



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

DISEÑO DE UNA CELDA DE CARGA PARA DETERMINAR LA FUERZA
VERTICAL QUE ACTÚA EN EL CHASIS DE UN VEHICULO URBANO DE
PASAJEROS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
FELIPE LUNA BONILLA

TUTOR PRINCIPAL
DR. ALVARO AYALA RUÍZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVESITARIA, MÉXICO, D. F. 2013.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Vicente Borja Ramírez
Secretario: Dr. C. Alejandro Ramírez Reivich
Vocal: Dr. Alvaro Ayala Ruíz
1^{er.} Suplente: Dr. Francisco Cuenca Jiménez
2^{d o.} Suplente: Adrián Espinosa Bautista

Lugar donde se realizó la tesis: Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México, D.F.

TUTOR DE TESIS:

Alvaro Ayala Ruíz

FIRMA

PRÓLOGO.

El presente trabajo de investigación trata sobre el diseño de una celda de carga para determinar la magnitud de la componente vertical de la fuerza que actúa en el chasis de un vehículo urbano de pasajeros. Usando un elemento estructural del mismo chasis como componente de la celda de carga.

De la teoría de la elasticidad lineal se sabe que la relación entre esfuerzo y deformación en cuerpos sometidos a solicitaciones mecánicas; es lineal, si el material del cuerpo es isotrópico, homogéneo y no se sobrepasa el límite de proporcionalidad. De manera general si se conoce el estado de deformación en un punto de interés del cuerpo se puede conocer entonces el estado de esfuerzos en ese punto y más aun, se puede conocer la fuerza que originó el se estado de esfuerzo.

El principio de operación del extensómetro consiste en el un cambio de resistencia eléctrica en un filamento metálico (que conduce voltaje) sometido a tensión y produce un estado de deformación. Basándose en éste principio la extensometría eléctrica es un método experimental, que tiene por objeto la medida de las deformaciones en la superficie de los cuerpos y por hipótesis, que la deformación desarrollada en un elemento mecánico bajo un sistema de solicitaciones también la sufre el extensómetro pegado en dicho elemento.

De la gran variedad de aplicaciones que tiene el extensómetro está el de ser usado como sensor, a través de éste, y mediante un dispositivo que permita visualizar la magnitud de la deformación del extensómetro en forma se señal eléctrica, a saber, el puente de Wheatstone se diseñará la celda de carga.

Palabras clave: **Extensómetro, celda de carga, puente de Wheatstone, análisis de elemento finito.**

Índice general.

Tema	Pág.
1. Introducción general	1
2. Formulación del problema	6
3. Objetivo General	7
Capítulo 1. Modelo de la elasticidad lineal (marco teórico)	
1.1 Introducción	9
1.2 Hipótesis básicas de la elasticidad lineal	10
1.2.1 Continuidad	10
1.2.2 Homogeneidad	10
1.2.3 Isotropía	10
1.2.4 Elasticidad	11
1.2.5 Linealidad	11
1.3 Fuerza	13
1.4 Tensor Esfuerzos	14
1.5 Balance de momentum lineal.	16
1.6 Deformación y desplazamientos	17
1.7 Ley de Hooke generalizada	18
1.8 Problema de la elasticidad lineal	21
1.9 Condiciones de frontera	23
1.10 El método inverso y semi-inverso en la solución de problemas de elasticidad	24
1.11 Principio de Saint-Venant	25
Capítulo 2. Extensometría eléctrica de resistencia variable (celda de carga)	
2.1 Introducción	28
2.2 Extensometría eléctrica de resistencia variable	29
2.3 Sensibilidad y factor del extensómetro	29
2.4 Compensación por temperatura	31
2.5 Disipación de calor	34
2.6 Puente de Wheatstone	35
2.6.1 Principio de operación del puente de Wheatstone	35
2.6.2 Sensibilidad del puente de Wheatstone	37
Capítulo 3. Descripción y análisis numérico del elemento estructural para ser usado en la celda de carga.	
3.1 Introducción	42
3.2 Suspensión típica de un vehículo urbano de pasajeros	43
3.2.1 Suspensión mecánica	43
3.3 Elemento estructural (percha)	44
3.4 Modelado geométrico de la percha	45
3.5 Análisis numérico de la percha	46
3.5.1 Mallado y propiedades del material	49
3.5.2 Condiciones de frontera y restricciones de movimiento	49
3.6 Solución del análisis de elemento finito	50
3.6.1 Resultados de desplazamiento	50
3.6.2 Resultados de deformación	51
3.6.3 Resultados de esfuerzo	51

Capítulo 4. Diseño de la celda de carga	
4.1 Introducción	53
4.2 Elemento estructural	54
4.3 Selección del extensómetro	56
4.3.1 Coeficiente de dilatación térmica	56
4.4 Configuración espacial de los extensómetros en la percha	57
4.5 Arreglo de los extensómetros en el puente de Wheatstone	58
4.6 Equipos de adquisición de datos	59
4.7 Calibración de la celda de carga	61
4.8 Medición experimental	62
4.8.1 Selección de un recorrido típico	62
4.8.2 Pruebas dinámicas.	63
Conclusiones	65
Referencias	67

1. INTRODUCCIÓN GENERAL.

I often say that when you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it, but when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meager and unsatisfactory kind; it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely, in your thoughts, advanced to the stage of science, whatever the matter may be.

Lord Kelvin

Durante el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo las interacciones mecánicas entre las componentes del cuerpo o entre el cuerpo y su ambiente de trabajo son definidas por fuerzas. Desde el punto de vista de la física estática se define a la fuerza como la acción ejercida sobre un cuerpo que produce sobre él una deformación que será tanto más grande como mayor sea la fuerza. Ahora bien, la misma fuerza aplicada sobre un mismo cuerpo producirá efectos distintos en función de la dirección y el sentido en el cual la fuerza actúa. De esta manera las deformaciones pueden ser por tensión y compresión (fuerza paralela al eje longitudinal), flexión (fuerza perpendicular al eje longitudinal), torsión (par de fuerzas) y cizalladura (fuerzas tangenciales). Esto es debido a que la fuerza es una magnitud vectorial.

La deformación es debida a que las partículas del material del cuerpo se desplazan hasta una posición que permita establecer un equilibrio entre los esfuerzos y la fuerza de aplicación, esta posición se mantendrá mientras exista la fuerza de aplicación. Al momento que la fuerza de aplicación cese su acción, los esfuerzos tienden a restituir la posición inicial del cuerpo de tal manera que el cuerpo deformado recupere su estado inicial o no. En el primer caso se considera que el cuerpo es elástico en caso contrario se

dice que es inelástico. El que un cuerpo sea elástico o inelástico depende de las propiedades del material del cuerpo y de la magnitud de la deformación, tomando en consideración que para pequeñas deformaciones todos los cuerpos son elásticos. Situados en el límite elástico del material se sabe por la Ley de Hooke que la deformación sufrida por un cuerpo elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada e inversamente a la área de la sección transversal del cuerpo donde la fuerza es ejercida.

La función del sistema de suspensión en un vehículo de pasajeros es permitir que las ruedas se adapten a la superficie, absorber las sacudidas que reciben las ruedas al circular sobre las irregularidades del terreno que afecten a la comodidad de los pasajeros y conseguir una buena estabilidad del vehículo. Dichos sistemas están formados actualmente por un sistema elástico que pueden ser ballestas, barras de torsión, muelles, etc. ayudados por los amortiguadores, de esta forma la unión de las ruedas al chasis del vehículo no es rígida. Los vehículos pueden sufrir fundamentalmente tres tipos de oscilaciones durante la marcha: a) Cabeceo, se debe a las fuerzas de inercia durante la aceleración o frenado que provocan una oscilación en torno al eje transversal del vehículo. b) Balanceo, se debe a la fuerza centrífuga al tomar una curva y es una oscilación en torno al eje longitudinal del vehículo y c) Rebote o movimiento longitudinal del chasis. Todas estas oscilaciones pueden y deben controlarse mediante los elementos de suspensión y amortiguación para aprovecharlas lo máximo posible en beneficio de la estabilidad.

El elemento principal en el sistema de suspensión mecánica es la muelle, la cual está formada por hojas de acero templado de elevada resistencia a la flexión. Su funcionamiento se basa en la fuerza de rozamiento que existe entre las hojas producida por la fricción entre ellas. La primera hoja se conoce como hoja principal o maestra, la cual se encuentra doblada en sus extremos formando un ojillo donde se inserta un buje de hule o de bronce que reduce la fricción y el desgaste con el pasador o perno; la segunda hoja abraza a la principal y las restantes (según la capacidad de carga del vehículo) son de longitud menor, las cuales se mantienen unidas por medio de un tornillo de centro conocido como pitón. Las muelles semielípticas en ejes delanteros, están unidas al chasis del vehículo por medio de un extremo fijo de la percha delantera y al otro extremo a

través de un estribo basculante (columpio). Este tipo de suspensión de muelles lo podemos encontrar principalmente en aplicaciones en eje delantero (camión rígido, tracto camiones y autobuses urbanos); así como en ejes traseros.

En la figura 1. Se muestra un sistema de suspensión típico para vehículos urbanos de pasajeros. En el cual se observa el conjunto de muelles (1) junto con dos elementos de sujeción al chasis, llamados percha (2) y columpio (3). [1]

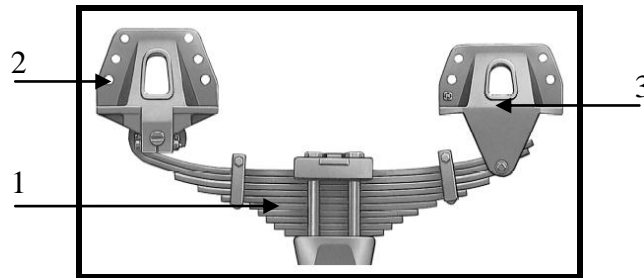


Fig. 1. Suspensión típica de muelle.

Como ya se dijo la percha forma parte del sistema de suspensión, en particular, conecta al conjunto de muelles al bastidor o chasis del vehículo. La unión por lo general se realiza mediante pernos. La forma geométrica de las perchas depende de cada fabricante, del tipo de vehículo, ya sea de pasajeros o de carga, del largo del chasis, del tipo de suspensión, de aire a presión o de muelle, etc. Una percha típica se presenta en la figura 2.



Fig. 2. Geometría típica de la una percha.

Todos los vehículos están sujetos a cargas dinámicas y estáticas. Las cargas dinámicas resultan de las fuerzas de inercia que surgen del manejo del vehículo sobre superficies accidentadas. Las cargas estáticas son: cargas estáticas cuando el vehículo se encuentra estacionado, en el frenado, en aceleración, al virar en caminos con peralte elevado, carga máxima en el eje delantero cuando se equilibran con las fuerzas de inercia, carga máxima en el eje trasero. Las fuerzas que actúan en el *chasis* causan flexión y torsión sobre todos los miembros de éste. Un gráfico simplificado del tipo de fuerzas que actúan sobre el chasis es el que se muestra en la fig. 3. Las fuerzas simétricas actúan en dirección vertical y son la que causan la flexión a los miembros de mayor longitud (fig. 3a), surgen de fuerzas laterales que actúan paralelas al plano del *chasis* (fig. 3b) al dar un viraje en peralte alto. Las fuerzas que actúan en el plano del *chasis* causan flexión a los miembros de mayor longitud así como a los miembros cruzados. [2]

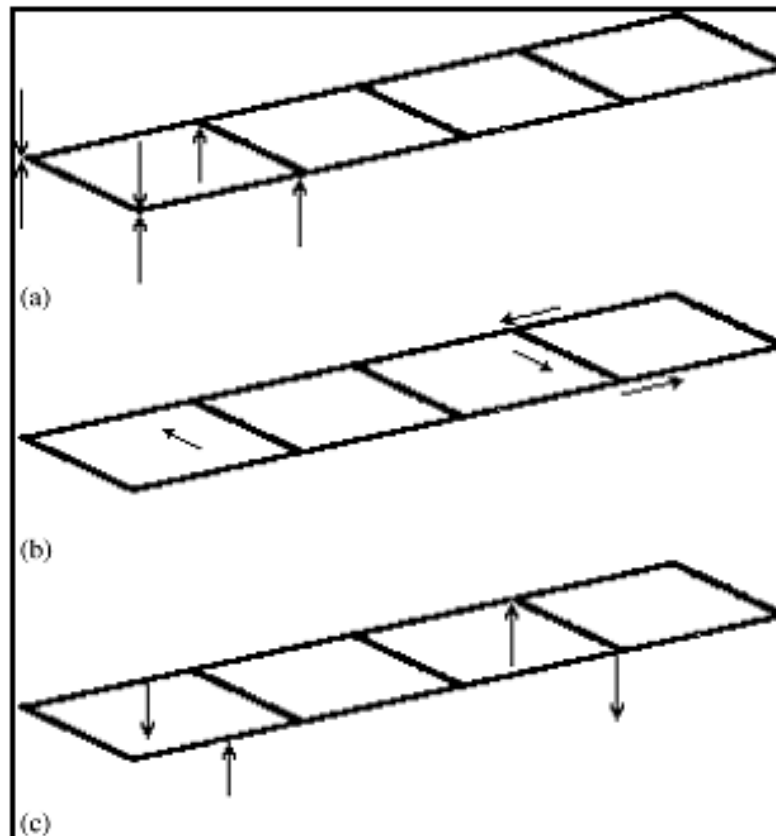


Fig. 3. Fuerzas que actúan en el chasis de un vehículo

De acuerdo con el Vocabulario Científico y Técnico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, se denomina sensor a todo “dispositivo que detecta variaciones en una magnitud física y las transforma en señales útiles para un sistema de medida o control” mientras que un transductor es un “dispositivo que convierte una magnitud física en otra distinta”. Los dos conceptos no son en general equivalentes, pero en el campo de la instrumentación pueden tomarse como tales si el contexto lo permite. En muchos textos se reserva el término sensor para el elemento que realiza la conversión de magnitudes y el transductor pasa a ser el dispositivo completo que incorpora el sensor y todos los componentes necesarios para su completo funcionamiento. Por ejemplo un transductor de fuerza está constituido por un elemento que, bajo la acción de la fuerza que se quiere medir, se deforma en régimen elástico. Sobre dicho elemento se pegan sensores llamados *extensómetros* que convierten la deformación en variación de la resistencia eléctrica de un hilo metálico. Estrictamente hablando, el sensor sería el filamento metálico del extensómetro y el transductor de fuerza todo el conjunto, incluidos los cables que permiten conectar el transductor a un acondicionador de señal. Esta es la interpretación que aquí se seguirá cuando sea estrictamente necesario distinguir entre uno y otro. Una celda de carga es un transductor de fuerza.

En la figura 4 se muestra el esquema simplificado de un sistema de medida en forma de bloques funcionales, en donde a la izquierda de la cadena de medida se encuentra el *sistema físico*, alguna de cuyas magnitudes físicas se quiere medir. En el extremo opuesto se encuentra el sistema que permite al usuario tomar nota o almacenar la medida, es decir, el sistema de *presentación o toma de datos*. En los sistemas modernos, la presentación y/o toma de datos se hace de forma electrónica, por lo que la variable física a medir debe transformarse previamente en una señal eléctrica. La conversión de la magnitud física de interés en una señal eléctrica del nivel adecuado para la presentación y/o toma de datos se realiza en dos etapas. En la primera etapa dicha magnitud física se convierte, mediante un *transductor* en otra magnitud de tipo eléctrico (por ejemplo una resistencia eléctrica). En la segunda etapa, un *acondicionador de señal* incluye la circuitería necesaria para convertir la magnitud característica del transductor en una señal eléctrica de nivel adecuado. [3]

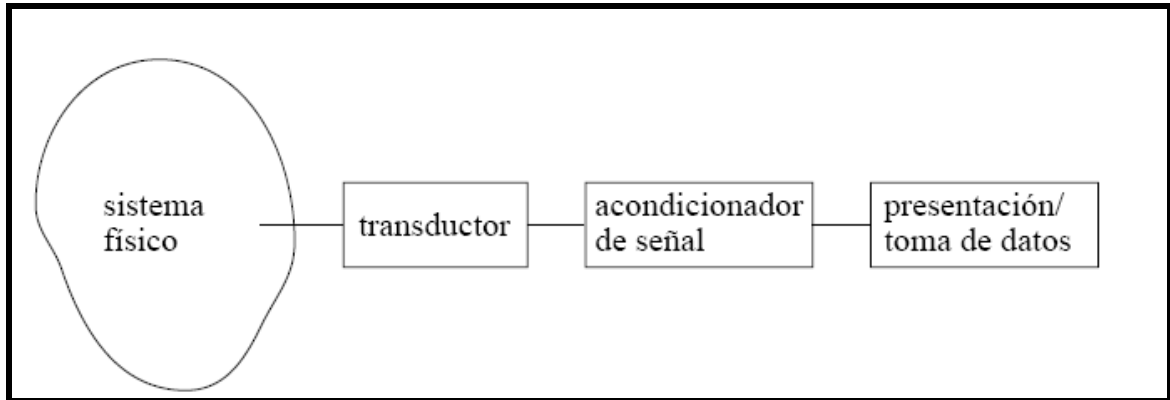


Fig. 4. Componentes de un sistema general de medida.

