



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA (INGENIERÍA MECÁNICA)

Análisis dinámico de un manipulador paralelo tipo PRRS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ULISES VARGAS OLGUÍN

TUTOR PRINCIPAL
FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. JUNIO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Carrera Bolaños Jorge
Secretario: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel
Vocal: Dr. Cuenca Jiménez Francisco
1^{er} Suplente: M. I. Diaz Hernández Octavio
2^{do} Suplente: M.I. Martínez Zamudio Patricio

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. Francisco Cuenca Jiménez

FIRMA

Abstract

Parallel robots have been used regularly in recent years due to the high speed, high load capacity and high accuracy they can achieve in comparison with a serial robot (Merlet, 2006), but its application has been limited to specific niches due to the singularities found within their workspace, especially for *fully parallel mechanisms*; these singularities are generated when the actuators are highly coupled, so this thesis seeks a parallel mechanism with a degree of decoupling in its actuators.

In the assembly analyzed, it is geometrically shown the effect of decoupling in a mechanism with more actuators than independent kinematic chains, it is obtained the numerical solution and the analytical solution of the position as well as the complete description of its linear and angular velocities and accelerations, the dynamics solution is also generated by the Newton method. One of the contributions of this thesis is to show how to harness the decoupling geometry for calculating the position of the mechanism in real time, taking into account the composition of a modern controller.

Resumen

Los robots paralelos se han utilizado regularmente en los últimos años debido a las altas velocidades, alta capacidad de carga y gran precisión que pueden alcanzar en comparación con un robot serial (Merlet, 2006); sin embargo, su aplicación se ha limitado a algunos nichos específicos debido a las singularidades que se encuentran dentro de su espacio de trabajo, especialmente para los *mecanismos totalmente paralelos*; dichas singularidades se generan cuando los actuadores se encuentran altamente acoplados, por lo que en esta tesis se busca un mecanismo paralelo con un cierto grado de desacoplamiento en sus actuadores.

En el conjunto analizado se muestra geométricamente el efecto de desacoplamiento en un mecanismo con más actuadores que cadenas cinemáticas independientes, se obtiene la solución numérica y la solución analítica de la posición, así como la descripción completa de sus velocidades y aceleraciones lineales y angulares, y también se genera la solución dinámica por el método de Newton. Una de las aportaciones de este trabajo es que muestra cómo puede aprovecharse la geometría de desacoplamiento para realizar el cálculo de la posición del mecanismo en tiempo real tomando en consideración la composición de un controlador contemporáneo.

Contenido

Capítulo 1 Introducción	3
Estructura del trabajo de tesis.....	5
Capítulo 2 Generación de un mecanismo paralelo parcialmente desacoplado	7
Capítulo 3 Análisis cinemático matricial.....	13
Solución numérica de la posición	14
Traslaciones.....	15
Rotaciones	16
Construcción de los lazos y solución	16
Solución analítica de la posición.....	21
Conclusiones sobre la utilización de ambos métodos.....	29
Capítulo 4 Análisis cinemático vectorial.....	33
Análisis vectorial de posición.....	33
Análisis vectorial de velocidad.....	34
Matriz Jacobiana de velocidad	35
Análisis vectorial de aceleración	37
Arreglo matricial para la aceleración	38
Capítulo 5 Análisis dinámico	43
Cuerpos considerados en el análisis dinámico	50
Análisis del Cuerpo 2i	51
Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 2i	53
Análisis del Cuerpo 3i	55
Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 3i	56
Análisis del Cuerpo 4i	58
Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 4i	60
Análisis del Cuerpo 5i	62
Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 5i	63
Análisis del Cuerpo 6i	65
Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 6i	66
Análisis de la plataforma móvil (Cuerpo P)	68
Aceleración del centro de gravedad de la Plataforma Móvil	70
Resolución del sistema de ecuaciones	73
Conclusiones	79
Anexo 1 Tipos de Redundancias.....	81
Anexo 2 Propuesta del doble eslabonamiento de tres barras.....	83
Análisis de movilidad de los conjuntos.....	84
Anexo 3 Generación de Trayectorias.....	85
Trayectoria lineal	85
Orientación angular.....	90
Curvas estudiadas en los ejemplos.....	90
Referencias	91

Capítulo 1

Introducción

La robótica paralela es, desde hace varios años, un tema central en el diseño y selección de máquinas debido a las altas velocidades que un robot paralelo puede alcanzar en comparación con un robot serial, además de una alta capacidad de carga y una gran precisión (Merlet, 2006). Estas características se deben a que su estructura concentra los actuadores en una plataforma fija, mientras que su efector terminal se encuentra en una base móvil no actuada. Es decir, la mayor parte de la masa asociada a los actuadores se encuentra inmóvil, por lo que no precisan de estructuras de gran peso y alta rigidez para sostenerlos, como se puede apreciar en la Figura 1.

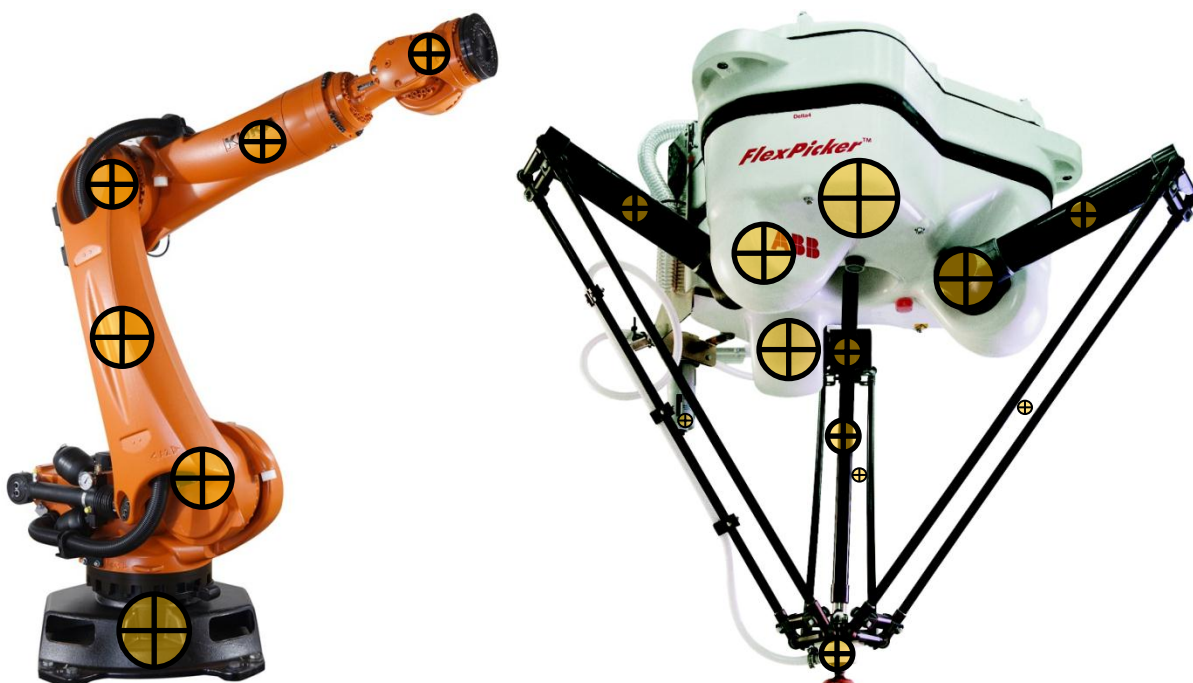


Figura 1 Comparación de la distribución de la masa en una configuración serial y en una configuración paralela. Nótese que la distribución en un mecanismo serial se da a lo largo de toda la cadena cinemática, mientras que en el mecanismo paralelo las mayores concentraciones de peso se encuentran fijas

Mediante este tipo de estructuras se pueden sintetizar mecanismos ligeros y con alta capacidad de carga, aunque generalmente se favorece una característica en detrimento de la otra.

A pesar de las bondades antes enunciadas para los mecanismos paralelos, el mismo arreglo que permite configuraciones más ligeras y rápidas limita su espacio de trabajo, ya que a diferencia de los mecanismos seriales, en la mayor parte de los mecanismos paralelos (especialmente los “totalmente paralelos”, como se describe en (Merlet, 2006)) los actuadores se encuentran altamente acoplados, por lo cual es común encontrar singularidades dentro de su espacio de trabajo.

El problema del alto acoplamiento, y particularmente las singularidades dentro del espacio de trabajo, ha sido abordado utilizando módulos de mecanismos paralelos acoplados en serie con

movilidad limitada en cada módulo para asegurar que no se alcancen las posiciones singulares o extremas (un ejemplo de ello es el robot Hydras de RoMeLa, que se construye del acoplamiento en serie de dos o más plataformas de Gough); otra manera de evadir posiciones singulares al mismo tiempo que se extiende el espacio de trabajo de un mecanismo paralelo es la construcción de mecanismos paralelos desacoplados, como el robot tipo diamante (Huang, Li, Li, Chetwynd, & Gosselin, 2004). Ejemplos de los mecanismos citados se ilustran en la Figura 2.

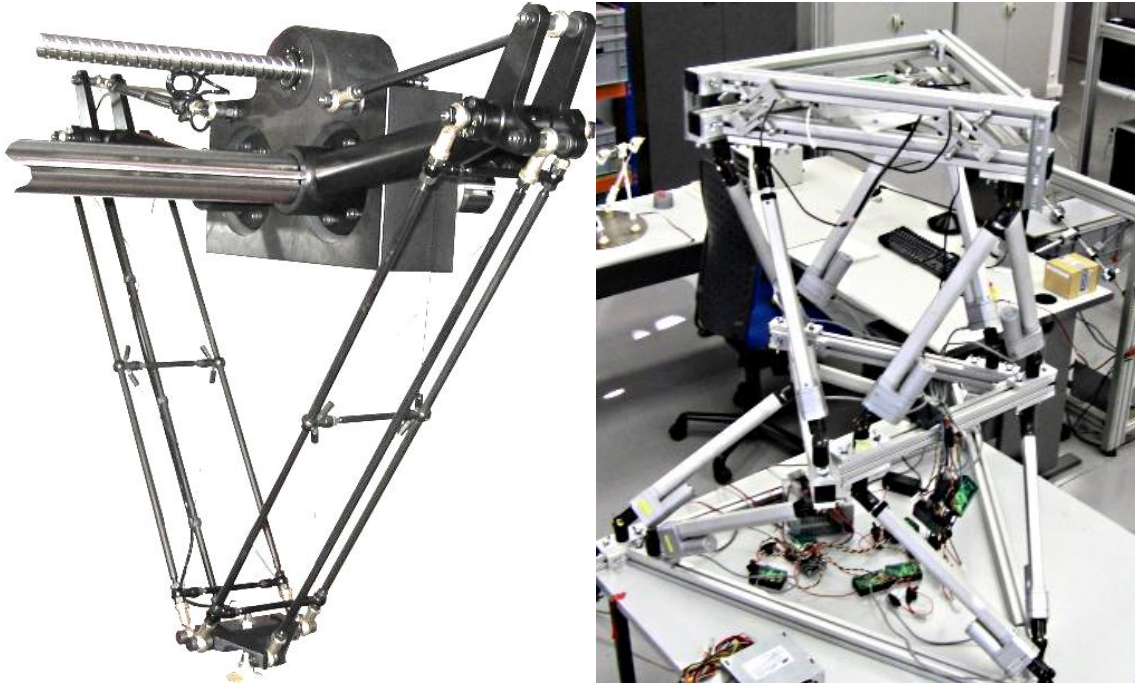


Figura 2 Robot tipo Diamante (Izq.) con mecanismo paralelo que actúa en dos dimensiones y toma posiciones dentro de un plano, mientras que el tornillo se coloca transversal a este plano y permite desplazamientos volumétricos en combinación con el mecanismo paralelo (Warwick, 2007). En el caso del robot Hydras (Der.), se utilizan dos mecanismos paralelos de 6GDL para extender el rango de acción del manipulador y obtener un espacio de trabajo mayor (Thomas, 2013).

Los dos mecanismos descritos cumplen con la función de extender el rango de trabajo de los mecanismos paralelos con adaptaciones seriales, aunque sus similitudes terminan precisamente en este punto. Las diferencias más notables entre ambos mecanismos se enlistan en la Tabla 1.

Característica	Tipo de Mecanismo	
	Robot tipo Diamante	Robot Hydras
GDL en plataforma	Tres	Seis (máximo posible para mecanismos espaciales)
Actuadores	Tres	Seis por cada módulo acoplado
Descripción cinemática	Mecanismo paralelo de 2GDL en serie con actuador de 1GDL	Módulo con base en mecanismo paralelo de 6GDL, acoplado en serie a módulos iguales, mecanismo redundante para arreglos con más de un módulo
Solución cinemática única	Sí	No, el número de soluciones es infinito para mecanismos de más de un módulo

Tabla 1 Comparación de los dos mecanismos utilizados en las evasión de singularidades



Figura 3 Robot HyDRAS de RoMeLa (Goldman & Hong, 2012)

Una posibilidad alternativa es la utilización de mecanismos paralelos con eslabones desacoplados o parcialmente desacoplados. Este tipo de mecanismos difiere de los mecanismos antes citados en cuanto que sus cadenas se mantienen entre la base fija y la plataforma móvil; por otro lado, defieren de los mecanismos completamente paralelos en que regularmente precisan un número menor de cadenas independientes comparado con los grados de libertad, dado que integran más de un actuador en alguna(s) de las cadenas cinemáticas.

En resumen, los mecanismos paralelos tienen muchas de las características deseables en prácticamente cualquier aplicación (baja inercia, altas velocidades de desplazamiento y alta precisión); sin embargo, carecen de algunas otras características donde los mecanismos seriales sobresalen, como es el espacio de trabajo bien delimitado y sin singularidades internas, descripción simple de la cinemática directa y esquemas de control bien conocidos.

Las características expuestas hacen razonable la idea de utilizar mecanismos paralelos desacoplados o parcialmente desacoplados para conjuntar las topologías de ambos tipos de mecanismos, por lo que en este trabajo se buscará un mecanismo paralelo con estructura desacoplada y se mostrará que su descripción cinemática y dinámica puede ser simplificada apoyándonos en las características geométricas de este tipo de mecanismos.

Estructura del trabajo de tesis

El presente trabajo tiene la finalidad de obtener la descripción cinemática y dinámica adaptada a un mecanismo paralelo parcialmente desacoplado y contraponer esta descripción con la obtenida a través de un proceso numérico basado en un algoritmo que se utiliza con frecuencia para describir la cinemática inversa de los mecanismos paralelos. Con esta finalidad, en el segundo capítulo se planteará la generación de un mecanismo que conjunte características de mecanismos paralelos y mecanismo seriales.

En el tercer capítulo se realizará el análisis cinemático matricial del mecanismo propuesto y se construirá su solución numérica a partir de éste; después se realizará un análisis cinemático basado en la geometría y se obtendrá una solución analítica de la posición. Estos enfoques nos darán una idea de la precisión que se puede alcanzar con ambos métodos, las implicaciones del análisis y el posible desempeño durante la ejecución en tiempo real; también se observará que la simplicidad de los cálculos se debe al desacoplamiento de los actuadores generado tras la inserción de un mecanismo serial junto a cada cadena cinemática independiente.

En el cuarto capítulo se realizará el análisis cinemático vectorial con la finalidad de obtener una descripción completa de las posiciones de las juntas de eslabones, así como sus velocidades y aceleraciones lineales y angulares.

La información del capítulo recién descrito se utilizará como base en el siguiente capítulo para obtener las posiciones, velocidades y aceleraciones lineales y angulares en los centros de gravedad de cada uno de los eslabones de la cadena cinemática. Al final de este capítulo se propondrá la resolución dinámica por el método de Newton, siendo ésta la más adecuada para el mecanismo en cuestión y se propondrá una simulación.

Al final se revisarán las implicaciones de utilizar un enfoque de resolución cinemática propio del mecanismo en cuestión y se propondrán trabajos subsecuentes de esta investigación.

En particular, se buscará cumplir con los siguientes objetivos:

1. Se mostrará geoméricamente el efecto de desacoplamiento en un mecanismo paralelo con más actuadores que cadenas cinemáticas independientes
2. Se obtendrá la solución numérica y la solución analítica de la posición del mecanismo bajo estudio
3. Se demostrará cómo puede aprovecharse la geometría de desacoplamiento para realizar el cálculo de la posición del mecanismo en tiempo real
4. Se generará un análisis cinemático vectorial completo para obtener la descripción completa de las posiciones de las juntas de eslabones, así como sus velocidades y aceleraciones lineales y angulares
5. Se propondrá la solución dinámica por el método de Newton para el mecanismo investigado

Capítulo 2

Generación de un mecanismo paralelo parcialmente desacoplado

Los primeros mecanismos que se analizarán nacieron de la idea de generar un arreglo mecánico que pudiera compartir características de los mecanismos seriales para facilitar su análisis dinámico. La solución inicial fue la incorporación de redundancias cinemáticas que en los mecanismos seriales tienen cada vez mayor aceptación por la posibilidad de generar posturas múltiples para una misma posición y orientación. Los primeros mecanismos desarrollados se muestran en la Figura 4.

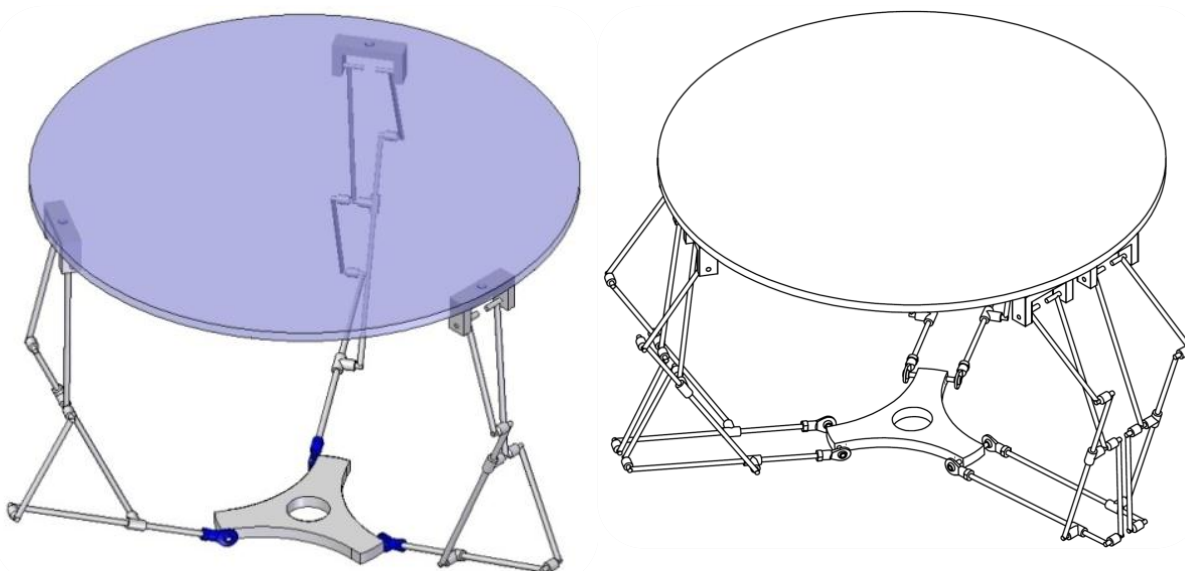


Figura 4 Mecanismos propuestos con redundancias cinemáticas; a la izquierda se muestra un mecanismo redundante con tres cadenas cinemáticas independientes y 9 GDL; el mecanismo de la derecha tiene seis cadenas cinemáticas independientes y 12 GDL

Estos mecanismos surgieron de la conjunción de dos eslabonamientos de tres barras, como fueron propuestos por (Koganezawa & Kinoshita, 2001), y la principal característica de estos conjuntos es que ambos ocupan redundancias cinemáticas como se propuso en (Pierrot, Parallel Mechanisms and Redundancy, 2002) (ver Anexo 1). El mecanismo plano es redundante por sí mismo, y genera mecanismos de 9 GDL para un arreglo con tres cadenas cinemáticas independientes y 12 GDL para el arreglo con seis cadenas cinemáticas independientes, como se muestra en el Anexo 2; el arreglo para seis brazos sería de tres conjuntos de dos brazos tan juntos como sea posible, por ser un conjunto con grandes ventajas cinemáticas, similar al analizado por (Zhang, Duffy, & Crane, 2000). Un modelo similar a éste es el robot tipo Hexa de (Pierrot, Dauchez, & Fournier A, HEXA: a fast six-DOF fully-parallel robot, 1991).

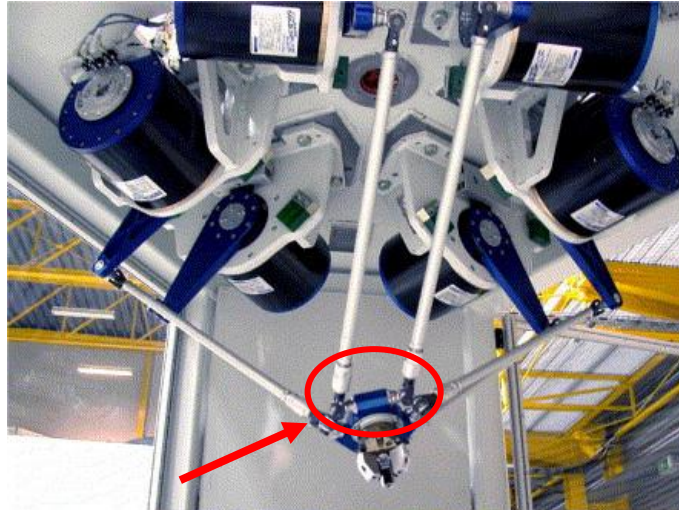


Figura 5 Robot tipo Hexa de 6 GDL. Nótese la distancia entre los pares de actuadores señalados en la ilustración. Este conjunto tiene grandes ventajas cinemáticas

Estas propuestas de diseño fueron desechadas al encontrar que su integración a un mecanismo espacial generaba colisiones especialmente en posiciones extremas del mecanismo de 12 GDL; en el caso del mecanismo de 9 GDL, se encontró que el número de eslabones era muy grande para la aplicación y tres de los actuadores debían posicionarse a la mitad de la cadena cinemática. Esta situación originaba que el mecanismo tuviera una mayor inercia dentro de sus cadenas cinemáticas independientes, el número de elementos mecánicos y actuadores elevaba el costo al igual que los motores y controladores, y se restringía la capacidad de cálculo, dado el número de actuadores que debían ser coordinados, esto sin contar que el sistema estaría obligado a calcular una gran cantidad de variables de forma numérica, particularmente mediante métodos de optimización en el caso de una optimización local. El cálculo de la posición de las cadenas independientes consume una gran cantidad de recursos, lo cual se traduce en un desempeño pobre en tiempo real.

Un análisis rápido de los mecanismos anteriores nos llevó a entender que sus aplicaciones se limitan a aquellas en las que un planeamiento de trayectoria fuera de línea es suficiente, o bien, en las que no se necesitan grandes velocidades. Si el modelo es de propósito general, entonces es imperativo plantear modelos alternativos con la premisa de reducir la cantidad de elementos en las cadenas cinemáticas independientes, mediante la eliminación de actuadores u otros elementos mecánicos. Los modelos planteados bajo esta premisa se muestran en la Figura 6.

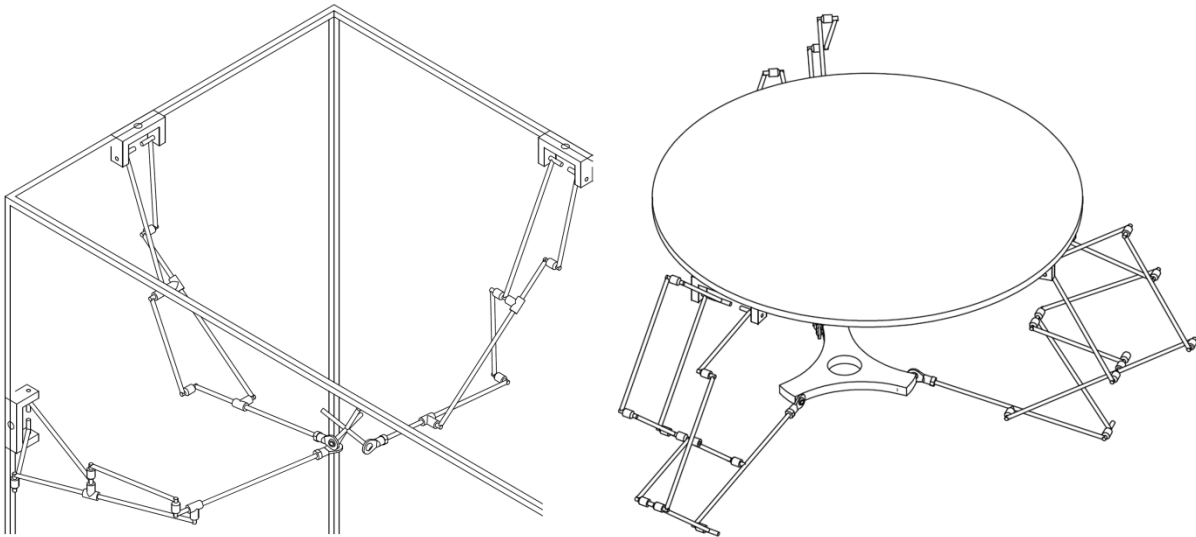


Figura 6 Configuraciones alternativas

Para sortear los problemas asociados a la utilización del tercer motor en la cadena independiente, se planteó el mecanismo de la Figura 6 (*izq.*), en el cual se sustituye una articulación rotacional por un motor lineal transversal al mecanismo plano. De esta manera se consigue un arreglo parcialmente desacoplado con el mismo número de actuadores que el modelo anterior, aunque su propia geometría obliga a utilizar plataformas más elaboradas; de hecho son pocos los arreglos que se han propuesto ejes perpendiculares, un ejemplo de estas aplicaciones se da en el RoboCrane (Simmons & Singh). En general, se tiende a utilizar estos arreglos sólo con cables, debido a que al utilizar barras en un plano paralelo al piso tiende a crear cargas adicionales en los puntos de apoyo y esfuerzos en las articulaciones.

El modelo mostrado en la Figura 6 (*der.*) incorpora barras adicionales con el propósito de eliminar la carga de un actuador extra. Como se ha explicado, cargar un actuador dentro de cada cadena independiente provoca que el mecanismo necesite una gran cantidad de energía para su movimiento. En este caso se evita parcialmente ese problema, aunque la complejidad estructural es mucho mayor que en el mecanismo anterior.

Los modelos anteriores eliminan parcialmente el problema de cargar un actuador en cada una de las cadenas cinemáticas; sin embargo, los conjuntos se vuelven muy complejos. Una alternativa a este problema consiste en volver a plantear el principio de diseño; éste fue el paso siguiente. Para ello se tomó como base un modelo popular: el robot Delta de Clavel (Pessina, 2013). Este robot debe su popularidad a su gran capacidad de desplazamiento y alta velocidad; además, contiene una estructura muy simple que facilita su control, el cual se ha logrado implementar mediante controladores robóticos de bajo costo, en los que se calculan unas cuantas operaciones aritméticas y trigonométricas, como se muestra en (Pierrot, Benoit, Dauchez, & Galmiche, 1990).

Este robot, diseñado en la École la Politécnica Fédérale de Lausana, incorpora un elemento adicional a las tres cadenas cinemáticas independientes; se trata de una junta cardán extensible en medio de las demás cadenas (elemento 14 en la Figura 7). A diferencia de los modelos planteados, la razón para utilizar una cadena extra está en que este robot tiene aplicación en ambientes que precisan de cuatro grados de libertad, como son las tareas usuales de tomar y colocar. Como se nota, para este robot el grado de libertad no es redundante, pues de esta

manera se completa la movilidad requerida; más aún, el robot es capaz de adquirir una posición general y orientarse en un solo eje.

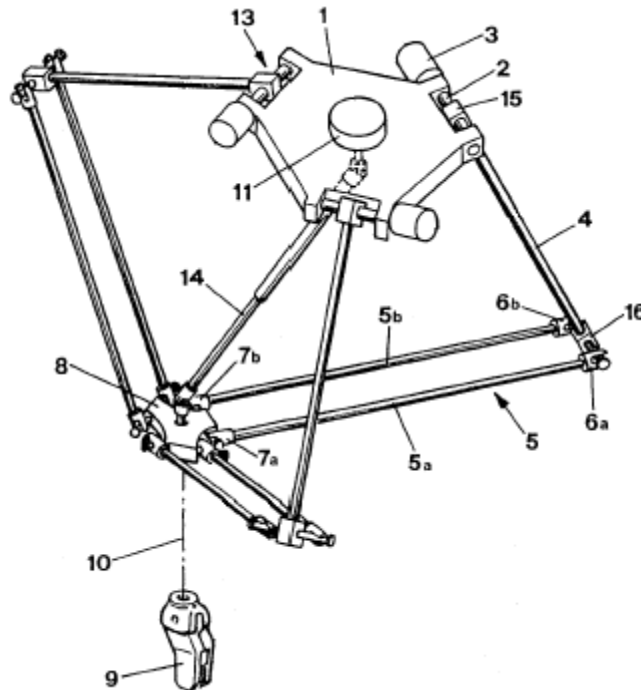
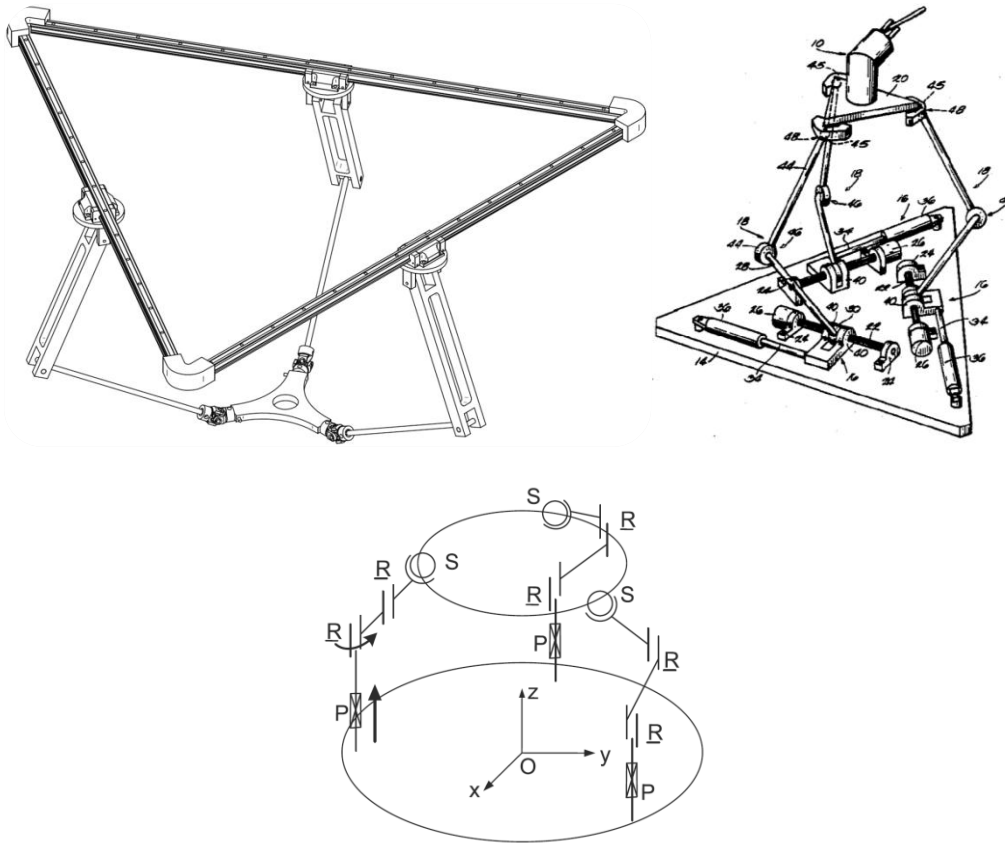


Figura 7 Estructura del robot Delta de Clavel

Al hacer una recapitulación de los dos modelos antes sugeridos y el modelo de Clavel, se exploraron modelos similares que combinaran lo mejor de todos ellos. El resultado es un modelo de mecanismo que data de finales de los 80s y tiene la patente 4,806,068 en Estados Unidos (Kohli & Sandor, 1989), ver la Figura 8; un mecanismo muy similar fue presentado por (Jin, Chen, & Yang, 2009), con una diferencia en la posición de los eslabones prismáticos; cabe aclarar que según la descripción descrita por (Jin, Chen, & Yang, 2009), se trata de mecanismos parcialmente desacoplados, como se mostrará en el siguiente capítulo.

