



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA - CONTROL

CONTROL INTEGRAL DISCONTINUO PARA
SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
CÉSAR AGUSTÍN ZAMORA SALAZAR

TUTOR PRINCIPAL
JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. LUIS A. ALVAREZ ICAZA LONGORIA

Secretario: Dra. MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE

Vocal: Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

1er. Suplente: Dr. LEONID FRIDMAN

2o. Suplente: Dr. FERNANDO CASTAÑOS LUNA

Lugar donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:

Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

FIRMA

A mis padres

Justa Salazar M. y Agustín Zamora M.

y hermanos

Rocio y Javier

por ser mi mayor motivación en la vida.

Agradecimientos

A la *Universidad Nacional Autónoma de México* y al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*.

A los profesores del Colegio de Control Automático de la UNAM, especialmente al *Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez*, por todo el apoyo y conocimiento que hizo posible la realización de esta tesis. Y al *Dr. Luis Alvarez Icaza Longoria* por todo el apoyo de la coordinación.

A mis *padres y hermanos*, por su apoyo incondicional y de toda la vida, a ustedes les debo todo.

A *Gabriela Montserrat Martínez García*, por todo lo compartido en estos últimos años.

A mis *amigos*, por su paciencia y motivación.

A la BBC, especialmente a *Úrsula Flores, Karla García, Jared Rojas, Miguel Mayorga, Daniel Castro, Rafael Lugo y Luis Canales*, por su amistad y por todo lo compartido durante esta etapa.

Índice general

Índice de figuras	VII
1. Introducción	2
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Estado del Arte	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Preliminares	5
1.4.1. Homogeneidad Ponderada	5
1.4.2. Estabilidad en tiempo finito	6
1.4.3. Desigualdad de Young	7
1.4.4. Cambio de notación	7
1.5. Organización de la tesis	8
2. Control Integral Discontinuo	9
2.1. Motivación	9
2.2. El Control Integral Discontinuo	13
2.2.1. Seguimiento	16
3. Estabilidad del Control Integral Discontinuo	21
3.1. Caso Nominal	22
3.1.1. Positividad Definida	22
3.1.2. Negatividad Definida	24
3.1.3. Un caso particular	29
3.1.4. Factibilidad de la Función de Lyapunov	30
3.2. Caso Perturbado	31
3.3. Convergencia en Tiempo Finito	34
3.4. Escalamiento de las ganancias	34
3.5. Métodos de diseño de las ganancias del algoritmo	36
3.5.1. Diseño de las ganancias a partir del caso perturbado	37
3.5.2. Diseño de las ganancias a partir del caso nominal	37
3.6. Resumen del capítulo	40
4. Conclusiones	42

A. Homogeneidad del Control Integral Discontinuo y de la función de Lyapunov	44
A.1. Homogeneidad del Control Integral Discontinuo	44
A.2. Homogeneidad de la función de Lyapunov	45
B. Prueba del Lema 1	47
C. La función $\psi(\alpha, \lambda)$	52
Bibliografía	55

Índice de figuras

1.1. Desplazamiento de un vehículo/masa	3
2.1. Respuesta del sistema con el control integral y $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$	10
2.2. Respuesta del Control Twisting con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$	11
2.3. Señal del control del algoritmo Twisting para $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$	11
2.4. Respuesta del control lineal + discontinuidad con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$	12
2.5. Respuesta del Super-Twisting con $\rho(t) = 0.5 \sin(t) + 0.25 \sin(2t)$	13
2.6. Señal del control Super-Twisting con $\rho(t) = 0.5 \sin(t) + 0.25 \sin(2t)$	14
2.7. Respuesta del Control Integral Discontinuo con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$	16
2.8. Señal de control del Control Integral Discontinuo con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$	16
2.9. Salida y vs señal de referencia con diferenciador	18
2.10. Señal de control para el seguimiento con diferenciador	18
2.11. Salida y vs señal de referencia sin diferenciador	19
2.12. Señal de control para el seguimiento sin diferenciador	19
3.1. Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 1 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$	31
3.2. Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$	32
3.3. Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 3 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$	32
3.4. Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 1 de la tabla 3.2 .	38
3.5. Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.2 .	39
3.6. (a) Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 1$ y $L = 1$, (b) Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 1$ y $L = 1.5$,	39
3.7. Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 4$ y $L = 2$	40

Resumen

En la actualidad existe una gran variedad de sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, biológicos, entre otros, que pueden ser modelados por un sistema de segundo orden, pero en donde a pesar de los avances en las técnicas de modelado se pueden presentar incertidumbres o perturbaciones.

En este trabajo de tesis se propone un algoritmo de control para sistemas de segundo orden en los que se tienen incertidumbres o perturbaciones Lipschitz respecto al tiempo, el esquema propuesto puede ser visto como una extensión del *Algoritmo Super-Twisting*, del cual conserva propiedades como la homogeneidad y robustez, además de presentar convergencia en tiempo finito mediante una señal de control continua puede ser aplicado en el seguimiento de señales variantes en el tiempo.

Se propone también una función de Lyapunov que demuestra la convergencia del algoritmo, y de la cual se derivan dos métodos de diseño de las ganancias.

Capítulo 1

Introducción

Históricamente, una de las principales motivaciones en el análisis y control de sistemas fue el estudio del movimiento de un cuerpo con un grado de libertad sujeto a una fuerza y en presencia tanto de fricción seca como viscosa. La dinámica de dicho cuerpo se puede expresar en un sistema de segundo orden. De manera general existen varios sistemas mecánicos, eléctricos, biológicos, químicos, entre otros, que son modelados con un sistema de segundo orden, motivo por el cual este trabajo se enfoca en sistemas de segundo orden, pero sin perder de vista la posibilidad de extender los resultados obtenidos a sistemas de mayor orden.

1.1. Planteamiento del Problema

Cuando un ingeniero tiene la tarea de diseñar un controlador para una planta, lo primero que requiere es el modelo de dicha planta. A pesar de que en la actualidad se cuenta con diferentes técnicas y/o métodos para modelar, probablemente el modelo obtenido tendrá discrepancias con la planta. Estas discrepancias generalmente provienen de dinámicas no modeladas, parámetros desconocidos o perturbaciones externas.

Para abordar este problema considere, como ejemplo ilustrativo, un vehículo que se desplaza en una dimensión. En este caso se tienen distintos parámetros desconocidos que influyen en el movimiento del vehículo, como la cantidad de pasajeros, el coeficiente de fricción entre las llantas y el pavimento, el cual es variante respecto al tiempo y a las condiciones ambientales, la densidad del aire, entre otras. Estas incertidumbres paramétricas y pertur-

baciones externas impiden obtener un modelo preciso del vehículo, por lo que, considerando a los parámetros como concentrados, se puede modelar el vehículo como una masa que se desplaza en una dimensión, ver figura 1.1.

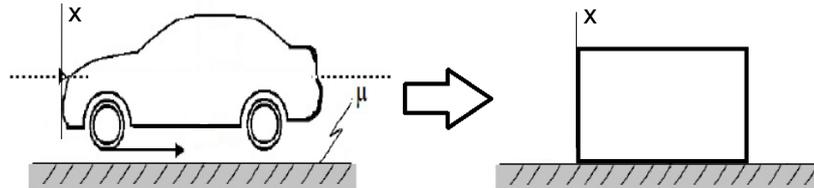


Figura 1.1: Desplazamiento de un vehículo/masa

Se obtiene una descripción en variables de estado de la dinámica de la masa introduciendo una variable para la posición y otra para la velocidad $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x, t) + u\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde u es la acción de control y $f(x, t)$ representa las incertidumbres y perturbaciones externas. Y se asume que $f(x, t)$ es Lipschitz respecto al tiempo, en donde se conoce la cota de la derivada temporal de $f(x, t)$, es decir, $|\dot{f}(x, t)| < \Delta$, con Δ conocida.

Considerando la posición x_1 como la salida del sistema, se desea llevar el vehículo en tiempo finito a una posición deseada \bar{x}_1 , sin pérdida de generalidad $\bar{x}_1 = 0$, a pesar de las incertidumbres y/o perturbaciones $f(x, t)$ y mediante una señal de control continua para evitar problemas de implementación debido a restricciones en los actuadores. En adelante se referirá a la función desconocida $f(x, t)$, que representa las incertidumbres y perturbaciones, como perturbación del sistema. Los resultados presentados en este trabajo se pueden aplicar a cualquier sistema de segundo orden, con grado relativo $n = 2$ considerando a x_1 como la salida y con perturbaciones o incertidumbres Lipschitz respecto al tiempo acopladas al control.

1.2. Estado del Arte

El diseño de esquemas de control que estabilicen robustamente el sistema (1.1), es decir a pesar de la perturbación $f(x, t)$, es uno de los problemas clásicos de control.

Uno de los algoritmos de control robusto más populares es el control integral [Khalil, 1996] [Kokotovic, 1992], el cual es una retroalimentación proporcional e integral de los estados. Se ha demostrado que el control integral presenta un buen desempeño cuando es aplicado a sistemas con perturbaciones constantes. Debido a que $f(x, t)$ es desconocida y variante en el tiempo, un control integral no podrá estabilizar robustamente el sistema (1.1).

Se ha probado que la estabilización de sistemas con este tipo de perturbaciones no es fácil de lograr a través de controladores continuos, mientras que con el uso de controladores discontinuos sí es posible estabilizar el sistema (1.1) cuando se tienen perturbaciones acotadas no desvanecientes en el origen y variantes en el tiempo [V. Utkin y Shi, 2009].

Algunos de los algoritmos discontinuos más comunes que pueden ser aplicados a plantas bajo condiciones de incertidumbre o perturbaciones son los controladores por modos deslizantes de primer orden [V. Utkin y Shi, 2009], [Davila et al., 2006]. La principal característica de estos controladores es que las trayectorias son llevadas a una superficie de deslizamiento, en donde la conmutación del control es usada para mantener las trayectorias en dicha superficie [V. Utkin y Shi, 2009]. A pesar de que esta conmutación a altas frecuencias, conocida como *chattering*, es teóricamente deseable desde el punto de vista de robustez, en la práctica representa un problema de implementación debido a restricciones físicas de los actuadores. Para evitar este problema se empezó a trabajar en los “modos deslizantes de alto orden” [Fridman y Levant, 2002]. El algoritmo Super-Twisting (STA) es un controlador que contiene discontinuidades que aparecen en su derivada de alto orden, por lo que la señal de control se vuelve continua [Levant, 1993], [Moreno y Osorio, 2012], [Moreno, 2008]. El STA prácticamente resuelve el problema de *chattering* pero es un algoritmo diseñado para sistemas de primer orden con grado relativo 1, que no es la clase de sistemas que se tienen como objetivo en este trabajo.

Una alternativa de control por modos deslizantes para sistemas de segundo orden es

el algoritmo Twisting [Levant, 2007], que logra resolver el problema de estabilización robusta y en tiempo finito, pero como consecuencia vuelve a aparecer el problema de *chattering*. También existe el controlador por modos deslizantes de tercer orden [Fridman y Levant, 2002], pero para implementar controladores de modos deslizantes de tercer orden es necesario conocer \dot{x}_2 , esto implica tener un conocimiento anticipado de la perturbación, lo cual no se considera en este caso.

1.3. Objetivos

Los algoritmos que se mencionan en la sección anterior no logran resolver el problema de estabilización robusta en tiempo finito con una señal de control continua, por tal motivo en este trabajo de tesis se tienen los objetivos

- Proponer un algoritmo que estabilice robustamente al sistema (1.1), con convergencia en tiempo finito y mediante una señal de control continua, y probar su estabilidad a través de una función estricta de Lyapunov.
- Proponer una metodología que permita diseñar las ganancias del algoritmo propuesto.

1.4. Preliminares

1.4.1. Homogeneidad Ponderada

La homogeneidad es una propiedad que caracteriza al algoritmo propuesto en esta tesis, y está definida como

Definición 1. [Baccioti y Rosier, 2005] *Elíjase un conjunto de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en \mathbb{R}^n . Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una n -tupla de números reales positivos, llamados pesos de las coordenadas.*

- La dilatación $(d_{k>0}^r)$ (asociada a r) se define como

$$d_{k>0}^r(x) = (k^{r_1}x_1, \dots, k^{r_n}x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k > 0$$

- Se dice que una función $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es homogénea de grado δ_V ($\delta_V \in \mathbb{R}$) si

$$V(d_k^r(x)) = k^{\delta_V} V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k > 0$$

- Se dice que un campo vectorial $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ es homogéneo de grado δ_f ($\delta_f \in \mathbb{R}$) si

$$f_i(d_k^r(x)) = k^{\delta_f + r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k > 0, \quad i = 1 \dots n.$$

Además, se sabe que para un sistema lineal con un punto de equilibrio asintóticamente estable existe una función estricta de Lyapunov con forma cuadrática. En el caso de sistemas homogéneos existen funciones estrictas de Lyapunov homogéneas [Bacciotti y Rosier, 2005].

