



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CAMPO CONTROL**

**Control basado en pasividad mediante cambio de  
coordenadas**

**TESIS Y SU RÉPLICA EN EXAMEN ORAL  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**

**LUIS PABLO BORJA ROSALES**

**TUTOR**

**DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE 2013**

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Yu Tang Xu  
Secretario: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz  
Vocal: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez  
1er. Suplente: Dr. Leonid Fridman  
2o. Suplente: Dr. Hugo Rodríguez Cortés

La tesis se realizó en México, D.F.

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

---

FIRMA

# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por todas las oportunidades que me ha brindado

A mi familia por el apoyo recibido

A mi tutor, los doctores del colegio de control y mis compañeros por el conocimiento brindado

A mis amigos por estar siempre conmigo

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico, sin el cual no hubiera sido posible realizar este trabajo

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Formulación del problema . . . . .	4
1.4. Contribuciones . . . . .	4
1.5. Organización de la tesis . . . . .	5
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Notación . . . . .	7
2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	8
2.2.1. Sistemas autónomos . . . . .	8
2.2.2. Sistemas no autónomos . . . . .	9
2.3. Espacios $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_\infty$ . . . . .	10
2.4. Pasividad . . . . .	11
2.5. Sistemas Hamiltonianos . . . . .	14
2.6. Control vía IDA-PBC . . . . .	16
2.6.1. Regulación para sistemas afines generales . . . . .	17
2.6.2. Sistemas mecánicos generales . . . . .	18
2.6.3. Estabilidad de sistemas Hamiltonianos no autónomos . . . . .	20
2.7. Moldeo de energía . . . . .	21
2.8. Linealización Parcial . . . . .	22
2.9. Aplicación de los preliminares . . . . .	24
<b>3. Seguimiento de trayectorias vía IDA-PBC</b>	<b>25</b>
3.1. Planteamiento del problema . . . . .	25
3.2. Resultado principal . . . . .	30

<b>4. Casos de estudio</b>	<b>37</b>
4.1. Sistema de dos masas y resorte . . . . .	38
4.2. Motor síncrono de imán permanente . . . . .	45
4.3. Péndulo giroscópico . . . . .	48
4.4. Grúa . . . . .	54
<b>5. Conclusiones</b>	<b>61</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

El control basado en pasividad, PBC por sus siglas en inglés, es una técnica de control para sistemas dinámicos la cual busca aprovechar la propiedad de pasividad que poseen algunos sistemas, así como el papel fundamental que juega el intercambio energético con el medio para éstos; con el fin de resolver problemas de control, tales como, la regulación de puntos de equilibrio o el seguimiento de trayectorias deseadas. De manera informal se define a un sistema pasivo como aquel sistema que no es capaz de generar energía internamente, estando limitado a únicamente almacenarla. Siendo la energía disipada la diferencia entre las energías suministrada y almacenada.

Se dice que un sistema es pasivo de la entrada a cierta salida, la cual es llamada *salida pasiva*. Al realizar una realimentación negativa de dicha salida se asegura que el sistema en lazo cerrado es  $\mathcal{L}_2$  estable, o bien, que el mínimo energético del sistema en lazo cerrado es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.

Un gran número de sistemas físicos son pasivos, razón por la cual es posible explotar esta propiedad, utilizando la técnica PBC, para lograr la estabilidad de puntos de operación o trayectorias deseadas, según sea el caso. Dicha técnica no sólo respeta las propiedades y restricciones físicas, sino que intenta aprovecharlas para los fines antes mencionados. Debido a lo anterior los controladores basados en pasividad suelen tener interpretación física.

Los controladores basados en pasividad se pueden clasificar en

dos tipos: por un lado está el llamado PBC *estándar* en el cual se elige la función de almacenamiento de energía en lazo cerrado (que cumpla con las condiciones necesarias para que el sistema sea pasivo), y posteriormente se diseña un controlador que garantice que la función mencionada sea la correspondiente al sistema resultante en lazo cerrado. La otra clase de controladores basados en pasividad son aquellos en donde la función de almacenamiento de energía no está dada, sino que se impone una estructura deseada al sistema en lazo cerrado; entonces se caracterizan las funciones de energía compatibles con la estructura elegida. Un ejemplo de este tipo de controladores es el que se utiliza a lo largo de este trabajo, llamados controladores basados en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento, IDA-PBC por sus siglas en inglés, en donde la estructura deseada en lazo cerrado es la de un sistema Hamiltoniano. Para este último tipo de controladores las funciones de almacenamiento de energía asignables son soluciones de la llamada ecuación de acoplamiento o emparejamiento (*matching equation*).

La técnica IDA-PBC ha demostrado ser útil para resolver problemas de regulación, obteniendo controladores robustos respecto a incertidumbres paramétricas e incluso perturbaciones externas. La sintonización de estos controladores es relativamente sencilla, debido a la interpretación física que poseen. Existe una vasta literatura para este tipo de problemas, particularmente para aplicaciones en sistemas físicos.

Por otro lado, existen muy pocos trabajos que tratan el problema de seguimiento de trayectorias utilizando esta técnica de control, siendo un problema prácticamente abierto el referente a sistemas subactuados; debido a que la existencia de una solución para estos sistemas recae en la existencia, y restricciones, de la solución de la ecuación de emparejamiento. Mientras que para el caso totalmente actuado dicha ecuación se resuelve trivialmente y no presenta restricciones. Lo anterior hace que el problema de seguimiento de trayectorias, para sistemas subactuados, resulte atractivo no sólo en el aspecto teórico, sino también en el práctico. Finalmente el autor de esta tesis, tiene la esperanza de poder extender los resultados de robustez y fácil sintonización, de la regulación de puntos de equilibrio vía IDA-PBC, al ámbito de seguimiento de trayectorias para sistemas subactuados.

## 1.2. Antecedentes

Tal como se mencionó en la sección anterior, existen numerosos trabajos acerca de regulación mediante la técnica IDA-PBC. Entre otros, los trabajos de *Ortega, García-Canseco* [6] y *Ortega, Zhitao* [7] muestran, de forma general, la aplicación de la técnica IDA-PBC así como algunas de sus propiedades. Por otro lado, los trabajos de *Gómez-Estern et al* [3], *Viola et al* [20] y *Ortega et al* [8] abordan el problema de moldeo de energía, ya sea total o parcial, el cual es fundamental en el desarrollo de la técnica citada. Estos trabajos tienen importantes resultados para facilitar la solución de la ecuación de emparejamiento de acuerdo con las características del sistema en estudio.

Así mismo el trabajo de *Romero et al* [9] presenta resultados referentes al rechazo de perturbaciones externas utilizando la técnica IDA-PBC para sistemas no lineales. Otro resultado útil para el desarrollo de esta tesis, es el de la linealización parcial de sistemas Hamiltonianos, mostrado en *Venkatraman et al* [18].

En lo concerniente a seguimiento de trayectorias vía IDA-PBC, se tienen como antecedentes el trabajo de *Fujimoto, Sugie* [2], en el cual se definen los cambios de coordenadas que preservan la estructura Hamiltoniana del sistema. Basado en lo anterior se presenta otro trabajo de *Fujimoto, Sugie* [1] en el cual se resuelve el problema de seguimiento de trayectorias planteando un cambio de coordenadas para definir el error de seguimiento. No obstante, los trabajos anteriores utilizan como casos de estudio sistemas sin energía potencial o sistemas cuya energía potencial presenta derivadas parciales lineales, no siendo claro qué ocurre cuando la energía potencial de un sistema presenta derivadas parciales no lineales, como es el caso de un gran número de sistemas físicos. Otro antecedente para el seguimiento de trayectorias utilizando IDA-PBC, es el trabajo de *Romero et al* [10], en el cual se resuelve el problema de seguimiento de trayectorias para sistemas totalmente actuados. Finalmente se tiene como antecedente el trabajo de *Romero Mata, Espinosa* [11], para el cual este trabajo es una extensión, en donde no se utiliza el concepto de trayectoria realizable y no resulta clara la solución de la ecuación de emparejamiento para los casos de estudio expuestos.

