



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**INTERACCIÓN DINÁMICA ENTRE VIENTO Y
ESTRUCTURA.**

T E S I S

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERIA CIVIL – ESTRUCTURAS

P R E S E N T A :

SERGIO MÁRQUEZ DOMÍNGUEZ

TUTOR:

ING. NEFTALÍ RODRÍGUEZ CUEVAS



2006

JURADO ASIGNADO:

Presidente: **Dr. Luis Esteva Maraboto**

Secretario: **Dr. Gabriel Echávez Aldape**

Vocal: **Ing. Neftalí Rodríguez Cuevas**

1^{er.} Suplente: **Dra. Sonia Elda Ruiz Gómez**

2^{do.} Suplente: **M.I. Octavio García Domínguez**

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería

TUTOR DE TESIS:

Ing. Neftalí Rodríguez Cuevas

FIRMA

DEDICATORIA.

Dedico esta obra con profundo cariño y admiración a quienes me han dado mucho sin esperar nada a cambio y que son para mí, lo más valioso que tengo en la vida.

A MIS PADRES:

**Celestino Márquez León
Lucina Domínguez Lagunes.**

A MIS HERMANOS:

Crescencio, Celia[†], Irma, Silvia, Lilia y Hugo.

AGRADECIMIENTOS.

A DIOS

A mis Padres

A mis Hermanos

A mi tutor: Ing. Neftalí Rodríguez Cuevas.

A mis amigos, especialmente: Emma Nereida y Mauro Alexis.

RECONOCIMIENTO:

La realización de los estudios de maestría y desarrollo de esta tesis fue posible por el apoyo, que agradezco, de las instituciones más importantes a nivel nacional que unidas en un mismo ideal, dan formación a los profesionistas de México.

**La Universidad Nacional Autónoma de México.
Instituto de Ingeniería de la UNAM.
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).**

ÍNDICE	Pág.
LISTA DE VARIABLES	I
INTRODUCCIÓN	III
RESUMEN	VI

I. ASPECTOS BÁSICOS DE AEROMECÁNICA

1.1 Antecedentes históricos.....	1
1.2 Nociones de Aeroelasticidad.....	4
1.3 El fluido como un medio continuo.....	5
1.4 Los campos de un flujo.....	5
1.4.1 Campo de velocidades.	6
1.4.2 Campo de aceleraciones.	7
1.4.3 Campo rotacional.....	8
1.5 Ecuación de Navier-Stokes.....	11
1.6 Relación entre campo de velocidades y vorticidad.....	19
1.7 Solución a la ecuación de Navier-Stokes.....	20
1.8 Flujos particulares.....	25
1.8.1 Flujo Paralelo.....	25
1.8.2 Vórtice Libre y Forzado.....	30
1.8.3 Fuente y Sumidero.....	31
1.8.4 Doblete.....	32
1.9 Combinación de flujos.....	35
1.9.1 Combinación de flujo paralelo y una fuente.....	35
1.9.2 Combinación de un flujo paralelo y un doblete.....	42

II. EMPUJE DINÁMICO DE UN FLUJO SOBRE UN CUERPO

2.1 Importancia del coeficiente de arrastre.....	47
2.2 Arrastre total de cuerpos bi y tridimensionales.....	48

III. APARICIÓN DE ESTELAS VORTICOSAS

3.1 El proceso de la separación.....	50
3.2 Formación de la estela.....	51
3.3 Estelas con vórtices alternados.....	53
3.4 Formas de la estela para obstáculos inmóviles.....	54
3.5 Formas de la estela para obstáculos móviles.....	68

IV. PARÁMETROS ADIMENSIONALES

4.1 Número de Reynolds.....	70
4.2 Número de Strouhal.....	72
4.3 Numero de Scruton.....	77
4.4 Relación entre la frecuencia de vórtice y frecuencia de estructura.....	77

V. VELOCIDAD REDUCIDA CRÍTICA

5.1 Procedimientos para modificar la estela vorticiosa.....	79
5.1.1 Aros o cubiertas de refuerzo (Mortajas).....	80
5.1.2 Aletas Helicoidales.....	82
5.1.3 Barras contra vórtices.....	85
5.1.4 Dispositivos de amortiguamiento.....	85
5.2 Efectos en estructuras esbeltas debidos a la generación de vórtices.....	87
5.3 Acción del viento en flujo inestable.....	88

VI. FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL (MÉTODO DE LOS PANELES).	
6.1 Flujo sobre cuerpos simétricos.....	89
6.2 Flujo sobre cuerpos asimétricos.....	94
VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA.	
7.1 Introducción.....	101
7.2 Proyección arquitectónica piso a piso.....	102
7.3 Geometría de la torre.....	102
7.4 Estructuración de la cabina.....	104
7.5 Observaciones sobre el proceso de modelado de la estructura.....	106
7.6 Obtención del coeficiente de arrastre para la sección triangular de la torre...111	
7.7 Procedimiento de análisis por el método estático para viento.....	113
7.8 Desplazamientos longitudinales de las masas respecto a la cimentación.....	119
7.9 Método dinámico espectral.....	122
7.9.1 El espectro de potencia.....	122
7.9.2 Espectro de potencia de Davenport y Harris.....	122
7.10 Velocidad crítica que provoca separación de los vórtices.....	127
7.11 Desplazamientos longitudinales cuando se desprenden vórtices.....	128
7.12 Método dinámico para calcular despl. longitudinales debidos a vórtices....	130
7.13 Desplazamientos transversales por el desprendimiento de vórtices.....	132
CONCLUSIONES.....	136
APENDICES. PROGRAMAS PARA EL METODO DE LOS PANELES.....	137
APENDICE A. PROGRAMA PARA CUERPOS BIDIMENSIONALES SIMÉTRICOS.....	137
APENDICE B. PROGRAMA PARA CILINDROS, EN FLUJO LAMINAR.....	140
BIBLIOGRAFÍA.....	143

INTRODUCCIÓN.

El efecto dinámico del viento en las estructuras modernas ha recibido la atención cada vez mayor desde el dramático colapso del puente Tacoma Narrows en 1940. Antes de este período la práctica del diseño que prevalecía, dependió enteramente de las cargas estáticas del viento basadas en una fuerza arbitraria constante, independiente de la forma de la estructura y del valor real de la velocidad del viento y de su dirección en el sitio.

Cada vez más, la profesión del ingeniero civil ha sido forzada a considerar la posibilidad de la respuesta dinámica inducida del viento en algunos tipos de estructuras flexibles; diseñadas antes solamente con base en consideraciones estáticas.

El flujo de fluidos¹ alrededor de las estructuras, puede causar vibraciones destructivas, así como también movimientos útiles, en la generación de energía eléctrica. Las vibraciones inducidas por el flujo del viento han llegado a ser cada vez más importantes en años recientes, porque los diseñadores utilizan los materiales a sus límites, con lo que las estructuras llegan a ser progresivamente más ligeras, más flexibles, más esbeltas, más altas y más propensas a la vibración.

Un vórtice, es un flujo turbulento en rotación con trayectorias de corriente cerradas que envuelven a las estructuras provocándoles excitación, cuando estas son esbeltas y sensibles a vibrar.

Cuando existe excitación provocada por vórtices en las estructuras que están libres a oscilar, en uno o más modos de flexión o torsión, los criterios siguientes pueden ser mencionados.

- a) Mientras que la estructura está en reposo, la frecuencia del vórtice es controlada por el viento.
- b) A ciertas velocidades discretas del viento, señaladas como "velocidades críticas," la frecuencia del vórtice podría coincidir con, o ser un múltiplo de una de las frecuencias del movimiento de la estructura; tal coincidencia resulta en la oscilación autoexcitada.
- c) Más allá de las velocidades críticas del viento, la oscilación de la estructura y no la velocidad del viento, controla la frecuencia del vórtice.

¹ De acuerdo con el aspecto físico que tiene en la naturaleza, la materia se puede clasificar en cuatro estados: *Sólido, líquido, líquido crítico y gaseoso*, de los cuales los tres últimos se conocen como *fluidos*.

Cuando la frecuencia del vórtice coincide con la frecuencia natural de la estructura, resulta la excitación armónica. Si la frecuencia del vórtice es un múltiplo de la frecuencia natural de la estructura, la excitación es subarmónica.

El problema del efecto dinámico del viento en las estructuras modernas se puede dividir en cuatro categorías principales, según sea la forma y la flexibilidad de la estructura. Todas estas categorías caen bajo la clasificación general de oscilaciones autoexcitadas:

1. Las oscilaciones de alta frecuencia pueden ser excitadas en las estructuras esbeltas tales como líneas de transmisión y telefonía, contravientos de torres, y algunos tipos de puentes suspendidos con vigas atirantadas, como resultado de la resonancia (generalmente subarmónica) entre la relación del desprendimiento de vórtices y una frecuencia natural de la estructura, que causan en este tipo de estructuras, que se rasguen debido a la alta vibración a la que se encuentran sujetas o simplemente presenten un fenómeno de “galopeo” en un viento constante.

2. Los cuerpos cilíndricos; como chimeneas, pilas, postes de transmisión de energía eléctrica y telecomunicaciones o por ejemplo la cabina de un mirador de gran altura; donde, las vibraciones pueden causar a este tipo de estructuras altas y esbeltas, la generación de grietas debido a la fatiga en su base y en algunas ocasiones, su inminente falla.

3. Las placas planas colocadas horizontalmente en un viento horizontal, o la cubierta de un puente suspendido con vigas atirantadas, pueden ser sujetos a la agitación, si las frecuencias naturales en la flexión y la torsión no son similares. La fuerza del viento causa una elevación que actúa excéntricamente, e induce un momento torsionante. El acoplamiento de estos dos modos puede dar lugar a un movimiento, que será catastrófico.

4. En algunas ocasiones se presenta una acción de golpeteo en una estructura debido al efecto generado por algunas otras relativamente próximas. Tal condición se menciona sobre múltiples pilas, chimeneas altas en línea y en algunas plataformas marítimas.

El objetivo primordial de esta tesis se enfoca en la reducción y/o eliminación de las vibraciones inducidas por el desprendimiento de vórtices generados por la acción del viento, cuyo efecto es marcado en movimientos transversales que sufren las estructuras esbeltas; será importante examinar los dispositivos y procedimientos que se han desarrollado para eliminar este fenómeno, remarcando sus ventajas y desventajas.

Como ejemplo del descuido del hombre ante la acción dinámica del viento que produce como respuesta el desprendimiento de vórtices y frecuencias altas de vibración, mencionare dos ejemplos que muestren la importancia de este trabajo. Como primer ejemplo 4 chimeneas en Dinamarca que fueron

construidas en los años 70's; en las cuales se le realizaron medidas a escala real, como parte de un proyecto de investigación, enfocado a mejorar la exactitud de la predicción del desprendimiento de vórtices en chimeneas de acero. Durante los primeros años ninguna de las chimeneas experimento vibraciones inaceptables durante su servicio. Sin embargo, aproximadamente 15 años después, el 2 de Diciembre de 1995, una de estas cuatro chimeneas experimento vibraciones inaceptablemente grandes. La chimenea en cuestión esta localizada en Thyboron y las vibraciones le causaron una grieta de 1 m. de longitud en la pared, cerca de la entrada del tubo de gas.

En el invierno 1995/96 las cuatro chimeneas Danesas presentaron vibraciones inaceptables; estas chimeneas fueron construidas entre 1972 a 1980 y no habían mostrado vibraciones serias, hasta el invierno de 1995/96.

Las grandes amplitudes generaron un ruido considerable (Las presiones oscilantes hacen en estructuras elásticas vibrar y generar sonidos aeroacústicos, llamados los tonos eólicos) que es a menudo lo que causa la atención de la gente, debido a las vibraciones de la estructura.

La chimenea de Herning se observó vibrar alarmantemente por los vecinos, que oyeron el ruido al volver a casa después de la cena de la víspera de Navidad. La gente de los alrededores de Odense observaron las vibraciones; estas fueron divulgadas en uno de los mejores periódicos Daneses, como movimientos con amplitudes que alcanzaban 3 m. aproximadamente. El artículo se centró en el riesgo principal de una chimenea de 75 m. de altura, se derrumbe en el centro de la ciudad de Odense.

Las observaciones hechas durante el invierno 1995/96 no fueron las únicas. Aproximadamente 10 años antes, varias chimeneas de acero se observaron vibrar violentamente, en diversos sitios de Dinamarca.

Otro ejemplo en particular se presentó el 15 de Enero 1961, durante una tormenta en el Atlántico Norte, La Torre Texas No. 4 colapsó y se derribó en el mar, tomando la vida de 28 personas. Esta plataforma, localizada a 128 km al Este de Barnegat, New Jersey, era conocida como la vieja inestable por quienes trabajaban ahí. Las pruebas mostraban que la plataforma oscilaba con movimientos complejos y frecuencias (con periodos de 2.5 a 3.5 s) cercanas a su frecuencia natural fundamental (periodo de 3.2 s). Sufrió daños progresivos, y se reparó. A partir de entonces, fue remolcada al sitio en donde colapsó, a fines de junio y principios de julio. Presentó un gran número de estelas durante tormentas severas, incluyendo el huracán Donna en Septiembre de 1960. El colapso de esta estructura, es uno de los primeros eventos y unos de los pocos casos en los que su ocurrencia ha sido documentada.

RESUMEN

Se muestra que el enfoque teórico basado en la solución de la ecuación de Navier – Stokes, permite identificar las características de campos de velocidad, el campo rotacional en un flujo, así como las condiciones para que sean satisfechas las condiciones de equilibrio dinámico.

Se logró establecer redes de flujo para combinaciones de flujos básicos, en la cuales se puede reproducir campos de flujo que inciden sobre cuerpos estancos, definidos por líneas de corriente que conectan puntos de estancamiento.

Mediante el empleo de relaciones constitutivas se conocieron los esfuerzos en las fronteras de los cuerpos estancos estudiados y se logró definir coeficientes locales de presión.

Con los coeficientes locales de presión (C_p) se puede proceder a obtener las fuerzas locales que produce el viento; con lo cual, se pueden calcular las acciones realizando modelos en programas especializados de análisis, aplicando el método de los elementos finitos para evaluar los desplazamientos que se generan en la estructura, así como los esfuerzos y las deformaciones unitarias en todas sus partes.

El manejo de coeficientes locales de presión, cantidades adimensionales que representan la interacción en la superficie de la estructura debida al viento medio, permite establecer las fuerzas que produce el viento una vez que se define la velocidad de diseño y las condiciones de la superficie de contacto.

Los coeficientes locales de presión permanecen constantes en un intervalo de velocidad, donde se mantiene flujo laminar, el intervalo es acotado por el número de Reynolds.

Después de alcanzar el límite de desaparición del flujo laminar, el flujo se vuelve turbulento, con aparición de vórtices y burbujas, las cuales provocan movimientos transversales en las estructuras que, en ocasiones presentan carácter caótico.

Como paso final se seleccionó el dispositivo más adecuado para eliminar los desplazamientos transversales y vibraciones que se generan en una estructura debido a los efectos provocados por la aparición de los vórtices con lo que se amplió notablemente su vida útil.

I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

1.1 ANTECEDENTES HISTORICOS.

Desde épocas muy antiguas, se ha sabido que el viento causa en su fase turbulenta el desprendimiento de vórtices en las estructuras que van desde las más simples hasta las más complejas construidas y admiradas por el hombre, como por ejemplo, la vibración inducida por vórtices de los alambres tensos de un arpa eólica. Según registros de Rabbinic, El rey David colgó su **Kinnor**² (**kithara**) sobre su cama, donde sonaba con la brisa de la medianoche.

En el décimo quinto siglo, **Leonardo da Vinci** (1452-1519) observó que el aire ofrecía resistencia al movimiento de un objeto sólido. Atribuyó esta resistencia a los efectos de la compresibilidad. Él estudió el vuelo de los pájaros y su idea de la viabilidad de un aparato volador tomó forma, y lo condujo a una investigación exhaustiva en los elementos del aire y del agua; además él bosquejó una fila de vórtices en la estela de una pila en una corriente.

Galileo Galilei (1564-1642) emprendió experimentos y estableció más adelante el hecho de la resistencia del aire. Él llegó a la conclusión que la resistencia era proporcional a la velocidad del objeto que pasaba a través de este. Como un siguiente paso, en el siglo XVII, **Huygens y Newton** determinaron que la resistencia del aire al movimiento de un cuerpo era proporcional al cuadrado de la velocidad. **Newton** considero que la presión que actuaba en una placa inclinada, sumergida en una corriente de aire, presentaba el choque de partículas en el lado de la placa que hace frente a la corriente aérea. Su formulación rindió como resultado, que la presión que actuaba en la placa era proporcional a su área expuesta; al producto de la densidad del aire, al cuadrado de la velocidad, y al cuadrado del seno del ángulo de inclinación. Aunque fracasó para explicar los efectos del flujo en la superficie superior, que causa una elevación considerable, los trabajos de **Newton** marcaron claramente el principio de la **teoría clásica de la aerodinámica**.

Durante el siglo XVII y XIX varios descubrimientos condujeron a una mejor comprensión de los factores que tienen una influencia en el movimiento de cuerpos sólidos dentro del aire. **Daniel Bernoulli** en el año 1725 y su hermano Nicolás, fueron invitados a trabajar en la Academia de Ciencias de St. Petersburg. Allí colaboró con Euler, en el año 1727. Daniel uniendo un buen dominio de las matemáticas a una clara intuición física, llegó a ser el primero en fundar las leyes del movimiento de los fluidos sobre principios seguros y no arbitrarios. Además se debe a él, entre otras cosas, el haber reconocido el establecimiento progresivo del régimen de escurrimiento en los conductos, y también, unos estudios sobre las alas de los molinos de viento.

En la misma época; Juan Le Rond **d'Alembert** (1717-1783) dió un paso adelante en el análisis de Bernoulli, al poner en claro el principio que lleva su nombre, que establece el equilibrio entre las fuerzas actuantes sobre el fluido: externas, de vínculo (presiones) y reacciones de inercia de la aceleración y en establecer la ecuación de la continuidad para fluidos incompresibles.

² Kinnor (Arpa del rey David) En realidad es una "lira", similar a la Cítara de los griegos. (Heb. kinnor, Gr. kithara) de 27" de alto, de forma curva con 10 cuerdas, para la escala bíblica.

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

Él fue el primero en introducir la consideración de las componentes de la velocidad y Leonardo Euler (1707-1783), coronó las investigaciones de Bernoulli y de d'Alembert con una serie de trabajos en los que encontró la ecuación fundamental de la hidrodinámica pura y la ecuación de continuidad para fluidos compresibles, deduciendo de ellas en forma rigurosa el teorema de Bernoulli. Además estudió el problema de la resistencia de un cuerpo al arrastre, desechando la paradoja de d'Alembert al admitir que la parte trasera del obstáculo siga leyes de resistencia diferentes que la delantera.

José Luis **Lagrange** (1736-1813) creó el método de estudio de los escurrimientos irrotacionales, introduciendo el potencial de velocidad y la función de corriente.

Estudios experimentales sobre la resistencia ofrecida a una corriente por obstáculos de varias formas fueron llevados a cabo por Juan Carlos **Borda** (1733-1799), comprobando que la resistencia varía con el cuadrado de la velocidad.

A principios de 1800 la relación entre la resistencia y las propiedades viscosas de un fluido habían sido muy marcadas por Luis Maria Enrique **Navier** (1826) en sus ecuaciones todavía no incluía la viscosidad y Jorge Gabriel **Stokes** aplicó el análisis matemático a los fluidos viscosos, descomponiendo el movimiento más general de una partícula fluida en tres componentes, una de traslación pura, rotación pura y tensión. La determinación de su ecuación lo llevó más tarde a profundizar sus investigaciones acerca de la viscosidad, estudiando la influencia de la resistencia del aire sobre las oscilaciones de un péndulo esférico y llegando así en 1851 a la determinación teórica de su fórmula más conocida; Pero no fue hasta que los experimentos de Reynolds en 1880 que la importancia de los efectos viscosos fueron apreciados completamente.

A **Frank H. Wenham** (1824 – 1908) miembro del consejo de la sociedad aeronáutica de Gran Bretaña, se le atribuye el diseño, operación y construcción del primer túnel de viento en 1871, el cual tenía 12 pies de largo y 18 pulgadas cuadradas, en la sección de prueba.

En 1879 **Lord Rayleigh** encontró que las cuerdas de un violín vibraban sobre todo a través del flujo, más que a lo largo de este y profundizó el análisis de los flujos laminares. Un estudio muy original le permitió determinar analíticamente las vibraciones de un chorro líquido saliente de un orificio, estableciendo las condiciones de inestabilidad, por las cuales el chorro se deshace en gotas aisladas. Otro, relacionado con la brusca contracción de una burbuja gaseosa en el interior de un líquido, constituye el fundamento teórico del estudio de la cavitación y gracias a él debemos el haber señalado el enorme valor del análisis dimensional y del principio de semejanza dinámica en la teoría de los modelos.

Osborne Reynolds fué esencialmente práctico y experimentador; interesado en la teoría de los movimientos viscosos, estableció las leyes de la lubricación como fenómeno laminar y fué el primero en proponer un análisis matemático del fenómeno de la turbulencia y en llamar la atención sobre el fenómeno de la cavitación, señalando correctamente su causa.

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

En 1878 **Strouhal** investigó el proceso del desprendimiento del vórtice en un cilindro circular y formuló una frecuencia de desprendimiento, asociada con el número de Strouhal, que él encontró ser constante, sobre intervalos de números de Reynolds.

El principio de la aerodinámica moderna se considera alrededor de la época en que los hermanos **Wright** hicieron su primer vuelo accionado (1903).

La periodicidad de la estela de un cilindro fue asociada a la formación de vórtices por **Benard**, en 1908.

Solamente algunos años más tarde del inicio la aerodinámica moderna; **Lanchester y Rayleigh** propusieron una teoría de la circulación para el cálculo de la altura de lanzamiento de una superficie aerodinámica de claro infinito y una teoría del vórtice, en la elevación de un ala de claro finito.

Prandtl, generalmente considerado como el padre de la aerodinámica moderna, llegó independientemente a las mismas hipótesis que Lanchester. Adicionalmente, él desarrolló el tratamiento matemático en su trabajo, refinado y ampliado por otros investigadores; posteriormente, estableció la teórica del campo. Él contribuyó significativamente al tema de la teoría de la superficie aerodinámica, que originó **Finsterwalder**, surgiendo poco después el primer intento de vuelo acertado. Prandtl también avanzó en métodos experimentales, que ya en su libro en 1934, incluye una colección comprensiva de fotos de los fenómenos del flujo.

En 1912 **von Kármán**, en ese tiempo trabajando en Göttingen por invitación de Prandtl, hizo un análisis alternando en fila doble (zigzag) los vórtices, detrás de una corriente de flujo, ahora famosa como calle de vórtices, idea de von Kármán; encontró que la relación entre el espaciamiento longitudinal y lateral de una calle de vórtices ideal, escalonada en zigzag, era $h/l = 0.281$. Él aplicó más adelante este conocimiento, para explicar la falla del puente Tacoma Narrows.

La teoría de la superficie aerodinámica, empujada por las demandas de la primera guerra mundial, fomentó el progreso en el campo de la Aerodinámica y por los años 30, una teoría amplia se estableció, por las contribuciones de **von Mises, Kutta y Joukowski**, cuya fórmula dependiente de la suposición del vórtice en la elevación, se considera como la ley del vuelo.

Scruton (1957), demostró que la máxima amplitud de una respuesta inducida por desprendimiento de vórtices, para un cilindro circular inmerso en un flujo suave, esta influenciada por el parámetro masa-amortiguamiento, o Número de Scruton.

1.2 NOCIONES DE AEROELASTICIDAD.

Puede definirse la aeroelasticidad como el estudio de la interacción entre un cuerpo deformable situado dentro de una corriente de aire y las fuerzas resultantes de la acción del viento. Si una estructura situada en una corriente de aire se mueve o se deforma apreciablemente bajo las fuerzas producidas por el viento, estas deformaciones, al cambiar las condiciones de contorno del flujo, modifican las fuerzas que ejerce el fluido, lo que a su vez, afecta a las deformaciones estructurales. Esa interacción entre el movimiento de la estructura y el fluido circundante es el objeto de estudio de la aeroelasticidad.

La aeroelasticidad se fundamenta en otras disciplinas, como la aerodinámica, la dinámica estructural y la elasticidad. Las teorías aerodinámicas definen las fuerzas que ejerce el viento sobre un obstáculo con una geometría rígida determinada. La elasticidad estudia la forma de un determinado cuerpo elástico sometido a una carga determinada. La dinámica introduce en el análisis estructural, los efectos de las fuerzas de inercia.

Entre estas tres disciplinas hay diversas áreas de interacción. La combinación entre la aerodinámica y la elasticidad, se conoce con el nombre de *aeroelasticidad estática*. Si, además, intervienen las fuerzas de inercia, estamos ante un problema de *aeroelasticidad dinámica*.

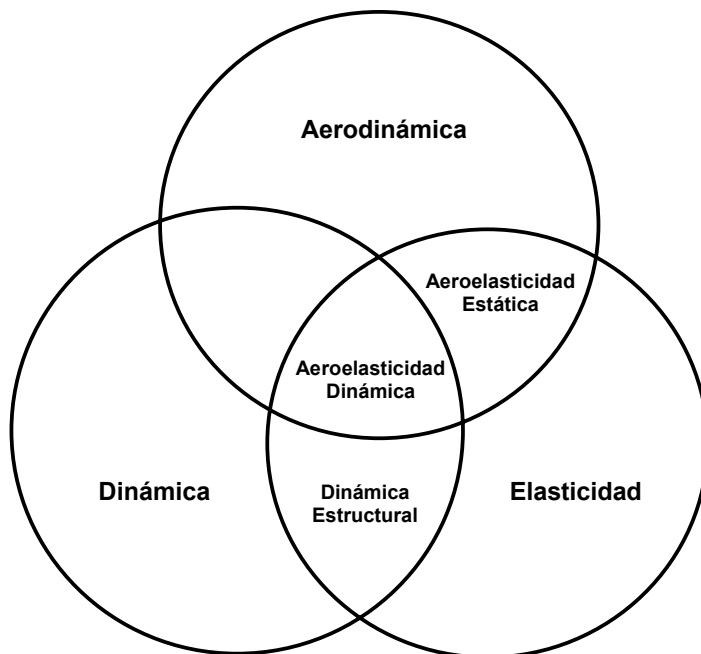


FIG. 1.1 Relación de la Aeroelasticidad con otras disciplinas

1.3 EL FLUIDO COMO UN MEDIO CONTINUO.

Los sólidos y los fluidos se pueden considerar medios que poseen *continuidad* en todas sus propiedades y ser estudiados bajo esta suposición.

El análisis riguroso del comportamiento de un fluido debería considerar la acción individual de cada molécula; sin embargo, en las aplicaciones propias de la Ingeniería, el interés se enfoca en las condiciones medias de velocidad, presión, temperatura, densidad, etc. De ahí que en lugar de estudiar por separado la conglomeración real de moléculas, se supone que el flujo es un *medio continuo*, es decir, una distribución continua de materia sin espacios vacíos. Tal suposición es normalmente justificable, debido a que el número de moléculas consideradas en esta situación es muy grande y la distancia entre ellas muy pequeñas. Por esta razón, se supondrá la existencia de una partícula o elemento diferencial del fluido, lo cual tendrá que ser suficientemente grande para contener varias moléculas.

1.4 LOS CAMPOS DE UN FLUJO.

Un campo de flujo es cualquier región en el espacio, donde existe un fluido en movimiento. En cada punto del campo de flujo, es posible determinar una serie de magnitudes físicas, ya sean *escalares, vectoriales o tensoriales*.

Un campo escalar se define exclusivamente por la magnitud que adquiere la cantidad física a la cual corresponde; ejemplo: Presión, densidad ó temperatura.

En un campo vectorial; además de la magnitud, se necesita definir una dirección y un sentido para la cantidad física. La velocidad, aceleración y la rotación, son ejemplo de campos vectoriales. Finalmente, para definir un campo tensorial se requieren nueve o más componentes escalares; por ejemplo: esfuerzos, deformaciones unitarias y momentos de inercia.

Las magnitudes físicas de los campos escalares y vectoriales de un campo de flujo son, en general, funciones de punto y del tiempo, ya que su magnitud puede variar no sólo de un punto a otro sino también (en un punto fijo) de un instante a otro.

1.4.1 CAMPO DE VELOCIDADES.

Todas las partículas del aire se mueven siempre en contacto con las partículas vecinas (medio continuo homogéneo).

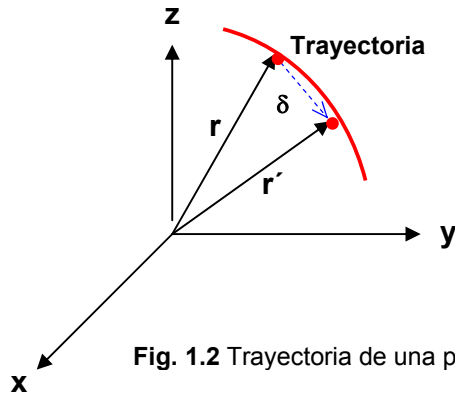


Fig. 1.2 Trayectoria de una partícula

Se considera a partículas de aire en movimiento, cuya posición se identifica en cada instante por un vector de posición \vec{r} , que cambia con el tiempo.

Se puede considerar que en un instante cualquiera después de que se inicia el fenómeno aparece.

$$\vec{\delta} = \vec{r}' - \vec{r}$$

Que en lo que sigue, se describe por la suma de sus componentes ortogonales.

$$\vec{\delta} = ui + vj + wk$$

- Donde:
- u.- Componente paralela al eje "x".
 - v.- Componente paralela al eje "y".
 - w.- Componente paralela al eje "z".

El movimiento continuo de partículas asociadas a puntos de coordenadas P(x, y, z) serán:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \text{Funciones continuas de las variables.}$$

Por lo tanto, aparecerá:

- a) Traslación rígida.
 - b) Rotación rígida.
 - c) Cambio de forma y dimensiones
- $$\left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Deformación Lineal} \\ &\text{Deformación angular} \end{aligned}$$

Al mover a un punto sobre su trayectoria se generan desplazamientos descritos por:

$$\vec{\delta} = (ui + vj + wk)$$

$$u = u(x, y, z, t) \quad v = v(x, y, z, t) \quad w = w(x, y, z, t)$$

La velocidad es un campo vectorial dentro de un flujo al desplazarse la partícula, por lo tanto, es un vector tangente en cada punto de su trayectoria, que depende de la posición de la partícula y del tiempo.

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

Se trata de funciones continuas que admiten derivación, con respecto a las variables que las definen.

En la mecánica de fluidos, se recurre a describir.

$$\frac{du}{dt} = V_x \qquad \frac{dv}{dt} = V_y \qquad \frac{dz}{dt} = V_z$$

Que son las componentes del vector de velocidad instantánea de la partícula, que se representará por:

$$\vec{V} = V_x i + V_y j + V_z k$$

i, j, k , son vectores de magnitud unitaria, dirigidos en las direcciones positivas de los ejes x, y, z .

1.4.2 CAMPO DE ACELERACIÓN.

Además, existirá en cada instante del movimiento “*aceleración*” que se representará por:

$$\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$$

Donde:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = a_x \qquad \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = a_y \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt} = a_z$$

El campo de aceleración se deriva del campo de velocidad, pues el vector de aceleración instantánea de una partícula en un punto, se define como la variación de la velocidad en ese punto. Se produce cuando existen cambios de magnitud y dirección del movimiento.

A cada punto del fluido se puede asociar una partícula diferencial, dentro de esa partícula existirá una masa, asociada al volumen (d_v):

En el volumen de la partícula, al existir masa y aceleración, indicará la existencia de fuerzas másicas (o de cuerpo) que serán descritas por:

$$\vec{f}d_v - \rho \vec{a}d_v$$

Donde:

- $\vec{f}d_v$. – Fuerzas másicas generadas por el cuerpo gravitatorio.
- $\rho \vec{a}d_v$. – Fuerzas de inercia generadas por el movimiento.

La mecánica de fluidos busca describir el movimiento de las partículas, provocado por todas las fuerzas que actúan sobre ellas.

1.4.3 CAMPO ROTACIONAL.

Es un campo vectorial derivado, al igual que el de aceleración, del campo de velocidad; evalúa la rotación local de una partícula; es función tanto del punto como del tiempo y es una medida de la vorticidad de una partícula dentro del flujo; por esta razón se le conoce también como *campo vorticoso*.

Por lo tanto, un vórtice es el patrón que se genera por el movimiento de rotación de muchas partículas alrededor de un punto común (no necesariamente fijo en el espacio).

El concepto de vorticidad fue introducido por **Cauchy** y por **Stokes**. La vorticidad, es un campo vectorial; es decir, su magnitud y dirección están definidas en cada punto del espacio ocupado por el fluido. En cierto sentido, es una medida de la velocidad con la que rota cada partícula de fluido.

En la cinemática de partículas, la rotación queda descrita matemáticamente por:

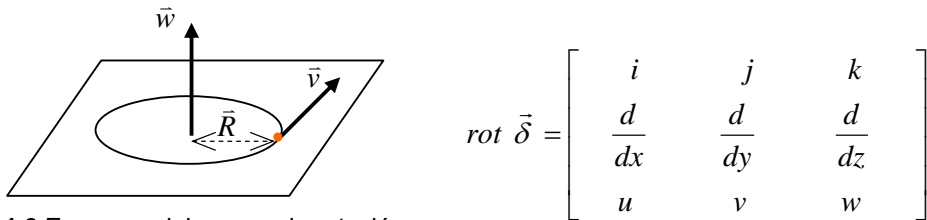


Fig. 1.3 Esquema del campo de rotación para una partícula.

$$rot \vec{\delta} = \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) i + \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) j + \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) k$$

El cambio de forma y dimensiones se puede describir mediante el siguiente tensor:

$$[E_{JK}] = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) & \frac{dv}{dy} & \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) & \frac{dw}{dz} \end{bmatrix}$$

Que es simétrico respecto a la diagonal principal.

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

En la Mecánica de Fluidos es de interés conocer la velocidad con la que se presentan las deformaciones lineales y angulares de la partícula, donde:

$[\dot{E}_{jk}]$ Es la derivada con respecto al tiempo de todos los elementos que aparecen en el tensor $[E_{jk}]$.

Así, en el primer término se tiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{du}{d_x} = \frac{d^2 u}{dt d_x} = \frac{d}{d_x} \frac{du}{dt} = \frac{d}{d_x} V_x$$

Por lo tanto y de manera similar:

$$[\dot{E}_{jk}] = \begin{bmatrix} \frac{d}{d_x} V_x & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d_y} + \frac{dv}{d_x} \right) & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d_z} + \frac{dw}{d_x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dV_x}{d_y} + \frac{dV_y}{d_x} \right) & \frac{d}{d_y} V_y & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{d_z} + \frac{dw}{d_y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d_z} V_x + \frac{d}{d_x} V_z \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d_z} V_y + \frac{d}{d_y} V_z \right) & \frac{d}{d_z} V_z \end{bmatrix}$$

Este tensor se puede descomponer en dos componentes:

a) Una Componente Volumétrica.

$$[\dot{E}_V] = \frac{j_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Donde:} \quad j_1 = \frac{d}{d_x} V_x + \frac{d}{d_y} V_y + \frac{d}{d_z} V_z$$

$$\text{Siendo:} \quad \boxed{j_1 = \text{div } \vec{V}}$$

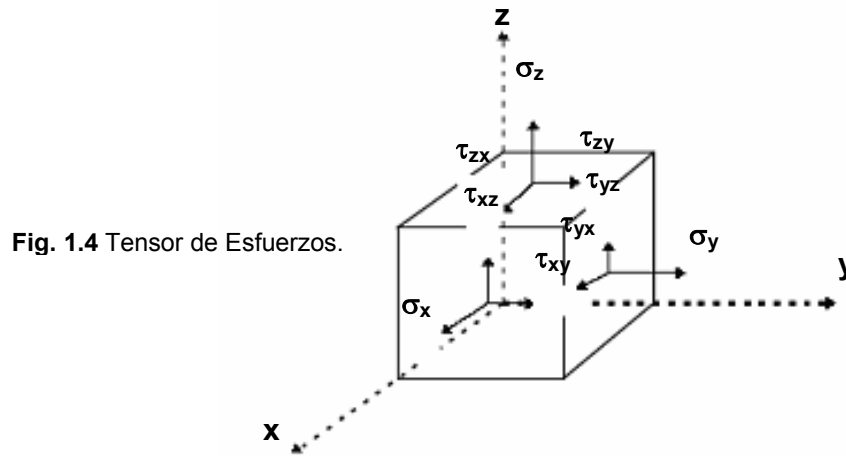
Donde esta divergencia mide la velocidad de cambio de volumen de la partícula.

b) La Componente Distorsional.

$$[\dot{E}_D] = \begin{bmatrix} \frac{d}{d_x} V_x - \frac{j_1}{3} & \frac{1}{2} \left(\frac{dV_x}{d_y} + \frac{dV_y}{d_x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d_z} V_x + \frac{d}{d_x} V_z \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dV_x}{d_y} + \frac{dV_y}{d_x} \right) & \frac{d}{d_y} V_y - \frac{j_1}{3} & \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d_z} V_y + \frac{d}{d_y} V_z \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d_z} V_x + \frac{d}{d_x} V_z \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d_z} V_y + \frac{d}{d_y} V_z \right) & \frac{d}{d_z} V_z - \frac{j_1}{3} \end{bmatrix}$$

Que mide la velocidad de cambio de forma de la partícula al moverse.

Por el cambio de forma y dimensiones, las partículas vecinas ejercen acciones sobre ellas y generan esfuerzos en las caras de la partícula en movimiento.



Que originan esfuerzos de contacto que se representan mediante el tensor.

$$[T_{JK}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tensor simétrico respecto a la diagonal principal que se puede descomponer en dos componentes.

a) Una Componente Volumétrica.

$$[T_V] = \frac{I_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

b) La Componente Distorsional.

$$[T_D] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{I_1}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \frac{I_1}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \frac{I_1}{3} \end{bmatrix}$$

1.5 ECUACIÓN DE NAVIER – STOKES.

En la Mecánica de Fluidos se relacionan las componentes correspondientes de los tensores $[E_{jk}]$ y $[T_{jk}]$ mediante relaciones constitutivas, que toman en consideración las propiedades mecánicas del fluido.

Para un fluido, las relaciones constitutivas son:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p + \lambda \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{d}{dx} V_x & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{dV_x}{dy} + \frac{dV_y}{dx} \right) \\ \sigma_y &= -p + \lambda \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{d}{dy} V_y & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{dV_z}{dy} + \frac{dV_y}{dz} \right) \\ \sigma_z &= -p + \lambda \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{d}{dz} V_z & \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{dV_x}{dz} + \frac{dV_z}{dx} \right) \end{aligned}$$

Donde: “p” Es la Presión volumétrica, positiva cuando se trata de compresión

λ y μ son dos parámetros que relacionan a las componentes volumétricas y distorsionales respectivamente miden viscosidades dinámicas que dependen del fluido y de la temperatura.

Así, al moverse las partículas y distorsionarse, generan esfuerzos de contacto en las caras, que provocan fuerzas, que junto con las fuerzas másicas, deben mantener en equilibrio dinámico a las partículas.

Cuando se evalúan las fuerzas el equilibrio dinámico es satisfecho si:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X = 0$$

$$\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} + Y = 0$$

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + Z = 0$$

Donde:

$$X = f_x - \rho a_x \quad Y = f_y - \rho a_y \quad Z = f_z - \rho a_z$$

ρ Densidad de la masa de la partícula.

Estas expresiones se expresan en términos de velocidades y aceleraciones, al sustituir en las ecuaciones de equilibrio, los valores definidos por las relaciones constitutivas.

$$\sum f_x = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(-p + \lambda \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{d}{dx} V_x \right) + \frac{d}{dy} \left[\mu \left(\frac{dV_x}{dy} + \frac{dV_y}{dx} \right) \right] + \frac{d}{dz} \left[\mu \left(\frac{dV_x}{dz} + \frac{dV_z}{dx} \right) \right] + f_x - \rho a_x = 0$$

Al desarrollar términos se obtiene:

$$-\frac{dp}{dx} + \lambda \frac{d}{dx} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \frac{d^2}{dx^2} V_x + \mu \frac{d^2}{dx^2} V_x + \mu \frac{d^2}{dy^2} V_x + \mu \frac{d^2}{dydx} V_y + \mu \frac{d^2}{dz^2} V_x + \mu \frac{d^2}{dzdx} V_z + f_x - \rho a_x = 0$$

Agrupando:

$$-\frac{dp}{dx} + \lambda \frac{d}{dx} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \left(\frac{d^2}{dx^2} V_x + \frac{d^2}{dy^2} V_x + \frac{d^2}{dz^2} V_x \right) + \mu \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} V_x + \frac{d}{dy} V_y + \frac{d}{dz} V_z \right) = \rho a_x - f_x$$

Como: $\mu \left[\frac{d^2}{dx^2} V_x + \frac{d^2}{dy^2} V_x + \frac{d^2}{dz^2} V_x \right] = \mu \nabla^2 V_x$

$$\mu \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} V_x + \frac{d}{dy} V_y + \frac{d}{dz} V_z \right] = \mu \frac{d}{dx} \operatorname{div} \vec{V}$$

Al simplificar, se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum f_x = 0 \quad -\frac{dp}{dx} + (\lambda + \mu) \frac{d}{dx} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \nabla^2 V_x + \bar{f}_x - \rho \bar{a}_x = 0$$

De manera similar:

$$\sum f_y = 0 \quad -\frac{dp}{dy} + (\lambda + \mu) \frac{d}{dy} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \nabla^2 V_y + \bar{f}_y - \rho \bar{a}_y = 0$$

$$\sum f_z = 0 \quad -\frac{dp}{dz} + (\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \nabla^2 V_z + \bar{f}_z - \rho \bar{a}_z = 0$$

Al multiplicar la primera expresión de equilibrio por i, la segunda por j y la tercera por k, se obtiene:

$$-\left(i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz} \right) p + (\lambda + \mu) \left(i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz} \right) \operatorname{div} \vec{V} + \mu \nabla^2 (iV_x + jV_y + kV_z) + \bar{f} - \rho \bar{a} = 0$$

Por tanto: $\sum \vec{F} = 0$

$$-\operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \nabla^2 \vec{V} + \bar{f} - \rho \bar{a} = 0$$

Ecuación de Navier-Stokes que controla el equilibrio vectorial de las fuerzas que mantienen en equilibrio dinámico a las partículas de un fluido en movimiento.

Para el aire, bastaría sustituir a λ y μ por los valores particulares correspondientes, a una temperatura dada, así como ρ , la densidad de masa del aire.

La ecuación de Navier-Stokes controla el movimiento de partículas en flujo tanto **laminar como turbulento**.

En lo que sigue, se separa la solución para flujos laminares, de la correspondiente para flujos turbulentos.

Para flujos laminares se recurre a una propiedad matemática que resulta de calcular.

$$\text{rot grad } f = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \frac{d}{dx} f & \frac{d}{dy} f & \frac{d}{dz} f \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{grad } f = i \frac{d}{dx} f + j \frac{d}{dy} f + k \frac{d}{dz} f$$

Al desarrollar por cofactores de la primera línea se tiene:

$$i \begin{bmatrix} \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \frac{d}{dy} f & \frac{d}{dz} f \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dz} f & \frac{d}{dx} f \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dx} f & \frac{d}{dy} f \end{bmatrix} = 0$$

Al aplicar "rot" a ambos miembros de la ecuación **de Navier-Stokes** se reduce a.

$$\mu \nabla^2 \text{rot } \vec{V} = \text{rot}(-\vec{f} + \rho \vec{a})$$

Esta expresión relaciona directamente a las cantidades cinemáticas \vec{V} y \vec{a} con las fuerzas de cuerpo que actúan en el continuo; basta sustituir a la densidad ρ y la viscosidad μ de un fluido, para relacionar a la velocidad y aceleración con las fuerzas de cuerpo.

Esta ecuación presenta soluciones que se pueden señalar a continuación.

- Si en el fluido, la velocidad y la aceleración son nulas, las fuerzas de inercia del cuerpo serían irrotacionales.

- Si en el fluido, la combinación de las fuerzas de cuerpo en el plano de movimiento y las aceleraciones tienen rotacional nulo, la ecuación resultante sería:

$$\text{rot}(-\vec{f} + \rho\vec{a}) = 0$$

La Ecuación de Navier-Stokes se reduce a: $\mu\nabla^2 \text{rot}\vec{V} = 0$

Lo que implica que $\text{rot}\vec{V}$ debe ser armónico, para que exista equilibrio dinámico.

Ley de Navier-Stokes.

$$-\text{grad } p + (\lambda + \mu)\text{grad div}\vec{V} + \mu\nabla^2\vec{V} + \vec{f} - \rho\vec{a} = 0$$

Donde:

- \vec{f} Son las fuerzas de cuerpo y
- \vec{a} La aceleración total, que implica la existencia de movimiento con velocidad que cambia en el transcurso del tiempo.

Generalmente las diferentes partes de un fluido en movimiento tienen distintas velocidades y aceleraciones. Entonces, *el campo de movimiento* es distinto en términos de las velocidades y aceleraciones de las partículas, en diferentes puntos del espacio llenado por el fluido.

Existen dos métodos para describir el movimiento de un grupo de partículas en un medio continuo. En el primero, o método Lagrangiano, consiste en determinar las características cinemáticas del movimiento de cada partícula, en cada instante, siguiendo su recorrido a través del campo de flujo; este enfoque se usa comúnmente en la mecánica de sólidos, donde es conveniente identificar una partícula discreta, por ejemplo, el centro de masa de un sistema masa-resorte para determinar la historia de su movimiento, en función del tiempo.

Cuando consideramos las partículas de un medio continuo, el enfoque Lagrangiano se dificulta, ya que la descripción del campo de flujo requiere tres veces el número de parámetros utilizados en las ecuaciones del tema 1.4.1. Debido a la naturaleza deformable del medio fluido, en general no nos interesa la historia detallada de una partícula individual, si no más bien por la interacción de las propiedades del flujo en los puntos individuales del campo.

Para describir el movimiento de un fluido, se recurre al segundo método, el Euleriano, consiste en determinar las características cinemáticas en cada punto de un flujo en cada instante, sin considerar el destino que tenga cada partícula

individua; la descripción de todo el campo de flujo es esencialmente una fotografía instantánea de las velocidades y aceleraciones de cada partícula.

La diferencia entre los dos métodos es que en el Lagrangiano las coordenadas de las partículas se presentan como funciones del tiempo, mientras que en el de Euler son las velocidades de las partículas en varios puntos las que están dadas como funciones del tiempo.

Para el método Euleriano, el cual para el desarrollo de este trabajo es el más importante, el cambio de velocidad en la dirección x es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

Cuando una partícula dada experimenta un pequeño desplazamiento en la vecindad del punto en el tiempo dt. Las componentes de la distancia recorrida no son independientes, si no que tienen la siguiente forma dx = u dt, dy = v dt y dz = w dt. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior obtenemos la aceleración en la dirección x, la cual es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{Aceleración local}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{Aceleración Convectiva}}$$

Esta es la derivada total o substancial que representa la rapidez de variación de la velocidad de una partícula que ocupa un punto particular en el espacio en un cierto tiempo. Esta derivada total está expresada como la suma de un cambio local como una función del tiempo $[\partial u / \partial t]$ y un cambio convectivo, dependiente del movimiento de la partícula en el espacio $[u(\partial u / \partial x) + v(\partial u / \partial y) + w(\partial u / \partial z)]$.

Siguiendo el mismo procedimiento se obtiene.

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

Donde, si todas las aceleraciones locales son nulas, el movimiento es *permanente*. La velocidad puede cambiar de punto a punto en el espacio, pero en un punto fijo no ocurrirán cambios en el tiempo.

Si todas las aceleraciones convectivas son nulas, el movimiento es *uniforme*; esto implica flujo paralelo y nos permite establecer la definición de que el movimiento es uniforme si los vectores velocidad son paralelos en cualquier parte del fluido.

Estas relaciones para la aceleración pertenecen a un sistema de coordenadas fijo o inercial, cuyas coordenadas permanecen constantes con respecto a las estrellas aparentemente fijas en el espacio; mientras que para un sistema de coordenadas móvil, siendo los más comunes, los que corresponden a sistemas de coordenadas fijos con respecto a la tierra.

Por lo que, la aceleración queda descrita por la siguiente ecuación.

$$Aceleración = a_1 = \frac{\partial v_2}{dt} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \underbrace{2\Omega \times v_2}_{\text{Aceleración de Coriolis}} + \underbrace{\Omega \times (\Omega \times r)}_{\text{Aceleración Centrípetas}} + \underbrace{\frac{\partial \Omega}{dt} \times r}_{\text{Aceleración tangencial debida a la acel. angular del sistema móvil.}}$$

Donde:

a_1 = vector aceleración con respecto al sistema fijo.

$\frac{\partial v_2}{dt} = a_2$ = vector de aceleración con respecto al sistema en movimiento.

Estas consideraciones para la aceleración son aplicables a un sistema de coordenadas rotatorio cuyo origen está en el centro de la tierra, al tratar el movimiento de un fluido sobre la superficie de la tierra, está permitido despreciar la curvatura de ésta y suponer que dentro de la región de interés la superficie es plana.

Finalmente, al tomar en cuenta para las aceleraciones centrípetas el uso de la gravedad aparente y pasando por alto aceleración de Coriolis, a menos que se consideren grandes masas, como los océanos o la atmósfera, tenemos que $a_1 = a_2$.

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

Es común establecer que en movimientos acelerados donde $\vec{f} - \rho \vec{a}$ tenga su rotacional nulo.

La Ecuación de Navier-Stokes resulta:

$$\boxed{\mu \nabla^2 \text{rot} \vec{V} = 0} \quad \text{Que es un caso particular de movimiento de un fluido.}$$

Se pueden imaginar tres posibilidades en esta ecuación.

a) Que $\vec{V} = 0$ la ecuación es automáticamente satisfecha.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p & \tau_{xy} &= \mu(0+0) \\ \sigma_y &= -p & \tau_{yz} &= \mu(0+0) \\ \sigma_z &= -p & \tau_{zx} &= \mu(0+0) \end{aligned}$$

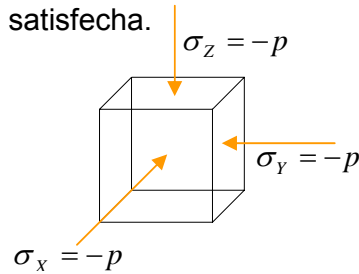


Fig. 1.5 Tensor de Esfuerzos de una partícula que se encuentra en reposo, soportando una presión uniforme en todas las direcciones.