1.4.2. Estabilidad en tiempo finito

Considere que el sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

tiene un punto de equilibrio global y asintóticamente estable en $x = 0$ y cualquier trayectoria alcanza este punto en tiempo finito, además suponga

1. f es un campo vectorial bien definido en la vecindad de 0
2. el sistema (1.2) posee solución única hacia adelante en el tiempo, esto es, si dos soluciones concuerdan en algún tiempo t_0 , entonces, concorderán en cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Denote $\varphi(t, x)$ como el mapeo de flujo, el cual está continuamente definido sobre el conjunto abierto en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Definición 2. [Bhat y Bernstein, 2000] *El origen del sistema (1.2) es estable en tiempo finito si es estable y existe un conjunto abierto U que contiene al origen, y la función $T : U \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ (conocida como función “settling-time”) tal que, para cada $x \in U \setminus \{0\}$, $\varphi(\cdot, x)$ está definido sobre $[0, T(x))$, $\varphi(t, x) \in U \setminus \{0\} \forall t \in [0, T(x))$ y*

$$\lim_{t \rightarrow T(x)} \varphi(t, x) = 0.$$

Es posible caracterizar la estabilidad en tiempo finito de un sistema no lineal a través de una función de Lyapunov.

Teorema 1. [Bhat y Bernstein, 2000] *El origen del sistema (1.2) es estable en tiempo finito y la función “settling-time” es continua en cero, si y solo si, existen números reales $C > 0$ y*

$\alpha \in (0, 1)$, y una función continua V positiva definida sobre la vecindad abierta Ω de 0, tal que

$$\dot{V}(x) \leq -CV(x)^\alpha, \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$$

De ser así, la función “settling-time” $T(x)$ es de hecho continua en una vecindad de 0 y satisface (para $\|x\|$ suficientemente pequeña)

$$T(x) \leq \frac{1}{C(1-\alpha)} V(x)^{1-\alpha}$$

1.4.3. Desigualdad de Young

Una desigualdad aritmética clásica establece que para números reales $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$ y $q > 1$, siempre se cumple la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

con

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Esta desigualdad se conoce como la desigualdad de Young [Hardy et al., 1951].

De ahí se puede escribir

$$ab = (ca) \left(\frac{b}{c} \right) \leq \frac{(ca)^p}{p} + \frac{\left(\frac{b}{c} \right)^q}{q} = c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}$$

entonces

$$ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q} \quad \forall c > 0 \quad (1.3)$$

Esta desigualdad se usará para separar algunos términos cruzados de la función de Lyapunov y de su derivada temporal.

1.4.4. Cambio de notación

A partir del Capítulo 3 se usará una notación especial, la cual permitirá escribir las expresiones de una manera más corta, y facilitar su visualización.

Para una variable real $z \in \mathbb{R}$ elevada a una potencia $p \in \mathbb{R}$ se tiene

$$[z]^p = |z|^p \operatorname{sgn}(z)$$

entonces $\lfloor z \rfloor^2 = |z|^2 \text{sgn}(z) \neq z^2$ cuando $z_2 < 0$.

Si p es un número impar el cambio de notación no afectaría el significado de la ecuación, es decir, $\lfloor z \rfloor^p = z^p$.

A continuación se muestran algunos ejemplos para la nueva notación:

$$\begin{aligned} \lfloor z \rfloor^0 &= \text{sgn}(z) \\ \lfloor z \rfloor^0 z^p &= |z|^p \\ \lfloor z \rfloor^0 |z|^p &= \lfloor z \rfloor^p \\ \lfloor z \rfloor^p \lfloor z \rfloor^q &= |z|^p \text{sgn}(z) |z|^q \text{sgn}(z) = |z|^{p+q} \end{aligned}$$

1.5. Organización de la tesis

En este capítulo se realizó el planteamiento del problema a través de un ejemplo y se introdujo el estado del arte. También se expusieron los objetivos de la tesis, y finalmente se presentaron algunas definiciones y herramientas matemáticas que se usarán en los próximos capítulos, así como un cambio de notación relacionado con la función *signo*.

En el Capítulo 2 se presenta el Control Integral Discontinuo, algoritmo que logra estabilizar robustamente, en tiempo finito y a través de una señal de control continua el sistema (1.1). También se muestra como este algoritmo puede usarse en aplicaciones de seguimiento de señales variantes en el tiempo.

En el Capítulo 3 se demuestra mediante una función estricta de Lyapunov que el Control Integral Discontinuo logra la estabilización robusta y en tiempo finito del sistema (1.1). Se propone la función, se obtienen las condiciones suficientes para que la función sea una función de Lyapunov y se verifica la factibilidad de las condiciones obtenidas. Además se presentan dos métodos de diseño de las ganancias del Control Integral Discontinuo.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones que resultan de este trabajo de tesis, así como el trabajo futuro.

Capítulo 2

Control Integral Discontinuo

2.1. Motivación

En el capítulo anterior se mencionaron las características de algunos algoritmos que se encuentran en la literatura y que pueden ser usados para estabilizar el sistema (1.1). En esta sección se presentan simulaciones que ilustran las propiedades antes mencionadas, de tal forma que se puedan identificar fácilmente las diferencias entre dichos algoritmos y el algoritmo que se propone en esta tesis.

Considere el control integral que tiene la forma

$$\begin{aligned}u &= -k_1x_1 - k_2x_2 + z \\ \dot{z} &= -k_3x_1\end{aligned}$$

al aplicarlo al sistema (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - k_2x_2 + x_3 + f(x, t) \\ \dot{x}_3 &= -k_3x_1\end{aligned}\tag{2.1}$$

la respuesta del sistema con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$ y $k_1 = 7$, $k_2 = 5$ y $k_3 = 6$ se presenta en la figura 2.1, en donde se puede apreciar que los estados del sistema no convergen al origen.

Como se mencionó anteriormente, los controladores continuos presentan dificultad para lograr la convergencia del sistema (1.1) para una $f(x, t)$ variante en el tiempo.

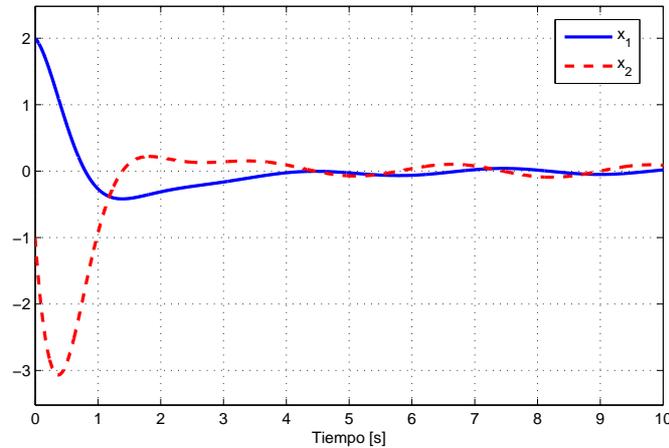


Figura 2.1: Respuesta del sistema con el control integral y $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$

Ahora se presenta la respuesta del sistema con el algoritmo Twisting [Levant, 1993], este algoritmo es un controlador que hace una retroalimentación discontinua de los estados de un sistema de segundo orden, y tiene la forma

$$u = -k_1 \operatorname{sgn}(x_1) - k_2 \operatorname{sgn}(x_2)$$

al aplicarlo al sistema (1.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 \operatorname{sgn}(x_1) - k_2 \operatorname{sgn}(x_2) + f(x, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

En la figura 2.2 se muestra la respuesta del sistema (2.2) con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$ y $k_1 = 7$, $k_2 = 5$ y $k_3 = 6$.

Se puede apreciar que el algoritmo Twisting estabiliza robustamente los estado del sistema en tiempo finito, pero la señal de control requerida para lograrlo, figura 2.3, presenta el fenómeno de *Chattering*. Este fenómeno es una conmutación a altas frecuencias de la señal de control, lo cual representa un problema para su implementación, además de ser indeseable debido al desgaste que puede ocasionar en los actuadores de la planta.

Si se aplica al sistema (1.1) un algoritmo que conserva la retroalimentación de estados lineal pero en la parte integral del control se agrega una discontinuidad, de la forma

$$\begin{aligned} u &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 + z \\ \dot{z} &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

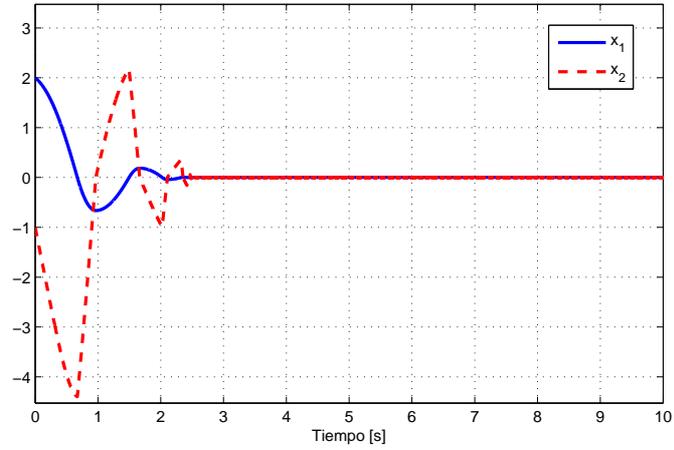


Figura 2.2: Respuesta del Control Twisting con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$

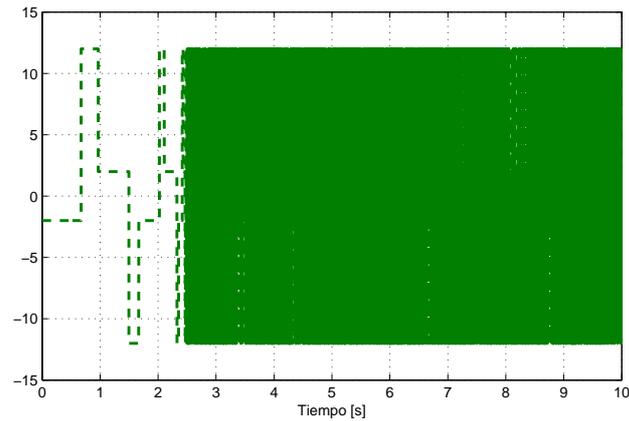


Figura 2.3: Señal del control del algoritmo Twisting para $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 + x_3 + f(x, t) \\
 \dot{x}_3 &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Al simular el sistema (2.4) con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$ y $k_1 = 7$, $k_2 = 5$ y $k_3 = 6$, figura 2.4, se aprecia que los estados no convergen al origen.

Este algoritmo muestra que agregar una discontinuidad a un esquema lineal no

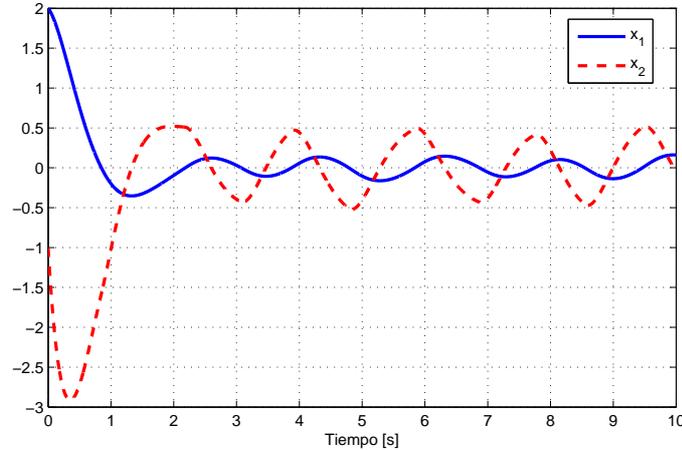


Figura 2.4: Respuesta del control lineal + discontinuidad con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$

resuelve el problema de estabilización robusta. Como se mencionó en el capítulo anterior, en la literatura no se encuentra ningún algoritmo que estabilice el sistema (1.1) con una perturbación variante en el tiempo y a través de una señal de control continua.

El Algoritmo Super-Twisting (STA) es un conocido algoritmo de modos deslizantes de segundo orden [Levant, 1993], que logra estabilizar en tiempo finito y a través de una señal de control continua un sistema de primer orden con una perturbación variante en el tiempo, el controlador se puede escribir como

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x_1|^{1/2}sgn(x_1) + z \\ \dot{z} &= -k_2sgn(x_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

este algoritmo fue diseñado principalmente para ser aplicado a sistemas de la forma

$$\dot{x}_1 = u + \rho(x, t) \quad (2.6)$$

al aplicar el controlador (2.7) a (2.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2}sgn(x_1) + z + \rho(x, t) \\ \dot{z} &= -k_2sgn(x_1) \end{aligned}$$

si se considera $x_2 = z + \rho(x, t)$, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2}sgn(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2sgn(x_1) + \dot{\rho}(x, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde x_i son las variables de estado, k_i son ganancias para ser diseñadas y $\dot{\rho}(x, t)$ es la derivada respecto a t del término de perturbación. En [Polyakov y Poznyak, 2009] y [Moreno y Osorio, 2012] se presentan funciones estrictas de Lyapunov a través de las cuales se muestra que bajo algunas condiciones de k_1 y k_2 , (2.7) converge en tiempo finito y es robusto ante perturbaciones acotadas $|\dot{\rho}(x, t)| \leq L$. En la figura 2.5 se muestra la respuesta de (2.7) con $\rho(t) = 0.5 \sin(t) + 0.25 \sin(2t)$.

