



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA FORMACIÓN DE VÓRTICES ANULARES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
FRANCISCO JAVIER VÁZQUEZ RODRÍGUEZ

TUTOR PRINCIPAL  
Dr. MARTÍN SALINAS VÁZQUEZ  
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D. F. ENERO 2014

## Índice

Agradecimientos: .....	4
Nomenclatura.....	5
Prólogo .....	6
Objetivo .....	7
Introducción.....	8
Capítulo I.....	10
Antecedentes.....	10
1.1 Origen de los Vórtices de Anillo.....	10
1.2 Formación de los Vórtices de Anillo.....	12
1.3 Velocidad de un Vórtice Anular .....	15
1.4 Vorticidad .....	17
1.5 Circulación del Vórtice Anular .....	18
1.6 Clasificación de los Vórtices Anulares.....	19
1.7 Chorros Homogéneos Didden.....	20
1.8 Chorros Homogéneos Gharib .....	21
1.9 Chorros no Homogéneos .....	21
Capítulo II.....	23
Ecuaciones de Transporte.....	23
2.1 Simulaciones Numéricas .....	25
2.2 Modelo de Turbulencia (LES) .....	25
2.3 Esquema Numérico .....	29
2.4 Validación.....	30
2.5 Condiciones de Frontera.....	32
2.6 Condiciones Iniciales .....	34
Capítulo III .....	35
Resultados .....	35
3.1 $Re=3295$ .....	38
3.1.1 Radio.....	38
3.1.2 Velocidad de Convección .....	39
3.1.3 Velocidad Máxima .....	40
3.1.4 Circulación .....	41

3.2 Re=2800.....	44
3.2.1 Radio.....	44
3.2.2 Velocidad de Convección .....	45
3.2.3 Velocidad Máxima .....	46
3.2.4 Circulación .....	47
3.3 Re=1200.....	50
3.3.1 Radio.....	50
3.3.2 Velocidad de Convección .....	51
3.3.3 Velocidad Máxima .....	51
3.3.4 Circulación.....	52
Capítulo IV.....	53
Formación de Vórtice e Impacto .....	53
4.1 Formación de Vórtice.....	54
4.1.1 Re=3295, L/D=1.....	54
4.1.2 Re=3295, L/D=2.....	55
4.1.3 Re=3295, L/D=3.....	56
4.1.4 Re=2800, L/D=1.....	57
4.1.5 Re=2800, L/D=3.....	58
4.1.6 Re=1200, L/D=3.....	59
4.2 Impacto .....	60
4.2.1 Re=3295, L/D=1.....	61
4.2.2 Re=3295, L/D=2.....	62
4.2.3 Re=3295, L/D=3.....	63
4.2.4 Re=2800, L/D=1.....	64
4.2.5 Re=2800, L/D=3.....	65
4.2.6 Re=1200, L/D=3.....	66
Capítulo V .....	67
Conclusiones.....	67
5.1 Recomendaciones.....	69
5.2 Estudios a Futuro.....	69
5.3 Referencias.....	72
Apéndice A.....	74
Estudios Similares.....	74

## Agradecimientos:

A Dios, porque gracias a él, alcancé el logro de terminar mis estudios de maestría en ingeniería.

A mis padres y hermanos, por su entrega y dedicación en hacer de Javier Vázquez una persona responsable y dedicada.

A mi familia, pues gracias a ellos y sus impulsos, han logrado que un servidor haya terminado con sus estudios de posgrado.

A mi tutor Martín Salinas Vázquez, que siempre estuvo ahí para orientarme, aconsejarme y recomendarme como avanzar en el trabajo aquí presentado.

A mis amigos, que desde el comienzo me apoyaron, me motivaron y me ayudaron a terminar satisfactoriamente este trabajo.

A mis maestros de posgrado, los cuales por medio de su disposición y su valioso tiempo, motivaron a un servidor para finalizar el presente trabajo.

Al Instituto de Ingeniería, que nuevamente me abrió sus puertas y así tener este trabajo terminado.

*“PORQUE EL SEÑOR, SU DIOS, LOS PONE A PRUEBA PARA VER SI  
USTEDES LO AMAN REALMENTE CON TODO SU CORAZÓN Y CON TODA  
SU ALMA.”  
Dt. 13,46*

## Nomenclatura

$2a$	Tamaño característico del vórtice
$\alpha$	Constantes de la matriz tridiagonal
$\alpha_f$	Coefficientes del filtro
$A$	Vector potencial para líneas de corriente
$c_p$	Conductividad Térmica
CFD	Computational Fluids Dynamics
$D$	Diámetro de salida de fluido
$\phi$	Variable de Flujo
$F$	Vector de flujos
$\Gamma$	Circulación del vórtice anular
$H$	Integral de Bernoulli
$k$	Difusividad térmica
$L$	Longitud de desplazamiento
$\nabla$	Laplaciano
$\mu$	Viscosidad dinámica
$n$	Vector normal a una superficie
$\rho$	Densidad del fluido
$p$	Presión
$P$	Impulso en un vórtice
$Pr$	Número de Prandtl
$\pi$	Pi
rot	Operación rotacional
$R$	Radio del vórtice
$Re$	Número de Reynolds
$s$	Norma de vector característico en un punto móvil
$t$	Tiempo
$T$	Temperatura
$U$	Velocidad de desplazamiento del vórtice
$\omega$	Vorticidad del fluido

## Prólogo

En el presente escrito se reporta lo realizado en 2 años, tiempo en el cual se trabajó sobre vórtices anulares desde el punto de vista de simulaciones numéricas. La intención principal es comprender la formación de un vórtice anular, así como las características más importantes.

Como segundo trabajo realizado en el campo de simulaciones numéricas, he observado la necesidad de implementar las ciencias computacionales en la solución de problemas, y más en la mecánica de fluidos; por supuesto, sin menospreciar los avances en las ciencias de la computación (tiempo de cálculo, memoria, velocidad) y en las matemáticas (solución de las ecuaciones diferenciales, métodos numéricos), que estos avances han significado.

Debido a que las investigaciones sobre vórtices anulares continúan, es necesario tener ya las bases establecidas para no sobre escribir lo que ya se ha realizado; es por ello que este trabajo presenta los primeros resultados sobre vórtices anulares simulados en LES. La finalidad de este trabajo: tomar los estudios numéricos obtenidos y compararlo con los estudios experimentales obtenidos en laboratorio.

En el Capítulo I se hace una investigación bibliográfica sobre los vórtices anulares, definiciones básicas y la mención de algunos estudios que se han realizado, tanto experimentales como numéricos. No se pueden explicar todos porque son interminables, pero sí algunos representativos que implementan la solución de problemas en ingeniería por medio de simulaciones numéricas.

En el capítulo II se hace el estudio de las ecuaciones de gobierno que modelan la formación de los vórtices anulares y se presenta el método de solución empleado para el problema. Además se hace una breve explicación del método de turbulencia LES empleado. En este apartado se especifica el desarrollo matemático de las ecuaciones que modelan la morfología de los vórtices anulares.

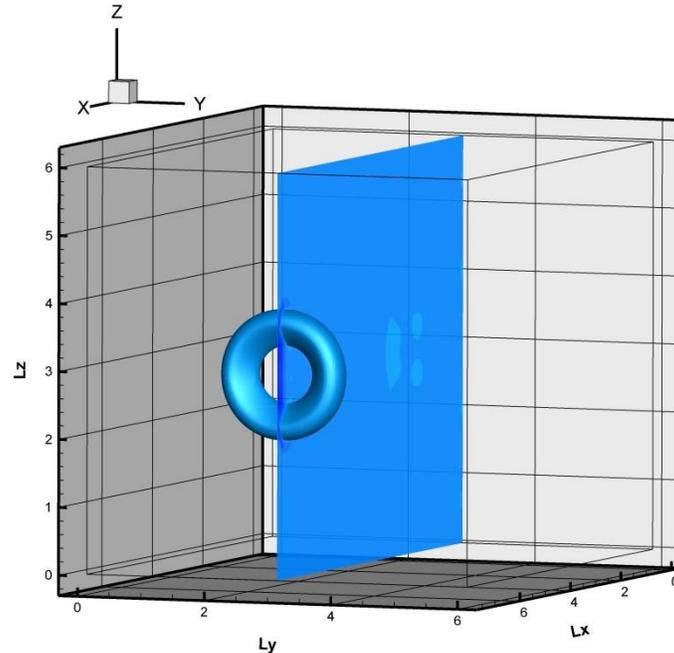
En el capítulo III se reportan los resultados obtenidos de 6 simulaciones numéricas realizadas, analizando en cada una de ellas: el comportamiento del radio del vórtice anular, la velocidad de convección, la velocidad máxima y la circulación.

En el capítulo IV se analiza la formación del vórtice anular para estudiar el tamaño característico del anillo ( $2a$ ) y el impacto contra la pared vertical. Los seis casos son estudiados.

En el capítulo V se describen las conclusiones, recomendaciones y trabajos a futuro que de tener la oportunidad serán tomadas en consideración para nuevos resultados.

*Vázquez Javier*

# Objetivo



Vórtice anular a instantes del impacto.<sup>1</sup>

La simulación numérica de vórtices anulares o vórtices de anillo es presentada en este trabajo. Se ha considerado fluido cuasi-incompresible. La inyección del fluido se realiza en el plano  $x=0$  ( $Lx=0$ ). El tiempo adimensional de cálculo empleado en las 6 simulaciones es  $t^*=50$ . Se analizan los resultados para:

- Comprobar la importancia del número de Reynolds y de la relación  $L/D$  en la formación, trayectoria e impacto del vórtice contra la pared vertical mostrada en la figura superior ( $Lx=7.5$ ).
- Demostrar la simetría del vórtice utilizando el plano  $Ly=3$  que lo divide en dos partes: superior e inferior.
- Estudiar la variación del radio, velocidad de convección, velocidad máxima, circulación, grosor (formación) e impacto a partir de diferentes  $Re$  y relaciones  $L/D$  considerados en cada uno de los seis casos simulados.

Los resultados obtenidos son la base del estudio numérico de vórtices anulares utilizando simulaciones de grandes escalas (LES).

<sup>1</sup>  $Re=1200$ ,  $L/D_0=3$ ,  $Q=0.25$ ,  $t^*=29$

## Introducción

Los vórtices anulares o vórtices de anillo son un fenómeno que se presenta en los fluidos cuando la capa límite se desprende de la superficie lisa y sólida en el borde de un conducto circular y se enrolla sobre sí misma en espiral por efecto de la vorticidad. La capa límite se forma debido a los esfuerzos viscosos existentes cuando un fluido se desplaza por una superficie plana, la cual puede observarse en la siguiente figura:

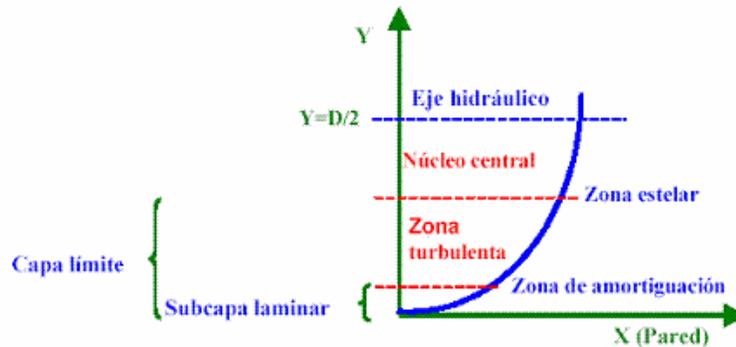


Fig. a.1 Capa límite sobre una superficie lisa<sup>2</sup>

Los vórtices de anillo se han convertido en importantes tópicos de investigación para la mecánica de fluidos debido a sus aplicaciones, entre ellas:

- La transferencia de calor.
- El movimiento de la sangre a través de los canales sanguíneos.
- El movimiento de fluidos dentro de tuberías.
- En el interior de cavidades térmicas con fines de análisis térmicos y dinámicos.
- En mezcladores.
- Explosiones nucleares.
- Otras aplicaciones en donde se requiere alta recirculación turbulenta.

Aunque haya diversas configuraciones de vórtices de anillo dependiendo de las aplicaciones mencionadas con anterioridad, es importante mencionar que todas tienen una característica propia: la morfología. En otras palabras, siempre se obtendrá una forma circular de fluido en movimiento axisimétrico (simetría respecto a un eje) y en donde el vector de vorticidad (el rotacional del vector velocidad) está dirigido hacia los círculos

<sup>2</sup> [http://ocwus.us.es/ingenieria-agroforestal/hidraulica-y-riegos/temario/Tema%202.Conducciones%20forzadas/tutorial\\_08.htm](http://ocwus.us.es/ingenieria-agroforestal/hidraulica-y-riegos/temario/Tema%202.Conducciones%20forzadas/tutorial_08.htm), acceso en Febrero, 2013

concéntricos con el eje de giro del toroide formado; por ello, el vector vorticidad es perpendicular al eje de simetría del toroide.

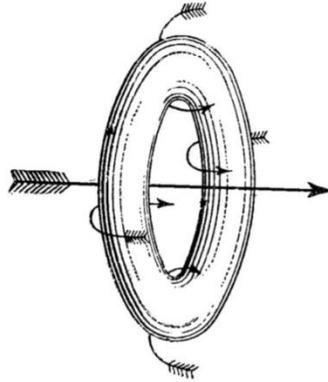


Fig. a.2 Movimiento axisimétrico de un vórtice de anillo<sup>3</sup>

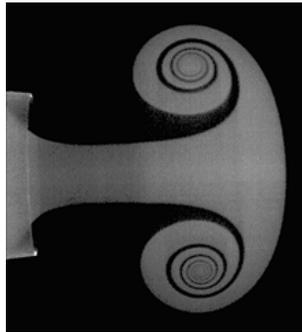


Fig. a.3 Vórtice anular visto de perfil<sup>4</sup>

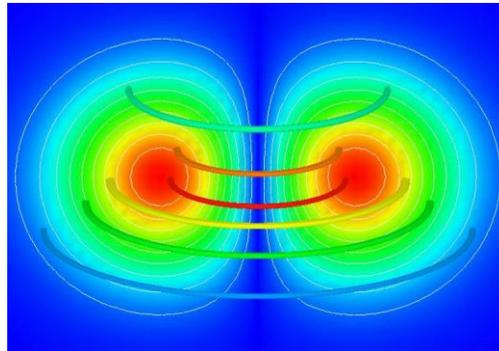


Fig. a.4 Visualización de morfología de un vórtice anular<sup>5</sup>

En las páginas siguientes, las láminas obtenidas a partir de los resultados ayudan a comprender mejor el comportamiento de los vórtices anulares con base a las variables descritas con anterioridad.

<sup>3</sup> <http://mpec.sc.mahidol.ac.th/radok/physmath/physics/f3.htm>, acceso Febrero, 2013

<sup>4</sup> <http://lyle.smu.edu/~pkrueger/vrestraintment.htm>, acceso Febrero, 2013

<sup>5</sup> <http://www.applied-scientific.com/MAIN/PROJECTS/SANDIA/VRM/VRM.html>, acceso Febrero, 2013

# Capítulo I

## Antecedentes



Dispositivo experimental para generar vórtices anulares<sup>6</sup>

### 1.1 Origen de los Vórtices de Anillo

El estudio de estos vórtices data del siglo XIX, cuando el físico alemán Hermann Von Helmholtz escribió un tratado basado en vórtices anulares [1]. En este tratado, Helmholtz explica la dinámica de un fenómeno que hasta ese momento era desconocido. Posteriormente la formación, aplicación, geometría y configuraciones de los vórtices de anillo se vuelven tópico de investigación.

No se sabe con certeza el motivo o lo que observó Helmholtz para comenzar con sus estudios en vórtices anulares, pero desde que realizó el escrito antes mencionado, muchos se dieron a tarea de estudiar más a fondo este fenómeno. Incluso se ha pensado que el motivo fue explicar la forma del humo del cigarrillo que sale de la boca de un fumador.

Conforme se incrementan los interesados en los vórtices de anillo, se comienza la búsqueda de explicaciones: ¿por qué? y ¿cómo se forman? Después de un tiempo, se encuentran las

<sup>6</sup> <http://www.uproxx.com/gammasquad/2010/06/bbc-creates-vortex-cannon-best-use-of-british-tax-dollars-ever/> , acceso Febrero, 2013

primeras respuestas. A partir de este punto, se fundamentan los antecedentes de los estudios experimentales y, posteriormente, de los antecedentes numéricos para resolver problemas que involucran vórtices anulares. En la actualidad podemos encontrar dispositivos mecánicos y eléctricos que producen vórtices anulares y que se usan para fines didácticos y hasta para concursos científicos (Fig. 1.1). La importancia de crear estos vórtices radica en que por medio de experimentos, es posible descubrir nuevas hipótesis sobre los vórtices de anillo, y es semillero de las nuevas tendencias científicas sobre esta formación curiosa de los fluidos.



Fig. 1.1 Concurso de ciencia en EE.UU.<sup>7</sup>

Debido a que los estudios experimentales involucran instrumentación y tiempo en montaje, se ha considerado analizar los vórtices anulares desde el punto de vista de la mecánica de fluidos computacional (CFD, Computational Fluid Dynamic's) (Fig. 1.2).

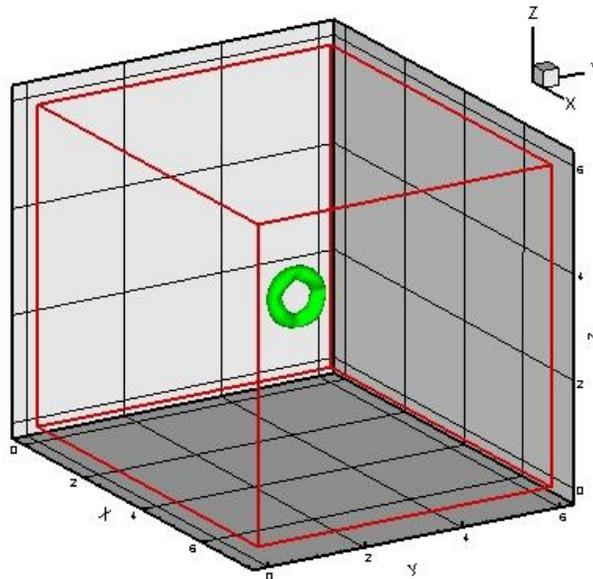


Fig. 1.2 CFD de un vórtice anular

<sup>7</sup> <http://www.flickr.com/photos/stevespangler/5753564784/>, acceso Febrero, 2013

## 1.2 Formación de los Vórtices de Anillo

Un vórtice anular (Fig. 1.3) en mecánica de fluidos está referido a un vórtice que tiene la forma de anillo con velocidad y dimensiones definidas.

Los vórtices de anillo se distinguen entre ellos dependiendo del tipo de chorro que los produce. El parámetro que sirve como referencia en la formación de un vórtice anular es la relación  $(L/D)$ , que debe estar entre 3.6 y 4.5 [4]. Sin embargo, existen números de formación que van desde valores muy bajos hasta valores altos. En este trabajo se analizan relaciones de formación  $(L/D)$  de 1, 2 y 3. En la formación de vórtices anulares, los parámetros son explicados para comprender mejor el cómo se forman y que variables están involucradas.

En los estudios experimentales se han trabajado varias configuraciones de relaciones  $L/D$ , y se ha descubierto que tener una relación tan pequeña como 0.5 o 0.3, el fluido es expulsado a gran velocidad, provocando que el radio se incremente hasta un 200%. Por otro lado, con una relación  $L/D$  mayor a 13, aparecen vórtices secundarios que interactúan con el vórtice principal, generando inestabilidad. La morfología de un vórtice anular se resume en:

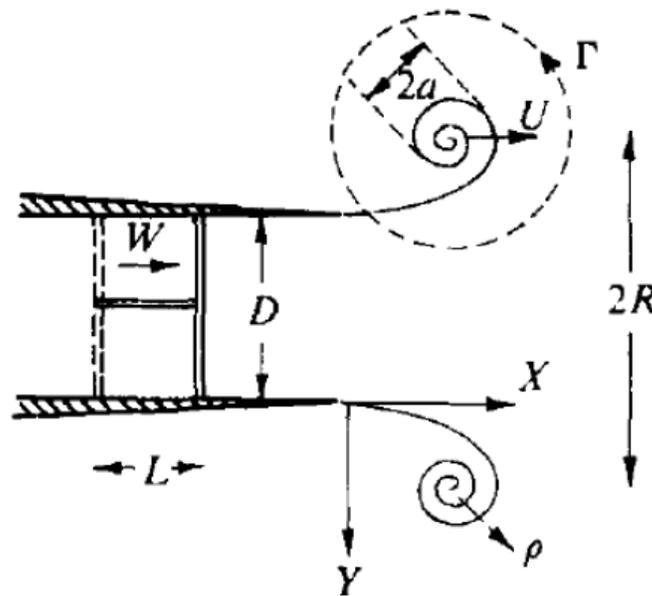


Fig. 1.3 Detalle de un vórtice de anillo<sup>8</sup>

Definiendo las variables mostradas:

- $D$ , diámetro del cilindro por donde sale el fluido inyectado.
- $L$ , longitud de inyección del fluido dentro del cilindro.
- $U$ , velocidad axial de desplazamiento.
- $R$ , radio del vórtice.

<sup>8</sup> *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 84 (Parte 4), página 631

- $2a$ , tamaño característico del espiral (núcleo del vórtice).
- $\Gamma$ , la circulación del vórtice, que en la mayoría de las veces se desplaza en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- $\rho$ , densidad del fluido.

En el esquema mostrado se tiene el pistón y la fuerza con la cual se produce la inyección del fluido dentro del sistema con otro fluido para generar el vórtice anular (vórtices experimentales). El esquema descrito es el utilizado en los laboratorios especializados. En el caso ahora estudiado, se emplean fronteras numéricas que ayudan a simular el pistón y su movimiento, sin olvidar que esta configuración está asociada a un chorro homogéneo (misma densidad en los fluidos involucrados).

Una de las variables que se han mencionado en el listado anterior se relaciona directamente con la relación  $L/D$ . El diámetro de salida del fluido  $D$  (Fig. 1.4) determina el radio inicial de vórtice y la clase de chorro que se está analizando. Normalmente los vórtices anulares se forman en secciones circulares, es por ello que es necesario definir el radio a la salida, que en el problema es de  $0.5$  o  $0.5D$ .

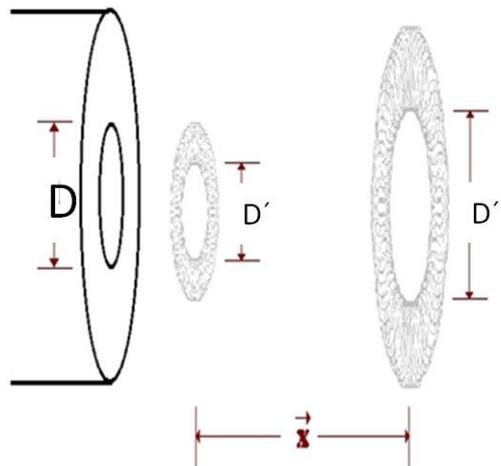


Fig. 1.4 Diámetro de salida<sup>9</sup>

En los estudios experimentales, las relaciones  $L/D$  tienen diferentes dimensiones dependiendo de la clase de chorro ( $L/D=0.5$  a  $L/D=13$ ); por tanto, en este intervalo de valores se han considerado relaciones  $L/D$  no críticas, es decir, valores de 1, 2 y 3. De tomarse valores pequeños, el tiempo de cálculo se modifica y se traduce en que se requiere más tiempo para el impacto del vórtice. De tomarse valores altos, la existencia de vórtices secundarios es posible.

El valor de la velocidad ( $U$ ) se determina con la salida del fluido expulsado por la boquilla de manera experimental. En cálculos numéricos, la velocidad de salida es determinada mediante una variable específica. Durante la inyección del fluido, la velocidad de

<sup>9</sup> [http://woodrow.org/teachers/esi/1999/princeton/projects/fluid\\_dynamics/vortex.html](http://woodrow.org/teachers/esi/1999/princeton/projects/fluid_dynamics/vortex.html), acceso Febrero, 2013

convección del vórtice es calculada mediante la pendiente existente entre el tiempo que tarda en hacer impacto contra la pared y con respecto a la distancia recorrida.

El radio del vórtice se obtiene en el instante en que comienza la formación del anillo. Se mide desde el centro del vórtice de circulación del anillo hasta el centro del anillo, en donde se considera que la velocidad de convección es máxima. En chorros no homogéneos, el radio del anillo se determina con el anillo más próximo a la salida (Fig. 1.5).

El tamaño característico del vórtice es el diámetro del toroide formado por el fluido, el cual depende del tipo de chorro y del número de Reynolds. Por ejemplo, en un chorro homogéneo, el diámetro se mantiene prácticamente constante, una propiedad a estudiar en este trabajo. En un chorro no homogéneo, esta condición no se cumple por las propiedades físicas del fluido: diferentes densidades.

En este punto, es considerada la existencia de una disminución del radio del anillo o un incremento debido a la velocidad de convección, la velocidad máxima y la circulación; pero estas conclusiones serán discutidas en los resultados obtenidos.

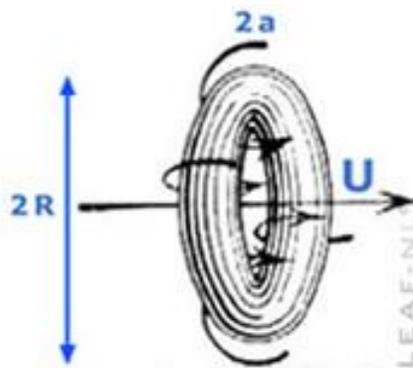


Fig. 1.5  $U, R, 2a$ <sup>10</sup>

Otro parámetro a considerarse en esta clase de estudios es el número de Reynolds ( $Re$ ), pues dependiendo de su magnitud, se obtienen diferentes morfologías de vórtices. Se ha propuesto que el número de Reynolds es el que determina la forma del anillo en el vórtice anular. Si el número de Reynolds es alto, el anillo tiene un tamaño característico menor, pero si el número de Reynolds es bajo, se obtiene un anillo de tamaño mayor. El número de Reynolds se define como:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

Donde  $\rho$  es la densidad,  $U$  es la velocidad con la cual el fluido sale al ser inyectado,  $D$  es el diámetro de salida del fluido y  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido en movimiento.

<sup>10</sup> <http://www.leafnl.uchile.cl/rings.html>, acceso Febrero 2013

El número de Reynolds es indispensable para fluidos en movimiento, y en el problema propuesto, el vórtice anular se desplaza; por tanto, el número de Reynolds es fundamental. Más adelante este número adimensional es analizado hasta observar las consecuencias que tiene al ser modificado, partiendo de los objetivos de este trabajo.

### 1.3 Velocidad de un Vórtice Anular

Esta variable depende directamente de la velocidad con la que sale el fluido de la boquilla; en el código numérico depende de la condición inicial. La velocidad con la que se desplaza un vórtice anular es debida al impulso del pistón. Si el pistón acelera, es de esperar que la velocidad sea alta, comparada con una inyección lenta. En el código numérico se controla esta variable por medio de la relación ( $L/D$ ).

La velocidad de convección sufre cambios considerables conforme se desplaza el anillo de fluido: radios, circulaciones o vorticidades; esos cambios serán objeto de investigación en los capítulos siguientes. La velocidad máxima que un vórtice adquiere es determinada también por la relación  $L/D$ , desde su formación, hasta el instante exacto de desprendimiento a la salida.