### 1.3. Formulación del problema

De manera similar que en *Fujimoto, Sugie* [1] y *textitRomero Mata, Espinosa* [11], se transforma el problema de seguimiento en uno de regulación. Para lograr lo anterior, se define el error de seguimiento de tal forma que la dinámica de éste preserve una estructura Hamiltoniana. Posteriormente, utilizando la técnica IDA-PBC, se regula el origen del sistema descrito por el error de seguimiento. Lograr que el error de seguimiento tienda a cero implica que la trayectoria que sigue el sistema tiende a la trayectoria deseada.

### 1.4. Contribuciones

El presente trabajo ofrece una metodología bien definida, la cual da solución al problema de seguimiento de trayectorias para sistemas subactuados.

En esta tesis se utiliza la linealización parcial por cambio de coordenadas, PLVCC por sus siglas en inglés, como una herramienta para el desarrollo de la metodología mencionada, resolviendo el problema de sistemas cuya co-energía cinética presente derivadas parciales no lineales.

Por otro lado, se trabaja con sistemas cuya energía potencial presenta derivadas parciales (términos gravitacionales) lineales y no lineales. Mostrando como para el primer caso, es posible encontrar una función de energía potencial deseada que dependa únicamente del error y sea solución de la ecuación de emparejamiento. Mientras que para términos gravitacionales no lineales esto no ocurre, complicando la solución de la ecuación de emparejamiento y dando origen a funciones de energía potencial deseadas dependientes del error y de las trayectorias deseadas, o en su defecto, realizar el análisis de un sistema perturbado, cuyas perturbaciones responden a los términos gravitacionales mencionados.

Asimismo, se trabaja con trayectorias realizables por los sistemas en estudio, y se propone una manera de generar trayectorias deseadas que respeten las restricciones de los mismos, asegurando de esta forma que la ecuación de emparejamiento tenga solución.

Finalmente la metodología se ilustra a través de ejemplos, los cuales abarcan distintos escenarios de sistemas mecánicos que cumplen con las características previamente mencionadas.

## **1.5. Organización de la tesis**

La estructura de este trabajo es la siguiente: el Capítulo 2 ofrece una serie de herramientas y antecedentes útiles para dar solución al problema medular de la tesis, el seguimiento de trayectorias vía IDA-PBC. En el Capítulo 3 se concentra la parte principal de la presente tesis, siendo el planteamiento formal del problema y la solución del mismo. En el Capítulo 4 se ilustra la metodología dando solución a una serie de ejemplos. Finalmente el Capítulo 5 es el referente a las conclusiones.



## Capítulo 2

# Preliminares

### 2.1. Notación

A lo largo del presente trabajo se utiliza la siguiente notación:

$A_i$  representa al  $i$ -ésimo vector columna de una matriz

$A_{ij}$  alude al elemento que se encuentra en el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de una matriz

$[\cdot, \cdot]$  denota el paréntesis de Lie de dos campos vectoriales, esto es:

$$[f(x), g(x)] = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x)$$

El operador nabla  $\nabla$  expresa el transpuesto del gradiente de una función escalar de variable vectorial, de tal forma que

$$\nabla_x f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$B_{\perp}$  indica que se trata del aniquilador izquierdo de una matriz, es decir

$$B_{\perp} B = 0$$

$\|A\|$  es la norma euclidiana, siendo equivalente a  $A^T A$  para el caso matricial.

## 2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

A lo largo de esta tesis se utiliza el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov, para mayor información acerca de este tema consultar *Khalil, H. y Grizzle, J.W.* [5], *Vidyasagar* [19], *Slotine, J. et al* [16] e *Ioannou, P. y Sun, J.* [4]. El análisis de este tipo estabilidad presenta diferencias para sistemas autónomos y no autónomos, lo cual motiva la siguiente definición

**Definición 1** *Suponga un sistema cuya dinámica está descrita por  $\dot{x} = f(x, t)$ . En caso de que la función  $f$  no tenga dependencia explícita del tiempo, el sistema será autónomo; de lo contrario será un sistema no autónomo*

La estabilidad en el sentido de Lyapunov se enfoca en la naturaleza de los puntos de equilibrio de los sistemas dinámicos, siendo necesaria la siguiente definición de punto de equilibrio

**Definición 2** *Considere un sistema con dinámica  $\dot{x} = f(x, t)$ . Entonces  $x^*$  es un punto de equilibrio si  $\dot{x} = f(x^*, t) = 0 \forall t$ . Es decir, si el sistema inicia en el punto  $x^*$ , permanece en dicho punto para todo tiempo.*

Para el caso de los sistemas autónomos, la definición de punto de equilibrio es la siguiente

**Definición 3** *Considere un sistema autónomo con dinámica  $\dot{x} = f(x)$ . Entonces,  $x^*$  es un punto de equilibrio si  $\dot{x} = f(x^*) = 0$ . Es decir, si el sistema inicia en el punto  $x^*$ , permanece en dicho punto.*

De acuerdo con la estabilidad en el sentido de Lyapunov, un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que inician cerca de él permanecen cerca de él; de otra manera, el punto de equilibrio es inestable. A continuación se se presentan las definiciones formales, para sistemas autónomos y sistemas no autónomos.

### 2.2.1. Sistemas autónomos

Considere un sistema autónomo dado por

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

en donde,  $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$  es un mapeo del dominio  $D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , que además cumple con ser localmente Lipschitz. Sin pérdida de generalidad, se asume que el origen del sistema es un punto de equilibrio, es decir,  $f(0) = 0$ . Lo anterior es válido, debido a que un punto de equilibrio cualquiera siempre puede ser trasladado al origen.

**Definición 4** *Considere el Sistema (2.1). El punto de equilibrio  $x = 0$  es:*

- estable si, por cada  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

- inestable cuando no es estable
- asintóticamente estable si es estable y  $\delta$  puede ser elegida tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Bajo la definición anterior, una manera de conocer la naturaleza de un punto de equilibrio, es mediante el siguiente teorema

**Teorema 1** *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para (2.1) y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene a dicho punto. Por otro lado, sea  $V : D \mapsto \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable y positiva definida en  $D$ , tal que,  $\dot{V}$  sea negativa semidefinida; entonces  $x = 0$  es un punto de equilibrio estable. Más aún, si  $\dot{V}$  es negativa definida, el punto de equilibrio  $x = 0$  será asintóticamente estable.*

### 2.2.2. Sistemas no autónomos

Considere un sistema no autónomo dado por

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.2}$$

en donde  $f : [0, \infty) \times D \mapsto \mathbb{R}^n$  es continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  sobre  $[0, \infty) \times D$ , y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene al punto  $x = 0$ . El origen es un punto de equilibrio para (2.2) si  $f(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ . De manera similar que en sistemas autónomos, todo punto de equilibrio puede ser trasladado al origen.

**Definición 5** *Considere el Sistema (2.2). El punto de equilibrio  $x = 0$  es*

- estable si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que

$$\|x(t_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (2.3)$$

- uniformemente estable si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que se cumple (2.3)
- asintóticamente estable si es estable y además existe una constante  $c = c(t_0) > 0$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\forall \|x(t_0)\| < c$
- uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable y además existe una constante  $c > 0$ , la cual no depende de  $t_0$ , tal que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\forall \|x(t_0)\| < c$ . Es decir, para cada  $\eta > 0$ , existe  $T = T(\eta, c) > 0$  tal que

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T, \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

Bajo la definición anterior, una manera de conocer la naturaleza de un punto de equilibrio, es mediante el siguiente teorema

**Teorema 2** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para el sistema (2.2) y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene a dicho punto. Sea  $V : [0, \infty) \times D \mapsto \mathbb{R}^n$  una función continuamente diferenciable y positiva definida en  $D$ . El punto de equilibrio es uniformemente estable si,  $\dot{V}(x, t)$  es negativa semidefinida para todo  $t \geq t_0$  en una bola de radio  $r > 0$  con centro en el origen. Si  $\dot{V}(x, t)$  es negativa definida bajo las condiciones anteriores, entonces, el punto de equilibrio es uniformemente asintóticamente estable.

Los teoremas de estabilidad en el sentido de Lyapunov brindan condiciones suficientes. Sin embargo, no afirman que dichas condiciones sean necesarias.