Las partículas se encuentran comprimidas, y el tensor de esfuerzos $[T_{jk}]$ solo presenta componente volumétrica.

$$[T_v] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad \text{Si la presión varía y existe "grad p" aparecerá velocidad en el fluido.}$$

b) Puede suceder que $\vec{v} \neq 0$, pero que $\text{rot} \vec{v} = 0$ la ecuación de Navier – Stokes es satisfecha con equilibrio dinámico, en la cual aparece aceleración. Las partículas se trasladan sin girar, en un **movimiento irrotacional**.

$$\text{De } \text{rot} \vec{v} = (0+0)\vec{i} + (0+0)\vec{j} + \left(-\frac{d^2\phi}{d_x^2} - \frac{d^2\phi}{d_y^2} \right) \vec{k} = 0$$

$$\text{rot} \vec{v} = -\nabla^2 \phi \vec{k} = 0 \quad \nabla^2 = \frac{d^2\phi}{d_x^2} + \frac{d^2\phi}{d_y^2}$$

c) Si $\text{rot} \vec{v} \neq 0$, corresponde a un movimiento rotacional, con velocidad y representa un movimiento en que las partículas se trasladan y giran, pero deben mantener la condición.

$$\nabla^2 \text{rot} \vec{v} = 0 \quad \text{Para que exista equilibrio dinámico.}$$

En la ecuación de Navier-Stokes aparece el coeficiente de μ viscosidad dinámica; este varía con respecto a la temperatura, como se muestra a continuación para fluidos como agua y aire.

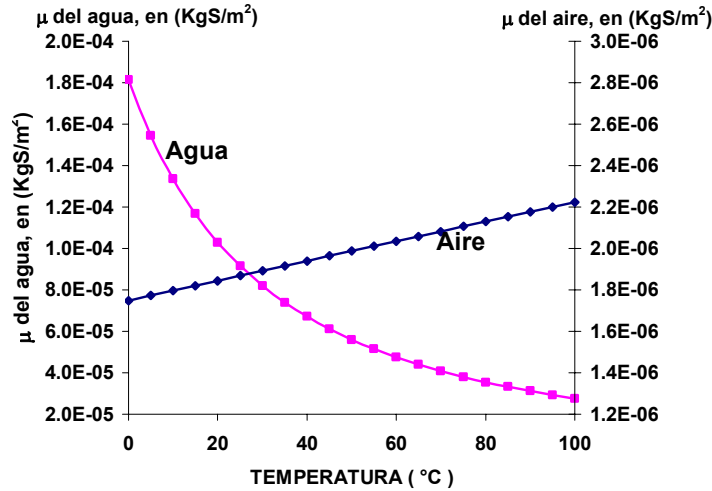


Fig. 1.6 Viscosidad dinámica del agua y del aire a presión atmosférica al nivel del mar³.

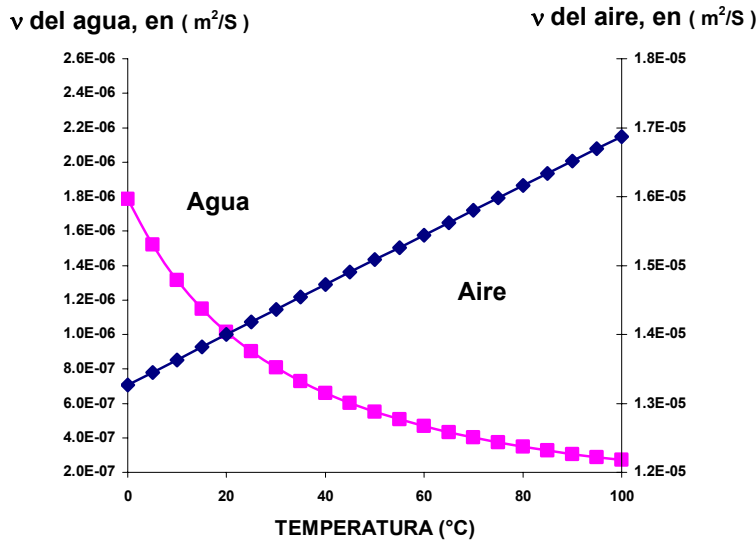


Fig. 1.7 Viscosidad Cinemática del agua y del aire a presión atmosférica al nivel del mar⁴.

El equilibrio dinámico de partículas en un flujo con aceleración irrotacional permanece en equilibrio dinámico para cualquier valor de viscosidad.

³ Los valores aproximados de la viscosidad dinámica para diferentes temperaturas y bajo presión atmosférica se obtuvieron de:

$$\mu_{\text{(agua)}} = \frac{0.0178}{1 + 0.0337 t + 0.000221 t^2} \quad \mu_{\text{(aire)}} = 0.00017155 (1 + 0.00275 t - 0.00000034 t^2)$$

t = Temperatura (°C) μ = Viscosidad dinámica (Poises) 1 Poises = 1 gr/cm s

⁴ Coeficiente de viscosidad cinemática $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ρ = Densidad del fluido a diferentes temperaturas
 μ = Viscosidad cinemática (Stokes) 1 Stokes = 1 cm²/s [VER REF. 9]

1.6 RELACIÓN ENTRE CAMPO DE VELOCIDADES Y VORTICIDAD.

Es posible relacionar un modelo geométrico de un fluido en movimiento asociado, en cada instante, a todo punto en el espacio ocupado por el medio, un vector que representa la velocidad que posee la partícula que en ese instante pasa por ese punto. Si trabajamos desde el punto de vista local, podemos, por tanto, representar el movimiento del fluido asociado al espacio *del campo vectorial de las velocidades* que puede, en el caso de fenómenos transitorios, variar de un instante a otro. Otro modelo geométrico del escurrimiento lo ofrece de manera parecida el campo vectorial rotacional, o sea, de los vectores **rot v**. Este muestra como las partículas fluidas, a medida que avanzan, van girando sobre sí mismas. Los dos campos tienen características comunes y están ligados entre sí.

Se llama *línea de flujo* (o *línea de corriente*) curva imaginaria que conecta una serie de puntos en el espacio en un instante dado o toda línea trazada idealmente en el interior de un campo de flujo, de manera que la tangente en cada uno de sus puntos dé la dirección del vector velocidad correspondiente al punto mismo, por cada punto tiene que pasar una y sólo una línea de flujo, ya que si las líneas de flujo se cruzaran, en los puntos de intersección se tendrían dos o más velocidades distintas al mismo punto.

Toda superficie cubierta completamente por líneas de flujo es una *superficie de flujo*.

Se llama *línea vorticosa* toda línea cuyas tangentes estén dirigidas como los vectores **rot v** en los puntos correspondientes, tampoco se cruzan. Toda superficie cubierta completamente por líneas vorticosas se llama *superficie vorticosa*.

En un campo de flujo se considera una línea cerrada "L", que no sea línea de corriente, y en correspondencia a cada punto de ella tracemos la línea de corriente que pasa por él. El conjunto de todas esas líneas de corriente constituye una superficie, llamada *tubo de flujo* o *de corriente*, el volumen de fluido encerrado en un tubo de flujo se llama *vena fluida*, si la línea cerrada "L" no es vorticosa, y se trazan todas las líneas vorticosas, se obtiene un flujo vorticoso, que encierra una *vena vorticosa*.

Estos tubos de flujo o vorticosos constituyen los *volúmenes de control* para el estudio del movimiento del fluido.

Donde:

- L** Línea cerrada
- S₁, S₂** Secciones transversales planas o curvas
- V** Volumen encerrado por las secciones anteriores.
- S₃** Superficie de flujo
- n₁, n₂, n₃** Vector normal a la superficie dirigido hacia el interior.

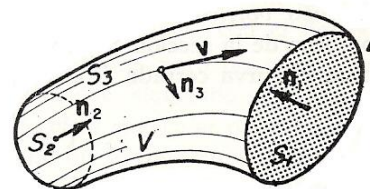


Fig. 1.8 Tubo de flujo.

La ecuación:

$$H = \int_S \text{rot } v \cdot n \, dS$$

Calculada sobre una sección transversal cualquiera de un tubo vorticoso, es constante; H se llama *intensidad del tubo vorticoso*, un concepto de gran importancia en el estudio de los vórtices que se haya ligado con la intensidad es el concepto de la *circulación*.

El flujo alrededor de una curva cerrada se conoce como **circulación**.

Definida por la integral:

$$\Gamma = \oint_L v \cdot dr$$

Siendo: dr un vector infinitesimal tangente a la curva.

Sobre un tubo vorticoso se tiene:

$$H = \Gamma$$

Esta expresión se comprueba según el teorema de *la integral del rotacional o teorema de Stokes*. Sea S una porción de superficie, limitada por una línea cerrada L. Integrando sobre S, se obtiene:

$$\int_S \text{rot } v \cdot n \, dS = \oint_L v \cdot dr$$

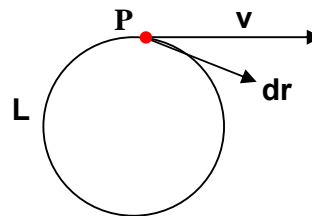


Fig. 1.9 Esquema vectorial de la circulación.

Cualquiera que sea el vector v , función de los puntos de S.

Como Γ es un parámetro característico del campo de las velocidades y H del rotacional o de los torbellinos, la igualdad anterior interrelaciona ambos campos.

1.7 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE NAVIER - STOKES.

Para resolver la ecuación de equilibrio dinámico de fluidos **Prandtl**, propuso que para campos de velocidad en los cuales:

$$\vec{V} = V_x i + V_y j + (0)k$$

Son flujos en un plano, ya que $V_z = 0$, puede existir una función continua y derivable.

$$\psi = \psi(x, y)$$

Llamada “**Función de Corriente**”, que establece:

$$v_x = \frac{d\psi}{dy} \quad v_y = -\frac{d\psi}{dx}$$

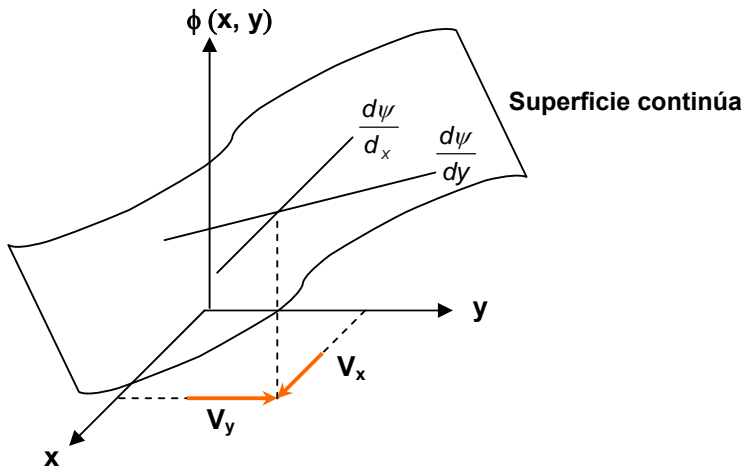


Fig. 1.10 Esquema de Prandtl para flujos en el plano

Las velocidades en un punto del plano (x, y) dependen de la magnitud de la pendiente de las tangentes direccionales a la superficie que describe a la función de corriente.

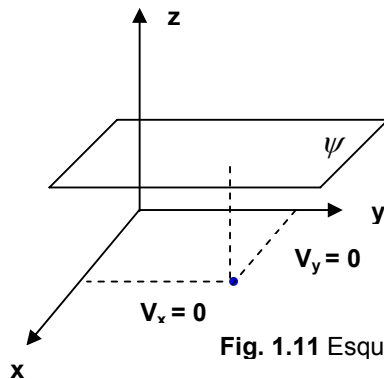


Fig. 1.11 Esquema de Prandtl para flujos en reposo.

Cuando la función de Prandtl es constante el fluido está en reposo; por que las pendientes valen cero.

Cuando $\psi = cte$ en el plano (x, y) existe reposo en el fluido; si el fluido se mueve se requiere que:

$$\psi(x, y) \neq cte.$$

Para describir esa superficie se recurre a efectuar cortes con planos horizontales paralelos al plano x, y .

La intersección de esos planos, proyectadas sobre el plano (x, y) define a curvas que se denominan “**líneas de corriente**”.

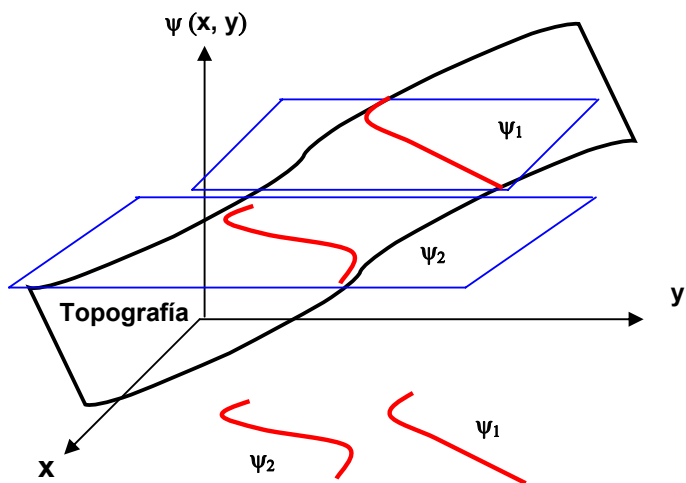


Fig. 1.12 Líneas de Corriente.

Por medio de las líneas de corriente, se puede representar a la función de Prandtl en el plano (x, y).

A lo largo de cada línea de corriente.

$$\psi = \text{constante.}$$

Al considerar una línea de corriente cualquiera.

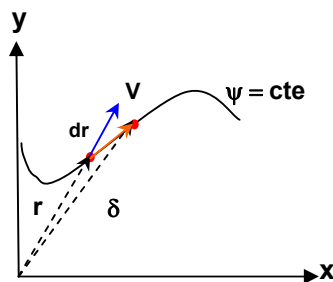


Fig. 1.13 Campo de las líneas de corriente
contra campo de velocidades.

Al comparar $d\vec{r}$ con \vec{v} por definición: $d\vec{r} = (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j}$ y $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$

Se compara mediante su producto vectorial.

$$\vec{V} \times d\vec{r} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{bmatrix} = (0)\vec{i} + (0)\vec{j} + (v_x dy - v_y dx)\vec{k}$$

Al sustituir la definición de Prandtl.

$$\vec{V} \cdot d\vec{r} = \left[\frac{d\psi}{dy} dy - \left(-\frac{d\psi}{dx} \right) dx \right] k \longrightarrow \vec{V} \cdot d\vec{r} = \left[\frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy + \frac{d\psi}{dz} dz \right] k$$

$$\vec{V} \cdot d\vec{r} = [d\psi] \vec{k}$$

Ya que a lo largo de la línea de corriente $\psi = \text{constante} \therefore d\psi = 0$

$$\boxed{\vec{V} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Por lo que \vec{V} y $d\vec{r}$ son colineales; ya que $d\vec{r}$ esta asociada a la tangente de la línea de corriente, se puede afirmar que:

V es tangente a la línea de corriente

Así, al conocer el campo de líneas de corriente de una función $\psi = \psi(x, y)$ automáticamente se conoce la magnitud y dirección del campo de velocidades en todos los puntos del plano x, y.

Para que el movimiento se realice con equilibrio dinámico se debe cumplir.

$$\nabla^2 \text{rot } \vec{v} = 0$$

$$\text{Pero: } \text{rot } v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

Para resolver la ecuación de equilibrio dinámico de fluidos Prandtl propuso que para campos de velocidades en los cuales:

$$\vec{v} = v_x i + v_y j + (0)k$$

Que son flujos en un plano ya que $v_z = 0$, pueda existir una función de corriente continua y derivable.

$$\psi = \psi(x, y)$$

Que establece que:

$$v_x = \frac{d\psi}{dy} \quad v_y = -\frac{d\psi}{dx}$$

Por lo tanto:

$$rot \vec{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & 0 \\ \frac{d\psi}{dy} & -\frac{d\psi}{dx} & 0 \end{bmatrix} \quad rot \vec{v} = (0+0)i + (0+0)j + \left(-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dy^2} \right)k$$

$rot \vec{v} = -\nabla^2 \psi k$

Este valor es normal al plano (x, y); y depende del Laplaciano de la función de corriente.

Se sustituye en: $\mu \nabla^2 rot \vec{v} = \mu \nabla^2 (-\nabla^2 \psi) k = -(\mu \nabla^4 \psi) k = 0$

Condición que es satisfecha si:

$\mu = 0$ Físicamente imposible

Ó si; $\nabla^4 \psi = 0$ Al cumplirse esta condición, la función será biarmónica, para que exista equilibrio dinámico en el movimiento del fluido en un plano donde:

$\mu \nabla^2 rot \vec{V} = rot(-\vec{f} + \rho \vec{a}) = 0$

Conociéndose estos flujos como “**Flujos laminares planos**”.

Cuando $\nabla^4 \psi = 0$ se sabe: $\nabla^2 \nabla^2 = \left(-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dy^2} \right) \left(-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dy^2} \right)$

$\nabla^4 \psi = \frac{d^4\psi}{dx^4} + 2 \frac{d^4\psi}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4\psi}{dy^4}$

Biarmónica

Mediante las relaciones constitutivas se establece el valor del tensor $[T_{jk}]$ en cada partícula en movimiento; conocido este tensor se puede calcular:

$\vec{S}_n = [T_{jk}] \vec{n}$ Esfuerzo total en el plano; cuyo versor es \vec{n} .

Este esfuerzo total se puede descomponer en:

$\vec{\sigma}_n = Normal \text{ al plano.}$
 $\vec{\tau}_n = Tangente \text{ al plano.}$

Mediante: $\vec{\sigma}_n = \vec{S}_n \cdot \vec{n}$
 $\vec{\tau}_n = \vec{S}_n - \vec{\sigma}_n$

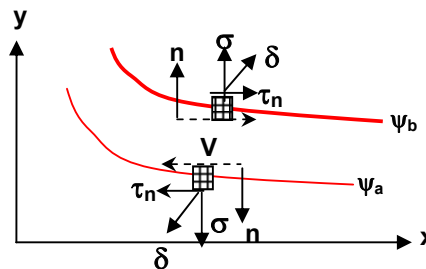


Fig. 1.14 Esfuerzos de interacción entre el fluido en movimiento y las líneas de corriente.

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

En flujos laminares controlados por la ecuación de Navier-Stokes $\nabla^2 \text{rot } \vec{V} = 0$; donde \vec{v} admite la existencia de una función potencial $\Phi = \Phi(x, y)$ continua y derivable.

Esta función ϕ se puede describir en el plano (x,y) mediante líneas equipotenciales, resultantes de cortar a la superficie $\Phi = \Phi(x, y)$ mediante planos paralelos al plano (x, y) en el siguiente espacio.

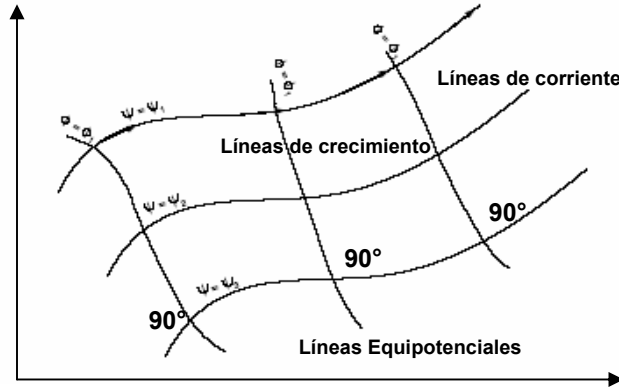


Fig. 1.15 Red de flujo

Por presentarse el gradiente de Φ en dirección de crecimiento de la función, se puede esperar que las líneas de potencia resultan ortogonales a las líneas de corriente.

Al conjunto de líneas equipotenciales y líneas de corriente se le conoce como “red de flujo”; Donde, los equipotenciales son líneas de igual energía y el flujo se genera desde una equipotencial hacia la siguiente.

1.8 FLUJOS PARTICULARES.

1.8.1 FLUJO PARALELO.

Sea $\psi = V_\infty y$ una función de corriente; donde, V_∞ es constante, indica que la función resulta ser una superficie plana.

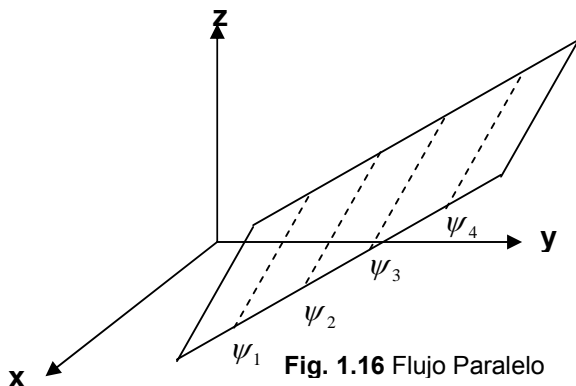


Fig. 1.16 Flujo Paralelo

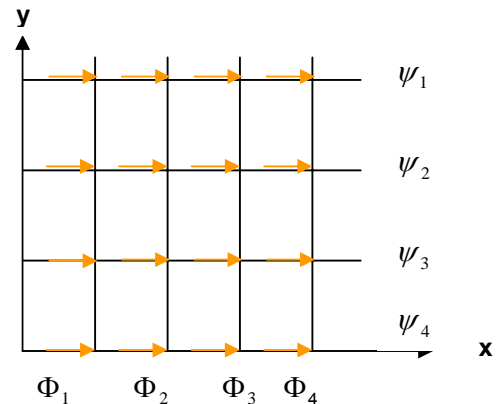


Fig. 1.17 Flujo Paralelo al eje x, con la misma dirección y sentido.

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

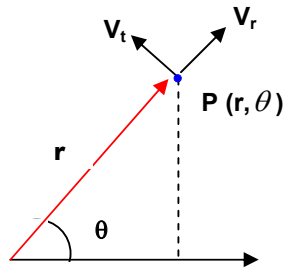
Por ser lineal $\nabla^4 \psi = 0$ se puede aceptar como función de corriente de un flujo laminar.

Por definición:

$$v_x = \frac{d\psi}{dy} \qquad v_y = -\frac{d\psi}{dx}$$

$$v_x = V_\infty \qquad v_y = 0$$

En este flujo las líneas de corriente; equidistantes, muestran tubos de corriente en donde el fluido se mueve a velocidad constante; es posible efectuar un cambio en el marco de referencia utilizando un marco cilíndrico en el cual:



En este marco de referencia la función de corriente será:

$$\psi = \psi(r, \theta)$$

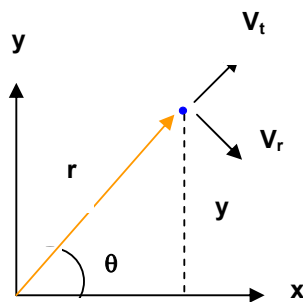
Fig. 1.18 Sistema de Coordenadas Polares.

Esta función define:

$$\bar{v}_r = \frac{d\psi}{rd\theta} \qquad \bar{v}_t = -\frac{d\psi}{dr}$$

Definiciones de Prandtl en los dos marcos de referencia.

$$\left. \begin{array}{l} P(r \cos \theta, r \text{ sen } \theta) \\ P(x, y) \end{array} \right\} \text{El mismo punto en ambos marcos de referencia}$$



$$\psi = V_\alpha r \text{ sen } \theta$$

Fig. 1.19 Campo de Velocidades en un marco polar de referencia

Al aplicar las definiciones y derivar con respecto a θ .

$$V_r = \frac{1}{r}(V_\alpha r \cos \theta) = V_\alpha \cos \theta \quad \text{Ahora al derivar con respecto a } r$$

$$V_t = -V_\alpha \text{ sen } \theta = -V_\alpha \text{ sen } \theta$$

$$|V| = \sqrt{V_r^2 + V_t^2} = \sqrt{V_\alpha^2 \cos^2 \theta + V_\alpha^2 \text{ sen}^2 \theta} = V_\alpha \sqrt{\cos^2 \theta + \text{ sen}^2 \theta} = V_\alpha$$

Ahora sea: $\psi = V_\infty x$ $v_x = \frac{d\psi}{dy}$ $v_y = -\frac{d\psi}{dx}$

$v_x = 0$ $\vec{v}_y = -V_\infty$

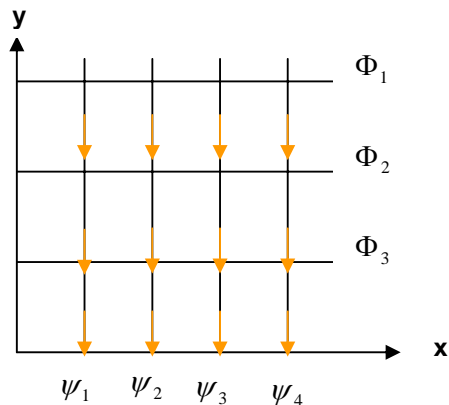
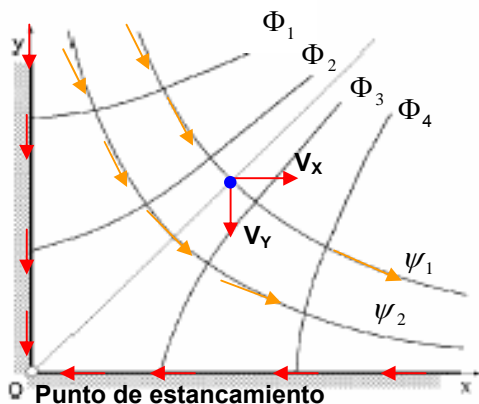


Fig. 1.20 Flujo paralelo al eje "y", y de dirección contraria al eje.

Ahora sea: $\psi = 2V_\infty xy$ Se trata de una función biarmónica que representa a un flujo laminar.

$$v_x = \frac{d\psi}{dy} = 2V_\infty x = \frac{d\psi}{dx} \qquad v_y = -\frac{d\psi}{dx} = -2V_\infty y = \frac{d\psi}{dy}$$



Las líneas de corriente son hipérbolas equiláteras, en el primer cuadrante.

Fig. 1.21 Flujo hiperbólico de velocidad variable, con un punto de estancamiento.

$$\Phi = \int \frac{d\Phi}{dx} dx = \int 2V_\infty x dx \qquad \Phi = 2V_\infty \left(\frac{x^2}{2} + f_1(y) \right)$$

$$\Phi = \int \frac{d\Phi}{dy} dy = \int -2V_\infty y dy \qquad \Phi = 2V_\infty \left(-\frac{y^2}{2} + f_2(y) \right)$$

Por lo tanto: $\Phi = V_\infty (x^2 - y^2)$ **Función Potencial**

Se origina en la porción positiva del eje "y", con una velocidad grande. A medida que se aproxima al eje "x", las velocidades disminuyen hasta cero en el

punto de estancamiento, posteriormente se aceleran horizontalmente, para incrementar su velocidad.

Sea la siguiente función de corriente.

$$\psi = C_1 L \frac{1}{r} \quad \text{referida a un marco de referencia cilíndrico.}$$

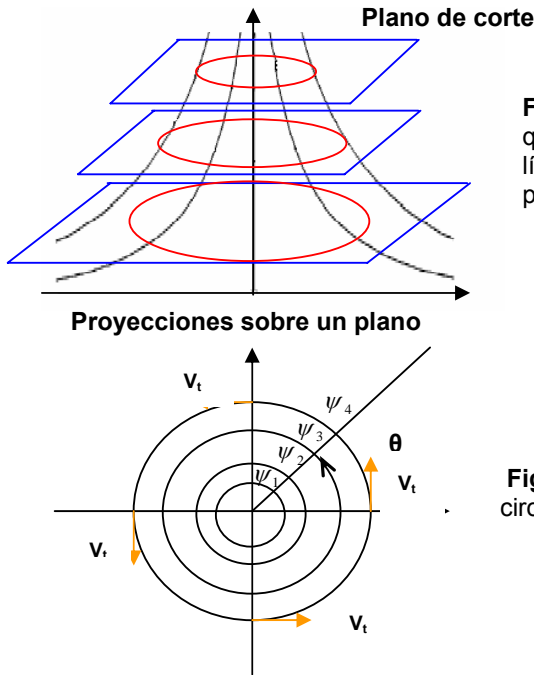


Fig. 1.22 Se trata de una superficie de revolución que disminuye cuando “r” aumenta para definir las líneas de corriente, se efectúan cortes con planos paralelos al plano “rθ”.

Fig. 1.23 Las líneas de corriente resultan circunferencias concéntricas.

Por definición de línea de corriente, las velocidades deben ser tangentes a las líneas de corriente.

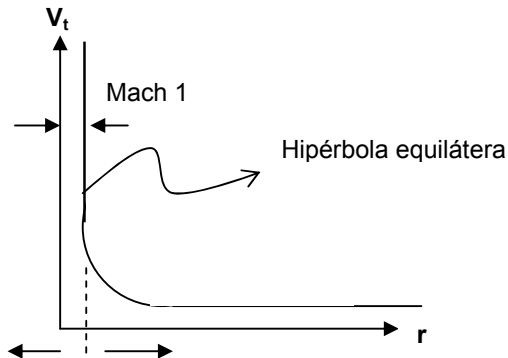
Para calcular las velocidades.

$$\bar{v}_r = \frac{d\psi}{rd\theta} = 0 \quad L = \text{Logaritmo.}$$

$$\bar{v}_t = -\frac{d\psi}{dr} = -C_1 \frac{d}{dr} L \frac{1}{r} \quad \bar{v}_t = -C_1 \frac{d}{dr} (-Lr) = C_1 \frac{d}{dr} Lr$$

$$\bar{v}_t = C_1 \left(\frac{1}{r} \right) \quad \boxed{\bar{V}_t r = C_1}$$

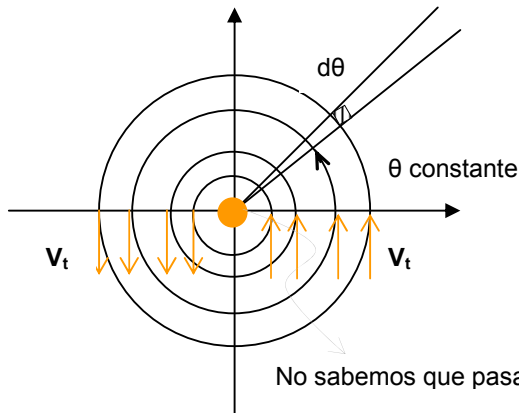
Las líneas de corrientes muestran solo velocidades tangenciales; V_t , cuya magnitud es constantes en todo el perímetro de la circunferencia.



No aplica la Mecánica de Continuos; por que ya se rompió el material. Continuidad

Fig. 1.24 Variación de la velocidad tangencial con radio "r".

Se trata de una variación hiperbólica rápidamente decreciente, que solo es valida a partir de un radio r_0 , dentro de la cual, no es aplicable la Mecánica de Continuos.



La ecuación de las equipotenciales resultan definida por:

$$\psi = C_2\theta$$

Fig. 1.25 A este flujo se le conoce como "Vórtice libre".

En este tipo de flujo se establece la siguiente integral, que define a la circulación en una línea de corriente.

$$\Gamma = \oint V_t r d\theta \quad r d\theta = ds$$

$$\Gamma = \oint C_1 \left(\frac{1}{r}\right) r d\theta \quad \Gamma = \oint C_1 d\theta \quad \Gamma = C_1 \oint d\theta$$

$$\Gamma = 2\pi C_1$$

Por tanto:
$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} L \frac{1}{r}$$

Esta circulación define a la velocidad en el vórtice.

1.8.2 VORTICE LIBRE Y FORZADO.

Sea la función $\psi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$ esta es Armónica.

De acuerdo con $V_x = \frac{d\psi}{dy}$ $V_y = -\frac{d\psi}{dx}$ se tiene que:

$$V_x = \frac{d}{dy} \text{arc tg } \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad V_y = -\frac{d}{dx} \text{arc tg } \frac{y}{x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Integrando

$$\Phi = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + f(y) \quad \Phi = \int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(x)$$

Al comparar, resulta que se puede tomar $f(y) = g(x) = 0$, por lo tanto: Por lo tanto, la función equipotencial resulta ser:

$$\Phi = \ln(x^2 + y^2)$$

Las líneas de potenciales son líneas $x^2 + y^2 = \text{Constante}$, es decir, *Círculos* con centro en el origen; las de corriente son rectas $y/x = \text{constantes}$, que pasan por el origen. Se trata de un movimiento vorticoso alrededor del origen con velocidad.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r} \text{ donde "r" es la distancia al origen.}$$

Estos vórtices irrotacionales, llamados **Vórtices libres**, gozan de la propiedad de que su velocidad es inversamente proporcional a la distancia al centro de rotación. La circulación Γ del vórtice se calcula por medio de la fórmula.

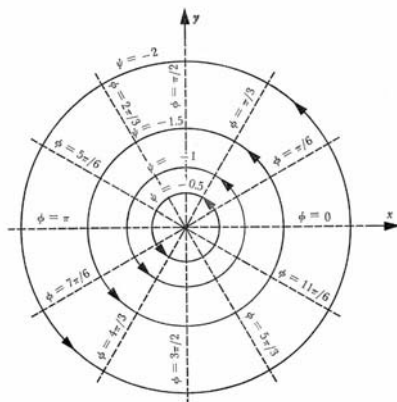


Fig. 1.26 Red de flujo correspondiente a un vórtice libre

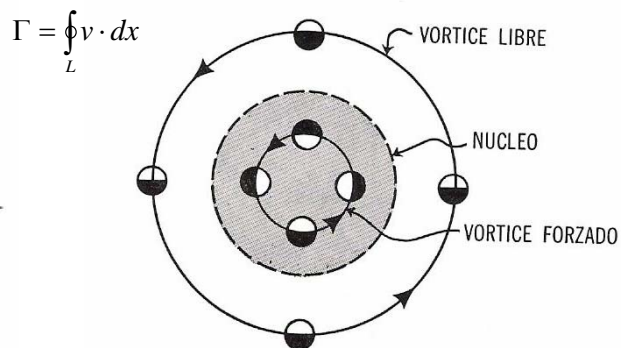


Fig. 1.27 Vórtice real, en movimiento libre, fuera del núcleo, y en movimiento forzado, en el interior de él.

Obteniendo que la circulación es igual para todas las líneas de corriente, y vale 2π .

Los vórtices libres de este tipo, de ley $vr = constante$, son conocidos como **vórtices de desagüe**, producidos al vaciarse, por un orificio del fondo, depósitos de agua tranquila. Naturalmente la ley mencionada no puede tener validez en el centro del vórtice, por que la velocidad tendría que volverse infinitamente grande en ese punto. De hecho, se comprueba que estos vórtices poseen un núcleo central, en el cual el fluido se mueve como cuerpo rígido (**Vórtice forzado, de ley $v/r = cte$**).

La comprobación de que en la zona exterior al núcleo el movimiento es irrotacional, mientras que en el interior es rotacional, se puede realizar observando una pequeña pelota flotante. En la zona de vórtice libre la pelota seguirá la trayectoria circular, pero no girará sobre sí misma, mientras que el movimiento en la zona de vórtice forzado estará acompañado con una rotación de la pelota alrededor de su eje vertical, como muestra la figura 1.28.

1.8.3 FUENTE Y SUMIDERO.

A continuación se toma como líneas de corriente de un nuevo flujo, a las líneas equipotenciales de un vórtice.

Por tanto: $\psi = C_3\theta$

Resulta evidente que en este tipo de flujo las equipotenciales resultan ser circunferencias.

Por definición:
$$\vec{v}_r = \frac{d\psi}{rd\theta} = \frac{C_3}{r} \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{C_3}{r} \quad \vec{v}_r = C_3 \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\vec{v}_t = -\frac{d\psi}{dr} = 0$$

La velocidad disminuye a medida que aumenta el radio; Si C_1 es positivo, las velocidades son radiales, saliendo del origen.

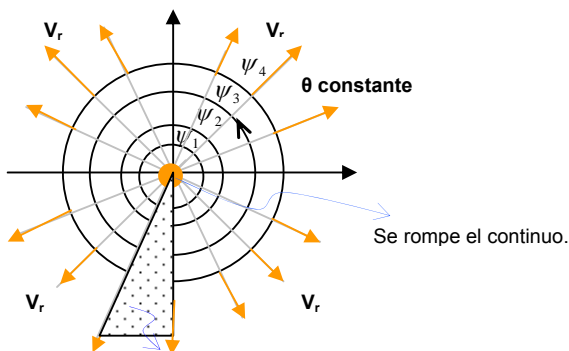
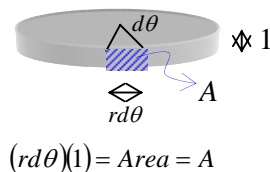


Fig. 1.28 Flujo de una fuente.

1.29 Tubo de corriente.



Si se calcula: $q = \oint v_r dA = \oint \frac{C_3}{r} r d\theta$

Mide el gasto del fluido que sale de una equipotencial.

$$q = C_3 \oint \frac{1}{r} r d\theta = C_3 (2\pi) \quad \therefore C_3 = \frac{2\pi}{q}$$

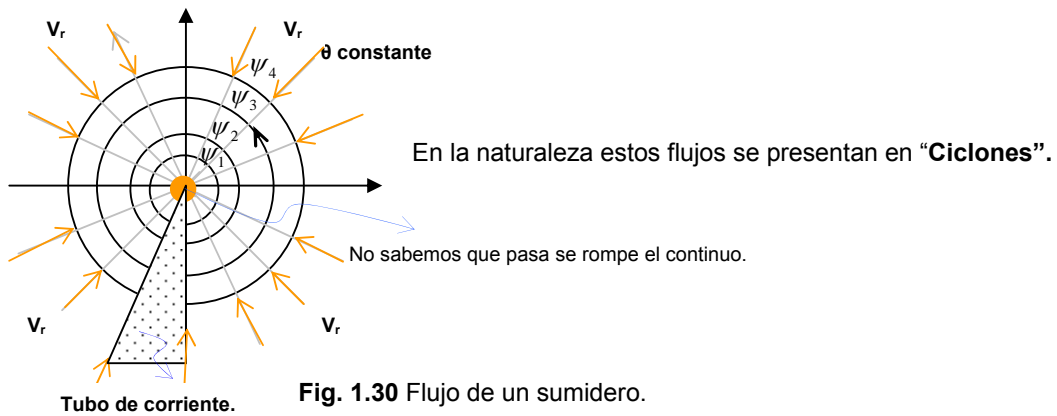
Ya que el gasto que sale de cada equipotencial debe ser el mismo; la velocidad radial debe ser decreciente al aumentar "r" para que el gasto permanezca constante.

Por tanto se conoce como "flujo de un fuente" al descrito por: $\Phi = \frac{2\pi}{q} \theta$

Se puede aceptar que cuando C_3 sea negativo, se obtiene:

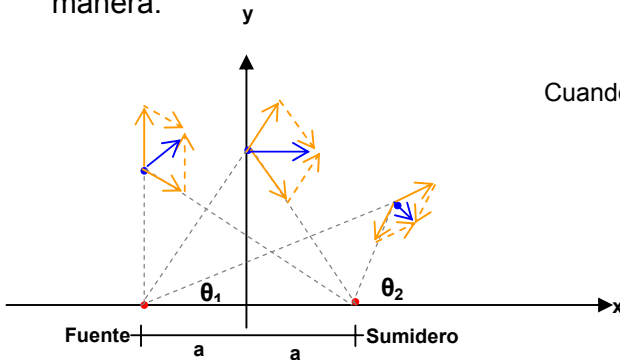
$$\therefore \Phi = -\frac{2\pi}{q} \theta$$

Que se conoce como "Flujo de un sumidero".



1.8.4 DOBLETE.

Es posible combinar a una fuente y un sumidero en un plano de la siguiente manera:



Quando la fuente y el sumidero presentan el mismo gasto.

$$\therefore \Phi = -\frac{2\pi}{q} (\theta_1 - \theta_2)$$

Fig. 1.31 Combinación Fuente y sumidero (Cilíndrico).

Esta definición se puede expresar en el marco cartesiano de la siguiente manera.

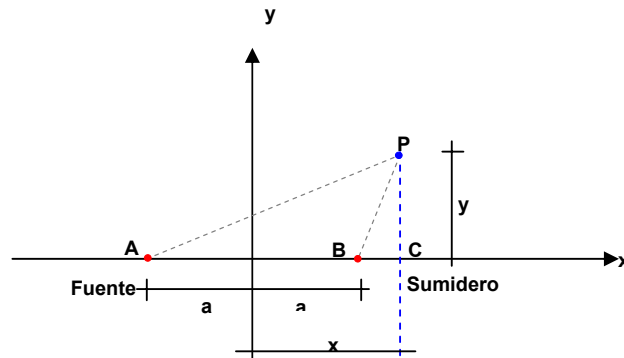


Fig. 1.32 Combinación Fuente y Sumidero (Cartesiano).

De la figura en el triángulo ACP.

$$\tan \theta_1 = \frac{y}{x+a} \qquad \tan \theta_2 = \frac{y}{x-a}$$

$$\theta_1 = \text{ang tan } \frac{y}{x+a} \qquad \text{y} \qquad \theta_2 = \text{ang tan } \frac{y}{x-a}$$

Por tanto, la función de corriente será:

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \left[\text{ang tan } \frac{y}{x+a} - \text{ang tan } \frac{y}{x-a} \right]$$

Se puede así escribir que para una línea de corriente cualquiera $\psi = \psi_c$, la ecuación de esa línea de corriente será:

$$\frac{\psi_c(2\pi)}{q} = \left[\text{ang tan } \frac{y}{x+a} - \text{ang tan } \frac{y}{x-a} \right]$$

Al tomar tangentes de ambos miembros:

$$\tan \frac{\psi_c(2\pi)}{q} = \tan \left\{ \text{ang tan } \frac{y}{x+a} - \text{ang tan } \frac{y}{x-a} \right\}$$

$$\tan \frac{\psi_c(2\pi)}{q} = A \qquad A = \tan \left\{ \text{ang tan } \frac{y}{x+a} - \text{ang tan } \frac{y}{x-a} \right\}$$

$$\text{ang tan } \alpha - \text{ang tan } \beta = \text{ang tan } \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$$

En consecuencia:

$$A = \frac{\left(\frac{y}{x+a}\right)\left(\frac{y}{x-a}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x+a}\right)\left(\frac{y}{x-a}\right)} \quad A = \frac{y^2}{x^2 - a^2} \quad A = \frac{y^2}{x^2 - a^2 + y^2} \quad A = \frac{y^2}{x^2 - a^2 + y^2}$$

$$A(x^2 - a^2 + y^2) = y^2$$

Representa a una ecuación de 2º grado, Cónica.

Al hacer operaciones y simplificaciones es posible establecer:

$$x^2 + \left(y + a \cot \frac{2\pi\psi_c}{q}\right)^2 = a^2 + a^2 \cot^2 \left(\frac{2\pi\psi_c}{q}\right)$$

Que representa a una circunferencia con centro en $\left(0, +a \cot \frac{2\pi\psi_c}{q}\right)$ Y cuyo radio es

$R = a^2 + a^2 \cot^2 \left(\frac{2\pi\psi_c}{q}\right)$; el centro de la circunferencia se localiza sobre el eje "y".

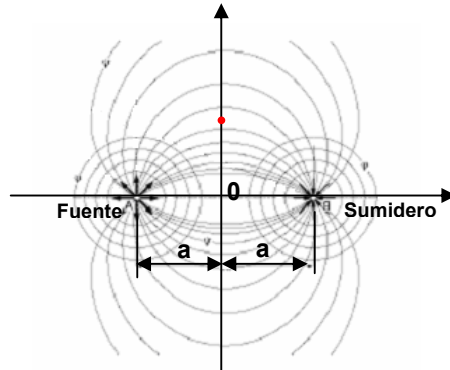


Fig. 1.33 Representación de una Fuente y Sumidero

La línea de corriente resulta ser una circunferencia que corta al eje "x", a la distancia "a" del origen.

Este flujo se transforma en un "Doblete" cuando $a \rightarrow 0$.

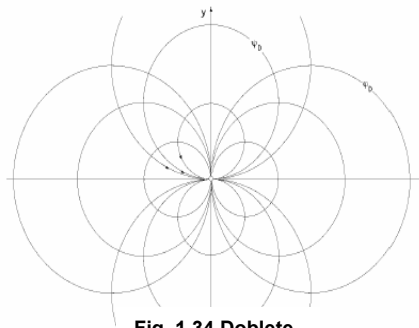


Fig. 1.34 Doblete

1.9 COMBINACIÓN DE FLUJOS.

Se ha mostrado que se pueden combinar flujos cuyas funciones de corriente se conozcan, para establecer nuevos flujos, que resultan ser flujos laminares que satisfacen la ecuación de Navier-Stokes.

La combinación de esos flujos permite generar algunos flujos que aparecen en la interacción del aire en movimiento contra obstáculos.

1.9.1 COMBINACIÓN DE UN FLUJO PARALELO Y UNA FUENTE.

Flujo paralelo $\psi = K_2 y$

Flujo en una fuente $\psi = K_1 \theta$

La red de flujo correspondiente se muestra en la siguiente figura.

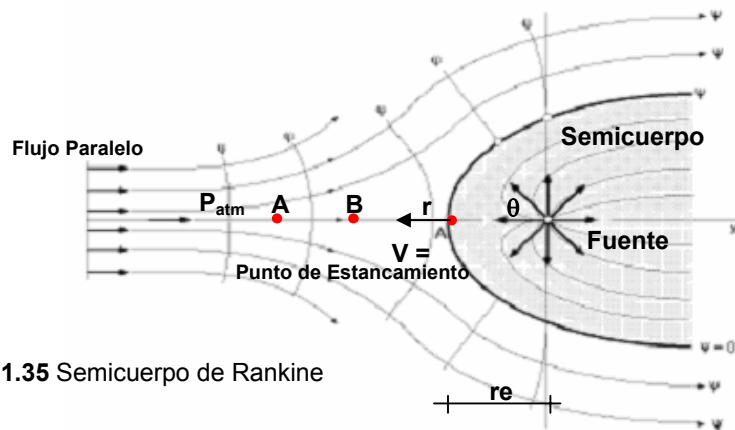


Fig. 1.35 Semicuerpo de Rankine

Para definir la ecuación de la frontera del semicuerpo, se considera un marco de referencia cilíndrico, con origen en el origen del marco cartesiano, con la dirección de r_1 en dirección contraria al eje "x".

En un marco cilíndrico.

$$\psi_\phi = K_2 y = K_2 r \sin \theta \quad (\text{Flujo paralelo})$$

$$\psi_F = K_1 \theta \quad (\text{Flujo de la fuente})$$

El flujo combinado que representa la acción de un flujo paralelo sobre un semicuerpo, queda definido por:

$$\psi_C = \psi_\phi + \psi_F = K_2 r \sin \theta + K_1 \theta$$

Así, una línea de corriente particular queda definida por un valor constante de la función de corriente $\psi = \psi_C$.

$$\psi_C = K_2 r \text{sen} \theta + K_1 \theta$$

Al despejar "r".

$$r = \frac{\psi_C - K_1 \theta}{K_2 \text{sen} \theta} \quad \mathbf{1}$$

Para establecer la línea de corriente que represente a la trayectoria del semicuerpo $\psi_C = 0$.

La frontera del semicuerpo queda definida por:

$$r = -\frac{K_1}{K_2} \frac{\theta}{\text{sen} \theta} \quad \mathbf{2}$$

Cualquier otra línea de corriente queda definida por la ecuación 1.

Para una línea de corriente cualquiera.

$$r = \frac{\psi_C - K_1 \theta}{K_2 \text{sen} \theta} \quad \text{Si } \theta \rightarrow 0$$

Se tiene: $r = \frac{\psi_C}{K_2} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\text{sen} \theta} \right) \rightarrow 1.0$

Cuando $\theta \rightarrow \pi$, se obtiene: $r = \frac{\psi_C - K_1 \pi}{K_2 \text{sen} \pi}$

Es posible representar a una línea de corriente originada por un flujo laminar que envuelve a un cilindro por su valor lejano fuera del origen.

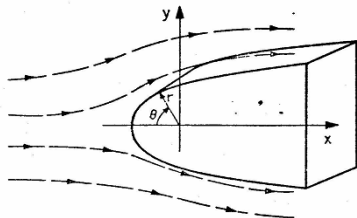


Fig. 1.36 Cilindro en un flujo Laminar

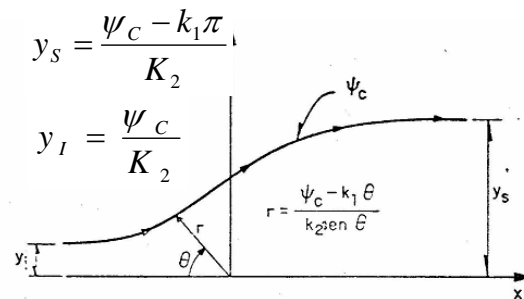


Fig. 1.37 Forma de una línea de corriente

Conocidas las líneas de corriente se pueden calcular las velocidades en cada punto.

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{k_2 r \cos \theta}{r} + \frac{k_1}{r}$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = k_2 \cos \theta + \frac{k_1}{r} \quad \mathbf{3}$$

$$v_\theta = -\frac{d\psi}{d\theta} = -k_2 \text{sen} \theta \quad \mathbf{4}$$

En donde $\theta = 0$ $(v_r)_{\theta=0} = k_2 + \frac{k_1}{r}$

En el punto de estancamiento $(v_r)_{\theta=0} = 0$

$$k_2 + \frac{k_1}{r} = 0 \quad \frac{k_1}{r_e} = -k_2 \quad \boxed{\therefore r_e = -\frac{k_1}{k_2}} \quad (v_t) = 0$$

A lo largo de la frontera del semicuerpo, en un punto cualquiera, con r y θ ; La velocidad presentara las componentes V_r y V_θ .

Al sustituir la ecuación 2 en 3, se tiene para la línea que contiene al punto de estancamiento.

$$v_r = k_2 \left(\cos \theta - \frac{\text{sen} \theta}{\theta} \right)$$

$$v_T = -k_2 \text{sen} \theta$$

Por tanto, el valor de la velocidad en un punto de la frontera.

$$|\vec{v}| = \sqrt{V_r^2 + V_t^2} = k_2 \sqrt{\left(\frac{\text{sen} \theta}{\theta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\text{sen} \theta}{\theta} \right) \cos \theta + 1}$$

Al despejar:

$$\frac{|\vec{v}|}{k_2} = \sqrt{\left(\frac{\text{sen} \theta}{\theta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\text{sen} \theta}{\theta} \right) \cos \theta + 1}$$

TABLA 1.1 Variación de la velocidad con respecto al ángulo θ .