La teoría de las ecuaciones de Euler que representan la conservación de masa y el cambio de momentum bajo la acción de una fuerza están dadas de la siguiente manera:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F},$$

Donde  $t$  es el tiempo,  $u$  es el vector velocidad,  $\rho$  es la densidad,  $p$  es la presión,  $F$  es el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de masa y  $\nabla$  es el operador nabla. De las ecuaciones anteriores, la segunda se refiere a la ecuación de impulso, la cual se puede re-ordenar por medio de una ecuación identidad  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla(u^2/2) + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u}$  para tener la forma:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F}$$

Cuya expresión es conocida como la ecuación de movimiento de Lamb. En esta expresión,  $\omega$  es el vector de vorticidad, que se comentará más al respecto en el siguiente subtema.

El movimiento de un vórtice de anillo en fluido incompresible –densidad constante–, provoca que las ecuaciones anteriores tomen la forma siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla H,$$

Donde la expresión en la segunda ecuación H se define como:

$$H = \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U$$

Es la integral de Bernoulli que se desplaza a lo largo de la línea de corriente del fluido en movimiento. Esas líneas de corriente que se mueven de forma tangencial y paralela a la velocidad se definen como:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

Donde las componentes de la velocidad están definidas por  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Las componentes de las líneas de vorticidad quedan definidas de forma similar, quedando de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

Donde las componentes del vector vorticidad están definidas como  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . La ecuación que explica la evolución de la vorticidad es obtenida al aplicar el operador nabla en la ecuación en donde se define la integral de Bernoulli. Al realizar este proceso matemático, se obtiene la primera expresión de la vorticidad obtenida por Helmholtz [1]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{or} \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

En la cual no se tiene la influencia de la presión.

Esta nueva expresión solamente es producto de aplicar la operación derivada. Sin embargo, la interpretación física explica que el vórtice anular se mueve junto con el fluido con misma intensidad, es decir, que el movimiento del vórtice tiene interacción directa con el fluido que lo rodea.

Es complicado imaginar un vórtice anular que no interactúe con el entorno, pues es la definición, esa interacción es la causante de la forma del toroide de fluido. Además de esto, la definición de chorro sería incompleta.

## 1.4 Vorticidad

La ecuación de la vorticidad, en su forma más general, se refiere a la magnitud de rotación que un fluido experimenta en su movimiento. Normalmente esta cantidad está dada por la expresión matemática de la derivada material, es decir:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{\omega}$$

Donde

$$\omega = \text{rot}u = \nabla \times u$$

Estas ecuaciones establecen que la rapidez de cambio de la vorticidad de un elemento de fluido depende del gradiente de velocidad y de su difusión por efectos viscosos. El primer término de la derivada material se refiere al cambio temporal de la vorticidad, el segundo término es la variación de la vorticidad con respecto al tiempo y el tercero es el término convectivo. De los 3 términos, el término convectivo es el estudiado en este trabajo porque es el que describe el desplazamiento del vórtice a lo largo del dominio de cálculo.

El vector de la vorticidad en 3 dimensiones queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} & \omega_x \frac{\partial u}{\partial y} & \omega_x \frac{\partial u}{\partial z} \\ \omega_y \frac{\partial v}{\partial x} & \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} & \omega_y \frac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_z \frac{\partial w}{\partial x} & \omega_z \frac{\partial w}{\partial y} & \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Este tensor de 9 componentes es obtenido después de desarrollar el término convectivo de la expresión general de la vorticidad. El tensor de vorticidad general tiene algunas interpretaciones físicas, como son:

- los 3 elementos de la diagonal principal son los que describen la variación de la velocidad del vórtice en las direcciones preferenciales, es decir, si el vórtice se estira o se encoge en el movimiento. En algunos casos puede presentarse que el vórtice se deforme por la acción de estas 3 componentes. Una condición para que esto suceda más fácilmente es cuando se tienen fluidos compresibles.
- Los 6 términos convectivos restantes son los que definen la inclinación de la vorticidad en el vórtice anular. Conforme se modifican estas magnitudes, se producen vórtices “alargados” y otras morfologías.

## 1.5 Circulación del Vórtice Anular

La circulación contenida en una curva cerrada dentro del fluido se define como la integral alrededor de la curva, de la componente de la velocidad tangente a la curva. Si el término  $ds$  representa un elemento de un contorno  $C$  y  $U$  la velocidad en ese punto, la circulación queda definida como:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{s}$$

Debido a la convención de signos, se ha determinado que esta integral se hace en sentido contrario a las manecillas del reloj, porque el tamaño característico (2a) tiene ese comportamiento después de la expulsión de fluido. Si a esta expresión se le aplica el teorema de Stokes, entonces adquiere la forma:

$$\Gamma = \int_A (\nabla \times \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dA$$

Donde  $A$  es la superficie de la cual  $C$  es la frontera,  $n$  es el vector unitario normal al elemento  $dA$  de la superficie (Fig. 1.7):

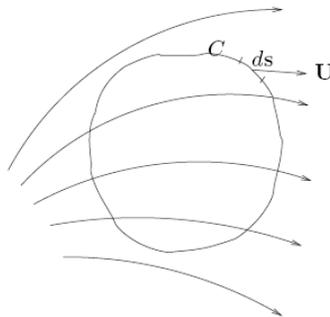


Fig. 1.7 Circulación alrededor de una curva

Con esta nueva configuración, se tiene la expresión más conocida para realizar el cálculo de la circulación, quedando como:

$$\Gamma = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA$$

En caso que  $\boldsymbol{\omega}$  sea igual a cero, el flujo se llama irrotacional. De ser así, la circulación para cualquier entorno arbitrario es también igual a cero.

Se calcula la integral de vorticidad en un dominio de integración definido por un rectángulo que contiene en su totalidad al vórtice anular. En otras palabras, se calcula con el flujo de vorticidad  $\omega$  a través de una superficie cualquiera rodeada por el contorno. En el caso en estudio, se deben obtener los perfiles de vorticidad en el anillo para hacer una integración en todos los instantes de tiempo y así obtener el total de esa vorticidad. A la circulación también se le conoce como intensidad del vórtice anular.

Otro parámetro importante es el impulso del vórtice, definido por la integral vectorial del producto del radio del vórtice por la vorticidad  $\omega$  sobre el volumen incluyendo todos los vórtices generados:

$$P = \frac{1}{2}\rho \int_V r \times \omega dV$$

El impulso en un vórtice anular también está relacionado con la vorticidad y con la densidad, pues el fluido que sale por la inyección resultado del movimiento del pistón o de la apertura, interactúa con el otro fluido al cual es inyectado.

El chorro de fluido homogéneo estudiado en este trabajo proporciona simplicidad en los análisis cinéticos, además determina las condiciones en las cuales se genera el vórtice y la velocidad de propagación del mismo. En algunos casos pueden existir otros fenómenos involucrados como la velocidad, circulación, radios, entre otros.

## 1.6 Clasificación de los Vórtices Anulares

Los vórtices anulares o de anillo son divididos en 2 clases:

- **los vórtices anulares de frontera** son vórtices anulares que se forman por la interacción de la gravedad como única fuerza de acción. Por ejemplo, aceite inyectado desde la parte inferior en un estanque con agua. El vórtice generado flota hacia la superficie sin la acción de otra fuerza más que la gravedad.
- **los vórtices de impulso** cuando se forman al ser impulsado el fluido mediante un momentum definido.

En el caso en estudio se ha considerado el segundo tipo (impulso), porque se considera que el fluido lleva una velocidad a la salida, lo que significa que es impulsado. Este impulso es la base del chorro de fluido, pues representa la cantidad de fluido que se desplaza hacia el exterior con velocidad definida. En los vórtices de anillo existen 3 configuraciones principales que dependen del origen (tipo de chorro) de los vórtices. Se dividen en:

- Didden
- Gharib
- No homogéneos

Los primeros 2 son referidos a los chorros homogéneos, cuando la densidad de los fluidos es la misma, no así en el tercer tipo.

### 1.7 Chorros Homogéneos Didden

Norbert Didden [3], comenzó a estudiar los vórtices anulares inyectando fluido a partir de una tobera circular, en la cual la aceleración de un pistón impulsando el fluido hace posible que se creó un vórtice saliendo de la superficie circular. El fluido que sale de la boquilla comienza a enrollarse de tal manera que se forma un anillo. Este anillo se propaga axialmente a la boquilla y se desplaza conducido por su velocidad inducida. La circulación es adquirida mientras el fluido es impulsado por el pistón.

Didden observó que los vórtices tenían cierto comportamiento con base a la velocidad de salida, la circulación, el radio y la propagación del mismo. Relacionando lo anterior, y teniendo en cuenta que la relación  $L/D$  es pequeña, entonces se considera que el chorro inducido fuera de la tobera con esta configuración recibe el nombre de chorros Didden.

Didden estudió que el perfil de la velocidad axial presenta un valor máximo cerca de la pared en los primeros instantes del movimiento del pistón en un estudio experimental (formación de la circulación). Conforme va avanzando el fluido, el perfil sigue aumentando hasta que comienza a disminuir y se va alejando de la pared conforme aumenta la capa límite en la boquilla del cilindro de salida. La velocidad radial en este punto llega a ser cero.

Conforme el tiempo se incrementa, el flujo saliente se comporta de forma casi uniforme, así como una distribución de temperaturas (un tópico que ha tomado importancia en los últimos años) diferente en el exterior del vórtice. Pasando este punto, ahora lo que procede es analizar la formación de la vorticidad explicada anteriormente, la cual tiene 2 regiones, una positiva y una negativa. La primera se genera entre la pared y el punto de velocidad máxima. La segunda se forma en la capa límite externa.

Didden emplea la ecuación de la vorticidad que relaciona las 2 variaciones de velocidad con respecto a las direcciones preferenciales de movimiento del vórtice. Haciendo esta observación, la vorticidad generada por las capas límite se desplaza aguas abajo por convección debido a la velocidad axial positiva (en dirección del fluido expulsado). Concluye Didden que la generadora de vorticidad, y de circulación es la capa límite al interior del cilindro instantes antes de que el pistón experimental termine de hacer su recorrido.

Si revisamos la configuración inicial en donde se observa el cilindro, el pistón y el fluido, se puede apreciar que por tener la forma cilíndrica, no existe tal cual una circulación o vorticidad positiva o negativa, sino más bien esta aseveración es porque el análisis se realizará considerando el plano perpendicular a la salida del fluido, por tal motivo, en esta vista, solamente se pueden observar tanto la zona superior del vórtice, como la zona inferior.

A partir de los resultados de Didden, se comienza a experimentar con nuevas configuraciones, de las cuales destaca las que se menciona a continuación.

## 1.8 Chorros Homogéneos Gharib

Gharib, Rambod y Shariff [6] estudiaron los vórtices anulares bajo una configuración distinta, en donde la distancia  $L/D$  por donde es expulsado el fluido es inversa a la configuración Didden, pues en esta nueva propuesta, se pueden obtener relaciones de  $L/D$  de hasta 14.5. Lo primero que debe notarse es que la diferencia entre ambos es la relación de  $L/D$ , que se relaciona directamente con valores diferentes de  $L$  y diferentes de  $D$ . Por qué no lo hizo Didden en su momento, es una pregunta que fue resuelta por Gharib, Rambod y Shariff; porque ellos realizaron una investigación en donde se establecieron nuevas dimensiones de la boquilla y de la inyección del fluido.

En esta configuración (Gharib), el movimiento del pistón inyecta vorticidad al vórtice, si no se detuviera el pistón, esa inyección provocaría que la circulación creciera de manera indefinida. Pero una singularidad que tiene esta configuración de vórtices anulares es que si se aumenta el número de formación y la velocidad del pistón se mantiene constante, se producen 2 fenómenos curiosos:

- $L/D$  bajos: la vorticidad se concentra completamente en el vórtice, y
- $L/D$  altos: la vorticidad se reparte entre el vórtice y un chorro secundario denominado (trailing jet). Un chorro activo grueso en donde se generan vórtices más pequeños que son denominados chorros secundarios, que para algunos autores son inestabilidades de los vórtices anulares. El vórtice principal mantiene su circulación constante.

En estos estudios, se relacionan el número de formación con el tiempo de formación, el cual es un tiempo adimensional que explica el momento en el cual el vórtice deja de recibir vorticidad del mismo fluido.

El tiempo adimensional que se menciona puede ser expresado como el cociente del desplazamiento del pistón y el diámetro de salida del fluido. Esta expresión cambia la perspectiva de  $L/D$ , porque ya no es una relación de dimensiones, sino ahora es una medida de tiempo que se refiere al tiempo de descarga del fluido.

Esta última aseveración se resume en que ahora basta encontrar un tiempo adimensional en el cual la circulación deja de crecer en el vórtice anular. Por tanto, la circulación máxima descargada en un vórtice es tomada desde que comienza el movimiento del pistón dentro de la boquilla hasta el momento en que el fluido sale por la misma.

## 1.9 Chorros no Homogéneos

Esta clase de chorros son definidos a partir de la diferencia de la densidad del fluido inyectado y el fluido que lo recibe. En algunos fenómenos, las densidades de los fluidos no son exactamente iguales, por tal motivo, para generar los vórtices es necesario relaciones de  $L/D$  diferentes. Este no es el principal problema. Para que exista un cambio en las

densidades de los fluidos, es necesario que haya la presencia de una variable que lo permita. La variable que es causante en la mayoría de los casos en este fenómeno es la temperatura. Otra variable que contribuye a la presencia de cambios de densidad es la diferencia de fracción másica de una especie determinada, que se presenta en las mezclas de entre gases o entre líquidos. En algunas ocasiones, esta diferencia de temperaturas o de fracciones másicas se denomina como una fuerza impulsora. Esto último porque origina un flujo de calor o de masa sin necesidad de convección forzada.

En esta configuración, la gravedad juega un papel sumamente importante, pues esta fuerza externa provoca que haya un fenómeno de flotabilidad, en la cual uno de los 2 fluidos (el más ligero) tendería a ascender precisamente por la presencia de dicha fuerza. Si este es el caso, entonces sería necesario hacer que el experimento se haga en posición vertical, para que el eje de simetría se mantenga. En este tema se ha investigado bastante porque en muchas aplicaciones se requiere que haya diferencia de densidades en los fluidos que están involucrados. Por tal motivo, es necesario realizar estudios en ese campo, tanto experimentales como numéricos.

Como se ha comentado, en este escrito no se ha hecho referencia a los chorros no homogéneos porque primero deben ser validados el código numérico y los resultados presentados con base a los resultados obtenidos en estudios similares. Esta comparación demostrará que el código actual puede ser empleado en estudios con configuraciones diversas a las presentadas, así como para ser empleado, de manera discreta, en chorros no homogéneos y así continuar con el análisis en otro campo de los vórtices anulares. En el capítulo V se comentan algunas recomendaciones para quienes quieran entrar al campo de los vórtices anulares con chorros no homogéneos.

# Capítulo II

## Ecuaciones de Transporte

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = S_i \quad Re = \frac{U_0 D}{\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w)$$

$$F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} - 2\mu S_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} - 2\mu S_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{i3} - 2\mu S_{i3} \end{pmatrix} \quad c = \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-2\nu)}}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot u) \delta_{ij} \right) \quad \Gamma = \int \omega_z dy dz$$

Algunas de las ecuaciones que se resuelven para los vórtices anulares

En este capítulo se revisan las ecuaciones de la mecánica de los fluidos, las cuales se basan en las ecuaciones de transporte, que son cinco. Tres de ellas son las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones vectoriales), una de conservación de masa (ecuación escalar) y otra de conservación de energía (escalar también).

El desarrollo de las ecuaciones mencionadas se basa en la teoría de los fluidos incompresibles (newtonianos) con densidad constante.

La forma cartesiana (x, y, z) de las ecuaciones de Navier-Stokes está dada por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = S_i$$

Esta ecuación representa la evolución de la densidad, momento y energía total para un gas ideal.

Donde  $U$  es un vector de cuatro componentes definido por:

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w)$$

Las 2 ecuaciones anteriores representan la evolución de la densidad (ecuación de la continuidad) y del momentum. El vector velocidad  $u = (u_1, u_2, u_3)$  también puede ser escrito como  $u = (u, v, w)$ .

$F_i$  son los flujos que representan un fluido newtoniano, el cual se define como:

$$F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} - 2\mu S_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} - 2\mu S_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{i3} - 2\mu S_{i3} \end{pmatrix}$$

Donde  $\delta_{ij}$  es el símbolo de la delta de Kronecker y  $S_{ij}$  es la componente desviática del tensor de deformación, el cual es expresado como sigue:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot u) \delta_{ij} \right)$$

En lugar de utilizar la ecuación de continuidad artificial, la presión es reemplazada en la ecuación de Navier-Stokes de acuerdo con la ecuación descrita a continuación para un estado artificial de fluido incompresible. Quedando como:

$$p = \rho c^2$$

La variable  $c$  es la velocidad del sonido, definida de la siguiente forma:

$$c = \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-2\nu)}}$$

Donde  $E$  es el módulo de Young y  $\nu$  es el módulo de Poisson.  $p$  es la presión y la densidad  $\rho$ . Para este análisis se considera  $Pr = 0.7$ .

Adicional a estas ecuaciones, es necesario considerar el siguiente apartado, que es la estructura numérica para la solución del problema.

## 2.1 Simulaciones Numéricas

Para comenzar, es importante saber que la simulación numérica no es simple, pues están involucrados varios aspectos, como son el tipo de esquema numérico y el modelo de turbulencia que determinará las constantes importantes, además será determinante en los resultados cuando sean explicados.

¿Qué importancia tiene el modelo de turbulencia? Determina como se van a discretizar y resolver las ecuaciones de transporte. Entre los modelos más conocidos se encuentran el modelo DNS (Direct Numerical Simulation), un método que por su tiempo de cálculo y los altos requerimientos computacionales, es utilizado en laboratorios avanzados de investigación en mecánica de fluidos.

Otro modelo utilizado es el promediado de las ecuaciones de Navier-Stokes (Reynolds Averaged Navier-Stokes simulation, RANS), modelo que promedia las ondas turbulentas a un valor medio mediante el análisis de los tensores de Reynolds, presentes en un fluido en movimiento.

El tercer modelo es la Simulación de las Grandes Escalas (Large Eddy Simulation, LES), en donde los vórtices de menor magnitud son acumulados en una variable que recibe el nombre de viscosidad turbulenta. La viscosidad total es la suma de la viscosidad turbulenta y la viscosidad molecular (la propia del fluido). Este es el método que se va a utilizar para las simulaciones a realizar.

El cuarto modelo es el denominado DES (Detached Eddy Simulation), considerado como la unión entre RANS y LES. Los análisis que se hacen bajo este modelo son variados, y ciertamente aplicables para este fenómeno, sin embargo, el análisis de grandes escalas es más directo, pues no se tiene el análisis de los tensores de Reynolds, y hace más rápido los cálculos.

## 2.2 Modelo de Turbulencia (LES)

El modelo LES (Large-eddy simulation) consiste en hacer pruebas para simular únicamente las grandes escalas del flujo; las pequeñas son filtradas hacia afuera, pero de forma estadística influye en el movimiento la escala grande, es decir, las escalas de menor proporción son concentradas en una variable denominada viscosidad turbulenta.

LES proporciona una solución del campo fluido tridimensional y no estacionaria, resolviendo físicamente la turbulencia a excepción de las pequeñas escalas que son modelizadas. LES resuelve directamente las escalas espaciales como lo hace el modelo DNS, sin embargo, modela las pequeñas escalas  $\kappa$ - $\epsilon$  al mismo tiempo, en pocas palabras, hace un cálculo híbrido entre las grandes escalas y las pequeñas. De ahí que se ha convertido en el modelo que más se aproxima a fenómenos reales. Los modelos existentes hasta la fecha utilizan un cierre de las ecuaciones de tipo RANS estableciendo un promedio de Reynolds sobre todas las escalas turbulentas, de manera que sólo proporcionan

información sobre los valores medios de las magnitudes fluidas. En simulaciones numéricas es de suma importancia tener los resultados más próximos a las condiciones reales, es decir, que no se haga un filtrado con el promedio solamente, sino que haya también estudio sobre las pequeñas escalas, por eso es que LES ofrece mejores bondades que RANS, por ejemplo. La desventaja que tiene es que estudiar las pequeñas escalas y filtrarlas, también requiere de un equipo de cálculo avanzado, o de mayor tiempo del mismo.

Desde 1963 que fue propuesto por Joseph Smagorinsky, LES se ha convertido en un excelente recurso matemático para ser empleado en combustión, acústica y simulaciones de aire atmosférico. El hecho de reducir las escalas de la solución permite que las tecnologías actuales puedan resolver el fenómeno sin la necesidad de emplear otros recursos. Existen en LES modelos isocóricos de turbulencia aparte del Smagorinsky, tales como el modelo Smagorinsky dinámico, el dinámico homogéneo de Smagorinsky, el modelo de 2 ecuaciones lagrangianas de la viscosidad, modelo de escalas similares, entre otros. Estos modelos, como su nombre lo dice, son modelos para condiciones a las cuales se considera que la presión es constante y que no hay variación definida.

El filtrado empleado en el estudio de LES es el más importante debido a que en él se fundamenta el modelo de turbulencia. Las ecuaciones LES son encontradas por la aplicación de un filtro espacial de bajo transcurso de tamaño en las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto elimina las escalas más pequeñas que el filtro de tamaño llamado escala sub-malla. Dentro del estudio de la sub-malla está implícito el modelo de Boussinesq, el cual postula que la transferencia de momentum causado por las escalas turbulentas puede ser modelada con una viscosidad turbulenta. Esta es una analogía de cómo la transferencia de momentum causada por el movimiento molecular en un gas puede ser descrito como una viscosidad molecular.

Los filtros existentes en el modelo de turbulencia LES, por mencionar algunos, son: filtros de Laplace, filtros simples y filtros anisotrópicos. Cada uno de ellos es establecido por medio de las constantes que definen tanto los órdenes en el espacio como en el tiempo. Otra de las características que tiene el modelo LES son los Deltas, las cuales son las diferencias finitas en el dominio de control, entre las cuales se pueden establecer: deltas de Prandtl, delta de la raíz cúbica del volumen de la celda, deltas de máxima x, y, y z para estructuras hexagonales solamente y delta suavizada. Cada una de ellas está definida conforme la estructura de la celda, que directamente está definida por la estructura de la malla. Normalmente en el modelo de turbulencia LES el mallado es regular, con una forma geométrica bien definida. La escala sub-malla en LES depende del modelo a utilizarse, por ejemplo, hay escalas sub-malla con modelos Smagorinsky, modelos algebraicos dinámicos, modelos de coeficiente global dinámico, modelo dinámico localizado, modelo de la escala viscosa adaptada a la pared y los modelos estructurales. Estos modelos realizan la función de hacer un filtrado que ayude a separar las grandes escalas de las pequeñas escalas. De forma matemática, esta operación corresponde a la integral de convolución de alguna cantidad del flujo por la función filtro, en la forma:

$$\bar{f}(x, t) = \int f(y, t) G_{\Delta}(x - y) dy$$

La parte submalla es la desviación del flujo actual con respecto al campo filtrado

$$f = \bar{f} + f'$$

La aplicación del filtro a las ecuaciones compresibles de Navier-Stokes produce

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_3} = 0$$

Es común que en LES y en modelos de turbulencia estadística se introduce el promedio de Favre, el cual se define como:

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

Entonces se tiene que:

$$U = (\bar{\rho}, \overline{\rho u}, \overline{\rho v}, \overline{\rho w})$$

Los flujos resueltos son:

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \overline{\rho u_i} \\ \overline{\rho u_i u_1} + \overline{p \delta_{i1}} - \overline{2\mu S_{i1}} \\ \overline{\rho u_i u_2} + \overline{p \delta_{i2}} - \overline{2\mu S_{i2}} \\ \overline{\rho u_i u_3} + \overline{p \delta_{i3}} - \overline{2\mu S_{i3}} \end{pmatrix}$$

También puede introducirse el llamado tensor esfuerzo-submalla con componentes:

$$\zeta_{ij} = -\overline{\rho u_i u_j} + \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j$$

Se puede dividir en isotrópica y desviador, por lo que la ecuación toma la siguiente forma

$$\zeta_{i,j} = \underbrace{\zeta_{i,j}}_{\tau_{i,j}} - \frac{1}{3} \zeta_{ll} \delta_{i,j} + \frac{1}{3} \zeta_{ll} \delta_{i,j}$$

Las ecuaciones de Fi pueden ser expresadas como:

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \overline{\rho \tilde{u}_i} \\ \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_1} + (\bar{p} - \frac{1}{3} \zeta_{11}) \delta_{i1} - \tau_{i,1} - \overline{2\mu S_{i1}} \\ \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_2} + (\bar{p} - \frac{1}{3} \zeta_{12}) \delta_{i2} - \tau_{i,2} - \overline{2\mu S_{i2}} \\ \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_3} + (\bar{p} - \frac{1}{3} \zeta_{13}) \delta_{i3} - \tau_{i,3} - \overline{2\mu S_{i3}} \end{pmatrix}$$

Esto se resume en la ecuación de flujos:

$$\overline{F}_i = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \tilde{u}_i \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_1 + \overline{\omega} \delta_{i1} - \tau_{i,1} - \frac{2\mu S_{i1}}{2} \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_2 + \overline{\omega} \delta_{i2} - \tau_{i,2} - \frac{2\mu S_{i2}}{2} \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_3 + \overline{\omega} \delta_{i3} - \tau_{i,3} - \frac{2\mu S_{i3}}{2} \end{pmatrix}$$

Los términos restantes no calculables son los de viscosidad molecular y la difusiva. Llegando a que:

$$\overline{F}_i = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \tilde{u}_i \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_1 + \overline{\omega} \delta_{i1} - 2(\overline{\mu} + \overline{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i1} \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_2 + \overline{\omega} \delta_{i2} - 2(\overline{\mu} + \overline{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i2} \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_3 + \overline{\omega} \delta_{i3} - 2(\overline{\mu} + \overline{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i3} \end{pmatrix}$$

Es necesario tener en cuenta que para la simulación numérica, se debe conocer el Jacobiano de la transformación, el cual define los cambios de espacios vectoriales a los cuales se lleva el experimento. Con el jacobiano expresado como dice Métais & Lesieur (1996), llegamos a la ecuación inicial de la forma:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_3} = \hat{S}$$

Con

$$\hat{U} = \frac{U}{J}$$

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} F \right) + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} G \right) + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} H \right) \right] \\ \hat{G} &= \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} F \right) + \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} G \right) + \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} H \right) \right] \\ \hat{H} &= \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} F \right) + \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} G \right) + \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} H \right) \right] \end{aligned}$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J} S$$

## 2.3 Esquema Numérico

Las ecuaciones siguientes resuelven el sistema de coordenadas generalizadas mediante la extensión del esquema explícito de McCormack de segundo orden en el tiempo y cuarto orden en el espacio. Esta técnica fue desarrollada por Gottlieb y Turkel [8].

