidades adicionales; sin embargo, permite visualizar el valor de $f_{ij}^{(n)}$ como una suma de términos.

En cualquier método se observa que las $f_{ij}^{(n)}$ son números no negativos, y al ser probabilidades se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1$$

cuando la suma es 1, se tiene una distribución de la variable aleatoria tiempo de primera pasada, mientras que, cuando la suma es menos que 1, se tiene un proceso en el cual puede no alcanzarse el estado ***j*** partiendo del estado ***i***.

Sea $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ el número de pasos promedio para ir del estado ***i*** al estado ***j*** se tiene que:

$$\boldsymbol{\mu_{ij}} = \begin{cases} \infty \quad , & \boldsymbol{si} \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{f_{ij}^{(n)}} < 1 \\ \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{n\, f_{ij}^{(n)}} , & \boldsymbol{si} \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{f_{ij}^{(n)}} = \boldsymbol{1} \end{cases}$$

y cuando $\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{f_{ij}^{(n)}} = \boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ satisface de forma única la ecuación:

$$\boxed{\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}}$$

Existe una relación entre las probabilidades de estado estable $\boldsymbol{\pi_i}$ y los tiempos de primera pasada para ir del estado ***i*** al mismo estado ***i***, lo que se llama tiempo de recurrencia.

$$\boxed{\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}}$$

Esta ecuación simplifica el cálculo de los sistemas de ecuaciones que se tienen que resolver para el cálculo de los tiempos de primera pasada.

Otra relación importante, es la que existe entre el tiempo de primera pasada (cadenas ergódicas) y el número de pasos antes de que el proceso sea absorbido (cadenas absorbentes). Si solo se desea calcular un tiempo de primera pasada (que no sea tiempo de recurrencia) entonces se puede modificar la cadena convirtiéndola en absorbente y luego realizar el análisis $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-\mathbf{1}}$, para obtener el tiempo de primera pasada como el número de pasos antes de que el proceso sea absorbido.

2.2 Metodología

La figura 2.5 resume en forma esquemática la metodología que se utilizará en la presente investigación, iniciando con el Planteamiento del problema y terminando con el Análisis de cadenas y conclusiones. Deben destacarse la Recopilación de la información histórica, de la cual depende la investigación. La Obtención de datos faltantes, la generación de estados, y el Análisis de las cadenas, que constituyen el cuerpo de la investigación. En la siguiente sección se describen detalladamente cada uno de estos pasos.

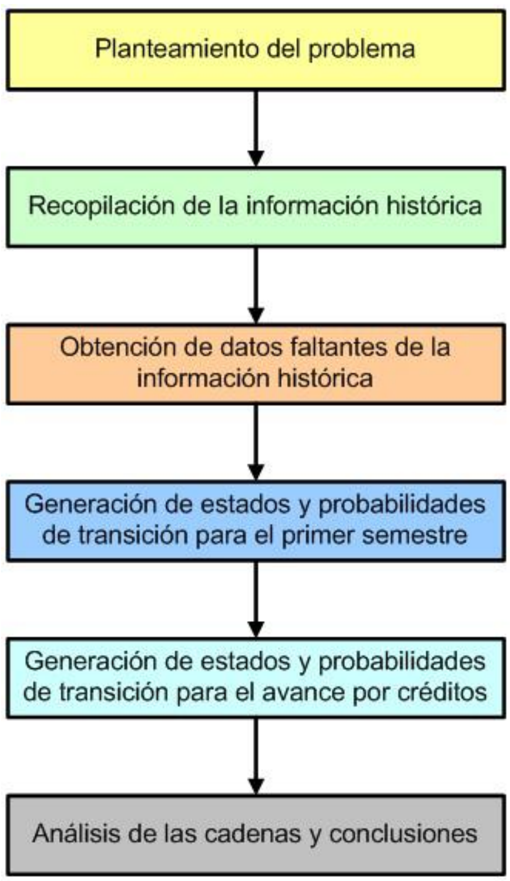


Figura 2.5. Metodología empleada
Fuente: elaboración propia

2.2.1 Planteamiento del problema

El problema detectado es el bajo avance escolar de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería (FI), así como la baja eficiencia terminal que se tiene en las carreras. Se han realizado estadísticas que muestran que los alumnos se rezagan desde los primeros semestres; sin embargo, no se han hecho estudios sobre las probabilidades de avanzar de un semestre a otro y tampoco se ha realizado un análisis para determinar si las cargas de créditos están equilibradas a lo largo de los semestres en los que los alumnos cursan su carrera. Un análisis de cargas adecuadas, medido a través de la probabilidad de acceder al siguiente bloque de créditos, o semestre, puede permitir la reducción de la carga en los semestres que se convierten en cuellos de botella para los estudiantes de la FI.

2.2.2 Recopilación de la información histórica

Para poder realizar un análisis del avance escolar con cadenas de Markov, se debe contar con información estadística que permita aproximar las probabilidades de transición, una vez definidos los estados, por lo que se solicitará la información histórica sobre el avance escolar de los alumnos de una generación de la FI. La información se procesará para analizar dos enfoques.

El primer enfoque consistirá en analizar el comportamiento del primer semestre, pues es el único en el que puede considerarse a toda la población, antes de desertar(abandonar los estudios), y que históricamente se ha considerado como un semestre trascendental en la formación y en el cual se encuentran algunas de las asignaturas con mayor índice de reprobación en la FI, por lo que se solicitará la información de acreditación por alumno, para cada una de sus asignaturas en el primer semestre. La información se solicitará a la Secretaría de Apoyo a la Docencia, de la FI, quien por estar interesada en mejorar el avance escolar de los alumnos, ha concentrado la información del porcentaje de créditos que obtienen los alumnos al término de varios semestres.

El segundo enfoque consistirá en analizar el avance escolar mediante el porcentaje de créditos aprobados por los alumnos en cada semestre, por lo cual se solicitará para cada alumno de una generación, el número de créditos obtenidos al concluir cada uno los semestres de su carrera. Esta información también será solicitada a la Secretaría de Apoyo a la Docencia de la FI, de igual forma por ser quien conserva algunos de los históricos de los avances por créditos.

2.2.3 Obtención de datos faltantes

La información del avance por créditos no es algo que la FI tenga sistematizado como parte de un programa o como responsabilidad de un área, por lo que es posible que la información que se pretende solicitar no se tenga completa semestre con semestre, para algunos alumnos o para algún semestre. Si la información se tiene completa, entonces se realizarán las definiciones de estados y el cálculo de probabilidades de transición que la información proporcionada permita.

Si la información es incompleta, se analizará considerando las siguientes posibilidades:

- Si faltan datos solo para los alumnos de la generación que provienen de situaciones especiales (cambio de carrera, permisos, etc.), entonces se excluirán de la base de datos para continuar con los alumnos de los que se tiene toda la información.

- Si faltan datos de un semestre intermedio, entonces se realizará una interpolación lineal con la información de los semestres adyacentes.

Adicionalmente, se utilizará toda la información que la Secretaría de Apoyo a la Docencia pueda proporcionar.

Cualquier caso no contemplado hasta este momento se reevaluará durante el análisis de los datos.

2.2.4 Generación de estados y probabilidades de transición

Una vez que se haya depurado y completado la información del avance escolar por créditos de los alumnos de la FI, se definirán los estados de una forma tal que facilite su interpretación.

Se definirán los estados relevantes y las probabilidades de transición de la Cadena de Markov para el análisis de los alumnos de la generación 2008, considerando dos casos:

- Para el primer semestre se estudiará la asignatura con mayor reprobación, definiendo los estados en función de la forma en la que los alumnos están inscritos en la asignatura antes de desertar o acreditar. La forma en que los alumnos de primer semestre acrediten una asignatura con seriación obligatoria, permitirá realizar un cálculo del número de grupos para la asignatura consecuente.

- Para el análisis de avance por créditos, se seleccionará una carrera de cada División profesional de la FI, para mostrar semejanzas y diferencias en el avance y luego poder realizar comparaciones con el avance de todos los alumnos de la FI, sin importar su carrera. Se definirán los estados en función del porcentaje de créditos que debe cubrir un estudiante en cada semestre de su carrera.

2.2.5 Análisis de las cadenas y conclusiones

Se analizarán las cadenas obtenidas y se interpretarán los resultados de las cadenas absorbentes, destacando la probabilidad de deserción y la probabilidad de concluir los créditos del plan de estudios. Se localizarán también los semestres problemáticos o que interfieren en mayor grado en el avance escolar, con el propósito de hacer un análisis de sensibilidad, al modificar las probabilidades de transición para esos semestres.

Para la cadena de Markov que se obtenga con la asignatura de primer semestre, se calculará la probabilidad de acreditar la asignatura, lo que implique se calculará la probabilidad de no acreditarla, lo que se interpretará como un alumno que "deserta"[1] de dicha asignatura. Del análisis de cadenas absorbentes también se calculará el número de semestres en promedio que tarda en acreditar o desertar de dicha asignatura.

Para el análisis del avance escolar, se obtendrán las probabilidades de concluir los créditos de la carrera, lo que deja al alumno en posibilidad de titularse; en contraparte, se calculará la probabilidad de abandonar la carrera. Adicionalmente, se calcularan las probabilidades de concluir la carrera en función del semestre en el que se encuentre el alumno y se determinarán los semestre de mayor grado de dificultad en términos de la probabilidad de pasar al siguiente bloque de créditos.

Posteriormente se realizará un análisis de sensibilidad, para observar el impacto que pueda producir una modificación en las probabilidades de transición del semestre con mayor problemática.

A partir del análisis se realizarán conclusiones sobre la utilidad del análisis de las cadenas de Markov y sobre el análisis de sensibilidad realizado, con la intención de realizar algunas sugerencias o recomendaciones que contribuyan a mejorar la acreditación y la eficiencia terminal de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería.

[1] En la Facultad de Ingeniería se encuentra generalizado el término *desertar*, para referirse a un alumno que abandona los estudios.

Capítulo 3
Desarrollo de la investigación

En este capítulo de describen los análisis realizados utilizando las cadenas de Markov en el avance escolar de los alumnos de la FI, así como el estudio particular de una asignatura del primer semestre.

3.1 Acreditación de una asignatura

Para mostrar la forma en la que se pueden aplicar las cadenas de Markov, al estudio de una asignatura, se decidió considerar las asignaturas de primer semestre, por ser las de mayor impacto en el desempeño del alumno. Debe recordarse que prácticamente todas las carreras de ingeniería cursan Álgebra, Cálculo diferencial y Geometría analítica[2] en el primer semestre. La tabla 3.1 ilustra los porcentajes de acreditación de las asignaturas de primer semestre con mayor población, para la generación 2008.