### 2.3. Espacios $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_\infty$

En este trabajo se utilizan los conceptos de espacios  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_\infty$ , razón por la cual se definen a continuación

**Definición 6** El conjunto  $\mathcal{L}_\infty[0, \infty) = \mathcal{L}_\infty$  consiste en todas las funciones  $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^n$  tales que se cumple

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |f(t)| < \infty$$

**Definición 7** El conjunto  $\mathcal{L}_2[0, \infty) = \mathcal{L}_\infty$  consiste en todas las funciones  $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^n$  tales que se cumple

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty$$

El lema de Barbalat es una herramienta útil para demostrar estabilidad asintótica de un punto de equilibrio, dicho teorema establece lo siguiente:

**Lema 1** Sea  $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  una función uniformemente continua en  $[0, \infty)$ . Suponga lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau < \infty$$

Entonces,

$$\phi(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

De acuerdo con las definiciones de los espacios  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_\infty$  y el Lema 1. Entonces,

$$x \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty, \dot{x} \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow x \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

## 2.4. Pasividad

La pasividad es una propiedad intrínseca que poseen algunos sistemas, a lo largo del presente trabajo únicamente se utiliza la representación de sistemas en variables de estado. Suponga el sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.4}$$

$$y = h(x, u) \tag{2.5}$$

en donde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz,  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$  es un mapeo continuo,  $f(0, 0) = 0$  y  $h(0, 0) = 0$ . El sistema (2.4, 2.5) es pasivo si la energía que absorbe en cualquier período de tiempo  $[0, t]$ , es mayor o igual al incremento en la energía almacenada por el sistema en el mismo período de tiempo. Esto es

$$\int_0^t u(s)y(s)ds \geq V(x(t)) - V(x(0)) \quad (2.6)$$

en donde,  $V(x)$  es la energía almacenada por el sistema. Debido a que (2.6) debe cumplirse para todo  $t \geq 0$ , el flujo de potencia interno del sistema debe ser mayor o igual a la tasa de cambio de la energía almacenada por el mismo. Lo cual queda expresado en la siguiente definición.

**Definición 8** *El Sistema (2.4, 2.5) es pasivo si existe una función positiva semidefinida continuamente diferenciable  $V(x)$ , llamada función de almacenamiento, tal que*

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

Más aún, se dice que es un sistema

- sin pérdidas si  $u^T y = \dot{V}$
- pasivo por prealimentación de entrada si  $u^T y \geq \dot{V} + u^T \varphi(u)$  para alguna función  $\varphi$
- estrictamente pasivo a la entrada si  $u^T y \geq \dot{V} + u^T \varphi(u)$  con  $u^T \varphi(u) > 0, \forall u \neq 0$
- pasivo por retroalimentación de salida si  $u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y)$  para alguna función  $\rho$
- estrictamente pasivo a la salida si  $u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y)$  con  $y^T \rho(y) > 0, \forall y \neq 0$
- estrictamente pasivo si  $u^T y \geq \dot{V} + \phi(x)$  para alguna función positiva definida  $\phi$

*En todos los casos, las desigualdades deben mantenerse para todo par  $(x, u)$ .*

La propiedad de pasividad se relaciona fuertemente con los conceptos de estabilidad  $\mathcal{L}_2$  y estabilidad en el sentido de Lyapunov. En el presente trabajo se analiza, particularmente, la relación con la segunda. Dicha relación se hace explícita en el siguiente lema:

**Lema 2** *Suponga que el sistema (2.4, 2.5) es pasivo con una función de almacenamiento  $V(x)$  positiva definida, entonces el origen de  $\dot{x} = f(x, 0)$  es estable.*

La estabilidad asintótica se puede demostrar a través de las definiciones de cero estado observabilidad y cero estado detectabilidad, las cuales son las siguientes

**Definición 9** *El sistema (2.4, 2.5) es cero estado observable si*

$$h(x, 0) = 0 \Rightarrow x \equiv 0$$

**Definición 10** *El sistema (2.4, 2.5) es cero estado detectable si*

$$h(x, 0) = 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$$

Para demostrar estabilidad asintótica a través del lema 2, es necesario que  $\dot{V} < 0$  o que el sistema sea cero estado detectable. Lo anterior es resumido en el siguiente lema:

**Lema 3** *Considere el sistema (2.4, 2.5). El origen de  $\dot{x} = f(x, 0)$  es asintóticamente estable si alguna de las siguientes condiciones se cumple*

- *es estrictamente pasivo*
- *es estrictamente pasivo a la salida y cero estado detectable.*

*Más aún, si la función de almacenamiento es radialmente no acotada, el origen será globalmente asintóticamente estable.*

Un sistema estrictamente pasivo siempre cumple la desigualdad  $\dot{V} < 0$ . Por otro lado, un sistema estrictamente pasivo a la salida cumple con la desigualdad  $\dot{V} \leq 0$ , pero  $\dot{V} = 0 \Rightarrow y = 0$ . Asimismo, al ser un sistema cero estado detectable  $y = 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$ , entonces  $\dot{V} = 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$ .

Para el caso de sistemas no autónomos, considere el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x, t, u) \tag{2.7}$$

$$y = h(x, t, u) \tag{2.8}$$

La Definición 8 se modifica de manera directa, derivando en lo siguiente

**Definición 11** *El Sistema (2.7,2.8) es pasivo si existe una función continuamente diferenciable  $V(x, t) \geq V(0, t) = 0$ , llamada función de almacenamiento, tal que*

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t, u) + \frac{\partial V}{\partial t} \quad \forall (x, u), t$$

La definición de pasividad, así como los lemas que la relacionan con conceptos de estabilidad, dependen de la entrada y de la salida del sistema. Debido a lo anterior se dice que el mapeo  $u \mapsto y$  es pasivo si cumple con las condiciones expuestas a lo largo de esta sección.

## 2.5. Sistemas Hamiltonianos

Considere un sistema cuyo vector de estados está formado por las posiciones  $q$  y los momentos  $p$  generalizados del sistema. El Hamiltoniano, es la función que expresa la energía total de este sistema, es decir

$$H = T(q, p) + V(q)$$

en donde,  $T(q, p)$  y  $V(q)$  corresponden a la co-energía cinética y a la energía potencial del sistema respectivamente.

De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$p = M(q)\dot{q} \quad (2.9)$$

en donde,  $M(q) = M(q)^T > 0$  es la matriz de inercias del sistema.

Por otro lado, la co-energía cinética del sistema está dada por

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2.10)$$

De lo anterior, al sustituir (2.9) en (2.10) se obtiene

$$T = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano de un sistema está dado por

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q). \quad (2.11)$$

La dinámica de los sistemas Hamiltonianos atiende a las llamadas *ecuaciones Hamiltonianas de movimiento*, las cuales son:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \nabla_p H = M^{-1}(q)p \\ \dot{p} &= \nabla_q H + \tau\end{aligned}$$

en donde,  $\tau$  es el vector de fuerzas generalizadas externas que actúan sobre el sistema.

Suponga que el vector  $\tau$  corresponde a entradas de control, estos sistemas son llamados *Hamiltonianos controlados por puerto*, y tienen la siguiente representación

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \nabla_p H = M^{-1}(q)p \\ \dot{p} &= \nabla_q H + G(q)u\end{aligned}$$

En donde,  $u$  es el vector de entradas de control y la matriz  $G(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  representa la forma en la que incide el control en el sistema, y tiene rango  $m$ . Por otra parte, se tienen las siguientes definiciones útiles en la clasificación de sistemas.

**Definición 12** *Un sistema subactuado es aquél que posee un mayor número de grados de libertad que entradas de control (actuadores).*

**Definición 13** *Un sistema totalmente actuado es aquél que posee igual número de grados de libertad y entradas de control (actuadores).*

En el caso particular de los sistemas totalmente actuados  $G(q) = I_n$ , mientras que para el caso subactuado dicha matriz tiene alguna de las siguientes formas

$$G = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}$$

siendo  $m$  la cantidad de actuadores que tiene el sistema.

