



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

**OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL:  
Diseño Óptimo con Materiales Compuestos para  
Soporte de Suspensión de Vehículo Eléctrico**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

P R E S E N T A:

**OLMO DARÍO VILLEGAS LÓPEZ**

TUTOR:

**Dr. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS**



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F. 2013.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. VICENTE BORJA RAMÍREZ  
Secretario: Dr. ADRIÁN ESPINOZA BAUTISTA  
Vocal: Dr. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS  
1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. MARIO ACOSTA FLORES  
2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. ALBERTO CABALLERO RUIZ

Lugar donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Fernando Velázquez Villegas



---

Firma.

## **Agradecimientos**

*Agradecimiento especial a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) por el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través de los proyectos PAPIIT TA100112 "Diseño de estructuras ligeras para vehículos urbanos de bajo consumo energético aplicando métodos de optimización" y PAPIME PE102212 "Material Didáctico Interactivo Digital para el aprendizaje del Método de los Elementos Finitos"*

## **Objetivos**

- Aplicar optimización estructural y materiales compuestos al diseño del soporte de la suspensión trasera de un vehículo de reparto con el fin de minimizar el peso de la parte conservando su rigidez.

## **Metas**

- Comprender y realizar el análisis por elementos finitos de estructuras tipo cascarón.
- Comprender los distintos tipos de optimización y seleccionar aquél que resulte más conveniente para el caso del diseño conceptual del soporte de la suspensión del vehículo eléctrico.

## **Resumen**

El presente trabajo muestra el desarrollo de la optimización topológica realizada al soporte de la suspensión de un vehículo eléctrico utilizando materiales compuestos como alternativa de sustitución para una pieza originalmente fabricada en acero ASTM A36. El material compuesto seleccionado fue un laminado de resina epóxica reforzada con fibra de vidrio, dotado de quince capas ocho de fibra y siete de resina, las capas de fibra de vidrio fueron dispuestas a distintas orientaciones para explotar las propiedades mecánicas de la fibra de vidrio, las cuales son altamente dependientes de la orientación en que reciben la carga.

La variable de diseño seleccionada fue el espesor de la capa de fibra de vidrio, variando éste hasta obtener un perfil de esfuerzos más atenuado que aquél obtenido con la primera disposición propuesta, que ofreciera a su vez una topología del laminado que fuese manufacturable.

La topología final obtenida cumple con el objetivo de mantener la rigidez estructural de la pieza original minimizando la masa total de la pieza, manteniendo coherencia entre las capas de material fibroso que facilita su manufactura como laminado.

## **Abstract**

*In the present work a topological optimization is performed to an electrical vehicle suspension support using composite materials as an alternative to an original part made out of ASTM A36 steel. The selected composite material was a laminate of fiberglass reinforced plastic, an epoxy resin, comprised of fifteen layers eight of which were fiberglass and seven epoxy resin layers, the fiberglass layers were accommodated through various orientations to maximize its mechanical properties, which are very load wise dependant.*

*The design variable was fiberglass's thickness, varying it until a more adequate and relieved stress profile was obtained in comparison with the first chosen disposition, and that at the same time offered a manufacturable topology.*

*The final topology obtained meets the objective of maintaining the structural stiffness of the original piece minimizing the total mass, preserving coherence between layers which facilitates the laminate manufacturing.*

# Índice

Resumen

Abstract

## I. Capítulo I: Estructuras Tipo Cascarón (Shell Structures)

1. Introducción
2. Descripción
  - i. Teoría de placas de Kirchhoff
  - ii. Esfuerzo Plano
3. Análisis por Elementos Finitos (FEA) para Cascarones
  - i. Forma Débil
  - ii. Ecuación de Elemento Finito para placas planas de Kirchhoff
4. Aplicaciones

## II. Capítulo II: Técnicas de Optimización Estructural

1. Introducción
2. Optimización Estructural
  - i. Métodos de Gradiente
  - ii. Métodos Heurísticos
  - iii. Métodos Indirectos
  - iv. Definiciones
3. Tipos de Optimización
  - i. Optimización de propiedades
  - ii. Optimización de forma
  - iii. Optimización topológica

## III. Capítulo III: Criterios de Selección de Materiales

1. Introducción
2. Materiales Compuestos
  - i. Clasificación
  - ii. Materiales Compuestos Reforzados por Fibras Continuas Alineadas

- iii. Materiales Compuestos Reforzados por Fibras Discontinuas
- 3. Procesamiento de los Materiales Compuestos Reforzados por Fibras
  - i. Producción por Pultrusión
  - ii. Compuestos Preimpregnados
  - iii. Hilvanado de Filamento
- 4. Aplicaciones
  - i. Efecto Cascada Debido a la Reducción de Peso en una Aeronave
- 5. Proceso de Diseño
- 6. Carta de Selección de Materiales
  - i. Gráfico Módulo Elástico-Densidad
  - ii. Gráfico Resistencia-Densidad
  - iii. Gráfico Módulo Elástico-Costo Relativo
  - iv. Gráfico Resistencia-Costo Relativo
- 7. Selección de Materiales

#### IV. Capítulo IV: Caso de Estudio

- 1. Introducción
- 2. Proceso de análisis
- 3. Proceso de optimización
- 4. La Pieza de Trabajo
- 5. Escenarios de carga
- 6. Propuesta de Sustitución
- 7. Resultados de optimización estructural topológica

#### V. Conclusiones

- 1. Conclusiones Globales
- 2. Trabajo a Futuro

#### Referencias



# Introducción

El trabajo de un diseñador mecánico consiste principalmente en:

1. Definir y delimitar un problema.
2. Realizar el análisis y cálculos necesarios utilizando los criterios adecuados y con el uso de las herramientas de cómputo correspondientes (CAD's, CAE's, FEA, etc.).
3. Realizar una interpretación adecuada de los resultados.
4. Proponer e implementar la mejor solución a la que se haya llegado.

Actualmente las tendencias en el desarrollo de un producto conllevan unas elaboradas etapas de planeación e investigación así como detallados análisis de comportamiento y resistencia mecánicas, selección de materiales y técnicas de fabricación, esto gracias a la gran capacidad de cómputo que se posee actualmente, reduciendo así la etapa de verificación y pruebas tanto en tiempo como en costo.

Un buen ejemplo de dichas tendencias es la ingeniería concurrente, cuyo objetivo es reducir el tiempo en que se desarrolla un producto desde su concepción hasta su salida al mercado, tomando en cuenta claro la vida útil del mismo y su disposición final o reciclaje, esto se logra trabajando las diversas propuestas en conjunto con todos los equipos de trabajo involucrados en los distintos módulos de desarrollo, donde cada equipo podrá identificar las deficiencias o dificultades que puedan presentarse previniendo que el diseño se complique demasiado, esto es, antes de que un cambio radical resulte muy costoso.

El uso de soluciones numéricas para problemas de distinta índole mecánica, a saber: acústica, dinámica, estática, estructural, térmica, etcétera, cobra mucha fuerza e importancia en estas etapas del proceso ya que ofrece gran fiabilidad sobre los resultados obtenidos al modelado de distintas situaciones a las que una pieza o producto podrá ser sometido en su ciclo de operaciones y a lo largo de su vida útil.

Sin embargo estas técnicas nos ofrecen tan solo un panorama aproximado de dicho comportamiento requiriendo de ellos una interpretación adecuada. Es por ello que el campo de la optimización cobra un papel crucial y esencial en este proceso, ya

que el mejor resultado posible quedará siempre en función de la capacidad y experiencia del diseñador en un método tradicional, mientras que con un adecuado criterio podrá establecerse un objetivo u objetivos que se deseen perseguir para obtener la solución más conveniente para dicha situación particular haciendo uso de la mayor cantidad de información disponible sobre el dominio de diseño en un proceso de optimización.

En específico, se trata de la optimización estructural a la que se refiere en este documento, y es la que se utiliza para generar estructuras que aprovechen al máximo las propiedades que las constituyen. Existen diversas técnicas de optimización estructural de las cuales se ha seleccionado la topológica para la realización del presente trabajo en el caso de estudio analizado, con dicha técnica se busca remover o agregar material según un criterio de rechazo para generar una estructura más eficiente, eliminando aquél material que se encuentre subutilizado.

Las industrias que han empleado en mayor medida las técnicas de optimización estructural son la aeroespacial, automotriz y de la construcción cuyos diseños mantienen los más altos estándares de seguridad y eficiencia incluso para otros segmentos, siempre innovado para obtener el máximo provecho de los materiales empleados inmersos en estructuras más ligeras que doten de mayor seguridad a sus tripulantes, reduciendo también el impacto ambiental sobre el planeta, sin dejar de lado el que sean económicamente viables.

Este trabajo se encuentra inmerso en el grupo de trabajo del proyecto PAPIIT TA100112 “Diseño de estructuras ligeras para vehículos urbanos de bajo consumo energético aplicando métodos de optimización”; el alcance del mismo se centra en la generación de resultados a través de la simulación por computadora obedeciendo las tendencias antes mencionadas en un proceso de diseño de producto, y al poder demostrado de las mismas para predecir con gran exactitud los fenómenos que en ellas se modelan. Sin embargo la corroboración de la validez del modelo generado a través de la optimización estructural que se realizó sobre el soporte de la suspensión del vehículo eléctrico es materia de un trabajo a futuro.

Por otra parte existe un auge en la utilización de materiales compuestos en elementos estructurales, por lo que resulta de gran interés en las industrias antes mencionadas el sustituir o rediseñar componentes de maquinaria y estructuras de la misma por este tipo de materiales, como se puede observar en diseños recientes de rotores de turbinas para aviones así como fuselajes y marcos estructurales; así también su uso se ha llevado a las pistas de la fórmula uno en donde varios equipos dotan a sus unidades no solo con carrocerías de fibras de polímeros reforzados sino también de elementos en la suspensión y el motor de dicha naturaleza; dentro del terreno de la construcción las estructuras de concreto prefabricado han incurrido en el uso de distintas presentaciones de polímeros reforzados ya sea en laminados o como recubrimientos externos o refuerzos para acrecentar las características mecánicas de las estructuras así como la resistencia a ambientes químicamente agresivos [10]. Una de las industrias que más interés ha volcado en los últimos años al uso de materiales compuestos, incluso como elementos estructurales, ha sido la militar quienes han incluido en el diseño de vehículos acorazados [14], con el propósito de reducir peso en el vehículo para disminuir su consumo de combustible, incrementar su capacidad de carga y prestar con mayor eficiencia el servicio para el que han sido diseñados debido a la gran resistencia a la fatiga que exhiben los materiales compuestos respecto al acero o aluminio así como a condiciones ambientales adversas.

El presente trabajo pretende realizar un análisis a un elemento estructural de una suspensión automotriz acerca del comportamiento que presenta ante sollicitaciones de trabajo normal y en condiciones extremas para obtener el modelo del comportamiento y distribución de los esfuerzos en la estructura, así como el campo de deformaciones de la misma.

El análisis se realizará modelando la pieza como una estructura tipo cascarón (*shell* en inglés) en software de elementos finitos para obtener con ello una aproximación al comportamiento de la pieza respecto a las cargas recibidas en distintos escenarios de trabajo.

Posteriormente se efectuarán las corridas de optimización estructural de la pieza con el propósito de encontrar un posible sustituto del material original de la

misma por un material compuesto, preservando la rigidez estructural de la pieza y disminuyendo el peso de la misma.

La motivación principal de este trabajo se encuentra en la posibilidad de fabricación de un vehículo más ligero que resulte de características mecánicas similares o superiores a los que actualmente se utilizan con predominancia de estructuras metálicas.

A un nivel personal, la motivación surge de la curiosidad de conocer y comprender de mejor manera los materiales compuestos ante la visión de un incremento en su uso por parte distintos ramos de la industria en aplicaciones diversas, además de reconocer en las técnicas de optimización estructural una herramienta muy poderosa, que de ser dominada por un diseñador permita al mismo ofrecer más confiabilidad a los trabajos que genere.

# Capítulo I

## Estructuras Tipo Cascarón (Shell Structures)

### I.1. Introducción

En cada máquina, obra o dispositivo diseñado por el hombre se presenta la necesidad de darle un soporte que sea capaz de sostenerla y resistir las cargas a las que será sometida por efecto de su funcionamiento, dichas estructuras han sido objeto de estudio a lo largo de la historia hasta llegar al estudio formal de las mismas por parte de la mecánica de sólidos. Esta disciplina se da a la tarea de analizar, predecir y modelar el comportamiento de distintos tipos de estructuras ante distintas configuraciones de carga, y sirve como una poderosa herramienta para los diseñadores para la adecuada selección de geometrías, secciones transversales y materiales a utilizar en diversos espacios de diseño.



Fig. 1. 1. Concha, elemento natural tipo cascarón

Un tipo de estructuras utilizadas tanto por la naturaleza como por el ser humano en la construcción de éstas son las llamadas tipo cascarón (*shell structures* en inglés) como la que se muestra en la figura 1.1, por presentar un excelente comportamiento ante cargas que actúan sobre el plano de la estructura así como aquellas que la flexionan. Su característica principal es geométrica, una de sus dimensiones resulta en varios ordenes de magnitud menor respecto a las otras

dos, como ejemplo pueden identificarse tanto en la naturaleza como en obras realizadas por el ser humano: el cascarón de huevo, conchas marinas, embarcaciones, estructuras ligeras para construcciones, tanques de almacenamiento, monocascos de diversas aleaciones o materiales de diversa índole como chasis en la industria automotriz, o fuselajes de aviones, en la figura 1.2 se muestran algunas de éstas; todas ellas resultan ser muy ligeras, resistentes y curvas lo que le permite generar patrones de esfuerzo muy diversos, es decir las cargas que le afecten serán distribuidas y transmitidas hacia la superficie del cascarón.



**Fig. 1. 2. Elementos naturales y arquitectónicos como ejemplos de estructuras tipo cascarón**

En este capítulo se realizará la descripción matemática de este tipo de estructuras, añadiendo también una breve descripción del método de los elementos finitos y en

detalle la formulación de dicha teoría para estructuras tipo cascarón, finalmente se ejemplificará el uso e importancia de este tipo de estructuras con algunas aplicaciones prácticas que encontramos en diversos ámbitos y quehaceres de la vida cotidiana.

## **I.2. Descripción**

Las estructuras tipo cascarón se caracterizan por tener una de sus dimensiones mucho menor que las otras dos, por lo que el modelado de las mismas se realiza prescindiendo del espesor como variable, sin embargo esta variable se utiliza en el cálculo de los campos de deformaciones y esfuerzos. Básicamente son elementos planos que poseen cierto espesor [1] y que además de sufrir deformación transversal debido a las excitaciones fuera del plano, también deberán considerarse los efectos sobre la membrana, es decir, en el plano.

A pesar de existir actualmente una vasta literatura sobre el análisis de estructuras tipo cascarón, es usual encontrar paquetería comercial que emplea la superposición de elementos planos, para el análisis de la flexión, y la combina con la teoría de esfuerzo plano para analizar la membrana por el método de los elementos finitos ya que el costo computacional asociado al sólido fundamento matemático de la teoría de placas de Kirchhoff o Mindlin resulta poco atractivo en la práctica, es por ello que el usuario debe tener en cuenta dichas limitaciones y consecuencias en el análisis.

De acuerdo con [1] una estructura tipo cascarón puede analizarse dividiéndola en pequeñas placas planas, cada una con orientación distinta que deberá asociarse con un sistema de referencia global. Deberá tomarse en cuenta el efecto de la membrana, es decir las fuerzas actuando en el plano, las cuales tendrán que vincularse con el efecto de placa plana, que resulta ser la flexión en dirección transversal.

En la figura 1.3 se muestra un elemento del tipo placa plana en donde los ejes coordenados del sistema local  $s-t$  son coincidentes con el plano descrito por el elemento mientras que el eje  $r$  es normal al mismo. Resultan más evidentes de esta

manera las contribuciones aportadas por la membrana y la placa, la membrana sufrirá desplazamientos en las direcciones  $s$  y  $t$ , es decir en el plano, mientras que el elemento de placa sufrirá desplazamientos en la dirección normal  $r$  y rotaciones respecto a los otros dos ejes ( $s$  y  $t$ ).

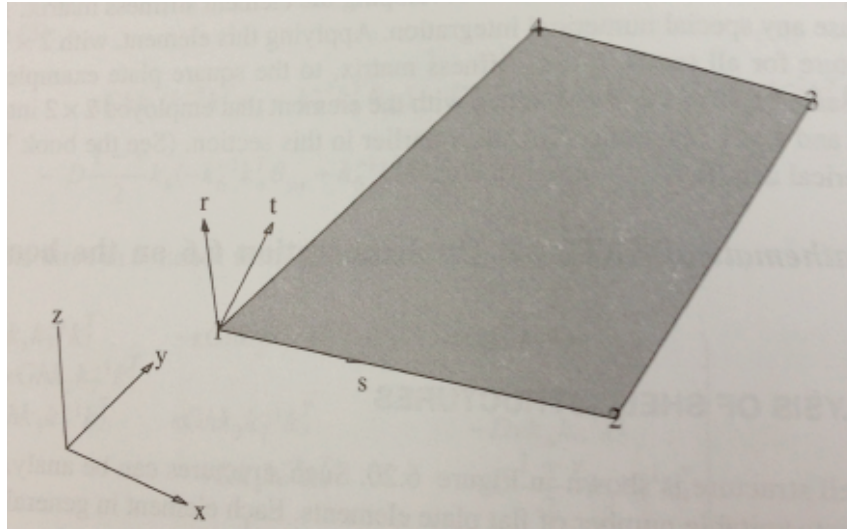


Fig. 1. 3. Ejes s-r-t en un Elemento Plano, tomado de [1]

Como siguiente paso resulta necesario describir las teorías de placas (Kirchhoff y Mindlin) así como también la de esfuerzo plano enunciadas en las referencias [1] y [2] para su formulación de acuerdo al método de los elementos finitos que simplifica el problema en la superposición de las contribuciones de ambas teorías.

### 1.2.i. Teoría de Placas de Kirchhoff

Teniendo una placa plana cuya superficie media se encuentra contenida en el plano cartesiano  $x$ - $y$ , situándonos en un punto  $z$  arbitrario por encima de la superficie media y al sufrir la placa una pequeña deformación, dicho punto se desplazará una distancia  $w$  en dirección  $z$ , en donde se asume que cualquier línea normal al plano medio permanecerá normal después de dicha deformación, y en donde las rotaciones de la sección en los planos  $x$ - $z$  ( $\beta_x$ ) y  $y$ - $z$  ( $\beta_y$ ) están dadas por [1]:

$$\beta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad \beta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots\dots (1.a.) \quad (1.b.)$$

Los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $y$  se obtienen [1]:



$$u(x,y,z) = -z \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}; \quad v(x,y,z) = -z \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}; \quad w = w(x,y) \dots(2)$$

En este caso para obtener las deformaciones se hace uso de las relaciones de desplazamiento-deformación [1], se asume que las deformaciones ocurren tan solo en el plano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \dots(3) \end{aligned}$$

A continuación se muestran las relaciones de esfuerzo-deformación para la placa plana [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \dots(4) \end{aligned}$$

Donde:

$E$ = Módulo de Young

$G$ = Módulo a Cortante=  $E/2(1+\nu)$

$\nu$ = Coeficiente de Poisson

Ocurre que, análogo a la formulación para vigas actuando bajo flexión, los esfuerzos cortantes  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son cero debido al campo de desplazamientos asumido, esto es incorrecto y deben considerarse aparte de la situación de equilibrio previamente enunciada, esto se detallará más adelante.