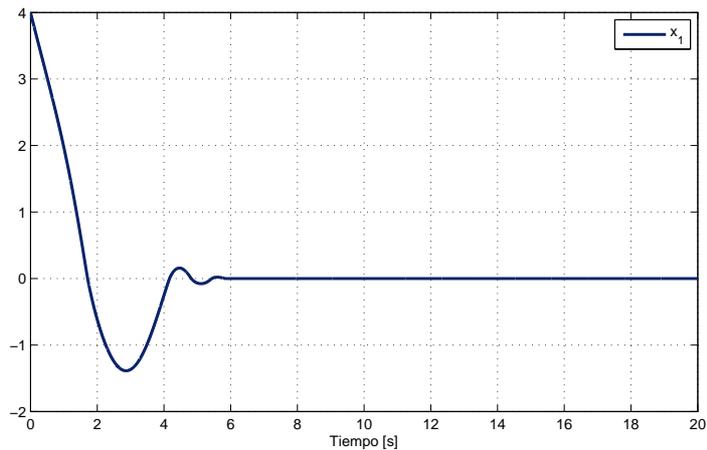


Figura 2.5: Respuesta del Super-Twisting con $\rho(t) = 0.5 \sin(t) + 0.25 \sin(2t)$

Como se mencionó anteriormente, este algoritmo logra atenuar los efectos del *chattering*, ver figura 2.6 donde se muestra la señal de control requerida para obtener la respuesta de la figura 2.5.

En esta sección se ilustró como los algoritmos que se encuentran en la literatura no logran resolver el problema planteado en esta tesis. El STA logra resolver el problema solo para sistemas de primer orden.

2.2. El Control Integral Discontinuo

En esta sección se presenta un algoritmo de control que está inspirado en los esquemas mencionados en la sección anterior, pero que principalmente busca extender las propiedades del algoritmo Super-Twisting a sistemas de segundo orden.

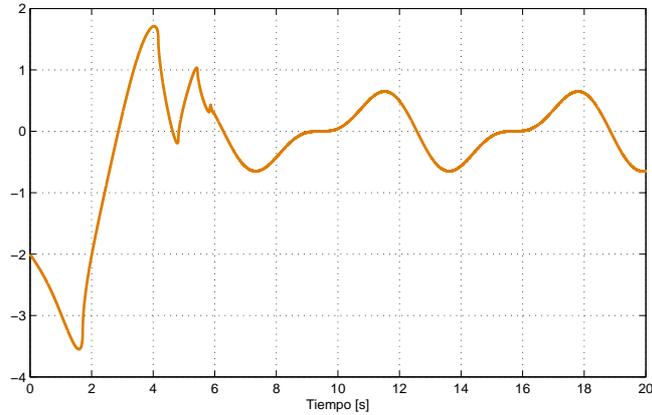


Figura 2.6: Señal del control Super-Twisting con $\rho(t) = 0.5 \sin(t) + 0.25 \sin(2t)$

Teorema 2. *El control definido por*

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + z \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(x_1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

estabiliza robustamente y en tiempo finito al origen del sistema (1.1) para toda perturbación $f(x, t)$ Lipschitz con respecto al tiempo con constante de Lipschitz Δ , si las ganancias k_1 , k_2 y k_3 se diseñan con algún método presentado en la prueba del teorema.

La prueba de este teorema se encuentra en el capítulo 3.

Para que la perturbación $f(x(t), t)$ sea Lipschitz con respecto al tiempo, es suficiente con ser diferenciable respecto a x y a t , y que estas derivadas y las trayectorias del sistema se conserven acotadas. Para $f(t)$ es suficiente con que sea diferenciable respecto a t y su derivada sea acotada. Por ejemplo, $f(t) = 2\text{sen}(t) + \text{cos}(2t)$ es diferenciable respecto a t , y su derivada esta acotada por 4, es decir, $|\dot{f}(t)| < 4$ para todo t .

Al aplicar el algoritmo (2.8) al sistema (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + z + f(x, t) \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(x_1) \end{aligned}$$

si se considera la transformación $x_3 = z + f(x, t)$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3\text{sgn}(x_1) + \dot{f}(x, t)\end{aligned}\tag{2.9}$$

en donde (2.9) se puede ver como una inclusión diferencial que es homogénea [Levant, 2005] con grado $\delta_f = -1$ y los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$ y las soluciones se entienden en el sentido de Filippov [Filippov, 1988]. Los detalles sobre la homogeneidad del sistema (2.9) se encuentran en el apéndice A.

Se presentan dos métodos para el diseño de las ganancias k_1 , k_2 y k_3 , para las que el origen del sistema (2.9) es estable:

- Sintonizar las ganancias del algoritmo y los coeficientes de la función de Lyapunov a través del método gráfico que se presenta en la sección 3.5.1. En donde para cada Δ es necesario hacer la sintonización y verificación gráfica de todos los parámetros.
- Obtener un juego de ganancias para el caso nominal, y sintonizar una constante positiva L para cada valor de Δ , ver sección 3.5.2.

Para ilustrar las características del algoritmo (2.8) en la figura 2.7 se presenta la respuesta del sistema (2.9) con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$ y $k_1 = 7$, $k_2 = 5$ y $k_3 = 6$, note que los estados convergen al origen en tiempo finito a pesar de la perturbación variante en el tiempo.

La convergencia robusta en tiempo finito también se consigue con el algoritmo Twisting, pero a diferencia del Twisting el Control Integral Discontinuo lo logra con una señal de control continua, es decir, no presenta el fenómeno de *chattering*. La acción de control requerida para obtener la respuesta de la figura 2.7 se muestra en la figura 2.8.

Además de estabilizar robustamente al sistema (1.1), el Control Integral Discontinuo puede ser usado para hacer seguimiento de señales de referencia variantes en el tiempo, lo cual se muestra en la siguiente sección.

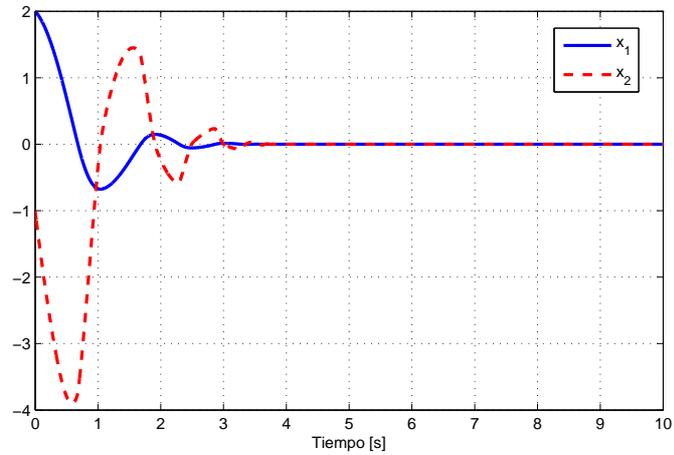


Figura 2.7: Respuesta del Control Integral Discontinuo con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$

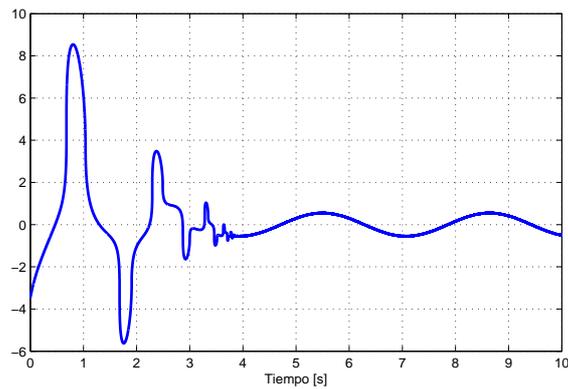


Figura 2.8: Señal de control del Control Integral Discontinuo con $f(x, t) = 0.5 \sin(2t) - 4.5 \sin(x_1)$

2.2.1. Seguimiento

Se desea que la salida y del sistema (1.1) siga una señal de referencia $r(t)$, por lo tanto el error se define como

$$e_1 = x_1 - r(t)$$

$$e_2 = x_2 - \dot{r}(t)$$

y entonces la dinámica del error es

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= u - \ddot{r}(t) + f(x, t)\end{aligned}\tag{2.10}$$

en donde el objetivo es hacer converger el error a cero. Mediante el control integral discontinuo se tienen dos alternativas para lograr esto. La primera opción requiere de un diferenciador de segundo orden para formar la ley de control, mientras que en la segunda no. A continuación se dan los detalles de ambas alternativas.

Seguimiento con diferenciador de segundo orden

Debido a que la señal de referencia $r(t)$ es medible, entonces mediante el uso de un diferenciador se puede incluir \ddot{r} en la señal de control u

$$\begin{aligned}u &= -k_1|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(e_1) - k_2|e_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(e_2) + z + \ddot{r}(t) \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(e_1)\end{aligned}$$

al aplicarlo en (2.10) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_1|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(e_1) - k_2|e_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(e_2) + e_3 + f(x, t) \\ \dot{e}_3 &= -k_3\text{sgn}(e_1)\end{aligned}$$

este sistema es similar a (2.9), por lo tanto, como se ilustró en la sección anterior el error converge a cero. En la figura 2.9 se puede ver como la salida sigue a la señal de referencia. En este caso la señal de referencia es $r(t) = 2\sin(0.5t)$, y la perturbación $f(x, t) = 0.5\sin(t) + 0.25\sin(2t)$. En la figura 2.10 se puede ver la señal de control requerida para lograr el seguimiento.

Seguimiento sin diferenciador de segundo orden

Existe otra alternativa para formar la ley de control sin el uso de un diferenciador de segundo orden. En este caso u tiene la forma

$$\begin{aligned}u &= -k_1|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(e_1) - k_2|e_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(e_2) + z \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(e_1)\end{aligned}\tag{2.11}$$

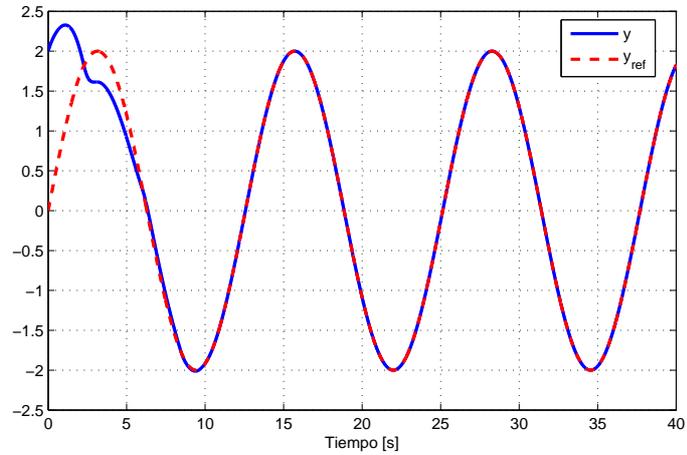


Figura 2.9: Salida y vs señal de referencia con diferenciador

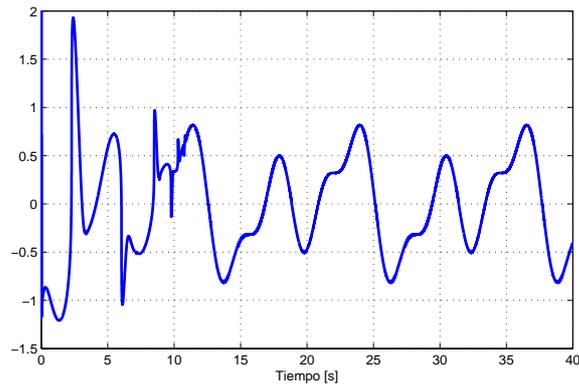


Figura 2.10: Señal de control para el seguimiento con diferenciador

aplicando esta u a (2.10) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_1|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(e_1) - k_2|e_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(e_2) + e_3 + f(x, t) - \ddot{r}(t) \\ \dot{e}_3 &= -k_3\text{sgn}(e_1). \end{aligned}$$

En este caso la segunda derivada temporal de la señal de referencia puede ser vista como parte de la perturbación, y por lo tanto se asume que la tercera derivada temporal de $r(t)$ está acotada, es decir, $|\ddot{r}(t)| < R$, donde R es conocida. A diferencia del caso anterior para

este algoritmo no se requiere el uso de un diferenciador de segundo orden, solo conocer Δ y R que permitirán diseñar adecuadamente las ganancias k_i $i = 1, 2, 3$. La comparación entre la salida y la señal de referencia se muestra en la figura 2.11, y la señal de control en la figura 2.12, en dónde se emplea la misma señal de referencia y de perturbación que en el caso anterior.