Una representación más general para sistemas Hamiltonianos es la siguiente

$$\dot{x} = J(x)\nabla_x H(x) + g(x)u \qquad (2.12)$$

en donde,  $J(x) = -J(x)^T$  es llamada la matriz de interconexión del sistema, con dimensiones  $n \times n$ ; y  $g = [0 \ G]^T$ . Si además el sistema tiene amortiguamiento, la representación toma la forma

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)]\nabla_x H(x) + g(x)u$$

siendo  $R(x) = R(x)^T \geq 0$  la matriz de amortiguamiento del sistema, con dimensiones  $n \times n$ . Finalmente, es posible definir  $F(x) = J(x) - R(x)$ , con dimensiones  $n \times n$ . De lo anterior, la representación general de un sistema Hamiltoniano es

$$\dot{x} = F(x)\nabla_x H(x) + g(x)u$$

$$y = g^T(x)\nabla_x H(x)$$

con  $[F(x) + F^T(x)] \leq 0$  Para mayor información acerca de esta sección ver *Van der Schaft* [13].

## 2.6. Control vía IDA-PBC

Suponga un sistema Hamiltoniano de la forma

$$\dot{x} = F(x)\nabla_x H(x) \tag{2.13}$$

$$y = g^T(x)\nabla_x H(x) \tag{2.14}$$

El Sistema (2.13, 2.14) cumple con

$$H(x(t_1)) = H(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)y(t)dt, \quad \forall u(t), x(t_0)$$

Si  $H(x)$  es acotada por abajo, el mapeo  $u \mapsto y$  es pasivo con función de almacenamiento  $H(x)$ . Por lo tanto, si el sistema cumple con las condiciones impuestas en el Lema 3, la realimentación  $u = -Ky$  con  $K > 0$ , estabiliza de forma asintótica el punto de equilibrio y  $H(x)$  puede ser propuesta como función de Lyapunov. Por motivos de simplicidad es posible elegir  $K = I$ .

La técnica IDA-PBC busca diseñar una entrada de control tal que, el sistema en lazo cerrado posea la estructura de un sistema Hamiltoniano, en donde la función de almacenamiento, la matriz de interconexión y de amortiguamiento tendrán una estructura deseada, tal que el punto de equilibrio (mínimo energético deseado) será estable.

### 2.6.1. Regulación para sistemas afines generales

Suponga el sistema afín:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.15)$$

en donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  (con  $m \leq n$ ) es la entrada de control y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  son mapeos suaves con  $g$  de rango completo por columnas. La idea principal de la técnica consiste en transformar al sistema (2.15) en un sistema Hamiltoniano, de la forma (2.13) con función de almacenamiento deseada. Lo anterior, mediante la realimentación de una señal de control  $u$  adecuada. Entonces

$$f(x) + g(x)u = F_d(x)\nabla_x H_d(x)$$

Sin embargo, la ecuación anterior sólo tiene solución cuando es posible resolver la ecuación de acoplamiento, la cual está dada por

$$g_\perp(x) \{F_d(x)\nabla_x H_d(x) - f(x)\} = 0 \quad (2.16)$$

En caso de encontrar una solución a la ecuación (2.16), entonces el punto que se desea regular será un punto de equilibrio estable del sistema en lazo cerrado si

1. La parte simétrica de la matriz  $F_d(x)$  es negativa semidefinida, esto es

$$(F_d(x) + F_d^T(x)) \leq 0$$

2. el punto que se desea regular  $x^*$  es un equilibrio asignable del sistema original, es decir

$$x^* \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_\perp(x)f(x) = 0\}$$

3. el mínimo de  $H_d(x)$  se encuentra en  $x = x^*$ .

Si es posible encontrar una solución de (2.16), que satisfaga las condiciones anteriores, entonces es posible encontrar una señal de control que lleve al sistema en lazo cerrado a la estructura deseada, descrita por

$$\dot{x} = F_d(x)\nabla_x H_d(x) \quad (2.17)$$

La señal de control se calcula de la siguiente manera

$$u = [g^T(x)g(x)]^{-1}g^T(x) \{F_d(x)\nabla_x H_d(x) - f(x)\}$$

Para probar la estabilidad del sistema en lazo cerrado (2.17) es posible elegir  $H_d(x)$  como función de Lyapunov, entonces

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(x) &= [\nabla_x H_d(x)]^T \dot{x} \\ &= [\nabla_x H_d(x)]^T F_d(x) \nabla_x H_d(x) \\ [F_d(x) + F_d^T(x)] \leq 0 &\Rightarrow \dot{H}_d \leq 0 \end{aligned}$$

para asegurar la estabilidad asintótica del punto  $x^*$ , es necesario cumplir con cualquiera de las siguientes condiciones

- imponer  $[F_d(x) + F_d^T(x)] < 0$ , la cual es una condición más fuerte que la original
- imponer una condición de cero estado detectabilidad sobre la función (salida)

$$y = g^T(x)\nabla_x H_d(x)$$

### 2.6.2. Sistemas mecánicos generales

Suponga un sistema mecánico subactuado y sin fricción, descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (2.18)$$

en donde, el estado  $(q, p) \in \mathbb{R}^n$  representa a las posiciones y momentos generalizados respectivamente. Por su parte, el Hamiltoniano de un sistema mecánico tiene la forma descrita en (2.11).

De manera similar al caso de sistemas afines, se pretende que el sistema en lazo cerrado tenga una estructura Hamiltoniana. No obstante, para sistemas mecánicos la función  $H_d(q, p)$  tiene una forma conocida. Entonces, el sistema en lazo cerrado debe tener la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}(q)M_d(q) \\ -M_d(q)M^{-1}(q) & J_2(q, p) - GK_{di}G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$H_d = \frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p + V_d(q)$$

con  $M_d(q) = M_d^T(q) > 0$  y  $J_2(q, p) = -J_2^T(q, p)$ . En este punto es posible separar la señal de control de la siguiente manera

$$u = u_{es} + u_{di} \quad (2.20)$$

en donde,  $u_{es}$  es el control que corresponde al moldeo de la energía del sistema, mientras que  $u_{di}$  se relaciona con la inyección de amortiguamiento. Observe que las matrices de interconexión y amortiguamiento deseadas están descritas por

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & J_2 \end{bmatrix}$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GK_{di}G^T \end{bmatrix}$$

en donde,  $F_d = J_d - R_d$ .

En particular,  $u_{di}$  se puede calcular de la siguiente manera

$$u_{di} = -K_{di}G^T\nabla_p H_d \quad (2.21)$$

en donde,  $K_{di}$  es un término de diseño que debe cumplir con  $K_{di} > 0$ .

Por su parte, para el cálculo de  $u_{es}$  es necesario igualar (2.18) con (2.19) sin el término de amortiguamiento, teniendo

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u_{es} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & M^{-1}(q)M_d(q) \\ -M_d(q)M^{-1}(q) & J_2(q, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix}$$

Dicha igualdad únicamente tiene solución cuando es posible resolver la ecuación de emparejamiento, la cual está dada por

$$G_{\perp} \left\{ \nabla_q H(q, p) - M_d(q)M^{-1}(q)\nabla_q H_d(q, p) + J_2(q, p)M_d^{-1}(q)p \right\} = 0 \quad (2.22)$$

En caso de ser posible encontrar  $H_d(q, p)$ ,  $J_2(q, p)$  y  $M_d(q)$  que solucionen (2.22) para toda  $p$ , el punto  $(q^*, 0)$  que se desea regular será estable si

- $q^*$  es un equilibrio asignable del sistema original, esto es

$$q^* \in \{q \in \mathbb{R}^n \mid G_{\perp}(q)\nabla_q V(q) = 0\}$$

- $q^*$  es el argumento mínimo de la función  $V_d(q)$

Observe en (2.19) que la condición  $[F_d(x) + F_d^T(x)] \leq 0$  siempre se cumple. Entonces,  $u_{es}$  está dada por

$$u_{es} = [G^T G]^{-1} G^T \{ \nabla_q H(q, p) - M_d(q) M^{-1}(q) \nabla_q H_d(q, p) + J_2(q, p) M_d^{-1}(q) p \} \quad (2.23)$$

finalmente, la señal de control  $u$  se obtiene al sustituir (2.21) y (2.23) en la ecuación (2.20).