Es usual en la teoría de placas emplear las resultantes de esfuerzo por unidad de longitud, resultado de integrar las componentes de esfuerzo por todo el espesor de la placa  $t$ , así obtenemos las intensidades de las fuerzas cortantes y momentos flectores [1] a través de las siguientes expresiones:

$$V_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz; \quad V_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad \dots(5)$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad \dots(6)$$

Donde:

$V_x$ = Es la fuerza cortante por unidad de longitud en la dirección de  $z$  actuando en una cara normal al eje  $x$ .

$V_y$ = Es la fuerza cortante por unidad de longitud en la dirección de  $z$  actuando en una cara normal al eje  $y$ .

$M_x$ = Es el momento flector por unidad de longitud respecto al eje  $y$  actuando en una cara normal al eje  $x$ .

$M_y$ = Es el momento flector por unidad de longitud respecto al eje  $x$  actuando en una cara normal al eje  $y$ .

Así partiendo de las ecuaciones constitutivas y de las relaciones de desplazamiento-deformación [1] previamente enunciadas tenemos que:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \right) z dz = \\ M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \left( -z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} - \nu z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) \right) z dz = \\ M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots(7) \end{aligned}$$

Donde D representa la rigidez a flexión. De manera análoga se obtiene:

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \dots(8)$$

Finalmente las intensidades de los momentos torsionantes se obtienen de [1]:

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{2(1+\nu)} \left( -2z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \right) z dz = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots(9)$$

Las expresiones obtenidas para los momentos se denominan relaciones de momento-curvatura que son mejor presentadas en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \dots(10)$$

Finalmente se analiza el diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial de la placa para determinar las ecuaciones de equilibrio que le satisfacen, primero se analizan las componentes de las fuerzas en dirección z:

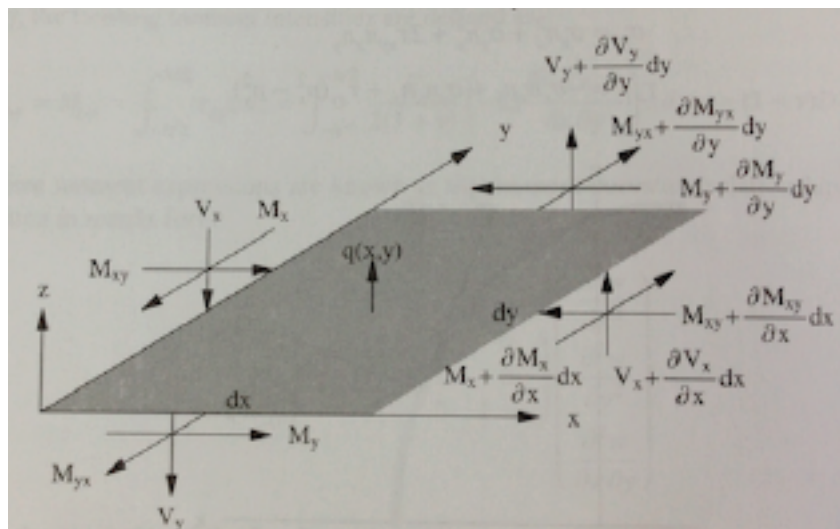


Fig. 1. 4. Diagrama de Cuerpo Libre de un Elemento Diferencial de Placa Plana, tomado de [1]

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 \quad \dots(11)$$

Después se consideran los momentos generados por acción de las fuerzas alrededor de los ejes x y y despreciando aquellos términos que contengan  $dy^2$  y  $dx^2$ , se tienen las siguientes expresiones [1]:

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \\ V_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \dots(12) \end{aligned}$$

Derivando la primera expresión respecto a  $x$  y la segunda respecto a  $y$ , y sustituyendo en la ecuación de equilibrio tenemos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \dots(13)$$

Expresando las ecuaciones de momento en términos de los desplazamientos tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left( -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} \left( -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y^2} \left( -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) + q = 0$$

Después de la simplificación de la expresión se obtiene la ecuación de cuarto orden que rige el comportamiento de las placas delgadas:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0 \quad \dots(14)$$

En este punto resulta evidente que la incógnita principal a determinar es la del desplazamiento transversal  $w(x,y)$ , la cual al ser determinada desencadena el cálculo de las magnitudes de momentos y esfuerzos cortantes que a su vez nos van llevando a conocer los valores de esfuerzo, primero haciendo uso de las relaciones de momento-curvatura podemos obtener la magnitud de los momentos:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad \dots(15)$$

Cabe resaltar que se ha modificado la expresión (10) hasta llegar a (15) debido a que guarda una sorprendente similitud con la ecuación constitutiva para esfuerzo plano. Esta matriz se puede expresar como:  $M = -DC\psi$  donde  $C$  y  $\psi$  representan la matriz constitutiva y el vector de curvatura respectivamente, esta forma se utilizará posteriormente en la formulación de la forma débil en la descripción por el método de los elementos finitos.

Prosiguiendo con las relaciones de esfuerzo-deformación dejando esta última en términos del desplazamiento transversal y relacionando este último con las intensidades de los momentos se tienen las expresiones siguientes:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{M_x}{D} \equiv \frac{12M_x z}{t^3} \quad \dots(16)$$

Siendo un procedimiento similar se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{12M_y z}{t^3} \\ \tau_{xy} &= \frac{12M_{xy} z}{t^3} \quad \dots(17) \end{aligned}$$

Siendo que los esfuerzos máximos se encontrarán en los extremos superior e inferior del grosor  $t$  de la placa, esto es  $z=t/2$ , a continuación se presentan las expresiones para el cálculo de dichos valores:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6M_x}{t^2} \\ \sigma_y &= \frac{6M_y}{t^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{6M_{xy}}{t^2} \end{aligned}$$

Como se había mencionado previamente, los esfuerzos  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{zx}$  no habían podido ser calculados debido al campo de desplazamientos elegido, más es posible determinarlos realizando el análisis de cuerpo libre y desarrollando las ecuaciones de equilibrio en las tres dimensiones, comenzando por  $\tau_{xz}$  y sustituyendo  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  por las expresiones conocidas en función del desplazamiento transversal  $w$  y reordenando posteriormente tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ -\frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Llevando a cabo la integral respecto a  $z$  desde un punto arbitrario hasta la superficie de la placa ( $t/2$ ), en donde se sabe que el esfuerzo cortante es cero, tenemos:

$$\int_z^{t/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \int_z^{t/2} \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Sin embargo de las relaciones de momento-fuerza cortante se tiene:

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$-\frac{V_x}{D} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Con lo que podemos relacionar de esta manera al esfuerzo cortante con la fuerza cortante en la siguiente manera:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{V_x}{D} = \frac{3V_x}{2t} \left( 1 - \left( \frac{2z}{t} \right)^2 \right)$$

.....(18)

Procediendo de la misma manera con la siguiente ecuación de equilibrio se obtiene la expresión para el esfuerzo cortante restante:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\tau_{yz} = \frac{3V_y}{2t} \left( 1 - \left( \frac{2z}{t} \right)^2 \right)$$

.....(19)

Cabe notar que estas expresiones indican las posiciones en donde los esfuerzos cortantes son nulos, en los extremos inferior y superior del espesor de la placa, y máximos en la superficie media, los cuales son:

$$\tau_{zx,\max} = \frac{3V_x}{2t}; \quad \tau_{zy,\max} = \frac{3V_y}{2t}$$

Finalmente para obtener la expresión para el esfuerzo normal en la dirección transversal  $\sigma_z$ , partimos de la tercera ecuación de equilibrio y sustituyendo las expresiones obtenidas para los cortantes  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{zx}$ , se tiene:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \equiv \frac{3q}{2t} \left( 1 - \left( \frac{2z}{t} \right)^2 \right)$$

Integrando respecto a  $z$  y tomando en cuenta que el valor del esfuerzo en la superficie de la placa es igual a la magnitud de la carga aplicada ahí mismo, es decir  $\sigma_z (t/2) = q$ , obtenemos finalmente la siguiente expresión para  $\sigma_z$ :

$$\int_z^{t/2} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = \int_z^{t/2} \frac{3q}{2t} \left( 1 - \left( \frac{2z}{t} \right)^2 \right) dz$$

$$\sigma_z = \frac{3q}{4} \left( \frac{2}{3} + \frac{2z}{t} - \frac{1}{3} \left( \frac{2z}{t} \right)^3 \right) \quad \dots(20)$$

## 1.2.ii. Teoría de Esfuerzo Plano

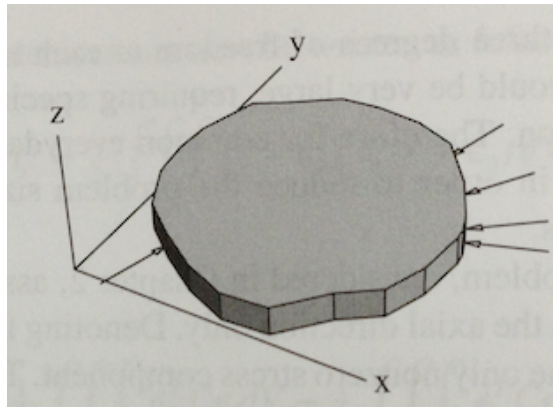


Fig. 1.5. Un elemento cargado en el plano ejemplificando el modelo de esfuerzo plano, tomado de [2]

Considerando un cuerpo con una de sus dimensiones mucho menor que las otras dos y asumiendo que se encuentra en el plano  $xy$  como se muestra en la figura 1.5, y teniendo aplicadas sus cargas sobre este mismo plano se considera una condición de esfuerzo plano, es decir se asumen los esfuerzos  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Sustituyendo estos valores en la relación de deformación-esfuerzo:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} \\ \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} \\ -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \\ \frac{\tau_{xy}}{G} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots(21)$$

Escrita de otra forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}; \quad \gamma_{yz} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0$$

Invirtiendo la ecuación matricial y ocupando las relaciones de deformación desplazamiento se pueden obtener los esfuerzos en función de las derivadas de los desplazamientos como sigue:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = C\varepsilon$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{E}; \quad \gamma_{yz} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0 \dots(22)$$

### I.3. Método de los Elementos Finitos

#### I.3.1. Forma General de las Ecuaciones de Elementos Finitos

##### I.3.1.i. Ecuaciones Diferenciales Rectoras



Se parte de la consideración de un sólido en equilibrio al que se le aplican fuerzas concentradas y distribuidas a lo largo de su superficie, así mismo deberá soportar las fuerzas de cuerpo presentes sobre todo el volumen (como son el peso o fuerzas centrífugas desarrolladas por el giro del objeto). Al analizar una parte del cuerpo, cuyas fuerzas se encuentran en equilibrio, podemos obtener las ecuaciones diferenciales que le rigen, cabe destacar que no se emplean ecuaciones constitutivas lo que las hace válidas para cualquier material [2].

La formulación más común para elemento finito de un sólido elástico es aquella basada en los desplazamientos como incógnitas, usando las relaciones de esfuerzo-deformación en función de los desplazamientos, se considerarán solamente deformaciones pequeñas y lineales.

### 1.3.1.ii. Equilibrio de Esfuerzos

Considerando la situación de equilibrio de fuerzas sobre un cuerpo antes mencionada, tenemos que el vector de esfuerzos actuando sobre una parte de la superficie  $S$  del cuerpo es  $t_n = (t_{nx} \quad t_{ny} \quad t_{nz})^T$ , con vector normal  $n = (n_x \quad n_y \quad n_z)^T$ , y las fuerzas de cuerpo  $b = (b_x \quad b_y \quad b_z)^T$  que actúan sobre el volumen de dicha parte. Entonces las relaciones de equilibrio son tales que:

$$\begin{aligned} \int_S t_{nx} dS + \int_V \hat{f}_x dV &= 0 \\ \int_S t_{ny} dS + \int_V \hat{f}_y dV &= 0 \\ \int_S t_{nz} dS + \int_V \hat{f}_z dV &= 0 \end{aligned}$$

Además  $t_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$ , por lo que la primera ecuación nos queda:

$$\int_S \sigma_x n_x dS + \int_S \tau_{xy} n_y dS + \int_S \tau_{xz} n_z dS + \int_V \hat{f}_x dV = 0$$

Con ayuda del teorema de la divergencia (caso especial del teorema de Green-Gauss, mejor conocido como integración por partes) podemos convertir una integral de superficie en una volumétrica:

$$\iiint_V f \frac{\partial g}{\partial x} dV = \iint_S f g n_x dS - \iiint_V f \frac{\partial f}{\partial x} g dV$$

$$\text{Si } g = 1 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 0; \quad \therefore \iint_S f n_x dS = \iiint_V f \frac{\partial f}{\partial x}$$

Entonces es posible convertir las integrales de superficie, en las ecuaciones de equilibrio, en volumétricas y por tanto nos quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad \dots(23)$$

Para relacionar las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos con los desplazamientos, es necesario emplear las ecuaciones constitutivas y las relaciones de esfuerzo-deformación, para un sólido elástico isotrópico se tiene [2]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad \dots(24)$$

A través de la sustitución de las deformaciones por las ecuaciones de desplazamiento-deformación y llevando a cabo la multiplicación matricial obtenemos los esfuerzos en función de los desplazamientos [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{xy} &= G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{yz} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \quad \tau_{zx} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Recordando que  $\frac{E}{(1+\nu)} = 2G$ , y sustituyendo en la primera ecuación de equilibrio obtenida anteriormente:

$$\begin{aligned}\frac{2G}{1-2\nu} \left( (1-2\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + b_x = 0\end{aligned}$$

Reagrupando términos y simplificando, y llevando a cabo un procedimiento similar para las dos ecuaciones de equilibrio restantes, obtenemos [2]:

$$\begin{aligned}G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + b_x = 0 \\ G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + b_y = 0 \\ G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + b_z = 0\end{aligned}$$

Estas tres expresiones representan las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de los sólidos elásticos isotrópicos y deberán resolverse para encontrar los desplazamientos  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  y  $w(x,y,z)$  [2]. Debido a que son ecuaciones diferenciales de segundo orden las condiciones de frontera son del tipo esenciales, mientras que las fuerzas superficiales serán las condiciones de frontera naturales.

Una condición de frontera se clasifica como **natural** en caso de poder ser incorporada directamente en la ecuación del elemento y deberán tomarse en cuenta en la formulación de las ecuaciones del elemento así como en el ensamble,

un buen ejemplo de estas en el caso estructural son las cargas distribuidas sobre la superficie. Por otra parte las condiciones de frontera que no puedan incorporarse directamente a la ecuación del elemento se denominan **esenciales**, éstas no son consideradas durante la formulación de las ecuaciones ni en el ensamble de las mismas, por ejemplo el apoyo localizado en un nodo que se traduce como un desplazamiento nulo, o de manera más general, aporta un valor específico a un grado de libertad nodal [2].

### I.3.2. Análisis por Elementos Finitos (FEA) para Cascarones

#### I.3.2.i. Forma Débil

A continuación se presenta la forma débil para la formulación basada en los desplazamientos, la cual se puede construir desde la ecuación diferencial de cuarto orden que se obtuvo previamente para describir el comportamiento de una placa plana que se dispone en función de los desplazamientos, pero para simplificar el cálculo y el tiempo de cómputo se prefiere ocupar su equivalente de segundo orden en función de las segundas derivadas de los momentos [1]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \dots(25)$$

Multiplicando la ecuación diferencial por la función de ponderación e integrando sobre el área de la placa, se obtiene el residuo ponderado:

$$\iint_A \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right) w dA = 0$$

A continuación se emplea el teorema de Green y las expresiones antes obtenidas para los esfuerzos cortantes se tiene [1]:

$$\begin{aligned}
& - \int_A \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) dA + \int_A q \bar{w} dA \\
& + \int_S \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x \bar{w} dS + \int_S \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) n_y \bar{w} dS = 0 \\
& \int_A \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) dA + \int_A q \bar{w} dA \\
& + \int_S V_x n_x \bar{w} dS + \int_S V_y n_y \bar{w} dS = 0
\end{aligned}$$

Empleando el teorema de Green nuevamente y recordando que definimos en las

relaciones de momento-curvatura que  $\bar{\psi}^T = \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)$  [1], entonces se tiene la forma débil como:

$$\begin{aligned}
& -D \int_A \bar{\psi}^T C \psi dA + \int_A q \bar{w} dA + \int_S (V_x n_x + V_y n_y) \bar{w} dS \\
& - \int_S (M_x n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} dS - \int_S (M_{xy} n_x + M_y n_y) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} dS = 0
\end{aligned}$$

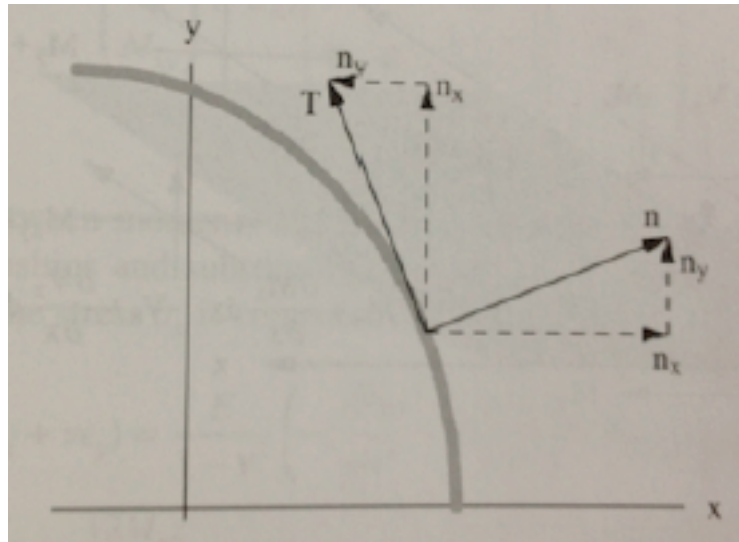


Fig. 1. 6. Componentes Normal y Tangencial sobre la Frontera, tomado de [1]

Tomando los vectores tangente y normal a la frontera del elemento, figura 1.6, podemos asociar las condiciones de frontera inmersas en las dos últimas integrales de la ecuación precedente con estas componentes, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= n_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - n_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} &= n_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} + n_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial T}\end{aligned}$$

Sustituyendo en las integrales mencionadas:

$$\begin{aligned}& \int_S \left[ (M_x n_x + M_{xy} n_y) \left( n_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - n_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} \right) + (M_x n_x + M_{xy} n_y) \left( n_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} + n_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} \right) \right] dS \\ &= \int_S M_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} dS + \int_S M_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} dS\end{aligned}$$

Donde  $M_n$  y  $M_T$  son los momentos en las direcciones normal y tangencial a la frontera [1], y se definen como sigue:

$$\begin{aligned}M_n &= M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2 \\ M_T &= -M_x n_x n_y + M_{xy} n_x^2 - M_{xy} n_y^2 + M_y n_x n_y\end{aligned}$$

La fuerza cortante en la frontera es  $V_n \equiv V_x n_x + V_y n_y$ , además considerando a S una superficie suave y en muchos casos cerrada con puntos inicial y final,  $s_1$  y  $s_2$  (en el caso de ser cerrada  $s_1=s_2$ ), e integrando por partes la expresión del momento en dirección tangencial a la frontera, se tiene que:

$$\int_S M_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} dS = (M_T \bar{w})|_{s_2} - (M_T \bar{w})|_{s_1} - \int_S \frac{\partial M_T}{\partial T} \bar{w} dS \quad [1]; \text{ donde los primeros términos se eliminan por representar l mismo valor, dejando la forma débil en su forma final:}$$

$$-D \int_A \int \bar{\psi}^T C \psi dA + \int_A \int q \bar{w} dA + \int_S \left( V_n + \frac{\partial M_T}{\partial T} \right) \bar{w} dS - \int_S M_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} dS = 0 \quad \dots(26)$$

Aquí se pueden identificar las condiciones de frontera naturales (CFN) y esenciales (CFE) del problema:

CFN		CFE
$V_n + \frac{\partial M_T}{\partial T} \equiv q_L$	ó	$\bar{w} = 0 \Rightarrow$ satisfaga un $w$ dado
$-M_n$	ó	$\frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0 \Rightarrow$ satisfaga una $\frac{\partial w}{\partial n}$ dado

Donde  $q_L$  es la carga sobre una cara y  $M_n$  el momento aplicado a lo largo de la frontera.