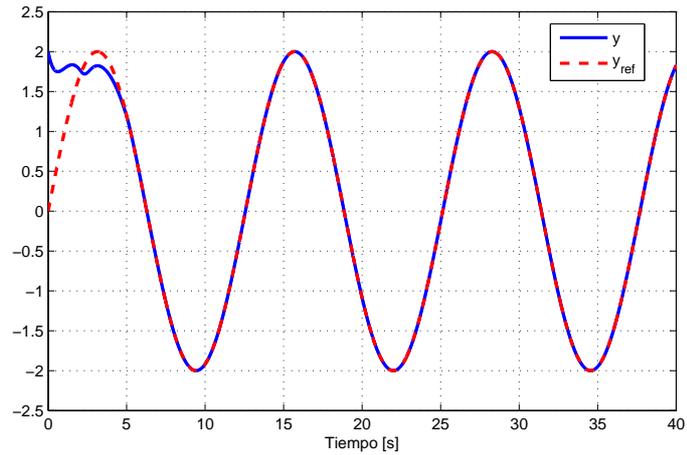


Figura 2.11: Salida y vs señal de referencia sin diferenciador

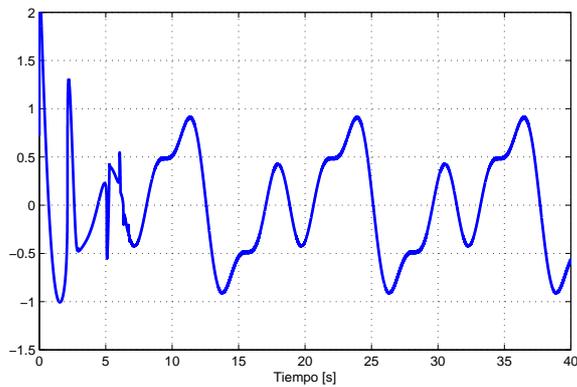


Figura 2.12: Señal de control para el seguimiento sin diferenciador

Mediante las simulaciones se puede notar que en ambos casos la salida converge a la señal de referencia, pero como era de esperarse se requiere de una señal de control de

mayor amplitud cuando no se usa el diferenciador de segundo orden, mientras que con la implementación de éste la convergencia del error está sujeta a la respuesta del diferenciador y a los efectos que este pueda ocasionar en el transitorio del error.

En este capítulo se ha presentado un algoritmo que, a diferencia de los mencionados en el capítulo anterior, logra estabilizar robustamente el origen del sistema (1.1) a través de una señal de control continua y en tiempo finito, el sistema resultante en lazo cerrado se puede ver como una inclusión diferencial homogénea [Levant, 2005] con grado $\delta_f = -1$ y los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$. Con este algoritmo también se logra hacer seguimiento de una señal variante en el tiempo, característica que no presentan los algoritmos mencionados en el capítulo anterior, y que además se puede lograr a pesar de no conocer la señal de referencia.

Capítulo 3

Estabilidad del Control Integral Discontinuo

En este capítulo se demuestra la convergencia del Control Integral Discontinuo presentado en el capítulo 2 mediante una función estricta de Lyapunov. Primero se propone una función, posteriormente se obtienen las condiciones suficientes para que la función sea positiva definida y su derivada temporal negativa definida, lo que hace de la función una función de Lyapunov. Se valida la función al mostrar que existen conjuntos de parámetros para los que se cumplen las condiciones obtenidas. Se prueba la convergencia en tiempo finito y finalmente, se presentan dos métodos para el diseño de las ganancias del algoritmo.

La homogeneidad del sistema (2.9) fue una característica que se consideró al proponer la función de Lyapunov, además de tomar como base una función cuadrática. La demostración de la convergencia del algoritmo (2.8) se hace esencialmente en dos partes, primero se hace el análisis del caso nominal y posteriormente el caso perturbado.

3.1. Caso Nominal

Primero se probará la convergencia del sistema (2.9) cuando $f(x, t) = 0$, por lo que el sistema queda como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3\text{sgn}(x_1)\end{aligned}\quad (3.1)$$

Considere la siguiente función continuamente diferenciable

$$V(x) = \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 + \gamma_{13}x_1x_3 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 \quad (3.2)$$

esta función es homogénea con $\delta_V = 4$ y los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$. Los detalles de la homogeneidad de la función $V(x)$ se encuentran en el apéndice A.

La derivada temporal de (3.2) es

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{4}{3}\gamma_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\dot{x}_1 + 2\gamma_2x_2\dot{x}_2 + 4\gamma_3x_3^3\dot{x}_3 + \gamma_{13}x_3\dot{x}_1 + \\ &\quad + \gamma_{13}x_1\dot{x}_3 - \gamma_{23}[x_3]^2\dot{x}_2 - 2\gamma_{23}x_2|x_3|\dot{x}_3\end{aligned}$$

y evaluando a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{4}{3}\gamma_1|x_1|^{\frac{1}{3}}x_2 - 2\gamma_2k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}x_2 - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} + 2\gamma_2x_2x_3 - \\ &\quad - 4\gamma_3k_3|x_1|^0x_3^3 + \gamma_{13}x_3x_2 - \gamma_{13}k_3|x_1| + \gamma_{23}k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}[x_3]^2 + \\ &\quad \gamma_{23}k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}[x_3]^2 - \gamma_{23}|x_3|^3 + 2\gamma_{23}k_3|x_1|^0x_2|x_3|\end{aligned}\quad (3.3)$$

3.1.1. Positividad Definida

En esta sección se presentan las condiciones para que $V(x)$ sea una función candidata, es decir, sea positiva definida. La función es

$$V(x) = \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 + \gamma_{13}x_1x_3$$

la expresión anterior se puede escribir como

$$V(x) = \xi^T \Gamma \xi + \gamma_{13}x_1x_3$$

donde

$$\xi^T = \left[|x_1|^{\frac{2}{3}} \quad x_2 \quad |x_3|^2 \right]$$

y

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Si se considera $\gamma_{13} = 0$ entonces $V(x)$ será positiva definida si $\Gamma > 0$, con lo que se deben cumplir las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \gamma_1 &> 0 \\ \gamma_1\gamma_2 > 0 &\quad \rightarrow \quad \gamma_2 > 0 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \frac{1}{4}\gamma_1\gamma_{23}^2 > 0 &\quad \rightarrow \quad 4\gamma_2\gamma_3 - \gamma_{23}^2 > 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Retomando la función completa se tiene

$$\begin{aligned} V(x) &= \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 + \gamma_{13}x_1x_3 \\ &\geq \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 - \gamma_{13}|x_1||x_3| \end{aligned} \tag{3.5}$$

en donde $\gamma_{13} > 0$.

Con base en la desigualdad de Young (para $\alpha_{13} > 0$ arbitrario)

$$|x_1||x_3| \leq \frac{3}{4}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}\alpha_{13}^{-4}|x_3|^4$$

sustituyendo en (3.5) se obtiene

$$V(x) \geq \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 - \gamma_{13} \left(\frac{3}{4}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}\alpha_{13}^{-4}|x_3|^4 \right)$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$V(x) \geq \xi^T \tilde{\Gamma} \xi$$

con

$$\xi^T = \left[|x_1|^{\frac{2}{3}} \quad x_2 \quad |x_3|^2 \right]$$

y

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \frac{3}{4}\gamma_{13}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} & \gamma_3 - \frac{1}{4}\gamma_{13}\alpha_{13}^{-4} \end{bmatrix}$$

entonces para que $\tilde{\Gamma} > 0$ con $\gamma_{13} > 0$, se deben de cumplir

$$\gamma_1 - \frac{3}{4}\gamma_{13}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}} > 0 \tag{3.6a}$$

$$\gamma_2 > 0 \tag{3.6b}$$

$$\gamma_2 \left(\gamma_3 - \frac{1}{4}\gamma_{13}\alpha_{13}^{-4} \right) - \frac{1}{4}\gamma_{23}^2 > 0 \tag{3.6c}$$

Eliminando α_{13} :

de (3.6a) se tiene

$$\alpha_{13}^{\frac{4}{3}} < \frac{4}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma_{13}} \rightarrow \left(\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}\right)^3 < \left(\frac{4}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma_{13}}\right)^3 \rightarrow \alpha_{13}^4 < \frac{4^3}{3^3} \frac{\gamma_1^3}{\gamma_{13}^3} \quad (3.7)$$

y de (3.6c)

$$\gamma_3 - \frac{1}{4} \frac{\gamma_{23}^2}{\gamma_2} > \frac{1}{4} \gamma_{13} \alpha_{13}^{-4}$$

multiplicando por α_{13}^4 se obtiene

$$\alpha_{13}^4 \left(\gamma_3 - \frac{1}{4} \frac{\gamma_{23}^2}{\gamma_2} \right) > \frac{1}{4} \gamma_{13} \rightarrow \alpha_{13}^4 > \frac{\gamma_2 \gamma_{13}}{4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2} \quad (3.8)$$

juntando las desigualdades (3.7) y (3.8) y usando (3.6c) para probar que $4\gamma_2\gamma_3 - \gamma_{23}^2 > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\gamma_2 \gamma_{13}}{4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2} < \frac{4^3}{3^3} \frac{\gamma_1^3}{\gamma_{13}^3} \\ 0 &< \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nótese que esta condición es necesaria y suficiente para que $V(x) > 0$ cuando $\gamma_{13} \geq 0$, y para todo $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. En el caso que $\gamma_{13} = 0$ esta condición se reduce a (3.4)

3.1.2. Negatividad Definida

La ecuación (3.3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\gamma_{13} k_3 |x_1| - 2\gamma_2 k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23} |x_3|^3 - (2\gamma_2 k_1 - \frac{4}{3} \gamma_1) |x_1|^{\frac{1}{3}} x_2 \\ &\quad + \gamma_{23} k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_3|^2 - 4\gamma_3 k_3 |x_1|^0 x_3^3 + \gamma_{23} k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} |x_3|^2 \\ &\quad + (2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23} k_3 |x_1|^0 |x_3|^0) x_2 x_3 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -\gamma_{13} k_3 |x_1| - 2\gamma_2 k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23} |x_3|^3 + \left| (2\gamma_2 k_1 - \frac{4}{3} \gamma_1) \right| |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_2| \\ &\quad + \gamma_{23} k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_3|^2 + 4\gamma_3 k_3 |x_3|^3 + \gamma_{23} k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} |x_3|^2 \\ &\quad + (2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23} k_3 |x_1|^0 |x_3|^0) x_2 x_3 \end{aligned}$$

con $\gamma_{23}, \gamma_3 > 0$.

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -\gamma_{13} k_3 |x_1| - 2\gamma_2 k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}} - (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) |x_3|^3 + \gamma_{23} k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_3|^2 \\ &\quad + \left| (2\gamma_2 k_1 - \frac{4}{3} \gamma_1) \right| |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_2| + \lambda x_2 x_3 + \gamma_{23} k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} |x_3|^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$\lambda = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3[x_1]^0[x_3]^0$$

nótese que dependiendo del signo de x_1 y x_3 , λ puede tomar dos valores diferentes, es decir

$$\lambda_1 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3 \quad (3.11a)$$

$$\lambda_2 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}k_3 \quad (3.11b)$$

Para encontrar las condiciones que garanticen que $\dot{V}(x)$ sea negativa definida se busca separar los términos cruzados de (3.10), recordando la desigualdad (1.3), se puede escribir

$$\begin{aligned} |x_1|^{\frac{1}{3}}|x_2| &\leq \frac{1}{3}\beta_{12}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{12}^{-\frac{3}{2}}|x_2|^{\frac{3}{2}} \quad \forall \beta_{12} > 0 \\ |x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 &\leq \frac{1}{3}\beta_{13}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{13}^{-\frac{3}{2}}|x_3|^3 \quad \forall \beta_{13} > 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

y para el resto de términos considere el siguiente Lema

Lema 1. *Para todo valor real de x_2 y x_3 , para todo valor positivo de $\alpha > 0$ y $\delta > 0$, y cualquier valor de λ , la desigualdad*

$$\lambda x_2 x_3 + \delta [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \frac{1}{\delta} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \delta^2 \phi(\alpha, \lambda) |x_3|^3 \quad (3.13)$$

se satisface para todo t , si y solo si

$$\phi(\alpha, \lambda) \geq \psi(\alpha, \lambda)$$

donde la función $\psi(\alpha, \lambda)$ está definida por

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \psi_1(\alpha, \lambda) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\psi_1(\alpha, \lambda) = -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

$$\psi_2(\alpha, \lambda) = \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

El lema anterior es una generalización de la desigualdad de Young cuando se consideran varios monomios. Si se deja un solo monomio de lado izquierdo de (3.13), la desigualdad se reduce a la desigualdad (1.3).