El modelo analizado incorpora tres actuadores lineales (motores lineales) sin rotación en la base, similares a los utilizados en el primer modelo (Figura 6, *izq.*); del modelo de la Figura 6, *der.* se toma el arreglo triangular que ya veníamos usando y se evita cargar motores en las articulaciones centrales. Finalmente, del modelo propuesto por Clavel se toma la idea de utilizar una plataforma desacoplada; en este caso, con un grado de traslación por cada cadena cinemática. Este arreglo puede ser fácilmente escalable para adquirir un grado de libertad extra mediante la adición de una junta homocinética similar a la de la plataforma Delta de Clavel, aunque habrá que recordar que su utilización restringirá el movimiento de la plataforma. Por otro lado, para tareas como el taladrado, la orientación de la plataforma no afecta la operación realizada, por lo que se tendrían hasta dos grados de libertad extra, que podrían permitirnos hallar posturas en las que la transmisión de la fuerza de los actuadores sobre la herramienta en la plataforma sea mayor, o se eviten colisiones como segunda tarea del mecanismo.



(a) 3-PRRS*

Figura 8 Estructura simplificada del mecanismo paralelo parcialmente desacoplado analizado en el presente trabajo (*izq. arriba*), mecanismo patentado a finales de la década de 1980 (*der. arriba*) y comparación con el mecanismo propuesto por (Jin, Chen, & Yang, 2009) (*abajo*)

En la Figura 9 se muestran los cuerpos y las articulaciones de una cadena cinemática del mecanismo analizado en el presente trabajo.

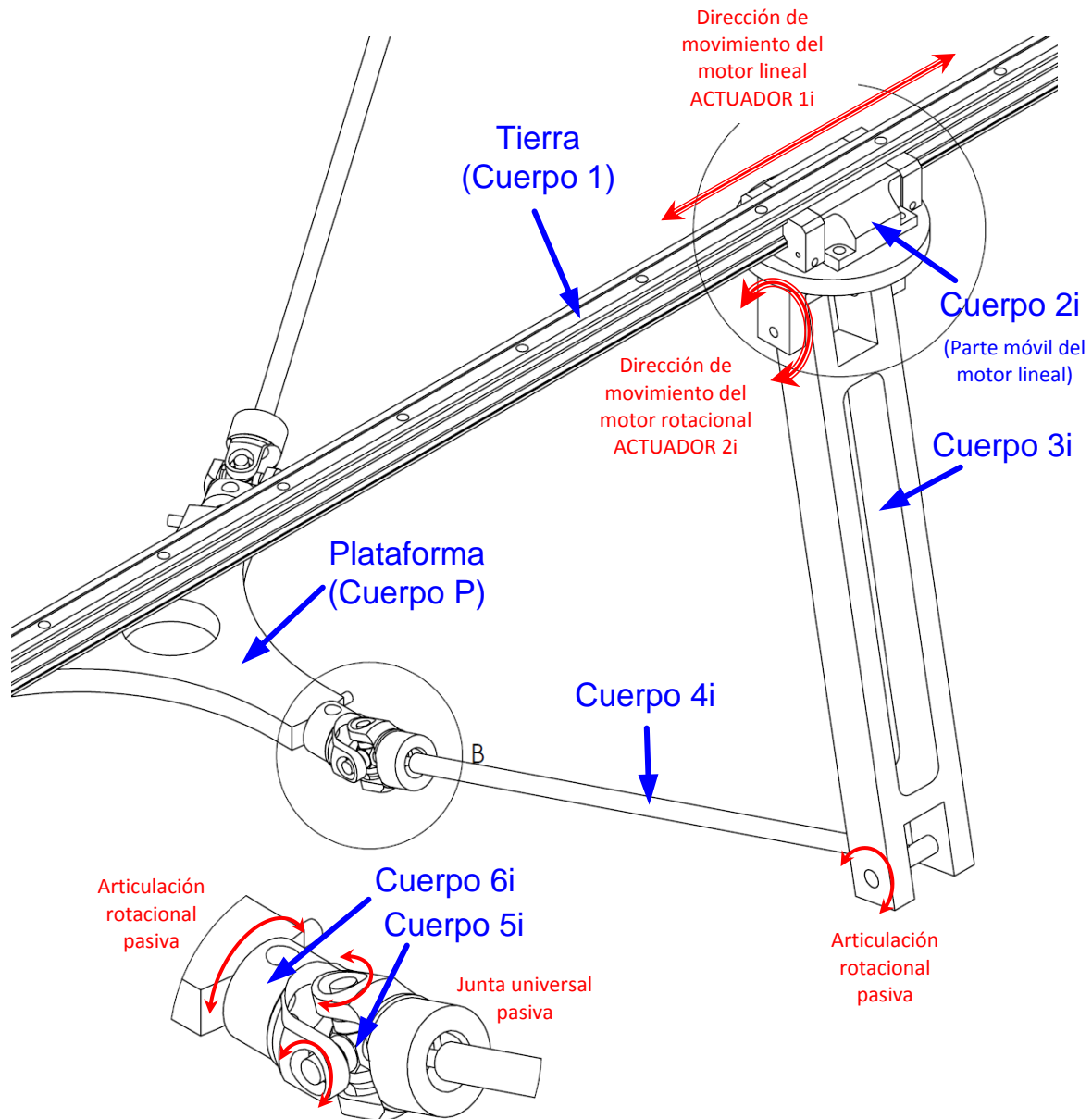


Figura 9 Cuerpos del mecanismo analizado en este trabajo

En los próximos capítulos se desarrollará el análisis cinemático de la posición mediante el Análisis Cinemático Matricial, para después pasar al análisis de velocidad y aceleración mediante el Análisis Cinemático Vectorial. Finalmente se planteará el análisis dinámico mediante el método de Newton y se presentarán las conclusiones generales del trabajo de investigación aquí planteado.

Capítulo 3

Análisis cinemático matricial

El problema de la cinemática inversa consiste en la determinación de la posición de los elementos mecánicos en función de la posición y orientación del elemento terminal. Este problema puede resolverse de distintas maneras, desde el enfoque puramente geométrico hasta algunos métodos secuenciales como al algoritmo de Denavit – Hartenberg o la representación de giros y desplazamiento únicos a partir de matrices homogéneas.

Para el caso de los mecanismos paralelos, usualmente se puede encontrar la posición de los elementos mediante un par de ecuaciones de lazo igualadas entre sí. Si el número de incógnitas corresponde con el número de ecuaciones escalares, entonces se puede iterar de modo que la diferencia entre ambas ecuaciones de lazo sea mínima; en caso de tener más incógnitas que ecuaciones, generalmente se obtendrá una gran cantidad de soluciones que ameritan utilizar un método de optimización considerando posiciones singulares, posiciones de mayor movilidad, límites mecánicos o cualquier otro parámetro de diseño (Nakamura, 1991).

Los procedimientos anteriores involucran la utilización de métodos numéricos generalmente sensibles a las ecuaciones utilizadas y la solución inicial propuesta (i.e. condiciones de frontera); además, suelen tomar una cantidad de tiempo considerablemente mayor que su solución analítica directa; sin embargo, suelen ser útiles para mecanismos muy complejos y son imprescindibles para el análisis de movimiento de mecanismos subactuados o sobreactuados sin representación analítica de su optimización global.

Otra manera de resolver la posición de los elementos mecánicos consiste en encontrar las ecuaciones algebraicas y trigonométricas que relacionan la posición del elemento terminal con la posición de los actuadores; a la solución obtenida de esta manera le llamaremos Solución Analítica o Cerrada. Las ecuaciones que componen la solución analítica suelen ser muy complejas y generalmente requieren una mayor cantidad de tiempo de cómputo; sin embargo, proporcionan soluciones exactas (en el sentido de que no requieren de un método numérico para resolverse) y suelen resolverse más rápidamente en línea que los métodos numéricos.

Otra ventaja de la solución analítica es que sus ecuaciones no se limitan a los lazos tratados anteriormente, sino que en el caso de los mecanismos parcial o totalmente desacoplados se pueden encontrar relaciones geométricas de menor complejidad con las cuales se arman ecuaciones más compactas; en este sentido, el mecanismo planteado logra desacoplar parcialmente los actuadores lineales de los rotacionales, con lo cual se pueden tratar ambos casos con ecuaciones independientes, lo que simplifica el tratamiento en paralelo de las ecuaciones, que puede utilizarse para mejorar el cómputo en línea de las posiciones de los actuadores y otros aspectos de la dinámica del actuador.

Una desventaja de los métodos analíticos es que no pueden utilizarse para encontrar la solución de sistemas subactuados, y en el caso de los sistemas sobreactuados se requiere resolver por separado la parte del mecanismo donde se encuentra la redundancia y después resolver

analíticamente para los demás elementos mecánicos. En este capítulo se presentan ambas soluciones y se enumeran sus ventajas específicas para el mecanismo analizado.

Solución numérica de la posición

El análisis numérico de la posición para un mecanismo con el mismo número de actuadores y grados de libertad suele llevar a una solución de la manera más inmediata, puesto que sólo es necesario hacer una descripción de los movimientos en las articulaciones para encontrar el primer lazo cinemático con las incógnitas; por otro lado, el lazo correspondiente a las variables a controlar (posición y orientación del elemento terminal) se obtiene directamente de la posición deseada. La obtención de los valores de posición se encuentra mediante la solución de la igualdad entre ambos lazos a través de un método numérico, usualmente el método de Newton – Raphson; es decir, mediante aproximaciones sucesivas con base en la razón de cambio de la diferencia entre las medidas de ambos lazos en la posición dada.

Para encontrar numéricamente la posición y orientación de los elementos mecánicos se recurrió a las matrices homogéneas, que son arreglos de números que representan en la misma matriz desplazamientos y rotaciones de bases locales entre sí. Éstas se constituyen de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}_{n+1}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{n+1}^n & \mathbf{X}_{n+1}^n \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Donde \mathbf{R}_{n+1}^n es una submatriz que pertenece a las matrices de 3×3 , y representa las rotaciones del sistema coordenado. Esta submatriz está construida por tres vectores unitarios y perpendiculares entre sí. Dichos vectores corresponden a la base $n + 1$ vistos desde la base n , y su particular arreglo permite reconstruir la matriz con sólo conocer tres de las nueve variables presentes en ella. Es por ello que al igualar los dos lazos formados con las variables conocidas y las desconocidas, sólo tres de las nueve ecuaciones que se pueden formar al igualar sus matrices de rotación serán linealmente independientes.

$$\mathbf{R}_{n+1}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{n+1}^n & \mathbf{j}_{n+1}^n & \mathbf{k}_{n+1}^n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Por otro lado tenemos dos vectores: el vector de desplazamientos \mathbf{X}_{n+1}^n y un vector de ceros.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{n+1}^n &= [x_{n+1}^n \ y_{n+1}^n \ z_{n+1}^n]^T \\ \mathbf{0} &= [0 \ 0 \ 0]\end{aligned}\quad (3.3)$$

Si consideramos que los movimientos en las articulaciones pueden representarse mediante desplazamientos y rotaciones sobre y alrededor de los ejes locales \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} , entonces encontraremos seis matrices básicas para armar las ecuaciones que representan el movimiento de las articulaciones.

Traslaciones

Como se había dicho, la representación de las traslaciones en Matrices Homogéneas se encuentra en el vector \mathbf{X}_{n+1}^n . Para representar un desplazamiento entre sistemas coordenados bastará con representar el desplazamiento del origen del sistema $n + 1$ con respecto al origen del sistema n . Las traslaciones básicas sobre los ejes x , y , z , corresponden con las matrices \mathbf{T}_{z1} , \mathbf{T}_{z2} , \mathbf{T}_{z3} , como se muestra en (3.4):

$$\mathbf{T}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Rotaciones

Para la representación de las rotaciones en Matrices Homogéneas se utiliza la submatriz \mathbf{R} . Las rotaciones básicas sobre los ejes x , y , z , corresponden con las matrices \mathbf{T}_{z4} , \mathbf{T}_{z5} , \mathbf{T}_{z6} , como se muestra en (3.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{z4}(\theta_x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_{z5}(\theta_y) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_{z6}(\theta_z) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Consideradas las matrices básicas anteriores, es posible representar cualquier punto dentro de una base local n en la base inercial mediante la posmultiplicación de las matrices homogéneas necesarias para llegar al punto. De este modo, cualquier punto definido en una base local puede ser definido en la base inercial posmultiplicando las matrices homogéneas que representan los movimientos para llegar a la base local por la representación del punto en la base local.

Construcción de los lazos y solución

La solución numérica de la posición requiere la abstracción de los elementos que componen el cuerpo en forma de vectores. Para ello se utiliza como punto de partida y de llegada a las articulaciones en cada una de las cadenas cinemáticas abiertas. Una forma de visualizarlo se muestra en la Figura 10.

En este caso se forma una ecuación de lazo general, la cual se puede aplicar a las tres cadenas con sus parámetros respectivos. Para determinar los ángulos que giran y las distancias que se desplazan las diferentes articulaciones será necesario realizar una suma vectorial desde la base fija hasta la plataforma móvil a través del brazo, y cerrar el lazo con base en el desplazamiento y orientación requeridos en el elemento terminal. La suma vectorial debe ser efectuada en la misma base para todos los vectores, por lo cual será necesario conocer la orientación de los vectores con respecto a la base inercial (base fija); para ello se requiere conocer todos los movimientos posibles en las articulaciones. Una manera sencilla de visualizar estos movimientos se genera al plantear bases locales que se desplazan y orientan con los cuerpos en movimiento. En la Figura 11 y en la Figura 12 se muestran las bases para una de las cadenas cinemáticas.

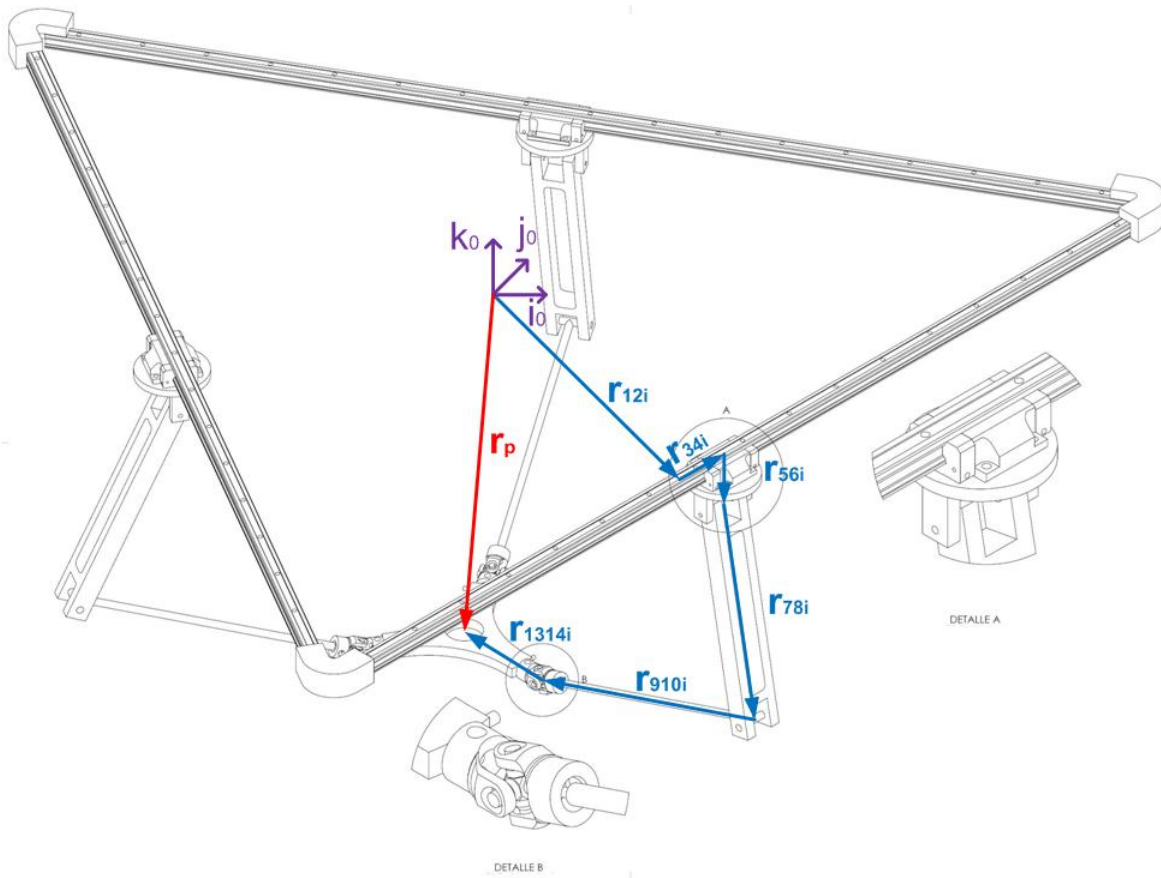


Figura 10 Lazo vectorial para una cadena cinemática independiente

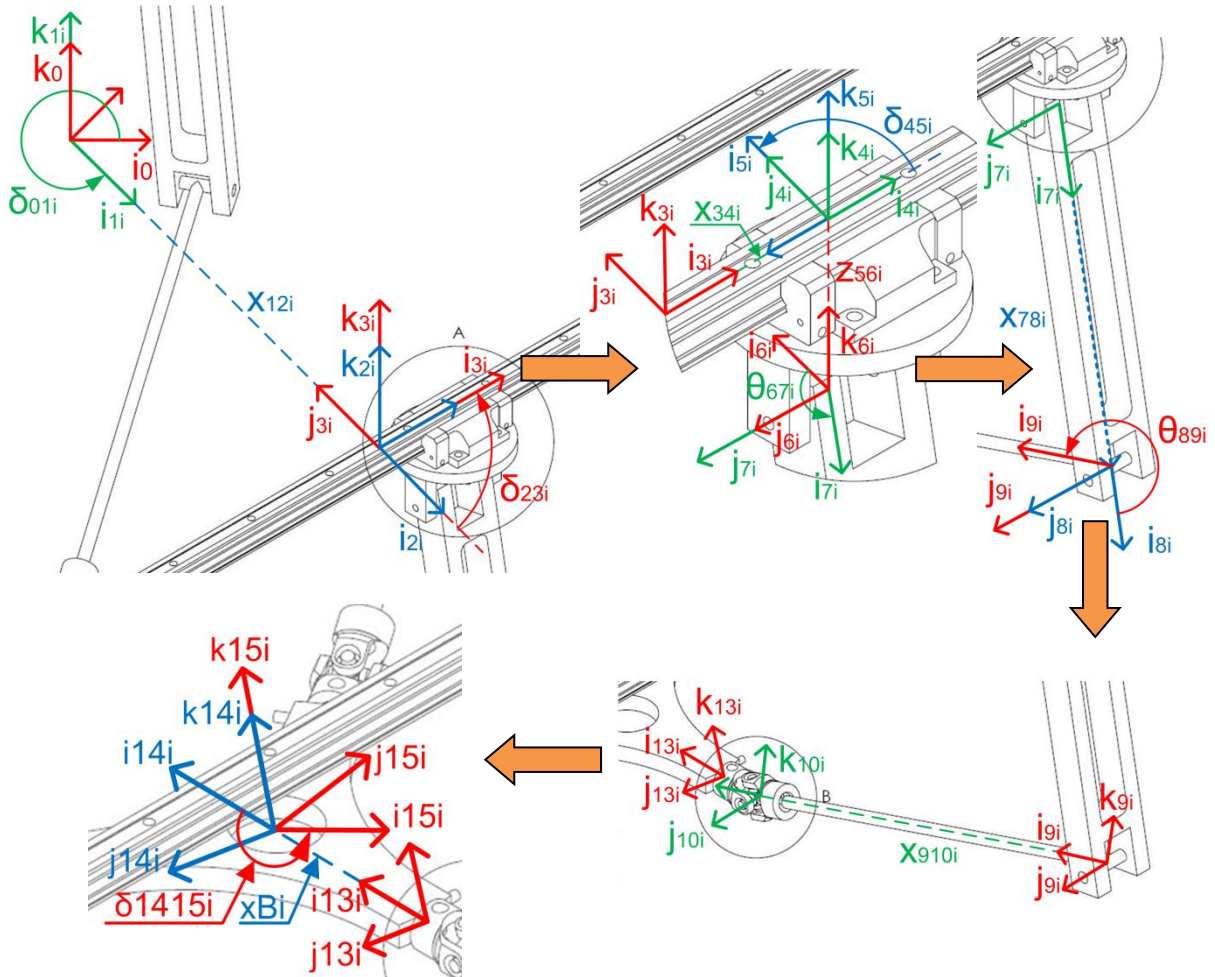


Figura 11 Bases locales consideradas para el análisis de posición (se excluyen las correspondientes a la junta rotacional en combinación con la junta universal)

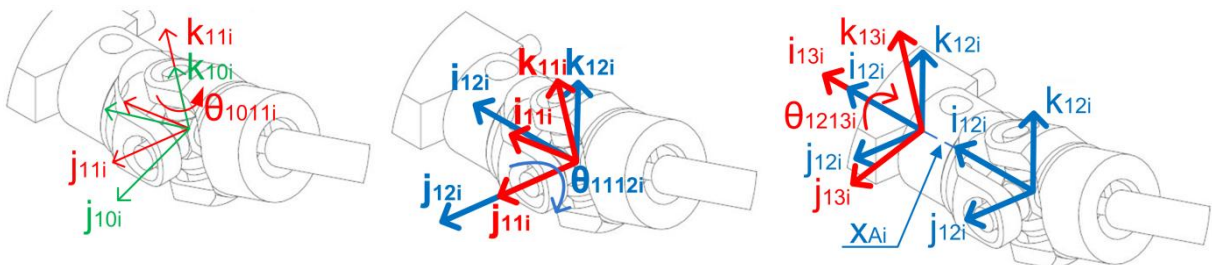


Figura 12 Bases locales correspondientes a la junta rotacional en combinación con la junta universal

Las rotaciones y desplazamientos se pueden agrupar en matrices homogéneas. En este caso, los desplazamientos se leerán en la última columna, como se describe en las ecuaciones (3.1) y (3.3). Además se pueden agrupar como se muestra en la ecuación (3.6):

$$\mathbf{T}_{0p} = \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1013i} \mathbf{T}_{1315i} \quad (3.6)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{02i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{01i}) \mathbf{T}_{z1}(X_{12i}) \\ \mathbf{T}_{24i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{23i}) \mathbf{T}_{z1}(X_{34i}) \\ \mathbf{T}_{46i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{45i}) \mathbf{T}_{z3}(-Z_{56i}) \\ \mathbf{T}_{68i} &= \mathbf{T}_{z5}(\theta_{67i}) \mathbf{T}_{z1}(X_{78i}) \\ \mathbf{T}_{810i} &= \mathbf{T}_{z5}(\theta_{89i}) \mathbf{T}_{z1}(X_{910i}) \\ \mathbf{T}_{1013i} &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1011i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{1112i}) \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1213i}) \\ \mathbf{T}_{1315i} &= \mathbf{T}_{z1}(X_{1314i}) \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1415i}) \\ \mathbf{T}_{0p} &= \mathbf{T}_{z1}(x_p) \mathbf{T}_{z2}(y_p) \mathbf{T}_{z3}(z_p) \mathbf{T}_{z6}(\psi) \mathbf{T}_{z4}(\theta) \mathbf{T}_{z6}(\phi) \end{aligned}$$

Al igualar las matrices resultantes de las operaciones anteriores se pueden encontrar dieciséis ecuaciones para resolver la posición de seis variables, a saber, X_{34i} , θ_{67i} , θ_{89i} , θ_{1011i} , θ_{1112i} , θ_{1213i} (las otras variables corresponden a constantes en la construcción del robot y las variables controladas, i.e., x_p , y_p , z_p , ψ , θ , ϕ). A pesar de obtener dieciséis ecuaciones, cuatro de ellas corresponden al último renglón de las matrices homogéneas y son constantes; además, seis de las ecuaciones de la matriz de rotación son linealmente dependientes, por lo que sólo quedarán seis ecuaciones linealmente independientes. El número de ecuaciones es coincidente con las variables a resolver, por lo que la aplicación del método de Newton – Raphson es inmediata.

A pesar de la aplicación inmediata del método numérico, éste puede no ser convergente para una trayectoria cualquiera, y en ocasiones es necesario iterar utilizando diferentes conjuntos de ecuaciones de la matriz de rotación y soluciones iniciales. Esto se debe a que el método de Newton – Raphson es capaz de encontrar la solución que se acerca más a minimizar la diferencia entre ambos lazos dentro de un intervalo generalmente cercano a la solución inicial, i.e. encontrará un mínimo local.

Puesto que los mecanismos paralelos tienen una descripción cinemática altamente no lineal (Li & Wu, 2004), (Ahmadi, Dehghani, Eghtesad, & Khayatian, 2008), es muy probable que al encontrar un mínimo local como solución al sistema de ecuaciones planteado no se encuentre la solución real (global); es por ello que en estos métodos se debe proponer una solución inicial muy cercana a la real, aunque esta opción requerirá una gran cantidad de operaciones por parte del controlador y una mayor cantidad de tiempo de proceso en línea. En la Figura 13 se muestran las posiciones resultantes de realizar un movimiento en una recta considerando un cambio en la orientación; los detalles del movimiento lineal se muestran en el Anexo 3. Para el caso particular de este movimiento, se tuvieron los siguientes puntos y orientaciones iniciales y finales:

$$\begin{aligned} p_i &= (x_i, y_i, z_i) & \beta_i &= (\psi_i, \theta_i, \phi_i) & \text{Tiempo de movimiento:} \\ p_f &= (x_f, y_f, z_f) & \beta_f &= (\psi_f, \theta_f, \phi_f) & 5 \text{ segundos} \end{aligned}$$

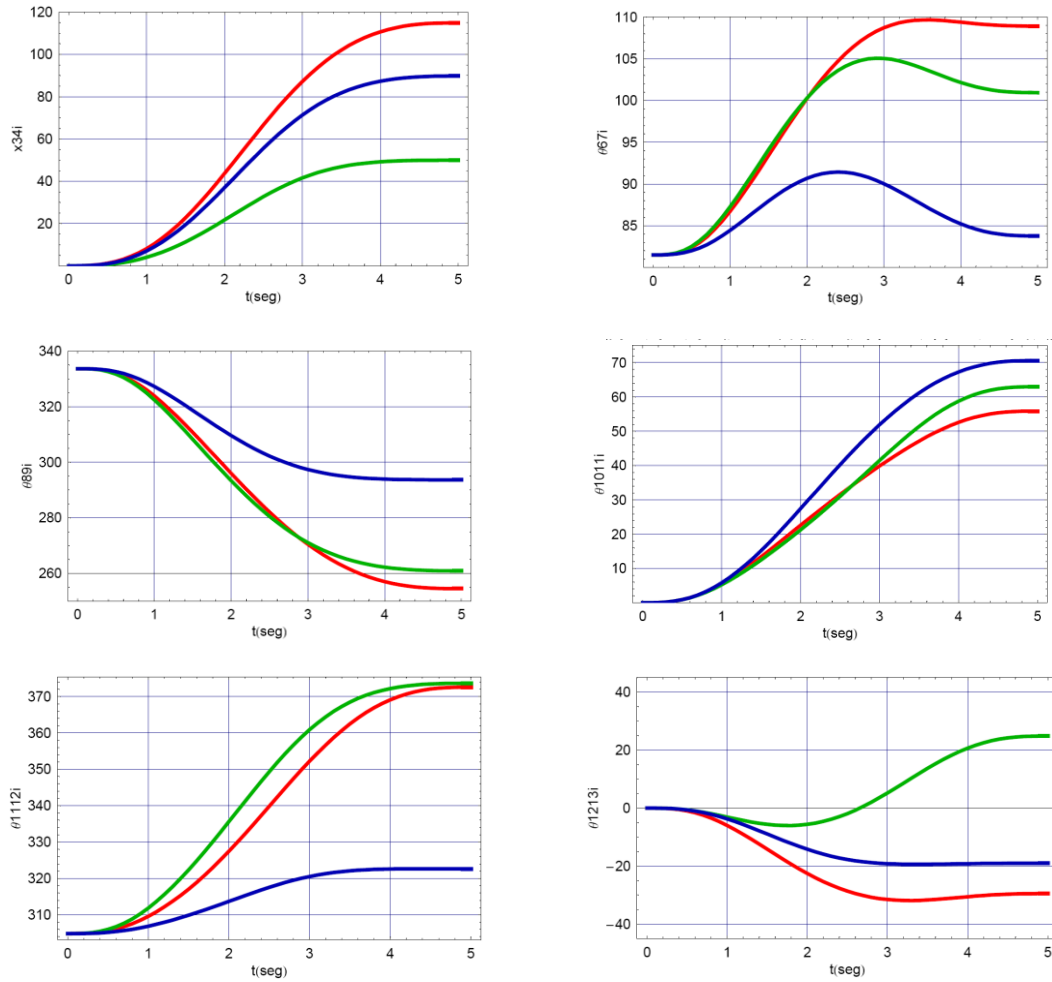


Figura 13 Posición de las articulaciones en un movimiento en línea recta con cambio de orientación

Para este caso se realizó una simulación del movimiento para comprobar el seguimiento de las trayectorias pedidas, como se muestra en la Figura 14.

