



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

CONTROL DE POSICIÓN Y FUERZA PARA UN  
SISTEMA DE TELEOPERACIÓN MAESTRO-ESCLAVO  
CON SUPERFICIE DE CONTACTO DESCONOCIDA

T E S I S

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

ÁREA: ELÉCTRICA, CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A:

JAVIER PLIEGO JIMÉNEZ

TUTOR:

DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

MÉXICO, D.F. 2012

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoría

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

1er. Suplente: Dr. Paul Rolando Maya Ortíz

2do. Suplente: Dr. Alejandro Rodríguez Angeles

La tesis se realizó en el laboratorio de Robótica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

---

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

**A mis abuelos.**

# Agradecimientos

*A mis padres y hermana por su apoyo incondicional durante esta etapa de mi vida.*

*Al Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez por su apoyo y enseñanzas que me ha brindado durante mis estudios de maestría y la elaboración del trabajo de tesis.*

*A los profesores del Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería campo Control por todas sus enseñanzas.*

*A mis compañeros del Laboratorio de Robótica por todos sus valiosos consejos y comentarios.*

*Finalmente quiero agradecer al CONACyT por el apoyo económico que me otorgó durante mis estudios de maestría y en el desarrollo de este trabajo de tesis.*

## Resumen

Este trabajo de investigación aborda el problema de control de posición y fuerza para un sistema de teleoperación del tipo maestro-esclavo donde el objeto o superficie de contacto no se conoce completamente. Se considera un esquema de teleoperación bilateral donde el robot maestro transmite información de posición y fuerza, por su parte el esclavo solo transmite información de fuerza. Puesto que se consideran superficies rígidas se emplea el Principio de Ortogonalización para el diseño y análisis de los algoritmos de control propuestos.

Para el diseño de la ley de control del robot esclavo se consideran dos casos. En el primer caso solo se conoce un punto de la superficie y se estima la superficie localmente por medio de mediciones de fuerza. En el segundo caso se considera incertidumbre paramétrica en la superficie, se propone un esquema de control adaptable que estima dichos parámetros y logra el seguimiento de posición y fuerza en presencia de Excitación Persistente. El algoritmo de control para el robot maestro está basado en superficies virtuales, el cual logra que el sistema sea transparente, por lo que el operador puede sentir las fuerzas de contacto.

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>III</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	3
1.1.1. Control de posición/fuerza . . . . .	3
1.1.2. Sistemas teleoperados . . . . .	4
1.1.3. Superficie desconocida . . . . .	5
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	6
1.3. Contribución . . . . .	6
1.4. Organización de la tesis . . . . .	7
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo cinemático . . . . .	9
2.1.1. Cinemática directa . . . . .	9
2.1.2. Cinemática inversa . . . . .	10
2.1.3. Cinemática diferencial . . . . .	11
2.1.4. Singularidades . . . . .	11
2.2. Modelo dinámico . . . . .	12
2.2.1. Modelo dinámico en movimiento libre . . . . .	12
2.2.2. Restricciones holonómicas . . . . .	13
2.2.3. Modelo dinámico en movimiento restringido . . . . .	13
2.2.4. Propiedades del modelo dinámico . . . . .	14
2.3. Principio de Ortogonalización . . . . .	15
<b>3. Control de posición/fuerza en entornos no estructurados</b>	<b>21</b>
3.1. Introducción . . . . .	21
3.2. Superficie desconocida . . . . .	22
3.2.1. Ley de control . . . . .	23
3.3. Estimación de la superficie . . . . .	25
3.3.1. Parametrización . . . . .	26
3.3.2. Algoritmo de mínimos cuadrados . . . . .	28
3.3.3. Algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido . . . . .	31
3.3.4. Control adaptable de posición/fuerza con estimación de la superficie . . . . .	33

<b>4. Control de un sistema maestro-esclavo con superficie desconocida</b>	<b>37</b>
4.1. Introducción . . . . .	37
4.2. Modelo dinámico del sistema de teleoperación maestro-esclavo . . . . .	38
4.3. Superficie virtual . . . . .	39
4.4. Modelo matemático del humano . . . . .	40
4.5. Ley de Control . . . . .	41
<b>5. Resultados</b>	<b>45</b>
5.1. Resultados experimentales . . . . .	46
5.1.1. Estimación local . . . . .	46
5.2. Resultados en simulación . . . . .	50
5.2.1. Estimación de la superficie . . . . .	50
5.2.2. Teleoperación . . . . .	59
<b>6. Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>
<b>A. Demostraciones</b>	<b>73</b>
A.1. Demostración del Teorema 3.1 . . . . .	74
A.2. Demostración del Teorema 3.2 . . . . .	79
A.3. Demostración del Teorema 4.1 . . . . .	82
<b>B. Robot de 3 grados de libertad</b>	<b>87</b>
B.1. Cinemática Directa . . . . .	87
B.2. Cinemática Inversa . . . . .	89
B.3. Modelo Dinámico . . . . .	90

# Índice de figuras

1.1. Esquema de teleoperación maestro-esclavo . . . . .	2
2.1. Principio de Ortogonalización . . . . .	15
2.2. Representación gráfica del Hecho 2.1 . . . . .	17
3.1. Estimación local de la superficie . . . . .	24
3.2. Intersección entre la superficie estimada y real . . . . .	27
3.3. Control Adaptable de posición y fuerza con estimación de la superficie . . . . .	35
4.1. Sistema de Teleoperación Maestro-Esclavo . . . . .	38
4.2. Esquema de teleoperación bilateral . . . . .	43
5.1. Orientación deseada del efector final . . . . .	46
5.2. Superficie desconocida. Trayectoria real (—) vs trayectoria deseada (—) . . . . .	47
5.3. Superficie desconocida. Trayectoria real (—) vs trayectoria deseada (—) . . . . .	48
5.4. Superficie desconocida. Fuerza . . . . .	49
5.5. Superficie desconocida. Gradiente . . . . .	49
5.6. Restricción real (—) vs estimada (—) . . . . .	50
5.7. Simulación 1: Robot en contacto con una superficie plana . . . . .	51
5.8. Superficie plana. Trayectoria real (—) vs deseada (—) . . . . .	52
5.9. Superficie plana. Errores de seguimiento . . . . .	53
5.10. Superficie plana. Fuerza . . . . .	54
5.11. Superficie plana. Parámetros . . . . .	54
5.12. Simulación 2. Robot en contacto con una superficie circular . . . . .	55
5.13. Superficie circular. Trayectoria real (—) vs deseada (—) . . . . .	56
5.14. Superficie plana. Errores de seguimiento . . . . .	57
5.15. Superficie plana. Fuerza . . . . .	58
5.16. Superficie plana. Parámetros . . . . .	58
5.17. Teleoperación. Trayectoria real (—) vs deseada (—) . . . . .	61
5.18. Teleoperación. Coordenadas cartesianas maestro(—) vs esclavo (—) . . . . .	62
5.19. Teleoperación. Errores de posición para el esclavo . . . . .	63
5.20. Teleoperación. Fuerza . . . . .	64
B.1. Asignación de los sistemas de referencia para el Robot A465 . . . . .	88
B.2. Solución geométrica de la cinemática inversa para el robot A465 . . . . .	89

# Índice de tablas

B.1. Parámetros de Denavit-Hartenbergt . . . . .	88
B.2. Parámetros del robot A465 . . . . .	92
B.3. Parámetros de los motores . . . . .	92

# Capítulo 1

## Introducción

En la actualidad, los robots deben realizar tareas más demandantes y no solo ejecutar tareas en movimiento libre en el espacio de trabajo. Ahora, los manipuladores deben realizar tareas de seguimiento de alta precisión y al mismo tiempo interactuar con el medio ambiente. La coordinación de sistemas robóticos es esencial para realizar tareas más complejas, las cuales no podrían realizarse con un solo robot. Para controlar dos o más robots realizando una tarea cooperativa existen tres enfoques principales de control: sistema maestro-esclavo, control centralizado y control descentralizado. Este documento se centra en el sistema de teleoperación maestro-esclavo mostrado en la Figura 1.1, el cual permite realizar tareas que no pueden ser llevadas a cabo por un operador humano; tales como manipulación de materiales tóxicos o radioactivos, realizar labores en ambientes de difícil acceso, exploración de entornos remotos, etc. Los sistemas maestro-esclavo son ideales para realizar tareas en la industria aeroespacial, química, nuclear, etc.

El prefijo *tele* proviene del griego y significa *a distancia*, naturalmente *teleoperación* indica operación a distancia. El sistema de teleoperación maestro-esclavo está constituido por un manipulador controlado por el humano llamado robot maestro y un segundo o varios manipuladores que siguen el movimiento del robot maestro conocidos como robots esclavos. De manera general, este esquema opera de la siguiente forma: el humano aplica una fuerza al efector final del robot maestro llevándolo por la trayectoria deseada y la posición de su efector final se transmite al robot esclavo, el cual trata de seguir la trayectoria generada por el humano.

Desde el punto de vista de control los objetivos principales en los sistemas de teleoperación bilateral maestro-esclavo son:

**Estabilidad.** La estabilidad del sistema completo se debe garantizar.

**Telepresencia.** Proporcionar al operador la sensación de estar en contacto con el objeto o ambiente remoto.

**Transparencia.** Si el operador solo siente la dinámica del objeto o entorno que está manipulando se dice que el sistema es transparente.

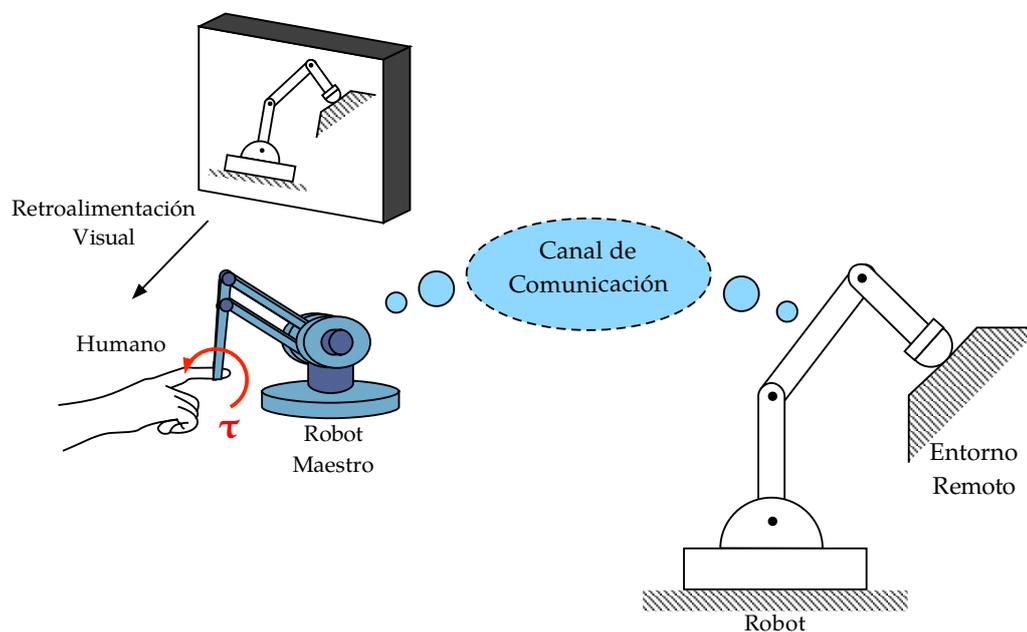


Figura 1.1: Esquema de teleoperación maestro-esclavo

Por otra parte, cuando el efector final del manipulador está en contacto con una superficie, la cual se puede modelar como una restricción holonómica es necesario controlar la posición, velocidad y fuerza que el robot ejerce hacia el ambiente. Existen varios esquemas de control que asumen conocido el ambiente u objeto de contacto. Sin embargo, si la superficie de contacto no se conoce no se pueden aplicar dichos esquemas, este caso es común ya que no siempre es posible medir todos los parámetros que describen la superficie. Este es precisamente el tema de estudio en este trabajo de tesis, donde se proponen distintos esquemas de control que compensan incertidumbres en la superficie o el desconocimiento de la misma, empleando para ello únicamente sensores de posición y fuerza. En este trabajo se consideran dos casos:

- a) **Superficie desconocida.** Se desconoce la geometría de la superficie de contacto.
- b) **Incertidumbre Paramétrica.** Se conoce la geometría de la superficie pero se desconocen  $p$  parámetros de la misma.

## 1.1. Estado del arte

### 1.1.1. Control de posición/fuerza

La mayoría de las tareas industriales requieren no solo controlar la posición del efector final del manipulador sino también la fuerza aplicada al entorno, *e.g.* tareas de ensamblaje, soldadura, pulido y corte. Los esquemas de control de posición y fuerza existentes en la literatura se clasifican de manera general en dos categorías: control de impedancia y control híbrido de posición/fuerza. El control de impedancia propuesto por Hogan (1985) establece una relación entre la fuerza de contacto, la posición y la velocidad del efector final del manipulador, por lo tanto, el control por impedancia se centra en la fuerza de interacción y no en el seguimiento de posición y fuerza deseada. Básicamente, el control por impedancia asigna una dinámica deseada entre efector final del manipulador y el entorno. Generalmente la dinámica preestablecida es la de un sistema masa-resorte-amortiguador.

El control híbrido divide la tarea en dos subespacios de posición y fuerza. Fue propuesto por primera vez por Raibert y Craig (1981). La selección de dichos subespacios se realiza por medio de matrices de proyección. Una revisión del esquema de control se puede encontrar en Sciavicco y Siciliano (2009). Posteriormente, McClamroch y Wang (1998) mostraron que el modelo dinámico del manipulador en el que su movimiento está restringido a una superficie rígida se puede describir por un conjunto de ecuaciones algebraico-diferenciales (DAE por sus siglas en inglés); además, propusieron una ley de control basada en una transformación de coordenadas no lineal. Arimoto *et al.* (1993) propusieron un esquema de control basado en el Principio de Ortogonalización, que resuelve de manera eficiente la obtención de los subespacios de posición y fuerza. La principal ventaja del control híbrido con respecto al control de impedancia es que se puede controlar posición y fuerza de forma independiente.

El esquema de control de fuerza implícito no requiere retroalimentación de la fuerza de contacto Liu *et al.* (1996).

### 1.1.2. Sistemas teleoperados

De acuerdo con Hokayem y Spong (2006) la teleoperación comenzó a mediados de los años cuarenta cuando Goertz implementó con éxito el primer sistema de teleoperación maestro-esclavo. A principios de los años ochenta se diseñaron esquemas de control basados en el análisis por Lyapunov (Miyazaki *et al.* 1986) y en el principio del modelo interno virtual (Furuta *et al.* 1987). Con el desarrollo de la teoría de redes surgieron los esquemas de control por impedancia, ampliamente utilizados en los sistemas de teleoperación maestro-esclavo cuando el objeto o entorno presenta cierta rigidez (deformable); como ejemplo podemos citar Raju *et al.* (1989), Buzan y Sheridan (1989), Strassberg *et al.* (1992) y Tzafestas *et al.* (2008). Cuando el entorno es rígido, éste se puede modelar empleando restricciones holonómicas, lo que lleva a un sistema de ecuaciones diferenciales sujeto a restricciones algebraicas. Esta metodología es útil para determinar propiedades de estabilidad y convergencia de posición y fuerza, por lo que se ha utilizado con éxito en esquemas de control descentralizado para robots cooperativos (Liu *et al.* 1996, Martínez-Rosas *et al.* 2006).

Yokokohji y Yoshikawa (1994) incorporaron el concepto de transparencia al sistema de teleoperación como nuevo objetivo de control, haciendo énfasis en la necesidad de tener dos canales de comunicación para que el robot esclavo transmita información de posición y fuerza al operador. Los retardos en los sistemas de teleoperación son de gran importancia ya que pueden ocasionar que el sistema sea inestable. Niemeyer y Slotine (1997) proponen un esquema de control considerando retardos de tiempo constantes, mientras que Chopra *et al.* (2003) y Ortega *et al.* (2009) consideran retardos variantes en el tiempo. En Nuño *et al.* (2012) se presenta un esquema de control adaptable para un sistema de teleoperación bilateral donde se utiliza internet como canal de comunicación.

Un factor importante a considerar en los esquemas de teleoperación maestro-esclavo es el operador. Hannaford (1989) señala la importancia de incluir en el diseño del esquema de control para robots teleoperados la dinámica del operador y no solo la dinámica de los manipuladores y el entorno. Debido a su complejidad, la mayoría de los esquemas de control de teleoperación emplean modelos simples para modelar la dinámica del humano. Actualmente es objeto de estudio.

Los robots teleoperados han sido utilizados para realizar distintas tareas en diferentes áreas. Las principales aplicaciones para estos sistemas son:

- Manejo de material peligroso y radioactivo (Wang *et al.* 1998).
- Realización de cirugías sin la presencia del médico. Los conceptos básicos para realizar esta labor se presentan en Funda *et al.* (1996).
- La exploración espacial, mantenimiento y reparación de estaciones espaciales son otras aplicaciones donde se pueden utilizar la teleoperación (K.Yoon *et al.* 2004).
- Exploración de ambientes remotos.

### 1.1.3. Superficie desconocida

La mayoría de los esquemas de control de posición y fuerza propuestos en la literatura requieren del conocimiento exacto de la superficie de contacto, la cual se puede modelar como un conjunto de ecuaciones algebraicas. La razón es que estos esquemas realizan transformaciones de coordenadas empleando difeomorfismos que se construyen a partir de las restricciones geométricas. Sin embargo, en presencia de incertidumbres dichos esquemas no garantizan la convergencia de posición y fuerza. El control de posición y fuerza cuando la superficie es desconocida, o bien, en presencia de incertidumbres en las restricciones sigue siendo objeto de estudio.

Las incertidumbres en las restricciones geométricas, en general, cambian el punto de equilibrio del sistema y pueden ocasionar que el sistema sea inestable en el sentido de Lyapunov (Ho *et al.* 2000). El desconocimiento del ambiente y la planeación de trayectorias son problemas relacionados, ya que se desea que el efector final siga una trayectoria sobre una superficie que es desconocida o solo se conoce parcialmente. Para resolver este problema, Wang *et al.* (1998) proponen un esquema de control empleando restricciones nominales y sin retroalimentación de fuerza. Sin embargo, sólo resuelven el problema de regulación de posición y fuerza.

A partir de mediciones de fuerza se puede obtener una estimación local de la superficie tal y como se muestra en Yoshikawa y Sudou (1993). Karayiannidis y Doulgeri (2009) proponen un esquema de control adaptable para estimar los parámetros de la superficie limitándose a superficies planas, además, requieren de la condición de excitación persistente. Un esquema similar

se presenta en Namvar y Aghili (2005) para el caso de robots cooperativos. Blauer y Bélanger (1987) reducen el problema al estimar algunos parámetros que describen la geometría de la superficie. Para ello emplean un observador de Kalman, por lo que se requiere linealizar el sistema.

Una alternativa para resolver el problema de planeación de trayectorias cuando no se conoce la superficie es utilizar un sistema de visión para identificar la superficie y planear la trayectoria directamente en coordenadas de imagen como en Hosoda *et al.* (1998) y Cheah *et al.* (2010).

## 1.2. Planteamiento del problema

La mayoría de los investigadores se han enfocado en desarrollar leyes de control para lograr que el efector final de un manipulador siga trayectorias de posición y fuerza considerando que el ambiente se conoce perfectamente. Sin embargo, son pocos los esquemas propuestos en la literatura que abordan el problema de superficie desconocida por lo que sigue siendo un tema de investigación. Dichos esquemas tampoco han sido aplicados a un sistema de teleoperación maestro-esclavo. Los problemas de control son los siguientes:

- Sea un manipulador en contacto con una superficie desconocida. Se desea estimar la superficie en línea y que el robot siga una trayectoria de posición y fuerza sobre ella.
- Dado un sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo donde el movimiento del esclavo está restringido por una superficie desconocida, se desea que éste siga una trayectoria suave tanto en posición y fuerza comandada por el robot maestro logrando simultáneamente los objetivos de telepresencia y transparencia.

En ambos casos se considera que la superficie es rígida y que el contacto es puntual. Además, se cuenta con un sensor de fuerza.

## 1.3. Contribución

En este trabajo se proponen esquemas de control de posición y fuerza para el caso en el que la superficie u objeto de contacto no se conoce en su totalidad. Si la geometría de la superficie es desconocida, ésta se estima localmente mediante mediciones de fuerza, así mismo se propone un esquema de control del tipo PID para el seguimiento de trayectorias. La ventaja de este esquema con respecto a esquemas similares propuestos en la literatura es que no requiere derivar

la fuerza de contacto. Para el caso en el que se conoce la geometría de la superficie pero se tiene incertidumbre en sus parámetros se propone un esquema de control adaptable que estima dichos parámetros. El esquema propuesto no está limitado a superficies planas. Sin embargo, requiere la condición de Excitación Persistente para identificar los parámetros de la superficie.

La contribución principal es la extensión del esquema de control con superficie desconocida a sistemas de teleoperación bilateral maestro-esclavo proporcionando un esquema de control para teleoperación en ambientes desconocidos. Este esquema es una alternativa a los esquemas de control por impedancia propuestos en la literatura.

#### **1.4. Organización de la tesis**

El documento está organizado de la siguiente forma: el Capítulo 2 presenta los conceptos básicos para el desarrollo de la teoría planteada en este documento y comprende la cinemática directa e inversa, modelo dinámico de un manipulador y sus propiedades y el Principio de Ortogonalización que es parte fundamental en el diseño y análisis de esquemas de control de posición y fuerza. En el Capítulo 3 se presentan los esquemas de control propuestos para resolver el problema de seguimiento de posición y fuerza sobre una superficie desconocida. En el Capítulo 4 se propone un esquema de control para un sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo cuando el robot esclavo está en contacto con una superficie desconocida. El Capítulo 5 muestra los resultados en simulación de los esquemas de control propuestos en los Capítulos 3 y 4. Finalmente el Capítulo 6 presentan las conclusiones y el trabajo futuro.



## Capítulo 2

# Preliminares

### 2.1. Modelo cinemático

El análisis cinemático describe el movimiento de un cuerpo sin considerar las fuerzas que lo producen. Para facilitar el análisis cinemático de un manipulador el problema se divide en: *Cinemática Directa*, *Cinemática Inversa* y *Cinemática Diferencial*. La Cinemática Directa e Inversa describen la relación entre las posiciones articulares y la posición y orientación del efector final del manipulador. La Cinemática Diferencial establece la relación entre las velocidades articulares y la velocidad lineal y angular del efector final del robot.

#### 2.1.1. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa de un manipulador consiste en determinar la posición y orientación final del robot, conocidos los ángulos o desplazamientos de sus articulaciones. Por convención, las posiciones articulares, ya sean de revolución o prismáticas se agrupan en el vector

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T, \quad (2.1)$$

donde  $n$  es el número de articulaciones. Una forma sistemática de representar la posición y orientación de los elementos del manipulador con respecto a un sistema inercial es emplear el algoritmo de Denavit-Hartenberg (Spong *et al.* 2006). Este algoritmo consiste en definir una matriz de transformación homogénea  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  que sólo depende de la variable articular  $i$  y está

dada por

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Las cantidades  $\theta_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $d_i$  y  $a_i$  son los parámetros de Denavit-Hartenberg correspondientes a la articulación  $i$ . Puesto que la matriz  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  es función de una sola variable, necesariamente tres de estos parámetros son constantes. En realidad,  $\theta_i$  es variable si la articulación es de revolución y  $d_i$  lo es para una articulación prismática.

Se puede representar la posición y orientación del efector final del manipulador a través de una matriz de transformación  ${}^0\mathbf{T}_n \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  definida como

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_n &= {}^0\mathbf{A}_1(q_1) {}^0\mathbf{A}_2(q_2) \cdots {}^{n-1}\mathbf{A}_n(q_n) \\ &= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n(\mathbf{q}) & {}^0\mathbf{d}_n(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

${}^0\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz ortogonal que representa la rotación del sistema coordenado  $O_n$  con respecto al sistema coordenado de la base  $O_0$  y satisface  ${}^0\mathbf{R}_n^{-1} = {}^0\mathbf{R}_n^T$  y  $\det({}^0\mathbf{R}_n) = +1$ .  ${}^0\mathbf{d}_n \in \mathbb{R}^3$ , es el vector de posición del efector final con respecto a la base  $O_0$ .

### 2.1.2. Cinemática inversa

El problema de la Cinemática Inversa puede ser formulado de la siguiente manera: dada la posición y orientación del efector final encontrar las variables de las articulaciones. El problema de la Cinemática Inversa es, en general, mucho más difícil que el problema de la Cinemática Directa debido a:

- Las ecuaciones a resolver son no lineales y en ocasiones es difícil obtener una solución en forma cerrada.
- Existencia de múltiples soluciones para una misma posición y orientación del efector final.

En general, los robots se diseñan para tener una estructura cinemática simple, por lo que es posible emplear un método analítico o geométrico para resolver la cinemática inversa del manipulador.

### 2.1.3. Cinemática diferencial

La Cinemática Diferencial establece una relación entre la velocidad lineal y angular del efector final del manipulador con respecto a sus velocidades articulares. Supóngase que la posición y orientación del efector final se especifican de la siguiente forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{p}_n \\ {}^0\boldsymbol{\phi}_n \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  ${}^0\mathbf{p}_n$  es el vector de posición del efector final con respecto a la base y  ${}^0\boldsymbol{\phi}_n$  es una parametrización de la orientación (*e.g* ángulos de Euler). Para  $n = 6$  se tiene  ${}^0\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^3$  y  ${}^0\boldsymbol{\phi}_n \in \mathbb{R}^3$ . Sea

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es una función que mapea un vector del espacio articular al espacio cartesiano (Cinemática Directa). Entonces, la derivada de (2.5) con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  es el Jacobiano del manipulador.

### 2.1.4. Singularidades

El Jacobiano del manipulador define un mapeo entre el vector de velocidades articulares y el vector de velocidades del efector final. Puesto que el Jacobiano es función de la configuración del robot, aquellas configuraciones en las que su rango decrece se conocen como *singularidades*. Es importante conocer dichas configuraciones por varias razones:

- Las singularidades representan configuraciones desde las cuales ciertas direcciones de movimiento no pueden ser alcanzadas.
- En las singularidades, velocidades acotadas del efector final pueden corresponder a velocidades articulares no acotadas.
- En las singularidades, fuerzas y momentos acotados del efector final pueden corresponder a momentos no acotados en las articulaciones.
- En las singularidades no existirá una solución única al problema de la cinemática inversa.

## 2.2. Modelo dinámico

El modelo dinámico relaciona las fuerza/torques que actúan sobre el robot y el movimiento que en él originan. La obtención de un modelo dinámico permite:

- Analizar el comportamiento del sistema.
- Diseñar esquemas de control.
- Diseñar la estructura mecánica del robot y la selección de los actuadores.

### 2.2.1. Modelo dinámico en movimiento libre

La formulación de Euler-Lagrange permite derivar las ecuaciones de movimiento de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad de forma sistemática (Spong *et al.* 2006) . El primer paso al aplicar la formulación de Euler-Lagrange es definir un conjunto de variables  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  llamadas *coordenadas generalizadas*, que describen completamente la localización (posición y orientación) del robot con respecto a un sistema de referencia. La ecuación de Euler-Lagrange está dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i, \quad (2.7)$$

donde  $\dot{q}_i$  es la primera derivada con respecto al tiempo de la coordenada generalizada  $q_i$ ,  $\mathcal{D}$  es la función de disipación de Rayleigh,  $\tau_i$  es la fuerza o torque generalizado aplicado a la articulación  $i$ . Finalmente  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$  es la función Lagrangiana definida como la diferencia entre la co-energía cinética  $\mathcal{K}$  y la energía potencial  $\mathcal{P}$ .

Las ecuaciones de movimiento del manipulador se obtienen al aplicar la ecuación (2.7) y están dadas por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.8)$$

donde

- $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia positiva definida.
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerza centrífugas y de Coriolis.
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva semidefinida que contiene los coeficientes de fricción viscosa.

- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales.
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es vector de fuerza/torques generalizados.

### 2.2.2. Restricciones holonómicas

En algunas ocasiones las coordenadas generalizadas se encuentran restringidas (cadena cinemática cerrada), por lo tanto, la ecuación (2.7) no se puede aplicar directamente. Una restricción holonómica sobre un conjunto completo e independiente de coordenadas es aquella que satisface

$$\Phi(q_1, \dots, q_n) = 0. \quad (2.9)$$

La diferencial total de la restricción está dada por

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q}. \quad (2.10)$$

A la restricción holonómica se le conoce también como restricción integrable. El efecto de las restricciones en la dinámica del sistema se refleja como fuerzas que no efectúan trabajo. Para incluir dichas fuerzas en el modelo dinámico se emplean los multiplicadores de Lagrange, de tal forma que la ecuación (2.7) se convierte en (Murray *et al.* 1994)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.11)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ , es el vector de multiplicadores de Lagrange,  $l$  es el número de restricciones.

### 2.2.3. Modelo dinámico en movimiento restringido

Se considera que el robot está en contacto con una superficie rígida, la cual se puede modelar como una ecuación algebraica dada por

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Nótese que (2.12) es de hecho una restricción holonómica. Aplicando las ecuaciones (2.11) en conjunto con (2.12) se obtiene el modelo dinámico del manipulador en movimiento restringido dado por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (2.13)$$

donde  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times l}$  es el Jacobiano de la restricción que se asume de rango completo. El vector  $\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})$  mapea cualquier vector sobre un plano perpendicular a la superficie en el punto

de contacto. El vector  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  es el vector de multiplicadores de Lagrange, físicamente representa la fuerza aplicada a la superficie.

#### 2.2.4. Propiedades del modelo dinámico

El modelo dinámico del manipulador (2.8) presenta ciertas propiedades que pueden ser explotadas tanto para diseño como para el análisis de estabilidad de esquemas de control. Las propiedades más importantes son:

**Propiedad 2.1.** *La matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  es simétrica positiva definida.* □

**Propiedad 2.2.** *La matriz  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica, es decir,*

$$\mathbf{y}^T \left( \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{y} = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

□

**Propiedad 2.3.** *La matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  satisface*

$$\lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{y} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.15)$$

□

**Propiedad 2.4.** *Mediante una apropiada definición de los parámetros del robot, se tiene*

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta}, \quad (2.16)$$

donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  se conoce como el **regresor** y  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$  es un vector de parámetros del robot. □

**Propiedad 2.5.** *La dinámica del manipulador define un mapeo pasivo  $\boldsymbol{\tau} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}$ ,*

$$\langle \boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_{T=0}^T = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} dt \geq -\beta, \quad (2.17)$$

para algún  $\beta > 0$  y  $\forall T > 0$ . □

La Propiedad 2.5 es válida también para el caso de movimiento restringido ya que se satisface  $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ .

## 2.3. Principio de Ortogonalización

Cuando el efector final del manipulador se mueve a lo largo de una superficie aplicando una fuerza, la velocidad es tangente en el punto de contacto, mientras que la fuerza aplicada es normal a la superficie. Este hecho es la base del Principio de Ortogonalización propuesto por Arimoto *et al.* (1993). El principio de Ortogonalización permite separar la tarea de control en dos subespacios ortogonales lo que facilita tanto el diseño de la ley de control como el análisis de estabilidad, por lo que ha sido utilizado en distintos esquemas de control de posición y fuerza (Liu *et al.* 1995, Liu *et al.* 1996, Martínez-Rosas *et al.* 2006).

La derivada de (2.12) con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{\phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

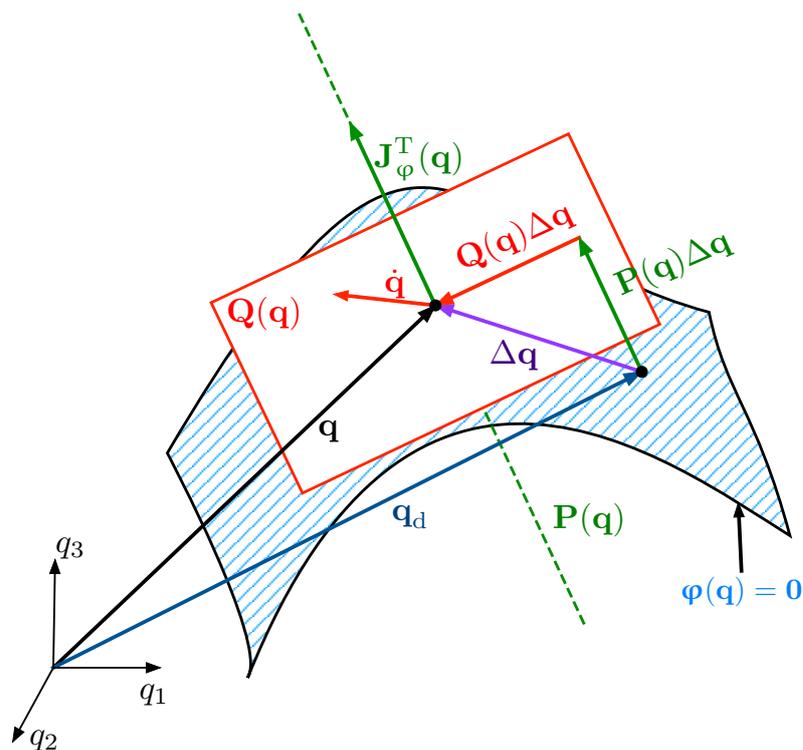


Figura 2.1: Principio de Ortogonalización

El vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  pertenece al espacio nulo de la matriz  $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})$  ( $\mathcal{N}\{\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})\}$ ), es decir, la velocidad está contenida en un plano tangente al punto de contacto (ver Figura 2.1). La fuerza es normal al plano tangente por lo que está contenida en el espacio rango de la matriz  $\mathbf{J}_\phi^T(\mathbf{q})$

$(\mathbb{R}\{\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\})$ . Sea la matriz de proyección  $\mathbf{P}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que  $\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{v} = \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}\{\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\}$ . Dicha matriz mapea un vector al plano perpendicular en el punto de contacto y está dada por

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}), \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})$  es la matriz Pseudoinversa de Moore-Penrose:

$$\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})]^{-1}. \quad (2.20)$$

De manera similar, se define la matriz de proyección  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{y} = \mathbf{y}$ ,  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{N}\{\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\}$ . La matriz  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  mapea un vector del espacio articular al plano tangente a la superficie en el punto de contacto y está dada por

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}(\mathbf{q}). \quad (2.21)$$

Las matrices de proyección tienen las siguientes propiedades:

- $\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{O}$ .
- $\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{P}(\mathbf{q})$ .
- $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{q})$ .
- El rango de  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  es  $n - l$ .

El Jacobiano de la restricción  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  está contenido en el plano generado por  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ , por lo tanto, se satisfacen  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})$ . Debido a la ortogonalidad de las matrices se tiene,  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{O}$  y  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{O}$ . Dado que la velocidad está contenida en el plano tangente, presenta una útil propiedad.

**Propiedad 2.6.** *El vector  $\dot{\mathbf{q}}$  puede escribirse como*

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.22)$$

□

El vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  no tiene ninguna componente en  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ , como lo muestra la ecuación (2.18). Como se mencionó anteriormente, el objetivo es diseñar una ley de control de posición y fuerza, para ello el siguiente Hecho será de gran utilidad.

**Hecho 2.1.** Sea  $\mathbf{q}_d$  la posición deseada del manipulador, tal que satisface la restricción (2.12), es decir

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}_d) = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Entonces, si el error de seguimiento definido por

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d, \quad (2.24)$$

es suficientemente pequeño, la siguiente aproximación es válida

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\Delta \mathbf{q}. \quad (2.25)$$

□

La Figura 2.2 muestra de forma gráfica la validez del Hecho 2.1. De forma general el error está dado por

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{q} + \mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{q} - \mathbf{Q}(\mathbf{q}_d)\mathbf{q}_d - \mathbf{P}(\mathbf{q}_d)\mathbf{q}_d. \quad (2.26)$$

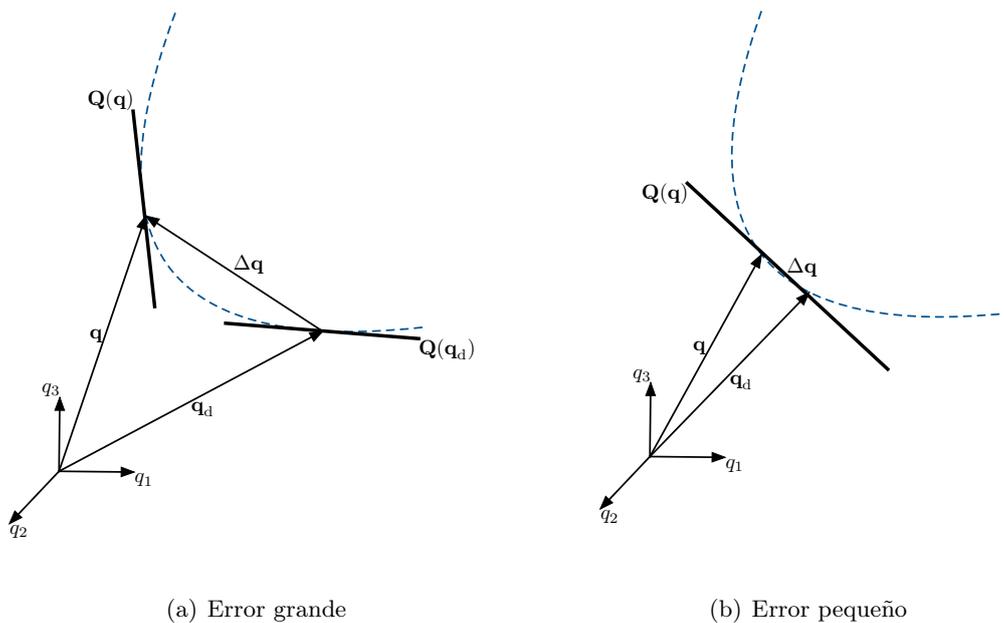


Figura 2.2: Representación gráfica del Hecho 2.1

El Hecho 2.1 establece que la componente del error mapeada por la matriz  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  domina a la componente mapeada por la matriz  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ . La región de validez depende esencialmente del radio de curvatura de la superficie, es decir, un radio de curvatura pequeño implica una región

de validez pequeña, de igual forma para un radio de curvatura grande la región de validez también es grande. Por medio de ejemplos se muestra que un error suficientemente pequeño no necesariamente implica  $\Delta \mathbf{q} \approx \mathbf{0}$ .

**Ejemplo 2.3.1.** Considérese un robot de dos grados de libertad tipo RR. La posición del efector final del manipulador está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

donde  $c_1 = \cos(q_1)$ ,  $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ ,  $s_1 = \sin(q_1)$ ,  $s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$ ,  $l_1 = 0.35[\text{m}]$  y  $l_2 = 0.3[\text{m}]$ .

Considérese como restricción un plano con una pendiente de  $45^\circ$  dada por

$$\varphi(\mathbf{q}) = \cos(45^\circ)(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) - \sin(45^\circ)(l_1 c_1 + l_2 c_{12} - b) = 0, \quad (2.28)$$

donde  $b = 0.4[\text{m}]$ . Supóngase que el robot se encuentra en la posición

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 54.723^\circ \\ -61.563^\circ \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

y que la posición deseada es

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 52.057^\circ \\ -54.163^\circ \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Ambos puntos satisfacen la restricción (2.28). Las matrices de proyección correspondientes al punto  $\mathbf{q}$  están dadas por

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0.1088 & -0.3114 \\ -0.3114 & 0.8911 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0.8911 & 0.3114 \\ 0.3114 & 0.1088 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

El error es

$$\Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2.66^\circ \\ -7.40^\circ \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

con norma  $\|\Delta \mathbf{q}\| = 7.865^\circ$ . Claramente, el error no puede considerarse cercano a cero. Las componentes de  $\Delta \mathbf{q}$  mapeadas por las matrices de proyección son

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2.594^\circ \\ -7.424^\circ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{q})\Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.0704^\circ \\ 0.0247^\circ \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

respectivamente. Al calcular las normas se tiene  $\|\mathbf{Q}(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{q}}\| = 7.864^\circ$  y  $\|\mathbf{P}(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{q}}\| = 0.0743^\circ$ . Se observa que la componente de  $\Delta \mathbf{q}$  mapeada por la matriz  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  es casi 100 veces mayor que la componente mapeada por  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ , lo que justifica el Hecho 2.1.  $\square$

**Ejemplo 2.3.2.** Considérese nuevamente el manipulador del Ejemplo 2.3.1, pero en esta ocasión la restricción es un círculo dado por

$$\varphi(\mathbf{q}) = (l_1 c_1 + l_2 c_{12} - h)^2 + (l_1 s_1 + l_2 s_{12} - k)^2 - r^2 = 0, \quad (2.34)$$

donde  $h = 0.4$  [m],  $k = 0.2$  [m],  $r = 0.2$  [m]. El robot se encuentra en la posición

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 88.730^\circ \\ -66.414^\circ \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

La posición deseada es

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 92.784^\circ \\ -73.507^\circ \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Ambos puntos satisfacen la restricción (2.34). Las matrices de proyección correspondientes al punto  $\mathbf{q}$  están dadas por

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0.2554 & -0.4360 \\ -0.4360 & 0.7446 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0.7446 & 0.4360 \\ 0.4360 & 0.2554 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

y el error es

$$\Delta\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -4.054^\circ \\ 7.093^\circ \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

La norma del error es  $\|\Delta\mathbf{q}\| = 8.17041^\circ$ , el cual, no puede considerarse cercano a cero. Las componentes de  $\Delta\mathbf{q}$  mapeadas por las matrices de proyección son

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\Delta\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -4.129^\circ \\ 7.050^\circ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{q})\Delta\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.0744^\circ \\ 0.0436^\circ \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

respectivamente. Calculando las norma de cada componente se tiene,  $\|\mathbf{Q}(\mathbf{q})\Delta\mathbf{q}\| = 8.17^\circ$  y  $\|\mathbf{P}(\mathbf{q})\Delta\mathbf{q}\| = 0.0863^\circ$ ; es decir, la componente del error que se encuentra en el plano tangente es 94 veces mayor que la componente que se encuentra en el plano perpendicular, lo que justifica el Hecho 2.1.  $\square$



## Capítulo 3

# Control de posición/fuerza en entornos no estructurados

### 3.1. Introducción

El control de posición y fuerza en manipuladores ha sido estudiado ampliamente en los últimos años. Los esquemas de control propuestos, ya sea por impedancia (Hogan 1985) o híbrido de posición y fuerza (Arimoto *et al.* 1993, McClamroch y Wang 1998, Martínez-Rosas *et al.* 2006) requieren, en cierta medida, el conocimiento de la superficie. El control por impedancia considera que la superficie es deformable y, por lo tanto, es necesario conocer la rigidez del entorno. En el caso de control híbrido se considera que la superficie es rígida y se requiere conocer su geometría. La principal ventaja del control híbrido con respecto al control por impedancia, es la separación de los subespacios de fuerza y posición, es decir, la trayectoria en posición se puede definir independientemente de la trayectoria de fuerza. Esta característica permite realizar una gran variedad de tareas con superficies de geometría distinta.

Recientemente se ha considerado el problema de control de posición y fuerza con incertidumbre en la dinámica y cinemática del manipulador (Cheah *et al.* 2003, Zhao *et al.* 2006). El problema de superficie desconocida o con incertidumbre en la superficie sigue siendo tema de estudio. Cuando existe incertidumbre en la restricción no se puede aplicar directamente la descomposición en los subespacios de posición y fuerza. Además, el esquema de control requiere señales de referencia tanto de posición como de fuerza que son, en general, dependientes de la

superficie de contacto. Por lo tanto, si la superficie no se conoce en su totalidad se tendrán trayectorias erróneas. Una solución para la planeación de trayectorias con incertidumbre en la restricción, es emplear un sistema de visión para identificar la superficie y planear la trayectoria directamente en coordenadas de imagen, tal y como se propone en Hosoda *et al.* (1998) y Cheah *et al.* (2010).

El objetivo es diseñar un esquema de control de posición y fuerza para ambientes no estructurados empleando únicamente la información de los sensores de posición y fuerza. Se considera que la superficie de contacto es rígida.

### 3.2. Superficie desconocida

El caso de superficie desconocida se presenta en tareas de reconocimiento y exploración. Debido a esto, es de especial interés cuando se trabaja con sistemas teleoperados. Cuando no se conoce la geometría de la superficie se presentan dos problemas principales: no es posible planear una trayectoria deseada y no se pueden aplicar directamente los esquemas de control de fuerza presentes en la literatura. Para resolver este problema se propone una estimación local de la superficie.

**Suposición 3.1.** *La restricción  $\varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}$  es desconocida pero se conoce al menos un punto  $\mathbf{q}_0$  de ella.* □

De acuerdo con la Suposición 3.1  $\lambda \in \mathbb{R}$  representa la magnitud de la fuerza aplicada y solo se considera una restricción. El problema de superficie desconocida por sí mismo es complejo y por simplicidad se considera únicamente el caso de una sola restricción, además, una gran parte de las tareas de control de posición y fuerza se realizan empleando solo una restricción (tareas de corte, pulido, maquinado). Entonces, el Jacobiano de la restricción  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  es simplemente el gradiente de la función escalar  $\varphi(\mathbf{q})$ , el cual es un vector perpendicular a la superficie. Sea  $\mathbf{q}_0$  un punto de la superficie, a partir del vector  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}_0)$  se puede construir un plano tangente a la trayectoria en el punto  $\mathbf{q}_0$  (Larson *et al.* 2002). La ecuación del plano tangente está dada por (Larson *et al.* 2002, pp. 1169)

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = 0. \quad (3.1)$$

De acuerdo con el Hecho 2.1, si la diferencia entre la posición actual y la posición deseada del manipulador es suficientemente pequeña (*i.e.* el retardo es suficientemente pequeño), la mayor

parte del error se encuentra en el plano tangente. Por lo tanto, la superficie se puede aproximar a un plano cercano al punto  $\mathbf{q}_0$ . Entonces, la superficie aproximada está dada por

$$\hat{\varphi}_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})(\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t - \tau)), \quad \mathbf{q}_s(0) = \mathbf{q}_0. \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) proporciona una estimación local que se actualiza cuando el robot se mueve a lo largo de la superficie. Si bien el vector  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  depende de la restricción, éste se puede calcular a partir de mediciones de fuerza como se mostrará más adelante. Ahora bien, cuando el robot está en contacto con su entorno el modelo dinámico del manipulador está dado por (Siciliano y Villani 1999)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas y pares de contacto, el cual es medible. Dado que el contacto es puntual solo se considera el vector de fuerza y no se consideran los pares, es decir,  $\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^3$ . Comparando con (2.13) se deduce

$$\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e. \quad (3.4)$$

Entonces, el gradiente se puede obtener a partir de la medición de fuerza como

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{f}_e^T}{\|\mathbf{f}_e\|} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad \text{con} \quad \|\mathbf{f}_e\| \neq 0, \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  es el Jacobiano analítico. Si  $\|\mathbf{f}_e\| = 0$ , el robot pierde contacto con la superficie. En ese caso, se encuentra en movimiento libre y se puede emplear cualquier esquema de control para movimiento no restringido para regresar el efector final del manipulador al punto de contacto.

La Figura 3.1 muestra la estimación local de la superficie y las posibles direcciones de movimiento que puede seguir el efector final del manipulador de acuerdo a la ecuación (3.2).

### 3.2.1. Ley de control

Se propone la siguiente ley de control de posición y fuerza para el caso de superficie desconocida

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left\{ k_p \Delta \mathbf{q} + k_v \Delta \dot{\mathbf{q}} + k_i \int_0^t \Delta \mathbf{q} d\vartheta \right\} - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\lambda_d - k_F \Delta F), \quad (3.6)$$

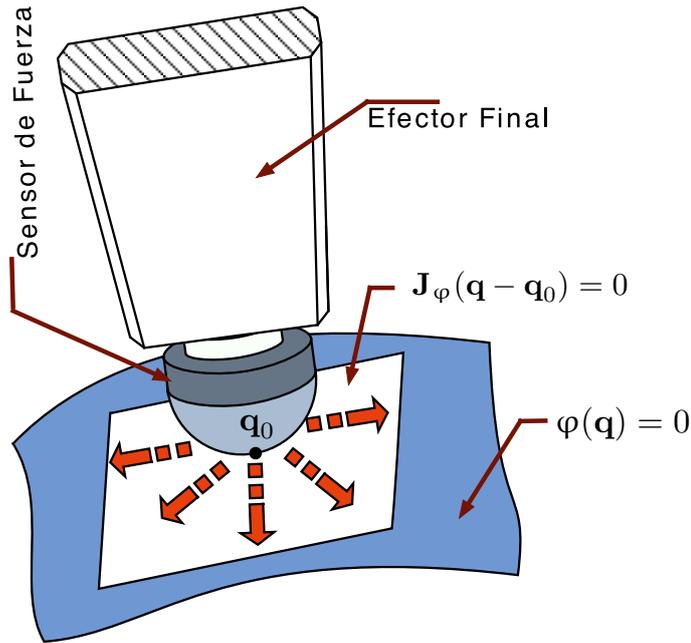


Figura 3.1: Estimación local de la superficie

donde  $\lambda_d \in \mathbb{R}$  es la magnitud de la fuerza deseada,  $k_p$ ,  $k_v$ ,  $k_i$  y  $k_F$  son constantes positivas y  $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{J}_\varphi^T [\mathbf{J}_\varphi \mathbf{J}_\varphi^T]^{-1} \mathbf{J}_\varphi$ . Los errores de posición y fuerza se definen como:

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad (3.7)$$

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_d \quad (3.8)$$

$$\Delta F = \int_0^t \Delta \lambda d\vartheta. \quad (3.9)$$

La trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d$  está restringida por la ecuación (3.2), y al igual que la superficie se actualiza cuando el robot se desplaza sobre ella. La ley de control (3.6) solo requiere información local de la superficie.

A continuación se establece el siguiente Teorema:

**Teorema 3.1.** *Sea la dinámica del manipulador en movimiento restringido (2.13) en conjunto con la ley de control (3.6). Mediante una apropiada selección de ganancias los errores de seguimiento para posición ( $\Delta \mathbf{q}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ ) y fuerza ( $\Delta \lambda$ ,  $\Delta F$ ) tienden a ser arbitrariamente pequeños si los errores iniciales de seguimiento y el retardo en la ecuación (3.2) son así mismo suficientemente pequeños para que se satisfaga el Hecho 2.1.  $\square$*

El desarrollo matemático de la demostración puede verse en el Apéndice A.

### 3.3. Estimación de la superficie

Los esquemas de control de posición/fuerza propuestos en la literatura basados en el control híbrido requieren del conocimiento de la restricción puesto que utilizan transformaciones de coordenadas o matrices de selección. En presencia de incertidumbres dichos esquemas no garantizan la convergencia asintótica de las trayectorias deseadas y pueden ocasionar que el sistema sea inestable, como se muestra en Karayiannidis y Doulgeri (2009). Debido a las incertidumbres, es difícil tener un modelo exacto de la superficie aunque se conozca su geometría. En este caso, el problema se puede abordar como uno de estimación de parámetros.

Se realiza un cambio de coordenadas articulares a coordenadas del espacio de trabajo. Para facilitar la planeación de trayectorias y la representación de la restricción, que en este caso está dada por

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S) = 0, \quad (3.10)$$

donde  $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$  y  $\boldsymbol{\theta}_S \in \mathbb{R}^p$  son los parámetros de la restricción. La fuerza de contacto expresada en coordenadas cartesianas está dada por

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S)\lambda, \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S) = \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S)$  indica la dirección de la fuerza mientras que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es el multiplicador de Lagrange. Sin pérdida de generalidad, se asume que  $\|\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S)\| = 1$ . Se puede encontrar una relación entre  $\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)$  y  $\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)$  que será de gran utilidad para el diseño de un esquema de control de posición y fuerza con incertidumbre en la restricción. Al aplicar la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S) &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)}{\partial\mathbf{q}} \\ &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S)}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S)\mathbf{J}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  es el Jacobiano analítico. De (3.5) se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S) = \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \quad \text{con} \quad \|\mathbf{f}_e\| \neq 0, \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{f}_e$  es la fuerza medida por el sensor expresada con respecto al sistema de referencia de la base.

### 3.3.1. Parametrización

El objetivo es estimar los parámetros de la superficie mediante una ley de estimación. El primer paso es parametrizar el gradiente de la restricción, para lo que se considera la siguiente Suposición.

**Suposición 3.2.** *El vector  $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}})$  es lineal en sus parámetros los cuales son constantes y describen completamente la restricción (3.10), es decir*

$$\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}}) = \mathbf{W}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}}, \quad (3.14)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^p$  y  $\mathbf{W}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{3 \times p}$  es el regresor de la restricción.  $\square$

Como consecuencia de la Suposición 3.2 la restricción pertenece a la clase de funciones diferenciables dadas por

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}}) + b = 0, \quad (3.15)$$

donde  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}})$  es una función escalar y  $b$  es un desplazamiento (*offset*) que se asume conocido. Si bien esto implica un mayor conocimiento de la superficie, dependiendo de la parametrización es posible evitar esta restricción, tal y como se mostrará adelante. Puesto que existe incertidumbre se tiene un estimado del gradiente dado por

$$\hat{\mathbf{J}}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{S}}) = \mathbf{W}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{S}}. \quad (3.16)$$

De acuerdo con las ecuación (3.13) el gradiente se puede obtener con mediciones de fuerza. Por lo tanto es factible utilizar una ley de adaptación para estimar los parámetros de la superficie. Tomando en cuenta las ecuaciones (3.14) y (3.16) se define el error entre el gradiente estimado y el gradiente medido como

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbf{f}} &= \hat{\mathbf{J}}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{S}}) - \mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}}) \\ &= \mathbf{W}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{S}} - \mathbf{W}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}} \\ &= \mathbf{W}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{S}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{S}} \triangleq \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{S}}$  es el error paramétrico. Como antes se asume conocido un punto de la restricción, esto implica que la superficie estimada intersecta a la real en al menos un punto, como lo muestra la Figura 3.2. A continuación se presentan dos ejemplos que justifican la Suposición 3.2.