El esquema numérico es un esquema denominado corrector-predictor definido en una dimensión por la siguiente expresión:

Corrector:

$$U_j^{(1)} = U_j^{(n)} + \frac{1}{6}\lambda \left( -f_{j+2}^{(n)} + 8f_{j+1}^{(n)} - 7f_j^{(n)} \right) + (\delta t)S_j^{(n)}$$

Y

Predictor:

$$U_j^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left( U_j^{(n)} + \left( U_j^{(1)} \right) \right) + \frac{1}{12}\lambda \left( 7f_{j-2}^{(1)} - 8f_{j-1}^{(1)} + f_j^{(n)} \right) + \frac{1}{2}(\delta t)S_j^{(1)}$$

La formulación final en 3 dimensiones es la siguiente:

Corrector:

$$U_{i,j,k}^1 = U_{i,j,k}^n - J_{i,j,k}^P \left[ \begin{array}{l} \frac{\Delta t}{\Delta \xi_1} \left[ \frac{7}{6} \left( \hat{F}_{i+1,j,k}^n - \hat{F}_{i,j,k}^n \right) - \frac{1}{6} \left( \hat{F}_{i+2,j,k}^n - \hat{F}_{i+1,j,k}^n \right) \right] \\ + \frac{\Delta t}{\Delta \xi_2} \left[ \frac{7}{6} \left( \hat{G}_{i+1,j,k}^n - \hat{G}_{i,j,k}^n \right) - \frac{1}{6} \left( \hat{G}_{i+2,j,k}^n - \hat{G}_{i+1,j,k}^n \right) \right] \\ + \frac{\Delta t}{\Delta \xi_3} \left[ \frac{7}{6} \left( \hat{G}_{i+1,j,k}^n - \hat{G}_{i,j,k}^n \right) - \frac{1}{6} \left( \hat{G}_{i+2,j,k}^n - \hat{G}_{i+1,j,k}^n \right) \right] \end{array} \right]$$

Predictor:

$$U_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} [U_{i,j,k}^1 + U_{i,j,k}^n] - \frac{1}{2} J_{i,j,k}^C \left[ \begin{array}{l} \frac{\Delta t}{\Delta \xi_1} \left[ \frac{7}{6} \left( \hat{F}_{i,j,k}^1 - \hat{F}_{i-1,j,k}^1 \right) - \frac{1}{6} \left( \hat{F}_{i-1,j,k}^1 - \hat{F}_{i-2,j,k}^1 \right) \right] \\ + \frac{\Delta t}{\Delta \xi_2} \left[ \frac{7}{6} \left( \hat{G}_{i,j,k}^1 - \hat{G}_{i-1,j,k}^1 \right) - \frac{1}{6} \left( \hat{G}_{i-1,j,k}^1 - \hat{G}_{i-2,j,k}^1 \right) \right] \\ + \frac{\Delta t}{\Delta \xi_3} \left[ \frac{7}{6} \left( \hat{G}_{i,j,k}^1 - \hat{G}_{i-1,j,k}^1 \right) - \frac{1}{6} \left( \hat{G}_{i-1,j,k}^1 - \hat{G}_{i-2,j,k}^1 \right) \right] \end{array} \right]$$

El método empleado para resolver este problema está basado en la teoría de las diferencias finitas, que se ha convertido en una gran herramienta para discretizar las ecuaciones de transporte de la mecánica de los fluidos.

## 2.4 Validación

Los estudios numéricos han significado un incremento en las investigaciones que se hacen en centros especializados debido a que los resultados son cercanos a los que se pueden obtener en estudios experimentales. Para el fenómeno presentado, se han realizado experimentos en laboratorio [15] cuyos resultados son comparados con los obtenidos en simulaciones numéricas. Las condiciones de frontera del fenómeno experimental fueron determinadas con base a las condiciones ambientales de presión y temperatura. El número de  $Re= 2500$  y  $L/D_0=1$ . Antes de revisar los resultados del capítulo siguiente, es necesario hacer la validación de los estudios numéricos con los estudios experimentales. Las gráficas que sustentan ambos estudios son las siguientes: diámetro, trayectoria y circulación.

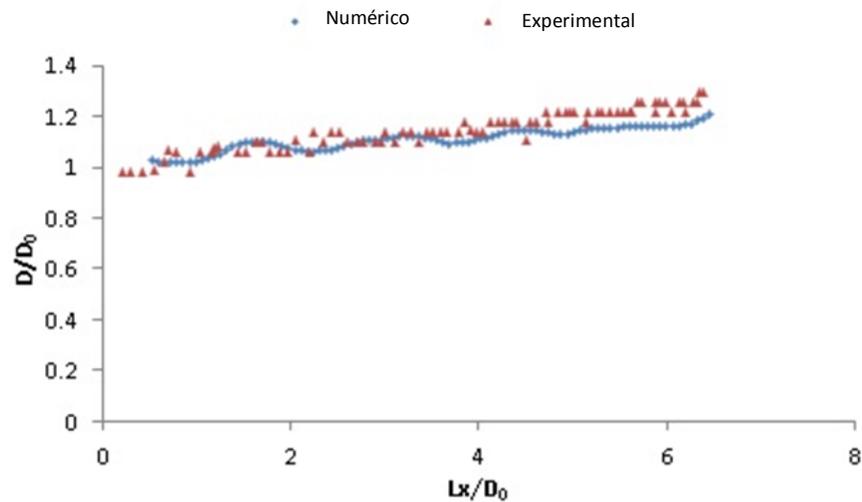


Fig. 2.1 Radio del vórtice

La dimensión del dominio de control ( $Lx/D_0$ ) y la dimensión del radio ( $D/D_0$ ) son presentadas para comprobar que el código numérico es válido.

En un principio, el radio del vórtice tiene la misma dimensión que la longitud característica ( $L_0=1$ ). Posteriormente el vórtice anular se desplaza por el dominio de control con la trayectoria mostrada. Esta trayectoria es la observada en los instantes previos al impacto contra la pared vertical. En esta validación el vórtice es representado en una parte superior y una parte inferior. No significa que sean vórtices separados, sino que el anillo es dividido en 2 partes por un plano y en una vista de canto, se aprecian 2 vórtices. El comportamiento del vórtice superior ofrece algunos puntos de dispersión que no sucede con el estudio experimental.

La zona crítica que puede ser cuestionada es el impacto con la pared, en el cual para el cálculo experimental se observa la interacción de la viscosidad en el fluido cercano de la pared. En el cálculo numérico esa interacción tarda un poco y por ello es que se aprecia el súbito incremento del radio.

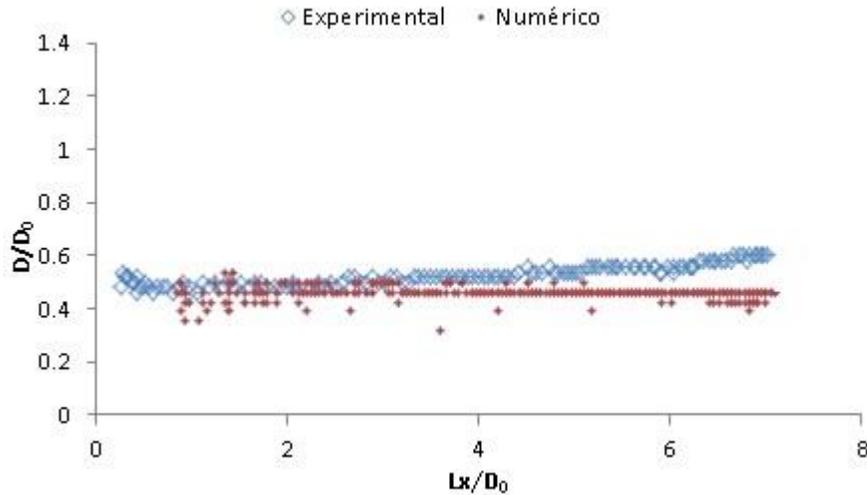


Fig. 2.2 Trayectoria del vórtice superior

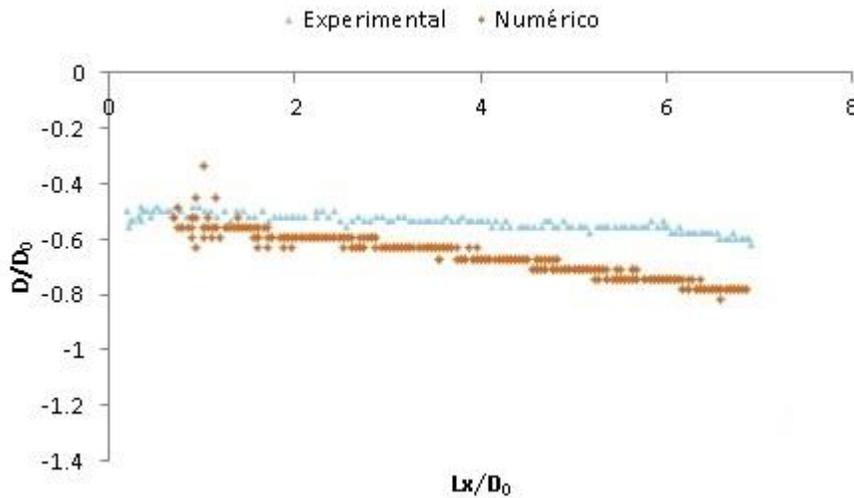


Fig. 2.3 Trayectoria del vórtice inferior

En la zona del impacto del vórtice con la pared se tiene un comportamiento similar al vórtice superior. Esta similitud se debe a que el vórtice es simétrico. En algunos estudios que se han realizado se ha descubierto que teniendo una pared con mayor temperatura, la simetría ya no es observada. El estudio numérico revela que el vórtice va incrementando su radio de manera gradual, mientras que en el experimental trata de conservar el radio inicial.

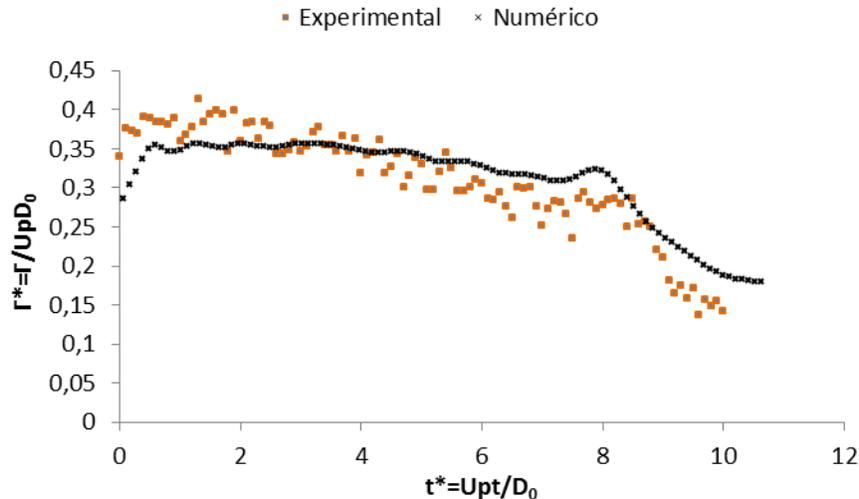


Fig. 2.4 Circulación de vórtice

Para la circulación, el estudio experimental y el numérico tienen resultados similares. La dispersión que se observa en el estudio experimental (Fig. 2.4) no se presenta en el numérico. Por las curvas, se valida el código numérico para ser empleado en la solución del problema.

## 2.5 Condiciones de Frontera

Validado el código como se ha comentado, se puede entonces continuar con el trabajo, comentando acerca de las condiciones de frontera que definen el fenómeno.

Las condiciones de frontera en una simulación numérica determinan el comportamiento de las paredes del dominio de control en el fenómeno que se está estudiando, así como el de los alrededores. Este comportamiento está relacionado con el antes, durante y después de la interacción del dominio de control con las condiciones que se encuentran fuera del mismo y que varían con respecto al tiempo.

En la simulación estudiada, las condiciones de frontera son directamente las relacionadas con las paredes del dominio de control, así como las condiciones tanto internas como externas del dominio. Las entradas del fluido, algunas dimensiones que deben considerarse, entre otras.

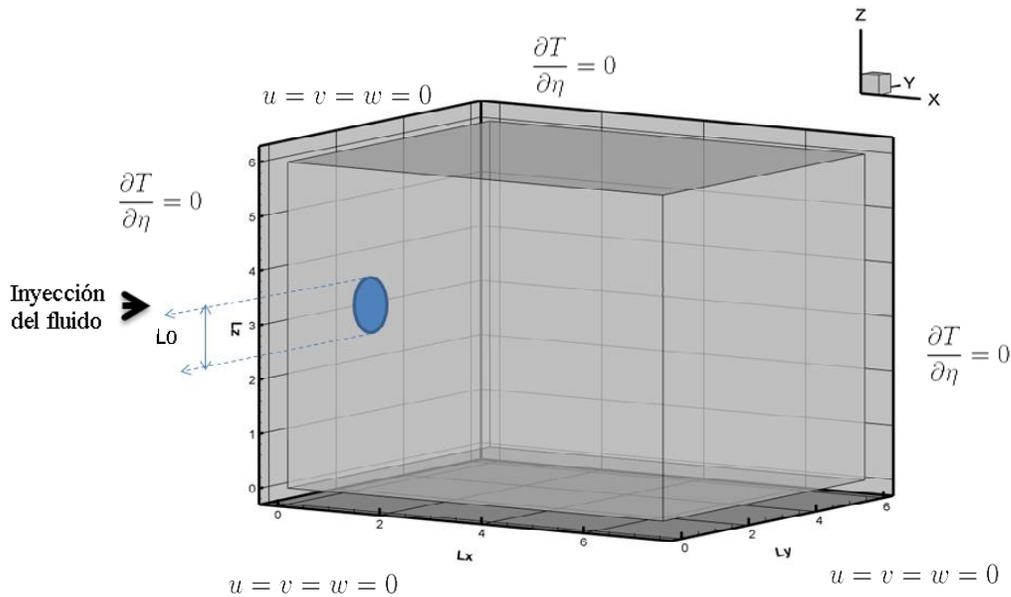


Fig. 2.5 Condiciones de Frontera

Como se aprecia, los valores de las condiciones de frontera son conocidas desde antes de que haya la interacción del dominio de control con la variación del paso de tiempo. Entre las condiciones de frontera empleadas más a menudo en estos estudios se tienen:

- Paredes isotérmicas: las paredes en esta simulación tienen una temperatura definida por ambos lados, es decir, por el lado exterior tiene la temperatura de los alrededores que está definida en las condiciones iniciales; y por el otro lado, la temperatura que tiene el dominio de control en su interior, que también está definida en las condiciones iniciales. Además, no hay transferencia de calor, por lo que el gradiente de temperaturas es nulo.
- Condiciones de no deslizamiento (velocidad nula): las paredes del dominio de control permanecen estáticas, la velocidad en cualquier dirección es nula.
- La única interacción del dominio de control con los alrededores es por medio de la apertura de la pared  $y$ - $z$ . En los instantes dados por la relación  $L/D_0=1$ ,  $L/D_0=2$  y  $L/D_0=3$

Establecidas las condiciones de frontera, el siguiente paso es establecer las condiciones iniciales, de las cuales el código numérico inicia el cálculo.

## 2.6 Condiciones Iniciales

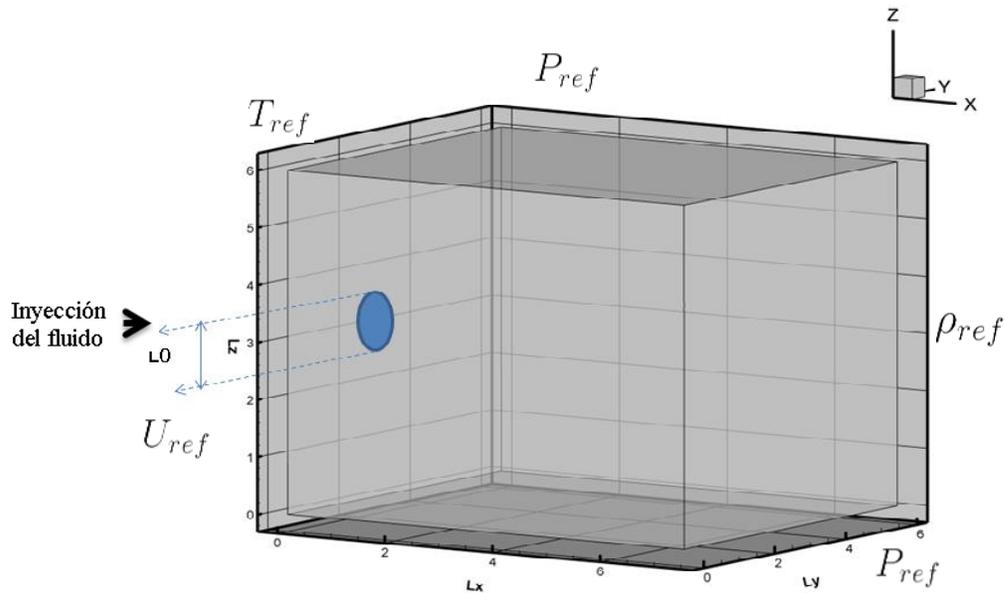


Fig. 2.6 Condiciones Iniciales

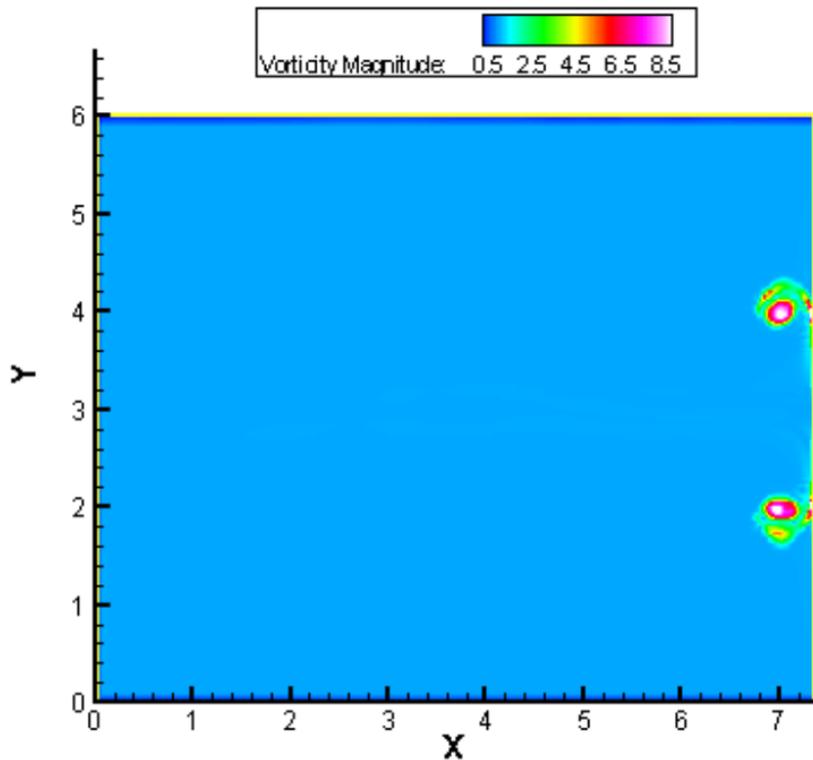
A diferencia de las condiciones de frontera, las condiciones iniciales describen el comportamiento del dominio de control en el instante de inicio del cálculo. Estas condiciones especifican:

- Velocidad nula en todo el dominio.
- Densidad de referencia: es la densidad que tiene el fluido de los alrededores y que es inyectado dentro de la cavidad. Esta densidad ya establece la masa y el volumen también de referencia.
- Temperatura de referencia: es la temperatura que se encuentra en los alrededores del dominio de control. Esta temperatura conforme se avance en el cálculo puede cambiar, sin embargo, debe ser definida desde el principio de cálculo.
- Presión de referencia: es la presión que se encuentra dentro y fuera del dominio de cálculo.
- La inyección del fluido es por medio de la abertura mostrada que tiene de diámetro la dimensión de referencia ( $L_0$ ).

De la misma manera que en las condiciones de frontera, las condiciones iniciales son definidas desde un principio en el cálculo y también poseen valores conocidos.

# Capítulo III

## Resultados



Impacto de un vórtice anular con una pared vertical <sup>11</sup>

Para la solución al problema, se ha considerado una malla computacional con las siguientes condiciones de frontera:

- En la dirección paralela al flujo (X) se han considerado 200 nodos
- En la dirección perpendicular a la anterior (Y) se han considerado 119 nodos
- En la dirección perpendicular a las 2 anteriores (Z) se consideran 119 nodos

<sup>11</sup> Re=3295, t\*=47

## Resultados

El dominio de cálculo tiene en total, 2 832 200 nodos (puntos de cálculo), en los cuales se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para fluido incompresible. Sin embargo, las dimensiones del paralelogramo son las siguientes:

- En X mide  $(L_0= 7.5D)$
- En Y mide  $(L_0= 6D)$
- En Z mide  $(L_0= 6D)$

Con las condiciones de frontera anteriores, la malla computacional de solución está distribuida como sigue:

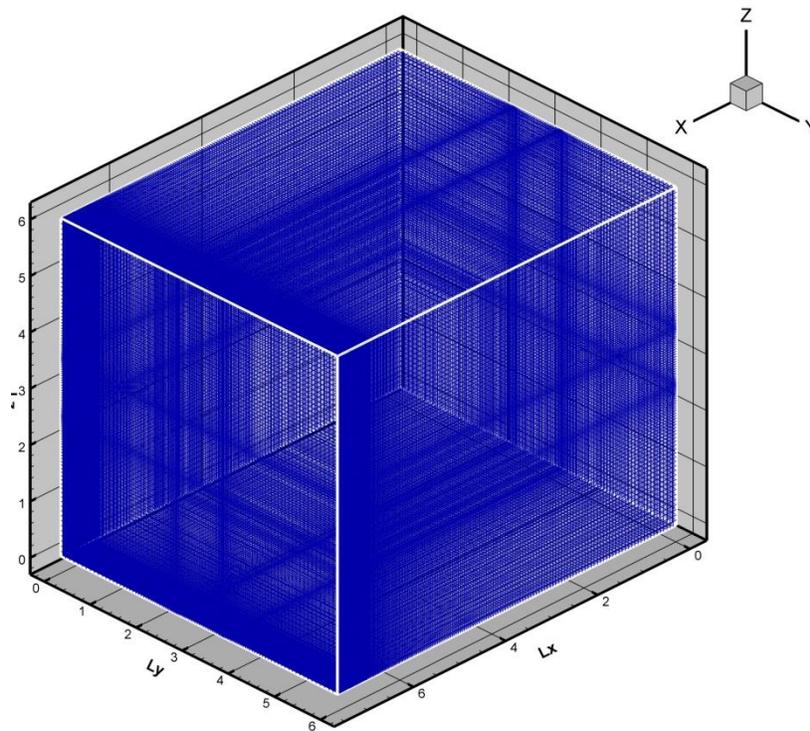


Fig. 3.1 Dominio computacional

Otras condiciones consideradas son las iniciales, las cuales son:

- Diámetro del ducto de inyección ( $D/D_0= 1$ )
- Longitud de desplazamiento del pistón: variable ( $L/D_0=1,2,3$ )
- La velocidad de salida en la inyección ( $U/U_0=1$ )
- Fluido incompresible

- Número de Reynolds, ver tabla inferior.
- $P_0$ ,  $T_0$ ,  $U_0$  son definidas como valores ambiente.

La cantidad de nodos en las simulaciones numéricas afecta en el tiempo de cálculo al resolver las ecuaciones de transporte. Si se definen pocos nodos, se tienen zonas de interés en dónde los resultados no son confiables por falta de resolución (cf. Capítulo V). Por el fenómeno a estudiarse, se considera una malla de forma rectangular. El tiempo de cálculo es de algunos días (1.5 semanas).

La siguiente tabla contiene los parámetros de la simulación numérica:

Evento	Re	Relación L/D
1	3295	1
2	3295	2
3	3295	3
4	2800	1
5	2800	3
6	1200	3

Tabla I Simulaciones realizadas

Como se aprecia, son simulaciones considerando diferentes valores de número de Reynolds y de la relación L/D. En los 6 casos se ha considerado a la pared con temperatura constante y conocida como la temperatura de referencia. Esta es una de las condiciones más importantes en este trabajo: no hay transferencia de calor de alguna fuente externa hacia dentro ni hacia afuera.

Los resultados del comportamiento del radio del vórtice anular, de la velocidad de convección, de la velocidad máxima y la circulación se presentan a continuación. En el capítulo siguiente se hace el análisis de la formación del vórtice con base al tamaño característico; además se estudia el impacto con la pared vertical. Los resultados en este capítulo se dividen como sigue:

- Resultados para  $Re=3295$
- Resultados para  $Re=2800$
- Resultados para  $Re=1200$

## 3.1 Re=3295

### 3.1.1 Radio

Para el mayor número de Reynolds con el que se realizaron los cálculos, se tienen diferentes dimensiones del radio y del diámetro. Estos resultados deben ser simétricos en los planos por donde se desplaza el vórtice (planos x-y, x-z).

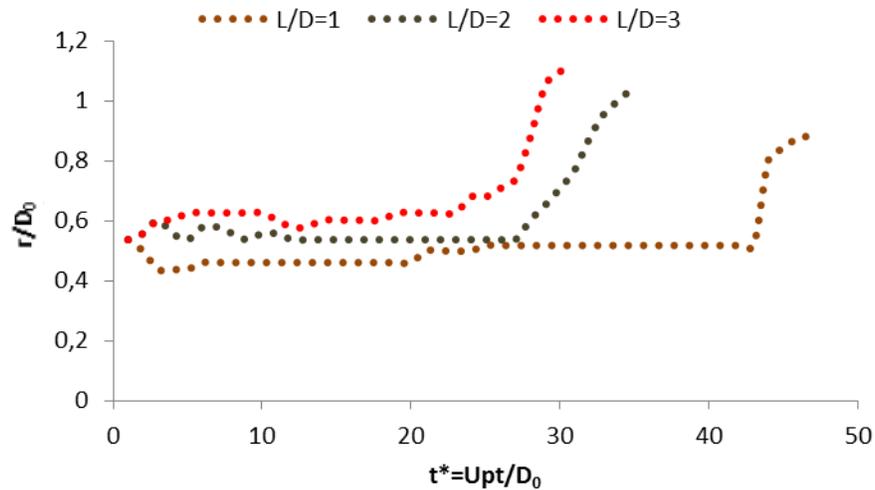


Fig. 3.2 Radios de vórtice en plano x-y

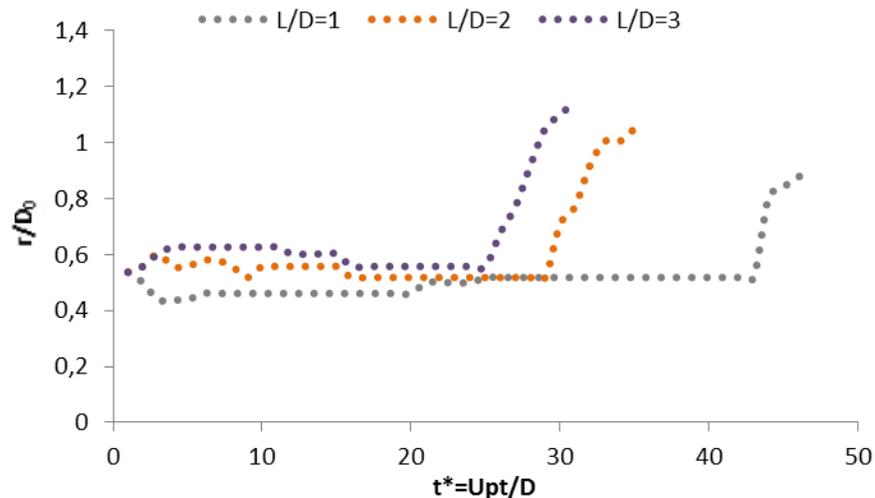


Fig. 3.3 Radios de vórtice en plano x-z

Para una relación  $L/D_0=1$ , se tiene una disminución del radio a un valor mínimo (0,46 adimensional), para después comenzar la formación. Al término de la formación, el radio se incrementa a valores de 0,47-0,52 adimensionales a la mitad del tiempo recorrido. En el impacto el radio sufre su mayor modificación; si en el impacto se tiene un cambio abrupto

en la velocidad, el vórtice tiende a expandirse hacia los extremos. El radio promedio del vórtice anular de 0.56 adimensional, es decir, poco más de  $D_0/2$ . El valor máximo obtenido en la expansión del radio es de 0.85 adimensional. Para  $L/D_0=2$ , el radio mantiene prácticamente la misma dimensión desde la salida y en ambos planos de estudio. Sin embargo, instantes posteriores sufre un ligero incremento de 0.05 valor adimensional, y hay un espacio de tiempo en el cual no se modifica ( $t^*=12$  al  $t^*=27$ ). Conforme se acerca a la pared vertical, se tiene un incremento en ambos planos que llegan a ser del doble del valor original, es decir, un radio de 1.1 valor adimensional. Con  $L/D$  mayor al caso anterior, el impacto se produce más rápido y se presenta mayor modificación del radio. A diferencia de  $L/D_0=1$  y  $L/D_0=2$ , en  $L/D_0=3$  se experimenta un incremento del radio desde la formación del vórtice en un valor de 0.55 adimensional, para seguir incrementándose hasta un valor de 0.64 adimensional. Con este valor se mueve el vórtice en ambos planos del dominio en estudio. Ligeramente sufre modificaciones en donde el vórtice decrece a 0.60 valor adimensional y de mantiene por algunos instantes ( $t^*=12$ ), para nuevamente comenzar a incrementarse debido a que la viscosidad del fluido cercano a la pared detiene al vórtice. La conservación de cantidad de movimiento provoca que el vórtice trate de mantener su forma, con lo que se incrementa el radio del vórtice en ambas direcciones llegando en el impacto al valor más alto, con un máximo de 1.21 en ambos planos.