2. Formulación del Problema

Durante un recorrido de prueba establecido de un vehículo urbano de pasajeros se desea saber el estado de esfuerzo y de deformación en la carrocería y en el chasis del vehículo para evaluar si la estructura del vehículo trabajará satisfactoriamente durante su vida de servicio.

Lo anterior conduce a plantear el problema dentro de la teoría de la elasticidad mediante el enfoque de ecuaciones diferenciales con condiciones en la frontera. La solución de problemas en la Teoría de la Elasticidad Lineal, consiste en resolver un sistema de quince ecuaciones (seis relaciones esfuerzo-deformación, seis relaciones deformación-desplazamiento, y tres ecuaciones de equilibrio) con quince incógnitas (seis componentes de esfuerzo, seis componentes de deformación, y tres componentes de desplazamiento), y con la condición de que las componentes de esfuerzo y desplazamiento deben de satisfacer las condiciones de frontera. Cabe señalar que no existe un método directo para resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales como el que rigen a la teoría de la Elasticidad Lineal, por lo que se recurre a métodos numéricos, como el Método de Elemento Finito.

Por otro lado una de las condiciones de frontera que la solución del sistema de ecuaciones debe satisfacer es $\mathbf{Tn} = \mathbf{s}^*$ sobre S . Para este problema se desconoce la condición de frontera, en particular el vector de fuerzas de superficie \mathbf{s}^* .

Una vez conocidas las fuerzas y mediante un análisis de elemento finito se puede conocer el estado de esfuerzos y de deformación en todos los puntos de la carcasa y del chasis del vehículo de pasajeros.

3. Objetivo General

Este trabajo de investigación trata solamente el problema de determinar las fuerzas (condiciones de frontera) que sufre el chasis de un vehículo urbano de pasajeros durante un recorrido de prueba. Considerando que solo la componente vertical de la fuerza resultante que se ejerce sobre el chasis a través del sistema de suspensión genera el mayor daño entonces solo se desea conocer la magnitud de esta componente de tal manera que se plantea el siguiente objetivo general:

- **Diseñar una celda de carga para determinar la fuerza vertical que actúa en el chasis de un vehículo urbano de pasajeros usando un elemento estructural del chasis como componente de la celda.**

El elemento estructural del chasis que se usa como componente de la celda de la carga en lo sucesivo se denomina *elemento actuador* (a saber la percha) que es el elemento estructural que bajo la acción de una fuerza produce en él una deformación, esta deformación es sensada mediante extensómetros pegados y arreglados espacialmente en la percha y en el puente de Wheatstone de tal manera que solo sea sensada la fuerza vertical y visualizada su magnitud en el puente de Wheatstone. La celda de carga así diseñada está conformada por la percha como elemento actuador, extensómetros como sensores y el puente de Wheatstone como dispositivo de visualización de datos.

Para cubrir este objetivo se presenta en el capítulo 1 el marco teórico en el que se justifica la investigación mediante la teoría de la elasticidad lineal. En el capítulo 2 se exponen aspectos importantes a considerar en la técnica de la extensometría eléctrica y la ecuación que rige el comportamiento del puente de Wheatstone. Mediante el análisis de elemento finito --presentado en el capítulo 3-- realizado al elemento estructural del chasis se conoce el estado de deformación en la dirección vertical. Todos los aspectos considerados en el

diseño de la celda de carga se detallan en el capítulo 4, en donde se instrumenta el elemento estructural del chasis y se calibra la celda de carga. Por último se presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo investigación.

CAPITULO I.

MODELO DE LA ELASTICIDAD LINEAL.

(Marco teórico)

1.1 Introducción.

Este capítulo trata sobre el marco teórico en el cual la investigación está sustentada y justificada. Como se mencionó en la formulación del problema, el presente trabajo versa sobre el diseño de una celda de carga para la determinación de la magnitud de las fuerzas verticales que actúan en el chasis de un vehículo urbano de pasajeros y así conocer el estado de esfuerzos y de deformaciones en todo el vehículo. Teniendo como premisas básicas que el elemento actuador de la celda de carga es un material elástico y lineal, y que la deformación que sufre este elemento mecánico bajo un sistema de sollicitaciones, la sufren los sensores pegados a él. De esta manera radica la importancia de señalar que el trabajo está restringido al caso donde las deformaciones son infinitesimales y donde los esfuerzos se encuentran dentro del límite elástico. De tal forma que la teoría de la elasticidad lineal establece un marco teórico general que gobierna las respuestas de un cuerpo material de geometría arbitraria que se encuentra sujeto a un sistema de sollicitaciones y cuyo comportamiento mecánico presenta deformaciones infinitesimales.

1.2 Hipótesis básicas de la elasticidad lineal.

Estas suposiciones están relacionadas con el material del elemento mecánico y son la continuidad, la homogeneidad, la isotropía, la elasticidad y la linealidad.

1.2.1 Continuidad.

Es de conocimiento común que cada objeto físico está hecho de moléculas, átomos y de partículas demasiado pequeñas. Estas partículas no están distribuidas continuamente sobre el objeto; observaciones microscópicas revelan la presencia de agujeros (espacios vacíos) entre las partículas. Estudiando los efectos externos sobre los objetos físicos de estos agujeros, estos pueden o no ser tomados en consideración. El estudio que toma en cuenta la existencia de agujeros es llamado un *estudio microscópico*, mientras que el estudio que ignora la existencia de los agujeros y trata al objeto físico como una distribución continua de material dentro de un cuerpo es llamado un *estudio macroscópico*. De tal manera que la continuidad supone que cada punto material está conectado e infinitesimalmente cercano a otro punto contiguo.

1.2.2 Homogeneidad.

Significa que las propiedades del material son las mismas en cualquier punto de este. Microscópicamente ningún material puede ser homogéneo ya que microscópicamente todos materiales están compuestos de moléculas y átomos. Para el caso de un metal la unidad mayor es un grano, si un volumen infinitesimal contiene un número suficiente de estos granos la homogeneidad es una suposición razonable.

1.2.3 Isotropía

Las propiedades del material en un punto de cuerpo son las mismas en cualquier dirección. Esto depende del arreglo de las partículas microscópicas dentro de un volumen infinitesimal.

1.2.4 Elasticidad.

Requiere que el estado interno, (tal como las deformaciones), en el material recupere su estado original después que las cargas hayan sido removidas.

De la misma manera, la trayectoria que debe de seguir el cuerpo al descargarlo debe de ser la misma que al cargarlo.

1.2.5 Linealidad.

Considere un cuerpo Ω continuo que está referenciado al sistema coordenado xyz con origen en 0 . Sean $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P(x, y, z)$ dos puntos en el cuerpo. Suponga que todos los puntos en el cuerpo son desplazados a una nueva posición de forma tal que Ω adquiere la configuración Ω' , con el punto P desplazado a la posición P' y el punto P_0 a la posición P'_0 .

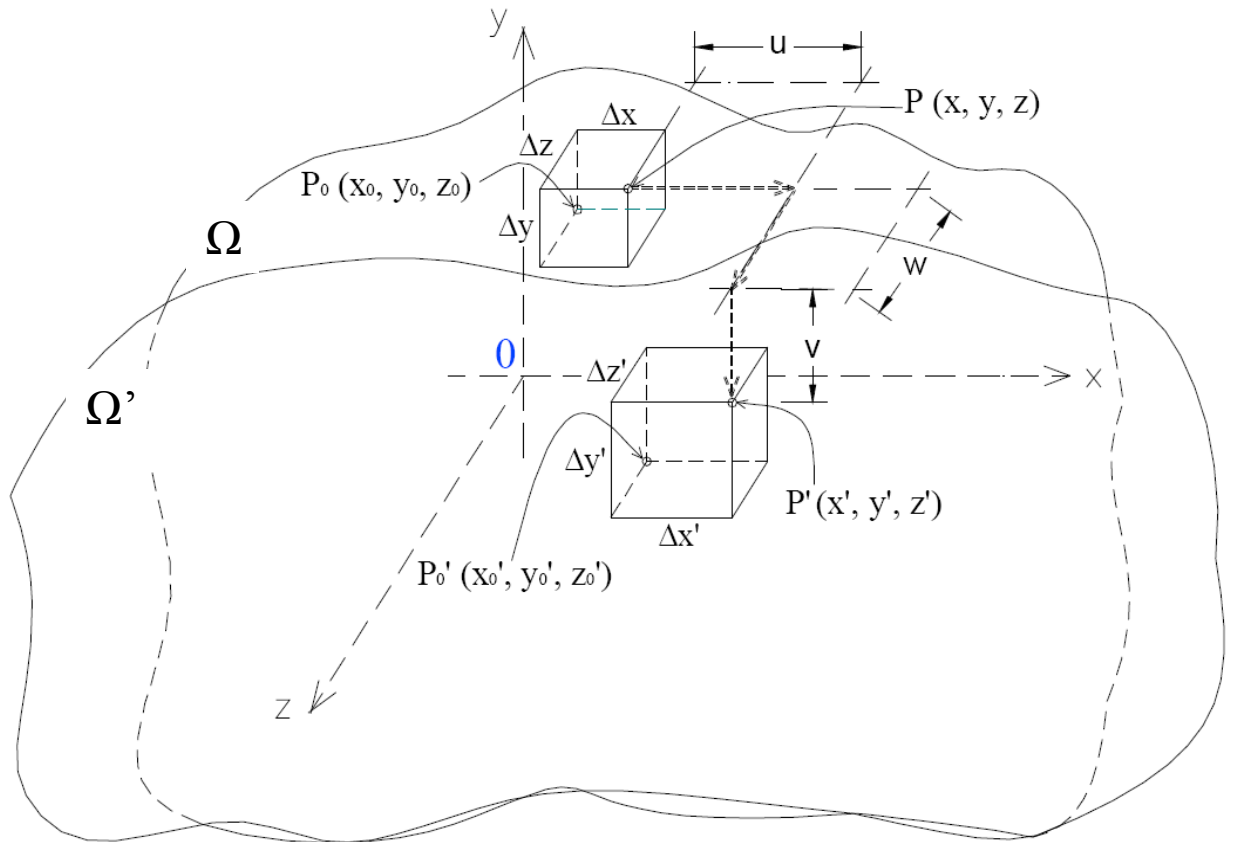


Figura 1.1 Desplazamientos de los puntos P y P_0 .

Esta transformación puede ser descompuesta por (1.1) un desplazamiento rígido, en donde todas las distancias relativas entre todos los puntos del cuerpo permanecen sin cambio y por una deformación (1.2) donde las distancias relativas entre los puntos cambian.

Sean $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ y $w(x,y,z)$ las componentes x , y , y z respectivamente del desplazamiento del punto $P(x,y,z)$. La posición del punto $P'(x',y',z')$ puede ser dada en términos de x , y , y z por las expresiones:

$$\begin{aligned}x' &= x + u(x, y, z) \\y' &= y + v(x, y, z) \\z' &= z + w(x, y, z)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Utilizando la notación:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - x_0 \\ \Delta y &= y - y_0 \\ \Delta z &= z - z_0\end{aligned}\tag{1.2}$$

Las ecuaciones (1.1) se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned}x' &= x + u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \\y' &= y + v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \\z' &= z + w(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)\end{aligned}\tag{1.3}$$

Las funciones u , v , w , pueden ser expandidas en series de Taylor alrededor del punto P_0 :

$$\begin{aligned}x' &= x + u(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_0} \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_0} \Delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{P_0} \Delta z + \dots \\y' &= y + u(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{P_0} \Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{P_0} \Delta y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{P_0} \Delta z + \dots \\z' &= z + u(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \Delta y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{P_0} \Delta z + \dots\end{aligned}\tag{1.3a}$$

El desarrollo puede ser fácilmente llevado más allá de los términos mostrados en la ec. (1.3a) pero no se toman en cuenta por ser derivadas de orden mayor y por ser el producto y las potencias de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ muy pequeñas. Por lo tanto los términos que solamente se toman en cuenta constituyen la parte lineal de la serie de Taylor, lo que equivale a decir

que los desplazamientos y deformaciones son infinitesimales, esto da lugar a la hipótesis de linealidad. [4]

1.3 Fuerza.

En mecánica del medio continuo dos tipos de fuerzas son consideradas: *fuerzas de cuerpo* y *fuerzas de superficie*. Las fuerzas de cuerpo son fuerzas que actúan sobre cada elemento infinitesimal de un material y por lo tanto sobre todo el volumen del material. La fuerza gravitacional es un ejemplo de fuerza de cuerpo. La fuerza de cuerpo total que actúa sobre un cuerpo Ω en una configuración Ω' de volumen V al tiempo t puede ser expresada en la forma:

$$\mathbf{f}^{(b)} = \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad (1.4)$$

Donde $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ es la densidad en el punto \mathbf{x} de Ω' al tiempo t y \mathbf{b} es un vector con dimensiones de fuerza por unidad de masa. El vector \mathbf{b} es conocido como la *fuerza de cuerpo por unidad de masa* o solamente como *fuerza de cuerpo*. ρ y \mathbf{b} varían de un punto a otro dentro del mismo cuerpo.

Las fuerzas de superficie son fuerzas externas que actúan sobre una parte o en toda la superficie del material y se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}^{(s)} = \int_S \mathbf{s} dS \quad (1.5)$$

Donde \mathbf{s} es un vector con dimensiones de fuerza por unidad de área. \mathbf{s} es función de \mathbf{x} , a su vez \mathbf{x} es un punto de la superficie del cuerpo al tiempo t . El vector \mathbf{s} es llamado el *vector de esfuerzo*. Y depende también de la normal unitaria a la superficie $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$.

La fuerza resultante $\mathbf{f}^{(r)}$ en un cuerpo Ω en la configuración Ω' de volumen V con una superficie de frontera S es definida por la suma de la fuerza de cuerpo total que actúa en V y la fuerza de superficie total que actúa en S , la cual es:

$$\mathbf{f}^{(r)} = \mathbf{f}^{(b)} + \mathbf{f}^{(s)} = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{s} dV \quad (1.6)$$

Si se considera una superficie elemental dS que tiene un vector normal unitario perpendicular al plano que forman los vectores unitarios \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 se tiene $\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{s}(\mathbf{e}_1)$. Si se resuelve para los ejes \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{s}^{(1)} = \tau_{11}\mathbf{e}_1 + \tau_{12}\mathbf{e}_2 + \tau_{13}\mathbf{e}_3 \quad (1.7)$$

De la misma forma se obtienen los vectores de esfuerzo: $\mathbf{s}^{(2)}$ y $\mathbf{s}^{(3)}$. En forma simplificada se tiene la siguiente relación:

$$\mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{e}_j = \tau_{ij} \quad (1.8)$$

Para $i, j = 1, 2$ y 3 τ_{ij} representa la j -ésima componente de $\mathbf{s}^{(i)}$, donde $\mathbf{s}^{(i)}$ es el vector de esfuerzo que actúa sobre una superficie elemental teniendo como \mathbf{e}_i al vector normal. Los nueve números reales τ_{ij} definen los llamados *componentes de esfuerzo* en un punto \mathbf{x} al instante t . [5]

1.4 Tensor de Esfuerzos.

En el punto $P(\mathbf{x})$ en la configuración actual, se considera un “pequeño” tetraedro con tres de sus caras perpendiculares a los ejes coordenados y la cuarta cara perpendicular a un vector normal arbitrario. Sean ΔA_1 , ΔA_2 y ΔA_3 las áreas de las caras PQR , PSR , y PQS perpendiculares a los ejes x_1 , x_2 y x_3 y ΔA el área de la cara inclinada QRS perpendicular a \mathbf{n} . Entonces

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= (\Delta A)\cos(\mathbf{n}, x_1) = (\Delta A)n_1 \\ \Delta A_2 &= (\Delta A)n_2 \\ \Delta A_3 &= (\Delta A)n_3 \end{aligned} \quad (1.9)$$