θ	V/K_2	v (m/s)
0	0.000	0.000
10	0.174	6.958
20	0.344	13.775
30	0.508	20.314
40	0.661	26.445
50	0.801	32.052
60	0.926	37.028
70	1.032	41.288
80	1.119	44.766
90	1.185	47.418
100	1.231	49.223
110	1.255	50.190
120	1.259	50.350
130	1.244	49.768
140	1.213	48.534
150	1.169	46.772
160	1.116	44.635
170	1.058	42.307
180	1.000	40.000

Se puede señalar que:

$k_2 = V_\infty$ Es la velocidad del flujo paralelo, a una distancia considerable a la izquierda del origen.

Se observa que después de que $\theta \rightarrow \pi$, la velocidad del fluido tiende a ser nuevamente V_∞ .

Conocidas las velocidades en los puntos de la frontera, se pueden aplicar las relaciones constitutivas para valuar los esfuerzos que aparecen en esos puntos.

Al realizar las operaciones correspondientes las relaciones constitutivas indican que:

$\sigma_x = -p - 2\mu \frac{k_1}{r^2}$ $\sigma_y = -p + 2\mu \frac{k_1}{r^2}$ $\sigma_z = -p$

Que definen a los esfuerzos principales, conocido este tensor se puede obtener:

$$\vec{S}_n = [T_{12}] \vec{n} \text{ y se puede calcular } \sigma_n = \vec{S}_n \cdot \vec{n}$$

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

Para interpretar el valor de P (presión) se recurre al principio de Bernoulli, que establece que entre dos puntos sobre una línea de corriente, se cumple la siguiente expresión.

$$p_a + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = p_b \quad \text{Por tanto:} \quad (p_b - p_a) = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

En donde: $p = p_b - p_a$

Se parte del punto de estancamiento en el cual $p = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$ y a partir de ese punto para cualquier otro punto de la frontera, se puede calcular "P".

Al hacer operaciones con aire a 15 ° C, para el cual:

$$\mu = 1.8196 \times 10^{-6} \frac{\text{Kgs}}{\text{m}^2}$$
$$\rho = 0.1251 \times 10^{-6} \frac{\text{Kgs}^2}{\text{m}^4}$$

Para un flujo en el cual:

$$k_1 = 2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad k_2 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por lo que los esfuerzos normales quedan descritos por:

$$\sigma_{\bar{n}} = \frac{1}{2}\rho K_2^2 \left[\frac{\text{sen}\theta}{\theta} \left(\frac{\text{sen}\theta}{\theta} - 2\cos\theta \right) \right] + 2\mu \frac{K_1}{r^2} (n_\theta^2 - n_r^2)$$

Donde: n_r^2 y n_θ^2 son los cósenos directores del versor en el punto de interés, los cuales se obtienen a partir de normalizar el vector de velocidad en dicho punto sobre la frontera del semicuerpo.

Al sustituir los valores resulta la ecuación:

$$\sigma_{\bar{n}} = 1.564 \left\{ \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \left(\frac{\text{sen}\theta}{\theta} - 2\cos\theta \right) + 4.549 \times 10^{-5} \left(\frac{\text{sen}^2\theta}{\theta} \right) \right\}$$

$1 \sigma_{\bar{n}} \qquad \qquad \qquad 2 \sigma_{\bar{n}}$

TABLA 1.2 Variación de los Esfuerzos inerciales y viscosos; Coeficientes Locales de Presión

θ	${}_1\sigma_{\bar{n}}$	${}_2\sigma_{\bar{n}}$	Coeficientes locales de presión $\frac{{}_1\sigma_{\bar{n}} + {}_2\sigma_{\bar{n}}}{({}_1\sigma_{\bar{n}})_{0^\circ}}$
0	-1.564	4.53E-05	1.000
10	-1.517	4.50E-05	0.970
20	-1.379	4.37E-05	0.881
30	-1.161	4.15E-05	0.742
40	-0.880	3.86E-05	0.563
50	-0.560	3.51E-05	0.358
60	-0.224	3.11E-05	0.143
70	0.102	2.69E-05	-0.065
80	0.395	2.26E-05	-0.253
90	0.634	1.84E-05	-0.405
100	0.804	1.45E-05	-0.514
110	0.898	1.09E-05	-0.574
120	0.914	7.78E-06	-0.584
130	0.857	5.19E-06	-0.548
140	0.739	3.15E-06	-0.472
150	0.574	1.66E-06	-0.367
160	0.383	6.82E-07	-0.245
170	0.186	1.56E-07	-0.119
180	0.000	6.92E-38	-0.000

De la tabla se concluye que entre 0° y 63.4° se presentan presiones; arriba de este valor se presentan succiones.

Se definen como “coeficiente locales de presión” en un punto de la frontera del semicuerpo, a un número adimensional que al ser multiplicado por $\frac{1}{2} \rho V_\infty^2$.

Donde V_∞ es la velocidad del flujo paralelo, se puede conocer la acción que provoca el viento sobre un semicuerpo.

Mediante la integración de los esfuerzos en la frontera, es posible establecer cual es la fuerza que produce el viento al actuar sobre el semicuerpo.

A ${}^1\sigma_n$ se le conoce como la parte inercial de la interacción, mientras que a ${}^2\sigma_n$ es la parte viscosa y la máxima presión se presenta en el punto de estancamiento.

Los esfuerzos normales tienden a decrecer y cerca de 65° cambian de signo para transformarse en succiones, estas se incrementan hasta un máximo cuando $\theta = 120^\circ$. De ahí en adelante los esfuerzos decrecen y tienden a cero si $\theta \rightarrow 180^\circ$

Los valores de los esfuerzos se pueden normalizar en todos los puntos de la frontera, respecto a la presión en el punto de estancamiento; con lo que se definen valores adimensionales que se conocen como “Coeficientes locales de presión” (C_p).

Estos coeficientes permanecen constantes, para cualquier velocidad, mientras el flujo permanece laminar.

Esta definición permite usar a los números adimensionales de un experimento realizado dentro de la sección de prueba del túnel de viento, con un modelo rígido que tenga la forma del semicuerpo, para verificar que la distribución de coeficientes C_p en la frontera, es similar a la solución teórica.

Esto permite recurrir a modelos rígidos en flujos laminares, para definir los valores de los Coeficientes de presión en la superficie de estos, que por el teorema de Buckingham se pueden aplicar a prototipos que tengan la misma forma que el modelo original, para evaluar los coeficientes C_p .

Al multiplicar los valores C_p por la carga de presión en un punto de estancamiento, se puede evaluar las presiones que produce el flujo laminar en el prototipo.

En la determinación de los coeficientes locales de presión se debe tener especial cuidado en considerar la forma externa de la construcción, que es la que define la distribución de presiones; por esta razón cuando cambia la dirección del viento y encuentra una forma diferente de obstáculo, la distribución de presiones puede cambiar considerablemente por eso es recomendable hacer pruebas experimentales con distintos ángulos de ataque en busca de la condición en la cual se logra la distribución más desfavorable de presiones.

Una vez que se conoce la distribución de presiones en las fronteras del modelo es posible integrar las presiones resultantes en cada dirección del viento, para estimar las fuerzas cortantes en la base o los momentos de volteo y el momento torsionante que produce la acción del viento y se pueden expresar en función de coeficientes adimensionales que varían con el ángulo de ataque.

1.9.2 Combinación de un flujo paralelo y un doblete.

Para generar la red de flujo se combina.

a) Flujo paralelo $\psi_1 = v_\infty y$

b) Doblete $\psi_2 = -\frac{q}{2\pi} \frac{y}{r^2}$

Al combinar ambos flujos se obtiene: $\psi = \psi_1 + \psi_2 = v_\infty y - \frac{qv_\infty}{2\pi v_\infty} y \frac{1}{r^2}$

Donde: $\frac{q}{2\pi v_\infty} = a^2$

$\psi = v_\infty y - v_\infty y \frac{a^2}{r^2}$ Factorizando: $\psi = v_\infty y \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$

Esta función de corriente genera un cambio de velocidad que expresado en un marco cilíndrico, genera las siguientes velocidades.

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = v_\infty \frac{r}{r} \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \qquad v_t = -\frac{d\psi}{d\theta} = -v_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Estas velocidades son tangentes a las líneas de corriente que se definen mediante:

$$r = \frac{\csc\theta}{2B} \pm \sqrt{a^2 + \frac{\csc^2\theta}{4B^2}} \qquad B = \frac{v_\infty}{\varphi_c}$$

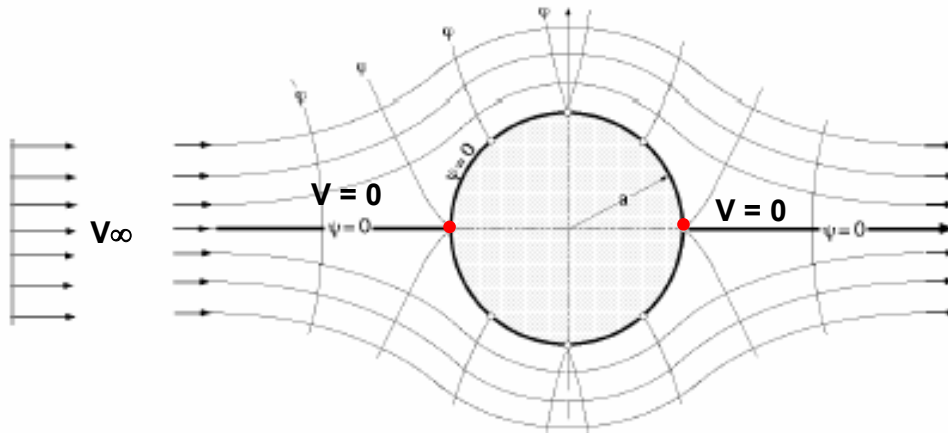


Fig. 1.38 Combinación de un Flujo Constante y un Doblete

La red de flujo representa la acción de un fluido alrededor de un cilindro. Existe una línea de corriente que divide simétricamente a la red de flujo, en donde aparecen los puntos de estancamiento sobre la línea de corriente simétrica. La velocidad cambia desde V_∞ a la izquierda hasta que llega al punto de estancamiento, en el cual la velocidad se anula.

CAPITULO I. ASPECTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

Sobre el cilindro, la velocidad tangencial cambia, desde cero hasta un máximo cuando $\theta = 90^\circ$ y "r" resulta ser mayor que "a" donde $v = 2V_\infty$

$$\bar{v} = \bar{v}_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Conocido el campo de velocidad en la frontera se pueden aplicar las relaciones constitutivas para conocer el tensor de esfuerzos $[T_{r\theta}]$ que se genera en el fluido en movimiento.

Las relaciones constitutivas conducen al siguiente tensor:

$$[T_{r\theta}] = \begin{bmatrix} -p + 4\mu a^2 v_\infty \frac{\cos\theta}{r^2} & \mu \frac{v_\infty}{r} \operatorname{sen}\theta \left[\frac{4a^2}{r^2} \right] & 0 \\ \mu \frac{v_\infty}{r} \operatorname{sen}\theta \left[\frac{4a^2}{r^2} \right] & -p + 2\mu \frac{v_\infty}{r} \cos\theta \left[-\frac{2a^2}{r^2} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

En las partículas del fluido aparecen tres esfuerzos normales ortogonales y solamente una componente tangencial $[\tau_{r\theta}]$

Al utilizar el principio de Bernoulli para calcular el valor de "P" en distintos puntos de la frontera se encuentra:

$$[T_{r\theta}]_{\text{Frontera del cilindro}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} v_\infty^2 \rho (1 - 4\operatorname{sen}^2\theta) + 4\mu v_\infty \frac{\cos\theta}{a} & \mu \frac{4v_\infty}{a} \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \mu \frac{4v_\infty}{a} \operatorname{sen}\theta & -\frac{1}{2} v_\infty^2 \rho \left(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta - 4\mu v_\infty \frac{\cos\theta}{a} \right) & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

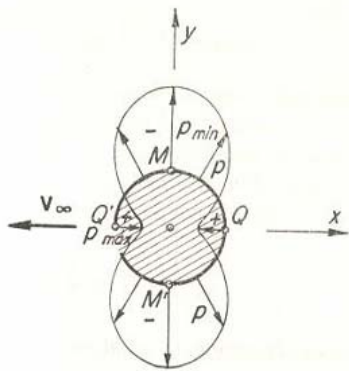


Fig. 1.39 Distribución del C_p para un cilindro inmerso en Flujo Irrotacional.

$$C_p = 1 - 4\operatorname{sen}^2\theta$$

Donde:

$-\frac{1}{2}v_{\infty}^2\rho(1-4\text{sen}^2\theta)$ Representa los puntos donde no existe esfuerzo normal en esta distribución, se obtienen de igualar el paréntesis con cero.

$1-4\text{sen}^2\theta = 0$ Por lo tanto: $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$

La distribución parece indicar una distribución simétrica, cuando solo se considera el término $(1-4\text{sen}^2\theta)$.

Existe sin embargo el término que depende de la viscosidad. $4\mu v_{\infty} \frac{\cos\theta}{a}$

Que no es simétrico y modifica la distribución del primer término en función de la viscosidad μ y el $\cos\theta$.

Al considerar este término aparece una fuerza resultante en la dirección del viento, que es función de la viscosidad del fluido.

Existe además en la frontera, esfuerzos tangenciales a la frontera $[\tau_{r\theta}]$, que también depende de la viscosidad.

Cuando este término, alcanza la capacidad al cortante del aire, el aire se rompe, aparecen burbujas y se presentan separaciones de las líneas de corriente de la frontera del cilindro.

Cuando se presenta la separación en la parte de sotavento se desprende la red de flujo del cilindro y aparecen vórtices que provocan turbulencia.

La discusión previa muestra que la distribución de presiones alrededor de un cilindro es relativamente constante en un intervalo de velocidad.

Es importante remarcar que cuando se alcanza un número de Reynolds mayor que 1×10^5 , se presenta turbulencia.

II. EMPUJE DINÁMICO DE UN FLUJO SOBRE UN CUERPO.

En el caso de fluidos de viscosidad relativamente pequeña, el efecto de fricción interna es apreciable únicamente en una pequeña región próxima a la frontera sólida del flujo (capa límite). Si se trata de una frontera curva o con cambios bruscos de dirección, se presenta el fenómeno de la separación de la capa límite que origina la formación de vórtices y de fuertes turbulencias.

Sin embargo, hay en ingeniería problemas de gran importancia relacionados con el flujo en torno de cuerpos con fronteras curvas o agudas, en los que ocurren evidentemente fenómenos de separación con todas sus consecuencias. Es el caso del *Empuje del viento* sobre estructuras de diferentes formas, tales como construcciones urbanas, chimeneas, antenas, torres, miradores, cables para energía eléctrica, puentes, etc., en las que se necesitan conocer las sollicitaciones que induce el viento, ya que son de gran interés para su análisis estructural.

La resistencia o arrastre que un fluido en movimiento ejerce sobre un cuerpo sumergido; es la acción que consiste en la fuerza dinámica causada por dos factores:

1. Esfuerzo cortante que produce fuerzas tangenciales sobre la superficie del cuerpo, en razón de la viscosidad y del gradiente transversal de la velocidad dentro de la capa límite.
2. Las intensidades de presión que varían sobre la superficie del cuerpo por efectos dinámicos.

La suma vectorial de las fuerzas de superficie normales y tangenciales integradas sobre el total de la frontera del cuerpo, conduce a fuerzas resultantes llamadas de arrastre y sustentación.

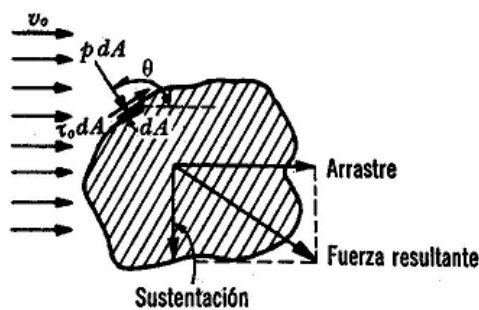


Fig. 2.1 Fuerzas Inducidas por el flujo

Tanto el arrastre como la sustentación comprenden, componentes producto de la *fricción* y *presión* sobre el cuerpo, de modo que el arrastre total es:

$$D = D_F + D_p$$

CAPITULO II. EMPUJE DINÁMICO DE UN FLUJO SOBRE UN CUERPO.

El arrastre por presión depende principalmente de la forma del cuerpo, se conoce como arrastre de forma; el arrastre de fricción, llamado también de superficie, se debe a la componente del esfuerzo tangencial friccionante sobre la frontera.

Las estructuras, sujetas al empuje de viento, tienen arrastre de forma, grandes, en comparación con las resistencias de superficie.

Las fuerzas de arrastre por fricción y presión se definen en términos de los coeficientes de arrastre como:

$$D_F = C_F \rho \frac{V_0^2}{2} A_F \qquad D_P = C_{DP} \rho \frac{V_0^2}{2} A_P$$

A_F área real sobre la que actúan los esfuerzos tangenciales que producen a D_F .
 A_P área transversal normal a la velocidad V_0 .

El arrastre total D generalmente se define por la relación:

$$D = C_D \rho \frac{V_0^2}{2} A \qquad \begin{array}{l} \rho \text{ Es la densidad del fluido en el que el cuerpo se encuentra sumergido.} \\ V_0 \text{ Velocidad del flujo sin disturbios antes del cuerpo.} \end{array}$$

C_D es el coeficiente de arrastre total que reúne a las componentes del sistema de fuerzas, en dirección del arrastre: $C_D = C_{DF} + C_{DP}$

A es el área transversal normal a V_0 , siendo $A = A_P$, el coeficiente

$$C_{DF} = C_F \left(\frac{A_F}{A_P} \right)$$

Para la fuerza de sustentación, no es costumbre separar las componentes de fricción y de presión.

La fuerza de sustentación se evalúa como sigue: $L = C_L \rho \frac{V_0^2}{2} A$

Los coeficientes de arrastre y sustentación dependen de la geometría del cuerpo y de los parámetros adimensionales que describen el comportamiento dinámico del fluido en movimiento permanente.

El punto de aplicación de estas fuerzas corresponde al centro de gravedad, del área expuesta, en el caso de cuerpos simétricos. En otros cuerpos, este punto se determina a partir de la distribución de las presiones alrededor del mismo, la cual también se puede representar a través del coeficiente de presión C_P en cada punto.

2.1 IMPORTANCIA DEL COEFICIENTE DE ARRASTRE.

Al conocer la distribución de presiones en la superficie de un cuerpo, es posible evaluar a la fuerza resultante de la acción del viento, mediante la expresión del siguiente tipo:

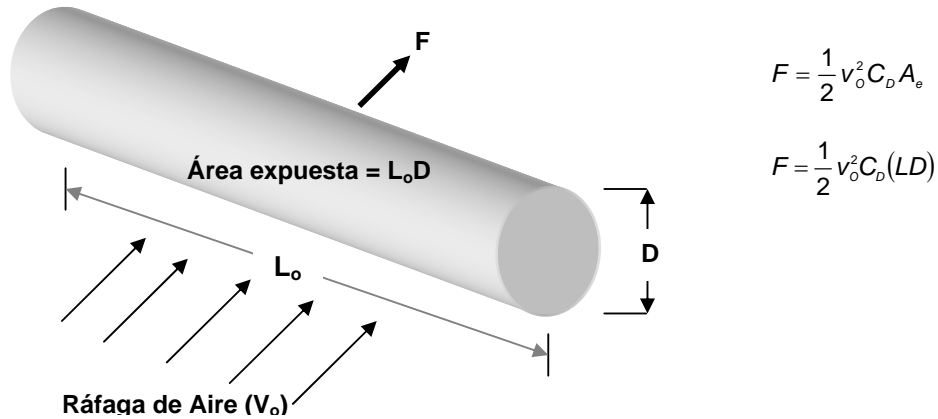


Fig. 2.2 Fuerza de arrastre en un cilindro

C_D (adimensional) es el coeficiente de arrastre que se obtiene al integrar las presiones en la periferia, proyectadas sobre la dirección en que actúa el viento.

Este coeficiente se evalúa a partir de pruebas y depende del Número de Reynolds, el cual es un parámetro adimensional que indica el cambio a régimen turbulento.

El número de Reynolds define cual es el valor de C_D que se debe utilizar para la determinación de las fuerzas que produce el viento; en normas de ingeniería se acepta constante $C_D = 1.15$ hasta que el valor de $Re = 10^5$, esta es una consideración del límite superior tomada por grupos de ingenieros.

Existe evidencia física que cuando el número de Reynolds sobre pasa 10^5 se generan fenómenos turbulentos donde aparecen burbujas, vórtices periódicos y aperiódicos que generan al flujo turbulento y el valor de C_D decrece hasta alcanzar un valor de 0.3 aproximadamente; después de este intervalo de transición, el coeficiente de arrastre se empieza a estabilizar hasta alcanzar un valor promedio de 0.7 para números de Reynolds mayores a 10^6 , como se muestra en la Fig. 2.3 con mayor detalle.

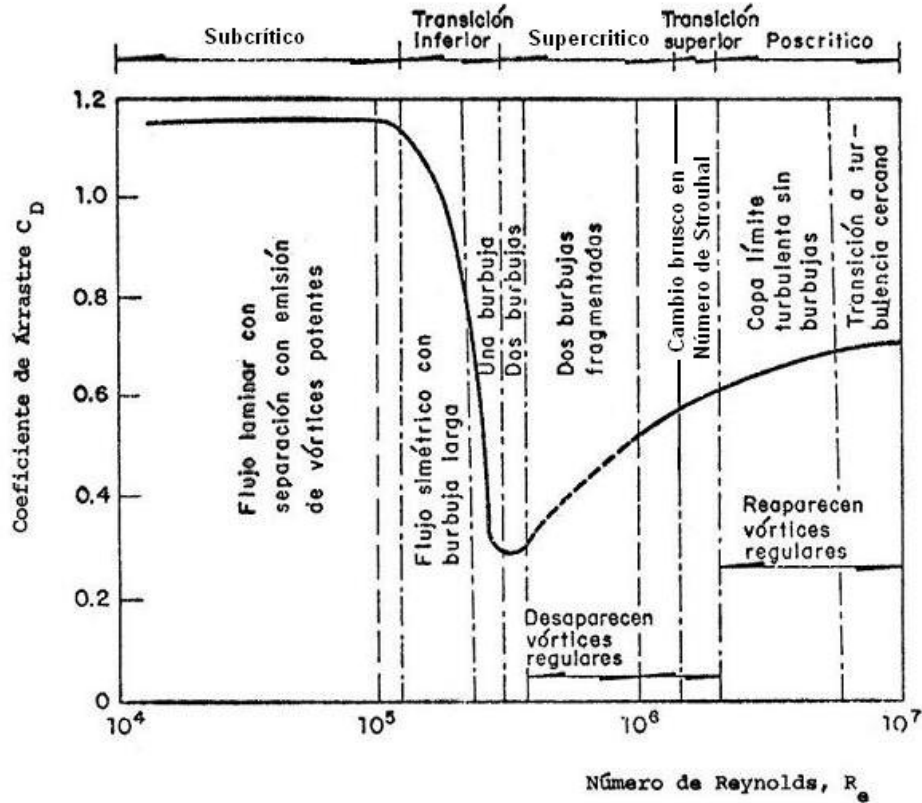


Fig. 2.3 Intervalos conocidos de flujos alrededor de un cilindro

2.2 ARRASTRE TOTAL DE CUERPOS BI Y TRIDIMENSIONALES.

En la siguientes figuras se presenta la variación del coeficiente de arrastre total de cuerpos bi y tridimensionales de diferentes secciones, contra el número de Reynolds, que ha sido obtenido experimentalmente.

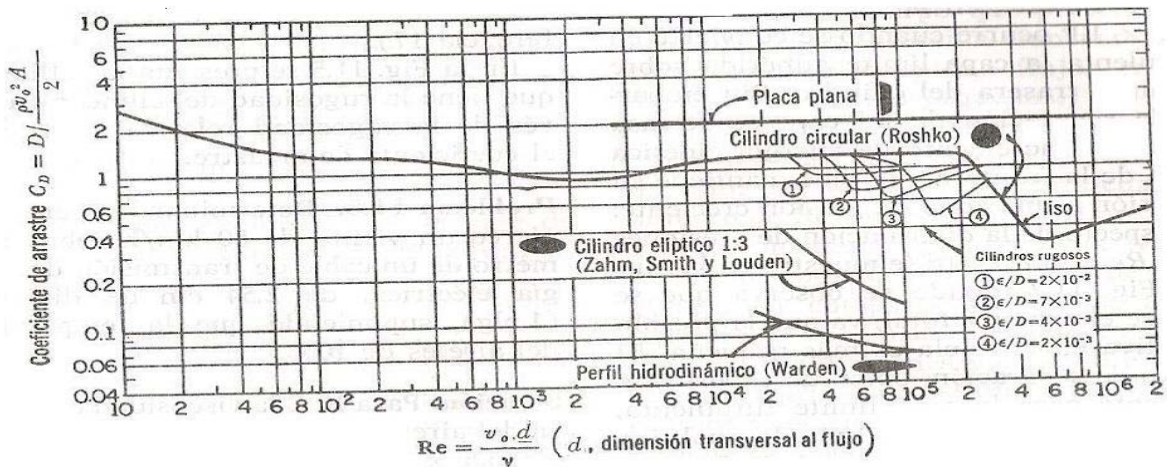


Fig. 2.4 Coeficientes de arrastre total para cuerpos bidimensionales

CAPITULO II. EMPUJE DINÁMICO DE UN FLUJO SOBRE UN CUERPO.

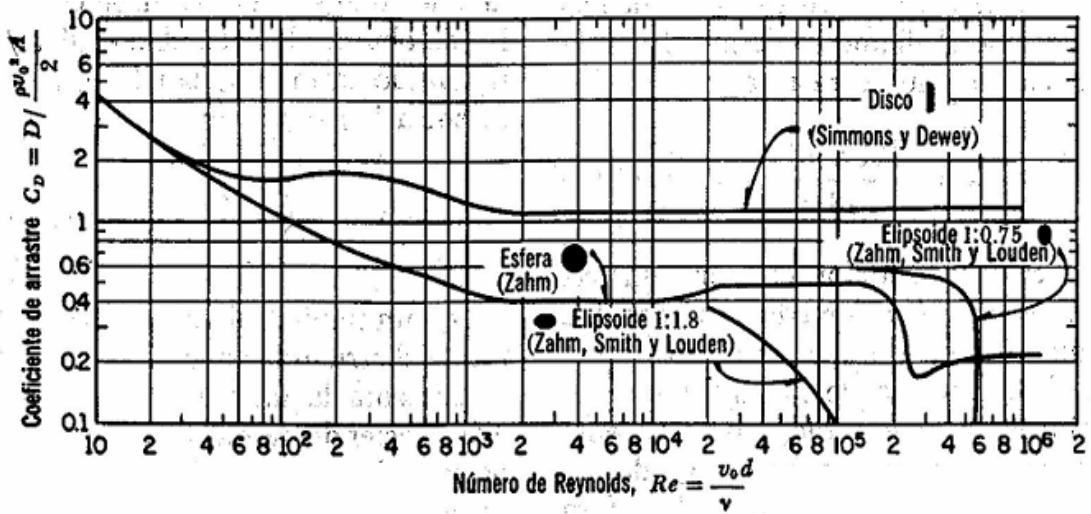


Fig. 2.5 Graficas de los coeficientes de arrastre C_D para cuerpos tridimensionales de revolución.

TABLA 2.1 Coeficientes de arrastre para secciones comunes en función del número de Reynolds.

Forma del cuerpo	$Re = \frac{v_0 d}{\nu}$	C_D
Cilindro cuadrado →	3.5×10^4	2.0
(eje normal al flujo) →	10^4 a 10^5	1.6
→		2.0
→		1.72
→		2.15
Cilindros triangulares (eje normal al flujo) →	10^4	1.6
→		2.2
→		1.39
→		1.8
→	10^5	1.0
	L/d	
Cuerpo aerodinámico	0	1.12
→	1	$> 10^3$
	2	1.04
	3	1.54
Semiesfera:		
lado plano frente al flujo →	$> 10^3$	1.33
lado plano al otro lado del flujo →		0.34

III. APARICIÓN DE ESTELAS VORTICOSAS.

3.1 El proceso de la Separación.

El fenómeno de la separación, aleja la corriente fluida de la pared de un cuerpo, dejando entre ambos un colchón de fluido en rotación, halla su explicación en la teoría de la capa límite. Una explicación simple de este fenómeno la dio Prandtl (1904), al suponer que, para números de Reynolds elevados, los efectos de la viscosidad, consistentes en las presiones tangenciales que ésta desarrolla en el interior de la masa fluida, se manifiestan tan solo en una pequeña capa, de espesor variable, próxima a las paredes, a la cual dio el nombre de **capa límite**. Lejos de las paredes, el fluido se comporta prácticamente como un fluido perfecto y su movimiento es irrotacional y de energía constante.

Por lo tanto, cuando empieza el movimiento en un fluido de viscosidad muy pequeña, el flujo esencialmente es irrotacional en los primeros instantes. Debido a que el fluido no tiene velocidad en las fronteras, existe un alto gradiente de velocidad desde la frontera hacia el flujo. Este gradiente, en fluidos reales, originan fuerzas de corte cerca de las fronteras, que reducen la velocidad del flujo cerca de ellas; a esto se le conoce como *capa límite*.

A medida que esta capa se mueve a lo largo del cuerpo, la *acción continua* de los esfuerzos cortantes tiende a desacelerar partículas adicionales de fluido, haciendo que el espesor de la capa límite aumente con la distancia del punto viento-arriba.

Cuando la capa límite aumenta su espesor, se vuelve inestable y finalmente se transforma en una *capa límite turbulenta* en la cual las trayectorias de los fluidos se mueven en trayectorias aleatorias, a pesar de que su velocidad ha sido reducida por la acción viscosa en la frontera. Cuando la capa límite se ha hecho turbulenta, una pequeña capa muy delgada con movimiento laminar, sigue existiendo cerca de la frontera. Ésta se conoce como *subcapa laminar*.

Las variaciones de presión que se manifiestan en la corriente en proximidad de la capa límite afectan también a ésta. Así, si una caída de presión acelera la corriente exterior, también la capa límite resulta acelerada, mientras que si un incremento de presión retarda la corriente exterior, el mismo efecto se tiene en la capa límite. Pero las partículas de esta capa se mueven muy lentamente; el retardo de ellas es más marcado y, cuando toda su energía se ha gastado, pueden resultar forzadas a pararse y hasta a retroceder. La corriente que sigue avanzado alimenta progresivamente esta zona de estancamiento, con lo que el fluido allí incluido se abulta y va formando uno o más remolinos, cuyo tamaño llega a estabilizarse cuando se alcanza una condición de equilibrio, en que cesa el intercambio de fluido entre la zona muerta y la exterior. La corriente se halla así separada de la pared por el colchón vorticoso.

En la figura se presentan los sucesivos perfiles de velocidades a lo largo de una pared plana, que llevaría primero a un estancamiento de los filetes fluidos más próximos a la pared (puntos S) y más adelante a una inversión del flujo. La línea AB representa la frontera de la capa límite y MSN la del colchón vorticoso.

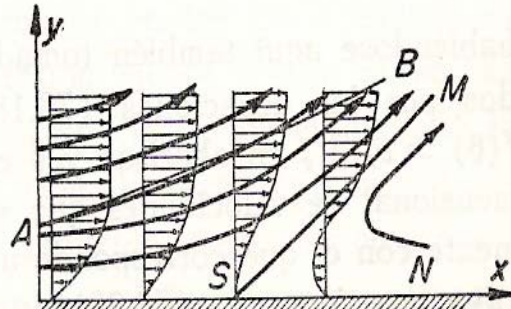


Fig. 3.1 Proceso de separación.

En resumen, el gradiente de presión adverso, es decir, presiones que se incrementan en la dirección de la corriente, junto con el esfuerzo cortante en la pared, hacen que disminuya la cantidad de movimiento dentro de la capa límite y, si ambos actúan a lo largo de una distancia suficiente, el fluido de la capa límite se irá frenando hasta alcanzar el reposo (punto de separación); en este instante, la línea de corriente que coincide con la pared se aleja de la superficie a partir del punto de separación, conociéndose este fenómeno como **desprendimiento de la capa límite**.

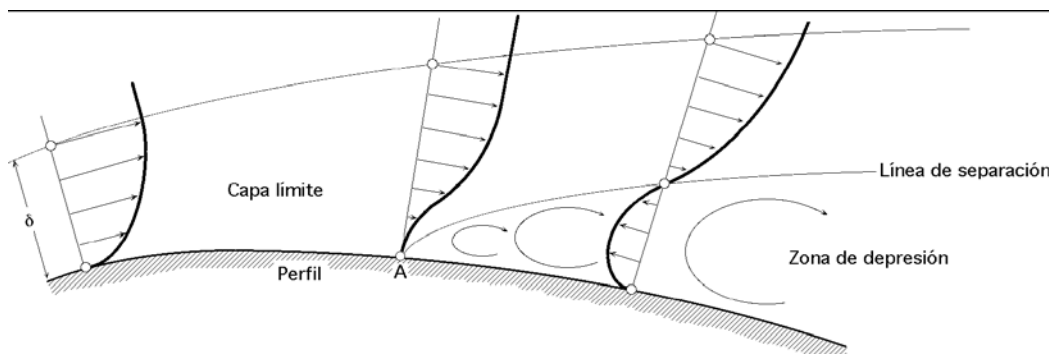


Fig. 3.2 Proceso de separación y desprendimiento de la capa límite.

3.2 Formación de la Estela.

La separación de la capa límite juega un papel esencial en la formación de la estela detrás de cuerpos sumergidos.

La línea de corriente de la frontera debe alejarse de la frontera sólida en el punto de separación, y después de este punto, el gradiente de presión adverso produce un flujo hacia atrás cerca de la pared sólida. Esta región del lado de sotavento, a la línea de corriente que se separa de la frontera sólida se conoce como *la estela*.

Por ejemplo, sea el flujo alrededor del cilindro de la figura 3.3; en ausencia de separación, las partículas que rodean al cilindro se acelerarían avanzando de A a B y después se desacelerarían de B a C. Por tanto la presión disminuiría de A a B y aumentaría de B a C.

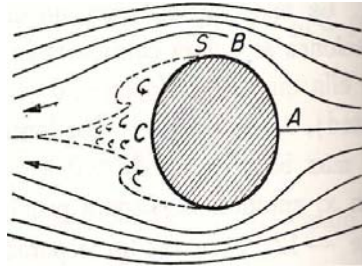


Fig. 3.3 Proceso de formación de la Estela

Una partícula que avanza cerca de la pared, puede perder en el tramo AB tanta energía cinética, debido a la fricción, que no le queda energía suficiente para vencer el incremento de presión del tramo BC. Al Llegar a S, se separa, para iniciar más adelante el movimiento turbulento. Se da el nombre de **estela** precisamente a la zona vorticosa resultante. Que se prolonga por distancias más o menos grandes tras del cuerpo. Los remolinos de la estela crean una fuerte succión, que incrementa notablemente el empuje al cual el cuerpo se halla sometido.

Los inconvenientes de la estela se pueden sintetizar en que su presencia aumenta la *fuerza de arrastre* y reduce la *sustentación*. Para números de Reynolds elevados, aparece el fenómeno de la turbulencia que crea un movimiento irregular de mezclado del fluido. Este permite que partículas de alta velocidad sean desviadas hacia la pared y que viceversa el fluido retardado por la pared, se aleje de ella y se introduzca en la corriente libre, donde se acelera.

Por consiguiente, en régimen netamente turbulento, la estela se encoge, con el efecto que se representa esquemáticamente en la **figura b** (mientras que la **figura a** corresponde al régimen laminar).

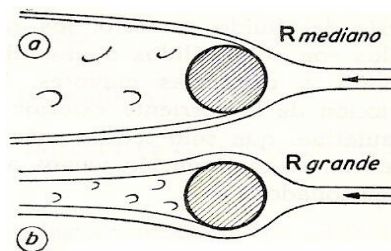


Fig. 3.4 Forma de la estela en flujo Laminar y turbulento

La formación de la estela se debe a la separación, y ésta tiene su origen en la capa límite. Una vez formada la estela, el movimiento del fluido en su interior, en proximidad del cuerpo, queda afectado muy poco por la viscosidad, lo que constituye una simplificación considerable. Bajo este punto de vista, la teoría de la estela tras de un obstáculo en un fluido en movimiento (o bien tras de un cuerpo móvil en un fluido en reposo) ha sido planteada por dos métodos diferentes:

1) La teoría de la zona muerta, que admite la existencia de un escurrimiento irrotacional exterior al cuerpo y a la estela, considerando a esta última, como una zona de fluido quieto rígidamente conectada con el cuerpo mismo. La frontera entre la región externa y la estela está constituida por superficies vorticosas.

2) La teoría de las hileras de vórtices, que admite que las superficies vorticosas se ensanchen hacia el interior de la estela, dando origen a dos hileras de vórtices de grandes dimensiones, que siguen al cuerpo y ponen en movimiento las partículas internas de la estela.

3.3 Estelas con vórtices alternados.

Al crecer el Número de Reynolds, se empieza a notar una inestabilidad en la superficie frontera, que se ondula en el sentido de los vórtices (condición 2 de la figura). La ondulación aumenta progresivamente con el tiempo, y tiende a provocar movimientos en espiral (condición 3), para finalmente resultar en una serie de vórtices de gran tamaño (condición 4), de tal modo que para números de Reynolds medianos, se tiene dentro de la estela dos hileras de remolinos girando los dos en sentido opuesto, con los vórtices siempre alternados, ya que tras del obstáculo, nacen alternativamente un vórtice de un lado y uno del otro. **Von Kármán** consiguió demostrar que una configuración simétrica no sería estable. La doble hilera de vórtices fue señalada primero por Mallock y Bénard, y tuvo por parte de Von Kármán una interpretación teórica.

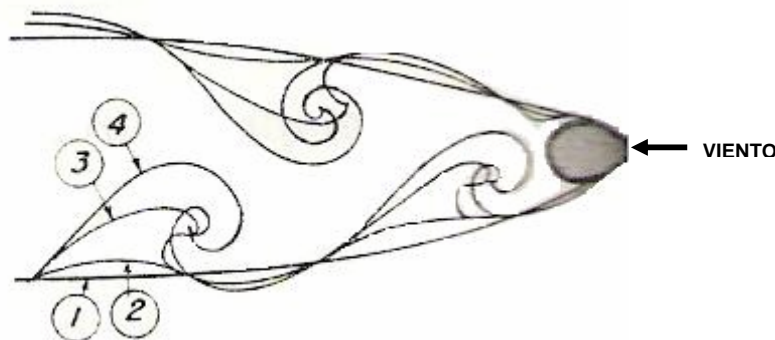


Fig. 3.5 Estela con vórtices alternados

3.4 Formas de la estela para obstáculos inmóviles.

Las fotografías del flujo fueron realizadas en el Instituto para la investigación del flujo de Kaiser Wilhelm (Göttingen, Alemania) con un equipo experimental desarrollado por O. G. Tietjens, Ph. D.

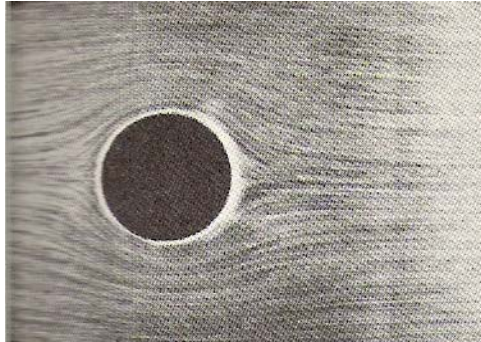


Fig. 3.6.- Flujo alrededor de un cilindro inmediatamente después de comenzar (flujo potencial).

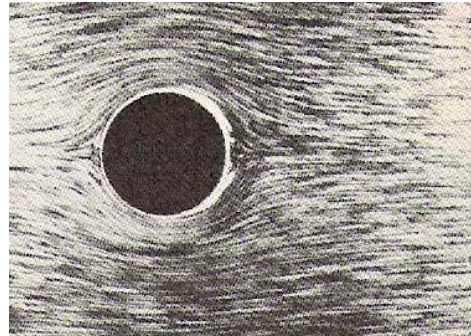


Fig. 3.7.- Flujo posterior en la capa límite detrás del cilindro; acumulación del material de la capa límite.

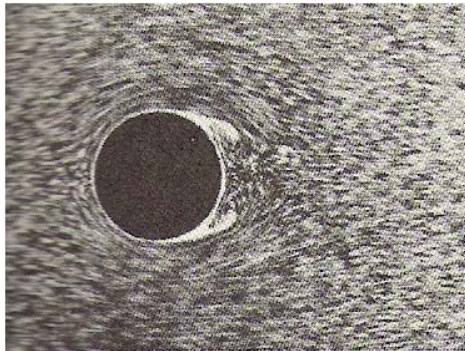


Fig. 3.8.- Formación de dos vórtices; flujo que se rompe flojamente del cilindro.

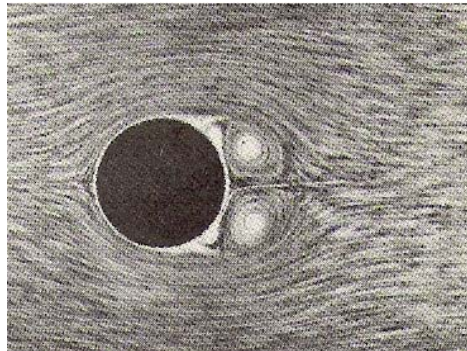


Fig. 3.9.- El aumento de tamaño de los remolinos.

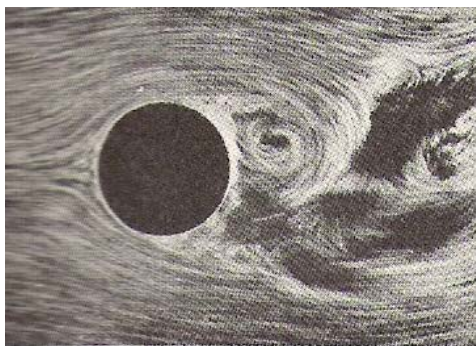


Fig. 3.10.- Los remolinos crecen aún más; finalmente la figura llega a ser asimétrica y se desintegra.

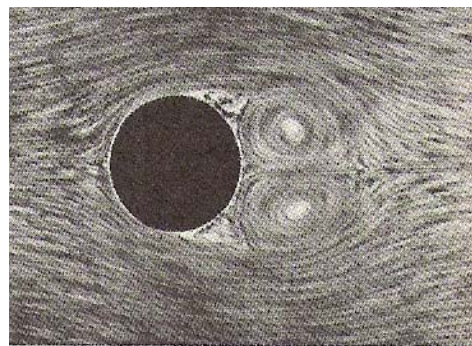


Fig. 3.11.- La figura final se obtuvo un rato largo después de comenzar.

La dirección del flujo en todas las fotografías es de izquierda a derecha, (ref. 1).

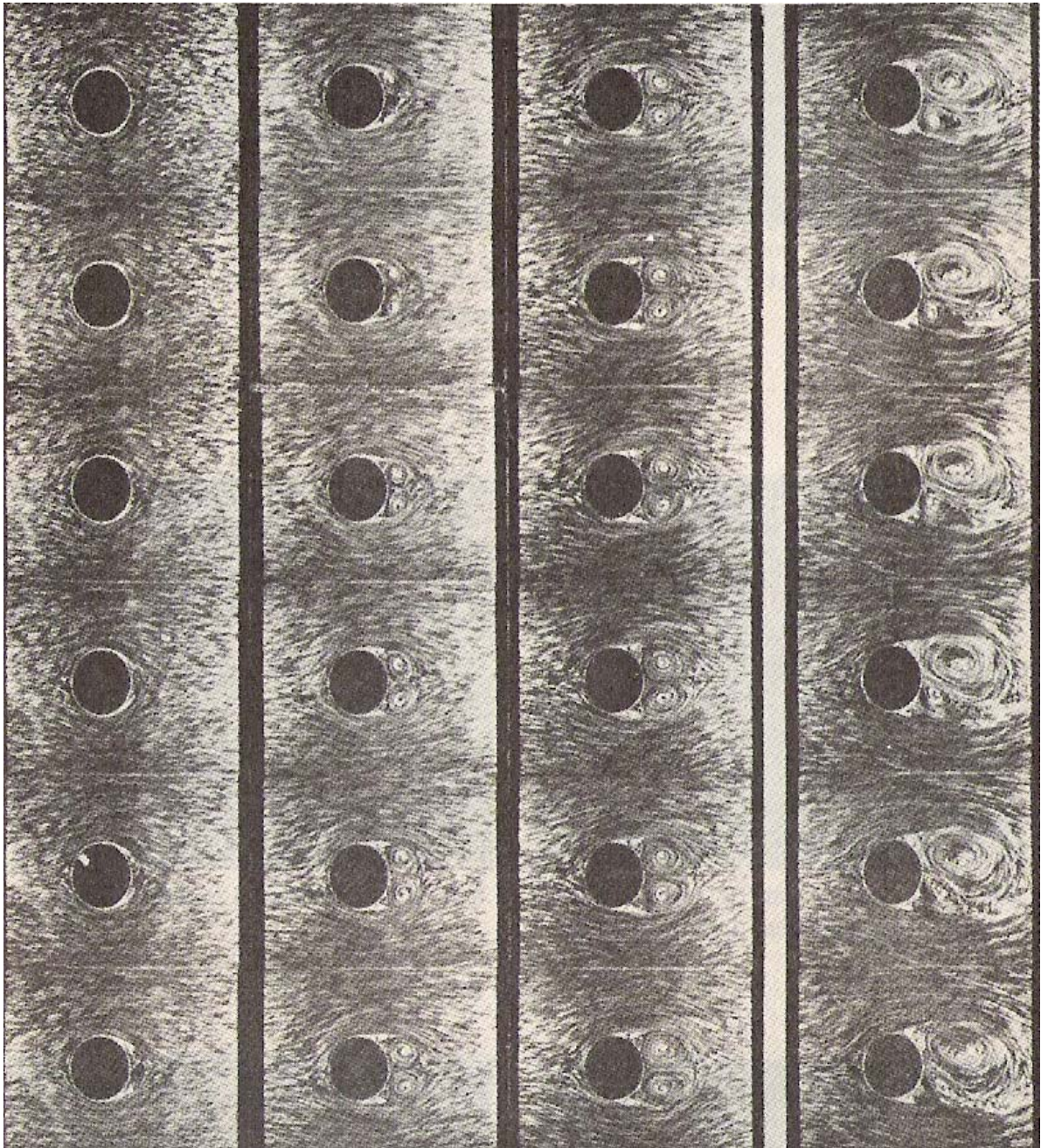


Fig. 3.12.- Fotografías consecutivas del flujo alrededor de un cilindro. Entre la tercera y cuarta columna vertical un número de fotografías faltan. La cuarta columna muestra la desintegración de los vórtices simétricos que terminan en la fotografía que se muestra en la Fig. 3.11, (ref. 1).

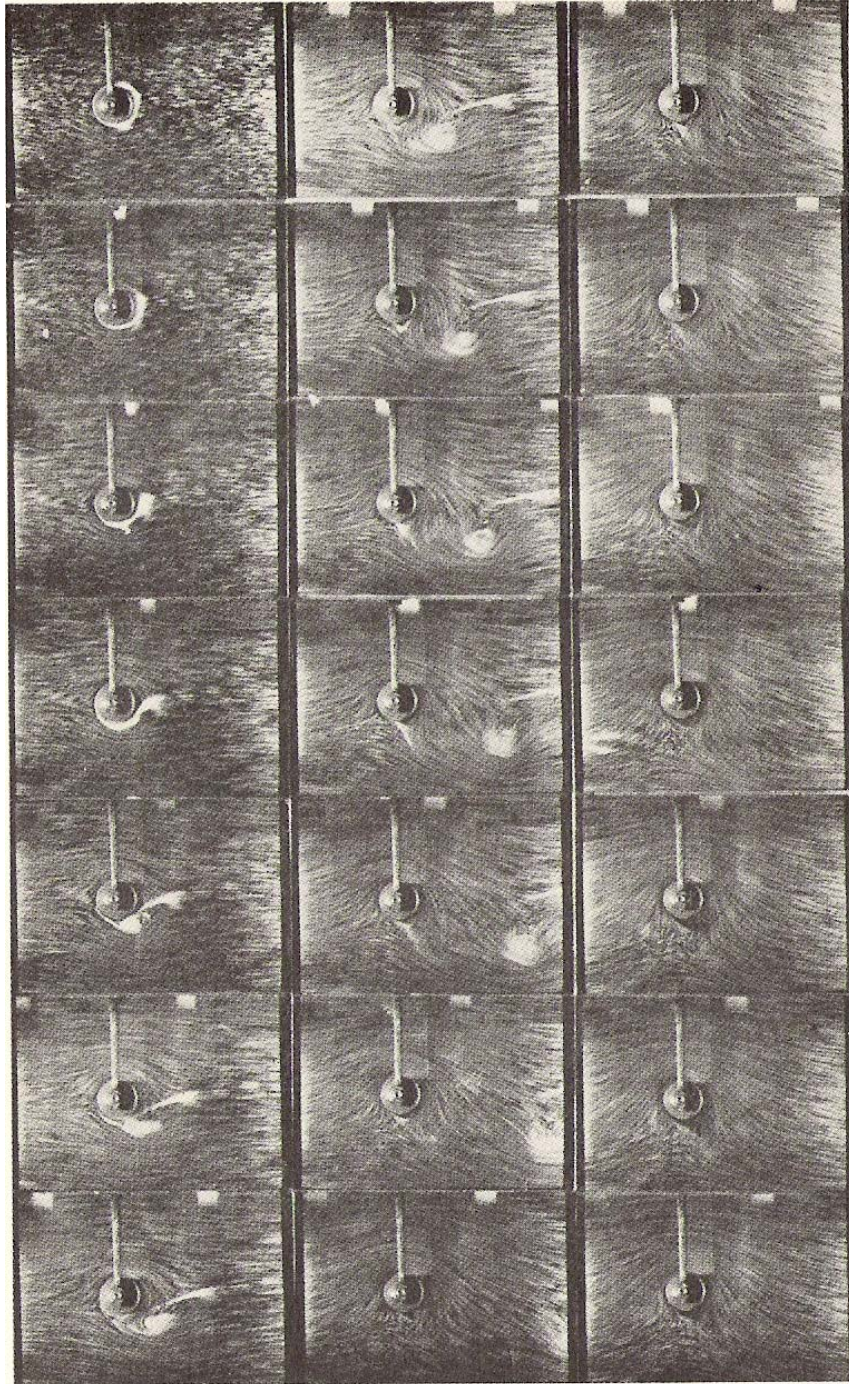


Fig. 3.13.- Fotografías consecutivas del flujo alrededor de un cilindro que rota (con circulación) que empieza del reposo. La relación de la velocidad periférica de rotación u a la velocidad delantera v es $u/v = 4.0$, (ref. 1).