### 3.1.2 Velocidad de Convección

Las velocidades de convección que resultan de los 3 casos estudiados no son estudiadas con base a simetría, sino es el desplazamiento del vórtice con relación al tiempo transcurrido.

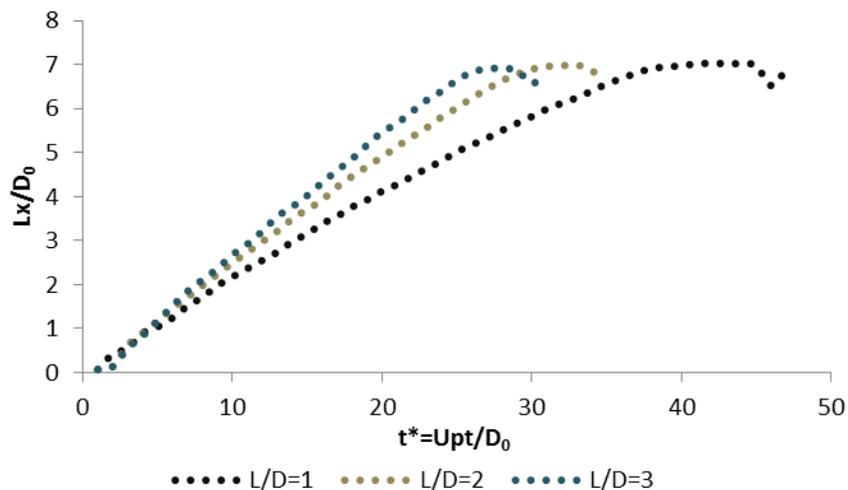


Fig. 3.4 Velocidad de convección

La velocidad de convección es calculada a partir de la velocidad máxima del centro del vórtice en cada uno de los instantes de tiempo adimensionales ( $t^*=50$ ) con respecto al tiempo transcurrido. A esta pendiente se llama velocidad de convección (Fig. 3.4). Para una relación  $L/D_0=1$ , la velocidad de convección tiene un valor de 0.29 valor adimensional. La

velocidad de convección comienza en la formación del vórtice anular. Posteriormente, la velocidad sufre una ligera disminución en la magnitud hasta el momento en que el fluido deja de inyectarse. Dado que no existen condiciones que favorezcan u obstruyan el movimiento del vórtice, la velocidad de convección se mantiene constante hasta instantes previos al impacto con la pared vertical. Con una relación  $L/D_0=2$ , La pendiente es mayor que la existente en  $L/D_0=1$ . La velocidad de convección al inicio del cálculo es muy cercano a 0 valor adimensional. Una vez formado el vórtice, comienza el recorrido teniendo una velocidad de convección de 0.35 valor adimensional. Debido a que la relación  $L/D$  es el doble que en el caso anterior, el impacto con la pared sucede en menos tiempo que el determinado en el caso anterior ( $t^*=33$ ). Un detalle importante es que se observa la velocidad constante. Con una relación  $L/D_0=3$ , se obtiene la velocidad de mayor magnitud de los 3 casos (0.35 valor adimensional). Sin embargo, a diferencia de los otros 2 casos, en éste la velocidad disminuye considerablemente en la zona de expulsión del fluido debido a que se incrementa la relación  $L/D$ .

La literatura explica que si se incrementa gradualmente la relación  $L/D$ , se pueden presentar inestabilidades en el vórtice principal, y pueden formarse vórtices secundarios que se presentan detrás del vórtice principal. Dada esta característica, no se recomienda tener relaciones mayores a  $L/D_0=13$ , pues existe el riesgo de inestabilidad en el vórtice desde su formación y puede provocar que el radio, la vorticidad o incluso las velocidades se modifiquen.

### 3.1.3 Velocidad Máxima

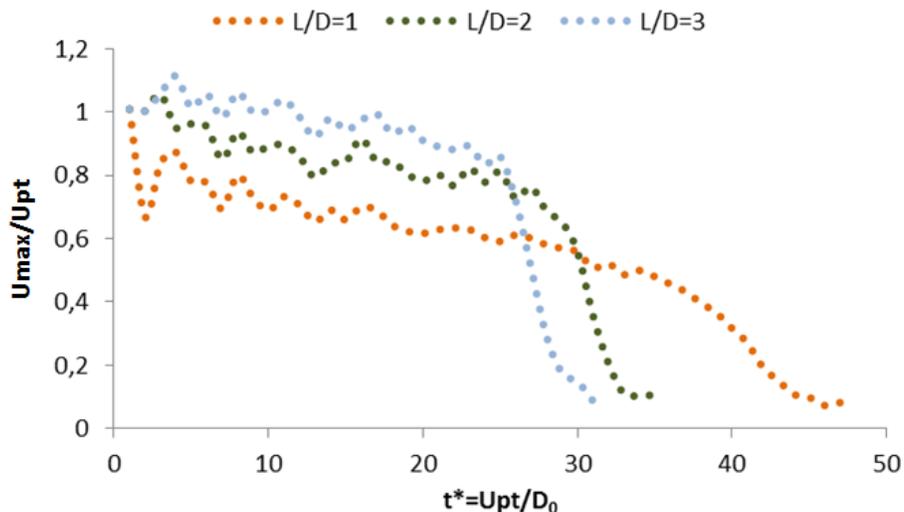


Fig. 3.5 Velocidades máximas

Con una relación  $L/D_0=1$ , la velocidad máxima sufre decremento al inicio porque es el tiempo de formación en el cual el vórtice está aún a la salida. En la parte final de la gráfica disminuye la velocidad debido al acercamiento con la pared vertical.

Con una relación  $L/D_0=2$ , la velocidad máxima y el impacto son de mayor magnitud al caso anterior porque hubo mayor inyección de fluido y con ello más empuje en el mismo ( $U/U_0=1$ ). La velocidad máxima para  $L/D_0=2$  tiene un valor mayor que en el caso anterior (1.05 adimensional). Nuevamente la disminución progresiva de la velocidad máxima debido a la viscosidad concluye con el impacto contra la pared vertical, en donde se tiene la mínima velocidad del vórtice. Para una relación  $L/D_0=3$ , y lo visto en los 2 casos anteriores, se espera que la velocidad máxima sea de mayor magnitud dado que es donde se tiene la mayor inyección de fluido, además el empuje en el fluido recibido en un principio es lo que provoca el aumento de la velocidad de convección y la velocidad máxima. De las 3 velocidades máximas, ésta se caracteriza porque aun perdiendo tiempo en la formación del vórtice anular, alcanza una velocidad alta (1.16 adimensional) comparada con las otras 2. Además de esto, como la relación  $L/D$  incrementa la velocidad de convección, se ve directamente afectada esta velocidad en que se tiene el impacto con la pared más rápido, y eso se refleja en la velocidad máxima, en donde decrece a un tiempo de  $t^*=25$  adimensional.

### 3.1.4 Circulación

En esta variable es recomendable hacer un estudio de la simetría del vórtice en los planos, similar a lo que se realizó en el análisis del radio.

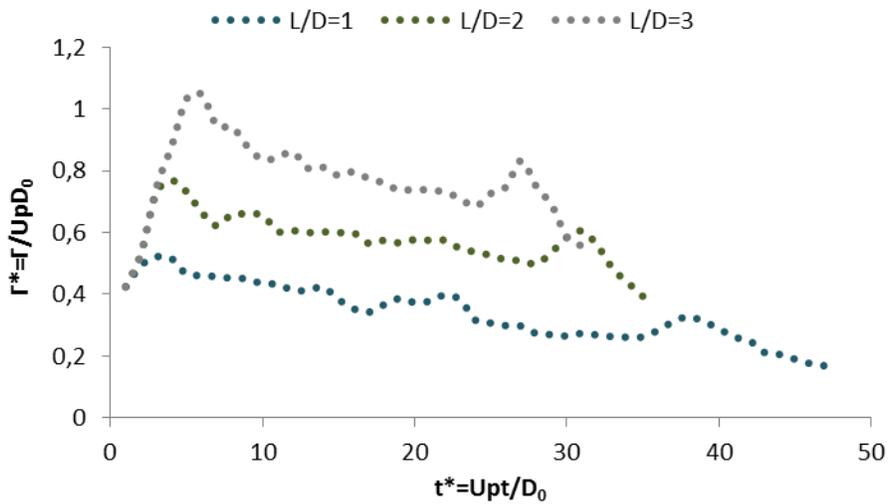


Fig. 3.6 Circulación Vórtices Superiores plano x-y

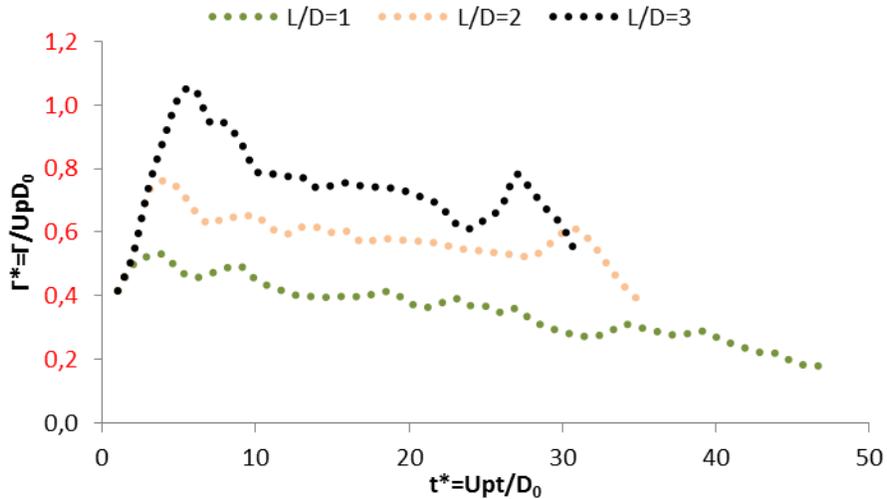


Fig. 3.7 Valor Absoluto de la Circulación Vórtices Inferiores plano x-y

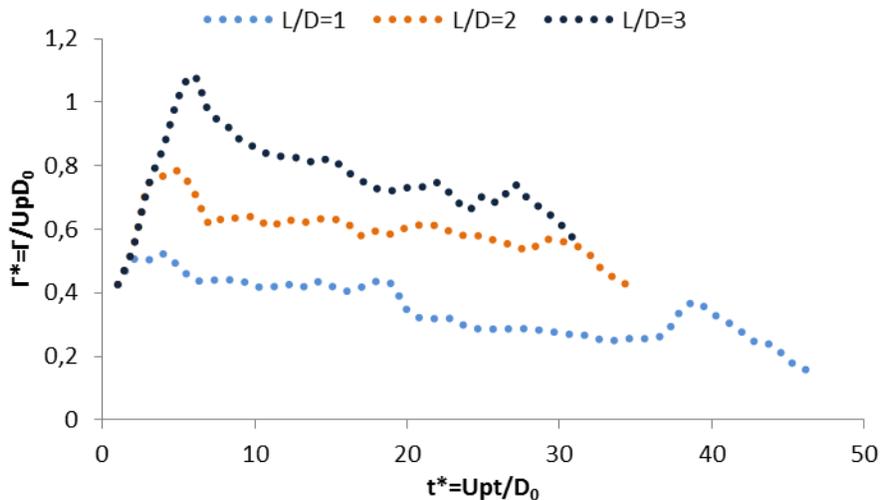


Fig. 3.8 Circulación Vórtices Anteriores plano x-z

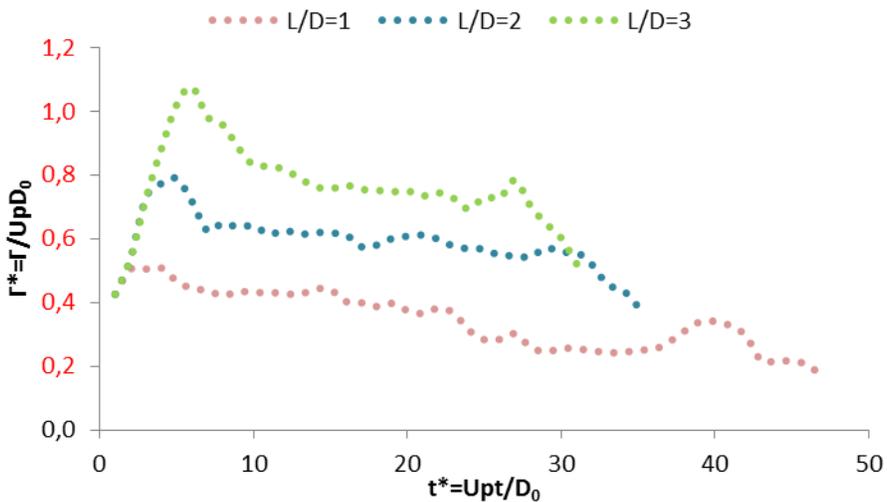


Fig. 3.9 Valor Absoluto de la Circulación Vórtices Posteriores plano x-z

Las circulaciones (superior, inferior, anterior, superior) en los dos planos en estudio, son simétricas (Fig. 3.6 y Fig. 3.7; Fig. 3.8 y Fig. 3.9), puesto que no hay variaciones importantes en las curvas. Tanto en el plano x-y y x-z, la simetría se conserva como se muestra. Con una relación  $L/D_0=1$ , el valor antes de la formación del vórtice es 0.42 adimensional y se incrementa hasta llegar a un valor máximo (0.51 adimensional), para después decrecer debido al movimiento del anillo hasta un valor mínimo (0.15 adimensional) obtenido antes del impacto con la pared vertical.

Para el plano x-z, es muy similar la estructura del vórtice al plano x-y (simetría). Inicia con un valor antes de la formación (0.42 adimensional) y llega a un máximo (0.51 adimensional, Fig. 3.8), para después decrecer hasta un valor mínimo (0.18 adimensional). Lo importante en este cálculo es que se mantiene la misma estructura del plano anterior.

Para una relación  $L/D_0=2$ , La circulación mostrada en ambos planos de estudio revelan que a pesar de existir el doble valor de la relación  $L/D$ , no hay diferencia notoria con respecto a la estudiada anteriormente. Comienza con un valor de 0.42 adimensional, y se incrementa conforme se forma el vórtice anular hasta un valor máximo (0.8 adimensional). Debido a la viscosidad se experimenta una disminución de la circulación hasta que se impacta con la pared vertical llegando a un valor mínimo (0.2 adimensional). Ya en el impacto existen algunas inestabilidades, pero eso es debido a que el fluido se mueve en diferentes direcciones.

Al incrementar  $L/D_0=3$  debe presentarse una circulación mayor que en los otros 2 casos. Si en  $L/D_0=2$  se ha comentado que el anillo de fluido fue más delgado que en  $L/D_0=1$ ; se espera que en  $L/D_0=3$  el anillo sea más delgado aún, y por consecuencia, se tendrá un valor máximo de circulación que será menor a los otros dos. Estudiando  $L/D_0=3$ , la circulación comienza con un valor mínimo (0.4 adimensional) para crecer hasta un valor máximo (1.1 adimensional) tanto en el plano x-y como en el plano x-z. El decremento de la circulación aquí mostrada tiene su fundamento en el fenómeno de la velocidad máxima. Conforme se mueva más rápido el vórtice debido a la relación  $L/D$ , es más rápido que se impacte con la pared vertical del dominio de control. El resultado de ello es que en el tiempo 20 adimensional ya se experimente un descenso en la circulación que llega hasta un valor mínimo (0.2 adimensional).

## 3.2 Re=2800

### 3.2.1 Radio

Para comprobar que se ha realizado una simulación correctamente, se revisa nuevamente la simetría de los resultados.

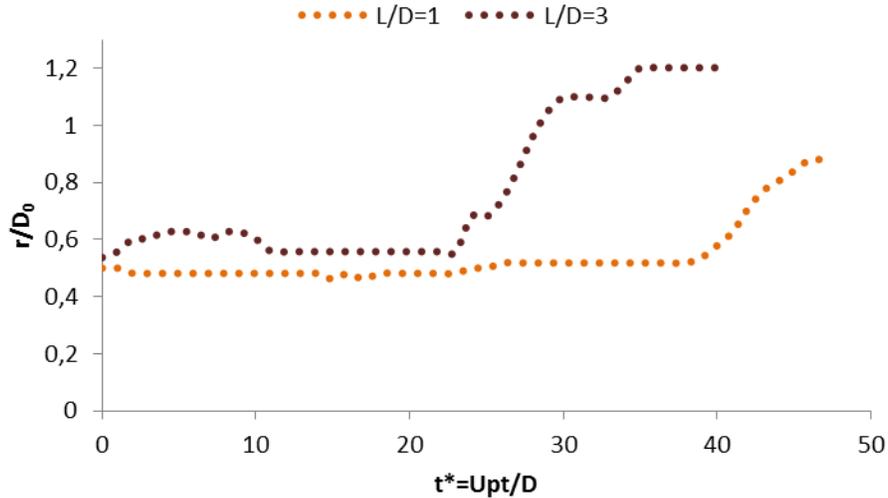


Fig. 3.10 Radio de Vórtices en plano x-y

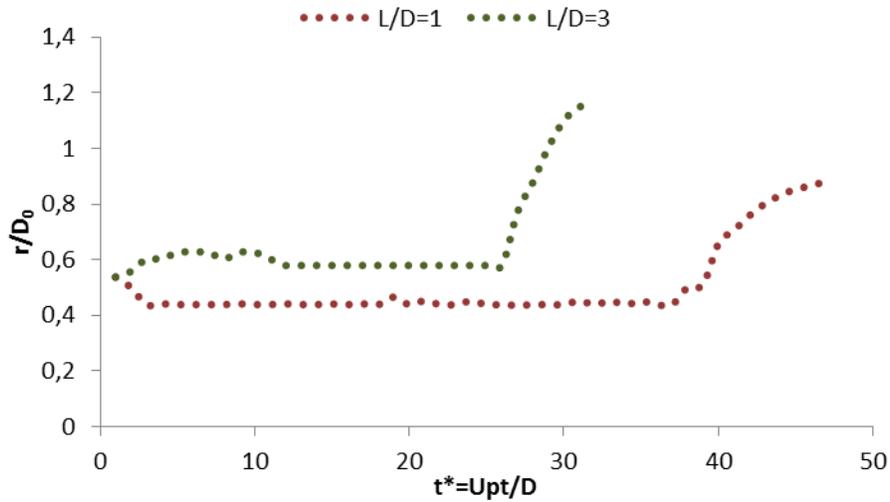


Fig. 3.11 Radio de Vórtices en plano x-z

Con un número de Reynolds menor comienza el estudio de dos nuevos casos. Para una relación  $L/D_0=1$ , el radio comienza con la medida de  $D_0/2$ , para después disminuir debido a la formación del vórtice anular, donde el fluido se toma un tiempo para “enrollarse” y formar el vórtice. Después del desprendimiento, el radio se incrementa y llega a la misma longitud de  $D_0/2$ , y en el momento del impacto, el radio sufre su mayor incremento, con un valor cercano al 50% mayor.

En ambos planos el movimiento del vórtice no incrementa ni disminuye el radio. Durante el trayecto del vórtice, existen algunas zonas de inestabilidad (Fig. 3.10) debido a la viscosidad presente entre los dos fluidos. Con una relación  $L/D_0=2$ , el radio sufre 2 cambios significativos en su estructura en ambos planos: en primer lugar tiene un incremento ligero, es decir, un incremento del 20% con respecto al radio original: de 0.5-0.61 adimensional; el segundo cambio se presenta al impacto con la pared vertical, en la cual experimenta un incremento del 52%, también en ambos planos en estudio. De  $t^*=12$  a  $t^*=25$  adimensional se experimenta la zona de más estabilidad en ambos planos, pues se puede apreciar con una línea recta la estabilidad del radio en el estudio. Posteriormente se acerca a la pared, que es donde se incrementa al doble del radio original y se mantiene hasta el momento del impacto que es donde sufre el mayor radio, un valor de 1.25 adimensional, es decir, casi 3 veces más el radio original del vórtice a su salida. Incluso con las pequeñas diferencias que hay entre las gráficas en el desplazamiento del vórtice, se entiende que la simulación fue simétrica, y como se ha comentado con anterioridad, es una de las características que debe prevalecer en la simulación para ser considerada como correcta. El impacto del vórtice con la pared se da en un tiempo que es menor al que se obtiene en el caso de  $L/D_0=3$  y con un  $Re=3295$ . Este último enunciado será estudiado en el capítulo siguiente.

### 3.2.2 Velocidad de Convección

En una de las hipótesis que se han realizado con anterioridad se ha comentado que la velocidad será afectada principalmente con este número de Reynolds.

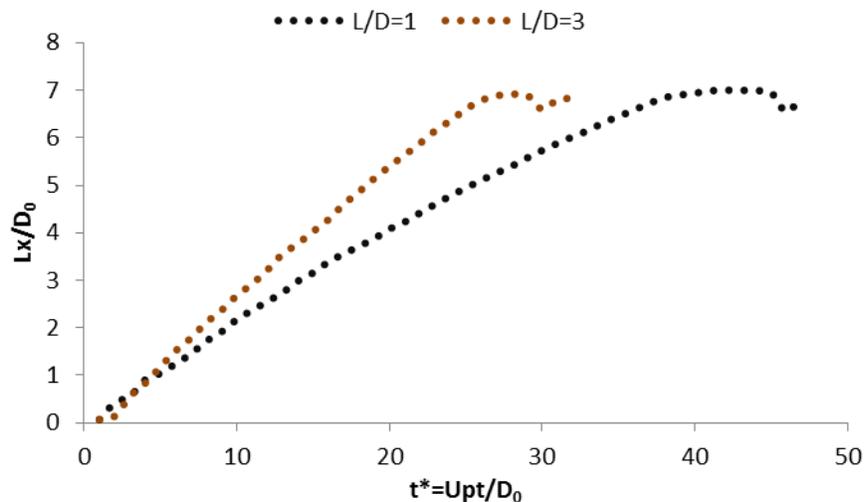


Fig. 3.12 Velocidades de convección

Nuevamente el efecto de la formación del anillo de fluido al inicio del dominio de cálculo es representado. Con una relación  $L/D_0=1$ , la velocidad permanece constante entre el tiempo y el desplazamiento hasta el momento del impacto en la zona final de la curva. No se presenta aceleración o decremento en la velocidad. La zona de formación del vórtice es ligeramente mayor que el revisado en  $Re=3295$ , pues para este caso, es más lento debido a que la pendiente de la curva es menos pronunciada que el anterior (0.26 adimensional). El

impacto con la pared vertical se presenta con menos intensidad, lo cual se verá mejor con los resultados en la sección sobre impactos. Con  $L/D_0=3$ , la pendiente de la curva es mayor que la obtenida en  $L/D_0=1$ . El fluido que es expulsado forma el anillo y comienza su desplazamiento con un valor de la velocidad prácticamente constante. Desde la formación del vórtice se nota que la misma relación  $L/D$  provoca que se mueva de manera constante. Es de notar que la curva tiene su máximo en el momento del impacto, y que este impacto se tiene en un valor de tiempo menor al que se obtuvo en el caso de  $L/D_0=1$ . No es de extrañarse este comportamiento, porque es lo que se ha observado en los casos anteriores. Es necesario revisar la velocidad máxima para comprender mejor este fenómeno y determinar si efectivamente se tiene la misma tendencia que en los casos anteriores. La diferencia entre las 2 curvas denota que sucede lo mismo que con  $Re=3295$ ; la velocidad de convección es mayor con un incremento de la relación  $L/D$ . El pequeño menisco que se obtiene en la parte final de la curva es debido a que el impacto provoca de forma brusca un cambio en la velocidad.

### 3.2.3 Velocidad Máxima

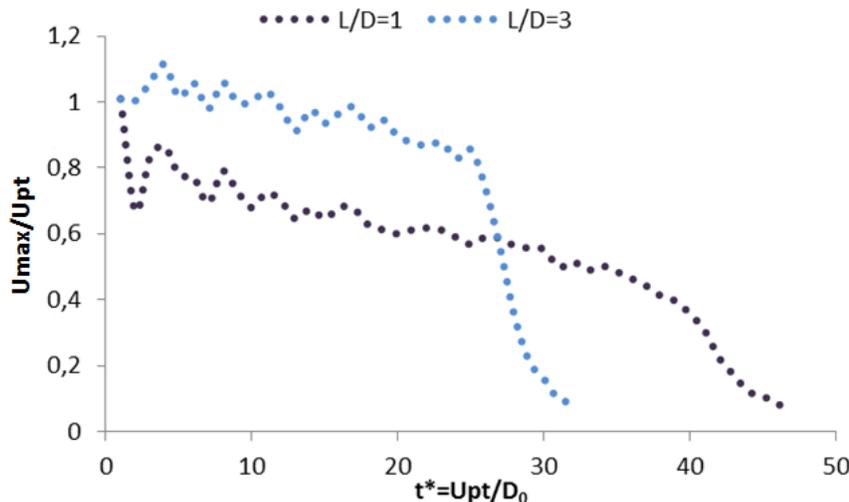


Fig. 3.13 Velocidades máximas

Debido a que el número de Reynolds es menor, la velocidad máxima tiene un decremento considerable en comparación con el estudio anterior ( $Re=3295$ ). Aquí la velocidad máxima disminuye conforme se desplaza por el dominio de cálculo. En el estudio anterior la velocidad máxima tendía a estabilizarse, sin embargo, en este caso, la velocidad tiende a decrecer por causa de un número de Reynolds menor y además porque la relación  $L/D_0=1$  influye en el vórtice. En otras palabras, vuelve a repetirse el comportamiento de la velocidad hasta el momento del impacto en la pared vertical. La viscosidad del fluido hace posible esta característica debido al número de Reynolds de menor intensidad; por ello, se hace más lento el movimiento del fluido. Para  $L/D_0=3$ , instantes posteriores de la formación el anillo, la velocidad máxima llega al máximo (1.16 adimensionales), para después ir disminuyendo conforme avanza en su recorrido. Exactamente en el mismo momento en que la velocidad de convección se estabiliza en una recta, es cuando la velocidad máxima sufre

el cambio más brusco en todo el dominio. En ese punto la velocidad máxima decrece hasta los valores mínimos (0.05 adimensionales).

Por la estructura de la curva, es donde se presenta el impacto con la pared vertical. La diferencia más marcada con respecto a  $L/D_0=1$  es que en el caso anterior la velocidad máxima tenía un decremento menos pronunciado, pero en este caso, es considerable la forma en que la velocidad máxima llega a su valor mínimo.