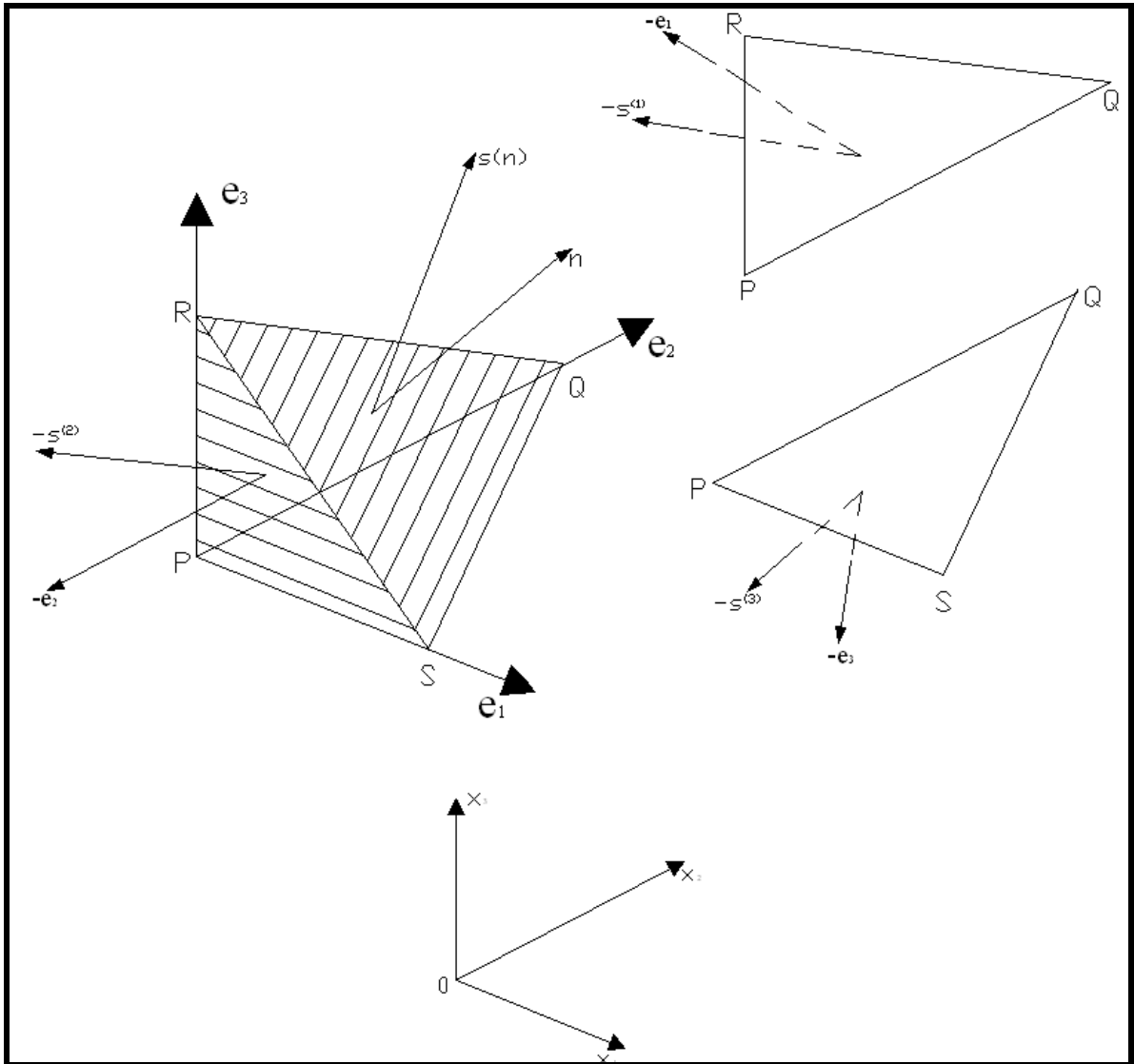


Figura 1.2 Esfuerzos en la cara de un tetraedro.

Donde $\cos(\mathbf{n}, x_1)$ denota el coseno del ángulo entre \mathbf{n} y el eje positivo x_1 , n_i son las componentes de \mathbf{n} . El volumen del tetraedro es $\Delta V = (1/3)h\Delta A$ y h es la distancia perpendicular de el punto P hasta la cara inclinada QRS . La suma de fuerzas sobre el tetraedro es:

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}) = n_1 \mathbf{s}^{(1)} + n_2 \mathbf{s}^{(2)} + n_3 \mathbf{s}^{(3)} \quad (1.10)$$

Esta relación establece que se puede saber $\mathbf{s}(\mathbf{n})$ para una \mathbf{n} arbitraria, cuando el vector de esfuerzo $\mathbf{s}^{(i)}$, $i=1, 2$ y 3 es conocido. Sustituyendo la ec(1.7) en la ec(1.10) se tiene la expresión que relaciona el vector de esfuerzos $\mathbf{s}(\mathbf{n})$ con el tensor de esfuerzo \mathbf{T} , a esta relación se le conoce con el nombre de *hipótesis de Cauchy*.

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (1.11)$$

Se observa que dado un punto existen un número infinito de planos que pasan por dicho punto. En cada uno de estos planos podemos definir un vector de esfuerzo. El conjunto de todos los vectores de esfuerzo es llamado el *estado de esfuerzos* en el punto. Esta relación permite determinar el vector de esfuerzos de cualquier plano que pasa por el punto conociendo el tensor de esfuerzos en el punto. Por lo que el estado de esfuerzo en un punto está determinado por el tensor de esfuerzo en el punto.

1.5 Balance de momentum lineal.

Para un cuerpo Ω que ocupa una configuración Ω' de volumen V en el tiempo t se define al momentum lineal \mathbf{p} como:

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (1.12)$$

Como se vió en la sección 1.3 se consideran dos tipos de fuerzas actuando sobre Ω : fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. El resultado de estas dos fuerzas en la configuración B es dado por

$$\mathbf{f}^{(r)} = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{s} dS$$

Donde \mathbf{b} es la fuerza de cuerpo por unidad de masa y \mathbf{s} es la fuerza de superficie por unidad de área de la superficie de frontera S que acota a V . Si se considera como hipótesis que la relación de cambio del tiempo de \mathbf{p} es igual a $\mathbf{f}^{(r)}$ (esta hipótesis es consistente con la segunda ley de movimiento de Newton conocida como ley de balance de momentum lineal) se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \mathbf{f}^{(r)} \quad (1.13)$$

Sustituyendo la ec(1.6) en la ec(1.13) se tiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{s} dS \quad (1.14)$$

Considerando la siguiente igualdad:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV \quad (1.15)$$

Además de la hipótesis de Cauchy junto con el teorema de divergencia que transforma una integral de superficie en una integral de volumen:

$$\int_S \mathbf{s} dS = \int_S \mathbf{T}^T \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{T}^T dV \quad (1.16)$$

Sustituyendo la ec(1.15) y la ec(1.16) en la ec(1.14) se obtiene:

$$\int_V \left\{ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \text{div} \mathbf{T}^T \right\} dV = 0 \quad (1.17)$$

Por el teorema de localización:

$$\text{div} \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (1.18)$$

En cada punto del volumen de V al tiempo t . Esta ecuación representa la ley de balance de momentum lineal en términos del tensor de Cauchy y es conocida como *Ecuación de movimiento de Cauchy*. Para un cuerpo en reposo o en movimiento con velocidad constante, se tiene que $\dot{\mathbf{v}} = 0$. Entonces la ec(1.18) es:

$$\text{div} \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (1.18a)$$

Esta ecuación es llamada *Ecuación de equilibrio de Cauchy*.

1.6 Deformación y desplazamientos.

En muchas aplicaciones principalmente en aquellas concernientes con materiales elásticos, se tratan con deformaciones donde las derivadas de las componentes de los desplazamientos son demasiadas pequeñas que sus cuadrados y sus productos no se toman en cuenta en el análisis. Tales deformaciones son consideradas como

infinitesimales o *pequeñas deformaciones*. Una deformación que no es una pequeña es llamada *deformación finita*. La deformación normal es definida como el cambio de longitud por unidad de longitud (ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz}) y la deformación angular es definida como el cambio de ángulo de dos líneas inicialmente perpendiculares (ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{zx}). Otra manera de describir la deformación en cuerpos sólidos es especificar el desplazamiento de cada punto en el sólido respecto a la configuración inicial del sólido. El desplazamiento es un vector que se denota como $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$. La relación entre las deformaciones y los desplazamientos es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right\} \quad (1.19)$$

Donde \mathbf{E} es llamado el tensor de deformación lineal o tensor de deformación de Cauchy.

1.7 Ley de Hooke generalizada.

Una gran mayoría de cuerpos sólidos muestran la misma relación entre la carga y la deformación. Se conoce de métodos experimentales que en un amplio rango de carga, la deformación medida es proporcional a la carga, esto puede ser expresado de la siguiente manera:

- Cuando la carga incrementa la deformación incrementa en la misma proporción.
- Cuando la carga disminuye la deformación disminuye en la misma proporción.
- Cuando la carga se reduce a cero ninguna deformación puede ser medida.

Un proceso natural de razonamiento inductivo nos lleva a enunciar la Ley de Hooke de manera generalizada:

Cada una de las seis componentes de esfuerzo en cualquier punto material del cuerpo es una función lineal de las seis componentes de deformación en ese punto.

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= C_{1111}e_{11} + C_{1112}e_{12} + \dots + C_{1133}e_{33} \\ \tau_{12} &= C_{1211}e_{11} + C_{1212}e_{12} + \dots + C_{1233}e_{33} \\ &\dots \\ \tau_{33} &= C_{3311}e_{11} + C_{3312}e_{12} + \dots + C_{3333}e_{33} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Donde τ_{ij} son las componentes del tensor de esfuerzos \mathbf{T} que surgen debido a la presencia de fuerzas externas, e_{ij} son las componentes del tensor de deformaciones \mathbf{E} que describe la deformación infinitesimal causada por las fuerzas externas y C_{1111} , C_{1112} , ..., C_{3333} son 81 coeficientes escalares que dependen de las propiedades físicas del cuerpo sólido y son independientes de las componentes de la deformación e_{ij} . Estas relaciones se mantienen en cada punto del cuerpo y a cada instante de tiempo. Físicamente significa que el material para el cual las relaciones (1.20) son lineales se deforma bajo la presencia de esfuerzos y recobra su configuración original cuando dichos esfuerzos desaparecen. Más aun, ya que e_{ij} son las componentes del tensor de deformación, la deformación es infinitesimal. Por lo tanto las relaciones lineales (1.20) describen las propiedades de un sólido elástico que experimenta deformaciones infinitesimales. Las nueve relaciones (1.20) pueden ser expresadas en forma compacta como:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (1.21)$$

Donde τ_{ij} y e_{ij} son componentes de tensores de segundo orden y C_{ijkl} son componentes de un tensor de cuarto orden, este tensor caracteriza las propiedades mecánicas del material y es llamado el tensor de elasticidad. Las 81 componentes C_{ijkl} de este tensor son llamadas módulos de elasticidad. Ya que los tensores τ_{ij} y e_{ij} son simétricos, no más de 36 de los 81 módulos de elasticidad pueden ser independientes. Por hipótesis las relaciones (1.20) se mantienen en todos los puntos de material. Los esfuerzos τ_{ij} y las deformaciones e_{ij} en general varían de un punto a otro. De manera semejante C_{ijkl} pueden variar de punto a punto. Si C_{ijkl} son independientes de cualquier punto, se dice que el material es homogéneo, por lo tanto para un sólido elástico y homogéneo los módulos de elasticidad son constantes, es decir, las propiedades del material son las mismas a través de todo el cuerpo sólido.

La relación (1.21) representa la ley generalizada de Hooke en el sistema coordenado cartesiano x_i . Cuando esta ecuación tensorial es escrita en términos del sistema coordenado cartesiano x'_i , se tiene:

$$\tau'_{ij} = C'_{ijkl} e'_{kl} \quad (1.22)$$

En general τ'_{ij} y e'_{kl} son diferentes de τ_{ij} y e_{ij} . De manera semejante C'_{ijkl} es diferente de C_{ijkl} . Más sin embargo si C_{ijkl} es igual a C'_{ijkl} , se dice que el material es isotrópico. Por lo tanto para un sólido elásticamente isotrópico $C_{ijkl} = C'_{ijkl}$, es decir, el tensor de elasticidad es isotrópico, lo cual significa que las propiedades mecánicas del material son independientes de la orientación del sistema de coordenadas.

Para un sólido elásticamente isotrópico, C_{ijkl} se descompone de la siguiente manera:

$$C_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.23)$$

Donde α, β, γ son escalares. Sustituyendo C_{ijkl} de (1.23) en (1.21) y notando que $e_{ij} = e_{ji}$ se obtiene:

$$\tau_{ij} = \alpha \delta_{ij} e_{kk} + (\beta + \gamma) e_{ij}$$

Renombrando a $\alpha = \lambda$ y $(\beta + \gamma) = 2\mu$ se tiene:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (1.24)$$

Estas relaciones representan la ley Generalizada de Hooke para un sólido homogéneo, elástico, isotrópico y lineal. Evidentemente ahora se tienen dos módulos de elasticidad independientes, a saber, λ y μ . Estos módulos son constantes si el sólido es homogéneo. Y son llamados las constantes de Lamé. De las relaciones (1.24) si $\tau_{kk} = (3\lambda + 2\mu) e_{kk}$ y sustituyendo esta expresión en (1.24) y despejando a e_{ij} se obtiene:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \tau_{kk} \right] \quad (1.25)$$

Las expresiones (1.24) y (1.25) se pueden escribir y son equivalentes respectivamente a:

$$\mathbf{T} = \lambda(\text{tr } \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\text{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I} \right] \quad (1.25a)$$

Estas relaciones son llamadas las relaciones de esfuerzo-deformación o simplemente la ley de Hooke y solo es válida para cuerpos sólidos homogéneos, elásticos y lineales. Para la mayoría de los materiales sólidos tales relaciones solamente se mantienen cuando los esfuerzos alcanzan el límite llamado *límite de proporcionalidad*. Cuando los esfuerzos exceden este límite la deformación comienza a ser no lineal pero el comportamiento elástico del material continúa hasta el límite llamado *límite de elasticidad*.

Si se consideran las siguientes relaciones:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.26)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sustituyendo (1.26) en (1.25a) se obtiene:

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1+\nu} \left[\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} \right] \quad (1.27)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1+\nu}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I}$$

Donde la constante E representa la relación del esfuerzo normal con su correspondiente deformación normal, y es llamado modulo de Young. La constante ν representa el valor numérico de la relación de la contracción en la dirección transversal a la tensión correspondiente en la dirección longitudinal que sufre un sólido al aplicar una tensión en dirección longitudinal y es conocida como la relación de Poisson.

1.8 Problema de la elasticidad lineal.

La ecuación de equilibrio de Cauchy es una ecuación de campo y que se mantiene en cada punto del cuerpo.

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (1.28)$$

La deformación infinitesimal es una de las hipótesis de la teoría de la elasticidad por lo tanto la relación deformación-desplazamiento es válida en esta teoría.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right\} \quad (1.29)$$

Por último la ecuación constitutiva para un sólido homogéneo, isotrópico, elástico y lineal que está dada por la ley de Hooke de la forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1+\nu}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} (\operatorname{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I} \quad (1.30)$$

El problema de la elasticidad lineal consiste en determinar la distribución de esfuerzos, deformaciones y los desplazamientos en todos los puntos de un cuerpo bajo ciertas condiciones de frontera, de aquí se tienen 15 ecuaciones: tres ecuaciones de equilibrio de esfuerzos (1.28), seis ecuaciones que relacionan las deformaciones con los desplazamientos (1.29) y seis ecuaciones constitutivas (1.30) todas estas ecuaciones están definidas en derivadas parciales. Este conjunto de ecuaciones gobierna la teoría de la elasticidad para cuerpos sólidos elásticos homogéneos e isotrópicos. Las 15 incógnitas asociadas al sistema de ecuaciones son las seis componentes independientes del tensor de esfuerzos τ_{ij} , las seis componentes independientes del tensor de deformaciones e_{ij} y las tres componentes del vector de desplazamientos u_i .

En un problema de elasticidad lineal el vector de desplazamientos \mathbf{u} es conocido integrando (1.29) por lo tanto la siguiente condición llamada de *ecuación de compatibilidad* se debe cumplir para \mathbf{E} y es

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \nabla (\operatorname{tr} \mathbf{E}) - \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - (\nabla \operatorname{div} \mathbf{E})^T = 0 \quad (1.31)$$

Esta ecuación es una consecuencia de la relación de deformación-desplazamiento y solo es una condición adicional.

Encontrar la solución a las 15 incógnitas de las 15 ecuaciones es una tarea difícil. Por lo tanto es conveniente tener pocas ecuaciones con pocas incógnitas y como las condiciones de frontera son usualmente especificadas en términos de los esfuerzos, es conveniente expresar las ecuaciones en términos de los esfuerzos a dicha formulación se le conoce como *ecuaciones de compatibilidad para esfuerzos* o *ecuaciones de Beltrami-Michell* y son 6 ecuaciones en donde las posibles soluciones deben de satisfacer las ecuaciones de movimiento de Cauchy y una vez que se conoce el tensor de esfuerzos \mathbf{T} por medio de la relación de Hooke (1.30) se conocen las componentes del tensor de deformación e integrando (1.29) se pueden calcular los desplazamientos. Las ecuaciones de Beltrami-Michell para el estado estático son [6]:

$$\nabla^2 \mathbf{T} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{T}) + \frac{1}{1-\nu} (\text{div} \mathbf{f}) \mathbf{I} + \nabla \mathbf{f} + \nabla \mathbf{f}^T = 0 \quad (1.32)$$

1.9 Condiciones de frontera.

Los problemas en elasticidad pueden ser clasificados en tres tipos de acuerdo a si el cuerpo es cargado por fuerzas de superficie o por desplazamientos, o ambos. Se asume en los tres casos que las fuerzas de cuerpo, si están presentes, son conocidas. Si las fuerzas longitudinales y transversales son conocidas sobre la superficie del cuerpo, el problema es llamado “*primer problema de valores en la frontera*” (ec. 1.33a). Si los desplazamientos son conocidos en la superficie del cuerpo pero no las fuerzas el problema es llamado “*segundo problema de valores en la frontera*” (ec. 1.33b) Si las fuerzas son conocidas en algunas partes de la superficie del cuerpo y los desplazamientos son conocidos en otras partes de la superficie del cuerpo el problema es llamado “*problema mixto de valores en la frontera*” (ec. 1.33c). Para un cuerpo Ω que ocupa una región V con frontera Γ , las condiciones de frontera que usualmente se especifican son las siguientes:

- (i) El vector de esfuerzos es conocido en cada punto de la frontera Γ

$$S \underline{n} = \underline{s}^* \text{ en } \Gamma \quad (1.33a)$$

Donde \underline{s}^* es una función conocida.