### I.3.ii. Ecuación de Elemento Finito para Placas Planas de Kirchhoff

Para la formulación general de las ecuaciones de Kirchhoff para una placa plana es deseable, desde un punto de vista físico que nos permite entender y visualizar más fácilmente la naturaleza de las variables, trabajar con las variables  $w$  y sus derivadas [1]:

$w$  = Deflexión vertical (transversal)

$\theta_x \equiv \frac{\partial w}{\partial x}$  = rotación respecto al eje  $x$

$\theta_y \equiv -\frac{\partial w}{\partial y}$  = rotación respecto al eje  $y$

Sin embargo esta selección de parámetros nodales no otorga continuidad a las derivadas respecto a la normal para cualquier forma que posea el elemento [1]. Muchos elementos simples empleados no consideran dicha continuidad y se les conoce como elementos no conformables. Por otro lado, aquellos que son conformables tienen como grados nodales de libertad derivadas parciales mixtas que no poseen significado físico alguno, lo que torna la tarea de asestar las condiciones de frontera una tarea complicada y evidencia la preferencia por los elementos no conformables; alternamente se introducen restricciones para forzar la continuidad.

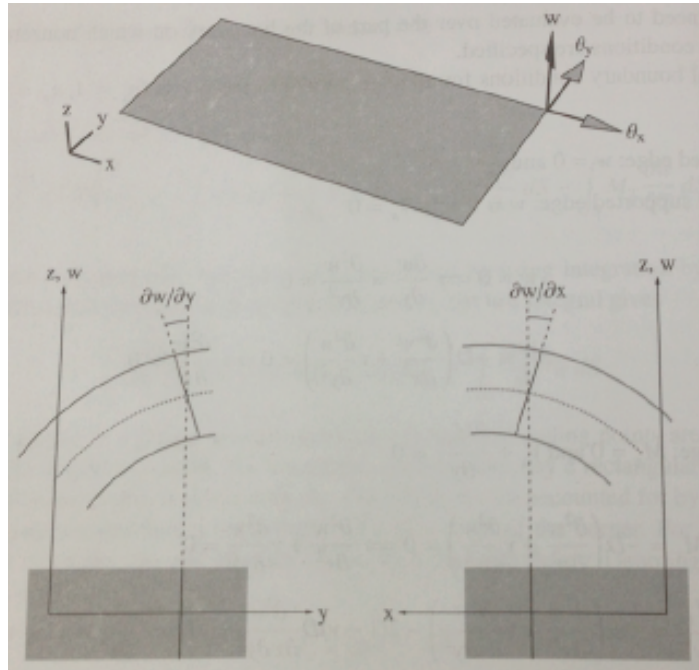


Fig. 1. 7. Parámetros Nodales de Referencia para un Elemento de Placa, tomado de [1]

Una vez elegidos los grados de libertad nodales, se puede derivar la ecuación de elementos finitos para placas planas a partir de la forma débil adecuando algunas modificaciones, primero se puede obtener una expresión para la solución asumida para los desplazamientos en función de los grados de libertad [1]:

$$w = (N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots) \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv N^T d \quad \dots(27)$$

Entonces se puede determinar el vector de curvaturas diferenciando adecuadamente la expresión anterior:

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & \dots \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & \dots \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv B^T d \quad \dots(28)$$

Las funciones de ponderación son:



$$\bar{w} \Rightarrow N_i, i = 1, 2, \dots$$

$$\bar{\psi} \Rightarrow B^T$$

Sustituyendo en la forma débil, obtenemos la ecuación para el elemento [1]:

$$D \int_A BCB^T dA = \int_A qNdA + \int_S q_L N_c ds + \int_S M_n \frac{\partial N_c}{\partial n} ds \quad \dots(29)$$

Donde es identificable la ecuación de elemento finito de la forma :

$$kd = r_q + r_{q_L} + r_m \quad \dots(30)$$

Donde [1]:

$$k = D \int_A BCB^T dA$$

$$r_q = \int_A qNdA; \quad r_{q_L} = \int_S q_L N_c ds; \quad r_m = \int_S M_n \frac{\partial N_c}{\partial n} ds$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Esto se debe de realizar y calcular para cada elemento e integrarlo a la matriz de conectividad para realizar el ensamble de los elementos.

# Capítulo II

## Técnicas de Optimización Estructural

### II.1. Introducción

El trabajo de un ingeniero de diseño conlleva de manera global a desempeñar las actividades que a continuación se mencionan en la figura 2.1:

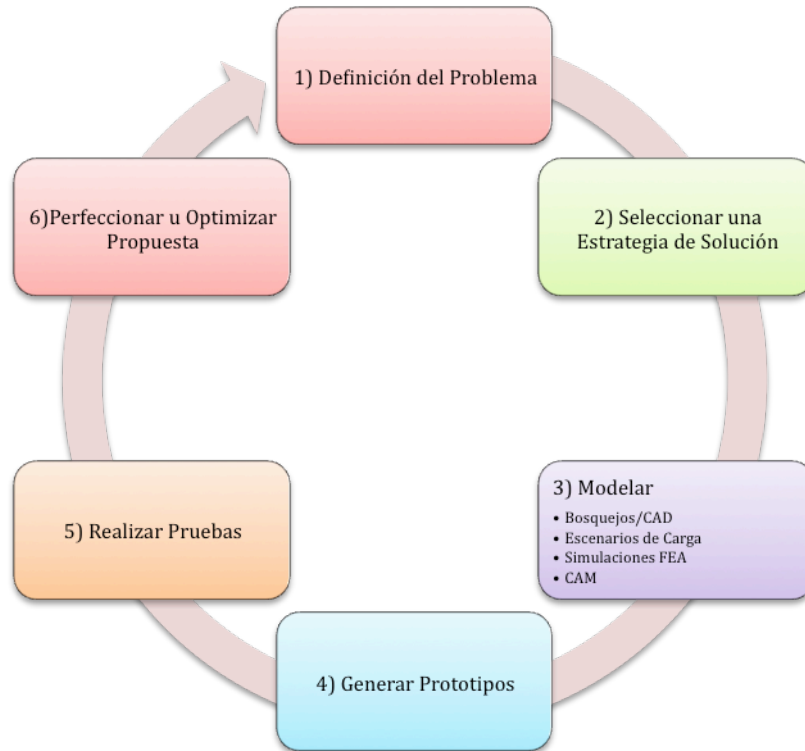


Fig. 2. 1. Proceso de Trabajo de un Diseñador

Esta actividad en general resulta ser iterativa regresando, usualmente, desde el sexto paso al tercero hasta encontrar una solución que cumpla de mejor manera la tarea que ha sido designada para el objeto de diseño, siendo que las entradas que recibe dicho proceso son primeramente las decisiones que tome el diseñador con base en su preparación y experiencia, las demás actividades, sobretodo aquellas que atañen al tercer paso, son dependientes también de la capacidad de cómputo que posea el diseñador o empresa y la pericia que se tenga en su manipulación para obtener resultados reveladores en el menor tiempo posible, que se reflejará en un menor costo asociado a la etapa de diseño del producto.

Esta actividad antes mencionada se denomina diseño convencional y resulta bastante dependiente de la habilidad del diseñador de contemplar el mayor número de posibilidades en el espacio solución del problema, es por ello que surge el concepto de optimización, siendo el tema medular de este trabajo aquél tipo que atañe a la optimización estructural.

La optimización tiene como propósito la búsqueda en el campo de soluciones de aquélla que resulte con las mejores características o valores que resuelvan la función objetivo del problema en cuestión. En un enfoque meramente matemático y apegado al cálculo, se dice de aquél proceso que evalúa con ayuda de la primera derivada el mínimo o máximo de una función, ésta será la que el diseñador desee evaluar. En el caso particular de las estructuras existen diversos aspectos que pueden surgir a nuestro interés, como es el caso de la rigidez estructural, el peso de la estructura, la forma y cantidad de material de un perfil dado, entre otras. La optimización se realiza a componentes y ensambles para maximizar su desempeño [3].

Es gracias a ello que el ser humano a través de distintas épocas ha modificado en diversas maneras las estructuras que emplea para su resguardo, el transporte, almacenamiento, maquinaria y demás utensilios, buscando encontrar siempre una mejor solución a su problema específico, ésta ha sido la tarea últimamente de la ciencia y sobre todo de la ingeniería.

Siendo que todo instrumento u objeto que tenga en su poder y uso el ser humano constará de una estructura que le soporte y de forma, así como acceso a su funcionamiento y propósito, se torna de gran interés el modelar dicha estructura de la manera más eficiente posible así como en algunos casos, agradable a la vista y tacto, teniendo en cuenta siempre su objetivo principal que delimita el reto de diseño así como sus posibles soluciones.

Es así como surgen diversas formas y técnicas de optimización estructural, las cuales se revisarán en este capítulo enfocándose principalmente a aquellas catalogadas como indirectas ya que emplean métodos numéricos de aproximaciones para converger a un resultado y se presentan fáciles de adaptar a

un código de cómputo presente en la mayoría de los paquetes de optimización estructural que se encuentran en el mercado.

## **II.2. Optimización Estructural**

Existen diversas clasificaciones para los métodos de optimización estructural, fue Querin quien las distinguió en dos grandes clasificaciones: la de gradientes y la heurística, sin embargo, ubica a la metodología de optimización estructural evolutiva en una clasificación intermedia entre éstas según la referencia [7]. Sin embargo, a los métodos de optimización estructural, se les ha determinado como métodos indirectos, a continuación se enuncian estos tres grandes subgrupos, definiéndoles brevemente y enunciando algunos de los métodos ya conocidos que resultan más relevantes entre cada uno de esto.

### **II.2.1. Métodos de Gradiente**

Existen varios métodos que pueden determinar satisfactoriamente el valor o valores de las variables de diseño que resulten en el máximo o mínimo de una función, en donde deberán considerarse las restricciones del diseño. Se pueden dividir en dos categorías, ya sea por el método diferencial o de búsqueda (o exhaustión). Sin embargo el principal problema que presentan estos métodos es el mismo que presenta el cálculo diferencial en la búsqueda de un máximo, que la función sea convexa, continua, que tenga un mínimo (que sea derivable) y que la solución exista. Aún así representan una solución más formal al problema desde el punto de vista matemático, sin embargo en la práctica no resultan ser los más idóneos para obtener soluciones a corto plazo en geometrías complejas.

- Algunos ejemplos de estos métodos son los siguientes:
- Optimización con restricciones
- Optimización sin restricciones
- Método de los multiplicadores de Lagrange
- Método de Kuhn-Tucker
- Método de programación lineal
- Método de homogenización
- Método de optimización de forma

### **II.2.2. Métodos Heurísticos**

Estos métodos se generan a través de la observación de la naturaleza y en muchos casos de manera intuitiva y lógica, es por ello que no puede asociarse a la solución con un verdadero óptimo ya que en un estricto sentido la formulación matemática no lo define como tal. Sin embargo resultan ser altamente programables y sencillos, siendo su principal flaqueza la falta de un rigor matemático que los defina, aunque sirven muy bien en distintos tipos de problemas de optimización.

Algunos ejemplos son:

- Algoritmos genéticos
- Recocido simulado
- Optimización de forma asistida por computadora

### **II.2.3. Métodos Indirectos**

Estos métodos son los desarrollados en las últimas dos décadas a partir de las investigaciones de Xie, Steven y Querin, su fundamento matemático se encuentra bien definido y resultan altamente programables y amigables con el usuario, sin embargo se basan también en la observación de la naturaleza y su manera de abordar los problemas estructurales. La metodología que siguen es simple y no depende de una forma para poder ofrecer un óptimo, sin embargo su resultado depende del tamaño del elemento utilizado. Entre estos métodos se encuentran:

- Optimización estructural evolutiva (ESO)
- Optimización estructural evolutiva aditiva (AESO)
- Optimización estructural evolutiva bidireccional (BESO)
- Optimización estructural morfológica (MESO)
- Diseño totalmente esforzado
- Creación Inteligente de Cavidades, entre otros.

### **II.2.4. Definiciones**

Es preciso integrar tres conceptos fundamentales antes de esta discusión, el primero de estos es el de *variables de diseño*, éstas serán las que encuentran los valores máximos o mínimos de la función objetivo que optimicen a la misma, las

cuales podrán delimitar al problema fungiendo como parámetros o cambiar en su favor, pueden ser:

1. Geométricas: largo, ancho, grueso
2. Las propiedades de la sección: área, momentos de inercia
3. Topología de la estructura: densidad, perímetro
4. Propiedades constitutivas: relativas al material como son el módulo elástico, coeficiente de Poisson

El segundo es el de función objetivo, la cual es aquella que contiene a las variables de diseño y que propone un valor para estas mismas, o un intervalo, en general es empleado el de masa total de diseño, sin embargo el esfuerzo máximo, deformación máxima, frecuencia natural, etcétera resultan ser funciones empleadas recursivamente en el diseño de estructuras.

Por último se considera las restricciones que delimitan tanto al problema como a sus soluciones, éstas pueden incidir directamente sobre las variables, por ejemplo condiciones de empotramiento o cargas iniciales, o aquellas que puedan incidir sobre magnitudes que dependan de las variables.

### **II.3. Tipos de optimización**

Existen distintos objetivos o propósitos de la optimización de una estructura, y esto responderá al tipo de optimización que deberá emplearse, a saber se consideran tres grandes tipos.

#### **II.3.1. Optimización de Propiedades**

Resulta ser el tipo de optimización más sencilla, se refiere a las dimensiones de la sección transversal, se encuentran con parámetros bien definidos y generan dificultades tan solo en el número de variables por elemento.

### II.3.2. Optimización de Forma

Mejor conocida como optimización geométrica, se trata de modificar las secciones de la estructura por lo que la malla debe adaptarse a nuevas geometrías. Su campo de trabajo es sobre la superficie externa de la estructura.

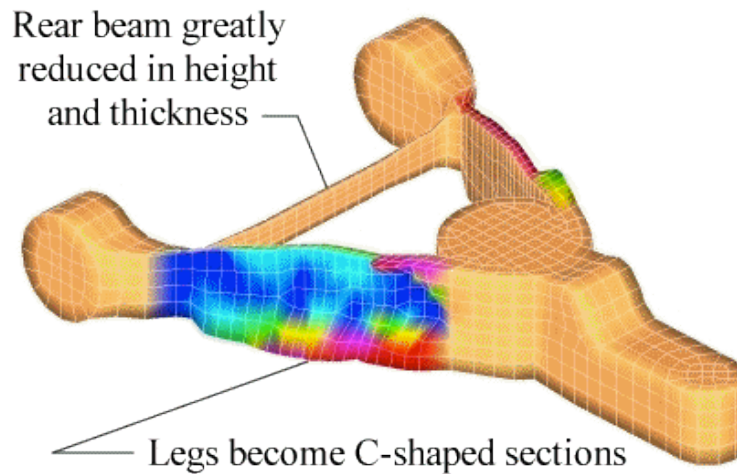


Fig. 2. 2. Optimización de Forma

### II.3.3. Optimización Topológica

En general busca generar cavidades que reduzcan la cantidad de material en la estructura por lo que quedarán huecos en el interior sin modificar el espacio delimitado para la misma por las restricciones geométricas.

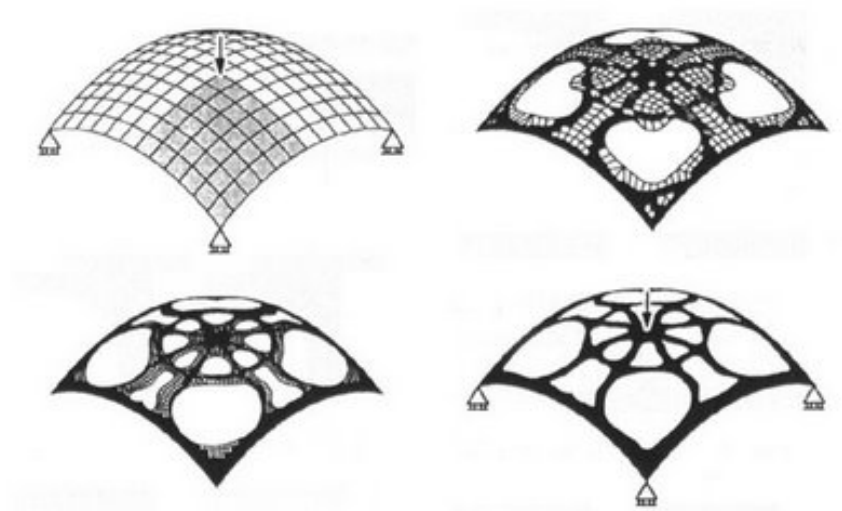


Fig. 2. 3. Optimización Topológica

# Capítulo III

## Criterios de Selección de Materiales

### III.1. Introducción

En la figura 3.1, se muestra una breve línea del tiempo que evidencia la relación de cada momento en el desarrollo humano con el dominio ejercido sobre el uso y manipulación de los materiales, es por ello que se le asocia a los albores de la humanidad con la edad de piedra, a los primeros dominios del fuego hasta el desarrollo de los primeros grandes imperios como la edad de bronce, el dominio hegemónico de los romanos con la era de hierro y así en adelante hasta llegar al siglo pasado en donde nuevos materiales han venido a sustituir el uso de otros materiales *clásicos* en la ingeniería.