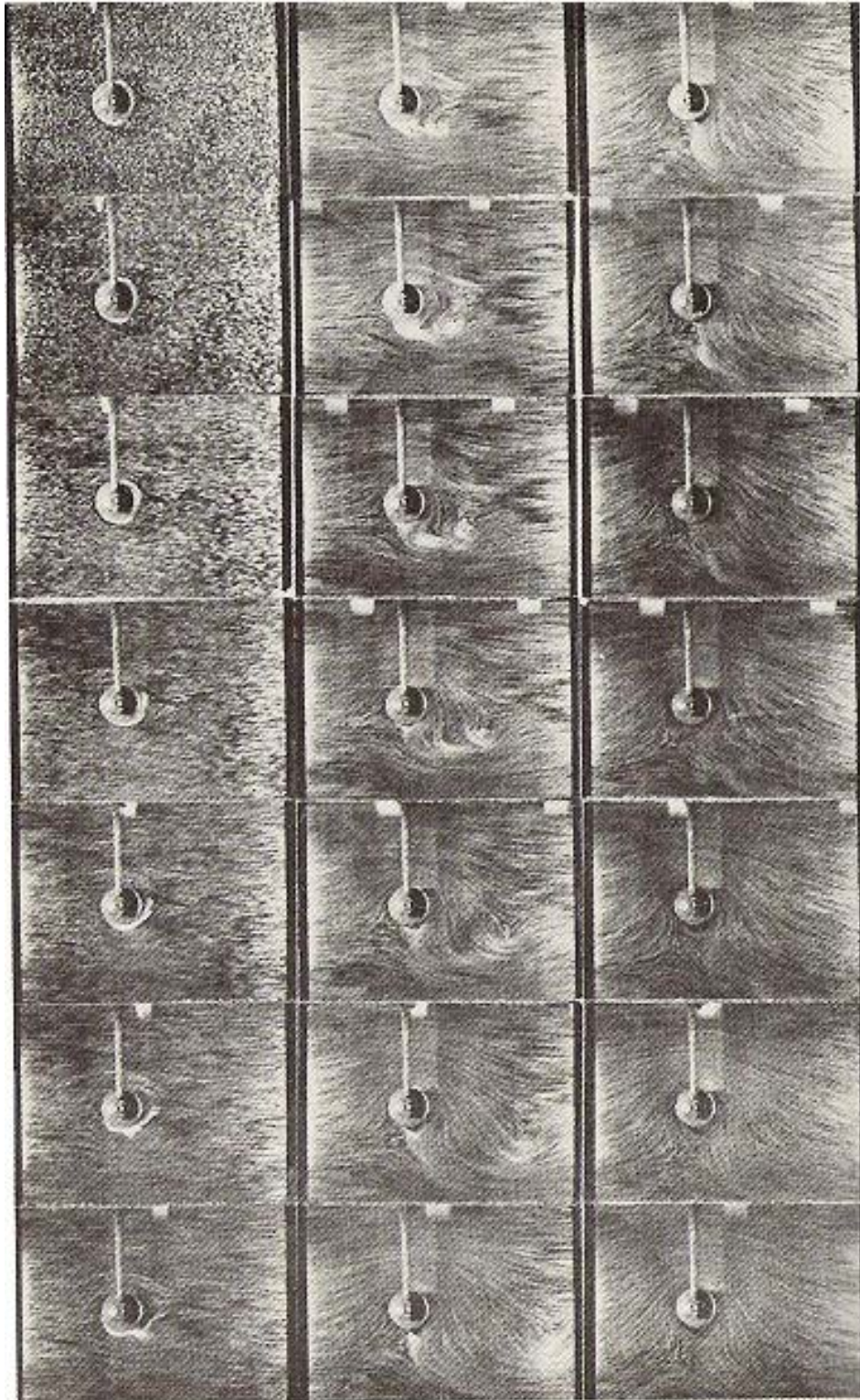


Figura 3.14. Igual que la figura 3.13, excepto que $u/v = 6$, (ref. 1).

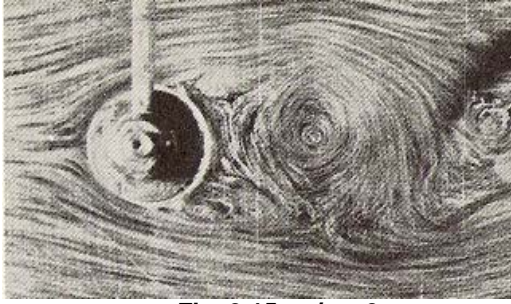


Fig. 3.15.- $u/v = 0$

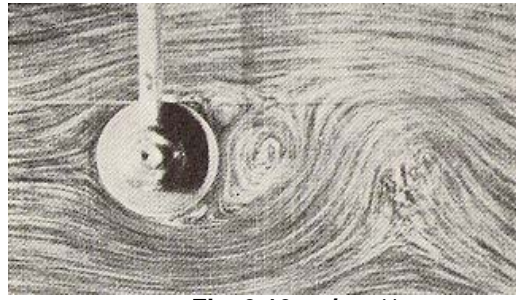


Fig. 3.16.- $u/v = \frac{1}{2}$

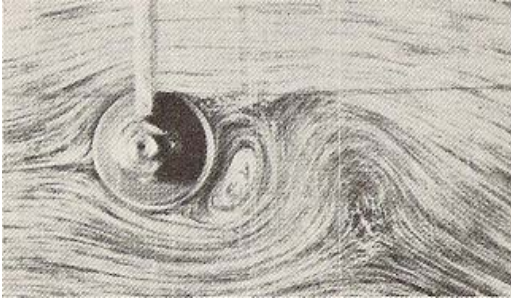


Fig. 3.17.- $u/v = 1.0$

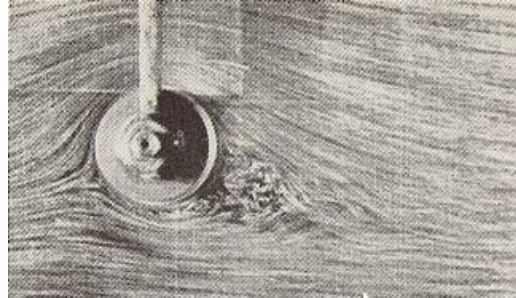


Fig. 3.18.- $u/v = 2.0$

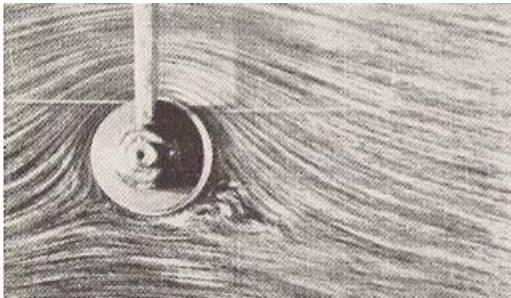


Fig. 3.19.- $u/v = 3.0$

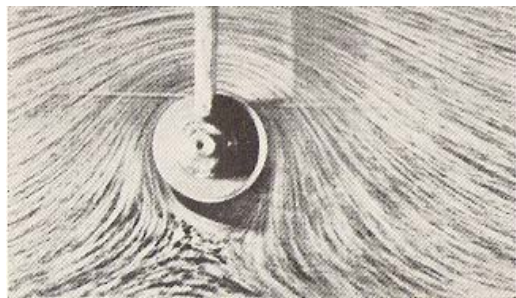


Fig. 3.20.- $u/v = 4.0$

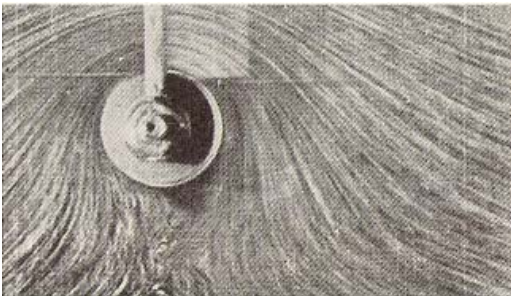


Fig. 3.21.- $u/v = 6.0$

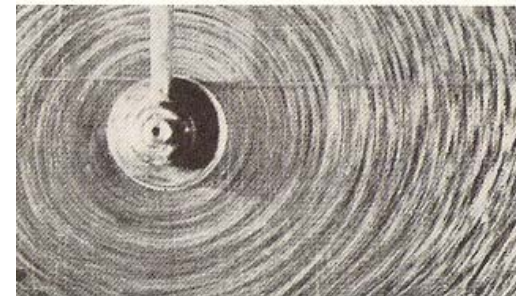


Fig. 3.22.- $u/v = \infty$ Esta fotografía fue tomada moviéndose el cilindro que rota con la cámara fotográfica a través del agua, parando ambos e inmediatamente luego exponiendo la placa.

(ref. 1)

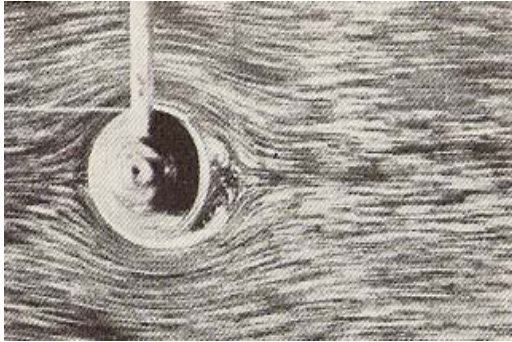


Fig. 3.23.- $u/v = 1/2$

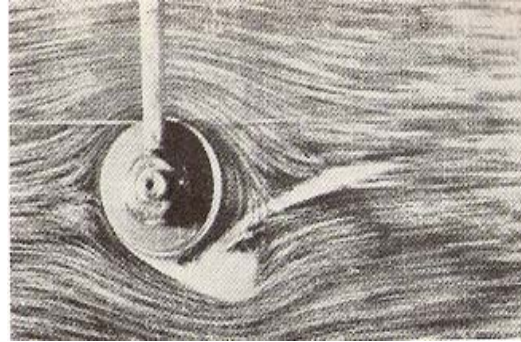


Fig. 3.26.- $u/v = 3.0$

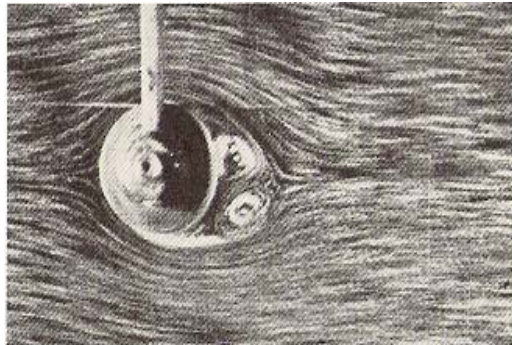


Fig. 3.24.- $u/v = 1/2$

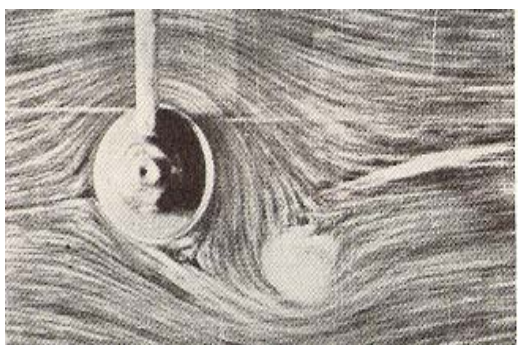


Fig. 3.27.- $u/v = 3.0$

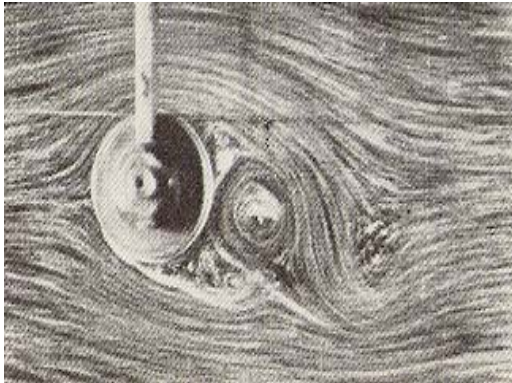


Fig. 3.25 $u/v = 1/2$



Fig. 3.28.- $u/v = 3.0$

Fig. 3.23 – 3.25.- Etapa consecutiva del desarrollo del flujo para $u/v = 1/2$

Fig. 3.26 – 3.28- Etapa consecutiva del desarrollo del flujo para $u/v = 3.0$

(ref. 1)

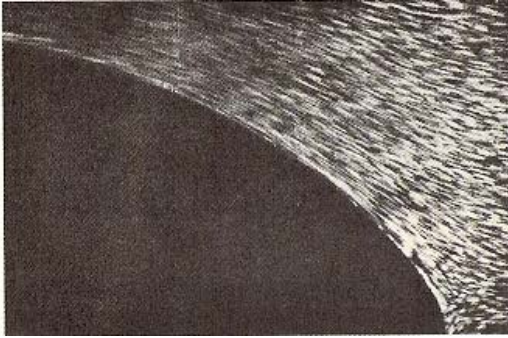


Fig. 3.29.

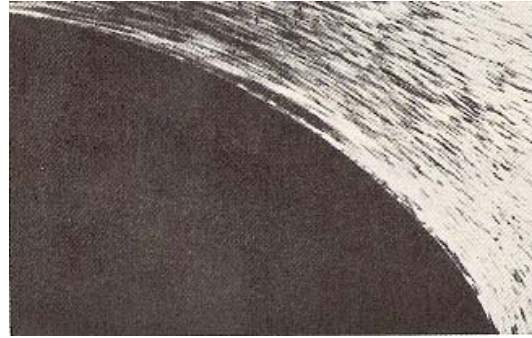


Fig. 3.30

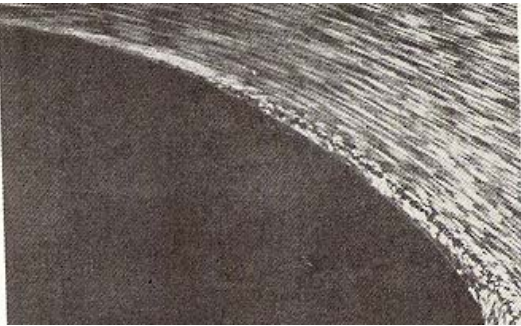


Fig. 3.31.

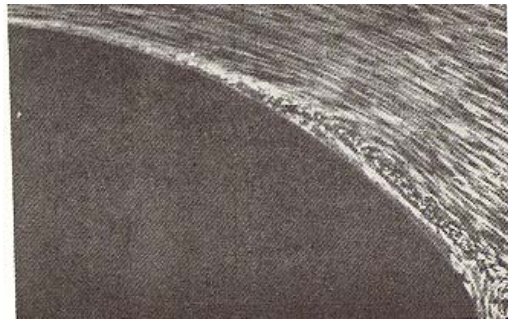


Fig. 3.32

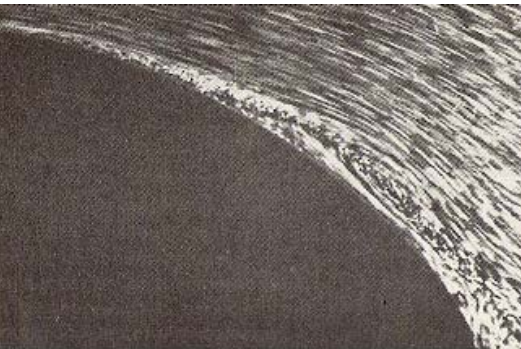


Fig. 3.33.

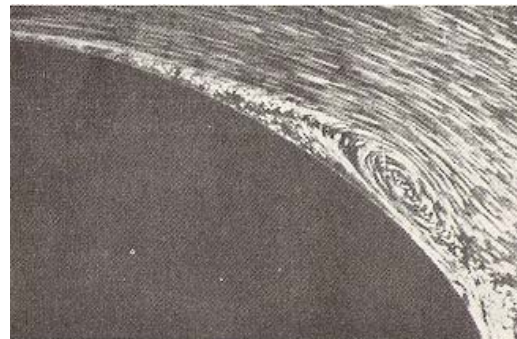


Fig. 3.34



Fig. 3.35



Fig. 3.36

(ref. 1)

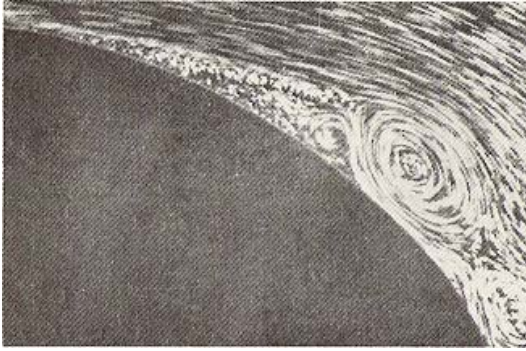


Fig. 3.37

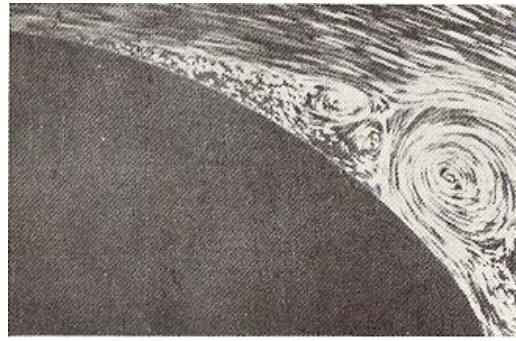


Fig. 3.38

Fig. 29 - 38.- Flujo a lo largo del extremo posterior del cuerpo embotado

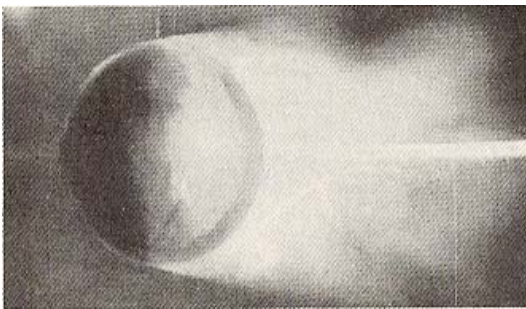


Fig. 3.39.- Flujo alrededor de la esfera debajo del punto crítico (Wieselsberger.)

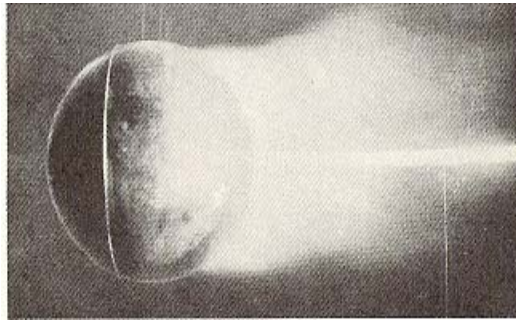


Fig. 3.40.- Debido a un anillo fino alrededor de la esfera, el flujo pasa a ser de otro tipo con capa de límite turbulenta. (Wieselsberger.)

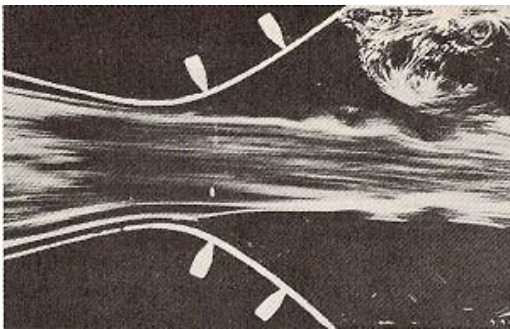


Fig. 3.41.- Flujo en un canal de divergencia.

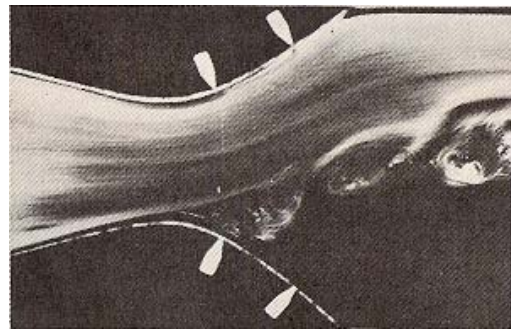


Fig. 3.42.- La vena fluida es succionada hacia la pared superior.

(ref. 1)

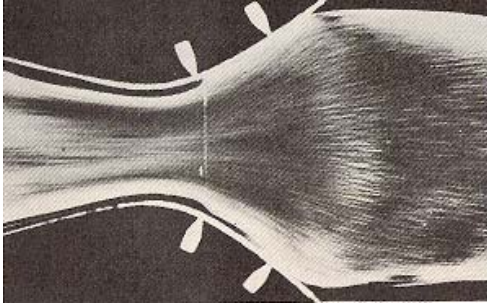


Fig. 3.43.- La vena fluida es succionada hacia ambas paredes. El flujo es de izquierda a derecha.

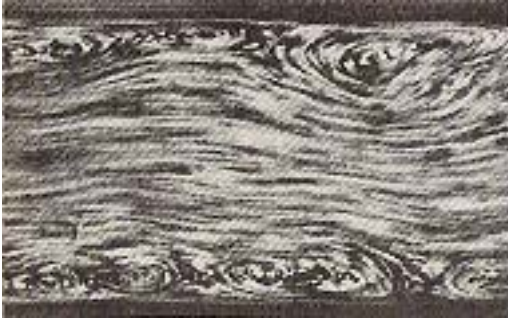


Fig. 3.44.- El flujo turbulento en un canal abierto; la velocidad de la cámara fotográfica es igual a la velocidad del agua cerca de las paredes.

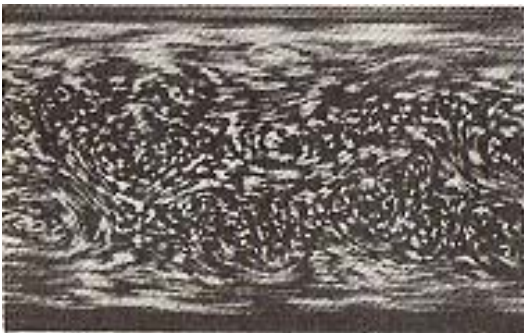


Fig. 3.45.- Como antes. Pero aquí la velocidad de la cámara fotográfica es la del agua en el centro.



Fig. 3.46.- Flujo alrededor de un borde de cuchillo

(ref. 1)

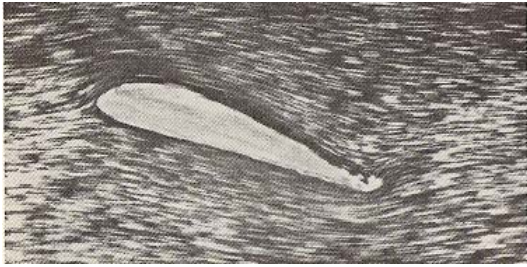


Fig. 3.47.

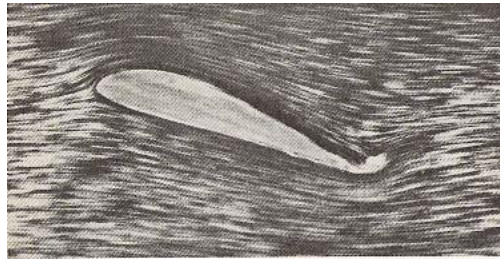


Fig. 3.48

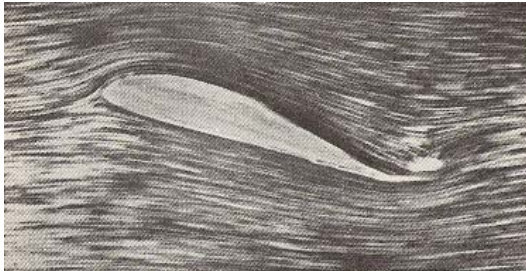


Fig. 3.49.

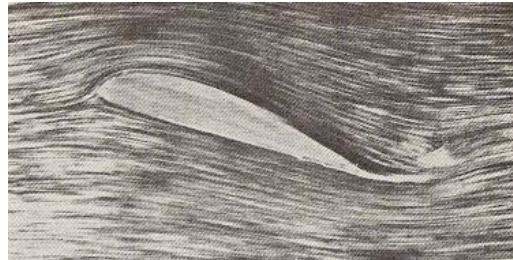


Fig. 3.50

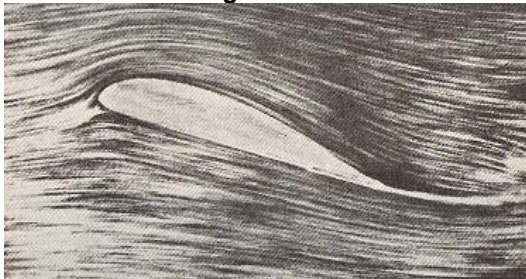


Fig. 3.51.



Fig. 3.52

Fig. 3.47- 3.52.- Etapas consecutivas del flujo alrededor de una superficie

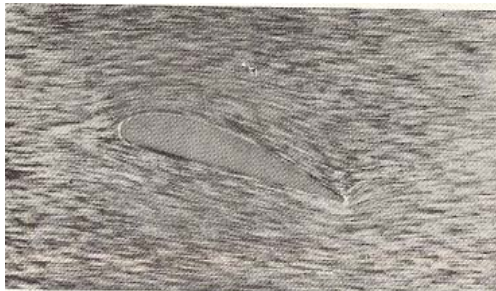


Fig. 3.53.- Líneas de corriente en una superficie aerodinámica en el primer momento después de comenzar.

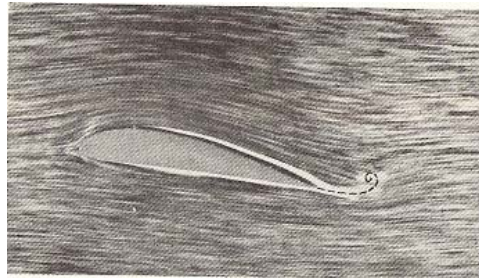


Fig. 3.54.- Comienza la formación del vórtice que se lava lejos con el fluido.

(ref. 1)

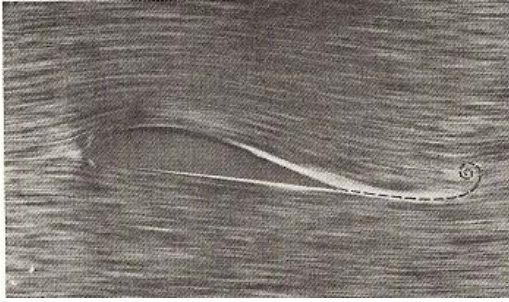


Fig. 3.55.- Crecimiento del comienzo del vórtice

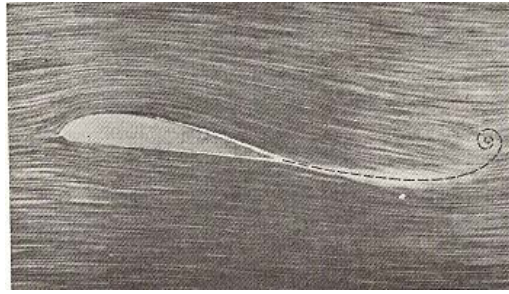


Fig. 3.56.- Tomada poco después que la Fig. 50.

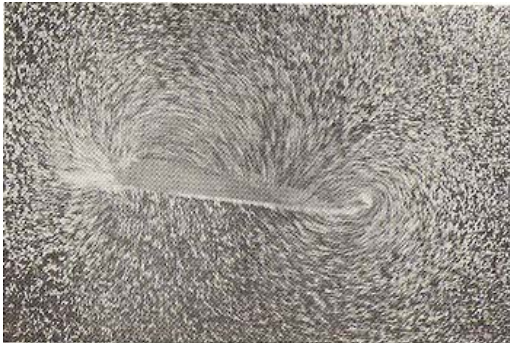


Fig. 3.57.- Como la Fig. 3.54; pero la cámara fotográfica esta quieta con respecto al fluido no perturbado.

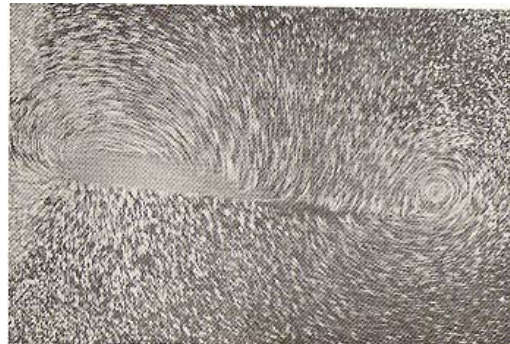


Fig. 3.58.- Como la Fig. 3.56; pero la cámara fotográfica esta quieta.

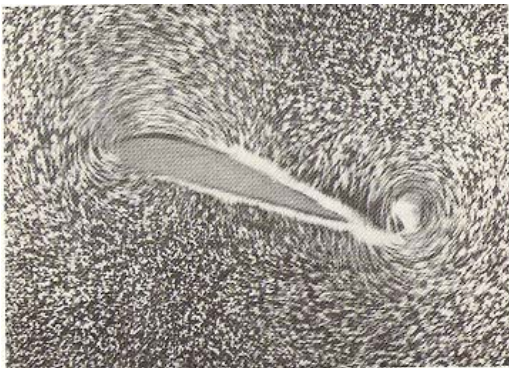


Fig. 3.59.- Como la Fig. 3.57; pero con mayor ángulo del ataque y de un vórtice que comienza por lo tanto más fuerte. Una exposición también más corta de la placa.

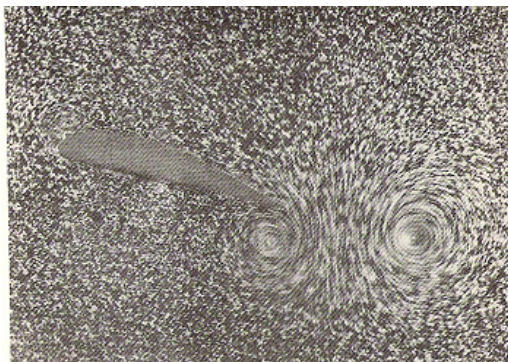


Fig. 3.60.- Después de que la formación del comienzo del vórtice la superficie aerodinámica fue parada y entonces la fotografía fue tomada.

(ref. 1)

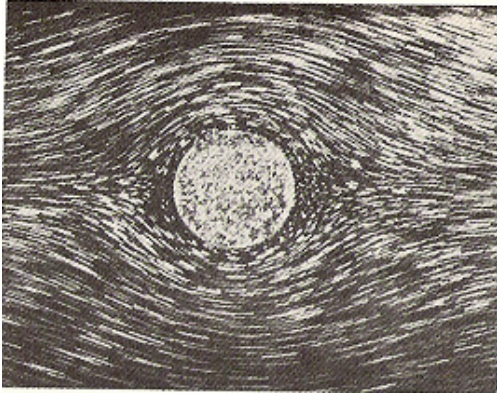


Fig. 3.61.- $wd/v = 0.25$

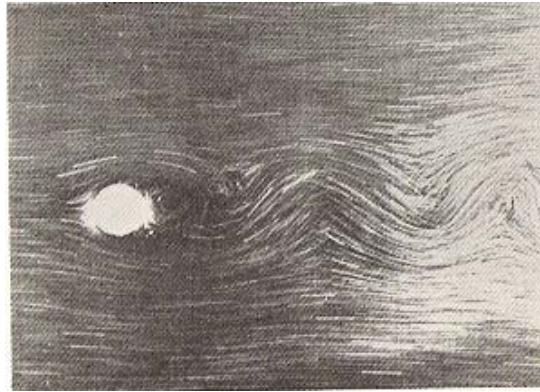


Fig. 3.64.- Estela de von Kármán $wd/v = 250$. La cámara esta en reposo con respecto a el cilindro.

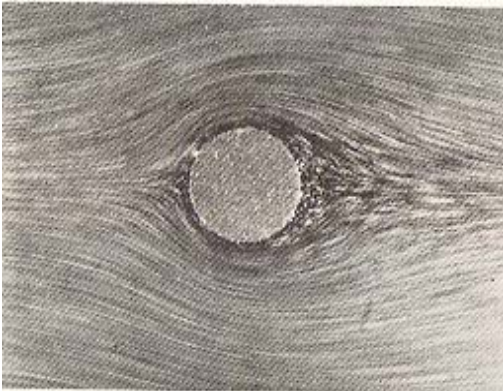


Fig. 3.62.- $wd/v = 1.5$

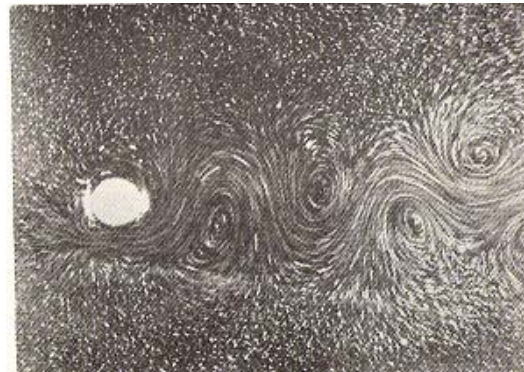


Fig. 3.65.- Estela de von Kármán $wd/v = 250$. La cámara esta en reposo con respecto a el fluido no perturbado.

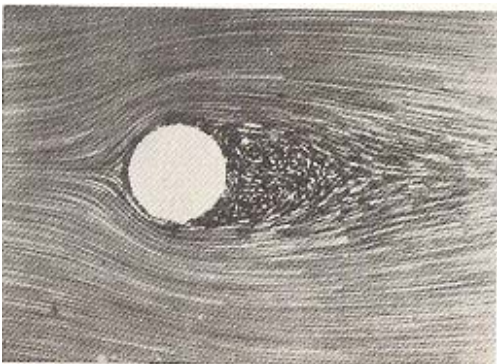


Fig. 3.63.- $wd/v = 9.0$

Fig. 3.61-3.63.- Flujo alrededor de cilindros con Números de Reynolds pequeños.

(ref. 1)

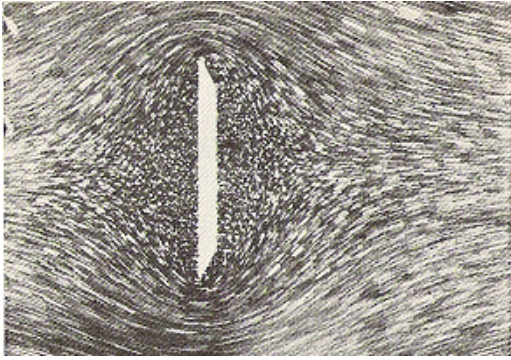


Fig. 3.66.- $wb/v = 0.25$

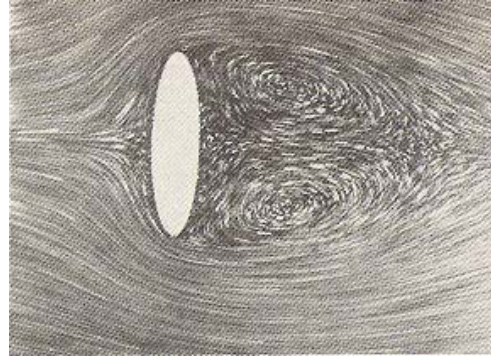


Fig. 3.69.- $wb/v = 10.0$

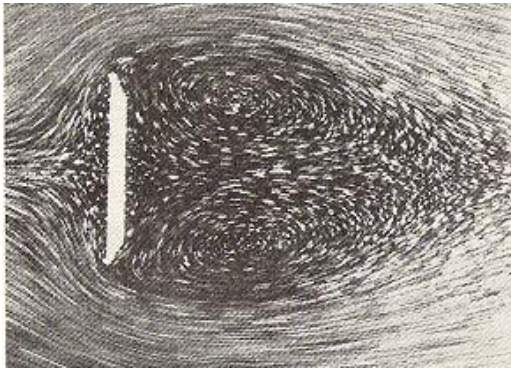


Fig. 3.67.- $wb/v = 10.0$

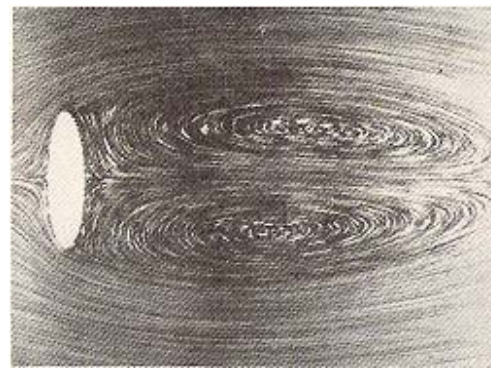


Fig. 3.70.- $wb/v = 80.0$



Fig. 3.68.- $wb/v = 250.0$

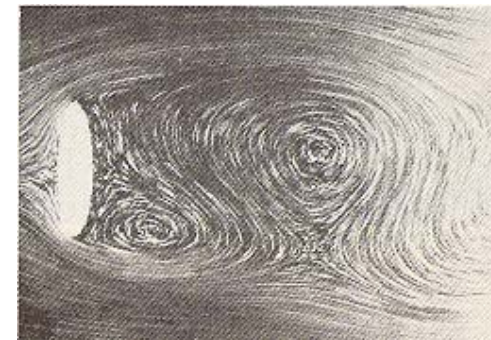


Fig. 3.71.- $wb/v = 250.0$

Fig. 3.66 – 3.68.- Flujo alrededor de una placa afilada de ancho b .

Fig. 3.69 – 3.71.- Flujo alrededor de un cilindro elíptico con eje mayor b .

(ref. 1)



Fig. 3.72.- Flujo alrededor de un cilindro elíptico con eje menor d en $w d/v = 1.30$



Fig. 3.73.- Flujo alrededor de una placa de longitud L . $w L/v = 3.0$

(ref. 1)

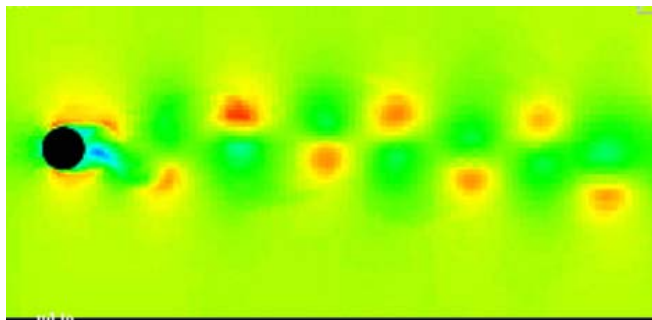


Fig. 3.74.- Estela de von Kármán para un cilindro estático

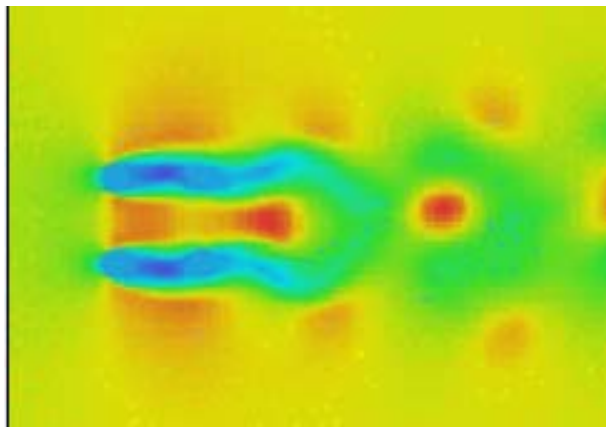


Fig. 3.75.- Flujo alrededor de cuatro cilindros

3.5 Formas de la estela para obstáculos móviles.

Se observa que la estela cambia conforme se mueve la sección.

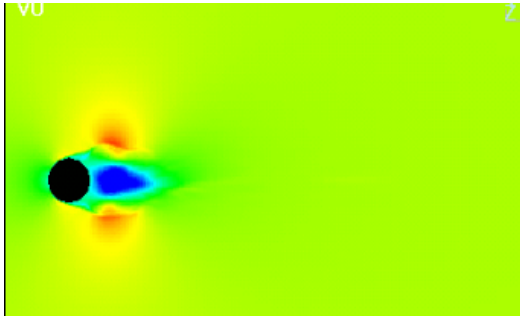


Fig. 3.76

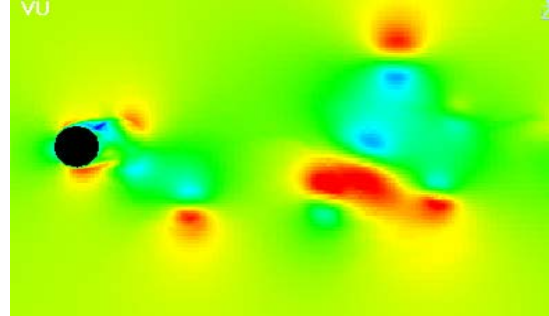


Fig. 3.80

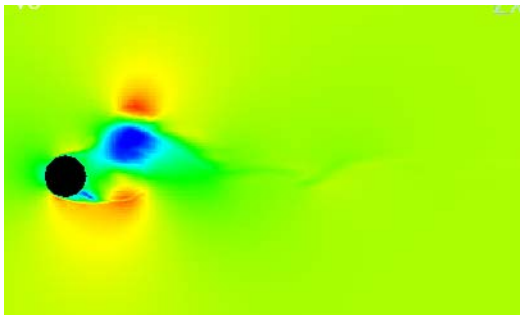


Fig. 3.77

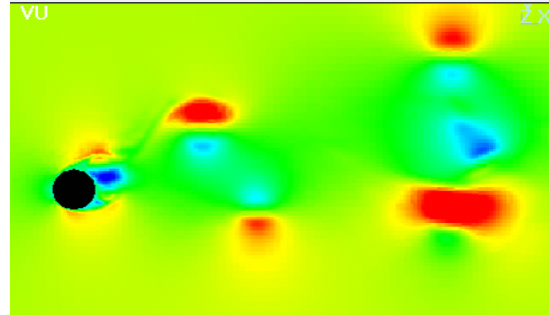


Fig. 3.81

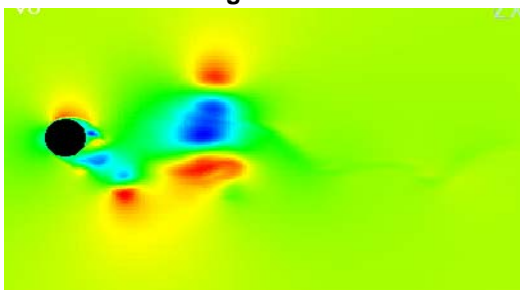


Fig. 3.78

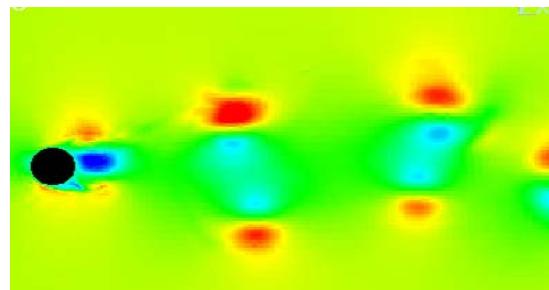


Fig. 3.82

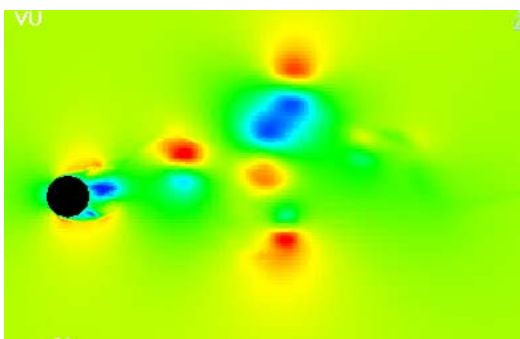


Fig. 3.79

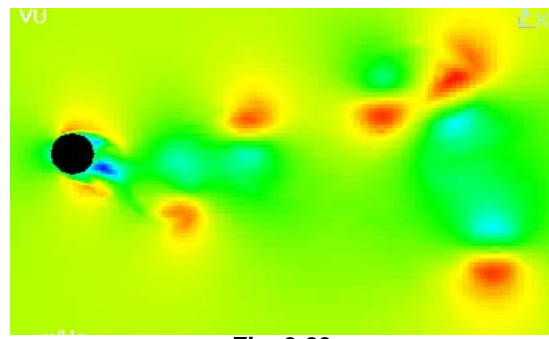


Fig. 3.83

Estela para dos cilindros en movimiento.

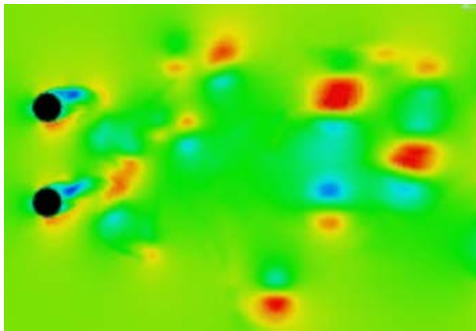


Fig. 3.84

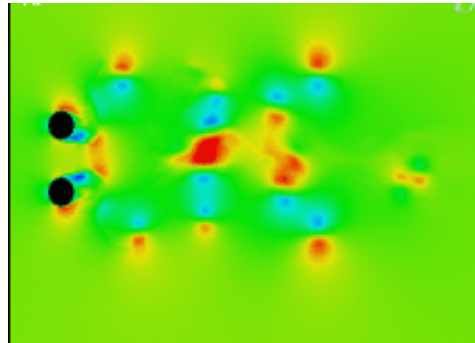


Fig. 3.86

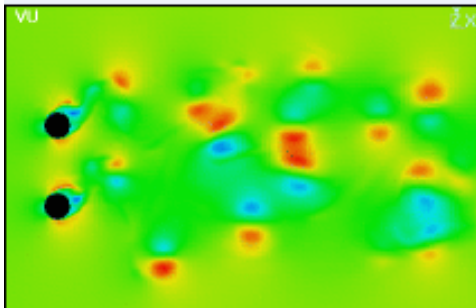


Fig. 3.85

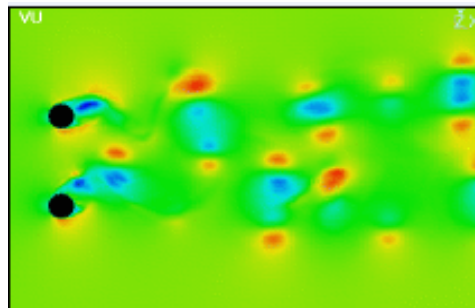


Fig. 3.87

Estela para una placa en movimiento

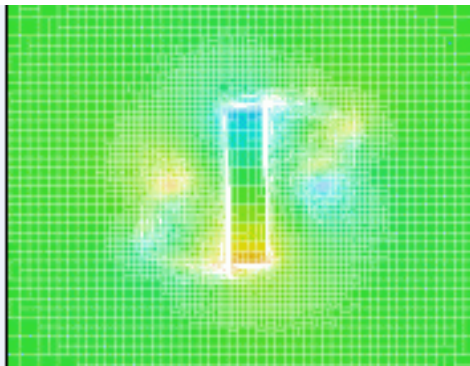


Fig. 3.88

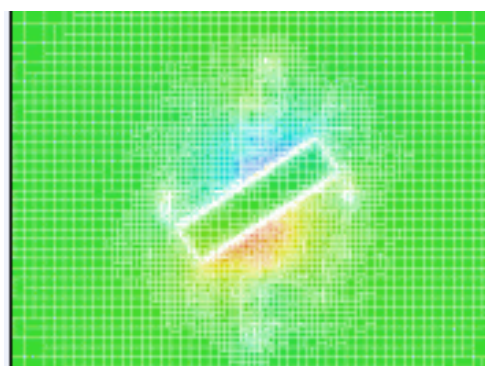


Fig. 3.89

IV. PARAMETROS ADIMENSIONALES.

4.1 Número de Reynolds.

El número de Reynolds es un parámetro crucial para las cargas del viento en secciones circulares. La descripción siguiente se refiere a los cilindros estacionarios.

$$R_e = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

Es válido en aquellos flujos a poca velocidad donde las fuerzas viscosas son las más importantes, interviene en fenómenos donde no hay superficies libres; es decir, problemas sujetos a presión.

El desprendimiento del vórtice de un cilindro circular liso en un flujo subsónico constante es función del número de Reynolds. Este se basa en la velocidad libre V de la corriente y el diámetro D del cilindro

Un número de Reynolds grande indica una influencia marcada de las fuerzas de inercia sobre las viscosas.

Se usa a menudo como un criterio de semejanza en las pruebas de modelos de naves aéreas, cuerpos sumergidos en un flujo, medidores de gasto, transiciones en conductos, en los cuales las características del flujo están sujetas a efectos viscosos.

Formación de las estelas con diferentes Números de Reynolds.

Los regímenes principales del desprendimiento del vórtice de un cilindro circular liso, resumidos por Lienhard (1966), se dan en la **tabla 4.1**:

CAPITULO IV. PARAMETROS ADIMENSIONALES.

<p>Diagrama que muestra un cilindro con flujo entrante desde la izquierda. Se indica la 'Capa límite' que se desarrolla sobre la superficie del cilindro. El punto donde el flujo se despegue se llama 'Separación'. La zona posterior al cilindro se denomina 'Región de la estela'.</p>		
	$Re < 5$	El flujo del fluido sigue el contorno del cilindro.
	$5 \leq Re < 40$	El flujo se separa en la parte posterior del cilindro y un par simétrico de vórtices se forman en la estela cercana.
La longitud de la estela de los vórtices aumenta linealmente con el número de Reynolds, alcanzando una distancia de tres diámetros del cilindro en un número de Reynolds de 45 (Nishioka y Sato, 1978). Mientras que el número de Reynolds aumenta, la estela comienza a ser inestable (Huerre y Monkewitz, 1990) y uno de los vórtices se rompe lejos (Friehe, 1980). Una estela periódica laminar de vórtices escalonados de signos opuesta se forma (calle del vórtice).		
	$40 \leq Re < 90$ y $90 \leq Re < 150$	Intervalos en los cuales la calle del vórtice es laminar.
	$150 \leq Re < 300$	Roshko (1954) encontró que, los vórtices que se rompen lejos del cilindro llegan a ser turbulentos, aunque la capa de límite en el cilindro sigue siendo laminar (intervalo de transición a turbulencia en el vórtice).
	$300 \leq Re < 3 \times 10^5$	La calle del vórtice es completamente turbulenta.
El número de Reynolds en el intervalo $300 < Re < 1.5 \times 10^5$ es llamado Subcrítico . Las capas de límite laminares se separan en cerca de 80 grados detrás de la nariz del cilindro y el desprendimiento del vórtice es fuerte y periódico.		
En el intervalo de transición , $1.5 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^6$, la capa límite del cilindro se convierte en turbulenta, el movimiento de los puntos de separación es de 140 grados detras del cilindro, y el coeficiente de retardo baja a 0.3 (Farell, 1981). En el rango de transición, las burbujas laminares de la separación y los efectos tridimensionales interrumpen el proceso regular del desprendimiento y ensanchan el espectro de las frecuencias del desprendimiento para las superficies cilíndricas lisas (Bearman, 1969; Jones, 1969; Farell y Blessmann, 1983; Achenbach y Heinecke, 1981).		
	$3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^6$	La capa límite laminar ha experimentado la transición turbulenta y la estela es más estrecha y desorganizada.
	$3.5 \times 10^6 \geq Re$	Rango Supercrítico , El Re-establecimiento de la turbulencia en la calle del vórtice (Roshko, 1961).