- (ii) El vector de desplazamientos es conocido en cada punto de frontera Γ .

$$\underline{u} = \underline{u}^* \text{ en } \Gamma \quad (1.33b)$$

Donde \underline{u}^* es una función conocida.

- (iii) El vector de desplazamientos es conocido en cada punto de la frontera Γ_u de Γ al igual que el vector de esfuerzos es conocido en cada punto de la frontera Γ_τ de Γ :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{u}^* \text{ en } \Gamma_u \\ S\underline{n} &= \underline{s}^* \text{ en } \Gamma_\tau \end{aligned} \quad (1.33c)$$

Una vez que es conocido el estado de esfuerzos en un punto es conocido el estado de deformaciones en el mismo punto.

Hasta este punto se nota que el problema de la elasticidad lineal es obtener la solución de un sistema simultáneo de ecuaciones en derivadas parciales. Las condiciones de frontera deben de ser satisfechas al resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (1.32).

1.10 El método inverso y semi-inverso en la solución de problemas de elasticidad.

En los puntos anteriores se ha mostrado que en problemas relacionados con la elasticidad el problema fundamental radica en la solución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales junto con las condiciones de frontera. Desafortunadamente el conocimiento que se tiene en matemáticas no ha avanzado al punto donde se puedan resolver el sistema de ecuaciones directamente (solución exacta) junto con las condiciones de frontera y obtener la solución de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos. Si se propone una solución tal que resuelva el sistema de ecuaciones junto con las condiciones de frontera y si todas las condiciones son satisfechas entonces la

solución que se propone es una solución correcta y por lo tanto única (*Teorema de unicidad*). La solución que se propone está en base a la intuición (tener un conocimiento amplio del problema), a experimentos y a soluciones de problemas similares existentes. Si al validar la solución algunas de las condiciones es violada entonces una nueva revisión debe ser hecha basada en la experiencia de la primera revisión. Al método de proponer la solución y revisar que ésta cumpla con todas las condiciones del problema, es llamado *método inverso*.

Algunas veces el proponer la solución para algunas de las incógnitas del problema hace que el sistema simultáneo de ecuaciones se simplifique y sea resuelto para el resto de las incógnitas. Este método de solución en el cual la solución se propone para algunas incógnitas y es resuelto para las demás es llamado el *método semi-inverso*. Es importante señalar que en la mayoría de los problemas de la elasticidad el análisis experimental de esfuerzos es un método muy importante en la solución de estos problemas. La solución que se obtiene en el método inverso como en el semi-inverso son soluciones aproximadas.

1.11 Principio de Saint-Venant

El principio de Saint-Venant establece que si un sistema de fuerzas que actúa en una zona determinada de la frontera de un cuerpo es remplazado por un sistema de fuerzas estáticamente equivalente de fuerzas en la misma zona del mismo cuerpo, entonces los esfuerzos, deformaciones y los desplazamientos ubicados lo suficientemente alejados del punto de aplicación de las fuerzas son aproximadamente los mismos, tanto como para el primer sistema como para el segundo. Como ejemplo considere la distribución de esfuerzos de una barra de sección transversal A bajo la acción de una carga uniformemente distribuida ρ aplicada en sus dos extremos (fig. 1.3a). Los esfuerzos en cada punto de la barra están dados por:

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \rho \\ \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} &= 0\end{aligned}\tag{1.34}$$

Esta solución de esfuerzos satisface las ecuaciones de equilibrio, la ley de Hooke y las condiciones de frontera, por lo tanto es la solución correcta y es única. Ahora si la misma barra es cargada en sus extremos por una carga concentrada P en lugar de la carga uniformemente distribuida ρ (fig. 1.3b). Entonces los esfuerzos dados por las ecuaciones (1.34) ya no son más una solución correcta ya que no satisfacen la condiciones de frontera en sus extremos. Si la carga concentrada P y la fuerza resultante de la carga distribuida son de igual magnitud, tienen el mismo punto de aplicación y actúan en la misma dirección para que sean estáticamente equivalentes, entonces el principio de Saint-Venant establece que los esfuerzos en la barra que se encuentran en una zona lo suficientemente alejada de los puntos de aplicación de las cargas son los mismos para los diferentes sistemas de sollicitaciones, es decir que en la zona media de la barra los esfuerzos son los mismos para estas dos cargas. Por lo tanto las expresiones (1.34) también son solución en la zona lo suficientemente alejada cuando la carga P es aplicada en los extremos de la barra ya que es estáticamente equivalente a la carga uniformemente distribuida p .

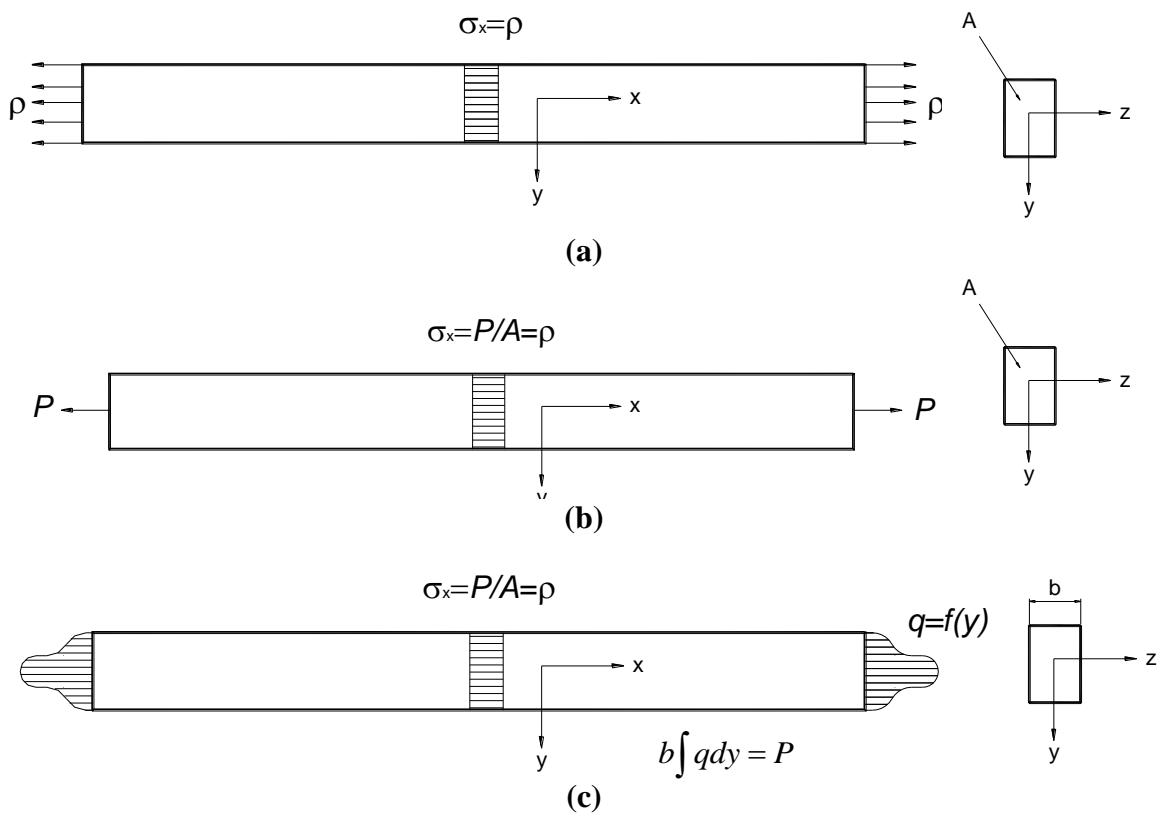


Figura 1.3. Principio de Saint-Venant aplicado a una barra sometida a tensión.

Por el mismo principio las expresiones (1.34) son también válidas en aquella región lo suficientemente alejada de los extremos de la barra para cualquier sistema que es estáticamente equivalente a la carga uniformemente distribuida ρ (fig. 1.3c) [4].

CAPITULO II.

EXTENSOMETRÍA ELÉCTRICA DE RESISTENCIA VARIABLE.

2.1 Introducción.

La medición de cualquier variable es realizada por un sistema de instrumentación compuesto de transductores. Un transductor es un dispositivo que convierte energía y a su vez requiere energía transformada en el punto de sensado antes de que la variable de interés pueda ser medida. Cada variable de interés es acompañada por una cantidad adicional de energía, tal que la combinación de las dos energías suministradas sean llevadas al transductor. De esta manera la presión no puede ser medida sin que la acompañe un cambio en el volumen, la fuerza no puede ser medida sin el acompañamiento de un cambio en una longitud, el voltaje no puede ser medido sin el acompañamiento de un flujo de carga. Esta energía es entonces transformada en otra forma de energía necesaria para el acondicionamiento de la señal y de la lectura del transductor, tal que, la señal de entrada pueda ser representada e interpretada apropiadamente a la salida del sistema de medición.

Un extensómetro es una resistencia eléctrica que consiste de un pequeño filamento de sección rectangular, ultra fino de silicón cristal montado sobre una delgada capa de material de soporte o también llamado de encapsulado que le permite ser pegado fácil

e íntimamente a cualquier elemento estructural (fig. 2.1). El extensómetro es un sensor, algunas características de los sensores son el rango, la sensibilidad, la linealidad y los límites de operación por temperatura. Este capítulo aborda consideraciones importantes acerca de la extensometría eléctrica en el diseño de una celda de carga.

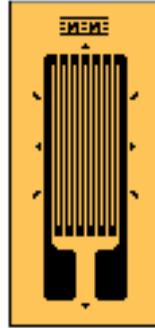


Figura 2.1. Extensómetro

2.2 Extensometría eléctrica de resistencia variable.

La extensometría eléctrica es una técnica que permite obtener el estado de deformación de un punto sobre una superficie con un alto grado de exactitud, a partir de incrementos existentes en la resistencia eléctrica del extensómetro pegado a un elemento estructural que sufre un estado de deformación debido a un sistema de solicitaciones. Por sus características intrínsecas el extensómetro es usado como sensor en una amplia variedad de transductores.

2.3 Sensibilidad (S_A) y factor (S_g) del extensómetro.

La sensibilidad a la deformación (S_A) de la aleación metálica usada en el conductor del extensómetro es definida como el cambio de resistencia por unidad de resistencia inicial dividida por la deformación del elemento estructural, es decir, es la sensibilidad del conductor a ser deformado y está dada por (2.1). Se observa que la sensibilidad a la deformación de cualquier aleación metálica del hilo conductor es debida al cambio en la dimensión del conductor, como lo muestra el término $(1+2\nu)$, y al cambio en la resistencia específica, como se expresa en el término $(d\rho/\rho)/\varepsilon$.

$$S_A = \frac{dR/R}{\varepsilon} = 1 + 2\nu + \frac{d\rho/\rho}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

Resultados experimentales han mostrado que S_A varía de 2 a 4 para la mayoría de las aleaciones metálicas y para los materiales puros el rango es de -12.1 a +6.1 (en el caso del níquel y para el platino respectivamente). Este hecho implica que el cambio en la resistencia específica es bastante grande para ciertos materiales, ya que el término $(1 + 2\nu)$ usualmente se encuentra entre el intervalo de 1.4 a 1.7. El cambio en resistencia específica es debido al número de electrones libres y la variación de la movilidad de estos cuando la deformación aparece. ε es la deformación uniforme del hilo conductor en la dirección del eje-x del conductor.

Las vueltas en el hilo conductor del extensómetro son más amplios e insensibilizados en mayor grado. Los segmentos axiales tienen una relación ancho-espesor muy grande (fig. 2.1). Estas características hacen que parte de la deformación transversal sea transmitida del material de soporte del extensómetro a los segmentos axiales para producir una respuesta junto con la del efecto por la deformación axial. Cuando el extensómetro es utilizado para medir deformaciones, éste experimenta sensibilidad a la deformación axial y a la transversal. La respuesta del extensómetro a un estado de deformación biaxial es expresado como:

$$\frac{\Delta R}{R} = S_a(\varepsilon_a + K_t \varepsilon_t) \quad (2.2)$$

Donde ε_a = deformación normal en la dirección axial del extensómetro

ε_t = deformación normal en la dirección transversal del extensómetro.

S_a = sensibilidad del extensómetro a la deformación axial

S_t = sensibilidad del extensómetro a la deformación transversal

$K_t = \frac{S_t}{S_a}$ - Factor de sensibilidad transversal para cada extensómetro.

Los fabricantes de extensómetros proveen de una calibración constante a los extensómetros, dicha calibración es llamada *Factor del extensómetro*, S_g que relaciona el cambio de resistencia eléctrica con la deformación axial como:

$$\frac{\Delta R}{R} = S_g \varepsilon_a \quad (2.3)$$

El término de sensibilidad transversal se refiere al comportamiento del extensómetro en respuesta a la deformación perpendicular al eje principal de medida. Tal efecto se debe a factores como la geometría del extensómetro, a la aleación metálica del hilo conductor, al material de soporte o de encapsulado.

Lo ideal es que el extensómetro no sensara deformación transversal alguna, pero en general la mayoría si lo hace, aunque el efecto es pequeño. Cuando el extensómetro es empleado bajo condiciones diferentes a las de calibración del factor S_g , aparecen errores por efectos de sensibilidad transversal. [7]

2.4 Compensación por temperatura.

En diversas mediciones de deformación sobre algún elemento estructural, el funcionamiento del extensómetro está condicionado por cambios de temperatura durante el periodo de prueba y consideraciones importantes deben tomarse en cuenta para determinar si el cambio en la resistencia del extensómetro es debido a la deformación en el elemento estructural o a la deformación por el cambio de temperatura. Cuando existe en el ambiente un cambio de temperatura se tienen los siguientes efectos que alteran el funcionamiento del extensómetro:

- Cambia la sensibilidad a la deformación S_a de la aleación metálica en el hilo conductor
- Elongación o contracción del extensómetro ($\Delta L / L = \alpha \Delta T$)

-
- El material del elemento estructural en el cual el extensómetro es pegado se elonga o se contrae ($\Delta l = l\beta\Delta T$)
 - La resistencia del extensómetro cambia debido a la influencia del coeficiente de temperatura en la resistividad del material en el hilo conductor ($\gamma\Delta T$)

La combinación de los efectos antes mencionados produce un cambio inducido de temperatura en la resistencia del extensómetro y se expresa:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\Delta T} = (\beta - \alpha)S_g \Delta T + \gamma\Delta T \quad (2.4)$$

Donde α = coeficiente de dilatación térmica del extensómetro

β = coeficiente de dilatación térmica del elemento estructural.

γ = coeficiente de temperatura de la resistividad del extensómetro.

S_g = factor del extensómetro.

Si existe una diferencia de dilatación debido a un cambio de temperatura entre el extensómetro y el elemento estructural donde el extensómetro se encuentra pegado (esto es $\alpha \neq \beta$), el extensómetro estará sujeto a una deformación mecánica que no ocurre en realidad en el elemento estructural. El extensómetro reacciona a esta deformación indicando un cambio en la resistencia de la misma manera que indica un cambio para una deformación si una carga estuviera aplicada al elemento estructural. Desafortunadamente es imposible separar la deformación aparente debido al cambio de temperatura de la deformación debida a una carga aplicada. Si la aleación del extensómetro y el material del elemento estructural tienen el mismo coeficiente de dilatación entonces el término térmicamente inducido de $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\Delta T}$ es cero. Pero si el coeficiente de resistividad γ no es

cero entonces el extensómetro aun continúa registrando un cambio de resistencia debido a la temperatura, entonces esta componente de $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\Delta T}$ indica una deformación aparente que no ocurre en elemento estructural. Para compensar los efectos de la temperatura en el

extensómetro se utilizan dos métodos, el primero se refiere a la compensación en el extensómetro de manera que se cancele el efecto de los tres términos en (2.4) mediante alguna combinación. En el proceso de minimizar los efectos de la temperatura sobre el extensómetro es posible obtener una compensación perfecta si se hacen coincidir los coeficientes de dilatación del material del elemento estructural y del material del extensómetro además de mantener el coeficiente de resistividad en cero. El segundo se refiere a la compensación por efectos del cambio de temperatura en la señal del acondicionador (Puente de Wheatstone) que es utilizado para convertir $\Delta R/R$ a salida de voltaje. Este último método es el utilizado en este proyecto de investigación.