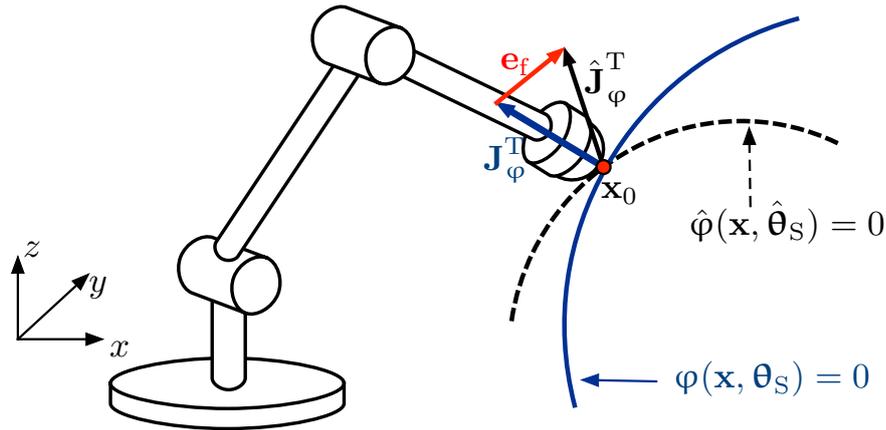


Figura 3.2: Intersección entre la superficie estimada y real

**Ejemplo 3.3.1.** Considerese la restricción dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0, \quad (3.18)$$

donde  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T$  es un punto conocido de la superficie. La ecuación (3.18) representa la ecuación canónica de un plano. El vector  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T$  es un vector perpendicular a la superficie. En general, el vector  $\mathbf{a}$  no es unitario; sin embargo, la mejor elección es emplear el vector unitario  $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ , para obtener  $\|\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})\| = 1$ . De este modo, la ecuación del plano se reescribe como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}(x - x_0) + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}(y - y_0) + \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}(z - z_0) = 0. \quad (3.19)$$

El siguiente paso es parametrizar el gradiente de la restricción. Se define el vector de parámetros de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\theta}_S = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} & \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} & \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|} \end{bmatrix}^T. \quad (3.20)$$

Entonces, el gradiente  $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S)$  toma la forma requerida por la ecuación (3.14)

$$\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S) = \boldsymbol{\theta}_S \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{W}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ . La restricción expresada en términos del vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}_S$  está dada por

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S) = \boldsymbol{\theta}_S^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0. \quad (3.22)$$

□

**Ejemplo 3.3.2.** Considérese ahora como superficie de contacto una esfera dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = (x - h)^2 + (y - i)^2 + (z - k)^2 - R^2 = 0. \quad (3.23)$$

El gradiente es

$$\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2(x-h) & 2(y-i) & 2(z-k) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

En (3.24) no aparece el radio de la esfera, el cual es un parámetro que se desea estimar puesto que no se conoce con exactitud. Además, el gradiente no tiene norma unitaria. Para resolver este problema se reescribe la ecuación de la esfera como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(x-h)^2}{2R} + \frac{(y-i)^2}{2R} + \frac{(z-k)^2}{2R} - \frac{R}{2} = 0, \quad (3.25)$$

tal que  $\|\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}(\mathbf{x})\| = 1$ . Con esta representación equivalente de la esfera el gradiente está dado por

$$\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{x-h}{R} & \frac{y-i}{R} & \frac{z-k}{R} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Nótese que (3.26) contiene toda la información de la restricción. Se define el vector de parámetros

$$\boldsymbol{\theta}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{h}{R} & \frac{i}{R} & \frac{k}{R} \end{bmatrix}^T. \quad (3.27)$$

El segundo paso es expresar el gradiente en términos del vector de parámetros

$$\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S) = \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_S, \quad (3.28)$$

donde

$$\mathbf{W}_x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

□

### 3.3.2. Algoritmo de mínimos cuadrados

El algoritmo de mínimos cuadrados ha sido ampliamente utilizado para la estimación de parámetros ya sea de forma no recursiva (fuera de línea) o recursiva (en línea). El algoritmo de mínimos cuadrados estándar se basa en minimizar la función de costo (Slotine y Li 1991, pp. 370)

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S) - \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\theta}}_S\|^2 d\vartheta, \quad (3.30)$$

con respecto al vector de parámetros  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_S$ . Considérese la siguiente definición y lema que son de gran utilidad para el diseño y análisis en esquemas de estimación de parámetros.

**Definición 3.1.** (Slotine y Li 1991)

La matriz  $\mathbf{W}_x(\mathbf{x})$  es de Excitación Persistente, si existen constantes positivas  $\alpha$  y  $T$  tal que  $\forall T \geq 0$

$$\int_t^{t+T} \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x}) d\vartheta \geq \alpha \mathbf{I}. \quad (3.31)$$

□

**Lema 3.1.** (Barbalat)

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_0 < \infty \quad (3.32)$$

y  $\dot{f}(t)$  es uniformemente continua. Entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . □

De acuerdo con Slotine y Li (1991, pp. 370) el vector de parámetros  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_S$  satisface

$$\left( \int_0^t \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x}) d\vartheta \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}_S = \int_0^t \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T d\vartheta. \quad (3.33)$$

Se define la matriz

$$\boldsymbol{\Gamma}_S \triangleq \left( \int_0^t \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x}) d\vartheta \right)^{-1}. \quad (3.34)$$

La matriz  $\boldsymbol{\Gamma}_S$  existe si y solo si  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  satisface la condición de Excitación Persistente. Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.33) por  $\boldsymbol{\Gamma}_S$  se obtiene

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_S = \boldsymbol{\Gamma}_S \int_0^t \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T d\vartheta. \quad (3.35)$$

La ecuación (3.35) es el algoritmo de mínimos cuadrados fuera de línea. Sin embargo, para el problema que se intenta resolver se requiere un algoritmo de adaptación en línea. Sea la identidad

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Gamma}_S \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1}) = \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} + \boldsymbol{\Gamma}_S \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} = \mathbf{O}, \quad (3.36)$$

donde

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} \triangleq \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1}. \quad (3.37)$$

Despejando  $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S$  de la ecuación (3.36) y tomando en cuenta (3.34) se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S = -\boldsymbol{\Gamma}_S \mathbf{W}_x \mathbf{W}_x^T \boldsymbol{\Gamma}_S, \quad \boldsymbol{\Gamma}_S(0) = \boldsymbol{\Gamma}_{S0}. \quad (3.38)$$

De esta forma, la matriz  $\boldsymbol{\Gamma}_S$  se obtiene como solución de una ecuación diferencial (forma recursiva). En términos de  $\boldsymbol{\Gamma}_S^{-1}$  se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} = \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x}). \quad (3.39)$$

Diferenciando la ecuación (3.35) y tomando en cuenta las ecuaciones (3.14), (3.17) y (3.38) se obtiene el algoritmo de estimación en línea dado por

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_S = -\boldsymbol{\Gamma}_S \mathbf{W}_x \mathbf{e}_f. \quad (3.40)$$

Para analizar las propiedades del algoritmo de adaptación por mínimos cuadrados considérese la función de Lyapunov

$$V_a = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S. \quad (3.41)$$

De acuerdo con (3.17), la derivada de  $V_a$  a lo largo de (3.39) y (3.40) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_S + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S \\ &= -\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \mathbf{W}_x \mathbf{e}_f + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \mathbf{W}_x \mathbf{W}_x^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S \\ &= -\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \mathbf{W}_x \mathbf{e}_f + \frac{1}{2} \mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f \leq 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$\dot{V}_a$  es negativa semidefinida, en consecuencia,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S, \mathbf{e}_f$  están acotados. De acuerdo con la ecuación (3.38)  $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S \leq \mathbf{O}$ , por lo tanto,  $\boldsymbol{\Gamma}_S(t) \leq \boldsymbol{\Gamma}_{S0}$ . Debido a que,  $\boldsymbol{\Gamma}_S(t)$  es no creciente y está acotada por abajo se tiene  $\boldsymbol{\Gamma}_S(t) \geq \mathbf{O} \forall t \geq 0$ . Esto implica,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\Gamma}_S(t) = \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_S, \quad (3.43)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_S$  es una matriz constante. Si se asume que la restricción es una función continua en  $\mathbf{x}$  la matriz  $\mathbf{W}_x(\mathbf{x})$  está acotada. Entonces, cada término de la ley de estimación (3.40) está acotado y en consecuencia  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_S$  también lo está.

De acuerdo al Lema 3.1,  $\mathbf{e}_f$  tiende a cero, si  $\ddot{V}_a$  es uniformemente continua, es decir, que  $\ddot{V}_a$  esté acotada. La segunda derivada de  $V_a$  está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{V}_a &= -\mathbf{e}_f^T \dot{\mathbf{e}}_f \\ &= -\mathbf{e}_f^T \left( \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x}) \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_S + \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{W}_x^T \right] \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Si se asume que la restricción es al menos una vez diferenciable la matriz  $\frac{d}{dt} \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x})$  está acotada. El análisis anterior muestra que  $\ddot{V}_a$  es función únicamente de variables acotadas, por lo tanto,  $\ddot{V}_a \rightarrow 0$ , lo que implica que  $\mathbf{e}_f \rightarrow \mathbf{0}$  cuanto  $t \rightarrow \infty$ . Se concluye que el algoritmo es asintóticamente estable en el error  $\mathbf{e}_f$ . El objetivo es la identificación de la superficie, para ello

es necesario la convergencia paramétrica ( $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S \rightarrow \mathbf{0}$ ). Se requiere que  $\mathbf{W}_x(\mathbf{x})$  pertenezca a la clase de funciones que cumplen la Definición 3.1.

A pesar de la condición de Excitación Persistente la convergencia a los parámetros reales puede no ser exponencial. A continuación se presenta una modificación al algoritmo de mínimos cuadrados que permite que la velocidad de convergencia paramétrica sea exponencial en presencia de Excitación Persistente.

### 3.3.3. Algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido

El algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido consiste en minimizar la función de costo (Slotine y Li 1991, pp. 374)

$$J = \int_0^t e^{-\int_0^\vartheta \beta(\vartheta) d\vartheta} \|\mathbf{J}_{\varphi_x}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S) - \mathbf{W}_x^T(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\theta}}_S\|^2 d\vartheta, \quad (3.45)$$

con respecto a  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_S$ , donde  $\beta(t) > 0$  se conoce como factor de olvido. El algoritmo de estimación es el mismo que la ecuación (3.40) excepto por la ganancia de estimación que se convierte en

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S = \beta(t)\boldsymbol{\Gamma}_S - \boldsymbol{\Gamma}_S \mathbf{W}_x \mathbf{W}_x^T \boldsymbol{\Gamma}_S, \quad \boldsymbol{\Gamma}_S(0) = \boldsymbol{\Gamma}_{S0}. \quad (3.46)$$

En términos de  $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1}$  se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} = -\beta(t)\boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} + \mathbf{W}_x(\mathbf{x})\mathbf{W}_x^T(\mathbf{x}). \quad (3.47)$$

El análisis de estabilidad es similar al caso anterior. Considérese la función candidata de Lyapunov

$$V_b = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S. \quad (3.48)$$

Tomando en cuenta (3.17), la derivada de  $V_b$  a lo largo de (3.40) y (3.47) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_b &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_S + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S \\ &= -\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{e}_f + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T [-\beta(t)\boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} + \mathbf{W}_x(\mathbf{x})\mathbf{W}_x^T(\mathbf{x})] \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f - \frac{1}{2} \beta(t) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S. \end{aligned} \quad (3.49)$$

$\dot{V}_b$  es negativa definida con respecto a  $\mathbf{e}_f$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$  siempre que  $\mathbf{W}_x(\mathbf{x})$  cumpla la condición de Excitación Persistente. Se concluye  $\mathbf{e}_f$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$  tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Es importante notar que el algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido mejora la convergencia paramétrica.

Para analizar la convergencia exponencial de  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$  considérese la ecuación diferencial con factor de olvido constante dada por

$$\frac{d}{dt} [\boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S] = -\beta \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S. \quad (3.50)$$

Resolviendo (3.50) para  $\boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$  se tiene

$$\boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S = e^{-\beta t} \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1}(0) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S(0). \quad (3.51)$$

Por lo tanto el error paramétrico está dado por

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S = e^{-\beta t} \boldsymbol{\Gamma}_S \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1}(0) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S(0). \quad (3.52)$$

Claramente se observa que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$  tiende a cero exponencialmente y la velocidad de convergencia está dada por la ganancia  $\beta$ . Sin embargo, en ausencia de Excitación Persistente la matriz  $\boldsymbol{\Gamma}_S$  puede crecer sin cota, ya que  $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S$  puede satisfacer  $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S > \mathbf{O}$  debido al término adicional  $\beta(t)\boldsymbol{\Gamma}_S$ , ocasionando oscilaciones indeseables en los parámetros estimados. Para evitar este problema se puede modificar la ganancia de estimación (3.46) como

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S = \begin{cases} \beta \boldsymbol{\Gamma}_S - \boldsymbol{\Gamma}_S \mathbf{W}_x \mathbf{W}_x^T \boldsymbol{\Gamma}_S & \text{si } \|\boldsymbol{\Gamma}_S\| \leq \rho \\ \mathbf{O} & \text{si } \|\boldsymbol{\Gamma}_S\| > \rho, \end{cases} \quad (3.53)$$

donde  $\rho$  es una cota para  $\|\boldsymbol{\Gamma}_S\|$ . El análisis de estabilidad se realiza con la misma función de Lyapunov  $V_b$  en (3.48) cuya derivada a lo largo de (3.40) y (3.53) está dada por

$$\dot{V}_b = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f - \frac{1}{2} \beta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S & \text{si } \|\boldsymbol{\Gamma}_S\| \leq \rho \\ -\mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f & \text{si } \|\boldsymbol{\Gamma}_S\| > \rho. \end{cases} \quad (3.54)$$

En el caso de movimiento libre, la trayectoria deseada se debe elegir dentro del espacio de trabajo del manipulador y evitar singularidades. Sin embargo, cuando el movimiento está restringido a una superficie; además de las restricciones antes mencionadas y considerando incertidumbre en la restricción la trayectoria deseada debe satisfacer

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) = 0, \quad (3.55)$$

donde  $\mathbf{x}_d$  es la trayectoria deseada en coordenadas del espacio de trabajo y  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S)$  es un estimado de  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_S)$ .

### 3.3.4. Control adaptable de posición/fuerza con estimación de la superficie

En esta sección se presenta un esquema de control que mejora el desempeño en posición con respecto al control PID (3.6) presentado en la sección anterior. La mayoría de los algoritmos de control que emplean el Principio de Ortogonalización requieren, no solamente las matrices de proyección sino también sus derivadas (Arimoto *et al.* 1993, Liu *et al.* 1996). Para el caso de superficie conocida las derivadas de  $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})$ ,  $\dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q})$  y  $\dot{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{q})$  se obtienen por cálculo directo.

Si bien el gradiente de la restricción y las matrices de proyección se pueden obtener mediante mediciones de fuerza, sus derivadas no se pueden calcular directamente ya que la derivada de la fuerza no está disponible. Debido al ruido excesivo que presentan los sensores de fuerza la derivada numérica no es recomendable. Por esta razón se plantea un esquema de control adaptable que estime el gradiente de la restricción  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  y los parámetros de la superficie  $\boldsymbol{\theta}_S$ . Tomando en cuenta (3.12) y (3.14) se tiene

$$\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{W}_x^T \boldsymbol{\theta}_S. \quad (3.56)$$

La trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d$  está sujeta a

$$\hat{\varphi}(\mathbf{q}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) = 0. \quad (3.57)$$

donde  $\hat{\varphi}(\mathbf{q}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) \in \mathbb{R}$  es un estimado de  $\varphi(\mathbf{q}_d, \boldsymbol{\theta}_S)$ . Se define la variable de referencia

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) (\dot{\mathbf{q}}_d - k_p \Delta \mathbf{q}) + k_{F_i}^{-1} \xi \hat{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) (\Delta \lambda + k_{F_i} \Delta F), \quad (3.58)$$

donde  $k_p$ ,  $\xi$ ,  $k_{F_i}$  son constantes positivas y  $\lambda_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  es la fuerza y velocidad deseada, respectivamente. La matriz de proyección  $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S)$  y la matriz pseudo inversa  $\hat{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S)$  son un estimado de  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)$  y  $\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)$ , respectivamente. Los errores de fuerza se definen como

$$\Delta \lambda \triangleq \lambda - \lambda_d \quad (3.59)$$

$$\Delta F \triangleq \int_0^t \Delta \lambda d\vartheta. \quad (3.60)$$

donde  $\lambda, \lambda_d \in \mathbb{R}$ .

Se define la variable deslizante

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r. \quad (3.61)$$

De acuerdo con la Propiedad 2.6 la variable  $\mathbf{s}$  en (3.61) se puede escribir como

$$\mathbf{s} = \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S)(\Delta\dot{\mathbf{q}} + k_p\Delta\mathbf{q}) + k_{F_i}^{-1}\xi\hat{\mathbf{J}}_\varphi^+(\Delta\lambda + k_{F_i}\Delta F) - \Delta\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.62)$$

donde  $\Delta\mathbf{Q} \triangleq \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)$ . El término  $\Delta\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}$  representa la componente de la velocidad que no se encuentra en el plano tangente estimado, puesto que en general  $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S)\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ . Obviamente  $\Delta\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}$  tiende a cero si  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_S$  tiende a  $\boldsymbol{\theta}_S$ . Sin embargo, si el error  $\mathbf{e}_f$  definido en (3.17) tiende a cero también implica la convergencia de  $\Delta\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}$  a cero, ya que para un tiempo  $t$  suficientemente grande se tiene  $\hat{\mathbf{J}}_\varphi^T(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)$ . La condición para la convergencia a cero de  $\mathbf{e}_f$  es más débil que la condición de Excitación Persistente requerida para la convergencia del vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}_S$ , como se mostrará más adelante.

La dinámica del manipulador en términos de la variable  $\mathbf{s}$  está dada por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{D}\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\lambda - \mathbf{Y}_a\boldsymbol{\theta}_R \quad (3.63)$$

donde  $\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es el regresor y  $\boldsymbol{\theta}_R \in \mathbb{R}^m$  es un vector de parámetros del robot.

Se propone la siguiente ley de control para el seguimiento de posición y fuerza con incertidumbres en la superficie de contacto y en los parámetros del robot

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}_a\hat{\boldsymbol{\theta}}_R - \mathbf{K}_v\mathbf{s} - \hat{\mathbf{J}}_\varphi^T(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S)(\lambda_d - k_{F_i}\Delta F), \quad (3.64)$$

donde  $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva definida y  $\hat{\mathbf{J}}_\varphi^T(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S)$  es un estimado de  $\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)$ . El vector  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_R$  es un estimado de  $\boldsymbol{\theta}_R$  y se actualiza a partir de la ley de adaptación

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_R = -\boldsymbol{\Gamma}_R\mathbf{Y}_a^T\mathbf{s}. \quad (3.65)$$

con  $\boldsymbol{\Gamma}_R \in \mathbb{R}^{p \times p}$  una matriz definida positiva. Por otra parte,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_S$  es un estimado de  $\boldsymbol{\theta}_S$  y se actualiza a partir de las leyes de adaptación

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_S = -\boldsymbol{\Gamma}_S\mathbf{W}_x(\mathbf{x})\mathbf{J}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{q}}(\Delta\lambda + k_{F_i}\Delta F) - \lambda\mathbf{s}) - \gamma\boldsymbol{\Gamma}_S\mathbf{W}_x(\mathbf{x})\mathbf{e}_f \quad (3.66)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S = \begin{cases} \beta\boldsymbol{\Gamma}_S - \boldsymbol{\Gamma}_S\mathbf{W}_x\mathbf{W}_x^T\boldsymbol{\Gamma}_S & \text{si } \|\boldsymbol{\Gamma}_S\| \leq \rho \\ \mathbf{0} & \text{si } \|\boldsymbol{\Gamma}_S\| > \rho. \end{cases} \quad (3.67)$$

donde  $\gamma \triangleq \gamma' + 1/2$ , con  $\gamma' > 0$  y  $\rho$  es una cota para  $\|\boldsymbol{\Gamma}_S\|$ . La Figura 3.3 muestra de forma esquemática el esquema de control adaptable.

**Comentario 3.1.** La ley de adaptación (3.66) puede verse como una ley de adaptación compuesta, donde el primer término corresponde a un algoritmo del tipo gradiente mientras que el segundo se agrega para lograr la convergencia de  $\mathbf{e}_f$  a cero.

A continuación se presenta el siguiente Teorema:

**Teorema 3.2.** Sea la dinámica del manipulador dada por (2.13), la ley de control (3.64) en conjunto con las leyes de adaptación (3.65), (3.66) y (3.67) logra que las señales tanto en posición  $(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)$  como fuerza  $(\Delta\lambda, \Delta F)$  permanezcan acotadas. Si  $\mathbf{W}_x(\mathbf{x})$  satisface la condición de Excitación Persistente y las condiciones iniciales son suficientemente pequeñas tal que se satisfaga el Hecho 2.1 se logra  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_S \rightarrow \boldsymbol{\theta}_S$ ,  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_d$  y  $\lambda \rightarrow \lambda_d$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

La demostración se encuentra en el Apéndice A.

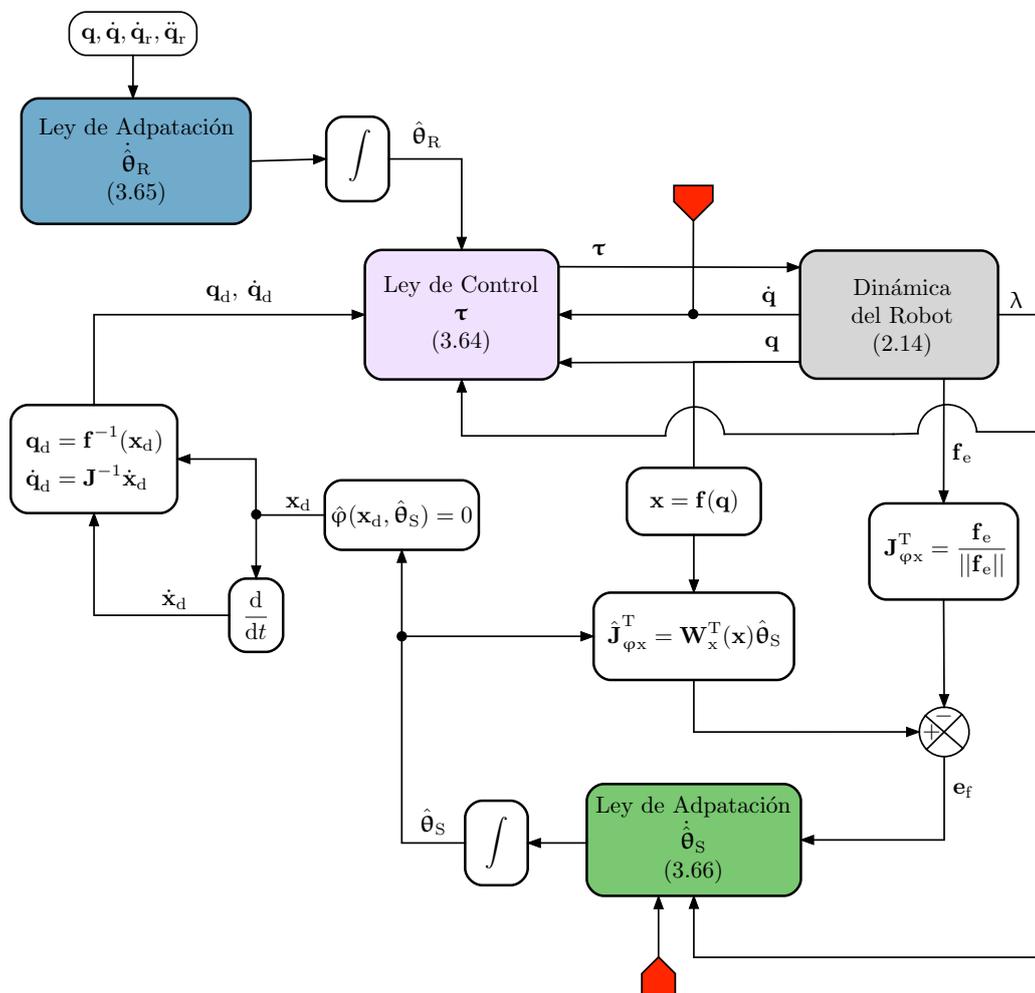


Figura 3.3: Control Adaptable de posición y fuerza con estimación de la superficie



## Capítulo 4

# Control de un sistema maestro-esclavo con superficie desconocida

### 4.1. Introducción

En el Capítulo 1 se abordó de manera general el esquema de teleoperación maestro-esclavo así como el estado del arte en robots teleoperados. En este capítulo se analiza con más detalle dicho esquema y se presenta una ley de control de posición y fuerza para robots teleoperados cuando la superficie del robot esclavo es desconocida. Como el nombre lo indica existe una jerarquía, siendo el maestro el generador de trayectorias para el esclavo. A diferencia de los esquemas de mutua coordinación y control descentralizado, en el sistema maestro-esclavo el operador tiene un papel preponderante ya que interactúa con el robot maestro, mientras que en los esquemas antes mencionados el papel del operador es relegado a la supervisión del sistema.

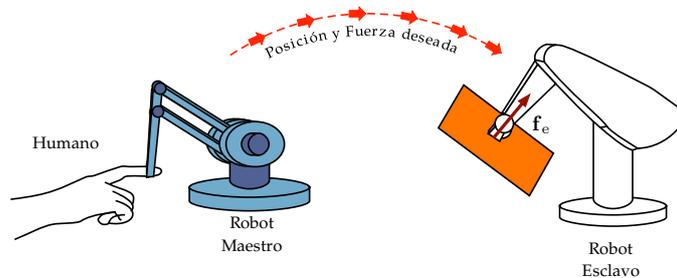
El progreso de la robótica en los últimos años ha permitido el desarrollo de interfaces hápticas, las cuales establecen un enlace entre el ser humano y un entorno virtual o remoto. Las funciones primordiales de los dispositivos hápticos son:

- Capturar la información de posición y fuerza que es provista por el operador.
- Proveer una fuerza/torque de retroalimentación a través de los motores, que le permiten al humano sentir el entorno virtual o remoto.

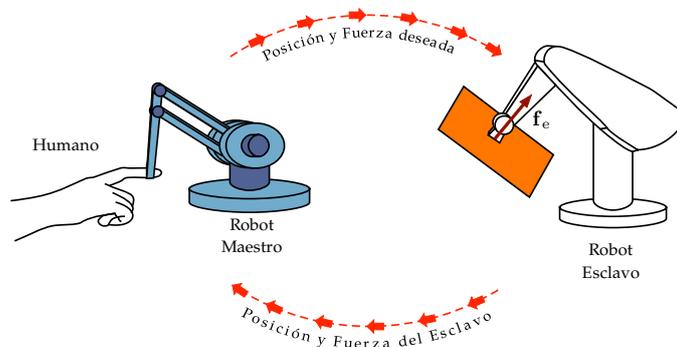
Dependiendo de la información transmitida a cada robot el sistema de teleoperación maestro-esclavo se clasifica en:

**Esquema de Teleoperación Unilateral** Solamente el robot maestro manda información de posición y fuerza al robot esclavo (ver Figura 4.1(a)).

**Esquema de Teleoperación Bilateral** Ambos robots transmiten información de posición y fuerza (ver Figura 4.1(b)). Este esquema aumenta la capacidad para realizar tareas.



(a) Esquema de Teleoperación Unilateral



(b) Esquema de Teleoperación Bilateral

Figura 4.1: Sistema de Teleoperación Maestro-Esclavo

## 4.2. Modelo dinámico del sistema de teleoperación maestro-esclavo

El sistema maestro-esclavo considerado en este trabajo está constituido por dos manipuladores cada uno con  $n_i$  grados de libertad ( $i = m, s$ ), pero no necesariamente con la misma configuración. Ambos robots tienen el mismo espacio de trabajo. El modelo dinámico del maestro está dado por

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m)\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m)\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{D}_m\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m) = \boldsymbol{\tau}_m - \boldsymbol{\tau}_h, \quad (4.1)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{R}^n$  representa el torque aplicado por el humano y  $\boldsymbol{\tau}_m \in \mathbb{R}^n$  es la entrada de control para el robot maestro que recrea las fuerzas de contacto.

El modelo dinámico del robot esclavo está dado por

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s)\ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) = \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s)\boldsymbol{\lambda}_s \quad (4.2)$$

sujeto a

$$\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

Únicamente el movimiento del robot esclavo está restringido.

### 4.3. Superficie virtual

En el sistema de teleoperación maestro-esclavo el operador puede percibir el ambiente remoto ya sea mediante un sistema de visión o por fuerzas de reacción producto del contacto con el ambiente. Para el segundo caso, se requiere que el robot maestro aplique el torque necesario en sus articulaciones para recrear la fuerza de reacción en el efector final del robot maestro. La fuerza de reacción recreada por el controlador del maestro tiene dos objetivos: el primero consiste en impedir el movimiento en ciertas direcciones. Por ejemplo, si el robot esclavo está en contacto con una pared y el robot maestro manda una posición que implica atravesarla se generará una fuerza de reacción que impide el movimiento en esa dirección. El segundo objetivo es simplemente recrear la magnitud de la fuerza de reacción.

