



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

**MODELADO Y FORMACIÓN DE IMÁGENES DE ULTRASONIDO EN MEDIOS
INHOMOGÉNEOS**

T E S I S

QUE PARA OBTAR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

INGENIERIA ELECTRICA – PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

P R E S E N T A

VILLAGÓMEZ HOYOS CARLOS ARMANDO

DIRIGIDA POR

DRA. LUCIA MEDINA GÓMEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA
ENERO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Escalante Ramírez Boris

Secretario: Dr. Arambula Cosío Fernando

Vocal: Dra. Medina Gómez Lucía

1^{er}. Suplente: Dr. Garduño Angeles Edgar

2^{do}. Suplente: Dr. Rubio Acosta Ernesto

Posgrado de Ingeniería, UNAM, Ciudad de México.

TUTOR DE TESIS:

DRA. LUCIA MEDINA GÓMEZ

| | |
|--|-----------|
| I RESUMEN..... | 4 |
| II INTRODUCCIÓN..... | 5 |
| 1 ANTECEDENTES..... | 5 |
| 2 OBJETIVOS DEL TRABAJO..... | 6 |
| III MARCO TEÓRICO..... | 7 |
| 3 MODELADO DE ULTRASONIDO..... | 7 |
| 3.1 <i>Fundamentos de Acústica</i> | 7 |
| 3.1.1 <i>Ecuación de la onda</i> | 12 |
| 3.1.2 <i>Soluciones de la ecuación de la onda</i> | 14 |
| 3.2 <i>Modelado por métodos analíticos</i> | 17 |
| 3.2.1 <i>Integral de Rayleigh</i> | 17 |
| 3.2.2 <i>Aproximaciones de Frensel y Fraunhofer</i> | 18 |
| 3.2.3 <i>Respuesta espacial al impulso</i> | 19 |
| 3.3 <i>Modelado por métodos computacionales</i> | 20 |
| 3.3.1 <i>Método de Integración Finita</i> | 20 |
| 3.3.2 <i>Modelo Visco-Elástico</i> | 21 |
| 3.3.3 <i>Errores Numéricos</i> | 23 |
| 4 FORMACIÓN DE IMÁGENES ULTRASÓNICAS..... | 24 |
| 4.1 <i>Técnica Clásica</i> | 25 |
| 4.1.1 <i>Transmisión</i> | 26 |
| 4.1.2 <i>Recepción</i> | 27 |
| 4.1.3 <i>Formado de Haz</i> | 27 |
| 4.1.4 <i>Línea de RF</i> | 28 |
| 4.1.5 <i>Formado de Imagen</i> | 28 |
| 4.2 <i>Técnicas de Enfocado por Apertura Sintética</i> | 29 |
| 4.2.1 <i>Transmisión</i> | 29 |
| 4.2.2 <i>Formado de Haz</i> | 30 |
| 4.2.3 <i>Formado de Imagen</i> | 30 |
| 4.3 <i>Técnicas de Enfocado de Apertura Sintética para medios heterogéneos</i> | 31 |
| 4.3.1 <i>Fast Marching Method</i> | 32 |
| IV MÉTODOS Y RESULTADOS..... | 33 |
| 5 DESCRIPCIÓN DE LAS SIMULACIONES..... | 33 |
| 5.1 <i>Introducción</i> | 33 |
| 5.2 <i>Medios Homogéneos</i> | 37 |
| 5.3 <i>Medios Heterogéneos</i> | 38 |
| 6 DESCRIPCIÓN DE LOS EXPERIMENTOS..... | 39 |
| 6.1 <i>Introducción</i> | 39 |
| 6.2 <i>Enfocado por apertura sintética</i> | 39 |
| 6.3 <i>Enfocado por apertura sintética en medios heterogéneos</i> | 42 |
| V CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO..... | 44 |
| VI BIBLIOGRAFÍA..... | 45 |

I Resumen

El ultrasonido tiene una amplia gama de aplicaciones prácticas. Comprender este fenómeno mediante simulaciones puede dar lugar a una gran diversidad de aplicaciones tales como el diseño de transductores tanto para diagnóstico como para tratamiento médico, el desarrollo de nuevas técnicas de procesamiento y de formación de imagen, el estudio de los efectos de medios heterogéneos en un haz ultrasónico, clasificación de tejido ultrasónico, apoyo en la enseñanza de técnicas de ultrasonido, planeamiento y dosimetría de ultrasonido altamente enfocado, entre muchas más.

Para muchas de estas aplicaciones es necesario modelar el fenómeno de propagación de ultrasonido en medios heterogéneos de la manera más precisa, que reproduzca la mayoría de los aspectos de la propagación. Por lo tanto existe una necesidad de desarrollo de modelos cada vez más completos y complejos, intentando mantener el costo computacional lo más bajo posible.

En otro aspecto, las imágenes médicas por ultrasonido han sido un método de diagnóstico muy eficaz, ya que permite una rápida evaluación del paciente en tiempo real a un bajo costo. Los sistemas ultrasónicos deben proporcionar imágenes de alta calidad, incluir la medición de flujo sanguíneo, y un sistema avanzado de procesamiento de imágenes. La calidad de la imagen se encuentra determinada principalmente por la resolución espacial y contraste, los cuales se encuentran determinados por las características del sistema así como la técnica utilizada para formar la imagen.

Con el desarrollo de los sistemas ultrasónicos en 3D, comercialmente conocidos como 4D, el número de canales necesarios ha aumentado considerablemente, de la misma manera los costos de estos sistemas, lo que ha provocado una búsqueda de nuevas técnicas de formación de imágenes.

Se han desarrollado diversas técnicas en la formación de imágenes ultrasónica. La técnica de enfocado por apertura sintética es una de ellas y ha demostrado ser capaz de reducir los tiempos de adquisición, el número de canales de recepción y una mejora en la resolución lateral a distintas profundidades sin embargo sufre de una pérdida de contraste, característica importante en el ultrasonido médico.

En este trabajo se abordan dos puntos importantes: i) Un método computacional para resolver las ecuaciones fundamentales de la propagación acústica, así como las ecuaciones constitutivas que describen al medio y ii) Una modificación a la técnica de enfocado por apertura sintética, la cual utiliza un mapa de velocidad del medio heterogéneo para calcular los retrasos utilizados en la formación de la imagen, incrementando la resolución del sistema cuando se tiene una descripción geométrica de las velocidades del medio en cuestión. Para ambos casos se muestran resultados que concuerdan con los datos experimentales.

II Introducción

1 Antecedentes

Las imágenes médicas por ultrasonido son tradicionalmente adquiridas al transmitir de manera secuencial un haz enfocado en distintas direcciones del tejido. Se producen una serie de líneas que son acumuladas para generar una imagen. La cantidad de líneas y por tanto la cantidad de cuadros por segundo se encuentra limitada por el tiempo de viaje de los pulsos ultrasónicos a través de los tejidos. Otra limitación es la generación de aberraciones debido a la naturaleza heterogénea del tejido lo que degrada la calidad de la imagen.

En el desarrollo de nuevos algoritmos es necesario primero comprender el fenómeno de propagación en medios heterogéneos existen herramientas que nos ayudan con este proceso tales como las simulaciones computacionales que de igual manera permiten comprobar estos algoritmos en condiciones más controladas. Un problema desafiante es una predicción más precisa de las señales generadas por la dispersión acústica debida a objetos cercanos o embebidos en interfaces entre distintos medios, que usualmente requiere de métodos numéricos.

Estos métodos pueden ser diversos y existen diversos acercamientos a este problema, comenzando por los más utilizados basados en la respuesta espacial al impulso utilizando el principio de superposición, como es el programa *Field II* elaborado por Jensen [1], métodos que utilizan la integración de las funciones de Green en un medio multicapa combinado con ecuaciones de las integrales de frontera para la dispersión [2][3], métodos de matrices de transición [4], y métodos por elemento finito [5][6][7]. Estos últimos métodos han sido muy exitosos para el modelado de este fenómeno desde objetos simples a complejos.

El método desarrollado es el de integración finita de las ecuaciones elasto-dinámicas elaborado por Fellinger [8] para resolver, en el dominio del tiempo, la evolución de la tensión y las velocidades en el medio elástico. Como es discutido en [9], versiones de estas ecuaciones discretizadas pueden ser encontradas también en Liu [10], el cual usa un enfoque distinto por diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) para resolver las ecuaciones elasto-dinámicas. Fuera de las similitudes con el método FDTD, existen ventajas de utilizar el procedimiento por integración finita para derivar las ecuaciones para medios heterogéneos, utilizando mallas intercaladas, al obtener mejores resultados de estabilidad y facilidad en la implementación de las condiciones de frontera [11].

En la formación de la imagen, la técnica de enfocado sintético (SAFT) es una técnica relativamente nueva, originalmente adaptada de radar, la cual explota un acercamiento distinto para formar la imagen [12][13]. En vez de limitar el campo de ultrasonido transmitido en un haz pequeño en una dirección particular, se transmite una onda esférica usando un solo elemento que emite una perturbación que se propaga en todas direcciones. Los ecos recibidos contienen información de dispersores a través de toda la región, estos datos son enfocados digitalmente para formar la imagen después de una emisión [14]. Este proceso generalmente produce una razón señal a ruido (SNR) baja ya que la energía transmitida se encuentra limitada por el hardware. Trabajo reciente ha mostrado que el SNR puede incrementarse al emplear subaperturas que en cada emisión emulen la onda esférica transmitida por un solo elemento [12],[13], al reemplazar la señal convencional con una señal modulada en frecuencia (FM) [15][16][17]. Utilizando este enfoque, la SNR es suficiente para aplicaciones en vivo [14],[18].

Sin embargo, estos algoritmos consideran un medio homogéneo e isotrópico, lo que generalmente no es el caso en tejidos. Esto sigue de la suposición de que el paquete de onda y el frente de onda se propagan en líneas rectas con la misma energía y velocidad de fase. En medios heterogéneos y/o anisotrópicos estas afirmaciones no se cumplen [19][20][21][22], ya que: (a) el paquete de onda sigue una línea curvada que satisface el principio de tiempo mínimo de Fermat¹; (b) la dirección y magnitud del paquete de onda son diferentes a la del frente de onda para medios anisotrópicos. Como resultado una imagen generada no está correctamente enfocada, reduciendo el contraste de la misma.

La dificultad bajo el inciso (b) ha sido superada recientemente en [23] para estructuras homogéneas y anisotrópicas, utilizando la velocidad exacta del paquete de onda.

Se han introducido modificaciones al algoritmo SAFT [24], que permiten la formación de imágenes de estructuras compuestas, utilizando un modelo conocido de manera a priori de la geometría y las características del material. De tal manera las señales recibidas son retro-propagadas a través de rayos curvados que satisfacen el principio de tiempo mínimo de Fermat. Los rayos pueden ser calculados utilizando técnicas convencionales de trazado de rayos [22]. En consecuencia las imágenes formadas se encuentran correctamente enfocadas, logrando un mejor contraste. Este algoritmo modificado es llamado también *InASAFT* [45]. Algoritmos similares han sido utilizados con datos no monoestáticos [26][27]. Un algoritmo similar es utilizado en este trabajo el cual utiliza el tiempo del primer arribo de la onda, utilizando el método llamado Fast Marching Method[28].

2 Objetivos del Trabajo

Desarrollar simulación numérica de propagación de ondas en medio no homogéneos, cuando estos son irradiados por un arreglo de sensores.

Generar un algoritmo que produzca imágenes ultrasónicas de mayor contraste y resolución, considerando las características heterogéneas del medio en el proceso de formación de la imagen, utilizando un arreglo en fase de transductores.

¹ Principio nombrado en honor del matemático francés Pierre de Fermat (1607-1665), el principio afirma que la trayectoria real que sigue un rayo de luz entre dos puntos es aquella en la que emplea un tiempo mínimo en recorrerla.

III Marco Teórico

3 Modelado de Ultrasonido

3.1 Fundamentos de Acústica

El descubrimiento de la naturaleza ondulatoria del sonido se dio a partir de la observación de las ondas en el agua. Esto dio la noción de que una *onda* es una perturbación que provoca un movimiento en las partículas la cual se aleja de su fuente y no transporta cantidades detectables de materia sobre la dirección de propagación.

La primera teoría matemática de la propagación del sonido se inicio con Isaac Newton (1642-1727), dándole una interpretación mecánica, de impulsos de presión transmitidos a través de las partículas de los fluidos. Posteriormente en el siglo XIX, Lord Rayleigh formalizó las bases para el desarrollo de una teoría de la propagación de la onda [25].

En las siguientes secciones se describirán las leyes físicas que gobiernan la propagación del sonido. De estas leyes, la conservación de la masa y la conservación del momento vienen sin alteración desde el siglo XVIII; en conjunto con estas leyes se utilizan relaciones constitutivas de los materiales, las cuales describen el comportamiento del medio con respecto a la perturbación. De esta manera se logran modelos los cuales, aun siendo aproximaciones, describen de mejor manera el comportamiento del fenómeno de propagación acústica.

La conservación de la masa

Dado un volumen de control fijo V , ver la Figura 1-(a), su contenido neto de masa en cualquier instante de tiempo t puede ser calculado al integrar la *densidad* $\rho(\vec{x}, t)$, siendo ρ un promedio local de masa por unidad de volumen en la vecindad del punto espacial \vec{x} .

El principio de conservación de la masa requiere que la tasa de cambio de la masa con respecto al tiempo sea igual al flujo de masa por unidad de tiempo del volumen V a través de la superficie S .

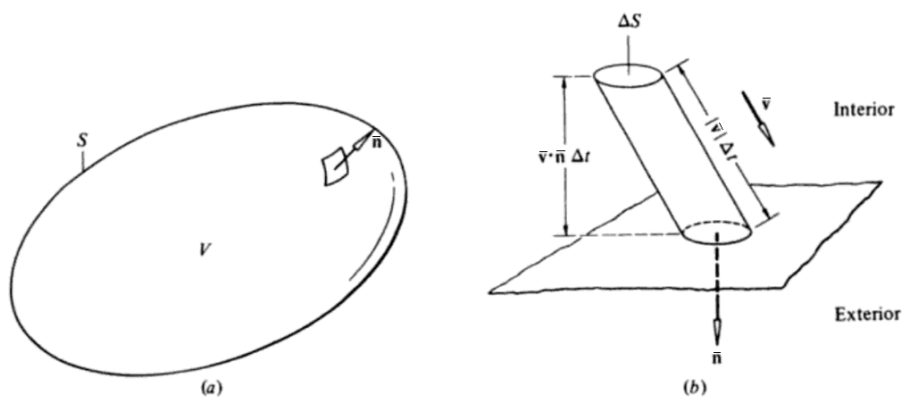


Figura 1 Volumen de control, inciso (a) Flujo a través de la superficie, inciso (b). Obtenida de [29]

La masa neta por unidad de tiempo saliendo por un pequeño elemento de área ΔS con un vector normal $\bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}_s)$ y centrado en el punto $\bar{\mathbf{x}}_s$ ubicado en S se encuentra identificado como

$$\rho(\bar{\mathbf{x}}_s, t) \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}_s, t) \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}_s) \Delta S \quad (3.1-1)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}_s, t)$ es la velocidad del fluido en el punto $\bar{\mathbf{x}}_s$, definido como el momento promedio por unidad de tiempo en la vecindad de $\bar{\mathbf{x}}_s$.

La expresión (3.1-1) se puede verificar al definir un volumen cilíndrico paralelo a la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ que termina en la superficie ΔS y considerando que las partículas del cilindro en la vecindad de la superficie ΔS se mueven uniformemente con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}$; entonces se puede decir que todas las partículas contenidas en el cilindro con altura $|\bar{\mathbf{v}}|\Delta t$, Figura 1-(b), pasaran a través de ΔS en un tiempo Δt . La masa neta que pasara a través de la superficie ΔS en un tiempo Δt sera el volumen del cilindro por la densidad, y dado que la velocidad paralela a la superficie puede ser calculada con el producto punto de la velocidad de las partículas con el vector normal a la superficie la masa que pasa a través de ΔS por unidad de tiempo es efectivamente la expresión (3.1-1).

La masa neta dejando el volumen V por unidad de tiempo se encuentra dada por la integral de superficie sobre S de $\rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$, y por conservación de masa se requiere lo siguiente

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS \quad (3.1-2)$$

El lado derecho puede ser reexpresado mediante el teorema de Gauss

$$\iint_S A \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot A dV \quad (3.1-3)$$

donde $A(\bar{\mathbf{x}}, t)$ es tomado como $\rho \bar{\mathbf{v}}$ y siendo $\nabla \cdot \mathbf{A} = \delta A_x / \delta x + \delta A_y / \delta y + \delta A_z / \delta z$.