Considere el caso cuando $\lambda = 0$ y $\delta = 1$ en (3.13), entonces de

$$[x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \phi(\alpha) |x_3|^3$$

se obtiene

$$\phi(\alpha) \geq \psi_1(\alpha) = -\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{3\alpha}} \right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3\alpha}} = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}$$

Mientras que usando la desigualdad de Young (1.3) se tiene

$$[x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \frac{c^3}{3} |x_2|^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3c^{\frac{3}{2}}} |x_3|^3$$

entonces

$$\alpha = \frac{c^3}{3} \rightarrow c^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3\alpha}$$

y

$$\phi = \frac{2}{3c^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}$$

Remplazando las desigualdades (3.12) y (3.13) en (3.10), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -\gamma_{13}k_3|x_1| - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3)|x_3|^3 \\ &\quad + \left| (2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1) \left[\frac{1}{3}\beta_{12}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{12}^{-\frac{3}{2}}|x_2|^{\frac{3}{2}} \right] + \gamma_{23}k_1 \left[\frac{1}{3}\beta_{13}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{13}^{-\frac{3}{2}}|x_3|^3 \right] \right| \\ &\quad + \gamma_{23}k_2\alpha|x_2|^{\frac{3}{2}} + \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda)|x_3|^3 \\ &\leq -\left[\gamma_{13}k_3 - \frac{2}{3} \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \beta_{12}^3 - \frac{1}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 \right| \right] |x_1| \\ &\quad - \left[2\gamma_2k_2 - \frac{4}{3} \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \beta_{12}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\alpha \right| \right] |x_2|^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - \left[\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda) \right] |x_3|^3 \end{aligned}$$

entonces se deben de cumplir

$$\gamma_{13}k_3 - \frac{2}{3} \left| \left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 \right) \beta_{12}^3 - \frac{1}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 \right| > 0 \quad (3.14a)$$

$$2\gamma_2k_2 - \frac{4}{3} \left| \left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 \right) \beta_{12}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\alpha \right| > 0 \quad (3.14b)$$

$$\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda) > 0 \quad (3.14c)$$

para algún valor positivo de $\beta_{12}, \beta_{13} > 0$ y $\alpha > 0$.

Eliminando β_{12} :

De (3.14a) se obtiene

$$\beta_{12}^3 < \frac{3\gamma_{13}k_3 - \gamma_{23}k_1\beta_{13}^3}{2\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|}$$

y de (3.14b)

$$\beta_{12}^3 > \frac{4^2\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|^2}{3^2(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2}$$

aquí se excluye el caso en que $\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 = 0$ que será tratado más adelante, y de las desigualdades anteriores se tiene

$$2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha > 0 \quad (3.15a)$$

$$3\gamma_{13}k_3 - \gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 > 0 \quad (3.15b)$$

$$\frac{4^2\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|^2}{3^2(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2} < \frac{3\gamma_{13}k_3 - \gamma_{23}k_1\beta_{13}^3}{2\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|} \quad (3.15c)$$

las desigualdades (3.15b) y (3.15c) se pueden escribir como

$$\beta_{13}^3 < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} \quad (3.16a)$$

$$\beta_{13}^3 < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} - \frac{2 \cdot 4^2\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|^3}{3^2\gamma_{23}k_1(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2} \quad (3.16b)$$

en donde claramente (3.15b) está incluida en (3.15c), además se ha asumido que $\gamma_{23} > 0$.

Eliminación de β_{13} :

De (3.14c) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda) \\ \beta_{13}^3 &> \frac{2^2\gamma_{23}^2k_1^2}{3^2(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda))^2} \end{aligned}$$

entonces, considerando (3.16b) junto con la desigualdad anterior

$$\frac{2^2\gamma_{23}^2k_1^2}{3^2(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda))^2} < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} - \frac{2 \cdot 4^2\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|^3}{3^2\gamma_{23}k_1(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2}$$

por lo tanto las desigualdades que resultan de la eliminación de β_{12} y β_{13} , son

$$2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha > 0 \quad (3.17a)$$

$$\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda) > 0 \quad (3.17b)$$

$$\frac{2^2\gamma_{23}^2k_1^2}{3^2(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda))^2} < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} - \frac{2 \cdot 4^2\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|^3}{3^2\gamma_{23}k_1(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2} \quad (3.17c)$$

para que la última desigualdad se cumpla se requiere

$$0 < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} - \frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}$$

$$\frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} > \frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}$$

usando (3.17a)

$$(2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha) > \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}}$$

entonces

$$0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}} \quad (3.18)$$

Reescribiendo (3.17c)

$$\frac{2^2 \gamma_{23}^2 k_1^2}{3^2 (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha, \lambda))^2} < \frac{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}$$

$$\frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3} < (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha, \lambda))^2$$

entonces se deben de cumplir

$$3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 \right) \right|^3 > 0$$

$$\phi(\alpha, \lambda) < \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \left(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \sqrt{\frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}} \right)$$

Hasta aquí se tienen las desigualdades

$$0 < \phi(\alpha, \lambda) < v(\alpha) \quad (3.19)$$

$$0 < 3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 \right) \right|^3 \quad (3.20)$$

$$0 < 2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha \quad (3.21)$$

$$0 < \gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha, \lambda) \quad (3.22)$$

con

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23} k_2} (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \sqrt{\tau}) \quad (3.23)$$

donde

$$\tau = \frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| (\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1) \right|^3}$$

las desigualdades (3.20), (3.21) y (3.22) son esenciales para asegurar que (3.19) esté bien definida.

De (3.22)

$$\phi(\alpha, \lambda) < \frac{1}{\gamma_{23} k_2} (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3)$$

Nótese que si se cumple (3.19) se cumple (3.22), por lo que (3.22) está incluida en (3.19).

De (3.20)

$$(2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 > \frac{2 \cdot 4^2 \left| (\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1) \right|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}$$

usando (3.21)

$$\gamma_{23} k_2 \alpha < 2\gamma_2 k_2 - \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 \left| \gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}}$$

entonces

$$0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 \left| \gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}} \quad (3.24)$$

por lo que (3.24) es equivalente a (3.20) y (3.21), luego entonces para que la función candidata sea negativa definida se deben de cumplir (3.19) y (3.24).

3.1.3. Un caso particular

Se considera el caso cuando $\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 = 0$, entonces

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1} \quad (3.25)$$

y en este caso, de (3.14a)-(3.14b) se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_{13} k_3 - \frac{1}{3} \gamma_{23} k_1 \beta_{13}^3 &> 0 \\ 2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha &> 0 \\ \gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \frac{2}{3} \gamma_{23} k_1 \beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha) &> 0 \end{aligned}$$

y de las desigualdades anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} \\ 0 < \phi(\alpha, \lambda) < \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \left(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \sqrt{\frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}} \right) \end{aligned}$$

cuando se satisface (3.25).

3.1.4. Factibilidad de la Función de Lyapunov

Al cumplir las condiciones de positividad y negatividad definida que se obtuvieron en las secciones anteriores, se garantiza que la función propuesta deja de ser candidata para convertirse en Función de Lyapunov, las condiciones obtenidas son

$$0 < \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2 \quad (3.27)$$

$$0 < \phi(\alpha, \lambda) < v(\alpha) \quad (3.28)$$

$$0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}} \quad (3.29)$$

donde $v(\alpha)$ está definida en (3.23).

En esta sección se tiene el propósito de determinar que ganancias k_1 , k_2 y k_3 hacen al sistema (3.1) estable y la función de Lyapunov que lo demuestra, es decir, encontrar los coeficientes de la función γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{13} y γ_{23} que en conjunto cumplan con las desigualdades (3.27)-(3.29). De (3.27) se obtiene

$$\gamma_3 > \frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2}$$

sea η una variable positiva y que cumple $\eta > 1$, entonces

$$\gamma_3 = \eta \left(\frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2} \right) \quad (3.30)$$

mientras que a (3.28) se le puede dar una interpretación gráfica, en donde la curva de la función $\psi(\alpha, \lambda)$ que cumple $\psi(\alpha, \lambda) \leq \phi(\alpha)$ tiene que pasar por debajo de la curva de la función $v(\alpha)$ dentro del intervalo permitido de α , el cual está definido por (3.29). Además se considera el caso particular cuando

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1}$$

En la tabla 3.1 se presenta una serie de parámetros para los cuales la función propuesta es una función de Lyapunov.

En las figuras 3.1-3.3 se muestran las gráficas de las funciones $v(\alpha)$ y $\psi(\alpha, \lambda)$ correspondientes a cada columna de la tabla de parámetros 3.1 que cumplen con la desigualdad (3.28). Nótese que esta última condición debería involucrar a dos funciones ψ ya que existen λ_1 y λ_2 , pero debido a que $\psi_{\lambda_1} > \psi_{\lambda_2}$, ver apéndice C, la curva de ψ_{λ_2} se ha omitido de las gráficas, en donde la función $\psi = \psi_{\lambda_1}$.

	Figura 3.1	Figura 3.2	Figura 3.3
k_1	2	2	7
k_2	2	3	5
k_3	0.15	1.1	5
γ_1	6	5	9
γ_2	2	1.66	0.85
γ_3	8.6×10^{-3}	2.5×10^{-3}	1×10^{-4}
γ_{13}	2	1	1
γ_{23}	0.01	0.1	0.01
η	1.1	1.1	1.1

Tabla 3.1: Parámetros de la función de Lyapunov con $\Delta = 0$

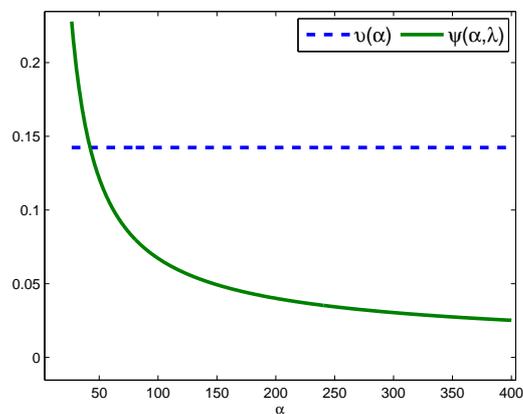


Figura 3.1: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 1 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$

3.2. Caso Perturbado

Considere ahora el sistema con $f(x, t) \neq 0$, es decir

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -k_3\text{sgn}(x_1) + \dot{f}(x, t)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

en dónde, como se mencionó anteriormente, $|\dot{f}(x, t)| < \Delta$, con Δ conocida.

La condición de positividad definida de la función V no se ve afectada por el término $f(x, t)$,

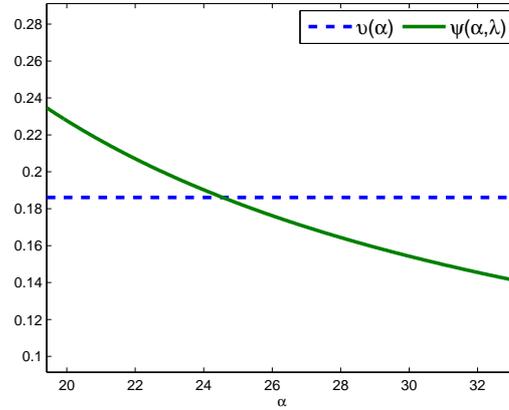


Figura 3.2: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$

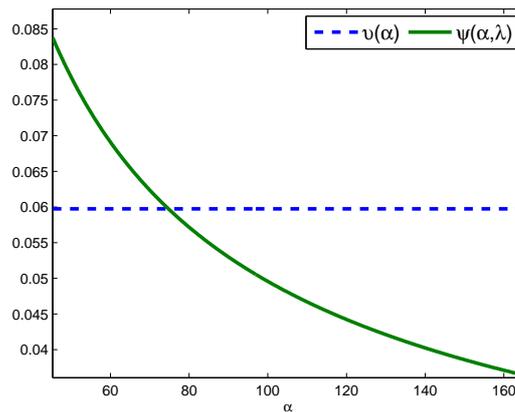


Figura 3.3: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 3 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$

por lo tanto, para el caso perturbado la función seguirá siendo candidata si cumple con la desigualdad (3.9).

Entonces de la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 + \gamma_{13}x_1x_3 - \gamma_{23}x_2|x_3|^2\text{sgn}(x_3)$$

se obtiene la derivada temporal y evaluando a lo largo de las trayectorias del sistema (3.31)

se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= -\gamma_{13}k_3|x_1| + \gamma_{13}x_1\dot{f}(x, t) - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23}|x_3|^3 - \left(2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1\right)|x_1|^{\frac{1}{3}}x_2 \\ &\quad + \gamma_{23}k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 - 4\gamma_3k_3|x_1|^0x_3^3 + 4\gamma_3x_3^3\dot{f}(x, t) + \gamma_{23}k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}|x_3|^2 \\ &\quad + \left(2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3|x_1|^0|x_3|^0 - 2\gamma_{23}|x_3|^0\dot{f}(x, t)\right)x_2x_3\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\leq -\gamma_{13}(k_3 - \Delta)|x_1| - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - (\gamma_{23} - 4\gamma_3(k_3 + \Delta))|x_3|^3 \\ &\quad + \left|(2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1)\right||x_1|^{\frac{1}{3}}|x_2| + \gamma_{23}k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 + \lambda x_2x_3 \\ &\quad + \gamma_{23}k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}|x_3|^2\end{aligned}$$

con $\gamma_{23}, \gamma_3 > 0$, y

$$\lambda = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3|x_1|^0|x_3|^0 + 2\gamma_{23}|x_3|^0\Delta$$

nótese que en este caso dependiendo del signo de x_1 y x_3 , λ puede tomar cuatro valores diferentes, pero solo se consideraran el mínimo y el máximo, es decir

$$\lambda_1 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta)$$

$$\lambda_2 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta)$$

Nuevamente se consideran las desigualdades (3.12) y (3.13), y para el caso perturbado se obtienen las desigualdades

$$\Delta < k_3 \tag{3.33a}$$

$$0 < \phi(\alpha, \lambda) < v(\alpha) \tag{3.33b}$$

$$0 < \alpha < 2\frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1|^3}{3^3\gamma_{13}(k_3 - \Delta)}} \tag{3.33c}$$

con

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \left(\gamma_{23} - 4\gamma_3(k_3 + \Delta) - \sqrt{\Pi} \right) \tag{3.34}$$

donde

$$\Pi = \frac{2^2\gamma_{23}^3k_1^3(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2}{3^3\gamma_{13}(k_3 - \Delta)(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 |(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}$$

La verificación de la factibilidad de estas desigualdades se hace al presentar el método de diseño de ganancias a partir del caso perturbado, en la sección 3.5.1.