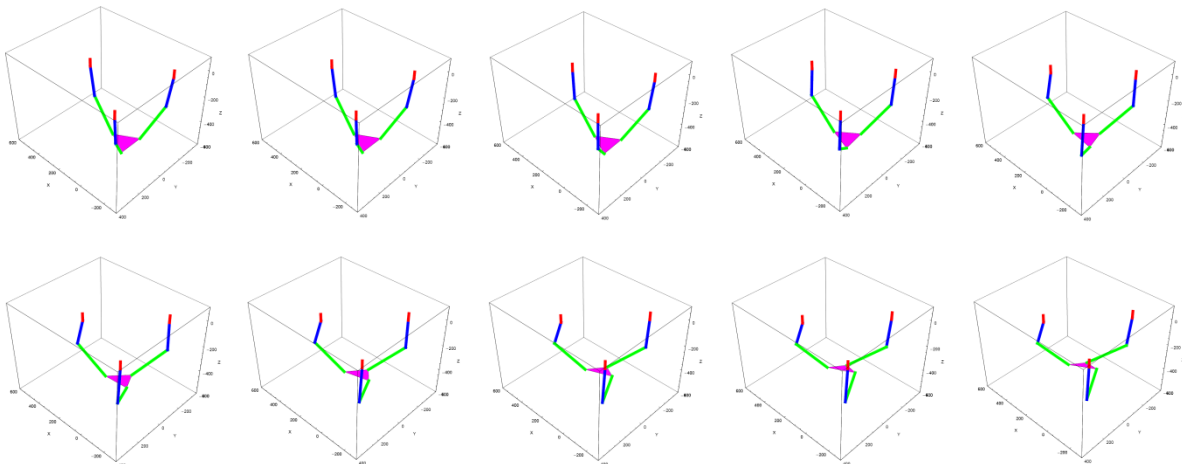


Figura 14 Simulación del movimiento de la plataforma en una línea recta con cambio de orientación

Solución analítica de la posición

La solución analítica de la posición consiste en la obtención de un conjunto de ecuaciones cerradas para los desplazamientos y rotaciones de las articulaciones; es decir, una solución que sólo depende de los desplazamientos y rotaciones de la plataforma móvil (relacionados directamente con los movimientos deseados en el elemento terminal) y otras constantes propias del modelo. Para obtener una solución cerrada usualmente se igualan algunos de los elementos de la matriz de rotación de uno de los brazos con su equivalente en la plataforma móvil, y luego se busca una relación para despejar las variables de las articulaciones.

El método anterior supone una solución directa de la posición de las articulaciones; sin embargo, en general los términos de las matrices homogéneas son muy largos, por lo que intentar reducirlos requiere un esfuerzo mental y recursos computacionales muy grandes; más aún, estos términos siguen consumiendo recursos computacionales grandes en línea, por lo que no resultan adecuados para un control en tiempo real.

Otra forma de solución consiste en utilizar la geometría del mecanismo para establecer relaciones generalmente compactas desde el principio. Esta opción es la que se adapta mejor al modelo en cuestión, ya que los movimientos de rotación y traslación en cada una de las cadenas cinemáticas independientes pueden ser desacoplados con relativa facilidad, como se mostrará más adelante cuando se haga uso de subconjuntos de movimientos en cada uno de los brazos del mecanismo.

Una forma práctica de explicar lo anterior se da al considerar cada uno de los brazos como una cadena cinemática abierta que contiene la base móvil. En nuestro caso cada una de estas cadenas consistirá en un mecanismo con 6 grados de libertad, por lo que para cada brazo existirá un espacio de seis dimensiones (seis movimientos posibles en las juntas, y posición y orientación de la plataforma móvil).

La resolución directa mediante las matrices homogéneas supone encontrar las seis variables de manera simultánea; sin embargo, su resolución es generalmente complicada y fue implícitamente tratada en la solución numérica. La solución analítica propuesta puede alcanzar la misma solución utilizando conjuntos con menos variables; por ejemplo, sólo dos ángulos que dan origen a un desplazamiento en el plano.

Un antecedente de este tipo de soluciones se muestra en algunos mecanismos seriales, donde se suele dividir a las variables entre las que otorgan posición del efector final, y las que le dan orientación. Con esta misma premisa se puede dividir (desacoplar) cada uno de los brazos del mecanismo paralelo en espacios de menores dimensiones para encontrar soluciones de conjuntos con una, dos o más ecuaciones cada vez. La solución de conjuntos de ecuaciones de menor tamaño supone ecuaciones más compactas; más aún, en la solución por partes se pueden utilizar las variables recientemente resueltas en otros conjuntos de ecuaciones y encontrar ecuaciones aún más simples.

La aplicación de los conceptos aquí tratados se dio en la resolución de la posición de la corredera y de los ángulos de hombro y codo del primer modelo, considerando la cadena de uno de los brazos del manipulador como una cadena cinemática abierta.

Para el modelo ahora tratado, la posición de la corredera en el riel está representada por la variable x_{34i} . Dicha variable puede ser calculada al "observar" la posición de la junta universal a partir de la base local 6 del brazo i del manipulador. Dada la construcción que se ha adoptado, se puede encontrar que la junta universal está localizada dentro del plano XZ de la base local $6i$, como se muestra en la Figura 15.

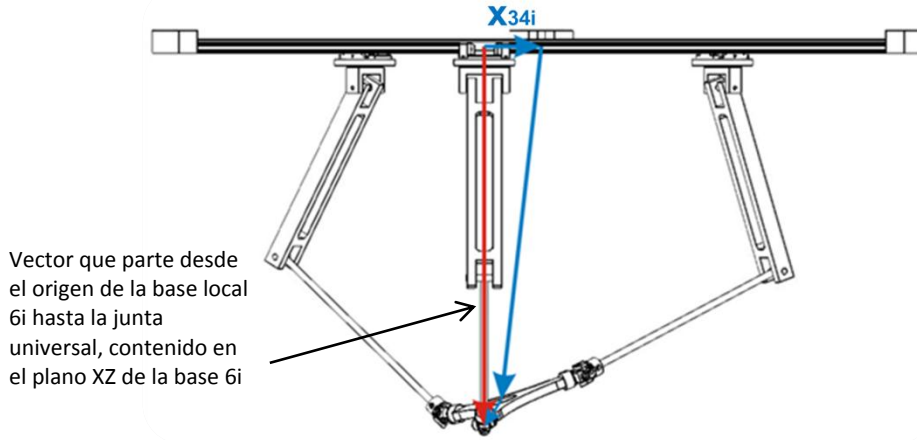


Figura 15 Proyección de vectores para encontrar la posición de un actuador lineal

Al atender a la relación entre la base local $6i$ y la articulación universal, se puede demostrar que la posición de ésta vista desde la base local se puede encontrar mediante la siguiente expresión.

$$(\mathbf{T}_{z_3}(z_{56i})\mathbf{T}_{z_6}(-\delta_{45i})\mathbf{T}_{z_1}(-x_{34i})\mathbf{T}_{z_6}(-\delta_{23i})\mathbf{T}_{z_1}(-x_{12i})\mathbf{T}_{z_6}(-\delta_{01i})\mathbf{T}_{z_1}(x_p)\mathbf{T}_{z_2}(y_p)\mathbf{T}_{z_3}(z_p) \mathbf{T}_{z_6}(\psi)\mathbf{T}_{z_4}(\theta)\mathbf{T}_{z_6}(\phi)\mathbf{T}_{z_6}(-\delta_{1415i})\mathbf{T}_{z_1}(-x_{1314i}))\mathbf{n}_4 = [x_{u6i} \quad y_{u6i} \quad z_{u6i} \quad 1]^T \quad (3.7)$$

Donde:

$$\mathbf{n}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{n}_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{n}_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{n}_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

La ecuación (3.7) contiene términos totalmente conocidos, excepto por la variable x_{34i} . Dado que la corredera está restringida por la junta universal, se podrá encontrar que el segundo término del vector anterior es nulo, como se muestra en la Figura 16, lo cual proporciona una sola ecuación para hallar el valor de x_{34i} en función de términos totalmente definidos.

El término nulo del segundo componente del vector de soluciones no es trivial en el análisis del mecanismo; éste surge del desacoplamiento parcial que se buscaba con el mecanismo original, y en adelante simplificará el análisis cinemático al dividirlo en dos partes: a) la obtención de la coordenada articular correspondiente a la traslación y b) la obtención de la coordenada articular de la rotación actuada; este punto muestra geoméricamente el efecto del desacoplamiento en un mecanismo con más actuadores que cadenas cinemáticas independientes, con lo cual se cumple el primer objetivo de este trabajo de investigación.

La posición del actuador rotacional se obtendrá al resolver la ecuación (3.8) para x_{34i} . Obteniendo el segundo término de la ecuación (3.7):

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{T}_{z3}(z_{56i})\mathbf{T}_{z6}(-\delta_{45i})\mathbf{T}_{z1}(-x_{34i})\mathbf{T}_{z6}(-\delta_{23i})\mathbf{T}_{z1}(-x_{12i})\mathbf{T}_{z6}(-\delta_{01i}) \\ \mathbf{T}_{z1}(x_p)\mathbf{T}_{z2}(y_p)\mathbf{T}_{z3}(z_p)\mathbf{T}_{z6}(\psi)\mathbf{T}_{z4}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z6}(-\delta_{1415i})\mathbf{T}_{z1}(-x_{1314i}))\mathbf{n}_4 \end{pmatrix} \mathbf{n}_2 = 0 \quad (3.8)$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\begin{aligned} & y_p \text{Cos}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) + x_{34i} \text{Sen}(\delta_{45i}) + x_{12i} \text{Sen}(\delta_{23i} + \delta_{45i}) \\ & - x_p \text{Sen}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) + x_{1314i} \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i} - \psi) \text{Sen}(\delta_{1415i} - \phi) \\ & + x_{1314i} \text{Cos}(\delta_{1415i} - \phi) \text{Sen}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i} - \psi) = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para x_{34i} :

$$x_{34i} = -\text{Csc}(\delta_{45i}) \begin{pmatrix} y_p \text{Cos}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) + x_{12i} \text{Sen}(\delta_{23i} + \delta_{45i}) - x_p \text{Sen}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) \\ + x_{1314i} \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i} - \psi) \text{Sen}(\delta_{1415i} - \phi) \\ + x_{1314i} \text{Cos}(\delta_{1415i} - \phi) \text{Sen}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i} - \psi) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) contiene sólo información de las variables a controlar que se suponen conocidas y de constantes propias de la construcción del mecanismo, por lo que su operación es directa. La información obtenida se utilizará en la determinación de las variables siguientes.

Para el cálculo de los ángulos de brazo y codo se utilizan relaciones trigonométricas para ubicar la junta universal con respecto a la articulación $6i$. Esto equivale a ubicar la junta esférica en el plano XZ de la base local $6i$. Como se indicó anteriormente, la posición de la junta esférica desde esta base local tiene una componente nula en la dirección \mathbf{j} , como se muestra a continuación.

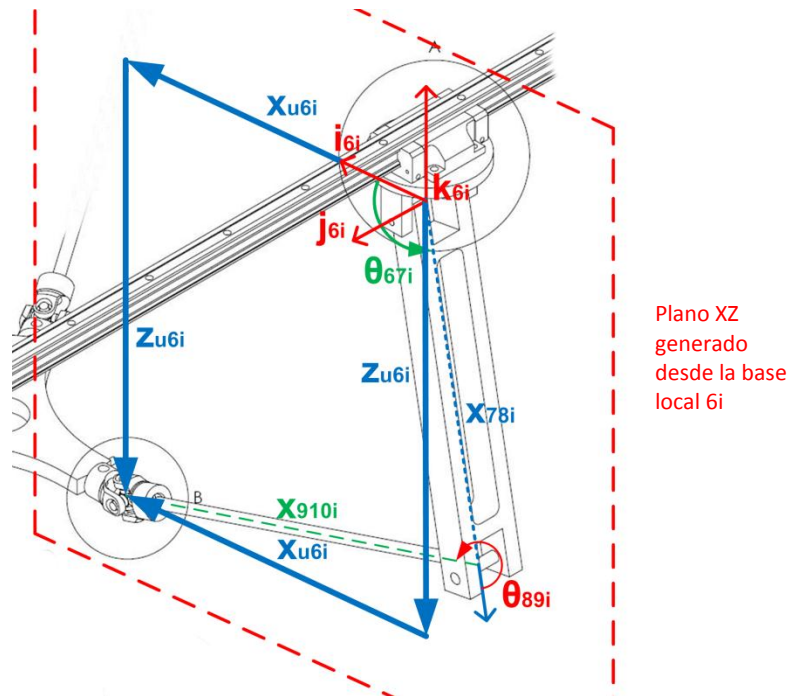


Figura 16 Posición relativa de la junta universal con respecto a la base local $6i$

La utilización de x_{u6i} y z_{u6i} lleva a la construcción de dos ecuaciones con dos incógnitas, a saber, θ_{67i} y θ_{89i} . Las ecuaciones formadas para estas ecuaciones se muestran a continuación:

$$x_{u6i} = \begin{pmatrix} T_{z3}(z_{56i})T_{z6}(-\delta_{45i})T_{z1}(-x_{34i})T_{z6}(-\delta_{23i})T_{z1}(-x_{12i})T_{z6}(-\delta_{01i}) \\ T_{z1}(x_p)T_{z2}(y_p)T_{z3}(z_p)T_{z6}(\psi)T_{z4}(\theta)T_{z6}(\phi) \\ T_{z6}(-\delta_{1415i})T_{z1}(-x_{1314i}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{n}_1 \quad (3.10)$$

$$z_{u6i} = \begin{pmatrix} T_{z3}(z_{56i})T_{z6}(-\delta_{45i})T_{z1}(-x_{34i})T_{z6}(-\delta_{23i})T_{z1}(-x_{12i})T_{z6}(-\delta_{01i}) \\ T_{z1}(x_p)T_{z2}(y_p)T_{z3}(z_p)T_{z6}(\psi)T_{z4}(\theta)T_{z6}(\phi) \\ T_{z6}(-\delta_{1415i})T_{z1}(-x_{1314i}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{n}_3 \quad (3.11)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} x_{u6i} = & -x_{34i} \text{Cos}(\delta_{45i}) - x_{12i} \text{Cos}(\delta_{23i} + \delta_{45i}) + x_p \text{Cos}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) \\ & - x_{1314i} \text{Cos}(\delta_{1415i} - \phi) \text{Cos}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i} - \psi) + y_p \text{Sen}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) \\ & + x_{1314i} \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\delta_{1415i} - \phi) \text{Sen}(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i} - \psi) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$z_{u6i} = z_{56i} + z_p + x_{1314i} \text{Sen}(\theta) \text{Sen}(\delta_{1415i} - \phi) \quad (3.13)$$

Sustituyendo x_{34i} en x_{u6i} :

$$x_{u6i} = \text{Csc}(\delta_{45i}) \begin{pmatrix} y_p \text{Cos}(\delta_{01i} + \delta_{23i}) + x_{12i} \text{Sin}(\delta_{23i}) - x_p \text{Sin}(\delta_{01i} + \delta_{23i}) + \\ x_{1314i} \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\delta_{01i} + \delta_{23i} - \psi) \text{Sin}(\delta_{1415i} - \phi) + \\ x_{1314i} \text{Cos}(\delta_{1415i} - \phi) \text{Sin}(\delta_{01i} + \delta_{23i} - \psi) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Para cerrar la ecuación de lazo, definiremos x_{u6i} y z_{u6i} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{u6i} &= x_{78i} \text{Cos}(\theta_{67i}) + x_{910i} \text{Cos}(\theta_{67i} + \theta_{89i}) \\ z_{u6i} &= -x_{78i} \text{Sen}(\theta_{67i}) - x_{910i} \text{Sen}(\theta_{67i} + \theta_{89i}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Igualando las ecuaciones (3.14), (3.13) y (3.15), y resolviendo para θ_{67i} y θ_{89i} :

$$\begin{aligned} \theta_{67i} &= \text{ArcTan}\left(\frac{-z_{u6i}}{x_{u6i}}\right) + \text{ArcCos}\left(\frac{x_{78i}^2 - x_{910i}^2 + x_{u6i}^2 + z_{u6i}^2}{2x_{78i}\sqrt{x_{u6i}^2 + z_{u6i}^2}}\right) \\ \theta_{89i} &= 2\pi - \left(\text{ArcCos}\left(\frac{-x_{78i}^2 + x_{910i}^2 + x_{u6i}^2 + z_{u6i}^2}{2x_{910i}\sqrt{x_{u6i}^2 + z_{u6i}^2}}\right) + \text{ArcCos}\left(\frac{x_{78i}^2 - x_{910i}^2 + x_{u6i}^2 + z_{u6i}^2}{2x_{78i}\sqrt{x_{u6i}^2 + z_{u6i}^2}}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

En los casos anteriores se resolvieron los valores de algunas variables con base en el renglón de desplazamientos lineales de las matrices de rotación; es importante notar que las operaciones *ArcTan* y *ArcCos* utilizadas simplifican la notación con una barra de división, pero en la práctica las ecuaciones de los ángulos deben resolverse considerando los signos del numerador y denominador; la operación utilizada para este fin suele incluir alguna notación diferente (por ejemplo, $\arctan2(y, x)$ o $ArcTan[x, y]$) y depende del programa que se utilice para obtener la solución numérica.

Para la resolución de los ángulos en la junta esférica se hará uso de los renglones correspondientes a los desplazamientos angulares de las matrices de rotación. Puesto que sólo nos interesan los desplazamientos angulares, podremos prescindir de los desplazamientos lineales, como se muestra en la siguiente ecuación.

$$T_{z6}(\delta_{01i})T_{z6}(\delta_{23i})T_{z6}(\delta_{45i})T_{z5}(\theta_{67i})T_{z5}(\theta_{89i}) \\ T_{z6}(\theta_{1011i})T_{z5}(\theta_{1112i})T_{z4}(\theta_{1213i})T_{z6}(\delta_{1415i}) = T_{z6}(\psi)T_{z4}(\theta)T_{z6}(\phi)$$

Reorganizando términos:

$$T_{z6}(\theta_{1011i})T_{z5}(\theta_{1112i})T_{z4}(\theta_{1213i}) \\ = T_{z5}(-\theta_{89i})T_{z5}(-\theta_{67i})T_{z6}(-\delta_{45i})T_{z6}(-\delta_{23i})T_{z6}(-\delta_{01i}) \quad (3.17) \\ T_{z6}(\psi)T_{z4}(\theta)T_{z6}(\phi)T_{z6}(-\delta_{1415i})$$

Como puede notarse, del lado izquierdo de la ecuación se encuentran todas las variables que falta determinar, mientras que del lado derecho se encuentran sólo constantes y variables conocidas. La matriz asociada a las transformaciones del lado izquierdo de la igualdad es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} c\theta_{1011i}c\theta_{1112i} & -c\theta_{1213i}s\theta_{1011i} + c\theta_{1011i}s\theta_{1112i}s\theta_{1213i} & c\theta_{1011i}c\theta_{1213i}s\theta_{1112i} + s\theta_{1011i}s\theta_{1213i} & 0 \\ c\theta_{1112i}s\theta_{1011i} & c\theta_{1011i}c\theta_{1213i} + s\theta_{1011i}s\theta_{1112i}s\theta_{1213i} & c\theta_{1213i}s\theta_{1011i}s\theta_{1112i} - c\theta_{1011i}s\theta_{1213i} & 0 \\ -s\theta_{1112i} & c\theta_{1112i}s\theta_{1213i} & c\theta_{1112i}c\theta_{1213i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

La parte derecha de la ecuación sólo contiene términos conocidos, por lo que esta matriz se manejará como una constante:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Las matrices (3.18) y (3.19) son equivalentes. Igualando los elementos [3,2] y [3,3]:

$$c\theta_{112i} s\theta_{1213i} = a_{32}$$

$$c\theta_{112i} c\theta_{1213i} = a_{33}$$

Despejando $s\theta_{1213i}$ y $c\theta_{1213i}$:

$$s\theta_{1213i} = \frac{a_{32}}{c\theta_{112i}}$$

$$c\theta_{1213i} = \frac{a_{33}}{c\theta_{112i}}$$

Tomando la tangente para el ángulo θ_{1213i} :

$$\theta_{1213i} = \text{ArcTan}\left(\frac{a_{32}}{a_{33}}\right) \quad (3.20)$$

Igualando los elementos [1,1] y [2,1]:

$$c\theta_{1011i} c\theta_{1112i} = a_{11}$$

$$s\theta_{1011i} c\theta_{1112i} = a_{21}$$

Despejando $s\theta_{1011i}$ y $c\theta_{1011i}$:

$$c\theta_{1011i} = \frac{a_{11}}{c\theta_{1112i}}$$

$$s\theta_{1011i} = \frac{a_{21}}{c\theta_{1112i}}$$

Tomando la tangente para el ángulo θ_{1011i} :

$$\theta_{1011i} = \text{ArcTan}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \quad (3.21)$$

Ya conocemos todas las variables involucradas en el movimiento del mecanismo, excepto θ_{1112i} .

Para calcular este ángulo, se recurrirá nuevamente a "ver" un punto de la base 12i desde la base 11i. El movimiento que se realiza entre la base 11i y la base 12i es una rotación alrededor del eje j_{11i} que describe el cambio en la orientación entre la cruceta y la parte de la junta esférica unida a la plataforma móvil, como se muestra en la Figura 17.

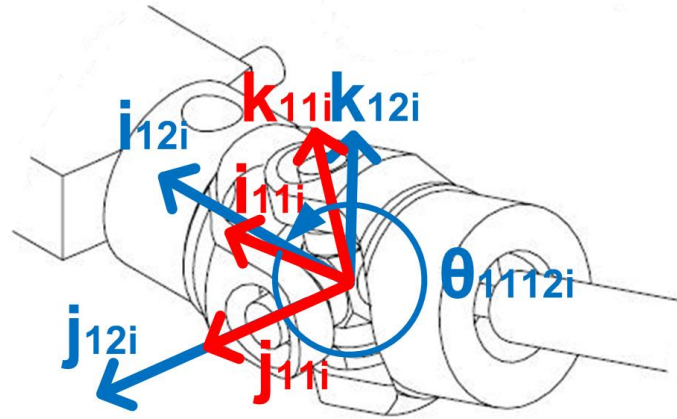


Figura 17 Movimiento relativo entre las bases locales 11i y 12i

El ángulo formado entre los dos sistemas coordenados puede calcularse fácilmente mediante la tangente como se muestra en la ecuación (3.22):

$$\theta_{1112i} = \text{ArcTan} \left(\frac{k_{12i} \cdot i_{11i}}{k_{12i} \cdot k_{11i}} \right) \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) se forma de manera directa al observar la rotación del vector k entre ambos sistemas coordenados. De hecho también es posible obtener una expresión similar para el vector i .

Por otro lado, la ecuación (3.22) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\theta_{1112i} = \text{ArcTan} \left(\frac{b_{13}}{b_{33}} \right) \quad (3.23)$$

Donde b_{13} , b_{33} son los elementos de la matriz de rotación B que relaciona la base 12i con la base 11i.

$$B_i = T_{z5}(\theta_{1112i}) = \begin{pmatrix} b_{11i} & b_{12i} & b_{13i} & b_{14i} \\ b_{21i} & b_{22i} & b_{23i} & b_{24i} \\ b_{31i} & b_{32i} & b_{33i} & b_{34i} \\ b_{41i} & b_{42i} & b_{43i} & b_{44i} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

La matriz de rotación de la ecuación (3.24) requiere del conocimiento de θ_{1112i} , por lo cual se formará la matriz de rotación con las variables ya conocidas:

$$B_i = T_{z6}(-\theta_{1011i}) T_{z5}(-\theta_{89i}) T_{z5}(-\theta_{67i}) T_{z6}(-\delta_{45i}) T_{z6}(-\delta_{23i}) T_{z6}(-\delta_{01i}) \\ T_{z6}(\psi) T_{z4}(\theta) T_{z6}(\varphi) T_{z6}(-\delta_{1415i}) T_{z4}(-\theta_{1213i})$$

Con la matriz anterior se calcula el valor del ángulo θ_{1112i} , quedando completamente definidas las variables de posición del mecanismo. Las ecuaciones (3.9), (3.16), (3.20), (3.21) y (3.23) son calculadas directamente en el programa y son ecuaciones cerradas, de modo que sólo dependen de las variables conocidas. Esto es especialmente importante en el cálculo en línea, ya que no es necesario encontrar una solución mediante un método numérico, lo cual reduce significativamente el número de operaciones realizadas por el programa. Más aún, es posible realizar el cálculo de sólo algunas variables, lo cual puede simplificar significativamente el modelo y reducir el tiempo de cálculo.

Hasta este punto se han obtenido dos conjuntos de ecuaciones para resolver la posición de todas las articulaciones del mecanismo analizado: a) la solución numérica generada a partir del tratamiento mediante matrices homogéneas y b) la solución analítica generada a partir de una descomposición geométrica del mecanismo parcialmente desacoplado. Con esto se cumple el segundo objetivo de este trabajo de investigación.

Conclusiones sobre la utilización de ambos métodos

En los apartados anteriores se mostró la forma en la que se puede desarrollar el análisis de posición de un manipulador de cadena cinemática cerrada; si bien los métodos no son únicos, sí ilustran el grado de complejidad que se puede encontrar al analizarlos. A continuación se contrastan las características principales encontradas al resolver la posición de las articulaciones mediante la utilización de la solución analítica y la solución numérica de la posición.

Solución Numérica	Solución Analítica
Su aplicación es directa (hay un algoritmo para obtenerla)	Su aplicación no es directa (requiere hacer uso de consideraciones geométricas)
Basta con conocer los movimientos posibles de las articulaciones y un punto inicial para encontrar los movimientos en las articulaciones	Requiere un análisis previo para encontrar soluciones cerradas de los movimientos en las articulaciones
Requiere la selección de ecuaciones y éstas pueden cambiar al hacer cambios en la trayectoria	Las ecuaciones obtenidas son útiles para cualquier caso dentro de su espacio de trabajo
Se encuentran soluciones aproximadas y éstas dependen de los puntos iniciales	Se encuentran soluciones exactas
Es necesario iterar para encontrar la solución en cada punto	Las ecuaciones se resuelven una sola vez para encontrar los movimientos de las articulaciones
La iteración da la solución más cercana a eliminar el error en una región, sin ser necesariamente el mínimo global	La solución no depende de regiones, es global
El método resuelve los valores de todas las variables involucradas	Es posible seleccionar qué variables se desean resolver
Se requieren varias iteraciones para solucionar los sistemas de ecuaciones	Sólo se hacen las operaciones necesarias para determinar la posición de las articulaciones
Su utilización se limita al procesamiento fuera de línea	Depurando el código, el procesamiento puede realizarse en línea

Tabla 2 Comparación entre la solución numérica y la solución analítica. Es importante destacar que en el caso de la solución analítica deberían sustituirse numéricamente todos los términos conocidos antes de su operación en tiempo real; de este modo se utilizará la menor cantidad de operaciones para conocer las variables involucradas en el movimiento

Como puede observarse, la solución de las variables de las articulaciones puede implementarse de una manera más o menos rápida mediante métodos numéricos, considerando que se tiene un modelo virtual desde el cual se extraen valores cercanos a los reales para la posición en que inicia el movimiento. Por otro lado, el caso de la solución analítica requiere un análisis previo de las relaciones geométricas entre los cuerpos que componen las cadenas cinemáticas idénticas.

En la solución numérica se resuelven iterativamente varias ecuaciones simultáneas hasta llegar a una precisión deseada; estas ecuaciones son no lineales, y son más complejas según haya más cuerpos en movimiento. Dado que la solución emplea el método de Newton – Raphson en la investigación de los movimientos de las articulaciones, ésta es sensible a los cambios en la posición inicial; además, es necesario establecer un tamaño de paso lo suficientemente pequeño para que el método aproxime rápidamente la solución; por otro lado, es posible encontrar que algunas ecuaciones funcionan para algunas trayectorias pero no para otras.

Por estas razones se recomienda utilizar la solución numérica en el caso de que se precise una estimación rápida de los movimientos en las articulaciones (principalmente en el caso del diseño del mecanismo). Una vez obtenido el mecanismo es mejor tomar tiempo para encontrar las ecuaciones cerradas que describan el comportamiento del mecanismo con base en sus relaciones geométricas, ya que a pesar de llevar consigo una mayor labor en la etapa temprana del análisis, este método ahorra operaciones en la solución en tiempo real del sistema de multicuerpos porque no necesita definirse una solución inicial para cada movimiento y tampoco es necesario encontrar las ecuaciones que funcionan en esas posiciones.