Al reorganizar los términos, la ecuación se convierte en

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) \right] dV = 0 \quad (3.1-4)$$

Como la ecuación implica que el valor promedio del integrando es cero para un volumen arbitrario V , por lo tanto si establecemos un nuevo volumen formado por $V - dV$, donde dV es una pequeña porción del volumen original, el valor del integrando tanto de la nueva region como del diferencial debe ser cero entonces el integrando debe ser cero, de tal manera que

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) \right] = 0 \quad (3.1-5)$$

La cual es la ecuación en forma diferencial de la conservación de la masa.

La ley de conservación del momento

Una ley general de la mecánica clásica es la que indica que la masa por la aceleración del centro de masa de la partícula es igual a la fuerza neta aplicada en la partícula.

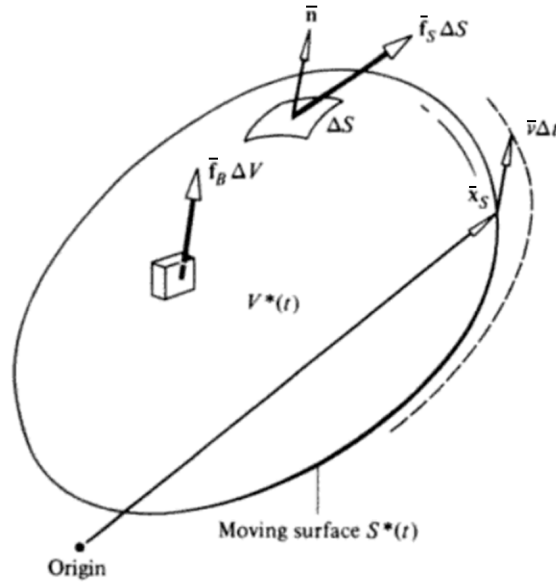


Figura 2 Volumen de control de una partícula en movimiento. Obtenida de [29]

Se puede considerar como una partícula a todo el volumen contenido en un volumen en movimiento $V^*(t)$ junto a su superficie $S^*(t)$, ver la Figura 2, donde cada punto de la superficie se está moviendo con la velocidad local de la partícula $\bar{v}(\bar{x}_s, t)$. Siendo la masa constante dentro del volumen $V^*(t)$, entonces la masa por la aceleración es equivalente a la tasa de cambio de la integral volumétrica de la densidad ρ por la velocidad $\bar{v}(\bar{x}_s, t)$ expresándose de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V^*} \rho \bar{v} dV = \iint_{S^*} \bar{f}_S dS + \iiint_{V^*} \bar{f}_B dV \quad (3.1-6)$$

Donde \bar{f}_S representa la fuerza aparente por unidad de área aplicada por la vecindad de la partícula; y \bar{f}_B es la fuerza del cuerpo e.g., debido a la gravedad, por unidad de volumen. Aunque la gravedad se encuentra siempre presente, tiene un efecto acústico despreciable a menos que la frecuencia sea extremadamente baja; por lo general este término es despreciado.

La fuerza aparente \bar{f}_S que actúa sobre la superficie puede contar tanto con componentes en la dirección normal y tangencial, y es representada mediante el vector de tensión de Cauchy dado por la siguiente expresión,

$$\bar{f}_S = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} \quad (3.1-7)$$

Siendo $\bar{\sigma}$ el tensor de tensión y \bar{n} el vector normal a la superficie S^* .

Si aplicamos el teorema de Gauss a la integral de superficie de la fuerza aparente $\bar{f}_S = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$ entonces tenemos la siguiente igualdad

$$\iint_{S^*} \bar{f}_S dA = \iiint_{V^*} \nabla \cdot \bar{\sigma} dV \quad (3.1-8)$$

La derivada con respecto al tiempo en la Ecuación (3.1-6) no se puede ingresar de manera inmediata a la integral ya que el volumen V^* , se encuentra en función del tiempo, por lo tanto es necesario proponer una partícula de fluido de tamaño infinitesimal, donde la velocidad en todas sus partículas es igual que la velocidad de su centro de masa. Como la masa en la partícula de fluido es constante, se puede decir que la tasa de cambio del momento para una subpartícula es $(\rho \Delta V^*) \frac{d}{dt} \bar{v}(\bar{x}_p(t), t)$, donde $\bar{x}_p(t)$ es la posición de la partícula en un tiempo t . Utilizando la regla de la cadena, el factor de aceleración se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{v}(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t) &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} \\ &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \frac{D\bar{v}}{Dt} \end{aligned}$$

De esta manera el operador $\frac{D}{Dt}$ representa la tasa de cambio medida desde el fluido en movimiento, conocido como la derivada material, la cual establece el vínculo entre las descripciones Lagrangianas y Eulerianas. De tal manera que la integral de volumen se puede representar como

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V^*} \rho \bar{v} dV = \iiint_{V^*} \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} dV \quad (3.1-9)$$

que representa una instancia del teorema del transporte de Reynolds.

La substitución de los términos equivalentes de las ecuaciones (3.1-8) y (3.1-9) en la ecuación (3.1-6), y despreciando la \bar{f}_B correspondiente a la fuerza del cuerpo (gravedad) da como resultado

$$\iiint_{V^*} \left(\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} + \nabla \cdot \bar{\sigma} \right) dV = 0 \quad (3.1-10)$$

Se puede concluir, de la misma manera como se hizo con la derivación de la ecuación diferencial de conservación de la masa, que el integrando es cero, dando la ecuación en su forma diferencial

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \nabla \cdot \bar{\sigma} \quad (3.1-11)$$

En el caso particular de los fluidos una suposición válida acerca \bar{f}_S es que sólo tiene componente en la dirección normal a la superficie S^* , es decir,

$$\bar{f}_S = -\bar{n}p$$

Debido a esto es posible representar con una magnitud escalar “ p ” definida por unidad de área identificada como la *presión*. La adopción de esta relación, aunque ideal para un equilibrio estático, implica la negación de la viscosidad. Ahora si la presión “ p ” no depende de la posición, la fuerza neta en la superficie tiende a cero, en caso contrario la integral tiende hacia la dirección de menor presión.

Relaciones constitutivas

Además de las leyes de conservación de la masa y del momento, son necesarios modelos que describan el comportamiento de los materiales. Algunos de estos modelos son los que describen la relación que existe entre el tensor de tensión $\bar{\sigma}$, la deformación y/o la tasa de cambio de la deformación. Es decir estas relaciones pueden ser puramente elásticas, puramente viscosas o viscoelásticas. Un modelo viscoelástico sencillo es el llamado de Voight [21], el cual toma los efectos elásticos y viscosos en paralelo, representados por la siguiente ecuación:

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\bar{C}} : \bar{\epsilon}(t) + \bar{\bar{\eta}} : \frac{d\bar{\epsilon}(t)}{dt} \tag{3.1-12}$$

donde el tensor de tensión $\bar{\sigma}$ es la suma de la parte puramente elástica representado por el tensor de rigidez $\bar{\bar{C}}$ doblemente contraído con el tensor de deformación $\bar{\epsilon}(t)$ y la parte puramente viscosa representada por el tensor de viscosidad $\bar{\bar{\eta}}$ doblemente contraído con la tasa de cambio de la deformación $\frac{d\bar{\epsilon}(t)}{dt}$.

Es importante notar que cuando se trata de fluidos el tensor de tensión $\bar{\sigma}$ es también llamado tensor de presión \bar{P} el cual tiene la siguiente expresión para el caso de fluidos viscosos:

$$\bar{P} = p\bar{I} - \bar{\tau} \tag{3.1-13}$$

donde \bar{I} es una matriz identidad, p es el valor de presión escalar y $\bar{\tau}$ es el tensor de viscosidad representado por $\bar{\tau} = \eta(\nabla\bar{v} + (\nabla\bar{v})^T) - \frac{2}{3}\eta_B(\nabla \cdot \bar{v})\bar{I}$ (3.1-14)

$$\text{con } \frac{d\bar{\epsilon}(t)}{dt} = \nabla\bar{v} + (\nabla\bar{v})^T \tag{3.1-15}$$

Siendo \bar{v} la velocidad del flujo, η la viscosidad y η_B la segunda viscosidad también conocida como viscosidad volumétrica.

Para un fluido compresible otra relación utilizada es

$$p = p(\rho) \tag{3.1-16}$$

entre la presión y la densidad. La primera suposición fue que tenían una relación lineal $p = K\rho$, donde K es un constante, esta relación concuerda con la ley de Boyle en el caso de aire. Existen relaciones no lineales de estas variables en la actualidad una de las más utilizadas es

$$p = c_0^2 \rho + \frac{c_0^2 B}{\rho_0 2A} \rho^2 \quad (3.1-17)$$

Donde c_0 es la velocidad de propagación, ρ_0 es la densidad promedio y B/A son variables que dependen de la no linealidad del material.

En la actualidad se considera que esta relación se encuentra también en términos de la entropía denominada s donde la entropía específica se mantiene constante, para una partícula del fluido. Por lo tanto es posible escribir la siguiente relación

$$p = p(\rho, s) \quad (3.1-18)$$

En remplazo de la primera relación $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\rho)$, si s es inicialmente igual, y el fluido es homogéneo entonces la primera relación es consecuencia de esta última. Y la dependencia de \mathbf{p} sobre s , no necesita ser explícita si s es constante en todos los puntos y tiempos.

3.1.1 Ecuación de la onda

Las perturbaciones acústicas pueden comúnmente considerarse como pequeñas modificaciones al estado estable. Para un fluido este estado se encuentra caracterizado por los valores $(p_0, \rho_0, \bar{\mathbf{v}})$ que pertenecen a la presión, densidad y velocidad; cuando no existe perturbación. La presencia de una perturbación puede ser representada como

$$p = p_0 + p'$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{v}}'$$

donde los valores primos representan las contribuciones de la perturbación al valor final.

Se hacen las siguientes suposiciones:

- El medio es homogéneo. Los valores de las variables que describen al medio son independientes de su posición.
- El medio es estacionario. Las propiedades del medio son independientes del tiempo.
- La velocidad del estado estable \mathbf{v}_0 es cero. No existe movimiento de masas.
- El proceso es adiabático. No existe flujo de calor en el medio.

Teniendo estas suposiciones en cuenta, se pueden reescribir las ecuaciones (3.1-5), (3.1-11) y (3.1-18) contando la entropía constante $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$, las ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho') + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho') \bar{\mathbf{v}}'] &= 0 \\ (\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}' \cdot \nabla \right) \bar{\mathbf{v}}' &= -\nabla (p_0 + p') \\ p_0 + p' &= p(\rho_0 + \rho', s_0) \end{aligned} \quad (3.1-19)$$

Es posible reagrupar los términos en la primeras dos ecuaciones de manera que se dividan según su orden, los términos sin un valor primo serán orden cero, los de un valor primo de primer orden, etc.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho_0}_{\text{orden cero}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho'}_{\text{primer orden}} + \underbrace{\nabla \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{v}}'}_{\text{segundo orden}} + \nabla \cdot \rho' \bar{\mathbf{v}}' = 0 \quad (3.1-20)$$

Donde los valores de orden cero son cero dado que son constantes, y los valores mayores a primer orden son eliminados al considerar una aproximación lineal así que las dos primeras ecuaciones toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}' &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}'}{\partial t} &= -\nabla p' \end{aligned} \quad (3.1-21)$$

La última ecuación es aproximada mediante una expansión por series de Taylor,

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 (\rho')^2 + \dots \quad (3.1-22)$$

eliminando los términos de orden superior entonces

$$p' = c^2 \rho' \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \quad (3.1-23)$$

Para que esta aproximación sea válida, es necesario que los términos no lineales sean mucho más pequeños que los términos que los términos lineales. Y aun cuando estos criterios son cumplidos estos términos pueden provocar un error acumulativo para intervalos largos de tiempo o espacio. Uno de estos fenómenos que no se puede explicar sin la parte no lineal de la ecuación es el *acoustic streaming*.

La ecuación de la onda depende de las ecuaciones vistas en las secciones anteriores, considerando la ecuación de conservación de la masa, eliminando las primas, se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (3.1-24)$$

Al sustituir $\rho = p / c^2$, de la relación de presión- densidad, se obtiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (3.1-25)$$

Al diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0 \quad (3.1-26)$$

al substituir la ecuación de movimiento en el resultado anterior, se define la ecuación de la onda

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-27)$$

El potencial de velocidad

La ecuación de la onda puede ser también derivada para la densidad y la velocidad, de la misma manera que la presión, si estos valores fueran a ser calculados se tendría que resolver dos ecuaciones adicionales. Es posible simplificar estos cálculos con una nueva variable llamada potencial de velocidad $\Phi(\mathbf{x}, t)$. El potencial de velocidad no es una variable física, pero lleva a una nueva formulación de la ecuación de la onda, para utilizar el potencial de velocidad es necesario asumir que el campo acústico no tiene rotacional

$$\nabla \times \bar{v} \equiv 0 \quad (3.1-28)$$

Esta suposición normalmente se cumple para los campos acústicos, entonces el potencial de velocidad puede definirse como

$$\bar{v}(\bar{x}, t) = \nabla \Phi(\bar{x}, t) \quad (3.1-29)$$

La relación entre el potencial de velocidad Φ y la presión se encuentra dada por

$$p(\bar{x}, t) = -\rho_0 \frac{\partial \Phi(\bar{x}, t)}{\partial t} \quad (3.1-30)$$

De esta manera encontramos la siguiente ecuación de la onda que engloba a todas las variables

$$\nabla^2 \Phi(\bar{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-31)$$

3.1.2 Soluciones de la ecuación de la onda

Existen dos métodos clásicos para resolver la ecuación de la onda, el de d’Lambert y Bernoulli; el primero expresa la solución como la suma de dos ondas, que se desplazan en direcciones opuestas, el segundo asume comportamiento lineal donde la solución parte de separación de variables.

En las siguientes secciones se resolverá la ecuación de la onda para el caso cartesiano y el caso esférico, mediante el método de Bernoulli. Se asumirá que la fuente es una función delta oscilando en el espacio con una frecuencia angular de $\omega = 2\pi f$.

Solución de la ecuación de la onda para coordenadas Cartesianas

De acuerdo con el método de Bernoulli, la función $\Phi(\bar{x}, t) = \Phi(x, y, z, t)$ debe ser asumida como el producto de cuatro funciones:

$$\Phi(x, y, z, t) = f(x)g(y)h(z)p(t) \quad (3.1-32)$$

Por simplicidad asumiremos que $\Phi(x,y,z,t)$ tiene la forma de una exponencial compleja y se utilizara la primera derivada con respecto al tiempo $\dot{\Phi}$ debido a la relación más directa con la presión.

$$\dot{\Phi}(x, y, z, t) = \dot{F}e^{j(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))} \quad (3.1-33)$$

Donde \dot{F} es una constante compleja, k_x, k_y, k_z y ω son constantes reales con $\omega \geq 0$. Al substituir esta forma en la ecuación de la onda tenemos:

$$k_x^2 \dot{\Phi}(x, y, z, t) + k_y^2 \dot{\Phi}(x, y, z, t) + k_z^2 \dot{\Phi}(x, y, z, t) = \frac{\omega^2}{c^2} \dot{\Phi}(x, y, z, t) \quad (3.1-34)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Mientras se satisfaga la ecuación 3.1-34, las señales con la forma $\dot{\Phi}(x, y, z, t) = \dot{F}e^{j(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))}$, verificarán con la ecuación de la onda. Esta solución es llamada la onda plana, ya que la fase es la misma para todos los puntos que se encuentran en el plano $k_x x + k_y y + k_z z = C$, donde C es una constante. La figura (3) muestra la onda plana en un tiempo dado ($t = \text{const}$) a una sección dada ($z = \text{const}$). Los niveles de gris de la imagen son proporcionales a la presión. La onda se propaga en un ángulo perpendicular al eje z y a 45° del eje x, es decir $k_z = 0, k_x = k_y, k_x = \cos 45^\circ$.

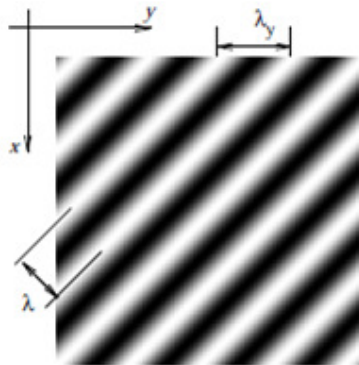


Figura 3 Proyección 2D de la onda plana con niveles de gris proporcionales a la presión.