3.3. Convergencia en Tiempo Finito

Debido a la homogeneidad de V y \dot{V} , con los grados de homogeneidad $\delta_V = 4$ y $\delta_{\dot{V}} = 3$, respectivamente, entonces la función

$$W(x) = \frac{-\dot{V}(x)}{V^{\frac{3}{4}}(x)}$$

es homogénea de grado $\delta_W = 0$, y dado que $W(x) = W(k^3x_1, k^2x_2, kx_3)$ para todo $k > 0$, todos los valores de la función son tomados en la bola homogénea unitaria, es decir, $B_h = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|^{\frac{2}{3}} + |x_2| + |x_3|^2 = 1\}$. En B_h la función V y \dot{V} son continuas y diferentes de cero. Entonces $W(x)$ tiene un mínimo positivo que puede ser calculado por $\kappa = \min_{x \in B_h} W(x)$. Esto implica que

$$\frac{-\dot{V}(x)}{V^{\frac{3}{4}}(x)} \geq \kappa \rightarrow \dot{V}(x) \leq -\kappa V^{\frac{3}{4}}(x)$$

De esta desigualdad diferencial se aprecia que las trayectorias convergen a cero en tiempo finito. La solución de la ecuación diferencial $\dot{v}(t) = -\kappa v(t)$ está dada por $v^{\frac{1}{4}}(t) = v^{\frac{1}{4}}(0) - \frac{1}{4}\kappa t$. Por el lema de comparación se sabe que el tiempo de convergencia puede ser estimado como

$$T(x_0) \leq \frac{4}{\kappa} V^{\frac{1}{4}}(x_0).$$

3.4. Escalamiento de las ganancias

Suponga que el origen $x = 0$ es estable en tiempo finito para el sistema (3.31) con las ganancias (k_1, k_2, k_3) , y $V(x)$ en (3.2) es una función de Lyapunov para el conjunto de parámetros $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}, \gamma_{23})$. Si se aplican las transformaciones $(k_1, k_2, k_3) \rightarrow (Lk_1, L^{\frac{3}{4}}k_2, L^{\frac{3}{2}}k_3)$ y $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}, \gamma_{23}) \rightarrow (L^{-1}\gamma_1, L^{-2}\gamma_2, L^{-5}\gamma_3, L^{-2}\gamma_{13}, L^{-\frac{7}{2}}\gamma_{23})$ todas las desigualdades se conservan bajo estas transformaciones. Entonces el origen $x = 0$ es también estable en tiempo finito para el sistema (2.9) con las ganancias $(Lk_1, L^{\frac{3}{4}}k_2, L^{\frac{3}{2}}k_3)$, y $V(x)$ en (3.2) es una función de Lyapunov para el conjunto de parámetros $(L^{-1}\gamma_1, L^{-2}\gamma_2, L^{-5}\gamma_3, L^{-2}\gamma_{13}, L^{-\frac{7}{2}}\gamma_{23})$, para cualquier número real positivo, $L > 0$, cuando $\Delta = 0$. Se analizará esta transformación en el caso perturbado, entonces, aplicando la transformación al sistema (2.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Lk_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - L^{\frac{3}{4}}k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -L^{\frac{3}{2}}k_3\text{sgn}(x_1) + \dot{f}(x, t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

de igual forma en (3.2), que es la derivada temporal de la función de Lyapunov con la perturbación,

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -\frac{\gamma_{13}}{L^2}L^{\frac{3}{2}}k_3|x_1| + \frac{\gamma_{13}}{L^2}x_1\dot{f}(x,t) - 2\frac{\gamma_2}{L^2}L^{\frac{3}{4}}k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - \frac{\gamma_{23}}{L^{\frac{7}{2}}}|x_3|^3 \\ & - \left(2\frac{\gamma_2}{L^2}Lk_1 - \frac{4}{3}\frac{\gamma_1}{L}\right)[x_1]^{\frac{1}{3}}x_2 + \frac{\gamma_{23}}{L^2}Lk_1[x_1]^{\frac{1}{3}}[x_3]^2 \\ & - 4\frac{\gamma_3}{L^5}L^{\frac{3}{2}}k_3[x_1]^0x_3^3 + 4\frac{\gamma_3}{L^5}x_3^3\dot{f}(x,t) + \frac{\gamma_{23}}{L^2}L^{\frac{3}{4}}k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}[x_3]^2 \\ & + \left(2\frac{\gamma_2}{L^2} + \frac{\gamma_{13}}{L^2} + 2\frac{\gamma_{23}}{L^{\frac{7}{2}}}L^{\frac{3}{2}}k_3[x_1]^0[x_3]^0 - 2\frac{\gamma_{23}}{L^2}[x_3]^0\dot{f}(x,t)\right)x_2x_3\end{aligned}$$

la expresión anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -\gamma_{13}k_3\left|\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}}\right| - 2\gamma_2k_2\left|\frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}}\right|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23}\left|\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}\right|^3 - (2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1)\left|\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}}\right|^{\frac{1}{3}}\frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}} \\ & + \gamma_{23}k_1\left|\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}}\right|^{\frac{1}{3}}\left|\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}\right|^2 - 4\gamma_3k_3\left|\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}}\right|^0\left(\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}\right)^3 + \gamma_{23}k_2\left|\frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}}\right|^{\frac{1}{2}}\left|\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}\right|^2 \\ & + \left(2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3\left|\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}}\right|^0\left|\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}\right|^0\right)\left(\frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}}\right)\left(\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}\right) \\ & + \gamma_{13}\left(\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} + 4\gamma_3\left(\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}\right)^3\frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} - 2\gamma_{23}\frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}}\right)\left|\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}\right|.\end{aligned}$$

Considerando el siguiente cambio de coordenadas $z_1 = \frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}}$, $z_2 = \frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}}$ y $z_3 = \frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}$

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -\gamma_{13}k_3|z_1| - 2\gamma_2k_2|z_2|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23}|z_3|^3 - (2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1)[z_1]^{\frac{1}{3}}z_2 \\ & + \gamma_{23}k_1[z_1]^{\frac{1}{3}}[z_3]^2 - 4\gamma_3k_3[z_1]^0z_3^3 + \gamma_{23}k_2[z_2]^{\frac{1}{2}}[z_3]^2 \\ & + \left(2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3[z_1]^0[z_3]^0\right)z_2z_3 \\ & + \gamma_{13}z_1\frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} + 4\gamma_3z_3^3\frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} - 2\gamma_{23}|z_3|z_2\frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\tag{3.36}$$

en la sección 3.1.2 se obtuvo que bajo ciertas condiciones de k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{13} y γ_{23} se cumple la desigualdad

$$\dot{V} \leq -\alpha_1|x_1| - \alpha_2|x_2| - \alpha_3|x_3| < 0$$

cuando $f(x,t) = 0$ y con

$$\begin{aligned}0 < \alpha_1 &= \gamma_{13}k_3 - \frac{2}{3}\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|\beta_{12}^3 - \frac{1}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 \\ 0 < \alpha_2 &= 2\gamma_2k_2 - \frac{4}{3}\left|\left(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1\right)\right|\beta_{12}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\alpha \\ 0 < \alpha_3 &= \gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha, \lambda)\end{aligned}$$

entonces (3.36) se puede escribir como

$$\dot{V} \leq -\alpha_1|z_1| - \alpha_2|z_2| - \alpha_3|z_3| + \frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} (\gamma_{13}z_1 - 2\gamma_{23}z_2z_3 + 4\gamma_3|z_3|^3)$$

si además $|\dot{f}(x,t)| < \Delta$, entonces

$$\dot{V} \leq -\alpha_1|z_1| - \alpha_2|z_2| - \alpha_3|z_3| + \frac{\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} (\gamma_{13}z_1 + 2\gamma_{23}z_2z_3 + 4\gamma_3|z_3|^3). \quad (3.37)$$

De la desigualdad de Young

$$|z_2||z_3| \leq \vartheta_1|z_2|^{\frac{3}{2}} + \vartheta_2|z_3|^3$$

sustituyendo en (3.37) se obtiene

$$\dot{V} \leq -\left(\alpha_1 - \frac{\gamma_{13}\Delta}{L^{\frac{3}{2}}}\right)|z_1| - \left(\alpha_2 - \frac{2\vartheta_1\gamma_{23}\Delta}{L^{\frac{3}{2}}}\right)|z_2|^{\frac{3}{2}} - \left[\alpha_3 - (4\gamma_3 + 2\vartheta_2\gamma_{23})\frac{\Delta}{L^{\frac{3}{2}}}\right]|z_3|^3$$

en donde se muestra que se puede escoger una L lo suficientemente grande de tal manera que

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \frac{\gamma_{13}\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} &> 0 \\ \alpha_2 - \frac{2\vartheta_1\gamma_{23}\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} &> 0 \\ \alpha_3 - (4\gamma_3 + 2\vartheta_2\gamma_{23})\frac{\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} &> 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esto demuestra que una vez que se ha obtenido un juego de parámetros para los cuales el origen del sistema en el caso nominal es estable, solo es necesario encontrar una \bar{L} lo suficientemente grande que cumpla con (3.38) y entonces para toda $L > \bar{L}$ se demuestra la convergencia del origen del sistema perturbado.

Con esto también se muestra que el algoritmo es Robusto ante cualquier perturbación que sea Lipschitz con respecto al tiempo, es decir, sin importar cual sea la cota de la derivada temporal de la perturbación, teóricamente siempre será posible encontrar una \bar{L} para la cual la derivada de la función de Lyapunov sea negativa definida.

3.5. Métodos de diseño de las ganancias del algoritmo

A continuación se presentan dos métodos para el diseño de las ganancias del algoritmo (2.8), los cuales surgen de la función de Lyapunov propuesta.

3.5.1. Diseño de las ganancias a partir del caso perturbado

El diseño de las ganancias k_1 , k_2 y k_3 que estabilizan el origen del sistema (2.9) consiste en encontrar un conjunto de parámetros k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{13} y γ_{23} , que cumplan las desigualdades

$$0 < \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2 \quad (3.39)$$

$$\Delta < k_3 \quad (3.40)$$

$$0 < \phi(\alpha, \lambda) < v(\alpha) \quad (3.41)$$

$$0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1|^3}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta)}} \quad (3.42)$$

con Δ conocida y $v(\alpha)$ definida en (3.34).

Entonces se propone una $k_3 > \Delta$, y de la misma forma que en la validación de la función de Lyapunov en el caso nominal, se considera

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1}$$

y de (3.39)

$$\gamma_3 = \eta \left(\frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2} \right)$$

con la variable positiva $\eta > 1$.

A la condiciones (3.41) y (3.42) se les da nuevamente una interpretación gráfica, en donde (3.42) define el intervalo de α en el que la curva de la función $\psi(\alpha, \lambda)$ debe pasar por debajo de la curva de la función $v(\alpha)$. Se tienen entonces los parámetros k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_{13} , γ_{23} y η para ser diseñados de tal forma que cumplan con las condiciones (3.39)-(3.42) para cada Δ . En las figuras 3.4 y 3.5 se muestran las gráficas de las funciones $v(\alpha)$ y $\psi(\alpha, \lambda)$ correspondientes a cada columna de la tabla de parámetros 3.2 que cumplen con las desigualdades (3.39)-(3.42).

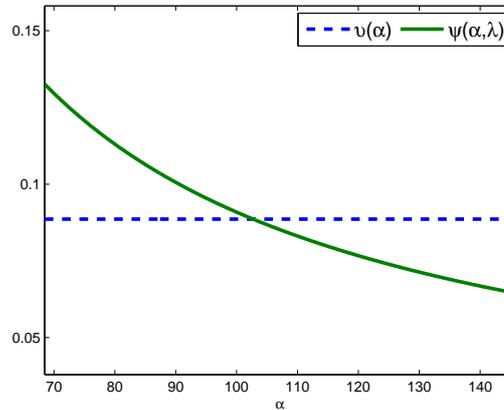
Note que en este caso para $\Delta = 1$ y $\Delta = 4$ se tuvieron que diseñar k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_{13} , γ_{23} y η , de tal forma que con la verificación gráfica de las desigualdades se garantiza la convergencia del origen del sistema.