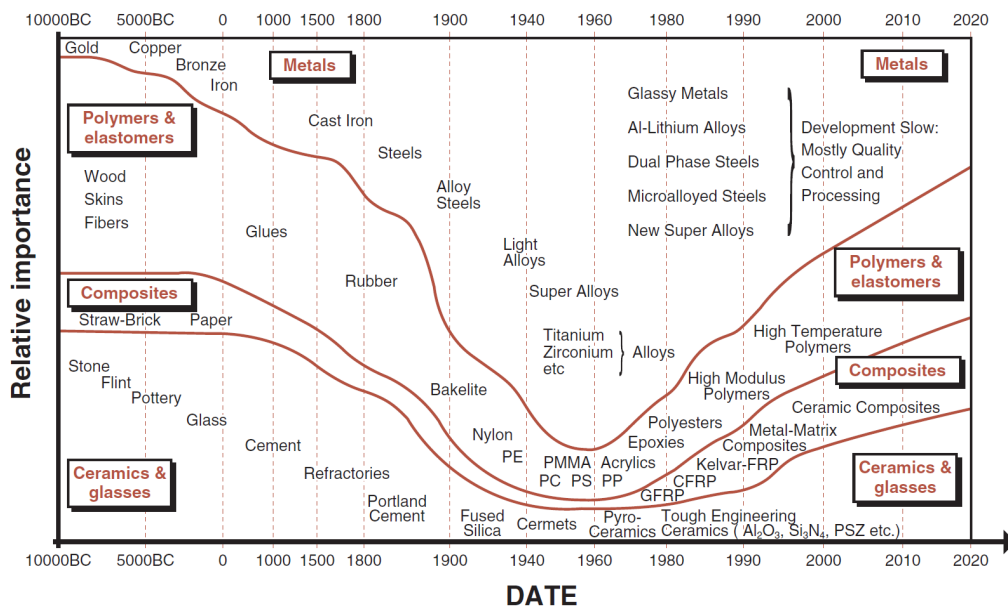


Fig. 3. 4. Historia del tiempo de los materiales, tomado de [3]

En la actualidad existen alrededor de 120,000 materiales a la disposición de un diseñador [3], el rápido desarrollo de técnicas de producción e introducción de nuevos y mejores materiales, algunos con fines altamente especializados y secretos como los empleados en la industria militar, o que contemplan las necesidades del quehacer diario del ser humano, su desarrollo ha sido a lo largo de la historia y evolución del hombre.



Distintos usos se han asignado a diversos materiales, y nuevas tecnologías han permitido su sustitución o remoción del mismo por una nueva y mejorada selección de uno más adecuado, que cumpla mejor la tarea que se le impone o por resultar más barato para el productor. En el caso del diseño mecánico según [3], se lidia con los principios físicos, el funcionamiento adecuado y la producción de sistemas mecánicos. Es por ello que un diseñador mecánico se debe dar a la tarea de identificar la necesidad que pretende satisfacer el producto y descomponer el desarrollo de su propuesta de solución de tal manera que le sea posible en un principio abarcar una enorme gama de posibilidades de selección para al final acotar esta lista hacia una solución más pertinente o conveniente, basado en la información detallada de un solo material que se desempeñe de la mejor forma en su diseño [3].

El diseño es el proceso de traducir una nueva idea o una necesidad del mercado en la información detallada a partir de la cual un producto puede ser manufacturado [3]. No todos los diseños se han generado a partir de una idea nueva y original, también existen muchas modificaciones realizadas a diseños previos con el fin de mejorar u optimizar sus funciones, y es ésta la situación de este trabajo, la optimización de una pieza estructural de la suspensión de un vehículo.

Es por ello que este capítulo del trabajo se dedica a la selección de materiales desde un punto de vista del diseño mecánico en donde primero se definirá el proceso por el cual debe pasar todo diseño, o rediseño, contemplando siempre los materiales que pueden presentarse en la solución final. El desarrollo de los materiales y procesos nos conduce por nuevos senderos, en los que es importante mantenerse en constante actualización ya que aquellos que no lo han hecho no han salido victoriosos de la batalla, el mercado demanda mejores productos y la selección del material adecuado en conjunto con la óptima manera de producción conducen generalmente a un excelente diseño.

Después se discutirá el principal objetivo de la optimización realizada a la pieza seleccionada, la viabilidad de sustitución de su material de manufactura actual, tradicional (metálico), por uno de más reciente aplicación (compuesto), esto con los argumentos en torno a sus propiedades mecánicas, disponibilidad, tipos y formas de manufactura y viabilidad de desarrollo en los talleres del Centro de

Diseño y Manufactura para una futura implementación en el modelo existente o en un diseño posterior.

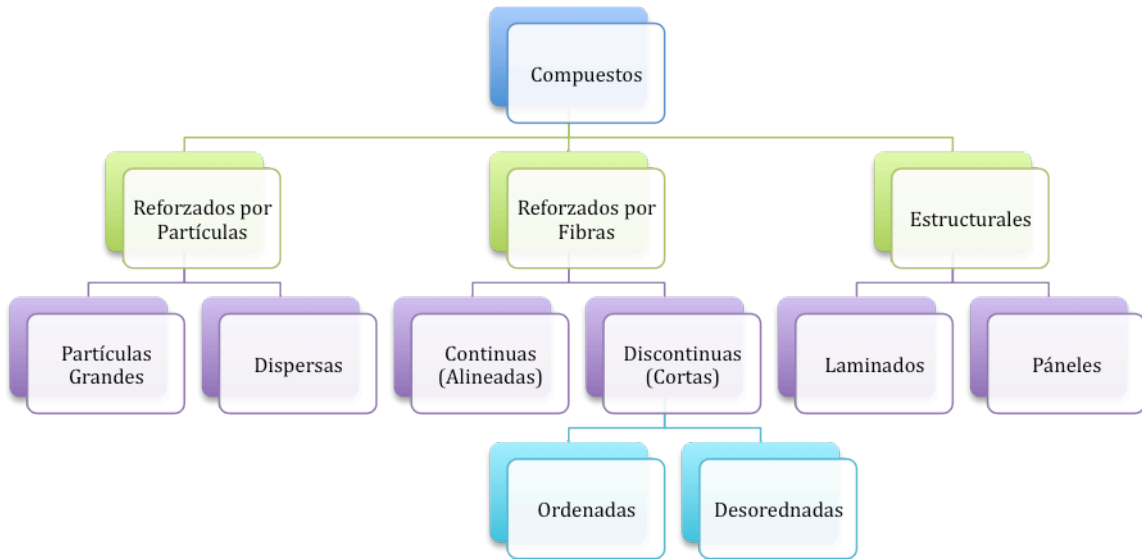
Se continuará con una breve descripción de los materiales compuestos como son su clasificación, selección de un tipo específico que se detallarán sus propiedades, algunos métodos tradicionales de manufactura de los mismos . Finalmente se discutirán algunas de las aplicaciones que se han desarrollado con estos materiales haciendo énfasis en la sustitución de los materiales tradicionales por los de una naturaleza compuesta.

### **III.2. Materiales Compuestos**

Los materiales compuestos surgen de la necesidad de satisfacer una combinación de propiedades que los materiales convencionales no pueden alcanzar, las industrias que generalmente requieren de dichos materiales representan la punta de la investigación en materiales y estructuras, como son la aeroespacial, la militar y automotriz, con requerimientos tales como alta resistencia mecánica así como a la abrasión y bajo peso.

Los materiales compuestos se denominan como tal a aquellos que presentan diversas fases que exhiben importantes aportaciones de las propiedades individuales de las fases que los componen, mejorando las propiedades globales de la pieza [4]. Podemos encontrarlos de manera natural, como la madera el hueso, etcétera, o de manera artificial manufacturados por el ser humano como el concreto, las matrices poliméricas reforzadas con fibras de vidrio y carbono. Los casos especiales de las aleaciones y varios materiales cerámicos no se introducen en este concepto a pesar de ser, en un estricto sentido materiales compuestos, ya que sus fases son muy similares y no se separan por una distinta interfaz.

### III.2.i. Clasificación



Muchos materiales compuestos tienen tan solo dos fases, la primera denominada **matriz** que es continua y rodea a la segunda fase, la cual es llamada **fase dispersa**. Como se enunció anteriormente las propiedades del compuesto están dadas por la combinación de sus fases, pero también en la proporción en que se mezclen así como la geometría de la matriz dispersa, este último parámetro nos representa la forma y tamaño de las partículas agregadas a la matriz, su distribución y orientación. Esta resulta una excelente manera de clasificar por tanto a los materiales compuestos como se muestra en la figura 3.2:

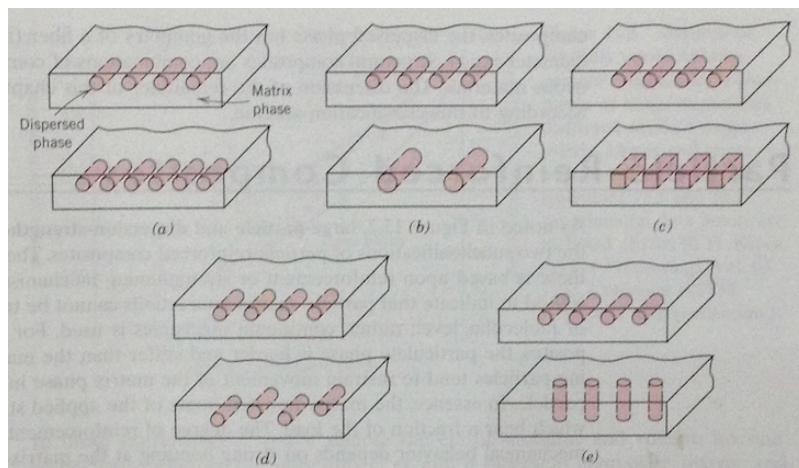


Fig. 3. 5. Clasificación de los materiales compuestos de acuerdo a la fase dispersa y la disposición de las fibras, en cuanto a a) concentración, b) tamaño, c) forma, d) distribución y e) orientación; tomado de [4].

En el presente trabajo se utilizará el concepto de materiales compuestos reforzados por fibras y su descripción se detalla en las siguientes secciones. La justificación a este razonamiento es que son las más avanzadas tecnológicamente hablando, mientras que ofrecen una alta relación de resistencia y módulo respecto a su peso, razones inmersas en las secciones anteriores de este trabajo así como en las tablas de propiedades de los materiales descritas en éstas.

El largo de la fibra juega en estos un papel muy importante, ya que determina la razón de transferencia de carga entre la unión de la matriz con las fibras, que desaparece por completo en los extremos de éstas. Es por ello que surge el concepto de longitud crítica de fibra, esta depende de tres factores, el diámetro de la fibra  $d$ , la resistencia a la tensión de la fibra  $\sigma_f^*$  y la resistencia del enlace fibra matriz (o sea el esfuerzo de cedencia al cortante de la matriz, cualquiera que resulte menor se elige)  $\tau_c$ , y está dada por la expresión [4]:

$$l_c = \frac{\sigma_f^* d}{2\tau_c}$$

El comportamiento de una sola fibra con longitudes distintas sometidas a un esfuerzo igual a  $\sigma_f^*$ , se presenta en los siguientes gráficos de la figura 3.3:

- a)  $l=l_c$
- b)  $l>l_c$
- c)  $l<l_c$

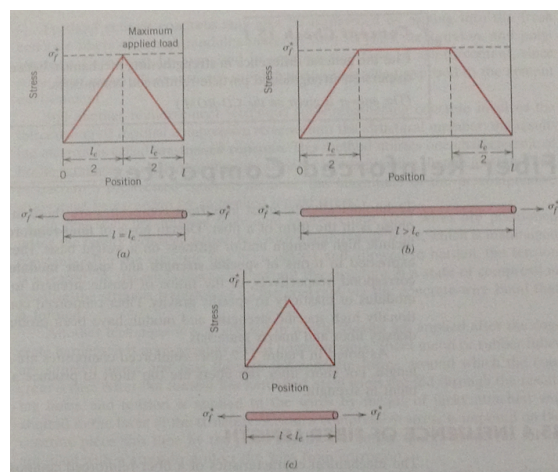


Fig. 3. 6. Comportamiento de una fibra de distintas longitudes sometidas a un esfuerzo  $\sigma$ , tomado de [4].

En general se considera que una fibra es continua si  $l \gg l_c$  (usualmente  $l > 15l_c$ ). Es también de vital importancia la orientación (paralelas o aleatorias) y acomodo de las fibras respecto una de la otra así como la distribución y concentración de las mismas, como se muestra en la figura 3.4:

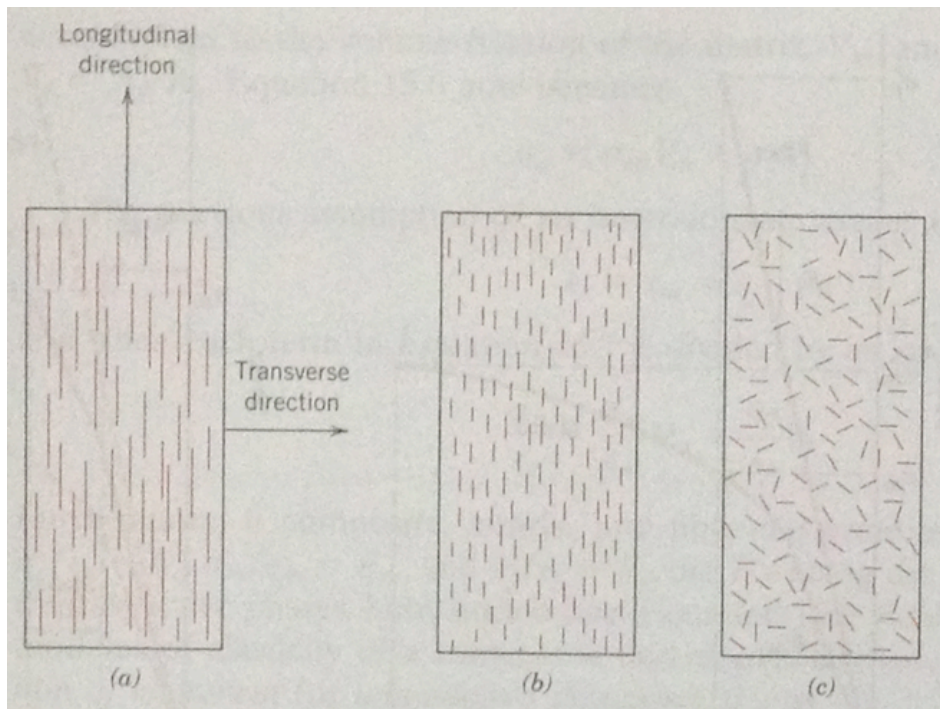


Fig. 3. 7. Ordenamiento Longitudinal y aleatorio de fibras, tomado de [4]

### III.2.i.a. Clasificación de la Fibra

Otra clasificación dispuesta es en relación al grueso de la fibra, estas son:

- Cerdas o bigotes: Se trata de cristales muy delgados que son muy largos respecto a su diámetro, poseen un alto grado de perfección en el cristal lo que explica su alta resistencia, son los materiales más duros que se conocen, sin embargo su alto costo los hace un lujo y no una constante, además es muy difícil contenerlos en una matriz. Algunos ejemplos son el grafito, carburo de silicio, nitruros de silicio y óxidos de aluminio.
- Fibras: Son policristalinas o amorfas y poseen diámetro reducidos, generalmente se emplean polímeros o cerámicos en su fabricación. Algunos ejemplos son las fibras de boro, vidrio, carbono y las aramidas.
- Alambres: son de un calibre medio, se usan principalmente en su fabricación aceros, molibdeno y tungsteno. Se usan por ejemplo como

refuerzos de los neumáticos, de contenedores de alta presión, tejidos alrededor de mangueras de alta presión, entre otras aplicaciones.

### III.2.ii. Materiales Compuestos Reforzados por Fibras Continuas Alineadas

Las propiedades mecánicas dependerán del sentido de las cargas por lo que es prudente establecerlas en la siguiente tabla:

**Tabla 1. Propiedades Mecánicas de compuestos reforzados por fibras continuas alineadas**

Dirección de la Carga	Módulo Elástico	Resistencia
Longitudinal	$E_{cl} = E_m(1 - V_f) + E_f V_f$	$\sigma_{cl}^* = \sigma_m^*(1 - V_f) + \sigma_f^* V_f$
Transversal	$E_{ct} = \frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f) + E_m V_f}$	No disponible

Donde:

$E_{cl}$  = Módulo elástico del compuesto en dirección longitudinal

$E_m$  = Módulo elástico de la matriz

$E_f$  = Módulo elástico de la fibra

$V_f$  = Fracción volumétrica de la fibra

$\sigma_{cl}^*$  = Resistencia a la tensión del compuesto en sentido longitudinal

$\sigma_f^*$  = Resistencia a la tensión de la fibra

$\sigma_m^*$  = Resistencia a la tensión de la matriz

### III.2.iii. Materiales Compuestos Reforzados por Fibras Discontinuas

Tabla 2. Propiedades Mecánicas de compuestos reforzados por fibras continuas alineadas

Fibras	Módulo Elástico	Resistencia a la tensión
Alineadas	Varía entre un 50 %y 90% respecto al valor obtenido con fibras continuas alineadas	$\sigma_{cd}^* = \sigma_m'(1 - V_f) + \sigma_f^* V_f \left(1 - \frac{l_c}{2l}\right) \Rightarrow l > l_c$ $\sigma_{cd}^* = \sigma_m'(1 - V_f) + \frac{l\tau_c}{d} V_f \Rightarrow l < l_c$
Aleatorias	$E_{cd} = KE_f V_f + E_m V_m$	Se asigna un factor de acuerdo a la orientación de la carga transmitida.

### III.3. Procesamiento de los Materiales Compuestos Reforzados por Fibras

Para fabricar los materiales compuestos reforzados por fibras continuas, éstas deben de distribuirse uniformemente a lo largo de la matriz y en lo posible orientarlas en la misma dirección. A continuación se mencionan tres métodos de manufactura de materiales compuestos usados actualmente.

#### III.3.i. Producción por Pultrusión

Se utiliza para fabricar componentes de largo constante y forma constante. Se trata de jalar hilos de fibra para impregnarlos de una resina termoestable, para después pasarlas por un dado de preforma que además establece la razón de resina/fibra. Después se pasa por un dado de curación que otorga la forma final al producto, los rodillos jaladores determinan la velocidad de producción. En el siguiente esquema de la figura 3.5, se detalla este proceso de manera ilustrativa.

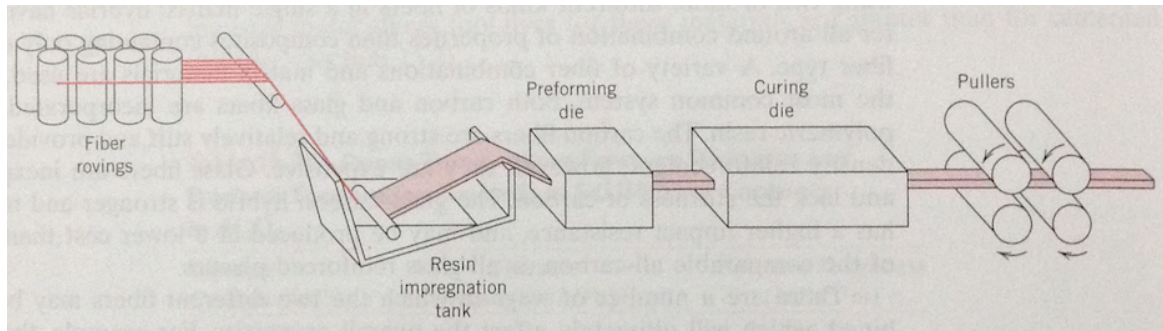


Fig. 3. 5. Proceso de pultrusión, tomado de [4].