La distancia entre los puntos que tienen la misma fase, se llama longitud de onda y está dada por:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (3.1-35)$$

Y el número de onda k , se encuentra relacionado con la longitud de onda de la siguiente manera:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.1-36)$$

Si la presión fuera tomada a lo largo de un eje, por ejemplo en el eje y , uno obtendría una longitud de onda de $\lambda_y = k_y / (2\pi)$.

Solución de la ecuación de la onda para coordenadas Polares

La ecuación de la onda en coordenadas esféricas puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin^2 \phi \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 \dot{\Phi}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \dot{\Phi}}{\partial t^2} \quad (3.1-37)$$

Donde $\dot{\Phi}$ es la derivada con respecto al tiempo del potencial de velocidad en función de la distancia al origen r , y los ángulos θ y ϕ , y el tiempo, siendo $\dot{\Phi}(r, \theta, \phi, t)$. Una solución general es complicada, pero una solución particular muy útil es cuando $\dot{\Phi}$ es independiente de los ángulos θ y ϕ .

$$\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \theta} = \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.1-38)$$

Entonces la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \dot{\Phi}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \dot{\Phi}) \quad (3.1-39)$$

La solución de esta ecuación, es la llamada onda esférica, la cual en su forma compleja está dada por:

$$\dot{\Phi}(r, t) = \frac{\dot{F}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (3.1-40)$$

Donde \dot{F} es una amplitud compleja, r es la distancia del origen de la onda, y k es número de onda dado por:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.1-41)$$

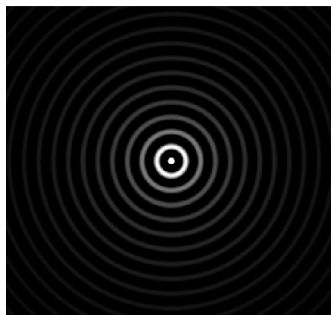


Figura 3 Proyección 2D de la onda esférica con niveles de gris proporcionales a la presión.

3.2 Modelado por métodos analíticos

El modelaje de ultrasonido por métodos analíticos esta basado principalmente en las soluciones de la ecuación de onda, desarrolladas en la sección 3.1.2, para obtener los campos de presión para distintos problemas.

Las dos principales soluciones utilizadas son la onda plana y la onda esférica; éstas generan dos métodos de soluciones analíticas. El primero llamado de espectro angular basado en las ondas planas [30], y el segundo basado en ondas esféricas también conocido como el principio de Huygens, descrito en la siguiente sección.

3.2.1 Integral de Rayleigh

La idea de Huygens consiste en considerar cada punto del frente de onda como el resultado de unas perturbaciones secundarias que se propagan esféricamente desde la apertura origen (ver figura (4)). El frente de onda en cualquier instante puede ser calculado como la envolvente de todas estas ondas esféricas secundarias generadas en la apertura origen.

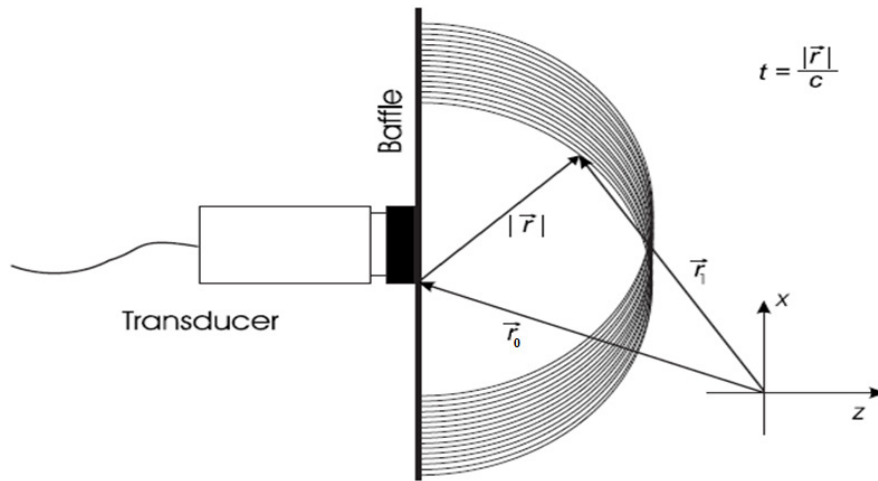


Figura 4 Representación del principio de Huygens. Obtenida de [32]

Esta idea es expresada matemáticamente como la integral de Rayleigh-Sommerfeld, se asume linealidad y propagación en un medio homogéneo sin atenuación.

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi} \int_S \frac{e^{i[\omega t - k \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)]} V_n(\vec{r}_0, t) dS}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} \quad (3.2-1)$$

donde $V_n(\vec{r}_0, t)$ es la componente de la velocidad de la partícula normal a la superficie. Esta componente puede contener un valor imaginario es decir puede contener una amplitud y una fase.

3.2.2 Aproximaciones de Frensel y Fraunhofer

La simplificación de la integral de Rayleigh puede ser realizada tomando en cuenta algunas consideraciones geométricas. El primer paso es utilizar la integral de Rayleigh para el caso de onda continua para una sola frecuencia, donde se asume una distribución de velocidad independiente a través de la apertura lo que da lugar a una separación de variables.

$$V_n(\bar{\mathbf{r}}_0, t) = V_n(t) A(\bar{\mathbf{r}}_0) \quad (3.2-2)$$

Donde $A(\bar{\mathbf{r}}_0)$ es una función peso de que punto en la apertura, conocida como la función de apodización. Esta función se vuelve cero en cualquier punto externo a la apertura.

Si se toma en cuenta que la apertura se encuentra en el plano xy , entonces la distancia \bar{r} entre los dos puntos es calculada como

$$\bar{r} = |\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0| = \sqrt{z^2 + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (3.2-3)$$

En la aproximación de Fresnel se asume que los cambios de amplitud no son tan significativos como los cambios de fase, por lo tanto la distancia $|\bar{r}|$ en el denominador se puede substituir por el valor de z . La segunda aproximación es realizada al extender la distancia $|\bar{r}|$ en el exponente por su expansión en la serie de Taylor:

$$|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0| \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - x_0}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_1 - y_0}{z} \right)^2 \right] \quad (3.2-4)$$

Al desarrollar se obtiene la aproximación de Fresnel expresado como

$$p(\bar{\mathbf{r}}, w) = \frac{i\rho_0 ckV_0}{2\pi z} e^{i(\omega t - kz)} e^{-ik(x_1^2 + y_1^2)/2z} \iint_S [e^{-ik(x_0^2 + y_0^2)/2z} A(x_0, y_0)] e^{ik(x_1 x_0 + y_1 y_0)/z} dx_0 dy_0 \quad (3.2-5)$$

La cual substituye las ondas esféricas por ondas parabólicas, la región donde es válida esta aproximación es conocida como la región de Fresnel.

La aproximación de Fraunhofer asume que la distancia entre el plano de la apertura y el de observación es mucho mayor que las dimensiones de la apertura.

$$z \gg \frac{k \max(x_0^2 + y_0^2)}{2} \quad (3.2-6)$$

En esta aproximación los términos cuadráticos se eliminan

$$p(\bar{\mathbf{r}}, w) = \frac{i\rho_0 ckV_0}{2\pi z} e^{i(\omega t - kz)} \iint_S [A(x_0, y_0)] e^{ik(x_1 x_0 + y_1 y_0)/z} dx_0 dy_0 \quad (3.2-7)$$

En esta aproximación se puede notar que el término de la derecha es muy similar a una transformada de Fourier, por lo tanto existe una equivalencia entre la transformada de Fourier de la apertura y el campo de

presión generado por la misma. Un desarrollo completo de estas ecuaciones se encuentra descrito por Szabo [31].

3.2.3 Respuesta espacial al impulso

En ingeniería un sistema puede ser completamente caracterizado por su respuesta al impulso. Este mismo acercamiento se puede utilizar para caracterizar de manera lineal un sistema acústico. Debido a que la respuesta al impulso depende de la posición relativa del transmisor y del receptor es llamada la respuesta espacial al impulso.

La expresión de la respuesta espacial al impulso es derivada de la integral de Rayleigh, tomando las ondas esféricas como deltas de Dirac

$$p_s(\bar{\mathbf{r}}_1, t) = \delta\left(t - \frac{|\bar{\mathbf{r}}_1|}{c}\right) = \delta\left(t - \frac{|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0|}{c}\right) \quad (3.2-8)$$

La integral de superficie se puede expresar como

$$\Psi(\bar{\mathbf{r}}_1, t) = \int_S \frac{V_n(\bar{\mathbf{r}}_0, t - \frac{|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0|}{c})}{2\pi|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0|} dS \quad (3.2-9)$$

El pulso de excitación se puede separar de la geometría del transductor al introducir una convolución por tiempo

$$\Psi(\bar{\mathbf{r}}_1, t) = \int_S \int_T \frac{V_n(\bar{\mathbf{r}}_0, t_2) \delta\left(t - t_2 - \frac{|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0|}{c}\right)}{2\pi|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0|} dt_2 dS \quad (3.2-10)$$

Esta convolución permite separar la velocidad de la partícula en la apertura al considerarla constante sobre toda la superficie, permitiendo separar las variables

$$\Psi(\bar{\mathbf{r}}_1, t) = V_n(t) * \int_S \frac{\delta\left(t - \frac{|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0|}{c}\right)}{2\pi|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0|} dS \quad (3.2-11)$$

La expresión del lado derecho de la convolución es conocida como la respuesta espacial al impulso. El desarrollo completo de esta respuesta espacial puede ser encontrado en [32].

Para el cálculo de la solución de esta respuesta espacial es necesario conocer la geometría del transductor, debido a que es un sistema lineal el transductor puede ser dividido en formas geométricas más simples y después sus respuestas adicionadas. El programa Field II elaborado por J.A Jensen se basa en el método descrito anteriormente para calcular los campos de presión [33].

Existen distintos enfoques a la solución de la integral de Rayleigh-Sommerfeld; el programa FOCUS de la universidad de Michigan [34]. La principal desventaja de estos métodos es que basan su aproximación en la

integral de Rayleigh-Sommerfeld que considera medios homogéneos y es una interpretación escalar de la propagación de la onda.

Se han planteado soluciones para mejorar estas simulaciones para medios heterogéneos como la inserción de la atenuación y de un mapa de sombreado al sumado lineal de las respuestas del medio [35]. Sin embargo, la solución analítica para un medio heterogéneo de geometría compleja es una tarea difícil por lo cual para estos problemas se utilizan métodos computacionales que serán detallados en la siguiente sección.

3.3 Modelado por métodos computacionales

El modelado por métodos computacionales se basa en las ecuaciones de conservación de masa, movimiento y las ecuaciones constitutivas, formando sistemas de ecuaciones diferenciales. Las incógnitas en estos sistemas son usualmente la velocidad, presión, densidad, etc. La solución por métodos analíticos es prácticamente imposible ya que sólo son capaces de manejar problemas simples, cuando los problemas son más complejos como en situaciones reales se utilizan los métodos computacionales. En ocasiones es posible utilizar técnicas semi-analíticas como el método de elemento de frontera o BEM[36], por sus siglas en inglés.

Las soluciones puramente numéricas se basan en la discretización de las ecuaciones fundamentales, expuestas en la sección 1.1, es decir en vez de determinar la solución para todas las posiciones en todos los tiempos, será suficiente calcular la solución para un número finito de posiciones en un intervalo de tiempo. Por lo tanto las ecuaciones diferenciales parciales pueden ser reducidas a un sistema de ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas por una computadora.

Existen varios esquemas de discretización, los más utilizados son:

- El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo o FDTD, que resuelve directamente las ecuaciones diferenciales al discretizarlas siendo un método de fácil implementación y baja complejidad pero requiere de un mallado estructurado de baja complejidad geométrica. [37]
- El método de elementos finitos o FEM, tiene una gran flexibilidad al modelar superficies curvas usando un mallado no estructurado, pero su formulación en el dominio del tiempo requiere la inversión de la matriz global para cada paso de tiempo por lo tanto este método generalmente se restringe para su formulación en la frecuencia y para anchos de banda limitados. [38]
- El método de integración finita o FIT, este método se encuentra basado en volúmenes de control y resuelve la forma integral de las ecuaciones de conservación, este método fue introducido por Fellingner [8] y será detallado en las siguientes secciones.

3.3.1 Método de Integración Finita

El método fue introducido por Weiland [39] hace cuatro décadas para la simulación de problemas de electromagnetismo para resolver las ecuaciones de Maxwell en su forma integral y se fue adaptado para ondas elastodinámicas por Fellingner [8].

La principal característica del método es utilizar mallas escalonadas para representar las variables y de esta manera se mantienen las condiciones de transición/continuidad de los elementos durante la integración.

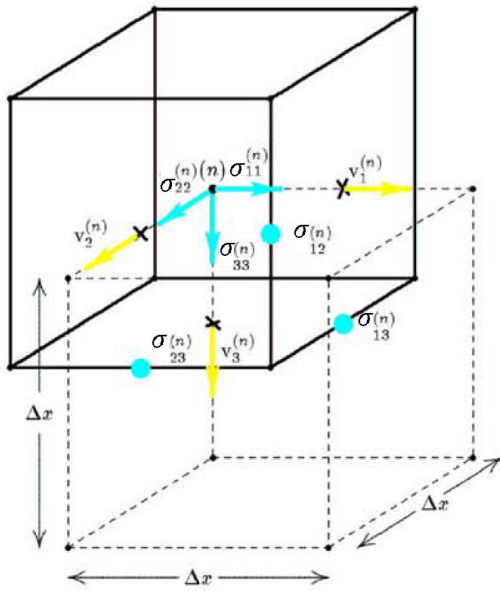


Figura 5 Representación de las mallas escalonadas. Obtenida de [8]

Las mallas se encuentran desplazadas media unidad en espacio, como se observa en la figura (5). De tal manera que en el volumen de integración dado es posible considerar las velocidades y tensiones constantes a través de las superficies.

Otro de los beneficios del uso de mallas escalonadas es que el cálculo de la integración puede ser eficiente utilizando la regla de punto medio, la cual para una dimensión es descrita de la siguiente forma:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx \approx f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x \quad (3.3-1)$$

Los valores de la integración pueden ser inmediatamente adquiridos de los valores almacenados en la malla escalonada, permitiendo un menor número de operaciones para la simulación.

Utilizando este esquema de representación e integración, se pueden substituir dentro de las ecuaciones de conservación las ecuaciones constitutivas del material para de esta manera despejar y calcular los valores de velocidad y tensión, en un esquema escalonado en el tiempo

$$\begin{aligned} v_i^{(z)} &= v_i^{(z-1)} + \dot{v}_i^{(z-1/2)} \Delta t \\ \sigma_{ij}^{(z+1/2)} &= \sigma_{ij}^{(z-1/2)} + \dot{\sigma}_{ij}^{(z)}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

Las ecuaciones constitutivas definen las características del medio en estudio, las ecuaciones utilizadas para modelar estas características definirán el comportamiento de la onda, pudiéndose definir propiedades anisotrópicas, no lineales y de disipación de energía. En la sección 1.3.2 se describirá el modelo viscoelástico utilizado en este trabajo.

3.3.2 Modelo Visco-Elástico

Las propiedades de los materiales son especificadas por las ecuaciones constitutivas, éstas describen las propiedades físicas del material y dado que deben ser independientes del sistema de coordenadas se utilizan tensores para describirlas. Existe una gran cantidad de materiales por lo tanto también pueden existir varias

ecuaciones constitutivas. En general se pueden describir los materiales con tres simples, idealizadas, relaciones de tensión y la deformación. Siendo éstos la de un fluido no viscoso, un fluido newtoniano viscoso y un sólido elástico tipo Hooke. Una descripción más detallada se pueden encontrar en [44].

Estos modelos no representan a los tejidos ya que el tejido tiene características de sólidos, descritos por el modelo de sólido elástico tipo Hooke, junto a características viscosas. Este tipo de medios son aproximados utilizando modelos viscoelásticos, los primeros modelos viscoelásticos desarrollados fueron los modelos de Maxwell, Voigt y Kelvin; siendo aproximaciones mediante resortes y amortiguadores, figura (6).