Hasta este punto se ha mostrado que es posible utilizar un método analítico para resolver la posición del mecanismo; sin embargo, no se ha mostrado explícitamente cómo se aprovecha el desacoplamiento parcial para realizar el cálculo de la posición del mecanismo en tiempo real. Esto se verá a continuación; para ello necesitamos conocer que un controlador contemporáneo se compone de las siguientes capas y los siguientes elementos:

Capa 1 – Alto nivel: SCADA, HMI, comunicación, ejecución en décimas de segundo

1. Programa para el manejo del mecanismo, perfiles de aceleración e interface humano – máquina (HMI)
2. Protocolos de comunicación
3. Registro de operaciones, manejo de errores y generación de informes (SCADA)

Capa 2 – Nivel medio: Controlador en tiempo real, funciones que requieren gran cantidad de operaciones del procesador y/o locaciones de memoria, ejecución en milisegundos

4. Sistema para procesamiento en tiempo real de funciones complejas y algoritmos que no necesitan ejecutarse en un lazo de control de bajo nivel
5. Control de funciones que requieren una ejecución de secuencias, manejo de algoritmos y monitoreo de la aplicación
6. Interface de transmisión entre la capa de bajo nivel y la capa de alto nivel

Capa 3 – Bajo nivel: Tarjetas electrónicas reconfigurables, funciones simples, ejecución en microsegundos

7. Sistema de control reconfigurable (regularmente FPGA) capaz de hacer operaciones aritméticas, trigonométricas, lógicas y de control en escala de microsegundos
8. Interfaz para entradas analógicas y digitales de sensores, así como salidas de control de baja potencia para actuadores
9. Módulos de acondicionamiento de señal
10. Sensores y actuadores

En la capa de bajo nivel reconfigurable se pueden ejecutar operaciones simples simultáneas (en paralelo) similares a las operaciones que se hacen directamente en tarjetas electrónicas como las tarjetas de gráficos de una PC normal, la velocidad de procesamiento depende del tiempo ciclo dictado por un reloj piezoeléctrico; dentro de esta capa se realizan operaciones de control de las entradas y salidas analógicas y digitales. Dada su naturaleza, ésta será la capa más beneficiada por el desacoplamiento parcial, pues las características de baja complejidad de operaciones y cálculo en paralelo de coordenadas articulares que otorga un planteamiento con desacoplamiento son adaptables inmediatamente a un sistema de control reconfigurable.

Si el control del mecanismo se pretendiera realizar utilizando el cálculo numérico de la cinemática, entonces sería necesario hacer el cálculo de las coordenadas articulares en la capa de nivel medio, pues se requeriría un mayor poder de procesamiento y espacios grandes de memoria. Dadas estas razones, se demuestra que la geometría de desacoplamiento es apta para utilizarse en el control en tiempo real, con ciclos de control en fracciones de milisegundo; las ecuaciones mencionadas pueden mejorar su tiempo de ejecución sustituyendo todas las constantes y variables calculadas previamente. Con ello se cumple con el tercer objetivo del presente trabajo de investigación.

Capítulo 4

Análisis cinemático vectorial

En el capítulo anterior se mostraron dos maneras de encontrar la posición de las articulaciones para una de las cadenas cinemáticas abiertas mediante el análisis cinemático matricial. Ese mismo método puede utilizarse para encontrar su velocidad y la aceleración; así, para encontrar la velocidad sería necesario derivar implícitamente las ecuaciones de lazo y despejar las velocidades lineales y angulares de nuestro interés.

A pesar de que el método podría parecer más consistente al realizarse de esta forma, en realidad implica grandes dificultades en su operación, ya que es necesario derivar los productos de las matrices homogéneas, lo cual requiere una gran cantidad de tiempo y no representa ventaja alguna sobre algún método numérico.

Las razones anteriores dan pie a la utilización de un método alternativo para analizar la velocidad y la aceleración en las articulaciones. El análisis vectorial es una herramienta especialmente útil en la determinación de estas características ya que plantea su cálculo en forma de productos cruz y punto (muy útiles al establecer relaciones geométricas), y su utilización da como resultado soluciones cerradas para la cinemática inversa. Este método, al igual que la solución analítica de la posición, requiere de la comprensión completa de los movimientos de las articulaciones; a cambio, ofrece ecuaciones compactas y cerradas.

Para plantear las ecuaciones de velocidad y aceleración en las articulaciones, será necesario mencionar las ecuaciones del análisis de posición para este método, como se muestra a continuación.

Análisis vectorial de posición

Para el análisis de posición se plantea primero la ecuación de lazo con base en la Figura 10. La ecuación de lazo se define como:

$$\mathbf{r}_{12i}^0 + \mathbf{r}_{34i}^0 + \mathbf{r}_{56i}^0 + \mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0 = \mathbf{r}_p^0 \quad (4.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{12i}^0 &= x_{12i} \mathbf{i}_{1i}^0 & \mathbf{i}_{1i}^0 &= \mathbf{R}_{1i}^0 \mathbf{i}_{1i}^{1i} & \mathbf{R}_{1i}^0 &= \mathbf{R}_z(\delta_{01i}) \\
 \mathbf{r}_{34i}^0 &= x_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 & \mathbf{i}_{3i}^0 &= \mathbf{R}_{3i}^0 \mathbf{i}_{3i}^{3i} & \mathbf{R}_{3i}^0 &= \mathbf{R}_z(\delta_{01i} + \delta_{23i}) & \text{Conjunto de} \\
 \mathbf{r}_{56i}^0 &= -z_{56i} \mathbf{k}_{5i}^0 & \mathbf{k}_{5i}^0 &= \mathbf{R}_{5i}^0 \mathbf{k}_{5i}^{5i} & \mathbf{R}_{5i}^0 &= \mathbf{R}_z(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) & \text{Ecuaciones} \\
 \mathbf{r}_{78i}^0 &= x_{78i} \mathbf{i}_{7i}^0 & \mathbf{i}_{7i}^0 &= \mathbf{R}_{7i}^0 \mathbf{i}_{7i}^{7i} & \mathbf{R}_{7i}^0 &= \mathbf{R}_{5i}^0 \mathbf{R}_y(\theta_{67i}) & (4.2) \\
 \mathbf{r}_{910i}^0 &= x_{910i} \mathbf{i}_{9i}^0 & \mathbf{i}_{9i}^0 &= \mathbf{R}_{9i}^0 \mathbf{i}_{9i}^{9i} & \mathbf{R}_{9i}^0 &= \mathbf{R}_{5i}^0 \mathbf{R}_y(\theta_{67i} + \theta_{89i}) \\
 \mathbf{r}_{1314i}^0 &= x_{1314i} \mathbf{i}_{13i}^0 & \mathbf{i}_{13i}^0 &= \mathbf{R}_{13i}^0 \mathbf{i}_{13i}^{13i} & \mathbf{R}_{13i}^0 &= \mathbf{R}_{9i}^0 \mathbf{R}_z(\theta_{1011i}) \mathbf{R}_y(\theta_{1112i}) \mathbf{R}_x(\theta_{1213i}) \\
 \\
 \mathbf{r}_p^0 &= x_p \mathbf{i}_0 + y_p \mathbf{j}_0 + z_p \mathbf{k}_0
 \end{aligned}$$

Como se puede observar, en esta representación las rotaciones se diferencian inmediatamente de las traslaciones, ya que las rotaciones afectan la dirección de los vectores y las distancias su magnitud. En adelante se tratará el análisis vectorial de velocidad y aceleración.

Análisis vectorial de velocidad

La ecuación de lazo para la velocidad lineal se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación (4.1):

$$\mathbf{v}_{12i}^0 + \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{56i}^0 + \mathbf{v}_{78i}^0 + \mathbf{v}_{910i}^0 + \mathbf{v}_{1314i}^0 = \mathbf{v}_p^0 \quad (4.3)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{12i}^0 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{v}_{34i}^0 &= \dot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 \\
 \mathbf{v}_{56i}^0 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{v}_{78i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0 \\
 \mathbf{v}_{910i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{910i}^0 \\
 \mathbf{v}_{1314i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{7i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 \\
 \mathbf{v}_p^0 &= \dot{x}_p \mathbf{i}_0 + \dot{y}_p \mathbf{j}_0 + \dot{z}_p \mathbf{k}_0
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por otro lado, la ecuación de lazo para la velocidad angular se puede obtener de manera independiente al considerar sólo los giros de las articulaciones.

$$\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 = \boldsymbol{\omega}_p^0 \quad (4.5)$$

Además, las velocidades de los cuerpos de la cadena cinemática i pueden representarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_{3i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \\
 \boldsymbol{\omega}_{4i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 \\
 \boldsymbol{\omega}_{5i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 \\
 \boldsymbol{\omega}_{6i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 \\
 \boldsymbol{\omega}_{7i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

También:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 &= \dot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 & \mathbf{j}_{6i}^0 &= \mathbf{R}_{5i}^0 \mathbf{j}_{6i}^{6i} \\
 \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 &= \dot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 & \mathbf{j}_{8i}^0 &= \mathbf{R}_{7i}^0 \mathbf{j}_{8i}^{8i} \\
 \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 &= \dot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 & \mathbf{k}_{10i}^0 &= \mathbf{R}_{9i}^0 \mathbf{k}_{10i}^{10i} \\
 \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 &= \dot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 & \mathbf{j}_{11i}^0 &= \mathbf{R}_{9i}^0 \mathbf{R}_z(\theta_{1011i}) \mathbf{j}_{11i}^{11i} \\
 \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 &= \dot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 & \mathbf{i}_{12i}^0 &= \mathbf{R}_{9i}^0 \mathbf{R}_z(\theta_{1011i}) \mathbf{R}_y(\theta_{1112i}) \mathbf{i}_{12i}^{12i} \\
 \boldsymbol{\omega}_p^0 &= \psi \mathbf{k}_0^0 + \dot{\theta}_{16} \mathbf{i}_{16}^0 + \dot{\phi} \mathbf{k}_{17}^0 & \mathbf{i}_{16}^0 &= \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{i}_{16}^{16} \\
 & & \mathbf{k}_{17}^0 &= \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{k}_{17}^{17}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Conjunto de Ecuaciones

Matriz Jacobiana de velocidad

En robótica, una matriz Jacobiana es aquella que contiene las funciones que relacionan las velocidades lineales y angulares de las articulaciones con las velocidades lineales y angulares del elemento terminal. En general se pueden obtener varias matrices Jacobianas para un mismo mecanismo, por lo que cabe aclarar que la matriz obtenida en este capítulo es la que considera todos los movimientos de las articulaciones. A partir de la ecuación (4.3) se obtiene:

$$\mathbf{v}_{12i}^0 + \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{56i}^0 + \mathbf{v}_{78i}^0 + \mathbf{v}_{910i}^0 + \mathbf{v}_{1314i}^0 = \mathbf{v}_p^0 \tag{4.8}$$

Sustituyendo (4.4) y (4.6) en (4.8):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{910i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{7i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 &= \mathbf{v}_p^0 \\
 \dot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \mathbf{r}_{910i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 &= \mathbf{v}_p^0
 \end{aligned}$$

Agrupando términos y agregando la ecuación (4.5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times (\mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 \times (\mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 = \mathbf{v}_p^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 = \boldsymbol{\omega}_p^0 \end{aligned}$$

Sustituyendo $\boldsymbol{\omega}$ por su equivalente en vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + (\dot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0) \times (\mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + (\dot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0) \times (\mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) \\ + (\dot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + (\dot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + (\dot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 = \mathbf{v}_p^0 \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 + \dot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 + \dot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 + \dot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 + \dot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 = \boldsymbol{\omega}_p^0$$

Renombrando términos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \dot{\theta}_{67i} \mathbf{u}_{6i}^0 + \dot{\theta}_{89i} \mathbf{u}_{8i}^0 + \dot{\theta}_{1011i} \mathbf{u}_{10i}^0 + \dot{\theta}_{1112i} \mathbf{u}_{11i}^0 + \dot{\theta}_{1213i} \mathbf{u}_{12i}^0 = \mathbf{v}_p^0 \\ \dot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 + \dot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 + \dot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 + \dot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 + \dot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 = \boldsymbol{\omega}_p^0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{6i}^0 = \mathbf{j}_{6i}^0 \times (\mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0)$$

$$\mathbf{u}_{8i}^0 = \mathbf{j}_{8i}^0 \times (\mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0)$$

$$\mathbf{u}_{10i}^0 = \mathbf{k}_{10i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0$$

$$\mathbf{u}_{11i}^0 = \mathbf{j}_{11i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0$$

$$\mathbf{u}_{12i}^0 = \mathbf{i}_{12i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0$$

Agrupando:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{3i}^0 & \mathbf{u}_{6i}^0 & \mathbf{u}_{8i}^0 & \mathbf{u}_{10i}^0 & \mathbf{u}_{11i}^0 & \mathbf{u}_{12i}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{j}_{6i}^0 & \mathbf{j}_{8i}^0 & \mathbf{k}_{10i}^0 & \mathbf{j}_{11i}^0 & \mathbf{i}_{12i}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{34i} \\ \dot{\theta}_{67i} \\ \dot{\theta}_{89i} \\ \dot{\theta}_{1011i} \\ \dot{\theta}_{1112i} \\ \dot{\theta}_{1213i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^0 \\ \boldsymbol{\omega}_p^0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Renombrando nuevamente:

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}} \quad (4.10)$$

Análisis vectorial de aceleración

La ecuación de lazo de la aceleración lineal se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación (4.3):

$$\mathbf{a}_{12i}^0 + \mathbf{a}_{34i}^0 + \mathbf{a}_{56i}^0 + \mathbf{a}_{78i}^0 + \mathbf{a}_{910i}^0 + \mathbf{a}_{1314i}^0 = \mathbf{a}_p^0 \quad (4.11)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{12i}^0 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{34i}^0 &= \ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 \\ \mathbf{a}_{56i}^0 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{78i}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0) \\ \mathbf{a}_{910i}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{910i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{910i}^0) \\ \mathbf{a}_{1314i}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{7i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{7i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{7i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0) \\ \mathbf{a}_p^0 &= \ddot{x}_p \mathbf{i}_0 + \ddot{y}_p \mathbf{j}_0 + \ddot{z}_p \mathbf{k}_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por su parte, la ecuación de lazo de la aceleración angular se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación (4.5):

$$\boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1213i}^0 = \boldsymbol{\alpha}_p^0 \quad (4.13)$$

Del mismo modo se definen las aceleraciones angulares de los cuerpos de la cadena i :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{3i}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{4i}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{5i}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1011i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{6i}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1112i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{7i}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1213i}^0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para los términos de la ecuación (4.13) se define su representación mediante vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 &= \ddot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 &= \ddot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{1011i}^0 &= \ddot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{1112i}^0 &= \ddot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{1213i}^0 &= \ddot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_p^0 &= \boldsymbol{\alpha}_\psi^0 + \boldsymbol{\alpha}_\theta^0 + \boldsymbol{\alpha}_\phi^0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\psi^0 &= \ddot{\psi} \mathbf{k}_0^0 & \boldsymbol{\omega}_\psi^0 &= \dot{\psi} \mathbf{k}_0^0 \\ \mathbf{a}_\theta^0 &= \ddot{\theta} \mathbf{i}_{16}^0 + \boldsymbol{\omega}_\psi^0 \times \boldsymbol{\omega}_\theta^0 & \boldsymbol{\omega}_\theta^0 &= \dot{\theta} \mathbf{i}_{16}^0 \\ \mathbf{a}_\phi^0 &= \ddot{\phi} \mathbf{k}_{17}^0 + (\boldsymbol{\omega}_\psi^0 + \boldsymbol{\omega}_\theta^0) \times \boldsymbol{\omega}_\phi^0 & \boldsymbol{\omega}_\phi^0 &= \dot{\phi} \mathbf{k}_{17}^0\end{aligned}$$

Arreglo matricial para la aceleración

Para la aceleración se planteará un conjunto de ecuaciones de manera matricial del mismo modo en que se planteó el Jacobiano para la velocidad de las articulaciones. De la ecuación (4.11) se tiene:

$$\mathbf{a}_{12i}^0 + \mathbf{a}_{34i}^0 + \mathbf{a}_{56i}^0 + \mathbf{a}_{78i}^0 + \mathbf{a}_{910i}^0 + \mathbf{a}_{1314i}^0 = \mathbf{a}_p^0$$

Sustituyendo (4.12):

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0) + \boldsymbol{\alpha}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{910i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{910i}^0) + \boldsymbol{\alpha}_{7i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \\ \boldsymbol{\omega}_{7i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{7i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0) = \mathbf{a}_p^0\end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{910i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{7i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0) + \boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{910i}^0) + \\ \boldsymbol{\omega}_{7i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{7i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0) = \mathbf{a}_p^0\end{aligned}$$

Sustituyendo las velocidades y aceleraciones de los cuerpos:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0 + (\boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0) \times \mathbf{r}_{910i}^0 + (\boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \\ \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0) + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \mathbf{r}_{910i}^0) + \\ (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0) = \mathbf{a}_p^0\end{aligned}$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 \times (\mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 \times (\mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + (\boldsymbol{\alpha}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \\ \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0) + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \mathbf{r}_{910i}^0) + \\ (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0) = \mathbf{a}_p^0\end{aligned}$$

Sustituyendo α :

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \ddot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 \times (\mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + \ddot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 \times (\mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + \\ & \left(\ddot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \ddot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \right) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \\ & \left(\ddot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 \right) \\ & \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0) + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \mathbf{r}_{910i}^0) + \\ & (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0) = \mathbf{a}_p^0 \end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \ddot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 \times (\mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + \ddot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 \times (\mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{1314i}^0) + \ddot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \ddot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 \\ & + \ddot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \left((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \right) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \\ & \left((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 \right) \\ & \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0) + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \mathbf{r}_{910i}^0) + \\ & (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0) = \mathbf{a}_p^0 \end{aligned}$$

Renombrando:

$$\ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 + \ddot{\theta}_{67i} \mathbf{u}_{6i}^0 + \ddot{\theta}_{89i} \mathbf{u}_{8i}^0 + \ddot{\theta}_{1011i} \mathbf{u}_{10i}^0 + \ddot{\theta}_{1112i} \mathbf{u}_{11i}^0 + \ddot{\theta}_{1213i} \mathbf{u}_{12i}^0 + \mathbf{a}_g^0 = \mathbf{a}_p^0 \quad (4.16)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_g^0 = & ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0 + \\ & \boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 \times \mathbf{r}_{78i}^0) + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \mathbf{r}_{910i}^0) + \\ & (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times ((\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0) \times \mathbf{r}_{1314i}^0) \end{aligned}$$

De la ecuación (4.13) se tiene:

$$\boldsymbol{\alpha}_{67i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{89i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1112i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_{1213i}^0 = \boldsymbol{\alpha}_p^0$$

Sustituyendo las aceleraciones angulares:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 + \ddot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 + \ddot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \ddot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + \\ & \ddot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 = \boldsymbol{\alpha}_p^0 \end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$\ddot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 + \ddot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 + \ddot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 + \ddot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 + \ddot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0 = \boldsymbol{\alpha}_p^0$$

Renombrando:

$$\ddot{\theta}_{67i} \mathbf{j}_{6i}^0 + \ddot{\theta}_{89i} \mathbf{j}_{8i}^0 + \ddot{\theta}_{1011i} \mathbf{k}_{10i}^0 + \ddot{\theta}_{1112i} \mathbf{j}_{11i}^0 + \ddot{\theta}_{1213i} \mathbf{i}_{12i}^0 + \boldsymbol{\alpha}_g^0 = \boldsymbol{\alpha}_p^0$$

Donde:

$$\boldsymbol{\alpha}_g^0 = (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{67i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{89i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1011i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1112i}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{1213i}^0$$

Agrupando:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{3i}^0 & \mathbf{u}_{6i}^0 & \mathbf{u}_{8i}^0 & \mathbf{u}_{10i}^0 & \mathbf{u}_{11i}^0 & \mathbf{u}_{12i}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{j}_{6i}^0 & \mathbf{j}_{8i}^0 & \mathbf{k}_{10i}^0 & \mathbf{j}_{11i}^0 & \mathbf{i}_{12i}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{34i} \\ \ddot{\theta}_{67i} \\ \ddot{\theta}_{89i} \\ \ddot{\theta}_{1011i} \\ \ddot{\theta}_{1112i} \\ \ddot{\theta}_{1213i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_g^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_g^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_p^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_p^0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Renombrando los términos:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{x}}_g &= \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} &= \ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}}_g \end{aligned} \quad (4.18)$$

Hasta este momento se tiene una representación de las velocidades y aceleraciones del elemento terminal en función de las velocidades y aceleraciones de las articulaciones. Aun cuando parece haberse encontrado una manera de calcular la cinemática directa del mecanismo, la obtención de la posición del elemento terminal exige el conocimiento de una posición inicial y la integración numérica de las velocidades del elemento terminal. Por ello, esta solución acarreará errores al operarla entre diversos intervalos.

Al contrario de esta idea, la obtención de la cinemática inversa es inmediata. Las velocidades y aceleraciones de las articulaciones se realizan con una inversión numérica de una matriz y su multiplicación por vectores totalmente conocidos. De esta manera se obtiene la velocidad y aceleración de las articulaciones. Con ello se da por concluido el análisis cinemático vectorial completo, con lo cual se cumple el cuarto objetivo de este trabajo.

A continuación se presentan las gráficas para la posición, velocidad y aceleración de algunos elementos del mecanismo obtenidas por el procedimiento antes descrito. Para detalles sobre la trayectoria, consulte el Apéndice 3.

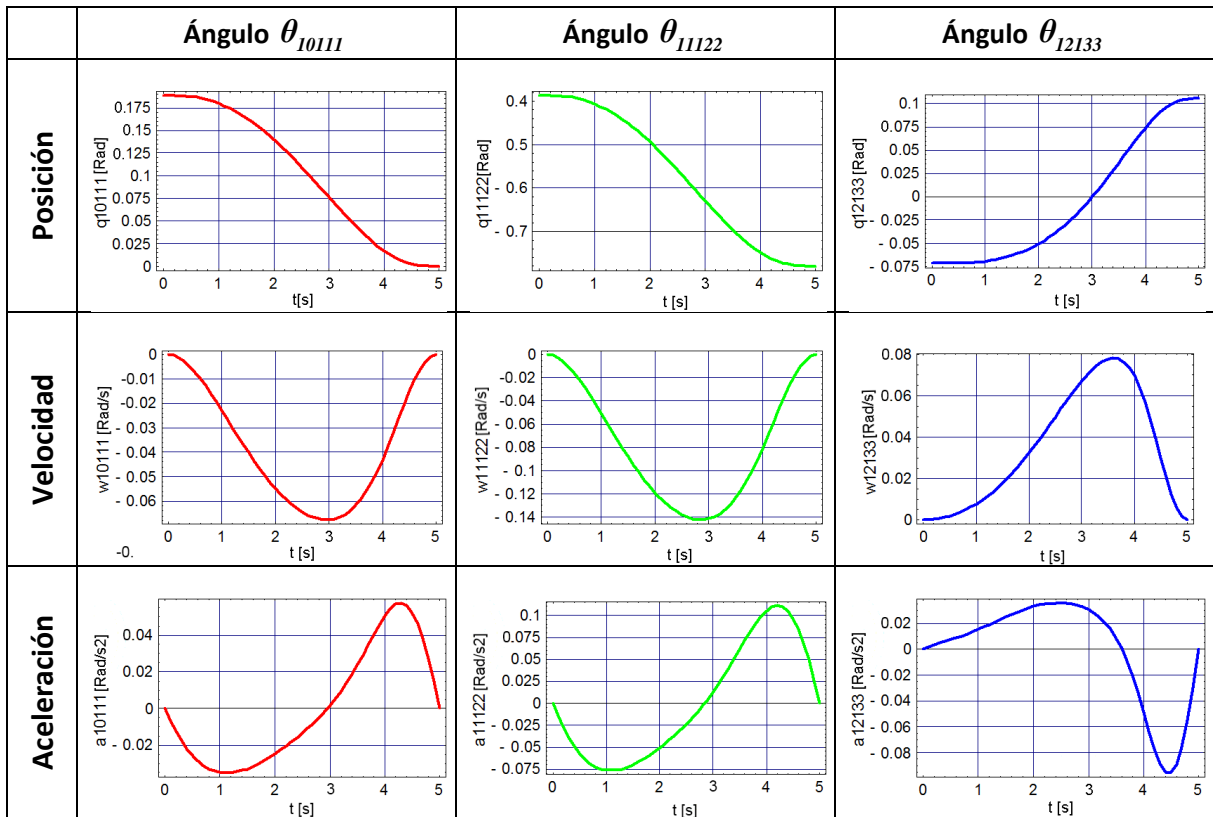
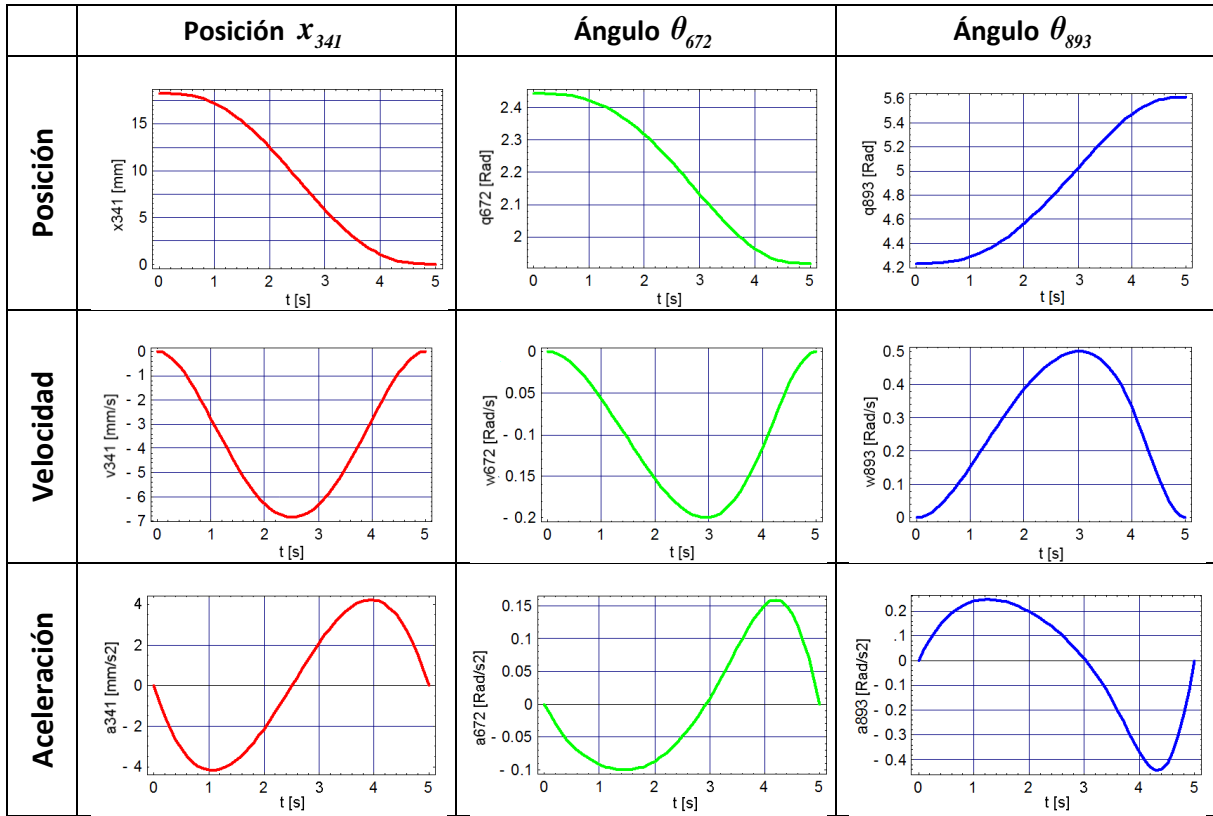


Figura 18 Posiciones de las articulaciones al realizar un movimiento en una recta con cambio de orientación

Capítulo 5

Análisis dinámico

Para el análisis dinámico se utilizó la formulación de Newton – Euler, mediante la cual se relacionan las fuerzas aplicadas, fuerzas inerciales y fuerzas de reacción en las juntas. Dada la información que se puede encontrar con este método, es posible obtener el dimensionamiento de los eslabones de la cadena cinemática y escoger rodamientos y actuadores adecuados, ya que nos permite conocer fuerzas en estos elementos mecánicos.

Un aspecto a considerar con respecto a algunos otros métodos es que el número de variables a resolver es más grande, por lo que en algunos casos resultará inapropiado para resolver en línea; sin embargo, es un método asequible en cuanto a la manera de operarlo porque aun requiriendo de una comprensión completa de las fuerzas y momentos, su solución es obtenida de manera inmediata por medio de un método numérico. Es por ello que esta solución resulta apropiada para realizar el dimensionamiento de los elementos mecánicos.

El método consiste en el cálculo previo de las velocidades y aceleraciones de los cuerpos presentes en cada una de las cadenas, seguido del cálculo de las fuerzas reactivas y los momentos de cada junta. Este planteamiento se deriva directamente de la mecánica clásica, en comparación de métodos como el de Euler – Lagrange, que propone un modelado basado en la energía y excluye a las fuerzas reactivas. El análisis de Euler – Lagrange es más apropiado para resolverse en línea, ya que de él se pueden derivar expresiones analíticas para las fuerzas generalizadas y la forma de su solución la hace adecuada para la implementación de lazos de control exclusivos para este tipo de modelos.

Las siguientes matrices representan la rotación de los sistemas coordenados alrededor de los ejes x , y , z , respectivamente:

$$\mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\text{Sen}(\theta_x) \\ 0 & \text{Sen}(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \text{Sen}(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\text{Sen}(\theta_z) & 0 \\ \text{Sen}(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como puede verse, estas matrices son iguales a las submatrices de rotación de las matrices homogéneas. Se definieron nuevamente para utilizar vectores de tres componentes con interés especial en la rotación.

Otras matrices utilizadas en este análisis son las antisimétricas que representan productos cruz entre vectores, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{S}_{z_1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{z_2}(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{z_3}(z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

La forma en la que plantearemos las ecuaciones a resolver para el análisis de Newton – Euler se mostrará mediante la interacción de dos cuerpos; en la Figura 19 se puede apreciar el caso del movimiento relativo general entre dos cuerpos.

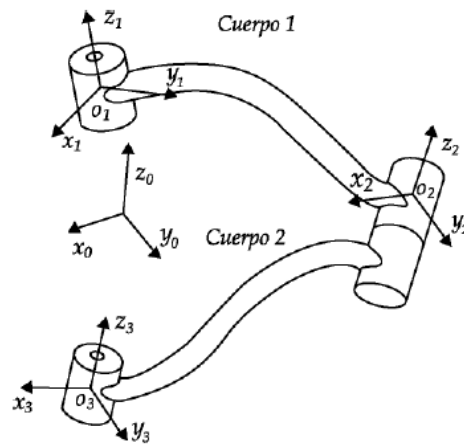


Figura 19 Sistema de dos cuerpos con bases locales

Como en cualquier problema de estática y dinámica, podemos hacer el diagrama de cuerpo libre, montando sistemas de referencia en los ejes de revolución. Nuevamente se muestra en la Figura 20 el caso general.