Tabla 3.1 Acreditación de asignaturas del primer semestre

Asignatura	Porcentaje de acreditación
Álgebra	**64.36**
Cálculo Diferencial	**56.94**
Computación para ingenieros	**66.34**
Geometría analítica	**52.13**
Química	**52.62**

Fuente: Elaboración propia

En virtud de que la asignatura con menor acreditación es Geometría analítica, se decidió estudiar el comportamiento de esta asignatura mediante una cadena de Markov, para ayudar en el cálculo de grupos a reprogramarse en el semestre par, así como el número de grupos para la asignatura consecuente, que en este caso es Estática.

Para el caso particular de una signatura de primer semestre en la FI, los alumnos cursan la asignatura por primera vez, y pueden acreditarla o reprobarla. Si los alumnos acreditan, entonces son candidatos para cursar Estática, pero si reprueban deben cursarla nuevamente o presentar examen extraordinario. La experiencia nos indica que es despreciable el número de alumnos que opta por el extraordinario cuando puede cursar nuevamente la asignatura, por lo que se inscribe a extraordinario solamente si ha cursado y reprobado dos veces la asignatura. Considerando también la posibilidad de que presente examen extraordinario en el tercer periodo y seleccionando a uno de sus sinodales, lo que

[2] En la carrera de Ingeniería Civil se cursa Geometría analítica en el segundo semestre.

en la FI se conoce como “alumno oyente” (o ASDRI, alumno sin derecho a reinscripción), entonces los estados para modelar el problema de la acreditación de Geometría analítica son:

Definición de estados:

E1 = El alumno cursa por primera vez la asignatura
E2 = El alumno cursa por segunda vez la asignatura
E3 = El alumno “cursa como oyente” la asignatura
E4 = El alumno presenta examen extraordinario de la asignatura
E5 = El alumno acredita la asignatura
E6 = El alumno deserta de la carrera

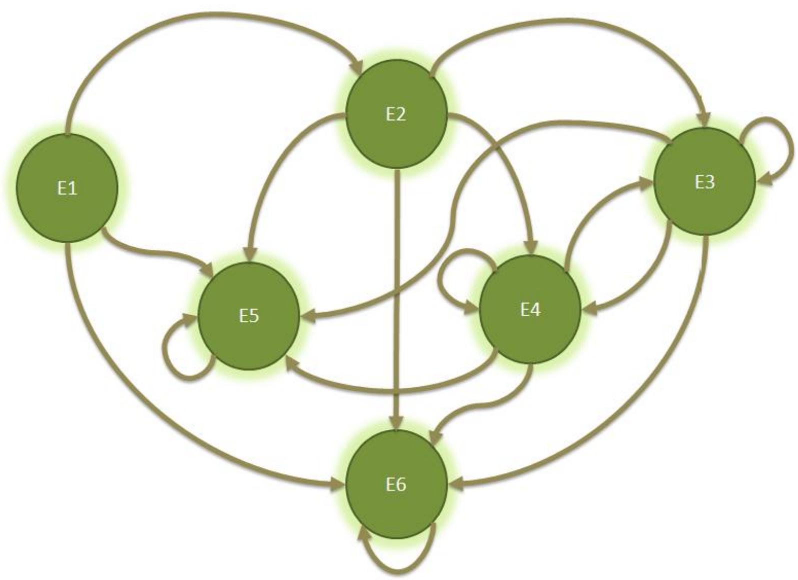


Figura 3.1 Cadena para acreditar una asignatura
Fuente: elaboración propia

Para realizar un análisis por periodo semestral, debe despreciarse la posibilidad de que un alumno presente examen extraordinario y adicionalmente esté inscrito como oyente.

El cálculo de las probabilidades de transición se obtiene a partir de la información de los resultados de acreditación del primer semestre. La tabla 3.1 proporciona la probabilidad de acreditar dado que se está cursando por primera vez la asignatura, esto es $p_{12} = 1 - 0.5213 = 0.4787$.

La probabilidad de acreditar la asignatura cuando se cursa por segunda vez se obtiene de la acreditación por asignatura para un semestre par, esto es, cuando los alumnos son recursadores, por lo que de la tabla 3.1 se tiene: $p_{25} = 0.463$.

Tabla 3.2 Acreditados en Geometría analítica, semestre par, alumnos regulares

GRUPO	Inscritos	Acreditados	No acreditados
1	51	30	21
2	49	13	36
3	48	24	24
4	24	5	19
5	21	2	19
6	40	9	31
7	49	11	38
8	50	6	44
9	50	36	14
10	50	12	38
11	50	21	29
12	50	18	32
13	50	24	26
14	50	22	28
15	50	30	20
16	50	19	31
17	51	46	5
18	50	35	15
19	49	28	21
20	24	8	16
21	30	15	15
22	17	5	12
24	49	33	16
25	17	6	11
26	47	23	24
27	38	26	12
28	12	6	6
29	28	13	15
31	31	18	13
Total	1175	544	631
Porcentaje		46.30%	53.70%

Fuente: elaboración propia. Semestre 2009-2

La probabilidad de acreditar en examen extraordinario se toma de la información de acreditación del examen en tres etapas, que se aplica en esta asignatura en semestres recientes, obteniéndose $p_{45} = 0.145$. Fuente: ComparativoExtraordinarios_2011-1-2012-1.xlsx-FSR-110913.

La probabilidad de presentar examen extraordinario o cursar como oyente, cuando el alumno ha reprobado dos veces la asignatura se calcula de forma indirecta considerando a los alumnos que han reprobado dos veces y la oferta para alumnos oyentes. La probabilidad de que los alumnos deserten después de reprobar Geometría analítica se obtiene de la base de datos par la generación 2008, $p_{16} = 0$, $p_{26} = 0.0556$, $p_{36} = p_{46} = 0.0109$.

La probabilidad de presentar examen extraordinario o cursar como oyente, cuando el alumno ha reprobado dos veces la asignatura se calcula de forma indirecta considerando que el 70% de los alumnos vuelven a cursar como oyentes la asignatura y solo el 30% de ellos se inscribe a un examen extraordinario, por lo que, desde el estado 2, se tiene la probabilidad de acreditar y la de desertar, restando una probabilidad de 0.4814, que se pondera según los porcentajes anteriores, quedando $p_{23} = 0.337$ y $p_{24} = 0.1444$.

El resto de las probabilidades se calculan realizando el ajuste para que la suma de las probabilidades de cada renglón sea la unidad, y se obtenga una matriz estocástica, tal como se describió en el capítulo 2.

La representación gráfica de la cadena con las probabilidades calculadas se observa en la figura 3.2.

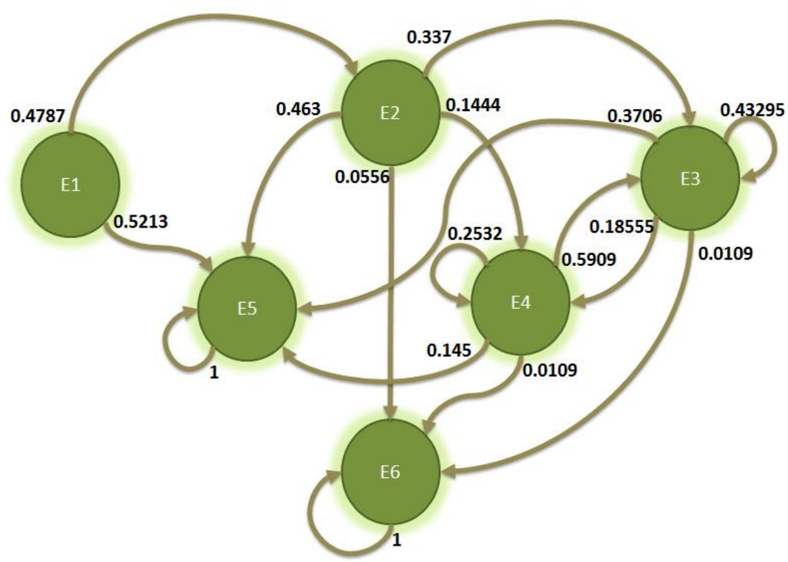


Figura 3.2 Representación de la cadena de Markov
Fuente: elaboración propia

La matriz de transición de un paso para los estados descritos es la siguiente:

$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0.4787 & 0 & 0 & 0.5213 & 0 \\
0 & 0 & 0.337 & 0.1444 & 0.463 & 0.0556 \\
0 & 0 & 0.433 & 0.1856 & 0.3706 & 0.0109 \\
0 & 0 & 0.5909 & 0.2532 & 0.145 & 0.0109 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Realizando el análisis de cadenas absorbentes, descrito en 2.1.7, se tiene que:

La submatriz con las probabilidades de no absorción es ***N***, por lo que:

$$
\boldsymbol{N} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0.4787 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.337 & 0.1444 \\
0 & 0 & 0.433 & 0.1856 \\
0 & 0 & 0.5909 & 0.2532
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

La submatriz de probabilidades de absorción ***A*** es:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.5213 & 0 \\
0.463 & 0.0556 \\
0.3706 & 0.0109 \\
0.145 & 0.0109
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Y el número de semestres que un estudiante está inscrito en la asignatura de Geometría analítica antes de acreditarla se obtiene del análisis de cadenas absorbentes, descrito en el capítulo 2, por lo que:

$$
(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0.4787 & 0.514 & 0.2203 \\
0 & 1 & 1.0738 & 0.4602 \\
0 & 0 & 2.3796 & 0.5913 \\
0 & 0 & 1.8828 & 1.8069
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Finalmente, la probabilidad de llegar a un estado absorbente está dada por la fórmula 2.1, $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{A}$, por lo que:

$$
(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.9654 & 0.0346 \\
0.9277 & 0.0723 \\
0.9676 & 0.0324 \\
0.9589 & 0.0402
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

De este análisis, los principales resultados son: la probabilidad de que un alumno que cursa por primera vez Geometría analítica acredite en algún semestre es 0.9654, mientras que la probabilidad de que deserte es 0.0346; y de la fórmula 2.1, en promedio un alumno tarda 2.213 (= 1 + 0.4787 + 0.514 + 0.2203) semestres en acreditar la asignatura.

Para una población de 2500 alumnos de nuevo ingreso, se deberán programar 24.4 grupos, en virtud de que se tendrán $2500\,(0.4787) \approx 1220$ alumnos aproximadamente, considerando 50 alumnos por grupo. Adicionalmente, deben considerarse los alumnos ASDRI, que pueden aproximarse mediante, $1220\,(0.337) \approx 412$, lo que generaría 8.24 grupos adicionales. Esto lleva a programar 32.64 grupos en promedio, es decir, 33 grupos. De este número se observa el porqué al programar 30 grupos en semestre par, los grupos quedan sobresaturados y deben abrirse a un mayor número de estudiantes.

3.2 Cálculo del número de grupos para asignaturas con seriación antecedente

La Facultad de ingeniería realiza la planeación de grupos semestre a semestre, y en particular en los primeros semestres realiza el cálculo del número de grupos que va a ofertar en función del semestre par o impar. Los cálculos que realiza suelen ser bastante acertados; sin embargo, aquí se presenta una forma de realizar dicho cálculo aplicando las cadenas de Markov.