### 3.2.4 Circulación

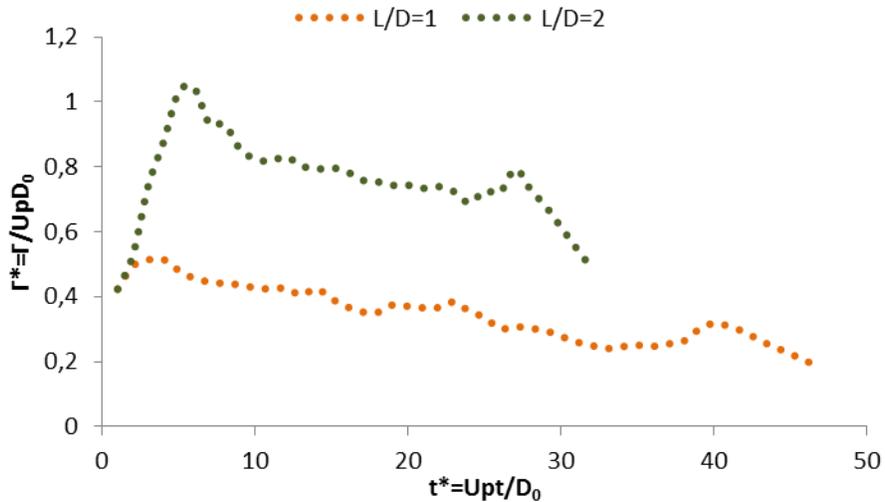


Fig. 3.14 Circulación Vórtice Superior plano x-y

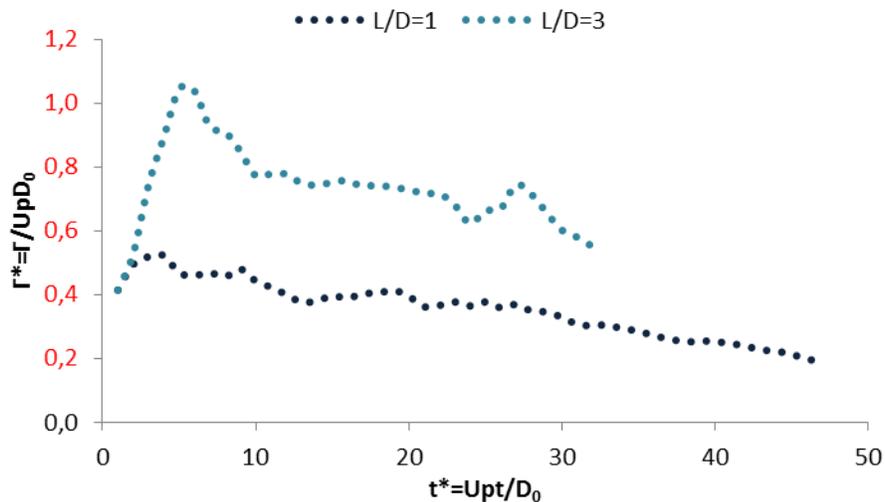


Fig. 3.15 Valor Absoluto de la Circulación Vórtice Inferior plano x-y

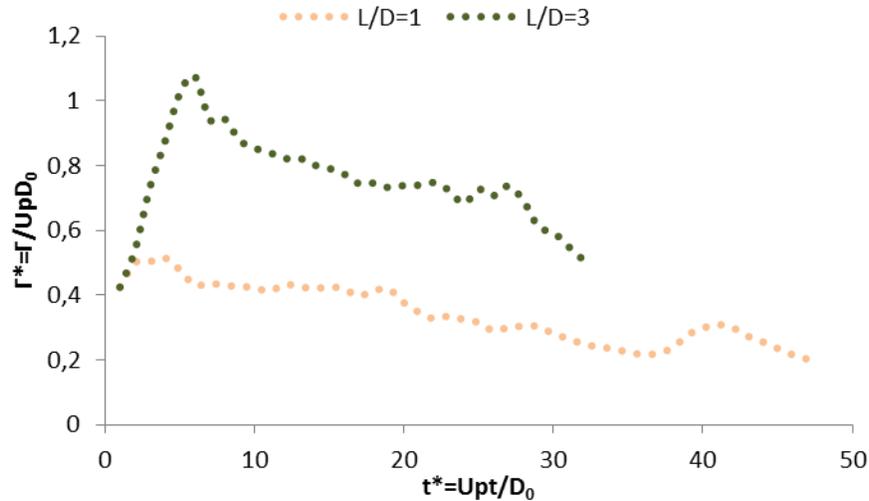


Fig. 3.16 Circulación Vórtice Anterior plano x-z

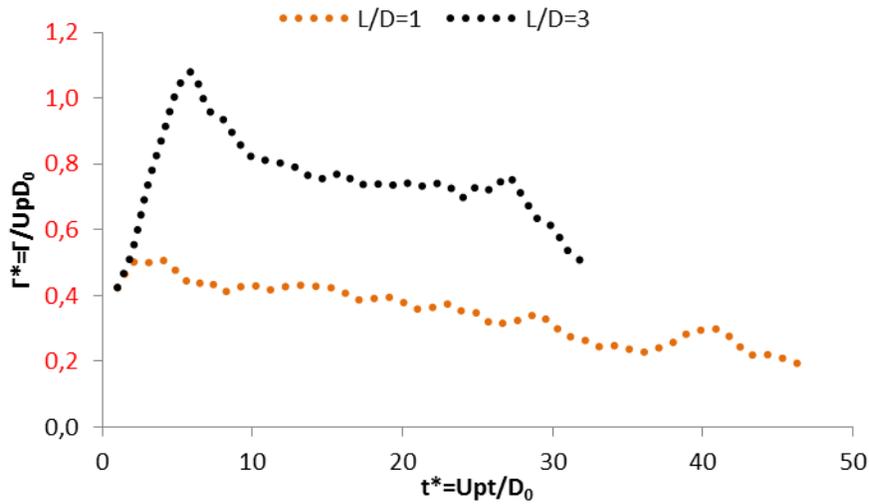


Fig. 3.17 Valor Absoluto de la Circulación Vórtice Posterior plano x-z

El vórtice tarda más en formarse, provocando el incremento de la circulación hasta un valor que casi se asemeja al obtenido con  $L/D_0=1$  y  $Re=3295$ . Lo anterior significa que con un valor de número de Reynolds menor pero con la misma  $L/D$ , la circulación puede alcanzar el mismo valor que con otro valor más elevado de número de Reynolds. Esta aseveración dejaría claro que para las mismas condiciones de  $L/D$ , y variando un poco el Reynolds, se puede obtener una circulación similar. La circulación tiene una tendencia creciente que se debe nuevamente al área por donde se va desplazando el vórtice. Llega a un valor de aproximadamente 2.3 valor adimensional. Como en el caso de  $Re=2800$  no se hace el estudio de  $L/D_0=2$ , entonces al final de la sección se determinará si el comportamiento de  $L/D_0=3$  es similar al que se presentó en  $Re=3295$  con la misma relación  $L/D$ .

El que no se haya hecho el estudio de  $L/D_0=2$  no significa que se ha dejado a un lado, sino que al revisar el estudio en los primeros instantes de tiempo, se observó que el comportamiento tendía a ser muy similar al caso estudiado anteriormente ( $Re=3295$ ,

$L/D_0=2$ , Figs. 3.6, 3.7, 3.8, 3.9). En otras palabras, considerando los primeros instantes de tiempo en el cálculo de  $L/D_0=2$ , se comporta de forma similar con el estudiado en  $Re=3295$  (en el caso  $L/D_0=2$ , claro). Con  $L/D_0=3$ , las curvas de circulación denotan la simetría del vórtice en los planos  $x-y$  y  $x-z$ . En los planos comienza la circulación inicial (0.4 adimensional). El tiempo que le lleva al vórtice formarse se observa en la curva. Es el mayor crecimiento de la circulación en el vórtice.

La circulación mayor (1.1 adimensional) se obtiene cuando han pasado 6 instantes de tiempo ( $t^*=6$ ). Una vez que se ha formado el vórtice, se observa en los 2 planos que la viscosidad del fluido provoca decrementos nuevamente conforme el tiempo transcurre. Aproximadamente en  $t^*=25$  trata de estabilizarse, sin embargo, lo que se experimenta es que la circulación decrece nuevamente hasta llegar al mínimo (0.3 adimensional). Una de las ventajas que se tiene en el análisis de la circulación es que en el último punto registrado es donde se tiene el impacto con la pared. Ese punto tiene más importancia en el análisis del impacto.

### 3.3 Re=1200

En un principio se pretendía realizar el estudio para una relación  $L/D_0=1$ , sin embargo, cuando terminaron los cálculos no fue suficiente tiempo para que el vórtice llegara al impacto con la pared vertical, es decir, quedaba aproximadamente a una distancia de  $6D$ . Este cálculo, por obvias razones, no podía ser considerado, porque uno de los objetivos planteados es revisar lo que sucede en el momento del impacto. Una alternativa es ampliar el tiempo de cálculo, pero afecta al momento de comparar porque los resultados fueron analizados para un tiempo de 50 adimensional ( $t^*=50$ ).

#### 3.3.1 Radio

En este último caso de los estudiados con  $L/D_0=3$ , el radio instantes después de la formación se incrementa de 0.5 a 0.6 (20%).

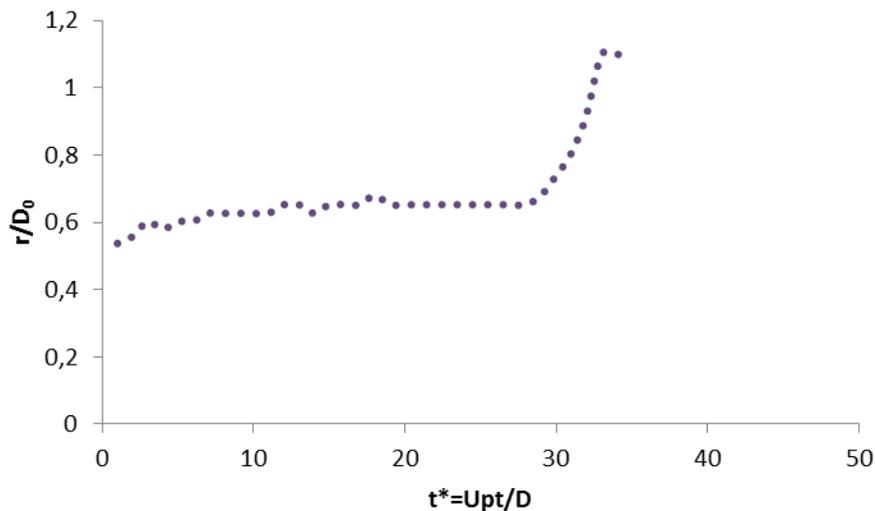


Fig. 3.18 Radio de vórtice en x-y

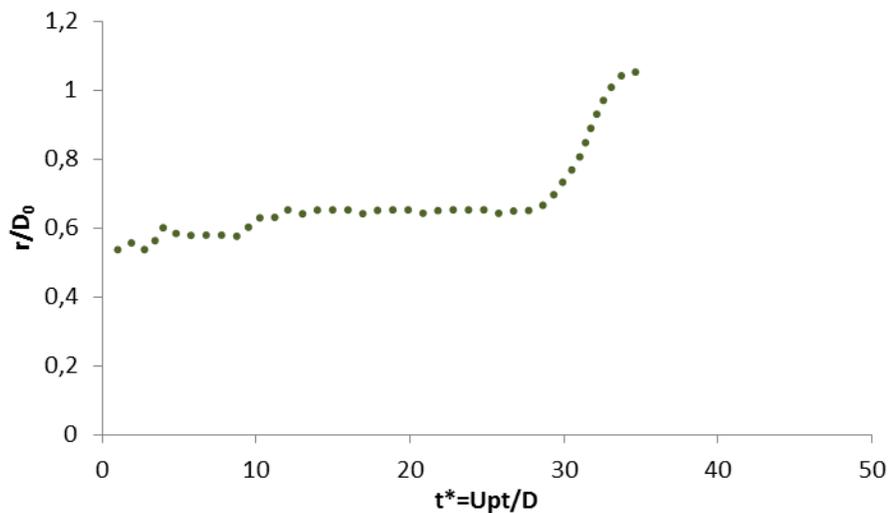


Fig. 3.19 Radio de vórtice en x-z

El radio sufre perturbaciones que se estabilizan a partir de ( $t^*=20$ ). La relación  $L/D_0=3$  proporciona el tiempo suficiente para tener el impacto contra la pared. En el plano x-y se deforma de menor magnitud que en el plano x-z. Al producirse el impacto aún se nota la simetría del cálculo con respecto a los 2 planos.

### 3.3.2 Velocidad de Convección

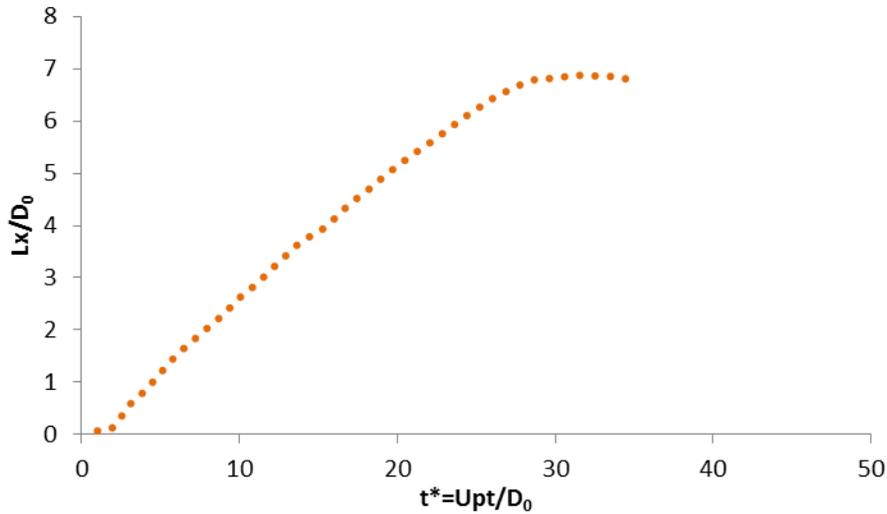


Fig. 3.20 Tiempo vs desplazamiento

La última de las velocidades de convección es mostrada, la cual tiene una pendiente considerable como velocidad del vórtice anular (0.30 adimensional). De los 6 casos estudiados, esta velocidad de convección es la de menor magnitud: se combinan un número de Reynolds pequeño con la relación  $L/D$  mayor.

### 3.3.3 Velocidad Máxima

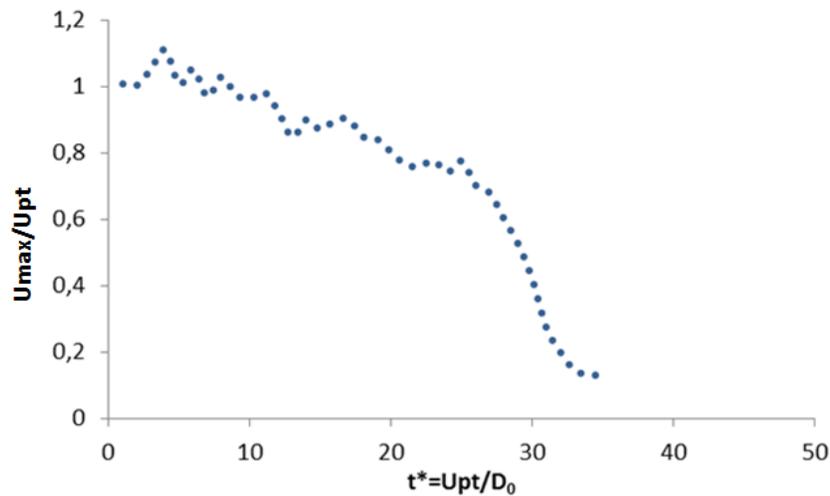


Fig. 3.21 Variación de  $U_{max}$

Para este caso, la velocidad máxima (1.16 adimensional) se presenta en un tiempo de 4 con un incremento de 10% con respecto a la velocidad original. Posteriormente se experimenta el descenso de la velocidad máxima con respecto al tiempo. El punto mínimo (0.08 adimensional) es donde se presenta el choque con la pared vertical a un tiempo ( $t^*=35$ ).

### 3.3.4 Circulación

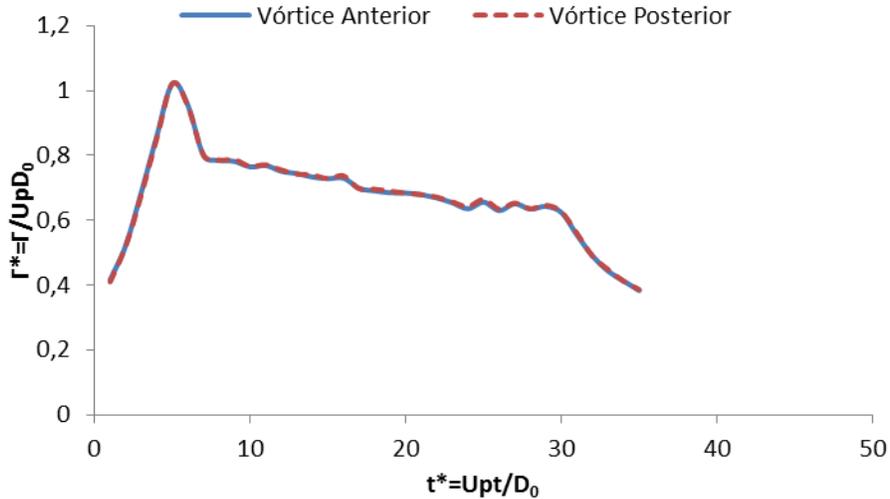


Fig. 3.22 Circulación en x-y

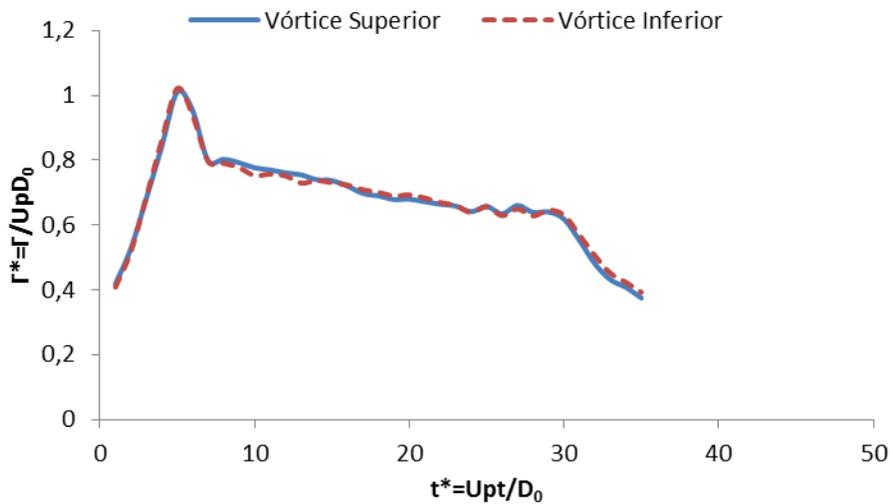
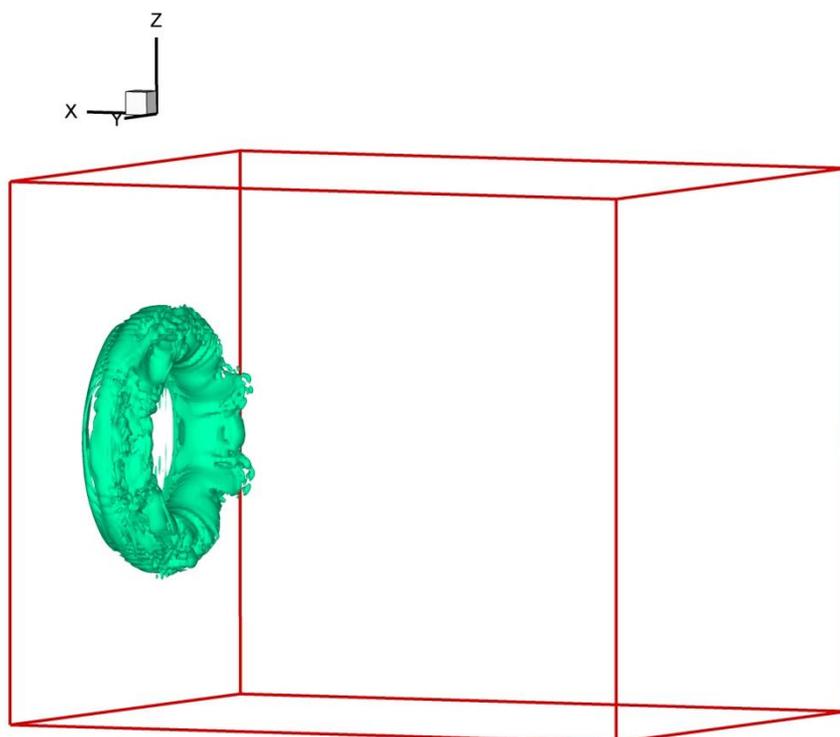


Fig. 3.23 Circulación en x-z

La última circulación de este trabajo tiene un valor muy similar al que se obtiene en  $Re=2800$  y  $L/D_0=3$  (Fig. 3.15). No importando el número de Reynolds, pero con la misma relación  $L/D$  entre los 3 casos, se pueden obtener curvas de circulación muy similares entre ellas (1.41 adimensionales). Por el número de Reynolds bajo, no se presentan vórtices secundarios. Con números de Reynolds altos, el riesgo de formación de vórtices no simétricos es latente, tópicamente a revisarse en un futuro.

# Capítulo IV

## Formación de Vórtice e Impacto



Impacto de un vórtice anular en una pared vertical isotérmica<sup>12</sup>

En este capítulo se revisan dos condiciones del vórtice anular:

- la formación que define el grosor de vórtice, y
- el impacto, instante del choque contra la pared vertical.

Debido a que el estudio de los 2 momentos define el comportamiento del vórtice, es necesario hacer una separación en cada una de las simulaciones. Se estudia la formación del vórtice con los valores de la vorticidad existente en el anillo de fluido y se estudia el comportamiento del anillo principal junto con el anillo secundario que se forman en el impacto.

<sup>12</sup>  $Re=3295$ ,  $Q=0.15$ ,  $t^*=47$

## 4.1 Formación de Vórtice

Una de las incógnitas más usuales en el campo de los vórtices anulares es conocer el grosor del anillo (2a). Esta dimensión, como se comentó en el capítulo I, forma parte de las variables importantes que deben ser estudiadas. En este trabajo solamente se comenta sobre la formación del anillo desde el punto de vista de la vorticidad y cómo es que ésta sirve para el estudio requerido.

En cada uno de los casos a estudiar, se hace el análisis instantes posteriores de la formación del vórtice, por medio de un acercamiento a la zona de interés que permite conocer los valores más significativos de la vorticidad y de esa forma inferir su comportamiento. Ahora se revisa para cada caso el instante exacto en que el anillo comienza con su trayectoria.

### 4.1.1 $Re=3295$ , $L/D=1$

En este primer caso, la estructura de la vorticidad al inicio del tiempo de cálculo, ayuda a conocer la morfología que tiene el vórtice anular formado.

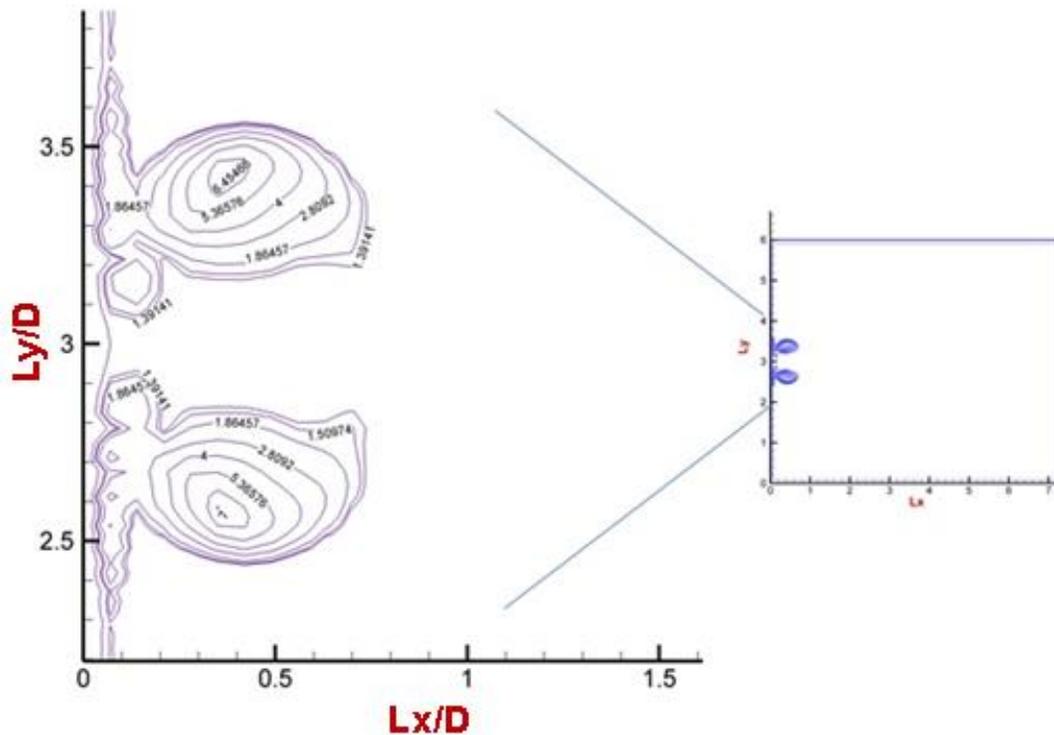


Fig. 4.1 Contornos de vorticidad en  $t^*=3$

En las fronteras del vórtice existe una vorticidad menor que la encontrada en el centro del anillo (Fig. 4.1) lo que produce un vórtice con un grosor mayor.

El desprendimiento del vórtice se produce en un tiempo corto ( $t^*=3$ ) después de la inyección, es decir, está relacionada la dimensión  $2a$  con la relación  $L/D$  de una manera importante: con una relación  $L/D$  menor, el vórtice se desprende más rápido. Esta aseveración se debe a que el vórtice no requiere más tiempo para formarse, como se verá más claramente en una relación  $L/D$  mayor. Las dos protuberancias que surgen en el centro del vórtice son los inicios de vórtices secundarios que si aparecieran teniendo un número de Reynolds más alto. Esas protuberancias son las que producen un anillo más grueso.

### 4.1.2 $Re=3295$ , $L/D=2$

Tomando en cuenta lo que se comenta en líneas anteriores, ahora el vórtice tiene una relación del doble. El resultado se muestra:

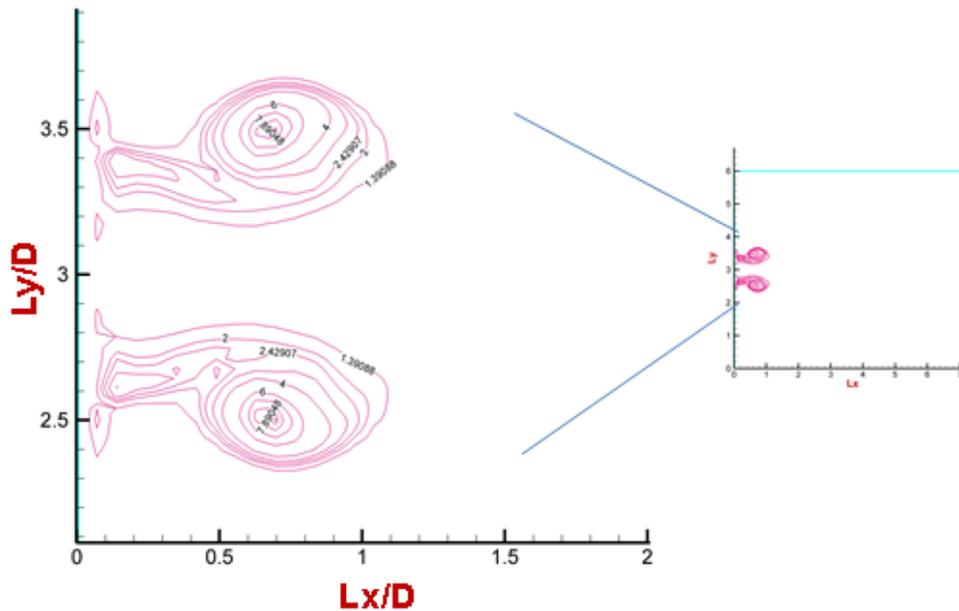


Fig. 4.2 Contorno de vorticidad en  $t^*=4$

La estructura de la formación después de la inyección del fluido es diferente, pues el chorro se prolonga hasta una distancia de  $0.5D$  (Fig. 4.2), es decir, el tamaño del radio del vórtice anular. El vórtice anular comienza ya a desprenderse cuando la inyección no termina, lo que provoca un vórtice con menor grosor que el anterior.