Para lograr dichos objetivos se emplea una superficie virtual que representa la misma restricción del robot esclavo, solamente expresada en diferentes coordenadas. Puesto que se considera desconocida, la superficie virtual se calcula como

$$\boldsymbol{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_v}(\mathbf{q}_m)(\mathbf{q}_m(t) - \mathbf{q}_m(t - \tau)) \quad (4.4)$$

donde  $\tau$  es un retardo de tiempo. Si el espacio de trabajo del robot maestro es un subconjunto del espacio de trabajo del robot esclavo se puede emplear un factor de escala. El gradiente de la restricción  $\mathbf{J}_{\varphi_v}(\mathbf{q}_m)$  en (4.4) se calcula como

$$\mathbf{J}_{\varphi_v}(\mathbf{q}_m) = \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \mathbf{J}_m(\mathbf{q}_m) \quad \text{con} \quad \|\mathbf{f}_e\| \neq 0, \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{J}_m(\mathbf{q}_m)$  es el Jacobiano analítico del robot maestro y  $\mathbf{f}_e$  es la fuerza medida por el sensor del robot esclavo. Obviamente si  $\|\mathbf{f}_e\| = 0$  implica que el robot esclavo no está en contacto

con la superficie y el esquema de control debe cambiarse a uno en movimiento libre para llevar de nuevo el efector final del esclavo al punto de contacto y poder generar la superficie virtual.

Para obtener la fuerza de reacción se introduce la variable de estado  $\lambda_v$  que representa la fuerza virtual producto de la interacción del robot maestro con la superficie virtual. La fuerza virtual  $\lambda_v$  se obtiene como solución de la ecuación diferencial (Bayo y Avello 1995)

$$\frac{d}{dt}\lambda_v = \ddot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) + 2\zeta\omega_n\dot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) + \omega_n^2\varphi_v(\mathbf{q}_m), \quad \lambda_v(0) = \lambda_{v0}. \quad (4.6)$$

Donde  $\dot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_v}(\mathbf{q}_m)\dot{\mathbf{q}}_m$  y  $\ddot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_v}(\mathbf{q}_m)\ddot{\mathbf{q}}_m + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_v}(\mathbf{q}_m)\dot{\mathbf{q}}_m$ . Las ganancias  $\zeta$  y  $\omega_n$  se eligen de tal forma que (4.6) sea estable.

De acuerdo con (4.6) para obtener  $\lambda_v$  se necesita derivar (4.5), por lo tanto se requiere  $\dot{\mathbf{f}}_e$  que no es medible. Para resolver este problema se emplea una ecuación equivalente dada por

$$\lambda_v = \dot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) + 2\zeta\omega_n\varphi_v(\mathbf{q}_m) + \omega_n^2 \int_0^t \varphi_v(\mathbf{q}_m)d\vartheta. \quad (4.7)$$

Debido a la Suposición 3.1  $\lambda_v, \varphi_v(\mathbf{q}_m) \in \mathbb{R}$ .

#### 4.4. Modelo matemático del humano

Para fines de análisis y diseño de esquemas de control para sistemas teleoperados del tipo maestro-esclavo es necesario modelar la fuerza/torque aplicado por el humano al efector final del robot maestro, pues es el operador quién manda la posición y fuerza deseada.

Modelar la fuerza producida por el humano no es una tarea sencilla y a menudo se emplean modelos simplificados, generalmente sistemas de segundo orden del tipo masa-resorte-amortiguador. En este trabajo se hace uso el Principio de Ortogonalización para dividir la fuerza del operador en los subespacios de posición y fuerza.

**Suposición 4.1.** *El operador mantiene el efector final del robot maestro en contacto con la superficie virtual y la fuerza generada por el humano se puede modelar como un control tipo PID para el subespacio de posición y un control PI para el subespacio de fuerza. La fuerza del*

operador está dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_h = & \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \left( k_{vh} \Delta \dot{\mathbf{q}}_m + k_{ph} \Delta \mathbf{q}_m + k_{ih} \int_0^t \Delta \mathbf{q}_m d\vartheta \right) + \\ & \mathbf{J}_{\varphi v}(\mathbf{q}_m) (k_{fh} \Delta \lambda_{vd} + k_{Fih} \Delta F_{vd}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $\Delta \mathbf{q}_m = \mathbf{q}_m - \mathbf{q}_d$ ,  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$  es la trayectoria deseada y  $k_{vh}$ ,  $k_{ph}$ ,  $k_{ih}$ ,  $k_{fh}$ , y  $k_{Fih}$  son constantes positivas. Los errores de fuerza están dados por

$$\Delta \lambda_{vd} = \lambda_v - k \lambda_{ds} \quad (4.9)$$

$$\Delta F_{vd} = \int_0^t \Delta \lambda_{vd} d\vartheta, \quad (4.10)$$

$k$  es un factor de escala. □

Desde un punto de vista práctico el operador siempre puede llevar el efector final del robot maestro a la trayectoria deseada logrando un error cero en posición, lo que justifica la Suposición 4.1. El operador siente la fuerza virtual generada por el controlador del robot maestro, dependiendo de la fuerza deseada el operador aplicará mayor o menor fuerza generando un error entre la fuerza virtual y la fuerza deseada. Al final este error se hace cero y se tiene un balance de fuerzas. Este hecho está modelado por la ecuación (4.8).

## 4.5. Ley de Control

La ley de control para el robot esclavo está dada por

$$\boldsymbol{\tau}_s = -\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \left( k_{vs} \Delta \dot{\mathbf{q}}_s + k_{ps} \Delta \mathbf{q}_s + k_{is} \int_0^t \Delta \mathbf{q}_s d\vartheta \right) - \mathbf{J}_{\varphi s}^T(\mathbf{q}_s) (\lambda_{ds} - k_{Fs} \Delta F_s), \quad (4.11)$$

donde  $\lambda_{ds} \in \mathbb{R}$  es la fuerza deseada aplicada a la superficie virtual,  $k_{vs}$ ,  $k_{ps}$ ,  $k_{is}$  y  $k_{Fs}$  son constantes positivas. Los errores de posición y fuerza del robot esclavo están dados por

$$\Delta \mathbf{q}_s = \mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{ds} \quad (4.12)$$

$$\Delta \lambda_s = \lambda_s - \lambda_{ds} \quad (4.13)$$

$$\Delta F_s = \int_0^t \Delta \lambda_s d\vartheta. \quad (4.14)$$

donde  $\mathbf{q}_{ds} \in \mathbb{R}^n$  es la trayectoria deseada para el robot esclavo. La ley de control (4.11) es un control PID para posición y un control PI para la parte de fuerza. Las matrices  $\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)$  y  $\mathbf{J}_{\varphi s}(\mathbf{q})$  separan la ley de control en dos subespacios ortogonales, lo que significa que los errores

de posición no afectan los errores de fuerza y viceversa.

La ley de control del robot maestro está dada por

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{Y}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \ddot{\mathbf{q}}_m)\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{J}_{\varphi_v}^T(k_{pv}\Delta\lambda_{vs} + k_{Fiv}\Delta F_{vs}) \quad (4.15)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}_m \in \mathbb{R}^k$  son los parámetros del robot maestro,  $k_{pv}$  y  $k_{Fiv}$  son constantes positivas. Los errores de fuerza del robot maestro están dados por

$$\Delta\lambda_{vs} = \lambda_v - \lambda_s \quad (4.16)$$

$$\Delta F_{vs} = \int_0^t \Delta\lambda_{vs} d\vartheta. \quad (4.17)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (4.15) se utiliza para dar transparencia al sistema de teleoperación debido a que cancela la dinámica del robot maestro, la única fuerza que el operador percibe es la fuerza generada por el control. El segundo término de (4.15) transmite el error entre la fuerza virtual y la compara con la fuerza real. El término se hace nulo cuando existe un equilibrio de fuerzas y se logra  $\lambda_v = \lambda_s$ .

El esquema de teleoperación se muestra en la Figura 4.2. El operador aplica el torque necesario  $\boldsymbol{\tau}_h$  para mover el robot maestro a la posición deseada y al mismo tiempo manda la fuerza deseada  $\lambda_{ds}$ . La fuerza deseada que manda el operador es pequeña en comparación con la fuerzas que puede manejar un manipulador industrial, dependiendo de la tarea se puede introducir un factor de escala para la fuerza deseada.

La posición articular del robot maestro  $\mathbf{q}_m$  se convierte en la posición deseada para el robot esclavo. Puesto que los robots no necesariamente comparten la misma configuración cinemática se emplea la cinemática directa del robot maestro para obtener la trayectoria en coordenadas cartesianas y mediante la cinemática inversa del robot esclavo se obtiene la trayectoria deseada  $\mathbf{q}_{ds}$ . La fuerza de contacto es medida y retroalimentada a los controladores del robot maestro y esclavo. La fuerza de contacto también se utiliza para calcular una estimación local de la superficie y con esa información recrear la superficie virtual.

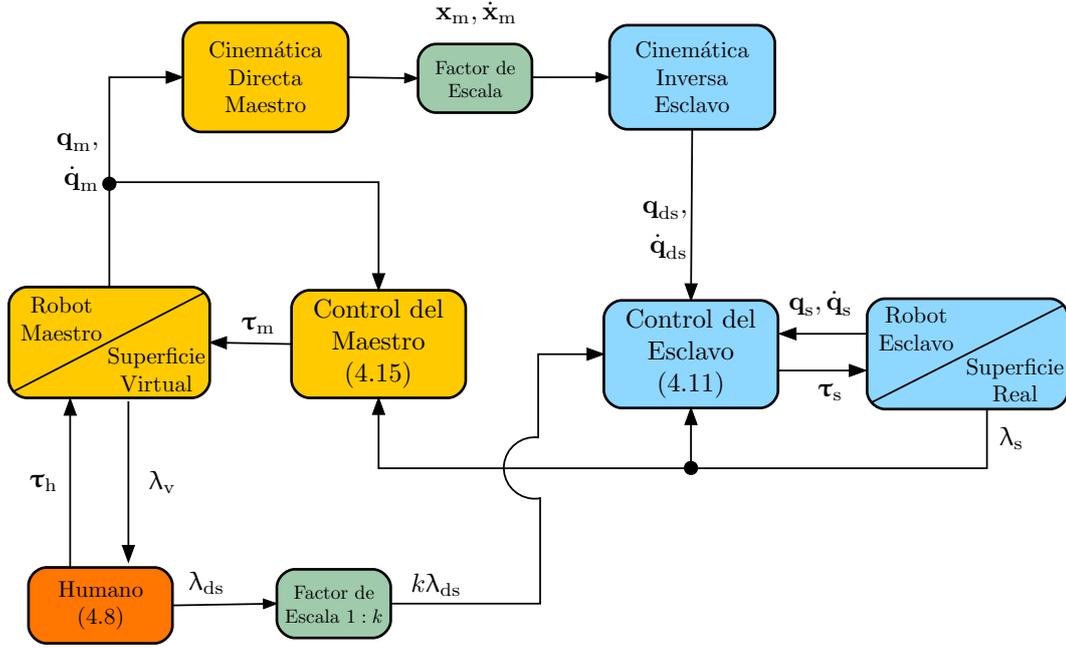


Figura 4.2: Esquema de teleoperación bilateral

**Comentario 4.1.** El operador no necesita conocer toda la superficie, solo requiere saber en qué direcciones puede moverse el efector final del robot maestro. Esta información está contenida en (4.4), por lo tanto, la aproximación de la superficie propuesta en la Sección 3.2 también es válida en el esquema de teleoperación bilateral maestro-esclavo en tanto (4.4) se actualice lo suficientemente rápido.

A continuación se establece el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.** *Para el sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo dado por (4.1), (4.2) y (4.3) en conjunto con las leyes de control (4.11), (4.15) y el modelo del humano dado por (4.8) logra que los errores de posición  $(\Delta \mathbf{q}_m, \Delta \mathbf{q}_s, \Delta \dot{\mathbf{q}}_m, \Delta \dot{\mathbf{q}}_s)$  y fuerza  $(\Delta \lambda_s, \Delta F_s, \Delta \lambda_{vs}, \Delta F_{vs}, \Delta \lambda_{vd}, \Delta F_{vd})$  sean arbitrariamente pequeños mediante una apropiada selección de ganancias si la Suposición 4.1 se satisface y los errores de posición son suficientemente pequeños para que el Hecho 2.1 se cumpla.*  $\square$

El desarrollo matemático de la demostración se encuentra en el Apéndice A.



## Capítulo 5

# Resultados

En este capítulo se muestran los resultados tanto en simulación como experimentales de los esquemas de control presentados en los Capítulos 3 y 4. El sistema experimental se encuentra en el Laboratorio de Robótica del edificio de Posgrado e Investigación de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y consta de:

- Robot A465 de la compañía *CRS-Robotics*. El robot tiene seis grados de libertad, cada articulación cuenta con un encoder incremental para medir la posición angular.
- Sensor de fuerza *JR3*. El sensor de fuerza tiene 6 ejes, lo que le permite realizar mediciones de fuerza y momento en el espacio tridimensional. El sensor de fuerza se encuentra en el efector final del robot y está acoplado a un balón para reducir la fricción con la superficie.
- FPGA de la compañía *National Instruments*. El FPGA es el sistema de adquisición de datos, recibe las señales de los encoders, realizan las cuentas por revolución y manda los datos a la PC, que se encarga de realizar el algoritmo de control.

En los experimentos se eligió una configuración planar de tres grados de libertad por lo que se emplearon solamente las articulaciones 2, 3 y 5 del robot A465. La ventaja de emplear solamente tres articulaciones es que se redujo el tiempo de muestreo a 4[ms].

## 5.1. Resultados experimentales

### 5.1.1. Estimación local

La estimación local de la superficie se realiza directamente en coordenadas del espacio de trabajo definidas como  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & \phi \end{bmatrix}^T$ . La ecuación (3.2) se reescribe como

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_{\phi\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)), \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{J}_{\phi\mathbf{x}} = \mathbf{f}_e^T / \|\mathbf{f}_e\|$ ,  $\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^3$  es la fuerza medida por el sensor expresada con respecto al sistema de referencia de la base y  $\tau = 4$ [ms]. A pesar de que se emplearon únicamente tres articulaciones del robot A465 solamente se logró un tiempo de muestreo no menor a 4 milisegundos. Debido a que el movimiento es en el plano  $x - y$  la tercera componente del vector  $\mathbf{f}_e$  es cero. La estimación de la superficie (5.1) no depende de la orientación del efector final del manipulador, sin embargo, ésta se elige tal que el efector se encuentre normal a la superficie como se muestra en la Figura 5.1. La matriz de rotación deseada se calcula a partir de mediciones de fuerza como

$${}^0\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{\phi\mathbf{s}}^T & \mathbf{z}_d \times -\mathbf{J}_{\phi\mathbf{x}}^T & \mathbf{z}_d \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{z}_d \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

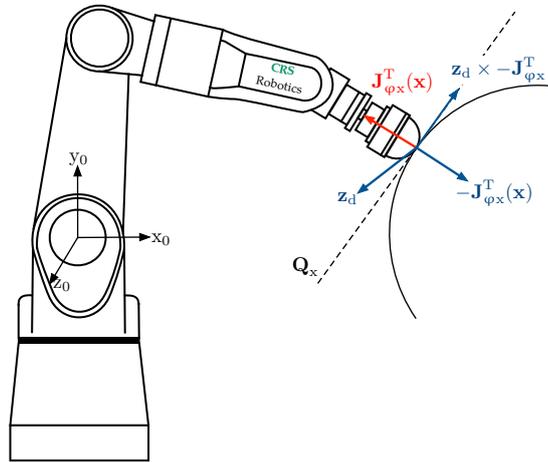


Figura 5.1: Orientación deseada del efector final

El experimento comienza en el punto  $(x_0, y_0) = (0.482, 0.154)$  [m], el cual se obtiene empleando la cinemática directa del robot y con el sensor de fuerza se determina cuando existe contacto con la superficie. A partir de ese punto el robot trata de desplazarse una distancia

de 3 [cm] en la dirección del eje  $x$ . Se emplea un polinomio de quinto orden para generar un trayectoria suave desde el punto inicial  $x_0$  hasta el punto final  $x_f = x_0 + 0.03$  [m]. La trayectoria deseada en la dirección del eje  $y$  se obtiene a partir de la ecuación (5.1). Puesto que la ley de control (3.6) está en coordenadas articulares se emplea la cinemática inversa del manipulador mostrada en el Apéndice B. La fuerza deseada está dada por

$$\lambda_d = 30 + 10 \sin(0.75t). \quad (5.3)$$

La restricción real es un plano con pendiente de  $60^\circ$  y su ecuación está dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\sin(60^\circ)(x - x_0) + \cos(60^\circ)(y - y_0) = 0. \quad (5.4)$$

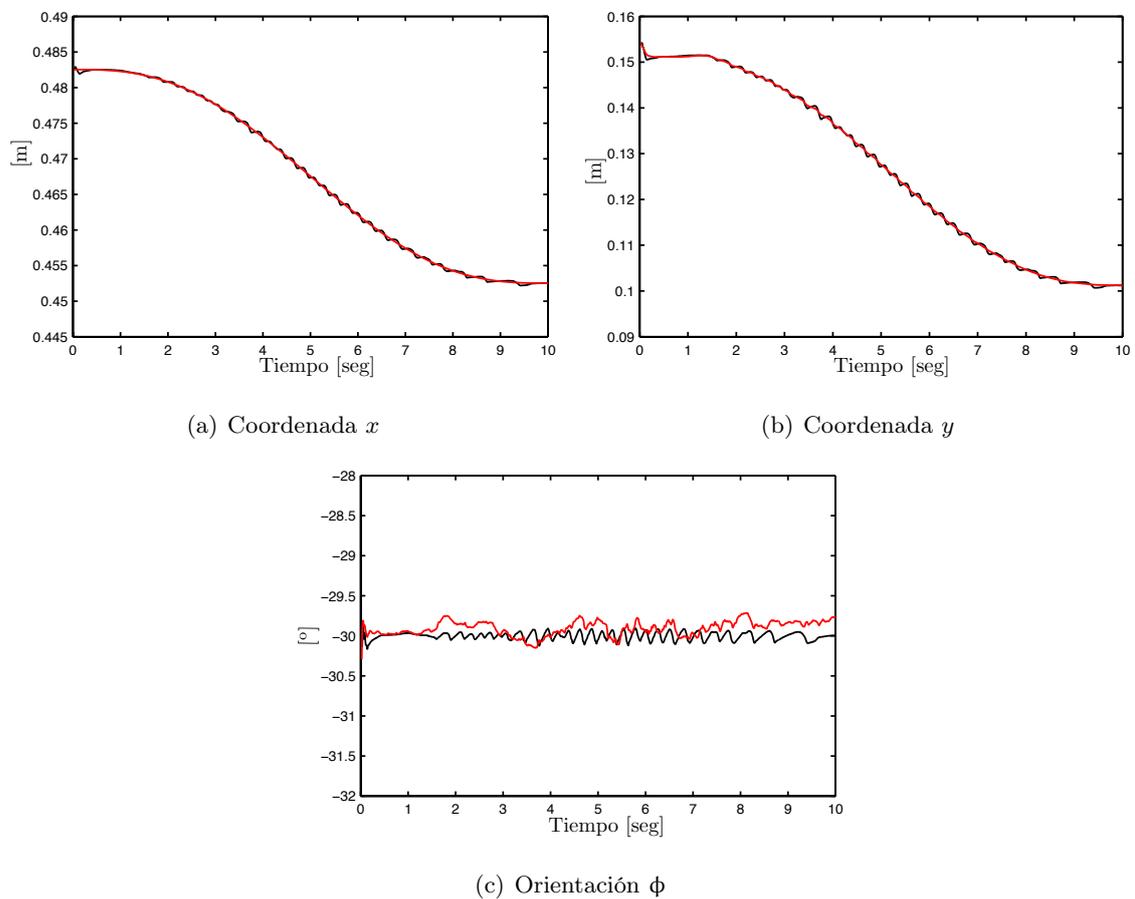


Figura 5.2: Superficie desconocida. Trayectoria real (—) vs trayectoria deseada (---)

El seguimiento de trayectorias en el subespacio de posición en coordenadas cartesianas se muestra en la Figura 5.2. A diferencia de la coordenada deseada  $y_d$ , la orientación deseada  $\phi_d$  se ve afectada considerablemente por el ruido presente en el sensor de fuerza como se observa en la Figura 5.2(c). Los errores de seguimiento en posición se muestran en la Figura 5.3. El error absoluto máximo que se tiene en la coordenada  $x$  es de 0.605 [mm]. Por otro lado, el error máximo en la coordenada  $y$  se presenta al inicio del movimiento y es de 1.095 [mm]. El error máximo en la orientación es de 1.67 grados que representa el 5.67% de error relativo. Además del ruido en los sensores, los errores se ven afectados por la fricción entre la superficie y el efector final del manipulador.

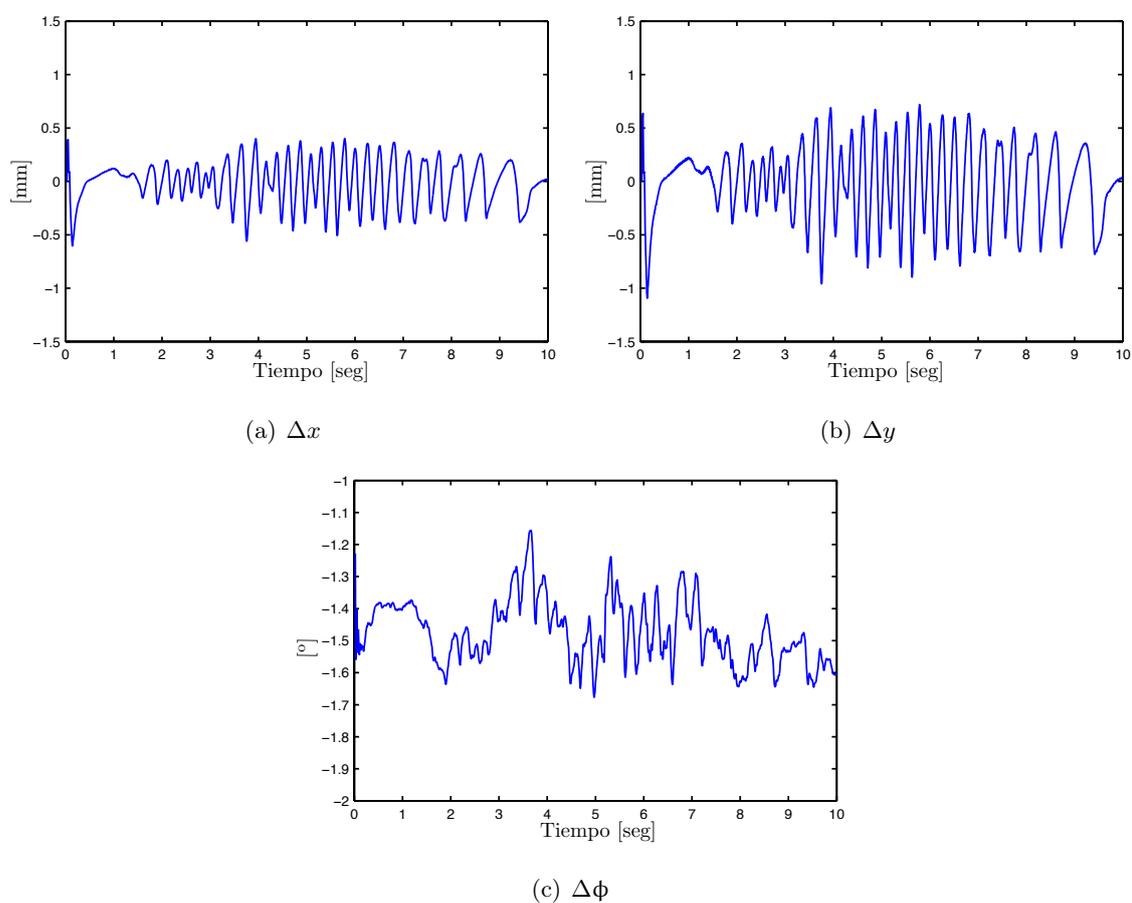


Figura 5.3: Superficie desconocida. Trayectoria real (—) vs trayectoria deseada (—)

La Figura 5.4 muestra el seguimiento de trayectorias en el subespacio de fuerza. Durante el transitorio se tiene un sobrepaso del 66% esto se debe a la ganancia de la acción integral del controlador, una ganancia menor disminuye el sobrepaso pero aumenta el error de seguimiento.

Dicho error después del transitorio se encuentra en un margen de  $\pm 5$  [N], es decir, se tiene un error relativo del 12.5%. Se tiene un error grande en fuerza debido principalmente al ruido en el sensor, la fricción de la superficie y a la sintonización de las ganancias de la ley de control.

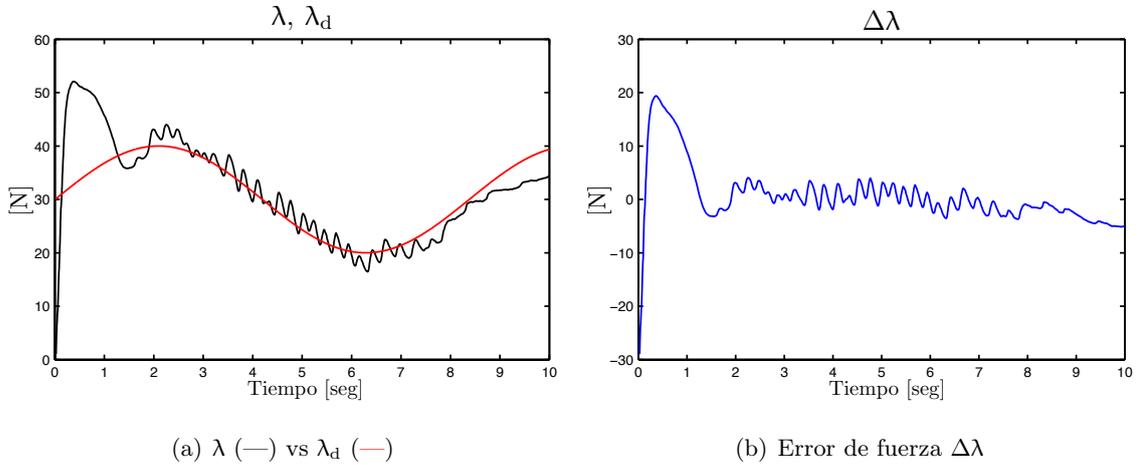
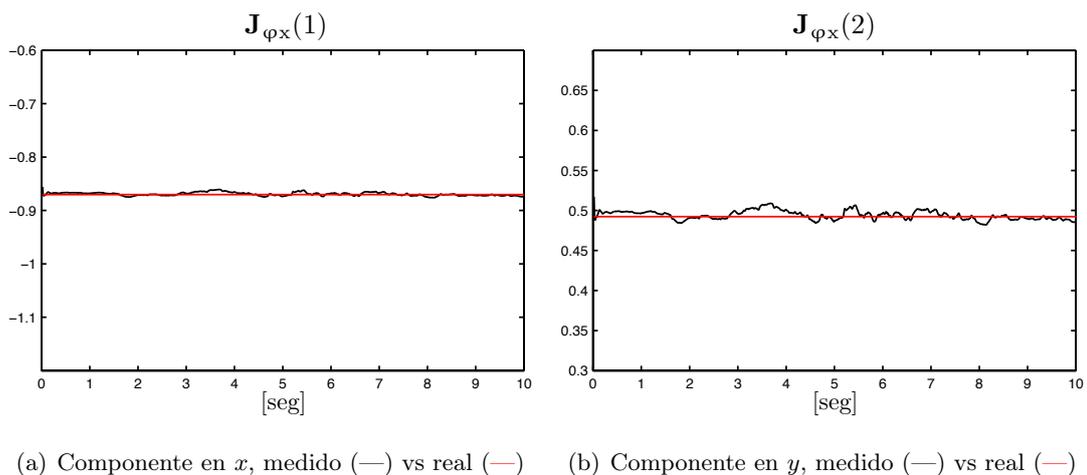


Figura 5.4: Superficie desconocida. Fuerza

Las componentes del gradiente medido con respecto al gradiente real se muestran la Figura 5.5. Se observa que la fricción de la superficie afecta principalmente la segunda componente del gradiente (ver Figura 5.5(b)). La Figura 5.6 muestra la restricción estimada y la trayectoria que sigue el efector final del manipulador sobre la superficie. La estimación de la superficie con respecto a la real (5.4) es aceptable, lo que muestra que un retardo de 4[ms] es suficiente para reconstruirla parcialmente.