Figura: 3.3 Fragmento del mapa curricular de la carrera Ingeniería Industrial
Fuente: http://www.ingenieria.unam.mx/paginas/Carreras/planes2010/
ingIndustrial_Plan.php

Para ilustrar la forma de realizar el cálculo, se investiga cuáles son las asignaturas de segundo semestre, con seriación obligatoria antecedente. En la figura 3.3 se muestra un fragmento el mapa curricular de la carrera de Ingeniería Industrial, y se observa con una línea vertical que une dos cuadros de asignatura la seriación obligatoria. Con la información de los semestres 2009-2 y 2010-1, considerando los alumnos regulares y los oyentes se obtiene la tabla 3.3.

La asignatura con menor acreditación es Álgebra lineal, por lo que se realiza el análisis para esta asignatura.

Tabla 3.3 Porcentaje de acreditación de asignaturas del segundo semestre

Asignatura	Porcentaje de acreditación
Álgebra lineal	**45.75%**
Cálculo diferencial	**51.32%**
Estática	**60.58%**

Fuente: Elaboración propia

Considerando los seis estados que se utilizaron para el estudio de la asignatura Geometría analítica.

E_1 = El alumno cursa por primera vez la asignatura
E_2 = El alumno cursa por segunda vez la asignatura
E_3 = El alumno "cursa como oyente" la asignatura
E_4 = El alumno presenta examen extraordinario de la asignatura
E_5 = El alumno acredita la asignatura
E_6 = El alumno deserta de la carrera

se tiene la matriz de transición siguiente:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0.518 & 0 & 0 & 0.462 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.4124 & 0.1767 & 0.3859 & 0.025 \\ 0 & 0 & 0.2685 & 0.2685 & 0.448 & 0.015 \\ 0 & 0 & 0.2009 & 0.4688 & 0.3153 & 0.015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Donde la probabilidad de aprobar la asignatura Álgebra lineal la primera vez que se cursa es $p_{15} = 0.462$, tomada de la información de acreditación del semestre 2010-1.

La probabilidad de dejar la asignatura después de cursarla por primera vez es $p_{16} = 0.02$, tomada del histórico de la generación 2008.

La probabilidad de recursar la asignatura de Álgebra lineal se ajusta para que la suma del renglón sea la unidad y se desprecia la probabilidad de presentar extraordinario, por lo que $p_{12} = 0.518$.

Cuando un alumno recursa la asignatura, la probabilidad de acreditar es $p_{25} = 0.3859$, tomada del promedio de acreditados de los semestres 2009-2 y 2010-1.

La probabilidad de desertar de la asignatura es $p_{26} = 0.025$, tomada del histórico de la generación 2008; las probabilidades de cursar como oyente y presentar el extraordinario p_{23} y p_{24} se ajustan para que la suma del renglón sea uno y se considera que el 70% de estos alumnos prefieren cursar como oyente a presentar el extraordinario.

De los alumnos que cursan como oyentes la asignatura, la probabilidad de que acrediten es $p_{35} = 0.448$, tomada del promedio de acreditación de los semestres 2009-1 y 2010-1; la probabilidad de desertar de la asignatura se toma de la generación 2008 y es $p_{36} = 0.015$; las probabilidades de volver a cursar como oyente y de presentar el extraordinario se ajustan, considerando iguales proporciones para cada posibilidad, por lo que $p_{33} = p_{34} = 0.2685$.

Para los alumnos que presentan el examen extraordinario, la probabilidad de acreditación se toma del promedio de los semestres 2012-2 y 2013-1, puesto que en estos semestres se aplicó la modalidad del extraordinario en tres etapas, obteniéndose el valor $p_{45} = 0.3153$.

La probabilidad de desertar de la asignatura se vuelve a aproximar con la información de la generación 2008, por lo que $p_{46} = 0.015$; y finalmente las probabilidades de volver a cursar como oyente y de volver a presentar el examen extraordinario se ajustan considerando que el 70% de los alumnos que no acreditan el extraordinario se vuelven a presentar a él, por lo que $p_{43} = 0.2009$ y $p_{44} = 0.4688$.

Realizando el análisis de cadenas absorbentes, se tiene que, la submatriz $\boldsymbol{N}$ es:

$$\boldsymbol{N} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.518 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4124 & 0.1767 \\ 0 & 0 & 0.2685 & 0.2685 \\ 0 & 0 & 0.2009 & 0.4688 \end{bmatrix} \end{array}$$

De donde

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.518 & 0.394 & 0.3715 \\ 0 & 1 & 0.7607 & 0.7171 \\ 0 & 0 & 1.5873 & 0.8022 \\ 0 & 0 & 0.6003 & 2.1859 \end{bmatrix} \end{array}$$

Como se dedujo en el capítulo 2, la fórmula 2.1 proporciona el número esperado de veces que el proceso se encuentra en un estado no absorbente, por lo que, de la matriz $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1}$ se obtiene el número de veces que un alumno que inicia cursando por primera vez la asignatura se encontrará en estados no absorbentes, entonces, el número de inscripciones regulares que tendrá está dado por la suma de los elementos (1,1) y (1,2) de la matriz $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1}$, puesto que los estados 1 y 2 solo lo únicos de inscripción regular, teniéndose 1 + 0.518 = 1.518, esto indica que por cada alumno que va a cursar Álgebra lineal, deberán reservarse 1.518 lugares en promedio.

Tabla 3.4 Alumnos de primer ingreso

Año	Primer ingreso
2008	**2389**
2009	**2314**
2010	**2414**
2011	**2414**
2012	**2588**
Promedio	***2423.8***

Fuente: Elaboración propia

Considerando el ingreso promedio de alumnos a la Facultad (2424), y el porcentaje de acreditación de la asignatura antecedente (acreditación de Álgebra 64.36%), se tiene que de los 2424 alumnos que cursan Álgebra, 1560 cursarán Álgebra lineal, y considerando los 1.518 cursos, entonces se tendrán que reservar 1.518 x1560 = 2368.2 lugares, considerando 55 alumnos por grupo se obtiene un total de 43 grupos.

La recomendación es abrir 43 grupos en semestre par. Este dato es muy significativo, en virtud de que en semestre par se abren 40 grupos, pero con un promedio de inscritos superior a 55 alumnos por grupo (57.3 alumnos por grupo en promedio, semestre 2009-2), adicionalmente se concluye que la demanda supera la oferta y es por esto que los grupos de Álgebra lineal se saturan rápidamente.

También se concluye que por cada alumno que se inscribe en Álgebra lineal, se tendrán 0.349 inscripciones como oyente y 0.3715 inscripciones a examen extraordinario.

3.3 Avance por semestre

La principal aplicación de las cadenas de Markov en el ámbito de la planeación de grupos y avance escolar, se da al estudiar el comportamiento de los alumnos en términos del porcentaje de créditos obtenido y los semestres transcurridos. Por la diversidad de carreras que hay en la Facultad, se realiza este análisis para una carrera de cada División terminal y un concentrado para todos los alumnos de la Facultad sin importar su carrera.

Lo primero que debe realizarse es la definición de estados de la cadena, para ello se utiliza la información del porcentaje de créditos de la tabla 3.4, que muestra el porcentaje de créditos de cada una de las carreras de la Facultad de Ingeniería.

Tabla 3.5 Porcentaje de créditos por semestre

Carrera	Créditos	Porcentaje de créditos en el semestre									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
Ingeniería civil	398	9.5%	11.3%	11.3%	11.3%	12.1%	10.6%	11.3%	11.3%	11.3%	
Ingeniería geomática	353	11.9%	13.3%	13.3%	12.8%	11.9%	13.0%	11.3%	12.5%		
Ingeniería geofísica	432	9.5%	10.6%	10.2%	10.0%	11.3%	11.1%	11.1%	9.7%	8.8%	**7.6%**
Ingeniería geológica	414	9.9%	11.1%	11.6%	11.6%	11.6%	11.6%	11.6%	11.6%	9.4%	
Ingeniería en minas y metalurgia	429	10.3%	11.4%	10.0%	10.0%	9.3%	10.5%	9.1%	9.8%	10.5%	**9.1%**
Ingeniería petrolera	423	9.7%	12.1%	10.9%	11.8%	11.3%	11.6%	10.9%	11.1%	10.6%	
Ingeniería eléctrica y electrónica	400	10.8%	11.0%	11.5%	11.8%	11.5%	12.0%	12.3%	9.5%	9.8%	
Ingeniería en computación	408	10.5%	10.8%	11.3%	11.8%	11.8%	11.3%	12.0%	11.8%	8.8%	
Ingeniería en telecomunicaciones	410	10.5%	10.7%	11.2%	12.0%	11.5%	11.7%	11.5%	11.5%	9.5%	
Ingeniería mecánica	406	10.1%	10.8%	10.8%	10.6%	10.3%	11.8%	11.3%	11.3%	12.8%	
Ingeniería industrial	412	10.0%	10.4%	10.7%	12.6%	10.7%	12.1%	11.7%	11.2%	10.7%	
Ingeniería mecatrónica	421	9.7%	10.5%	10.5%	10.2%	10.5%	9.5%	9.5%	9.5%	11.2%	**9.0%**

Fuente: Elaboración propia, basada en la información de planes de estudio de la FI

3.3.1 Avance por semestre de la carrera de Ingeniería Industrial

De la División de Ingeniería Mecánica e Industrial, se selecciona la carrera de Ingeniería Industrial.

Con la información de la tabla 3.4 se obtiene el porcentaje de créditos acumulados, el cual se muestra en la tabla 3.6

Tabla 3.6 Créditos acumulados por semestre de la carrera Ingeniería Industrial

Carrera	Créditos	Porcentaje de créditos acumulados en el semestre								
		1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
Ingeniería industrial	412	10.0%	20.4%	31.1%	43.7%	54.4%	66.5%	78.2%	89.3%	**100.0%**

Fuente: Elaboración propia, basada en la información de planes de estudio de la FI

A partir de este acumulado, se definen los estados de la cadena de Markov, considerando los estados absorbentes de concluir el plan de estudios curricular y de desertar de la carrera.

Estados para la carrera de Ingeniería Industrial

E_1 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [0, 9)
E_2 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [9, 20)
E_3 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [20, 31)
E_4 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [31, 43)
E_5 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [43, 55)
E_6 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [55, 66)
E_7 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [66, 78)
E_8 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [78, 89)
E_9 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [89, 100)
E_{10} = 100 % de créditos al concluir el semestre
E_{11} = El alumno deserta de la carrera

Una vez definidos los estados, se procede al cálculo de probabilidades de transición, pero deben tomarse en cuenta las consideraciones de las cadenas de Markov.