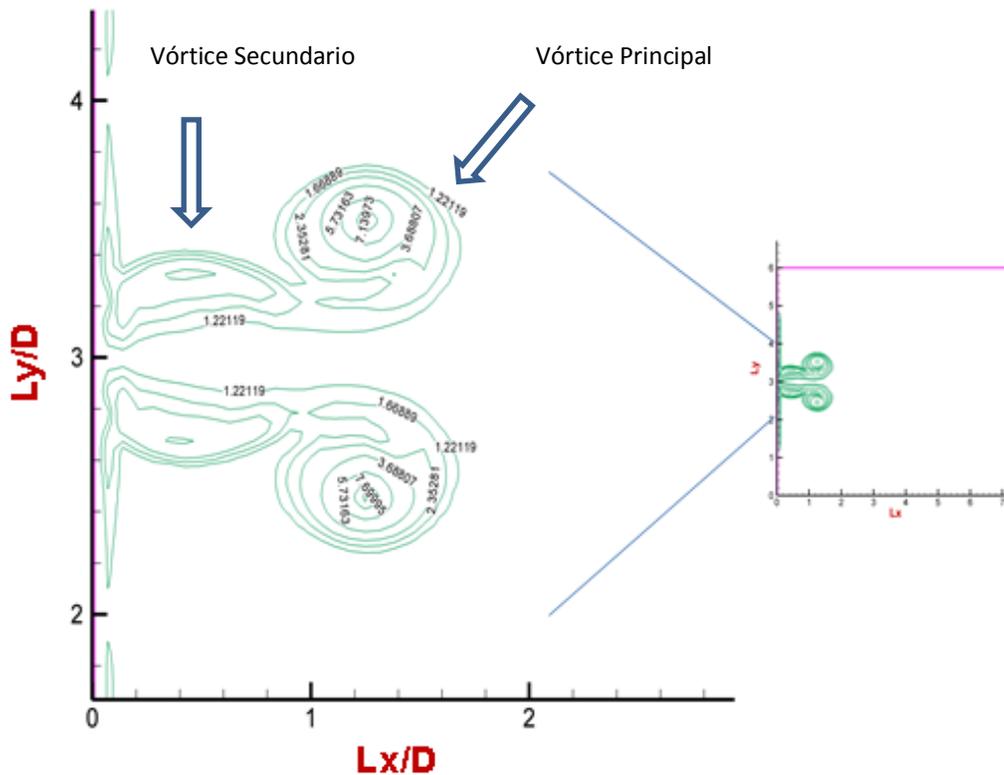
Los contornos son simétricos. Nuevamente en el centro de ambos vórtices se tiene la máxima vorticidad. La aparición del chorro en el centro del anillo provoca que la circulación sea menor.

El vórtice tiene una estructura uniforme, es decir, no hay distorsión del anillo en la parte superior o en la parte inferior del mismo; además en la parte exterior del anillo existe una estructura más uniforme que en  $L/D_0=1$ . Con la relación  $L/D_0=2$  el vórtice se amplía hasta una distancia de  $1D$ , prácticamente el doble con relación al caso anterior.

Por medio del chorro en el centro del vórtice se realiza la inyección del fluido y eso provoca una vorticidad mayor con un tamaño característico menor. El fluido se enrolla más rápido por la fuerza centrípeta que el fluido experimenta hacia el centro del anillo, en donde la vorticidad es mayor.

### 4.1.3 $Re=3295$ , $L/D=3$

El último de los casos con un número de Reynolds alto resume lo que se comenta en las líneas anteriores: debido a que la relación de  $L/D$  es grande, el fluido forma un anillo de radio mejor definido.



cual se puede observar en la periferia del mismo, en donde se nota una curvatura más uniforme con respecto a las anteriores. Una relación  $L/D$  mayor, produce vórtices anulares con mejor morfología.

#### 4.1.4 $Re=2800$ , $L/D=1$

Se inicia el primer estudio de la formación de vórtice anular con un número de Reynolds menor.

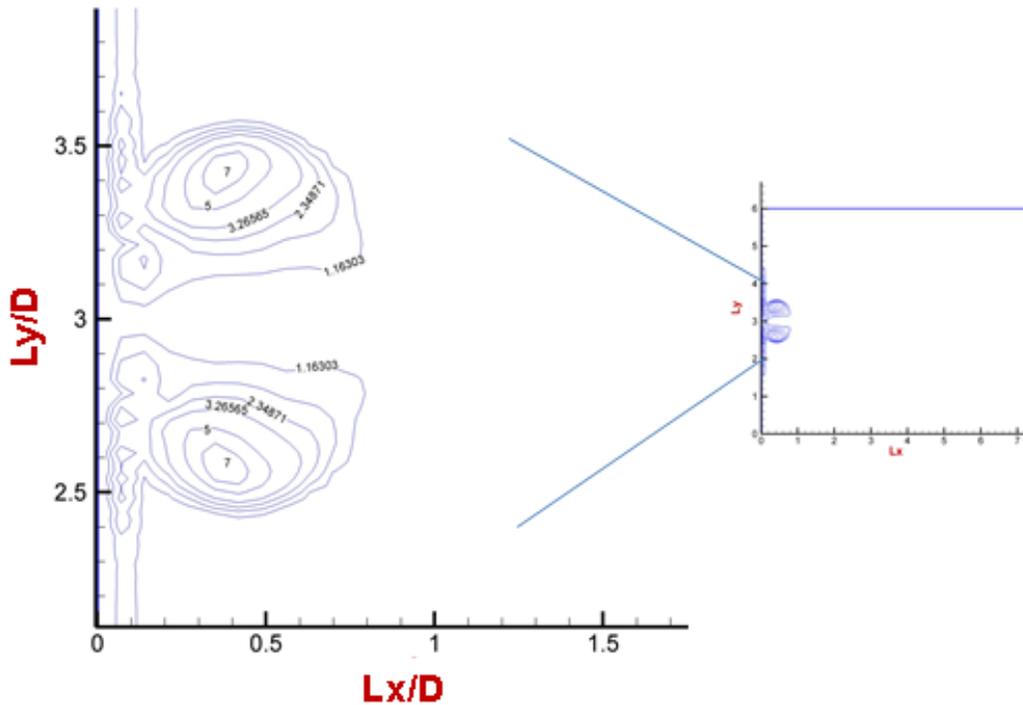


Fig. 4.4 Contornos de vorticidad en  $t^*=3$

Con la relación  $L/D$  menor, el chorro no aparece en la formación (Fig. 4.4) y además la periferia del vórtice anular es inestable, no existe una estructura definida, que se traduce en un anillo con la aparición de protuberancias al inicio de la inyección. Una relación  $L/D$  pequeña para este número de Reynolds provoca que el vórtice anular se desprenda más rápido y que inicie su movimiento más rápidamente que con un número de Reynolds mayor.

El valor de la vorticidad en la última línea del vórtice anular tiene un valor más bajo que en el caso de  $Re=3295$ , aunque en el centro tiene una vorticidad ligeramente mayor. El chorro que se encuentra en el centro del vórtice anular es grueso y por la poca relación  $L/D$ , el vórtice se desprende con mayor velocidad para iniciar su desplazamiento.

El centro del vórtice al momento de desprenderse está a una distancia de  $0.4D_0$ , que significa que el fluido se enrolla al inicio.

Revisando este caso para un número de Reynolds mayor es de observarse que no hay gran diferencia uno con respecto del otro, entonces en un rango de número de Reynolds pequeño no hay cambios significativos en el desprendimiento del anillo. La aseveración anterior contribuye a que no es necesario tener un número de Reynolds alto para crear un vórtice anular con las características comentadas, lo cual en algunas aplicaciones significa grandes ventajas, dado que se tienen resultados similares si se sabe con cuales variables se obtiene lo requerido: más vorticidad, más circulación, etc.

#### 4.1.5 $Re=2800$ , $L/D=3$

La morfología del vórtice anular a partir del chorro homogéneo es mostrada:

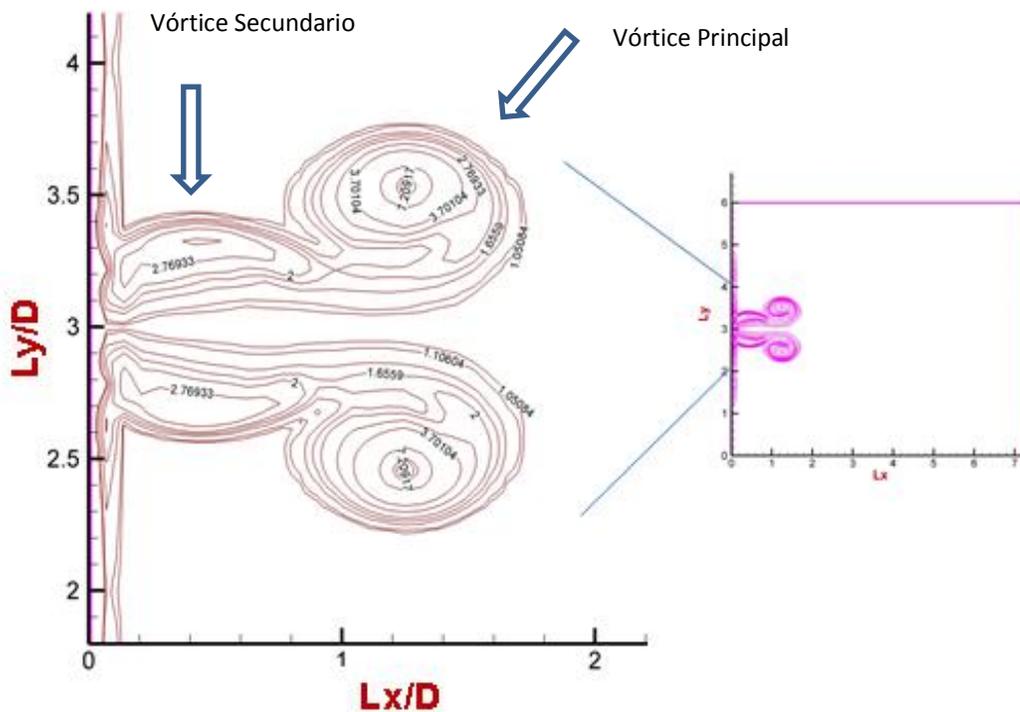


Fig. 4.5 Contornos de vorticidad en  $t^*=6$

Una relación  $L/D=3$  genera un vórtice anular mejor definido (Fig. 4.5). Notoriamente el contorno del vórtice anular es casi circular debido a que  $L/D$  grande propicia a que el fluido se pueda enrollar con tiempo suficiente y se traduce en un contorno casi perfecto. Desde la vista sin acercamiento, se observa que prácticamente existe un anillo perfecto formado por el fluido. Los contornos de la vorticidad en la periferia del anillo principal son menores debido a que el fluido circula más lento, y provoca que el anillo sea más grueso.

En el centro del vórtice, la vorticidad es más alta, pero menor al obtenido en  $Re=3295$  (Fig. 4.3) de 7.69, lo que comprueba que el vórtice anular es más grueso con un número de Reynolds menor. El chorro en el centro del vórtice es más pronunciado respecto al caso anterior debido a que el fluido no es inyectado con la fuerza suficiente provocando que el

anillo sea alimentado por un periodo de tiempo largo. Entre mayor sea el número de Reynolds, el chorro es más delgado y más estirado.

#### 4.1.6 $Re=1200$ , $L/D=3$

El último de los casos a estudiar es el número de Reynolds más pequeño de los tres. Se comentó que el cálculo con una relación  $L/D=1$  no puede ser estudiado debido a que el tiempo de cálculo no es suficiente para que el vórtice llegue a la pared vertical. Para que eso fuera posible, se requiere de un tiempo aproximado de 75, un 50% más que el tiempo expresado en los demás cálculos.

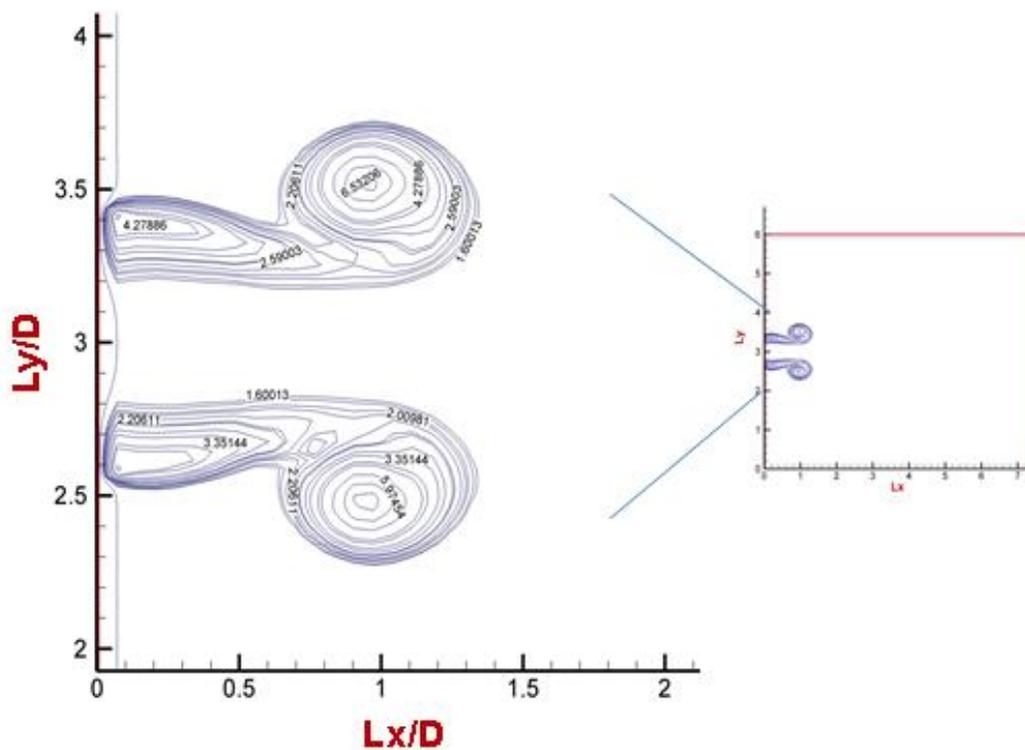


Fig. 4.6 Contornos de vorticidad en  $t^*=5$

Analizando la similitud con respecto a los casos anteriores a la misma relación  $L/D=3$ , es de notar que en la periferia del vórtice exterior se tiene una circunferencia casi perfecta (Fig. 4.6). La máxima vorticidad en el centro es la menor de los 3 casos estudiados en los 3 números de Reynolds diferentes, lo que significa que el vórtice anular en el presente caso es el más grueso. El chorro se extiende hasta una distancia de  $0.65D$ , el menor de los 3 casos, debido a que el número de Reynolds. La formación del vórtice, cuyo centro se encuentra aproximadamente a  $0.95D$ , nuevamente depende del tiempo en que es inyectado el fluido. Hasta aquí, lo que se ha estudiado son los resultados del momento en el cual el vórtice se forma y está siendo expulsado.

## 4.2 Impacto

El impacto de cada uno de los vórtices al momento de llegar a la pared vertical es lo estudiado en esta sección. Este impacto depende de varios factores, entre los cuales destaca la relación  $L/D$ .

A continuación se explican los efectos que produce la relación  $L/D$  en los vórtices en el instante en que éstos experimentan un impacto, así como la influencia del número de Reynolds en los mismos. Debido a que el impacto del vórtice se visualiza mejor en 3 dimensiones, se explican los resultados de esta manera.

En cada uno de los casos estudiados se hace referencia de 9 tiempos diferentes con el mismo valor del segundo invariante de la velocidad ( $Q$ ). Esta variable determina las regiones en las cuales se tiene rotación del fluido, y de esta manera encontrar los vórtices que se forman. Para una comparación adecuada entre los resultados con diferentes números de Reynolds y con diferentes relaciones  $L/D$ , se hace un estudio con los mismos valores de la variable  $Q$  en cada uno de los casos. Esto último con la finalidad de conocer el comportamiento del vórtice instantes previos al impacto, en el impacto y después del impacto.

La vista en 3D hace posible que las estructuras de criterio  $Q$  puedan visualizarse mejor. Cuando existe impacto de un vórtice anular contra la pared, lo que se tiene es la aparición de vórtices secundarios que surgen después del impacto debido a la generación de vorticidad en sentido contrario al del anillo. La respuesta del fluido hace posible la expansión del fluido a lo largo de la pared vertical, incrementando el radio y disminuyendo la circulación. El tamaño característico de mayor magnitud provoca vórtices en la pared grandes, debido al choque y a la reacción. Este fenómeno es muy similar a una “explosión”.

Los tiempos del impacto se toman desde que el vórtice se aproxima a la pared hasta el momento en que se propagan los 2 vórtices (principal y secundario).

Resumiendo:

Evento	Re	Tiempo impacto ( $t^*$ )
1	3295	47
2	3295	35
3	3295	31
4	2800	47
5	2800	32
6	1200	35