3.5.2. Diseño de las ganancias a partir del caso nominal

Como consecuencia de la transformación que se presentó en la sección anterior surge otro método de diseño. En este método a partir de una serie de parámetros que se

	Figura 3.4	Figura 3.5
k_1	2	7
k_2	3	5
k_3	1.1	6
γ_1	11	19
γ_2	3.66	1.81
γ_3	6×10^{-4}	2.05
γ_{13}	1.5	0.75
γ_{23}	0.05	0.1
η	1.1	1.1
Δ	1	4

Tabla 3.2: Parámetros de la función de Lyapunov

Figura 3.4: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 1 de la tabla 3.2

hayan obtenido de las condiciones para el caso nominal, solo se requiere rediseñar la variable positiva $L > 1$ para una Δ dada.

Por ejemplo, considere los parámetros del caso nominal de la segunda columna de la tabla 3.1: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1.1$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = 1.66$, $\gamma_3 = 2.5 \times 10^{-3}$, $\gamma_{13} = 1$, $\gamma_{23} = 0.1$ y $\eta = 1.1$, que al ser evaluados con $\Delta = 1$ no cumplen con la condición $\psi(\alpha, \lambda) < v(\alpha)$, ver figura 3.6 (a), entonces se ajusta el valor de L a 1.5 y al verificar con este valor se observa que la condición se cumple, ver figura 3.6 (b).

Ahora considere $\Delta = 4$, nuevamente se consideran los parámetros del caso anterior y se ajusta $L = 2$, y con este sencillo ajuste de L se validan los parámetros para $\Delta = 4$, ver

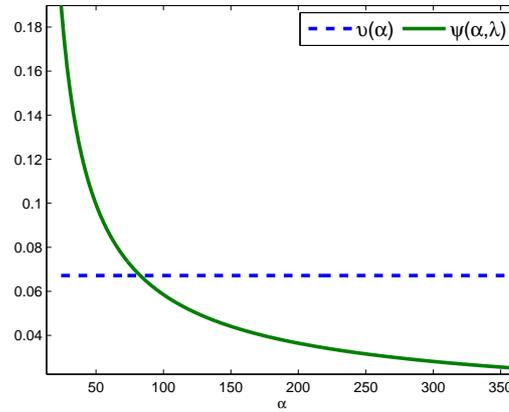


Figura 3.5: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.2

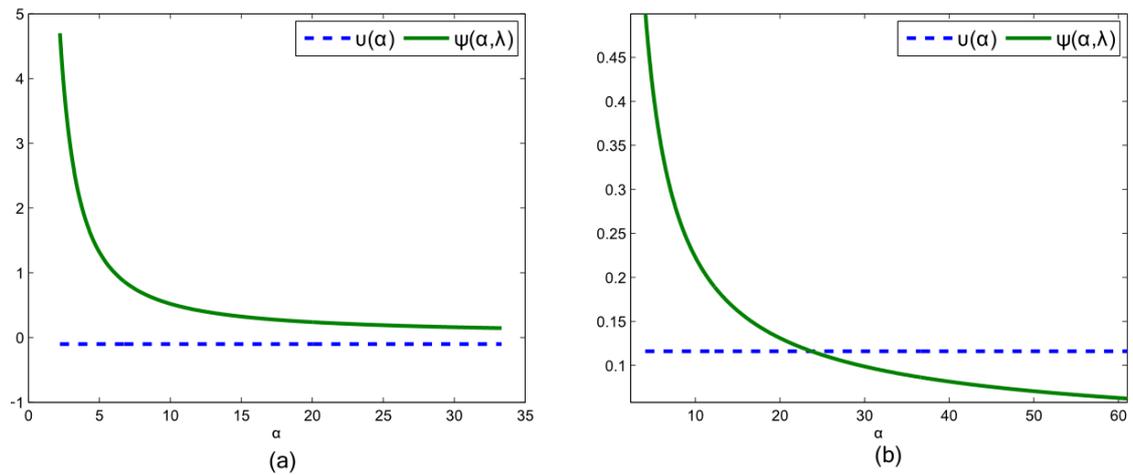


Figura 3.6: (a) Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 1$ y $L = 1$, (b) Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 1$ y $L = 1.5$,

figura 3.7.

A diferencia del método anterior, en donde para cada Δ es necesario rediseñar siete parámetros, con este método solo se requiere ajustar uno, y la forma de hacerlo es incrementándolo.

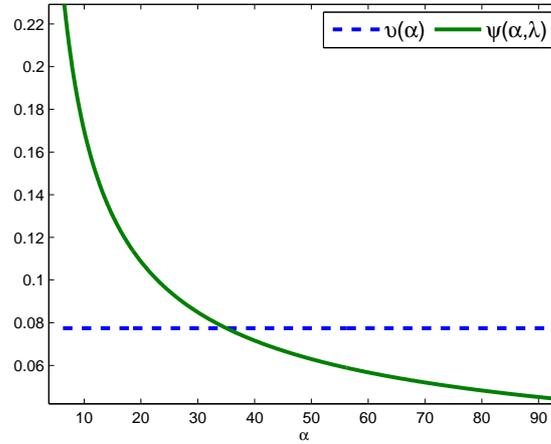


Figura 3.7: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 4$ y $L = 2$

3.6. Resumen del capítulo

En este capítulo se presentó una función de Lyapunov que demuestra la convergencia en tiempo finito del sistema (1.1) cuando se le aplica el algoritmo (2.8). De igual manera se obtuvieron las siguientes condiciones que garantizan la convergencia del sistema (2.9) con $\dot{f}(x, t) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Delta &< k_3 \\ 0 &< \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2 \\ 0 &< \phi(\alpha, \lambda) < v(\alpha) \\ 0 &< \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1|^3}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta)}} \end{aligned}$$

con

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \left(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \Delta) - \sqrt{\Pi} \right)$$

donde

$$\Pi = \frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta) (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right) \right|^3}.$$

Como consecuencia de estas condiciones se presenta un método de diseño de ganancias en donde partiendo de una Δ conocida y a través de una verificación gráfica se diseñan

los parámetros k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_{13} , γ_{23} y η , de tal forma que se satisfagan las condiciones anteriores. Este método presenta cierta flexibilidad debido a las siete variables que pueden ser ajustadas pero, ya que no se sabe cual es la mejor forma de sintonizar estos parámetros, se puede convertir en una tarea tediosa.

El método de diseño presentado a partir del caso nominal ofrece la ventaja de que una vez que se tienen los parámetros que satisfacen las condiciones con $\Delta = 0$, solo es necesario diseñar la variable L para la cual se satisfacen las condiciones anteriores aplicando la transformación de cada parámetro, es decir, para la verificación se ocupan las condiciones del caso perturbado pero sin tener que diseñar siete variables, solo una L para cada Δ dada. Esto significa que para cualquier Δ solo se requiere ajustar L partiendo de un juego de parámetros validados para el caso nominal.

Capítulo 4

Conclusiones

El problema de controlar sistemas con incertidumbres o perturbaciones ha sido objeto de estudio durante las últimas décadas. En esta tesis se ha planteado el problema específico de controlar sistemas de segundo orden en la forma canónica de controlador con una incertidumbre y/o perturbación acoplada al control y que es Lipschitz como función del tiempo. Para resolver esto se ha propuesto un algoritmo inspirado en la evolución de algoritmos continuos y discontinuos, principalmente de las propiedades que presenta el algoritmo *Super-Twisting* para sistemas de primer orden.

Se ha propuesto un algoritmo homogéneo, que a diferencia de los algoritmos discontinuos que se encuentran en la literatura, logra estabilizar robustamente un sistema de segundo orden con grado relativo 2, a través de una acción de control continua y en tiempo finito, lo cual desde el punto de vista práctico resulta en la posibilidad de implementar el esquema sin la preocupación de las limitaciones o desgaste de los actuadores. Además el controlador propuesto puede ser aplicado en el seguimiento de una señal variante en el tiempo, característica que lo distingue de otros algoritmos por modos deslizantes que solo pueden ser aplicados para resolver problemas de regulación.

Para probar la convergencia del algoritmo en el caso nominal se propuso una función, de donde se obtuvieron condiciones suficientes para demostrar que la función es positiva definida y su derivada temporal negativa definida, y con ello que es una función de Lyapunov. Se encontraron ganancias del algoritmo y coeficientes de la función que cumplen con las condiciones obtenidas, con lo que se validó la función de Lyapunov. Además se incluyen las condiciones para el caso perturbado cuando se conoce una cota de la derivada temporal del término de perturbación. La función de Lyapunov propuesta también es usada en la prueba

de la convergencia en tiempo finito del sistema a lazo cerrado.

Como consecuencia de las condiciones obtenidas de la función de Lyapunov se presentó un método de diseño de ganancias en donde partiendo de una Δ conocida y a través de una verificación gráfica se diseñan los parámetros $k_1, k_2, k_3, \gamma_1, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ y η . Este método presenta cierta flexibilidad debido a las siete variables a diseñar pero, ya que no se sabe cual es la mejor forma de diseñar estos parámetros, esta actividad se puede convertir en una tarea complicada y tediosa.

Se presentó un segundo método de diseño que, a partir de parámetros que satisfacen las condiciones en el caso nominal, solo requiere el ajuste de una variable L para una Δ dada. Este método surge de una transformación de variables que muestra que el algoritmo es robusto ante cualquier perturbación Lipschitz respecto al tiempo. Esto significa que usando alguno de los conjuntos de parámetros que se validaron para el caso nominal, se puede ajustar L para cualquier Δ conocida.

A lo largo de este trabajo se consideró que se pueden medir los estados x_1 y x_2 , lo cual no siempre es posible en la práctica. Como trabajo futuro queda analizar la respuesta del algoritmo cuando se requiere de un observador, o proponer una solución para cuando no se pueden medir todos los estados.

El control propuesto es solo un paso más en la búsqueda de extender este tipo de esquemas a sistemas de orden arbitrario, por lo que aún resta analizar cómo se puede extender este algoritmo para desarrollar un esquema generalizado que se pueda aplicar a sistemas de cualquier orden y grado relativo conservando la propiedad de homogeneidad en el sistema a lazo cerrado.

Apéndice A

Homogeneidad del Control Integral Discontinuo y de la función de Lyapunov

A.1. Homogeneidad del Control Integral Discontinuo

El sistema resultante de aplicar el algoritmo (2.8) a (1.1) es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3\text{sgn}(x_1) + \dot{f}(x, t)\end{aligned}$$

este sistema se puede ver como una inclusión diferencial que es homogénea [Levant, 2005] con grado $\delta_f = -1$ y los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$.

La definición de homogeneidad dice que un campo vectorial (inclusión diferencial) $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ es homogéneo(a) de grado δ_f ($\delta_f \in \mathbb{R}$) si

$$f_i(d_k^r(x)) = k^{\delta_f + r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k > 0, \quad i = 1 \dots n \quad (\text{A.1})$$

con la dilatación

$$d_{k>0}^r(x) = (k^{r_1}x_1, \dots, k^{r_n}x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k > 0.$$

Para los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$

$$d_k(x) = (k^3x_1, k^2x_2, kx_3) \quad \forall k > 0$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(d_k^r(x)) &= k^2 x_2 = k^2 \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2(d_k^r(x)) &= -k_1 k |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sgn}(x_1) - k_2 k |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(x_2) + k x_3 = k^1 \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3(d_k^r(x)) &= -k_3 \text{sgn}(x_1) + \dot{f}(x, t) = k^0 \dot{x}_3\end{aligned}$$

de la definición (A.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(d_k^r(x)) &= k^{\delta_f+3} \dot{x}_1 = k^2 \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2(d_k^r(x)) &= k^{\delta_f+2} \dot{x}_2 = k^1 \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3(d_k^r(x)) &= k^{\delta_f+2} \dot{x}_2 = k^0 \dot{x}_3\end{aligned}$$

entonces se deben de cumplir

$$\begin{aligned}\delta_f + 3 &= 2 \\ \delta_f + 2 &= 1 \\ \delta_f + 1 &= 0\end{aligned}$$

en donde claramente la solución a estas ecuaciones es $\delta_f = -1$, con lo que se demuestra que el sistema en lazo cerrado es una inclusión diferencial homogénea con grado $\delta_f = -1$ y los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$.

A.2. Homogeneidad de la función de Lyapunov

La función propuesta como función de Lyapunov es

$$V(x) = \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2 |x_2|^2 + \gamma_3 |x_3|^4 + \gamma_{13} x_1 x_3 - \gamma_{23} x_2 [x_3]^2$$

esta función es homogénea con $\delta_V = 4$ y los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$.