(a) Componente en  $x$ , medido (—) vs real (—) (b) Componente en  $y$ , medido (—) vs real (—)

Figura 5.5: Superficie desconocida. Gradiente

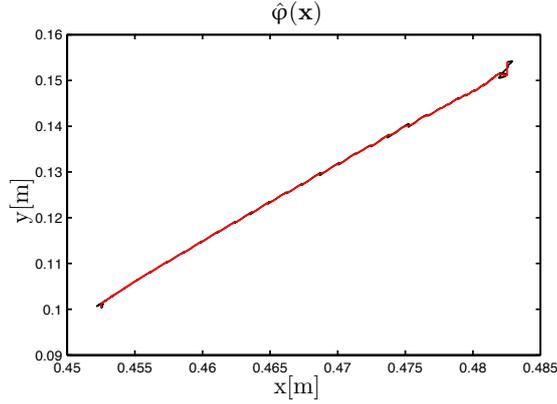


Figura 5.6: Restricción real (—) vs estimada (---)

## 5.2. Resultados en simulación

### 5.2.1. Estimación de la superficie

En esta sección se validan mediante simulación los esquemas de control (3.64)-(3.67). Se consideran dos superficies:

- a) Superficie Plana. El robot se encuentra en contacto con una superficie plana y trata de seguir una línea sobre ella aplicando una fuerza (ver Figura 5.7). La restricción estimada está dada por

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \hat{\theta}_{S1}(x - x_0) + \hat{\theta}_{S2}(y - y_0) = 0, \quad (5.5)$$

donde  $(x_0, y_0) = (0.484, 0.344)$  [m] es el punto de intersección entre la superficie estimada y la real. Los valores reales son  $\theta_{S1} = -\sin(79.76^\circ)$  y  $\theta_{S2} = \cos(79.76^\circ)$ . Dichos valores corresponden a los valores medidos de la plataforma experimental.

El gradiente estimado está dado por

$$\hat{\mathbf{J}}_{\varphi\mathbf{x}}^T = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{S1} \\ \hat{\theta}_{S2} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

con  $\mathbf{W}_x = \mathbf{I}_{2 \times 2}$ . Para la trayectoria en  $x$  se empleo un polinomio de quinto orden cuyos coeficientes se eligen tal que  $\dot{x}_d(0) = 0$ ,  $\ddot{x}_d(0) = 0$  y  $\dot{x}_d(t_f) = 0$ ,  $\ddot{x}_d(t_f) = 0$  con  $t_f = 8$  segundos. La trayectoria en  $y$  debe satisfacer la ecuación (5.5). La trayectoria deseada está

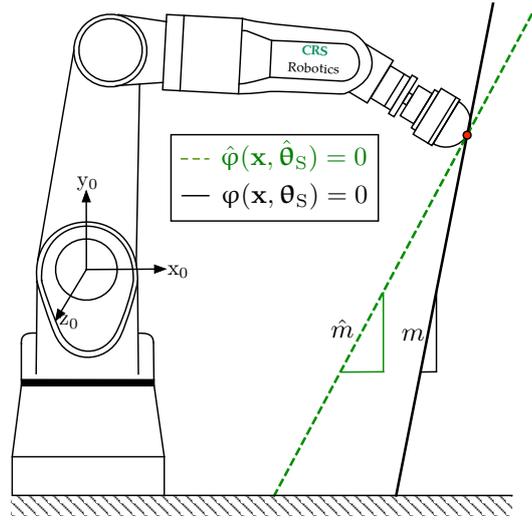


Figura 5.7: Simulacion 1: Robot en contacto con una superficie plana

dada por

$$x_d = \begin{cases} x_0 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 & \text{para } t \leq t_f \\ x_f & \text{para } t > t_f \end{cases} \quad (5.7)$$

$$y_d = y_0 - \frac{\hat{\theta}_{S1}}{\hat{\theta}_{S2}}(x_d - x_0). \quad (5.8)$$

La orientación deseada se elige tal que el efector final sea normal a la superficie estimada. De acuerdo con la Figura 5.1 y la ecuación (5.6) la matriz de rotación deseada está dada por

$${}^0\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{J}}_{\varphi x}^T & \mathbf{z}_d \times -\hat{\mathbf{J}}_{\varphi x}^T & \mathbf{z}_d \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Las ecuaciones (5.8) y (5.9) se actualizan de acuerdo a la ley de adaptación (3.66). La condición inicial para el vector de parámetros de la superficie es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_S = \begin{bmatrix} -\sin(60^\circ) \\ \cos(60^\circ) \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

La pendiente estimada inicial es de  $60^\circ$ . El tiempo de muestreo empleado en la simulación es de  $T = 3$  [ms]. La fuerza deseada está dada por

$$\lambda_d = \begin{cases} 50 + 15 \sin\left(\frac{2\pi t}{t_f}\right) & \text{para } t \leq t_f \\ 50 & \text{para } t > t_f. \end{cases} \quad (5.11)$$

Las Figuras 5.8(a), 5.8(b) y 5.8(c) muestran el seguimiento de las trayectorias en coordenadas cartesianas. No se presenta ningún sobrepaso durante el transitorio. La Figura 5.8(d) muestra la superficie estimada y la trayectoria que sigue el efector final del manipulador sobre la real, como se observa no se pierde el contacto.

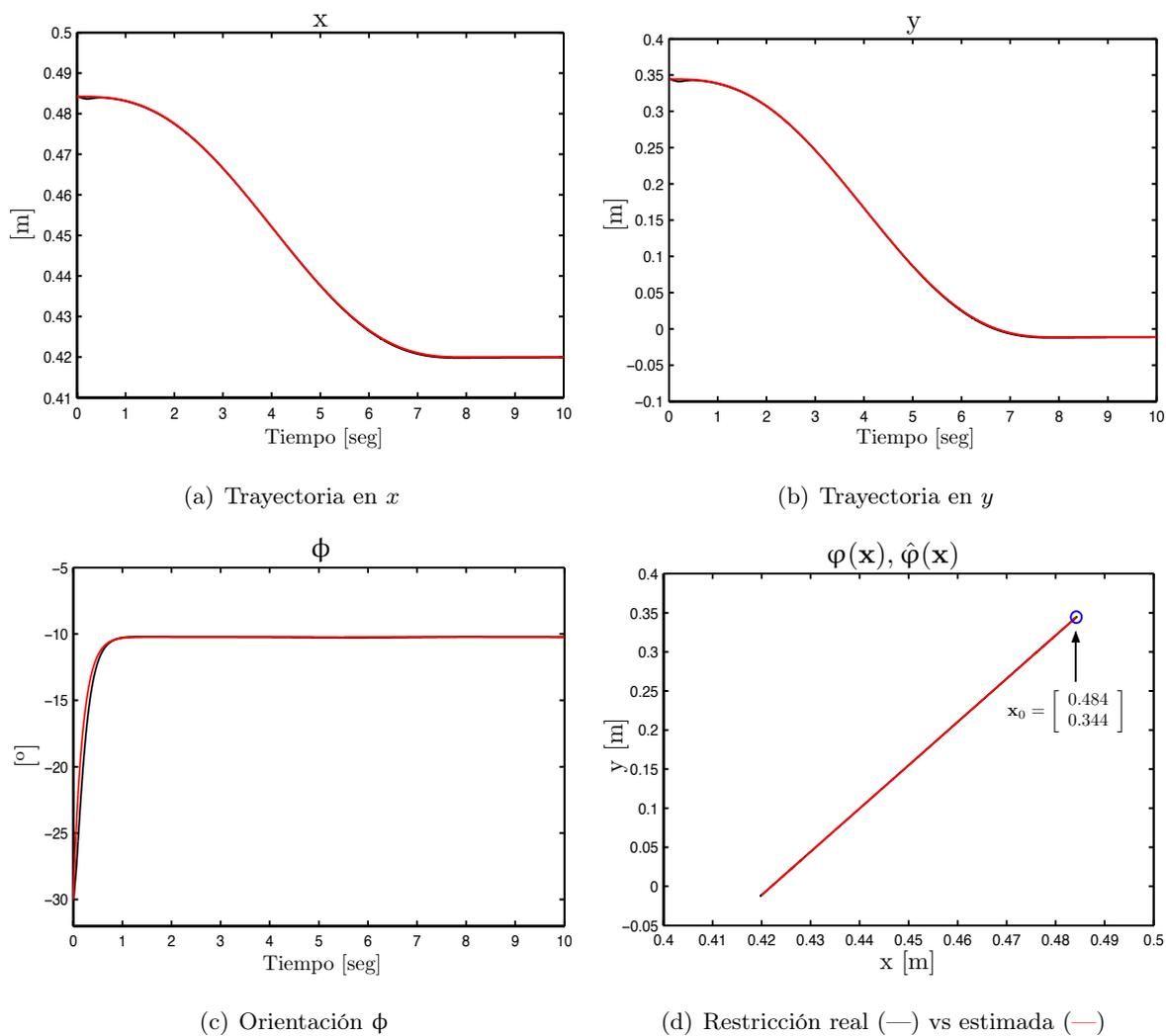


Figura 5.8: Superficie plana. Trayectoria real (—) vs deseada (—)

Los errores de seguimiento se muestran en la Figura 5.9. El error máximo en la coordenada  $x$  es de 0.6 [mm], mientras que para la coordenada  $y$  el error máximo es de 3 [mm]. Para la orientación se tiene un error de 3.5 [°]. Ambos errores se presentan al inicio del movimiento esto se debe a una mala estimación de los parámetros de la superficie. Dichos errores disminuyen cuando se estiman los parámetros de la superficie teniéndose errores menores a 1 [mm] en la posición y 0.5 [°] en la orientación.

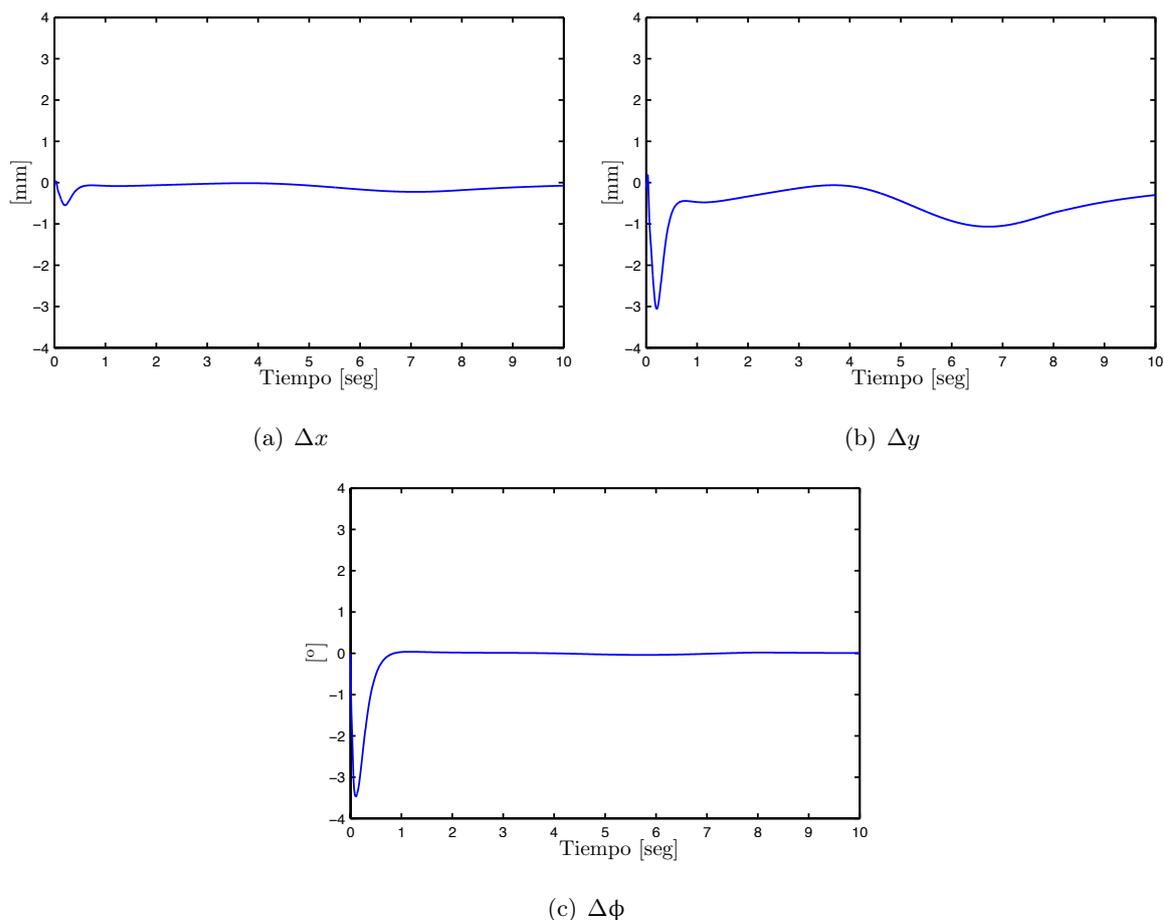


Figura 5.9: Superficie plana. Errores de seguimiento

Por otra parte, el seguimiento y el error de fuerza se muestran en la Figura 5.10. Se observa un seguimiento asintótico de la fuerza real con respecto a la deseada. En el subespacio de fuerza la convergencia a la trayectoria deseada a diferencia del subespacio de posición no depende de la convergencia paramétrica. Se tiene un sobrepaso del 46% debido a una alta ganancia en la parte de fuerza. Se ponderó el subespacio de fuerza sobre el de posición para

mantener el contacto con la superficie. Al final del transitorio se tiene un error menor 1 [N], es decir, 1.67% de error relativo.

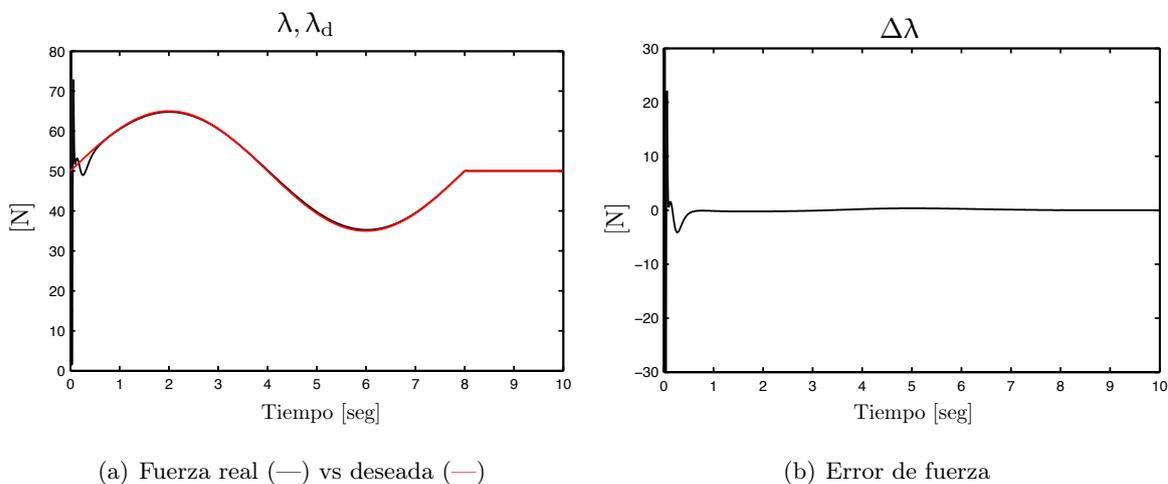


Figura 5.10: Superficie plana. Fuerza

Finalmente, la Figura 5.11 muestra los parámetros estimados de la superficie los cuales convergen a sus valores reales en un tiempo aproximado de 2 segundos. Es importante señalar que la excitación persistente se logró con polinomios de quinto orden.

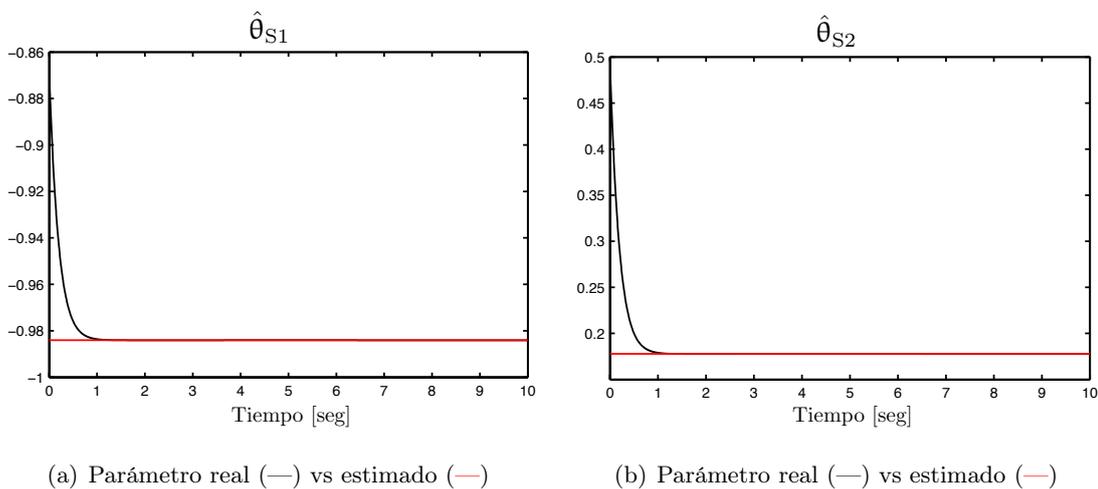


Figura 5.11: Superficie plana. Parámetros

b) Superficie circular. El robot trata de seguir una trayectoria deseada sobre un círculo aplicando una fuerza (ver Figura 5.12). La trayectoria comienza en el punto de intersección entre la

superficie real y la estimada dado por  $(x_0, y_0) = (0.410, 0.257)$  [m]. La restricción estimada está dada por

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{(x - \hat{h})^2}{2\hat{R}} + \frac{y^2}{2\hat{R}} - \frac{\hat{R}}{2} = 0, \quad (5.12)$$

donde  $\hat{R}$  y  $\hat{h}$  son un estimado del radio y centro del círculo, respectivamente. Los valores reales empleados en la simulación son  $R = 0.28$ [m] y  $h = 0.3$ [m].

Se define el vector de parámetros de la superficie como

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_S = \left[ \frac{1}{\hat{R}} \quad \frac{\hat{h}}{\hat{R}} \right]^T. \quad (5.13)$$

El gradiente está dado por

$$\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) = \underbrace{\begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_x} \hat{\boldsymbol{\theta}}_S. \quad (5.14)$$

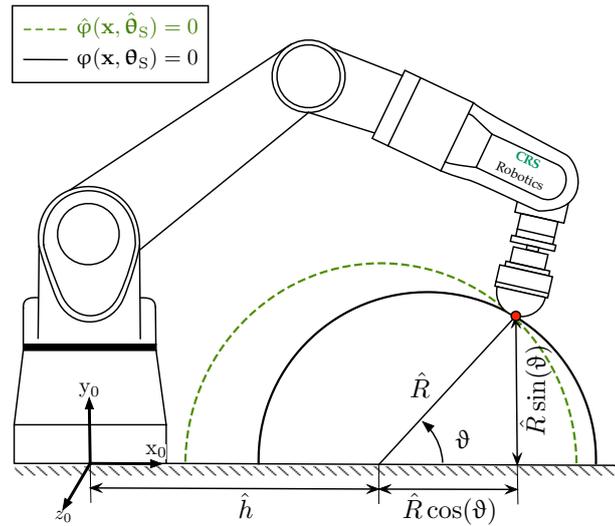


Figura 5.12: Simulación 2. Robot en contacto con una superficie circular

La trayectoria deseada está dada por

$$x_d = \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{S1}} \left( \cos(\vartheta) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{S2} \right) \quad (5.15)$$

$$y_d = \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{S1}} \sin(\vartheta), \quad (5.16)$$

donde  $\vartheta$  es un polinomio de quinto orden con punto inicial  $\vartheta(0) = 46^\circ$  y punto final  $\vartheta(t_f) = 135^\circ$  con  $t_f = 10$  segundos. La trayectoria deseada (5.15) y (5.16) satisfacen la restricción

(5.12). El tiempo de muestreo empleado en la simulación es de  $T = 3$  [ms]. La matriz de rotación deseada está dada por las ecuaciones (5.9) y (5.14). La fuerza deseada está dada por la ecuación (5.11). La condición inicial para el vector de parámetros de la superficie es

$$\hat{\theta}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0.22 \\ 0.32 & 0.32 \end{bmatrix}^T. \quad (5.17)$$

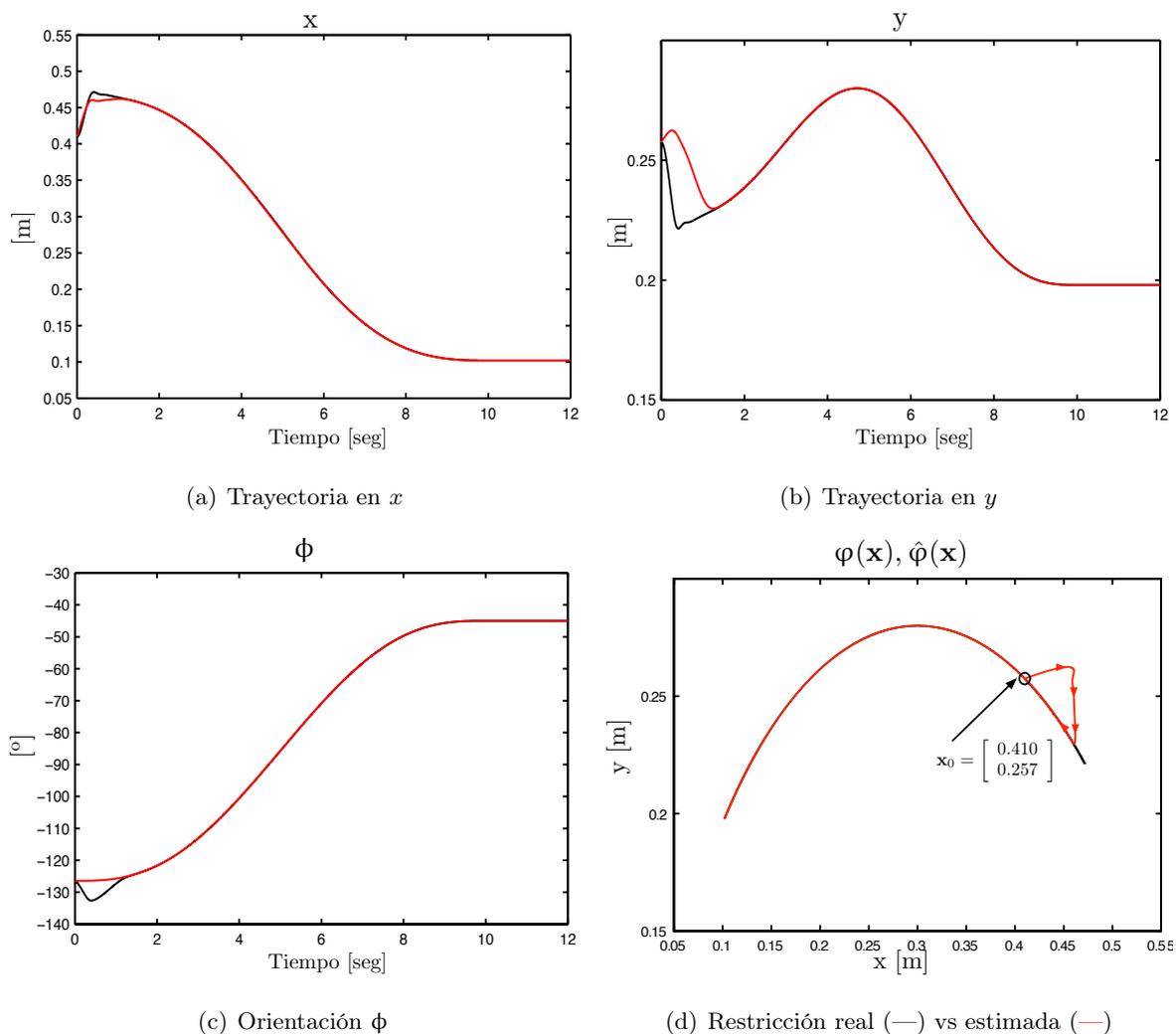


Figura 5.13: Superficie circular. Trayectoria real (—) vs deseada (---)

Las Figuras 5.13(a), 5.13(b) y 5.13(c) muestran el seguimiento de la trayectorias en coordenadas del espacio de trabajo. La restricción estimada y la trayectoria que sigue el efector final del manipulador sobre la real se muestra en Figura 5.13(d). A diferencia de la superficie plana, en este caso se tiene un error mayor entre la superficie estimada y real esto se debe principalmente al estimado inicial de los parámetros de la superficie y al radio de curvatura.

A pesar del error inicial entre la superficie real y estimada el efector no pierde contacto con la superficie debido a que se ponderó la componente de fuerza en la ley de control. Sin embargo, esto ocasiona que los errores durante el transitorio estén alrededor de 5 [cm] en la posición y 7 [°] en la orientación como se muestra en la Figura 5.14. Cuando los parámetros estimados convergen a los parámetros reales los errores de posición y orientación son menores a 1[mm] y 0.5 [°] respectivamente.

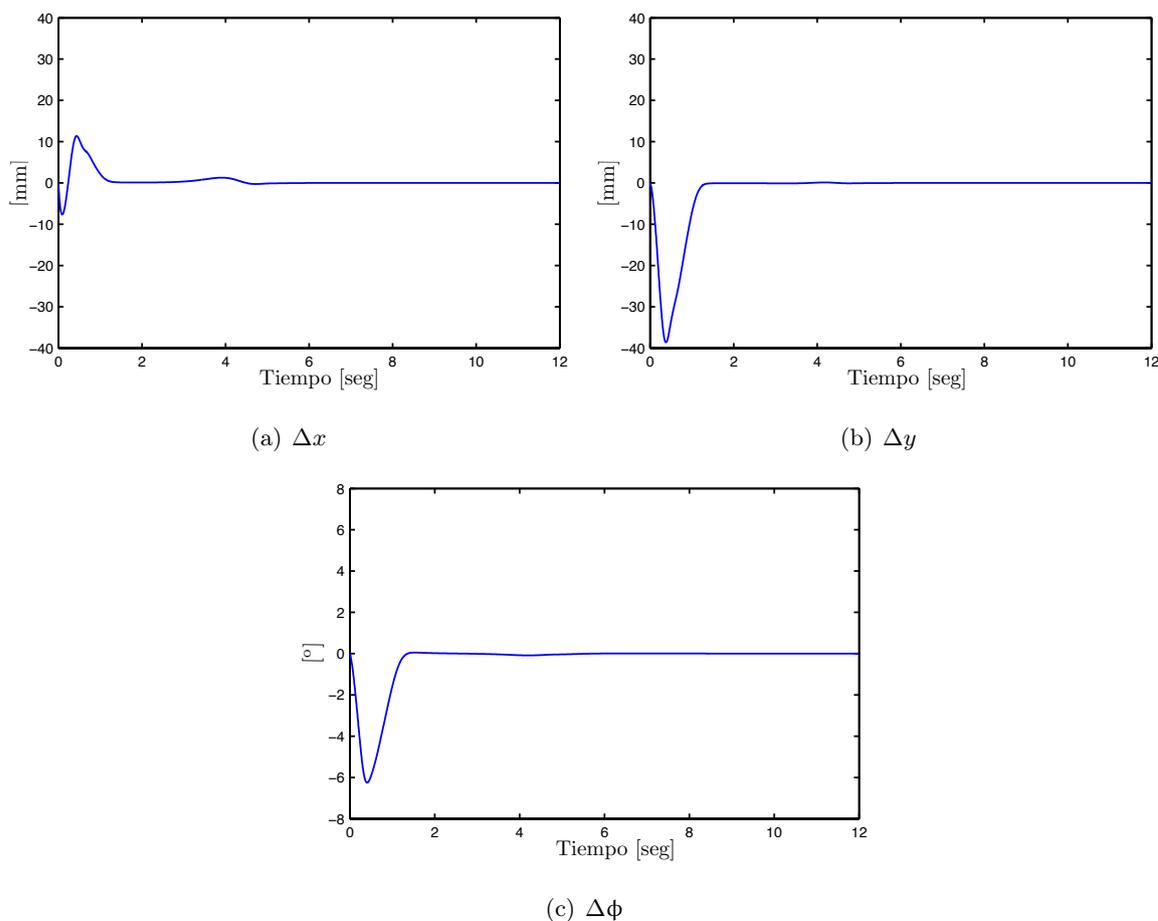


Figura 5.14: Superficie plana. Errores de seguimiento

La Figura 5.15 muestra un seguimiento asintótico de la fuerza real con respecto a la fuerza deseada. Se eligió una ganancia alta en la parte de fuerza para lograr una convergencia rápida a la fuerza deseada y mantener el contacto con la superficie, la desventaja es que se tiene un sobrepaso del 30 %. El error máximo en fuerza es de 15 [N] y se presenta durante el transitorio, posteriormente se tiene un error menor a 1 [N].