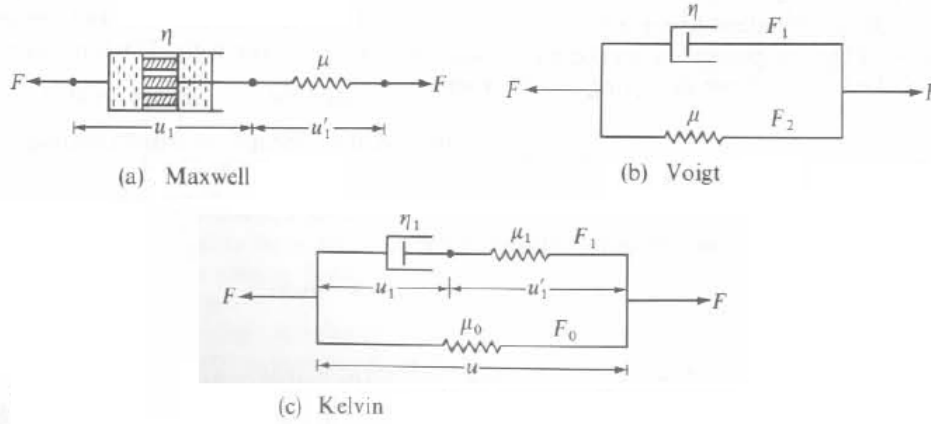


Figura 6 Distintos modelos viscoelástico. Obtenida de [44]

Posteriormente Boltzmann describió de manera más general, tomando en cuenta la memoria que poseen los materiales, la elongación de un material puede ser calculada mediante la suma de la historia de las tensiones que sufrió el material a lo largo del tiempo t. De la misma manera se puede calcular la tensión con la suma de las elongaciones sufridas a lo largo de tiempo, teniendo la siguiente expresión:

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, t) = \int_{-\infty}^t \bar{\bar{G}}(t - \tau) \frac{\partial \bar{\epsilon}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.3-3)$$

Siendo $\bar{\sigma}$ el tensor de tensión, $\bar{\epsilon}$ el tensor de deformación y $\bar{\bar{G}}$ un tensor llamado función de relajación.

El desarrollo del modelado viscoelástico se encuentra basado en el modelo de Voigt, el cual toma los efectos elásticos y viscosos en paralelo, representados por la ecuación 3.1-12, detallada en la sección 3.1.

Siguiendo el esquema establecido por Fellingner [8], y al substituir la ecuación de viscoelasticidad obtenemos las ecuaciones que definen la propagación en su forma integral

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho_0(\bar{r}) \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(\bar{r}, t) dV &= \iint_S \bar{n} \cdot \bar{\sigma}(\bar{r}, t) dS + \iiint_V \bar{f}(\bar{r}, t) dV \\ \iiint_V \bar{\bar{s}} : \frac{\partial}{\partial t} \bar{\sigma}(\bar{r}, t) dV & \\ &= \iint_S \text{sym}\{\bar{n}\bar{v}(\bar{r}, t)\} dS + \iiint_V \bar{\bar{r}}(\bar{r}) : \text{sym}\left\{\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(\bar{r}, t)\right)\right\} dV + \iiint_V \bar{h}(\bar{r}, t) dV \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

donde $\bar{\sigma}$ es el tensor de tensión, \bar{v} es el vector de la velocidad de la partícula, el tensor $\bar{\bar{s}}$ es el inverso del tensor de rigidez, la doble contracción de los tensores $\bar{\bar{c}} : \bar{\bar{\tau}}$ definen el tensor de viscosidad $\bar{\eta}$, los tensores \bar{h} y \bar{f} definen deformaciones y fuerzas externas respectivamente.

3.3.3 Errores Numéricos

Durante la simulación existen errores debidos a la naturaleza discreta del modelado; errores por estabilidad y errores por dispersión numérica. Por lo tanto es necesario definir criterios para disminuir estos errores numéricos balanceándolo con el uso de recursos computacionales.

De manera intuitiva se puede deducir que tanto la discretización en el tiempo como en espacio debe ser pequeña para que la simulación sea lo más precisa posible. También es posible demostrar que la discretización del tiempo no puede ser elegida independientemente de la discretización en el espacio, y debe obedecer la llamada condición de estabilidad. Esta condición comúnmente llamada CFL (por las iniciales de Courant, Friedrichs y Levy) es dada por la siguiente expresión

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{\Delta x}{c_{max}} \quad (3.3-5)$$

Donde d es el número de dimensiones espaciales, Δx es la discretización espacial, Δt la discretización temporal y c_{max} es la velocidad máxima de propagación de onda presente en la simulación.

En la práctica uno primero elige la discretización espacial Δx , y posteriormente calcula un Δt para asegurar la estabilidad. La Δx generalmente es elegida con relación a longitud de onda más pequeña existente en la simulación, ver figura 7. Por regla general se elige una discretización de 10 puntos por longitud de onda.

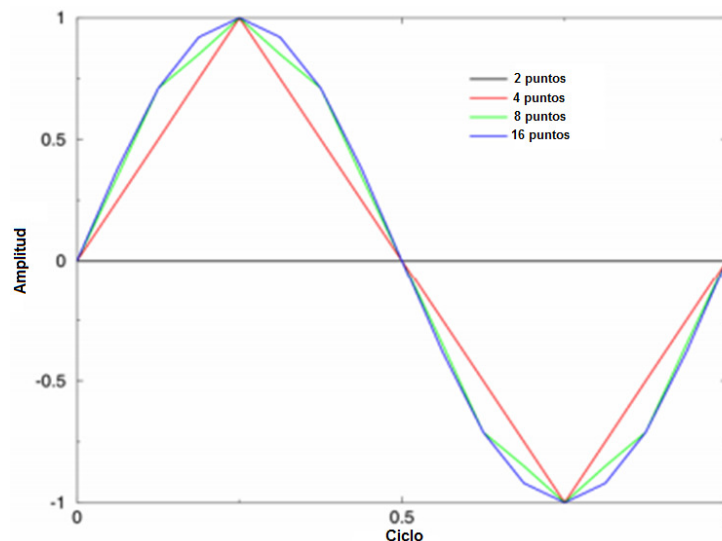


Figura 7 Muestras por longitud de onda.

El tamaño de la longitud de onda no es único factor que determina la Δx , ya que el error no es sólo provocado por la aproximación de las integrales sino también por errores acumulativos debido a la

naturaleza iterativa del método. Por lo tanto una simulación de mayor duración provocará mayores errores, de la misma manera una distancia de propagación mayor genera mayores errores.

Uno de estos errores es la dispersión numérica, se debe a la dependencia de la velocidad de la fase con la frecuencia. Una consecuencia de este efecto es que la onda es distorsionada durante su propagación y adquiere una “cola” de oscilaciones como se observa en la figura 8.

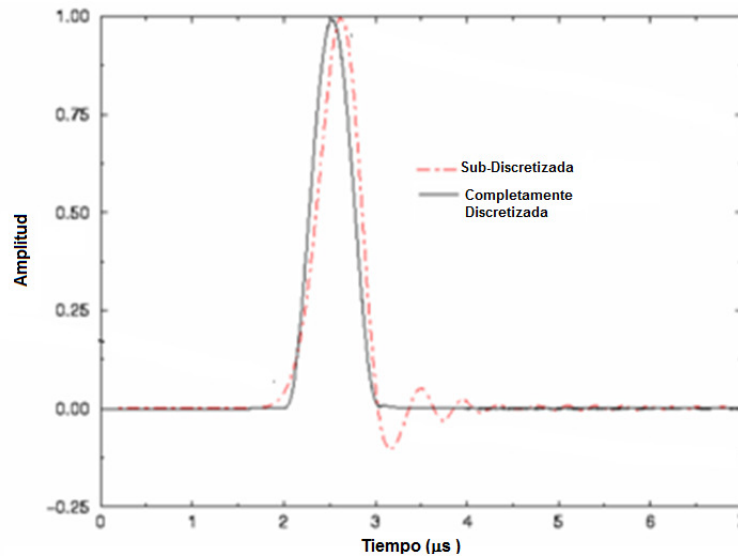


Figura 8 Distorsiones por dispersión numérica.

Para distancias de propagación mayores a varias decenas de la longitud de onda es necesaria una discretización que ronde los 20 puntos por longitud de onda. Es importante notar que para simulaciones en medios heterogéneos es necesario que la discretización cumpla con la mínima longitud de onda existente en el sistema, por ejemplo en un sistema no lineal la mínima longitud de onda será de los armónicos generados.

4 Formación de Imágenes Ultrasónicas

La imagen ultrasónica se utiliza habitualmente en el ámbito médico (ecografía), como una potente herramienta para el diagnóstico. Una imagen ultrasónica clásica representa la amplitud de los ecos producidos por los cambios de impedancia acústica en el material, y por tanto, contiene información sobre la estructura interna del medio inspeccionado. Los tejidos biológicos presentan cambios sutiles de impedancia acústica, ya que tanto la densidad como la velocidad de propagación son muy similares en tejidos blandos, y el contraste de la imagen resulta crítico para el diagnóstico clínico.

La calidad de las imágenes obtenidas está determinada por múltiples factores, entre los que destacan: la resolución, el contraste, el rango dinámico, la ausencia de artefactos y la relación señal/ruido. En los últimos años se han propuesto diversas técnicas para mejorar la calidad de las imágenes tratando de superar las

limitaciones impuestas por la metodología convencional. La mayor parte de estas aportaciones se dirigen a mejorar *alguna* de los factores que determinan la calidad de la imagen aunque, en ciertos casos, también mejoran o empeoran otros.

El mayor desarrollo se ha producido en los últimos 30 años desde la introducción de los arreglos formado por un gran número N de elementos transductores de pequeño tamaño que, controlados individualmente en emisión y recepción, permiten modificar las características del haz.

Existen diversas formas de operar con arreglos ultrasónicos, y difieren en la manera en que las señales emitidas y recibidas por cada elemento del arreglo se combinan para obtener una imagen. En las siguientes secciones se tratarán dos modalidades y una modificación de la última, siendo estas: imagen por técnica clásica e imagen por *apertura sintética*.

Tabla 1 - Comparativa de las Técnicas de Formación de Imagen.

| Técnica | Características | Ventajas | Desventajas |
|--------------------------------|--|--|--|
| Clásica | Se realiza una transmisión concentrando toda la energía de los transductores en un punto focal, y se reconstruye una línea de la imagen, definida por el punto focal y el centro de la apertura, a través de un sumador con retrasos considerando un medio homogéneo. | <ul style="list-style-type: none"> - Alto contraste - Alto SNR - Robustez al movimiento | <ul style="list-style-type: none"> - Aberraciones - Baja resolución lateral - Baja tasa de cuadros por segundo |
| Apertura Sintética | Se realiza una transmisión de una onda esférica o plana, que se propaga a través de todo el medio sin un punto focal en específico. El sumador con retrasos compensa por los tiempos de vuelo tanto en transmisión como en recepción. Se considera un medio homogéneo. | <ul style="list-style-type: none"> - Alta tasa de cuadros por segundo - Alta resolución lateral | <ul style="list-style-type: none"> - Aberraciones - Sensible al movimiento - Bajo contraste - Bajo SNR |
| Apertura Sintética Heterogénea | Se realiza una transmisión de una onda esférica o plana, que se propaga a través de todo el medio sin un punto focal en específico. Se calculan los tiempos de vuelo a partir de un mapa de velocidad del medio heterogéneo y se utilizan estos para calcular los retrasos para el sumador | <ul style="list-style-type: none"> - Alta tasa de cuadros por segundo - Alta resolución lateral - Mejora de contraste | <ul style="list-style-type: none"> - Bajo SNR - Sensible al movimiento |

4.1 Técnica Clásica

Las imágenes médicas por ultrasonido son tradicionalmente adquiridas al transmitir de manera secuencial un haz enfocado en distintas direcciones del tejido. Esto produce una serie líneas que son acumuladas para generar la imagen final. La formación de esta imagen conlleva varios procesos los cuales son representados en la figura 9. En las siguientes secciones se describirán brevemente estos procesos, para una descripción más extensa del proceso de formación de imagen se recomienda el libro escrito por Thomas Szabo [31].

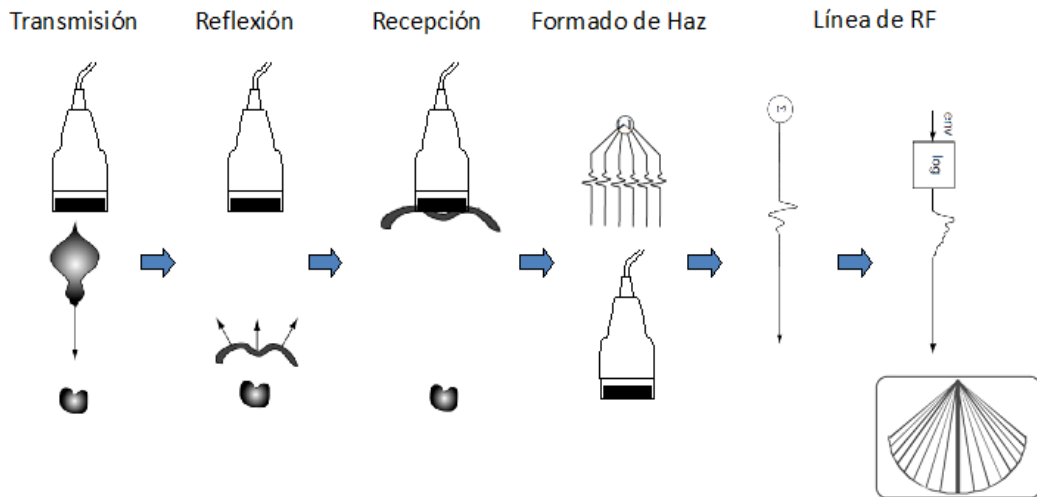


Figura 9 Proceso de formación de Imagen ultrasónica. Modificada de [31]

4.1.1 Transmisión

El proceso de formación de imagen comienza con la formación de un pulso, el cual es generado con arreglo de transductores que son retrasados de tal manera que se tenga una profundidad determinada. Los *retardos de focalización*, y en consecuencia la posición del foco se puede modificar sin necesidad de mover el transductor. El número de elementos utilizados para la formación del pulso dependerá de la profundidad y forma del pulso en el foco deseada, el pulso podrá tener una frecuencia y duración predeterminada. La forma de este pulso será una de los parámetros que definirán la resolución lateral en la imagen formada, la figura 10 muestra la forma general de un pulso en el foco.

Estos pulsos pueden estar compuestos por un mayor número de frecuencias, obteniendo relaciones de señal a ruido mayores a las obtenidas con una sola frecuencia.

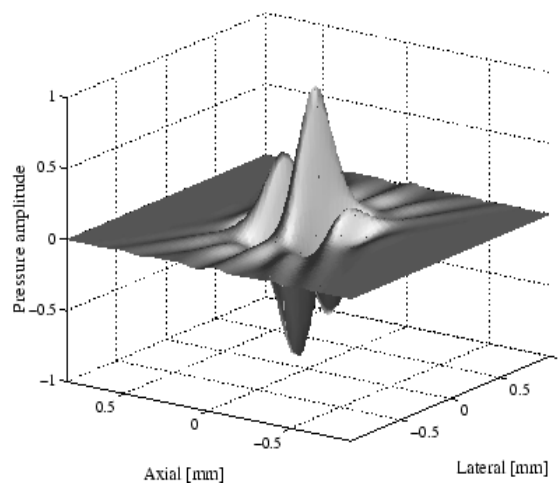


Figura 10 Forma de un pulso enfocado. Obtenida de [50]

4.1.2 Recepción

Los ecos reflejados por las estructuras de tejido son recibidas por los transductores, estas señales eléctricas son posteriormente amplificadas por amplificador de bajo ruido, entrando después a una etapa de ganancia variable la cual sirve para compensar la amplitud de la onda con respecto al tiempo transcurrido, esto debido al fenómeno de absorción de las ondas por el tejido, finalmente es filtrada y digitalizada. El diagrama de bloques de este proceso se muestra en la figura 11.

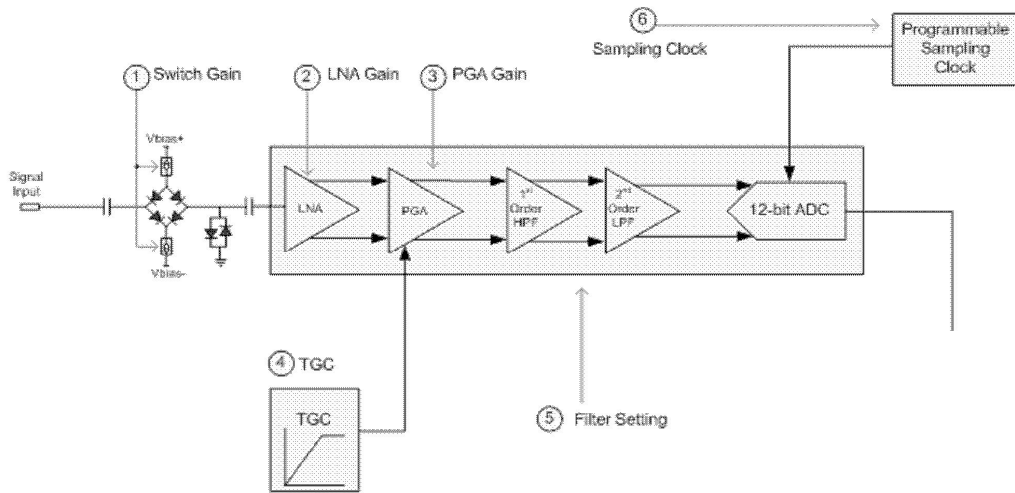


Figura 11 Diagrama de bloques del sistema de recepción. Obtenida de [51]

Normalmente el número de canales en un equipo de ultrasonido no iguala el número de transductores en la sonda ultrasónica, por lo tanto es necesario utilizar multiplexores para redirigir estas señales a los canales receptores disponibles.