De los 223 alumnos de la carrera de Ingeniería Industrial estudiados en la generación 2008, 70 alumnos avanzan de semestre y por lo tanto de estado en su primer intento, lo que proporciona una probabilidad de $p_{12} = \frac{70}{223} = 0.3139$ mientras que 153 alumnos mantiene un porcentaje de créditos menor que 9%, por lo que $p_{11} = \frac{153}{223} = 0.6861$; sin embargo, estas probabilidades no pueden considerarse constantes, puesto que de los 153 alumnos que se mantienen en ese estado, después de una transición (semestre) 58 siguen en ese estado, por lo que $p_{11} = \frac{58}{153} = 0.3791$. La tabla 3.7 muestra el comportamiento para cuatro semestres.

Tabla 3.7 Probabilidad de permanecer en el estado 1 para la carrera de Ing. Industrial

Semestre	Número de alumnos en el estado 1	Probabilidad de permanecer en el estado 1
Ingreso	223	-
Finalidad del primero	153	$\frac{153}{223} = 0.6861$
Final del segundo	58	$\frac{58}{153} = 0.3791$
Final del tercero	39	$\frac{39}{58} = 0.6724$
Final del cuarto	15	$\frac{15}{38} = 0.3947$

Fuente: Elaboración propia

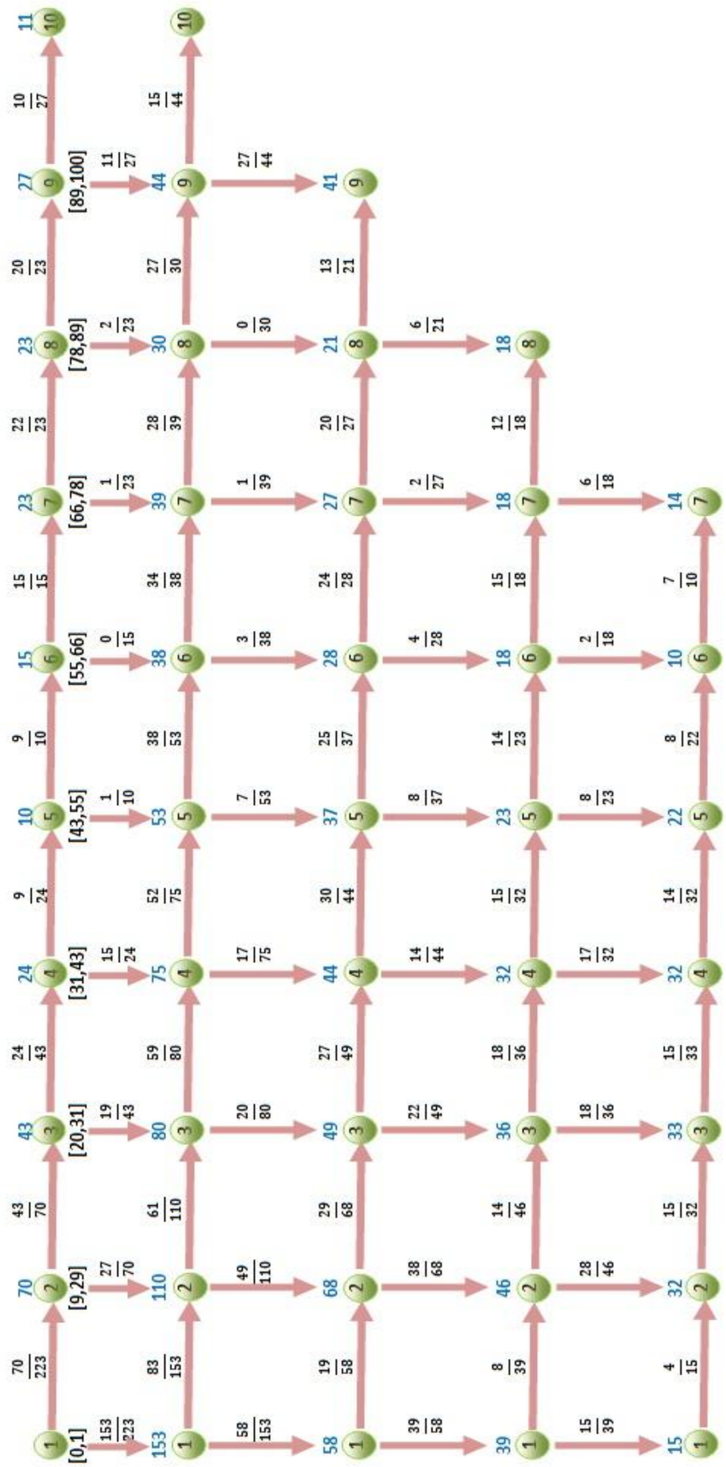


Figura 4. Avance de los alumnos de la carrera de Ingeniería Industrial
Fuente: elaboración propia

En virtud de que las probabilidades no son constantes, se opta por tomar el mejor estimador puntual para la probabilidad de permanencia en el estado 1, lo que lleva a utilizar toda la información de la tabla 3.6, teniéndose:

$$p_{11} = \frac{153 + 58 + 39 + 15}{223 + 153 + 58 + 39} = \frac{265}{473} = 0.5603$$

este valor pondera los resultados de permanencia en el estado 1 para varios semestres, por lo que se considera más representativo. Realizando un análisis similar, filtrando la información de la base de datos de la generación 2008, se obtiene la siguiente matriz de transición para la carrera de Ingeniería Industrial.

P =

	1 [0, 10)	2 [10,21)	3 [21, 32)	4 [32,44)	5 [44, 55)	6 [55,66)	7 [66,78)	8 [78,89)	9 [89,100)	10 100%	11 Deserta
1 [0, 10)	0.56	0.377	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0627
2 [10,21)	0	0.483	0.497	0	0	0	0	0	0	0	0.0201
3 [21, 32)	0	0	0.38	0.593	0.0125	0	0	0	0	0	0.0143
4 [32,44)	0	0	0	0.3600	0.58	0.0343	0	0	0	0	0.0260
5 [44, 55)	0	0	0	0	0.195	0.648	0.157		0	0	0
6 [55,66)	0	0	0	0	0	0.091	0.872	0.024	0.014	0	0
7 [66,78)	0	0	0	0	0	0	0.094	0.766	0.14	0	0
8 [78,89)	0	0	0	0	0	0	0	0.108	0.811	0.081	0
9 [89,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.535	0.465	0
10 100%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
11 Deserta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

De esta matriz se observan características importantes:

- Solo hay deserción en los primeros cuatro estados;
- El primer semestre es el de mayor reprobación;
- El último semestre también les toma a los alumnos mayor tiempo para concluirlo;
- Los primeros cuatro estados tienen probabilidades de permanencia mucho mayores que los estados del quinto al octavo.

La interpretación de los resultados anteriores, puede ser muy diversa; sin embargo, basado en mi experiencia considero que la carrera de Ingeniería Industrial es más complicada en los primeros dos años, que se cursan en la División de Ciencias Básicas, después de los primeros dos años (cuatro semestres), los alumnos que llegan al quinto semestre, ya poseen un ritmo de trabajo que les permite continuar con sus estudios de una manera más o menos regular.

Sin duda el primer semestre es el más complicado para los alumnos, pues recienten el cambio de nivel y de de carga de trabajo, por eso es justamente en el primer nivel donde deben centrarse varios esfuerzos a fin de que la integración al ritmo de trabajo de la Facultad sea lo más pronto posible.

El último semestre presenta una característica muy interesante, puesto que es el segundo semestre que en apariencia presenta una mayor reprobación; sin embargo, esto puede deberse a que los estudiantes del último semestre ya están trabajando, lo que les dificulta la conclusión de los créditos en el tiempo regular. Por ejemplo, en el 2011, la carrera de Ingeniería Industrial fue la carrera que tuvo mayor titulación por experiencia profesional. Fuente: Sistema de Titulados de la Coordinación de Administración Escolar (STCAE).

En el último punto nuevamente se observa que los primeros semestres son más complicados que los semestres del quinto en adelante.

Por otro lado, realizando el análisis de cadenas absorbentes se tiene que la submatriz de probabilidades de no absorción es:

$\boldsymbol{N} =$

	1 [0, 10)	2 [10,21)	3 [21, 32)	4 [32,44)	5 [44, 55)	6 [55,66)	7 [66,78)	8 [78,89)	9 [89,100)
1 [0, 10)	0.56	0.377	0	0	0	0	0	0	0
2 [10,21)	0	0.483	0.497	0	0	0	0	0	0
3 [21, 32)	0	0	0.38	0.593	0.013	0	0	0	0
4 [32,44)	0	0	0	0.36	0.58	0.034	0	0	0
5 [44, 55)	0	0	0	0	0.195	0.648	0.157	0	0
6 [55,66)	0	0	0	0	0	0.091	0.872	0.024	0.014
7 [66,78)	0	0	0	0	0	0	0.094	0.766	0.14
8 [78,89)	0	0	0	0	0	0	0	0.108	0.811
9 [89,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.535

Y la submatriz de probabilidades absorbentes es:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1\ [0,10) \\ 2\ [10,21) \\ 3\ [21,32) \\ 4\ [32,44) \\ 5\ [44,55) \\ 6\ [55,66) \\ 7\ [66,78) \\ 8\ [78,89) \\ 9\ [89,100) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 100\% & \text{Deserta} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc}
0 & 0.0627 \\
0 & 0.0201 \\
0 & 0.0143 \\
0 & 0.026 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0.0811 & 0 \\
0.4648 & 0
\end{array}\right] \end{array}
$$

De la fórmula 2.2, se obtiene:

$$
(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1\ [0,10) \\ 2\ [10,21) \\ 3\ [21,32) \\ 4\ [32,44) \\ 5\ [44,55) \\ 6\ [55,66) \\ 7\ [66,78) \\ 8\ [78,89) \\ 9\ [89,100) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1\ [0,10) & 2\ [10,21) & 3\ [21,32) & 4\ [32,44) & 5\ [44,55) & 6\ [55,66) & 7\ [66,78) & 8\ [78,89) & 9\ [89,100) \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
2.2743 & 1.6584 & 1.3287 & 1.232 & 0.9079 & 0.6939 & 0.8241 & 0.7266 & 1.5364 \\
0 & 1.9342 & 1.5497 & 1.4369 & 1.0589 & 0.8093 & 0.9611 & 0.8475 & 1.7919 \\
0 & 0 & 1.6124 & 1.495 & 1.1017 & 0.8421 & 1 & 0.8818 & 1.8644 \\
0 & 0 & 0 & 1.5625 & 1.1253 & 0.8615 & 1.0227 & 0.9018 & 1.9067 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.2424 & 0.886 & 1.0665 & 0.9401 & 1.9874 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1 & 1.0576 & 0.9382 & 1.9878 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1031 & 0.9479 & 1.9861 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1212 & 1.9558 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1515
\end{array}\right] \end{array}
$$

La matriz anterior proporciona el número esperado de semestres que un alumno pasa manteniéndose en un estado dado. Por ejemplo, recordando que el estado 1 representa un avance de créditos en el intervalo [0,10), del estado 1 al 1, se observa el valor 2.2743, que representa que un alumno que ingresa a la carrera de Ingeniería Industrial, estará en promedio 2.27 veces (semestres) en dicho intervalo.