De acuerdo con lo propuesto en esta sección, no es posible imponer la condición  $[F_d(x) + F_d^T(x)] < 0$ . Entonces, para demostrar estabilidad asintótica del punto  $(q^*, 0)^T$ , es necesario que el sistema sea cero estado detectable desde la salida  $G^T \nabla_p H_d$ .

Es importante remarcar que algunos sistemas no mecánicos también admiten la representación (2.18), (2.11), siendo posible seguir la metodología expuesta para resolver el problema de regulación.

### 2.6.3. Estabilidad de sistemas Hamiltonianos no autónomos

El análisis de este tipo de sistemas es similar al de un sistema autónomo, sin embargo, el análisis de estabilidad debe hacerse bajo la siguiente consideración

$$\dot{H}_d(x, t) = (\nabla_x H_d(x, t))^T F_d(x, t) \nabla_x H_d(x, t) + \frac{\partial H_d(x, t)}{\partial t}$$

El siguiente lema denota de manera formal, la estabilidad de un sistema Hamiltoniano no autónomo controlado por puerto.

**Lema 4** *Considere el siguiente sistema Hamiltoniano controlado por puerto*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, t) \nabla_x H(x, t) + g(x, t) u \\ y &= g^T(x, t) \nabla_x H(x, t) \end{aligned}$$

*Suponga que  $H(x, t)$  satisface las siguientes condiciones*

$$H(x, t) \geq H(0, t) = 0 \quad \frac{\partial H_d(x, t)}{\partial t} \leq 0$$

Entonces, el mapeo entrada-salida  $u \mapsto y$  es pasivo con respecto a la función de almacenamiento  $H(x, t)$ , y la realimentación

$$u = -K(x, t)y; \quad K(x, t) > 0$$

estabiliza al sistema.

## 2.7. Moldeo de energía

El moldeo de energía es un paso fundamental en la técnica IDA-PBC, sin embargo, la manera de realizarlo cambia de acuerdo a las propiedades del sistema, tal como se ilustra a lo largo de esta sección.

Observe que la ecuación (2.22) es una ecuación diferencial no lineal en derivadas parciales con varias incógnitas, esto hace que su solución directa resulte sumamente complicada. Una opción para resolver dicha ecuación es separarla en dos partes, una correspondiente a la co-energía cinética del sistema descrita por

$$G_{\perp} \left\{ \nabla_q [p^T M^{-1}(q)p] - M_d(q)M^{-1}(q)\nabla_q [p^T M_d^{-1}(q)p] + 2J_2(q, p)M_d^{-1}(q)p \right\} = 0 \quad (2.24)$$

en donde, se desconocen  $M_d(q)$  y  $J_2(q, p)$ ; y otra correspondiente a la energía potencial del sistema, dada por

$$G_{\perp} \left\{ \nabla_q V(q) - M_d(q)M^{-1}(q)\nabla_q V_d(q) \right\} = 0 \quad (2.25)$$

con  $V_d(q)$  y  $M_d(q)$  desconocidas.

Es recomendable primero resolver (2.24) obteniendo  $M_d(q)$  y  $J_2(q, p)$ , para posteriormente resolver (2.25), en donde se determina la forma de la energía potencial deseada  $V_d(q)$ .

Para el caso particular de sistemas con matriz de inercias constante, resulta conveniente elegir  $M_d$  constante. Con lo cual,  $J_2 = 0$  satisface la ecuación (2.24) para toda  $p$  (ver *Gómez-Estern et al* [3] y *Ortega et al* [8]). De acuerdo con lo anterior, se define

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

con

$$a_1 > 0 \quad (2.26)$$

$$a_1 a_3 > a_2^2 \quad (2.27)$$

$$a_3 > 0$$

en donde, las condiciones anteriores aseguran que  $M_d$  es positiva definida.

El siguiente paso consiste en resolver la ecuación (2.25) siendo  $m_1, m_2$  y  $m_3$  grados de libertad restringidos a las condiciones impuestas previamente y las que eventualmente surgen de la solución de (2.25).

## 2.8. Linealización Parcial

Los sistemas que poseen una matriz de inercias constante pertenecen a una clase muy reducida, no obstante, ésta puede ampliarse utilizando un cambio de coordenadas que linealice parcialmente al sistema. Dicho cambio de coordenadas está dado por  $(q, p) \mapsto (q, \Pi)$ , en donde  $\Pi = \Psi^T(q)p$ . Por su parte, la forma en la que se calcula el factor  $\Psi(q)$  es la siguiente

$$M^{-1}(q) = \Psi(q)\Psi^T(q)$$

En donde  $\Psi(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es de rango completo.

La dinámica del sistema expresado en las nuevas coordenadas es

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Psi^T(q) \\ \Psi(q) & \mathcal{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \bar{H}(q, \Pi) \\ \nabla_{\Pi} \bar{H}(q, \Pi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T(q)G \end{bmatrix} u$$

$$\bar{H}(q, \Pi) = \frac{1}{2} \Pi^T [(\Psi^T(q)M(q)\Psi(q))]^{-1} \Pi + V(q) = \frac{1}{2} |\Pi|^2 + V(q)$$

en donde  $\mathcal{J}$  es una matriz antisimétrica de  $n \times n$ , cuyos elementos se calculan utilizando la siguiente ecuación

$$\mathcal{J}_{j,k}(q, p) = -p^T [\Psi_j, \Psi_k].$$

De manera particular, existen sistemas que al ser linealizados parcialmente tienen una dinámica de la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\Pi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\Psi^T(q) \\ \Psi(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \bar{H}(q, \Pi) \\ \nabla_\Pi \bar{H}(q, \Pi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T(q)G \end{bmatrix} u \quad (2.28) \\ \bar{H}(q, \Pi) &= \frac{1}{2}|\Pi|^2 + V(q) \end{aligned}$$

Dichos sistemas deben cumplir con alguna de las siguientes características:

- Tener matriz de inercias constante, es decir,  $M(q)_{\bar{n} \times \bar{n}} = M_{\bar{n} \times \bar{n}}$ .
- Tener símbolos de Christoffel del primer tipo iguales a cero. Dichos símbolos se calculan de la siguiente manera

$$C_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial M_{ik}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{jk}(q)}{\partial q_i} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\}$$

con  $i, j, k \in \bar{n}$

- Tener símbolos de Riemann iguales a cero. Dichos símbolos se calculan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(q) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 M_{ik}(q)}{\partial q_j \partial q_l} + \frac{\partial^2 M_{jl}(q)}{\partial q_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 M_{il}(q)}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial^2 M_{jk}(q)}{\partial q_i \partial q_l} \right] + \\ &\quad \sum_{a,b=1}^n (M^{-1}(q))_{(a,b)} [C_{jla}(q)C_{ikb}(q) - C_{ila}(q)C_{jkb}(q)] \end{aligned}$$

en donde  $C$  son los símbolos de Christoffel del primer tipo e  $i, j, k, l \in \bar{n}$ .

- Poseer un factor  $\Psi$  el cual admita la siguiente propiedad de antisimetría

$$\sum_{j=1}^n [\Psi_i(q), \Psi_j(q)] \Psi_j^T(q) = - \left( \sum_{j=1}^n [\Psi_i(q), \Psi_j(q)] \Psi_j^T(q) \right)^T$$

La dinámica descrita en (2.28) es especialmente interesante, dado que no presenta términos giroscópicos. Lo anterior, aunado a lo expuesto en la sección (2.7), sugiere que  $M_d$  para el sistema linealizado parcialmente deberá ser elegida constante. Para mayor información ver *Venkatraman et al* [18].

## 2.9. Aplicación de los preliminares

La teoría y las herramientas expuestas a lo largo de este capítulo, plantean los fundamentos para la obtención del resultado principal de esta tesis. De manera concreta, la Sección 2.5 en conjunto con los trabajos *Romero Mata, Espinosa* [11] y *de Fujimoto, Sugie* [1] serán utilizados para la formulación del problema de seguimiento de trayectorias vía IDA-PBC. Mientras que las secciones 2.2, 2.4, 2.6, 2.7 y 2.8 serán aplicadas en la solución del problema medular de este trabajo.