### III.3.ii. Compuestos Preimpregnados

El término se refiere a fibras continuas preimpregnadas con una resina polimérica parcialmente curadas, estas son entregadas al manufacturero en forma de cintas quien posteriormente moldea y cura el producto sin añadir ninguna resina. Este procedimiento se utiliza en la producción de materiales compuestos usados para **aplicaciones estructurales**. Este proceso se representa en la figura 3.6:

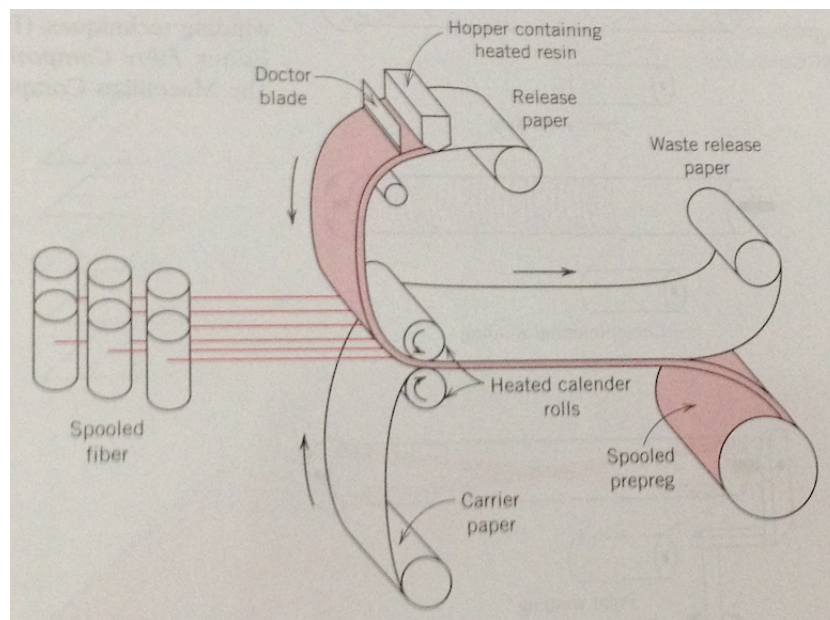


Fig. 3 .6. Producción de compuestos preimpregnados, tomado de [4]

### III.3.iii. Hilvanado de Filamento

En este proceso se utilizan fibras continuas para reforzar en un patrón preestablecido una estructura hueca, por ejemplo un tubo, las fibras primero se bañan de una resina, para luego ser adaptadas a un mandril dándole la forma deseada, como se muestra en la figura 3.7, la manufactura automatizada resulta



muy atractiva para este proceso ya que genera muy buenos acabados, tiempos de producción y costos bajos.

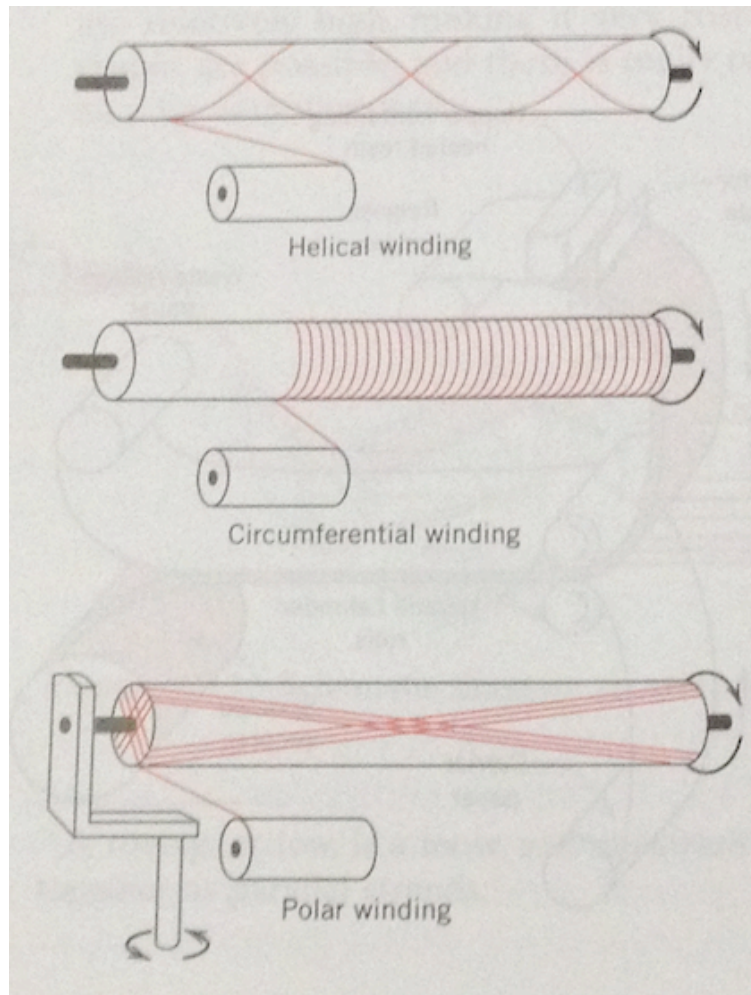


Fig. 3 .7. Proceso de hilvanado de Fibras, tomado de [4]

### III.4 Aplicaciones

El objetivo principal de este trabajo se centra en la sustitución de una pieza metálica por una de naturaleza compuesta, esta variación en el diseño se ha evidenciado en numerosas aplicaciones, siendo una de las más importantes y generadoras de dicho cambio en el sector aeroespacial, dando paso a las aplicaciones en la industria automotriz, de la construcción, fabricación de enseres y mueblería así como en artículos deportivos, aquí se muestran unas de las aplicaciones clave que añaden relevancia y justificación a este objetivo.

#### III.4.i Efecto Cascada Debido a la Reducción de Peso en una Aeronave

La reducción de masa de una aeronave representa una serie de ventajas en todos sus aspectos, la sustitución de grandes porciones del fuselaje, del elementos estructurales, paneles y demás produce un efecto cascada sobre todo el vehículo, es decir, se tiene una influencia sobre toda la aeronave, en los sistemas de propulsión, almacenamiento de combustible, tren de aterrizaje, etc... Esto arroja la posibilidad de optimizar los elementos antes mencionados reduciendo sus dimensiones y por tanto generando un menor impacto económico a los productores y menor carga de contaminantes arrojados a la atmósfera por parte de las aeronaves.

La reducción del peso total de la estructura se verá altamente influenciado por la cantidad de material compuesto presente en la misma, “que en una tendencia mundial representa un 40% en peso, que constituye un 60% de volumen de material estructural tomando en cuenta la diferencia de densidades. Los compuestos entonces pueden comprender hasta un 80% de una estructura aeroespacial” [5].

### **III.5. Proceso de diseño**

Para comenzar con el diseño de un producto, estructura, máquina, etcétera es indispensable primero identificar las necesidades que deberá satisfacer, esto deberá realizarse sin emitir juicio alguno sobre la posible solución [3], esto se recomienda para evitar tener prejuicios o preconcepciones que limiten el espacio de diseño o solución. A continuación se muestra un diagrama en donde se pueden visualizar tres grandes etapas en el proceso de diseño, a saber el desarrollo del concepto, el cuerpo del diseño y finalmente la etapa de detalle.

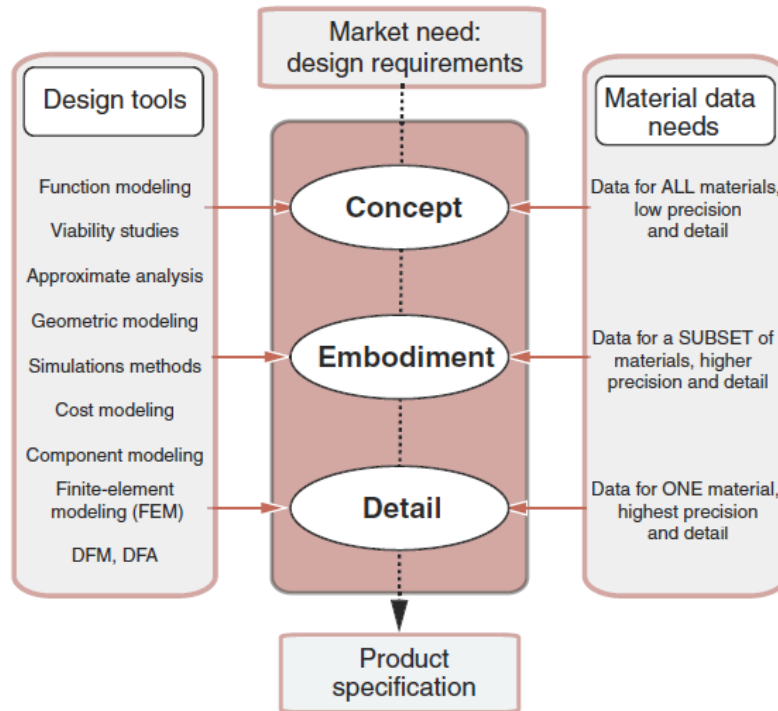


Fig. 3. 8. Diagrama de flujo del proceso de diseño, tomado de [3].

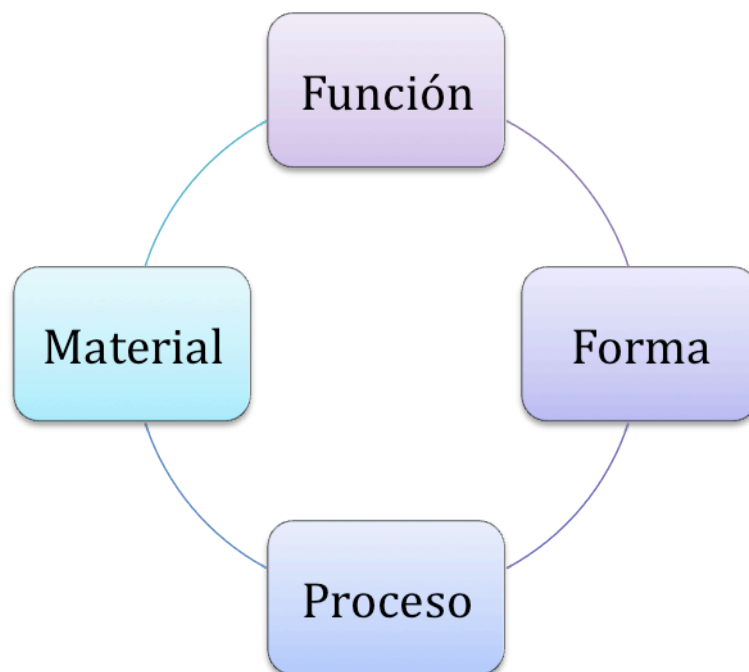
Dentro del diagrama es posible observar el paralelismo que se genera en cada etapa del diseño respecto a la selección de materiales, en la etapa de concepto el diseñador se enfrenta al enunciado que formula la necesidad a solventar, teniendo en cuenta que existen varias posibilidades que pueden cumplir con los requisitos funcionales en lo general así como con los principios físicos que rigen el comportamiento del sistema, es decir no se habla de detalle y resulta un poco vago, sin embargo es donde comienza la selección y la gama se reduce.

Durante la segunda etapa, el cuerpo comienza a encarnar, es decir, se gestan las propuestas con formas y definición de las partes que compondrán al ensamble así como definir sus atributos, esto comienza a generar mayor información respecto al material que se está contemplando utilizar y acota la selección aún más.

La última etapa denominada de detalle contempla la información arrojada por los análisis, generalmente computacionales y numéricos que ofrecen cifras muy aproximadas al comportamiento exacto del sistema y sus componentes, esto evidencia las fallas y virtudes de la selección anterior en cada uno de sus elementos y nos conlleva al análisis de los procesos que deberán utilizarse en caso

de seleccionar tal o cual pieza, recordemos que los productos en todo momento deberán ser económicamente viables, lo que sería imposible con métodos de manufactura muy costosos o simplemente falta de proveedores en el mercado que ofrezcan el material con las especificaciones generadas en este paso, la empresa manufacturera en este caso mantiene una cartera de proveedores cuyos productos ya han sido probados y mantienen un estándar determinado [3].

Sin embargo hasta este momento se ha discutido la función que deberá poseer el diseño en virtud de la satisfacción de la necesidad, lo que nos ha llevado a generar una amplia gama de posibilidades y a seleccionar de entre estas un material y forma que cumpla con el diseño propuesto, sin embargo el proceso por el cual se llevará a cabo es determinado por el material seleccionado, esto nos lleva a la interacción existente entre cada uno de estos puntos ya que nuevamente el proceso condiciona la forma [3].



**Fig. 3. 9. Relación entre la función del diseño, le material y forma seleccionados y el proceso con el que serán llevados a cabo, tomado de [3].**

Resulta entonces evidente que el proceso será iterativo ya que esta relación entre estos parámetros arrojará modificaciones en cada una de las etapas, por lo que un diseño será mejor respecto a otro si ofrece más versatilidad en este sentido.

Este trabajo se centra en el tipo de diseño *adaptativo*, en el cual se toma un concepto existente y se busca un avance incremental en su desempeño mediante un refinamiento del principio de trabajo [3]. dicho incremento se busca en el cambio de un material metálico presente en el concepto original por uno de naturaleza compuesta que mantenga o mejore las propiedades mecánicas actuales pero que reduzca el peso de la pieza.

### **III.6. Cartas de Selección de Materiales**

Afortunadamente la tarea de la selección de materiales ha sido atacada desde distintos frentes con el propósito de eliminar el factor que tradicionalmente se aceptaba, la experiencia, por el de herramientas computacionales, graficas, tablas y numerosas bases de datos de proveedores e investigadores que permiten cotejar la información requerida con aquella que disponen proveedores y científicos. Antaño era la época donde el experto en materiales se manejaba como un capital indispensable para la empresa, no es que se hayan eliminado, pero su experiencia ahora se mueve alrededor del mundo y sus conocimientos con él, por lo que el diseñador debe mantener una buena actualización y conocimiento sobre las distintas herramientas que le podrán ser útiles en el desarrollo de su actividad profesional.

Una de estas herramientas que resulta muy conveniente son las tablas comparativas o de contraste, en donde se dispone de la comparación del valor de una propiedad de un material, o familia de los mismos respecto de otra [3]. Para efectos de este trabajo se describirán cuatro gráficos, los primeros dos han sido seleccionados puesto que corresponden a aquellos usados en diseño de estructuras ligeras, las dos restantes son importantes porque justifican económicamente la decisión de emplear un material como sustituto de otro en este trabajo:

1. Módulo Elástico-Densidad.
2. Resistencia-Densidad

3. Módulo Elástico-Costo Relativo
4. Resistencia-Costo Relativo

### III.6.i. Gráfico Módulo Elástico-Densidad

Las propiedades de módulo elástico y densidad son propiedades muy bien definidas de los materiales, la densidad de un material depende básicamente de tres factores:

1. El peso atómico de sus átomos o iones.
2. El tamaño de los mismos.
3. Y su empaquetamiento.

Los dos últimos factores no tienden a dispersar mucho su valor entre varios elementos, el factor decisivo es entonces el del peso atómico [3]. Por otra parte el módulo elástico (E), depende de dos factores principalmente:

1. La fuerza del enlace entre sus átomos.
2. La densidad de enlaces por unidad de volumen.

Puesto en una expresión matemática el módulo de Young depende directamente de una constante elástica (S [N/m]) e indirectamente del tamaño del átomo que lo conforma:

$$E = \frac{S}{r_0}$$

Para generar el gráfico se ha utilizado una escala logarítmica que pueda comprender esta vasta variedad de densidades y módulos, además se han empleado líneas de contorno que engloban los grandes grupos de materiales conocidos como son las esponjas, polímeros, cerámicos, compuestos y metálicos, dentro de cada gran sección se presentan pequeñas burbujas que representan casos específicos de cada una de estas familias, y que engloban la gran variedad de valores que pueda adoptar esta propiedad.

Se distinguen otros dos elementos dentro del gráfico, una familia de líneas paralelas de velocidad de propagación del sonido constante que vinculan a distintos materiales que son capaces de transmitir una onda a lo largo de su

longitud. Las otras líneas corresponden a tres tipos de ensayos de cargas que pueden utilizarse en el diseño de una pieza cuyo peso sea de gran importancia, figura 3.10.

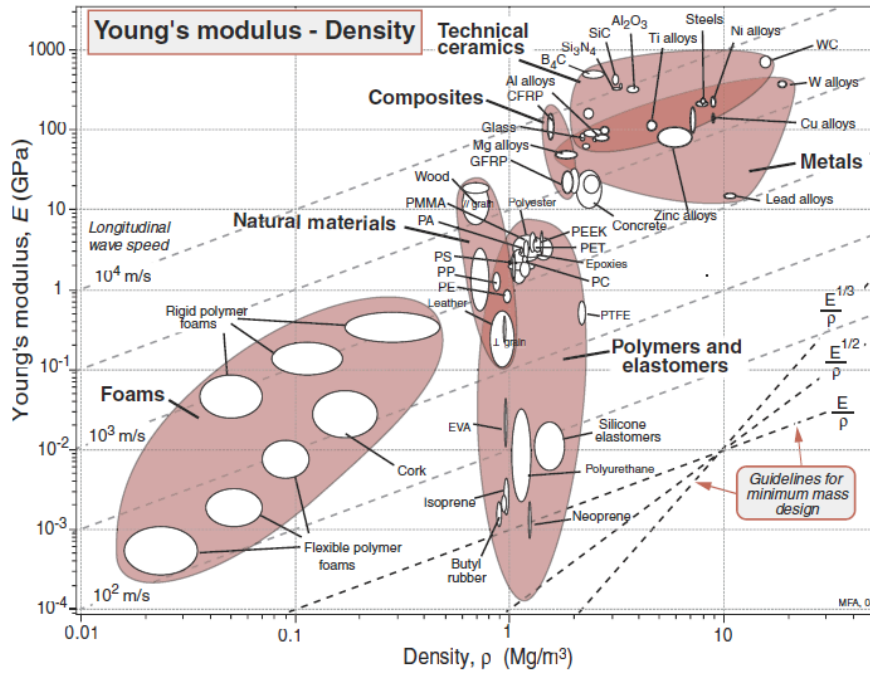


Fig. 3. 10. Gráfico contrastante: módulo de Young v.s. densidad, tomado de [3].

### III.6.ii. Gráfico Resistencia-Densidad

La **resistencia mecánica** en distintos materiales está sujeta al tipo de material empleado y el tratamiento o trabajo que haya sufrido, en el caso de los metales y polímeros se puede hablar acerca de la *resistencia a la cedencia*, en los cerámicos frágiles del *módulo de ruptura* (ensayo a flexión), para los materiales compuestos se emplea el *esfuerzo de fractura a tensión*, por lo que la comparación entre cada uno de ellos arroja grandes “burbujas” que representan lo mismo que en el diagrama anterior, sin embargo salta a la vista que éstas son de mayores dimensiones debido a la inestabilidad y propensión de esta propiedad a modificarse en cada modificación que sufra el material y caso particular en cuestión. La relación que esta variable guarda con el valor de la densidad del material a elegir queda plasmada en la figura 3.11.