4.2 Número de Strouhal.

El número de Strouhal caracteriza la configuración vorticiosa correspondiente a cada sección transversa, para una velocidad del viento dada.

$$S = \frac{f_s D}{V_\infty}$$

El número de Strouhal (**S**) es un parámetro adimensional, constante entre la frecuencia de formación o desprendimiento del vórtice (**f_s**) y la velocidad libre del flujo de la corriente fuera de la estela (**V_∞**) dividida por el diámetro del cilindro (**D**). V_∞ y D deben tener unidades constantes. Es decir, si D está en metros, después V_∞ debe estar en metros por segundo, o si D está en pulgadas, V_∞ debe ser en pulgadas por segundo.

Este número es importante en flujos relacionados con la formación del vórtice, movimientos de ondas y efectos de vibración en cuerpos colocados en un flujo.

El número de Strouhal para un sección circular, se mantiene constante, aproximadamente igual a 0.2, hasta R_e = 2 x 10⁵, valor próximo al que corresponde a la contracción de la estela, que es de 3 x 10⁵. A partir de este valor, "S" vuelve a crecer rápidamente, y alcanza el valor máximo de 0.43 para R_e = 1.5 x 10⁶, después disminuye.

Dupin y Teissié-Solier estudiaron otras formas de cuerpos prismáticos, de sección cuadrada de lado D, oponiéndose un lado a la corriente, para la cual resultó, para números de Reynolds no demasiado grandes, el valor límite S = 0.130, y para secciones de ancho D y largo 2√2D, se obtuvieron los siguientes resultados:

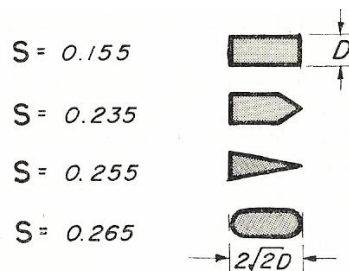
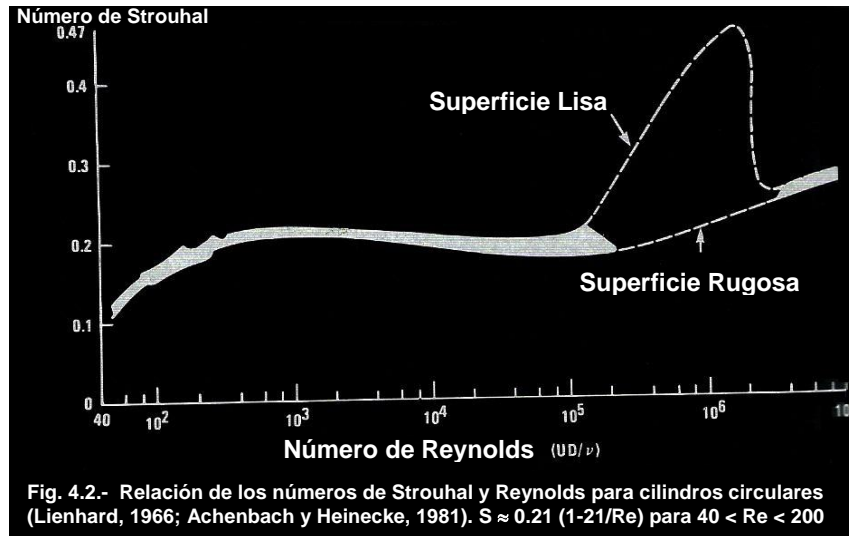


Fig. 4.1 Número de Strouhal para diferentes secciones.

* Se puede duplicar su valor para cuerpos muy próximos entre sí.

NUMERO DE STROUHAL PARA DIFERENTES SECCIONES.

El número Strouhal de un cilindro circular estacionario en un flujo subsónico es función del número de Reynolds y, en grado menor a la superficie rugosa y turbulencia libre de la corriente (Fig. 4.2).



En el intervalo transitorio, $2 \times 10^5 < Re < 2 \times 10^6$, Achenbach y Heinecke (1981) encontraron que los cilindros superficiales muy lisos tenían una estela caótica, desorganizada de alta frecuencias y con números de Strouhal de hasta 0.5, mientras que los cilindros con superficie áspera (aspereza superficial $\varepsilon/D = 3 \times 10^{-3}$ o mayor, donde ε es una característica de aspereza superficial) se organizan, en estelas periódicas con número de Strouhal igual a 0.25. En el régimen transitorio del número de Reynolds, la vibración inducida del vórtice de cilindros ocurre generalmente en $S \approx 0.2$ más bien que los números más altos de Strouhal sugeridos por la **figura 4.2** (Coder, 1982).

El desprendimiento del vórtice ocurre en grupos de algunos cilindros (Vickery y Watkins, 1962; Zdravkovich, 1985) y en órdenes grandes de cilindros (Weaver y Adb-Rabbo, 1985). Estudios de Fitzhugh (1973) de números de Strouhal para el flujo dentro de cilindros ordenados, se muestran en la Fig. 4.3 y 4.4. Estos números de Strouhal se basan en el diámetro del tubo y del promedio de la velocidad del flujo a través del área mínima entre los cilindros. Estos números de Strouhal, caracterizan un pico en el espectro de la turbulencia dentro del arreglo. En arreglos de tubos cercanamente espaciados, con un espaciamientos de centro a centro de los tubos menor que 1.5 diámetros, la frecuencia asociada al desprendimiento, produce una turbulencia de banda ancha.

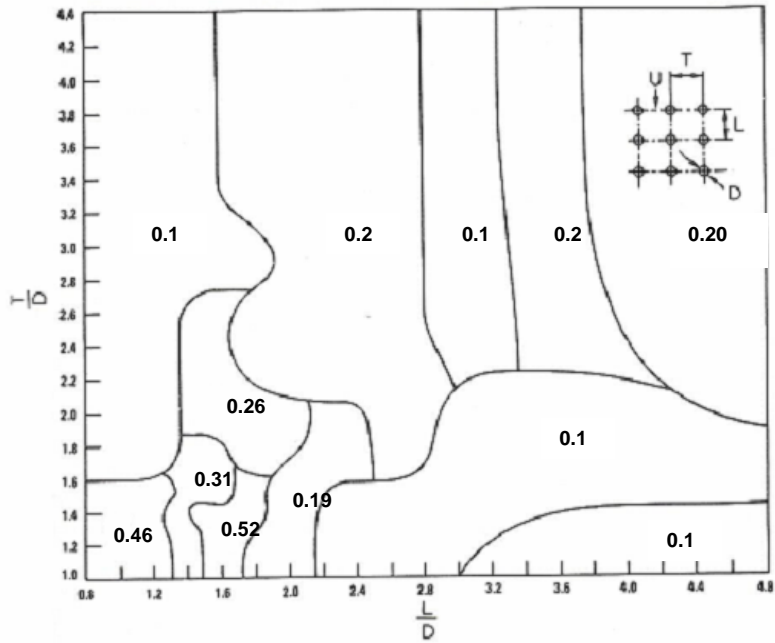


Fig. 4.3.- Número de Strouhal para arreglos de cilindros en línea (Fitzhugh, 1973).

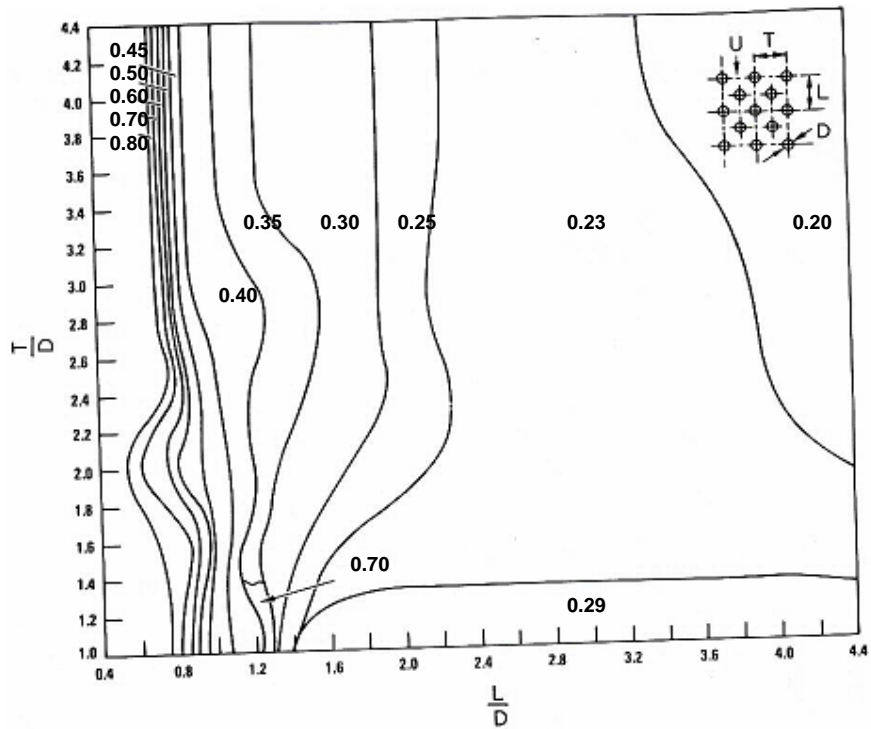


Fig. 4.4.- Número Strouhal para arreglos de cilindros escalonados

Las secciones no circulares también desprenden vórtices. Las Fig. 4.5 y 4.6 proporcionan números de Strouhal para secciones no circulares y algunos cuerpos tridimensionales, además la tabla 3 presenta números de Strouhal para diferentes tipos de perfiles típicos en ingeniería.

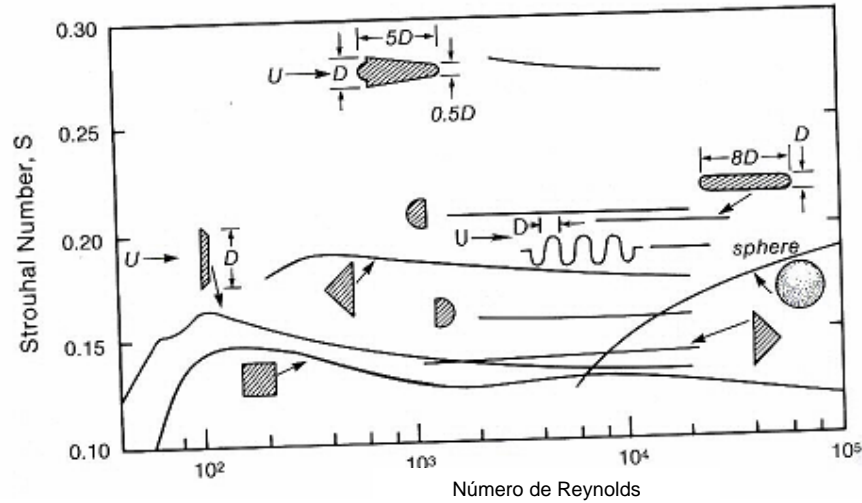


Fig. 4.5.- Número Strouhal para secciones no circulares. El Flujo es de izquierda a derecha.

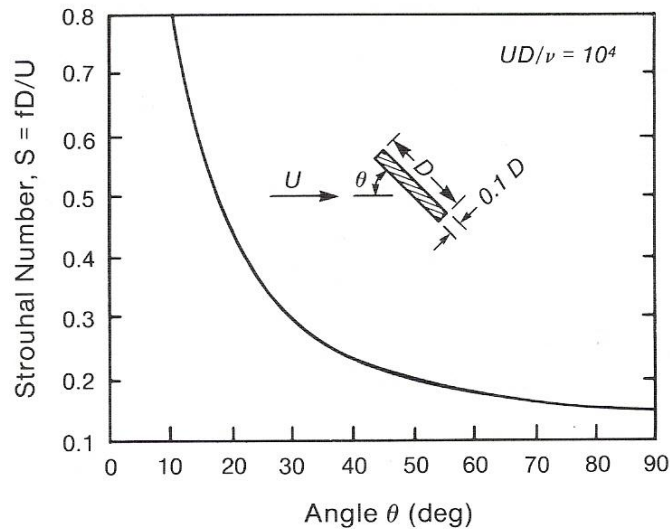


Fig. 4.6.- Número Strouhal para una placa plana inclinada.

CAPITULO IV. PARAMETROS ADIMENSIONALES.

TABLA No. 4.2 Número de Strouhal para diversos perfiles.

VIENTO	DIMENSIONES DEL PERFIL EN mm	S	VIENTO	DIMENSIONES DEL PERFIL EN mm	S
		0.120			0.147
		0.137			
		0.120			0.150
		0.144			0.145
					0.142
					0.147
		0.145			0.131
					0.134
					0.137
		0.140			0.121
		0.153			0.143
		0.145			0.135
		0.168			
		0.156			0.160
		0.145			
Cylinder $11800 < R < 19100$		0.200			0.114
					0.145

4.3 Número de Scruton.

Cuando una estructura vibra la energía disipada se caracteriza por su factor de amortiguamiento.

$$\zeta = \frac{\text{Energía disipada por ciclo}}{4\pi \times \text{energía total de la estructura}} = \text{Factor de amortiguamiento}$$

Si la entrada de energía a una estructura por el flujo es menor que la energía gastada en el amortiguamiento, entonces las vibraciones inducidas del flujo disminuirán. Muchas estructuras reales tienen factores de amortiguamiento del orden de 0.01 (1% del crítico).

Un parámetro muy útil, conocido como masa de amortiguamiento, amortiguamiento reducido o número de Scruton⁵, se puede formar por el producto de la relación de masas y el factor del amortiguamiento; Este es un controlador muy importante de las amplitudes máximas de respuestas por desprendimientos de vórtices; debido a que si se incrementa el amortiguamiento, se reduce la vibración inducida por el flujo.

$$S_c = \frac{4\pi m_e \zeta_T}{\rho D^2} = \text{amortiguamiento reducido}$$

(Masa * Relación de amortiguamiento/ densidad * dim. característica)

Scruton (1957) demostró que la máxima amplitud de una respuesta inducida por desprendimiento de vórtices, para un cilindro circular inmerso en un flujo suave, esta influenciada por el Número de Scruton.

4.4 RELACIÓN ENTRE LAS FRECUENCIAS DE VÓRTICE Y ESTRUCTURA.

Una vez conocido el número de Strouhal, se puede calcular las frecuencias de las vibraciones del obstáculo debida a la formación de los vórtices alternos. Este estudio es importante, especialmente, en estructuras muy esbeltas, que pueden colapsar si se crea una resonancia, cuando esta frecuencia es próxima a la frecuencia de vibración propia a la estructura o a alguna de sus frecuencias armónicas.

Las vibraciones más significativas ocurren cuando la frecuencia de excitación y la frecuencia natural de la estructura coinciden (Resonancia).

El desprendimiento de vórtices genera una variación periódica en la presión sobre la superficie de la sección. Cuando la frecuencia de esta variación se acerca a una de las frecuencias naturales de una estructura, la vibración inducida por el vórtice ocurre.

⁵ **Nota:** Ver deducción del número del Número de Scruton a través de Vibraciones inducidas por el vórtice basadas en el modelo espectral desarrollado en la referencia No. 3

V. VELOCIDAD REDUCIDA CRÍTICA.

Cuando se aumenta la velocidad es común recurrir, al concepto de velocidad reducida en estructuras flexibles.

$$V_R = \frac{\bar{V}}{nD}$$

La velocidad reducida es un parámetro adimensional, que controla las características de vibración de una estructura.

En la primera velocidad reducida crítica (V_R), presenta incremento de desplazamiento por la aparición de vórtices de Benard, que se desprenden de la superficie de la estructura y provocan la aparición de circulación alrededor de la superficie del obstáculo.

El cambio de circulación producido por la separación alterna de vórtices, induce fuerzas transversales a la dirección predominante del viento.

La velocidad crítica a la que se generan vórtices importantes es dependiente de:

- a) La velocidad media del viento.
- b) Las características geométricas del cuerpo.
- c) Las características dinámicas de la estructura.

Estos factores definen a un número adimensional, el número de Strouhal (S), que se ha definido ampliamente para cuerpos con diversas formas.

Cuando el flujo alcanza una velocidad reducida.

$$V_R = \frac{1}{S}$$

Se alcanza una condición crítica, en la cual se generan vórtices que provocan fuerzas transversales y vibraciones importantes en la estructura.

En la aparición de los vórtices, los desplazamientos que provocan dependen de un número adimensional importante, el número de Scruton, pues este depende del nivel de amortiguamiento de la estructura.

Al sustituir en la condición crítica.

$$V_{CR} = \frac{nD}{S}$$

Es la velocidad del viento en la cual se producen los vórtices.

Se observa que al sustituir $n = \frac{1}{T}$ Donde T es el periodo natural de la estructura.

$$V_{CR} = \frac{D}{TS}$$

Para un cilindro circular para el cual $S = 0.2$ y de diámetro D resulta:

$$V_{CR} = \frac{5D}{T}$$

De esta expresión se observa que en estructuras muy rígidas, con periodos muy pequeños, la velocidad crítica puede llegar a ser muy grande; en comparación con una estructura flexible, las cuales tienen un periodo largo.

Se han generado ya procedimientos para modificar la velocidad crítica que produce inestabilidad por la aparición de vórtices.

5.1 PROCEDIMIENTOS PARA MODIFICAR LA ESTELA VORTICOSA.

- a) Procedimientos para alterar la rigidez de la estructura, al modificar su periodo, con lo que cambia la primera velocidad crítica.
- b) Incremento en el nivel de amortiguamiento, para lograr que $S_C > 40$ para la cual los desplazamientos se abaten notablemente.
- c) El uso de dispositivos que modifiquen la aparición de vórtices.

En este último enfoque se tiende a recurrir a:

1. Colocación de barras contra vórtices (spoilers).
2. Colocación de cuerpos perforados que rodean a la estructura (mortajas).
3. Colocación de dispositivos de amortiguamiento viscoso adicional, para modificar el número de Scruton.

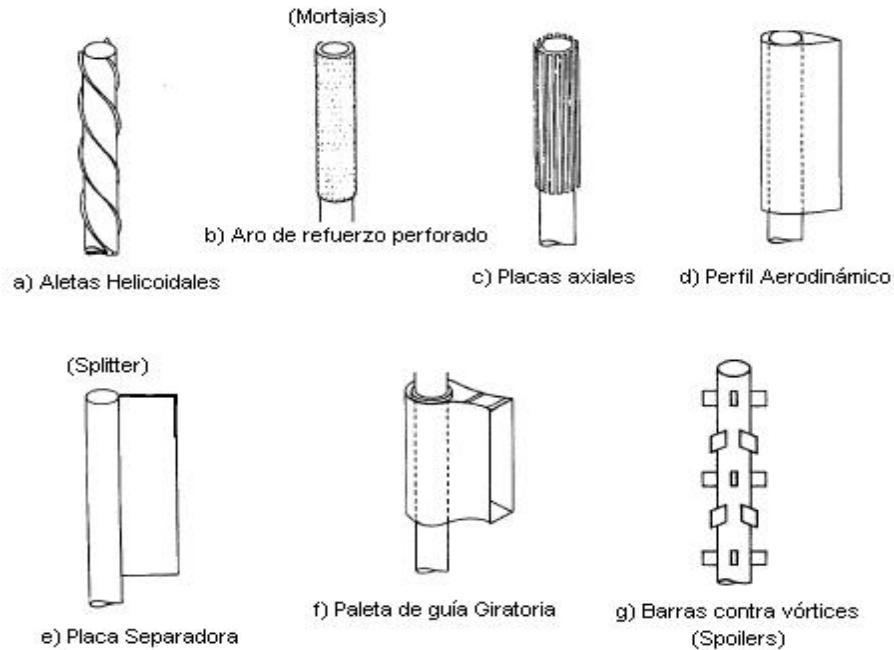


Fig. 5.1 Dispositivos comunes para suprimir la vibración inducida por vórtices.

5.1.1 Aros o Cubiertas de Refuerzo (Mortajas).

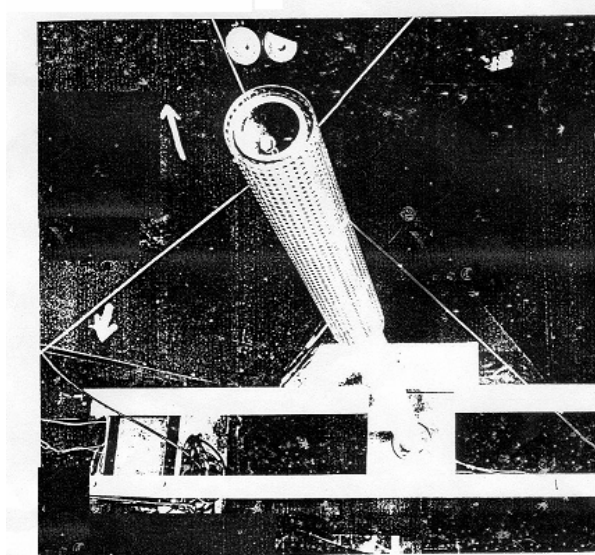


Fig. 5.2 Aro o Cubierta de Refuerzo (mortajas).

En 1956, P. Price reveló los resultados de una investigación extensa en la Universidad de Stanford, California, usando una cubierta circular perforada que le colocó a un cilindro. Las pruebas del túnel de viento demostraron que la cubierta era un supresor eficaz de la vibración en los valores subcríticos y transitorios del número de Reynolds (Hasta $R = 4 \times 10^5$).

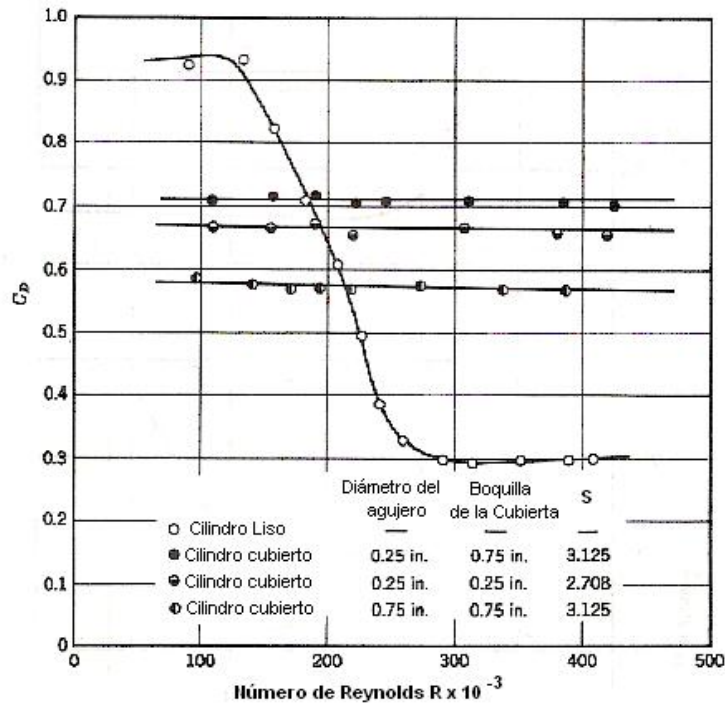


Fig. 5.3 Coeficiente de arrastre C_D para cilindros contra número de Reynolds con diámetro de 6 in

La figura 5.3 muestra el efecto marcado de los tres diseños del aro de refuerzo, que se aplicó a un cilindro circular con 6 in de diámetro, con varias combinaciones del diámetro de boquete del aro de refuerzo y del agujero de la perforación. Una característica importante con respecto al efecto del aro de refuerzo es que la fricción fue reducida drásticamente en el intervalo de transición del número de Reynolds; esto, para cada uno de las tres aros de refuerzo, mostró que el coeficiente de arrastre resultó constante en el intervalo supercrítico, hasta el límite de la velocidad del viento disponible.

Cualquiera de las tres cubiertas mencionadas en la Fig. 5.3 demostraron ser eficaces en suprimir la excitación del vórtice en los números subcríticos, transitorios y supercríticos de Reynolds. La cubierta eliminó virtualmente la oscilación periódica de un modelo rígido, en números de Reynolds en régimen transitorio y supercrítico.

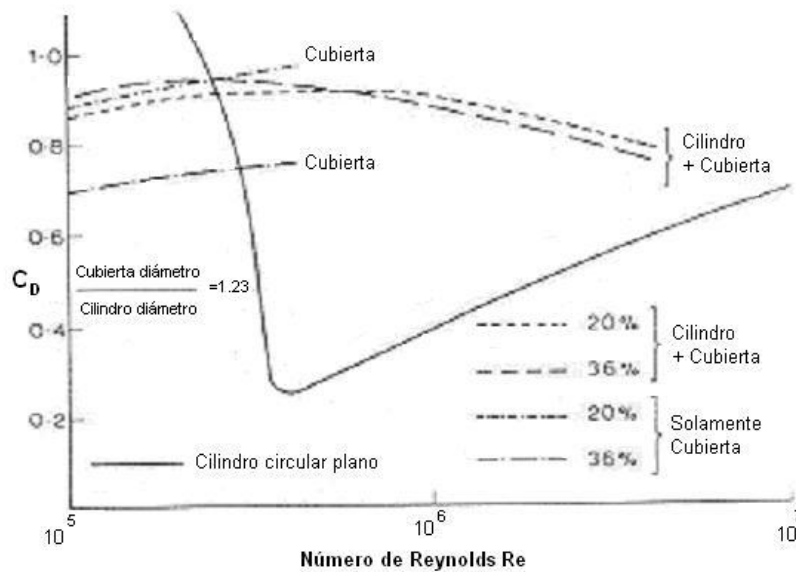


Fig. 5.4 Coeficiente de arrastre C_D contra número de Reynolds en los intervalos Supercríticos y Poscríticos

En la figura 5.4 se destaca el cambio del coeficiente de arrastre con números de Reynolds mayores a los representados en la figura 5.3. La cubierta colocada eliminó el efecto de los vórtices.

5.1.2 ALETAS HELICOIDALES.

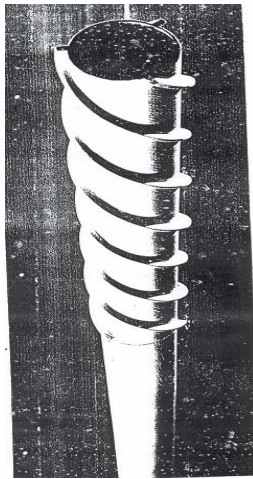


Fig. 5.5 Aletas Helicoidales

En 1957, C. Scruton y D. E. J. Walshe publicaron resultados de una investigación experimental que realizaron en el Laboratorio de Física Nacional, (Teddington, Inglaterra), que logró el mismo resultado que el alcanzado por Price, pero en una manera que prometía ser más universalmente aceptable en todos los tamaños y longitudes de miembros de sección transversal circular, y además es aplicables a los miembros con forma de huso.

CAPITULO V. VELOCIDAD REDUCIDA CRITICA.

Este dispositivo implica el uso de aletas helicoidales que se colocan en espiral alrededor de un cilindro circular. Las aletas son rectangulares en la sección transversal y su eficacia es dependiente en su número, altura, y echada.

El experimento consistió en un tubo de aluminio de 4 1/4 pulgada de diámetro, 61 pulgadas de largo, donde se montaron resortes horizontales en un túnel de viento, con libertad para oscilar en una dirección vertical solamente.

Las aletas fueron hechas de caucho de 1/4 de pulgada de ancho de varias alturas. Con tres aletas torcidas en espiral igualmente espaciadas de 15 D de separación y de altura 0.12 D las oscilaciones debidas al viento eran apenas perceptibles. La amplitud máxima encontrada en la sección plana fue igual a 0.75 D; con las aletas, resulto próxima a 0.05 D. La Fig. 5.6 muestra el límite de la inestabilidad para un tubo desnudo, con respecto a un tubo adaptado con las aletas, en donde "M" representan la masa por unidad de longitud.

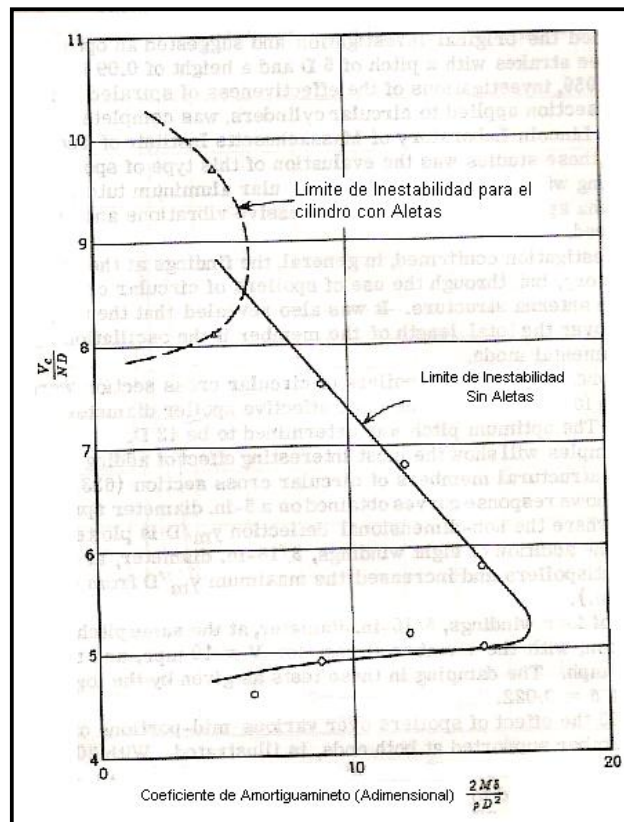


Fig. 5.6 Límite de Inestabilidad para un tubo con y sin aletas

Experimentos más detallados en 1959 de L. Woodgate y de J. F. Maybrey ampliaron la investigación original y sugirieron un arreglo óptimo de tres aletas con una separación de 5 D y una altura de 0.09 D.

Durante 1959, las investigaciones de la eficacia de interceptores aerodinámicos torcidos en espiral, adicionados al cilindro, fueron terminadas por W. Weaver en el laboratorio de Lincoln del Instituto de Tecnología de Massachusetts. El propósito de éstos era estudiar la evaluación de este tipo de dispositivo como un medio de eliminar el movimiento inducido por el desprendimiento de vórtices en miembros tubulares de aluminio para antenas de radar en los cuales las vibraciones excesivas y las fallas por fatiga han ocurrido.

Esta investigación confirmó, en general, los resultados en el Laboratorio de Física Nacional, pero con el uso de las aletas en las antenas de sección transversal circular mueven hacia arriba a la estructura de la antena, lo que ocasiona un efecto desfavorable. También fue revelado que el interceptor aerodinámico no necesita ser aplicado sobre la longitud total del miembro, si la oscilación fue confinada al modo fundamental.

Se concluyó que los interceptores aerodinámicos de sección transversal circular, fueron más efectivos con cuatro aletas. El diámetro debe ser $3D/32$. La separación óptima fue determinada en 12 D.

Estas investigaciones ofrecen la primera solución verdaderamente práctica para el problema de la vibración inducida por el vórtice. Sin embargo, se debe señalar que estos dispositivos no son eficaces en el intervalo supercrítico del número de Reynolds.

Posteriormente, Scruton reportó que las aletas espirales, de sección transversal rectangular, se han aplicado con éxito a una chimenea de acero de 250 fts que había oscilado en el viento. Al final de 18 meses, esta chimenea no había demostrado ninguna otra oscilación. Esto muestra que los interceptores aerodinámicos en espiral, de sección transversal rectangular, son efectivos en números supercríticos de Reynolds como resultado de los bordes agudos presentados por las aletas torcidas en espiral.

Como conclusión; los efectos causados por la formación periódica de vórtices son reducidos o eliminados por la circulación de aire, cuando se adicionan aletas. El diseño de estas es importante para una reducción eficaz de oscilaciones inducidas por el desprendimiento de vórtices. Una desventaja con el uso de aletas helicoidales, es una creciente área proyectada en la parte superior de la estructura y el incremento del coeficiente de arrastre, lo que ocasiona cargas mayores debidas al viento de la ráfaga.

5.1.3 Barras contra vórtices.

En la figura 5.7 se muestra una gráfica detallada para cilindros con 3 barras para contrarrestar la acción de los vórtices, donde se compara el número de Reynolds contra el Coeficiente de arrastre en función del diámetro de la sección.

Estos valores, al igual que para el caso de las aletas helicoidales, fueron obtenidos de un detallado análisis experimental.

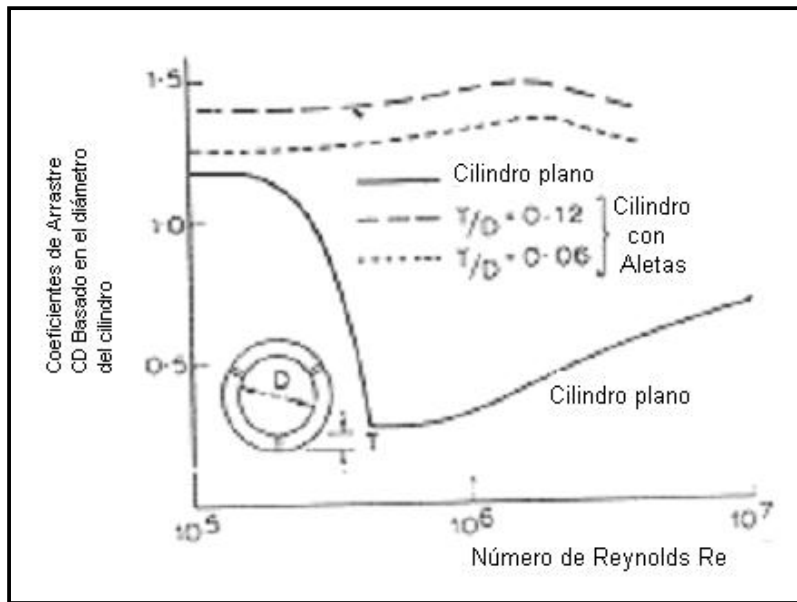


Fig. 5.7 Número de Reynolds contra Coeficiente de arrastre para un cilindro con barras contra vórtices.

5.1.3 DISPOSITIVOS DE AMORTIGUAMIENTO.

Cuando no se puede actuar sobre las causas que producen las oscilaciones, se recurre a otros métodos.

La energía de excitación de una estructura se puede absorber y disipar en dispositivos ajenos a la estructura (*disipadores de energía*) o puede ser “desviada”, produciendo vibraciones que no afectan a la estructura.

Los *disipadores de energía* se conectan a la estructura de manera que cuando esta vibra, se generan deformaciones en estos y así se disipa la energía. Como no tienen que resistir el peso de la construcción, suelen ser dispositivos sencillos y económicos. Los principales mecanismos propuestos se basan en la plastificación o extrusión de metales dúctiles, deformación de materiales viscoelásticos, deslizamiento en superficies de fricción y flujo de fluidos viscosos. La mayor parte de estos dispositivos pueden ser combinados en serie y en paralelo.

Los *amortiguadores de masa*, modifican las oscilaciones de una estructura por medio de fuerzas de inercia; es decir, en vez de disipar la energía la redistribuyen, para que afecte a modos de vibración que no dañan la estructura principal.

Un *amortiguador de masa sintonizada*, es un sistema secundario muelle-amortiguador-masa cuya frecuencia natural es muy próxima a la de la propia estructura. De esta forma, gran parte de la energía de la excitación se emplea en acelerar la masa secundaria y se reduce la oscilación de la estructura principal. Los amortiguadores de masa sintonizada, se utilizan sobre todo para reducir las oscilaciones horizontales de construcciones esbeltas (edificios altos, torres de comunicación, torres y tableros de puentes colgantes, etc.) aunque también se han utilizado para reducir las oscilaciones verticales en tableros de puentes sometidos a la acción del viento.

En el empleo de los *amortiguadores líquidos sintonizados* la masa se sustituye por un fluido (agua, fluido con propiedades magnéticas, soluciones coloidales, barro pesado, etc.) cuyas oscilaciones (oleaje) producen el efecto de amortiguamiento deseado.

Cuando cualquiera de estos mecanismos que disipan la energía o reducen las oscilaciones de la estructura, mediante fuerzas de inercia son mecanismos inertes (es decir, no está alimentado por ninguna fuente de energía y, por tanto, su comportamiento no puede ser modificado en tiempo real) se trata de un dispositivo de *control pasivo*. Por tanto, no se pueden adaptar a las características inesperadas de la excitación. Sin embargo, si se conocen los principales parámetros de las cargas dinámicas, estos sistemas son altamente eficaces.

El funcionamiento de los dispositivos de *control activo*, es parecido al de los pasivos, con la diferencia de que en vez de dispositivos inertes se colocan mecanismos *actuadores* alimentados por fuentes de energía, que son capaces de “empujar” a la estructura para contrarrestar el efecto de la excitación. Además, su comportamiento se puede controlar, en función de la situación de la estructura, que es conocida gracias a un *controlador*.

Los *sistemas semi-activos* se distinguen de los activos en que los actuadores reciben sólo un pequeño aporte de energía, por lo que no son capaces de mover la estructura, sino sólo de frenarla. En definitiva, pueden “absorber” energía del sistema, pero no pueden proporcionársela. Los *sistemas híbridos* consisten en una combinación de un sistema activo (o semi-activo) y uno pasivo. El pasivo puede producir la mayor magnitud de reducción mientras que el activo puede proporcionar el “ajuste fino”.

5.2 EFECTOS EN ESTRUCTURAS ESBELTAS POR LA GENERACIÓN DE VÓRTICES.

Quando no se utilizan los dispositivos para evitar la aparición de los vórtices existen recomendaciones para cilindros que permiten definir la fuerza transversal por unidad de longitud que provocan la separación de vórtices en 1/3 de la parte superior del cilindro; procedimiento de análisis descrito en el reglamento Canadiense [Ref. 18].

$$F_L = \frac{C_1}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\beta - C_2 \frac{\rho D^2}{M}}} q_H D \quad V_H = \frac{nD}{S} \quad q_H = 0.6 V_H^2$$

Donde:

- β Relación de amortiguamiento crítico.
- λ Relación de aspecto (H/D)
- H Altura de la estructura
- S Número de Strouhal.
- n Frecuencia en Hz.
- D Diámetro de la sección transversal en mts.
- q_H Presión de velocidad correspondiente a V_H . (N/m²)
- V_H . Es la velocidad media de aparición de los vórtices en la parte superior de la estructura en m/s.
- M Promedio de masa por unidad de longitud a 1/3 de la parte superior de la estructura.
- ρ Densidad del aire igual a 1.2 Kg/m³

$$C_1 = 3.0 \text{ Para } \lambda > 16; C_1 = \frac{3\sqrt{\lambda}}{4} \text{ Para } \lambda < 16$$

$$C_2 = 0.6$$

La aparición de esta fuerza genera desplazamientos en el sentido transversal de la dirección del viento medio ocasionando severas vibraciones en estructuras esbeltas que ocasionalmente las llevan a la fatiga en su base y a la inminente falla de sus propiedades estructurales; es por esto, que es recomendable el uso de los dispositivos mencionados anteriormente para eliminar la acción del viento en un flujo inestable.

5.3 ACCIÓN DEL VIENTO EN FLUJO INESTABLE,

En ocasiones al actuar el viento en estructuras ligeras, con bajo nivel de amortiguamiento, ellas se pueden dañar cuando se genera inestabilidad en el flujo generado por la interacción Fluido-Estructura.

En algunos flujos, la inestabilidad se genera cuando la estructura inicia su movimiento, lo cual modifica las fuerzas aerodinámicas alrededor de la estructura y se presentan fluctuaciones inestables que pueden inducir vibraciones resonantes o cambios bruscos en la interacción aerodinámica.

La inestabilidad se puede presentar tanto en flujo laminar⁶ como en flujo turbulento⁷, aunque la importancia de las fluctuaciones depende de la turbulencia.

Se han identificado hasta nuestros días en flujo subsónico, cuatro tipos diferentes de inestabilidad.

- a) Resonancia con el desprendimiento de vórtices.
- b) Galopeo.
- c) Efectos en interferencia de estructuras vecinas.
- d) Desprendimiento de la capa límite y aleteo.

Según sean las condiciones del viento (velocidad, uniformidad, carácter estacionario o no estacionario) y de la geometría y propiedades estructurales del obstáculo se producirá un fenómeno aeroelástico determinado. Los diferentes fenómenos que pueden producirse son:

1. Desprendimiento de vórtices.
2. *Galope transversal*: Es una inestabilidad típica de estructuras esbeltas de sección rectangular, si la estructura oscila en la dirección transversal al flujo, las fuerzas aerodinámicas tienden a reforzar las oscilaciones que pueden alcanzar una amplitud de una a más de diez veces la dimensión transversal de la estructura.
3. *Galope inducido por la estela*: Dos cilindros esbeltos alineados, bajo ciertas condiciones, pueden sufrir oscilaciones de galope, generadas por la estela turbulenta del primero.

⁶ El flujo laminar se caracteriza por que el movimiento de las partículas se produce siguiendo trayectorias separadas perfectamente definidas paralelas.

⁷ En un flujo turbulento las partículas se mueven sobre trayectorias completamente erráticas, sin seguir un orden establecido.

VI. FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL MÉTODO DE LOS PANELES.

Aunque es deseable tener métodos analíticos que puedan sustituir las pruebas experimentales en el túnel de viento, hasta 1995, no se contó con ellos. La teoría de flujos bidimensionales o tridimensionales con potencial no puede representar fenómenos en los que haya separación del flujo, puesto que trata con flujos ideales no viscosos. Sin embargo, proporciona cuando menos una idea de los resultados que se pueden esperar en las investigaciones experimentales. Por esta razón se dedica este capítulo a los flujos bidimensionales con potencial y se desarrolla un programa de elementos de frontera, el método de los paneles, para estudiar diversos cuerpos bidimensionales.

6.1 FLUJOS SOBRE CUERPOS SIMÉTRICOS.

El flujo alrededor de ciertos cuerpos acotados por superficies de revolución, puede ser modelado empleando una fuente y un sumidero de gastos idénticos. De acuerdo con esto, es natural especular sobre la posibilidad de modelar el flujo sobre cuerpos, de forma más general, mediante diversas fuentes y sumideros distribuidos sobre uno de los ejes coordenados. Desde principios de siglo, 1911, se consiguió hacerlo para cuerpos factibles de encontrar en la práctica. El método consiste en determinar el cuerpo resultante de una distribución específica de fuentes y sumideros, para propósitos de análisis y diseño, interesa resolver el problema inverso, de saber seleccionar la variación de gastos de fuentes, (un sumidero corresponde a una fuente con gasto negativo), para obtener el flujo alrededor de una forma dada.

Este problema se solucionó en 1924 para cuerpos esbeltos. El método consiste en distribuir fuentes o dobletes en las abscisas, dentro del cuerpo, y proporciona resultados aproximados, a menos que el cuerpo sea infinitamente delgado y la pendiente de su contorno sea muy pequeña. Por esta razón dejaremos a un lado este método y se presenta el método de los paneles.

El método de paneles descrito aquí modela el flujo potencial alrededor de un cuerpo; distribuyen fuentes sobre su superficie. Así se puede calcular el flujo potencial sobre un cuerpo de cualquier forma, con una gran precisión. El método fue desarrollado en la "Douglas Aircraft Company" en 1967.

Cuando un cuerpo se coloca en un flujo uniforme de velocidad V , de idéntica manera que para el caso del cuerpo oval de Rankine, entonces el potencial de velocidad para el flujo uniforme que se aproxima, puede ser superpuesto a la red de flujo perturbado, alrededor del cuerpo, para obtener un potencial total de velocidad, de la forma:

$$\phi = Vx + \varphi$$

Donde φ es el potencial de perturbación.

Se puede demostrar que el flujo potencial de perturbación alrededor de un cuerpo, de cualquier forma, se puede modelar por medio de una distribución de fuentes sobre la superficie del cuerpo como se muestra esquemáticamente en la figura 6.1.

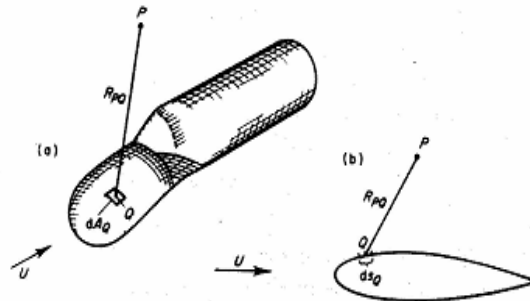


Fig. 6.1 Fuentes distribuidas en la superficie del cuerpo. (a) Cuerpos tridimensionales con fuentes por unidad de área. (b) Cuerpo bidimensional con fuentes por unidad de arco.

Con elementos diferenciales de área y de arco, de los puntos P y Q y de la distancia R_{PQ} que los separa, se puede demostrar que el potencial de velocidad total en el punto P, debido a las fuentes por unidad de arco o de área distribuidas en todos los elementos diferenciales Q, está dado por:

$$\varphi_P = Vx + \int \sigma_Q \ln R_{PQ} ds_Q \quad \text{Para el caso bidimensional.}$$

$$\varphi_P = Vx + \iint \left(\frac{\sigma_Q}{R_{PQ}} \right) dA_Q \quad \text{Para el caso tridimensional.}$$

Donde σ_Q gasto de las fuentes por unidad de arco o área según sea el caso.

Estas integrales son la base del método de los paneles. Este consiste en solucionar numéricamente dichas ecuaciones después de discretizar la superficie del cuerpo en elementos de frontera (paneles). Para el problema tridimensional se seleccionan elementos de frontera cuadriláteros y elementos lineales rectos, para el bidimensional, como se indica en la figura 6.2.

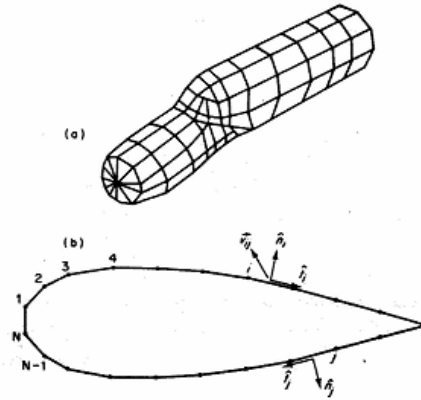


Fig. 6.2. Discretización de la superficie del cuerpo. (a) Cuerpo tridimensional con fuentes elementos de frontera bidimensionales. (b) Cuerpo bidimensional con líneas rectas como elementos de frontera.

Para cuerpos simétricos bidimensionales.

El primer paso del método de los paneles, es de numerar, de 1 hasta N, los vértices o nodos de los elementos de los elementos de frontera seleccionados, como se indica en la figura 6.2; hecho esto, se admitirá que a cada panel y a su punto medio, conocido como punto de colocación, les corresponde el número del nodo que se tiene a la izquierda, cuando se observa el panel desde afuera del cuerpo. Los puntos de colocación serán los puntos en los que se cumplirán las condiciones de frontera de flujo perpendicular nulo y donde se evaluarán las velocidades y presiones.

En la figura 6.2 se definen los vectores unitarios, n_i y t_i , tangencial y normal al elemento de frontera "i" respectivamente. El método de los paneles considera que en cada panel se distribuyen uniformemente fuentes de igual gasto por unidad de longitud, (problema bidimensional), pero que este puede variar de un panel a otro. Las fuentes distribuidas sobre un panel "j" cualquiera inducen una velocidad, denotada por el vector V_{ij} , en el punto de colocación i. Las componentes de V_{ij} perpendicular y tangencial a la superficie en el punto de colocación i están dadas por los productos escalares $V_{ij} \cdot n_i$ y $V_{ij} \cdot t_i$ respectivamente. Ambas cantidades son proporcionales al gasto de las fuentes, σ_j , del panel j y por lo tanto pueden ser escritas en las formas:

$$V_{ijn} = V_{ij} \cdot n_i = \sigma_j N_{ij} \qquad V_{ijt} = V_{ij} \cdot t_i = \sigma_j T_{ij}$$

N_{ij} y T_{ij} son las velocidades perpendicular y tangencial inducidas en el punto de colocación del panel i por las fuentes de gasto unitario, distribuidas sobre el panel j; se conocen como coeficientes de influencia normal y tangencial.

La velocidad total perpendicular a la superficie en el punto de colocación i es la suma de las velocidades perpendiculares inducidas por cada uno de los N

paneles, más la contribución del flujo uniforme con dirección al eje de simetría. Por tanto:

$$V_{ni} = \sum^N \sigma_j N_{ij} + V \cdot n_i$$

De manera similar, la velocidad tangencial en el punto de colocación i está dada por:

$$V_{ni} = \sum^N \sigma_j T_{ij} + V \cdot t_i$$

Si la superficie representada por los paneles corresponde a una superficie sólida, entonces, la velocidad perpendicular total debe ser nula. Esta condición puede ser representada matemáticamente como:

$$V_{ni} = 0 \quad \text{y por lo tanto:} \quad \sum^N \sigma_j N_{ij} = -V \cdot n_i$$

Esta última ecuación define un sistema de ecuaciones lineales algebraicas, para los N gastos incógnitas σ_j y puede ser resuelto una vez que se conozcan los coeficientes de influencia N_{ij} . Si los coeficientes tangenciales de influencia, T_{ij} , también se calculan, entonces, empleando la antepenúltima ecuación y los gastos σ_j determinados, podrán calcularse las velocidades tangenciales. Por último, puede emplearse la ecuación de Bernoulli para calcular las presiones que actúan en el punto de colocación "i" que, en términos de un coeficiente de presión, está dada por:

$$C_p = 1 - \left(\frac{V_{Si}}{|V|} \right)^2$$

El cálculo de los coeficientes de influencia es una parte central y esencial del método de los paneles y esta cuestión se trata a continuación. Como primer paso se considera el cálculo de la velocidad inducida en un punto de colocación i, por las fuentes de gasto unitario distribuidas sobre un panel "j".