Tabla. II Tiempos exactos de impacto vórtice-pared

### 4.2.1 $Re=3295$ , $L/D=1$

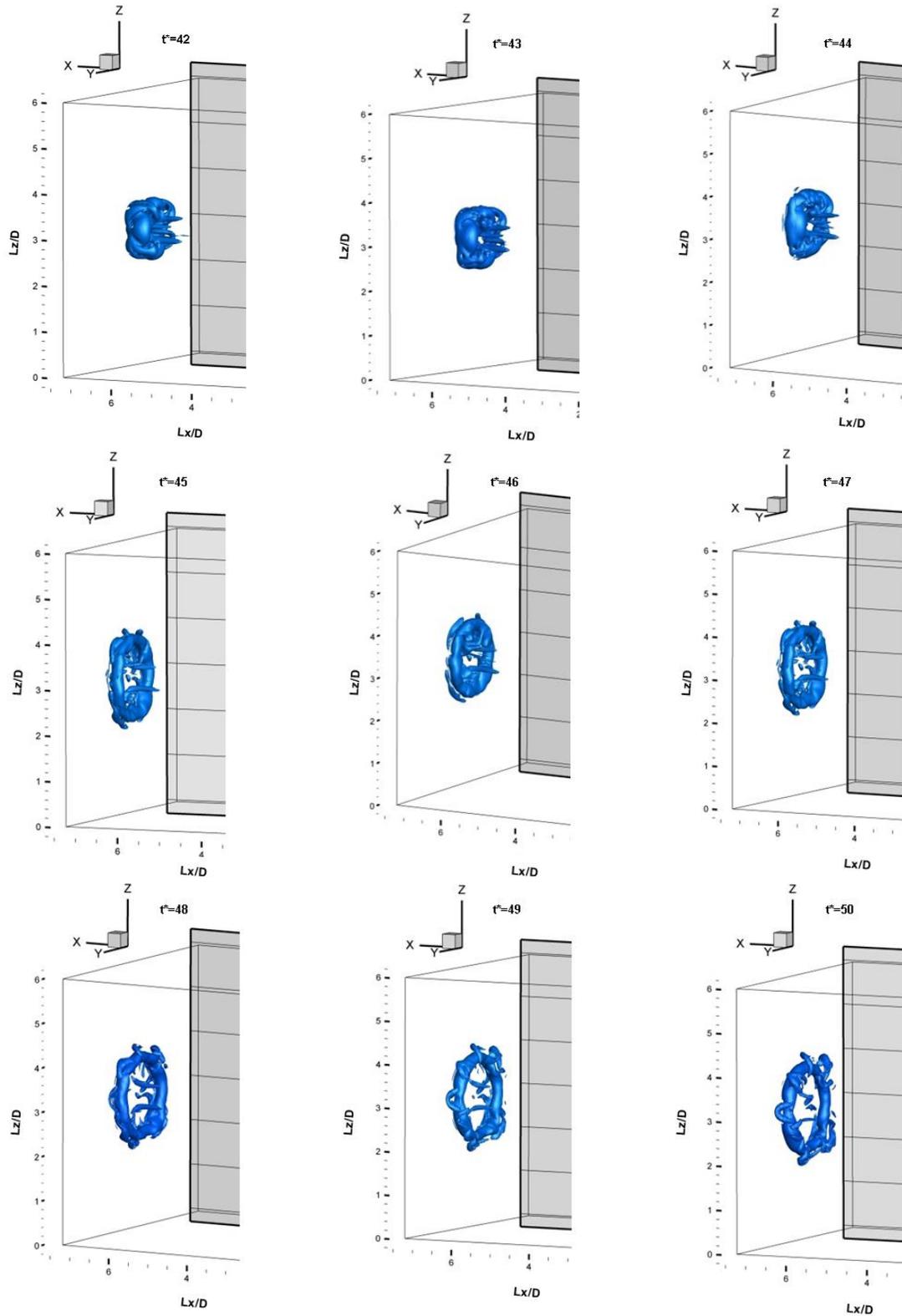


Fig. 4.7  $Q=0.25$

4.2.2  $Re=3295$ ,  $L/D=2$

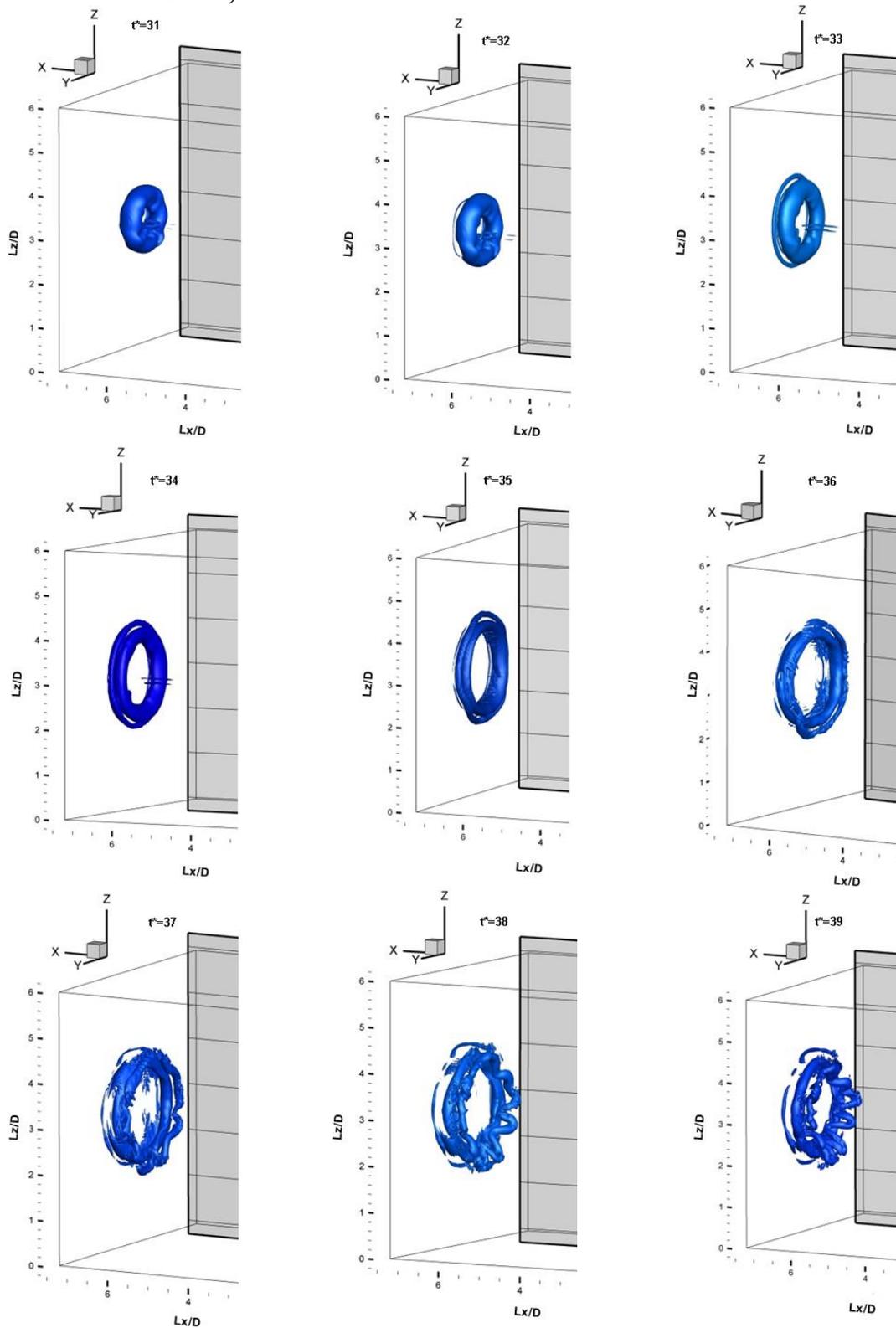


Fig. 4.8  $Q=0.25$

4.2.3  $Re=3295$ ,  $L/D=3$

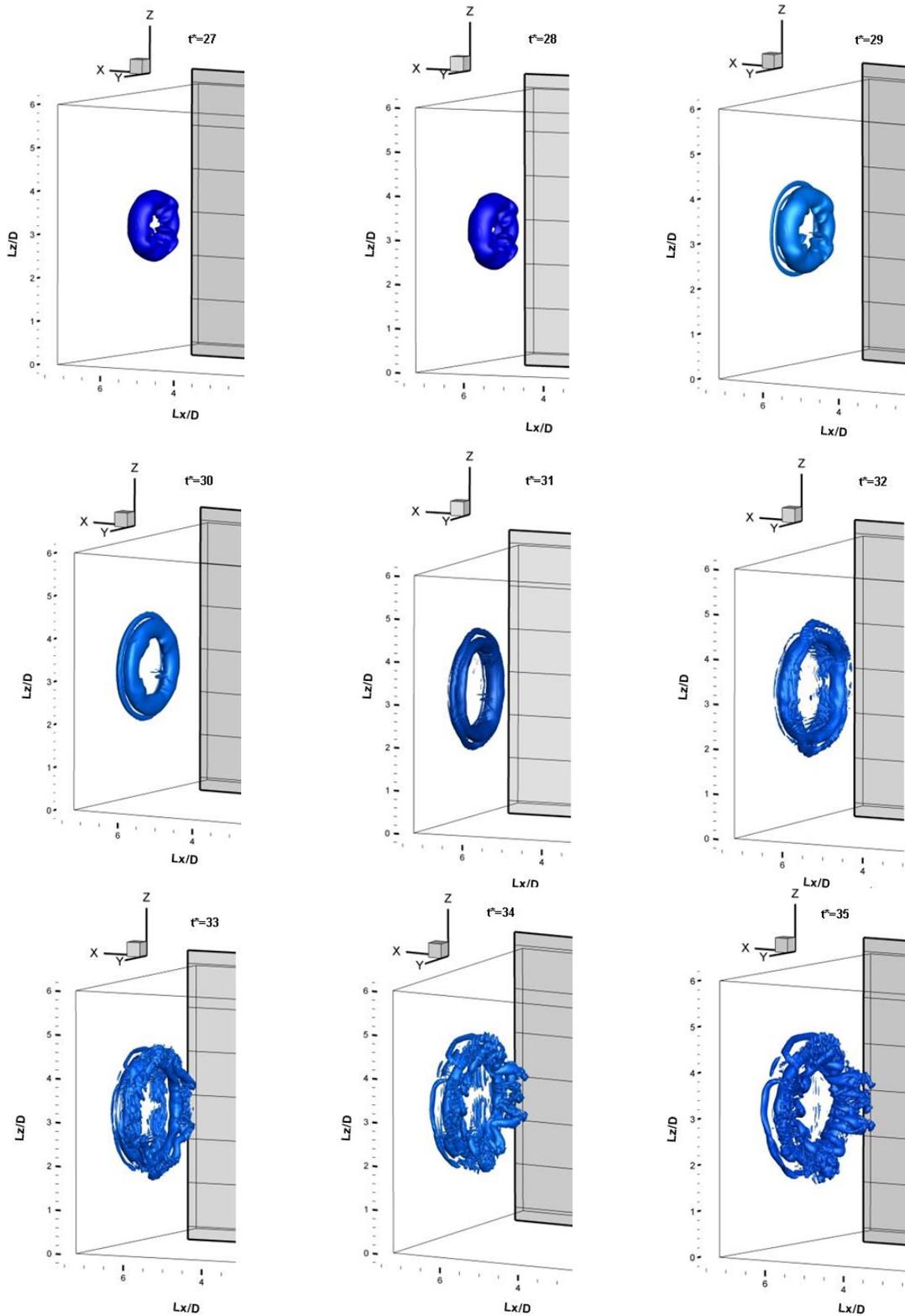


Fig. 4.9  $Q=0.25$

4.2.4  $Re=2800$ ,  $L/D=1$

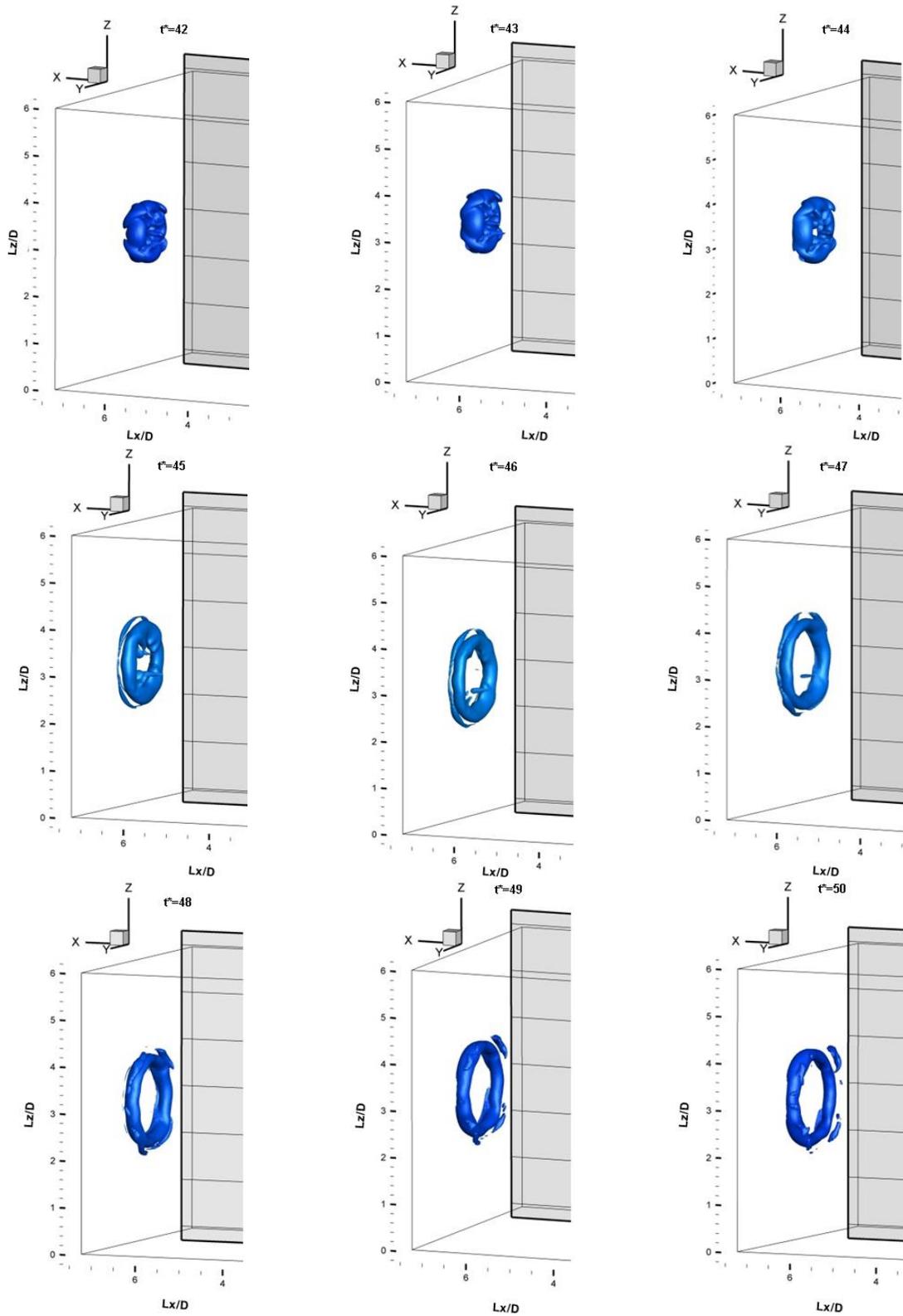


Fig. 4.10  $Q=0.25$

4.2.5  $Re=2800$ ,  $L/D=3$

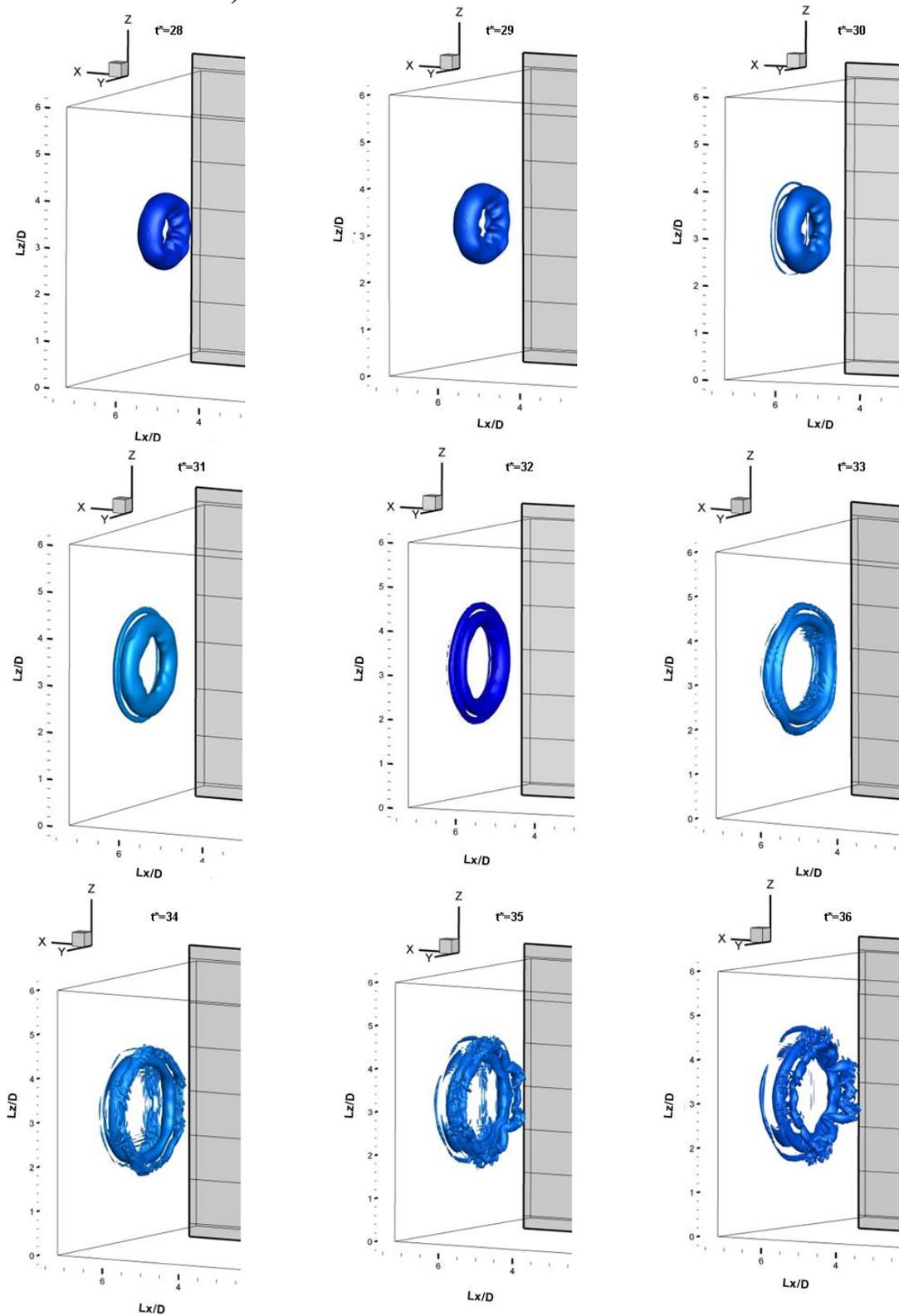


Fig. 4.11  $Q=0.25$

4.2.6  $Re=1200, L/D=3$

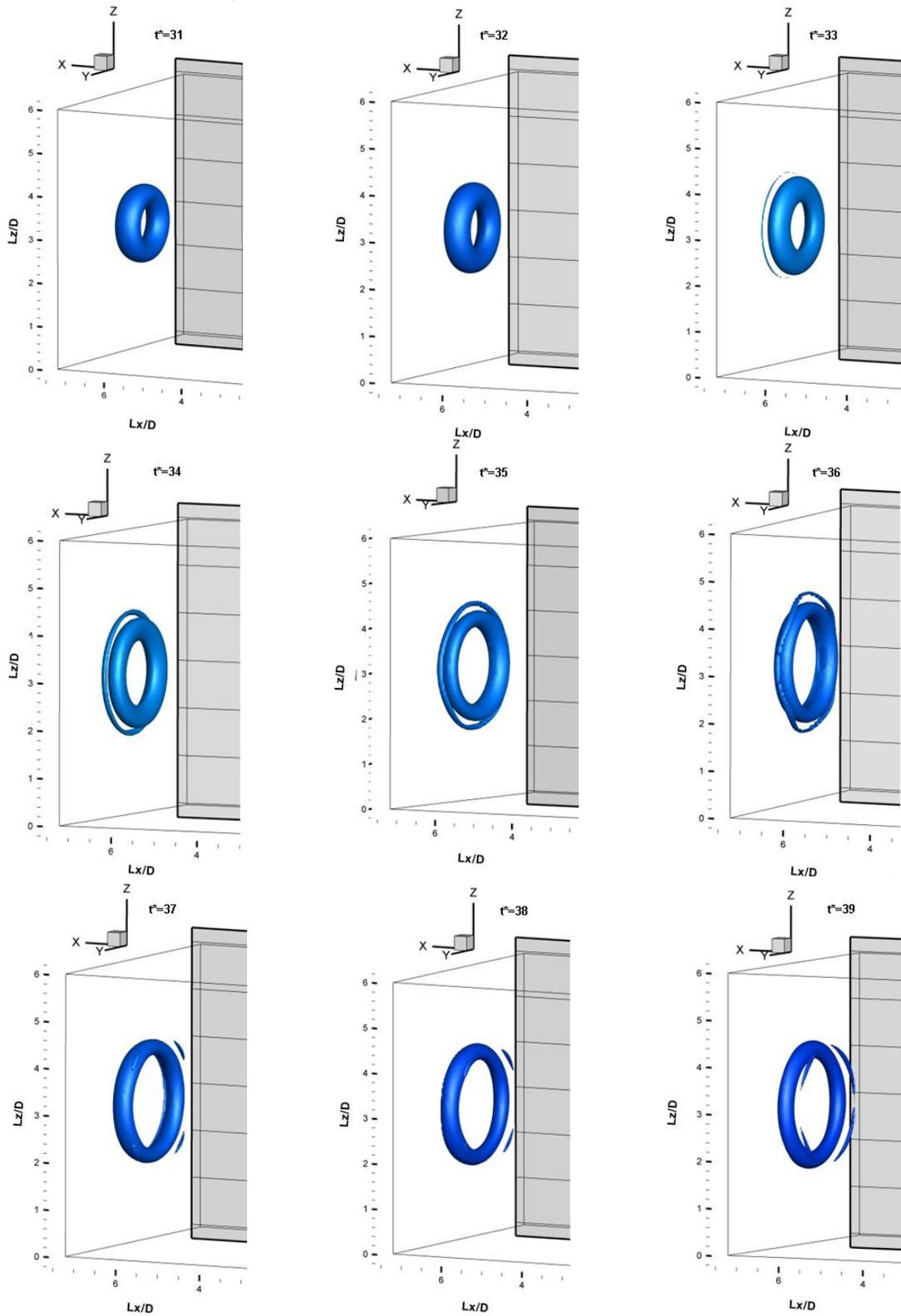
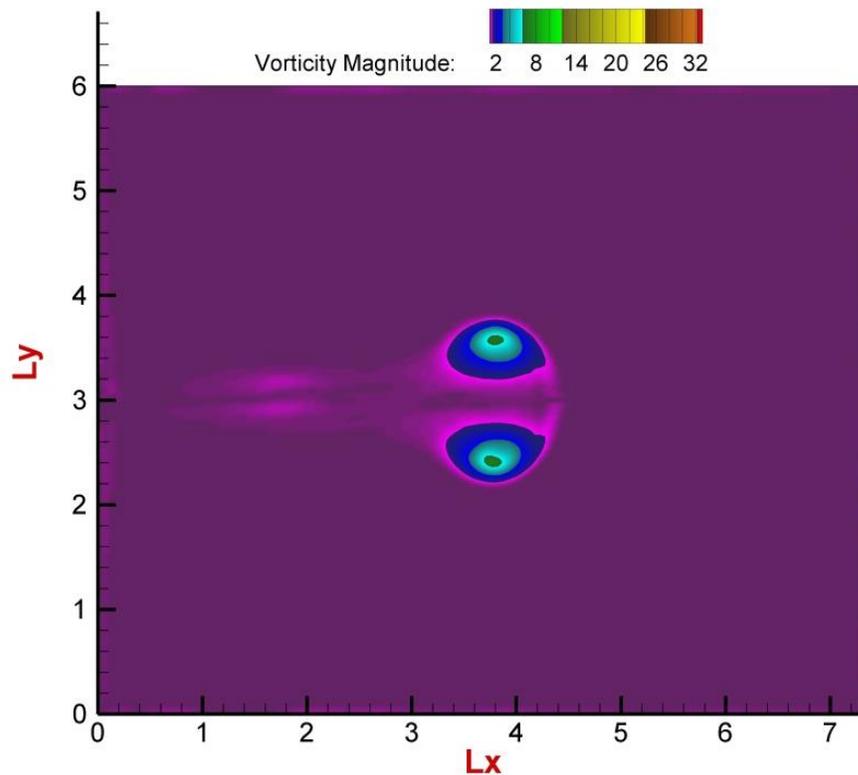


Fig. 4.12  $Q=0.25$

# Capítulo V

## Conclusiones



Contornos de vorticidad<sup>13</sup>

Se simuló numéricamente la formación de vórtices anulares con el propósito de analizar la importancia de las variables comentadas en el capítulo I, las cuales fueron modificadas para comprobar las siguientes hipótesis:

- modificando la relación  $L/D$ , se tienen diferentes comportamientos del vórtice: el radio, velocidad de convección, velocidad máxima, circulación, formación e impacto.
- La velocidad del vórtice se incrementa conforme la relación  $L/D$  y el número de Reynolds son altos.

<sup>13</sup>  $Re=3295$ ,  $L/D=3$

- El tamaño característico del vórtice anular (grosor del anillo) depende del número de Reynolds.
- El impacto del vórtice tiene mayor velocidad y mayor fuerza dependiendo de la relación  $L/D$  y del número de Reynolds.

Los resultados obtenidos mediante el código numérico fueron comparados con los resultados experimentales proporcionados, y en la validación fueron corroborados. Por tanto:

- Se valida código numérico en LES (Large Eddy Simulation) para la formación de vórtices anulares con fluidos incompresibles.
- Se estudia la influencia del número de Reynolds y de la relación  $L/D$  en la formación de vórtices de anillo.

Al incrementar el número de Reynolds y la relación  $L/D$ , el grosor del vórtice sufre modificaciones porque el tamaño característico está basado en la circulación.

En el caso de una relación  $L/D$  menor, combinada con un Reynolds menor, se observa un grosor mayor, debido al cambio del tamaño característico estudiado en el capítulo IV.

Conforme se obtienen los resultados al modificar el Reynolds y la relación  $L/D$ , se citan diferentes comportamientos de las variables mencionadas en capítulo I:

- Radio: se incrementa en el impacto a su valor máximo cuando se ha considerado un Reynolds alto y una relación de formación alta. La magnitud del radio en el impacto es proporcional al  $Re$  y a  $L/D$ .
- Velocidad de convección: modificada por el Reynolds y la relación de formación debido a que es proporcional con estos parámetros. La velocidad con Reynolds alto y relación  $L/D$  alta es la de mayor magnitud.
- Velocidad máxima: a la salida del fluido debido a que es el momento de desprendimiento. Una vez comenzado el desplazamiento, el vórtice anular pierde velocidad por la interacción del anillo y el entorno. El resultado final es el decremento de la velocidad hasta el impacto.
- Circulación: determinada al momento de la formación, donde el fluido toma la forma de anillo y se desprende. La expresión matemática de la misma explicada en el capítulo I hace constar que se tiene una mayor circulación cuando hay mayor relación  $L/D$ . El tener una longitud  $L$  con magnitud alta, provoca un fluido con circulación mayor.

- El tamaño característico de vórtice ( $2a$ ) se modifica debido a que el área utilizada por el vórtice es mayor con alto Reynolds y mayor relación  $L/D$ . Entre más instantes de tiempo sean empleados para formar el vórtice, más grueso se vuelve.

El choque del vórtice con la pared vertical está relacionada también con la relación  $L/D$  y con el número de Reynolds. Cuando ambos son grandes, el vórtice se impacta más rápidamente contra la pared. El fluido que choca contra la pared tiene una morfología que depende de la intensidad del impacto. Con un Reynolds menor, el fluido se esparce por la periferia tiene poca cantidad comparado con el de un número de Reynolds mayor.

### 5.1 Recomendaciones

Uno de los problemas que se presentan en el análisis de vórtices anulares es el tiempo de cálculo debido a que el método de solución así lo requiere. Las simulaciones numéricas tienen el tiempo de cálculo proporcional al mallado utilizado: si el problema se quiere resolver con una malla con baja cantidad de nodos, el tiempo de cálculo es menor. En cambio, si el mallado es fino, entonces la cantidad de nodos aumenta, lo que se traduce en un tiempo de cálculo mayor, además de un aumento en los requerimientos computacionales que ello implica.

### 5.2 Estudios a Futuro

Se ha propuesto el uso de mallas cilíndricas (Fig. 5.1) porque algunas aplicaciones pueden necesitar este sistema de referencia (mezcladores tubulares, conductos térmicos). Usando el sistema cilíndrico ya no es necesario obtener resultados en sistema cartesiano y después inferirlos a sistema cilíndrico, sino que los resultados serían utilizados ya de manera directa.

En el estudio presentado, la salida del fluido se realiza con base a la relación  $L/D$  de manera constante, en otras palabras, la inyección se mantiene con las mismas condiciones durante el recorrido numérico del pistón (relación  $L/D$ ). Sin embargo, uno de los posibles trabajos a futuro es revisar el fenómeno del vórtice anular si éste es inyectado con base a una función seno, es decir, un movimiento armónico a lo largo de  $L$ .

Esta configuración fue propuesta en su momento, sin embargo, es mejor estudiarla con más detalle en un trabajo posterior, puesto que en este momento se realiza el estudio con base a lo que se ha investigado anteriormente. De realizar el apartado anterior, entonces se habla ya de una modificación de la formación de vórtices anulares porque siempre se ha trabajado con salida de fluido constante, tanto de manera experimental como de manera numérica. Los nuevos descubrimientos sobre la formación de estos vórtices significarían otra rama de investigación.

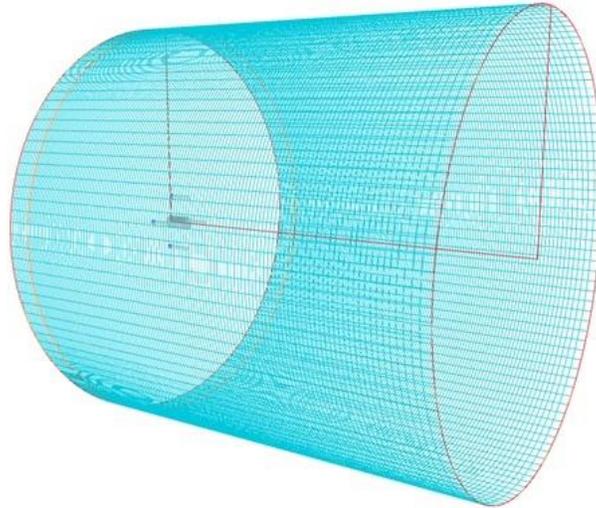


Fig. 5.1 Malla cilíndrica para trabajo a futuro en vórtices anulares<sup>14</sup>

Siguiendo en esta misma tendencia, se ha revisado lo que se presenta cuando se tiene una salida de fluido contante, sin embargo solamente se propone que la salida del fluido sea por un vórtice a la vez, es decir, que en un tiempo dado, se forma un vórtice y es el que se impacta con la pared. Un problema a futuro es considerar el caso en el cual el vórtice sea seguido por otro que se forma instantes después de formarse el primero, y claro, revisar lo que sucede cuando los vórtices se mueven a lo largo del dominio de control y la manera en que interactúan entre ellos. Las variables que se pueden usar nuevamente para el estudio de este caso nuevo son las mismas empleadas en este trabajo, para así obtener más información de la interacción entre vórtices anulares que surgen de la misma fuente con solamente instantes de tiempo de diferencia.

El trabajo presente estudia una sola salida de fluido, sin embargo, también se puede pensar en que el vórtice anular no se impacte contra una pared vertical, sino que se impacte contra otro vórtice, y para lograr eso, se habla de 2 salidas de fluido, en otras palabras, que por la pared vertical se forme otro vórtice anular y que se desplace con la misma, con mayor o con menor velocidad de convección que el producido en la pared izquierda del dominio de control. Sería interesante revisar lo que sucede con la vorticidad, las velocidades máximas, los radios, la circulación, el tamaño característico y el impacto de ambos vórtices. Una primera aproximación que se puede tomar en consideración es que se forman con la misma relación  $L/D$ , para después analizar lo que se puede presentar si se habla de una relación diferente entre los 2 vórtices.

La temperatura en este estudio no se ha estudiado porque las temperaturas son constantes y son iguales: la entrada, la temperatura del fluido al interior de la cavidad, la temperatura de la pared vertical en dónde se produce el impacto y la temperatura de las otras paredes; en otras palabras, todo el sistema permanece a una temperatura constante. En el momento en que una de las temperaturas aumente o se reduzca, se habla ya de transferencia de calor y se habla entonces de otro estudio completamente diferente. Para comenzar, la ecuación de la

<sup>14</sup> Cervantes M., Luis M; “Simulación de un quemador”, Instituto de Ingeniería, UNAM. 2013

energía tiene un peso muy importante porque en ella se encuentra la temperatura como variable importante significativa.

El estudio con transferencia de calor en los vórtices anulares es más específico, puesto que ya no se habla entonces de un chorro homogéneo como se comentó en este trabajo, sino que se pasa a los chorros no homogéneos, en donde las densidades de los fluidos ya no son las mismas por el cambio de temperaturas. El cambio de las temperaturas impacta no sólo en las densidades, sino que además otra variable afectada es la viscosidad, tanto la cinemática como la dinámica, y por si fuera poco, el número de Reynolds también se define a partir de la viscosidad, por lo cual ya no es un estudio tan sencillo de realizar. Como es de notar, el fenómeno cambia completamente sus propiedades termodinámicas y físicas, para lo cual las ecuaciones que resuelven esta nueva configuración cambian. Dado que el código numérico es válido para fluidos incompresibles, debe hacerse una validación antes de tratar de resolver el fenómeno propuesto anteriormente, es decir, el ingresar la temperatura en estudios numéricos, la validación proporciona la seguridad en los resultados obtenidos. Como se puede ver, son varios los trabajos que se pueden investigar a partir de variaciones en las condiciones del fenómeno original estudiado aquí, con las condiciones que se explicaron sobre el mallado, las condiciones térmicas y las aplicaciones a las cuales pueden significar los nuevos descubrimientos.

Los vórtices anulares seguirán siendo objeto de investigaciones por más tiempo, y eso significa que los campos de desarrollo en el tema quedan abiertos para los que decidan continuar con este tipo de fenómenos tan curiosos de la mecánica de los fluidos.

## 5.3 Referencias

- [1] Helmholtz, Hermann von; “On Integrals of the Hydrodynamical Equations which Express Vortex-motion”,  
[http://www.21stcenturysciencetech.com/Articles\\_2009/Helmholtz.pdf](http://www.21stcenturysciencetech.com/Articles_2009/Helmholtz.pdf)
- [2] Akhmetov, D.G.; “Vortex Rings”. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. ISBN: 978-3-642-05016-9.
- [3] Didden, Norbert; “On the Formation of Vortex Rings: Rolling-up and Production of Circulation”. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Vol. 30, 1979
- [4] Vidal Fernández, Ángel; Soria Verdugo, Antonio; “Dinámica de Chorros Laminares de Alcohol en Agua con Flotabilidad Positiva”, Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos, 2011.
- [5] Mohseni, Kamran; Ran, Hongyu; Colonius, Tim; “Numerical Experiments on Vortex Ring Formation”. Journal of Fluid Mechanics, Volume 430, 2011, pp 267-262 .
- [6] Gharib, Morteza; Rambod, Edmond; Shariff, Karim; “A Universal Time Scale for Vortex Ring Formation”. Journal of Fluid Mechanics, Volume 360, 2000, pp 121,140.
- [7] Doom, Jeff; Mahesh Krishnan. “Direct Numerical of Auto-ignition of a Hydrogen Vortex Ring Reacting With Hot Air”. Combustion and flame, 156, 2009, pp.815
- [8]Gottlieb, Turkel. “Dissipative Two-Four Methods for Time Dependent Problems”. Mathematics of Computation, 30. 703-723, 1976
- [9] Mansfield, John R.; Knio, Omar M.; Meneveau, Charles; “Dynamic LES of Colliding Vortex Rings Using a 3D Vortex Method”. Journal of Computational Physics 152, 1999, pp 305-345.
- [10] Liu, Chung Ho. “Vortex Simulation of unsteady flow Shear Flow Induced by a Vortex Ring”. Computers and Fluids 31, 2002, pp 183-207.
- [11] Krueger, Paul S.. “Circulation and Trajectories of Vortex Rings Formed From Tube and Orifice Openings”. Physics D 237, 2008, pp 2218-2222.
- [12] Visbal, Miguel R.; Gaitonde, Datta V.; “On the Use of High-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes”. Journal of Computational Physics 181, 2002, pp 155-185.