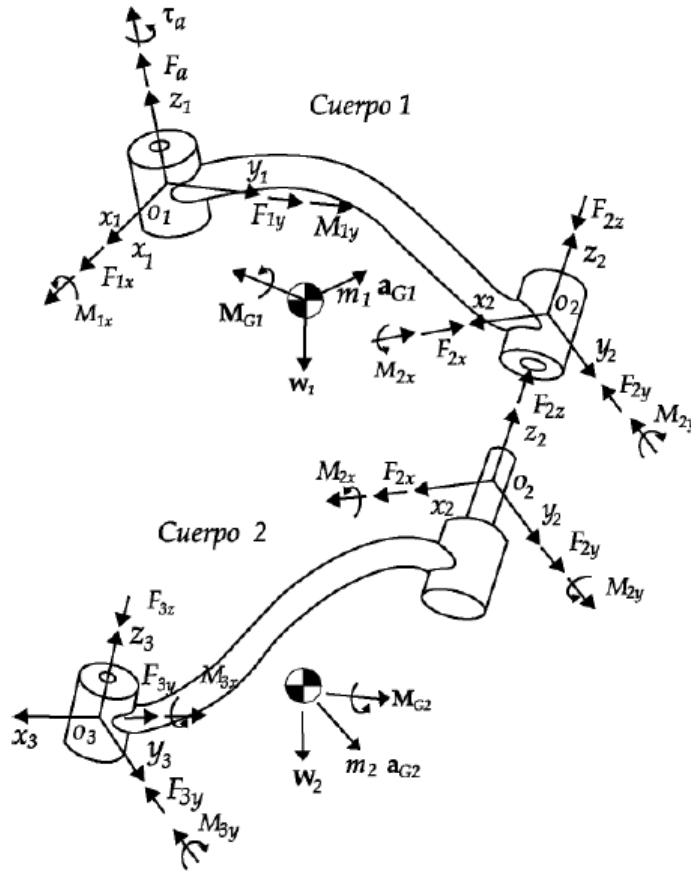


Figura 20 Diagrama de cuerpo libre de un sistema de dos cuerpos

En el dibujo se muestran tres tipos de fuerzas, a los cuales llamaremos *Fuerzas Activas*, *Fuerzas Reactivas* y *Fuerzas Inerciales*. Las *Fuerzas Activas* consideran las fuerzas ajenas a los cuerpos, la gravedad y las fuerzas de los actuadores; los métodos de análisis dinámico basados en energía resuelven exclusivamente los valores de estas fuerzas con base en las energías cinética y potencial, con lo cual se obtienen las fuerzas y momentos en los actuadores. Por otro lado, las *Fuerzas Reactivas* se aplican en pares contrapuestos y en dirección contraria al movimiento; usualmente no contribuyen a la descripción cinemática, excepto en modelos que consideran fricción, flexión y deformaciones. Finalmente, las *Fuerzas inerciales* son debidas a las masas aceleradas, se encuentran de manera aislada para cada eslabón y dependen de las derivadas de orden superior para la posición; dentro de estas fuerzas se considera las debidas a la traslación y a la rotación.

Resumiendo la información anterior, los tipos de fuerzas se organizan de la siguiente manera:

Tipos de Fuerzas y sus Causas	
Fuerzas Activas	Fuerzas externas, efectos debidos a la gravedad, y fuerzas de los actuadores
Fuerzas Reactivas	Esfuerzos provocados en los eslabones, en dirección contraria al movimiento
Fuerzas Inerciales	Fuerzas debidas a masas aceleradas

Tabla 3 Tipos de fuerzas consideradas en el análisis dinámico

Retomando el análisis dinámico de los cuerpos de la Figura 20, las ecuaciones de equilibrio dinámico se definen como:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= m\mathbf{a}_G \\ \sum \mathbf{M} &= \mathbf{M}_G + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}_G\end{aligned}$$

Donde $m\mathbf{a}_G$ y \mathbf{M}_G son las fuerzas y momentos inerciales respectivamente definidos en la base inercial $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$. Aplicando las ecuaciones de equilibrio dinámico a los cuerpos 1 y 2, y definiéndolas en las bases locales $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ y $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$, se obtiene la Figura 21.

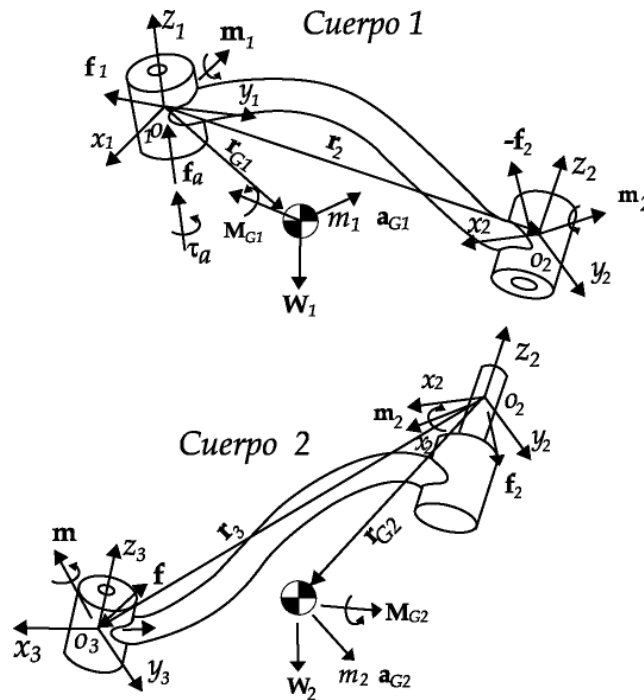


Figura 21 Diagrama de fuerzas al aplicar las ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones correspondientes a este diagrama de cuerpo libre son las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}(m_1\mathbf{a}_{G1}) \\ \mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{R}_{1,0}(m_1\mathbf{a}_{G1})\end{aligned}\quad (5.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_a &= [0, 0, f_a]^T \\
 \mathbf{f}_1 &= [f_{1x}, f_{1y}, 0]^T \\
 \mathbf{f}_2 &= [f_{2x}, f_{2y}, f_{2z}]^T \\
 \mathbf{w}_1 &= [0, 0, -m_1 g]^T \\
 \mathbf{a}_{G1} &= [a_{G1x}, a_{G1y}, a_{G1z}]^T \\
 \mathbf{t}_a &= [0, 0, t_a]^T \\
 \mathbf{m}_1 &= [M_{1x}, M_{1y}, 0]^T \\
 \mathbf{m}_2 &= [0, M_{2y}, M_{2z}]^T \\
 \mathbf{M}_{G1} &= [M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T
 \end{aligned}$$

Los vectores \mathbf{f}_a , \mathbf{f}_1 , \mathbf{t}_a , \mathbf{m}_1 , están definidos en la base $(\mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_1)$. Los vectores \mathbf{f}_2 , \mathbf{m}_2 , están definidos en la base $(\mathbf{i}_2 \mathbf{j}_2 \mathbf{k}_2)$. Los vectores \mathbf{w}_1 , \mathbf{a}_{G1} , \mathbf{M}_{G1} , están definidos en la base $(\mathbf{i}_0 \mathbf{j}_0 \mathbf{k}_0)$.

Por otro lado, $\mathbf{R}_{1,0}$ y $\mathbf{R}_{1,2}$ son matrices de transformación, que transforman vectores de la base $(\mathbf{i}_0 \mathbf{j}_0 \mathbf{k}_0)$ a la base $(\mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_1)$, y de la base $(\mathbf{i}_2 \mathbf{j}_2 \mathbf{k}_2)$ a la base $(\mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_1)$, respectivamente. Los vectores que no son transformados, ya están definidos en la base $(\mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_1)$.

El producto cruz puede ser definido utilizando matrices antisimétricas, esto es $\mathbf{S} = \mathbf{r} \times$. Al tomar en consideración las matrices \mathbf{S} , la ecuación (5.1) se reescriben como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}(m_1\mathbf{a}_{G1}) \\
 \mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{S}_2\mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0}(m_1\mathbf{a}_{G1})
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores se encuentran en forma vectorial, aunque éstas se pueden escribir mediante una formulación matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{t}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1\mathbf{a}_{G1} \\ \mathbf{M}_{G1} \end{bmatrix}$$

Renombrando:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_{1,2}\mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_{1,0}\mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}_{1,0}\mathbf{F}_{G1}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_a &= [\mathbf{f}_a, \mathbf{t}_a]^T = [0, 0, F_a, 0, 0, t_a]^T \\
\mathbf{F}_1 &= [\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1]^T = [F_{1x}, F_{1y}, 0, M_{1x}, M_{1y}, 0]^T \\
\mathbf{F}_2 &= [\mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2]^T = [F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, M_{2x}, M_{2y}, 0]^T \\
\mathbf{W}_1 &= [\mathbf{w}_1, \mathbf{0}]^T = [0, 0, -m_{G1}g, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{F}_{G1} &= [m_1 \mathbf{a}_{G1}, \mathbf{M}_{G1}]^T = [m_1 a_{G1x}, m_1 a_{G1y}, m_1 a_{G1z}, M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T \\
\mathbf{Q}_{1,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{1,2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Agrupando en fuerzas aplicadas, restrictivas e inerciales se tiene:

$$\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R + \mathbf{F}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}_a + \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{W}_1$$

$$\mathbf{F}^R = \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_{1,2} \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}^I = -\mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{F}_{G1}$$

Estas ecuaciones se definen como:

\mathbf{F}^A = Torsor de fuerzas y momentos aplicados al cuerpo

\mathbf{F}^R = Torsor de fuerzas y momentos de reacción del cuerpo

\mathbf{F}^I = Torsor de fuerzas y momentos inerciales

\mathbf{Q} = Matriz de transformación de torsores

En muchas ocasiones es útil plantear un análisis estático antes, o incluso en lugar de realizar el análisis dinámico de un mecanismo por razones que se explicarán más adelante. El análisis estático es el análisis de fuerzas en un cuerpo cuando se encuentra en una posición “*sin movimiento alguno*”; este análisis da como resultado las fuerzas en las articulaciones y las fuerzas de los actuadores necesarias para mantener un mecanismo en una posición dada.

Las fuerzas que actúan en el análisis estático son las *Fuerzas Reactivas*, es decir, las fuerzas en las articulaciones y las *Fuerzas Activas*, que comprenden a las fuerzas de los actuadores y las fuerzas y momentos externos, incluyendo el peso (fuerza debida a la gravedad). La definición del análisis estático se puede resumir en la siguiente ecuación.

$$\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

Por su parte, en el análisis dinámico se consideran las fuerzas involucradas en el análisis estático, además de aquellas debidas exclusivamente al movimiento del mecanismo. Dichas fuerzas se conocen como *Fuerzas Inerciales* y comprenden las masas aceleradas en traslación y rotación. Como puede inferirse, la representación del análisis dinámico no es muy diferente de la representación del análisis estático, como se muestra en la siguiente ecuación, donde sólo se agrega un término con respecto a la ecuación (5.2).

$$\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R + \mathbf{F}^I = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

En los sistemas mecánicos, como en muchos otros sistemas, es usual considerar sistemas más o menos simples para representar sistemas de gran complejidad; de hecho ésta es una de las principales premisas del modelado matemático. En muchos casos, una representación simple es preferible dado el ahorro en el análisis y costo computacional asociado a la consecución de esta solución en comparación con otras que se suponen más apegadas a la realidad.

En el caso particular de los sistemas de multicuerpos, la obtención de las fuerzas asociadas al análisis estático resulta mucho más sencilla y tiene un costo computacional más bajo que la obtención de las fuerzas asociadas al análisis dinámico. Tratándose de dos soluciones similares es conveniente investigar si hay alguna relación entre ambas y, si se da el caso, establecer en qué condiciones se aproximan ambas soluciones.

Esta investigación nos permitirá justificar la utilización de modelos matemáticos de mayor sencillez, capaces de calcular una aproximación de las fuerzas reales en el sistema de manera inmediata, lo cual abre un campo con grandes posibilidades de crecimiento, sobre todo en el control en tiempo real. Por ello, al final del capítulo se abordarán ambas soluciones y se mostrará en qué casos resulta conveniente utilizar cada una de ellas.

La herramienta principal en el análisis mediante el método de Newton es el diagrama de cuerpo libre; por ello se realizará un diagrama por cada cuerpo en una cadena abierta, luego se establecerán los términos de la ecuación (5.3) y finalmente se obtendrán los términos relacionados con la cinemática de los cuerpos en movimiento. Puesto que una suma de fuerzas siempre debe estar dada en la misma base local, se utilizarán las matrices \mathbf{Q} definidas en la introducción de este capítulo.

A continuación se muestra el análisis de fuerzas para los cuerpos de una de las cadenas abiertas i del mecanismo de este trabajo.

Cuerpos considerados en el análisis dinámico

Para el análisis dinámico del robot se tomaron en consideración los cuerpos de la cadena i mostrada a continuación:

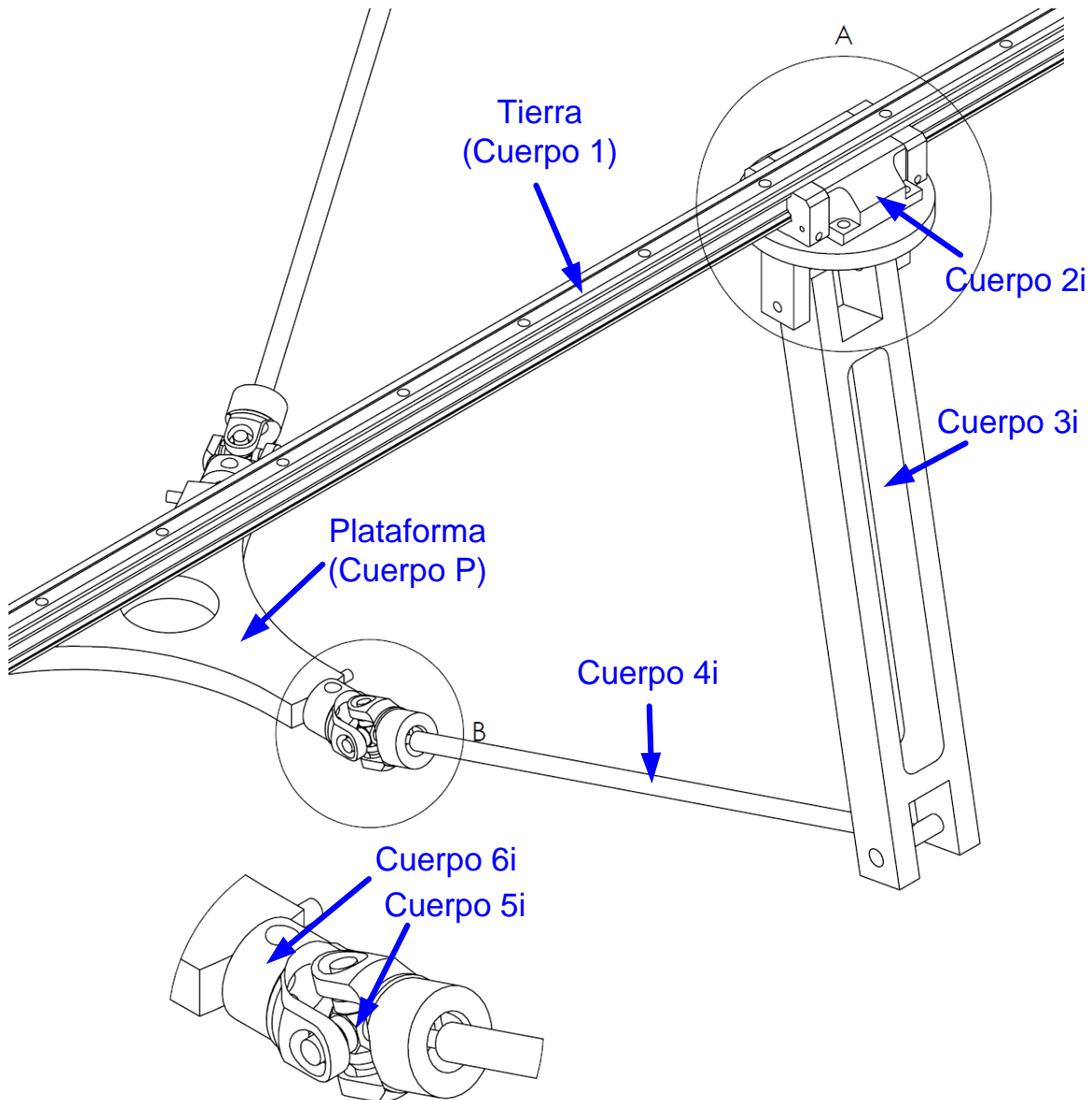


Figura 22 Cuerpos considerados en el análisis dinámico

Análisis del Cuerpo 2i

La Figura 23 muestra el diagrama de cuerpo libre del segundo cuerpo de la cadena i (el primer cuerpo es la tierra, en este caso el arreglo de tres rieles en forma de triángulo).

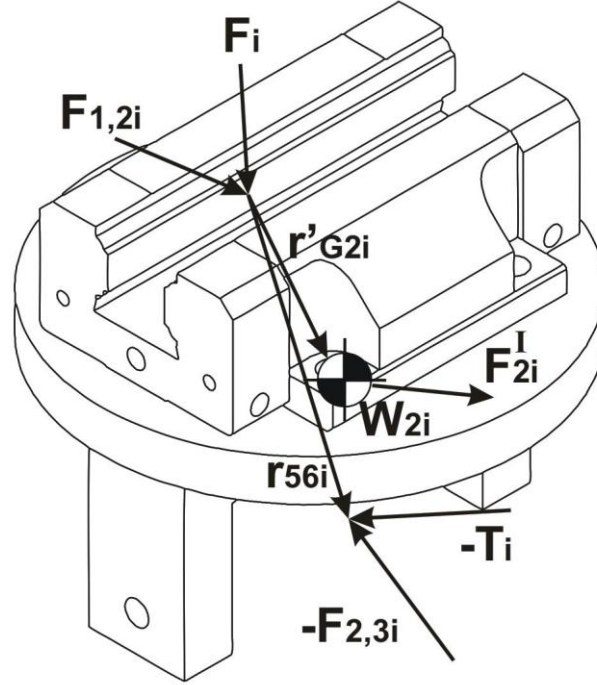


Figura 23 Diagrama de cuerpo libre del Cuerpo 2i

Con base en la Figura 23 se toma la suma de fuerzas en el Cuerpo 2i:

$$\mathbf{F}_{2i}^A + \mathbf{F}_{2i}^R + \mathbf{F}_{2i}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\mathbf{F}_{2i}^A = \mathbf{F}_i - \mathbf{Q}_{7i}^{5i} \mathbf{T}_i + \mathbf{Q}_0^{5i} \mathbf{W}_{2i}$$

$$\mathbf{F}_{2i}^R = \mathbf{F}_{1,2i} - \mathbf{Q}_{7i}^{5i} \mathbf{F}_{2,3i}$$

$$\mathbf{F}_{2i}^I = [\mathbf{F}_{G2i}, \mathbf{M}_{O5i}]^T$$

Definiendo los términos de los torses correspondientes a las fuerzas y momentos aplicados:

$$\mathbf{F}_i = [0, F_i, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{T}_i = [0, 0, 0, 0, T_i, 0]^T$$

$$\mathbf{W}_{2i} = [0, 0, -m_{2i}g, 0, 0, 0]^T$$

El torsor \mathbf{F}_i corresponde a la fuerza lineal aplicada para mover la corredera (i.e. el cuerpo $2i$), esta fuerza está definida en la base $5i$ del mecanismo; el torsor \mathbf{W}_{2i} corresponde al peso del cuerpo $2i$ definido en la base inercial; finalmente, el torsor \mathbf{T}_i corresponde al momento aplicado entre el cuerpo $2i$ y el cuerpo $3i$, definido en la base $7i$ del mecanismo.

Definiendo los términos de los torsesores para las fuerzas y momentos reactivos e inerciales, respectivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1,2i} &= \left[F_{12,xi}, 0, F_{12,zi}, M_{12,xi}, M_{12,yi}, M_{12,zi} \right]^T \\ \mathbf{F}_{2,3i} &= \left[F_{23,xi}, F_{23,yi}, F_{23,zi}, M_{23,xi}, 0, M_{23,zi} \right]^T \\ \mathbf{F}_{G2i} &= -m_{2i} \mathbf{a}_{G2i}^{5i} \\ \mathbf{M}_{O5i} &= -\left(\mathbf{J}_{G2i} \boldsymbol{\alpha}_{O2i}^{5i} + \boldsymbol{\omega}_{O2i}^{5i} \times \left(\mathbf{J}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{O2i}^{5i} \right) + \mathbf{r}_{G2i}^{5i} \times \left(m_{2i} \mathbf{a}_{G2i}^{5i} \right) \right)\end{aligned}$$

El torsor $\mathbf{F}_{1,2i}$ corresponde a la fuerza de reacción de la tierra (cuerpo 1) sobre la corredera (cuerpo $2i$), esta fuerza está definida en la base $5i$ del mecanismo; el torsor $\mathbf{F}_{2,3i}$ corresponde a la fuerza de reacción del cuerpo $2i$ sobre el primer brazo de la cadena cinemática i (i.e. el cuerpo $3i$) y está definida en la base $7i$ del mecanismo; finalmente, \mathbf{F}_{G2i} y \mathbf{M}_{O5i} corresponden al vector de fuerzas y momentos inerciales del cuerpo $2i$ vistas desde la base $5i$.

Definiendo los términos de las matrices de transformación entre los sistemas coordenados:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{7i}^{5i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{7i}^{5i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{7i}^{5i} \mathbf{R}_{7i}^{5i} & \mathbf{R}_{7i}^{5i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_0^{5i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{5i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^{5i} \mathbf{R}_0^{5i} & \mathbf{R}_0^{5i} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{7i}^{5i} &= \mathbf{R}_y(\theta_{67i}) \\ \mathbf{S}_{7i}^{5i} &= \mathbf{S}_{z3}(-z_{56i}) \\ \mathbf{R}_{5i}^0 &= \mathbf{R}_z(\delta_{01i}) \mathbf{R}_z(\delta_{23i}) \mathbf{R}_z(\delta_{45i}) = \mathbf{R}_z(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) \\ \mathbf{R}_0^{5i} &= \left(\mathbf{R}_{5i}^0 \right)^T = \mathbf{R}_z(-\delta_{01i} - \delta_{23i} - \delta_{45i}) \\ \mathbf{S}_0^{5i} &= \mathbf{S}(x_{G2i}, y_{G2i}, -z_{G2i})\end{aligned}$$

Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 2i

A partir de la Figura 24 se puede obtener una ecuación de lazo para determinar la velocidad y aceleración del cuerpo 2i.

Para determinar completamente la posición del centro de gravedad del cuerpo se utiliza la siguiente ecuación de lazo:

$$\mathbf{r}_{G2i}^0 = \mathbf{r}_{12i}^0 + \mathbf{r}_{34i}^0 + \mathbf{r}_{G2i}^0.$$

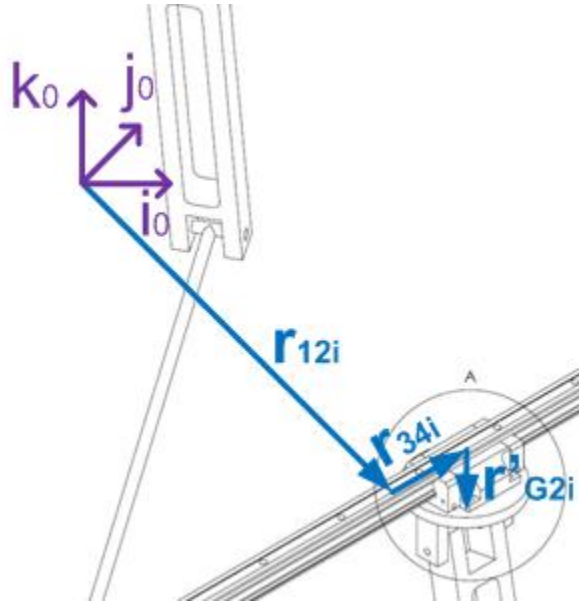


Figura 24 Diagrama vectorial de la base inercial al centro de gravedad del Cuerpo 2i

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}_{G2i}^0 = \mathbf{v}_{12i}^0 + \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{G2i}^0.$$

Donde \mathbf{v}_{G2i}^0 corresponde al vector de velocidad del centro de gravedad del cuerpo 2i con respecto a la base 5i. Dado que \mathbf{v}_{12i}^0 y \mathbf{v}_{G2i}^0 son constantes, la ecuación de velocidad quedará de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{G2i}^0 = \mathbf{v}_{34i}^0$$

Del mismo modo, la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 2i se define como:

$$\mathbf{a}_{G2i}^0 = \mathbf{a}_{34i}^0$$

Para encontrar \mathbf{a}_{G2i}^{5i} bastará con establecer la siguiente relación:

$$\mathbf{a}_{G2i}^{5i} = \mathbf{R}_0^{5i} \mathbf{a}_{G2i}^0 \quad (5.4)$$

Sustituyendo (4.12) y (4.2) en (5.4):

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{G2i}^{5i} &= \mathbf{R}_0^{5i} \left(\ddot{x}_{34i} \mathbf{i}_{3i}^0 \right) = \ddot{x}_{34i} \mathbf{R}_0^{5i} \mathbf{i}_{3i}^0 = \ddot{x}_{34i} \mathbf{R}_0^{5i} \mathbf{R}_{3i}^0 \mathbf{i}_{3i}^{3i} \\ \mathbf{a}_{G2i}^{5i} &= \ddot{x}_{34i} \mathbf{R}_{3i}^{5i} \mathbf{i}_{3i}^{3i}\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{5i}^{3i} &= \mathbf{R}_z(\delta_{45i}) \\ \mathbf{R}_{3i}^{5i} &= \left(\mathbf{R}_{5i}^{3i} \right)^T = \mathbf{R}_z(-\delta_{45i})\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{R}_{3i}^{5i} \mathbf{i}_{3i}^{3i} = \mathbf{R}_z(-\delta_{45i}) \mathbf{i} = -\mathbf{j}$$

Considerando que:

$$\begin{aligned}\delta_{45i} &= 90^\circ \\ \mathbf{i}_{3i}^{3i} &= \mathbf{i} = (1, 0, 0)^T\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\mathbf{a}_{G2i}^{5i} = -\ddot{x}_{34i} \mathbf{j}$$

Para el cuerpo $2i$ no existe velocidad ni aceleración angular porque sólo se desplaza y no rota, por lo tanto:

$$\mathbf{M}_{O5i} = -\mathbf{r}_{G2i'}^{5i} \times \left(m_{2i} \mathbf{a}_{G2i}^{5i} \right)$$

Donde:

$$\mathbf{r}_{G2i'}^{5i} = [x_{G2i}, y_{G2i}, -z_{G2i}]^T$$

Análisis del Cuerpo 3i

La Figura 25 muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo 3i

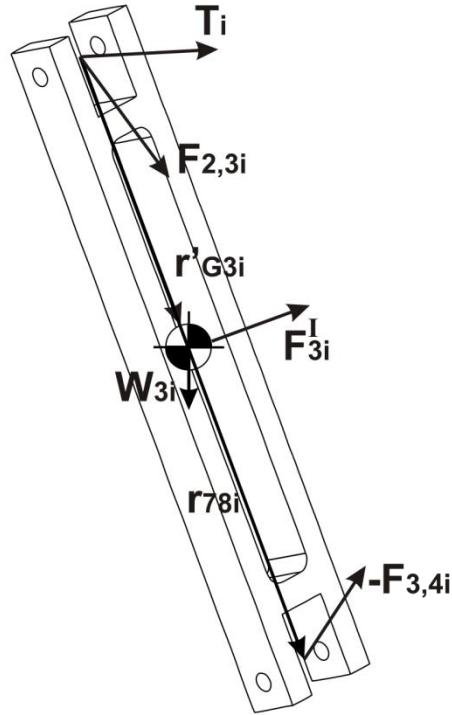


Figura 25 Diagrama de cuerpo libre del Cuerpo 3i

Con base en la Figura 25 se toma la suma de fuerzas en el Cuerpo 3i

$$\mathbf{F}_{3i}^A + \mathbf{F}_{3i}^R + \mathbf{F}_{3i}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{3i}^A &= \mathbf{T}_i + \mathbf{Q}_0^{7i} \mathbf{W}_{3i} \\ \mathbf{F}_{3i}^R &= \mathbf{F}_{2,3i} - \mathbf{Q}_{9i}^{7i} \mathbf{F}_{3,4i} \\ \mathbf{F}_{3i}^I &= [\mathbf{F}_{G3i}, \mathbf{M}_{O7i}]^T\end{aligned}$$

Definiendo los términos de los torses correspondientes a las fuerzas y momentos aplicados, reactivos e inerciales, respectivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{3i} &= [0, 0, -m_{3i}g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{3,4i} &= [F_{34,xi}, F_{34,yi}, F_{34,zi}, M_{34,xi}, 0, M_{34,zi}]^T \\ \mathbf{F}_{G3i} &= -m_{3i} \mathbf{a}_{G3i}^{7i} \\ \mathbf{M}_{O7i} &= -\left(\mathbf{J}_{G3i} \boldsymbol{\alpha}_{O3i}^{7i} + \boldsymbol{\omega}_{O3i}^{7i} \times \left(\mathbf{J}_{G3i} \boldsymbol{\omega}_{O3i}^{7i} \right) + \mathbf{r}_{G3i}^{7i} \times \left(m_{3i} \mathbf{a}_{G3i}^{7i} \right) \right)\end{aligned}$$

El torsor \mathbf{W}_{3i} corresponde al peso del cuerpo $3i$ definido en la base inercial, el torsor $\mathbf{F}_{3,4i}$ corresponde a la fuerza de reacción del primer brazo (cuerpo $3i$) sobre el segundo brazo de la cadena cinemática i (i.e. el cuerpo $4i$), y está definida en la base $9i$ del mecanismo; finalmente, \mathbf{F}_{G3i} y \mathbf{M}_{O7i} corresponden al vector de fuerzas y momentos inerciales del cuerpo $3i$ vistas desde la base $7i$.