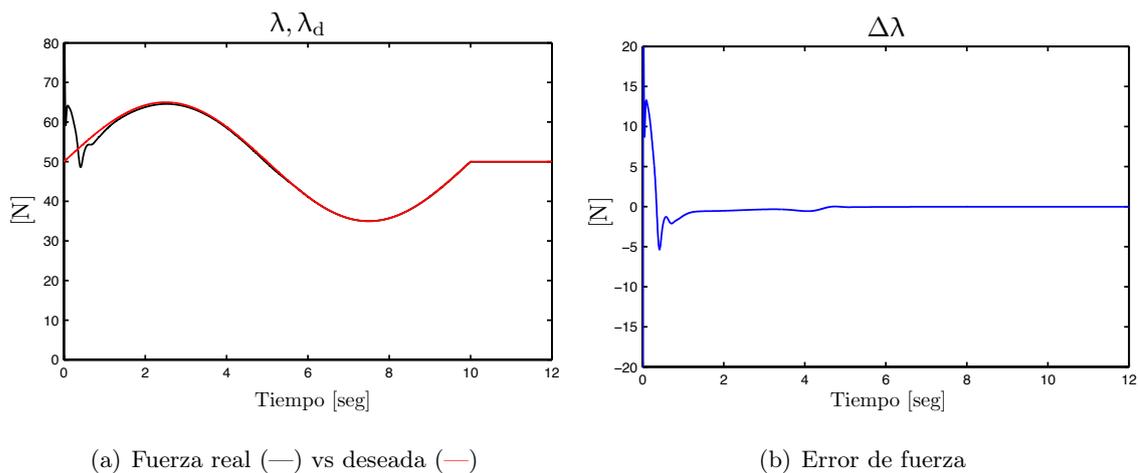


Figura 5.15: Superficie plana. Fuerza

Finalmente, la trayectoria de los parámetros de la superficie se muestra en la Figura 5.16, los cuales convergen a sus valores reales en un tiempo aproximado de 3 segundos con lo que se logra identificar la superficie.

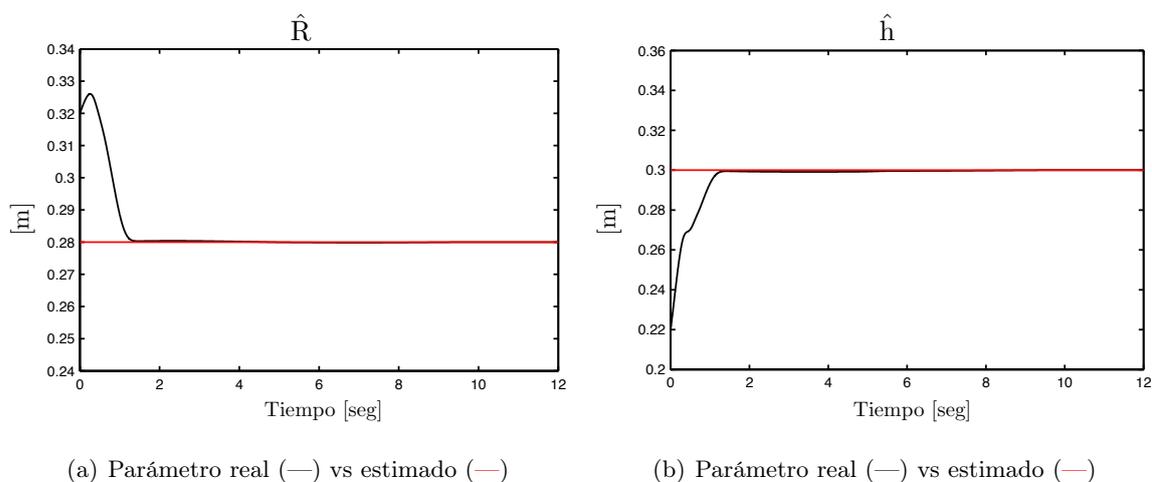


Figura 5.16: Superficie plana. Parámetros

Es importante notar que el parámetro  $\hat{\theta}_{S2}$  para la superficie plana y el parámetro  $\hat{\theta}_{S1}$  para el círculo no pueden pasar por cero. Esto implicaría que el círculo tendría un radio infinito, lo cual, no tiene sentido. Para el caso del plano se tendría una pendiente de  $90^\circ$  que no satisface la Suposición 3.2. En muchas ocasiones se conoce una cota de los parámetros de la superficie. Esta información se puede emplear para evitar *singularidades*. Entonces la ley de adaptación

se puede modificar para que las trayectorias de los parámetros estimados se encuentren dentro de una región conocida. La forma más común de hacerlo es emplear un proyector. Los detalles se pueden consultar en Ioannou y Sun (1996).

### 5.2.2. Teleoperación

En esta sección se validan mediante simulación los esquemas de control propuestos en el Capítulo 4. El robot esclavo empleado en la simulación es el robot A465, pero en este caso se emplearon únicamente las articulaciones 1, 2 y 3 por lo que el movimiento del robot es tridimensional. El modelo cinemático y dinámico del robot A465 empleando las primeras tres articulaciones se encuentra en Martínez-Rosas *et al.* (2006). El robot maestro es un robot Phantom, el cual es un manipulador paralelo que debido a su estructura cinemática robusta ha sido empleado ampliamente como dispositivo háptico. El modelo cinemático y dinámico del robot Phantom utilizado en las simulaciones está reportado en Cortéz-Martínez (2007).

Al iniciar la simulación el robot esclavo se encuentra en contacto con una esfera cuya ecuación está dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(x-h)^2}{2R} + \frac{(y-j)^2}{2R} + \frac{(z-k)^2}{2R} - \frac{R}{2} = 0, \quad (5.18)$$

con  $h = 0.45$  [m],  $j = 0$  [m],  $k = 0.1$  [m] y  $R = 0.15$  [m]. El operador desplaza el efector final del robot maestro una distancia de 7 [cm] a partir del punto de contacto en la dirección  $x$ , se recorre la misma distancia en la dirección  $y$ . La componente en  $z$  se obtiene a partir de la superficie virtual (4.7). En la simulación se emplean polinomios de quinto orden para las trayectorias deseadas en  $x$  e  $y$ . El tiempo de muestreo afecta considerablemente a la fuerza virtual  $\lambda_v$ , debido a esto se emplea un tiempo menor que en los casos anteriores. El tiempo de muestreo empleado en la simulación es de  $T = 1$  [ms]. La fuerza comandada por el operador está dada por

$$\lambda_{ds} = 2 + \sin(t). \quad (5.19)$$

Se emplea un factor de escala de 10 en la fuerza deseada, es decir, la fuerza de referencia para el robot esclavo es  $10\lambda_{ds}$ .

La trayectoria articular tanto del robot maestro como del esclavo se muestran la en Figura 5.17. Puesto que los robot no tienen la misma configuración cinemática se empleó la cinemática

directa para el maestro y la cinemática inversa para el esclavo. Las Figuras 5.18(a), 5.18(b) y 5.18(c) muestran la trayectoria en coordenadas del espacio de trabajo. La restricción virtual calculada a partir de la ecuación (4.4) reconstruye de manera eficiente la superficie real del esclavo como se muestra en la Figura 5.18(d). Como era de esperarse se tiene un pequeño error debido a que solo se tiene una estimación local de la superficie.

Para mostrar como influye la ganancia  $k_{vs}$  en el desempeño del robot esclavo se realizaron tres simulaciones con diferentes valores de dicha ganancia. Los errores de posición para el robot esclavo son menores a 0.5 grados para el espacio articular y menores a 1.5 [mm] para el espacio cartesiano como se muestra en la Figura 5.19. Dichos errores se consideran aceptables considerando que el esquema de control es del tipo Proporcional Integral Derivativo. En la simulación se incluyó la dinámica de los motores del robot A465 que tienen una relación de engranaje alta. Esto reduce la influencia de las no linealidades (fuerzas centrífugas y de Coriolis) en la dinámica del manipulador, lo cual favorece para tener errores de seguimiento pequeños.

Finalmente, las Figuras 5.20(a) y 5.20(b) muestran el seguimiento y el error en el subespacio de fuerza para el esclavo, respectivamente. Se observa que la fuerza aplicada hacia la superficie tiende a la fuerza deseada comandada por el operador. Por otro lado la fuerza virtual tiende a la fuerza aplicada por el esclavo y su error se encuentra en una vecindad cercana al cero como se muestra en las Figuras 5.20(c) y 5.20(d). Con esto se muestra que el operador sienta la fuerza aplicada hacia la superficie por parte del esclavo. En ambos casos se presenta un transitorio entre los 6 y 7 segundos, esto se debe principalmente a: el método empleado para resolver la ecuación DAE, sintonización de ganancias y errores numéricos. Como era de esperarse una ganancia grande para  $k_{vs}$  mejora el desempeño en posición. Sin embargo, una alta ganancia afecta el desempeño en el subespacio de fuerza.

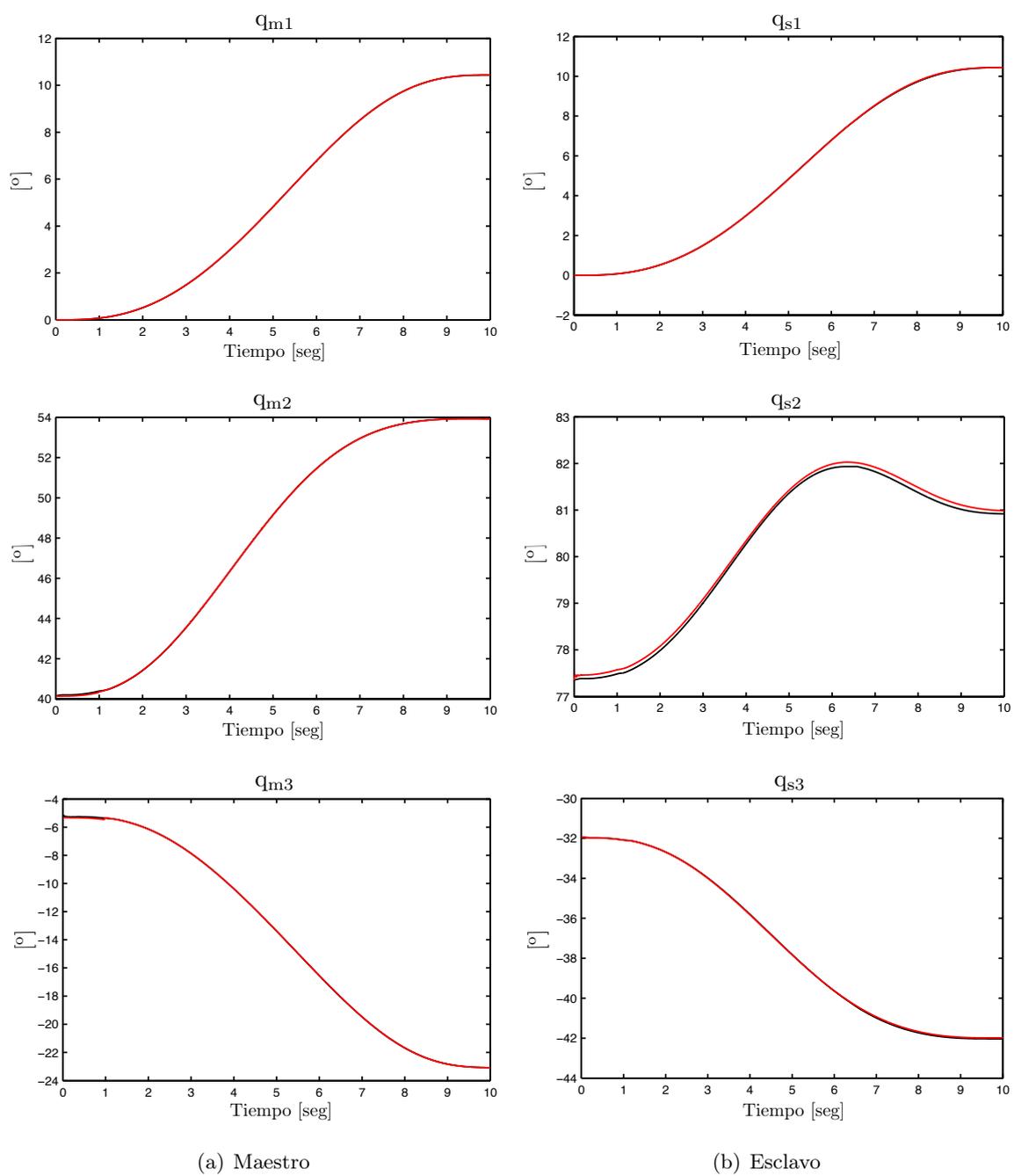


Figura 5.17: Teleoperación. Trayectoria real (—) vs deseada (---)

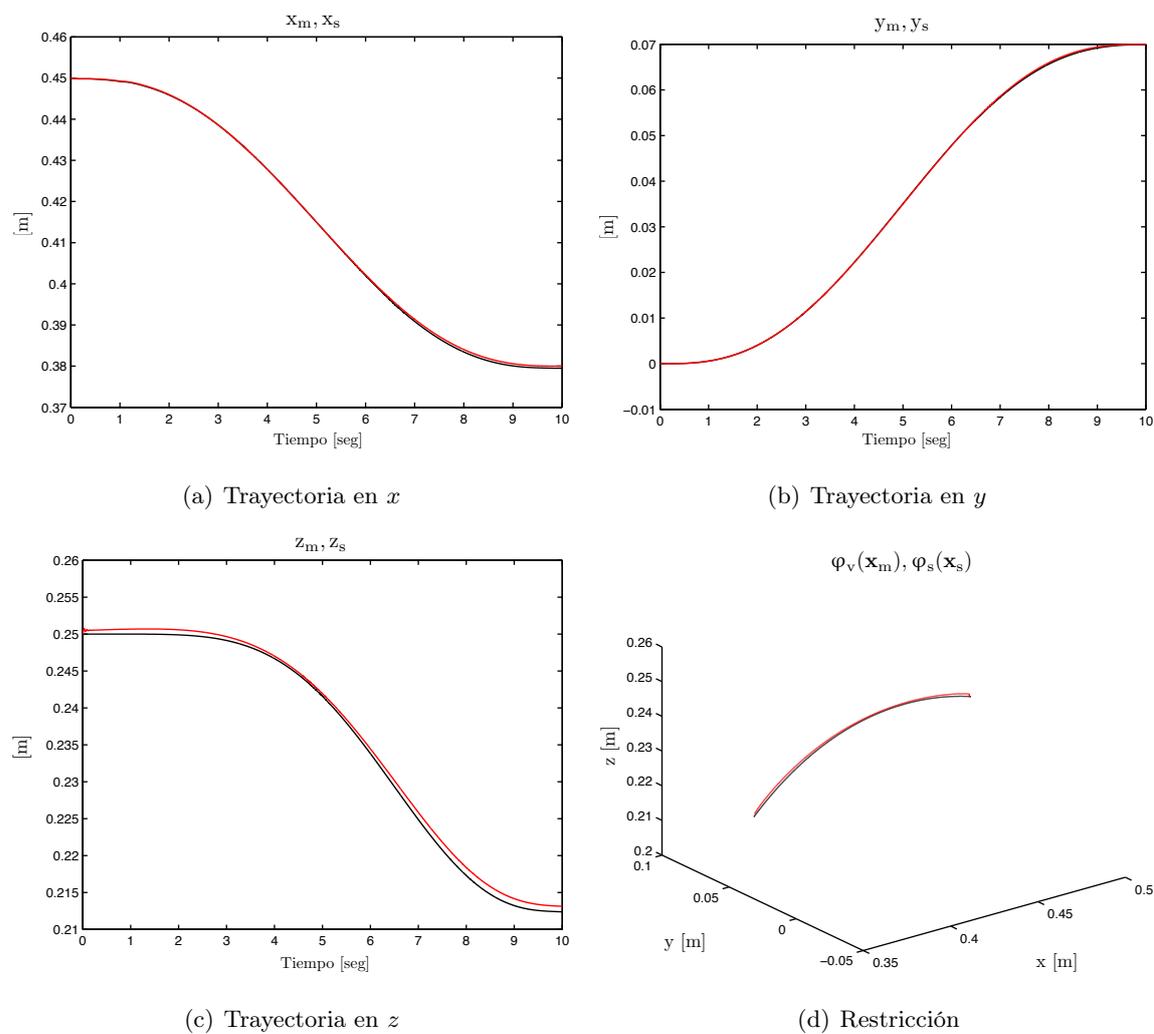


Figura 5.18: Teleoperación. Coordenadas cartesianas maestro(—) vs esclavo (—)

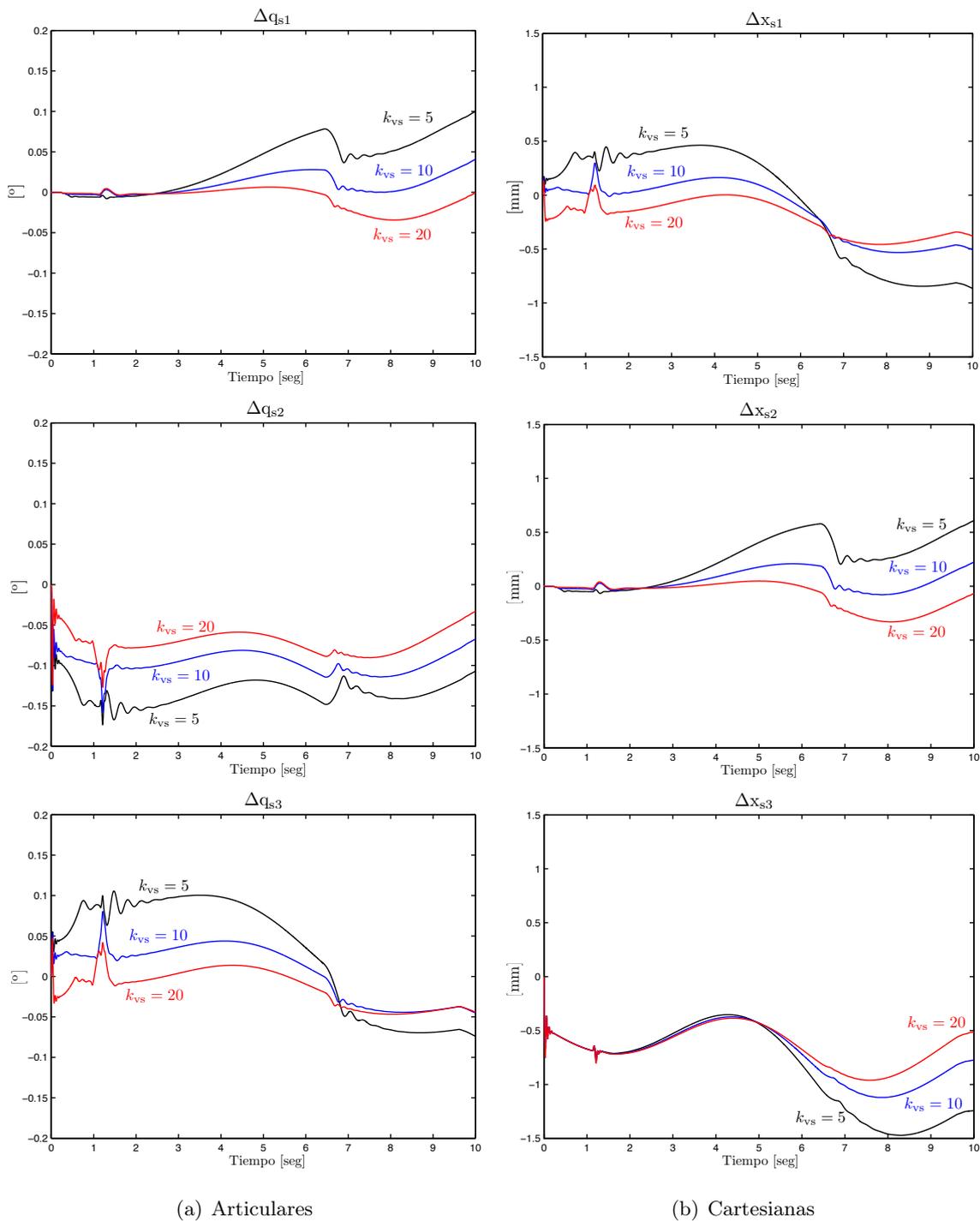


Figura 5.19: Teleoperación. Errores de posición para el esclavo

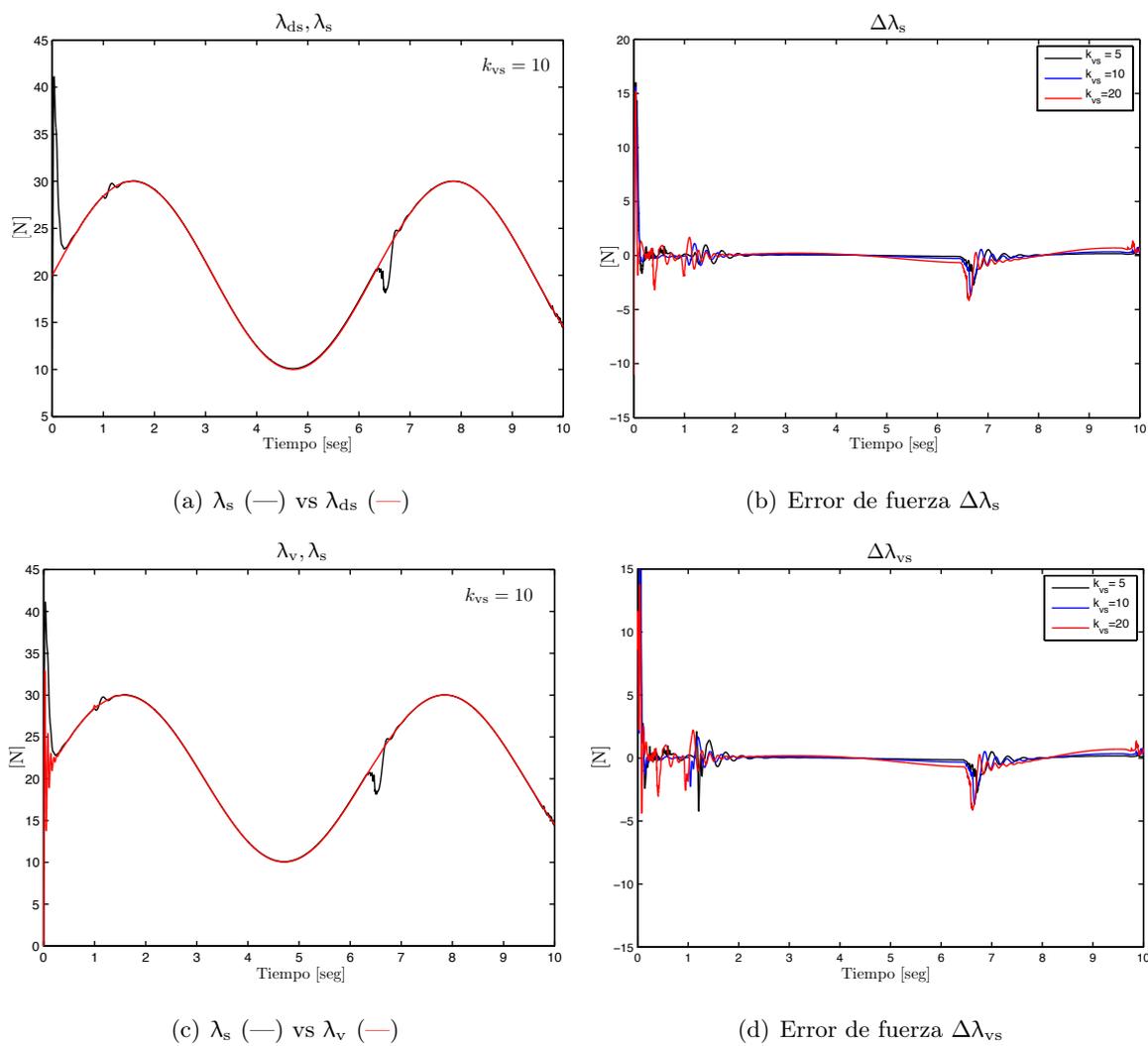


Figura 5.20: Teleoperación. Fuerza

## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo se abordó el problema de seguimiento de posición y fuerza para manipuladores cuando la superficie es desconocida o con incertidumbre en sus parámetros. Para el caso de superficie desconocida se propuso una estimación local con base en la fuerza de contacto medida por el sensor. La estimación local propuesta solo requiere conocer un punto de la superficie para iniciar el movimiento, el cual, se puede obtener empleando la cinemática del manipulador. El esquema de control es un PID para el subespacio de posición y con control integral más un término de adelanto para el subespacio de fuerza, que solo requiere información local de la superficie. La estimación local depende fundamentalmente de la rapidez con la que ésta se actualiza. La región estimada depende del radio de curvatura de la superficie. Un radio de curvatura pequeño implica una región estimada pequeña. Es importante señalar que el esquema de control solo garantiza que los errores están finalmente acotados.

Para lidiar con el problema de incertidumbre paramétrica en la superficie se propuso un esquema de control adaptable que logra los errores de seguimiento tiendan a cero asintóticamente. Sin embargo, requiere que se cumpla la condición de Excitación Persistente para identificar la superficie de contacto. Como caso particular, si la superficie es un plano los parámetros estimados convergen a los parámetros reales independientemente de la trayectoria deseada. Si se satisface la condición de Excitación Persistente los errores de posición convergen a cero asintóticamente. Este esquema tiene la ventaja de no utilizar la derivada de la fuerza medida, que en general es muy ruidosa.

El esquema de control para el caso de superficie desconocida se extendió para el caso más general de un sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo con superficie desconocida. La estimación local se utilizó para calcular una superficie y fuerza virtual que le indican al operador las posibles direcciones de movimiento para el robot maestro y al mismo tiempo percibir el entorno remoto. Se logra un alto grado de transparencia, lo que le permite al operador sentir únicamente la fuerza que el robot esclavo ejerce sobre la superficie a través de la fuerza virtual. Sin embargo, para alcanzar este nivel de transparencia es necesario conocer de manera exacta el modelo dinámico del robot maestro. El esquema de control solo garantiza que los errores de posición y fuerza convergen a una vecindad cercana a cero.

El control de posición y fuerza en manipuladores con superficie desconocida es un tema abierto y existen muchas cosas por mejorar a los esquemas propuestos en este trabajo y en la literatura. El trabajo futuro comprende:

- Validación experimental del esquema de teleoperación bilateral maestro-esclavo. Para el diseño, análisis y simulación se utilizó un modelo del humano simplificado, por lo que es muy importante evaluar el desempeño del esquema de control en una situación real.
- Validación experimental de los esquemas de control en superficies curvas. Es importante evaluar el desempeño de los esquemas de control con superficies con radio de curvatura distinta.
- Emplear observadores de velocidad y fuerza en los esquemas de control. Los esquemas de control requieren de la velocidad. Como no se cuenta con sensores de velocidad se emplea la derivada numérica lo que resulta en amplificación de ruido. El empleo de observadores de velocidad mejora el desempeño de los esquemas de control como se muestra en Gurdiño-Lau *et al.* (2004).
- Garantizar la transparencia del sistema en presencia de incertidumbres en el modelo dinámico del robot maestro.