4.1.3 Formado de Haz

El proceso por el cual se combinan las señales emitidas y recibidas por los elementos del array se denomina *formación de haz*. Los formadores convencionales, denominados de *retardo y suma*, se basan en retrasar las señales emitidas y recibidas para compensar las diferencias en los tiempos de vuelo desde cada elemento del array al *foco*. Los *retardos de focalización*, dependerán principalmente de la velocidad del sonido a través del medio y de la posición del dispersor del cual se quiere detectar, véase la Figura 12.

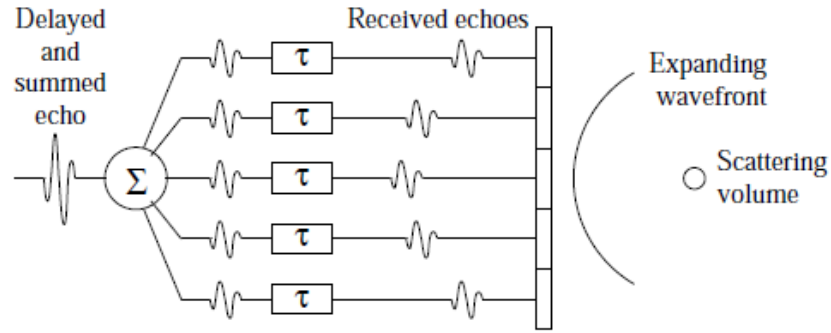


Figura 12 Esquema de formador de haz. Obtenida de [50]

Los formadores tradicionalmente han sido circuitos analógicos, sin embargo la utilización de formadores digitales está ganando terreno debido a su reducción de costos, flexibilidad y precisión.

4.1.4 Línea de RF

La suma resultante del formador de haz es la línea de RF, mostrada en la figura 13, que representa una línea en la imagen ultrasónica, esta línea después de ser formada es filtrada para eliminar posibles ruidos para que posteriormente se le detecte la envolvente mediante la transformada de Hilbert, submuestreada y comprimida logarítmicamente para ser desplegada en el monitor.

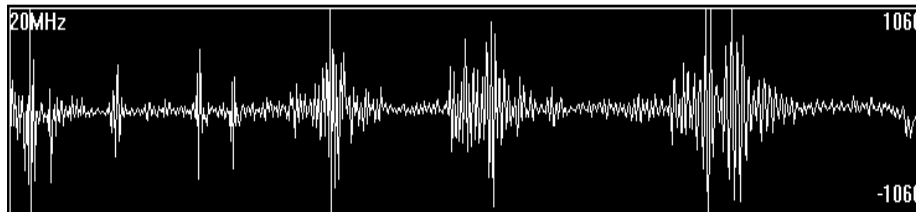


Figura 13 Señal RF de ultrasonido.

4.1.5 Formado de Imagen

El número de líneas en la imagen depende del número de emisiones generadas en distintas direcciones, generalmente para una imagen convencional esta es de 256 líneas, esto significa que para una profundidad de 15cm se puedan obtener tasa de cuadros de alrededor de 20 por segundo.

Debido a que cada línea representa una hilera de pixeles para una imagen convencional de 256 líneas se obtendría una imagen de 256 pixeles de ancho, produciendo una imagen de baja de resolución. Es necesario interpolar linealmente entre pixeles adyacentes a la misma profundidad para generar una imagen de mayor resolución, esta interpolación es más notoria en arreglos de fase ya que al alejarse más del transductor el número de pixeles que deben interpolarse es mayor.

4.2 Técnicas de Enfocado por Apertura Sintética

Esta técnica fue inicialmente desarrollada para la formación de imágenes de radar, para obtener imágenes de mayor resolución [40]. La técnica utiliza la señal de los ecos antes de la formación de haz para formar una apertura sintética y de esta manera reconstruir la imagen. Una ventaja de esta técnica es que ofrece una resolución lateral mejor que la de sistemas tradicionales dado que el enfocado se lleva a cabo digitalmente en la transmisión y en la recepción.

En sus inicios la técnica usaba un solo transductor que emitía y recibía las señales y después era desplazado sobre la región de interés. Esta técnica clásica de enfocado sintético fue demostrada experimentalmente para imágenes médicas en los años setenta [41]. La introducción de arreglos de transductores permitió el desarrollo de técnicas de apertura sintética. Las distintas combinaciones de elementos transmisores y receptores da lugar a distintas aperturas efectivas, las cuales sirven para caracterizar la respuesta del sistema, un análisis más detallado puede encontrarse en [42].

4.2.1 Transmisión

Para la transmisión se utiliza un subconjunto de elementos del arreglo de transductores para emitir un frente de onda omnidireccional/desenfocado en cada disparo, véase figura 14. Se realizan disparos sucesivos, en cada disparo se forma una imagen parcial o de baja resolución, a continuación las imágenes se unen para formar una imagen de mayor resolución.

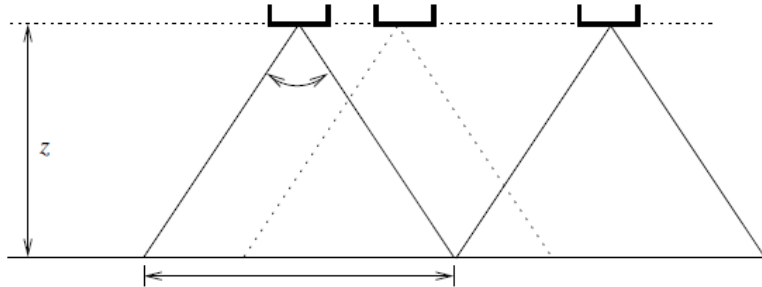


Figura 14 Esquema de los elementos del transductor. Obtenida de [14].

En la emisión radica la primera diferencia sustancial entre la formación de imágenes ultrasónicas mediante la técnica clásica y las formadas mediante *apertura sintética*. Como regla general, cuantos más disparos con elementos distintos se realicen, mas imágenes parciales e independientes se combinarán, produciendo una mejor calidad de imagen final.

Al realizarse el disparo con un solo elemento, la cantidad de energía utilizada para iluminar el medio es menor a la de la técnica clásica esto produce una razón de señal a ruido (SNR) insuficiente ya que la energía transmitida se encuentra muy limitada por el hardware.

Trabajo reciente ha mostrado que la SNR puede ser incrementada al emplear subaperturas que en cada emisión emulen la onda esférica que transmitiría un solo elemento [12],[13], y al reemplazar la señal convencional con una señal modulada en frecuencia (FM) [15][16][17]. Utilizando este acercamiento, la SNR puede ser aumentada lo suficiente para aplicaciones en vivo [14],[18].

4.2.2 Formado de Haz

Las imágenes de apertura sintética son formadas al sumar coherentemente los frentes de onda producidos por los tejidos, una técnica llamada de retraso y suma [43]. La señal producida por un dispersor ubicado en el punto (x,z) en una imagen puede ser reconstruida al realizar la siguiente suma:

$$s(x, z) = \sum_{i=1}^{N_{tx}} \sum_{j=1}^{N_{rx}} w_{ij} RF_{ij}(t - \tau(x, z)) \quad (4.2-1)$$

Donde N_{tx} , N_{rx} representan el número elementos en transmisión y recepción en el arreglo, $RF_{ij}(t)$ representa las señales recibidas en el elemento j^{th} de la transmisión i^{th} , t representa el tiempo en la señal y $\tau(x,z)$ el tiempo de vuelo al punto (x,z) ; w_{ij} representa el peso correspondiente a la apodización.

El tiempo de vuelo $\tau(x,z)$ es la suma del tiempo τ_{tx} que tarda la onda en llegar al punto (x,z) desde el elemento i^{th} , y el tiempo τ_{rx} es el tiempo que tarda el eco en arribar al elemento j^{th} . Y se encuentran definidos por las siguientes expresiones:

$$\tau_{tx} = \frac{\left(\sqrt{(x_i - x)^2 + z^2}\right)}{c}, \quad \tau_{rx} = \frac{\left(\sqrt{(x_j - x)^2 + z^2}\right)}{c} \quad (4.2-2)$$

Siendo x_i es la coordenada x del elemento emisor, x_j la coordenada x del elemento receptor y c la velocidad del sonido en el medio.

4.2.3 Formado de Imagen

La imagen es formada pixel por pixel, cada uno es calculado a partir de la suma descrita en la sección 4.2.2, a diferencia del método tradicional la cantidad de pixeles en la imagen no depende del número de emisiones realizadas sino de la cantidad de memoria disponible para almacenar las señales de RF. Es posible utilizar una plataforma de procesamiento en paralelo para la formación de la imagen, ya que cada pixel es independiente de los demás.

Los pixeles adquieren un valor máximo, cuando la suma de las señales de RF con los retrasos calculados es coherente por lo tanto existe un dispersor en ese punto, de la misma manera si el dispersor no se encuentra en el pixel procesado la suma no es coherente y por lo tanto el valor del pixel es mínimo, como se ejemplifica en la figura 15.

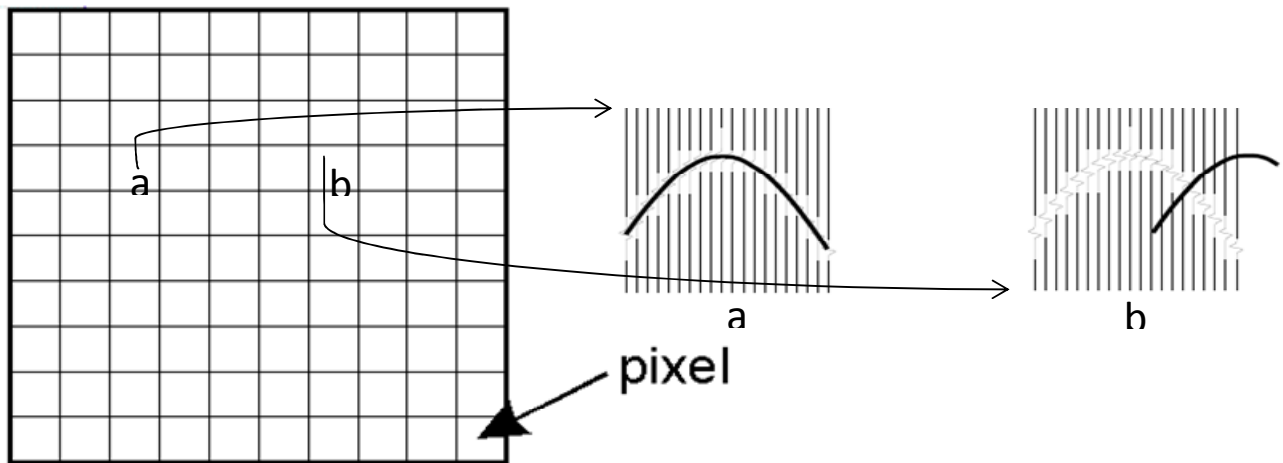


Figura 15 Esquema de sumado coherente de cada pixel.

4.3 Técnicas de Enfocado de Apertura Sintética para medios heterogéneos

Para medios homogéneos el tiempo de vuelo puede ser fácilmente calculado para cada emisión y recepción para cada pixel de la imagen al trazar un rayo entre el elemento y el pixel a calcular, debido a que la velocidad es constante a través de todo el medio estos tiempos son fácilmente calculable mediante la geometría.

Si el medio no es homogéneo, la velocidad y dirección del rayo cambian en cada interfaz y este rayo ya no se representa en línea recta. Esto provocaría que los tiempos de vuelo calculados para un medio homogéneo no van a generar la suma coherente para un dispersor ubicado en la misma posición, como se observa en la figura 16.

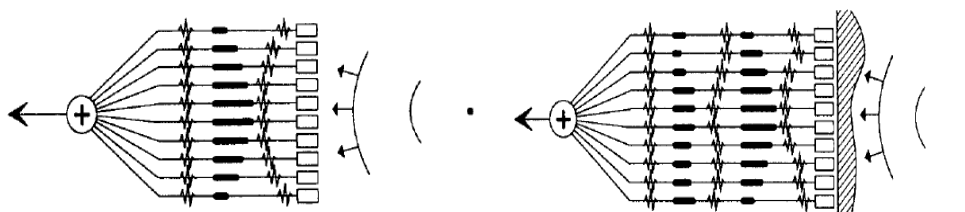


Figura 16 Alteración de los tiempos de vuelo debido al medio heterogénea. Obtenida de [24]

Sin embargo si se conoce la geometría y el campo de velocidad del medio en cuestión es posible calcular las desviaciones de estos rayos y de esta manera calcular el tiempo de vuelo para aplicar estos retrasos en el formador de haz.

El cálculo de los tiempos de vuelo es computacionalmente caro, se han hecho avances para lograr un cálculo más eficiente pero los métodos propuestos caen principalmente en dos categorías; métodos de rastreo de rayos, utilizado por [45], y métodos basados en la solución numérica de la ecuación Eikonal, utilizado en este trabajo y descrito en la siguiente sección.

4.3.1 Fast Marching Method

La ecuación Eikonal es obtenida de las ecuaciones de la onda elástica al buscar su solución para la onda plana y aplicar una aproximación de alta frecuencia, dando lugar a la teoría de rayos. La propagación en los frentes de onda pueden ser guiados por la ecuación Eikonal del trazado de rayos, en este caso para 2D se encuentra definida como:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = s(x, z)^2 \quad (4.3-1)$$

Donde la variable s , es el inverso de la velocidad dependiente de la posición.

El cálculo de los tiempos de vuelo mediante diferencias finitas basado en la solución de la ecuación Eikonal fue publicado por Vidale [46], es equivalente a ir siguiendo el avance de un interfaz con una velocidad normal a su superficie. Uno de los problemas suscitados en el avance de estas interfaces es el manejo de las esquinas que se puedan formar debido al avance de las mismas.

Una técnica numérica para el seguimiento de interfaces fue la planteada por Sethian [47] llamada el método de **level set**, una técnica popular en muchas disciplinas como la de procesamiento de imágenes. Basado en la técnica de level set se desarrollo una técnica llamada de Fast Marching Method[48], que soluciona la ecuación Eikonal, una de las ventajas de su método es que satisface las condiciones de entropía, solucionando los problemas generados en las esquinas de las interfaces.

La construcción del frente de onda se basa en construir una banda estrecha a través de la interfaz en avance. Los tiempos de vuelo son almacenados en la memoria, donde son ordenados de menor a mayor. El frente de onda siempre avanza utilizando el tiempo de vuelo menor existente en la memoria. Cada punto de la malla es clasificado en tres clases distintas, como puntos detrás de la interfaz cuyos tiempos de vuelo ya fueron calculados, puntos en la interfaz cuyos tiempos de vuelo fueron calculados pero aun no fueron aceptados y puntos delante de la interfaz cuyos tiempos aun no han sido calculados. Al finalizar se obtiene un mapa de tiempos de vuelo dependiente del mapa de velocidad como se muestra en la figura 17. Para un mayor detalle del algoritmo se recomienda el reporte técnico escrito por Bærentzen[49].

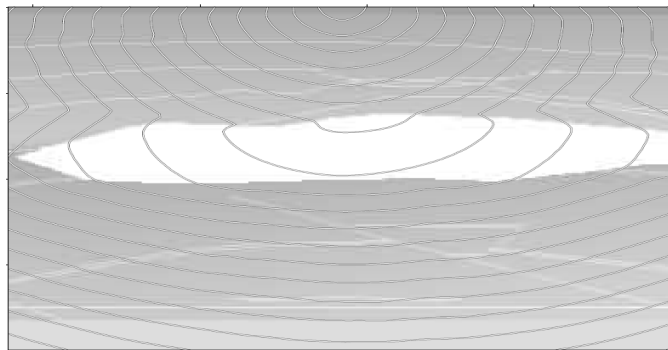


Figura 17 Isoniveles de los tiempos de vuelo sobrepuestos a un mapa de velocidad. Obtenida de [48]

IV Métodos y Resultados

5 Descripción de las simulaciones

5.1 Introducción

Las simulaciones permiten la predicción de fenómenos sin el costo en tiempo y en equipo que llevaría el coleccionar los datos reales. Los resultados preliminares permitirán juzgar la efectividad de una técnica antes de realizar el experimento completo. Existen diversos métodos para abordar este problema, algunos ya cuentan con *software* ya sea comercial o abierto. En este trabajo se describe la elaboración de un software abierto llamado V-EFIT basado en el método de integración finita.