La definición de homogeneidad dice que una función $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es homogénea de grado δ_V ($\delta_V \in \mathbb{R}$) si

$$V(d_k^r(x)) = k^{\delta_V} V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k > 0 \quad (\text{A.2})$$

con la dilatación

$$d_{k>0}^r(x) = (k^{r_1} x_1, \dots, k^{r_n} x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k > 0.$$

Para los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$

$$d_k(x) = (k^3 x_1, k^2 x_2, k x_3) \quad \forall k > 0$$

entonces

$$V(d_k^r(x)) = \gamma_1 k^4 |x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2 k^4 |x_2|^2 + \gamma_3 k^4 |x_3|^4 + \gamma_{13} k^4 x_1 x_3 - \gamma_{23} k^4 x_2 [x_3]^2 = k^4 V(x)$$

de la definición (A.2)

$$V(d_k^r(x)) = k^4 V(x) = k^{\delta_V} V(x)$$

entonces $\delta_V = 4$, con lo que se demuestra que $V(x)$ es una función homogénea con $\delta_V = 4$ y los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$.

Apéndice B

Prueba del Lema 1

Lema. Para todo valor real de x_2 y x_3 , para todo valor positivo de $\alpha > 0$ y $\delta > 0$, y cualquier valor de λ , la desigualdad

$$\lambda x_2 x_3 + \delta [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \frac{1}{\delta} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \delta^2 \phi(\alpha, \lambda) |x_3|^3 \quad (\text{B.1})$$

se satisface para todo t , si y solo si

$$\phi(\alpha, \lambda) \geq \psi(\alpha, \lambda)$$

donde la función $\psi(\alpha, \lambda)$ está definida por

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \psi_1(\alpha, \lambda) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\psi_1(\alpha, \lambda) = -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

$$\psi_2(\alpha, \lambda) = \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

Demostración. Se tiene la desigualdad

$$\lambda x_2 x_3 + [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \phi |x_3|^3$$

considere $z_2 = x_2^{\frac{1}{2}}$ y $z_3 = x_3$, entonces se tiene que demostrar que el polinomio homogéneo

$$p = \alpha |z_2|^3 + \phi |z_3|^3 - \lambda [z_2]^2 z_3 - z_2 [z_3]^2 \geq 0 \quad \forall z_2, z_3 \in \mathbb{R}$$

sea positivo definido para todo valor de λ , para ello se tienen que considerar los siguientes tres casos:

- $z_3 = 0$. En este caso

$$p^0(z) = \alpha|z_2|^3 \geq 0 \rightarrow \alpha > 0$$

- $z_3 = +1$.

$$\begin{aligned} p^+ &= \alpha|z_2|^3 - \lambda|z_2|^2 - z_2 + \phi \\ &= \alpha|z_2|^3 - \lambda|z_2|^2 \operatorname{sgn}(z_2) - z_2 + \phi \end{aligned}$$

Ahora se consideran dos casos

1. $z_2 > 0$

$$p_+^+ = \alpha z_2^3 - \lambda z_2^2 - z_2 + \phi \geq 0$$

los puntos críticos están en

$$\frac{d}{dz_2} p_+^+ = 3\alpha z_2^2 - 2\lambda z_2 - 1 = 0$$

es decir

$$r_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

donde $\gamma_2, \gamma_{13}, \gamma_{23} > 0$, entonces solo existe una solución positiva de z_2 dada por

$$r_1 = \frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

y para esta se tiene

$$p_+^+ = \alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right) + \phi \geq 0$$

esto implica que

$$\phi \geq -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

2. $z_2 < 0$

$$p_-^+ = -\alpha z_2^3 + \lambda z_2^2 - z_2 + \phi \geq 0$$

los puntos críticos están en

$$\frac{d}{dz_2} p_-^+ = -3\alpha z_2^2 + 2\lambda z_2 - 1 = 0$$

es decir

$$r_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

a) Cuando $|\lambda|^2 - 3\alpha < 0$, la función es monótona decreciente, por lo tanto hay un mínimo en $z_2 = 0$, entonces

$$\phi > 0$$

b) Cuando $|\lambda|^2 - 3\alpha \geq 0$, y para $0 < \lambda$ no hay soluciones en $z_2 < 0$, y al ser decreciente la función, de nuevo hay un mínimo en $z_2 = 0$ y se repite la condición anterior, pero cuando $\lambda < 0$ las dos raíces son negativas, pero se tiene un mínimo en

$$r_2 = \frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

y para esta se tiene

$$-\alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right) + \phi \geq 0$$

esto implica que

$$\phi \geq \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

cuando $\lambda < -\sqrt{3\alpha}$.

■ $z_3 = -1$

$$\begin{aligned} p^- &= \alpha|z_2|^3 + \lambda|z_2|^2 + z_2 + \phi \\ &= \alpha|z_2|^3 + \lambda|z_2|^2 \operatorname{sgn}(z_2) + z_2 + \phi \end{aligned}$$

Considerando los dos casos para z_2

1. $z_2 > 0$

$$p_+^- = \alpha z_2^3 + \lambda z_2^2 + z_2 + \phi \geq 0$$

los puntos críticos están en

$$\frac{d}{dz_2} p_+^- = 3\alpha z_2^2 + 2\lambda z_2 + 1 = 0$$

es decir

$$r_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

a) Cuando $|\lambda|^2 - 3\alpha < 0$, la función es monótona creciente, por lo tanto hay un mínimo en $z_2 = 0$, entonces

$$\phi > 0$$

b) Cuando $|\lambda|^2 - 3\alpha \geq 0$, no hay soluciones en $z_2 > 0$ si $0 < \lambda$, y al ser creciente la función, de nuevo hay un mínimo en $z_2 = 0$ y se repite la condición anterior, si $\lambda < 0$ entonces sí hay soluciones en $z_2 > 0$ y se encuentra un mínimo en

$$r_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} = -\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

y para esta se tiene

$$-\alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right) + \phi \geq 0$$

esto implica que

$$\phi \geq \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

cuando $\lambda < -\sqrt{3\alpha}$.

2. $z_2 < 0$

$$p_- = -\alpha z_2^3 - \lambda z_2^2 + z_2 + \phi \geq 0$$

los puntos críticos están en

$$\frac{d}{dz_2} p_- = -3\alpha z_2^2 - 2\lambda z_2 + 1 = 0$$

es decir

$$r_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

entonces para todo valor de λ existe solo una solución negativa de z_2 , dada por

$$r_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} = -\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

y para esta se tiene

$$p_- = \alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right) + \phi \geq 0$$

por lo que

$$\phi \geq -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

Entonces para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ se deben de cumplir

$$\begin{aligned}\alpha &> 0 \\ \phi &\geq -\alpha r_1^3 + \lambda r_1^2 + r_1 > 0\end{aligned}$$

con

$$r_1 = \frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

y

$$\phi \geq \alpha r_2^3 - \lambda r_2^2 + r_2 > 0$$

cuando $\lambda < -\sqrt{3\alpha}$, con

$$r_2 = \frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

Nótese que en el lema no se incluye la condición $\max(0, \psi_1(\alpha, \lambda))$ con $\lambda \geq -\sqrt{3\alpha}$, debido a las propiedades de la función ψ que se muestran en el apéndice C.

Ahora reemplazando $x_2 \rightarrow \eta x_2$ y $x_3 \rightarrow \eta x_3$ para alguna $\eta > 0$, en la expresión

$$\lambda x_2 x_3 + [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \phi |x_3|^3$$

se obtiene

$$\lambda \eta^2 x_2 x_3 + \eta^{\frac{5}{2}} [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \eta^{\frac{3}{2}} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \eta^3 \phi |x_3|^3$$

dividiendo entre η^2

$$\lambda x_2 x_3 + \eta^{\frac{1}{2}} [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \eta^{-\frac{1}{2}} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \eta \phi |x_3|^3$$

con $\delta = \eta^{\frac{1}{2}}$

$$\lambda x_2 x_3 + \delta [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \frac{1}{\delta} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \delta^2 \phi |x_3|^3$$

□

Apéndice C

La función $\psi(\alpha, \lambda)$

La función

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \max(0, \psi_1(\alpha, \lambda)) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\psi_1(\alpha) = -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

$$\psi_2(\alpha) = \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

presenta las siguientes características

- ψ es siempre es positiva con $\lambda > 0$

Cuando $\lambda > 0$

$$\psi = \max(0, \psi_1)$$

donde

$$\psi_1(\alpha) = -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -\frac{1}{3^3\alpha^2} \left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right)^3 + \frac{\lambda}{3^2\alpha^2} \left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right)^2 \\
&= +\frac{1}{3\alpha} \left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right) - \frac{1}{3^3\alpha^2} \left(4\lambda^3 + 4\lambda^2\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} + 9\lambda\alpha + 3\alpha\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{3^2\alpha^2} \left(2\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} + 3\alpha \right) + \frac{1}{3\alpha} \left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right) \\
&= \frac{2\lambda^2 + 2\lambda^2\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} - 3\alpha\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3^3\alpha^2} + \frac{\left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right)}{3\alpha}
\end{aligned}$$

finalmente

$$\psi_1 = \frac{2\lambda^3 + 2\lambda^2\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} + 6\alpha\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} + 3^2\alpha\lambda}{3^3\alpha^2}$$

donde claramente $\psi_1 > 0 \forall \alpha > 0, \lambda > 0$ y por lo tanto $\psi > 0$

Esta propiedad es empleada en el *Lema 1* en donde se omite la condición de que $\psi_1 > 0$ cuando $\lambda \geq -\sqrt{3\alpha}$.

- $\psi_{\lambda_1} > \psi_{\lambda_2}$

Se sabe que λ puede tomar dos valores diferentes

$$\lambda_1 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3$$

$$\lambda_2 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}k_3$$

si $\gamma_2, \gamma_{13}, \gamma_{23} > 0$, entonces $\lambda_1 > 0$ y por lo tanto

$$\psi_{\lambda_1} = \psi_{1\lambda_1}$$

y $\psi_{\lambda_1} > 0$.

En la figura C.1 se muestra la función ψ respecto a λ , en donde se puede apreciar que $\psi_{-\lambda} < \psi_{\lambda}$, y debido a que $\lambda_1 > |\lambda_2|$ entonces

$$\psi_{\lambda_2} < \psi_{\lambda_1}$$

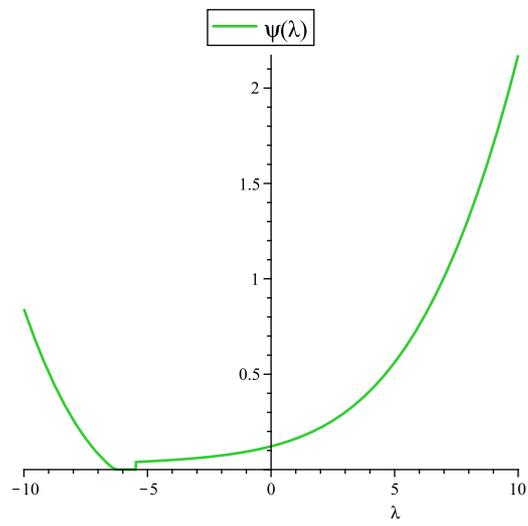


Figura C.1: $\psi(\alpha, \lambda)$ respecto a λ

Bibliografía

- [Bacciotti y Rosier, 2005] Bacciotti, A. y Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. New York: Springer - Verlag, 2nd edition.
- [Bhat y Bernstein, 2000] Bhat, S. P. y Bernstein, D. S. (2000). Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, (38):751–766.
- [Davila et al., 2006] Davila, J., Fridman, L., y Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79:1251–1262.
- [Filippov, 1988] Filippov, J. A. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [Fridman y Levant, 2002] Fridman, L. y Levant, A. (2002). *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, Inc.
- [Hardy et al., 1951] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., y Pólya, G. (1951). *Inequalities*. Cambridge, University Press.
- [Khalil, 1996] Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. USA, Prentice-Hall, second ed.
- [Kokotovic, 1992] Kokotovic, V. P. (1992). The joy of feedback: Nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems*, pages 7–17.
- [Levant, 1993] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6):1247–1263.
- [Levant, 2005] Levant, A. (2005). Homogeneity approach to higher-order sliding mode design. *Automatica*, (34):576–586.

- [Levant, 2007] Levant, A. (2007). Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, (43):576–586.
- [Moreno y Osorio, 2012] Moreno, J. y Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the Super-Twisting Algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4).
- [Moreno, 2008] Moreno, J. A. (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. *Proceedings of the 47th Conference on Decision and Control*.
- [Moreno, 2012] Moreno, J. A. (2012). Lyapunov function for Levant’s second order differentiator. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6448–6453.
- [Polyakov y Poznyak, 2009] Polyakov, A. y Poznyak, A. (2009). Reaching time estimation for Super-Twisting second order sliding mode controller via Lyapunov function designing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(8):1951–1955.
- [Santiesteban et al., 2010] Santiesteban, R., Fridman, L., y Moreno, J. (2010). Finite-time convergence analysis for Twisting controller via a strict Lyapunov function. *IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*.
- [Sánchez y Moreno, 2012] Sánchez, T. y Moreno, J. (2012). Construction of Lyapunov functions for a class of higher order sliding modes algorithms. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6454–6459.
- [V. Utkin y Shi, 2009] V. Utkin, J. G. y Shi, J. (2009). *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. CRC Press, Taylor and Francis, Orlando, FL, 2nd edition.