También de la matriz $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1}$ se observa que a partir del quinto semestre algunos alumnos empiezan a adelantar materias, puesto que el número de veces que están en los estados 5, 6, 7 y 8 es menor que uno.

Continuando con el análisis de cadenas absorbentes,

$$
(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{array}{l} \\ 1\ [0, 10) \\ 2\ [10,21) \\ 3\ [21, 32) \\ 4\ [32,44) \\ 5\ [44, 55) \\ 6\ [55,66) \\ 7\ [66,78) \\ 8\ [78,89) \\ 9\ [89,100) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{100\%} & \text{Deserta} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0.7730 & 0.2270 \\ 0.9016 & 0.0984 \\ 0.9381 & 0.0619 \\ 0.9594 & 0.0406 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Se observan los siguientes resultados

- La probabilidad de concluir los créditos de la carrera es de 0.773, mientras que la de desertar es de 0.227;
- Los alumnos que llegan al estado 5 concluyen los créditos;
- La probabilidad de terminar la carrera se incrementa significativamente si se llega al estado 2;
- Cada alumno que ingresa a la facultad, está en promedio 2.27 semestres en el estado 1;
- El estado donde los alumnos permanecen más tiempo es el primero;
- Los alumnos están en promedio 11.18 semestres en la facultad, antes de terminar o desertar.
- El segundo estado de mayor permanencia es el noveno.

La probabilidad de concluir los créditos para la carrera de Ingeniería Industrial es consistente con la información que presenta la Dirección General de Evaluación Educativa (DGEE) de la UNAM, en un estudio presentado en 2011, que abarca un análisis de las generaciones de 1986 a 2004. La tabla 3.8 presenta el ingreso a la carrera de Ingeniería Industrial y el egreso (titulación) en el tiempo curricular más cuatro años, esto es, presenta a aquellos alumnos titulados en el tiempo curricular y hasta cuatro años después de concluir su tiempo curricular. El valor promedio del 46% es una fracción de los estudiantes que terminan los créditos (77.3%).

Tabla 3.8 Egreso de la carrera de Ingeniería Industrial

Generación	Ingreso	Egreso TC + 4	
		n	%
1994	97	53	**55%**
1995	88	46	**52%**
1996	137	63	**46%**
1997	127	68	**54%**
1998	143	54	**38%**
1999	141	59	**42%**
2000	134	58	**43%**
		Promedio	**46%**

TC + 4: Tiempo curricular más cuatro años
Fuente: Secretaría de Desarrollo Institucional, DGEE, UNAM
Facultad de Ingeniería, Trayectorias escolares, 2011

La probabilidad de deserción de la carrera estando en el estado uno, es decir, un alumno con menos del 10% de créditos, también es consistente con la información que presenta la DGEE, que determina el porcentaje de la población que abandona la carrera con cero créditos. Esta información se presenta en la tabla 3.9. La DGEE presenta un abandono promedio del 8%, considerando alumnos con cero créditos, que son una fracción de los alumnos que abandonan o desertan con menos del 10% de créditos (22.7%).

Tabla 3.9 Abandono de la carrera de Ingeniería Industrial

Generación	Ingreso	Egreso TC + 4	
		n	%
1994	97	6	6%
1995	88	3	3%
1996	137	11	8%
1997	127	12	9%
1998	143	15	10%
1999	141	15	11%
2000	134	32	24%
		Promedio	11%

TC + 4 : Tiempo curricular más cuatro años
Fuente: Secretaría de Desarrollo Institucional, DGEE, UNAM
Facultad de Ingeniería, Trayectorias escolares, 2011

3.3.2 Avance por semestre de la carrera de Ingeniería en Computación

De la División de Ingeniería Eléctrica Electrónica se selecciona la carrera de Ingeniería en Computación, y se realiza un análisis similar, utilizando el porcentaje acumulado de créditos, que se muestra en la tabla 3.10

Tabla 3.10 Créditos acumulados por semestre de la carrera de Ingeniería en Computación

Carrera	Créditos	Porcentaje de créditos acumulados en el semestre								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ingeniería en computación	408	10.5%	21.3%	32.6%	44.4%	56.1%	67.4%	79.4%	91.2%	100.0%

Fuente: Elaboración propia, basada en la información de planes de estudio de la FI

Los estados para esta carrera se definen como:

E1 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [0, 10);
E2 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [10, 21);
E3 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [21, 32);
E4 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [32, 44);
E5 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [44, 56);
E6 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [56, 67);
E7 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [67, 79);
E8 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [79, 91);
E9 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [91, 100);
E10 = 100 % de créditos al concluir el semestre;
E11 = El alumno deserta de la carrera.

Utilizando la información de la base de datos para la generación 2008, se obtiene la siguiente matriz de transición

$$
P = \begin{array}{c} \\ \text{1 [0, 10)} \\ \text{2 [10,21)} \\ \text{3 [21, 32)} \\ \text{4 [32,44)} \\ \text{5 [44, 56)} \\ \text{6 [56,67)} \\ \text{7 [67,79)} \\ \text{8 [79,91)} \\ \text{9 [91,100)} \\ \text{10 100\%} \\ \text{11 Deserta} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} \text{1 [0, 10)} & \text{2 [10,21)} & \text{3 [21, 32)} & \text{4 [32,44)} & \text{5 [44, 56)} & \text{6 [56,67)} & \text{7 [67,79)} & \text{8 [79,91)} & \text{9 [91,100)} & \text{10 100\%} & \text{11 Deserta} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.5456 & 0.3827 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0717 \\
0 & 0.4407 & 0.5171 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0422 \\
0 & 0 & 0.3608 & 0.5809 & 0.0374 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0209 \\
0 & 0 & 0 & 0.3164 & 0.6289 & 0.0392 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0155 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.2852 & 0.6228 & 0.0891 & 0 & 0 & 0 & 0.0029 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1362 & 0.7760 & 0.0878 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1308 & 0.8364 & 0.0281 & 0 & 0.0047 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2737 & 0.6704 & 0.0559 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5455 & 0.4545 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

De esta matriz se observan características importantes:

- Hay deserción en los primeros siente estados;
- El primer semestre es el de mayor reprobación;
- El último semestre también les toma a los alumnos mayor tiempo para concluirlo;
- La probabilidad de permanencia en un estado va disminuyendo gradualmente, excepto en los estados 8 y 9.

Y los resultados son:

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1} =$

	1 [0, 10)	2 [10,21)	3 [21, 32)	4 [32,44)	5 [44, 56)	6 [56,67)	7 [67,79)	8 [79,91)	9 [91,100)
1 [0, 10)	2.2007	1.5058	1.2182	1.0352	0.9745	0.7496	0.7691	0.9763	1.4877
2 [10,21)	0	1.7879	1.4464	1.2291	1.1571	0.8901	0.9132	1.1593	1.7665
3 [21, 32)	0	0	1.5645	1.3294	1.2515	0.9627	0.9878	1.2539	1.9106
4 [32,44)	0	0	0	1.4628	1.287	0.9944	1.0197	1.2945	1.9725
5 [44, 56)	0	0	0	0	1.399	1.0087	1.0439	1.3241	2.0176
6 [56,67)	0	0	0	0	0	1.1577	1.0335	1.3302	2.026
7 [67,79)	0	0	0	0	0	0	1.1505	1.3249	2.0254
8 [79,91)	0	0	0	0	0	0	0	1.3768	2.0309
9 [91,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	2.2002

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{A} =$

	100%	Deserta
1 [0, 10)	0.7308	0.2692
2 [10,21)	0.8677	0.1323
3 [21, 32)	0.9385	0.0615
4 [32,44)	0.9689	0.0311
5 [44, 56)	0.991	0.009
6 [56,67)	0.9952	0.0048
7 [67,79)	0.9946	0.0054
8 [79,91)	1	0
9 [91,100)	1	0

Se observan los siguientes resultados

- La probabilidad de concluir los créditos de la carrera es de 0.7308, mientras que la de desertar es de 0.2692;
- Los alumnos que llegan al estado 8 concluyen los créditos;
- La probabilidad de terminar la carrera se incrementa si se llega al estado 2;
- Cada alumno que ingresa a la facultad, está en promedio 2.2 semestres en el estado 1;
- El estado donde los alumnos permanecen más tiempo es el primero;
- Los alumnos están en promedio 10.92 semestres en la facultad, antes de terminar o desertar.

3.3.3 Avance por semestre de la carrera de Ingeniería Civil

De la División de Ingenierías Civil y Geomática se selecciona la carrera de Ingeniería Civil, y la definición de estados se basa nuevamente en el porcentaje acumulado de créditos.

Tabla 3.11 Créditos acumulados por semestre de la carrera de Ingeniería Civil

Carrera	Créditos	Porcentaje de créditos acumulados en el semestre								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ingeniería Civil	398	9.5%	20.9%	32.2%	43.5%	55.5%	66.1%	77.4%	88.7%	100.0%

Fuente: Elaboración propia, basada en la información de planes de estudio de la FI

Analizando la información de la generación 2008, se obtiene la siguiente matriz de transición.