En términos del sistema coordenado (X_Q, Y_Q) , local al panel j, el potencial de perturbación esta dado por:

$$\varphi_{ij} = \int \ln \left((X_Q - \varepsilon)^2 + Y_Q^2 \right)^{0.5} d\varepsilon$$

Donde $-\Delta_S/2, \Delta_S/2$ son los límites de la integral y ε una variable de integración. Los parámetros que intervienen en esta ecuación se definen en la figura 6.3. las magnitudes de las componentes de la velocidad en el punto de colocación "i", en las direcciones de los ejes X_Q y Y_Q , debido a las fuentes de gasto unitario distribuidas en el panel "j", esta dada por:

$$V_{xj} = \frac{d\varphi_{rQ}}{dX_Q} = 0.5 \ln \left[\frac{\left(\left(X_Q + \frac{\Delta_s}{2} \right)^2 - Y_Q^2 \right)}{\left(\left(X_Q - \frac{\Delta_s}{2} \right)^2 + Y_Q^2 \right)} \right] \quad V_{yj} = \frac{d\varphi_{rQ}}{dY_Q} = \left[\tan^{-1} \left(\frac{\left(X_Q + \frac{\Delta_s}{2} \right)}{Y_Q} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\left(X_Q - \frac{\Delta_s}{2} \right)}{Y_Q} \right) \right]$$

La definición de estos valores se da en la figura 6.3

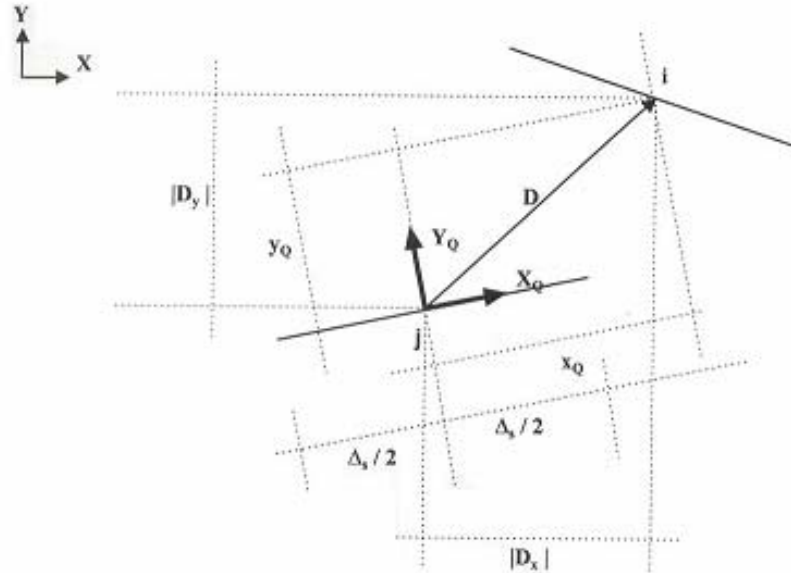


Fig. 6.3 Relación entre las coordenadas globales X, Y y las locales de cada panel.

Con estos resultados de las componentes de velocidad en el punto de colocación "i", debido a las fuentes de gasto unitario distribuidas en el panel "j", de acuerdo a la definición de los coeficientes de influencia, solo falta determinar sus resultantes en las direcciones perpendicular y tangencial al panel "i".

La resultante de la velocidad en el punto de colocación "i" está dada, en forma vectorial, por:

$$V_{ij} = V_{xj} \cdot t_i + V_{yj} \cdot n_j$$

Por tanto, las componentes del vector velocidad en las direcciones normal y tangencial al panel "i" resulta ser los coeficientes de influencia:

$$N_{ij} = V_{ij} \cdot n_i = V_{xj} \cdot t_i \cdot n_i + V_{yj} \cdot n_j \cdot n_i \quad T_{ij} = V_{ij} \cdot t_i = V_{xj} \cdot t_i \cdot t_i + V_{yj} \cdot n_j \cdot t_i$$

6.2 FLUJOS SOBRE CUERPOS ASIMÉTRICOS.

Cuando actúa un flujo uniforme sobre un cuerpo asimétrico, con ángulos de ataque diferente de cero, se presenta una fuerza transversal al flujo. Esta fuerza es la sustentación. Para modelar esta fuerza, es necesario generar circulación alrededor del cuerpo introduciendo vórtices en el modelado del flujo. La velocidad requerida puede distribuirse sobre paneles internos a la sección o sobre paneles que modelan su contorno.

Esta teoría se extendió para su uso en secciones transversales de alas de avión y, se tuvo que satisfacer la condición de Kutta. La manera en la que se abordó el problema consistió en distribuir fuentes y vórtices. Las fuentes se distribuyeron de manera idéntica a la expuesta en la sección anterior y los vórtices se consideraron de circulación (equivalencia de gasto) uniforme por unidad de longitud en todos los paneles. Así se contó con N+1 incógnitas. Para la solución se emplearon las N ecuaciones similares a las N empleadas en la sección anterior y, una condición de frontera equivalente a la Kutta, proporcionó la ecuación faltante.

La única diferencia de este planteamiento, de flujo con circulación, y el tratado anteriormente, consiste en considerar la contribución de los vórtices en las velocidades normal y tangencial y consecuentemente, en el sistema de ecuaciones que deberá ser resuelto. Este sistema de ecuaciones resulta de la condición de velocidad normal total igual a cero, en cada punto de colocación, debido a todas las fuentes, vórtices y al flujo uniforme que se aproxima. Dicho sistema está dado por:

$$\sum^N \sigma_j N_{ij} = -V \cdot n_i - \gamma N_i \quad \text{Donde:} \quad N_i = \sum^N N'_{ij}$$

$$N'_{ij} = V'_{ij} \cdot n_i = V_{yj} \cdot t_i \cdot n_i - V_{xj} \cdot n_j \cdot n_i$$

Y la velocidad tangencial en el punto de colocación está dado por:

$$V_{ni} = \sum^N \sigma_j T_{ij} + V \cdot t_i - \gamma T_i$$

$$T_i = \sum^N T'_{ij} \quad \text{Donde:} \quad T'_{ij} = V'_{ij} \cdot t_i = V_{yj} \cdot t_i \cdot t_i - V_{xj} \cdot n_j \cdot t_i$$

En el apéndice A se presenta un programa en Fortran que sigue la secuencia descrita. Para este trabajo, se aplicó a un cilindro de sección transversal circular en el cual actúa un flujo uniforme (flujo con potencial), sin el efecto de la circulación alrededor del cuerpo. En las siguientes figuras se muestran los coeficientes C_p en cada una de los 32 puntos de colocación seleccionados. Es interesante observar la gran precisión obtenida; el método converge rápidamente y una selección de no más que 50 paneles es satisfactoria. Los resultados obtenidos son exactamente como lo marca la teoría (ver figura y desarrollo de la Pág. 41); es decir un $C_p = 1.0$ (presión) en la dirección del flujo y $C_p = -3.0$ (succión) en sentido transversal.

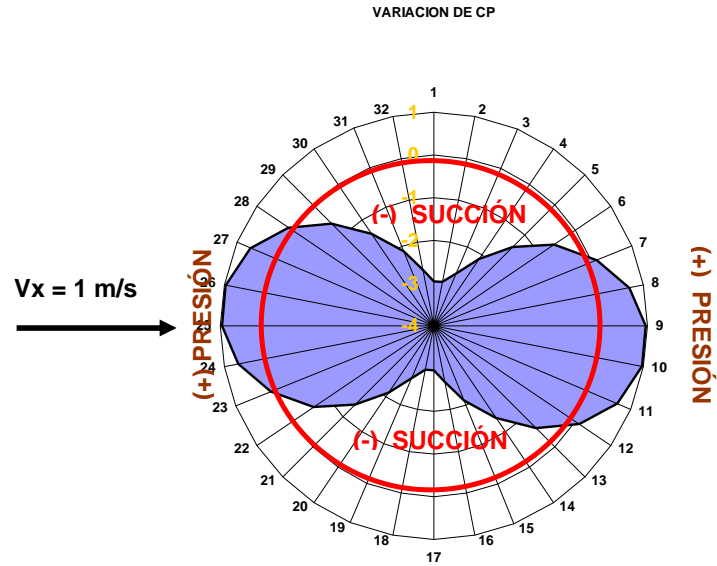


Fig. 6.4 Variación de C_p en una sección transversal circular con flujo laminar en dirección $(V_x, 0)$.

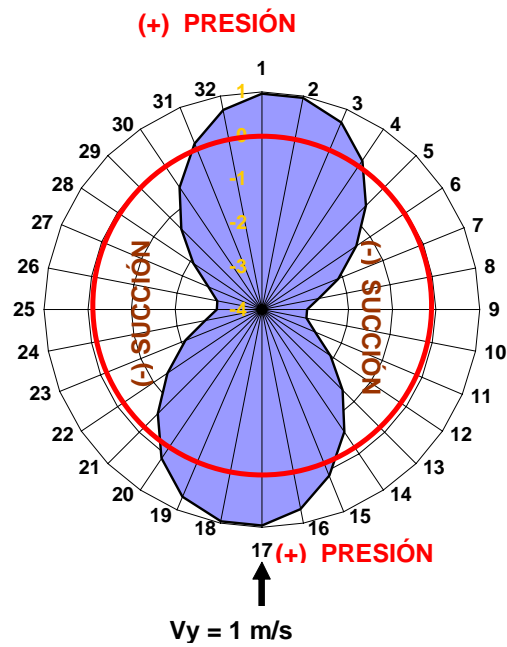


Fig. 6.5 Variación de C_p en una sección transversal circular con flujo laminar en dirección $(0, V_y)$.

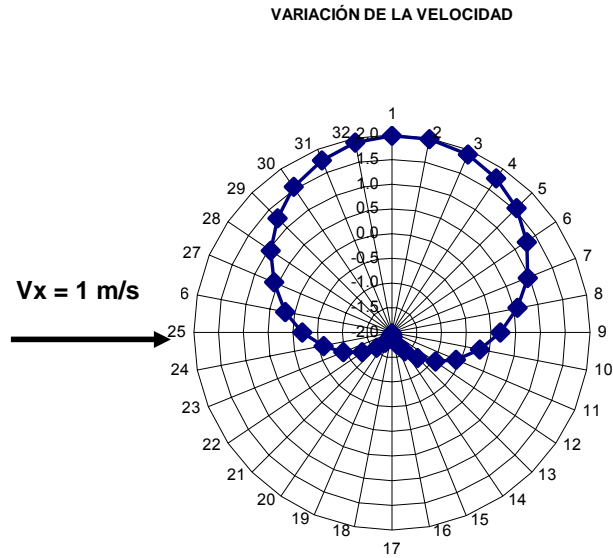


Fig. 6.6 Variación de la velocidad en un cilindro con flujo laminar en dirección $(V_x, 0)$.

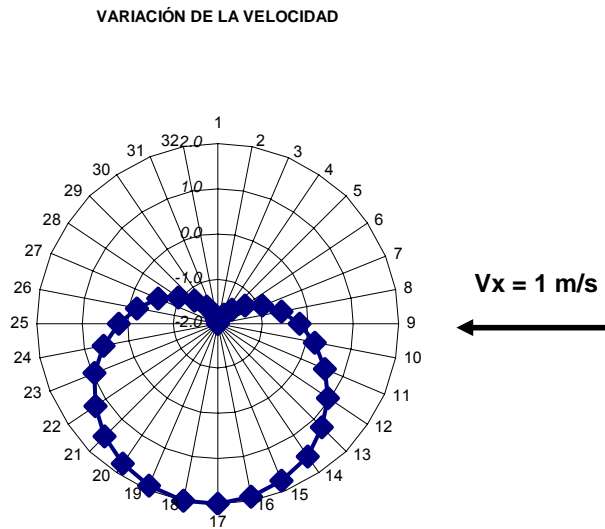


Fig. 6.7 Variación de la velocidad en un cilindro con flujo laminar en dirección $(-V_x, 0)$.

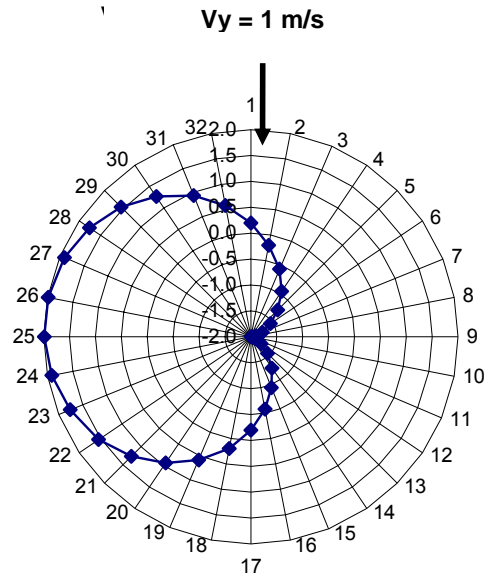


Fig. 6.8 Variación de la velocidad en un cilindro con flujo laminar en dirección $(0, -V_y)$.

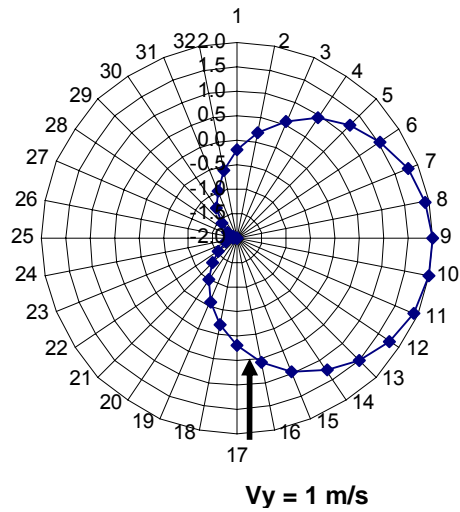


Fig. 6.9 Variación de la velocidad en un cilindro con flujo laminar en dirección $(0, V_y)$.

**CAPITULO VI. FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL.
MÉTODO DE LOS PANELES.**

A esta sección se le adicionó el fenómeno de circulación.

Fig. 6.10 Distribución de las Velocidades Tangenciales de una Sección Circular con Flujo Potencial Uniforme y Diferentes Circulaciones en Sentido Horario.

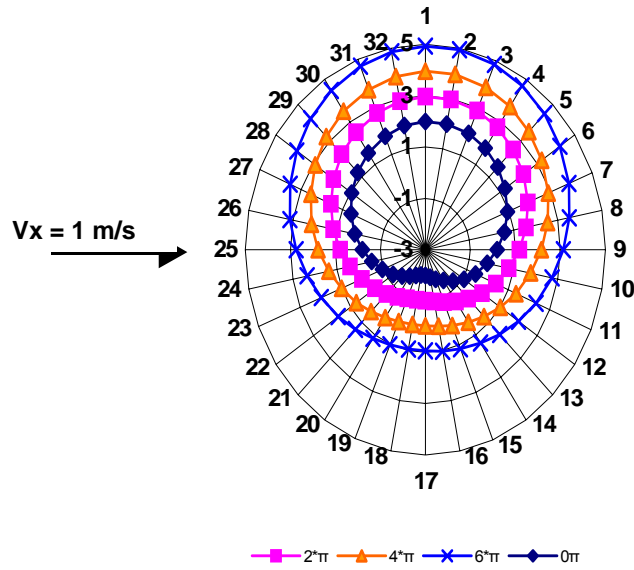
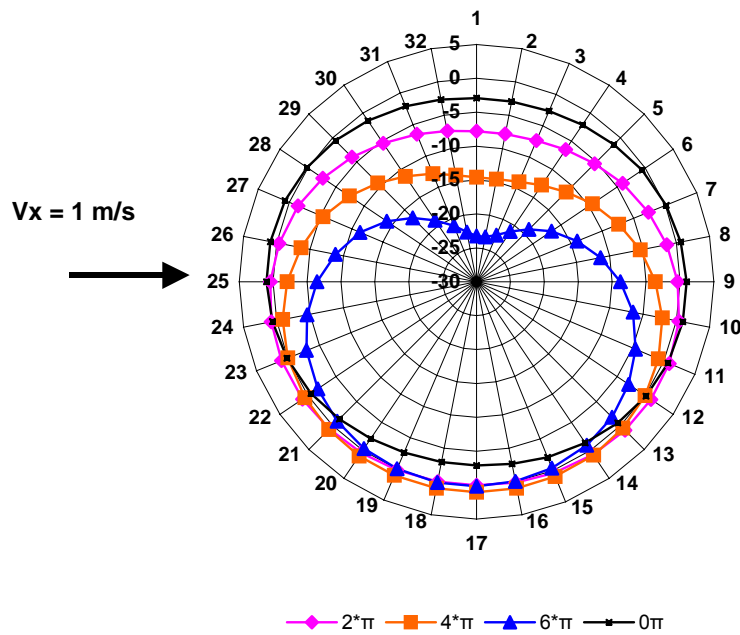


Fig. 6.11

Distribución de los CP alrededor de una sección circular con flujo potencial uniforme y Diferentes Circulaciones con Sentido Horario.



CAPITULO VI. FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL. MÉTODO DE LOS PANELES.

En el apéndice B se presenta el programa en Fortran que resulta de hacer las modificaciones necesarias al del apéndice A. con el propósito de resolver el problema de 3 secciones cilíndricas distribuidas en forma de un triángulo equilátero. El efecto del viento en la proximidad de estas secciones, mostró que a una distancia de separación de 4 a 5 D, las secciones se comportan en forma individual no afectando su cercanía. Al estar muy próximas entre sí, presentan succiones importantes en el espacio interno que las separa.

Como ejemplo de análisis preliminar, se bosquejó la distribución de los tres cilindros, posteriormente se grafican las líneas de corriente y equipotenciales para trazar su red de flujo correspondiente, la cual da una idea del efecto del flujo sobre las estructuras en su proximidad.

Fig. 6.12 grafica de los 3 círculos

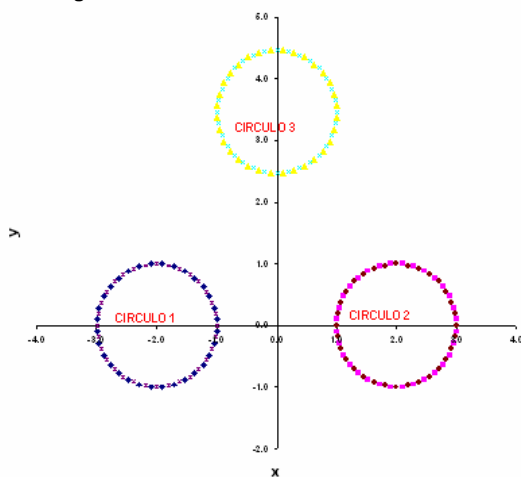


Fig. 6.13 LÍNEAS DE CORRIENTE

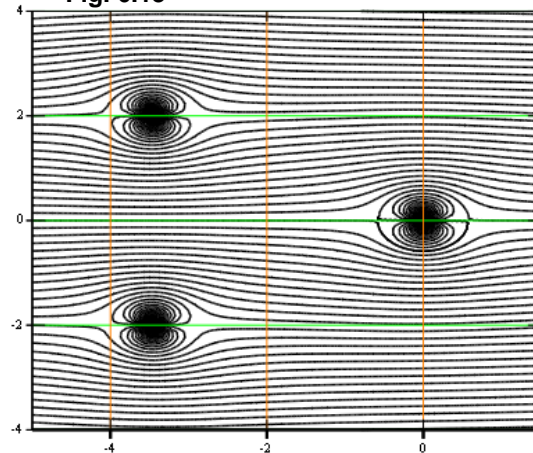


Fig. 6.14

LÍNEAS EQUIPOTENCIALES

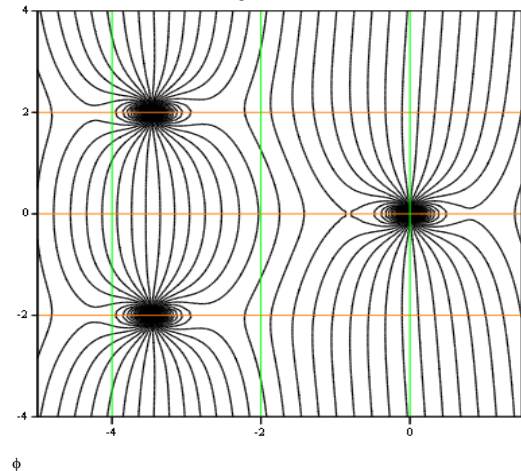


Fig. 6.15

RED DE FLUJO

ψ, ϕ

**CAPITULO VI. FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL.
MÉTODO DE LOS PANELES.**

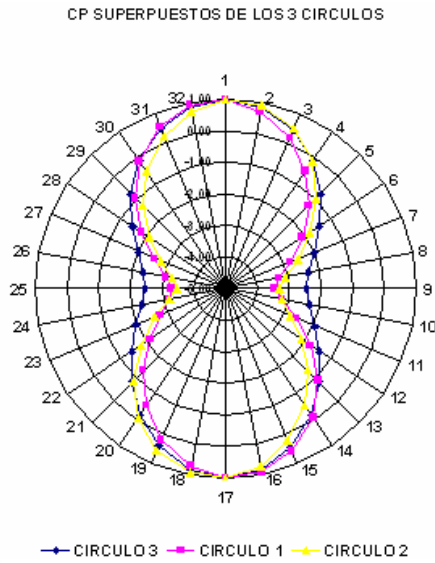


Fig. 6.16 Cp para una Separación de 1D.

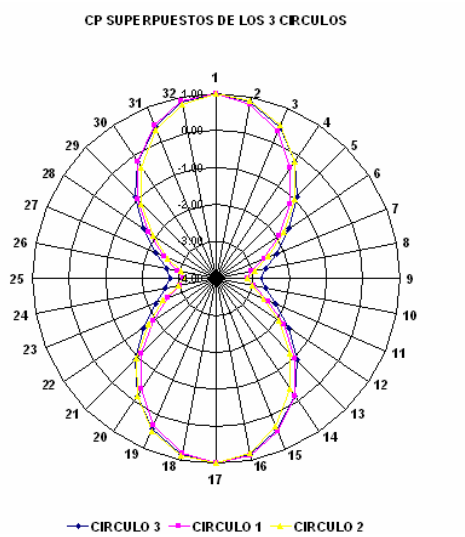


Fig. 6.17 Cp para una Separación de 2D

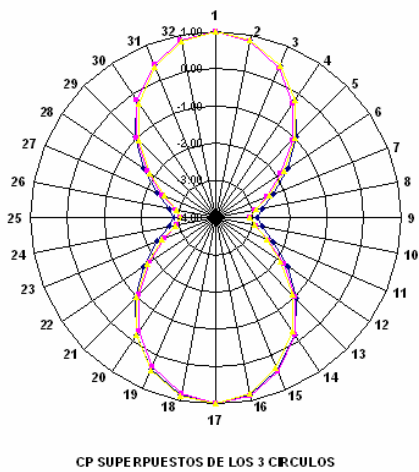


Fig. 6.18. Cp para una Separación de 3D

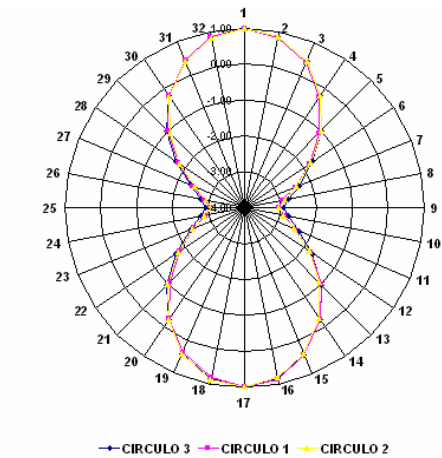


Fig. 6.19. Cp para una Separación de 4D

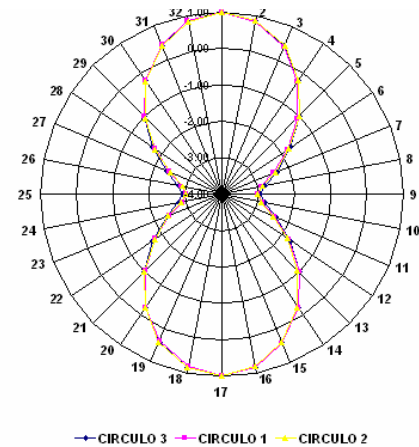


Fig. 6.20 Cp para una Separación de 5D

Se observa claramente que entre mas separadas estén las secciones, sin el efecto de circulación, estas tienden comportarse como si estuvieran aisladas. La teoría marca una separación mínima de 4 a 5 diámetros para evitar el golpeteo entre las estructuras, resultado obtenido con el programa, con lo que se deduce que esta fielmente calibrado.

VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA.

7.1 INTRODUCCIÓN.

La respuesta dinámica del viento es cada vez más importante en años recientes, porque los diseñadores están utilizando los materiales a sus límites, logrando estructuras más ligeras, más flexibles, más esbeltas, más altas y más propensas a la vibración.

Como ejemplo de aplicación, se analiza una torre esbelta concebida para transmitir señales de televisión, debido a que durante las últimas décadas, las torres en el mundo han evolucionado, para convertirse hoy en indiscutibles símbolos de modernidad y progreso en las ciudades y países en las que se han construido.

Inicialmente se utilizaron exclusivamente como antenas de transmisión en radio y televisión; hoy en día, las Torres son polo de atracción turística a nivel mundial, y contribuyen a la derrama económica que por este rubro se tiene.

Sus múltiples funciones y diversidad, hacen que las torres sean visitadas por millones de personas cada año y disfruten de un espectáculo único de altura.

Las torres de telecomunicaciones y entretenimiento más importantes del mundo, no sólo por su altura si no también por su majestuosidad, belleza e importancia socio-económica son:

La torre CN, icono más reconocido y celebrado de Canadá; con una altura de 553.33 m, es un edificio alto en el mundo y centro del turismo y telecomunicaciones en Toronto.

La torre de Ostankino de 540 m de altura. Actualmente, es el edificio aislado más alto de Europa y de Asia. Anteriormente, era la construcción más alta del mundo, distinción que llevó por casi 10 años. Su importancia funcional y técnica reside en proveer a Moscú de la radio y TV de alta calidad.

La torre oriental de la perla de Shangai, tiene 468 m de altura sobre el nivel del suelo natural, es la torre más alta de Asia y la tercera en el mundo.

Torre Menara KL, de Kuala Lumpur; Malasia. Localizada en el corazón del triángulo de oro, distrito de negocios y de hospitalidad, la torre mide 421 m; segunda más alta de Asia.

La torre de Macau de 338 m en su punto más alto, su nivel principal de observación es a 223 m sobre la tierra, punto de distinción que arranca las opiniones impresionantes de los visitantes de la ciudad, del mar del sur de China y de la región próxima a la delta del Río de la Perla. Es la décima torre libre más alta del mundo; octava más alta de Asia y puede soportar vientos de hasta 400 km/hr.

7.2 PROYECCIÓN ARQUITECTÓNICA PISO A PISO.

La torre de análisis propuesta como ejemplo particular, medirá 277.27 m de altura, situada a una altura de 2538 m sobre el nivel del mar, pensada para ser construida en una zona suburbana. Tendrá una importante variedad de pisos destinados a los negocios, promoción turística y tecnología de punta para la transmisión de telecomunicaciones. A 230 m se desplanta una estructura que soportará una antena de 47.27 m, para la más amplia cobertura de la zona y por ende, la mejor recepción.

La cabina de la torre, es la zona más amplia y de mayor interés para los visitantes y personal ejecutivo que ahí laboren. Sus nueve niveles, con terrazas, miradores y zonas con vistas de cristal imponentes, son el mayor atractivo para quienes gustan de las vistas panorámicas y vivir la sensación de altura.

El primer nivel se encuentra a 200 m, donde se instalará un cuarto de control, en el cual se implementó con equipo necesario para el óptimo funcionamiento estructural, con dispositivos de amortiguamiento y servicios que se requieran.

Los tres niveles siguientes están destinados para áreas de entretenimiento donde los visitantes podrán disfrutar; de restaurantes, discotecas, un museo temático, centros de juegos virtuales, bar-café, salones multiusos, snack bar-mirador etc.

El nivel medio a 210 m; exclusivo para los turistas, proporciona la sensación de altura jamás vivida por sus visitantes, al contemplar el paisaje de la zona donde se lleve acabo su construcción.

Los últimos cuatro niveles alcanzan una altura máxima de 230 m, ubica la zona de oficinas para ejecutivos, cabinas de radio, televisión y áreas para la instalación de transmisores; equipos de recepción, almacenamiento, envío de voz, datos y video; además de la maquinaria de los elevadores.

7.3 GEOMETRÍA DE LA TORRE.

La forma y características del proyecto parten de una genialidad del arquitecto, El análisis y dimensiones de los elementos estructurales, son responsabilidad del ingeniero estructurista, resultado de un predimensionamiento que, para fines de este ejemplo, da una idea de los requerimientos físicos necesarios para cada uno de ellos.

CUERPO INFERIOR DE LA TORRE.

Su forma triangular, conceptualiza el cambio de milenio y pretende manifestar una apertura hacia la modernización y las tendencias que permitan mostrar arquitectónica y estructuralmente, cómo funciona una torre de este tipo.

CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

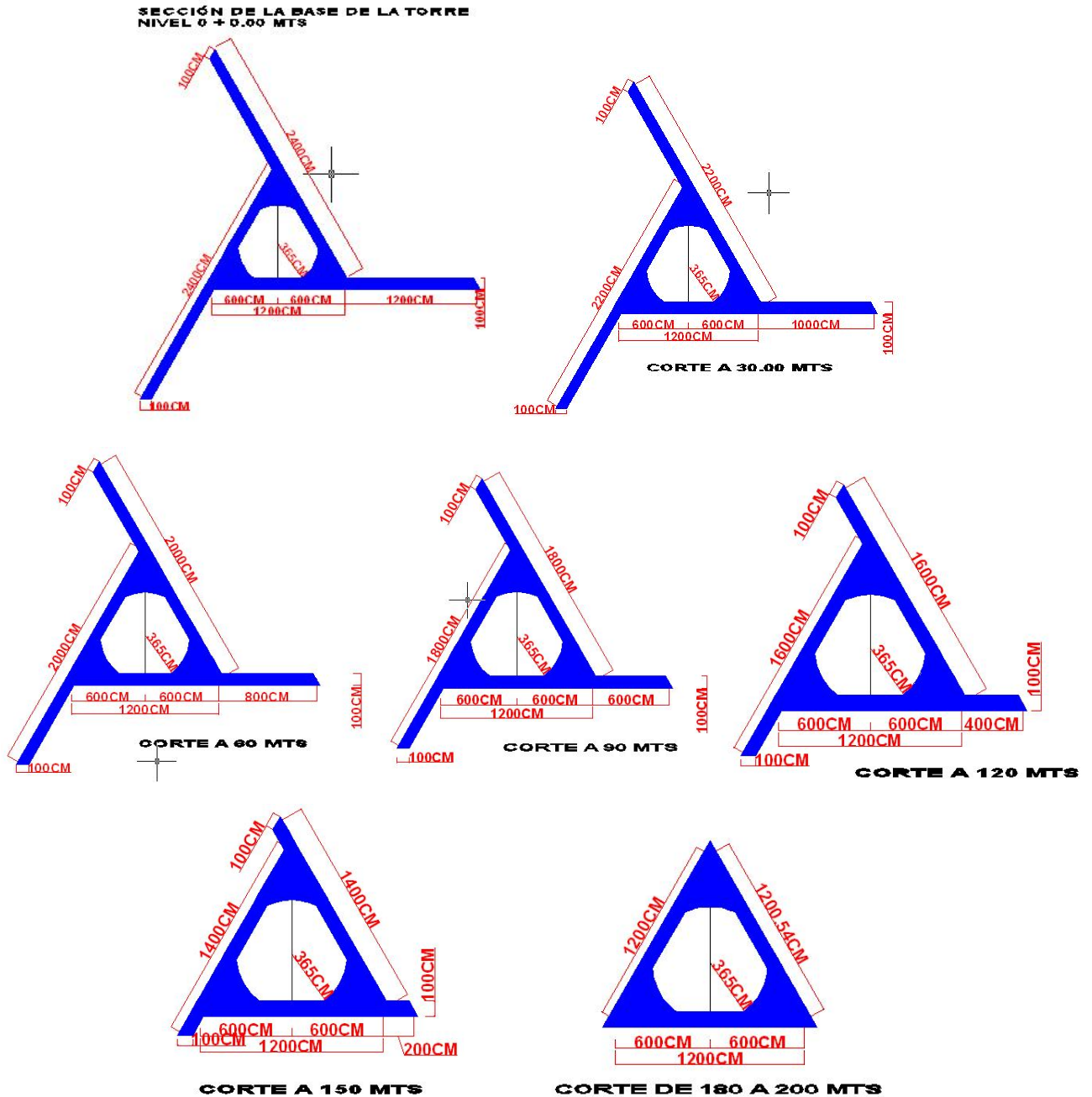


FIG. 7.1 Cortes transversales de la torre principal de soporte

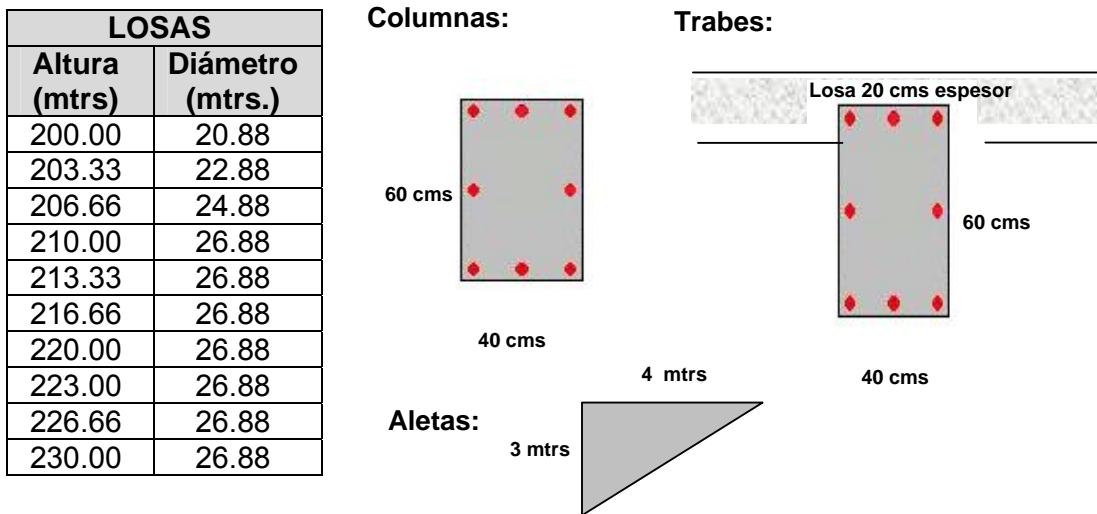
La base será de concreto de alta resistencia (700 Kg/cm^2), con aletas que se acortan 2 m a cada 30 m de altura, hasta llegar a perderse a un nivel de 180 m sobre el suelo, donde resulta una sección triangular que continua constante los siguientes 20 m; las esquinas internas fueron rellenas con concreto del mismo tipo, con el fin de proporcionar mayor rigidez a la estructura; en su parte central se instalarán los elevadores para acceder de manera rápida, segura y confortable a la cabina.

7.4 ESTRUCTURACIÓN DE LA CABINA.

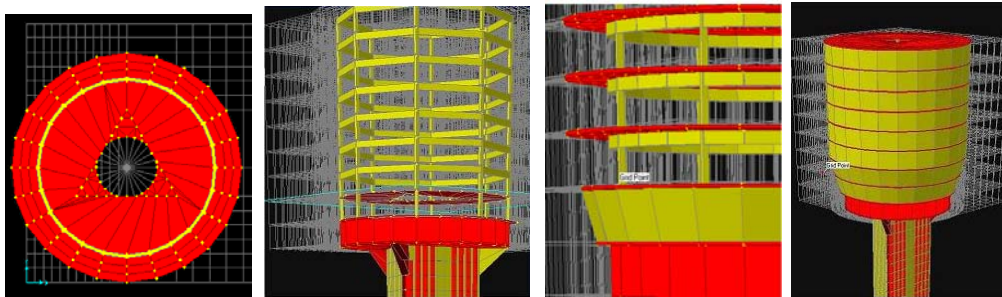
La cabina se compone de losas circulares de concreto, con una resistencia de 300 Kg/cm² y 20 centímetros de espesor; en el primer nivel muy probablemente será necesario implementar disipadores de energía para amortiguar la estructura; con este fin, se propuso un muro de concreto de 40 cm de espesor, donde se pretende empotrar estos dispositivos de ser necesarios; esto depende de los resultados del análisis que más adelante se realizará.

La conexión entre la cabina y la base rígida de concreto se lleva a cabo con tres aletas, las cuales le proporcionan a la cabina mayor estabilidad y rigidez.

DIMENSIONES PROPUESTAS PARA LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES.



a) Dimensiones Preliminares



b) Vista Esquemática de la Cabina

FIG. 7.2 Aspectos referentes a la cabina superior de la torre.

ANTENA.

A 223.33 m se empotra la estructura que servirá de base de antena; en los dos últimos niveles de la cabina, con el fin de proporcionar mayor resistencia al momento de volteo producido por el viento, destinada a la función principal de este proyecto, la recepción y emisión de señales de telecomunicación; conformada por una armadura con tableros de 1.5 m de ancho por 1.5 m de alto, ensamblada en tramos de 6 m hasta alcanzar una altura de 24 m; se propuso un perfil en "L" de 6" x 6" x 1/2". A 21 m se empotró un tubo de aluminio de 26.27 m de sección transversal circular con 50 cm de diámetro y espesor de 1"; el empotramiento se llevó a cabo a través de placas de acero en los dos últimos tableros para lograr un brazo de palanca de 3 m y darle el mayor soporte posible. Para evitar vibraciones excesivas, fue necesario colocarle tirantes de 1.5" de diámetro a diferentes alturas, debido a que las torres de telecomunicaciones son muy sensibles a los movimientos excesivos que causan interferencias graves en la recepción de las señales.

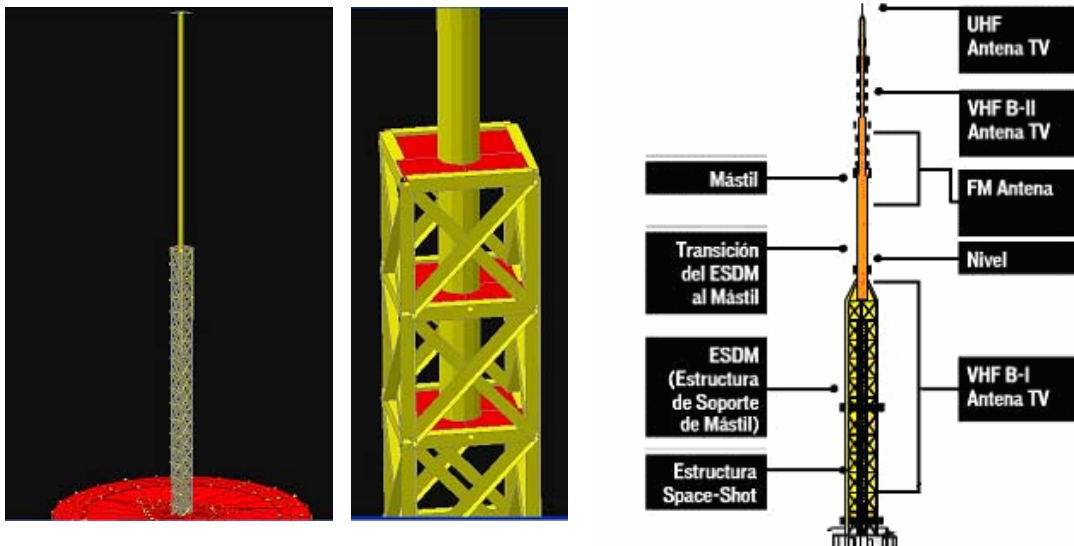


FIG. 7.3 Aspectos de la antena superior de la torre.

MODELADO DE LA TORRE.

La torre se modeló con un procedimiento digital; para cada etapa; el análisis estructural se realizó con programas de cálculo basados en el método de los elementos finitos. La posibilidad de incluir efectos no lineales en el cálculo, geométricas y del material; de realizar análisis modales, térmicos, etc. hacen el método especialmente interesante. Esto, unido a su potencia, versatilidad y velocidad, lo han convertido en la herramienta de cálculo ideal para el analista estructural.

El Método de Elementos Finitos es una herramienta de análisis poderosa para obtener soluciones aproximadas, de una amplia cantidad de problemas de Mecánica. Una importante propiedad del método es su convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones; Es decir, entre más se discretiza una estructura, o un elemento, se obtendrán resultados mas exactos, pero siempre se debe cuidar no perder la continuidad en las particiones realizadas. El método, en el campo estructural, permite calcular esfuerzos y desplazamientos para problemas especialmente complejos.

7.5 OBSERVACIONES SOBRE EL PROCESO DE MODELADO DE LA ESTRUCTURA.

En el proceso de modelado, se realizó una comparación de la respuesta de la torre, al considerar solo la base de concreto rígida de 200 m con aletas y sin ellas; se concluyó que las salientes proporcionan una rigidez importante a la estructura, como lo demuestran sus periodos naturales de vibración en la tabla 7.1.

TABLA 7.1

Modo Fundamental	Periodo en segundos	
	Base Sin Aletas	Con Aletas
1 (despl. X)	6.273196	3.436074
2 (despl.. y)	6.273153	3.436045
3 Rotación	1.026527	0.741940

Los dos primeros modos son muy similares por la simetría de la sección transversal de la torre principal de soporte.

La estructura modelada hasta la parte alta de la cabina, terminada con cristales que simulan a un mirador real, tiene periodos de vibración que se presentan en la tabla 7.2.

TABLA 7.2

Modo Fundamental	Periodo en (segundos)
	Base Rígida + Cabina
1 (despl. X)	4.465349
2 (despl.. y)	4.464809
3 Rotación	1.099708

Para terminar el modelo completo, se calcularon las cargas muertas y vivas con las **NTC DF**. Como el programa automáticamente contempla las cargas debidas a peso propio de los elementos estructurales, solo se consideraron los siguientes aspectos.

EVALUACIÓN DE LAS CARGAS.

Las cargas se calcularon a partir de dimensiones generales debido a que se trata de un ejemplo en particular y no se cuenta con planos estructurales que proporcione una amplia descripción de los materiales y acabados de la estructura en general.

CARGA MUERTA

Primer nivel (Control).

Carga muerta adicional por reglamento por concepto de losa	20 Kg/cm ²
Firme de mortero de 3 cms de espesor	$0.03 \times 2200 \text{ Kg/cm}^3 = 66 \text{ Kg/cm}^2$
Carga muerta adicional por firme	20 Kg/cm ²
Recubrimiento de loseta vinílica	5 Kg/cm ²
Muros divisorios ligeros	100 Kg/cm ²
CARGA MUERTA TOTAL	CM₁ = 211 Kg/cm²

Carga muerta para el resto de los niveles.

Carga muerta adicional por reglamento por concepto de losa	20 Kg/cm ²
Firme de mortero de 3 cms de espesor	$0.03 \times 2200 \text{ Kg/cm}^3 = 66 \text{ Kg/cm}^2$
Carga muerta adicional por firme	20 Kg/cm ²
Recubrimiento de loseta vinílica	5 Kg/cm ²
Instalaciones y plafones	35 Kg/cm ²
Muros divisorios ligeros	100 Kg/cm ²
CARGA MUERTA TOTAL	CM₂₋₉ = 246 Kg/cm²

Carga muerta azotea.

Carga muerta adicional por reglamento por concepto de losa	20 Kg/cm ²
Relleno e impermeabilización	150 Kg/cm ²
Instalaciones y plafones	40 Kg/cm ²
CARGA MUERTA TOTAL	CM_A = 210 Kg/cm²

CARGA VIVA.

Por reglamento se utilizó la carga de análisis instantánea **W_a** para diseño por sismo y por viento; cuando se revisen distribuciones de carga más desfavorables que la uniformemente repartida sobre toda el área, se podrán incorporar al análisis de la torre.

Se prestó atención a la revisión de los estados límites de servicio relativos a vibraciones; por lo que se deben imponer límites a las amplitudes máximas, de acuerdo con su frecuencia, a manera de evitar condiciones que afecten seriamente la comodidad de los ocupantes, o que puedan causar daños a equipo sensible a las excitaciones citadas.

Carga viva para el primer entrepiso (Cuarto de control).

En este nivel se considera una carga mínima por concepto de construcción debido a que solamente tendremos la presencia de los técnicos que revisen a los equipos instalados en este entrepiso.

$$CV_1 = 150 \text{ Kg/cm}^2$$

Carga viva para los niveles del 2 – 5

Estos niveles fueron proyectados por ejemplo para fungir como restaurantes, salas de juego, cines, discotecas, un museo temático y la amplia zona de mirador para los visitantes.

$$CV_{2-5} = 250 \text{ Kg/cm}^2$$

Carga viva para los niveles del 6 – 9

Estos niveles serán ocupados por Oficinas y Laboratorios de transmisión de señales.

$$CV_{6-9} = 180 \text{ Kg/cm}^2$$

Carga viva en la azotea

Para azoteas con pendientes no mayor del 5%

$$CV_A = 70 \text{ Kg/cm}^2$$

Estas cargas se ingresaran al modelo como masas por lo que se transformaron a espesores que se sumaron a cada losa correspondiente al nivel analizado como se muestra en la tabla 7.3.

TABLA 7.3

NIVEL	CM + CV (Kg/cm ²)	Espesor debida a la carga (cm)	Espesor total de la losa (cm)
Cuarto de Control	361	15	35
2 – 5	496	21	41
6 – 9	426	18	38
Azotea	280	12	32

Una vez que se agregó el espesor de concreto adicional y se modeló correctamente la armadura de la antena soportada por los tirantes; el periodo del modelo completo se incrementó a **T = 5.0124 s**, para el primer modo en la dirección x.

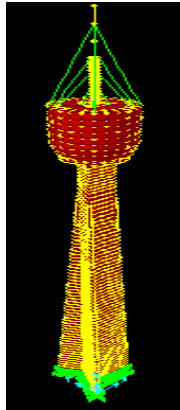


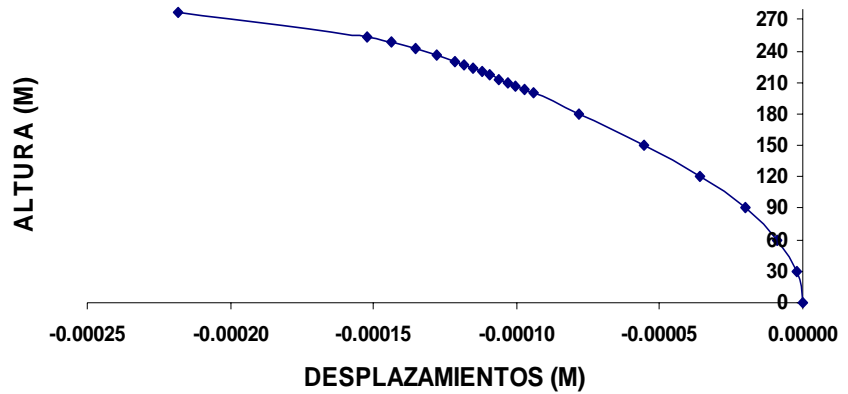
FIG. 7.4 Vista del modelo desarrollado para representar la torre.

ANÁLISIS MODAL.

TABLA 7.4 DESPLAZAMIENTOS MODALES PARA LA ESTRUCTURA SIN CABLES.

Altura Z (m)	Despl. Modal 1 ^{er} Modo (m)
277.29	-0.0002184
254.00	-0.0001523
248.00	-0.0001437
242.00	-0.0001354
236.00	-0.0001279
230.00	-0.0001214
226.66	-0.0001183
223.33	-0.0001153
220.00	-0.0001123
216.66	-0.0001093
213.33	-0.0001062
210.00	-0.0001032
206.66	-0.0001002
203.33	-0.0000971
200.00	-0.0000941
180.00	-0.0000781
150.00	-0.0000555
120.00	-0.0000358
90.00	-0.0000201
60.00	-0.0000089
30.00	-0.0000022
0.00	0.0000000

FIG. 7.5 CONFIGURACION MODAL DE LA TORRE SIN CABLES

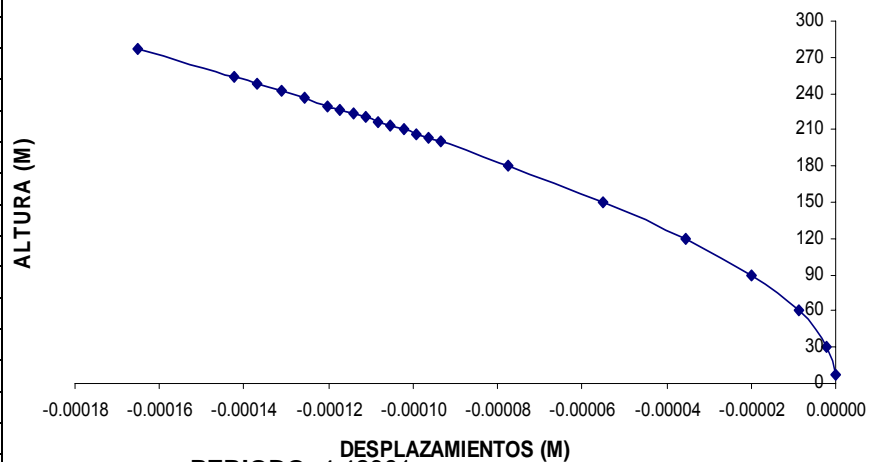


PERIODO = 4.42896 seg.
 FRECUENCIA NATURALES = 0.22579 Hz
 FRECUENCIA CIRCULAR (θ) = 1.41866

TABLA 7.5 DESPLAZAMIENTOS MODALES PARA LA ESTRUCTURA CON CABLES.