“El concepto más importante para comprender esta gran variación (en el espectro) es el de resistencia de red o esfuerzo de Peierl: la resistencia intrínseca de la estructura a la falla plástica. La falla plástica en un cristal involucra el movimiento de dislocaciones.”[3]

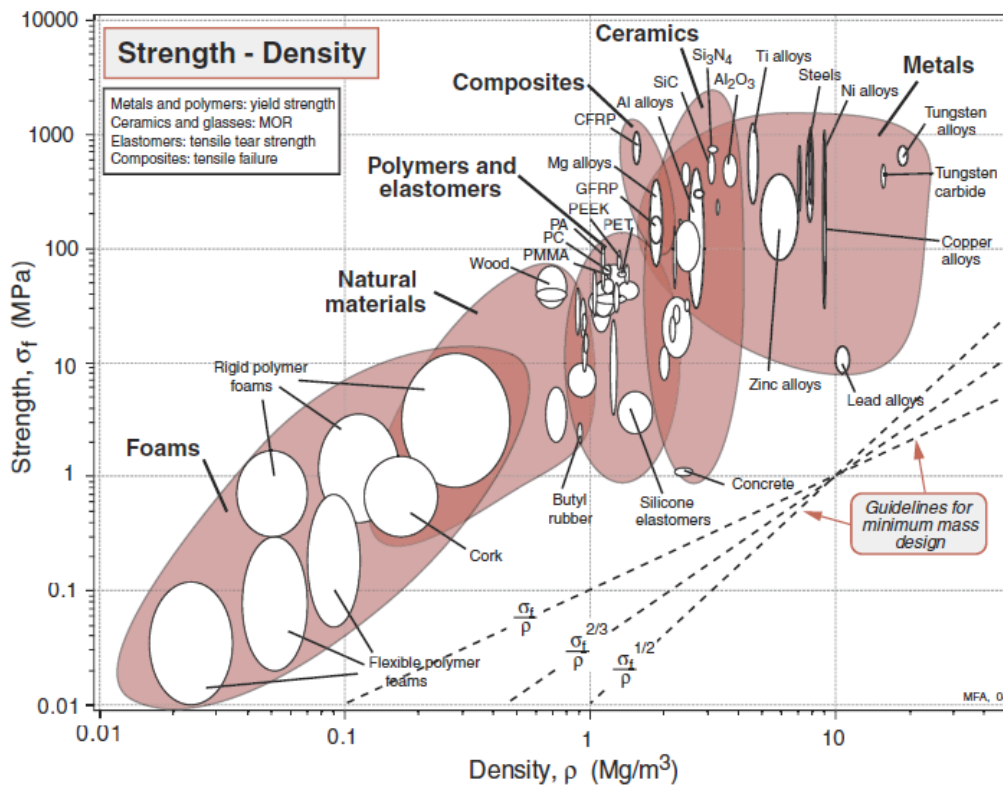


Fig. 3. 11. Gráfico contrastante: resistencia v.s. densidad, tomado de [3].

### III.6.iii. Gráfico Módulo Elástico-Costo Relativo

Las decisiones de producción son altamente dependientes del diseño pero también del costo involucrado, el cual depende en gran parte del material [3], establece el parámetro de costo relativo por unidad de volumen ( $C_{v,R}$ ) como:

$$C_{v,R} = \frac{\text{Costo/kg} * \text{Densidad del Material}}{\text{Costo/kg} * \text{Densidad de un cilindro de acero dulce}}$$

El costo de dicho acero al momento de la publicación era de \$0.3 dólares por kilogramo. Se debe notar que yacen a la izquierda de este diagrama aquellos materiales que resultan rígidos y baratos, figura 3.12.



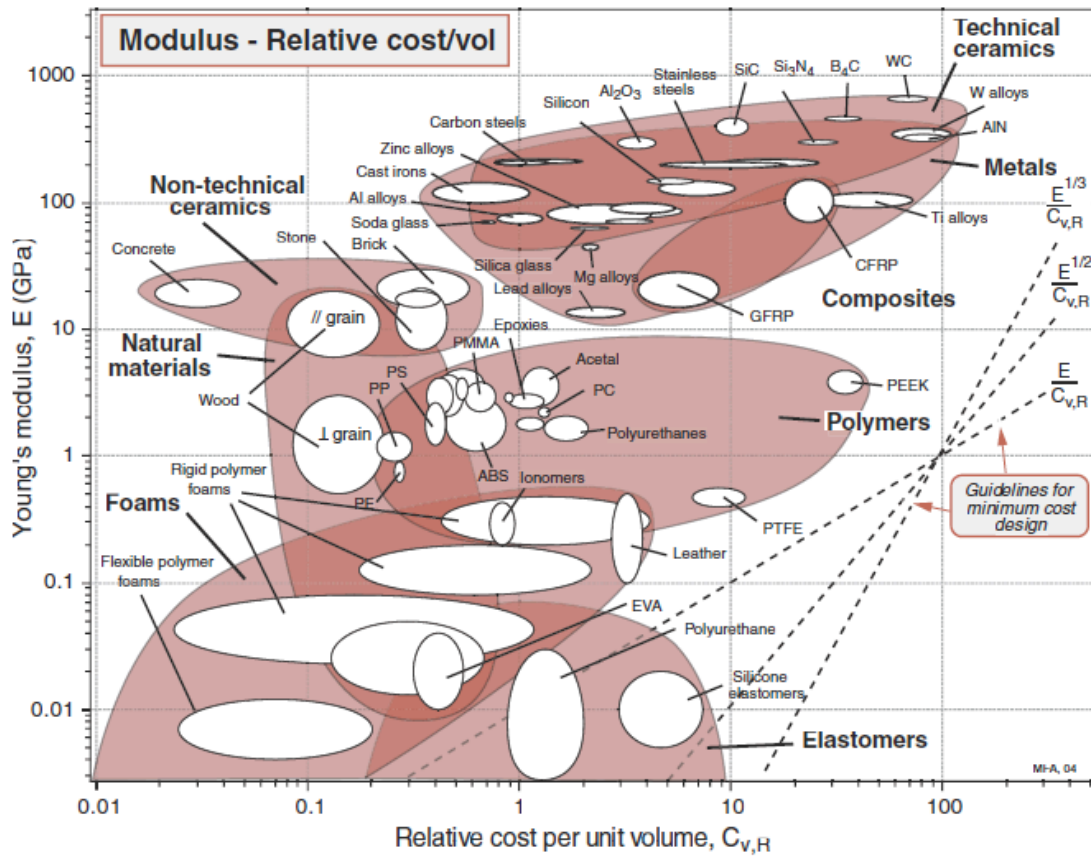


Fig. 3. 12. Gráfico contrastante: módulo elástico v.s. costo relativo, tomado de [3].

### III.6.iv. Gráfico Resistencia-Costo Relativo

Se define el costo relativo por unidad de volumen de la misma manera que en la sección anterior así también la resistencia mecánica siendo la esquina superior izquierda la que cumple con la mayor resistencia al menor costo.

Ambos diagramas que relacionan el costo son susceptibles a movimientos del mercado, es por ello que no resultan tan confiables, sin embargo resaltan por su utilidad en la selección de materiales.

En la figura 3.13 se presenta la relación entre estas variables antes mencionadas.

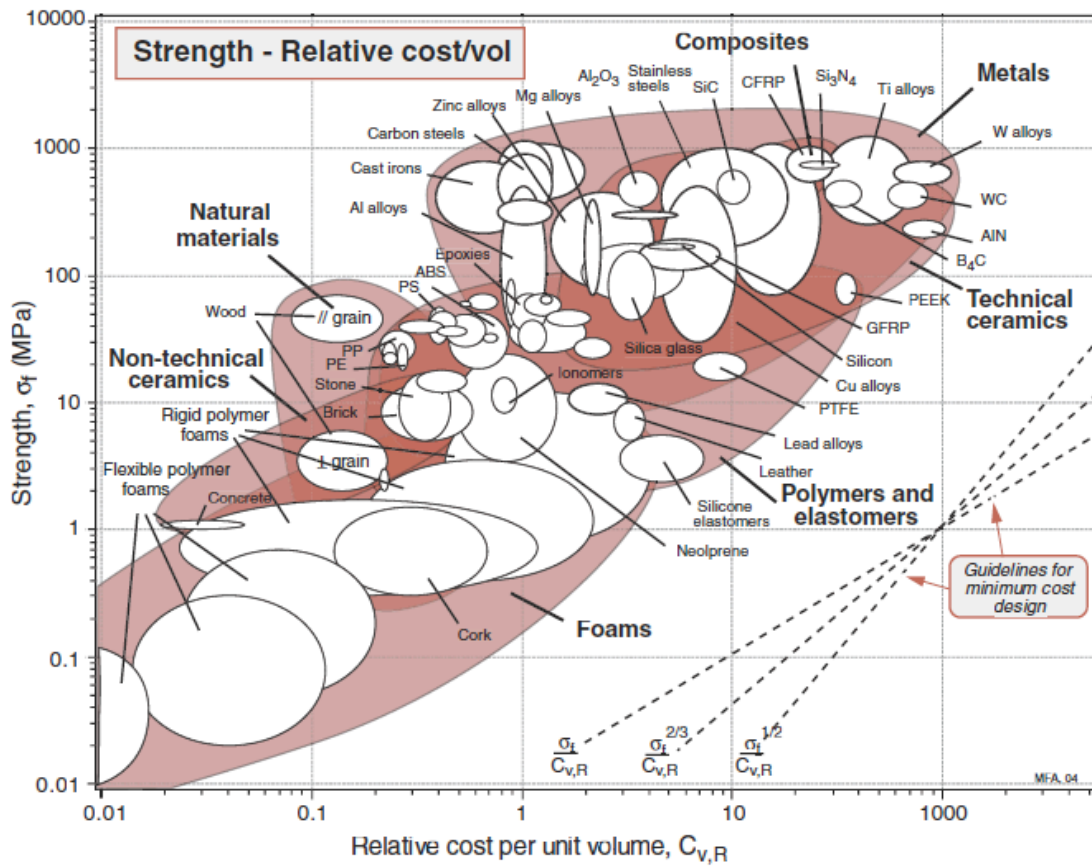


Fig. 3. 13. Gráfico contrastante: resistencia v.s. costo relativo, tomado de [3].

### III.7. Selección de Materiales

En las secciones anteriores se han presentado los gráficos que denotan los atributos de los materiales compuestos respecto a sus propiedades mecánicas y se comparan con aquellas de otras familias dando como resultado una evaluación positiva en cuanto a la capacidad que tienen los primeros en equiparar las propiedades de resistencia mecánica y módulo elástico asociadas a una menor densidad. Sin embargo también puede constatar que su costo relativo excede aquél del acero y sus aleaciones y las fundiciones de hierro, por lo que se deben explorar más criterios, en esta sección se sigue una metodología propuesta por [3] que esgrime una estrategia de selección de materiales basada en cuatro pasos sencillos y que nos ayuda a elegir entre todo el vasto universo de materiales conocidos, evitando basarnos tan solo en aquellos que resultan conocidos por el diseñador, hasta llegar a aquél que resulta conveniente en el desarrollo de un proyecto en específico tomando en cuenta los recursos con los que cuenta el

diseñador en su localidad, o en la localidad de la producción, el siguiente gráfico ejemplifica estos pasos y se detallan a continuación:

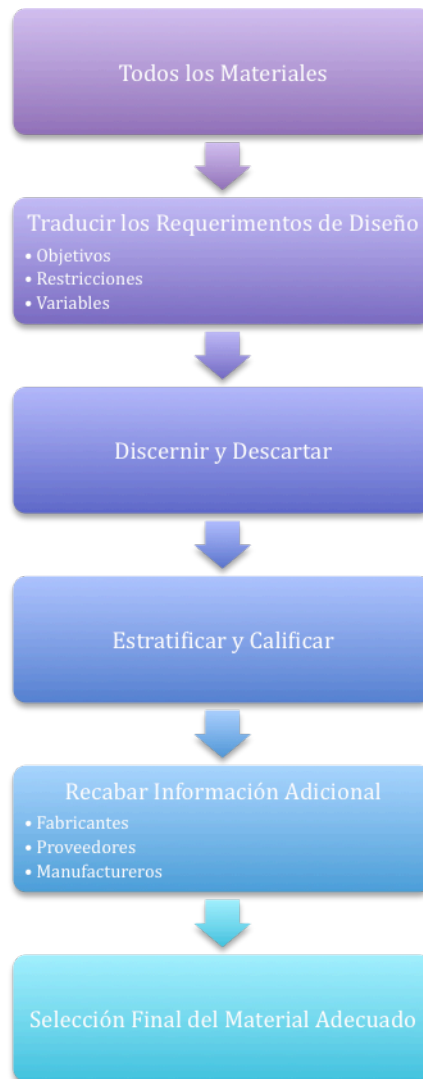


Fig. 3. 14. Estrategia de cuatro pasos para la selección de materiales [3].

Como primera fase se debe de *describir* o *traducir* adecuadamente los requerimientos de diseño con base en la función que desarrollará, las restricciones que lo delimitan, el objetivo que deberá cumplir el diseño y finalmente cuales son los aspectos de este que quedan libres para que el diseñador pueda decidir sobre de ellos. Este aspecto resulta crucial desde un inicio, los componentes mecánicos suelen realizar diversas funciones por lo que deberán enunciarse muy claramente, las restricciones por lo general pueden delimitar la forma, alguna necesidad sobre el ambiente de trabajo, pero en general deberán ser satisfechas en la mayor medida, el objetivo u objeto del diseño suele ser la parte medular en donde la

función deberá ser optimizada. Deberá tenerse en cuenta que en esta etapa el mapa de materiales resultan ser todos ellos sin excepción.

Un buen avistamiento de la fase de traducción nos conduce a *discernir* entre las distintas clasificaciones de materiales en donde las cartas antes descritas pueden ser de gran utilidad para *discriminar* aquellas familias que no se acerquen a los valores de las propiedades que buscamos, esta etapa se conoce como *escrutinio*. Durante el escrutinio, se abarca la totalidad de las posibilidades de elección y se escoge basado en la información disponible sobre el material y la correspondencia que tengan con los atributos deseados por el diseñador .

Hasta este momento no se tiene una perspectiva sobre cuál material es el más apto para realizar la tarea de la mejor manera, por lo que el siguiente paso es *calificar* a aquellos que ya han pasado por el filtro en base a las referencias encontradas en sus propiedades, las cuales benefician al diseño en uno o varios aspectos, creando así un indicador del material.

Existen siempre retos en el diseño, una vez reducida la lista de posibilidades e identificado los más viables, se debe de hacer uso de la información adicional respecto del material seleccionado, esto implica recopilar la información que se ha recabado en el ramo respecto del material, por quienes lo han usado, y quienes lo fabrican, en que tipo de aplicaciones se caracteriza por un buen desempeño y uno adverso, si es fácil de conseguir y si tendrá un costo adecuado al diseño que se busca. Dicha fase se denomina de *recopilación de información complementaria*, y resulta ser muy decisiva en la selección de esa pequeña lista a la que hemos llegado ya que puede influenciarse de las condiciones en donde se llevará a cabo la manufactura de un producto final y actualmente resulta ser clave en empresas altamente competitivas como el gigante de las computadoras Apple, quien según Satariano y Burrows [6], condiciona a las ensambladoras una línea de suministro constante con una cercanía de su principal proveedor en un radio no mayor a una milla con un inventario en existencia equivalente a noventa días de producción, esto es asegura que nunca se detendrá la producción de sus dispositivos, siendo que a sus competidores les ha resultado desastrosa esta práctica de acaparamiento de recursos ya que han sufrido el desabasto, este caso evidencia este último punto con un caso muy actual.

# Capítulo IV

## Caso de Estudio

### IV.1. Introducción

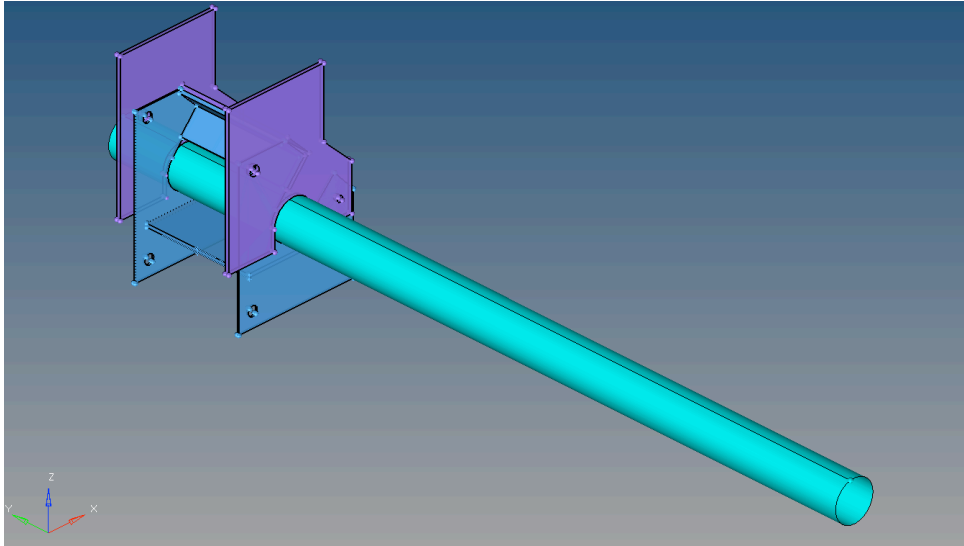
La optimización estructural detallada en el capítulo anterior, en específico aquella del tipo topológica, ha sido aplicada en un caso de estudio a un elemento de la suspensión trasera de un vehículo eléctrico construido en los talleres del Centro de Diseño y Manufactura e Innovación Tecnológica (CDMIT) de esta Facultad de Ingeniería denominado VER (Vehículo Eléctrico de Reparto), con el fin de sustituir la pieza actual de acero por una similar de material compuesto, en este caso por fibras de vidrio embebidas en una matriz polimérica, en específico, de resina epóxica.

El trabajo realizado por el grupo de optimización estructural no ha comprendido el uso de materiales compuestos en el diseño de estructuras, sin embargo se cuenta con trabajo en el desarrollo de un chasis para un vehículo utilizando optimización topológica [15], en donde se obtiene de un espacio de diseño una topología optimizada capaz de resistir los distintos tipos de cargas a las que fue sometida en su análisis, así también existe un trabajo previo que analiza el chasis del mismo vehículo que se toma como referencia para el caso de estudio del presente trabajo [16] en donde se llega a ofrecer el diseño conceptual del chasis como monocasco reduciendo la masa de la estructura en un 15%.

El propósito de incluir este caso de estudio es aplicar en una pieza real los conocimientos obtenidos en el estudio de las técnicas de optimización en donde el análisis por elementos finitos tiene la función de herramienta de cálculo del nivel de esfuerzos y asigna el valor de referencia de la tasa de rechazo, y es por ello indispensable en este proceso. Además de sentar el precedente en la utilización de materiales compuestos en casos de optimización y verificar su viabilidad de fabricación en las mismas instalaciones en que fue creado dicho vehículo.

Esta pieza resulta ser aquella que recibe las cargas del camino y del vehículo y las transmite al bastidor, se encuentra instalada debajo del amortiguador, descansa sobre el eje trasero al cual le restringe su movimiento a través de otros elementos

sujetos al bastidor. Se ha efectuado un análisis y optimización a la pieza original como fundamento y justificación para la realización de este trabajo, descubriendo que existe aún un área de oportunidad suficientemente grande tomando en cuenta la cantidad de material removido en la pieza así como el estado de esfuerzos determinado.