Definiendo los términos de las matrices de transformación entre los sistemas coordenados:

$$\mathbf{Q}_{9i}^{7i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{9i}^{7i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{9i}^{7i} \mathbf{R}_{9i}^{7i} & \mathbf{R}_{9i}^{7i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_0^{7i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{7i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^{7i} \mathbf{R}_0^{7i} & \mathbf{R}_0^{7i} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{9i}^{7i} &= \mathbf{R}_y(\theta_{89i}) \\ \mathbf{S}_{9i}^{7i} &= \mathbf{S}_{z1}(x_{78i}) \\ \mathbf{R}_{7i}^0 &= \mathbf{R}_z(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) \mathbf{R}_y(\theta_{67i}) \\ \mathbf{R}_0^{7i} &= (\mathbf{R}_{7i}^0)^T = \mathbf{R}_y(-\theta_{67i}) \mathbf{R}_z(-\delta_{01i} - \delta_{23i} - \delta_{45i}) \\ \mathbf{S}_0^{7i} &= \mathbf{S}_{z1}(x_{G3i}) \end{aligned}$$

Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 3i

A partir de la Figura 26 se puede obtener una ecuación de lazo para determinar la velocidad y aceleración del cuerpo $3i$.

Para determinar completamente la posición del centro de gravedad del cuerpo se utiliza la siguiente ecuación de lazo:

$$\mathbf{r}_{G3i}^0 = \mathbf{r}_{12i}^0 + \mathbf{r}_{34i}^0 + \mathbf{r}_{56i}^0 + \mathbf{r}_{G3i}^0$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}_{G3i}^0 = \mathbf{v}_{12i}^0 + \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{56i}^0 + \mathbf{v}_{G3i}^0$$

Donde \mathbf{v}_{G3i}^0 corresponde al vector de velocidad del centro de gravedad del cuerpo $3i$ con respecto a la base $7i$. Dado que \mathbf{v}_{12i}^0 y \mathbf{v}_{56i}^0 son constantes, la ecuación de velocidad quedará de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{G3i}^0 = \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{G3i}^0$$

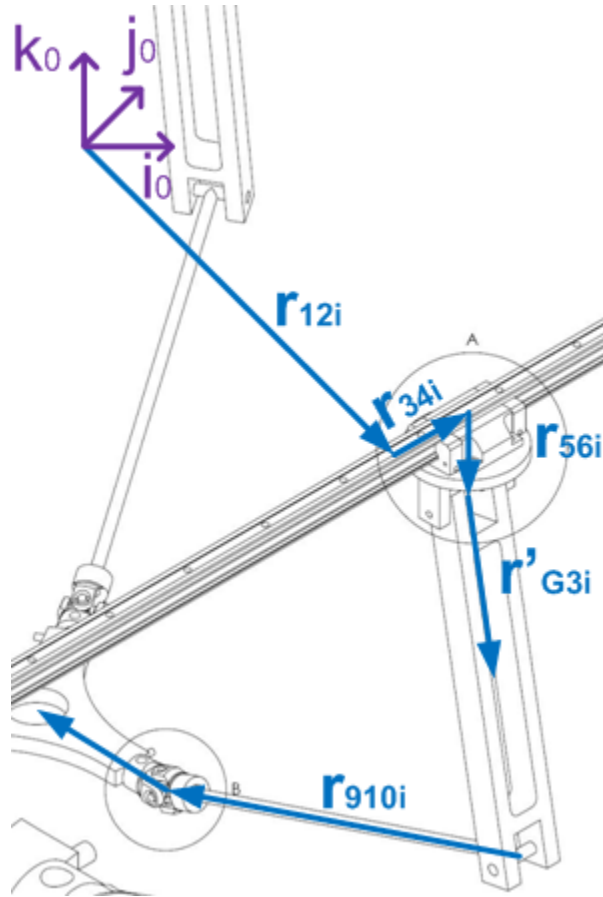


Figura 26 Diagrama vectorial de la base inercial al centro de gravedad del Cuerpo 3i

Del mismo modo, la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 3i se define como:

$$\mathbf{a}_{G3i}^0 = \mathbf{a}_{34i}^0 + \mathbf{a}_{G3i}^0$$

La aceleración relativa del centro de gravedad \mathbf{a}_{G3i}^0 con respecto a la base 7i se define como:

$$\mathbf{a}_{G3i}^0 = \boldsymbol{\alpha}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{G3i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \times \mathbf{r}_{G3i}^0)$$

Para encontrar \mathbf{a}_{G3i}^{7i} bastará con establecer la siguiente relación:

$$\mathbf{a}_{G3i}^{7i} = \mathbf{R}_0^{7i} \mathbf{a}_{G3i}^0$$

La velocidad y aceleración angular del cuerpo 3i con respecto a la base inercial se definieron anteriormente como $\boldsymbol{\omega}_{3i}^0$ y $\boldsymbol{\alpha}_{3i}^0$. Para encontrar $\boldsymbol{\omega}_{O3i}^{7i}$ y $\boldsymbol{\alpha}_{O3i}^{7i}$ bastará con establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{O3i}^{7i} &= \mathbf{R}_0^{7i} \boldsymbol{\omega}_{3i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{O3i}^{7i} &= \mathbf{R}_0^{7i} \boldsymbol{\alpha}_{3i}^0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores están definidas en la base local $7i$, mientras que \mathbf{J}_{G3i} es la matriz de inercias del cuerpo $3i$ definida en su centro de gravedad con orientación paralela a la base local $7i$.

$$\mathbf{J}_{G3i} = \begin{bmatrix} J_{3ixx} & -J_{3ixy} & -J_{3ixz} \\ -J_{3iyx} & J_{3iyy} & -J_{3iyz} \\ -J_{3izx} & -J_{3izy} & J_{3izz} \end{bmatrix}$$

Finalmente el vector \mathbf{r}_{G3i}^{7i} , se define como $\mathbf{r}_{G3i}^{7i} = [x_{G3i}, 0, 0]^T$, con lo cual quedan completamente definidas las fuerzas que actúan en el cuerpo $3i$.

Análisis del Cuerpo $4i$

La Figura 27 muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo $4i$

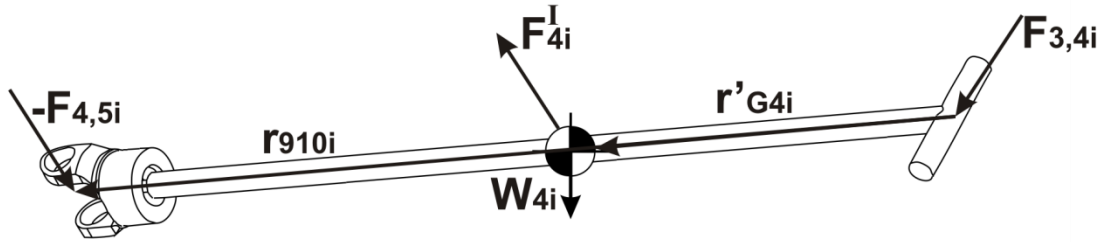


Figura 27 Diagrama de cuerpo libre del Cuerpo $4i$

Con base en la figura anterior se toma la suma de fuerzas en el Cuerpo $4i$:

$$\mathbf{F}_{4i}^A + \mathbf{F}_{4i}^R + \mathbf{F}_{4i}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{4i}^A &= \mathbf{Q}_0^{9i} \mathbf{W}_{4i} \\ \mathbf{F}_{4i}^R &= \mathbf{F}_{3,4i} - \mathbf{Q}_{11i}^{9i} \mathbf{F}_{4,5i} \\ \mathbf{F}_{4i}^I &= [\mathbf{F}_{G4i}, \mathbf{M}_{O9i}]^T \end{aligned}$$

Definiendo los términos de los torses correspondientes a las fuerzas y momentos aplicados, reactivos e inerciales, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{4i} &= [0, 0, -m_{4i}g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{4,5i} &= [F_{45xi}, F_{45yi}, F_{45zi}, M_{45xi}, M_{45yi}, 0]^T \\ \mathbf{F}_{G4i} &= -m_{4i} \mathbf{a}_{G4i}^{9i} \\ \mathbf{M}_{O9i} &= -\left(\mathbf{J}_{G4i} \boldsymbol{\alpha}_{O4i}^{9i} + \boldsymbol{\omega}_{O4i}^{9i} \times \left(\mathbf{J}_{G4i} \boldsymbol{\omega}_{O4i}^{9i} \right) + \mathbf{r}_{G4i}^{9i} \times \left(m_{4i} \mathbf{a}_{G4i}^{9i} \right) \right) \end{aligned}$$

El torsor \mathbf{W}_{4i} corresponde al peso del cuerpo $4i$ definido en la base inercial, el torsor $\mathbf{F}_{4,5i}$ corresponde a la fuerza de reacción del segundo brazo (cuerpo $4i$) sobre la cruceta de la cadena cinemática i (i.e. el cuerpo $5i$), y está definida en la base $11i$ del mecanismo; finalmente, \mathbf{F}_{G4i} y \mathbf{M}_{O9i} corresponden al vector de fuerzas y momentos inerciales del cuerpo $4i$ vistas desde la base $9i$.

Definiendo los términos de las matrices de transformación entre los sistemas coordenados:

$$\mathbf{Q}_{11i}^{9i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11i}^{9i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{11i}^{9i} \mathbf{R}_{11i}^{9i} & \mathbf{R}_{11i}^{9i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_0^{9i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{9i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^{9i} \mathbf{R}_0^{9i} & \mathbf{R}_0^{9i} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{R}_{11i}^{9i} = \mathbf{R}_z(\theta_{1011i})$$

$$\mathbf{S}_{11i}^{9i} = \mathbf{S}_{z1}(x_{910i})$$

$$\mathbf{R}_{9i}^0 = \mathbf{R}_z(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) \mathbf{R}_y(\theta_{67i} + \theta_{89i})$$

$$\mathbf{R}_0^{9i} = (\mathbf{R}_{9i}^0)^T = \mathbf{R}_y(-\theta_{67i} - \theta_{89i}) \mathbf{R}_z(-\delta_{01i} - \delta_{23i} - \delta_{45i})$$

$$\mathbf{S}_0^{9i} = \mathbf{S}_{z1}(x_{G4i})$$

Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 4i

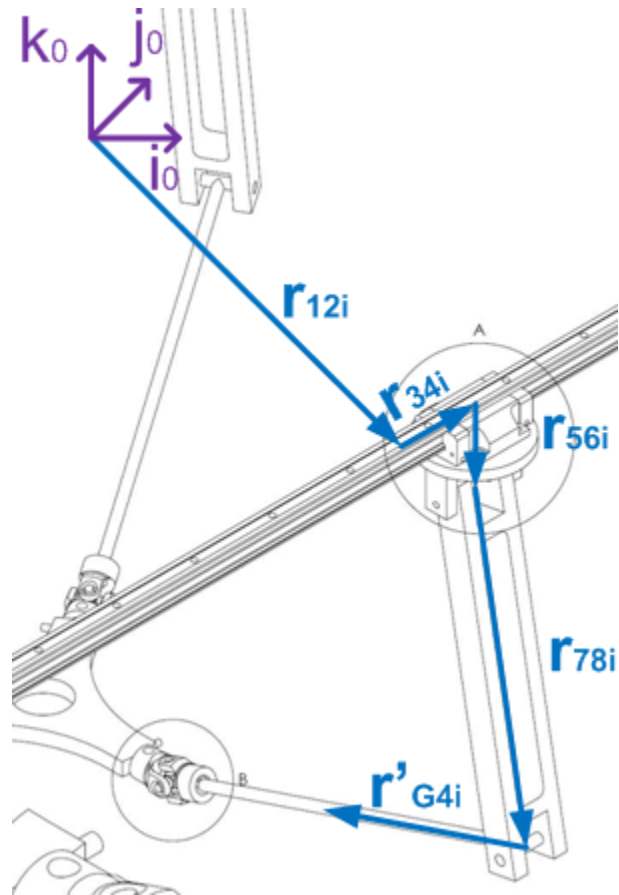


Figura 28 Diagrama vectorial de la base inercial al centro de gravedad del Cuerpo 4i

A partir de la Figura 28 se puede obtener una ecuación de lazo para determinar la velocidad y aceleración del cuerpo 4i.

Para determinar completamente la posición del centro de gravedad del cuerpo se utiliza la siguiente ecuación de lazo:

$$\mathbf{r}_{G4i}^0 = \mathbf{r}_{12i}^0 + \mathbf{r}_{34i}^0 + \mathbf{r}_{56i}^0 + \mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{G4i}'^0$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}_{G4i}^0 = \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{78i}^0 + \mathbf{v}_{G4i}'^0$$

Donde $\mathbf{v}_{G4i}'^0$ corresponde al vector de velocidad del centro de gravedad del cuerpo 4i con respecto a la base 9i. Del mismo modo, la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 4i se define como:

$$\mathbf{a}_{G4i}^0 = \mathbf{a}_{34i}^0 + \mathbf{a}_{78i}^0 + \mathbf{a}_{G4i}'^0$$

La aceleración relativa del centro de gravedad \mathbf{a}_{G4i}^0 , con respecto a la base $9i$ se define como:

$$\mathbf{a}_{G4i}^0 = \boldsymbol{\alpha}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{G4i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \times \mathbf{r}_{G4i}^0)$$

Para encontrar \mathbf{a}_{G4i}^{9i} bastará con establecer la siguiente relación:

$$\mathbf{a}_{G4i}^{9i} = \mathbf{R}_0^{9i} \mathbf{a}_{G4i}^0$$

La velocidad y aceleración angular del cuerpo $4i$ con respecto a la base inercial se definieron anteriormente como $\boldsymbol{\omega}_{4i}^0$ y $\boldsymbol{\alpha}_{4i}^0$. Para encontrar $\boldsymbol{\omega}_{O4i}^{9i}$ y $\boldsymbol{\alpha}_{O4i}^{9i}$ bastará con establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{O4i}^{9i} &= \mathbf{R}_0^{9i} \boldsymbol{\omega}_{4i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{O4i}^{9i} &= \mathbf{R}_0^{9i} \boldsymbol{\alpha}_{4i}^0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores están definidas en la base local $9i$, mientras que \mathbf{J}_{G4i} es la matriz de inercias del cuerpo $4i$ definida en su centro de gravedad con orientación paralela a la base local $9i$. El planteamiento es similar al utilizado para definir la matriz \mathbf{J}_{G3i} .

$$\mathbf{J}_{G4i} = \begin{bmatrix} J_{4ixx} & -J_{4ixy} & -J_{4ixz} \\ -J_{4iyx} & J_{4iyy} & -J_{4iyz} \\ -J_{4izx} & -J_{4izy} & J_{4izz} \end{bmatrix}$$

Finalmente el vector \mathbf{r}_{G4i}^{9i} , se define como $\mathbf{r}_{G4i}^{9i} = [x_{G4i}, 0, 0]^T$, con lo cual quedan completamente definidas las fuerzas que actúan en el cuerpo $4i$.

Análisis del Cuerpo 5i

La figura siguiente muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo 5i.

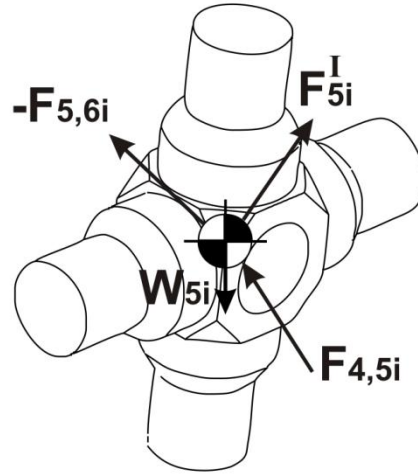


Figura 29 Diagrama de cuerpo libre del Cuerpo 5i

Con base en la Figura 29 se toma la suma de fuerzas en el Cuerpo 5i:

$$\mathbf{F}_{5i}^A + \mathbf{F}_{5i}^R + \mathbf{F}_{5i}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\mathbf{F}_{5i}^A = \mathbf{R}_0^{11i} \mathbf{W}_{5i}$$

$$\mathbf{F}_{5i}^R = \mathbf{F}_{4,5i} - [\mathbf{R}_{12i}^{11i} \mathbf{F}_{5,6i}, \mathbf{0}]^T$$

$$\mathbf{F}_{5i}^I = [\mathbf{F}_{G5i}, \mathbf{M}_{O11i}]^T$$

En este caso la fuerza de reacción no genera un momento en la base 11i, ya que los orígenes de las bases 11i y 12i son coincidentes con la línea de acción del torsor $\mathbf{F}_{5,6i}$.

Definiendo los términos de los torses correspondientes a las fuerzas y momentos aplicados, reactivos e inerciales, respectivamente:

$$\mathbf{W}_{5i} = [0, 0, -m_{5i}g, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{F}_{5,6i} = [F_{56xi}, F_{56yi}, F_{56zi}, M_{56xi}, 0, M_{56zi}]^T$$

$$\mathbf{F}_{G5i} = -m_{5i} \mathbf{a}_{G5i}^{11i}$$

$$\mathbf{M}_{O11i} = -(\mathbf{J}_{G5i} \mathbf{a}_{O5i}^{11i} + \boldsymbol{\omega}_{O5i}^{11i} \times (\mathbf{J}_{G5i} \boldsymbol{\omega}_{O5i}^{11i}))$$

El torsor \mathbf{W}_{5i} corresponde al peso del cuerpo 5i definido en la base inercial, el torsor $\mathbf{F}_{5,6i}$ corresponde a la fuerza de reacción de la cruceta (cuerpo 5i) sobre la junta rotacional de la junta

de Hooke del lado de la plataforma móvil (i.e. el cuerpo $6i$) definida en la base $12i$ del mecanismo; finalmente, \mathbf{F}_{G5i} y \mathbf{M}_{O11i} corresponden al vector de fuerzas y momentos inerciales del cuerpo $5i$ vistas desde la base $11i$. Como puede notarse, en este caso no existen momentos asociados a las fuerzas inerciales debido a que el centro de gravedad del cuerpo $5i$ está en el origen de la base $11i$, por lo cual su brazo de palanca es nulo.

Definiendo los términos de las matrices de transformación entre los sistemas coordenados:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{11i}^0 &= \mathbf{R}_z(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i})\mathbf{R}_y(\theta_{67i} + \theta_{89i})\mathbf{R}_z(\theta_{1011i}) \\ \mathbf{R}_0^{11i} &= (\mathbf{R}_{11i}^0)^T = \mathbf{R}_z(-\theta_{1011i})\mathbf{R}_y(-\theta_{67i} - \theta_{89i})\mathbf{R}_z(-\delta_{01i} - \delta_{23i} - \delta_{45i}) \\ \mathbf{R}_{12i}^{11i} &= \mathbf{R}_y(\theta_{1112i})\end{aligned}$$

Aceleración del centro de gravedad del cuerpo $5i$

A partir de la siguiente figura se puede obtener una ecuación de lazo para determinar la velocidad y aceleración del cuerpo $5i$:

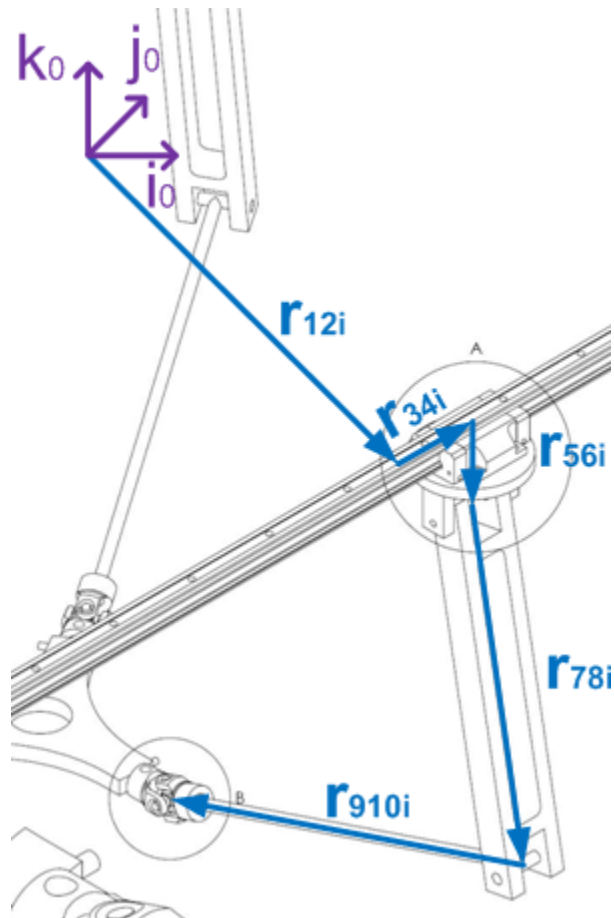


Figura 30 Diagrama vectorial de la base inercial al centro de gravedad del Cuerpo $5i$

Para determinar completamente la posición del centro de gravedad del cuerpo se utiliza la ecuación de lazo:

$$\mathbf{r}_{G5i}^0 = \mathbf{r}_{12i}^0 + \mathbf{r}_{34i}^0 + \mathbf{r}_{56i}^0 + \mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{G5i}^0$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}_{G5i}^0 = \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{78i}^0 + \mathbf{v}_{910i}^0 + \mathbf{v}_{G5i}^0$$

Donde \mathbf{v}_{G5i}^0 corresponde al vector de posición del centro de gravedad del cuerpo $5i$ con respecto a la base $11i$. Esta velocidad es cero, dado que se encuentra en el mismo punto, por lo cual:

$$\mathbf{v}_{G5i}^0 = \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{78i}^0 + \mathbf{v}_{910i}^0$$

La aceleración del centro de gravedad del cuerpo $5i$ se define como:

$$\mathbf{a}_{G5i}^0 = \mathbf{a}_{34i}^0 + \mathbf{a}_{78i}^0 + \mathbf{a}_{910i}^0$$

Para encontrar \mathbf{a}_{G5i}^{11i} bastará con establecer la siguiente relación:

$$\mathbf{a}_{G5i}^{11i} = \mathbf{R}_0^{11i} \mathbf{a}_{G5i}^0$$

La velocidad y aceleración angular del cuerpo $5i$ con respecto a la base inercial se definieron anteriormente como $\boldsymbol{\omega}_{5i}^0$ y $\boldsymbol{\alpha}_{5i}^0$. Para encontrar $\boldsymbol{\omega}_{O5i}^{11i}$ y $\boldsymbol{\alpha}_{O5i}^{11i}$ bastará con establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{O5i}^{11i} &= \mathbf{R}_0^{11i} \boldsymbol{\omega}_{5i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{O5i}^{11i} &= \mathbf{R}_0^{11i} \boldsymbol{\alpha}_{5i}^0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores están definidas en la base local $11i$; \mathbf{J}_{G5i} se define en forma similar a las matrices de inercias de los cuerpos anteriores.

$$\mathbf{J}_{G5i} = \begin{bmatrix} J_{5ixx} & -J_{5ixy} & -J_{5ixz} \\ -J_{5iyx} & J_{5iyy} & -J_{5iyz} \\ -J_{5izx} & -J_{5izy} & J_{5izz} \end{bmatrix}$$

Análisis del Cuerpo 6i

La Figura 31 muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo 6i.

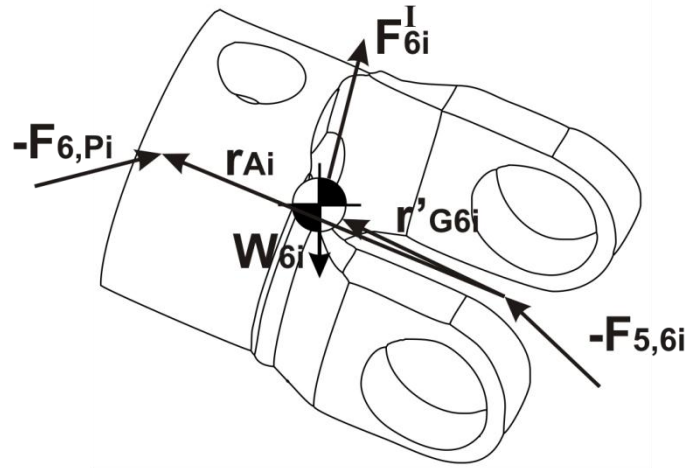


Figura 31 Diagrama de cuerpo libre del Cuerpo 6i

Con base en la figura anterior se toma la suma de fuerzas en el Cuerpo 6i

$$\mathbf{F}_{6i}^A + \mathbf{F}_{6i}^R + \mathbf{F}_{6i}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{6i}^A &= \mathbf{Q}_0^{12i} \mathbf{W}_{6i} \\ \mathbf{F}_{6i}^R &= \mathbf{F}_{5,6i} - \mathbf{Q}_{Ai}^{12i} \mathbf{F}_{6,Pi} \\ \mathbf{F}_{6i}^I &= [\mathbf{F}_{G6i}, \mathbf{M}_{O12i}]^T\end{aligned}$$

Definiendo los términos de los torsesores correspondientes a las fuerzas y momentos aplicados, reactivos e inerciales, respectivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{6i} &= [0, 0, -m_{6i}g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{6,Pi} &= [F_{6pxi}, F_{6pyi}, F_{6pzi}, 0, M_{6pyi}, M_{6pzi}]^T \\ \mathbf{F}_{G6i} &= -m_{6i} \mathbf{a}_{G6i}^{12i} \\ \mathbf{M}_{O12i} &= -\left(\mathbf{J}_{G6i} \mathbf{a}_{O6i}^{12i} + \boldsymbol{\omega}_{O6i}^{12i} \times \left(\mathbf{J}_{G6i} \boldsymbol{\omega}_{O6i}^{12i} \right) + \mathbf{r}_{G6i}^{12i} \times \left(m_{6i} \mathbf{a}_{G6i}^{12i} \right) \right)\end{aligned}$$

El torsesor \mathbf{W}_{6i} corresponde al peso del cuerpo 6i definido en la base inercial, el torsesor $\mathbf{F}_{6,Pi}$ corresponde a la fuerza de reacción de la junta rotacional de la junta de Hooke del lado de la plataforma móvil (i.e. el cuerpo 6i) sobre la plataforma móvil (i.e. el cuerpo p), y está definida en la base Ai del mecanismo; finalmente, \mathbf{F}_{G6i} y \mathbf{M}_{O12i} corresponden al vector de fuerzas y momentos inerciales del cuerpo 6i vistas desde la base 12i.

Definiendo los términos de las matrices de transformación entre los sistemas coordenados:

$$\mathbf{Q}_{Ai}^{12i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ai}^{12i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{Ai}^{12i} \mathbf{R}_{Ai}^{12i} & \mathbf{R}_{Ai}^{12i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_0^{12i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{12i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^{12i} \mathbf{R}_0^{12i} & \mathbf{R}_0^{12i} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{R}_{Ai}^{12i} = \mathbf{R}_x(\theta_{12i3i})$$

$$\mathbf{S}_{Ai}^{12i} = \mathbf{S}_{z1}(x_{Ai})$$

$$\mathbf{R}_{12i}^0 = \mathbf{R}_z(\delta_{01i} + \delta_{23i} + \delta_{45i}) \mathbf{R}_y(\theta_{67i} + \theta_{89i}) \mathbf{R}_z(\theta_{1011i}) \mathbf{R}_y(\theta_{1112i})$$

$$\mathbf{R}_0^{12i} = (\mathbf{R}_{12i}^0)^T = \mathbf{R}_y(-\theta_{1112i}) \mathbf{R}_z(-\theta_{1011i}) \mathbf{R}_y(-\theta_{67i} - \theta_{89i}) \mathbf{R}_z(-\delta_{01i} - \delta_{23i} - \delta_{45i})$$

$$\mathbf{S}_0^{12i} = \mathbf{S}_{z1}(x_{Ai})$$

Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 6i

A partir de la Figura 32 se puede obtener una ecuación de lazo para determinar la velocidad y aceleración del cuerpo 6i.

Para determinar completamente la posición del centro de gravedad del cuerpo se utiliza la siguiente ecuación de lazo:

$$\mathbf{r}_{G6i}^0 = \mathbf{r}_{12i}^0 + \mathbf{r}_{34i}^0 + \mathbf{r}_{56i}^0 + \mathbf{r}_{78i}^0 + \mathbf{r}_{910i}^0 + \mathbf{r}_{G6i}^0$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}_{G6i}^0 = \mathbf{v}_{34i}^0 + \mathbf{v}_{78i}^0 + \mathbf{v}_{910i}^0 + \mathbf{v}_{G6i}^0$$

Donde \mathbf{v}_{G6i}^0 corresponde al vector de velocidad del centro de gravedad del cuerpo 6i relativa a la base 12i. Del mismo modo, la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 6i se define como:

$$\mathbf{a}_{G6i}^0 = \mathbf{a}_{34i}^0 + \mathbf{a}_{78i}^0 + \mathbf{a}_{910i}^0 + \mathbf{a}_{G6i}^0$$

La aceleración relativa del centro de gravedad \mathbf{a}_{G6i}^0 con respecto a la base 12i se define como:

$$\mathbf{a}_{G6i}^0 = \mathbf{a}_{6i}^0 \times \mathbf{r}_{G6i}^0 + \boldsymbol{\omega}_{6i}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{6i}^0 \times \mathbf{r}_{G6i}^0)$$

Para encontrar \mathbf{a}_{G6i}^{12i} bastará con establecer la siguiente relación:

$$\mathbf{a}_{G6i}^{12i} = \mathbf{R}_0^{12i} \mathbf{a}_{G6i}^0$$

La velocidad y aceleración angular del cuerpo $6i$ con respecto a la base inercial se definieron anteriormente como $\boldsymbol{\omega}_{6i}^0$ y $\boldsymbol{\alpha}_{6i}^0$. Para encontrar $\boldsymbol{\omega}_{O6i}^{12i}$ y $\boldsymbol{\alpha}_{O6i}^{12i}$ bastará con establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{O6i}^{12i} &= \mathbf{R}_0^{12i} \boldsymbol{\omega}_{6i}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{O6i}^{12i} &= \mathbf{R}_0^{12i} \boldsymbol{\alpha}_{6i}^0\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores están definidas en la base local $12i$, mientras que \mathbf{J}_{G6i} es la matriz de inercias del cuerpo $6i$ definida en su centro de gravedad con orientación paralela a la base local $12i$, y está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_{G6i} = \begin{bmatrix} J_{6ixx} & -J_{6ixy} & -J_{6ixz} \\ -J_{6iyx} & J_{6iyy} & -J_{6iyz} \\ -J_{6izx} & -J_{6izy} & J_{6izz} \end{bmatrix}$$

Finalmente el vector \mathbf{r}_{G6i}^{12i} se define como $\mathbf{r}_{G6i}^{12i} = [x_{G6i}, 0, 0]^T$, con lo cual quedan completamente definidas las fuerzas que actúan en el cuerpo $6i$.