Altura Z (m)	Despl. Modal 1 ^{er} Modo (m)
277.29	-0.0001652
254.00	-0.0001423
248.00	-0.0001367
242.00	-0.0001312
236.00	-0.0001257
230.00	-0.0001202
226.66	-0.0001172
223.33	-0.0001143
220.00	-0.0001113
216.66	-0.0001083
213.33	-0.0001053
210.00	-0.0001023
206.66	-0.0000992
203.33	-0.0000962
200.00	-0.0000933
180.00	-0.0000774
150.00	-0.0000550
120.00	-0.0000355
90.00	-0.0000199
60.00	-0.0000088
30.00	-0.0000022
0.00	0.0000000

FIG. 7.6 CONFIGURACION MODAL DE LA TORRE CON TIRANTES



PERIODO: 4.42961 seg.
 FRECUENCIA NATURALES: 0.22575 Hz
 FRECUENCIA CIRCULAR. (θ): 1.41845

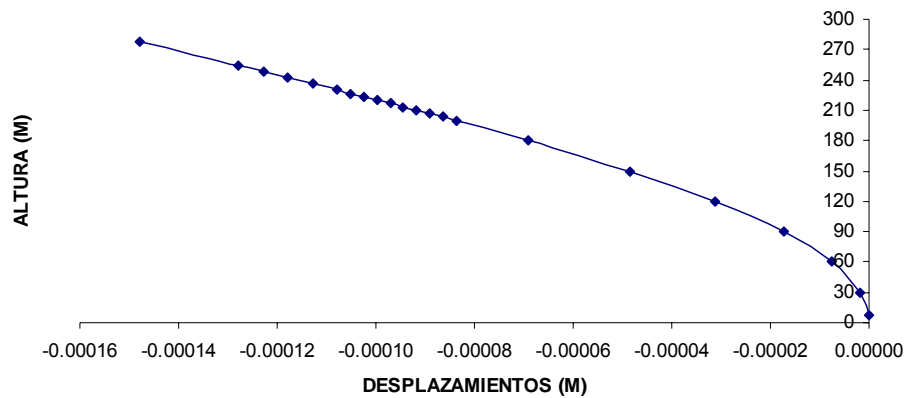
CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

En las graficas se nota claramente que con la colocación de los cables de 1.5" de diámetro se disminuyen los desplazamientos modales en un 25 % aproximadamente.

TABLA 7.6 DESPLAZAMIENTOS MODALES PARA LA ESTRUCTURA TERMINADA CON LAS CARGAS.

Altura Z (m)	Despl. Modal 1er Modo (m)
277.29	-0.0001478
254.00	-0.0001279
248.00	-0.0001229
242.00	-0.0001178
236.00	-0.0001129
230.00	-0.0001079
226.66	-0.0001052
223.33	-0.0001025
220.00	-0.0000998
216.66	-0.0000971
213.33	-0.0000944
210.00	-0.0000917
206.66	-0.0000890
203.33	-0.0000862
200.00	-0.0000835
180.00	-0.0000690
150.00	-0.0000486
120.00	-0.0000311
90.00	-0.0000173
60.00	-0.0000076
30.00	-0.0000019
0.00	0.0000000

FIG. 7.7 CONFIGURACION MODAL DE LA TORRE CON CARGAS



PERIODO = 5.01240 seg.
FRECUENCIA NATURALES = 0.19951 Hz,
FRECUENCIA CIRCULAR (θ) = 1.25353

7.6 OBTENCIÓN DEL COEFICIENTE DE ARRASTRE PARA LA SECCIÓN TRIANGULAR DE LA TORRE.

Se realizó un análisis preliminar con el programa de los paneles para secciones simétricas con el fin de obtener los coeficientes locales de presión, que al ser integrados en las fronteras, permitió evaluar los coeficientes de arrastre.

Se muestra a continuación la secuencia desarrollada para obtener dichos coeficientes, en una sección triangular estanca, sometida a la acción de flujo laminar con una dirección de análisis de 0 a 180°, para fines de cálculo de las fuerzas, se seleccionó la dirección vertical positiva al eje “y”, como se muestra en la Fig. 7.10.

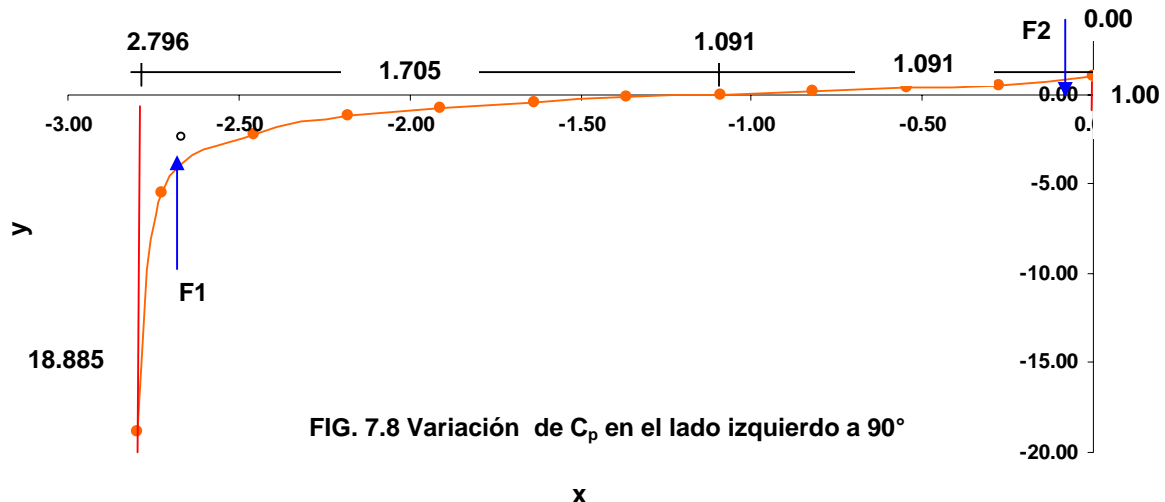


FIG. 7.8 Variación de Cp en el lado izquierdo a 90°

x

Cálculo de la fuerza F1 en el lado normal a la acción del viento.
Triángulo con hipotenusa de tercer grado.

$$A = \frac{1}{4}bh = \frac{1}{4}(1.705)(18.885) = 8.049 U^2$$

$$F1V = 8.049\text{seno}30^\circ = 4.0245 \qquad F1H = 8.049\text{Coseno}30^\circ = 6.97063$$

Centro de gravedad CG. $CG = \frac{1}{5}b = \frac{1}{5}(1.705) = 0.341 U$

Cálculo de la fuerza F2
Triángulo con hipotenusa de segundo grado.

$$A = \frac{1}{3}bh = \frac{1}{3}(1.091)(1.00) = 0.36367 U^2$$

$$F2V = 0.36367\text{seno}30^\circ = 0.181835 \qquad F2H = 0.36367\text{Coseno}30^\circ = 0.3149$$

$$CG = \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}(1.091) = 0.27275 U$$

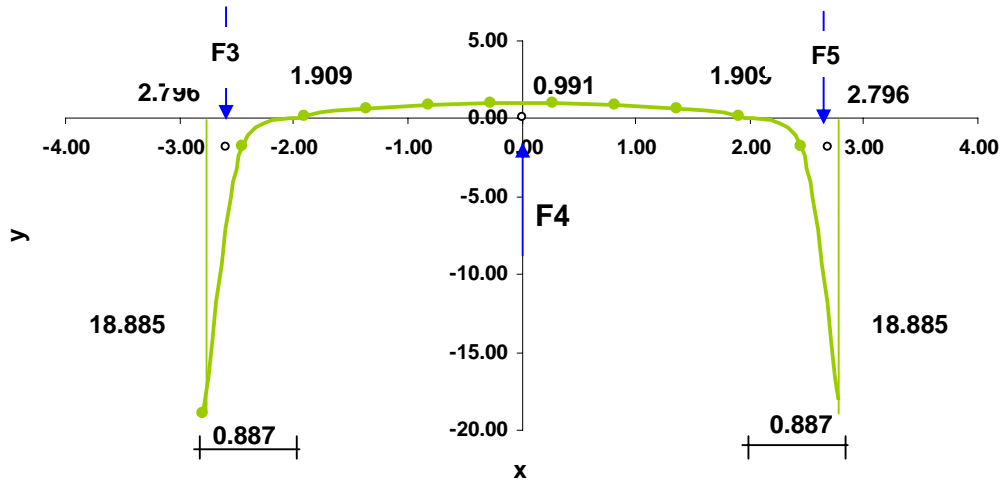


FIG. 7.9 Variación de C_p en la base de la sección triangular a 90°

Cálculo de las fuerzas F3 y F5 en el lado paralelo a la acción del viento.
Triángulo con hipotenusa de tercer grado.

$$A = \frac{1}{4}bh = \frac{1}{4}(0.887)(18.885) = 4.1878 U^2 \quad F3 \text{ y } F5 = 4.1878$$

$$CG = \frac{1}{5}b = \frac{1}{5}(0.887) = 0.1774 U$$

Cálculo de las fuerzas F4.

Área de un triángulo

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1.909)(0.991) = 0.9459 U^2 \quad A_T = 1.8918 U^2 \quad F4 = 1.8918$$

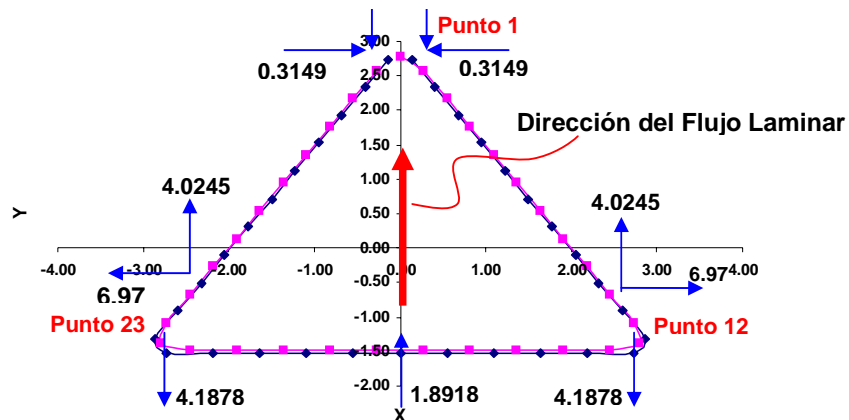


FIG. 7.10 Distribución de las fuerzas de arrastre en el semicuerpo de sección transversal triangular.

Por lo tanto al realizar la sumatoria resulta un Coeficiente de arrastre de:

$$C_D = 1.2016$$

En los resultados se observa la aparición de coeficientes locales de succión muy grandes, lo que provoca la separación de la capa límite y la aparición de vórtices, como se mostró en 3.4.

Cuando existe turbulencia hay una amplificación dinámica, que incrementa al coeficiente de arrastre (C_D) hasta 2.0, aproximadamente, debido a que en este tipo de flujo, se desprenden los vórtices de Benard.

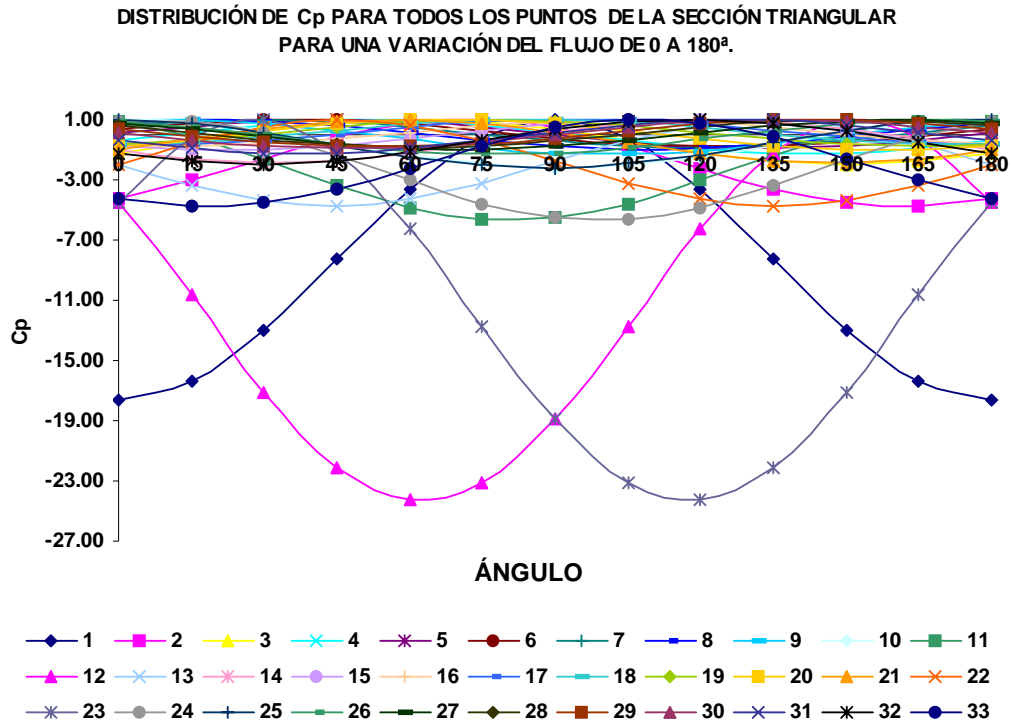


FIG. 7.11 Variación de coeficientes locales de presión, con la dirección del viento

Sobre las esquina se presentaron succiones importantes que provocan la separación de vórtices; estas disminuyen hacia la parte central y se vuelven a incrementar de manera simétrica hasta la esquina inmediata.

7.7 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS POR EL MÉTODO ESTÁTICO PARA VIENTO.

CONSIDERACIONES GENERALES

Se revisó la seguridad de la estructura principal ante el efecto de las fuerzas que se generan por las presiones (empujes o succiones) producidos por el viento sobre la superficie de la construcción expuestas al mismo y que son transmitidas al sistema estructural. La revisión consideró la acción estática del viento y la acción dinámica, debido a que la estructura es sensible a estos efectos.

**EL ANÁLISIS POR VIENTO SE LLEVÓ A CABO CON LAS NTC-DF 2004
CLASIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA.**

De acuerdo con su importancia.

Para fines de diseño por viento y de acuerdo con la importancia para la cual serán destinadas, las estructuras están clasificadas en dos grupos, A y B, según el artículo 139 del Reglamento.

La Torre se clasifica dentro del Grupo: A

Grupo A. Edificaciones cuya falla estructural podría constituir un peligro significativo por contener sustancias tóxicas o explosivas, así como edificaciones cuyo funcionamiento es esencial a raíz de una emergencia urbana, como: hospitales, escuelas, terminales de transporte, estaciones de bomberos, centrales eléctricas y **de telecomunicaciones**, estadios, depósitos de sustancias inflamables o tóxicas, museos y edificios que alojen archivos y registros públicos de importancia, y otras edificaciones a juicio de la secretaria de obras y servicios.

De acuerdo con su respuesta ante la acción del viento.

El Edificio será del tipo: 4

Tipo 4. Comprende las estructuras que por su forma o por lo largo de sus periodos de vibración presentan problemas aerodinámicos especiales.

Efectos a considerar

Los efectos de viento se valuarán con un procedimiento de análisis que tome en cuenta las características de la turbulencia y sus efectos dinámicos.

DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE DISEÑO, V_D

$$V_D = F_{TR} F_{\alpha} V_R$$

V_D = Velocidad de diseño a una altura "z" sobre el suelo.

F_{TR} = Factor de topografía y Rugosidad

F_{α} = Factor que considera la variación de la velocidad con la altura

V_R = Velocidad Regional según la zona correspondiente al sitio donde se construirá la estructura.

Velocidad Regional

Depende del lugar donde se construirá la obra, marca también la selección del tipo de reglamento a utilizar en el análisis; pues depende del país donde se realizara el proyecto y de los estudios realizados en cuanto a las mediciones del viento, concentradas en planos de isotacas, donde se elige la velocidad regional correspondiente.

CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

A manera de ejemplo, se eligió una velocidad regional de:

$$V_R = 120 \text{ km/hr}$$

$$V_R = 33.33 \text{ m/s}$$

Para el caso de las NTC DF, es la velocidad media correspondiente a intervalos de 3 segundos, que se estima será excedida en un promedio de una vez cada 50 años, medida a 10 metros de altura del terreno y en campo abierto.

TABLA 7.7 Factores de variación con la altura F_α .

Tipos de terreno		α	δ, m
R1	Escasas o nulas obstrucciones al flujo de viento, como en campo abierto.	0.099	245
R2	Terreno plano u ondulado con pocas obstrucciones.	0.128	315
R3	Zona típica urbana y suburbana. El sitio está rodeado predominantemente por construcciones de mediana y baja altura o por áreas arboladas y no se cumplen las condiciones del tipo R4	0.156	390
R4	zona de gran densidad de edificios altos. Por lo menos la mitad de las edificaciones que se encuentran en un radio de 500 m alrededor de la estructura en estudio tiene altura superior a 20 m.	0.17	455

La torre se propone para una zona típica urbana y suburbana por lo que es corresponde a un tipo **R3** teniendo una $\alpha = 0.156$ y $\delta = 390 \text{ m}$.

Donde:

δ Altura gradiente, medida a partir del nivel del terreno de desplante, por encima de la cual la variación de la velocidad del viento no es importante y se puede suponer constante.

α Exponente que determina la forma de la variación de la velocidad del viento con la altura.

Los coeficientes α y δ están en función de la rugosidad del terreno.

Para calcular el factor de variación con la altura se realiza el procedimiento que para diferentes alturas se muestran como ejemplos, pero respetando lo estipulado en el reglamento en su sección 3.1.2:

$$F_\alpha = 1.0 \quad \text{Para } z \leq 10 \text{ m}$$

$$F_\alpha = 0.698 z^{0.156} \quad \text{Para } z > 10 \text{ m} \quad F_\alpha = (z/10)^\alpha \quad \text{si } 10 \text{ m} < z < \delta$$

$$F_\alpha = 1.679 \quad \text{Para la } z = 277 \text{ m}$$

Determinación del factor correctivo por topografía, F_{TR}

Este factor toma en cuenta el efecto topográfico local del sitio donde se desplanta la estructura y a su vez la variación de la rugosidad de los alrededores del sitio. En este último caso, si en una dirección de análisis de los efectos del viento existen diferentes rugosidades con longitud menor de 500 m, se deberá considerar la que produzca los efectos más desfavorables.

Definido el tipo de Topografía del terreno; se pueden obtener los factores correctivos.

TABLA 7.8 Factores correctivos por topografía.

Tipos de topografía		Rugosidad de terrenos en alrededores		
		Terreno tipo R2	R3	R4
T1	Bases protegidas de promontorios y faldas de serranías del lado de sotavento.	0.80	0.70	0.66
T2	Valles cerrados	0.90	0.79	0.74
T3	Terrenos prácticamente planos, campo abierto, ausencia de cambios topográficos importantes, con pendientes menores de 5% (normal).	1.00	0.88	0.82
T4	Terrenos inclinados con pendientes entre 5 y 10%	1.10	0.97	0.90
T5	Cimas de promontorios, colinas o montañas, terrenos con pendientes mayores al 10%, cañadas o valles cerrados.	1.20	1.06	0.98

La torre se construirá en una colina, que corresponde al Tipo T5 de la tabla, con un factor de rugosidad $F_{TR} = 1.06$.

Por lo tanto la velocidad de diseño es:

Para una altura $z = 10$ m $V_D = 127.20$ km/hr ó 35.333 m/s

Para $10 < z < \delta$ $V_D = 24.67z^{0.156}$ m/s

Si $z = 277$ m $V_D = 213.56$ km/hr ó 59.321 , m/s

Cálculo de la presión de diseño (P_z).

Una vez que se define a la velocidad de diseño, se puede aplicar el Teorema de Bernoulli, para estimar la presión que produce el viento.

$$P_z = \frac{1}{2} \rho V_D^2$$

La densidad ρ en función de la temperatura y de la altura sobre el nivel del mar, mide la densidad de masa de aire.

La densidad de masa es dependiente de la posición del sitio para la cual se usa el **factor correctivo** descrito por:

$$F_C = \frac{0.365P_a}{272 + T} \quad F_C = \frac{8 + H}{8 + 2H}$$

P_a Presión atmosférica en mm de Mercurio
 T Temperatura ambiente en °C
 H Altura sobre el nivel del mar en Km

TABLA 7.9 Variación de la densidad y viscosidad con la temperatura.

Propiedades a nivel del mar		
Temperatura	Densidad	Viscosidad
-15	1.365	0.118
-10	1.343	0.122
-5	1.32	0.127
0	1.294	0.132
5	1.272	0.137
10	1.249	0.141
15	1.225	0.145
20	1.205	0.151
25	1.184	0.155
30	1.164	0.16
35	1.147	0.164

Para este ejemplo se necesita conocer el valor de ρ a la altura donde se encuentra situada la torre $H = 2538$ m

El promedio de temperatura, se supuso de $22\text{ }^\circ\text{C}$; por lo tanto:

$$T = 22\text{ }^\circ\text{C}$$

$$\rho = 1.1966\text{ gr/cm}^2$$

$$H = 1.538\text{ Km}$$

$$g = 9.79\text{ m/s}^2$$

Densidad aplicando el $F_c = 0.105$ con este valor de ρ , la presión resulta

$$P = 0.0526 V^2$$

La Norma para el Distrito Federal Señala valor muy cerca al calculado por que se trabaja con el del reglamento.

$$P_z = 0.048 C_D V_D^2$$

Calculo de las fuerzas:

$$F_z = 0.048 C_D V_D^2 A$$

Donde: C_D es un coeficiente de arrastre.

A es el área expuesta

Los coeficientes de arrastre fueron obtenidos de pruebas realizadas en artículos confiables para los fines de esta tesis; los cuales se mencionan a continuación:

TABLA 7.10 Coeficientes de arrastre.

Coeficiente de Arrastre	CD	Artículos
Armadura con viento Normal a una Cara	1.00	Articulo Torre Televisa
Armadura con viento en una Esquina (45°)	1.50	
Cuerpo principal de concreto	1.40	Articulo Torre Nanjing
Sección triangular a 180 m de la base	2.00	
Cabina	0.80	
Antena de aluminio de 50 cm de diámetro	1.00	

CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

Nivel	Altura de Entrepiso (m)	Altura Z (m)	A _z (m ²)	Velocidad (km/hr)	VECTOR DE MASAS (ton.s ² /m)	Peso Wi (Ton)	Wi*hi (Ton*m)	Fi (Ton)	V _{med} (ton)	M _{med} (tom . m)
1	23.29	277.29	11.645	213.59	0.042	0.406	112.659	1.968	1.968	545.607
2	6.00	254.00	5.557	210.69	0.415	4.065	1032.461	1.370	3.338	348.071
3	6.00	248.00	5.557	209.90	0.3630	3.554	881.335	1.360	4.698	337.324
4	6.00	242.00	5.557	209.10	0.3630	3.554	860.012	1.350	6.048	326.657
5	6.00	236.00	5.557	208.29	0.3630	3.554	838.690	1.339	7.387	316.073
6	3.34	230.00	44.889	207.45	34.741	340.114	78226.310	5.724	13.111	1316.520
7	3.33	226.66	89.640	206.98	34.525	338.000	76611.023	11.378	24.490	2579.017
8	3.33	223.33	89.510	206.50	34.525	338.000	75485.484	11.310	35.799	2525.762
9	3.34	220.00	89.640	206.02	34.525	338.000	74359.945	11.273	47.072	2480.052
10	3.33	216.66	89.640	205.53	34.525	338.000	73231.026	11.219	58.291	2430.771
11	3.33	213.33	89.510	205.03	34.525	338.000	72105.487	11.149	69.440	2378.428
12	3.34	210.00	88.944	204.53	34.525	338.000	70979.948	11.024	80.465	2315.100
13	3.33	206.66	82.975	204.02	30.540	298.987	61788.571	10.233	90.698	2114.770
14	3.33	203.33	76.190	203.50	31.676	310.108	63054.268	9.349	100.047	1900.908
15	20.00	200.00	153.288	202.98	146.149	1430.799	286159.742	46.781	146.828	9356.186
16	30.00	180.00	301.837	199.67	291.052	2849.399	512891.834	62.396	209.224	11231.260
17	30.00	150.00	425.984	194.07	386.770	3786.478	567971.745	83.190	292.414	12478.518
18	30.00	120.00	519.615	187.43	430.897	4218.482	506217.796	94.651	387.065	11358.107
19	30.00	90.00	623.468	179.20	475.024	4650.485	418543.646	103.819	490.883	9343.698
20	30.00	60.00	727.368	168.22	519.150	5082.479	304948.710	106.727	597.611	6403.643
21	30.00	30.00	831.127	150.98	563.277	5514.482	165434.455	98.235	695.846	2947.059
22	0	7.50	454.370	127.20	298.186	2919.241	21894.307	38.120	733.966	285.897
TOTAL :			4811.87			33444.18	3433629.45		733.97	85319.43

FUERZA CORTANTE MOMENTO FLEXIONANTE

PARTICIPACIÓN DEBIDO A LAS FUERZAS PRODUCIDAS POR EL VIENTO MEDIO EN LA ESTRUCTURA.

$$\text{Relación de Fuerzas} = \frac{\text{Fuerza Cortante}}{\text{Peso Total (Wi)}} \times 100 = \frac{733.97}{33444.18} \times 100 = 2.195 \%$$

$$\text{Relación de Volteo} = \frac{\text{Momento de Volteo}}{\text{Wi hi}} \times 100 = \frac{85319.43}{3433629.45} \times 100 = 2.485 \%$$

POSICIÓN APROXIMADA DE LA FUERZA RESULTANTE.

$$\text{Fuerza Resultante} = \frac{\text{Momento de Volteo}}{\text{Cortante}} = \frac{85319.43}{733.97} = 116.24 \text{ m}$$

7.8 DESPLAZAMIENTOS LONGITUDINALES DE LAS MASAS RESPECTO A LA CIMENTACIÓN.

Para este análisis, se recurrió a un procedimiento en el que se utilizan las formas modales correspondientes a cada modo natural de vibración.

Se acepta que el análisis modal es correcto, si se cumplen las condiciones de ortogonalidad y normalidad de los modos.

Existe ortogonalidad entre los modos i-ésimo y k-ésimo, si:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{masa} \frac{W_n}{g} a_i a_{nj} = 0} \quad \text{Por otra parte:} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{masa} \frac{W_n}{g} a_{ni}^2 = K^2}$$

Se puede aceptar que al existir normalidad en cada modo, existan semiamplitudes normalizadas de cada modo en cada masa, representadas por:

$$A_{ni}, \text{ tales que: } \sum_{n=1}^{masa} \frac{W_n}{g} a_{ni}^2 = 1$$

Estas semiamplitudes normalizadas se producen en la estructura, cuando existe un sistema de cargas normalizadas, que al actuar sobre las masas producen las configuraciones normalizadas del modo correspondiente.

Es posible demostrar que cada carga normalizada, se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{\delta_{ni} = w_{ni}^2 \frac{W_n}{g} A_{ni}}$$

Una vez que se conocen las cargas normalizadas, se puede establecer que:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 \delta_{11} + \varphi_2 \delta_{12} + \varphi_3 \delta_{13} \\ F_2 &= \varphi_1 \delta_{21} + \varphi_2 \delta_{22} + \varphi_3 \delta_{23} \\ F_3 &= \varphi_1 \delta_{31} + \varphi_2 \delta_{32} + \varphi_3 \delta_{33} \end{aligned} \right\} \text{ Fuerzas que produce el viento.}$$

Se tiene así un sistema de ecuaciones en las que se conocen las fuerzas del primer miembro de cada ecuación, mientras que en el segundo miembro aparecen los factores de participación φ como incógnitas y se puede conocer al factor de participación correspondiente a cada modo, al resolver el sistema.

Ya que cada sistema característico normalizado de carga, produce la amplitud normalizada de cada masa; se puede escribir:

$$\begin{aligned} v_3 &= \varphi_1 A_{31} + \varphi_2 A_{32} + \varphi_3 A_{33} \\ v_2 &= \varphi_1 A_{21} + \varphi_2 A_{22} + \varphi_3 A_{23} \\ v_1 &= \varphi_1 A_{11} + \varphi_2 A_{12} + \varphi_3 A_{13} \end{aligned}$$

Se pueden calcular los desplazamientos totales de las masas respecto a la cimentación; una vez que se conocen los desplazamientos, se pueden calcular los desplazamientos relativos de cada entrespiso.

Estos desplazamientos relativos se comparan con los valores propuestos en normas para estimar la posibilidad de daño en columnas.

Se evalúan la posibilidad de daño en columnas, y al no existir, se considera que existe estabilidad local de la estructura.

Para este cálculo se requiere de los factores de participación φ de cada modo, para estimar el daño relativo.

Existe un procedimiento alternativo que permite calcular los factores de participación, sin necesidad de establecer el sistema de ecuaciones, en donde aparecen las fuerzas que produce el viento. Se basa en el cálculo del trabajo virtual que producen las fuerzas F_i en un modo de vibrar cualquiera, por ejemplo: El b-ésimo modo.

$$w_b = F_1 A_{1b} + F_2 A_{2b} + F_3 A_{3b}$$

$$w_b = \sum_{r=1}^n F_r A_{rb}$$

Se puede aceptar que:
$$F_i = \sum_{b=1}^{\text{modo}} \varphi_b \delta_{ib} = \sum_{i=1}^n \varphi_b \delta_{ib}$$

Al sustituir este valor:
$$W_b = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_b \delta_{ib}$$

$$W_b = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_b w_b^2 \frac{w_r}{g} A_{rb} A_{ib}$$

“r” Representa a cada masa.

$$W_b = \sum_{i=1}^n \varphi_b \sum_{r=1}^n w_b^2 \frac{w_r}{g} A_{rb} A_{ib} \qquad W_b = \sum_{i=1}^n \varphi_b w_b^2 \sum_{r=1}^n \frac{w_r}{g} A_{rb} A_{ib}$$

Debido a las condiciones de ortogonalidad y normalidad la expresión anterior se reduce a una de un solo término, por lo que:

$$w_b = \varphi_b w_b^2$$

En consecuencia:

$$\varphi_b = \frac{w_b}{w_b^2}$$

$$\varphi_b = \frac{\sum F_i A_{ib}}{w_b^2}$$

CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

TABLA 7.11 Modos normalizados respecto a la masa (A_{ij})

Nivel	1 ^{er} Modo (m)
K	0.00261267
1	-0.05657
2	-0.04897
3	-0.04703
4	-0.04510
5	-0.04319
6	-0.04131
7	-0.04028
8	-0.03925
9	-0.03821
10	-0.03717
11	-0.03614
12	-0.03510
13	-0.03406
14	-0.03300
15	-0.03197
16	-0.02639
17	-0.01859
18	-0.01190
19	-0.00663
20	-0.00291
21	-0.00072
22	0.00000

$$\sum \frac{W_i}{g} \cdot a_{ij}^2 = k^2$$

$$k = \sqrt{\sum \frac{W_i}{g} \cdot a_{ij}^2}$$

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}}{k}$$

$$\sum \frac{W_i}{g} \cdot A_{ij}^2 = 1$$

$$\psi_j = \frac{\sum F_i \cdot A_{ij}}{\omega_i^2}$$

TABLA 7.12 Comprobación de los modos normalizados

NIVEL	1 ^{er} Modo
1	0.000133
2	0.000996
3	0.000803
4	0.000738
5	0.000677
6	0.059287
7	0.056007
8	0.053180
9	0.050417
10	0.047707
11	0.045091
12	0.042540
13	0.035423
14	0.034505
15	0.149423
16	0.202708
17	0.133721
18	0.061056
19	0.020900
20	0.004393
21	0.000295
22	0.000000
K Normalizada	1.0000

Factores de Participación modal

$$\Psi_j = -6.7972159$$

TABLA 7.13 Desplazamientos provocados por el viento medio V_i

Nivel	Despl. Método Estático(Cm)
1	38.452
2	33.285
3	31.966
4	30.658
5	29.359
6	28.079
7	27.377
8	26.677
9	25.975
10	25.267
11	24.565
12	23.860
13	23.149
14	22.434
15	21.734
16	17.938
17	12.639
18	8.091
19	4.509
20	1.977
21	0.492
22	0.000

$$v_i = \sum (\psi_j \cdot A_{ij})$$

Se deben considerar además los desplazamientos producidos por la cimentación; estos son significativos en las estructuras y dependen del tipo de cimentación y terreno; para fines de este análisis no se calcularon, pues aquí solo se pretende marcar el efecto dinámico producido por turbulencia y vórtices en la estructura.

7.9 MÉTODO DINÁMICO ESPECTRAL

7.9.1 EL ESPECTRO DE POTENCIA.

Las fluctuaciones de velocidad del flujo de aire que pasa por un punto en el espacio pueden considerarse como causa de una superposición de ráfagas conceptuales transportadas por el viento medio. Cada ráfaga es causada de una fluctuación periódica de velocidad con frecuencia circular $\omega = 2\pi n$, donde n es la frecuencia natural de la ráfaga idealizadas como funciones periódicas conocidas presentan dos características fundamentales: su longitud de onda $\lambda = V/n$ y el número de onda $K = 2\pi/\lambda$, que sirven de parametrote medición de las ráfagas (en estas expresiones V es la velocidad de la componente del viento turbulento).

La energía cinética total del movimiento turbulento se considera como una suma de contribuciones de las ráfagas del flujo que abarca un intervalo amplio de frecuencias.

A través de la investigación se han encontrado funciones que describen la densidad espectral de potencia o de energía cinética contenida en el viento turbulento a través de un intervalo de frecuencias. Estas funciones son conocidas como Espectros de Potencia de Ráfagas y son resultado de un minucioso proceso estocástico de la información contenida en los registros del viento.

Para llevar a cabo este método se utilizan espectros de respuesta dinámica; para el caso de dos tipos de terreno campo y suburbio.

7.9.2 ESPECTROS DE POTENCIA DE DAVENPORT Y HARRIS.

De acuerdo con los estudios realizados por Davenport (1961) y Harris (1968), se han propuesto las siguientes expresiones para determinar la turbulenta horizontal del viento a una altura z .

$$\frac{nS(n)}{K\bar{V}_{10}^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^{\frac{4}{3}}} \quad x = \frac{nL}{\bar{V}_{10}}$$

Donde: n Frecuencia en cps.
 $S(n)$ Densidad Espectral de potencia correspondiente a la frecuencia n .
 K Coeficiente de rugosidad de la superficie.
 L Longitud representativa de la escala de turbulencia.
 \bar{V}_{10} Velocidad media horaria a una altura de 10 m sobre el terreno.

Esta expresión es de carácter empírica obtenida de ajustar una curva a la región donde se concentran los espectros de potencia normalizados.

La expresión propuesta por Davenport, se considera que:

$$\sigma^2(R) = 4KV_{10}^2 \quad \phi(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{4}{3}}}$$

Donde: σ^2 Varianza de la velocidad de Reynolds.

En el espectro normalizado por Davenport se considero que "L" es una longitud que definió igual a 1200 m

En la expresión matemática se aplica para diversos tipos de terreno para describir a los espectros de potencia.

$$S(n) = \frac{\sigma^2(V_R)}{n} \Phi(x)$$

Esta expresión permite definir la densidad espectral de potencia de vientos turbulentos para distintos tipos de terreno.

Posteriormente en Inglaterra, otro investigador R. Harris realizo observaciones de campo y trato de relacionar sus resultados con una teoría propuesta por Von Kármán.

Sus resultados se pueden representar por una función igual a la de Davenport, pero propuso otra expresión para definir $\Phi(x)$; en la cual, consideró que:

$$L = 1,800 \text{ m}$$

La expresión propuesta por Harris $\Phi(x) = \frac{x^2}{(2+x^2)^{\frac{5}{6}}}$

La expresión propuesta por Harris es integrable matemáticamente mientras que la expresión de Davenport solo se puede integrar numéricamente.

Es posible establecer matemáticamente que: $\sigma^2 = \int_0^\infty S(n)dn$

Esta expresión mide la energía asociada a un registro de velocidades de Reynolds.

Al comparar en un sitio, los valores propuestos por Davenport y Harris se llegan a obtener que los valores de Harris son 76% de los propuestos por Davenport.

En los valores que aparecen en la literatura para representar los espectros de potencia se observa la tendencia que en general es suficientemente buena ya que en baja frecuencia se tiende a presentar mayor densidad espectral que en alta frecuencia.

CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

En el estado actual del conocimiento de la turbulencia, los dos espectros de potencia mencionados son los que aparecen en normas. En América predominan las normas con el espectro de Davenport, mientras que en Europa se inclinan por la expresión de Harris.

Se ha intentado correlacionar el valor de “k” con las características del terreno y se han llegado a establecer los siguientes intervalos del coeficiente de rugosidad “k” propuestos por Harris.

TABLA 7.14 Coeficientes de Rugosidad K para diferentes tipos de terreno.

Tipo de Superficie.	Intervalos de valores de “k”.
1. Superficie del mar tranquilo.	0.001 – 0.002
2. Campo abierto.	0.003 – 0.005
3. Zona suburbana.	0.015 – 0.036
4. Centro de ciudades	0.030 – 0.050

Se observa que a medida que es más rugosa la superficie el valor de “k” aumenta y debe aumentar la turbulencia.

Para nuestro problema se determina el siguiente espectro de respuesta para K = 2 y k = 3.

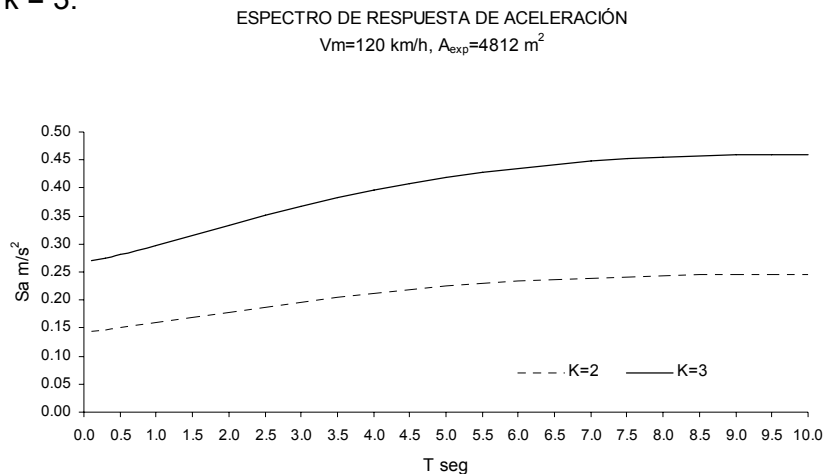


FIG. 7.12 Espectro de Aceleraciones de respuesta producidos por el viento.

Al ingresar el Espectro de Respuesta resulta una amplitud de desplazamiento máxima de:

Amplitud máxima Campo: **21.537 cm.**
Amplitud máxima Suburbio: **40.175 cm.**

Es posible determinar el FAD para cada caso:

$$FAD = \frac{\text{Desplazamiento Estático} + \text{Dinámico}}{\text{Despl. Estático}}$$

FAD Campo : **1.560**

FAD Suburbio: **2.045**

CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

Es posible determinar los desplazamientos y fuerzas amplificadas por la acción dinámica de las ráfagas del viento.

Nivel	DESPLAZAMIENTOS (CM)			DISTORSIONES			FUERZAS	
	Método Estático	FAD _{Campo} * Despl. Estático	FAD _{Suburbio} * Despl. Estático	Despl. Relativo Campo	Despl. Relativo Suburbio	1/250	FAD Campo *F (Ton)	FAD Suburbio *F (Ton)
1	38.452	59.989	78.627	0.0035	0.0045	0.0040	3.070	4.023
2	33.285	51.928	68.062	0.0034	0.0045	0.0040	2.138	2.802
3	31.966	49.870	65.365	0.0034	0.0045	0.0040	2.122	2.781
4	30.658	47.829	62.689	0.0034	0.0044	0.0040	2.106	2.760
5	29.359	45.804	60.034	0.0033	0.0044	0.0040	2.089	2.739
6	28.079	43.807	57.417	0.0033	0.0043	0.0040	8.930	11.704
7	27.377	42.711	55.981	0.0033	0.0043	0.0040	17.751	23.266
8	26.677	41.619	54.549	0.0033	0.0043	0.0040	17.644	23.126
9	25.975	40.523	53.113	0.0033	0.0043	0.0040	17.587	23.051
10	25.267	39.419	51.666	0.0033	0.0043	0.0040	17.503	22.941
11	24.565	38.323	50.230	0.0033	0.0043	0.0040	17.394	22.798
12	23.860	37.223	48.788	0.0033	0.0043	0.0040	17.199	22.542
13	23.149	36.115	47.336	0.0034	0.0044	0.0040	15.965	20.925
14	22.434	34.999	45.873	0.0033	0.0043	0.0040	14.585	19.117
15	21.734	33.907	44.442	0.0030	0.0039	0.0040	72.983	95.658
16	17.938	27.985	36.680	0.0028	0.0036	0.0040	97.343	127.587
17	12.639	19.718	25.844	0.0024	0.0031	0.0040	129.784	170.107
18	8.091	12.623	16.545	0.0019	0.0024	0.0040	147.664	193.542
19	4.509	7.034	9.219	0.0013	0.0017	0.0040	161.967	212.289
20	1.977	3.085	4.043	0.0008	0.0010	0.0040	166.505	218.236
21	0.492	0.767	1.005	0.0003	0.0003	0.0040	153.256	200.871
22	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0040	59.470	77.947

Relacion de Desplazamientos

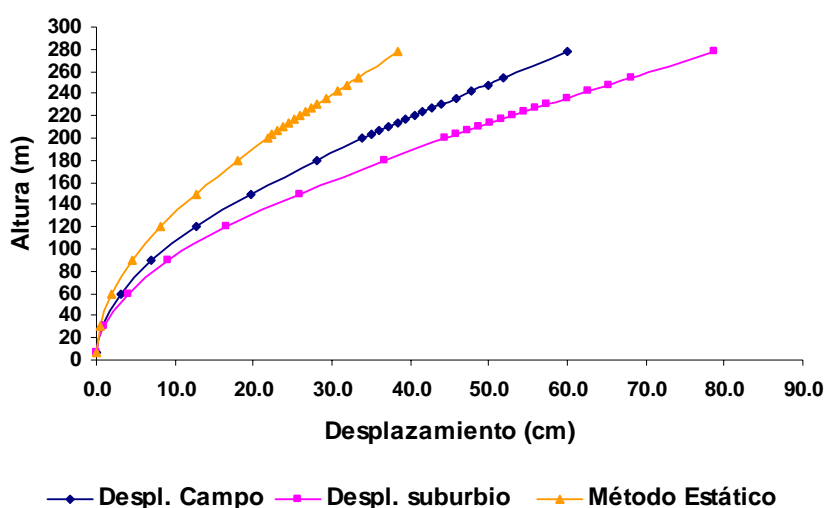


FIG. 7.13 Desplazamientos medios producidos por el viento en la torre.

Fuerza Debida a Viento Medio

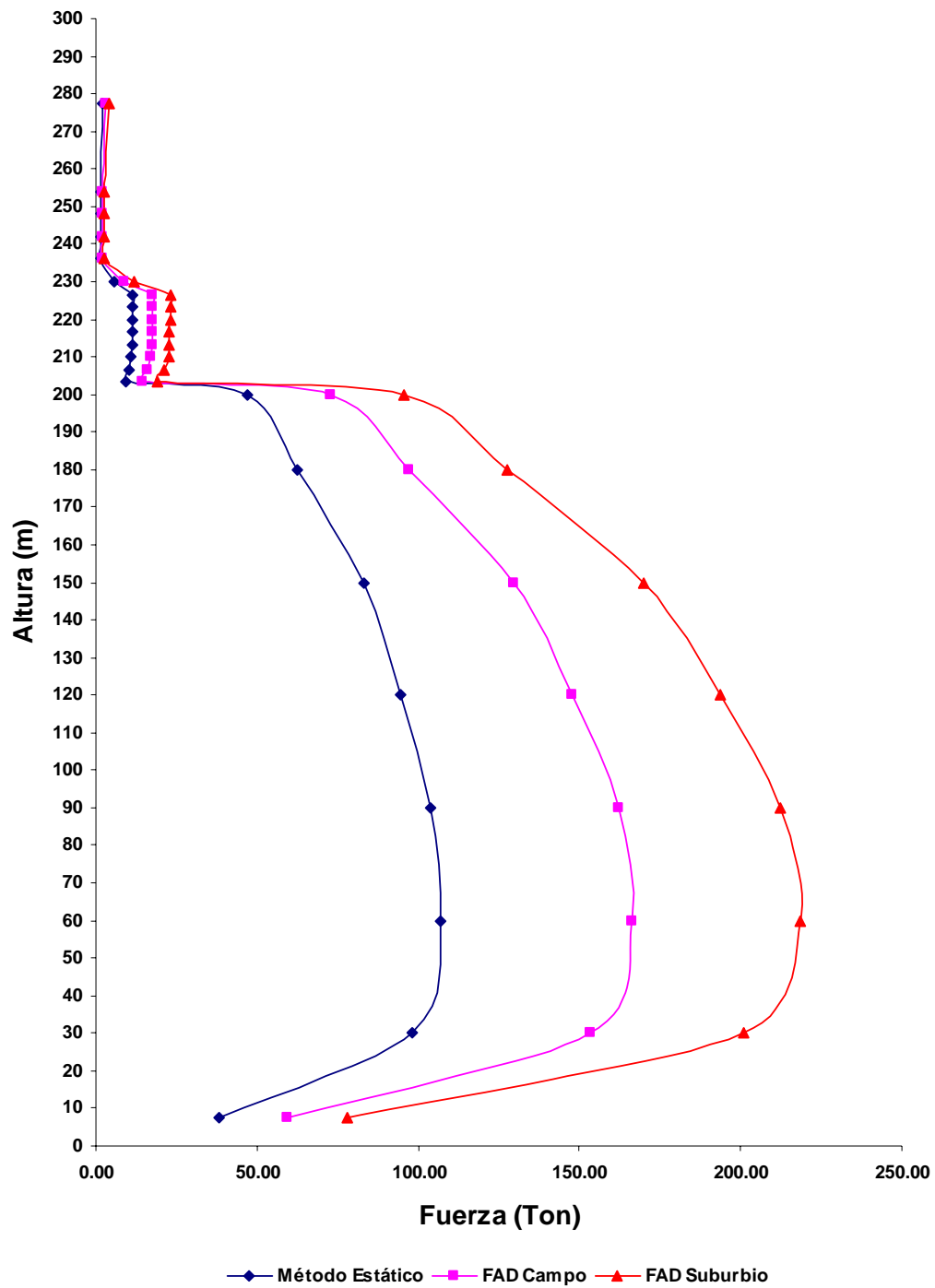


FIG. 7.14 Variación de las fuerzas inducidas por el viento en la torre.

7.10 VELOCIDAD CRÍTICA QUE PROVOCA SEPARACIÓN DE VÓRTICES.

Al incrementar la velocidad y evaluar su efecto, es común recurrir en estructuras flexibles, al concepto de velocidad reducida del viento, definida como:

$$V_R = \frac{\bar{V}}{nD} \quad \text{Controla las características de vibración de una estructura.}$$

Cuando el flujo alcanza una velocidad reducida.

$$V_R = \frac{1}{S} \quad \text{Donde S es el número de Strouhal.}$$

Esta es una condición crítica para la cual se generan vórtices que provocan fuerzas transversales y vibraciones importantes en la estructura.

En la aparición de los vórtices y los desplazamientos que provocan dependen de un número adimensional importante, el número de Strouhal, que depende de la forma de la sección transversal de la estructura.

Al sustituir en la condición crítica. $V_{CR} = \frac{nD}{S}$

Se obtiene la velocidad del viento en la cual se producen los vórtices alternantes que se desprenden de la estructura.

Se observa que al sustituir $n = \frac{1}{T}$ Donde T es el periodo natural de la estructura.

$$V_{CR} = \frac{D}{TS}$$

Para la cabina circular, $S = 0.2$, $D_{\text{mayor}} = 26.88 \text{ m}$ y $T = 5.0124$ resulta:

$$V_{CR} = \frac{5(26.88 \text{ m})}{5.0124 \text{ seg}} = 26.8135 \text{ m / seg} = 96.5286 \text{ Km / hr}$$

Si la velocidad regional propuesta es de $V_R = 120 \text{ km/hr}$ es evidente el desprendimiento de vórtices; por lo que debe proponer un dispositivo para evitarlos, como por ejemplo, el empleo de aletas helicoidales el cual eliminará la formación de vórtices u otro dispositivo, como la colocación de placas a lo largo de la cabina lo que proporcionará resultados satisfactorios.

7.11 DESPLAZAMIENTOS LONGITUDINALES CUANDO SE DESPRENDEN VÓRTICES.

MÉTODO ESTÁTICO.

Ahora se empieza el mismo procedimiento que el realizado anteriormente solo que con una velocidad regional de 96.53 km/hr y un coeficiente de arrastre de 0.4 para la cabina por la implementación de las aletas obtenemos los siguientes desplazamientos longitudinales y fuerzas efectivas del viento medio.