Si se asume que todas las resistencias del puente de Wheatstone son extensómetros e inicialmente tienen el mismo valor de resistencia R_o entonces:

$$\Delta E = \frac{V}{4} \left(\frac{\Delta R_1 + \Delta R_3 - \Delta R_2 - \Delta R_4}{R_o} \right) \quad (2.5)$$

Si cada uno de estos incrementos de resistencia está formado por un cambio en la resistencia por deformación mas un cambio en la resistencia por temperatura, entonces siempre que el sistema presente un comportamiento lineal, que los extensómetros experimenten el mismo cambio de temperatura y que hayan sido montados en el mismo elemento estructural, el resultado al mismo cambio de resistencia debido al cambio de temperatura es:

$$\Delta E = \frac{V}{4R_o} (\Delta R_{1D} + \Delta R_{1T} + \Delta R_{3D} + \Delta R_{3T} - \Delta R_{2D} - \Delta R_{2T} - \Delta R_{4D} - \Delta R_{4T}) \quad (2.6)$$

Donde el subíndice D – cambio de resistencia por deformación
el subíndice T – cambio de resistencia por temperatura

Por definición $\Delta R_{1T} = \Delta R_{2T} = \Delta R_{3T} = \Delta R_{4T}$ por lo tanto la ec(2.6) queda de la siguiente manera:

$$\Delta E = \frac{V}{4R_o} (\Delta R_{1D} + \Delta R_{3D} - \Delta R_{2D} - \Delta R_{4D}) \quad (2.6a)$$

Se observa que los cambios de resistencia por temperatura en las resistencias contiguas se cancelan por lo que la salida de voltaje del puente es independiente de los cambios de temperatura.

Mientras que dos resistencias contiguas en el puente sean remplazadas por dos extensómetros del mismo tipo y sean pegados sobre el mismo material bajo las mismas condiciones ambientales el puente de Wheatstone es insensible a los cambios de temperatura, esto es válido solamente si el puente ha sido balanceado inicialmente para salida cero.

No es necesario que ambos extensómetros estén sometidos a deformación, en el caso donde uno de los extensómetros esté bajo deformación y el otro no, éste último es llamado extensómetro “pasivo”

2.5 Disipación de calor.

Como ya se mencionó la temperatura afecta significativamente la resistencia en el extensómetro y por lo consiguiente la lectura que se obtenga de éste. Además de la temperatura ambiente que afecta el funcionamiento del extensómetro, éste es afectado por la potencia que se disipa en él cuando es conectado al puente de Wheatstone y se le aplica un voltaje de excitación. La potencia P es disipada en forma de calor por lo que la temperatura en el extensómetro es mayor que la temperatura ambiente. El calor que ha de ser disipado depende del voltaje aplicado al extensómetro y a la resistencia de éste, por lo tanto:

$$P = \frac{V^2}{R} = I^2 R \quad (2.7)$$

Donde P = Potencia, W

I = Corriente en el extensómetro, A

R = Resistencia del extensómetro, Ω

V = Voltaje a través del extensómetro, V

Algunos de los factores que influyen en la disipación de calor son el tamaño del extensómetro, la configuración y el tipo de hilo conductor, el material de soporte y su espesor, el tipo de adhesivo, etc.[8]

2.6 El Puente de Wheatstone

El extensómetro cambia su resistencia eléctrica debido a la deformación aplicada en él de manera:

$$\frac{\Delta R}{R} = S_g \varepsilon_x \quad (2.8)$$

Donde el eje x del extensómetro coincide con el eje x del elemento donde el extensómetro está pegado. La deformación en la dirección del eje y es $\varepsilon_y = -0.285\varepsilon_x$. Para poder aplicar el extensómetro en cualquier análisis experimental de esfuerzos la magnitud $\Delta R/R$ debe ser medida y convertida a deformación la cual es producida por el cambio en la resistencia eléctrica.

2.6.1 Principio de operación del Puente de Wheatstone

El puente de Wheatstone es usado como un instrumento de medición directa, donde el valor $\Delta R/R$ es convertido a una señal de voltaje, ΔE que es medido y relacionado a la deformación.

De acuerdo al circuito eléctrico mostrado en la figura 2.2 el voltaje que pasa a través de la resistencia R_1 es denotado por V_{AB} de igual forma el voltaje que pasa por la resistencia R_4 es denotado por V_{CD} . La salida de voltaje E del puente es equivalente al voltaje V_{BD} , el cual es:

$$E = V_{BD} = V_{AB} - V_{CD} \quad (2.9)$$

Sustituyendo los respectivos términos y factorizando se tiene:

$$E = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} V \quad (2.10)$$

Cuando el voltaje es cero se considera que el puente de Wheatstone se encuentra en un estado de balance.

$$R_1 R_3 - R_2 R_4 = 0 \quad (2.11)$$

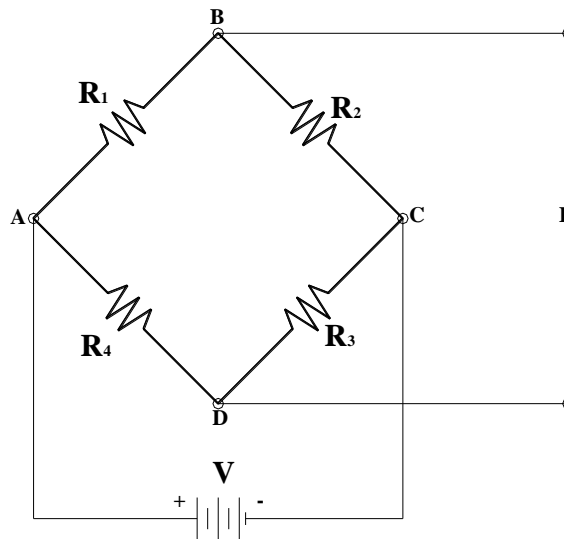


Fig. 2.2 Circuito del Puente de Wheatstone

Esta característica permite que el puente de Wheatstone sea utilizado para mediciones de deformaciones estáticas.

Antes de que las deformaciones sean aplicadas a los extensómetros del puente éste se encuentra calibrado ($E = 0$). Entonces el voltaje de la deformación inducida ΔE puede ser relativamente medido al voltaje cero para aplicaciones estáticas y dinámicas.

Se considera un balance inicial del puente con $R_1 R_3 - R_2 R_4 = 0$, ya que $E=0$ entonces el cambio en cada valor de las resistencias R_1, R_3, R_2, R_4 es igual a $\Delta R_1, \Delta R_3, \Delta R_2, \Delta R_4$

respectivamente. El voltaje de salida ΔE del puente se obtiene de la ec(2.10), la cual toma la forma de

$$\Delta E = V \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (2.12)$$

Y si se considera la siguiente relación $R_2/R_1 = r$ la ec(2.12) se reescribe como:

$$\Delta E = V \frac{r}{(1+r)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (2.13)$$

Que es la ecuación que gobierna el comportamiento del puente de Wheatstone en una medición de deformación. [9]

2.6.2 Sensibilidad del Puente de Wheatstone.

(con voltaje fijo)

La definición de sensibilidad de un circuito es la relación entre el voltaje de salida y la deformación:

$$S_c = \frac{\Delta E}{\varepsilon} \quad (2.14)$$

De la ec(2.13) es claro que :

$$S_c = \frac{\Delta E}{\varepsilon} = \frac{V}{\varepsilon} \frac{r}{(1+r)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (2.15a)$$

Si se configura un arreglo con n-extensómetros (donde n=1,2,3,4) cuyas salidas se sumen cuando los extensómetros son conectados al puente, entonces se puede escribir:

$$\sum_{m=1}^n \frac{\Delta R_m}{R_m} = n \frac{\Delta R}{R} = n S_g \varepsilon \quad (2.15b)$$

Sustituyendo la ec(2.15b) en ec(2.15a) la sensibilidad del circuito es:

$$S_c = \frac{Vr}{(1+r)^2} nS_g \quad (2.16)$$

Esta sensibilidad solo es válida cuando el voltaje V en el puente es fijo e independiente de la resistencia eléctrica del puente. La ec(2.16) muestra que la sensibilidad del puente de Wheatstone depende del número n de extensómetros activos, del factor del extensómetro S_g , de la salida del voltaje V y de la relación de las resistencias $R_2/R_1 = r$. Con las cuatro resistencias activas en el puente de Wheatstone y una relación $r = 1$ la sensibilidad del circuito es $S_g V$, mientras que con una sola resistencia activa la sensibilidad del circuito es de $S_g V/4$.

Cuando el voltaje V es calibrado para que las resistencias eléctricas disipen su máxima potencia, otra ecuación para la sensibilidad debe ser utilizada. Debido a que la corriente del extensómetro es un factor que limita este método, el número de extensómetros empleados en el puente, así como su posición relativa en él deben de tomarse en consideración.

Caso 1. Este arreglo consiste de un solo extensómetro activo en la posición R_1 donde la compensación de temperatura en el circuito no es indispensable.

El valor de la resistencia R_1 es igual a R_g (resistencia del extensómetro). El valor de las otras resistencias puede ser calibrado para maximizar la sensibilidad del circuito, siempre y cuando se mantenga la condición de balance inicial $R_1 R_3 = R_2 R_4$. La potencia disipada por el extensómetro se determina mediante la ecuación.

$$V = I_g (R_1 + R_2) = I_g R_g (1+r) = (1+r) \sqrt{P_g R_g} \quad (2.17)$$

Combinando la ec(2.16), la ec(2.17) y la relación $R_2/R_1 = r$ se obtienen la sensibilidad del circuito:

$$S_c = \frac{r}{(1+r)} S_g \sqrt{P_g R_g} \quad (2.18)$$

Para este caso la sensibilidad del circuito es debida a dos factores, la eficiencia del circuito dada por el término $r/(1+r)$ y por la selección del extensómetro, mediante el término $S_g \sqrt{P_g R_g}$.

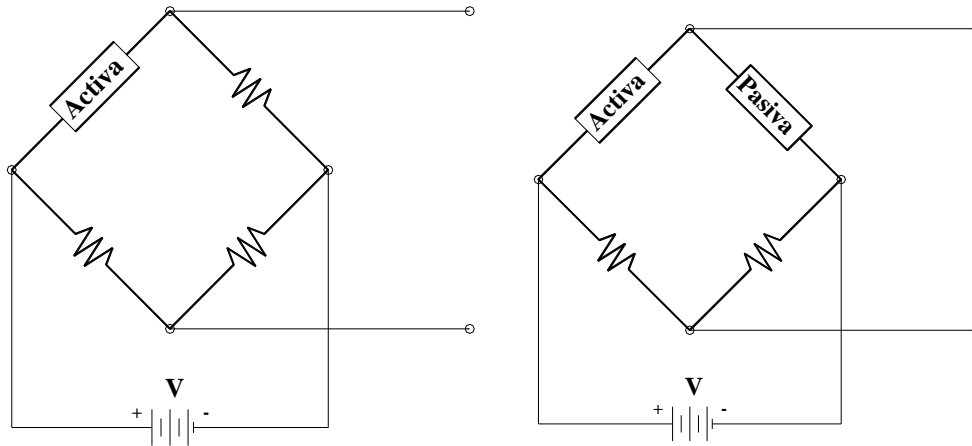


Fig. 2.3 Arreglos del Puento de Wheatstone caso 1 (izq.) y caso 2 (der)

Caso 2. Este arreglo del puente utiliza un extensómetro activo en la resistencia R_1 y un extensómetro que se le llama “Pasivo” en la resistencia R_2 , el cual es empleado para la compensación de la temperatura. El valor de la corriente de extensómetro que pasa a través de ambos extensómetros ($R_1 = R_2 = R_g$) es dado por

$$V = 2I_g R_g \quad (2.19a)$$

Sustituyendo esta ec(2.19a) en la ec(2.16) con $n = 1$ y $r = 1$ se tiene:

$$S_c = \frac{1}{2} S_g \sqrt{P_g R_g} \quad (2.19b)$$

En este ejemplo la eficiencia del circuito está fijo al valor de 0.5 ya que la condición $R_1 = R_2 = R_g$ restringe a $r = 1$. Por lo tanto, es claro que la colocación de un extensómetro “Pasivo” en la posición de R_2 para efectos de compensar los cambios en temperatura reduce la eficiencia del circuito al 50 por ciento. La selección del extensómetro mantiene

su importancia en este caso ya que afecta la sensibilidad del circuito con el término $S_g \sqrt{P_g R_g}$

Caso 3. En éste arreglo se agrega un extensómetro activo en la posición R_1 y un extensómetro “Pasivo” en la posición R_4 y se fija el valor de las resistencias R_2 y R_3 . Con este arreglo se compensa la temperatura del puente ya que cancelan los cambios en resistencia eléctrica. La corriente a través de las resistencias R_1 y R_4 es dada por:

$$V = I_g (R_1 + R_2) = (1+r) \sqrt{P_g R_g} \quad (2.20a)$$

Sustituyendo la ec(2.20a) en la ec(2.16) y tomando para este caso $n = 1$ la sensibilidad del circuito es:

$$S_c = \frac{r}{1+r} S_g \sqrt{P_g R_g} \quad (2.20b)$$

La sensibilidad del circuito para este caso es igual a la sensibilidad del circuito del caso 1. Por lo tanto la compensación de la temperatura puede ser obtenida sin pérdidas en la sensibilidad del circuito solo si un extensómetro “Pasivo(a)” en conectado en la posición de la resistencia R_4 .

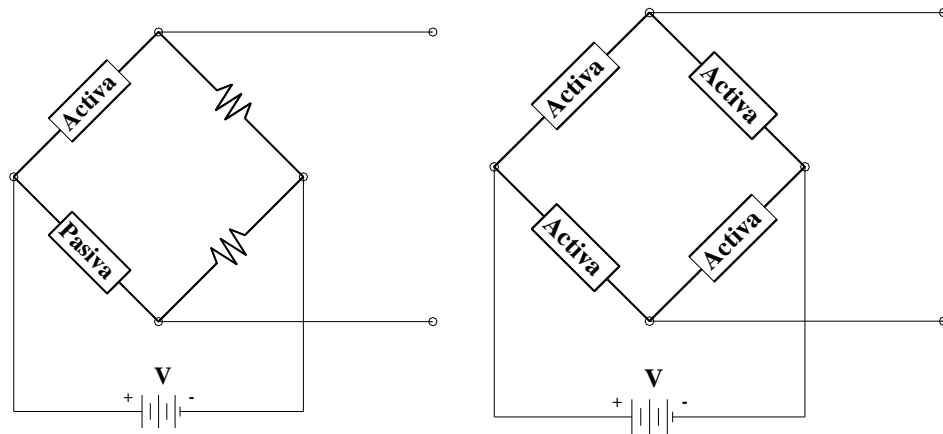


Fig. 2.4 Arreglos del Puente de Wheatstone caso 1 (izq.) y caso 2 (der)

Caso 4. Este arreglo consiste en cuatro extensómetros activos en el puente uno en cada resistencia. La potencia de disipación de cada extensómetro es con $n = 4$:

$$V = 2I_g R_g = \sqrt{P_g R_g} \quad (2.21a)$$

Ya que la resistencia es la misma para los cuatro extensómetros, $r = 1$. La sensibilidad del circuito para este arreglo se obtiene sustituyendo la ec(2.21a) en ec(2.16)

$$S_c = 2I_g R_g S_g = 2S_g \sqrt{P_g R_g} \quad (2.21b)$$

La sensibilidad de este arreglo es dos veces mayor que la sensibilidad de los casos 1 y 3, además de considerar la compensación de la temperatura.

CAPITULO III.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO DEL ELEMENTO ESTRUCTURAL PARA SER USADO EN LA CELDA DE CARGA.

3.1 Introducción.

Este capítulo trata sobre la descripción general del elemento estructural del chasis del vehículo urbano de pasajeros que es usado en la celda de carga como elemento actuador así como su ubicación y funcionamiento.

Se presenta también el análisis numérico efectuado al elemento estructural con el objetivo de presentar el estado de deformación y tener un parámetro para justificar la zona en la cual serán pegados los extensómetros. Para este efecto se hace uso del módulo “*structures*” del software UNIGRAPHICS en su versión NX3, que permite visualizar los resultados en gráficos mediante una gama de colores en donde a cada valor de deformación le corresponde un color predeterminado por el software de análisis.