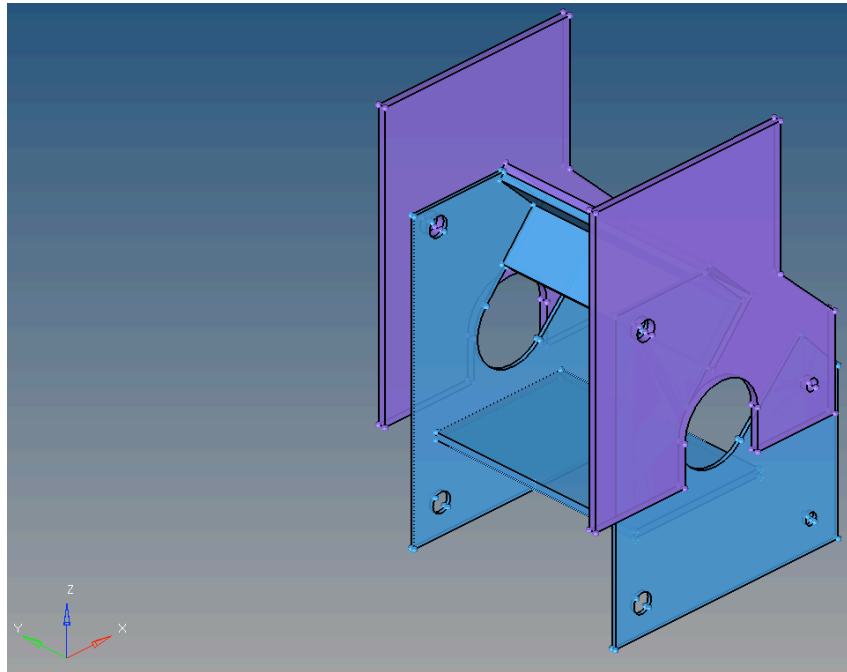
**Fig. 4. 1. Pieza de Trabajo, Ensamble con el Eje**

El análisis por elementos finitos (FEA) y las corridas de optimización han sido efectuadas utilizando la paquetería HyperWorks 11.0 en sus módulos de RADIOSS para el análisis por elementos finitos y OPTISTRUCT para la optimización estructural topológica. Ambos han resultado una gran herramienta en el cálculo de esfuerzos y desplazamientos en el FEA, así como en el grosor de elementos y láminas de material compuesto tras realizar la optimización.

#### **IV.2. Proceso de Análisis**

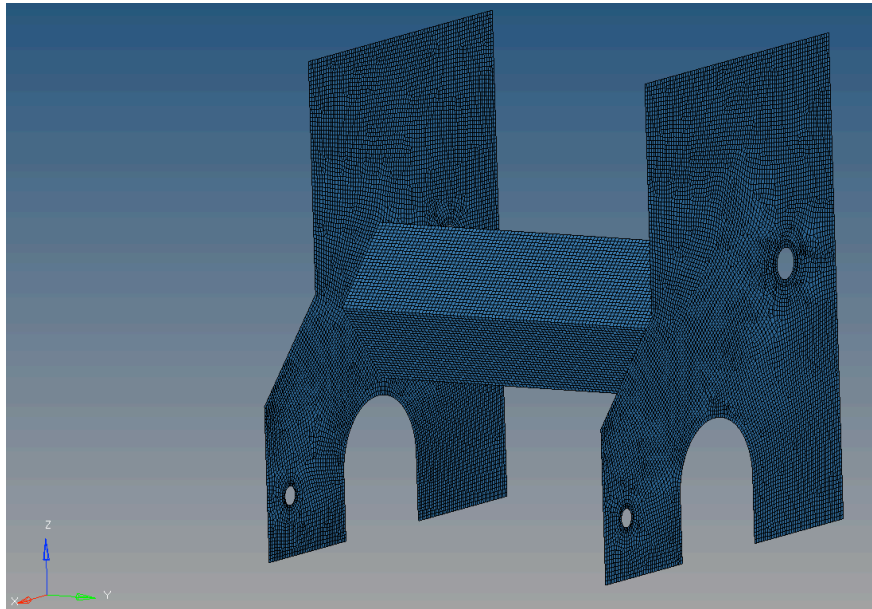
A continuación se presenta el desarrollo del análisis de la pieza de trabajo en orden ascendente:

1. Se efectuó el modelado por computadora de la pieza, esta consta de tres elementos fundamentales, a saber, dos piezas de ensamble y el eje, a través de las medidas obtenidas al desmontar dicha pieza.

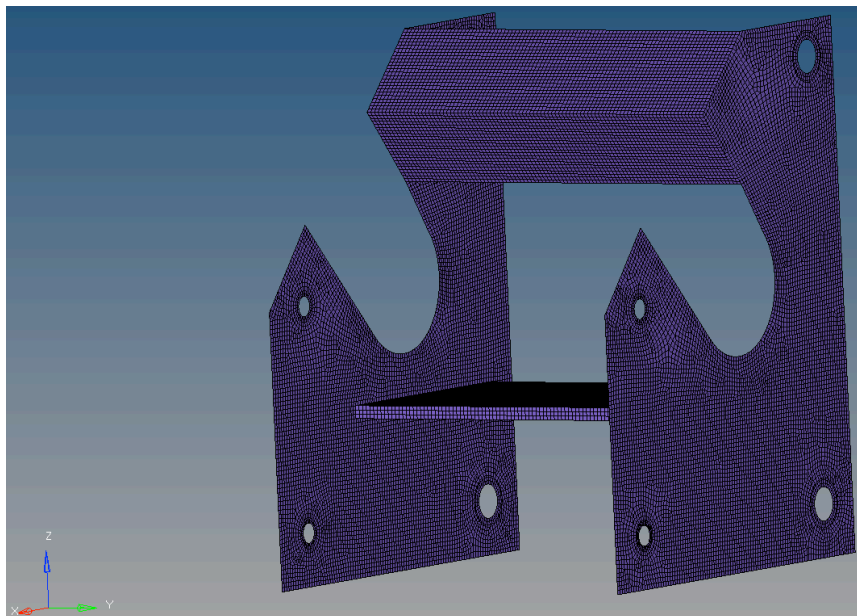


**Fig. 4. 2 Ensamble de la Pieza de Trabajo**

2. El modelado original contempla elementos tridimensionales, aunque muy delgados, no son considerados del tipo cascarón por el paquete, es por ello que la segunda etapa ha sido la de generar una superficie media a partir del modelo CAD. Dicha superficie media presenta distintas ventajas al modelo:
  - 2.1. Reduce la cantidad de elementos necesarios para mallar el sólido original.
  - 2.2. Idealiza el concepto de un elemento plano del tipo cascarón.
  - 2.3. Reduce el tiempo de cómputo al tener menos elementos y tan solo un parámetro de espesor que añadir en la matriz de propiedades.
  - 2.4. Aunque representa una idealización del modelo, este no representará gran error asociado respecto del análisis del sólido por presentar las características de un elemento tipo cascarón descritas en el primer capítulo.
3. Seguido de esto se generó una malla que fue adaptada a la superficie para contemplar adecuadamente los cambios en la geometría y topología.



**Fig. 4. 3. Superficie Media del Castillo Superior Mallada**



**Fig. 4. 4Superficie Media del Castillo Inferior Mallada**

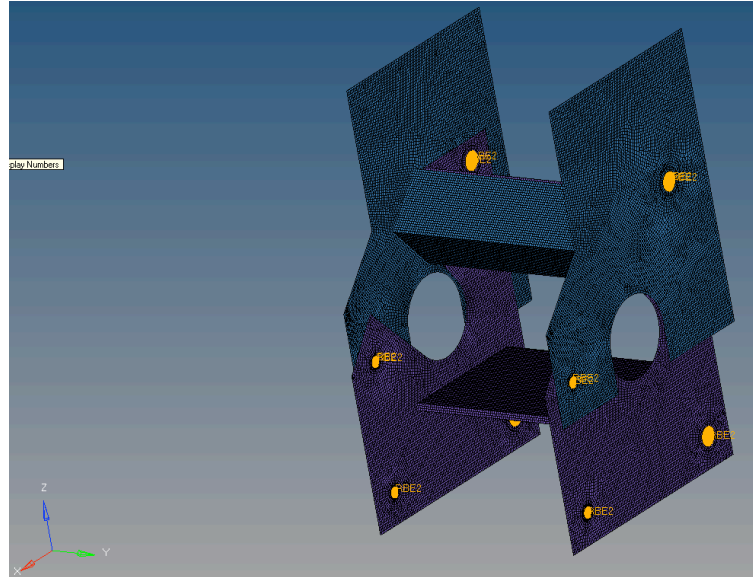
4. A continuación a dicha superficie media se le añadieron las propiedades de material y tipo de elemento respectivos.
  - 4.1. En esta parte se deben declarar las propiedades elásticas de la fibra y la matriz polimérica, concretamente fibra de vidrio en matriz polimérica de resina epóxica.
  - 4.2. Seguido de ello debe establecerse la secuencia de apilamiento en el laminado, es en este punto en donde se declara la orientación de las fibras y la matriz así como los espesores de estas.



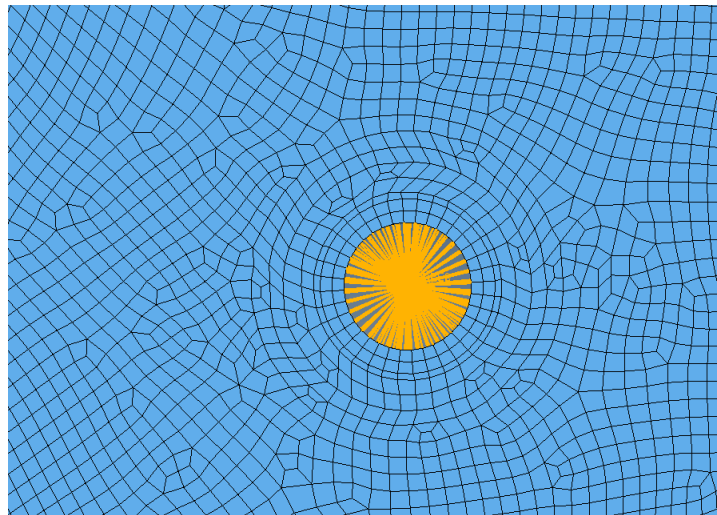
- 4.3. Asociado al espesor por capa de fibra y de resina se han designado las variables de diseño, una para cada componente, esto permite a cada capa aumentar o disminuir su espesor según sea necesario.
- 4.4. El tipo de elemento en este caso son cascarones de materiales compuestos y se asignan con el fin de completar la declaración del código para llevar a cabo el procesamiento de datos.
5. Se añadieron las condiciones de frontera asociadas a los nodos respectivos que modelarán los casos de carga que más adelante serán detallados, y así también las restricciones de ciertos grados de libertad (o todos) en donde fuese necesario.
6. Para realizar un análisis lineal estático, es necesario ubicar las excitaciones en un colector de cargas, asociadas también a las restricciones, esto es importante ya que el análisis por elementos finitos nos arrojará datos sobre cada uno de los colectores de carga declarados y el proceso de optimización requiere de evaluar la función objetivo en los casos de carga que designemos con estos colectores.
- 6.1. La respuesta seleccionada es el inverso de la rigidez y la masa de la pieza.
- 6.2. Como objetivo se plantea la minimización del inverso de la rigidez, y se obtiene el detalle de la variación de la masa respecto a las iteraciones realizadas.
7. Hasta este momento no se ha considerado la transmisión de cargas hacia todo el ensamble, esto ha sido uno de los principales retos del proceso de mallado, ya que las superficies si bien no presentan uniones físicas como soldaduras o remaches en donde dos superficies o más interactúan, si es necesario integrar esta parte en el modelado haciendo uso de elementos estructurales o de sujeción para este propósito, en general se ocuparon dos tipos de conectores: perno (bolt) y elementos rígidos. Estos conectores generan a su vez ciertas ventajas y realizan un mejor trabajo en la aproximación del resultado hacia un comportamiento más realista de la pieza de trabajo.
- 7.1. Los elementos rígidos aportan rigidez estructural a la unión pero transmiten la carga íntegra desde un nodo maestro a uno esclavo, este nodo se puede derivar a varios por lo que distribuye uniformemente la carga en cada nodo en donde se conecta.

7.2. Los elementos tipo perno, figuras 4.5 y 4.6, se constituyen de un nodo central maestro en donde se colocaron condiciones de frontera que se transmiten hacia toda la periferia del agujero donde residen.

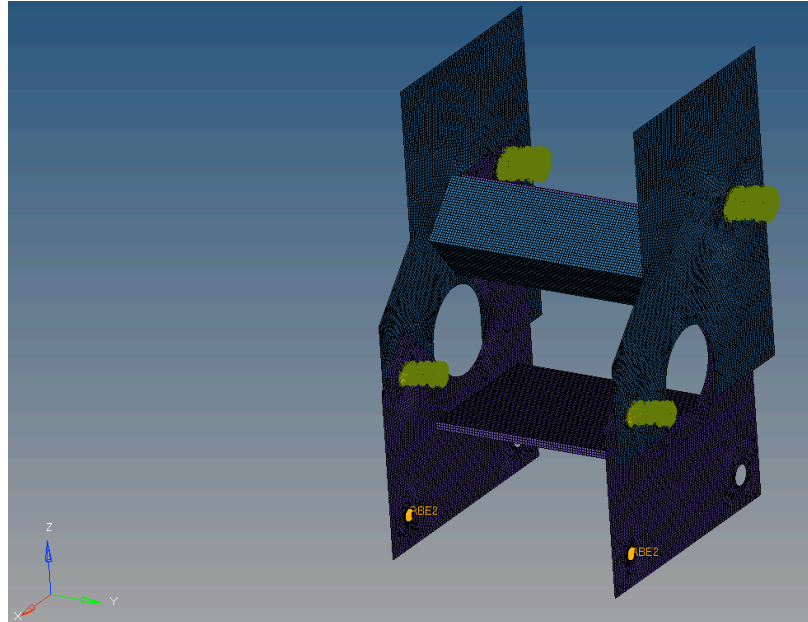
7.3. Los elementos tipo “gap”, figura 4.7 y 4.8, no aportan rigidez a la malla pero mantienen una distancia entre dos superficies.



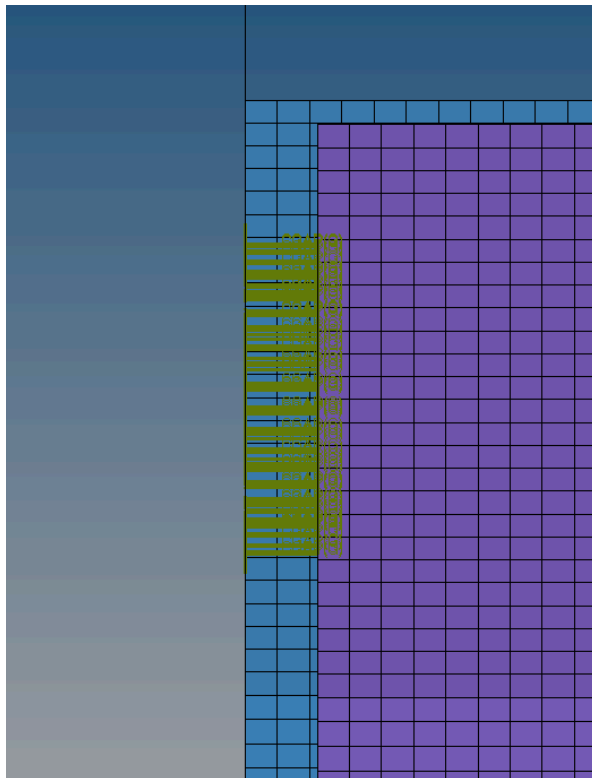
**Fig. 4. 5. Elementos Rígidos tipo “Bolt”**



**Fig. 4. 6. Detalle de un Elemento Rígidos tipo “Bolt”**



**Fig. 4. 7. Elementos Rígidos tipo "Gap"**



**Fig. 4. 8. Detalle de Elementos Rígidos tipo "Gap"**

8. Se ingresa el trabajo al procesamiento y cálculo de resultados, de esfuerzo y deformación en este caso.

Hasta este punto ha concluido la secuencia de pasos necesarios para generar una geometría y ensamblarla, mallarla, otorgarle propiedades, restringirla, excitarla, que serán necesarios para llevar a cabo un análisis por elementos finitos. Cada uno

de ellos con distinta complejidad de ejecución y refinamiento de detalles propios que deben cuidarse para acotar errores y tiempos de cómputo en el procesamiento y la generación de resultados.

Dado que la optimización estructural se vale del análisis por elementos finitos para encontrar aquellas zonas subutilizadas en el dominio del diseño, la generación de una buena malla así como la pertinente colocación de restricciones y excitaciones resultan pasos cruciales para que el diseño converja en un buen resultado al ser optimizado, es por ello que esta sucesión de pasos en general conlleva un mayor tiempo de trabajo y análisis por parte del diseñador que aquél empleado en la optimización.

### **IV.3. Proceso de Optimización**

En general no es necesario realizar previamente un análisis por elementos finitos antes de comenzar con la optimización, no obstante es muy recomendable ya que el diseñador podrá vislumbrar en este las áreas susceptibles a ser eliminadas y aquellas que deberán preservarse, de cualquier manera el optimizador llevará a cabo este análisis. Sin embargo podrán identificarse discrepancias en los resultados del análisis realizado por el optimizador ya que se contemplan únicamente las regiones diseñables. Es por ello que resulta pertinente definir las áreas de no diseño de alguna pieza (o ensamble), las cuales resultan ser aquellos elementos, que a pesar de estar mallados no forman parte del dominio de optimización, y el procesador los dejará intactos (en densidad y grosor) al ir removiendo el material en las áreas que no han sido delimitadas.

A continuación se enuncian los pasos seguidos para configurar la corrida de optimización estructural:

1. Primeramente se selecciona el tipo de optimización estructural al que será sometida la pieza (topológica, de forma o geométrica). El tipo que se elija deberá adjudicarse a alguna propiedad previamente declarada, esta propiedad se asocia a la malla o a la geometría designada en la lista anterior en el inciso 5 (adjudica el tipo de elemento y material de la sección).
  - a. En el caso de materiales compuestos se deben de declarar cuáles serán las variables susceptibles a ser optimizadas y deberán

designárseles valores nominales, mínimo y máximo, éstas pueden ser la orientación de las placas de material compuesto o su grosor, en este trabajo se emplea como variable de diseño el grosor de cada placa de material fibroso.

2. Se solicitan los tipos de respuestas que deseamos obtener del modelo, por ejemplo, la masa (o fracción), el volumen (o fracción), la rigidez (su recíproco), La memoria del cálculo de estas respuestas queda finalmente almacenada y graficado al terminar la última iteración de optimización en una hoja de resultados donde se describe su evolución respecto a cada iteración de la optimización.
  - a. Dependiendo del tipo de respuesta solicitado deberá ingresarse también el escenario de carga en el cual dicha respuesta deberá analizarse u obtenerse.
3. Se debe declarar el objetivo de la optimización, en este punto se puede fincar un punto de inicio, por lo general el estado o topología original de la pieza y se delimitan los alcances de la optimización de esta variable. Tradicionalmente se ha buscado la reducción de masa de la estructura analizada, sin embargo este trabajo se centra en mantener o incrementar la rigidez de la pieza del caso de estudio respecto a la original
4. Se designan las restricciones de optimización, esto puede vincular o condicionar al objetivo o una variable a detener las iteraciones o continuarlas hasta conseguir el valor deseado, se opta por restringir el porcentaje de masa original para no comprometer la rigidez estructural en zonas donde pueda quedar muy endeble la pieza.

Hasta aquí el proceso de optimización nos ofrecerá al término de las iteraciones pertinentes los resultados gráficos de la pieza y las respuestas así como la función objetivo en una evolución respecto a las iteraciones realizadas, es decir nos arroja un panorama de cómo ha ido evolucionando la pieza y los datos que hemos elegido como de nuestro interés.

Este tipo de resultados nos conduce a una evaluación del objetivo de optimización, en donde se muestra que tan fructífero ha sido la realización del proceso en curvas y valores numéricos. Por otro lado los resultados gráficos del modelo nos permiten

observar la distribución del material, la densidad o espesor de los elementos remanentes a través de cada iteración consumada y además por cada capa de material, ya sea resina o fibra, esto primeramente nos ofrece una posibilidad de suavizado del modelo final pero también es identificable la factibilidad del diseño e incluso el reto que impondrá la manufactura de la pieza optimizada, este punto resulta clave en la optimización ya que resulta indeseable ofrecer una solución poco factible y de costosa manufactura como sustitutos de las piezas originales.