## Capítulo 3

# Seguimiento de trayectorias vía IDA-PBC

La presente metodología tiene como idea principal, transformar el problema de seguimiento de trayectorias para sistemas subactuados en uno de regulación. Para lograr lo anterior, la definición de error de seguimiento juega un papel fundamental, dado que se desea preservar la estructura Hamiltoniana en la dinámica de dicho error. Si lo anterior es posible, lograr que el origen del error sea asintóticamente estable implica que el estado sigue la trayectoria deseada.

### 3.1. Planteamiento del problema

Suponga el sistema descrito por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \\ H &= \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \end{aligned}$$

Considere la definición clásica de error dada por

$$\bar{x} = x - x_d \tag{3.1}$$

Si  $x_d$  es constante se trata de un problema de regulación, mientras que  $x_d(t)$  implica un problema de seguimiento de trayectorias. De acuerdo con la ecuación (3.1),  $\bar{x} = 0$  implica  $x = x_d(t)$ . Aplicando dicha definición de error al sistema mecánico, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\bar{q} = q - q_d \Rightarrow \dot{\bar{q}} = \dot{q} - \dot{q}_d \quad (3.2)$$

$$\bar{p} = p - p_d \Rightarrow \dot{\bar{p}} = \dot{p} - \dot{p}_d \quad (3.3)$$

entonces, es posible definir a la dinámica del error de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q)$$

Por otro lado, los sistemas mecánicos como cualquier sistema físico, presentan limitaciones en el comportamiento que se les puede imponer. Razón por la cual, las trayectorias deseadas necesariamente deben restringirse a comportamientos que el sistema es capaz de realizar. Esto queda manifiesto en la siguiente definición:

**Definición 14** *Una trayectoria  $x_d$  es realizable, si y sólo si, existe una  $u^*$  tal que los estados del sistema satisfacen  $x = x_d$ . En caso de no existir alguna  $u^*$  que cumpla lo anterior, entonces la trayectoria  $x_d$  es no realizable.*

Una manera de encontrar las trayectorias realizables por la planta, es invertir el sistema anterior y proponer trayectorias que respeten las restricciones que tienen lugar al efectuar dicha inversión. En general, lo anterior es extraordinariamente complicado, no obstante, para los casos de estudio de esta tesis resulta sencillo. En lo sucesivo esta será la manera de calcular las trayectorias realizables en este trabajo.

Considere la siguiente definición

$$p_d = M(q)\dot{q}_d \quad (3.5)$$

la cual no viola ninguna ley física ni impone algún problema formal, por el contrario, resulta sumamente útil para encontrar una estructura Hamiltoniana deseada de la dinámica del error, tal como se verá más adelante.

A partir de (3.5), las dinámicas de las trayectorias deseadas se pueden definir como un sistema Hamiltoniano controlado por puerto de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_d} H_a \\ \nabla_{p_d} H_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u^* \\ H_a &= \frac{1}{2} p_d^T M^{-1}(q) p_d + V(q_d) = \frac{1}{2} p_d^T M^{-1}(q_d + \bar{q}) p_d + V(q_d) \end{aligned}$$

Con lo cual la dinámica del error en lazo abierto está dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_d} H_a \\ \nabla_{p_d} H_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} \bar{u}; \\ \bar{u} &= u - u^* \end{aligned}$$

Una vez que se conoce la dinámica del error en lazo abierto, es necesario plantear una estructura Hamiltoniana deseada para dicha dinámica al cerrar el lazo de control. De acuerdo con la estructura general de un sistema Hamiltoniano, la estructura deseada debe tener la siguiente forma

$$\dot{\bar{x}} = F_d(\bar{x}) \nabla_{\bar{x}} H_d(\bar{x})$$

en donde, la condición  $[F_d(\bar{x}) + F_d^T(\bar{x})] \leq 0$  debe cumplirse para que el punto mínimo de  $H_d(\bar{x})$  sea estable.

De manera concreta, para un sistema mecánico se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(\bar{q}, \bar{p}) & F_{12}(\bar{q}, \bar{p}) \\ F_{21}(\bar{q}, \bar{p}) & F_{22}(\bar{q}, \bar{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \\ \nabla_{\bar{p}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Hasta este punto, se desconoce la forma de la función de almacenamiento de energía deseada  $H_d(\bar{q}, \bar{p})$ . Sin embargo, las funciones de almacenamiento de energía de sistemas mecánicos tienen una estructura bien definida (ver *Ortega, Zhitao* [7]), y aún cuando la dinámica deseada del error no necesariamente responde a un sistema mecánico, es posible suponer que su función de almacenamiento de energía tiene la siguiente forma

$$H_d(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1}(q) \bar{p} + V_d(\bar{q}) \quad (3.7)$$

con  $M_d(q) = M_d^T(q) > 0$ . Nuevamente, suponer que  $M_d$  depende de  $q$  no implica algún problema formal.

La dinámica deseada del error está completamente caracterizada por las expresiones (3.6) y (3.7), a partir de las cuales se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\dot{\bar{q}} = F_{11}(\bar{q}, \bar{p}) \nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) + F_{12}(\bar{q}, \bar{p}) M_d^{-1}(q) \bar{p} \quad (3.8)$$

$$\dot{\bar{p}} = F_{21}(\bar{q}, \bar{p}) \nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) + F_{22}(\bar{q}, \bar{p}) M_d^{-1}(q) \bar{p} \quad (3.9)$$

Por otro lado, la definición de momentos generalizados está dada por

$$p = M(q) \dot{q} \quad (3.10)$$

partiendo de las ecuaciones (3.2), (3.3), (3.5) y (3.10) se tiene la siguiente expresión

$$\dot{\bar{q}} = M^{-1}(q) \bar{p} \quad (3.11)$$

observe que es necesaria la Definición (3.5) para que (3.11) se cumpla.

A partir de las ecuaciones (3.8) y (3.11) se obtiene la siguiente igualdad

$$F_{11}(\bar{q}, \bar{p}) \nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) + F_{12}(\bar{q}, \bar{p}) M_d^{-1}(q) \bar{p} = M^{-1}(q) \bar{p}$$

en donde, el término  $\nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p})$  depende de  $\bar{q}$ , mientras que el lado derecho de la igualdad no posee ningún término dependiente de  $\bar{q}$ . Debido a lo anterior es necesario definir  $F_{11}(\bar{q}, \bar{p}) = 0$ , entonces

$$F_{12}(\bar{q}, \bar{p}) M_d^{-1}(q) \bar{p} = M^{-1}(q) \bar{p}$$

lo que implica

$$F_{12}(\bar{q}, \bar{p}) = M^{-1}(\bar{q} + q_d) M_d(\bar{q} + q_d)$$

Al elegir  $F_{11}(\bar{q}, \bar{p}) = 0$ , resulta imposible imponer la condición  $[F_d(\bar{q}, \bar{p}) + F_d^T(\bar{q}, \bar{p})] > 0$  debido a los ceros existentes en la diagonal principal de la matriz  $F_d(\bar{q}, \bar{p})$ . Sin embargo resulta necesario que dicha matriz cumpla con  $[F_d(\bar{q}, \bar{p}) + F_d^T(\bar{q}, \bar{p})] \leq 0$ , esto obliga a que

el término  $F_{12}(\bar{q}, \bar{p})$  corresponda a la parte antisimétrica de  $F_d(\bar{q}, \bar{p})$ . Entonces

$$F_{21}(\bar{q}, \bar{p}) = -M_d(\bar{q} + q_d)M^{-1}(\bar{q} + q_d)$$

Finalmente, el término  $F_{22}(\bar{q}, \bar{p})$  puede separarse en una parte antisimétrica la cual físicamente corresponde a las fuerzas giroscópicas, y una parte simétrica negativa semidefinida que corresponde al amortiguamiento deseado. Esto es

$$F_{22}(\bar{q}, \bar{p}) = J_2(\bar{q}, \bar{p}) - R_2(\bar{q}, \bar{p})$$

con  $J_2(\bar{q}, \bar{p}) = -J_2^T(\bar{q}, \bar{p})$  y  $R_2(\bar{q}, \bar{p}) = R_2^T(\bar{q}, \bar{p}) \geq 0$ . Sin embargo, únicamente puede haber inyección de amortiguamiento en las coordenadas actuadas del sistema, por lo tanto

$$R_2(\bar{q}, \bar{p}) = G^T K_{di} G$$

en donde,  $K_{di} > 0$ . De esta manera, la dinámica del error en lazo cerrado deberá tener la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & J_2 - GK_{di}G^T \end{bmatrix} \nabla_{\bar{q}, \bar{p}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \quad (3.12) \\ H_d(\bar{q}, \bar{p}) &= \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1}(q) \bar{p} + V_d(\bar{q}) \end{aligned}$$