Nivel	Altura de Entrepiso (m)	Altura Z (m)	Velocidad (km/hr)	Peso Wi (Ton)	Wi*hi (Ton*m)	Fi (Ton)	V _{med} (ton)	M _{med} (tom . m)
1	23.29	277.29	171.82	0.406	112.659	1.273	1.273	353.055
2	6.00	254.00	169.48	4.065	1032.461	0.887	2.160	225.232
3	6.00	248.00	168.85	3.554	881.335	0.880	3.040	218.278
4	6.00	242.00	168.21	3.554	860.012	0.873	3.914	211.375
5	6.00	236.00	167.55	3.554	838.690	0.867	4.780	204.526
6	3.34	230.00	166.88	340.114	78226.310	1.852	6.632	425.951
7	3.33	226.66	166.50	338.000	76611.023	3.681	10.314	834.423
8	3.33	223.33	166.11	338.000	75485.484	3.659	13.973	817.193
9	3.34	220.00	165.72	338.000	74359.945	3.647	17.620	802.404
10	3.33	216.66	165.33	338.000	73231.026	3.630	21.250	786.459
11	3.33	213.33	164.93	338.000	72105.487	3.607	24.857	769.524
12	3.34	210.00	164.53	338.000	70979.948	3.567	28.424	749.035
13	3.33	206.66	164.11	298.987	61788.571	3.311	31.735	684.219
14	3.33	203.33	163.70	310.108	63054.268	3.025	34.760	615.026
15	20.00	200.00	163.28	1430.799	286159.742	30.271	65.031	6054.258
16	30.00	180.00	160.62	2849.399	512891.834	40.376	105.406	7267.593
17	30.00	150.00	156.11	3786.478	567971.745	53.831	159.238	8074.676
18	30.00	120.00	150.77	4218.482	506217.796	61.247	220.485	7349.674
19	30.00	90.00	144.16	4650.485	418543.646	67.180	287.665	6046.178
20	30.00	60.00	135.32	5082.479	304948.710	69.062	356.726	4143.709
21	30.00	30.00	121.45	5514.482	165434.455	63.567	420.293	1907.001
22	0.00	7.50	102.32	2919.241	21894.307	24.667	444.960	185.00
TOTAL :				33444.18	3433629.45		444.96	48724.79

FUERZA CORTANTE MOMENTO FLEXIONANTE

PARTICIPACIÓN DEBIDO A LAS FUERZAS PRODUCIDAS POR EL VIENTO MEDIO EN LA ESTRUCTURA.

$$Relación \ de \ Fuerzas = \frac{Fuerza \ Cortante}{Peso \ Total \ (Wi)} \times 100 = \frac{444.96}{33444.18} \times 100 = 1.33 \%$$

$$Relación \ de \ Volteo = \frac{Momento \ de \ Volteo}{Wi \ hi} \times 100 = \frac{48724.79}{3433629.45} \times 100 = 1.42 \%$$

POSICIÓN APROXIMADA DE LA FUERZA RESULTANTE.

$$Fuerza \ Resultante = \frac{Momento \ de \ Volteo}{Cortante} = \frac{48724.79}{444.96} = 109.50 \ m$$

CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

ESTIMACIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE LAS MASAS CON RESPECTO A LA CIMENTACIÓN.
 TABLA 7.15 Modos normalizados respecto a la masa (A_{ij})

Nivel	1 ^{er} Modo (m)
K	0.00261267
1	-0.05657
2	-0.04897
3	-0.04703
4	-0.04510
5	-0.04319
6	-0.04131
7	-0.04028
8	-0.03925
9	-0.03821
10	-0.03717
11	-0.03614
12	-0.03510
13	-0.03406
14	-0.03300
15	-0.03197
16	-0.02639
17	-0.01859
18	-0.01190
19	-0.00663
20	-0.00291
21	-0.00072
22	0.00000

$$k = \sqrt{\sum \frac{W_i}{g} \cdot a_{ij}^2} = \frac{\sum F_i \cdot A_{ij}}{\omega_i^2}$$

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}}{k}$$

$$\sum \frac{W_i}{g} \cdot A_{ij}^2 = 1$$

TABLA 7.16 Comprobación de los modos normalizados

Nivel	1 ^{er} Modo
1	0.000133
2	0.000996
3	0.000803
4	0.000738
5	0.000677
6	0.059287
7	0.056007
8	0.053180
9	0.050417
10	0.047707
11	0.045091
12	0.042540
13	0.035423
14	0.034505
15	0.149423
16	0.202708
17	0.133721
18	0.061056
19	0.020900
20	0.004393
21	0.000295
22	0.000000
K Normalizada	1.0000

Factores de Participación modal

$$\Psi_j = -3.6914335$$

TABLA 7.17 Desplazamientos provocados por el viento medio V_i

Nivel	Despl. (Cm)
1	20.883
2	18.077
3	17.360
4	16.650
5	15.945
6	15.249
7	14.868
8	14.488
9	14.106
10	13.722
11	13.341
12	12.958
13	12.572
14	12.183
15	11.803
16	9.742
17	6.864
18	4.394
19	2.449
20	1.074
21	0.267
22	0.000

$$v_i = \sum (\psi_j \cdot A_{ij})$$

CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

7.12 MÉTODO DINÁMICO PARA CALCULAR DESPLAZAMIENTOS LONGITUDINALES DEBIDOS A VÓRTICES.

Al realizar el análisis dinámico, se utilizó el espectro de aceleraciones de respuesta, que produjo una amplitud de desplazamiento máxima cuando se generan los vórtices, en sentido longitudinal; a igual a:

Amplitud máxima Campo: **21.537 cm.**

Amplitud máxima Suburbio: **40.175 cm.**

Es posible determinar el FAD para cada caso:

FAD_{Campo}: **2.031** FAD_{Suburbio}: **2.924**

Los desplazamientos y fuerzas amplificadas por la acción dinámica de las ráfagas del viento, resultaron se:

Nivel	DESPLAZAMIENTOS (CM)			DISTORSIONES			FUERZAS (TON)	
	Método Estático	FAD _{Campo} *Despl	FAD _{Suburbio} *Despl	Despl. Relativo Campo	Despl. Relativo Suburbio	1/250	FAD _{Campo} *F	FAD _{Suburbio} *F
1	20.883	42.420	61.057	0.0024	0.0035	0.0040	2.586	3.723
2	18.077	36.720	52.853	0.0024	0.0035	0.0040	1.801	2.593
3	17.360	35.264	50.759	0.0024	0.0035	0.0040	1.788	2.573
4	16.650	33.821	48.681	0.0024	0.0034	0.0040	1.774	2.554
5	15.945	32.389	46.619	0.0024	0.0034	0.0040	1.760	2.534
6	15.249	30.977	44.587	0.0023	0.0033	0.0040	3.762	5.415
7	14.868	30.202	43.471	0.0023	0.0033	0.0040	7.478	10.764
8	14.488	29.430	42.360	0.0023	0.0033	0.0040	7.433	10.699
9	14.106	28.655	41.245	0.0023	0.0034	0.0040	7.409	10.664
10	13.722	27.874	40.121	0.0023	0.0033	0.0040	7.374	10.613
11	13.341	27.099	39.006	0.0023	0.0034	0.0040	7.327	10.547
12	12.958	26.321	37.886	0.0023	0.0034	0.0040	7.245	10.429
13	12.572	25.538	36.758	0.0024	0.0034	0.0040	6.725	9.680
14	12.183	24.749	35.622	0.0023	0.0033	0.0040	6.144	8.844
15	11.803	23.976	34.511	0.0021	0.0030	0.0040	61.491	88.508
16	9.742	19.789	28.484	0.0019	0.0028	0.0040	82.016	118.051
17	6.864	13.943	20.069	0.0017	0.0024	0.0040	109.349	157.394
18	4.394	8.926	12.848	0.0013	0.0019	0.0040	124.413	179.077
19	2.449	4.974	7.159	0.0009	0.0013	0.0040	136.464	196.423
20	1.074	2.181	3.140	0.0005	0.0008	0.0040	140.287	201.925
21	0.267	0.542	0.781	0.0002	0.0003	0.0040	129.125	185.859
22	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0040	50.106	72.121

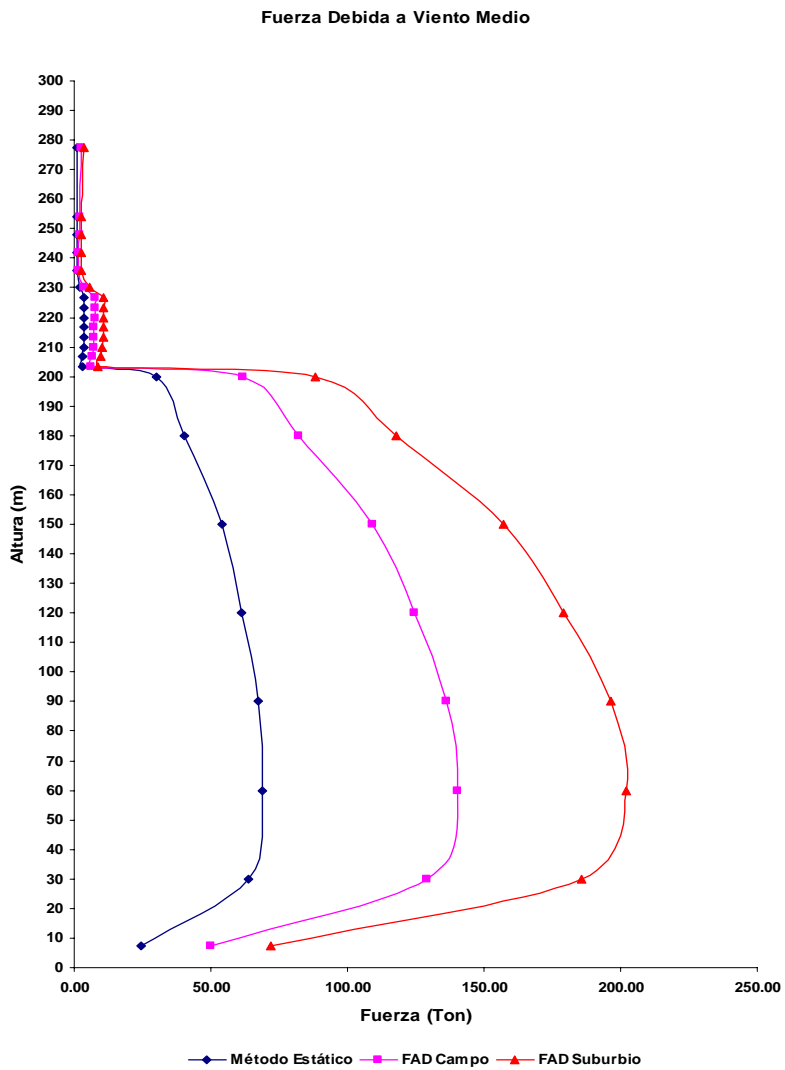
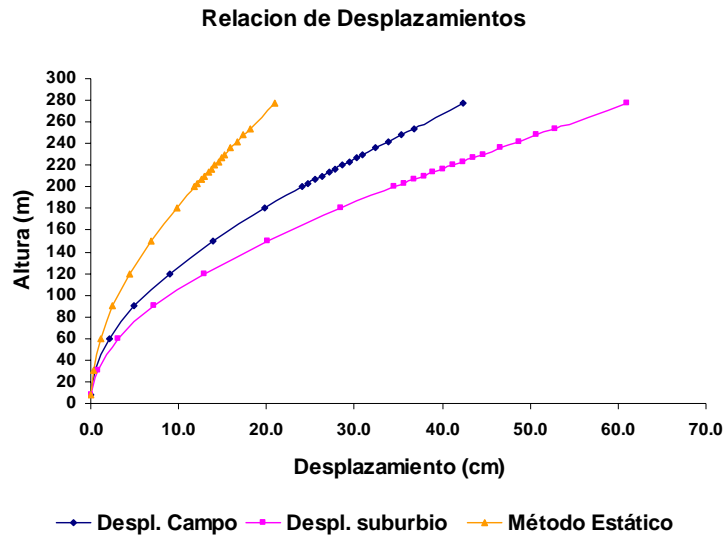


FIG. 7.15 Acciones producidas por el viento

7.13 DESPLAZAMIENTOS TRANSVERSALES POR EL DESPRENDIMIENTO DE VÓRTICES.

CÁLCULO DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES (REGLAMENTO CANADA).

$$F_L = \frac{C_1}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\beta - C_2 \frac{\rho D^2}{M}}} q_H D \qquad V_H = \frac{nD}{S} \qquad q_H = 0.6 V_H^2$$

Donde:

- β Relación de amortiguamiento crítico.
- λ Relación de aspecto (H/D)
- H Altura de la estructura
- S Número de Strouhal.
- n Frecuencia en Hz.
- D Diámetro de la sección transversal en mts.
- q_H Presión de velocidad correspondiente a V_H . (N/m²)
- V_H . Es la velocidad media de aparición de los vórtices en la parte superior de la estructura en m/s.
- M Promedio de masa por unidad de longitud a 1/3 de la parte superior de la estructura.
- ρ Densidad del aire igual a 1.2 Kg/m³

$$C_1 = 3.0 \text{ Para } \lambda > 16; C_1 = \frac{3\sqrt{\lambda}}{4} \text{ Para } \lambda < 16$$

$$C_2 = 0.6$$

Obtención de los datos para la torre.

- H = 230 m
- S = 0.20 Strouhal
- D = 26.88 m
- $V_H = 26.81$ m/s
- $V_H = 96.53$ Km/hr
- 1/S = 5.00
- $q_H = 431.38$ N/m²
- $q_H = 44.0$ Kg/m
- $q_H = 0.6 V_H^2$
- β Es la relación del amortiguamiento crítico
- $\beta = 0.05$ Concreto
- Re = 43244816.85 Reynolds
- $\rho = 1.2$ Kg/m³
- C1 = 2.19
- C2 = 0.6

Los efectos dinámicos del desprendimiento de vórtices de una estructura circular puede ser aproximada por la acción de una fuerza estática a 1/3 de la parte superior de la estructura por lo que para fines del mirador se considera solo la cabina. La Fuerza Estática equivalente por unidad de altura es dada por F_L .

TABLA 7.18 Cálculo de las fuerzas nodales para formar la función Senoidal.

Cabina						
Altura de Entrepiso (m)	VECTOR DE MASAS M (Kg/m)	$C_2 \frac{\rho D^2}{M}$	$F_L(\text{Kg/m})$	$F_L(\text{N/m})$	$F_L \text{ Kg}$	FZA EN CADA NODO $F_L \text{ Kg}$
3.34	101830.66	0.005	4192.617	41045.7221	7001.671	538.590
3.33	101501.43	0.005	4193.391	41053.2998	13963.993	1074.153
3.33	101501.43	0.005	4193.391	41053.2998	13963.993	1074.153
3.34	101197.53	0.005	4194.111	41060.3419	14008.329	1077.564
3.33	101501.43	0.005	4193.391	41053.2998	13963.993	1074.153
3.33	101501.43	0.005	4193.391	41053.2998	13963.993	1074.153
3.34	101197.53	0.005	4194.111	41060.3419	14008.329	1077.564
3.33	89785.77	0.006	4224.992	41362.6727	14069.224	1082.248
3.33	93125.54	0.006	4215.097	41265.7999	14036.273	1079.713
FZA. TOTAL:					118979.796	

El movimiento generado por la aparición de los vórtices en viento turbulento es un Movimiento armónico simple.

Si aplicamos la ley de Newton, $F = m a$ junto con la ley de Hooke, se obtiene:

$$m a = -K x \Rightarrow m a + K x = 0$$

Las magnitudes involucradas, a y x dependen una de la otra, concretamente

como: $a = \frac{dx}{dt^2}$ $\frac{dx}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$

Constituye una ecuación diferencial, cuya solución más general a este movimiento:

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

A es la amplitud máxima que puede recorrer el móvil; en este caso amplitud máxima de la fuerza, **w** es la frecuencia angular de la oscilación, es decir, el número de “radianes” que da en un segundo.

Frecuencia del movimiento $f = \frac{\omega}{2\pi}$; Es decir, el número de oscilaciones completas que da en un segundo; o tomar, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ El periodo de la oscilación, que será el tiempo que tarda nuestro sistema en dar una oscilación completa.

Velocidad

Para calcular la velocidad que un móvil sometido a una fuerza armónica presenta en un instante “t” basta derivar su ecuación del movimiento. Así tendremos que,

$$V = \frac{dx}{dt} \quad \text{Por lo tanto: } V = A \omega \cos(\omega t + \phi)$$

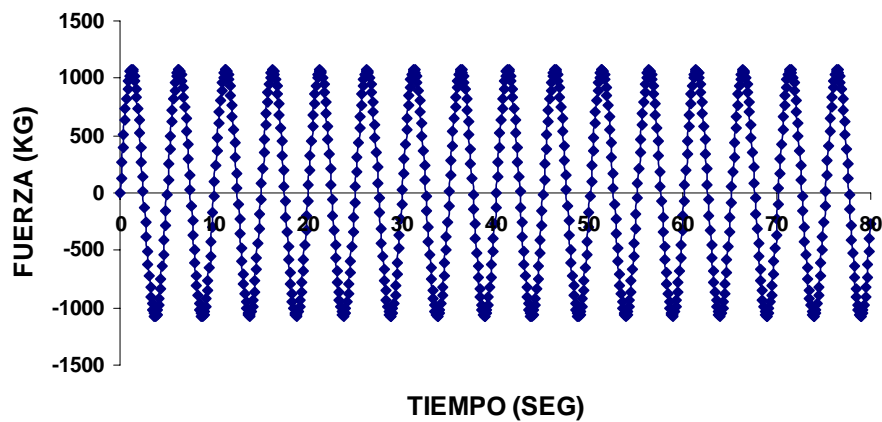
Aceleración

La aceleración a la que se encuentra sometido un móvil que describe un movimiento armónico simple se puede obtener:

$$a = \frac{dx}{dt^2} \quad \text{Por lo tanto: } V = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

La función obtenida para el análisis debido al desprendimiento de vórtices para una fuerza de 1074.153 kg correspondiente a un nodo es:

FIG. 7.16 Fuerza Senoidal correspondiente a cada nodo de la proyección transversal de la cabina.

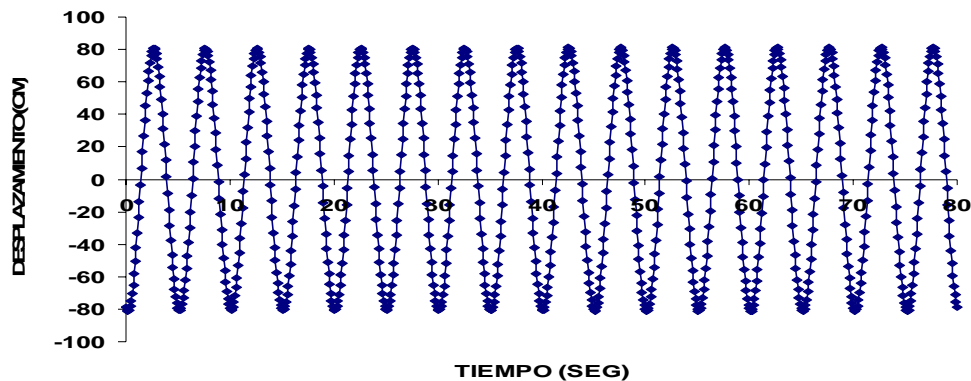


Cuando se tiene y una fuerza excitadota con una frecuencia de excitación, el factor de amplificación dinámica máximo; FDA, cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural de vibración se define como resonancia y resulta ser.

$$FAD = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Y por lo tanto los desplazamientos correspondientes al desprendimiento de vórtices son:

FIG. 7.17 DESPLAZAMIENTOS A 230 MTS



CAPITULO VII. APLICACIÓN A UNA TORRE ESBELTA

FIG. 7.18 VELOCIDAD H = 230 Mts

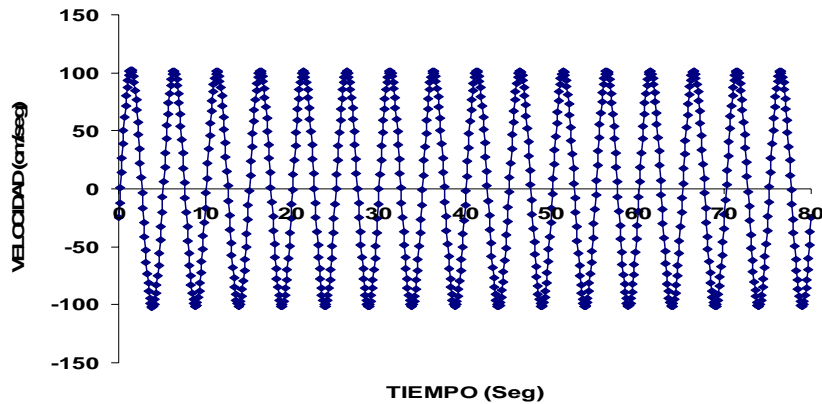
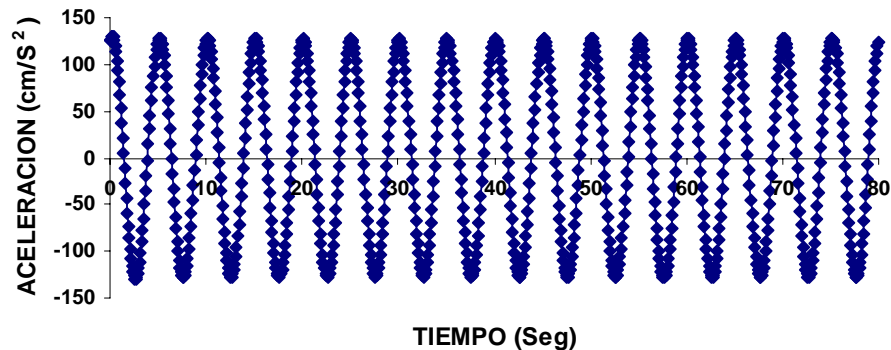


FIG. 7.19 RESPUESTA DE ACELERACIONES H = 230 Mts.



Los desplazamientos máximos en la dirección transversal son de **81.263 cm** y en la longitudinal 42.42 cm y 61.057 cm para la torre situada en campo y afuera de las ciudad; respectivamente.

Por lo que la resultante del desplazamiento es de aproximadamente **91.66** y **101.64** para campo y suburbio.

TABLA 7.19 Desplazamientos dinámicos máximos debido al FAD.

Altura (m)	No. Nodo	Viento X (cm)	Viento Y (cm)	FAD*DESP
230.00	17956	8.350	8.450	84.61
226.66	14934	8.160	8.216	82.27
223.33	12614	7.969	7.982	79.92
220.00	10294	7.778	7.748	77.57
216.33	8676	7.587	7.511	75.21
213.33	7760	7.395	7.275	72.84
210.00	6840	7.204	7.038	70.47
206.66	5805	7.019	6.800	68.09
203.33	5612	6.830	6.563	65.71
200.00	5046	6.650	6.320	63.28
CORTANTE		341.185 Ton	118.979 Ton	Programa
		339.854 Ton	118.979 Ton	Hoja de calculo
		FAD =		10.013

Con lo que se concluye que el análisis dinámico realizado con la función senoidal da resultados muy próximos a los obtenidos por este método para desplazamientos transversales debido a la aparición de los vórtices.

OBSERVACIONES FINALES.

Este trabajo muestra la factibilidad de aplicar técnicas desarrolladas en México, para un estudio confiable de los efectos que el viento turbulento provoca en las estructuras esbeltas. Se muestra la modelación matemática mediante el método de los elementos finitos, su integración y secuencias necesarias para lograr representar el fenómeno aeroelástico resultante de la interacción del viento turbulento sobre la torre esbelta.

Se describió el análisis de la interacción con el viento turbulento de la región en la cual se pretende construir, mediante el empleo de secuencias de cálculo: análisis simplificado y el efecto que produce en la torre, la separación de vórtices al presentarse la velocidad crítica que produce su generación.

Se mencionaron las bases teóricas que generan el análisis de la acción del viento sobre la torre, y se presenta un estudio comparativo del fenómeno aeroelástico que produce el viento de masas de aire turbulento contra la superficie exterior de la torre y sobre la estructura de concreto portante.

Se logró comprobar que el efecto de los vórtices en las estructuras esbeltas es muy significativo y produce desplazamientos transversales importantes; sin embargo, con el uso de dispositivos comunes se abate el efecto producido por la aparición de los vórtices; en este ejemplo se puede utilizar tres aletas helicoidales o aletas verticales que sobresalgan de la cabina, sin que sea necesario implementar dispositivos de amortiguamiento en el cuarto de control, pues los desplazamientos estaban dentro de lo permitido por el reglamento.

El desarrollo del ejemplo de la torre encierra la aplicación de todo el marco teórico aplicado al principio de este trabajo y proporcionó resultados interesantes en el ámbito de fenómenos de vibraciones producidos por la aparición de estelas vorticosas.

También se realizó el mismo análisis, con un reglamento latinoamericano; el de Colombia, y se obtuvieron resultados 19% menores en los desplazamientos transversales y longitudinales, debido a que los coeficientes de variación de la velocidad con la altura, son menores que los que se obtienen por la NTC DF para análisis por viento; en lo general, ambas normas proporcionaron resultados semejantes y confiables.

APENDICES. PROGRAMAS PARA EL METODO DE LOS PANELES

APENDICE A. PROGRAMA PARA CUERPOS BIDIMENSIONALES SIMÉTRICOS.

! PROGRAMA EN FORTRAN DEL MÉTODO DE LOS PANELES PARA CUERPOS
BIDIMENSIONALES ASIMÉTRICOS O SIMÉTRICOS

```

IMPLICIT NONE
INTEGER N, N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,NP1
REAL NHAT, UX, UY, VS, CP, gama, XP, YP, XC, YC
REAL,DIMENSION(50000)::A
CHARACTER (LEN=20) INPUT, OUTPUT

```

!
! *****

! IMPRESION EN PANTALLA

```

WRITE(*,*) * FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL *1
WRITE(*,*) * (FLUJO SOBRE CUERPOS SIMETRICOS O ASIMETRICOS) *1
WRITE(*,*) * (POR EL METODO DE LOS PANELES) *1
WRITE(*,*) * Ing. Sergio Márquez Domínguez *1
WRITE(*,*) * Tutor: Prof. Neftali Rodríguez Cuevas *1
WRITE(*,*) * Estructuras, DEPMI, UNAM *1
WRITE(*,*) * México D.F., Noviembre de 2005 *1

```

!
! *****

! APERTURA DE ARCHIVOS

```

WRITE(*,10)
10 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE DATOS: ')
READ(*,42)INPUT
42 FORMAT(A20)
WRITE(*,11)
11 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE SALIDA: ')
READ(*,42)OUTPUT
WRITE(*,*)
OPEN(1,FILE=INPUT,STATUS='OLD')
OPEN(2,FILE=OUTPUT,STATUS='unknown')

```

!
! *****

! IMPRESION DE ENCABEZADO EN EL ARCHIVO DE SALIDA.

```

WRITE(2,*) '
WRITE(2,*) '
WRITE(2,*) * FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL *1
WRITE(2,*) * (FLUJO SOBRE CUERPOS SIMETRICOS O ASIMETRICOS) *1
WRITE(2,*) * (POR EL METODO DE LOS PANELES) *1
WRITE(2,*) '
READ(1,*) N
WRITE(2,*) 'Numero de Elementos de Frontera:',N
WRITE(2,*) '
WRITE(2,*) 'Coordenadas de los vórtices de los Elementos de Frontera:'
WRITE(2,*) ' XP YP '
NP1=N+1
N1=1
N2=N1+N
N3=N2+N
N4=N3+N*N
N5=N4+N*NP1
N6=N5+N*2

```

```

N7=N6+N*2
N8=N7+N
N9=N8+N
N10=N9+N
N11=N10+N
N12=N11+NP1
N13=N12+N
N14=N13+N
CALL INFLU(A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),A(N5),A(N6),N,A(N7),A(N8),A(N9),A(N10),UX,UY,NP1,a(n14),gama)
CALL GAUSS(A(N3),A(N10),A(N11),n,NP1,gama)
CALL TANGE (A(N11),A(N4),UX,UY,A(N6),A(N12),A(N13),N,A(N1),A(N2),NP1)
END
!*****
SUBROUTINE TANGE(SIGMA,AT,UX,UY,THAT,VS,CP,N,XC,YC,NP1)
DIMENSION SIGMA(NP1),AT(N,NP1),THAT(N,2),VS(N),CP(N),XC(N),YC(N)
U=SQRT(UX**2+UY**2)
DO 10 I=1,N
TEMP=0.0
DO 20 J=1,NP1
20 TEMP=TEMP+AT(I,J)*SIGMA(J)
VS(I)=TEMP+UX*THAT(I,1)+UY*THAT(I,2)
CP(I)=1-(VS(I)/U)**2
10 WRITE(2,1000) XC(I),YC(I),vs(i),CP(I)
1000 FORMAT(10X,F8.4,10X,F8.4,10X,F8.4,10X,F8.4)
RETURN
END
!*****
SUBROUTINE GAUSS(A,B,X,N,np1,gama)
DIMENSION A(N,N),B(N),X(np1)
x(np1)=gama
DO 20 I=1,N-1
DO 20 J=I+1,N
D=A(J,I)/A(I,I)
DO 30 K=1,N
30 A(J,K)=A(J,K)-D*A(I,K)
B(J)=B(J)-D*B(I)
20 CONTINUE
X(N)=B(N)/A(N,N)
DO 40 I=1,N-1
J=N-I
D=0
DO 50 K=J+1,N
50 D=D+A(J,K)*X(K)
40 X(J)=B(J)/A(J,J)-D/A(J,J)
END
!*****
SUBROUTINE INFLU(XC,YC,AN,AT,NHAT,THAT,N,XP,YP,S,B,UX,UY,NP1,zz,gama)
PARAMETER (PI=3.141592654)
REAL NHAT,NTIJ,NNIJ
DIMENSION XC(N),YC(N),AN(N,N),AT(N,NP1),NHAT(N,2),THAT(N,2)
DIMENSION XP(N),YP(N),S(N),B(N),zz(n)
DO 10 I=1,N
zz(I)=0.0
AT(I,NP1)=PI
READ(1,*) XP(I),YP(I)
10 WRITE(2,1500) XP(I),YP(I)
READ(1,*) UX,UY
WRITE(2,1300)
WRITE(2,1400)UX,UY
READ(1,*) GAMA
WRITE(2,1600)GAMA

```

```

        WRITE(2,1700)
1300  FORMAT(2X,'Componentes de velocidad del flujo, en coordenadas globales son:')
1400  FORMAT(36X,'UX =',F8.4,/36X,'UY =',F8.4/)
1500  FORMAT(10X,F8.4,11X,F8.4)
1600  FORMAT(1X,'Circulación entre el Perimetro de la Seccion al cuadrado:',F8.4/)
1700  FORMAT('      XC      YC      VS      CP')
      CLOSE(1)
      DO 20 J=1,N
      IF (J.NE.1) GOTO 100
      XPL=XP(N)
      YPL=YP(N)
      GOTO 150
100   XPL=XP(J-1)
      YPL=YP(J-1)
150   XC(J)=0.5*(XP(J)+XPL)
      YC(J)=0.5*(YP(J)+YPL)
      S(J)=SQRT((XP(J)-XPL)**2+(YP(J)-YPL)**2)
      THAT(J,1)=(XP(J)-XPL)/S(J)
      THAT(J,2)=(YP(J)-YPL)/S(J)
      NHAT(J,1)=-THAT(J,2)
      NHAT(J,2)=THAT(J,1)
      B(J)=-UX*NHAT(J,1)-UY*NHAT(J,2)
20    CONTINUE
      DO 30 I=1,N
      DO 40 J=1,N
      IF (I.NE.J) GOTO 200
      AN(I,J)=PI
      AT(I,J)=0.0
      GOTO 40
200   DX=XC(I)-XC(J)
      DY=YC(I)-YC(J)
      XQ=DX*THAT(J,1)+DY*THAT(J,2)
      YQ=DX*NHAT(J,1)+DY*NHAT(J,2)
      VX=0.5*(LOG((XQ+.5*S(J))**2+YQ**2)-LOG((XQ-.5*S(J))**2+YQ**2))
      IF(ABS(YQ).GT.0.00005) GOTO 300
      VY=0
      GOTO 350
300   VY=ATAN((XQ+0.5*S(J))/YQ)-ATAN((XQ-0.5*S(J))/YQ)
350   NTIJ=0.0
      NNIJ=0.0
      TTIJ=0.0
      TNIJ=0.0
      DO 50 K=1,2
      NTIJ=NHAT(I,K)*THAT(J,K)+NTIJ
      NNIJ=NHAT(I,K)*NHAT(J,K)+NNIJ
      TTIJ=THAT(I,K)*THAT(J,K)+TTIJ
      TNIJ=THAT(I,K)*NHAT(J,K)+TNIJ
50    CONTINUE
      AN(I,J)=VX*NTIJ+VY*NNIJ
      AT(I,J)=VX*TTIJ+VY*TNIJ
      ZZ(I)=ZZ(I)+VY*NTIJ-VX*NNIJ
      AT(I,NP1)=AT(I,NP1)+VY*TTIJ-VX*TNIJ
40    CONTINUE
30    CONTINUE

      DO 60 J=1,N
60    b(j)=b(j)-zz(j)*gama
      RETURN
      END
!*****

```

APENDICE B. PROGRAMA PARA CILINDROS, EN FLUJO LAMINAR.

! PROGRAMA PARA TRES CILINDROS, INMERSOS EN FLUJO LAMINAR.

```

IMPLICIT NONE
INTEGER N, N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,NP1
REAL NHAT, UX, UY, VS, CP, gama, XP, YP, XC, YC
REAL,DIMENSION(50000)::A
CHARACTER (LEN=20) INPUT, OUTPUT

```

! *****

! IMPRESION EN PANTALLA

```

WRITE(*,*) * FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL *!
WRITE(*,*) * (FLUJO SOBRE CUERPOS SIMETRICOS O ASIMETRICOS) *!
WRITE(*,*) * (POR EL METODO DE LOS PANELES) *!
WRITE(*,*) * Ing. Sergio Márquez Domínguez *!
WRITE(*,*) * Tutor: Prof. Neftali Rodríguez Cuevas *!
WRITE(*,*) * Estructuras, DEPTI, UNAM *!
WRITE(*,*) * México D.F., Noviembre de 2005 *!

```

! *****

! APERTURA DE ARCHIVOS

```

WRITE(*,10)
10 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE DATOS: ')
READ(*,42)INPUT
42 FORMAT(A20)
WRITE(*,11)
11 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE SALIDA: ')
READ(*,42)OUTPUT
WRITE(*,*)
OPEN(1,FILE=INPUT,STATUS='OLD')
OPEN(2,FILE=OUTPUT,STATUS='unknown')

```

! *****

! IMPRESION DE ENCABEZADO EN EL ARCHIVO DE SALIDA.

```

WRITE(2,*) * FLUJOS BIDIMENSIONALES CON POTENCIAL *!
WRITE(2,*) * (FLUJO SOBRE CUERPOS SIMETRICOS O ASIMETRICOS) *!
WRITE(2,*) * (POR EL METODO DE LOS PANELES) *!

```

```

WRITE(2,*) '
READ(1,*) N
WRITE(2,*) 'Numero de Elementos de Frontera:',N
WRITE(2,*) '
WRITE(2,*) 'Coordenadas de los vórtices de los Elementos de Frontera:'
WRITE(2,*) '
WRITE(2,*) XP YP '
NP1=N+1
N1=1
N2=N1+N
N3=N2+N
N4=N3+N*N
N5=N4+N*NP1
N6=N5+N*2
N7=N6+N*2
N8=N7+N
N9=N8+N
N10=N9+N
N11=N10+N
N12=N11+NP1
N13=N12+N
N14=N13+N

```

```

CALL INFLU(A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),A(N5),A(N6),N,A(N7),A(N8),A(N9),A(N10),UX,UY,NP1,a(n14),gama)
CALL GAUSS(A(N3),A(N10),A(N11),n,NP1,gama)
CALL TANGE (A(N11),A(N4),UX,UY,A(N6),A(N12),A(N13),N,A(N1),A(N2),NP1)
END

```

```

!*****
      SUBROUTINE TANGE(SIGMA,AT,UX,UY,THAT,VS,CP,N,XC,YC,NP1)
      DIMENSION SIGMA(NP1),AT(N,NP1),THAT(N,2),VS(N),CP(N),XC(N),YC(N)
      U=SQRT(UX**2+UY**2)
      DO 10 I=1,N
      TEMP=0.0
      DO 20 J=1,NP1
20    TEMP=TEMP+AT(I,J)*SIGMA(J)
      VS(I)=TEMP+UX*THAT(I,1)+UY*THAT(I,2)
      CP(I)=1-(VS(I)/U)**2
10    WRITE(2,1000) XC(I), YC(I), vs(i), CP(I)
1000  FORMAT(10X,F8.4,10X,F8.4,10X,F8.4,10X,F8.4)
      RETURN
      END
!*****
      SUBROUTINE GAUSS(A,B,X,N,np1,gama)
      DIMENSION A(N,N),B(N),X(np1)
      x(np1)=gama
      DO 20 I=1,N-1
      DO 20 J=I+1,N
      D=A(J,I)/A(I,I)
      DO 30 K=1,N
30    A(J,K)=A(J,K)-D*A(I,K)
      B(J)=B(J)-D*B(I)
20    CONTINUE
      X(N)=B(N)/A(N,N)
      DO 40 I=1,N-1
      J=N-I
      D=0
      DO 50 K=J+1,N
50    D=D+A(J,K)*X(K)
40    X(J)=B(J)/A(J,J)-D/A(J,J)
      END
!*****
      SUBROUTINE INFLU(XC,YC,AN,AT,NHAT,THAT,N,XP,YP,S,B,UX,UY,NP1,zz,gama)
      PARAMETER (PI=3.141592654)
      REAL NHAT,NTIJ,NNIJ
      DIMENSION XC(N),YC(N),AN(N,N),AT(N,NP1),NHAT(N,2),THAT(N,2)
      DIMENSION XP(N),YP(N),S(N),B(N),zz(n)
      DO 10 I=1,N
      zz(I)=0.0
      AT(I,NP1)=PI
      READ(1,*) XP(I),YP(I)
10    WRITE(2,1500) XP(I),YP(I)
      READ(1,*) UX,UY
      WRITE(2,1300)
      WRITE(2,1400)UX,UY
      READ(1,*) GAMA
      WRITE(2,1600)GAMA
      WRITE(2,1700)
1300  FORMAT(2X,/'Componentes de velocidad del flujo, en coordenadas globales son:'/)
1400  FORMAT(36X,'UX =',F8.4,/36X,'UY =',F8.4/)
1500  FORMAT(10X,F8.4,11X,F8.4)
1600  FORMAT(1X,'Circulación entre el Perímetro de la Sección al cuadrado:',F8.4/)
1700  FORMAT('      XC      YC      VS      CP')
      CLOSE(1)
      DO 20 J=1,N
      IF (J.NE.1) GOTO 100
      XPL=XP(N/3)
      YPL=YP(N/3)
      GOTO 150

```



```

100  IF (MOD((J-1),(N/3))==0) GOTO 101
      XPL=XP(J-1)
      YPL=YP(J-1)
      GOTO 150
101  IF(((J-1)/(N/3))==1) THE
! numero 2
      XPL=XP((J-1)*2)
      YPL=YP((J-1)*2)
      ELSE
! variable 2: (n/3)
      XPL=XP((J-1)+(n/3))
      YPL=YP((J-1)+(n/3))
      END IF
      GOTO 150
150  XC(J)=0.5*(XP(J)+XPL)
      YC(J)=0.5*(YP(J)+YPL)
      S(J)=SQRT((XP(J)-XPL)**2+(YP(J)-YPL)**2)
      THAT(J,1)=(XP(J)-XPL)/S(J)
      THAT(J,2)=(YP(J)-YPL)/S(J)
      NHAT(J,1)=-THAT(J,2)
      NHAT(J,2)=THAT(J,1)
      B(J)=-UX*NHAT(J,1)-UY*NHAT(J,2)
20   CONTINUE
      DO 30 I=1,N
      DO 40 J=1,N
      IF (I.NE.J) GOTO 200
      AN(I,J)=PI
      AT(I,J)=0.0
      GOTO 40
200  DX=XC(I)-XC(J)
      DY=YC(I)-YC(J)
      XQ=DX*THAT(J,1)+DY*THAT(J,2)
      YQ=DX*NHAT(J,1)+DY*NHAT(J,2)
      VX=0.5*(LOG((XQ+.5*S(J))**2+YQ**2)-LOG((XQ-.5*S(J))**2+YQ**2))
      IF(ABS(YQ).GT.0.00005) GOTO 300
      VY=0
      GOTO 350
300  VY=ATAN((XQ+0.5*S(J))/YQ)-ATAN((XQ-0.5*S(J))/YQ)
350  NTIJ=0.0
      NNIJ=0.0
      TTIJ=0.0
      TNIJ=0.0
      DO 50 K=1,2
      NTIJ=NHAT(I,K)*THAT(J,K)+NTIJ
      NNIJ=NHAT(I,K)*NHAT(J,K)+NNIJ
      TTIJ=THAT(I,K)*THAT(J,K)+TTIJ
      TNIJ=THAT(I,K)*NHAT(J,K)+TNIJ
50   CONTINUE
      AN(I,J)=VX*NTIJ+VY*NNIJ
      AT(I,J)=VX*TTIJ+VY*TNIJ
      zz(I)=zz(I)+VY*NTIJ-VX*NNIJ
      AT(I,NP1)=AT(I,NP1)+VY*TTIJ-VX*TNIJ
40   CONTINUE
30   CONTINUE
      DO 60 J=1,N
60   b(j)=b(j)-zz(j)*gama
      RETURN
      END

```

REFERENCIAS.

- [1] Prandtl and Tietjens; Applied Hydro and Aeromechanics, Edición Dover publicado en 1934.
- [2] Transactions of the American Society of Civil Engineers (Instituted 1852) Volumen 126, Parte II 1961 Editado por la Secretaria Ejecutiva, bajo la dirección de el comité de publicaciones, New York, Publicado por la Sociedad en 1961, Artículo Wind Forces on Structures. Final Report of the Task Committee on Wind and Stresses of the structural Division, ASCE. Cap. IV Pág. 1174.
- [3] **CICIND REPORT VOL. 15, NO. 1** VORTEX-INDUCED VIBRATIONS OF LINE-LIKE STRUCTURES. Svend Ole Hansen (member), Svend Ole Hansen ApS, Denmark Presented at CICIND's 50th Meeting, Oxford, September 1998.
- [4] Hino M., Zimmermann C. "Flow-induced Vibrations of Marine Structures". IUTAM-IAHR SYMPOSIUM KARLSRUHE (Alemania) 14-16 Agosto de 1972. FLOW-INDUCED STRUCTURAL VIBRATIONS. Editor Eduard Naudascher. Pág. 531.
- [5] Gilberto Sotelo Ávila; Hidráulica General, Editorial Limusa-Noriega Editores, Volumen 1 fundamentos, Vigésimo tercera reimpresión.
- [6] Victor L. Streeter, E. Benjamín Wylie , Keith W. Bedford; Mecánica de los Fluidos, Editorial Mc Graw Hill, 9ª Edición.
- [7] Rodríguez Cuevas Neftali; Notas del curso de Mecánica Estructural Avanzada, DEPMI, UNAM, México D. F.
- [8] Rodríguez Cuevas Neftali; Notas del curso de Diseño Eólico, DEPMI, UNAM, México D. F.
- [9] Enzo Levi; Mecánica de los fluidos (Curso para ingenieros Civiles); Instituto de Ingeniería UNAM; Marzo de 1957; Pág. 8 -11
- [10] Enzo Levi, Elementos de mecánica del medio Continuo, Editorial Limusa - Wiley, S. A. 1ª Edición México 1971.
- [11] Enzo Levi; Mecánica de los Fluidos Introducción Teórica a la Hidráulica Moderna. Editado por La Comisión Editorial de Libros de Ingeniería Universidad Nacional Autónoma de México 1ª Edición México 1965.
- [12] Blevins; Flow-Induced Vibration 2ª Edición, Edit. Van Nostrand Reinhold, New York; Clasificación de la biblioteca TA 355 B53 1990.
- [13] Tesis de Alonso Díaz Gabriel Ángel; Inestabilidad Aeroelástica de un Edificio Esbelto de Planta Triangular; Tutor Prof. Neftali Rodríguez Cuevas, Año1996, Clasificación de la biblioteca 1996 ALO DEPMI.
- [14] Moran Jack., An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics, John Wiley and Sons 1983.

- [15] Daily James W. y Haileman Donald R. F; Dinámica De Fluidos Con Aplicaciones En La Ingeniería, Editorial Trillas, 1^{ra}. Edición en Español, Mayo 1969, QC 151 D 34
- [16] Normas Técnicas Complementarias Para Diseño Por Viento, RCDF, Gaceta Oficial del Distrito Federal, t. II, núm. 103-bis, México D. F. 6 de Octubre de 2004.
- [17] NSR-98 Normas Colombianas de Diseño y Construcción. Sismo Resistente; Asociación Colombiana de Ingeniería Sismica, decreto numero 33 de 1998 (9 de enero de 1998).
- [18] National Building Code of Canada; 1980, issued by the Associate Committee on the National Building Code National Research Council of Canada Ottawa, NRCC No. 17303, Second Printing.
- [19] Martínez Pedro, "Respuestas de Estructuras sometidas a viento turbulento, mediante análisis espectral". Tesis de Maestría, UNAM,2001.
- [20] Rodríguez Cuevas Neftali y Gonzales Sanchez Mauricio; Análisis de una torre de 180 m bajo acción eólica, proyecto 5754. Instituto de Ingeniería; abril 1986.
- [21] Ahsan Kareem, Scott Kabat, Fred L. Haan Jr.; Aerodynamics of Nanjing Tower: A case Study; Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 77&78 (1998) 725-736

REFERENCIAS DE INTERNET.

<http://www.cicind.org/vol15no1.pdf>
<http://www2.eng.cam.ac.uk/~gm249/tr.pdf>
<http://stbk.se/S01041-Report.pdf>
<http://www.mms.gov/tarprojects/504/WindInducedVibrations.pdf>
http://w3.mecanica.upm.es/~docto/Dtesis_07/trabajos/agf_trab.pdf
<http://www.unne.edu.ar/cyt/2001/7-Tecnologicas/T-018.pdf>
<http://www.efluids.com/>
<http://web.mit.edu/org/s/shear7/papers.html#3>
<http://cfdnet.com/nwt/>
<http://www.nd.edu/~msen/TermoLat/MecFIWord.pdf>
<http://personales.ya.com/universal/Termoweb/MecanicaFluidos/PDFs/4mecfluidos.pdf>

Proyecto mexicano.

<http://www.torrena.com.mx/>

Proyectos a nivel mundial de torres esbeltas.

<http://www.great-towers.com/eng/towers/macauindex.htm>

<http://www.sefarad.as/musica.htm> kinnor
http://www.medinasoft.com/ibipablovi/Informatica/Musica_y_Arquitectura_Biblica.ppt#7 Kinnor
<http://www2.eng.cam.ac.uk/~gm249/tr.pdf> pág. 8 Historia de aerodinámica temprana
<http://www.ctie.monash.edu.au/hargrave/wenham.html> Primer tunel de viento
<http://www.unne.edu.ar/cyt/2001/7-Tecnologicas/T-018.pdf> Scruton

LISTA DE VARIABLES.

α	Determina la forma de la variación de la velocidad del viento con la altura.
A	Área transversal normal a V_0 .
A_F	Área real sobre la que actúan los esfuerzos tangenciales que producen a la fuerza de arrastre por fricción.
A_P	Área transversal normal a la velocidad V_0 .
a_x, a_y, a_z	Componentes del vector de la aceleración en dirección x, y, z.
a	Vector de la aceleración.
β	Relación de amortiguamiento crítico.
C_F	Coefficiente de arrastre por fricción
C_{DP}	Coefficiente de arrastre por presión.
C_D	Coefficiente de arrastre total.
C_L	Coefficiente de sustentación.
C_M	Carga Muerta
C_p	Coefficientes locales de presión.
C_V	Carga viva
D	Fuerza de arrastre; diámetro de sección circular.
D_F	Fuerza de arrastre por fricción.
D_P	Fuerza de arrastre por presión.
dv	Diferencial de volumen.
E_{jk}	Tensor de deformación.
\dot{E}_{jk}	Tensor que mide la velocidad de cambio de forma y dimensiones.
E_V	Componente volumétrica de deformación.
\dot{E}_D	Componente distorsional de deformación.
ε	Característica de aspereza superficial de un cuerpo.
ξ	Factor de amortiguamiento.
F_r	Número de Froude.
fdv	Fuerza másica generadas por el campo gravitatorio.
F_{TR}	Factor de topografía y Rugosidad
F_α	Factor que considera la variación de la velocidad con la altura
\vec{f}	Fuerzas de cuerpo.
F	Frecuencia de la estructura.
F_c	Factor correctivo para la densidad de masa de aire.
F_s	Frecuencia de formación o desprendimiento de vórtices.
F_i	Fuerza producida por el viento medio.
FAD	Factor de amplificación dinámica debido a turbulencia.
F_L	Fuerza Estática equivalente por unidad de altura.
H	Altura sobre el nivel del mar en Km; Intensidad del tubo vorticoso; Altura total de la estructura.
hi	Altura del entrepiso
K	Coefficiente de rugosidad de la superficie.
$\rho a dv$	Fuerza de inercia generada por el movimiento.
rot δ	Rotacional de una partícula.
\dot{J}	Divergencia del vector velocidad.
${}_1 \sigma_n$	Parte inercial de la interacción del flujo.
${}_2 \sigma_n$	Parte viscosa de la interacción del flujo.
σ^2	Varianza de la velocidad de Reynolds.
n	Frecuencia en cps.
n_r, n_θ	Cósenos directores del versor en el punto de interés.
λ, μ	Viscosidades dinámicas para la componente volumétrica y distorsional.
λ	Relación de aspecto (H/D)
ρ	Densidad de la masa de la partícula.
v	Viscosidad cinemática.

I	Invariante lineal.
∇	Laplaciano.
L	Línea cerrada, Fuerza de sustentación, Longitud representativa de la escala de turbulencia.
L_o	Longitud del cilindro.
Γ	Circulación.
M_{med}	Momento flexionante debido a la fuerza producida por el viento.
M	Promedio de masa por unidad de longitud a 1/3 de la parte superior de la estructura.
dr	Vector infinitesimal tangente a la curva.
S	Porción de superficie.
δ	Altura gradiente,
ϕ, Ψ	Función de corriente
ϕ	Línea de corriente.
\bar{n}	Versor.
n	Distancia de centro a centro de los vórtices sobre cada hilera.
σ_n	Esfuerzo normal al plano.
τ_n	Esfuerzo tangente al plano.
Φ	Función potencial.
grad Φ	Gradiente de la función potencial.
P	Diferencial de presión.
P_a	Presión atmosférica en mm de Mercurio
Pz	Presión de diseño
q_H	Presión de velocidad correspondiente a V_H . (N/m^2)
R	Tipo de terreno.
R_e	Número de Reynolds.
r	Vector de posición que cambia con el tiempo.
δ	Vector de desplazamientos.
S	Número de Strouhal.
S_n	Esfuerzo total en el plano.
S(n)	Densidad Espectral de potencia correspondiente a la frecuencia n.
T_{jk}	Tensor de esfuerzos.
T	Periodo natural de la estructura, también se toma en una parte del trabajo como Factor de Topografía acompañado de un subíndice.
T_V	Componente volumétrica de esfuerzo.
T_D	Componente distorsional de esfuerzo.
u, v, w	Componente del vector de desplazamiento (δ), paralela al eje x, y, z.
V_x, V_y, V_z	Componentes del vector velocidad, en dirección de los ejes x, y, z.
V	Vector de velocidad.
V_∞	Velocidad del flujo paralelo.
V_o	Velocidad del flujo sin disturbios antes del cuerpo.
V_D	Velocidad de diseño a una altura "z" sobre el suelo.
V_R	Velocidad Regional según la zona correspondiente al sitio donde se construirá la estructura; Velocidad reducida crítica o de formación de vórtices.
V_{med}	Fuerza Cortante debida al viento
V_{10}	Velocidad media horaria a una altura de 10 m sobre el terreno.
V_H .	Velocidad media de aparición de los vórtices en la parte superior de la estructura, en m/s.
W_a	Carga de análisis instantánea
W_i	Peso del entrepiso en Toneladas
θ	Frecuencia circular
Z	Altura en diferentes puntos de la torre