Tabla 2 – Descripción de algunos métodos para el modelado acústico.

| Método | Basado en | Descripción | Ejemplo |
|--------------------------|-------------------------------|---|-----------------|
| Computacionales | | | |
| Elemento Finito | Ecuaciones Gobernantes | Utiliza una malla formada por elementos finitos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales mediante la inversión de una matriz. | COMSOL |
| Integración Finita | Ecuaciones Gobernantes | Utiliza una malla formada por volúmenes de control para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales mediante la integración finita. | V-EFIT |
| Diferenciación Finita | Ecuaciones Gobernantes | Utiliza una malla formada por elementos equidistantes para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales mediante diferencias finitas. | Simsonic |
| Semi-Analíticos | | | |
| Dominio del Tiempo | Ecuación de la onda. | Resuelve la ecuación diferencial mediante técnicas computacionales en el dominio del tiempo. | KZK Texas Code |
| Dominio de la Frecuencia | Ecuación de la onda. | Resuelve la ecuación diferencial mediante técnicas computacionales en el dominio de la frecuencia. | KZK Bergen Code |
| Ray-Tracing | Aproximación alta Frecuencia. | Utiliza la aproximación en alta frecuencia de la ecuación de la onda para rastrear el camino de distintos rayos ultrasónicos. | UT-Sim |
| Analíticos | | | |
| Rayleigh–Sommerfeld | Ondas Esféricas | Utiliza la superposición de ondas esféricas, mediante la integral de Rayleigh–Sommerfeld, para generar un campo acústico completo. | Field II |
| Espectro Angular | Ondas Planas | Utiliza la superposición de ondas planas, utilizando un espectro angular de la dirección de las mismas. | Abersim |

Las simulaciones fueron implementadas en ejecutables de MATLAB (The Mathworks Inc., Natick, MA) llamados MEX files. Lo que permite el uso de Matlab para visualización, pre- y post procesado de la información. Las rutinas principales fueron implementadas en **C** pero contienen también una versión acelerada que trabaja dentro del procesador gráfico del computador.

Una formulación discreta del modelo de propagación acústica en medios heterogéneos en termino de las velocidades (v_x, v_y) y de las tensiones (T_{xx}, T_{yy}, T_{xy}) en las posiciones i,j en el tiempo n es:

$$\begin{aligned} v_{x,i,j}^n &= v_{x,i,j}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} B_x \left(T_{xx,i+1,j}^{n-1/2} - T_{xx,i,j}^{n-1/2} + T_{xy,i,j}^{n-1/2} - T_{xy,i,j-1}^{n-1/2} \right) \\ v_{y,i,j}^n &= v_{y,i,j}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} B_y \left(T_{xy,i,j}^{n-1/2} - T_{xy,i-1,j}^{n-1/2} + T_{yy,i,j+1}^{n-1/2} - T_{yy,i,j}^{n-1/2} \right) \end{aligned} \quad (5.1-1)$$

$$\begin{aligned} T_{xx,i,j}^{n+1/2} &= T_{xx,i,j}^{n-1/2} + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) [v_{x,i,j}^n - v_{x,i-1,j}^n] + \lambda [v_{y,i,j}^n - v_{y,i,j-1}^n] \\ &+ \left(\mu_B + \frac{2}{3} \mu_s \right) [\dot{v}_{x,i,j}^n - \dot{v}_{x,i-1,j}^n] + \mu_s [\dot{v}_{y,i,j}^n - \dot{v}_{y,i,j-1}^n] \end{aligned} \right\} \\ T_{yy,i,j}^{n+1/2} &= T_{yy,i,j}^{n-1/2} + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) [v_{y,i,j}^n - v_{y,i,j-1}^n] + \lambda [v_{x,i,j}^n - v_{x,i-1,j}^n] \\ &+ \left(\mu_B + \frac{2}{3} \mu_s \right) [\dot{v}_{y,i,j}^n - \dot{v}_{y,i,j-1}^n] + \mu_s [\dot{v}_{x,i,j}^n - \dot{v}_{x,i-1,j}^n] \end{aligned} \right\} \\ T_{xy,i,j}^{n+1/2} &= T_{xy,i,j}^{n-1/2} + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{aligned} &\mu_{xy} [v_{x,i,j+1}^n - v_{x,i,j}^n + v_{y,i+1,j}^n - v_{y,i,j}^n] \\ &+ \varphi_{xy} [\dot{v}_{x,i,j+1}^n - \dot{v}_{x,i,j}^n + \dot{v}_{y,i+1,j}^n - \dot{v}_{y,i,j}^n] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (5.1-2)$$

donde λ, μ son las constantes de lame, μ_B, μ_s las constantes de viscosidad. Siendo B_x, B_y, μ_{xy} y φ_{xy} definidas como:

$$B_x = \frac{2}{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}, \quad B_y = \frac{2}{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}} \quad (5.1-3)$$

$$\mu_{xy} = \frac{4}{\frac{1}{\mu_{i,j}} + \frac{1}{\mu_{i+1,j}} + \frac{1}{\mu_{i,j+1}} + \frac{1}{\mu_{i+1,j+1}}}, \quad \varphi_{xy} = \frac{4}{\frac{1}{\mu_s i,j} + \frac{1}{\mu_s i+1,j} + \frac{1}{\mu_s i,j+1} + \frac{1}{\mu_s i+1,j+1}} \quad (5.1-4)$$

donde ρ es la densidad del material en el punto i,j .

El programa de simulación necesita de diversos parámetros para su funcionamiento, la descripción de estos parámetros se encuentra resumida en la Figura 18. Todas las variables son almacenadas en el área de trabajo de MATLAB para su fácil manipulación.

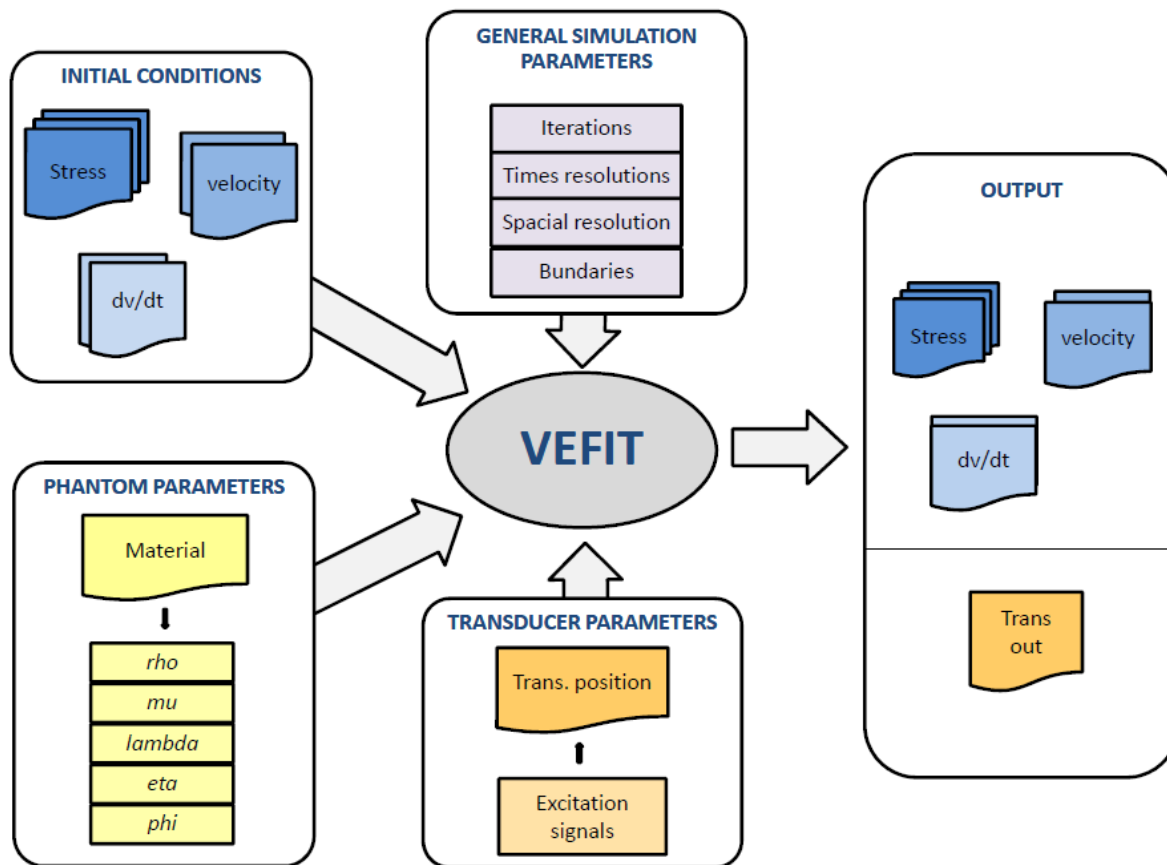


Figura 18 Diagrama de los parámetros de entrada y salida de la simulación.

De acuerdo con el diagrama se los parámetros se pueden clasificar en distintas entradas:

Tabla 1 - Parámetros Generales de Simulación

| Nombre | Unidad | Tipo | Descripción |
|---------------------------|--------|-----------|---|
| <i>Iterations</i> | [-] | uint[1] | Indica el número de pasos de tiempo que la simulación correrá antes de regresar las salidas. |
| <i>Spatial Resolution</i> | [mm] | single[1] | Determina la resolución espacial en milímetros de la maya computacional. |
| <i>Time Resolution</i> | [us] | single[1] | Especifica la resolución temporal en microsegundos. |
| <i>Boundaries</i> | [-] | uint[4] | Especifica el tipo de frontera en el lado especificado, ordenado de forma [superior izquierda inferior derecha] valuado en 0 cero para Absorbente y en 1 uno para Reflectiva. |

La resolución de espacio y tiempo deben ser escogidas cuidadosamente porque deben obedecer la condición de estabilidad de Courant [51]. Es común primero escoger la resolución espacial y de ahí derivar la resolución temporal utilizando el siguiente criterio:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{\Delta x}{c_{max}} \quad (5.1-1)$$

Inclusive cuando el criterio de estabilidad es cumplido, uno debe tener en cuenta que la resolución espacial debe ser lo suficientemente pequeña para proveer una representación correcta de la onda. Un valor típico es trabajar con una décima de la longitud de onda para distancias de propagación pequeñas. Sin embargo para distancias mayores a varias decenas de la longitud de onda pueden ser necesarias resoluciones de hasta una veintena de la longitud de la onda, dependiendo de la precisión requerida.

Tabla 2 - Condiciones Iniciales

| Nombre | Unidad | Tipo | Descripción |
|-------------------------------|-----------------------|---------------|---|
| <i>Stress</i> | [TPa] | single[m n 3] | Contiene los 3 componentes independientes del tensor de tensión [T_{xx} , T_{yy} , T_{xy}] en 2D. |
| <i>Velocity</i> | [mm/us] | single[m n 3] | Contiene las 2 componentes del vector de velocidad (v_x , v_y) en 2D. |
| <i>Derivative of velocity</i> | [mm/us ²] | single[m n 3] | Contiene las 2 componentes del vector de la derivada de la velocidad (dv_x , dv_y) en 2D. |

Las condiciones iniciales normalmente son cero, pero al utilizar el código en manera recursiva, se puede utilizar la salida de manera recursiva para continuar con la simulación en el estado que se había dejado.

Tabla 3 - Parámetros del Phantom

| Nombre | Unidad | Tipo | Descripción |
|-----------------|----------------------|------------|---|
| <i>Material</i> | [-] | uint[m n] | Esta matriz almacena el índice del tipo de material al cual pertenece cada celda del phantom. |
| <i>rho</i> | [g/mm ³] | single[nM] | Densidad del material. |
| <i>lambda</i> | [TPa] | single[nM] | Constante Lamé para materiales isotrópicos. |
| <i>mu</i> | [TPa] | single[nM] | Constante Lamé para materiales isotrópicos. |
| <i>eta</i> | [TPa*s] | single[nM] | Constante Viscosa para materiales isotrópicos. |
| <i>phi</i> | [TPa*s] | single[nM] | Constante Viscosa para materiales isotrópicos. |

Cada material es indexado por la matriz Material, y deberá contener sus parámetros definidos en las matrices de parámetros las cuales deben contener el mismo número de materiales que los indexados.

Cuando se usan materiales heterogéneos de manera aleatoria, es posible utilizar una desviación estándar y crear un parámetro para cada material.

Tabla 4 - Parámetros del Transductor

| Nombre | Unidad | Tipo | Descripción |
|---------------------------|---------|--------------------|--|
| <i>Trans. Position</i> | [-] | uint[m n] | Indica el índice del transductor en cuestión, varias celdas pueden contener el mismo índice y la salida del transductor será promediada utilizando las celdas que forman el transductor. |
| <i>Excitation Signals</i> | [mm/us] | single[iter nTr 2] | Las señales de excitación para cada transductor se describen en este vector para cada instante de la simulación. |

Se debe tener cuidado al definir las señales de excitación ya que son cantidades vectoriales y por lo tanto deben definirse dependiendo la dirección normal de transductor.

5.2 Medios Homogéneos

Una de las metodologías seguidas para validar las simulaciones fue el de utilizar un medio homogéneo junto a un arreglo lineal de elementos para generar el patrón de interferencia que se muestra en la parte superior de la figura 19, así como perfiles axiales y laterales del mismo. Este tipo de patrones de interferencia se encuentra bien documentado en la literatura [31] y concuerdan con los obtenidos en la simulación.

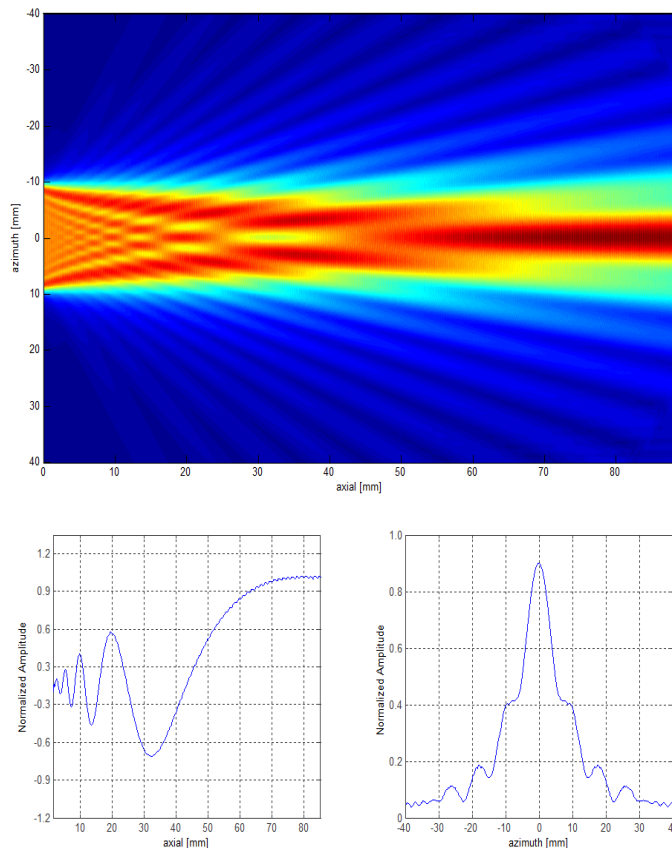


Figura 19 Patrón de Interferencia de un arreglo lineal de transductores y sus cortes axiales y laterales.

El arreglo lineal simulado constaba de 16 elementos, con un tamaño por elemento de 1 mm, espaciado entre elemento de 0.2mm y fue excitado con una onda sinodal continua a una frecuencia de 1 MHz al mismo tiempo todos los elementos. El medio simulado es homogéneo y sin pérdidas con una velocidad de propagación de 1500 m/s con una dimensión de 80 mm x 80 mm.

5.3 Medios Heterogéneos

La simulación para medios heterogéneos constituyó de un phantom muy simple, para permitir la fabricación de un phantom experimental, descrito en la sección 5.2, para el cual se simuló un arreglo lineal de 64 elementos con una distancia inter-elemento de 0.3mm y una frecuencia de 5 MHz en transmisión. El phantom digital utilizado contiene dispersores colocados a distintas distancias como se observa del lado izquierdo de la Figura 20; la distancia entre los elementos laterales es de 4 a 1 mm respectivamente, y la distancia entre los elementos diagonales es de 1 mm. La velocidad del medio es de 1540 m/s.