# Bibliografía

- Arimoto, S., Y. H. Liu y T. Naniwa.** 1993. Model-based adaptive hybrid control for geometrically constrained robots. *Proceedings of the IEEE International Conference of Robotics and Automation* 618–623.
- Bayo, E. y A. Avello.** 1995. Singularity free augmented Lagrangian algorithms for constrained multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics* 5. 209–231.
- Blauer, M. y P. R. Bélanger.** 1987. State and parameter estimation for robotic manipulators using force measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-32(12). 1055–1066.
- Buzan, F. T. y T. B. Sheridan.** 1989. A model-based predictive operator aid for telemanipulators with time delay. *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics* 1. 138–143.
- Cheah, C. C., S. P. Hou, Y. Zhao y J.-J. E. Slotine.** 2010. Adaptive vision and force tracking control for robots with constraint uncertainty. *IEEE Transactions on Mechatronics* 15(3). 389–398.
- Cheah, C., S. Kawamura y S. Arimoto.** 2003. Stability of hybrid position and force control for robotic manipulator with kinematics and dynamics uncertainties. *Automatica* 39. 847–855.
- Chopra, N., M. W. Spong, S. Hirche y M. Buss.** 2003. Bilateral teleoperation over internet: the time varying delay problem. *Proceedings of the IEEE American Control Conference* 1. 155–160.
- Cortéz-Martínez, R.** 2007. *Diseño y construcción de un sistema de teleoperación maestro-esclavo no similar*. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN.

- Doulgeri, Z. y S. Arimoto.** 1999. A force commanded impedance control for a robot finger with uncertain kinematics. *The International Journal of Robotics Research* 18(10). 1013–1029.
- Funda, J., R. H. Taylor, B. Eldridge, S. Gomory y K. G. Gruben.** 1996. Constrained cartesian motion control for teleoperated surgical robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 3. 453–465.
- Furuta, K., K. Kosuge, Y. Shiote y H. Hatano.** 1987. Master-slave manipulator based on virtual internal model following control concept. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* 567–572.
- Gudiño-Lau, J. y M. Arteaga-Pérez.** 2005. Dynamic model and simulation of cooperative robots: a case study. *Robotica* 23. 615–624.
- Gurdiño-Lau, J., M. Arteaga-Pérez, L. Muñoz y V. Parra-Vega.** 2004. On the control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12(4). 600–608.
- Hannaford, B.** 1989. Stability and performance tradeoffs in bilateral telemanipulation. *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation* 3. 1764–1767.
- Ho, Y. K., D. Wang y Y. C. Soh.** 2000. Modelling of constrained robot system with constraint uncertainties. *Journal of Robotics Systems* 17(1). 53–61.
- Hogan, N.** 1985. Impedance control: An approach to manipulation: Part i, Part ii, Part iii. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 107. 1–24.
- Hokayem, P. F. y M. Spong.** 2006. Bilateral teleoperation: An historical survey. *Automatica* 42. 2035–2057.
- Hosoda, K., K. Igarashi y M. Asada.** 1998. Adaptive hybrid control for visual and force servoing in an unknown environment. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 5(3). 39–43.
- Ioannou, P. y J. Sun.** 1996. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall.
- Karayiannidis, Y. y Z. Doulgeri.** 2009. Adaptive control of robot contact tasks with on-learning of planar surfaces. *Automatica* 45. 2374–2382.

- Kelly, R.** 2003. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson.
- Khalil, H. K.** 2002. *Nonlinear Systems*. Third Edition edn. Prentice Hall.
- K.Yoon, W., T. Goshozono, T. Kawabe, H. Kinami, M. Tsumaki y Y. Uchiyama.** 2004. Model-based space robot teleoperation of ETS-VII manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 3(20). 602–612.
- Larson, R. E., R. Hostetler y B. H. Edwards.** 2002. *Cálculo*. McGraw Hill.
- Liu, Y.-H., S. Arimoto y K. Kitagaki.** 1995. Adaptive control for holonomically constrained robots: time-invariant and time-variant cases. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* 905–912.
- Liu, Y.-H., V. Parra-Vega y S. Arimoto.** 1996. Decentralized cooperation control: Joint-space approaches for holonomic cooperations. *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation* 2420–2425.
- Martínez-Rosas, J. C., M. Arteaga-Pérez y M. Castillo-Sánchez.** 2006. Decentralized control of cooperative robots without velocity-force measurements. *Automatica* 42. 329–336.
- McClamroch, N. y D. Wang.** 1998. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33(5). 419–426.
- Mendez-Iglesias, J., V. Parra-Vega y F. Ruiz-Sanchez.** 2005. Identification of the human behavior in virtual environment as nonlinear control block. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress* 1408–1414.
- Miyazaki, F., S. Matsubayashi, T. Yoshimi y S. Arimoto.** 1986. A new control methodology toward advanced teleoperation of master-slave robot systems. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* 3. 997–1002.
- Murray, R. M., Z. Li y S. S. Sastry.** 1994. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.
- Namvar, M. y F. Aghili.** 2005. Adaptive force-motion control of coordinated robots interacting with geometrically unknown environments. *IEEE Transactions on Robotics* 21(4). 678–694.

- Niemeyer, G.** y **J.-J. E. Slotine.** 1997. Designing force reflecting teleoperators with large time delays to appear as virtual tools.. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation.*
- Nuño, E., L. Basañez, C. Alba-Padilla** y **C. López-Franco.** 2012. An adaptive controller for bilateral teleoperators: transatlantic experiments using internet. *Proceedings of the World Automation Congress* 1–6.
- Ortega, R., M. W. Spong, E. Nuño** y **L. Basañez.** 2009. Position tracking for non-linear teleoperators with variable time delay. *The International Journal of Robotics Research* 28(7). 895–910.
- Raibert, M. H.** y **J. J. Craig.** 1981. Hybrid position/force control of manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 103. 126–133.
- Raibert, M.** y **J. Craig.** 1981. Hybrid position/force control of manipulators. *ASME.*
- Raju, G. J., G. C. Verghese** y **T. B. Sheridan.** 1989. Design issues in 2-port network models of bilateral remote manipulation. *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation* 3. 1316–1321.
- Sciavicco, L.** y **B. Siciliano.** 2009. *Modeling and Control of Robot Manipulators.* Springer Verlag.
- Siciliano, B.** y **L. Villani.** 1999. *Robot Force Control.* The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Slotine, J.-J. E.** y **W. Li.** 1987. On the adaptive control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research* 6(3). 49–59.
- Slotine, J.-J. E.** y **W. Li.** 1991. *Applied Nonlinear Control.* Prentice Hall.
- Spong, M., W. Hutchinson** y **M. Vidyasagar.** 2006. *Robot Modeling and Control.* John Wiley.
- Strassberg, Y., A. A. Goldenberg** y **J. K. Mills.** 1992. A new control scheme for bilateral teleoperating systems: Performance evaluation and comparison. *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* 2. 866–872.

- Tzafestas, C., S. Velanas y G. Fakiridis.** 2008. Adaptive impedance control in haptic teleoperation to improve transparency under time-delay. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* 212–219.
- Wang, D., Y. H. Y.C. Soh y P. C. Müller.** 1998. Global stabilization for constrained robot motions with constraint uncertainties. *Robotica* 16. 171–179.
- Wang, W. y K. Yaun.** 2004. Teleoperated manipulator for leak detection of sealed radioactive sources. *Proceedings of the IEEE International conference on robotics and automation* 2. 1682–1687.
- Yokokohji, Y. y T. Yoshikawa.** 1994. Bilateral control of master-slave manipulators for ideal kinesthetic coupling- formulation and experimet. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 10(5). 605–620.
- Yoshikawa, T. y A. Sudou.** 1993. Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators-on-line estimation of unknown constraint. *IEEE Robotics and Automation* 9(2). 220–226.
- Zhao, Y., C. C. Cheah y J.-J. E. Slotine.** 2006. Adaptive Jacobian motion and force tracking control for constrained robots with uncertainties. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* 2226–22231.



## Apéndice A

### Demostraciones

Considérese los siguientes teoremas:

**Teorema A.1.** (*Khalil 2002, pp. 172*)

Sea  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  una región que contiene el origen y sea  $V : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0 \quad (\text{A.2})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3(\mathbf{x})$  es una función positiva definida y sea  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathbb{D}$ . Sea  $r > 0$ , tal que  $\mathbb{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathbb{D}$ . Supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_2(r)). \quad (\text{A.3})$$

Entonces, existe una función  $\beta$  de la clase  $\mathcal{KL}$  y para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  que satisfice

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{A.4})$$

existe  $T \geq 0$  (que depende de  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  satisfice

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{A.5})$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \quad \forall t \leq t_0 + T. \quad (\text{A.6})$$

Mas aún, si  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (A.5) y (A.6) se satisfacen para cualquier estado inicial  $\|\mathbf{x}(t_0)\|$  sin importar que tan grande sea  $\mu$ .

□

**Teorema A.2.** (Khalil 2002, pp. 323)

Sea  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  una región que contiene al origen  $\mathbf{x} = 0$ . Supóngase que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathbb{D}$ . Además, supóngase que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{0})$  es uniformemente acotada para toda  $t \geq 0$ . Sea  $V : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq W_2(\mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}) \quad (\text{A.8})$$

$\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$  donde  $W_1(\mathbf{x})$  y  $W_2(\mathbf{x})$  son funciones continuas positivas definidas y  $W_3(\mathbf{x})$  es una función continua positiva semidefinida en  $\mathbb{D}$ . Sea  $r > 0$  tal que  $\mathbb{B}_r \subset \mathbb{D}$  y sea  $r < \min_{\|\mathbf{x}\|=r} W_1(\mathbf{x})$ . Entonces todas las soluciones de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  con  $\mathbf{x}(t_0) \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{B}_r | W_2(\mathbf{x}) \leq r\}$  están acotadas y se satisface

$$W_3(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Más aún, si todas las suposiciones son válidas globalmente y  $W_1(\mathbf{x})$  es radialmente no acotada la afirmación es válida para toda  $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

## A.1. Demostración del Teorema 3.1

Si el Hecho 2.1 se satisface la ley de control (3.6) se convierte en

$$\boldsymbol{\tau} = -k_v \Delta \dot{\mathbf{q}} - k_p \Delta \mathbf{q} - k_i \mathbf{Q} \int_0^t \Delta \mathbf{q} d\vartheta - \mathbf{J}_\varphi^T (\lambda_d - k_F \Delta F). \quad (\text{A.9})$$

Las matrices de proyección están dadas por  $\mathbf{J}_\varphi^T = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{f}_e / \|\mathbf{f}_e\|$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{J}_\varphi^T [\mathbf{J}_\varphi \mathbf{J}_\varphi^T]^{-1} \mathbf{J}_\varphi$ . Por simplicidad se omite el argumento de las matrices de proyección. Se define la variable auxiliar

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \Delta \dot{\mathbf{q}} + k_1 \Delta \mathbf{q}, \quad (\text{A.10})$$

donde  $k_1$  es una constante positiva. Una representación equivalente de (A.9) tomando en cuenta (A.10) está dada por

$$\boldsymbol{\tau} = -k_v \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{k}_i \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{J}_\varphi^T (\lambda_d - k_F \Delta F), \quad (\text{A.11})$$

con  $k_p = k_v k_1 + \bar{k}_i$  y  $k_i = \bar{k}_i k_1$ . Se define la variable de referencia

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - k_1 \Delta \mathbf{q} - k_v^{-1} \bar{k}_i \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} - k_v^{-1} \mathbf{J}_\varphi^T (\Delta \lambda + k_F \Delta F) \quad (\text{A.12})$$

y

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_F, \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\mathbf{s}_p \triangleq \dot{\boldsymbol{\sigma}} + k_v^{-1} \bar{k}_i \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{s}_F \triangleq k_v^{-1} \mathbf{J}_\varphi^T (\Delta \lambda + k_F \Delta F). \quad (\text{A.15})$$

Nótese que los vectores  $\mathbf{s}_p$  y  $\mathbf{s}_F$  son ortogonales. Al sustituir (A.11)-(A.13) en (2.13) se obtiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_{vD} \mathbf{s} = -\mathbf{y}_a \quad (\text{A.16})$$

donde  $\mathbf{K}_{vD} = \mathbf{D} + k_v \mathbf{I}$  y

$$\mathbf{y}_a \triangleq \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (\text{A.17})$$

La ecuación (A.16) es la dinámica en lazo cerrado. Se realiza un análisis de estabilidad local válido en una región definida por

$$\mathbb{D} = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{s}\| \leq s_{\text{máx}} \}. \quad (\text{A.18})$$

Para aplicar el Teorema A.1 es necesario probar que toda variable en  $\mathbb{D}$  está acotada y que la cota  $s_{\text{máx}}$  se puede hacer suficientemente pequeña para que el Hecho 2.1 se cumpla. La demostración del teorema se puede hacer en dos pasos.

a) El primer paso es analizar el subespacio de posición. De (A.14) se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -k_v^{-1} \bar{k}_i \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{s}_p \quad (\text{A.19})$$

Se define la variable escalar

$$V_\sigma = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.20})$$

La derivada de  $V_\sigma$  a lo largo de (A.19) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma &= -k_v^{-1} \bar{k}_i \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{s}_p \\ &= -k_v^{-1} \bar{k}_i \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q} \mathbf{s}_p \\ &= -k_v^{-1} \bar{k}_i \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{s}_p \\ &\leq -k_v^{-1} \bar{k}_i \|\mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}\|^2 + \|\mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}\| s_{\text{máx}} \\ &= -\frac{1}{2} k_v^{-1} \bar{k}_i \|\mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \|\mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}\| \left( \frac{1}{2} k_v^{-1} \bar{k}_i \|\mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}\| - s_{\text{máx}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

El resultado anterior se obtuvo al aplicar las propiedades de las matrices de proyección. Además, dado que  $\mathbf{s}_p$  pertenece al espacio generado por  $\mathbf{Q}$  se satisface  $\mathbf{Q}\mathbf{s}_p = \mathbf{s}_p$ . Entonces  $\dot{V}_\sigma \leq 0$  si

$$\|\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\| \geq \frac{2k_v s_{\text{máx}}}{\bar{k}_1}. \quad (\text{A.22})$$

Debido a que  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}$  es la única componente de  $\boldsymbol{\sigma}$  que afecta la dinámica de (A.19) y puesto que  $\mathbf{s}_p$  no tiene ninguna componente en el espacio generado por  $\mathbf{P}$  se concluye que  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}$  y  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  están acotados. De acuerdo con (A.10) se tiene

$$\Delta\dot{\mathbf{q}} = -k_1\Delta\mathbf{q} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{A.23})$$

La ecuación (A.23) representa un filtro estable de primer orden con entrada  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  acotada, por lo tanto,  $\Delta\mathbf{q}$  y  $\Delta\dot{\mathbf{q}}$  están acotados. Las trayectorias deseadas  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  se eligen para satisfacer (3.2) y acotadas. Se concluye entonces que  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  también están acotadas. Puesto que  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}$  está acotado el término  $\mathbf{Q} \int_0^t \Delta\mathbf{q}d\vartheta$  también lo está.

Una  $s_{\text{máx}}$  pequeña implica  $\|\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\|$ ,  $\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\|$  son pequeños. Esto a su vez induce a que las normas  $\|\Delta\mathbf{q}\|$ ,  $\|\Delta\dot{\mathbf{q}}\|$  también sean pequeñas. Del análisis anterior se concluye que dada una  $s_{\text{máx}}$  suficientemente pequeña se puede lograr que  $\Delta\mathbf{q}$  satisfaga el Hecho 2.1.

Para el subespacio de fuerza,  $\mathbf{s}_F$  en (A.15) se reescribe como

$$\Delta\lambda = -k_F\Delta F - k_v (\mathbf{J}_\varphi \mathbf{J}_\varphi^T)^{-1} \mathbf{J}_\varphi \mathbf{s}_F. \quad (\text{A.24})$$

De acuerdo con las definiciones (3.8) y (3.9) la ecuación (A.24) representa un filtro estable con respecto a  $\Delta F$  con entrada  $\mathbf{s}_F$  acotada. Como consecuencia  $\Delta\lambda$  y  $\Delta F$  están acotados. Puesto que, la fuerza deseada  $\lambda_d$  está acotada,  $\lambda$  también lo está.

El siguiente paso es mostrar que las variables  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  y la derivada de  $\lambda$  están acotadas. El análisis realizado en el paso anterior muestra que la ley de control (3.6) está acotada. Despejando  $\ddot{\mathbf{q}}$  de la ecuación (2.13) se tiene

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1} [\boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T \lambda - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})]. \quad (\text{A.25})$$

La aceleración  $\ddot{\mathbf{q}}$  es función de variables acotadas, por lo tanto, está acotada. Por otro lado, la segunda derivada de la restricción (2.12) está dada por

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_\varphi \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.26})$$

Sustituyendo (A.25) en (A.26) y después de realizar algunos cálculos se tiene

$$\lambda = -\mathbf{A} \left( \mathbf{J}_\varphi \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}}) + \dot{\mathbf{J}}_\varphi \dot{\mathbf{q}} \right), \quad (\text{A.27})$$

donde  $\mathbf{A} = (\mathbf{J}_\varphi \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T)^{-1}$  y  $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$ . La derivada de  $\lambda$  está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda = & -\mathbf{A} \left( \mathbf{J}_\varphi \mathbf{H}^{-1}(\dot{\boldsymbol{\tau}} - \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}) + \dot{\mathbf{J}}_\varphi \ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{J}}_\varphi \dot{\mathbf{q}} \right) \\ & - \mathbf{A} \left( \mathbf{J}_\varphi \dot{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{q}) + \dot{\mathbf{J}}_\varphi \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \right) (\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}}) \\ & - \dot{\mathbf{A}} \left( \mathbf{J}_\varphi \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}}) + \dot{\mathbf{J}}_\varphi \dot{\mathbf{q}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

La ecuación (A.28) es función de  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\lambda$ ,  $\Delta F$  y de sus valores deseados los cuáles como se mostró anteriormente están acotados. Por lo tanto, los términos  $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\ddot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ ,  $\dot{\boldsymbol{\tau}}(\Delta \mathbf{q}, \Delta \dot{\mathbf{q}}, \Delta \ddot{\mathbf{q}}, \Delta \lambda, \Delta F)$  y  $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  están acotados puesto que dependen únicamente de variables acotadas. Se concluye que la derivada de  $\lambda$  está acotada.

Finalmente es necesario mostrar que  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  está acotada. La derivada de (A.12) está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_r = & \ddot{\mathbf{q}}_d - k_1 \Delta \dot{\mathbf{q}} - k_{vs}^{-1} \bar{k}_i \mathbf{Q} \dot{\sigma} - k_v^{-1} \bar{k}_i \dot{\mathbf{Q}} \sigma \\ & + k_v^{-1} \mathbf{J}_\varphi^T \left( \frac{d}{dt} \Delta \lambda + k_F \Delta \lambda \right) + k_v^{-1} \dot{\mathbf{J}}_\varphi^T (\Delta \lambda + k_F \Delta F). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Se asume que  $\frac{d}{dt} \lambda_d$  está acotada por lo tanto  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  es función de variables acotadas. Dado que  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  está acotada se concluye que el vector  $\mathbf{y}_a$  en (A.65) también lo está. Esto quiere decir que  $\dot{\mathbf{s}}$  también está acotada.

- b) Una vez que se ha mostrado que todas las variables en lazo cerrado están acotadas si  $\mathbf{s} \in \mathbb{D}$ , el siguiente paso es mostrar que mediante una apropiada selección de ganancias la ley de control (A.9) puede efectivamente mantener a  $\mathbf{s}$  en la región  $\mathbb{D}$ . El vector  $\mathbf{y}_a$  está acotado en  $\mathbb{D}$ , por lo tanto existe una constante positiva  $c_a$  tal que

$$\|\mathbf{y}_a\| \leq c_a \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{D}. \quad (\text{A.30})$$

Se define

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s}, \quad (\text{A.31})$$

que satisface

$$\alpha_1(\|\mathbf{s}\|) \leq V \leq \alpha_2(\|\mathbf{s}\|), \quad (\text{A.32})$$

donde  $\alpha_1 \triangleq \lambda_h \|\mathbf{s}\|^2$  y  $\alpha_2 \triangleq \lambda_H \|\mathbf{s}_s\|^2$ .  $\lambda_h$ ,  $\lambda_H$  son los valores propios mínimo y máximo de la matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ . La derivada de  $V$  a lo largo de (A.16) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{VD} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{y}_a \\ &\leq -k_v \|\mathbf{s}\|^2 + c_a \|\mathbf{s}\| \\ &= -\frac{1}{2} k_v \|\mathbf{s}\|^2 - \|\mathbf{s}\| \left( \frac{1}{2} k_v \|\mathbf{s}\| - c_a \right). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Finalmente se tiene

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} k_v \|\mathbf{s}\|^2, \quad \forall \|\mathbf{s}\| \geq \frac{2c_a}{k_v}. \quad (\text{A.34})$$

Se definen

$$W_3 \triangleq -\frac{1}{2} k_v \|\mathbf{s}\|^2 \quad (\text{A.35})$$

$$\mu \triangleq \frac{2c_a}{k_v} \quad (\text{A.36})$$

$$r \triangleq s_{\text{máx}}. \quad (\text{A.37})$$

De acuerdo con el Teorema A.1 se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\|\mathbf{s}(0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_h}{\lambda_H}} s_{\text{máx}} \quad (\text{A.38})$$

$$\mu < \sqrt{\frac{\lambda_h}{\lambda_H}} s_{\text{máx}}. \quad (\text{A.39})$$

De acuerdo con (A.5) y (A.6) la trayectoria  $\mathbf{s}$  tiende a una región dada por

$$\mathbb{B} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{s}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_H}{\lambda_h}} \mu \right\}. \quad (\text{A.40})$$

Si  $k_v$  es suficientemente grande no sólo se satisface (A.39) sino que se logra que los errores de seguimiento sean arbitrariamente pequeños, es decir,  $\Delta \mathbf{q}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ ,  $\Delta \lambda$  y  $\Delta F$  sean aproximadamente cero.  $\square$

## A.2. Demostración del Teorema 3.2

La dinámica en lazo cerrado se obtiene al sustituir la ley de control (3.64) en la ecuación (3.63) y está dada por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K}_{vD}\mathbf{s} = \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}}_R + \hat{\mathbf{J}}_\varphi^T(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_S) (\Delta\lambda + k_{Fi}\Delta F) - \tilde{\mathbf{J}}_\varphi^T \lambda, \quad (\text{A.41})$$

donde  $\mathbf{K}_{vD} = \mathbf{D} + \mathbf{K}_v$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_R = \hat{\boldsymbol{\theta}}_R - \boldsymbol{\theta}_R$  y  $\tilde{\mathbf{J}}_\varphi^T = \hat{\mathbf{J}}_\varphi^T - \mathbf{J}_\varphi^T$ . En adelante se omite el argumento de las matrices de proyección.

Se define el vector de estado como

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \Delta F \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_R \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S \end{bmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Considérese la función escalar

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{y}, \quad (\text{A.43})$$

con  $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) = \text{block diag}\{\mathbf{H}(\mathbf{q}) \quad 2\xi \quad \boldsymbol{\Gamma}_R^{-1} \quad \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1}\}$  una matriz diagonal a bloques.  $V$  satisface

$$\lambda_1 \|\mathbf{y}\|^2 \leq V \leq \lambda_2 \|\mathbf{y}\|^2, \quad (\text{A.44})$$

con

$$\lambda_1 \triangleq \lambda_{\min}(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q})) \quad (\text{A.45})$$

$$\lambda_2 \triangleq \lambda_{\max}(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q})). \quad (\text{A.46})$$

La derivada de  $V$  a lo largo de (3.65) y (A.41) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{vD} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \hat{\mathbf{J}}_\varphi^T (\Delta\lambda + k_{Fi}\Delta F) + 2\xi \Delta F \Delta\lambda + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_S \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S - \lambda \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

donde de acuerdo con (3.56)  $\hat{\mathbf{J}}_\varphi^T = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{W}_x^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$ . De acuerdo con (3.58) y (3.61) el producto  $\mathbf{s}^T \hat{\mathbf{J}}_\varphi^T$  está dado por

$$\mathbf{s}^T \hat{\mathbf{J}}_\varphi^T = \dot{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{J}}_\varphi^T - k_{Fi}^{-1} \xi (\Delta\lambda + k_{Fi} \Delta F). \quad (\text{A.48})$$

Tomando en cuenta que  $\mathbf{J}_\varphi \dot{\mathbf{q}} = 0$  y (3.56), se tiene

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{J}}_\varphi \mathbf{s} &= \left( \hat{\mathbf{J}}_\varphi - \mathbf{J}_\varphi \right) \dot{\mathbf{q}} - k_{\text{Fi}}^{-1} \xi (\Delta\lambda + k_{\text{Fi}} \Delta F) \\ &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - k_{\text{Fi}}^{-1} \xi (\Delta\lambda + k_{\text{Fi}} \Delta F).\end{aligned}\quad (\text{A.49})$$

De acuerdo con la Propiedad 2.1 y el resultado obtenido en (A.49),  $\dot{V}$  está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{vD}} \mathbf{s} - k_{\text{Fi}}^{-1} \xi \Delta\lambda^2 - k_{\text{Fi}} \xi \Delta F^2 + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S \\ &\quad + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \left( \mathbf{W}_x(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}} (\Delta\lambda + k_{\text{Fi}} \Delta F) - \lambda \mathbf{s}) + \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_S \right).\end{aligned}\quad (\text{A.50})$$

Finalmente, al sustituir las leyes de adaptación (3.66) y (3.67) se obtiene (recordar que

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S^{-1} = -\boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_S \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1})$$

$$\dot{V} = \begin{cases} -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{vD}} \mathbf{s} - k_{\text{Fi}}^{-1} \xi \Delta\lambda^2 - k_{\text{Fi}} \xi \Delta F^2 - \gamma' \mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f - \frac{1}{2} \beta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S & \text{si } \|\boldsymbol{\Gamma}_S\| \leq \rho \\ -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{vD}} \mathbf{s} - k_{\text{Fi}}^{-1} \xi \Delta\lambda^2 - k_{\text{Fi}} \xi \Delta F^2 - \gamma \mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f & \text{si } \|\boldsymbol{\Gamma}_S\| > \rho. \end{cases}\quad (\text{A.51})$$

Considérese el caso  $\|\boldsymbol{\Gamma}_S\| \leq \rho$ . Se definen

$$W_1(\mathbf{y}) \triangleq \lambda_1 (\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q})) \|\mathbf{y}\|^2 \quad (\text{A.52})$$

$$W_2(\mathbf{y}) \triangleq \lambda_2 (\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q})) \|\mathbf{y}\|^2 \quad (\text{A.53})$$

$$W_3(\mathbf{y}) \triangleq \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{vD}} \mathbf{s} + k_{\text{Fi}}^{-1} \xi \Delta\lambda^2 + k_{\text{Fi}} \xi \Delta F^2 + \gamma' \mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f + \frac{1}{2} \beta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S. \quad (\text{A.54})$$

$W_1(\mathbf{y})$  es una función positiva definida y radialmente no acotada,  $W_2(\mathbf{y})$  es una función positiva definida y  $W_3(\mathbf{y})$  es una función positiva semidefinida. Por tanto, las suposiciones del Teorema A.2 se satisfacen globalmente lo que significa que el vector  $\mathbf{y}$  está acotado, esto implica que  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_R$  y  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_S$  están acotados. Además, se tiene  $W_3(\mathbf{y}) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Tomando en cuenta (3.67), la ganancia  $\boldsymbol{\Gamma}_S$  está acotada, en consecuencia  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_S$  también lo está. La posición y velocidad deseada  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  son funciones de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_S$  y  $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_S$  respectivamente, por lo tanto, están acotadas.