Una vez definidas la dinámica del error en lazo abierto y la dinámica deseada del error en lazo cerrado, se comprueba que el punto

$$\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sea un equilibrio asignable del sistema que describe al error, para lo cual es necesario que la siguiente igualdad se satisfaga

$$G^\perp \begin{bmatrix} M^{-1}(q)\bar{p} \\ -\nabla_q H(q, p) + \nabla_{q_d} H_a(q, q_d, p_d) \end{bmatrix} \Big|_{\bar{q}, \bar{p}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de acuerdo con las definiciones de error (3.2) y (3.3),  $\bar{q} = 0$  implica  $q = q_d$  y de manera análoga  $\bar{p} = 0$  implica  $p = p_d$ . Lo anterior, en conjunto con la estructura de  $H_a(q, q_d, p_d)$ , tiene como resultado la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c} M_{-1}(q)\bar{p} \\ -\nabla_q H(q, p) + \nabla_{q_d} H_a(q, q_d, p_d) \end{array} \right] \Big|_{\bar{q}, \bar{p}=0} = \\ & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\nabla_q H(q, p) + \nabla_q H(q, p) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto, el origen siempre es un equilibrio asignable para el sistema que describe el error.

Retomando lo expuesto en la Sección (2.6.2), es necesario que el argumento mínimo de  $V_d(\bar{q})$  sea  $\bar{q} = 0$ , entonces el punto  $(\bar{q} = 0, \bar{p} = 0)$  será estable. No obstante, la función de energía potencial deseada no depende únicamente de la planta, sino que, las trayectorias deseadas juegan un rol determinante en la existencia de una  $V_d(\bar{q})$  que cumpla los requisitos previamente mencionados.

### 3.2. Resultado principal

Para encontrar una ley de control tal que, en lazo cerrado el origen del sistema que describe al error sea estable, es necesario igualar las ecuaciones (3.4) y (3.12). Entonces, se tiene la siguiente igualdad

$$M^{-1}(q)\bar{p} = M^{-1}(q)M_d(q)M_d^{-1}(q)\bar{p} \equiv M^{-1}(q)\bar{p} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} Gu - \nabla_q H(q, p) - \dot{p}_d &= -M_d(q)M^{-1}(q)\nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \\ &+ (J_2(\bar{q}, \bar{p}) - GK_{di}G^T)\nabla_{\bar{p}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considerando lo visto en la sección (2.6.2), se divide la señal de control en dos partes, tal como se muestra en la ecuación (2.20). En donde,  $u_{es}$  debe satisfacer la ecuación de emparejamiento, la cual está dada por

$$G_{\perp} \left\{ \nabla_q H(q, p) + \dot{p}_d - M_d(q)M^{-1}(q)\nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) + J_2(\bar{q}, \bar{p})M_d^{-1}(q)\bar{p} \right\} = 0 \quad (3.15)$$

De acuerdo con la sección (2.7), se divide la ecuación de emparejamiento de la siguiente manera

$$G_{\perp} \left\{ \nabla_{\bar{q}} [p^T M^{-1}(\bar{q} + q_d)p] - \nabla_{q_d} [p_d^T M^{-1}(\bar{q} + q_d)p_d] - M_d M^{-1} \nabla_{\bar{q}} [\bar{p}^T M_d^{-1} \bar{p}] + 2J_2 M_d^{-1} \bar{p} \right\} = 0 \quad (3.16)$$

$$G_{\perp} \left\{ \nabla_q V(q) - \nabla_{q_d} V(q_d) - M_d M^{-1} \nabla_{\bar{q}} V_d(\bar{q}) \right\} = 0 \quad (3.17)$$

El siguiente paso consiste en definir la estructura de la matriz de inercias deseada, la cual debe cumplir con las condiciones (2.26), (2.27) y ser simétrica, para lo cual se utiliza la metodología propuesta en la sección (2.7).

Cuando el sistema presenta una matriz de inercias  $M(q) = M$ , se elige  $M_d$  también constante, con lo cual el término que resuelve trivialmente la ecuación (3.16) es  $J_2 = 0$ . Este caso puede referirse a sistemas que de manera natural poseen matriz de inercias constante; o bien, a sistemas cuya matriz de inercia cumple con alguna de las características mencionadas en la Sección (2.8), tal que, el sistema acepta un cambio de coordenadas que lo linealiza parcialmente.

En ambos casos una vez obtenida la estructura de  $M_d$  y  $J_2$  se soluciona la ecuación en derivadas parciales descrita en (3.17), con lo cual se obtiene  $V_d(\bar{q})$ , buscando a través de los grados de libertad en  $M_d$ , que  $V_d$  cumpla con las condiciones de estabilidad impuestas. Si  $q_d$  no es una trayectoria realizable para el sistema (2.18), es imposible encontrar solución a (3.17).

Al aplicar esta metodología en sistemas cuya energía potencial tiene derivadas parciales no lineales, la solución de (3.17) es una función que depende del error en las posiciones y de las posiciones deseadas. De una manera equivalente

**Suposición 1** Sea  $V_d$  solución de la ecuación (3.17),  $q_d$  una trayectoria realizable para el sistema (2.18), y

$$B(q) = \nabla_q V(q), \quad B_{q_d} = \nabla_{q_d} V(q_d)$$

La función de energía potencial deseada será dependiente exclusivamente del error, es decir  $V_d(\bar{q})$ , sólo si se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} B(\bar{q}) &= B(q) - B(q_d) \\ M(q) &= M \\ M_d(q) &= M_d \end{aligned}$$

En caso de que alguna de las condiciones anteriores no se cumpla, la función de energía potencial deseada será dependiente del error y de las trayectorias deseadas, esto es  $V_d(\bar{q}, q_d)$ . Lo anterior tiene como consecuencia una función de almacenamiento de energía en lazo cerrado con la siguiente estructura

$$H_d = \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} (\bar{q} + q_d) \bar{p} + V_d(\bar{q}, q_d).$$

Para comprobar lo anterior considere la Ecuación (3.17), con  $M$  y  $M_d$  constantes. Si los términos gravitacionales son lineales, la ecuación anterior puede expresarse de la siguiente manera

$$G_{\perp} \{ B(\bar{q}) - M_d M^{-1} B_d(\bar{q}) \} = 0$$

en donde, se sabe que  $M$  y  $M_d$  son matrices simétricas y positivas definidas, por lo tanto, el término  $M_d M^{-1}$  es una matriz positiva definida. Observe que cuando los términos gravitacionales son no lineales, es imposible formar el término  $B(\bar{q})$ , lo que origina que  $B_d$  sea dependiente del error y las trayectorias deseadas, es decir  $B_d(\bar{q} + q_d, q_d)$ .