3.2 Suspensión típica de un vehículo urbano de pasajeros.

La función del sistema de suspensión es evitar que las irregularidades del terreno afecten a la comodidad de los pasajeros y para conseguir una buena estabilidad del vehículo. Dichos sistemas están formados actualmente por un sistema elástico que pueden ser ballestas, barras de torsión, muelles, etc. ayudados por los amortiguadores, de esta forma la unión de las ruedas al conjunto del vehículo no es rígida sino que se hace a través de dispositivos mecánicos. La función de la suspensión y amortiguación es permitir que las ruedas se adapten a la superficie del terreno y absorber los choques o sacudidas que reciben las ruedas al circular sobre baches o irregularidades del terreno. Los vehículos pueden sufrir fundamentalmente tres tipos de oscilaciones durante la marcha: a) Cabeceo, se debe a las fuerzas de inercia durante la aceleración o frenado que provocan una oscilación en torno al eje transversal del vehículo. b) Balanceo, se debe a la fuerza centrífuga al tomar una curva y es una oscilación en torno al eje longitudinal del vehículo y c) Rebote o movimiento longitudinal del chasis. Todas estas oscilaciones pueden y deben controlarse mediante los elementos de suspensión y amortiguación para aprovecharlas lo máximo posible en beneficio de la estabilidad.

3.2.1 Suspensión mecánica

El elemento principal en el sistema de suspensión mecánica es la muelle, la cual está formada por hojas de acero templado de elevada resistencia a la flexión. Su funcionamiento se basa en la fuerza de rozamiento que existe entre las hojas producida por la fricción entre ellas.

La primera hoja se conoce como hoja principal o maestra, la cual se encuentra doblada en sus extremos formando un ojillo donde se inserta un buje de hule o de bronce que reduce la fricción y el desgaste con el pasador o perno; la segunda hoja abraza a la principal y las restantes (según la capacidad de carga del vehículo) son de longitud menor, las cuales se mantienen unidas por medio de un tornillo de centro conocido como pitón.

Las muelles semielípticos en ejes delanteros, están unidas al chasis del vehículo por medio de un extremo fijo de la percha delantera y al otro extremo a través de un estribo basculante (columpio) el cual a su vez va sujetado a la percha trasera delantera.

Este tipo de suspensión de muelles lo podemos encontrar principalmente en aplicaciones en eje delantero (camión rígido, tracto camiones y autobuses urbanos); así como en ejes traseros, aunque hoy en día la suspensión neumática es una mejor opción en estos ejes.

En la figura 3.1 se muestra un sistema de suspensión típico para vehículos urbanos de pasajeros. En el cual se observa el conjunto de muelles (1) junto con dos elementos de sujeción al chasis, llamados percha (2) y columpio (3) [1].

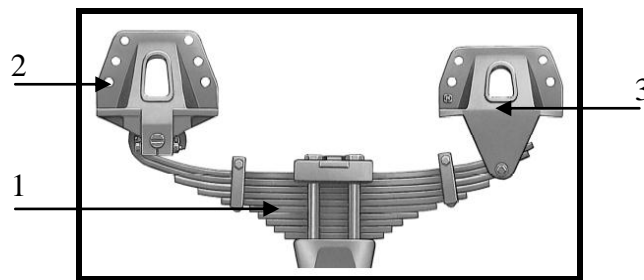


Fig. 3.1 Suspensión típica de muelle.

3.3 Elemento estructural. (Percha)

Como ya se dijo la percha forma parte del sistema de suspensión, en particular, conecta al conjunto de muelles al bastidor o chasis del vehículo. La unión por lo general se realiza mediante pernos. La forma geométrica de las perchas depende de cada fabricante, del tipo de vehículo, ya sea de pasajeros o de carga, del largo del chasis, del tipo de suspensión, de aire o de muelle, etc. Una percha típica se presenta en la figura 3.2.



Fig. 3.2 Geometría típica de la una percha.

La manufactura de la percha es mediante fundición nodular, al encontrarse el carbono en forma esferoidal, la continuidad de la matriz se interrumpe mucho menos que cuando se encuentra en forma laminar; esto da lugar a una resistencia a la tracción y tenacidad mayores que en la fundición gris ordinaria. La fundición nodular se diferencia de la fundición maleable en que normalmente se obtiene directamente en bruto de fusión sin necesidad de tratamiento térmico posterior. Además los nódulos presentan una forma más esférica que los aglomerados de grafito, más o menos irregulares, que aparecen en la fundición maleable.

El contenido total en carbono de la fundición nodular es igual al de la fundición gris. Las partículas esferoidales de grafito se forman durante la solidificación, debido a la presencia de pequeñas cantidades de alguno elemento de aleación formadores de nódulos, normalmente magnesio y cerio, los cuales se adicionan al caldero inmediatamente antes de pasar el metal a los moldes.

La cantidad de ferrita presente en la matriz en bruto de colada depende de la composición y de la velocidad de enfriamiento. Las fundiciones ferríticas son las que proporcionan la máxima ductilidad, tenacidad y maquinabilidad.

3.4 Modelado geométrico de la percha.

Un modelo es una representación de algunas de las características de una entidad concreta o abstracta. Un modelo geométrico describe componentes con propiedades

geométricas inherentes. Entre sus características destacan: su estructura espacial, la conectividad entre elementos, y las propiedades asociadas a componentes espaciales.

El modelo geométrico en un sistema CAD contiene toda la información necesaria para representar el objeto que se está diseñando, esto es, para realizar todas las operaciones requeridas sobre el modelo: editarlo, visualizarlo, realizar cálculos y simulaciones. En esencia, el modelo geométrico es simplemente un conjunto de datos referentes a la geometría, estructura y propiedades del objeto. Los datos que contenga dependerán de la naturaleza del objeto a diseñar.

A partir de las dimensiones reales de la percha se obtiene un modelo geométrico en el modulo “*Modeling*” del sistema de CAD UNIGRAPHICS NX3. Este modelo geométrico se puede apreciar en la fig. 3.3

3.5 Análisis numérico de la Percha.

Para estudiar un fenómeno físico en la mecánica de sólidos (caso estático) es necesario representarlo por medio de modelos matemáticos, esto implica emplear las ecuaciones diferenciales de Beltrami-Michell citadas en el capítulo primero de este trabajo y plantearlas como un problema de funcionales equivalente, es decir, en términos de su formulación variacional que es el principio del trabajo virtual.

El método del elemento finito es un método numérico variacional aproximado para resolver problemas de maximización o minimización de funcionales. La secuencia de este método considera los siguientes pasos:

- i) Discretización del medio continuo, que consiste en dividir la región o el dominio de las variables de las ecuaciones diferenciales, mediante líneas imaginarias, donde cada región será un elemento finito.
- ii) Los elementos finitos estarán conectados entre sí mediante un número discreto de puntos llamados nodos, y el campo de desplazamientos del elemento es representado por la combinación lineal de funciones de interpolación.

-
- iii) Mediante el uso de métodos variacionales las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema se transforman en ecuaciones lineales que gobiernan en forma aislada a todos los elementos dando lugar a la formación de la matriz de rigidez elemental.
 - iv) Las matrices de los elementos se ensamblan para obtener la matriz de rigidez global.
 - v) Los valores puntuales de las incógnitas de las ecuaciones diferenciales se conocen al resolver el sistema de ecuaciones.
 - vi) Una vez conocidos los desplazamientos, se calculan los esfuerzos y las deformaciones de cada elemento.[10]

Este método puede aplicarse al análisis de deformaciones y esfuerzos dentro de un medio continuo que cumpla con las leyes de la elasticidad lineal, dividiéndolo en elementos de forma geométrica sencilla tales como triángulos y rectángulos para problemas planos o tetraedros y cubos para problemas tridimensionales.

Como los extensómetros utilizados en la celda de carga se pegan a la percha para medir la deformación que ésta sufre al ser sometida a un sistema de sollicitaciones, es necesario saber la zona en la que es menester pegar o montar el extensómetro. Para ello es necesario contar con un modelo geométrico que guarde relación en tamaño y forma con la percha.

Para este caso en particular se opta por realizar un análisis de elemento finito utilizando el modulo “*Structures*” del software comercial de CAD/CAM UNIGRAPHICS NX3, con el objetivo de conocer el estado de deformaciones en todos los puntos de la percha en la dirección vertical y. El análisis de elemento finito es una técnica para predecir la respuesta de estructuras y materiales a ciertos factores externos tales como la fuerza, el calor y la vibración. El análisis comienza con la subdivisión (mallado) del modelo geométrico en pequeñas regiones de geometrías simples llamadas elementos conectados en puntos específicos llamados nodos. De esta manera las relaciones de esfuerzo deformación son aproximadas más fácilmente. Finalmente las propiedades del material y

las condiciones de frontera son aplicadas a cada elemento. UNIGRAPHICS NX3 con todos estos parámetros de entrada soluciona el problema

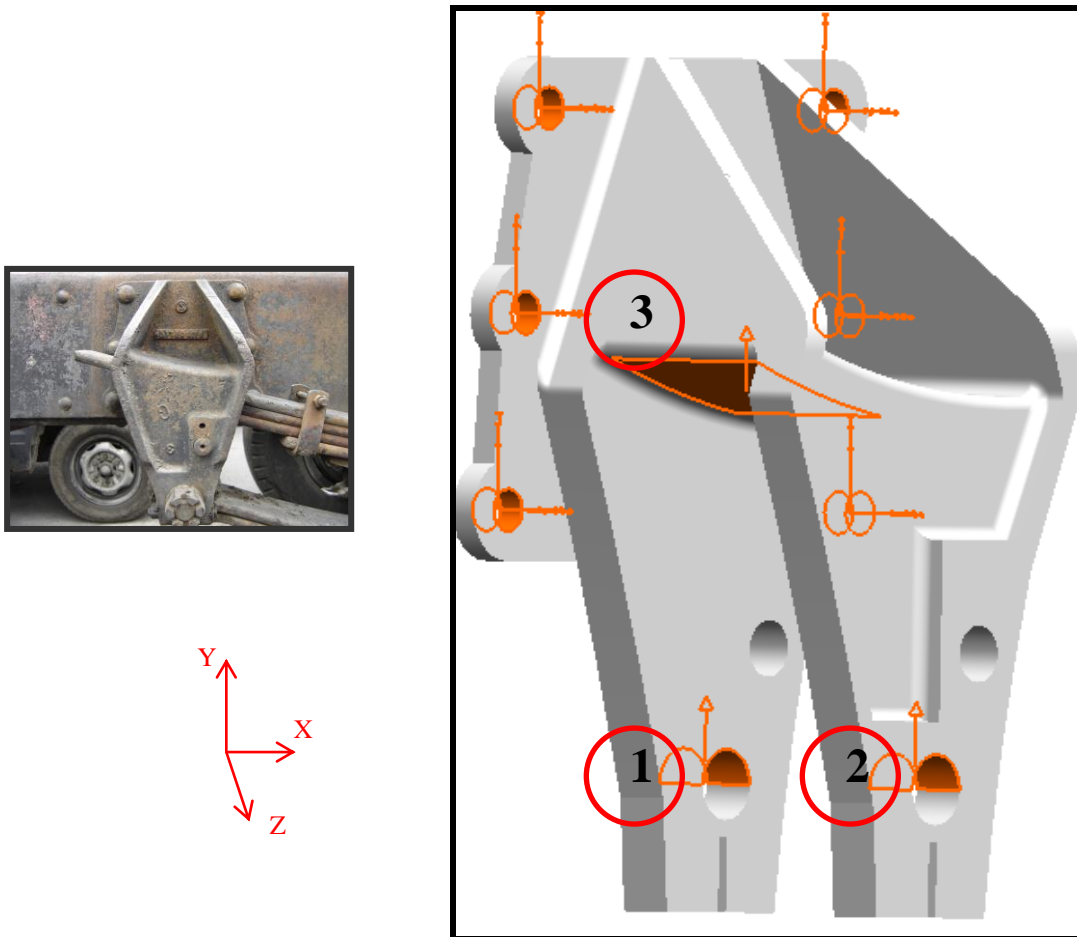


Fig. 3.3 Modelado geométrico de la percha y puntos de aplicación de la fuerza de prueba.

Como ya se mencionó el modulo *structures* de UNIGRAPHICS NX3 para realizar el análisis estático de deformaciones requiere ciertos parámetros de entrada para solucionar el análisis; estos parámetros de entrada son:

- El tipo de elemento finito ya sea triangular, cuadrado o tetraédrico.
- Las propiedades del material como son el módulo de Young, el módulo de Poisson, la resistencia última a la tensión, entre otros.
- Las condiciones de frontera en las que se designa al modelo geométrico los apoyos y articulaciones que presenta la percha.

3.5.1. Mallado y propiedades del material.

Esta solución requirió crear una malla de 81198 elementos que sumaron un total de 133871 nodos; en su construcción se utilizaron elementos tetraédricos cuya longitud de cada elemento fue de 5 mm. Las propiedades del material de fundición nodular consideradas en el análisis son:

Módulo de Elasticidad	162000 MPa
Relación de Poisson	0.25
Resistencia a la fluencia	250 MPa
Resistencia última a la tensión	400 MPa

Fuente: UG NX3 Materials Database.

Tabla 3.1 Propiedades del material de fundición nodular.

3.5.2. Condiciones de frontera y restricciones de movimiento.

Para reproducir las condiciones de frontera tal y como el elemento estructural se encuentra funcionando dentro del chasis del vehículo de pasajeros en el software de análisis se toman las siguientes consideraciones: a los agujeros en donde se posicionan los pernos que sujetan la percha al chasis se les designa como puntos fijos en el modelo geométrico, es decir, en donde los seis grados de libertad están restringidos de movimiento: movimiento lineal en la direcciones x , y y z nulo y rotación en los ejes x , y y z nula.

La fuerza que se considera en este análisis es una fuerza de prueba de 156.96 kN la cual está relacionada con el peso de un chasis de un autobús de pasajeros de 12 metros de longitud -- junto con la carcaza, motor, asientos y demás accesorios -- que es de 16 Ton. De este peso solo se toma en cuenta el que soporta el eje trasero que es de 78.48 kN. Esta fuerza está aplicada en tres puntos mediante una carga distribuida (ver fig. 3.3). En los puntos 1 y 2 es en donde se inserta el perno que sujeta al conjunto de muelles, en estos

puntos la carga está distribuida en la cara cilíndrica superior de los agujeros. El punto 3 es una zona de contacto en donde una parte terminal de una muelle descansa en esta parte de la percha. El sentido y la dirección del vector de la fuerza en los tres puntos es normal a las caras cilíndricas y a la superficie y en dirección del eje y positivo.

3.6. Solución del análisis de elemento finito.

3.6.1 Resultados de desplazamiento.

Se observa en la figura 3.4 el resultado del análisis de desplazamiento, que de acuerdo a las condiciones de aplicación del sistema de sollicitaciones resulta un desplazamiento máximo de 0.78 mm. Se muestra la percha sin aplicación del sistema de fuerzas en color más oscuro y la percha deformada en color más vivo.

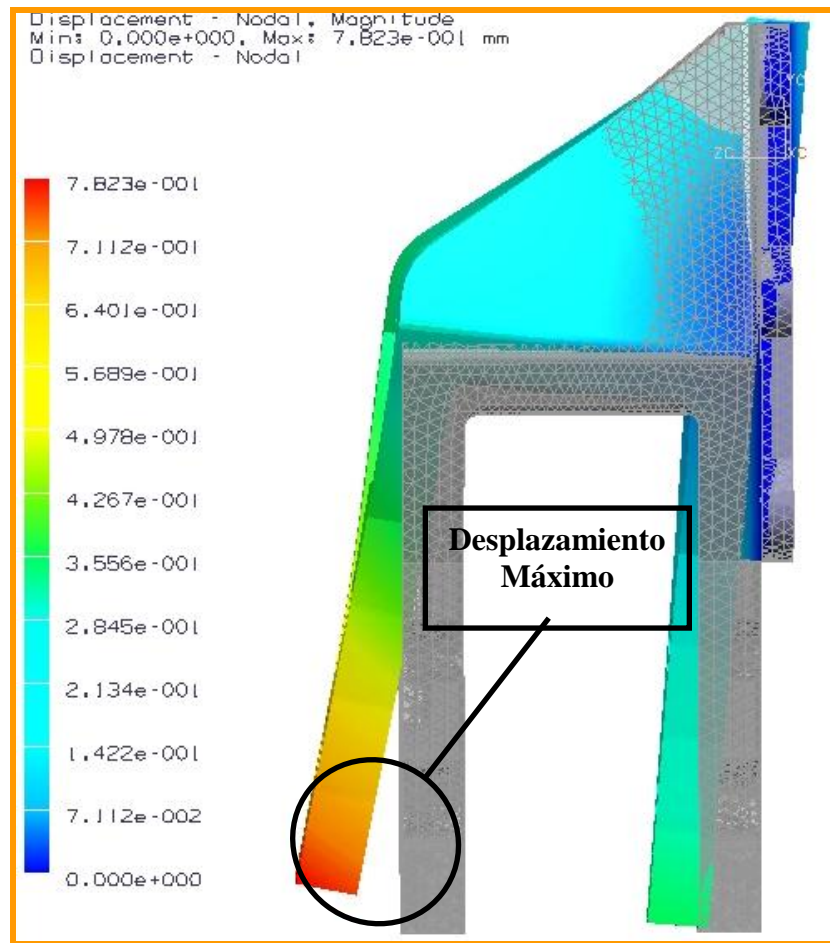


Fig. 3.4 Máximo desplazamiento de 0.78 mm

Las componentes de la magnitud del desplazamiento de 0.78 en las direcciones x , y y z son 0.074, 0.36 y 0.70 mm respectivamente. Es claro que las zonas que se encuentran cerca de los agujeros de sujeción presentan magnitudes de desplazamientos menores. Sobre la cara frontal de la percha se presenta una zona de interés sobre la cual los desplazamientos sobre el eje y son del orden de 0.35 mm.