$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c|ccccccccccc|}
 & \text{1 [0, 10)} & \text{2 [10,20)} & \text{3 [20, 32)} & \text{4 [32,43)} & \text{5 [43, 55)} & \text{6 [55,66)} & \text{7 [66,77)} & \text{8 [77,88)} & \text{9 [88,100)} & \text{10 100} & \text{11 Deserta} \\
\text{1 [0, 10)} & 0.575 & 0.34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.085 \\
\text{2 [10,20)} & 0 & 0.36 & 0.569 & 0.009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.062 \\
\text{3 [20, 32)} & 0 & 0 & 0.415 & 0.52 & 0.031 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.033 \\
\text{4 [32,43)} & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.603 & 0.0414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0253 \\
\text{5 [43, 55)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.241 & 0.665 & 0.0889 & 0 & 0 & 0 & 0.0052 \\
\text{6 [55,66)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.204 & 0.671 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\
\text{7 [66,77)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.108 & 0.811 & 0.081 & 0 & 0 \\
\text{8 [77,88)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.175 & 0.785 & 0.04 & 0 \\
\text{9 [88,100)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.434 & 0.566 & 0 \\
\text{10 100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\text{11 Deserta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

de donde

$(I - N)^{-1} =$

	1 [0, 10)	2 [10,20)	3 [20, 32)	4 [32,43)	5 [43, 55)	6 [55,66)	7 [66,77)	8 [77,88)	9 [88,100)
1 [0, 10)	2.354	1.2489	1.2141	0.96	0.8133	0.7296	0.6298	0.7296	1.1019
2 [10,20)	0	1.5618	1.5183	1.2005	1.017	0.9124	0.7876	0.9124	1.3779
3 [20, 32)	0	0	1.7091	1.3273	1.1257	1.0098	0.8717	1.0098	1.525
4 [32,43)	0	0	0	1.4923	1.1864	1.0691	0.9224	1.0686	1.6138
5 [43, 55)	0	0	0	0	1.3175	1.1011	0.9595	1.11	1.6764
6 [55,66)	0	0	0	0	0	1.2569	0.9453	1.1196	1.6878
7 [66,77)	0	0	0	0	0	0	1.1212	1.1023	1.689
8 [77,88)	0	0	0	0	0	0	0	1.2126	1.6813
9 [88,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	1.7658

$(I - N)^{-1}A =$

	10 100%	11 Deserta
1 [0, 10)	0.653	0.347
2 [10,20)	0.816	0.184
3 [20, 32)	0.904	0.096
4 [32,43)	0.956	0.044
5 [43, 55)	0.993	0.007
6 [55,66)	1	0
7 [66,77)	1	0
8 [77,88)	1	0
9 [88,100)	1	0

Se observan los siguientes resultados

- La probabilidad de concluir los créditos de la carrera es de 0.653, mientras que la de desertar es de 0.347;
- Los alumnos que llegan al estado 6 concluyen los créditos;
- La probabilidad de terminar la carrera se incrementa si se llega al estado 2;
- Cada alumno que ingresa a la facultad, está en promedio 2.354 semestres en el estado 1;

- El estado donde los alumnos permanecen más tiempo es el primero;
- Los alumnos están en promedio 9.78 semestres en la facultad, antes de terminar o desertar.

3.3.4 Avance por semestre de la carrera de Ingeniería Petrolera

La División de Ciencias de la tierra imparte las carreras de Ingeniería Petrolera, Geológica, Geofísica y Minas y metalurgia, de esta división se selecciona la carrera de Ingeniería Petrolera, por coincidir en el número de semestres con las carreras seleccionadas anteriormente. A partir de la tabla 3.12 se definen los estados para la cadena de Markov.

Tabla 3.12 Créditos acumulados por semestre de la carrera de Ingeniería Petrolera

Carrera	Créditos	Porcentaje de créditos acumulados en el semestre								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ingeniería Petrolera	423	9.7%	21.7%	32.6%	44.4%	55.8%	67.4%	78.3%	89.4%	100.0%

Fuente: Elaboración propia, basada en la información de planes de estudio de la FI

Definición de estados para la carrera de Ingeniería Petrolera.

E_1 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [0, 10)
E_2 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [10, 21)
E_3 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [21, 32)
E_4 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [32, 44)
E_5 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [44, 55)
E6 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [55, 67)
E7 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [67, 78)
E8 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [78, 89)
E9 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [89, 100)
E10 = 100 % de créditos al concluir el semestre
E11 = El alumno deserta de la carrera

Utilizando la información de la base de datos para la generación 2008, se obtiene la siguiente matriz de transición

$\boldsymbol{P} =$

	1 [0, 10)	2 [10,21)	3 [21, 32)	4 [32,44)	5 [44, 55)	6 [55,67)	7 [67,78)	8 [78,89)	9 [89,100)	10 100%	11 Deserta
1 [0, 10)	0.5622	0.3706	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0672
2 [10,21)	0	0.5326	0.4349	0.0156	0	0	0	0	0	0	0.0169
3 [21, 32)	0	0	0.4091	0.4951	0.013	0	0	0	0	0	0.0828
4 [32,44)	0	0	0	0.3846	0.5278	0.0438	0	0	0	0	0.0438
5 [44, 55)	0	0	0	0	0.1644	0.7691	0.0665	0	0	0	0
6 [55,67)	0	0	0	0	0	0.1165	0.6186	0.2649	0	0	0
7 [67,78)	0	0	0	0	0	0	0.0556	0.8889	0.0555	0	0
8 [78,89)	0	0	0	0	0	0	0	0.1867	0.76	0.0533	0
9 [89,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	.75	0.25	0
10 100%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
11 Deserta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

de donde

$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})^{-1} =$

	1 [0, 10)	2 [10,21)	3 [21, 32)	4 [32,44)	5 [44, 55)	6 [55,67)	7 [67,78)	8 [78,89)	9 [89,100)
1 [0, 10)	2.2841	1.8111	1.333	1.1184	0.7271	0.6884	0.5021	0.773	6.5674
2 [10,21)	0	2.1395	1.5747	1.3212	0.859	0.8132	0.5932	0.9132	7.7583
3 [21, 32)	0	0	1.6923	1.3615	0.8863	0.839	0.612	0.9422	8.0043
4 [32,44)	0	0	0	1.625	1.0264	0.974	0.7103	1.0936	9.2907
5 [44, 55)	0	0	0	0	1.1967	1.0418	0.7667	1.1772	10.003
6 [55,67)	0	0	0	0	0	1.1319	0.7414	1.179	10.002
7 [67,78)	0	0	0	0	0	0	1.0589	1.1573	10.014
8 [78,89)	0	0	0	0	0	0	0	1.2296	3.7379
9 [89,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	4

$$(I-N)^{-1}A = \begin{array}{c} \\ 1\ [0, 10) \\ 2\ [10,21) \\ 3\ [21, 32) \\ 4\ [32,44) \\ 5\ [44, 55) \\ 6\ [55,67) \\ 7\ [67,78) \\ 8\ [78,89) \\ 9\ [89,100) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 10\ 100\% & 11\ \text{Deserta} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6566 & 0.3434 \\ 0.7756 & 0.2244 \\ 0.8002 & 0.1998 \\ 0.9288 & 0.0712 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se observan los siguientes resultados

- La probabilidad de concluir los créditos de la carrera es de 0.6566, mientras que la de desertar es de 0.3434;
- Los alumnos que llegan al estado 5 concluyen los créditos;
- La probabilidad de terminar la carrera se incrementa si se llega al estado 2;
- Cada alumno que ingresa a la facultad, está en promedio 2.2841 semestres en el estado 1;
- El estado donde los alumnos permanecen más tiempo es el noveno;
- Los alumnos están en promedio 11.7 semestres en la facultad, antes de terminar o desertar.

Algunos de los resultados son similares a las otras carreras analizadas. El primer semestre destaca como el más complicado, y los primeros semestres generan la mayor deserción. También se observa que el último semestre les toma bastante tiempo a los alumnos concluirlo, considero que es nuevamente por que los alumnos de último semestre ya están trabajando y eso les limita el tiempo que pueden dedicar a sus últimas materias.

3.3.5 Avance por semestre de todas las carreras de la Facultad de Ingeniería

Finalmente, se realiza un análisis conjuntando las 12 carreras de la Facultad de Ingeniería. El análisis considerará estados muy similares a los anteriores; sin embargo, debe observarse que una carrera es de ocho semestres, tres carreras son de 10 semestres y el resto es de nueve semestres. La tabla 3.13 proporciona el porcentaje acumulado de créditos, así como el mínimo, el máximo y el promedio por semestre, información que permitirá la generación de los estados para la cadena de Markov.

Tabla 3.13 Créditos acumulados por semestre de las carreras de la Facultad de Ingeniería

Carrera	Créditos	Porcentaje de créditos en el semestre									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ingeniería civil	398	9.5%	20.8%	32.1%	43.4%	55.5%	66.1%	77.4%	88.7%	100.0%	
Ingeniería geomática	353	11.9%	25.2%	38.5%	51.3%	63.2%	76.2%	87.5%	100.0%		
Ingeniería geofísica	432	9.5%	20.1%	30.3%	40.3%	51.6%	62.7%	73.9%	83.6%	92.4%	100.0%
Ingeniería geológica	414	9.9%	21.0%	32.6%	44.2%	55.8%	67.4%	79.0%	90.6%	100.0%	
Ingeniería en minas y metalurgia	429	10.3%	21.7%	31.7%	41.8%	51.1%	61.6%	70.7%	80.5%	91.0%	100.0%
Ingeniería petrolera	423	9.7%	21.8%	32.6%	44.5%	55.8%	67.4%	78.3%	89.4%	100.0%	
Ingeniería eléctrica y electrónica	400	10.8%	21.8%	33.3%	45.1%	56.6%	68.6%	80.8%	90.3%	100.1%	
Ingeniería en computación	408	10.5%	21.3%	32.6%	44.3%	56.1%	67.4%	79.4%	91.1%	100.0%	
Ingeniería en telecomunicaciones	410	10.5%	21.2%	32.5%	44.4%	55.9%	67.6%	79.0%	90.5%	100.0%	
Ingeniería mecánica	406	10.1%	20.9%	31.8%	42.4%	52.7%	64.5%	75.9%	87.2%	100.0%	
Ingeniería industrial	412	10.0%	20.4%	31.1%	43.7%	54.4%	66.6%	78.2%	89.4%	100.0%	
Ingeniería mecatrónica	421	9.7%	20.2%	30.6%	40.9%	51.3%	60.8%	70.3%	79.8%	91.0%	100.0%
	Mínimo	9.5%	20.1%	30.3%	40.3%	51.0%	60.8%	70.3%	79.8%	90.9%	100.0%
	Máximo	11.9%	25.2%	38.5%	51.3%	63.2%	76.2%	87.5%	100%	100%	100.0%
	Media	10.2%	21.4%	32.5%	43.8%	55.0%	66.4%	77.5%	88.4%	97.7%	100.0%

Fuente: Elaboración propia, basada en la información de planes de estudio de la FI.