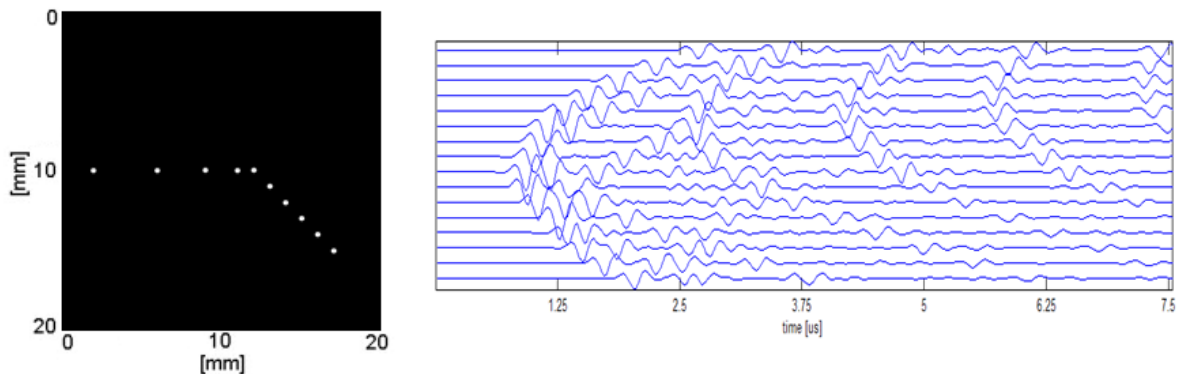


Figura 20 (Izq) Phantom Digital simulado, (Der) Señales de RF simuladas.

Se realizaron las simulaciones de 64 emisiones, una emisión por cada elemento del arreglo y recepción simultánea de todos los canales, una muestra de las señales RF simuladas se muestra a la derecha de la Figura 20. Las señales de RF recolectadas por los transductores simulados se utilizaron para la formación de una imagen mediante la Técnica de Enfocado por Apertura Sintética descrita en la sección III-2.2.

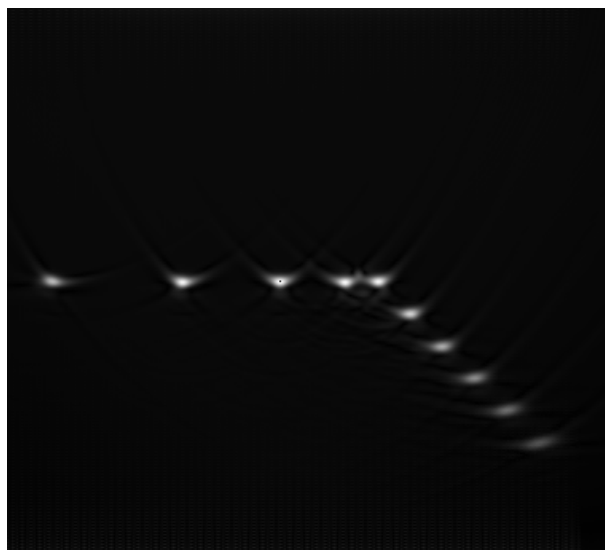


Figura 21 Imagen formada mediante apertura sintética de datos simulados.

6 Descripción de los experimentos

6.1 Introducción

Todos los datos experimentales fueron adquiridos en la Universidade Federal do Rio de Janeiro utilizando un equipo ultrasónico comercial SonixMDP (Ultrasonix Medical Corp., Vancouver, BC, Canada). El equipo fue utilizado en conjunto con un transductor lineal modelo L14-5/38. El equipo SonixMDP contiene 256 canales de transmisión(128 para disparos positivos y negativos) y 64 canales de recepción. El equipo fue programado manualmente utilizando una librería de desarrollo de software (TEXO SDK, v10.6, Ultrasonix Medical Corp., Vancouver, BC, Canada).

Para el uso de esta librería se desarrollo una interfaz gráfica, véase figura 22, que permitiera interactuar con todos los controles a bajo nivel de la formación del ultrasonido para generar secuencias personalizadas y adquirir las señales RF antes del proceso de formado de haz. Se programó el equipo Ultrasonix para adquirir los datos a una frecuencia de muestreo de 40MHz con 16bits. La ganancia se mantuvo constante, siendo ésta conocida como curva de compensación de ganancia temporal (TGC).

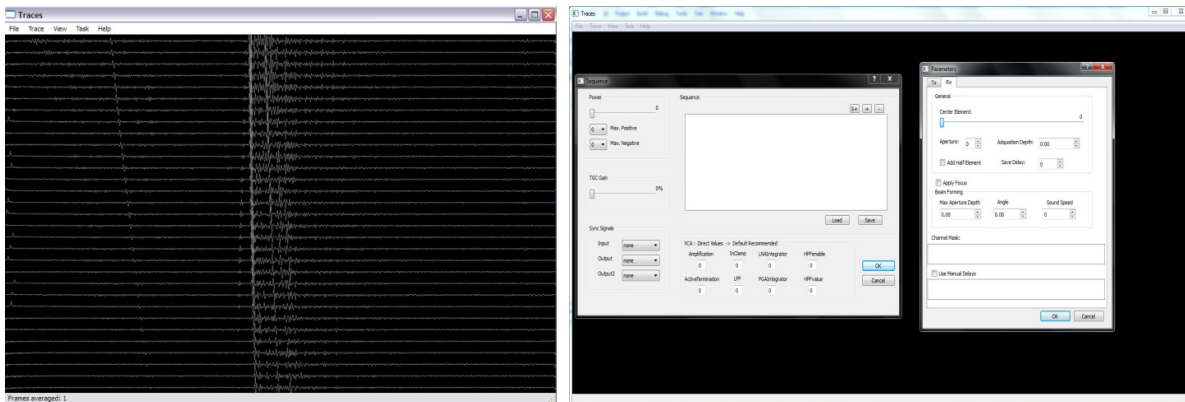


Figura 22 Fotografías de la Interfaz Grafica diseñada. (Izq) adquisición las señales y (Der) Configuración de parámetros

6.2 Enfocado por apertura sintética

El desarrollo experimental se realizó con un transductor modelo L14-5/30 marca Ultrasonix el cual consiste en una arreglo lineal de 128 elementos, de los cuales únicamente se utilizaron los 64 elementos centrales debido a las dimensiones del phantom, con una separación consecutiva de 0.3048 mm y una frecuencia de operación de 5 MHz.

La ganancia y la amplitud se mantuvieron relativamente constantes, siendo ésta última en base a la curva de compensación de ganancia temporal (TGC). Los datos se adquirieron a una tasa de 40 MHz con un sistema de ultrasonido marca ULTRASONIX®.

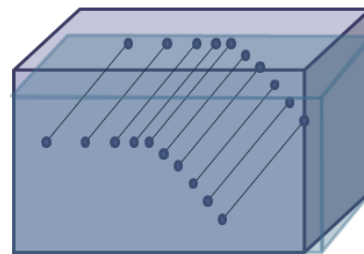


Figura 23 Diagrama de los parámetros de entrada y salida de la simulación.

Por otro lado se construyó un phantom que consiste en 10 cables con espesor de 0.3 mm, distribuidos de manera que fueran lo mas similar al phantom digital (ver figura 23). El medio de transmisión fue agua la cual tiene una velocidad de propagación de 1500 m/s a 26 grados C.

La simulación del arreglo de 64 elementos a través de agua con dispersores emulando cables resulta muy similar a las señales adquiridas experimentalmente; la figura 24 muestra una comparativa de 16 canales normalizados entre las simulaciones y los resultados experimentales. Existe una pequeña diferencia entre las señales que es debido a la geometría del arreglo experimental que no fue exactamente el mismo debido a dificultades técnicas.

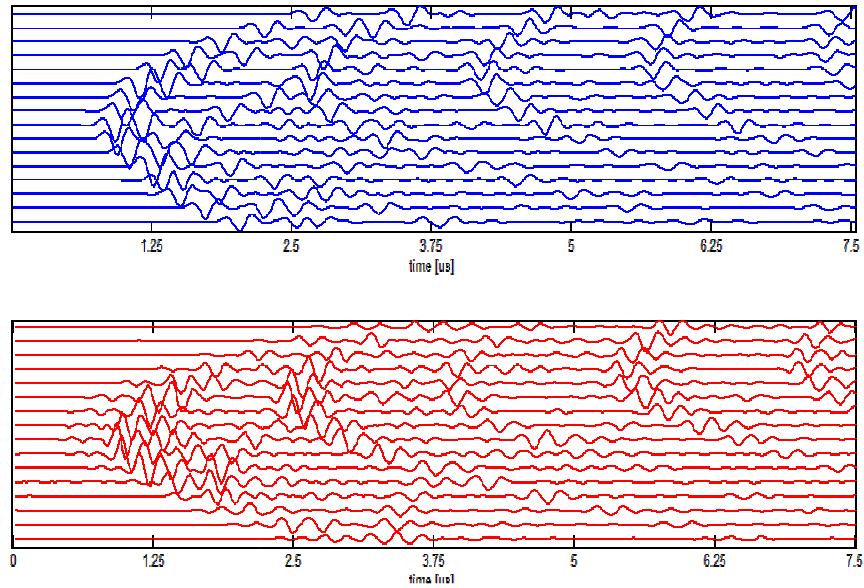


Figura 24 Señales RF simuladas (Arriba) y Señales RF experimentales (Abajo)

El proceso de formación de imagen tanto simulada como experimental se llevó a cabo mediante la manipulación de los tiempos de retraso en el formador de haz, ver figura 25, utilizando una emisión por cada elemento y utilizando todos los elementos en recepción.

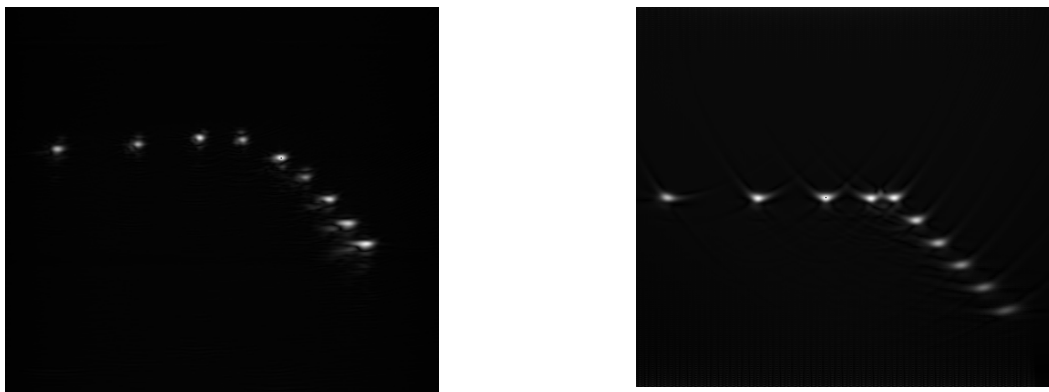


Figura 25 Imágenes formadas del phantom de hilos; (izq) Experimental y (der) Simulada.

De la misma manera se utilizó el transductor modelo L14-5/30 para realizar otros dos experimentos, en esta ocasión se utilizaron 128 elementos para formar la imagen; en el primer experimento se utilizó un *phantom* homogéneo que contenía 8 alambre a distancias menores a 2mm, ver figura 26-(a,b), y en el segundo se utilizó una muestra de carne sumergida en agua, ver figura 26-(c,d).

Para ambos experimentos se tomaron dos imágenes; la primera fue obtenida a través del equipo ultrasónico comercial SonixMDP en su modo normal de operación y la segunda fue formada a partir de la técnica de enfocado por apertura sintética.

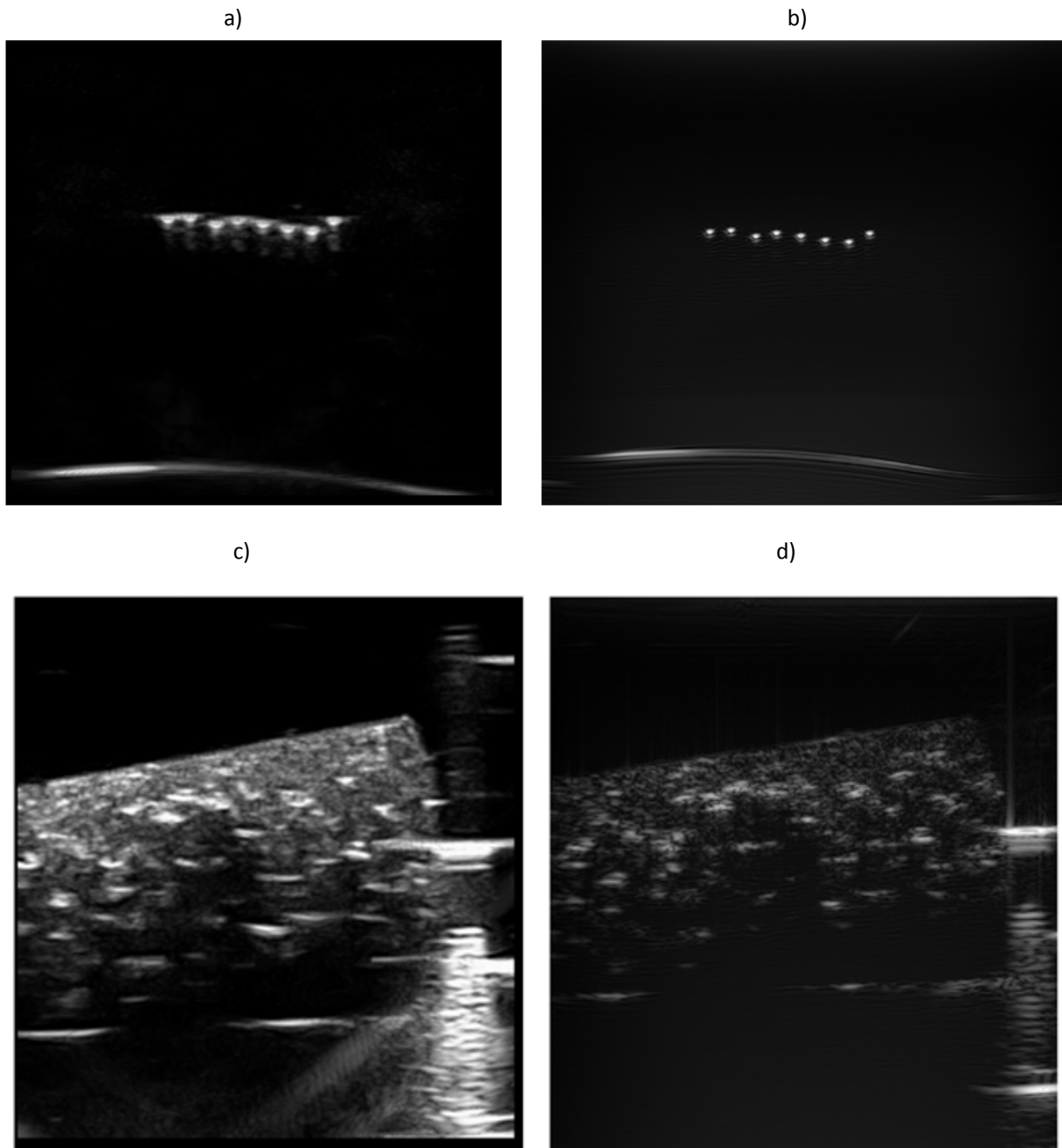


Figura 26 Imágenes formadas; de un phantom de PVC con 8 hilo (a)Técnica clásica y (b) SAFT y de carne sumergida en agua (c)Técnica clásica y (d) SAFT

6.3 Enfocado por apertura sintética en medios heterogéneos

La metodología experimental en esta sección fue muy similar a la realizada en la sección anterior con un transductor modelo L14-5/30 marca Ultrasonix el cual consiste en una arreglo lineal de 128 elementos, a una frecuencia central de 5MHz.

Se construyó un phantom de dos capas, véase figura 27; la capa superior se encuentra formada por policloruro de vinilo comúnmente conocida como PVC teniendo una velocidad de propagación del sonido de 1450 m/s y la capa inferior se encuentra formada por Silicón el cual tiene una velocidad de propagación del sonido de 1050 m/s. Embebidos en el phantom de manera diagonal se encuentran 9 alambres de 0.3mm de diámetro distribuidos homogéneamente excepto el último que se encuentra a una distancia menor.



Figura 27 Fotografía del phantom bicapa con hilos.

Tres imágenes fueron obtenidas del mismo phantom ; la primera obtenida a través del equipo ultrasónico comercial SonixMDP en su modo normal de operación (véase figura 28), la segunda fue formada a través de la técnica tradicional de enfocado sintético (véase figura 29) y la última fue formada utilizando el mapa de velocidad del phantom para compensar los tiempos de vuelo (véase figura 30).