3.6.2 Resultados de deformación

Por otro lado recordando las propiedades del material vistas anteriormente e introduciendo los parámetros correspondientes al software se observa que las zonas de máxima deformación en dirección del eje y se encuentran señaladas en la gama de colores con el color rojo. (Fig. 3.5). En esta zona se localizan los agujeros para sujetar la percha al chasis. En particular en cuatro agujeros existe la mayor deformación en dirección del eje y , del orden de $1.434e-3$ mm/mm.

Por el sentido y la dirección del vector de las fuerzas aplicadas hacen que la percha tenga un comportamiento a compresión y es por ello que la mayoría que las zonas en la percha se encuentran señaladas con el color verde designado para deformaciones del orden de $-3.524e-04$ a $5.47e-04$ mm/mm. Por otro lado una zona de interés se muestra señalada en la figura 3.5 en donde el promedio del valor de las deformaciones es de $5.406e-04$ y se encuentra sometida a tensión.

3.6.3 Resultados de esfuerzo.

A este respecto solo se puede señalar que el estado de esfuerzos en toda la percha se encuentra por debajo del esfuerzo límite de fluencia del orden de 211 MPa salvo en los agujeros de sujeción de la percha al chasis en donde puede existir un comportamiento plástico en inclusive ligeras grietas ya que el estado de esfuerzo que se tienen en estas zonas es de 775MP muy por arriba del valor del esfuerzo último. Pero como son insignificantes estas zonas no representan un riesgo para la funcionalidad del sistema de suspensión del vehículo de pasajeros.

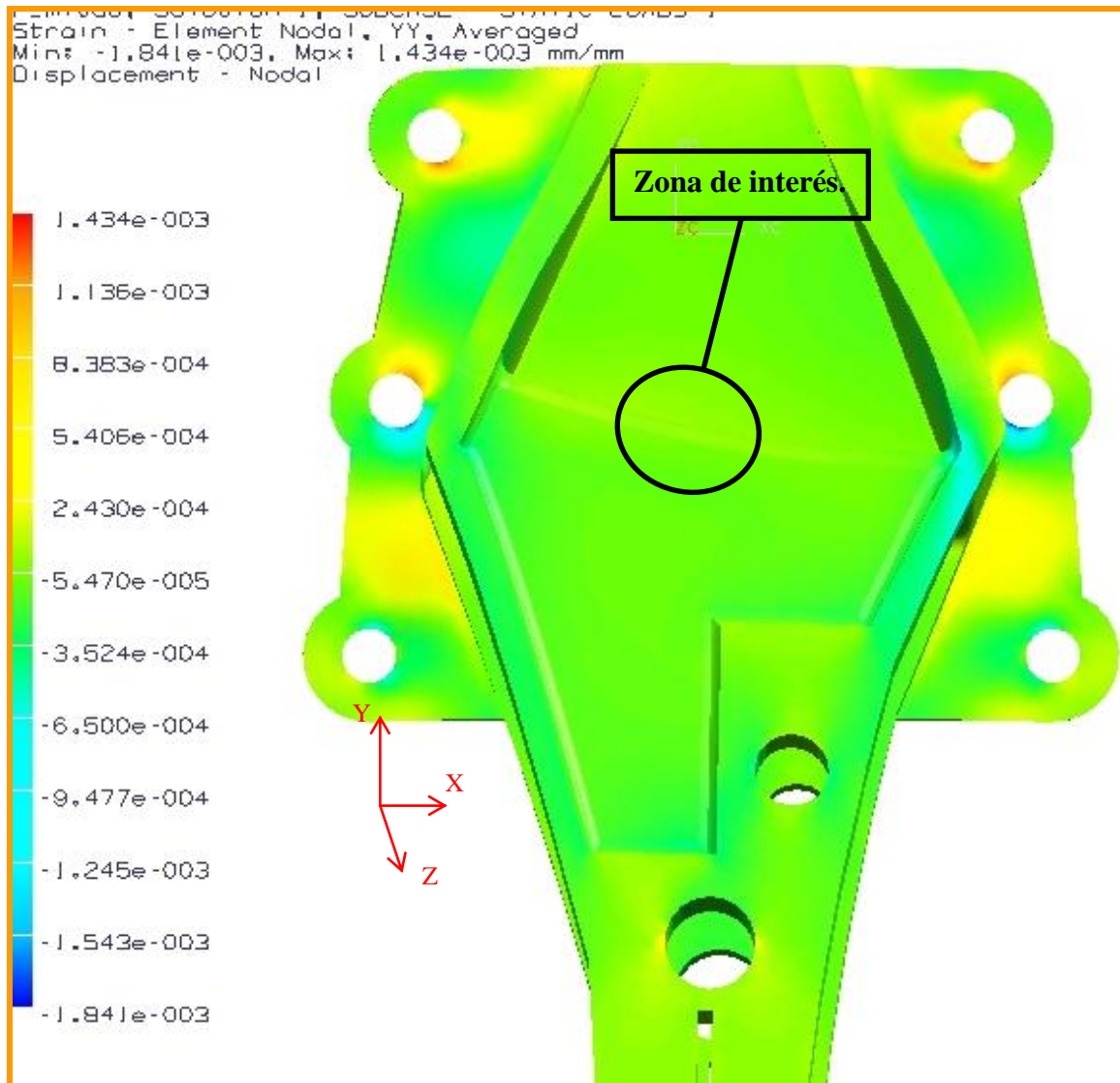


Fig. 3.5 Estado de deformación en la percha en la dirección Y. (mm/mm)

El valor de confiabilidad de los resultados expuestos en el análisis de elemento finito hasta ahora expuestos es de 95.2% esto debido al refinamiento de la malla, es decir, al tamaño del elemento que es de 5 mm.

CAPITULO IV.

DISEÑO DE LA CELDA DE CARGA.

4.1 Introducción.

En un transductor, como lo es una celda de carga, la incógnita es la fuerza aplicada en el elemento actuador, la cual es medida sensando la deformación que sufre el extensómetro pegado en dicho elemento. Por hipótesis la fuerza está relacionada linealmente con la deformación, mientras que el elemento mecánico trabaje dentro del límite elástico.

El diseño de la celda de carga consiste de un elemento actuador, un arreglo de extensómetros que son pegados al elemento actuador y un dispositivo que permite visualizar el valor de la fuerza, a saber, el puente de Wheatstone.

En este capítulo se describe cada elemento del sistema de medición de manera sistemática: la ubicación en como se encuentran pegados los extensómetros en la percha (configuración espacial de los extensómetros en el elemento actuador), la conexión de los mismos en el puente de Wheatstone y la forma en como es calibrada la celda de carga. Lo anterior es importante para que la celda de carga solo sea sensible al efecto de la fuerza vertical la cual es de interés en este trabajo de investigación.

4.2 Elemento estructural.

Como ya se ha mencionado en líneas anteriores es sobre el elemento actuador (percha) donde se ejerce la fuerza cuya magnitud se desea medir. El material de este elemento estructural debe presentar la propiedad que la relación esfuerzo deformación sea lineal, es decir, que el buen funcionamiento de la celda de carga está restringido hasta el límite de proporcionalidad del material. Más aún, el estado de deformación del elemento estructural bajo el sistema de solicitaciones debe ser lo suficientemente pequeño de tal manera que la geometría del elemento estructural no cambie sensible y considerablemente, en caso que estas dos premisas no se cumplan en el elemento estructural ni el esfuerzo ni la deformación serán proporcionales a la fuerza aplicada. Por otro lado el elemento estructural actuador debe presentar una área para la instalación del extensómetro en donde el nivel del estado de deformación producido por el sistema de solicitaciones proporcione una señal de salida lo suficientemente clara que pueda ser medida con el puente de Wheatstone.

Como se vió en el capítulo anterior la geometría de la percha no es homogénea por esta razón se llevo a cabo el análisis de elemento finito en la percha de tal forma que se pudieran conocer zonas de deformación que puedan ser medidas con los extensómetros, convertidas en una señal eléctrica y finalmente ser relacionada con la fuerza aplicada. La zona en donde los extensómetros son pegados en la percha es la señalada en la figura 4.1, (configuración espacial). En particular, hay dos extensómetros pegados sobre un redondeado de 5 milímetros de radio y se encuentran igualmente espaciados a partir de la línea de acción de las fuerzas aplicadas en los agujeros de sujeción de los pernos de las muelles. La deformación promedio en esta zona es de $5.406e-04$.

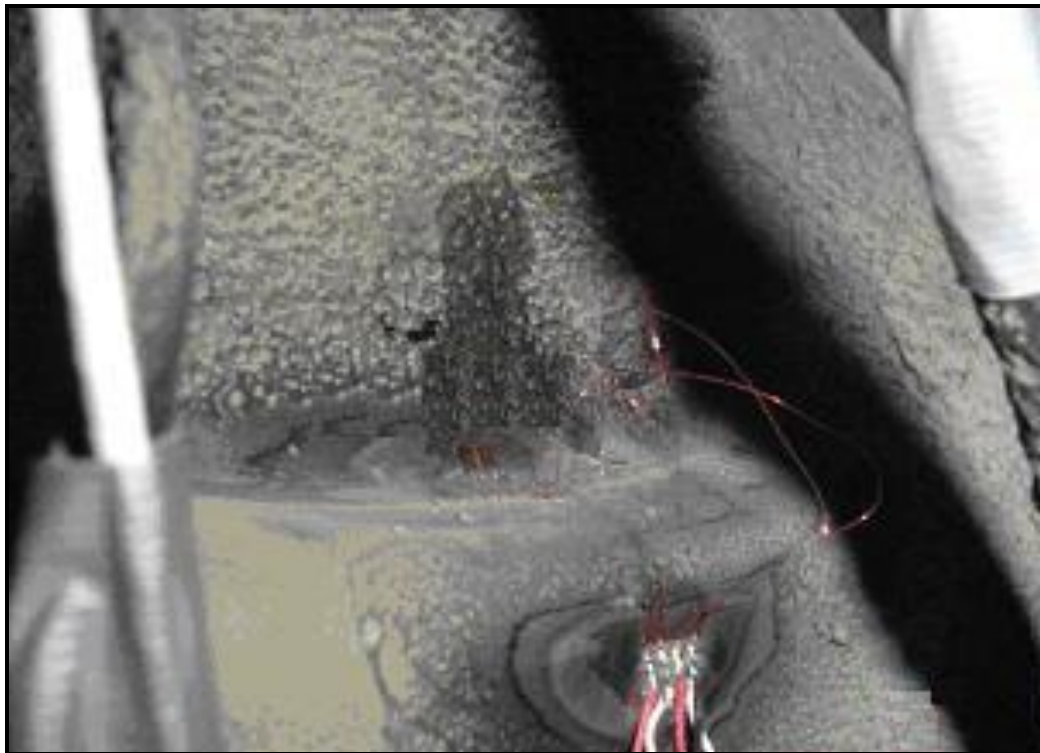
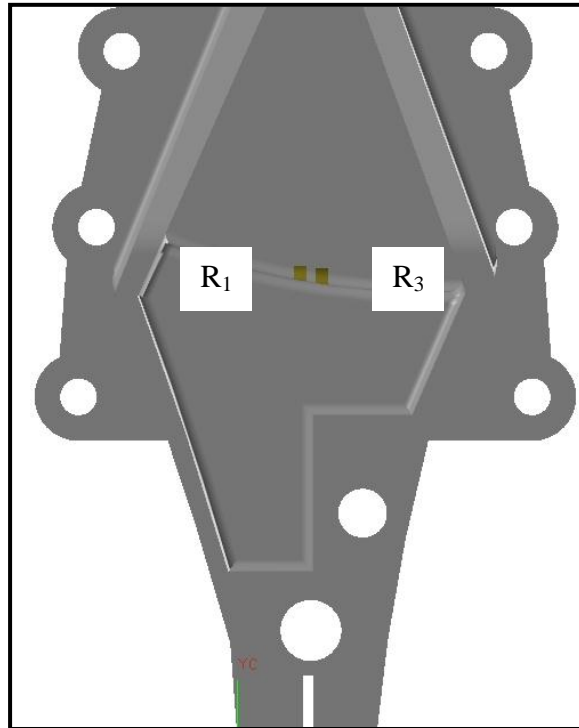


Fig. 4.1. Ubicación espacial de los extensómetros en la percha.

4.3 Selección del extensómetro.

Básicamente el proceso de selección consiste en una particular combinación de características disponibles que sean compatibles con las condiciones en que habrá de trabajar el elemento actuador y que satisfagan sus limitaciones.

El factor más importante que determina las características de operación de un extensómetro es la aleación metálica de su circuito impreso, ésta no es independiente del material de respaldo que se utiliza para su manejo y pegado; por lo que es muy importante considerar a ambos como una unidad.

Se usaron extensómetros de la marca comercial *Micro-Measurements Division* con filamento de Constantan en combinación con un resistente y flexible encapsulado de poliamida. Está diseñado primeramente para propósitos generales en análisis de esfuerzos estáticos y dinámicos de la serie **EA-06-060LZ-120**

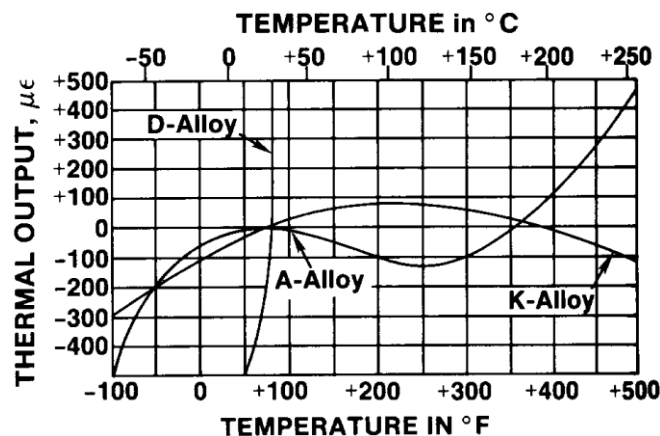
Tiene una longitud activa de sensado de 1.5mm (.060in) con un solo elemento uniaxial (LZ). El rango de temperatura en el que puede ser usado va desde los -75 a los + 175°C y con un nivel de deformación de $\pm 1200\mu\text{m}$ hasta 10^8 ciclos. La resistencia del extensómetro es de $120.0 \pm 0.3\% \Omega$. [8]

4.3.1. Coeficiente de dilatación térmica.

Una propiedad muy importante es la llamada auto compensación por temperatura, la cual consiste en que los extensómetros exhiben un cambio mínimo en el valor de la resistencia eléctrica, por efecto de las variaciones de temperatura en el medio ambiente al cual se somete la prueba, y que se manifiestan en las lecturas como deformaciones aparentes, debidas a las sollicitaciones mecánicas; lo cual indudablemente conduce a lecturas sobrevaloradas de la deformación real a la que trabaja el elemento actuador. En la gráfica 4.1 puede verse una curva típica de cómo varía la señal de salida por efecto térmico en tres de las aleaciones, nótese que las aleaciones A y K presentan comportamientos más estables que los de la D que no muestra esta propiedad de auto

compensación; este comportamiento es particularmente notorio entre -45°C y 200°C . Gráficos de este tipo se incluyen en los paquetes comerciales de extensómetros debido a que las curvas difieren ligeramente en la preparación de las aleaciones entre una y otra partida y el valor del coeficiente de compensación por temperatura elegido.

La auto compensación por temperatura es básicamente una aleación modificada de tal modo, que su coeficiente de dilatación térmica se aproxime tanto como sea posible, al coeficiente de dilatación térmica del material del elemento actuador; de tal forma que se fabrican extensómetros de Constantan con valores de 00, 03, 05, 06, 09, 13, 15, 18, 30, 40 y 50, y son equivalentes como ya dijimos, a los coeficientes de dilatación térmica expresados en $\text{ppm}/^{\circ}\text{F}$.



Gráfica 4.1. Variación de la señal de salida por efecto de temperatura de las distintas aleaciones de uso común.

De esta forma, la aleación de Constantan (K) no solo nos permite la medición en elementos solicitados a grandes deformaciones, sino también la posibilidad de reducir al máximo la deformación por temperatura. Los extensómetros elegidos tienen un valor de 06 para la auto compensación por temperatura.

4.4. Configuración espacial de los extensómetros en la percha

La configuración espacial de los extensómetros es la manera en como se encuentran pegados en el elemento actuador (la percha), de tal forma que puedan ser sensibles a la

deformación en la dirección vertical.