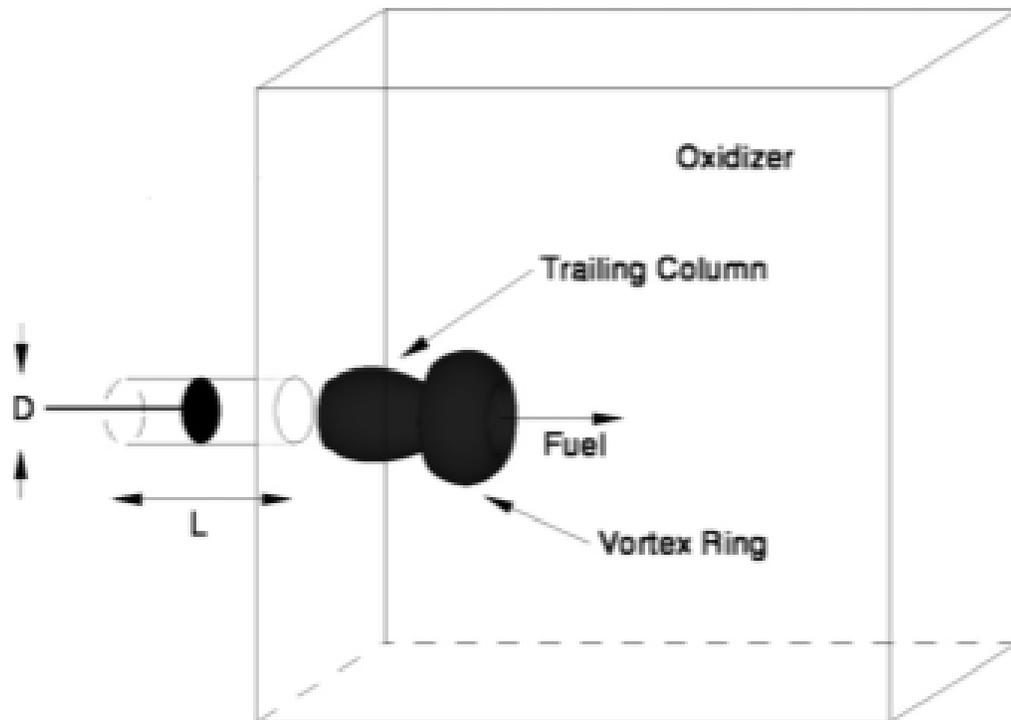
[13] Salinas-Vázquez, M.; de la Lama, M. A.; Vicente, W.; Martínez, E.; Palacio, A.; Rodríguez, A. “Simulación de Grandes Escalas de un Flujo Alrededor de un Arreglo de Tubos de Sección Circular”. SOMIM, Vol. 3, No. 4, 2010, pp 143-150.

[14] Martín Ortega, Elena B. “Flujos Turbulentos”. Universidad de Vigo. 2006

[15] Palacios, Geldeablum, Solorio, Salinas Vázquez and Zenit; “Interaction Of A Vortex Ring With Natural Convection Layer”, Physics of Fluids Submitted.

# Apéndice A

## Estudios Similares



Domm, Mehesh, 2009 [7]

Los estudios mostrados en este apartado tienen similitud con el problema estudiado en este trabajo, así como los resultados que fueron publicados. Algunos de esos estudios fueron realizados mediante experimentos en laboratorios y otros de manera numérica. El primer estudio a revisarse es una simulación numérica Domm, Mahesh [7] en la cual, por medio de un vórtice de anillo, se pretende realizar una mezcla homogénea de hidrógeno en aire caliente. La mezcla de estos 2 fluidos dentro de una cámara de mezclado se realiza bajo las siguientes condiciones:

- Temperatura 300K
- Volumen de fluido conocida
- Velocidad a la salida conocida
- Área de salida del fluido conocida
- La circulación del anillo a estudiarse

Cada una de estas propiedades son analizadas bajo el estudio de simulación numérica directa, en dónde se analizan las reacciones químicas necesarias para obtener una mezcla de fluidos más homogénea. La simulación numérica directa (DNS, Direct Numeric Simulation) difiere de la simulación que se realiza en este trabajo (LES, Large Eddy Simulation), porque en la simulación numérica directa se estudian todos los efectos del fenómeno por medio de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, y en la simulación que resuelve el problema actual es la simulación de grandes escalas, que será explicado a detalle posteriormente. La finalidad de este trabajo numérico consiste es revisar las condiciones en las cuales se puede obtener una buena mezcla de fluidos, y además por haber transferencia de calor, se revisa también el efecto del número de Lewis, la temperatura oxidante dentro de la cámara y las configuraciones a diferentes medidas de  $L/D$  de salida del fluido. Como se puede observar, esta medida es de las más importantes en el estudio de los vórtices de anillo, porque de ella depende el radio del vórtice, su rotación, su velocidad; en pocas palabras todo el análisis del vórtice se resume en esta dimensión  $L/D$ , junto con el Reynolds. A continuación se tiene la configuración de la simulación numérica con los elementos a tomarse en cuenta.

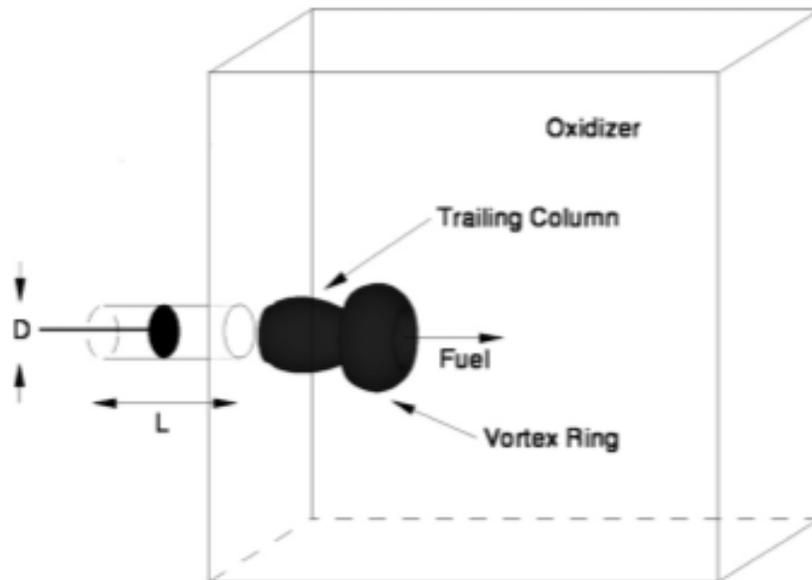


Fig. 6.1 Configuración Doom, Mahesh

Se observa que dentro de la cámara es dónde se realizará la mezcla de fluidos. Fuera del sistema de mezcla, se tiene el cilindro de inyección, su longitud, el diámetro y cómo se van formando el vórtice conforme avanza dentro del recinto cerrado. Se observa que el vórtice no tiene forma de un anillo propiamente, sino tiene forma de hongo, muy parecido al que se forma en las explosiones nucleares (que es considerado también como vórtice anular). La finalidad de este trabajo fue analizar el efecto que tiene la incorporación de un vórtice de anillo de hidrógeno en la temperatura oxidante de la mezcla dentro del contenedor térmico con aire caliente.

Las condiciones en las cuales realizaron el experimento fueron las siguientes:

- 6 eventos realizados
- $L/D$  va desde 2 hasta 6
- Temperatura desde 1200K hasta 1800K
- Tiempo de 0.25 hasta 7

Los resultados obtenidos en el trabajo mencionado fueron:

- Conforme el diámetro de la salida del fluido inyectado se incrementa, el vórtice expulsado es mucho más grande, lo que se traduce en que la mezcla de fluidos es mejor que si el diámetro es pequeño.
- Analizan la importancia de conocer la relación del pistón que empuja al fluido así como el diámetro de la salida del fluido, en otras palabras se refiere a la longitud y al diámetro del pistón.
- Como se trata de un experimento en donde se incorporan mezclas químicas, fue introducido el número de Lewis.

En la figura se puede ver la evolución de los vórtices con base al tiempo y a la relación de  $L/D$ .

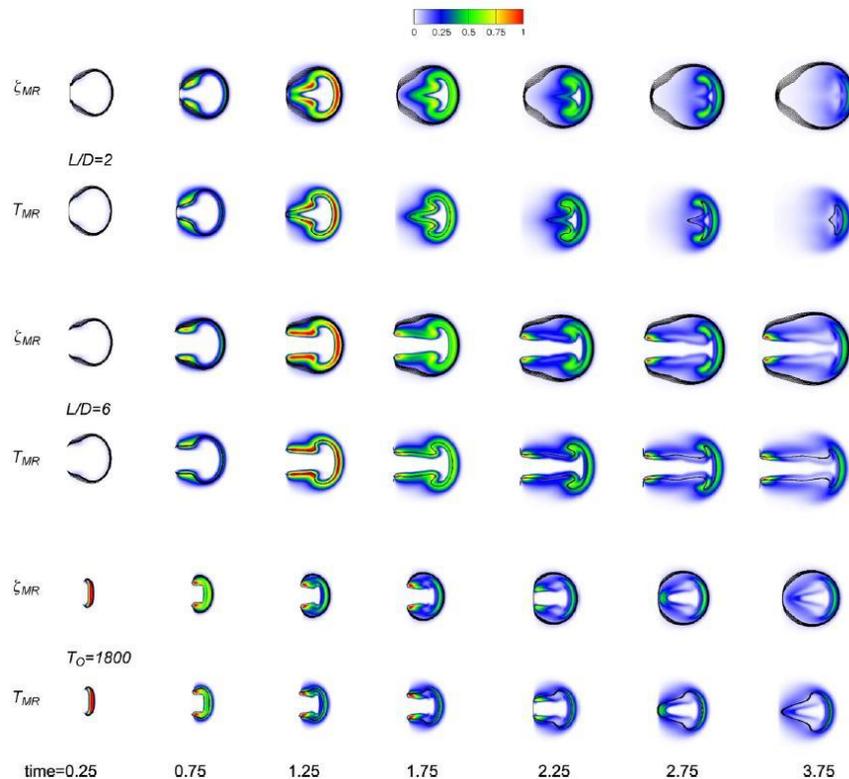


Fig. 6.2 Vórtices generados a diferentes  $L/D$

Se puede distinguir la forma de los vórtices conforme pasa el tiempo. En los 2 casos mostrados ( $L/D=2$  y  $L/D=6$ ) se puede notar que el vórtice tiene su formación justo después del tiempo 1.75. Se puede seguir revisando más información de este trabajo, pero esto es lo que se puede comparar con los casos estudiados ahora, pues esperaríamos que los vórtices generados en el trabajo que se realizó sean parecidos a los aquí mostrados.

Se pueden revisar los contornos de los vórtices de forma más detallada tal y como se muestra:

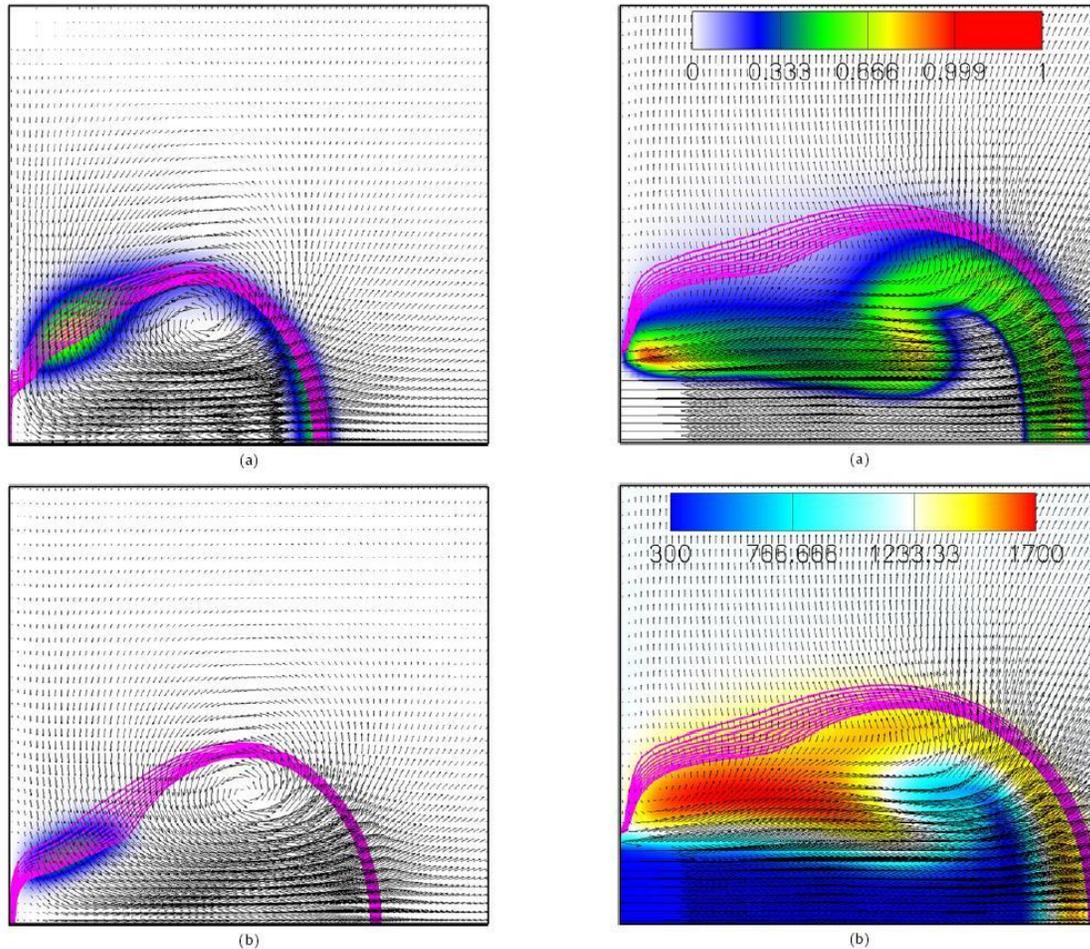


Fig. 6.3 Detalle de vectores de velocidad del vórtice generado

Se distingue la forma de los vectores de velocidad, los cuales rodean una mitad del vórtice generado y en dónde se puede apreciar la distribución de temperaturas.

En las conclusiones del artículo se comenta que los vórtices de anillo que mejor realizan una mezcla dentro del recinto aislado son los que están cerca del número de formación ( $L/D=4$ ), en otras palabras, cuando son obtenidos vórtices coherentes (según estudios de Gharib). Cuando los vórtices son mayores al número de formación ( $L/D>4$ ), entonces se presenta un fenómeno en donde se propaga hacia el núcleo del vórtice todo el calor que rodea al vórtice, esto hace que haya propagación desde el centro hacia los alrededores del

vórtice generado. En el caso de que la temperatura de oxidación sea muy alta, entonces los vórtices cambian de forma, a tal grado que pueden tener configuraciones muy diferentes, en otras palabras, cuando se inyecte fluido dentro de la cámara de mezclado se pueden obtener columnas de fluido que ayuden a la mezcla de los mismos dentro del recinto cerrado de mezcla.

Otro problema planteado del cual se obtiene información es el realizado por Vidal, Soria [4], en dónde se estudia numéricamente el desarrollo de vórtices de alcohol en agua con flotabilidad positiva. En este estudio se revisa la flotabilidad, la circulación del vórtice, el radio y la velocidad del mismo. En el trabajo expuesto por ellos, se tuvo como objetivos principales el observar la formación de los vórtices de anillo mediante estudios numéricos. En este escrito realizado en la Universidad de Madrid, España, tuvo las siguientes condiciones de frontera:

- Flujo laminar y no estacionario,  $Re=2000$
- Flujo con simetría axial, es decir, sin rotación al eje de simetría.
- Perfil de velocidad en la descarga uniforme e independiente del tiempo
- Flujo monofásico (fase líquida) y no homogéneo (diferencias de densidad)
- La presencia de la gravedad origina una flotabilidad positiva.
- Flujo isotermo, sin transporte de energía ( $T=cte$ )
- Mezcla sin reacción química.

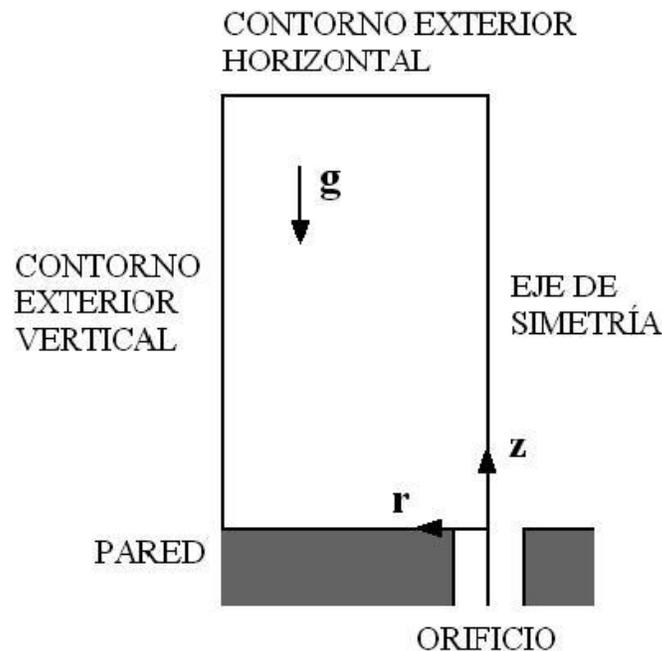


Fig. 6.5 Dominio computacional (Vidal, Soria)

Con esta información, debe estudiarse la influencia que tiene el número de Froude densimétrico en la evolución de cada una de las propiedades que se comentaron: posición, velocidad y vorticidad del centro de vórtice, circulación del vórtice y la circulación total. La

diferencia más marcada de este problema respecto al propuesto en este escrito es el orificio por dónde entrará el chorro y la masa de alcohol. En el descrito aquí, el orificio está en la parte inferior derecha del dominio de cálculo, cuando en el caso propuesto la entrada del chorro está en la parte izquierda y entra de manera horizontal, en donde, claro, la gravedad influirá de manera más determinante respecto a la circulación y a los demás parámetros que se han comentado anteriormente. Los chorros analizados por ellos fueron del tipo Didden, Gharib (ambos chorros homogéneos), y los chorros no homogéneos. Con base a sus experimentos, llegaron a los resultados que se muestran a continuación. Como la velocidad radial es nula porque así se especificó desde un principio, las velocidades restantes tienen la distribución que se muestran abajo (Figura 6.6, 6.7). En la primera de ellas se observa la distribución de velocidad ( $u$ ) en la dirección X. En la segunda, la distribución de velocidad ( $v$ ) en la dirección longitudinal del dominio de cálculo. Ambas son dependientes del tiempo.

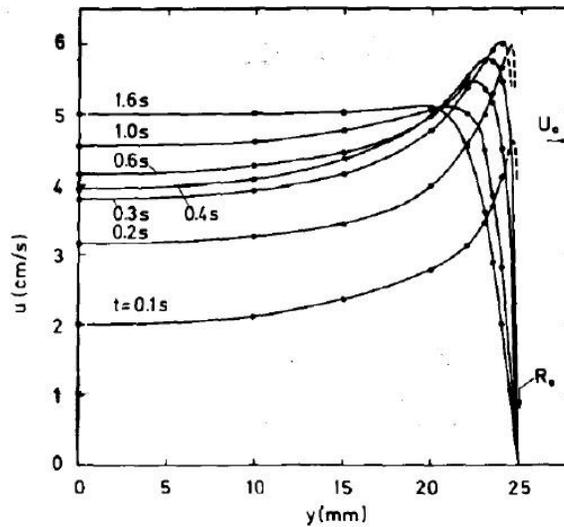


Fig. 6.6 Velocidad Axial  $z=0$  cm/s

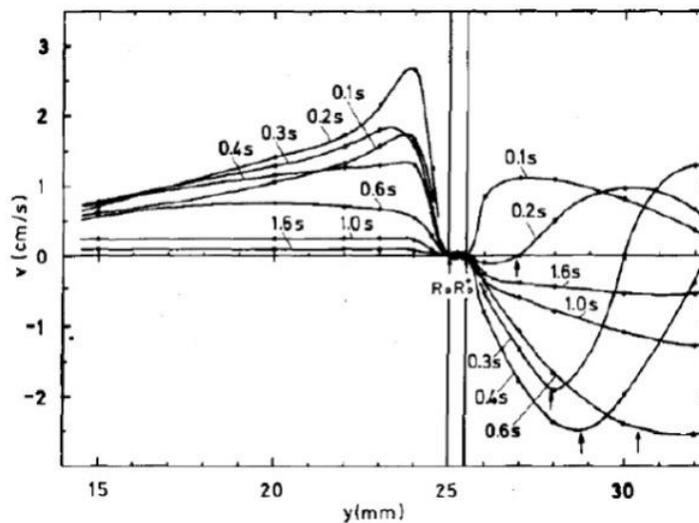


Fig. 6.7 Velocidad Radial  $z=0$  cm/s

En el caso del chorro Gharib, se obtuvieron los vórtices como se muestran:

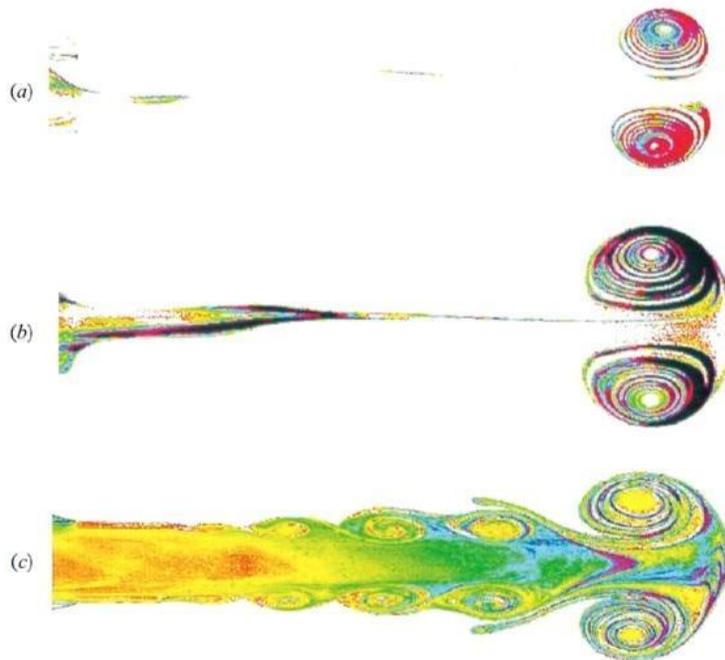


Fig. 6.8 Vórtice de chorro Gharib

Se puede observar que los vórtices se forman a diferentes  $L/D$  (2 (a), 3.8 (b), 14.5 (c)) respectivamente. Los números de Reynolds son de 2800 y de 6000 en el último caso. La formación del vórtice se describe con la siguiente gráfica:

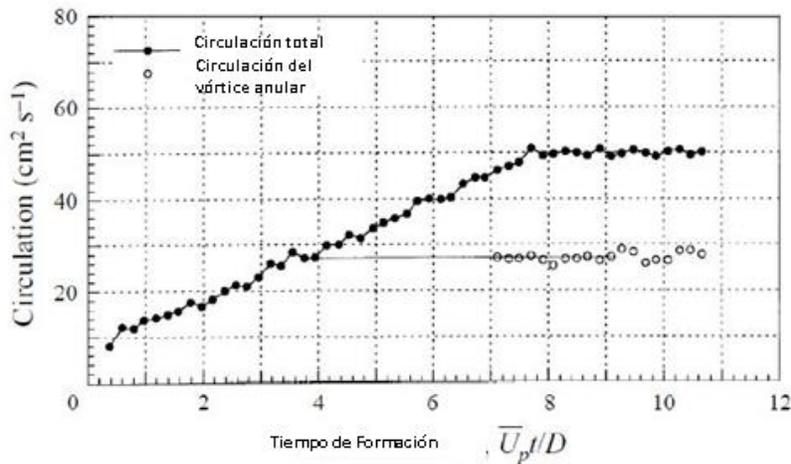


Fig. 6.9 Circulación de vórtice anular con base al paso de tiempo

Esta gráfica representa la formación de un vórtice de anillo en un tiempo de formación de  $t=4$  y un número de formación de  $L/D=8$  con  $Re=2800$ . Para el caso de los chorros no homogéneos, es necesario tomar en cuenta el número de Froude densimétrico, que se refiere a un número de Froude utilizado en chorros de densidad no constante. Para este

trabajo se realiza un estudio en chorros homogéneos. En el estudio de los vórtices anulares, se ha preferido considerar la caracterización de los mismos (Fig. 6.10).

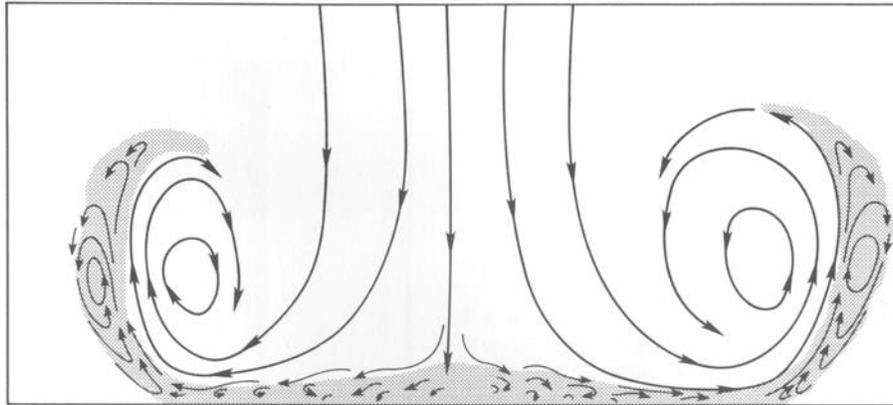


Fig. 6.10 Líneas de corriente en vórtices anulares durante un impacto<sup>15</sup>

Como se comentó, existen muchas configuraciones en los experimentos de los vórtices anulares, así como variedad de los resultados y es importante comentar que se va profundizando más y más este tema tan característico de los fluidos. Posiblemente a corto tiempo, sea más factible tener mezcladores que actúen con base a vórtices anulares como los mostrados ahora en este trabajo. Lo importante es que se distinga la necesidad de nuevos estudios con diseños y dispositivos que ayuden a la transferencia de calor y de masa a través de cavidades, recintos u otros sistemas.

Los avances técnicos, los requerimientos industriales y los nuevos diseños en instrumentación permitirán que las aplicaciones de los vórtices anulares sean más diversas en varios campos de la ingeniería, por lo cual pasarán de ser una distracción visual o un estudio en laboratorio, a ser los fundamentos de nuevos dispositivos que en un futuro podremos ver en acción en aplicaciones que parecerían impensables.

En los trabajos comentados, así como en algunos artículos que se han realizado en centros de investigación, se han detenido en analizar lo que sucede con la circulación, el número de formación, la vorticidad y la forma de los vórtices, pero no se han detenido a ver las condiciones de velocidad, del radio y de cómo afecta el cambio de una variable con respecto a otra. Las necesidades de investigación son diferentes, es por eso que se quiso adentrar más en este tema revisando las velocidades máximas, los radios y el desplazamiento de los vórtices para condiciones diferentes.

Los métodos de solución también son diferentes, puesto que en muchas investigaciones se prefiere resolver el problema mediante paquetería comercial que ya contiene algoritmos y métodos de solución establecidos, sin la posibilidad de modificar externamente el código de solución. El lenguaje de programación Fortran ofrece la posibilidad de modificar a conveniencia los procesos de cálculo, ofreciendo mejor exactitud posible.

<sup>15</sup> <http://www-frd.fsl.noaa.gov/~caracena/micro/MBVoring.htm>, acceso Febrero, 2013