A partir de la información de la tabla 3.13 los estados se definen como:

E_1 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [0, 10)
E_2 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [10, 20)
E_3 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [20, 31)
E_4 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [31, 44)
E_5 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [44, 55)
E_6 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [55, 67)
E_7 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [67, 78)
E_8 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [78, 89)
E_9 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [89, 100)
E_{10} = 100 % de créditos al concluir el semestre
E_{11} = El alumno deserta de la carrera

De forma similar, la matriz de transición para los alumnos de todas las carreras de la Facultad queda:

$\boldsymbol{P}$ =

	1 [0, 10)	2 [10,20)	3 [20, 31)	4 [31,44)	5 [44, 55)	6 [55,67)	7 [67,78)	8 [78,89)	9 [89,100)	10 100%	11 Deserta
1 [0, 10)	0.5952	0.3428	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0620
2 [10,21)	0	0.4270	0.5217	0.0136	0	0	0	0	0	0	0.0377
3 [21, 32)	0	0	0.3679	0.5812	0.0117	0	0	0	0	0	0.0392
4 [32,44)	0	0	0	0.3990	0.5260	0.0454	0	0	0	0	0.0296
5 [44, 55)	0	0	0	0	0.1839	0.7555	0.0177	0	0	0	0.0429
6 [55,67)	0	0	0	0	0	0.1960	0.7032	0.0988	0	0	0.0020
7 [67,78)	0	0	0	0	0	0	0.1188	0.8059	0.0743	0	0.0010
8 [78,89)	0	0	0	0	0	0	0	0.1633	0.7589	0.0778	0
9 [89,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.6039	0.3961	0
10 100%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
11 Deserta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

de donde

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1} =$

	1 [0, 10)	2 [10,21)	3 [21, 32)	4 [32,44)	5 [44, 55)	6 [55,67)	7 [67,78)	8 [78,89)	9 [89,100)
1 [0, 10)	2.4704	1.4779	1.2198	1.213	0.7993	0.8196	0.6701	0.7422	1.5477
2 [10,21)	0	1.7452	1.4404	1.4324	0.9439	0.9678	0.7913	0.8765	1.8277
3 [21, 32)	0	0	1.582	1.5299	1.0088	1.0343	0.8456	0.9366	1.9531
4 [32,44)	0	0	0	1.6639	1.0724	1.1017	0.9007	0.9976	2.0803
5 [44, 55)	0	0	0	0	1.2253	1.1514	0.9435	1.0447	2.1785
6 [55,67)	0	0	0	0	0	1.2438	0.9925	1.1029	2.2992
7 [67,78)	0	0	0	0	0	0	1.1348	1.093	2.3071
8 [78,89)	0	0	0	0	0	0	0	1.1952	2.2899
9 [89,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5246

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{A} =$

	10 100%	11 Deserta
1 [0, 10)	0.6708	0.3292
2 [10,21)	0.7921	0.2079
3 [21, 32)	0.8465	0.1535
4 [32,44)	0.9016	0.0984
5 [44, 55)	0.9442	0.0558
6 [55,67)	0.9965	0.0035
7 [67,78)	0.9989	0.0011
8 [78,89)	1	0
9 [89,100)	1	0

Se observan los siguientes resultados

- La probabilidad de concluir los créditos de alguna carrera de la Facultad es de 0.6708, mientras que la de desertar es de 0.3292;
- Los alumnos que llegan al estado 8 concluyen los créditos;
- La probabilidad de terminar la carrera se incrementa si se llega al estado 2, y continua incrementándose después de cada estado;
- Cada alumno que ingresa a la facultad, está en promedio 2.47 semestres en el estado 1;
- El estado donde los alumnos permanecen más tiempo es el noveno, seguido del primer estado;
- Los alumnos están en promedio 10.96 semestres en la facultad, antes de concluir los créditos o desertar.

Los resultados del análisis de todas las carreras son muy similares a los que se encontraron en las carreras seleccionadas de cada División. El primer y último semestres son en los que los alumnos demoran más tiempo. Los primeros dos años son más complicados y presentan mayor deserción. Finalmente, aunque la mayoría de las carreras de la Facultad están programadas para nueve semestres, el tiempo promedio es de casi 11 semestres, esto es, los alumnos se tardan en promedio dos semestres más de lo indicado en el mapa curricular para terminar la carrera, razón por la cual debe evaluarse el tiempo de duración de las carreras de la Facultad.

La probabilidad obtenida, para concluir alguna carrera de la Facultad de Ingeniería, coincide con la información estadística que se ha manejado a lo largo de los años, en donde se dice que una tercera parte de los alumnos deserta, una tercera parte se titula y otra tercera parte concluye la carrera sin titularse. El Ing. Juan Ursul Solanes, en su presentación en el Foro de Profesores de carrera de Ciencias Básicas del 13 de mayo de 2010, dijo: "... podemos ver algo que es muy notable, la eficiencia a lo largo de esos cuatro semestres (2007-2, 2008-1, 2008-2 y 2009-1) ronda en el *35%* de cada generación en términos de concluir sus créditos al 100%, otra *tercera* parte ya abandonó a lo largo de la carrera". De estas palabras se concluye que en efecto, una tercera parte deserta de la carrera y las otras dos terceras partes terminarán la carrera en algún momento, que es la misma conclusión que se obtiene con el análisis de cadenas de Markov.

Capítulo 4
Análisis de sensibilidad

El capítulo anterior presentó el análisis de cadenas de Markov aplicado al avance de los estudiantes de la Facultad, mostrando los resultados más significativos para la acreditación de una asignatura y el avance por semestre en cuatro carreras de la Facultad. Se observó que la asignatura con mayor reprobación en el primer semestre de la carrera es Geometría analítica y se comprobó algo que ya es sabido por profesores y estudiantes: el primer semestre de la Facultad es el más complicado. En este capítulo se realiza un análisis de sensibilidad, para determinar el impacto que produciría una pequeña variación positiva en el avance escolar.

4.1 Análisis de sensibilidad de una asignatura del primer semestre

En la figura 3.2 se mostró la cadena de Markov para la asignatura Geometría analítica, y recordando que los estados utilizados son:

E_1 = El alumno cursa por primera vez la asignatura
E_2 = El alumno cursa por segunda vez la asignatura
E_3 = El alumno "cursa como oyente" la asignatura
E_4 = El alumno presenta examen extraordinario de la asignatura
E_5 = El alumno acredita la asignatura
E_6 = El alumno deserta de la carrera

La representación matricial utilizada fue

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0.4787 & 0 & 0 & 0.5213 & 0 \\ 0 & 0 & 0.337 & 0.1444 & 0.463 & 0.0556 \\ 0 & 0 & 0.433 & 0.1856 & 0.3706 & 0.0109 \\ 0 & 0 & 0.4502 & 0.1929 & 0.346 & 0.0109 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

y se observa que la probabilidad de acreditar la asignatura Geometría analítica la primera vez que se cursa es p_{15} = 0.5213, si esta probabilidad se incrementara al promedio de acreditación del resto de las asignaturas del primer semestre (Tabla 3.1) entonces la nueva probabilidad sería p_{15} = 0.6007, y con esta probabilidad, manteniendo el resto de las probabilidades iguales, la matriz de transición quedaría:

$$\boldsymbol{P}= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.3993 & 0 & 0 & 0.6007 & 0 \\ 0 & 0 & 0.337 & 0.1444 & 0.463 & 0.0556 \\ 0 & 0 & 0.433 & 0.1856 & 0.3706 & 0.0109 \\ 0 & 0 & 0.5909 & 0.2532 & 0.145 & 0.0109 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

de donde:

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.3993 & 0.4288 & 0.1837 \\ 0 & 1 & 1.0738 & 0.4602 \\ 0 & 0 & 2.3796 & 0.5913 \\ 0 & 0 & 1.8828 & 1.8069 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9711 & 0.0289 \\ 0.9277 & 0.0723 \\ 0.9676 & 0.0324 \\ 0.9598 & 0.0402 \end{bmatrix} \end{array}$$

La información relevante se resume en la tabla 4.1.

Tabla 4.1. Comparativo de acreditación de Geometría analítica

	Valor original	**Valor modificado**
$\boldsymbol{p_{15}}$	0.5213	**0.6007**
Probabilidad de aprobar la asignatura	0.9623	**0.9711**
Semestres promedio para aprobar la asignatura	2.213	**2.0118**
Número de cursos por alumno (incluye ASDRI)	2.0811	**1.8281**
Número de exámenes extraordinarios por alumno	0.2399	**0.1837**

Fuente: Elaboración propia

Al incrementar la probabilidad de acreditar la asignatura de Geometría analítica de 52.13% a 60.07%, se reduce de 2.0811 a 1.8281 el número de cursos por alumno, cantidad que parece poca, pero considerando una población de nuevo ingreso de 2500 alumnos, se estarían reduciendo los cursos para esos alumnos de (2500)(2.0811) = 5203 a (2500)(1.8281) = 4571 , esto es, aproximadamente 632 inscripciones, lo que representa casi 13 (12.64) grupos de 50 alumnos cada uno de ellos.

Estos grupos sin duda facilitarían la asignación de salones pues la Facultad se encuentra trabajando con un déficit de salones en su planeación.

Se observa que un incremento del 15.23% en la probabilidad de acreditar la asignatura repercute en un decremento de casi el 26% en el número de grupos planeados para la generación; sin embargo debe considerarse que el resto de las probabilidades de aprobación de la asignatura se mantuvieron constantes. Si todas las probabilidades se modificaran favorablemente, entonces el impacto sería mucho mayor.

4.2 Análisis de sensibilidad del avance por créditos

Del análisis para algunas de las carreras de la Facultad de Ingeniería, así como del análisis para todas las carreras se observó que el primer semestre es el más difícil, por lo que es en ese semestre en el que se realiza la modificación de la probabilidad para observar el impacto en la conclusión de los créditos de la licenciatura.

Los estados que se utilizaron para el análisis de todas las carreras fueron

E_1 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [0, 10)
E_2 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [10, 20)
E_3 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [20, 31)
E_4 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [31, 44)
E_5 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [44, 55)
E_6 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [55, 67)
E_7 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [67, 78)
E_8 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [78, 89)
E_9 = Porcentaje de créditos al concluir el semestre en el intervalo [89, 100)
E_{10} = 100 % de créditos al concluir el semestre
E_{11} = El alumno deserta de la carrera

De la matriz de transición para este caso, que se analizó en la sección 3.3.5, se observa que la probabilidad de avanzar del estado 1 al estado 2 es $p_{12} = 0.3428$. Se prueba el impacto de modificar esta probabilidad al valor promedio del resto de las probabilidades de avanzar al siguiente estado, con lo que $p_{12} = 0.6311$. En términos porcentuales es un incremento del 84.1%, el cual es sin duda considerable, pero debe pensarse que se pretende comparar contra un primer semestre que en lugar de ser el más complicado, sea un semestre promedio comparado con el resto de los semestres.