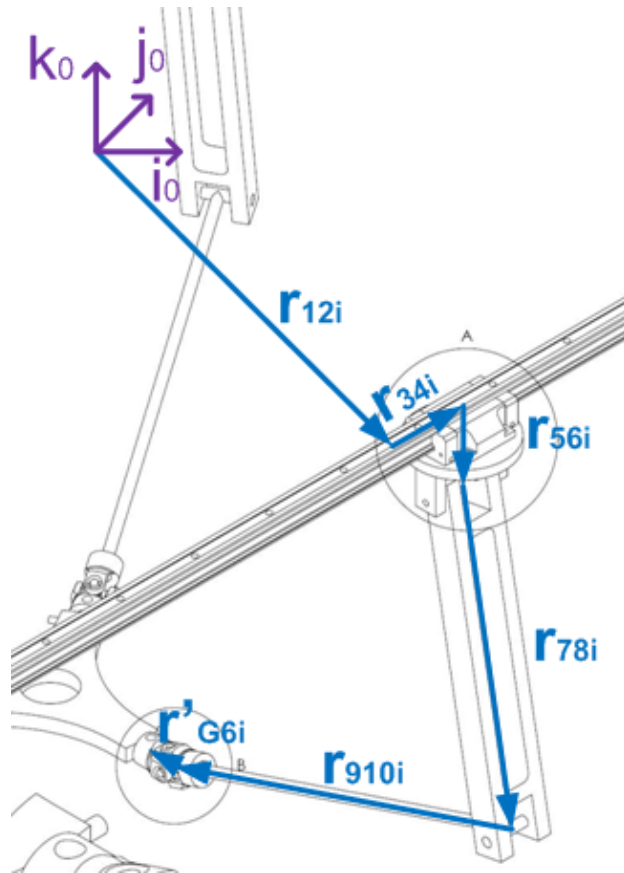


Figura 32 Diagrama vectorial de la base inercial al centro de gravedad del Cuerpo $6i$

Análisis de la plataforma móvil (Cuerpo P)

La Figura 33 muestra el diagrama de cuerpo libre de la plataforma móvil (Cuerpo P).

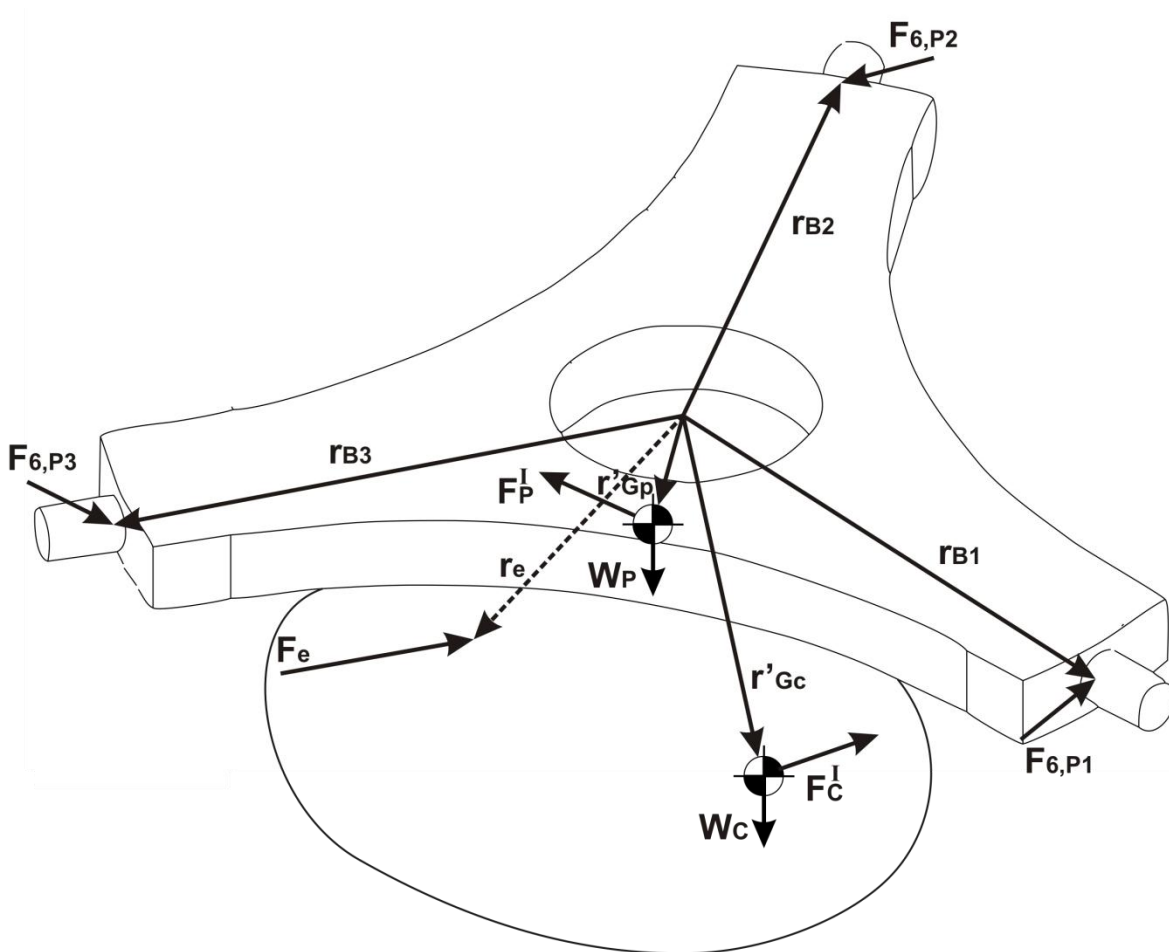


Figura 33 Diagrama de cuerpo libre de la plataforma móvil (Cuerpo P)

Con base en la figura anterior se toma la suma de fuerzas en el Cuerpo P

$$\mathbf{F}_p^A + \mathbf{F}_p^R + \mathbf{F}_p^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\mathbf{F}_p^A = \mathbf{Q}_{0,e}^p \mathbf{F}_e + \mathbf{Q}_{0,p}^p \mathbf{W}_p + \mathbf{Q}_{0,c}^p \mathbf{W}_c$$

$$\mathbf{F}_p^R = \sum_{i=1}^3 \mathbf{Q}_{Ai}^p \mathbf{F}_{6,pi}$$

$$\mathbf{F}_p^I = [\mathbf{F}_{Gp}, \mathbf{M}_{Op}]^T$$

Además definiendo los elementos del torsor de fuerza inercial:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{Gp} &= \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_c = -\left(m_p \mathbf{a}_{Gp}^p + m_c \mathbf{a}_{Gc}^p\right) \\
 \mathbf{M}_{Op} &= \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_c \\
 \mathbf{M}_p &= -\left(\mathbf{J}_{Gp} \boldsymbol{\alpha}_{Op}^p + \boldsymbol{\omega}_{Op}^p \times \left(\mathbf{J}_{Gp} \boldsymbol{\omega}_{Op}^p\right) + \mathbf{r}_{Gp}^p \times \left(m_p \mathbf{a}_{Gp}^p\right)\right) \\
 \mathbf{M}_c &= -\left(\mathbf{J}_{Gc} \boldsymbol{\alpha}_{Oc}^p + \boldsymbol{\omega}_{Oc}^p \times \left(\mathbf{J}_{Gc} \boldsymbol{\omega}_{Oc}^p\right) + \mathbf{r}_{Gc}^p \times \left(m_c \mathbf{a}_{Gc}^p\right)\right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

El conjunto de ecuaciones (5.5) está definido en la base local $(\mathbf{i}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{k}_p)$. Las matrices \mathbf{J}_{Gp} y \mathbf{J}_{Gc} son las matrices de inercia del plato móvil y de la carga respectivamente, se encuentran en la misma base local y su planteamiento es similar al utilizado para definir la matriz \mathbf{J}_{G3i} .

Además:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_p &= [0, 0, -m_p g, 0, 0, 0]^T \\
 \mathbf{W}_c &= [0, 0, -m_c g, 0, 0, 0]^T \\
 \mathbf{F}_e &= [F_{ex}, F_{ey}, F_{ez}, M_{ex}, M_{ey}, M_{ez}]^T
 \end{aligned}$$

Los torsores \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_c corresponden al peso de la plataforma móvil p y la carga c definidos en la base inercial, el torsor \mathbf{F}_e corresponde a las fuerzas y momentos externos aplicados sobre la carga a mover.

Por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{0,e}^p &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{0,e}^p \mathbf{R}_0^p & \mathbf{R}_0^p \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Q}_{0,c}^p &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{0,c}^p \mathbf{R}_0^p & \mathbf{R}_0^p \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Q}_{0,p}^p &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{0,p}^p \mathbf{R}_0^p & \mathbf{R}_0^p \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Q}_{Ai}^p &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ai}^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{Ai}^p \mathbf{R}_{Ai}^p & \mathbf{R}_{Ai}^p \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Las matrices de rotación antes definidas son:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_p^0 &= \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_z(\phi) \\ \mathbf{R}_0^p &= (\mathbf{R}_p^0)^T = \mathbf{R}_z(-\phi)\mathbf{R}_x(-\theta)\mathbf{R}_z(-\psi) \\ \mathbf{R}_p^{Ai} &= \mathbf{R}_z(\delta_{1415i}) \\ \mathbf{R}_{Ai}^p &= (\mathbf{R}_p^{Ai})^T = \mathbf{R}_z(-\delta_{1415i})\end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{0,e}^p &= \mathbf{S}(x_e, y_e, z_e) \\ \mathbf{S}_{0,c}^p &= \mathbf{S}(x_{Gc}, y_{Gc}, z_{Gc}) \\ \mathbf{S}_{0,p}^p &= \mathbf{S}(x_{Gp}, y_{Gp}, z_{Gp}) \\ \mathbf{S}_{Ai}^p &= \mathbf{R}_z(\delta_{1415i})^T \mathbf{S}_x(-x_{Ai}) \mathbf{R}_z(\delta_{1415i})\end{aligned}$$

Donde $\mathbf{S}_{0,e}^p$, $\mathbf{S}_{0,c}^p$, $\mathbf{S}_{0,p}^p$, \mathbf{S}_{Ai}^p , están definidas en la base p . Estas matrices antisimétricas están asociadas con los vectores $\mathbf{r}_p^e = [x_e, y_e, z_e]^T$, $\mathbf{r}_{Gc}^p = [x_{Gc}, y_{Gc}, z_{Gc}]^T$, $\mathbf{r}_{Gp}^p = [x_{Gp}, y_{Gp}, z_{Gp}]^T$ y \mathbf{r}_{Ai}^p , respectivamente.

Aceleración del centro de gravedad de la Plataforma Móvil

Para determinar completamente la posición del centro de gravedad del cuerpo se utiliza la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r}_{Gp}^0 = \mathbf{r}_p^0 + \mathbf{r}_{Gp}^p \quad (5.6)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_p^0 &= [x_p, y_p, z_p]^T \\ \mathbf{r}_{Gp}^0 &= \mathbf{R}_p^0 \mathbf{r}_{Gp}^p \\ \mathbf{r}_{Gp}^p &= [x_{Gp}, y_{Gp}, z_{Gp}]^T\end{aligned}$$

Derivando la ecuación (5.6) con respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}_{Gp}^0 = \mathbf{v}_p^0 + \mathbf{v}_{Gp}^p = \mathbf{v}_p^0 + \boldsymbol{\omega}_{Op}^0 \times \mathbf{r}_{Gp}^p$$

Donde:

$$\mathbf{v}_p^0 = [\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p]^T$$

Además, el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{Op}^0$ del plato móvil se define como:

$$\boldsymbol{\omega}_{Op}^0 = \dot{\psi}\mathbf{k}_0^0 + \dot{\theta}\mathbf{i}_{16}^0 + \dot{\phi}\mathbf{k}_{17}^0$$

La aceleración del centro de gravedad de la plataforma móvil se define como:

$$\mathbf{a}_{Gp}^0 = \mathbf{a}_p^0 + \mathbf{a}_{Gp'}^0 = \mathbf{a}_p^0 + \boldsymbol{\alpha}_{Op}^0 \times \mathbf{r}_{Gp'}^0 + \boldsymbol{\omega}_{Op}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{Op}^0 \times \mathbf{r}_{Gp'}^0)$$

Donde:

$$\mathbf{a}_p^0 = [\ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p]^T$$

El vector de aceleración angular del plato móvil se define:

$$\boldsymbol{\alpha}_{Op}^0 = \boldsymbol{\alpha}_\psi^0 + \boldsymbol{\alpha}_\theta^0 + \boldsymbol{\alpha}_\phi^0$$

Donde:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_\psi^0 &= \ddot{\psi}\mathbf{k}_0^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_\theta^0 &= \ddot{\theta}\mathbf{i}_{16}^0 + \boldsymbol{\omega}_\psi^0 \times \boldsymbol{\omega}_\theta^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_\phi^0 &= \ddot{\phi}\mathbf{k}_{17}^0 + (\boldsymbol{\omega}_\psi^0 + \boldsymbol{\omega}_\theta^0) \times \boldsymbol{\omega}_\phi^0\end{aligned}$$

Las velocidades y aceleraciones enunciadas pueden encontrarse en las ecuaciones (4.7) y (4.15).

Para encontrar la aceleración del centro de gravedad de la carga se plantean ecuaciones de lazo similares a las utilizadas para la plataforma:

$$\mathbf{r}_{Gc}^0 = \mathbf{r}_p^0 + \mathbf{r}_{Gc'}^0 \quad (5.7)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{Gc'}^0 &= \mathbf{R}_p^0 \mathbf{r}_{Gc'}^p \\ \mathbf{r}_{Gc'}^p &= [x_{Gc'}, y_{Gc'}, z_{Gc'}]^T\end{aligned}$$

Derivando la ecuación (5.7) con respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}_{Gc}^0 = \mathbf{v}_p^0 + \mathbf{v}_{Gc'}^0 = \mathbf{v}_p^0 + \boldsymbol{\omega}_{Oc}^0 \times \mathbf{r}_{Gc'}^0 \quad (5.8)$$

Si consideramos que el cuerpo a mover es rígido, entonces la velocidad y aceleración angular del centro de gravedad de la carga serán iguales a las de la plataforma móvil.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{Oc}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{Op}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{Oc}^0 &= \boldsymbol{\alpha}_{Op}^0\end{aligned}\tag{5.9}$$

Sustituyendo (5.9) en (5.8):

$$\mathbf{v}_{Gc}^0 = \mathbf{v}_p^0 + \boldsymbol{\omega}_{Op}^0 \times \mathbf{r}_{Gc}^0.$$

La aceleración del centro de gravedad de la carga se define como:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{Gc}^0 &= \mathbf{a}_p^0 + \mathbf{a}_{Gc}^0 \\ &= \mathbf{a}_p^0 + \boldsymbol{\alpha}_{Oc}^0 \times \mathbf{r}_{Gc}^0 + \boldsymbol{\omega}_{Oc}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{Oc}^0 \times \mathbf{r}_{Gc}^0) \\ &= \mathbf{a}_p^0 + \boldsymbol{\alpha}_{Op}^0 \times \mathbf{r}_{Gc}^0 + \boldsymbol{\omega}_{Op}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{Op}^0 \times \mathbf{r}_{Gc}^0)\end{aligned}$$

Para encontrar \mathbf{a}_{Gp}^p y \mathbf{a}_{Gc}^p bastará con establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{Gp}^p &= \mathbf{R}_0^p \mathbf{a}_{Gp}^0 \\ \mathbf{a}_{Gc}^p &= \mathbf{R}_0^p \mathbf{a}_{Gc}^0\end{aligned}$$

La velocidad y aceleración angular de la plataforma con respecto a la base inercial se definieron anteriormente como $\boldsymbol{\omega}_{Op}^0 = \boldsymbol{\omega}_p^0$ y $\boldsymbol{\alpha}_{Op}^0 = \boldsymbol{\alpha}_p^0$. Para encontrar $\boldsymbol{\omega}_{Op}^p$ y $\boldsymbol{\alpha}_{Op}^p$ bastará con establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{Gp}^p &= \mathbf{R}_0^p \boldsymbol{\omega}_{Gp}^0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{Gp}^p &= \mathbf{R}_0^p \boldsymbol{\alpha}_{Gp}^0\end{aligned}$$

Finalmente la velocidad y aceleración angular de la carga con respecto a la base inercial se define como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{Gc}^p &= \boldsymbol{\omega}_{Gp}^p \\ \boldsymbol{\alpha}_{Gc}^p &= \boldsymbol{\alpha}_{Gp}^p\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores están definidas en la base local p , mientras que \mathbf{J}_{Gp} y \mathbf{J}_{Gc} son respectivamente las matrices de inercias de la plataforma móvil y de la carga definidas en su centro de gravedad con orientación paralela a la base local p , y están definidas de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_{Gp} = \begin{bmatrix} J_{p_{xx}} & -J_{p_{xy}} & -J_{p_{xz}} \\ -J_{p_{yx}} & J_{p_{yy}} & -J_{p_{yz}} \\ -J_{p_{zx}} & -J_{p_{zy}} & J_{p_{zz}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{Gc} = \begin{bmatrix} J_{c_{xx}} & -J_{c_{xy}} & -J_{c_{xz}} \\ -J_{c_{yx}} & J_{c_{yy}} & -J_{c_{yz}} \\ -J_{c_{zx}} & -J_{c_{zy}} & J_{c_{zz}} \end{bmatrix}$$

Resolución del sistema de ecuaciones

Las ecuaciones desarrolladas en este capítulo han servido para plantear un sistema lineal de ecuaciones, en el cual los valores asignados en los coeficientes dependen de la resolución previa de la cinemática inversa del mecanismo; es decir, los valores de posición, velocidad y aceleración de los centros de gravedad de los eslabones de las cadenas cinemáticas abiertas.

Los valores a calcular dadas las ecuaciones planteadas son los siguientes:

Fuerzas Activas T_i, F_i

Fuerzas Reactivas $\mathbf{F}_{1,2i}, \mathbf{F}_{2,3i}, \mathbf{F}_{3,4i}, \mathbf{F}_{4,5i}, \mathbf{F}_{5,6i},$
 $\mathbf{F}_{6,Pi}$

En el caso particular de la resolución estática, el cálculo de las fuerzas activas y reactivas involucra solamente el conocimiento previo de la resolución cinemática de la posición; mientras que en la resolución dinámica se requiere el cálculo previo de la velocidad y aceleración de los centros de gravedad de los cuerpos de la cadena cinemática.

De la información anterior se determina lo siguiente:

- Las llamadas *Fuerzas Reactivas* son vectores que representan fuerzas en tres ejes coordenados y momentos en estos mismos ejes; en total, seis dimensiones.
- Dependiendo de la articulación unida al cuerpo en estudio, una o más de las fuerzas o momentos de las *Fuerzas Reactivas* adquirirá un valor teórico de cero, pues se supone que no existe fricción entre las superficies de dos cuerpos en contacto.
- Para un movimiento lineal unidimensional entre dos cuerpos adyacentes no existirá una fuerza de reacción en alguno de los ejes coordenados; del mismo modo, para una rotación simple uno de los momentos adquirirá un valor nulo.

Para el caso particular del mecanismo analizado en este trabajo, sólo se consideran desplazamientos y rotaciones en una dimensión, por lo que el conteo total de variables y ecuaciones se realiza de la siguiente manera:

- El número de cuerpos en movimiento en una cadena cinemática abierta es de cinco elementos (desde el cuerpo $2i$ hasta el cuerpo $6i$).

- Existen tres cadenas abiertas para este mecanismo paralelo, por lo que el número de cuerpos móviles resultará de la multiplicación del número de cuerpos en una cadena cinemática abierta por el número de cadenas cinemáticas abiertas (el total es de 15 cuerpos).
- La plataforma móvil es otro cuerpo en movimiento, con lo que el número total de cuerpos en movimiento es de 16.
- Para cada cuerpo en movimiento se escriben seis ecuaciones, por lo que el número de ecuaciones total es de 96.

Por su parte, el número de variables desconocidas se contabiliza de la siguiente manera:

- Entre dos cuerpos adyacentes sólo ocurre un movimiento relativo en una dimensión, por lo que los vectores correspondientes a las fuerzas reactivas tendrán cinco componentes desconocidas y una componente nula.
- El número de vectores de fuerzas reactivas en una cadena cinemática abierta del mecanismo es 5; si se considera además el vector de restricciones del cuerpo $6i$ con la plataforma móvil, el número total de vectores en una cadena cinemática abierta es de 6.
- El número total de vectores de fuerzas de reacción resulta de la multiplicación del número de vectores de fuerzas de reacción en una cadena cinemática abierta por el número de cadenas cinemáticas abiertas, con lo cual se obtienen 18 vectores.
- Cada vector contiene cinco variables, por lo que el número total de variables en los vectores de las fuerzas de reacción es de 90.
- Por cada cadena cinemática abierta hay dos fuerzas activas correspondientes a los actuadores lineal y rotacional de la cadena cinemática. En total se tienen otras 6 variables contabilizando las de las 3 cadenas cinemáticas.
- Sumando el número de variables correspondientes a los vectores de fuerzas reactivas y a las fuerzas en los actuadores, se observa que el total es de 96, igual que el número de ecuaciones.

Como puede observarse, el método de Newton nos llevó al planteamiento de un sistema con el mismo número de ecuaciones que incógnitas. Más aún, el sistema es lineal, ya que se aprovecha el cálculo previo de la cinemática del mecanismo.

En el caso del análisis estático, el número de ecuaciones se mantiene sin alteración, y de hecho las ecuaciones son parecidas. En cuanto a las variables, el término extra de las fuerzas inerciales en la resolución dinámica, no incorpora nuevas variables, por lo cual este número también permanece inalterado. Esto nos lleva a seguir adelante con la investigación para justificar la evaluación estática en lugar de la dinámica.

Los resultados de la resolución de los sistemas de ecuaciones para el planteamiento estático y dinámico se muestran a continuación. Las características del movimiento estudiado son las siguientes:

- Movimiento en línea recta de aproximadamente 374 mm con cambio de orientación mínimo.
- Para el primer caso se considera un tiempo suficientemente largo de 10 s (movimiento cuasiestático).

- Para los demás casos se consideran movimientos más rápidos (la misma distancia y cambio de orientación, pero un tiempo menor).
- Se utiliza un perfil quíntico para los desplazamientos.
- Para detalles sobre la construcción de la trayectoria, consulte el Apéndice 3.

Los resultados arrojados en el cálculo de la fuerza del motor lineal se muestran en la Figura 34:

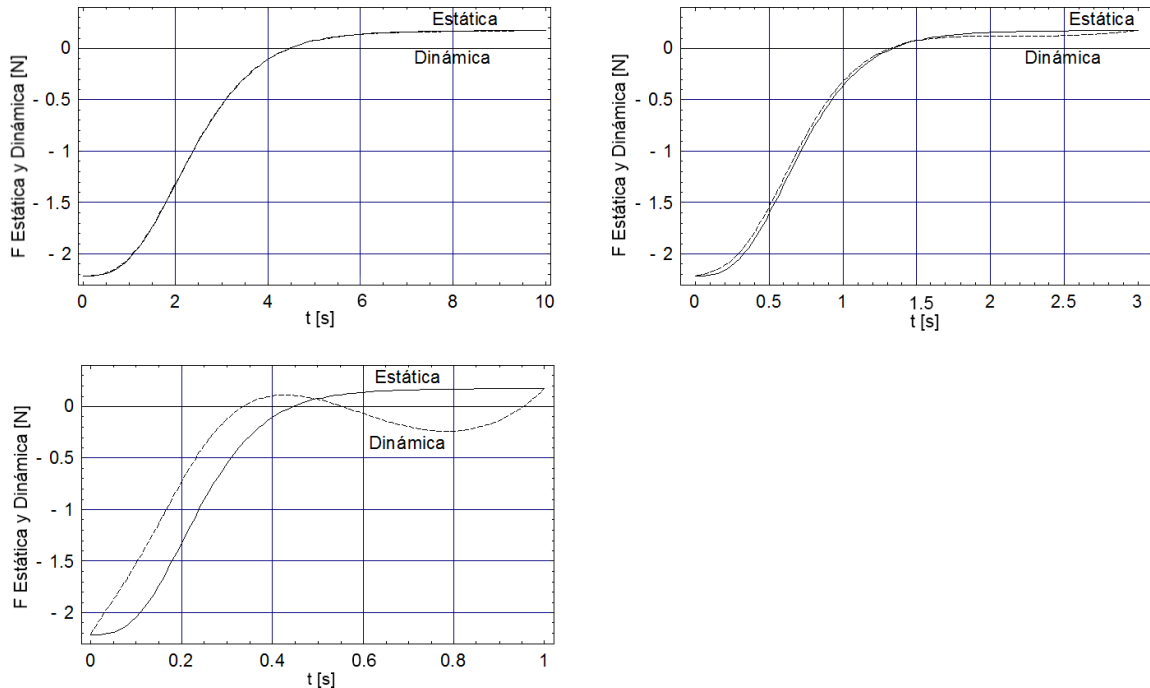


Figura 34 Fuerzas estática y dinámica en un motor lineal ante diferentes velocidades (observe el tiempo que toma el mismo movimiento para las diferentes representaciones en el eje horizontal)

Como puede observarse, el cálculo de la fuerza en el motor lineal bajo el análisis estático (en línea continua) no se ve alterado en su magnitud por un cambio en la velocidad en que se ejecuta el movimiento (ver el eje horizontal en las tres gráficas). Esto se debe a que en su cálculo no se incluye el término correspondiente a las fuerzas inerciales, y sólo se considera la posición de los cuerpos del mecanismo. Por otro lado, el comportamiento de las fuerzas bajo un enfoque dinámico (en línea discontinua) se ve distorsionado al aumentar la velocidad del movimiento. Esto se debe a que las fuerzas inerciales dependen de la primera y segunda derivadas de la posición; por ello, mientras mayor es la velocidad (y consecuentemente la aceleración) la diferencia entre ambas curvas crece.

Lo anterior justifica la aplicación del análisis estático para el movimiento a bajas velocidades; el tipo de aplicaciones que podrían utilizar este análisis va desde el maquinado de piezas hasta el posicionamiento y orientación de plataformas. Sin embargo, las aplicaciones de alta velocidad como las de tomar y colocar (*pick and place*) requerirán la utilización de un lazo de control en el cual se calculen las fuerzas mediante la solución dinámica.

Un enfoque diferente en el control de este tipo de sistemas consiste en la utilización de las curvas de la dinámica sólo como un paso intermedio en la elección de los servomotores. Como se sabe,

esta tecnología es capaz de manejar potencias muy altas con una gran precisión en el seguimiento de trayectorias, con lo cual el control se percibe redundante.

A continuación se muestran las curvas de las fuerzas y los torques de los actuadores obtenidos a partir del análisis estático y dinámico.

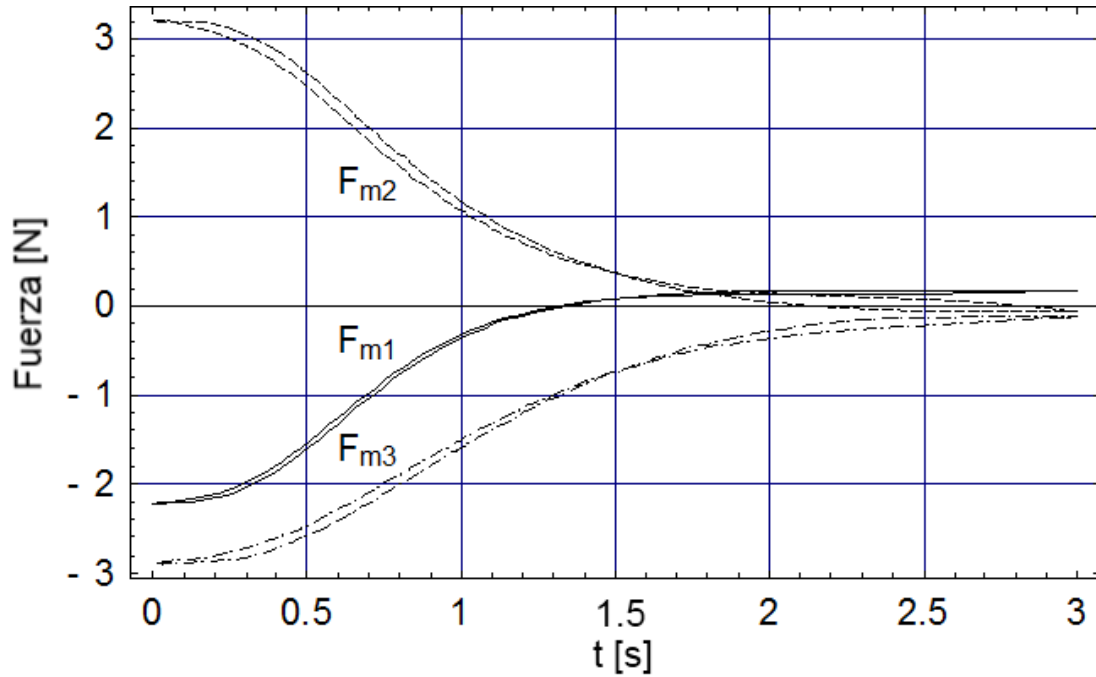


Figura 35 Fuerzas estáticas y dinámicas en los actuadores lineales

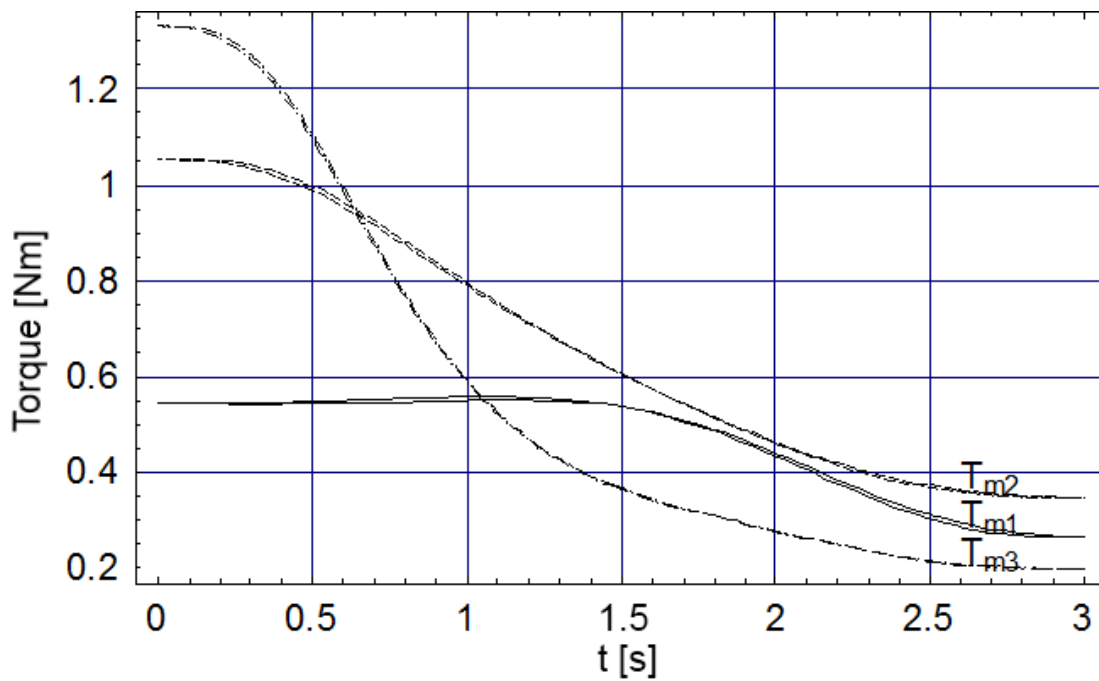


Figura 36 Torques estáticos y dinámicos en los actuadores angulares

En este punto se ha obtenido la solución dinámica del mecanismo en cuestión, lo cual se requiere como punto inicial para el dimensionamiento de actuadores, elementos de construcción de las barras cinemáticas y planteamiento de algunos esquemas de control. Con esta información se cumple con el último objetivo del trabajo de investigación.