#### IV.4. La Pieza de Trabajo

La pieza de trabajo forma parte de la suspensión del Vehículo Eléctrico de Reparto (VER) diseñado y construido en la Facultad de Ingeniería, se encuentra localizado debajo del amortiguador, elemento con el cual se conecta al bastidor por la parte superior. Por la parte frontal se encuentra sujeto a dos brazos que le restringen el movimiento en el sentido del eje longitudinal del vehículo.

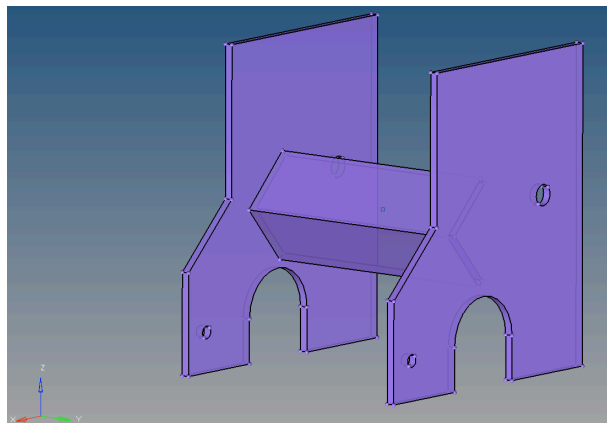


Fig. 4. 9. Castillo Superior, Consta de 3 Placas de Acero

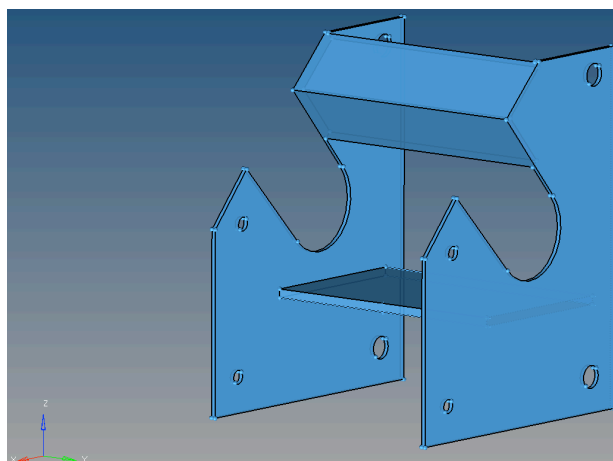


Fig. 4. 10. Castillo Inferior, Consta de 4 Placas de Acero

La pieza consta de siete placas de acero ASTM A36 de 6mm de espesor, unidas por soldadura para formar un castillo. El castillo consta de dos piezas que se montan alrededor del eje, una por encima y la otra por debajo, existe solamente un perno que las une a una placa fija que se encuentra sobre la camisa de la flecha. Este castillo tiene por función sostener el bastidor en este punto de apoyo y limitar el desplazamiento del eje y la llanta hacia delante y hacia atrás, además conduce las cargas que recibe del camino hacia el bastidor. Las propiedades del material con el que se encuentra construido son las que se enuncian a continuación:

Densidad [kg/mm <sup>3</sup> ]	7.89e-6
Módulo Elástico [GPa]	210
Coefficiente de Poisson	0.3
Esfuerzo de Cedencia [MPa]	250

Característico por sus buenas propiedades mecánicas y desempeño como elemento estructural de bajo costo y alta disponibilidad en varias presentaciones y perfiles.

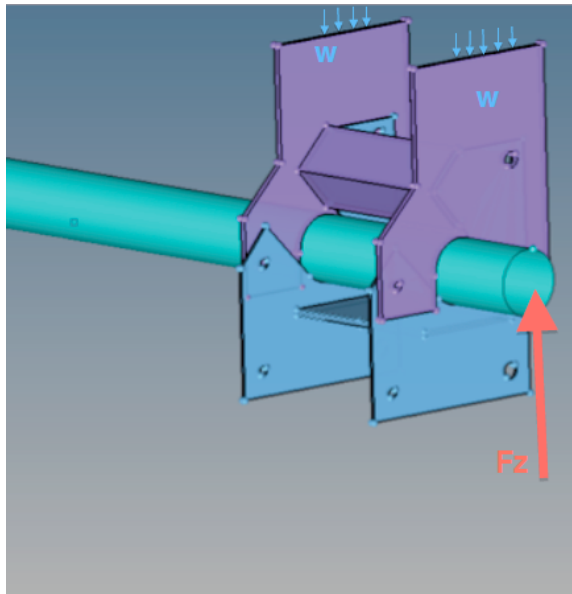
#### **IV.5. Escenarios de Carga**

Es usual en la literatura encontrar los diagramas referentes a una suspensión automotriz asociados al análisis de una sola rueda en un plano, esto se conoce como modelo de un cuarto de vehículo[8], ya que representa tan solo la cuarta parte del caso de diseño, y ubica las reacciones y cargas ejercidas al modelo en el plano. En este trabajo se ha optado por dicha simplificación en el análisis y modelado. Esto se ha elegido de esta forma para ahorrar tiempo de cómputo y por las condiciones de simetría que impone el entorno de diseño.

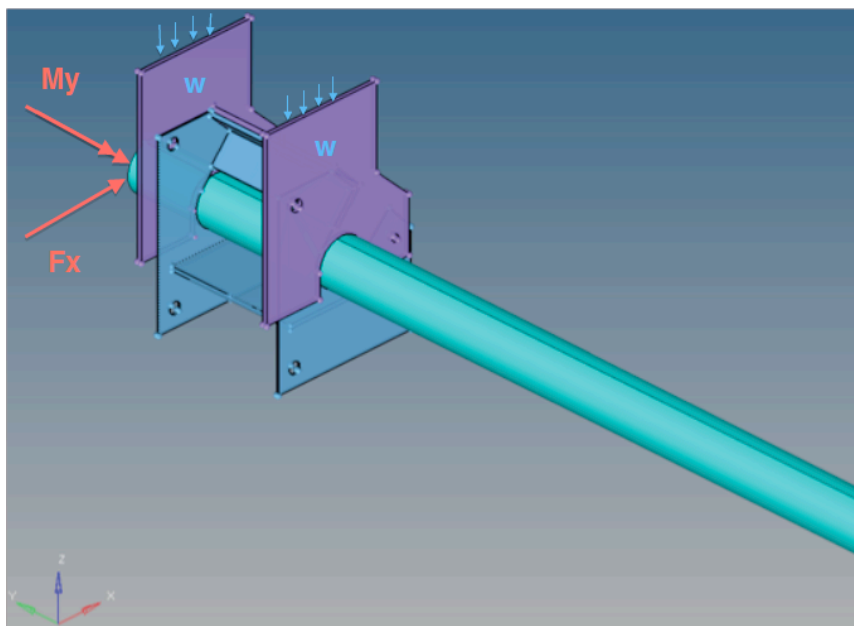
Es requerido para cualquier tipo de estructura que sea capaz de sostener su peso en los apoyos que se le otorguen, en el caso de una suspensión esta deberá ser capaz de sostener el peso del vehículo, siendo este el caso de carga más sencillo y a partir del cual se derivan los demás casos de carga no se incluirá el resultado de su

análisis en la discusión y resultados. Se han elegido cinco casos de carga que se consideran determinantes en el comportamiento de un vehículo, a saber:

1. Caso de Irregularidad en el camino: Esta irregularidad se presenta como un hoyo o prominencia en donde cae la rueda transmitiendo la reacción al miembro de la suspensión analizado.

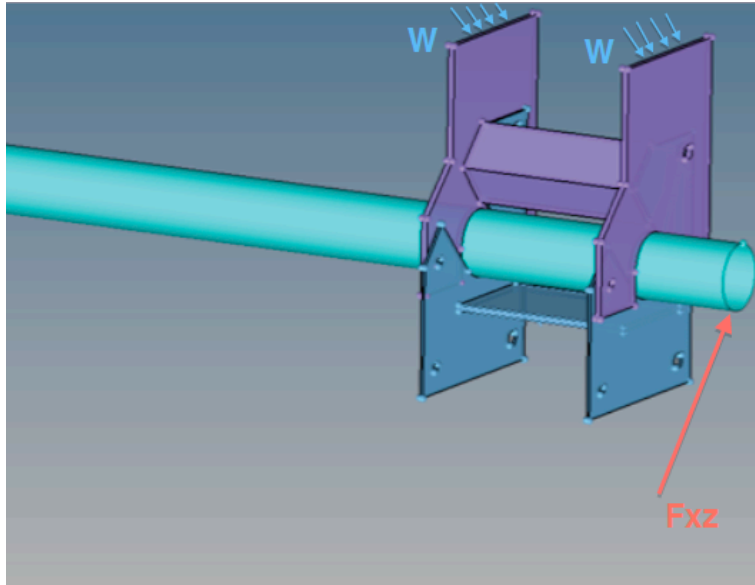


2. Caso de Frenado: Ante un frenado la suspensión recibe las cargas magnificadas por un factor resultado de la inercia de la estructura en oposición a la fuerza que se le ejerce para detenerla.





3. Caso de Curva: En este caso se desprenden dos alternativas, el presentarse en la rueda interna, al sentido de giro, o externa, la atenuación de la carga sobre la llanta es relativa a esta posición, afectando al comportamiento de nuestro elemento.



4. Caso de Escenarios Combinados: Estos casos se dividen en dos, son los casos más extremos, sin embargo representativos de situaciones reales a las que un vehículo puede ser sometido en condiciones de operación regulares.
- a. Curva e Irregularidad: Este caso presenta gran capacidad de respuesta de la suspensión ya que a través de la llanta se transmiten cargas de gran magnitud.
  - b. Frenado e Irregularidad: Es el caso más extremo, actúan las cargas y momentos de mayor orden de magnitud simultáneamente, es por tanto de esperar altos niveles de esfuerzo sobre la pieza de trabajo.

Los casos de carga han sido seleccionados después del análisis de la literatura especializada en donde se arrojan ciertos valores de atenuación y magnificación de la carga como sigue [8]:

Caso de Carga	Factor
---------------	--------

Irregularidad (bache)	3g
Frenado	1g
Vuelta (llanta interna)	0.75g
Vuelta (llanta externa)	0.75g

#### IV.6. Propuesta de Sustitución

En la pieza que se ha seleccionado como caso de estudio se ha utilizado originalmente placa de acero ASTM A36 de 6 [mm] de espesor para su manufactura, sin embargo es propósito de este trabajo el realizar el modelado de la pieza asignándole un material compuesto utilizando la misma geometría, designando las propiedades de las fibras y la matriz respectivamente para después asumir una secuencia de apilamiento con sus respectivas orientaciones para conformar un laminado, compuesto de placas interpuestas de dichos materiales, en total se han designado quince placas, siete de ellas son películas de resina y las ocho restantes son de fibra, a continuación se muestra una tabla con las distintas orientaciones de los dos componentes del laminado compuesto:

Material	Orientación [°]
Fibra de Vidrio	90
Resina Epoxica	0
Fibra de Vidrio	45
Resina Epoxica	0
Fibra de Vidrio	-45
Resina Epoxica	0
Fibra de Vidrio	0
Resina Epoxica	0
Fibra de Vidrio	0
Resina Epoxica	0
Fibra de Vidrio	-45
Resina Epoxica	0
Fibra de Vidrio	45
Resina Epoxica	0

Fibra de Vidrio	90
LAMINADO	[90,±45,0]

Como se observa en la tabla se eligieron la fibra de vidrio y la resina epóxica como los materiales a emplear, sus propiedades se enuncian en la siguiente tabla:

Propiedad	Fibra de Vidrio	Resina Epóxica
Módulo Elástico [GPa]	72.4	3.45
Módulo a Cortante [GPa]	43.92	1.287
Densidad [kg/mm <sup>3</sup> ]	2.54 e-6	1.12e-6
Coefficiente de Poisson	0.2	0.34
Resistencia a la Tracción [MPa]	3620	71
Resistencia a la Compresión [MPa]	362	180
Resistencia al Cortante [MPa]	27.6	35

La pieza se sometió a una corrida inicial con un espesor del laminado muy similar al del grosor de la placa de acero, siendo este de 5.5 [mm] de espesor total, con un espesor por capa de 0.25 [mm]; sin embargo se notaron ciertas discrepancias entre los resultados obtenidos tanto para los distintos casos de carga como en la coherencia entre las capas de fibras y la resina, que aunque tienen propiedades mecánicas muy distintas debieran tener un perfil similar, indicativo de que se comportarían como un solo elemento en el laminado.

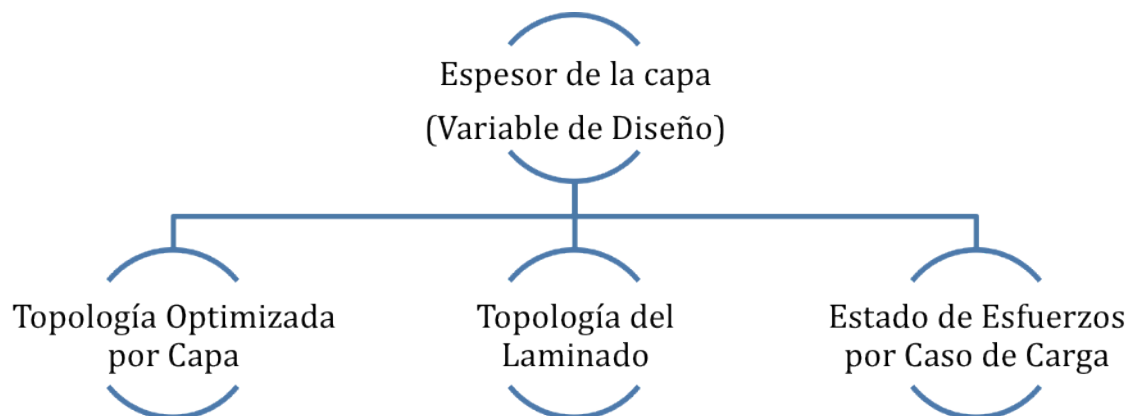
#### **IV.7. Resultados de Optimización Estructural Topológica**

Como se indicó en la sección anterior se observó la necesidad de variar el espesor de las capas de fibra ya que estas eran las que más cambios sufrían en su topología y obtenían el espesor máximo, y como consecuencia el espesor del laminado también aumentó.

La fibra y la resina guardaban muy poca relación la una con la otra y los resultados sugerían que la resina poco aportaba al laminado como portadora de carga, esto en un material compuesto dista mucho de ser cierto, primeramente porque la fibra debe estar inmersa en una matriz ya que es susceptible a degradarse en exposición

a ciertos tipos de ambiente, en especial los alcalinos, la matriz también da cuerpo al laminado y mantiene adheridas las fibras y sus capas, además la resina resulta ser altamente resistente a cargas cíclicas[12] por lo que resalta la importancia de su permanencia en valores constantes sobre todo lugar donde exista fibra.

Además los resultados del análisis por elementos finitos sobre el nivel de esfuerzos indicaban la necesidad de reforzar ciertas regiones de la pieza, como son los soportes, y las zonas donde la carga era recibida, es por ello que se optó por elegir como variable de diseño el espesor de la capa de fibra de vidrio, ya que era quien más aportaba a la distribución de los esfuerzos en el laminado, siendo también el elemento que recibe distintas direcciones en el apilamiento para poder soportar adecuadamente las cargas a las que es sometido.

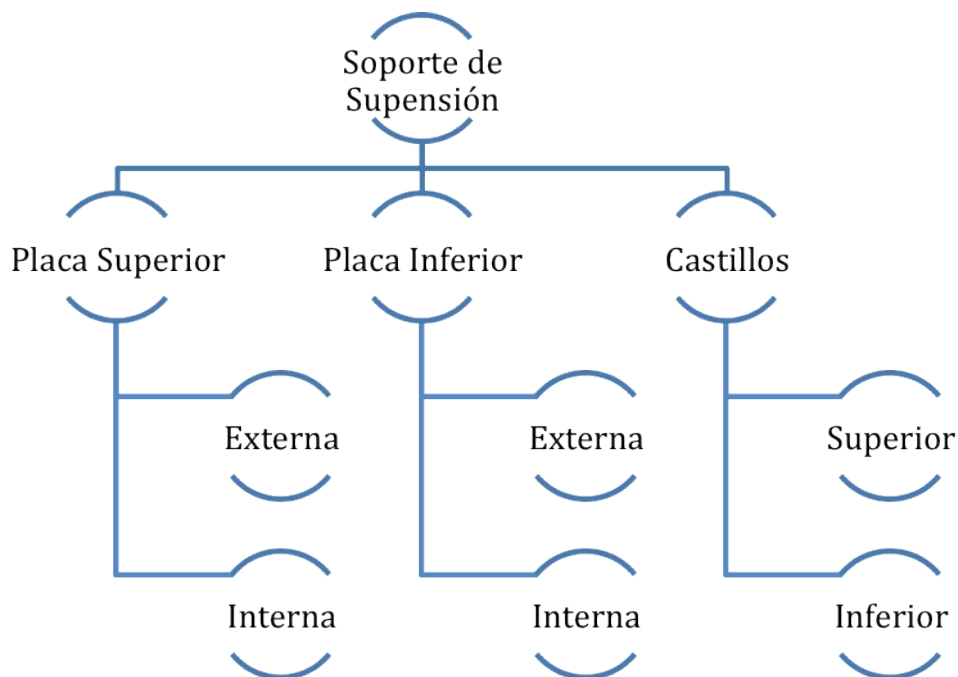


A continuación se presentan los resultados obtenidos de la optimización topológica realizada al material compuesto, éstas se presentan primeramente por capa de material, cada capa tiene asociada una orientación de la fibra seleccionada, además está asociado a un espesor máximo de capa, el cual fue la variable de diseño para establecer un diseño adecuado para los distintos casos de carga, esto se detalla en el siguiente diagrama:

A continuación se muestran los resultados de la optimización estructural topológica cuyos parámetros son los siguientes:

Espesores	Dimensiones [mm]
INICIAL Capa de Fibra de Vidrio	0.25
INICIAL del Laminado	5.5
MÁXIMO por Capa de Fibra	0.3
MÍNIMO por Capa de Fibra	0.1

Se muestran las topologías obtenidas por capa tras realizar la optimización, los resultados se presentan por placa siendo estas las que siguen:



Sin embargo se ha optado por omitir los resultados del castillo inferior ya que no presentan cambio significativo en su topología. Nótese el poco cambio que recibe la placa inferior interna, donde solo recibe refuerzos en los soportes y mantiene en casi toda su superficie un espesor constante, el más bajo.

Los resultados muestran una gran discrepancia entre las capas de fibra para la misma placa, esto nos dificultaría mucho la manufactura del laminado debido a la complejidad de apilar las capas. Además es apreciable una gran cantidad de

irregularidades en la forma final, con huecos que propician el debilitamiento de la estructura por pérdida de rigidez y la concentración de esfuerzos en esa área.

Se distingue que a pesar de ser un ordenamiento simétrico en el laminado respecto a la orientación a  $0^\circ$ , los resultados obtenidos en las capas con la misma orientación son muy distintos entre sí, aumentando la dificultad de la manufactura ya que no podría hablarse de un estándar ni siquiera por orientación.