La matriz de transición con esta modificación, y manteniendo el resto de las probabilidades sin cambio es:

$\boldsymbol{P}$ =

	1 [0, 10)	2 [10,20)	3 [20, 31)	4 [31,44)	5 [44, 55)	6 [55,67)	7 [67,78)	8 [78,89)	9 [89,100)	10 100%	11 Deserta
1 [0, 10)	0.3069	0.6311	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0620
2 [10,21)	0	0.4270	0.5217	0.0136	0	0	0	0	0	0	0.0377
3 [21, 32)	0	0	0.3679	0.5812	0.0117	0	0	0	0	0	0.0392
4 [32,44)	0	0	0	0.3990	0.5260	0.0454	0	0	0	0	0.0296
5 [44, 55)	0	0	0	0	0.1839	0.7555	0.0177	0	0	0	0.0429
6 [55,67)	0	0	0	0	0	0.1960	0.7032	0.0988	0	0	0.0020
7 [67,78)	0	0	0	0	0	0	0.1188	0.8059	0.0743	0	0.0010
8 [78,89)	0	0	0	0	0	0	0	0.1633	0.7589	0.0778	0
9 [89,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.6039	0.3961	0
10 100%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
11 Deserta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

De donde:

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1} =$

	1 [0, 10)	2 [10,21)	3 [21, 32)	4 [32,44)	5 [44, 55)	6 [55,67)	7 [67,78)	8 [78,89)	9 [89,100)
1 [0, 10)	1.4428	1.5891	1.3115	1.3043	0.8595	0.8813	0.7205	0.7981	1.6642
2 [10,21)	0	1.7452	1.4404	1.4324	0.9439	0.9678	0.7913	0.8765	1.8277
3 [21, 32)	0	0	1.582	1.5299	1.0088	1.0343	0.8456	0.9366	1.9531
4 [32,44)	0	0	0	1.6639	1.0724	1.1017	0.9007	0.9976	2.0803
5 [44, 55)	0	0	0	0	1.2253	1.1514	0.9435	1.0447	2.1785
6 [55,67)	0	0	0	0	0	1.2438	0.9925	1.1029	2.2992
7 [67,78)	0	0	0	0	0	0	1.1348	1.093	2.3071
8 [78,89)	0	0	0	0	0	0	0	1.1952	2.2899
9 [89,100)	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5246

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}1\ [0,10)\\2\ [10,21)\\3\ [21,32)\\4\ [32,44)\\5\ [44,55)\\6\ [55,67)\\7\ [67,78)\\8\ [78,89)\\9\ [89,100)\end{array}\begin{bmatrix}0.7213 & 0.2787\\0.7921 & 0.2079\\0.8465 & 0.1535\\0.9016 & 0.0984\\0.9442 & 0.0558\\0.9965 & 0.0035\\0.9989 & 0.0011\\1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

La información relevante se resume en la tabla 4.2.

Tabla 4.2. Comparativo de avance por créditos

	Valor original	**Valor modificado**
p_{12}	0.3428	0.6311
Probabilidad de concluir los créditos	0.671	0.721
Semestres promedio para concluir la carrera o desertar	10.96	10.57
Probabilidad de desertar	0.329	0.279
Número de veces que un alumno está en el estado 1	2.47	1.44

Fuente: Elaboración propia

El incremento en la probabilidad de avanzar del estado 1 al 2 (semestre 1 al semestre 2), produce una leve reducción en el tiempo promedio de permanencia en la Facultad, de casi medio semestre; y genera un incremento considerable en la probabilidad de concluir la carrera, con su correspondiente decremento en la probabilidad de deserción, incrementándose la probabilidad de concluir la carrera en casi 7.5%. El número de veces que un estudiante se encuentra en el estado 1, se reduce en 41.7%, pasando de 2.47 veces (semestres) a 1.44 veces.

Conclusiones y recomendaciones

En el presente trabajo se realizó una investigación de las aplicaciones de las cadenas de Markov a procesos escolares y se observó que a lo largo del tiempo son varios los autores que las han utilizado con resultados adecuados, por lo que, después de repasar la teoría de las cadenas se desarrollaron algunas aplicaciones de estas cadenas en el avance escolar de los alumnos de la Facultad de Ingeniería.

En particular, durante el desarrollo de la investigación, se observó la problemática de las asignaturas de primer semestre, destacando Geometría analítica; así como la dificultad de pasar al segundo semestre. Finalmente se realizó un análisis de sensibilidad, donde se observó el impacto que producen cambios en las probabilidades para avanzar de un estado a otro.

De los resultado obtenidos en el presente trabajo, se concluye que el primer semestre es el que presenta mayores complicaciones para los estudiantes de la Facultad de ingeniería, y que la mayor deserción se presenta en los primeros dos años, adicionalmente con el análisis de sensibilidad, se concluye que el tratamiento del primer semestre es fundamental para incrementar la eficiencia terminal de los alumnos de la Facultad de Ingeniería. En el análisis presentado sólo se modificó una probabilidad, obteniendo mejoras en los valores de avance, menor deserción y menor tiempo para concluir la carrera así como una reducción en el número de grupos que se requieren para inscribir a los alumnos que recursan la materia.

En la práctica, incrementar la acreditación de asignaturas no es tarea sencilla; así como tampoco lo es el incrementar la probabilidad de avanzar del estado 1 al estado 2 en el estudio de avance escolar utilizando el porcentaje de créditos; sin embargo, modificar las probabilidades tendrá, por lo general, un impacto positivo en el resto de las probabilidades de acreditación o de avance, por lo que el efecto en cascada incrementará aún más los beneficios logrados en el primer semestre.

Los datos obtenidos para la generación 2008 son consistentes con los datos históricos que maneja la Facultad de Ingeniería, así como la Dirección General de Evaluación Educativa de la UNAM, esto significa que a los largo de los años los porcentajes de deserción o abandono y los de terminación de créditos se han mantenido, por lo que debe reflexionarse sobre lo que se está haciendo y sobre lo que se está dejando de hacer, esto es: para obtener resultados diferentes deben hacerse cosas diferentes. De esta reflexión, se deberán redoblar los esfuerzos que se considera han sido valiosos para incrementar los índices de aprobación sobre todo en el primer semestre.

Para mejorar los resultados en el primer semestre, deberán continuarse y reforzarse actividades como: asesorías académicas, clases y talleres de ejercicios, clases y talleres de antecedentes, y muy especialmente la tutoría, que permite orientar al estudiante e incorporarlo de una manera reflexiva al ritmo y ambiente de la Facultad de Ingeniería. También deben iniciarse actividades nuevas, como la Campaña de Aprendizaje Autónomo que ha iniciado la Secretaría de Apoyo a la Docencia, junto con las Divisiones de la

Facultad. Otra recomendación es buscar una mayor incorporación de las TIC a la enseñanza de las asignaturas de primer semestre, teniendo como ejemplo el laboratorio virtual de Geometría analítica. El uso de redes sociales puede permitir a los alumnos estar más en contacto con la asignaturas que está cursando, así como disponer de una agenda que le recuerde las actividades académicas relevantes, como fechas de exámenes o entrega de tareas o proyectos.

Debe destacarse que el tiempo promedio para concluir los créditos de una carrera en la Facultad de Ingeniería es de casi 11 semestres, por lo que debe considerarse el diseño del plan curricular, en el que se indica que la mayoría de las carreras son de nueve semestres. En la práctica se observa que la carrera no se cursa en los nueve semestres propuestos, por lo que deberán diseñarse planes de al menos 10 semestres.

Otro factor importante a considerar es el hecho de que el estado que presenta mayores problemas para avanzar, después del que corresponde al primer semestre, es el estado nueve, que representa al último semestre curricular. Esto significa que los alumnos tardan más de lo deseado en concluir los créditos de su plan de estudios, justo cuando están por concluir su carrera. Lo anterior puede deberse a que los alumnos inician su actividad laboral y reducen la velocidad con la que cubren los créditos faltantes; sin embargo, no es algo deseado en términos del plan de estudios vigente.

También se observa para la generación 2008 una deserción o abandono del 32.92%, lo que deja un potencial para titulación del 67.08%; sin embargo, no todos estos alumnos obtienen su título profesional. Las estadísticas indican que en promedio se titula el 33% de los alumnos de una generación, dejando otro 33% con una carrera terminada (o prácticamente terminada), pero sin título profesional.

La Facultad también debe continuar con los planes de apoyo para titulación y con mayor promoción de las opciones de titulación, con el fin de titular a este 33% que se encuentra en posibilidades de hacerlo pero que no lo hace por diversas razones.

Finalmente, se concluye que el análisis de acreditación y avance escolar utilizando Cadenas de Markov proporciona información acertada, sin requerir una información demasiado detallada del avance de cada alumno de la Facultad, y permite obtener probabilidades y promedios para observar las tendencias y los estados críticos. Adicionalmente resulta muy sencillo hacer un análisis de sensibilidad modificando las probabilidades de transición para determinar el impacto en los valores esperados, lo que resulta mucho más conveniente que si se compara con la estadística descriptiva que realizan la gran mayoría de los estudios referentes al avance escolar.

Bibliografía

Al-awadi, S., & Konsowa, M. (2007). An application of absorbing markov analysis to the student flow in an academic institution. *Kuwait Journal of Science and Engineering*, 77-90.

ANUIES. (2007). *http://www.anuies.mx/*. Recuperado el 18 de 09 de 2012, de http://www.anuies.mx/servicios/d_estrategicos/libros/lib64/indice.html

Cruz, E. G. (2011). *Evaluación del perfil de ingreso.* México: Universidad Pedagógica Nacional.

Enso Ikoen, M. T. (2009). *Analysis of students' study paths using finite Markov chains.* IEEE International Conference on Control and Automation.

Ernesto Pathros Ibarra García, P. M. (2011). *Model Prediction of Academic Performance for First Year Students. .*

Eugenia, Á. R. (2000). *Modelo markoviano para el estudio de evolución de cohortes de estudiantes de un programa académico.* Red de revistas científicas de América Laitna y el Caribe, España y Portugal.

Giraldo G., A. Z. (s.f.). *Modelo probabilístico para los fenómenos de transferencia entre programas de pregrado y de deserción estudiantil.* Scientia et technica.

Hillier, F. y. (2010). *Introducción a la investigación de Operaciones* (Novena ed.). México: McGraw-Hill.

Ibarra, L. F. (2009). Predicciones de Markov Aplicadas en el Programa de Ingeniería Industrial de la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET). *Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas tendencias*, 39-51.

Link, D. (1980). *http://www.alpha60.de/.* Recuperado el 04 de 09 de 2012, de http://www.alpha60.de/research/markov/DavidLink_ChainsToTheWest.htm

Link, D. (Jueves 22 de Junio de 2006). *http://www.alpha60.de/*. Recuperado el 04 de 09 de 2012, de http://www.alpha60.de/research/markov/DavidLink_TracesOfTheMouth_EN.htm

Nicholls, M. G. (1985). Tertiary Education Faculty Planning: An Application of a Substantially New Direct Control Model. *The Journal of the Operational Research Society*, 137-145.

Pathom Pumpuang, A. S. (2008). Using Bayesian Network for Planning Course Registration Model for Undergraduate students. *Second IEEE International Conference on Digital Ecosystems and Technologies*, 492-496.

Puliafito, S. M. (1999). An Application of Data Mining to the Problem of the University Students' Dropout Using Markov Chains. *Principles of Data Mining and Knowledge Discovery*, 51-60.

Render, B. S. (2006). *Métodos cuantitativos para los negocios* (Novena ed.). México: Pearson.

Shamblin, J. E. (1988). *Investigación de Operaciones Un enfoque fundamental* (Primera ed.). México: McGraw-Hill.

Taha, H. A. (2012). *Investigación de Operaciones* (Novena ed.). México: Pearson.

Ursul Solanes, J. (s.f.). *Avances del Proyecto: Mejoramiento de Eficiencia de los procesos Educativos.* México.

Winston, W. L. (2004). *Investigación de Operaciones aplicaciones y algorítmos* (cuarta ed.). México: Thomson.