Dos extensómetros uni-axiales, con las características ya mencionadas, se encuentran pegados en dirección del eje y de la percha, espaciados igual y paralelamente a partir de la línea de acción de las fuerzas verticales aplicadas en los agujeros de sujeción de los muelles, R1 y R3.

Existen otros dos extensómetros R2 y R4 (con las mismas características que los primeros) pegados en una placa independiente del mismo material que la percha, con las mismas propiedades mecánicas y mismo valor de coeficiente de dilatación térmica. La placa independiente no presenta deformación alguna por no estar bajo un sistema de sollicitaciones.

4.5 Arreglo de los extensómetros en el puente de Wheatstone

Como se ha mencionado el diseño de la celda de carga solamente es sensible al efecto que se tenga de la componente vertical (eje y) de la fuerza resultante, la componente transversal y tangencial (ejes x , z) son despreciadas en el análisis y se anulan mediante el arreglo de los extensómetros en el puente de Wheatstone:

Es importante señalar que la utilización de los extensómetros R_2 y R_4 (extensómetros pasivos) pegados en la placa independiente además de completar el puente, así mismo, la compensación por temperatura es tomada en consideración con este arreglo de extensómetros pasivos, es decir, los errores por temperatura son eliminados (pág. 24.).

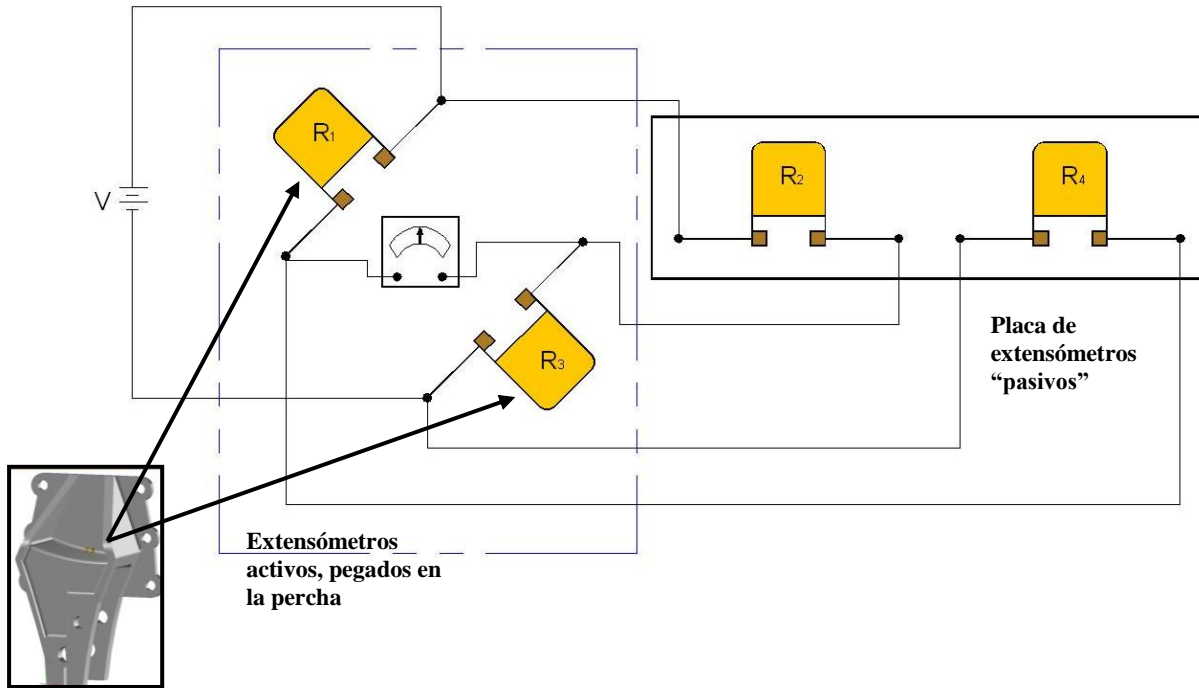


Fig. 4.2. Arreglo de extensómetros en el puente de Wheatstone

4.6 Equipos de adquisición de datos.

Se utilizó un equipo de Measurements Group P-3500, el cual es un equipo versátil, de tamaño y peso reducido y totalmente portátil, ya que utiliza baterías recargables para su operación. En la figura 4.3 se muestra este aparato que consiste básicamente en el circuito electrónico de medición (puente de Wheatstone) y permite la lectura de un sólo extensómetro a la vez; su precisión es de 1μ .



Fig. 4.3 Puente de Wheatstone modelo P-3500.

Este aparato fue complementado con un conmutador SB-10 de la misma compañía que se conecta con el P-3500 para permitir la lectura de los 4 extensómetros.



Fig. 4.4. Conmutador de 10 canales SB-10

Finalmente se usó una lectora de picos 3650 de Measurements Group, este aparato nos permitió registrar bajo condiciones dinámicas, el valor más alto y más bajo obtenidos durante una corrida de pruebas; y un probador de instalaciones como el 1300 nos permitió saber si la instrumentación no presenta fallas o desviaciones en los parámetros esperados, como la resistencia eléctrica del extensómetro y del cableado.



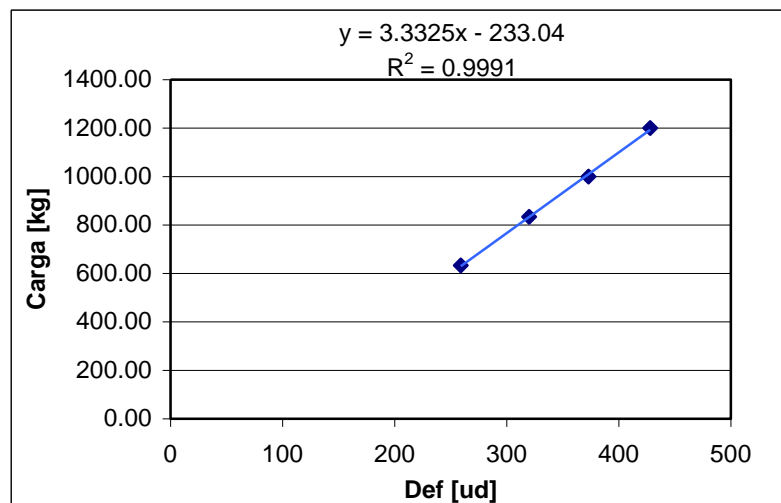
Fig. 4.5. Lectora de picos 3650 y probador 1300.

4.7 Calibración de la celda de carga

Una de las consideraciones más importantes en el análisis de la mecánica experimental es la calibración de la celda en donde tres principales aspectos deben ser tomados en cuenta:

1. La manera de cómo generar las fuerzas de prueba que se requieren.
(Marco de carga)
2. Los medios para aplicar estas fuerzas al elemento actuador.
3. Los medios de cómo medir dichas fuerzas.

El método para generar y aplicar la fuerza de prueba utilizada en este trabajo es a través de un "cilindro hidráulico" que resulta muy práctico para aplicar "cargas o pesos muertos" (fig.4.6). En el émbolo del cilindro hidráulico se tiene previamente instalada una celda de carga comercial en compresión que permite conocer la magnitud de la fuerza que se le aplica en ese momento a la percha, es decir, que para cada desplazamiento del émbolo la percha experimenta una deformación la cual se pasa a través de los extensómetros pegados a ella y es registrada como una medida en micro deformaciones en el display del puente de Wheatstone figura 4.3, de esta manera se obtuvo la calibración siguiente:



Gráfica 4.2. Calibración de la celda de la percha

A partir de esta calibración se sabe que cuando la celda de carga de la percha registre una deformación en el display del puente de Wheatstone de $320\mu d$ la fuerza vertical aplicada en ese momento en la percha es de 833.3kg.



Fig. 4.6. Método de calibración de la percha.

4.8. Medición experimental

4.8.1. Selección de un recorrido típico.

La selección del recorrido representativo se realizó en base a las recomendaciones de RTP. La ruta seleccionada fue “Metro Indios Verdes – Cerro del Chiquihuite”. El plano de la ruta se muestra en la figura 4.7.

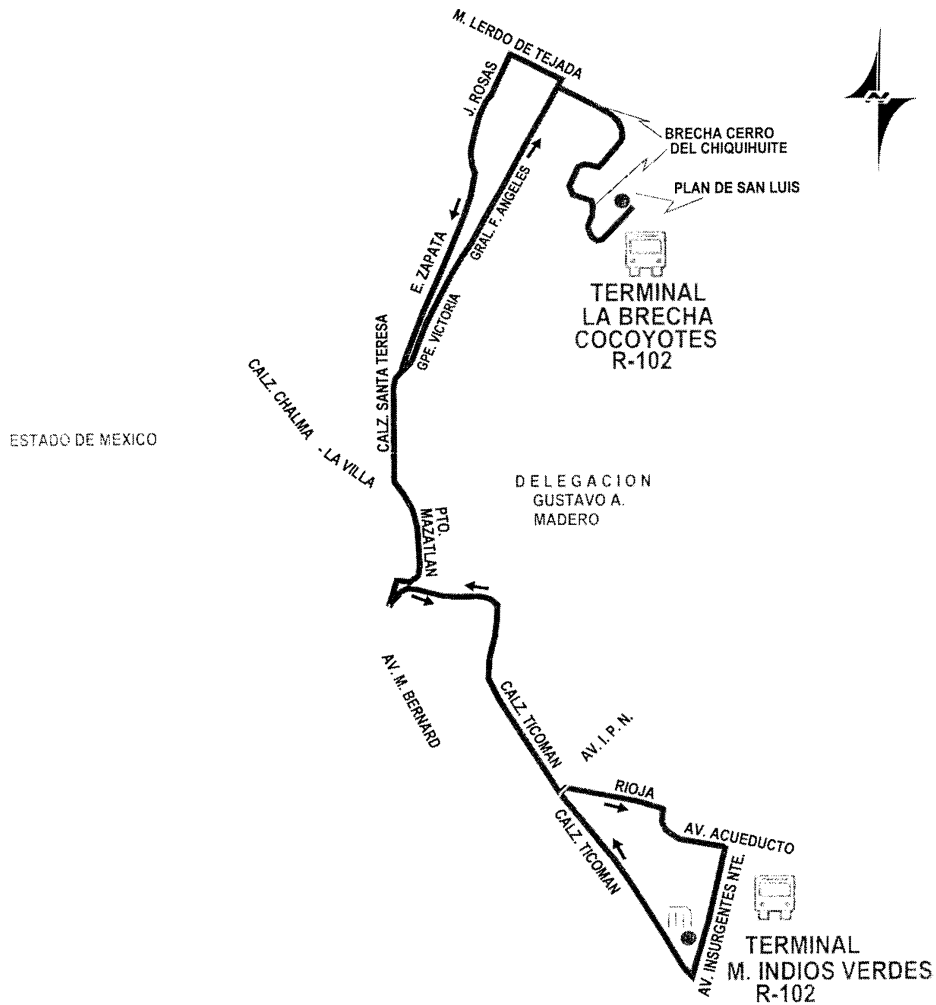


Figura 4.7. Ruta metro Indios Verdes a la Brecha (cerro del Chiquihuite).

4.8.2. Pruebas dinámicas.

Se realizaron dos pruebas de recorrido, sobre la ruta preestablecida, bajo la condición de carga de Peso Bruto Vehicular (PBV). Se consideró un ciclo de recorrido como el trayecto paradero Indios Verdes- la Brecha (Cerro del Chiquihuite), y la Brecha (Cerro del Chiquihuite) - paradero Indios Verdes.

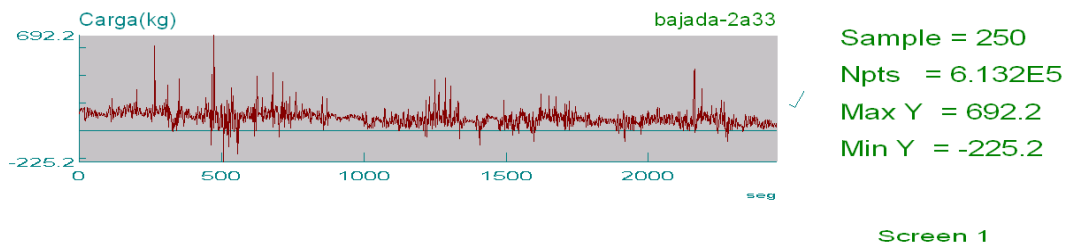
Una prueba de recorrido consistió en tomar un vehículo instrumentado y llevarlo a una pista o ruta que incluya topes, curvas, baches, vados, etc. Una vez ahí, se realizó un

recorrido a lo largo de toda la ruta en las condiciones de uso normal del vehículo al mismo tiempo que se toman lecturas de los instrumentos.

Seleccionado el recorrido se colocó el autobús en el punto de partida y se calibraron a cero los extensómetros, evitando variaciones a causa de la existencia de agentes externos. Durante el recorrido la operación de la unidad debe ser real (misma velocidad promedio, realizando paradas, etc.).

Las pruebas se realizaron para la condición de carga de Peso Bruto Vehicular (PBV). El peso de 70 pasajeros se simuló distribuyendo en el piso y en los asientos del autobús con garrafrones llenos con 48 litros de agua.

A continuación se muestra el registro de los extensómetros durante todo el evento de la prueba.



Gráfica 4.3. Gráfica de las fuerzas obtenidas sobre la percha trasera izquierda.

CONCLUSIONES

Como se ha visto hasta este punto es posible la medición de las fuerzas utilizando los principios de la teoría de la elasticidad y de la extensometría eléctrica mediante el diseño una la celda de carga.

Antes de mencionar las conclusiones es importante señalar que a pesar de que existen celdas de carga comerciales a tensión, compresión o a flexión no fue posible adaptar estas en el sistema funcional del chasis, pero si conocen los principios teóricos de una celda es posible diseñarlas usando como elementos actuadores los mismos componentes del sistema a analizar.

El objetivo planteado en la tesis: diseñar una celda de carga para determinar la magnitud de las fuerzas verticales en el chasis del vehículo de pasajeros se cumplió al realizar un análisis de elemento finito a la percha para conocer posibles zonas donde era menester instrumentar con los extensómetros el elemento actuador y al configurar el arreglo en el puente de Wheatstone se consideraron la eliminación de posibles errores en la lectura debido a cambios de temperatura se concluye lo siguiente:

-
- Con el arreglo de los extensómetros en el puente de Wheatstone se logró que la celda de carga solo fuera sensible al efecto de la componente vertical de la fuerza resultante aplicada.
 - Con arreglo espacial de dos extensómetros pasivos en una placa de metal con las mismas propiedades mecánicas que las de la percha, permitió tomar en cuenta la compensación de la lectura de salida en el puente de Wheatstone por variaciones en la temperatura del ambiente durante el recorrido de prueba. De la misma manera se logró una sensibilidad de $S_c = 2S_g \sqrt{P_g R_g}$.
 - Una vez calibrada la celda de carga se obtuvieron mediciones dinámicas de las fuerzas aplicadas en la percha. Estas mediciones fueron utilizadas como condiciones de frontera en los siguientes trabajos de investigación:
 - + Modelación computacional de la estructura de un autobús de transporte urbano con el método del elemento finito. [11]
 - + Reproducción de una falla por fatiga en un elemento de una estructura. [12]

para realizar análisis de elemento finito en toda la carrocería y chasis del vehículo de pasajeros para conocer el estado de esfuerzos y deformaciones que se requiere para su evaluación de fatiga

REFERENCIAS.

- [1] Publicación Técnica Núm: 17730-212, Hendrickson. The Boler Company. USA. 2000.
- [2] N. Sefa Kuralay. Stress analysis of a truck chassis with riveted joints. Elsevier. Finite Elements in Analysis and Design 38 (2002) 1115–1130.
- [3] Fraile, J. y García, P. (1995) Instrumentación aplicada a la ingeniería. Servicio de publicaciones de la ETS de I. de Caminos, Canales y Puertos.
- [4] Durelli, A., Phillips, E., Tsao, C., Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958
- [5] Gurtin, M., An introduction to continuum mechanics. Academic Press. New York. 1981.
- [6] Chandrasekharaiah, D.S., Debnath, Lokenath. Continuum Mechanics. United States of America, 1994. Academic Press
- [7] Dally, J., Riley, W., Experimental Stress Analysis, McGraw-Hill International Editions, New York, 1991.
- [8] Strain gage selection: criteria, procedures, recommendations, Tech note TN-505-4. Document number: 11055. VISHAY Micro-Measurements. 2007
- [9] Watson, Robert B, Springer handbook of experimental solid mechanics, Srpinger, pages 283-334, 2008.
- [10] Zienkiewicks, O. C., et al, El Método de los Elementos Finitos. Formulación Básica y Problemas Lineales, 4ed, McGraw-Hill/Interamericana de España, Barcelona. 1982.
- [11] Cruz, C. L., Modelación computacional de la estructura de un autobús de transporte urbano con el método del elemento finito. Tesis. DEPFI. UNAM. 2006.
- [12] Ramírez, C. J., Reproducción de una falla por fatiga en un elemento de una estructura. Tesis. DEPFI. UNAM. 2007.