Conclusiones

En este trabajo se propuso la utilización de un mecanismo paralelo parcialmente desacoplado con la finalidad de simplificar la descripción cinemática y dinámica para mejorar su desempeño en tiempo real. En la introducción se plantearon los siguientes objetivos:

1. Se mostrará geoméricamente el efecto de desacoplamiento en un mecanismo paralelo con más actuadores que cadenas cinemáticas independientes
2. Se obtendrá la solución numérica y la solución analítica de la posición del mecanismo bajo estudio
3. Se demostrará cómo puede aprovecharse la geometría de desacoplamiento para realizar el cálculo de la posición del mecanismo en tiempo real
4. Se generará un análisis cinemático vectorial completo para obtener la descripción completa de las posiciones de las juntas de eslabones, así como sus velocidades y aceleraciones lineales y angulares
5. Se propondrá la solución dinámica por el método de Newton para el mecanismo investigado

El primer objetivo fue alcanzado durante el planteamiento de la solución analítica de la posición, abordada en el Capítulo 3, donde se mostró que existe un vector, cuyo cálculo simplifica el análisis cinemático al dividirlo en dos partes: a) la obtención de la coordenada articular correspondiente a la traslación y b) la obtención de la coordenada articular de la rotación actuada.

El segundo objetivo se alcanzó al final del tercer capítulo, con la solución numérica y la solución analítica completas.

Para el tercer objetivo, se explicó el funcionamiento de un controlador contemporáneo, el procesamiento por capas y los elementos que las integran; luego se explicaron algunas características puntuales de los sistemas electrónicos reconfigurables (FPGA), así como de los sistemas operativos en tiempo real. Dada la solución analítica de la posición del sistema mecánico, se concluyó que el controlador podría calcular las ecuaciones de posición en una capa de bajo nivel, mientras que para la solución numérica precisaba la utilización de una capa de nivel medio, con lo que se podría dejar el control del mecanismo en las funciones de bajo nivel y utilizar las capacidades de procesamiento de nivel medio para otros cálculos, como el monitoreo del proceso, sistemas de visión, etc.

El cuarto y quinto objetivo se lograron en los capítulos 4 y 5, respectivamente.

Además de estos objetivos, al final del último capítulo se mostró que el análisis dinámico puede ser reemplazado en muchos casos por un análisis estático que elimina los términos de fuerzas inerciales generalizadas, lo cual simplifica las operaciones y puede ser útil en esquemas de control particulares que requieren de las fuerzas y torques en los actuadores.

Para el trabajo futuro se propone los siguientes puntos:

1. Generar la síntesis cinemática del mecanismo actual, de modo que las dimensiones de los eslabonamientos sean coincidentes con un espacio de trabajo particular
2. Estudiar la factibilidad de generar un mecanismo con base inercial en forma de círculo (en lugar del triángulo utilizado actualmente). Este arreglo podría ser capaz de generar espacios de trabajo mejor delimitados, mientras se mantiene la simplicidad de análisis que nos brinda el desacoplamiento de los actuadores lineales y angulares.

3. Realizar el análisis cinemático y dinámico del mecanismo tipo 3-PRRS planteado por (Jin, Chen, & Yang, 2009)
4. Realizar una optimización global para el movimiento simultáneo de todas las cadenas cinemáticas independientes en un mecanismo con base en dos eslabonamientos de tres barras, como fueron propuestos por (Koganezawa & Kinoshita, 2001); dicho mecanismo podría considerar optimaciones locales en el caso de que se diseñe para movimientos con amplio espacio de trabajo y bajas velocidades (dada la carga computacional que representa el cálculo de la posición y su optimación a través de métodos numéricos)
5. Explorar en el mecanismo paralelo desacoplado la utilización activa de las redundancias generadas al realizar movimientos que requieren menos de 6 GDL (por ejemplo, la utilización de 1 GDL adicional que se genera cuando se requieren sólo 5 GDL para la realización de una tarea particular)

Anexo 1

Tipos de Redundancias

Entre los diferentes tipos de redundancias que pueden utilizarse para los robots paralelos se encuentran las enunciadas por (Pierrot, Parallel Mechanisms and Redundancy, 2002):

Redundancia cinemática. Al menos uno de los mecanismos de cadena cinemática abierta (CCA) tiene un número mayor de grados de libertad (GDL) que el necesario. Este tipo de redundancias puede utilizarse para extender el área de trabajo.

Redundancia de actuadores. El efector final está sobre restringido por los actuadores. Esta redundancia es principalmente utilizada para evadir singularidades.

Redundancia de medición. El número de sensores es mayor que el número de pares cinemáticos actuados. Esta redundancia sirve para resolver el problema cinemático directo, para reducir errores de posicionamiento y para la calibración del robot.

Aunque estas redundancias no son diferentes de las enunciadas para los mecanismos de tipo serial (Nakamura, 1991), el trabajo de (Pierrot, Parallel Mechanisms and Redundancy, 2002) muestra de una forma muy simple la aplicación de las redundancias en el mecanismo paralelo de menor complejidad estructural; las redundancias antes enunciadas pueden verse en la Figura 37.

En los mecanismos de 9 GDL y de 12 GDL (Figura 39) se utilizan tres redundancias cinemáticas, ya que cada una de las cadenas cinemáticas independientes tiene más grados de libertad de los que necesita para el movimiento del mecanismo.

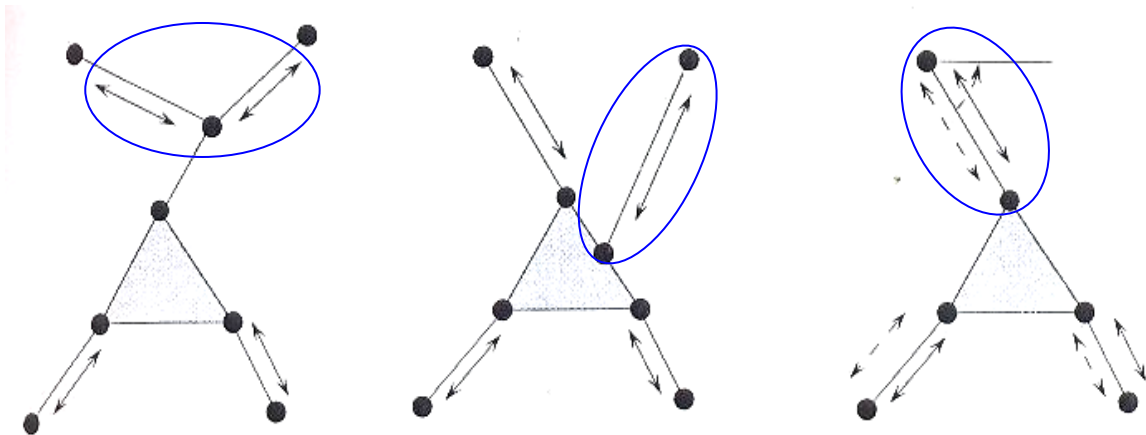


Figura 37 Tipos de redundancias para los manipuladores paralelos. A la izquierda se muestra la redundancia cinemática, donde hay más actuadores de los necesarios en una cadena abierta; al centro la redundancia de actuadores con el efector final sobre restringido; a la derecha la redundancia de sensores, con medición de longitud y ángulo, importante para definir la postura, reducir errores de posicionamiento y calibrar el robot

Anexo 2

Propuesta del doble eslabonamiento de tres barras

En el Capítulo 2 se planteó la utilización de mecanismos de cinco barras que se generaron a partir del eslabonamiento de dos mecanismos de tres barras, como se muestra en la Figura 38. En ese capítulo se establece que los mecanismos generados tienen 9 y 12 GDL para eslabonamientos de 3 y 6 cadenas cinemáticas independientes, respectivamente. La justificación de estas afirmaciones se logra mediante la fórmula de Grübler, como se detallará más adelante.

El eslabonamiento generado cuenta con tres actuadores, dos deslizadores pasivos, una junta rotacional pasiva y cinco barras. Los primeros dos actuadores están situados en la base del mecanismo, y uno más es paralelo al primer deslizador en 5 (ver la Figura 38); para calcular la movilidad de los mecanismos planos utilizamos la fórmula de Grübler, como se muestra en la misma figura. A partir de este análisis, se demuestra que el mecanismo es redundante por sí mismo (tiene 3 GDL para un mecanismo que sólo necesita adquirir una posición en el plano). Este efecto tendrá repercusiones al analizarlo en conjunto con las otras cadenas cinemáticas independientes de un mecanismo paralelo.

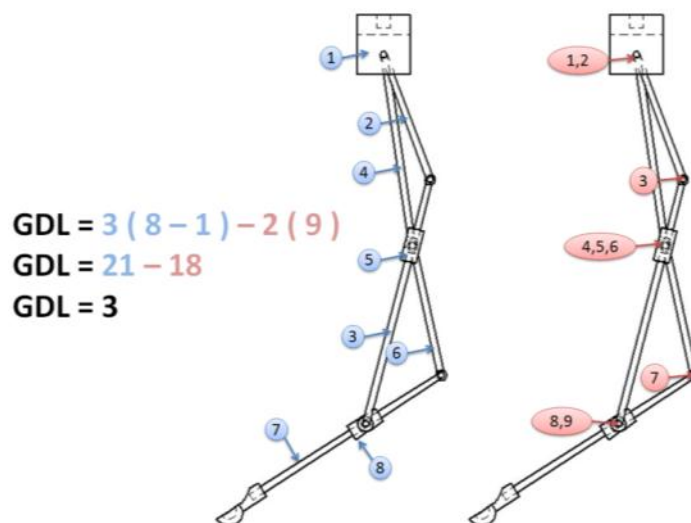


Figura 38 Análisis de movilidad de una cadena cinemática independiente. En azul se señalan los cuerpos considerados, mientras que en rojo se marcan los pares cinemáticos. Se consideran tres grados de libertad por cada cuerpo, debido a que el desplazamiento de cada eslabón está contenido en un mismo plano

Al juntar los mecanismos de cinco barras para diseñar un mecanismo espacial se dio lugar a dos topologías similares, como se muestra en la Figura 39; en el primer caso se trata de un mecanismo con tres cadenas independientes de cinco barras cada una, mientras que en el segundo se utilizan seis arreglos de este tipo; en ambos casos se incluye una junta rotacional en su base, de modo que puedan describir trayectorias espaciales con poca restricción.

En el modelo de tres cadenas se precisan tres actuadores por cada arreglo plano, mientras que el de seis requiere de dos actuadores en cada uno de estos arreglos, como se encontrará en el análisis de movilidad. La manera en que se forma el arreglo es agregando una junta rotacional en la base de cada uno de los arreglos planos, de modo que cada cadena cinemática independiente adquiera 4 GDL y pueda describir de manera individual un espacio de trabajo de dos esferas concéntricas. El mecanismo cierra su lazo mediante la unión de las cadenas independientes con la plataforma móvil mediante juntas esféricas.



Figura 39 Mecanismos propuesto con redundancias cinemáticas; a la izquierda se muestra el mecanismo redundante con tres cadenas cinemáticas independientes y 9 GDL; el mecanismo de la derecha tiene seis cadenas cinemáticas independientes y 12 GDL

Análisis de movilidad de los conjuntos

Como se había comentado, para cada brazo existen 4 GDL, de modo que al hacer un arreglo de n patas sobre una superficie tendríamos $4 \times n$ GDL; sin embargo, al unir las cadenas cinemáticas en una plataforma móvil se definen restricciones cinemáticas de la siguiente manera:

- Para la primera cadena no existen restricciones, de modo que tenemos los 4 GDL originales de la cadena (no se restringen)
- Para la segunda cadena la posición de su junta esférica se encuentra delimitada por una esfera alrededor de la junta de la primera cadena, de modo que se restringe 1GDL
- Para un tercer brazo, la posición que puede tener su junta esférica está delimitada por la intersección de dos esferas, de modo que se restringen 2 GDL
- Para las demás cadenas se restringe totalmente la posición, de modo que se tienen 3GDL menos para cada una.

De esta manera se puede determinar que será necesario utilizar tres actuadores por cada brazo cuando se utilizan tres brazos, y dos actuadores si se utilizan seis; el arreglo para seis brazos será de tres conjuntos de dos brazos tan juntos como sea posible, por ser un conjunto con grandes ventajas cinemáticas, similar al analizado por (Zhang, Duffy, & Crane, 2000).

Anexo 3

Generación de Trayectorias

El movimiento de un cuerpo en el espacio consiste de dos partes. Una trayectoria en el espacio que sigue un punto del cuerpo (el centro de gravedad o el órgano terminal de un manipulador) y la orientación angular del cuerpo. Ambas partes deben satisfacer condiciones de posición, velocidad y aceleración lineal y angular, respectivamente, y deben ser realizadas en un tiempo determinado. A continuación se desarrollan la trayectoria lineal y angular del cuerpo en función del tiempo con un perfil de velocidad quintico.

Trayectoria lineal

Se define la curva en el espacio como una recta para el movimiento a seguir por un punto del cuerpo.

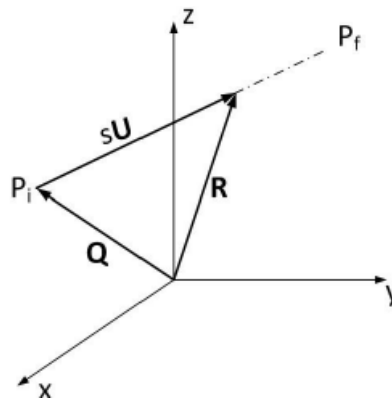


Figura 40 Trayectoria recta

La ecuación vectorial de posición se define a partir de la figura anterior:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{S}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} + s\mathbf{u}$$

Donde s es la magnitud del vector \mathbf{S} y \mathbf{u} es el vector unitario que define la orientación de \mathbf{S} .

Para definir \mathbf{R} en función del tiempo, se requiere que la magnitud s cambie con respecto al mismo, es decir:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q} + s(t)\mathbf{u} \quad (9.1)$$

A partir de la ecuación (9.1), las ecuaciones vectoriales de velocidad y aceleración se definen como la primera y segunda derivada respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t) &= \dot{s}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{A}(t) &= \ddot{s}(t)\mathbf{u}\end{aligned}\quad (9.2)$$

Donde \mathbf{Q} y \mathbf{u} no varían respecto al tiempo, ya que están definidos por puntos fijos en el espacio. La magnitud $s(t)$ debe satisfacer condiciones iniciales y finales de posición, velocidad y aceleración; es decir, debe satisfacer 6 condiciones, según se muestra en la siguiente figura:

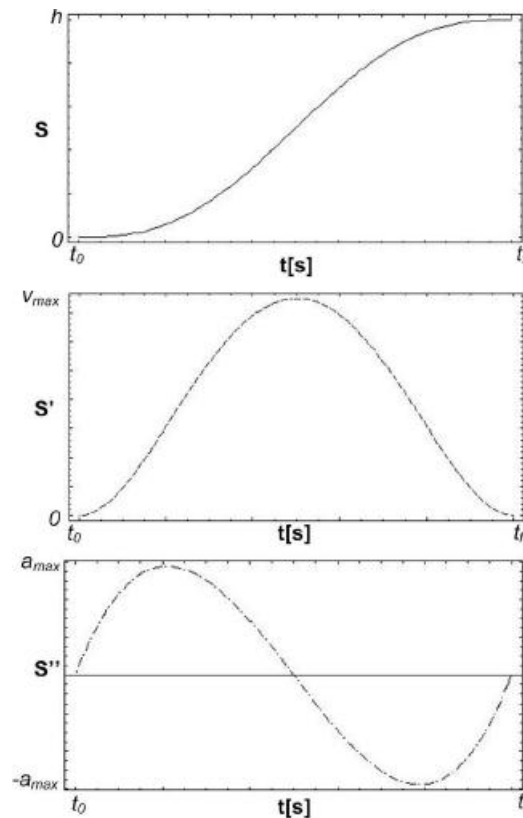


Figura 41 Gráficas del perfil quintico para posición, velocidad y aceleración

La primera gráfica indica el cambio de magnitud del vector \mathbf{S} , que irá variando de 0 para un tiempo inicial t_0 hasta h para un tiempo final t_f , t_0 y t_f son definidos de manera arbitraria, donde $h = \|\mathbf{S}\|$.

La segunda gráfica es la rapidez con que la magnitud del vector \mathbf{S} cambia respecto al tiempo. Es decir, es la rapidez con que realiza el traslado del punto p_i a p_f , para un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_f .

La tercera gráfica es el cambio de la rapidez (aceleración) con que la magnitud del vector \mathbf{S} cambia respecto al tiempo, para un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_f .

Para satisfacer las 6 condiciones se empleará un polinomio de quinto grado, ya que éste cuenta con 6 coeficientes a determinar. De esta manera se tiene:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \\ \dot{s}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \end{aligned} \quad (9.3)$$

Debido a que existen condiciones iniciales y finales de velocidad y aceleración, se obtienen las derivadas respecto al tiempo del polinomio $s(t)$. Para $t_0 = t = 0$ el valor de 0 es asignado arbitrariamente) se tienen las tres condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} s(t_0) &= s(0) = 0 \\ \dot{s}(t_0) &= \dot{s}(0) = 0 \\ \ddot{s}(t_0) &= \ddot{s}(0) = 0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Al sustituirlos en las ecuaciones (9.3) se obtienen:

$$\begin{aligned} s(0) = 0 &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 + a_4(0)^4 + a_5(0)^5 \\ \dot{s}(0) = 0 &= a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + 4a_4(0)^3 + 5a_5(0)^4 \\ \ddot{s}(0) = 0 &= 2a_2 + 6a_3(0) + 12a_4(0)^2 + 20a_5(0)^3 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= 2a_2 \end{aligned}$$

Finalmente los tres primeros coeficientes son:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

Repetiendo el proceso para $t = t_f$ se tienen las tres condiciones finales:

$$\begin{aligned} s(t_f) &= h = \|p_f - p_i\| \\ \dot{s}(t_f) &= 0 \\ \ddot{s}(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

Donde $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $p_f = (x_f, y_f, z_f)$ son las coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria, respectivamente; la magnitud de la diferencia entre ellos representa la distancia h que necesitamos recorrer en la línea recta. Al sustituir las ecuaciones (9.5) y (9.6) en (9.3) se obtiene:

$$\begin{aligned}\|p_f - p_i\| &= a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ 0 &= 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ 0 &= 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones resultante se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|p_f - p_i\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Al resolver el sistema de la ecuación (9.7) se obtienen los últimos tres coeficientes:

$$\begin{aligned}a_3 &= 10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} \\ a_4 &= -15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} \\ a_5 &= 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5}\end{aligned} \quad (9.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (9.5) y (9.8) en (9.3):

$$\begin{aligned}s(t) &= 10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t^3 + -15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^4 + 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^5 \\ \dot{s}(t) &= 30 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t^2 - 60 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^3 + 30 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 60 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t - 180 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^2 + 120 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^3\end{aligned}$$

Finalmente, factorizando se obtienen las ecuaciones que representan el cambio de la magnitud de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \|p_f - p_i\| \left[10 \frac{t^3}{t_f^3} + -15 \frac{t^4}{t_f^4} + 6 \frac{t^5}{t_f^5} \right] \\
 \dot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] \\
 \ddot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right]
 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Donde t es el tiempo transcurrido desde el inicio del movimiento y t_f es el tiempo total en que se realiza el movimiento. Reescribiendo las ecuaciones (9.1) y (9.2) en función de los puntos de la recta:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(t) &= \mathbf{Q} + s(t)\mathbf{u} = p_i + s(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} \\
 \mathbf{V}(t) &= \dot{s}(t)\mathbf{u} = \dot{s}(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} \\
 \mathbf{A}(t) &= \ddot{s}(t)\mathbf{u} = \ddot{s}(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|}
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

Sustituyendo el conjunto de ecuaciones (9.9) en el conjunto de ecuaciones (9.10) se obtienen finalmente las ecuaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración que debe seguir la plataforma móvil:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(t) &= p_i + \left[10 \frac{t^3}{t_f^3} + -15 \frac{t^4}{t_f^4} + 6 \frac{t^5}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \\
 \mathbf{V}(t) &= \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \\
 \mathbf{A}(t) &= \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (p_f - p_i)
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Orientación angular

Para la orientación se sigue un procedimiento similar, aclarando que para este caso, sólo se desea pasar de valores iniciales a finales para la posición, velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, ya que no se requiere cumplir con una trayectoria particular en el espacio. Esto conducirá a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}(t) &= \boldsymbol{\beta}_i + \left[10 \frac{t^3}{t_f^3} - 15 \frac{t^4}{t_f^4} + 6 \frac{t^5}{t_f^5} \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i) \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) &= \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i) \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}}(t) &= \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i)\end{aligned}\quad (9.12)$$

Donde el vector $\boldsymbol{\beta} = (\psi, \theta, \varphi)$. De la misma manera $\boldsymbol{\beta}_i = (\psi_i, \theta_i, \varphi_i)$ y $\boldsymbol{\beta}_f = (\psi_f, \theta_f, \varphi_f)$ se refieren a los valores iniciales y finales.

Curvas estudiadas en los ejemplos

En los ejemplos citados en el presente trabajo de investigación se utilizó una recta con inicio y fin dentro de un cilindro de 500 mm de diámetro con su eje colineal al eje z de la base inercial; el espacio de trabajo se situó entre 300 y 500 mm debajo de la base inercial, como se muestra en la Figura 42. Los ángulos en la plataforma móvil se restringieron a $\pm 30^\circ$.

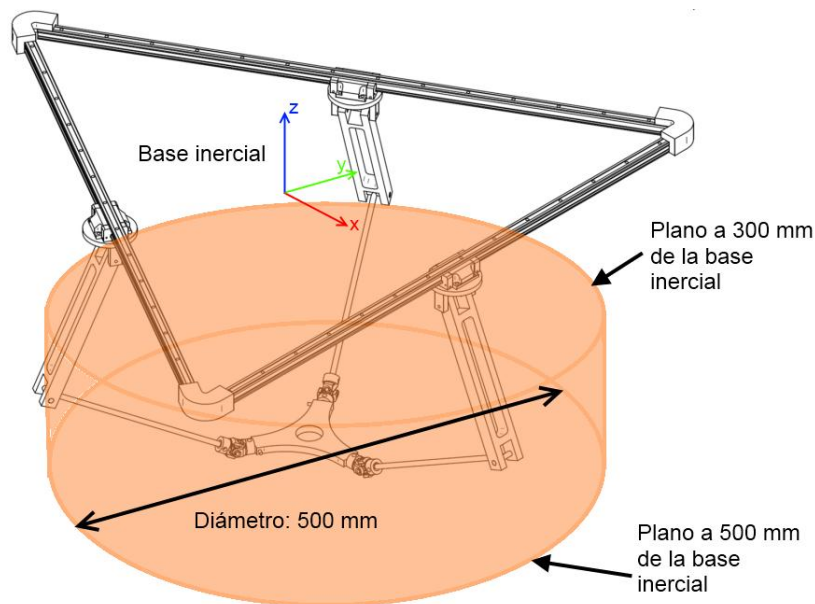


Figura 42 Espacio de trabajo considerado para un movimiento general

Referencias

- Ahmadi, M., Dehghani, M., Eghtesad, M., & Khayatian, A. R. (2008). Inverse Dynamics of Hexa Parallel Robot Using Lagrangian Dynamics Formulation. *INES 2008 • 12th International Conference on Intelligent Engineering Systems* (págs. 145-149). Miami, Florida: IEEE.
- Configura tu Volkswagen en línea.* (s.f.). Recuperado el 9 de Marzo de 2013, de Encuentra tu Volkswagen: <http://www.configurativw.mx/>
- Coxworth, B. (s.f.). *Lexus unveils 'world's most advanced' driving simulator.* Recuperado el 06 de 2011, de Gizmag: <http://www.gizmag.com/lexus-unveils-driving-simulator/16630/>
- D4-1300 pick & place robot.* (s.f.). Recuperado el Marzo de 2013, de Codian Robotics: http://codian-robotics.com/en/robotics/d4_robots/?r=42
- Fattah, A., & Hasan Ghasemi, A. M. (2002). Isotropic Design of Spatial Parallel Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*(21), 811-824.
- García Gálvez, G. D. (Febrero de 2008). Análisis Cinemático y Dinámico de un Robot Paralelo tipo Diamante. *Tesis de Licenciatura. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.*
- Goldman, G., & Hong, D. W. (23 de Octubre de 2012). *HyDRAS: Hyper-redundant Discrete Robotic Articulated Serpentine.* Recuperado el 2013, de RoMeLa Robotics & Mechanisms Laboratory: http://www.romela.org/main/HyDRAS:_Hyper-redundant_Discrete_Robotic_Articulated_Serpentine
- Gosselin, C., & Angeles, J. (Septiembre de 1991). A Global Performance Index for the Kinematic Optimization of Robot Manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 113, 220-226.
- Hay, A. M., & Snyman, J. A. (14 de Noviembre de 2004). Methodologies for the optimal design of parallel manipulators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, 131-152.
- Huang, T., Li, Z., Li, M., Chetwynd, D., & Gosselin, C. (2004). Conceptual Design and Dimensional Synthesis of a Novel 2-DOF Translational Parallel Robot for Pick-and-Place Operations. *ASME Journal of Mechanical Design*, 449-455.
- IRB 360.* (s.f.). Recuperado el Marzo de 2013, de ABB en México: <http://www.abb.com.mx/product/seitp327/cf1b0a0847a71711c12573f40037d5cf.aspx>
- Jin, Y., Chen, I.-M., & Yang, G. (2009). Kinematic design of a family of 6-DOF partially decoupled parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 912-922.
- Koganezawa, K., & Kinoshita, T. (8-12 de Julio de 2001). Hyper Redundant Manipulator Using Compound Three-Bar Linkages. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics Proceedings*, 8-13.

- Kohli, D., & Sandor, G. (1989). *Patente nº 4,806,068*. Estados Unidos.
- Li, Q., & Wu, F. X. (2004). Control performance improvement of a parallel robot via the design for control approach. *Mechatronics*, 947-964.
- Merlet, J.-P. (2006). *Parallel Robots (Solid Mechanics and its Applications)*. Springer.
- Nakamura, Y. (1991). *Advanced robotics : Redundancy and optimization*. Reading, massachusetts: Addison-Wesley.
- Pessina, L.-A. (28 de Enero de 2013). *Reymond Clavel, creator of the Delta Robot reflects on his career*. Recuperado el 28 de Febrero de 2013, de École polytechnique fédérale de Lausanne EPFL: <http://sti.epfl.ch/page-76362-en.html>
- Pierrot, F. (2002). Parallel Mechanisms and Redundancy. *1st International Coloquium, Collaborative Research Centre 562*, (págs. 261-277). Braunschweig.
- Pierrot, F., Benoit, M., Dauchez, P., & Galmiche, J. M. (1990). High speed control of a parallel robot. '*Towards a New Frontier of Applications*', *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems '90*, (págs. 949-954, vol.2).
- Pierrot, F., Dauchez, P., & Fournier A. (1991). HEXA: a fast six-DOF fully-parallel robot. '*Robots in Unstructured Environments*', *91 ICAR., Fifth International Conference on Advanced Robotics*, (págs. 1158 - 1163 vol.2).
- Reyes Pinner, F. E. (2012). *Control dinámico de un manipulador redundante de 7 GDL en el espacio cartesiano usando cuaterniones*. México, D.F.: Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Rocha Cózatl, E., García, G. D., Vargas, U., & Vázquez, J. (2007). Análisis cinemático de un robot paralelo tipo diamante. *Memorias del XII Congreso Anual de la SOMIM*. Durango.
- Simmons, R., & Singh, S. (s.f.). *Distributed robot architectures (DIRA)*. Recuperado el 2012, de The Field Robotics Center at Carnegie Mellon University's Robotics Institute: <http://www.frc.ri.cmu.edu/projects/dira/index.html>
- Thomas, F. (2013). *Laboratory of Parallel Robots*. Recuperado el 2013, de Institut de Robòtica i Informàtica Industrial: <http://www.iri.upc.edu/people/thomas/ID-Robots.htm>
- Vargas, U., Cuenca, F., García, G. D., & González, V. J. (2008). Diseño y síntesis cinemática de un nuevo robot paralelo redundante. *Memorias del 14 Congreso internacional anual de la SOMIM* (págs. 297-306). Puebla: SOMIM.
- Warwick, S. (2007). *Diamond Robotics*. Recuperado el 2013, de Warwick School of Engineering: <http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/eng/meng/robotics/therobot/>
- Yoshikawa, T. (1985). Manipulability of robotic mechanisms. *Journal of Robotic Research*.
- Zhang, Y., Duffy, J., & Crane, C. D. (Septiembre de 2000). The Optimal Quality Index for a Spatial Redundant 8-8 In-Parallel Manipulator. *Proceedings of the ASME Mechanisms Conference*.