La convergencia a cero de  $W_3(\mathbf{y})$  implica la convergencia a cero de las variables  $\mathbf{s}$ ,  $\Delta F$ ,  $\mathbf{e}_f$  y  $\Delta\lambda$ . Puesto que  $\lambda_d$  está acotada y  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_d$  tiende a cero, se concluye que  $\lambda$  está acotada y tiende a la fuerza deseada. Además, se tiene la convergencia a cero del error paramétrico  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$ . Dado que  $\mathbf{e}_f$  tiende a cero, para un tiempo suficientemente grande se tiene  $\hat{\mathbf{J}}_\varphi^T = \mathbf{J}_\varphi^T$ ,  $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$  y  $\hat{\mathbf{J}}_\varphi^+ = \mathbf{J}_\varphi^+$ . Entonces, la variable  $\mathbf{s}$  en (3.62) se puede escribir como

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_F, \quad (\text{A.55})$$

donde  $\mathbf{s}_p \triangleq \mathbf{Q}(\Delta\dot{\mathbf{q}} + k_p\Delta\mathbf{q})$  y  $\mathbf{s}_F \triangleq k_{Fi}^{-1}\xi\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_S)(\Delta\lambda + k_{Fi}\Delta F)$ . Nótese que los vectores  $\mathbf{s}_p$  y  $\mathbf{s}_F$  son ortogonales.

Para el caso  $\|\boldsymbol{\Gamma}_S\| > \rho$  se tiene

$$W_3(\mathbf{y}) = \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{VDS} \mathbf{s} + k_{Fi}^{-1}\xi\Delta\lambda^2 + k_{Fi}\xi\Delta F^2 + \gamma\mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f. \quad (\text{A.56})$$

En este caso, no aparece el término  $\frac{1}{2}\beta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$  en (A.56), por lo que no se puede concluir directamente la convergencia a cero de  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$ . El error paramétrico  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$  tiende a cero si y solo si  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  satisface la condición de Excitación Persistente.

Para demostrar la convergencia de los errores a cero en el subespacio de posición es necesario la convergencia a cero de  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_S$ , lo que da como resultado la identificación de la superficie. Entonces, la trayectoria deseada satisface  $\varphi(\mathbf{q}_d, \boldsymbol{\theta}_S) = 0$ . Debido a la ortogonalidad de los vectores  $\mathbf{s}_p$  y  $\mathbf{s}_F$  en (A.55), ambos tienden a cero si  $\mathbf{s}$  tiende a cero.

El subespacio de fuerza no requiere mayor análisis ya que se mostró anteriormente la convergencia a cero de  $\Delta\lambda$  y  $\Delta F$ . Sin embargo, para el subespacio de posición la convergencia a cero de  $\mathbf{s}_p$  no necesariamente implica la convergencia de  $\Delta\mathbf{q}$  y  $\Delta\dot{\mathbf{q}}$  a cero. Si el Hecho 2.1 se satisface, entonces  $\mathbf{s}_p$  se puede escribir como

$$\mathbf{s}_p = \mathbf{Q}(\Delta\dot{\mathbf{q}} + k_p\Delta\mathbf{q}) = \Delta\dot{\mathbf{q}} + k_p\Delta\mathbf{q}. \quad (\text{A.57})$$

La ecuación (A.57) representa un filtro estable con entrada  $\mathbf{s}_p$  que tiende a cero, por lo tanto se concluye  $\Delta\mathbf{q}$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{q}}$  tiende a cero cuanto  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

### A.3. Demostración del Teorema 4.1

Se define la variable auxiliar

$$\dot{\sigma}_s = \Delta \dot{\mathbf{q}}_s + k_{ls} \Delta \mathbf{q}_s, \quad (\text{A.58})$$

con  $k_{ls} > 0$ . Si el Hecho 2.1 se cumple y tomando en cuenta (A.58) la ley de control (4.11) se puede escribir como

$$\boldsymbol{\tau}_s = -k_{vs} \dot{\sigma}_s - \bar{k}_{is} \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{J}_{\varphi_s}^T (\lambda_{ds} - k_{Fs} \Delta F_s), \quad (\text{A.59})$$

con  $k_{ps} = k_{vs} k_{ls} + \bar{k}_{is}$  y  $k_{is} = \bar{k}_{is} k_{ls}$ . Las matrices de proyección están dadas por  $\mathbf{J}_{\varphi_s}^T = \mathbf{J}_s^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{f}_{es} / \|\mathbf{f}_{es}\|$  y  $\mathbf{Q}_s = \mathbf{I} - \mathbf{J}_{\varphi_s}^T [\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{J}_{\varphi_s}^T]^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_s}$ . Similar a (A.12) y (A.13) se definen las variables

$$\dot{\mathbf{q}}_{rs} = \dot{\mathbf{q}}_{ds} - k_{ls} \Delta \mathbf{q}_s - k_{vs}^{-1} k_{is} \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s - k_{vs}^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_s}^T (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s) \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{s}_s = \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{s}_{ps} + \mathbf{s}_{Fs} \quad (\text{A.61})$$

donde

$$\mathbf{s}_{ps} \triangleq \dot{\sigma}_s + k_{vs}^{-1} \bar{k}_{is} \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s \quad (\text{A.62})$$

$$\mathbf{s}_{Fs} \triangleq k_{vs}^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_s}^T (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s). \quad (\text{A.63})$$

Al sustituir las ecuaciones (A.59)-(A.61) en (4.2) se obtiene

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{s}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \mathbf{s}_s + \mathbf{K}_{vDs} \mathbf{s}_s = -\mathbf{y}_a \quad (\text{A.64})$$

donde  $\mathbf{K}_{vDs} = \mathbf{D}_s + k_{vs} \mathbf{I}$  y

$$\mathbf{y}_a \triangleq \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s). \quad (\text{A.65})$$

Tomando en cuenta la Suposición 4.1 y sustituyendo la ley de control (4.15) y la dinámica del humano (4.8) en (4.1) se obtiene

$$\mathbf{s}_{pm} + \mathbf{s}_{Fm} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.66})$$

donde

$$\mathbf{s}_{pm} \triangleq \mathbf{Q}_v \left( k_{vh} \Delta \dot{\mathbf{q}}_m + k_{ph} \Delta \mathbf{q}_m + k_{ih} \int_0^t \Delta \mathbf{q}_m d\vartheta \right) \quad (\text{A.67})$$

$$\mathbf{s}_{Fm} \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_v}^T (k_{pv} \Delta \lambda_{vs} + k_{Fiv} \Delta F_{vs} + k_{fh} \Delta \lambda_{vd} + k_{Fih} \Delta F_{vd}). \quad (\text{A.68})$$

Las ecuaciones (A.64) y (A.66) representan la dinámica en lazo cerrado del sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo. El esquema de teleoperación analizado en el Capítulo 4

está desacoplado en el sentido de que es el robot maestro el que genera la posición y fuerza deseada para el robot esclavo de acuerdo con la fuerza aplicada por el operador. De este modo, es posible analizar la estabilidad del robot maestro y el robot esclavo de forma independiente. El análisis se realiza en 4 pasos.

- a) Para el robot esclavo se realiza un análisis de estabilidad local válido en una región definida por

$$\mathbb{D}_s = \{\mathbf{s}_s \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \|\mathbf{s}_s\| \leq s_{\text{máx}}\}. \quad (\text{A.69})$$

De manera similar a la demostración del Teorema 3.1 se puede mostrar que todas las variables en lazo cerrado están acotadas si  $\mathbf{s}_s \in \mathbb{D}_s$ . Además si  $s_{\text{máx}}$  es suficientemente pequeña se satisface el Hecho 2.1. La trayectoria deseada  $\mathbf{q}_{ds}$  depende de la posición del robot maestro y éste a su vez de la fuerza aplicada por el operador. Es razonable asumir que la trayectoria deseada elegida por el operador no pasa por ni cerca de una singularidad del robot esclavo. Si además, la superficie virtual (4.4) se actualiza suficientemente rápido, el operador siempre mantiene el efector final del robot maestro en contacto con dicha superficie. Obviamente la fuerza deseada  $\lambda_{ds}$  aplicada por el humano está acotada

- b) El siguiente paso es mostrar que mediante una apropiada selección de ganancias la ley de control (A.59) puede mantener a  $\mathbf{s}_s$  en la región  $\mathbb{D}_s$ . Sea la función escalar positiva definida

$$V_s = \frac{1}{2} \mathbf{s}_s^T \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \mathbf{s}_s, \quad (\text{A.70})$$

que satisface

$$\alpha_1(\|\mathbf{s}_s\|) \leq V_s \leq \alpha_2(\|\mathbf{s}_s\|), \quad (\text{A.71})$$

donde  $\alpha_1 \triangleq \lambda_{hs} \|\mathbf{s}_s\|^2$  y  $\alpha_2 \triangleq \lambda_{Hs} \|\mathbf{s}_s\|^2$ .  $\lambda_{hs}$ ,  $\lambda_{Hs}$  son los valores propios mínimo y máximo de la matriz de inercia  $\mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s)$ . La derivada de  $V_s$  a lo largo de (A.64) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= -\mathbf{s}_s^T \mathbf{K}_{VDs} \mathbf{s}_s - \mathbf{s}_s^T \mathbf{y}_a \\ &\leq -k_{vs} \|\mathbf{s}_s\|^2 + c_a \|\mathbf{s}_s\| \\ &= -\frac{1}{2} k_{vs} \|\mathbf{s}_s\|^2 - \|\mathbf{s}_s\| \left( \frac{1}{2} k_{vs} \|\mathbf{s}_s\| - c_a \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} k_{vs} \|\mathbf{s}_s\|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

$\forall \|\mathbf{s}_s\| \geq \frac{2c_a}{k_{vs}}$ , donde  $c_a$  es una constante positiva tal que  $\|\mathbf{y}_a\| \leq c_a \forall \mathbf{s}_s \in \mathbb{D}_s$ . Se definen

$$W_3 \triangleq -\frac{1}{2} k_{vs} \|\mathbf{s}_s\|^2 \quad (\text{A.73})$$

$$\mu \triangleq \frac{2c_a}{k_{vs}}. \quad (\text{A.74})$$

De acuerdo con el Teorema A.1 se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\|\mathbf{s}_s(0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{hs}}{\lambda_{Hs}}} s_{m\acute{a}x} \quad (\text{A.75})$$

$$\mu < \sqrt{\frac{\lambda_{hs}}{\lambda_{Hs}}} s_{m\acute{a}x}. \quad (\text{A.76})$$

La trayectoria  $\mathbf{s}_s$  tiende a una regi3n dada por

$$\mathbb{B}_s = \left\{ \mathbf{s}_s \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{s}_s\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{Hs}}{\lambda_{hs}}} \mu \right\}. \quad (\text{A.77})$$

Si se elige  $k_{vs}$  suficientemente grande se puede lograr que los errores de seguimiento ( $\Delta \mathbf{q}_s$ ,  $\Delta \lambda_s$ ) sean arbitrariamente peque1os.

- c) El siguiente paso es analizar el subespacio de posici3n del robot maestro. Debido a la ortogonalidad de  $\mathbf{s}_{pm}$  y  $\mathbf{s}_{Fm}$  y puesto que el Hecho 2.1 se cumple, la ecuaci3n (A.67) se escribe como

$$\mathbf{s}_{pm} = k_{vh} \Delta \dot{\mathbf{q}}_m + k_{ph} \Delta \mathbf{q}_m + k_{ih} \mathbf{Q}_v \int_0^t \Delta \mathbf{q}_m d\vartheta = \mathbf{0}. \quad (\text{A.78})$$

Se define

$$\mathbf{e}_m \triangleq \int_0^t \Delta \mathbf{q}_m d\vartheta. \quad (\text{A.79})$$

De acuerdo con (A.79) la ecuaci3n (A.78) se puede escribir como una ecuaci3n diferencial de segundo orden dada por

$$k_{vh} \ddot{\mathbf{e}}_m + k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m + k_{ih} \mathbf{Q}_v \mathbf{e}_m = \mathbf{0}. \quad (\text{A.80})$$

Para analizar la estabilidad de (A.80) se propone la funci3n candidata de Lyapunov

$$V_m = \frac{1}{2} k_{ih} \mathbf{e}_m^T \mathbf{e}_m + \frac{1}{2} k_{vh} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m. \quad (\text{A.81})$$

Al emplear las propiedades de las matrices de proyecci3n la derivada de  $V_m$  a lo largo de (A.78) est1 dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= -k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m + k_{ih} \mathbf{e}_m^T - k_{ih} \mathbf{e}_m^T \mathbf{Q}_v \dot{\mathbf{e}}_m \\ &= -k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m + k_{ih} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_v) \dot{\mathbf{e}}_m \\ &= -k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m + k_{ih} \dot{\mathbf{e}}_m^T \mathbf{P}_v \mathbf{e}_m. \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

En vista de que  $\mathbf{P}_v \dot{\mathbf{e}}_m = \mathbf{P}_v \Delta \mathbf{q}_m$  y con base en el Hecho 2.1 se obtiene

$$\dot{V}_m = -k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m. \quad (\text{A.83})$$

Dado que  $\dot{V}_m$  es negativa semidefinida los vectores  $\mathbf{e}_m$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_m$  están acotados. Aplicando el Teorema de LaSalle, el máximo conjunto invariante para el cual  $\dot{V}_m = 0$  está dado por  $(\mathbf{e}_m, \dot{\mathbf{e}}_m) = (\mathbf{e}_m, \mathbf{0})$ . Sustituyendo  $\dot{\mathbf{e}}_m = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{e}}_m = \mathbf{0}$  en (A.78) se tiene

$$\mathbf{Q}_v \mathbf{e}_m = \mathbf{0}. \quad (\text{A.84})$$

Debido a que  $\mathbf{Q}_v \mathbf{e}_m$  es la única componente de  $\mathbf{e}_m$  que afecta el comportamiento dinámico en el subespacio de posición del robot maestro se concluye lo siguiente

$$\Delta \mathbf{q}_m, \Delta \dot{\mathbf{q}}_m, \mathbf{Q}_v \int_0^t \Delta \mathbf{q}_m d\vartheta \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{A.85})$$

- d) El último paso es mostrar que la fuerza virtual tiende a la fuerza real. Para un tiempo  $t$  suficientemente grande  $\lambda_s \approx \lambda_{ds}$ . Tomando en cuenta las definiciones (4.13), (4.14), (4.16) y (4.17) la variable  $\mathbf{s}_{Fm}$  se convierte en

$$\mathbf{J}_{\varphi v}^T ((k_{pv} + k_{fh})\Delta \lambda_{vs} + (k_{Fiv} + k_{Fih})\Delta F_{vs}) \approx \mathbf{0}. \quad (\text{A.86})$$

Multiplicando ambos lados de (A.86) por  $(\mathbf{J}_{\varphi v} \mathbf{J}_{\varphi v}^T)^{-1} \mathbf{J}_{\varphi v}$  se tiene

$$(k_{pv} + k_{fh})\Delta \lambda_{vs} + (k_{Fiv} + k_{Fih})\Delta F_{vs} \approx 0. \quad (\text{A.87})$$

La ecuación (A.87) representa un filtro estable con respecto  $\Delta F_{vs}$ , por lo tanto, se concluye  $\Delta \lambda_{vs}$ ,  $\Delta F_{vs} \approx 0$ . De este modo, se tiene  $\lambda_v \rightarrow \lambda_s$ , con lo cual se logra el objetivo de control que consiste en que el operador sienta la fuerza ejercida por el robot esclavo hacia la superficie.

□



## Apéndice B

# Robot de 3 grados de libertad

El robot empleado en los experimentos y simulaciones es el Robot A465 de *CRS Robotics*. Debido a que el movimiento es planar solo se utilizaron las articulaciones 2, 3 y 5 renombradas como 1, 2 y 3 en este trabajo.

### B.1. Cinemática Directa

Los sistemas de referencia y los parámetros de Denavit-Hartenberg del robot se muestran en la Figura B.1 y en la Tabla B.1, respectivamente. De acuerdo al algoritmo de Denavit-Hartenberg las matrices de transformación está dadas por

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & a_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & a_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & a_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & a_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & a_3 \cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & a_3 \sin(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

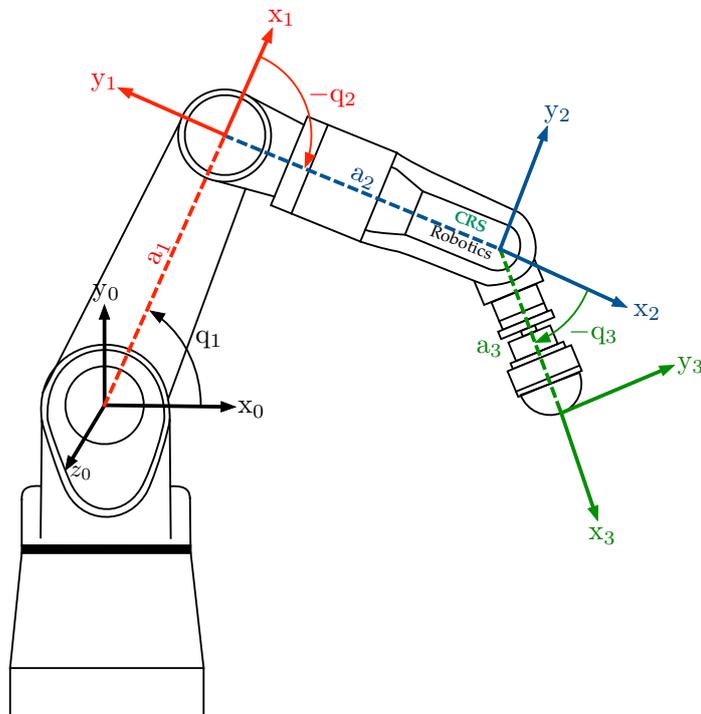


Figura B.1: Asignación de los sistemas de referencia para el Robot A465

$a_i$ [cm]	$d_i$ [cm]	$\theta_i$ [°]	$\alpha$ [°]
33	0	$q_1$	0
35	0	$q_2$	0
7	0	$q_3$	0

Tabla B.1: Parámetros de Denavit-Hartenberg

La matriz de rotación está dada por

$${}^0\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2 + q_3) & -\sin(q_1 + q_2 + q_3) & 0 \\ \sin(q_1 + q_2 + q_3) & \cos(q_1 + q_2 + q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

La posición y orientación del efector final está dado por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) + a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ q_1 + q_2 + q_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

## B.2. Cinemática Inversa

Para resolver la cinemática directa se hace uso del desacoplamiento cinemático. De acuerdo con la Figura B.2 la posición del centro de la muñeca está dada por

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - a_3 \cos(\phi) \\ y - a_3 \sin(\phi) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

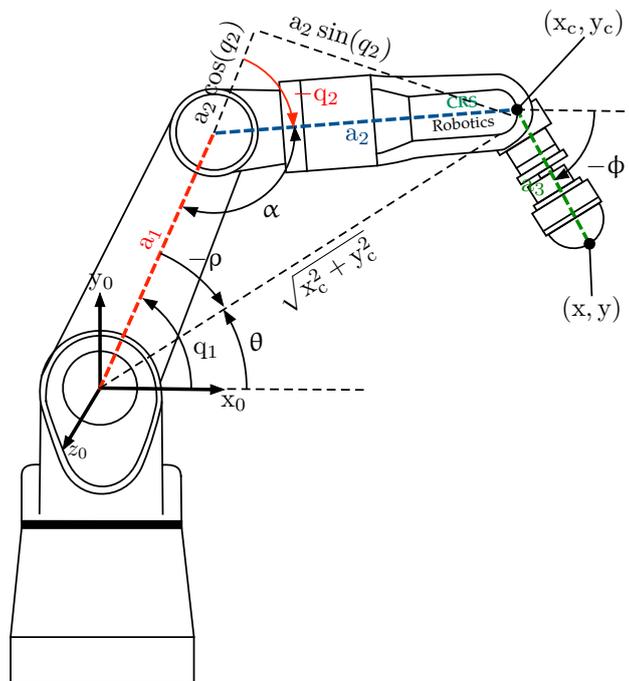


Figura B.2: Solución geométrica de la cinemática inversa para el robot A465

Aplicando la ley de cosenos (ver Figura B.2) se tiene

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1^2 + a_2^2 - x_c^2 - y_c^2}{2a_1a_2}. \quad (\text{B.7})$$

En términos de  $q_2$  se tiene

$$\cos(q_2) = \frac{x_c^2 + y_c^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \quad (\text{B.8})$$

$$\sin(q_2) = -\sqrt{1 - \cos^2(q_2)}. \quad (\text{B.9})$$

El signo menos en (B.9) corresponde a una configuración codo arriba. Finalmente  $q_2$  se calcula como

$$q_2 = \text{atan2}(\sin(q_2), \cos(q_2)). \quad (\text{B.10})$$

La función  $\text{atan2}(x, y)$  es la función arctan de dos argumentos y está definida para todo par  $(x, y) \neq (0, 0)$ . De acuerdo a la Figura B.2, el ángulo  $q_1$  está dado por

$$q_1 = \theta - \rho, \quad (\text{B.11})$$

donde

$$\theta = \text{atan2}(y_c, x_c) \quad (\text{B.12})$$

$$\rho = \text{atan2}(a_2 \sin(q_2), a_1 + a_2 \cos(q_2)). \quad (\text{B.13})$$

Dados los ángulos  $q_1$  y  $q_2$  y de acuerdo a la ecuación (B.5) el ángulo  $q_3$  se calcula como

$$q_3 = \phi - q_2 - q_1 \quad (\text{B.14})$$

### B.3. Modelo Dinámico

El modelo dinámico del robot A465 tomando en cuenta los actuadores (motores de CD) está dado por

$$(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_j) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_f) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_k \mathbf{V}. \quad (\text{B.15})$$

Las componentes de la matriz de inercia son:

$$H(1, 1) = p_1 + 2p_4 \cos(q_2) + 2p_5 \cos(q_2 + q_3) + 2p_6 \cos(q_3) \quad (\text{B.16})$$

$$H(1, 2) = p_4 \cos(q_2) + p_5 \cos(q_2 + q_3) + 2p_6 \cos(q_3) + p_7 \quad (\text{B.17})$$

$$H(1, 3) = p_5 \cos(q_2 + q_3) + p_6 \cos(q_3) + p_8 \quad (\text{B.18})$$

$$H(2, 1) = H(1, 2) \quad (\text{B.19})$$

$$H(2, 2) = p_2 + 2p_6 \cos(q_3) \quad (\text{B.20})$$

$$H(2, 3) = p_8 + p_6 \cos(q_3) \quad (\text{B.21})$$

$$H(3, 1) = H(1, 3) \quad (\text{B.22})$$

$$H(3, 2) = H(2, 3) \quad (\text{B.23})$$

$$H(3, 3) = p_3. \quad (\text{B.24})$$

Los componentes de la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  son:

$$C(1, 1) = -p_6 \sin(q_2) \dot{q}_2 - p_5 \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - \frac{1}{2} p_6 \sin(q_3) \dot{q}_3 \quad (\text{B.25})$$

$$C(1, 2) = -p_4 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - p_5 \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - p_6 \sin(q_3) \dot{q}_3 \quad (\text{B.26})$$

$$C(1, 3) = -p_5 \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - \frac{1}{2} p_6 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (\text{B.27})$$

$$C(2, 1) = p_4 \sin(q_2) \dot{q}_1 + p_5 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - p_6 \sin(q_3) \dot{q}_3 \quad (\text{B.28})$$

$$C(2, 2) = -p_6 \sin(q_3) \dot{q}_3 \quad (\text{B.29})$$

$$C(2, 3) = -p_6 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (\text{B.30})$$

$$C(3, 1) = p_5 \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + \frac{1}{2} p_6 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2) \quad (\text{B.31})$$

$$C(3, 2) = p_6 \sin(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad (\text{B.32})$$

$$C(3, 3) = 0. \quad (\text{B.33})$$

La matriz de coeficientes de fricción viscosa esta dada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_9 & 0 & 0 \\ 0 & p_{10} & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

El vector de gravedad está dado por

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = g_0 \begin{bmatrix} p_{12} \cos(q_1) + p_{13} \cos(q_1 + q_2) + p_{14} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ p_{13} \cos(q_1 + q_2) + p_{14} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ p_{14} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

$m_1 = 28.5[\text{Kg}]$	$l_1 = 0.33[\text{m}]$	$l_{c1} = 0.14[\text{m}]$	$J_1 = 0.85[\text{Kgm}^2]$	$d_1 = 2.6[\text{N} \cdot \text{m}]$
$m_2 = 16.6[\text{Kg}]$	$l_2 = 0.35[\text{m}]$	$l_{c2} = 0.14[\text{m}]$	$J_2 = 0.70[\text{Kgm}^2]$	$d_2 = 2.5[\text{N} \cdot \text{m}]$
$m_3 = 1.0[\text{Kg}]$	$l_3 = 0.13[\text{m}]$	$l_{c3} = 0.07[\text{m}]$	$J_3 = 0.18[\text{Kgm}^2]$	$d_3 = 1.5[\text{N} \cdot \text{m}]$

Tabla B.2: Parámetros del robot A465

$J_{m1} = 9.03 \times 10^{-5}$	$R_{a1}=0.84$	$K_{a1}=0.188$	$K_{b1}=0.143$	$f_1 = 9.7 \times 10^{-5}$	$r_1 = 100$
$J_{m2} = 9.03 \times 10^{-5}$	$R_{a2}=0.84$	$K_{a2}=0.188$	$K_{b2}=0.143$	$f_2 = 9.7 \times 10^{-5}$	$r_2 = 100$
$J_{m3} = 4.9 \times 10^{-6}$	$R_{a3}=2.7$	$K_{a3}=0.053$	$K_{b3}=0.053$	$f_3 = 0.0223$	$r_3 = 100$

Tabla B.3: Parámetros de los motores

Las matrices  $\mathbf{D}_j$ ,  $\mathbf{D}_n$ ,  $\mathbf{D}_f$  y  $\mathbf{D}_k$  están definidas como

$$\mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} J_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{m3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_3^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} f_{m1} + \frac{K_{a1}K_{b1}}{R_{a1}} & 0 & 0 \\ 0 & f_{m2} + \frac{K_{a2}K_{b2}}{R_{a2}} & 0 \\ 0 & 0 & f_{m3} + \frac{K_{a3}K_{b3}}{R_{a3}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \frac{K_{a1}}{R_{a1}r_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{a2}}{R_{a2}r_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{a3}}{R_{a3}r_3} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

Finalmente los parámetros del robot están dados por

$$p_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2) + m_3 (l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2) + J_1 + J_2 + J_3 \quad (\text{B.40})$$

$$p_2 = m_2 l_{c2}^2 + m_3 (l_1^2 + l_{c3}^2) + J_2 + J_3 \quad (\text{B.41})$$

$$p_3 = m_3 l_{c3}^2 + J_3 \quad (\text{B.42})$$

$$p_4 = m_2 l_1 l_{c2} + m_3 l_1 l_2 \quad (\text{B.43})$$

$$p_5 = m_3 l_1 l_{c2} \quad (\text{B.44})$$

$$p_6 = m_3 l_2 l_{c3} \quad (\text{B.45})$$

$$p_7 = m_2 l_{c2}^2 + m_3 (l_2^2 + l_{c3}^2) + J_2 + J_3 \quad (\text{B.46})$$

$$p_8 = m_3 l_{c3}^2 + J_3 \quad (\text{B.47})$$

$$p_9 = d_1 \quad (\text{B.48})$$

$$p_{10} = d_2 \quad (\text{B.49})$$

$$p_{11} = d_3 \quad (\text{B.50})$$

$$p_{12} = m_1 l_{c1} + (m_2 + m_3) l_1 \quad (\text{B.51})$$

$$p_{13} = m_2 l_{c2} + m_3 l_2 \quad (\text{B.52})$$

$$p_{14} = m_3 l_{c3} \quad (\text{B.53})$$

$$(\text{B.54})$$