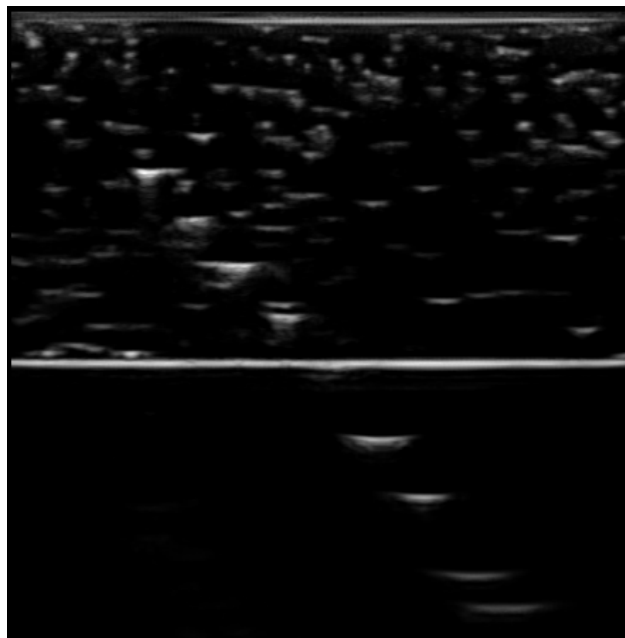


Figura 28 Imagen formada por equipo SonixMDP.

El phantom presenta dispersores en la parte superior ya que en el proceso de fabricación se formaron burbujas de aire dentro del PVC, pero son claramente visibles los alambres además del límite entre las interfaces. Se observa una mejora en el enfocado de la parte inferior, véase figura 30, en comparación con las otras dos imágenes formadas, esto es debido a que en esa imagen se tomo en cuenta la heterogeneidad del cuerpo para su formación.

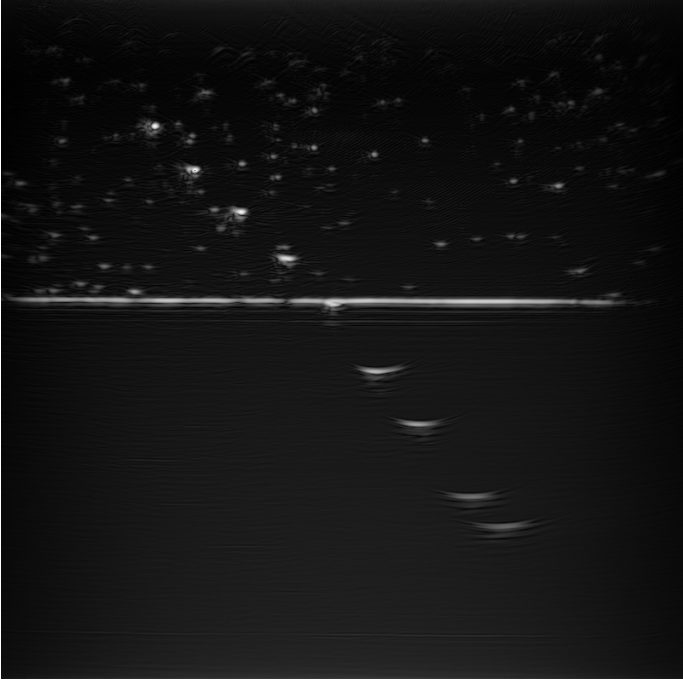


Figura 29 Imagen formada mediante técnica SAFT

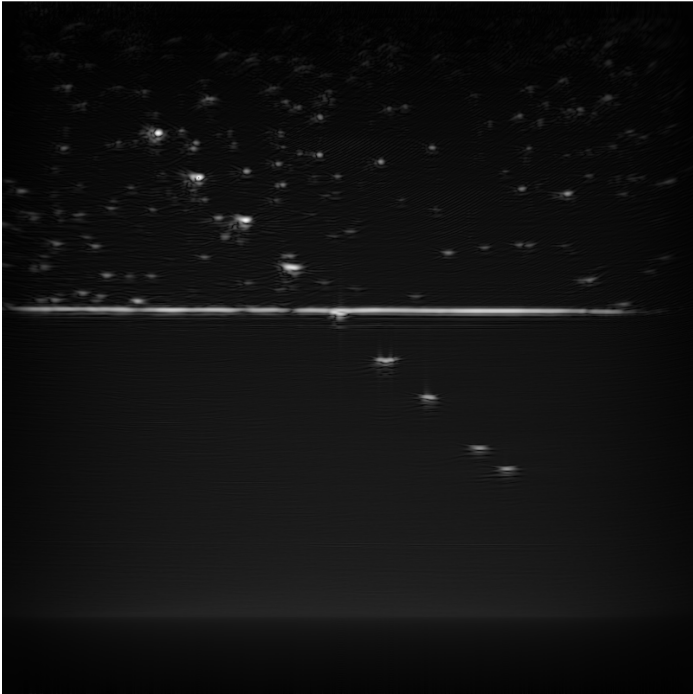


Figura 30 Imagen formada mediante técnica SAFT-Compensada

V Conclusiones y Trabajo Futuro

El modelado computacional mediante la técnica de integración finita permite que se repliquen fenómenos de propagación ultrasónica que otros simuladores no tienen, tales como los efectos de dispersores múltiples y el efecto de sombra.

Debido a que la técnica de modelado se basa en las ecuaciones que gobiernan la propagación de la onda la veracidad de la simulación depende primordialmente de la correcta descripción del medio mediante ecuaciones constitutivas; lo más cercano estas ecuaciones constitutivas se encuentren mayor será la veracidad de la simulación. En este trabajo se demostró mediante la validación experimental que el código desarrollado para la simulación de fenómenos de propagación acústica era correcto pero para lograr tal resultado debían tomarse en cuenta otros factores en la simulación.

Estos otros factores que afectan a la simulación son efectos debidos a la discretización de ecuaciones continuas, lo cual puede provocar problemas de estabilidad y de error numérico. En el simulador desarrollado se notó que para distancias de decenas de longitud de onda era necesaria una resolución espacial de al menos 20 veces menor que la longitud de onda, lo que provocaba que el costo computacional de la simulación fuera alto y demorasen mucho en ejecutarse.

Por lo tanto es necesario el desarrollo del código en paralelo para reducir el costo computacional de las simulaciones y lograr un tiempo aceptable de simulación, permitiendo de esta manera que las simulaciones sean una solución atractiva para desarrollar experimentos numéricos que con llevan un costo más bajo.

Otro factor a mejorar es que para el modelado en tejidos biológicos es necesario no sólo considerar la elasticidad sino también la viscosidad, ya que los tejidos se comportan como sólidos visco-elásticos complejos, existen diversas maneras de modelar este comportamiento, uno de los más sencillos es el modelo de Voight sin embargo, describe únicamente una relación cuadrática de la ley de absorción la cual no es válida para tejidos biológicos.

Debido a esto será necesario desarrollar un modelo que tome en cuenta esta relación no cuadrática de la ley de absorción; sin dejar de tomar en cuenta la no linealidad del medio. Estas nuevas consideraciones deberán ser ingresadas en las ecuaciones constitutivas del medio.

En el aspecto de formación de imagen la técnica de enfocado por apertura sintética ha sido adoptada en equipos ultrasónicos comerciales. La versatilidad de la técnica produce mejoras en la calidad de la imagen, altas tasas de cuadros por segundo y una reducción del costo del equipo.

En la modificación presentada en este trabajo fue posible observar que cuando se describe correctamente el medio en cuestión se puede obtener una mejora considerable en la imagen. La técnica para medios heterogéneos no está limitada a capas co-planares sino debido a que el algoritmo utilizado calcula el avance del frente de onda pixel a pixel se pueden utilizar geometrías complejas.

De la misma manera es necesario realizar una investigación de hasta qué nivel de heterogeneidad el costo computacional es justificado durante el proceso de formación de imagen. Otro aspecto a abordar en trabajo futuro es el del cálculo de un mapa de velocidad para realizar la compensación de la heterogeneidad de un medio desconocido.

VI Bibliografía

- [1] J. A. Jensen. (1996) Field: A program for simulating ultrasound systems. *10th Nordic-Baltic Conference on Biomedical Imaging*, Vol. 4, No 1, pp. 351–353.
- [2] P. Gerstoft and H. Schmidt. (1991) A boundary element approach to ocean seismoacoustic facet reverberation. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 89, No 4, pp. 1629–1642.
- [3] J. A. Fawcett. (1996) Acoustic scattering from cylindrical objects embedded between two half-spaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 100, No 5, pp. 3053–3060.
- [4] R. Lim. (1998) Acoustic scattering by a partially buried three-dimensional elastic object, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 104, No 2, pp. 769–782.
- [5] M. Zampolli, A. Tesei, G. Canepa and O.A. Godin. (2008) Computing the far field scattered or radiated by objects inside layered fluid media using approximate Green's functions. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 123, No 6, pp. 4051–4058.
- [6] T.E. Giddings and J.J. Shirron. (2008) A model for sonar interrogation of complex bottom and surface targets in shallow-water waveguides, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 123, No 4, pp. 2024–2034.
- [7] D.S. Burnett. (1988) *Finite Element Analysis : From Concepts to Applications*. Addison Wesley, Reading, MA.
- [8] P. Fellingner, R. Marklein, K. J. Langenberg, and S. Klaholz. (1995) Numerical Modeling of Elastic Wave Propagation and Scattering with EFIT – Elastodynamic Finite Integration Technique. *Wave Motion*, Vol. 21, pp. 47–66.
- [9] F. Schubert, A. Peiffer, B. Köhler and T. Sanderson. (1998) The elastodynamic finite integration technique for waves in cylindrical geometries. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 104, No 5, pp. 2604–2614.
- [10] Q.H. Liu, E. Schoen, F. Daube, C. Randall, H.L. Liu and P. Lee. (1996) A three-dimensional finite difference simulation of sonic logging. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 100, No 1, pp. 72–79.
- [11] T. Weiland, M. Timm and I. Munteanu. (2008) A practical guide to 3-D simulation, *IEEE Microwave Magazine*, Vol. 9, No 6, pp. 62–75.
- [12] M. O'Donnell and L. J. Thomas. (1992) Efficient synthetic aperture imaging from a circular aperture with possible application to catheter-based imaging. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 39, pp. 366–380.
- [13] M. Karaman, P. C. Li and M. O'Donnell. (1995) Synthetic aperture imaging for small scale systems. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 42, pp. 429–442.
- [14] K. L. Gammelmark and J. A. Jensen. (2003) Multielement synthetic transmit aperture imaging using temporal encoding. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 22, No 4, pp. 552–563.
- [15] Y. Takeuchi. (1979) An investigation of a spread energy method for medical ultrasound systems - part one: theory and investigations. *Ultrasonics*, Vol. 17, No 4, pp. 175–182.
- [16] M. O'Donnell. (1992) Coded excitation system for improving the penetration of real-time phased-array imaging systems. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 39, pp. 341–351.
- [17] T. X. Misaridis and J. A. Jensen. (1999) An effective coded excitation scheme based on a predistorted FM signal and an optimized digital filter. *Proceedings of Ultrasonics Symposium*, Vol. 2, pp. 1589–1593.
- [18] K. L. Gammelmark. (2004) *Improving the Image Quality of Synthetic Transmit Aperture Ultrasound Images: Achieving Real-Time In-Vivo Imaging*. Ph.D Thesis, Tech. Univ. Denmark.
- [19] K.J. Langenberg, R. Marklein and K. Mayer. (2002) Applications to nondestructive testing with ultrasound. *Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, Vol. 1, pp. 594–617.
- [20] K. Helbig. (1994) *Foundations of Anisotropy for Exploration Seismics Handbook of Geophysical Exploration*. Pergamon, Trowbridge.
- [21] D. Royer and E. Dieulesaint. (2000) *Elastic Waves in Solids*. Springer, Berlin.
- [22] V. Cerveny. (2001) *Seismic ray theory*, Cambridge University Press.
- [23] M. Spies and W. Jager. (2003) Synthetic aperture focusing for defect reconstruction in anisotropic media. *Ultrasonics*, Vol. 41, pp. 125–131.
- [24] A. Shlivinski and K.J. Langenberg. (2007) Synthetic Defect imaging with elastic waves in inhomogeneous–anisotropic materials with composite geometries. *Ultrasonics*, Vol. 46, pp. 89–104.
- [25] J. W. S. Rayleigh. (1877) *The theory of sound*. Macmillan and co, London.
- [26] M.V. de Hoop and N. Bleistein. (1997) Generalized Radon transform inversion for reflectivity in anisotropic elastic media. *Inverse Problems*, Vol. 13, pp. 669–690.
- [27] R. Burridge, M.V. de Hoop, D. Miller and C. Spencer. (1998) Multiparameter inversion in anisotropic elastic media. *Geophysical Journal International*, Vol. 134, pp. 757–777.
- [28] J. A. Sethian. (1996) A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 93, pp. 1591–1595.

- [29] A. D. Pierce. (1989) *Acoustics, An Introduction to Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America, New York.
- [30] J.W. Goodman. (2004) *Introduction to Fourier Optics*. Roberts & Company Publishers.
- [31] T. L. Szabo. (2004) *Diagnostic Ultrasound Imaging: Inside Out*, Elsevier
- [32] J. A. Jensen. (1999) *Linear description of ultrasound imaging systems*. Technical Report, Technical University of Denmark.
- [33] J. A. Jensen. (1999) A new Calculation Procedure for Spatial Impulse Responses in Ultrasound. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 105, pp. 3266-3274.
- [34] Robert J. McGough. (2004) Rapid calculations of time-harmonic nearfield pressures produced by rectangular pistons. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 115, pp. 1934-1941.
- [35] An Hoai Pham. (2012) Simulation of shadowing effects in ultrasound imaging from computed tomography images. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 132, pp.487-497.
- [36] John T. Katsikadelis. (2002) *Boundary Elements Theory and Applications*, Elsevier, Oxford.
- [37] L. J. Bond, M. Punjani, and N. Saffariis. (1998) Ultrasonic wave propagation and scattering using explicit finite difference methods. *Mathematical Modelling in Non-Destructive Testing*, pp. 81–124.
- [38] Courant, R. Friedrichs and K. Lewy. (1928) *On the partial difference equations of mathematical physics*, AEC Research and Development Report, New York.
- [39] T. Weiland. (1977) A Discretization Method for the Solution of Maxwell's Equations for Six-Component Fields. *Journal of Electronic Communication*, Vol. 31, No 3, pp. 116-120.
- [40] C.W. Sherwin, JP Ruina, and RD Rawcliffe. (1962) Some early developments in synthetic aperture radar systems. , *IRE Transactions on Military Electronics*, Vol. 1051, No 2, pp. 111-115.
- [41] C.E. Burckhardt, P.-A. Grandchamp, and H. Hoffmann. (1974) An experimental 2mhz synthetic aperture sonar system intended for medical uses. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, Vol. 21, No 1, pp. 1 - 6.
- [42] Milen Nikolov and Vera Behar. (2005) Analysis and Optimization of Medical Ultrasound Imaging Using the Effective Aperture Approach. *Cybernetics and information technologies*, Vol. 5, No 2, pp. 53-68.
- [43] J. A. Jensen, S. I. Nikolov, K. L. Gammelmark, and M. H. Pedersen. (2006) Synthetic aperture ultrasound imaging. *Ultrasonics*, Vol. 44, pp. 5-15.
- [44] Fung YC. (1993) *Biomechanics. Mechanical properties of living tissue* , Springer-Verlag, NY.
- [45] R. Hannemann. (2002) *Modeling and Imaging of Elastodynamic Wave Fields*, in: *Inhomogeneous Anisotropic Media*. Ph.D Thesis, Universität Kassel.
- [46] J. E. Vidale. (1988) Finite-difference calculation of travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 78, pp. 2062-2076.
- [47] J. A. Sethian. (1996) *Level set method*. Cambridge University Press, Berkeley, California.
- [48] J. A. Sethian and A. M. Popoviciz. (1999) 3-d travelttime computation using the fast marching method. *Geophysics*, Vol. 64, no. 2, pp. 516-523.
- [49] J.A Barentzen. (2001) *On the Implementation of Fast Marching Methods*, Technical Report, Technical University of Denmark.
- [50] Martin E. Anderson, Gregg E. Trahey. (2006) *A seminar on k-space applied to medical ultrasound*, Technical Report, Duke University.
- [51] J. Deibele, T. A. Tangen, T. F. Johansen, and S.E. Maso (2009) *Sonix RP receive chain modification*. Technical Report, Ultrasonix Research Forums.