El punto  $\bar{q} = 0$ , de una función de energía potencial deseada dependiente del error y de las trayectorias deseadas  $V_d(\bar{q}, q_d)$ , es un punto crítico de dicha función si satisface la siguiente ecuación

$$\nabla_{\bar{q}} V_d|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t$$

Una manera de conocer la naturaleza de dicho punto es mediante la matriz Hessiana. En particular  $\bar{q} = 0$ , es un mínimo cuando cumple con

$$\nabla_{\bar{q}}^2 V_d|_{\bar{q}=0} > 0, \quad \forall t$$

Si es posible satisfacer las condiciones de estabilidad impuestas para  $V_d$ , entonces el control por moldeo de energía se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\bar{u}_{es} = (G^T G)^{-1} G^T \left\{ \nabla_q H(q, p) - M_d(q) M^{-1}(q) \nabla_q H_d(\bar{q} + q_d) + J_2(\bar{q}, \bar{p}) M_d^{-1}(q) p + \dot{p}_d \right\} \quad (3.18)$$

Finalmente, para obtener  $\bar{u}$  es necesario calcular la parte del control correspondiente a la inyección de amortiguamiento, esto es

$$\bar{u}_{di} = -K_{di} G^T M_d^{-1} \bar{p}. \quad (3.19)$$

Para sistemas con términos gravitacionales  $B(q)$  lineales, es posible utilizar la herramienta PLVCC cuando la matriz de inercias de la planta no es constante, hecho lo anterior, el análisis de estabilidad se realiza de acuerdo con lo visto en la Sección (2.6). Entonces,  $H_d(\bar{q}, \bar{p})$  se elige como función de Lyapunov teniendo

$$\begin{aligned} H_d(\bar{q}, \bar{p}) &> 0 \quad \forall (\bar{q}, \bar{p}) \neq 0 \\ H_d(0, 0) &= 0 \\ \dot{H}_d(\bar{q}, \bar{p}) &= \left[ \nabla_{\bar{q}}^T H_d(\bar{q}, \bar{p}) \quad \nabla_{\bar{p}}^T H_d(\bar{q}, \bar{p}) \right] \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por otro lado, la estructura deseada de la dinámica del error está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}(q) M_d(q) \\ -M_d(q) M^{-1}(q) & J_2(\bar{q}, \bar{p}) - G^T K_{di} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\bar{q}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \\ \nabla_{\bar{p}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Al sustituir (3.21) en (3.20)

$$\dot{H}_d(\bar{q}, \bar{p}) = -\nabla_{\bar{p}}^T H_d(\bar{q}, \bar{p}) G^T K_{di} G \nabla_{\bar{p}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \leq 0$$

El análisis anterior sirve para demostrar estabilidad del punto de equilibrio  $(\bar{q} = 0, \bar{p} = 0)$  en lazo cerrado. Para demostrar estabilidad asintótica de dicho punto de equilibrio, es suficiente con demostrar que el sistema es cero estado detectable desde la salida pasiva, esto es

$$G^T M_d^{-1}(q) \bar{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por su parte, cuando la función de almacenamiento de energía deseada depende del error y de las trayectorias deseadas, la dinámica del error en lazo cerrado es un sistema no autónomo, ya que las trayectorias deseadas son funciones explícitas del tiempo. Debido a lo anterior, las siguientes condiciones son necesarias para que el punto de equilibrio ( $\bar{q} = 0, \bar{p} = 0$ ) sea estable

$$\begin{aligned} H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) &\geq H_d(q_d, 0, 0) = 0 \quad \forall t \\ \dot{H}_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) &= \left[ \nabla_{\bar{q}}^T H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) \quad \nabla_{\bar{p}}^T H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) \right] \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} + \\ \frac{\partial H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p})}{\partial q_d} \dot{q}_d &\leq 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

Para probar estabilidad asintótica, es necesario que la  $\dot{H}_d(q_d, \bar{q}, \bar{p})$  cumpla con ser negativa definida, la cual es una condición más estricta, es decir

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) &= \left[ \nabla_{\bar{q}}^T H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) \quad \nabla_{\bar{p}}^T H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p}) \right] \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} + \\ \frac{\partial H_d(q_d, \bar{q}, \bar{p})}{\partial q_d} \dot{q}_d &< 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

Otra forma de demostrar estabilidad asintótica es recurriendo al teorema de Barbalat, de la siguiente manera

$$\bar{x} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty, \dot{\bar{x}} \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \bar{x} \rightarrow 0$$

Observe que para asegurar que  $x = x_d$ , es necesario probar estabilidad asintótica del punto ( $\bar{q} = 0, \bar{p} = 0$ ) del sistema que describe el error.

De manera alternativa, para evitar que la función de almacenamiento de energía deseada  $H_d$  dependa de la trayectoria realizable en presencia de términos gravitacionales no lineales, es posible analizar estos últimos como perturbaciones de un sistema nominal. Dichas perturbaciones serán evanescentes en el origen. Hecho lo anterior, el sistema deseado en lazo cerrado será un sistema perturbado, siendo necesario realizar el análisis de un sistema estable en presencia de perturbaciones que se desvanecen en el origen y son acotadas.

En resumen, la metodología propuesta a lo largo de este capítulo consiste en encontrar las trayectorias realizables por el sistema con el fin de conocer la dinámica del error en lazo abierto. Posteriormente, se propone una dinámica deseada del error, en donde se supone que la función  $H_d$  tiene la misma estructura que una función de almacenamiento de energía correspondiente a un sistema mecánico. El siguiente paso consiste en construir una matriz de interconexión  $F_d(\bar{q}, \bar{p})$ , tal que se cumpla la condición  $[F_d(\bar{q}, \bar{p}) + F_d^T(\bar{q}, \bar{p})] \leq 0$ . Hecho lo anterior, es necesario encontrar una matriz de inercias deseada  $M_d(q)$  y una función de energía potencial deseada  $V_d$ , las cuales deben cumplir con las condiciones de estabilidad impuestas en la Sección (2.6) de esta tesis. Siendo el último paso de la metodología, la inyección de amortiguamiento, la cual se realiza de acuerdo a la sección previamente mencionada.

El algoritmo diseñado asegura: la existencia de una solución para la ecuación de emparejamiento, el cumplimiento de las condiciones de estabilidad impuestas a la matriz de interconexión  $F_d(\bar{q}, \bar{p})$ , y la posibilidad de utilizar las herramientas expuestas en las secciones (2.7) y (2.8). Pero, esta sujeto a la obtención de las trayectorias deseadas, las cuales dependen del tipo de sistema, siendo la inversión del mismo un problema de suma complejidad. Asimismo, sistemas cuyos términos gravitacionales son no lineales o poseen una matriz de inercias no constante, dan origen a un sistema no autónomo al cerrar el lazo de control, complicando el análisis de estabilidad del punto de equilibrio.



## Capítulo 4

# Casos de estudio

Los resultados de este trabajo son ejemplificados por cuatro sistemas con diferentes características, esto con el fin de mostrar la aplicación de la metodología propuesta a sistemas que presenten distintas dificultades. Los casos de estudio son los siguientes: un sistema compuesto por dos masas y un resorte, dicho sistema posee matriz de inercias constante y términos gravitacionales lineales. El segundo caso de estudio consiste en el modelo manipulado de un motor síncrono de imán permanente reportado en *Shah et al* [14], en el cual se ejemplifica la aplicación de la técnica en un sistema electro-mecánico, que presenta un comportamiento no lineal en la interconexión del sistema. Posteriormente, se aplica el algoritmo propuesto, a un péndulo giroscópico cuyo modelo fue tomado de *Ortega et al* [8], este sistema posee matriz de inercias constante y términos gravitacionales no lineales. Finalmente, el cuarto caso de estudio es el modelo de una grúa reportado en *Shingal et al* [15], para este sistema se utilizó la herramienta PLVCC para linealizar la parte del sistema que corresponde a la co-energía cinética.

### 4.1. Sistema de dos masas y resorte

Considere el sistema mostrado en la Figura (4.1), cuya representación Hamiltoniana tiene la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$

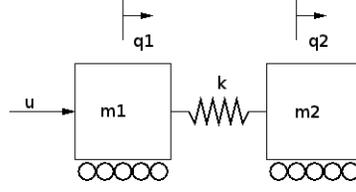


Figura 4.1: Sistema de dos masas unidas por un resorte

con

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2}p^T M^{-1}p + \frac{1}{2}k(q_1 - q_2)^2 \\
 G &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 M &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\
 \nabla_q H &= \begin{bmatrix} k(q_1 - q_2) \\ -k(q_1 - q_2) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Para el cálculo de las trayectorias realizables considere la siguiente definición

$$p_d = M(q)\dot{q}_d$$

entonces

$$p_d = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{1d} \\ \dot{q}_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \dot{q}_{1d} \\ m_2 \dot{q}_{2d} \end{bmatrix}$$

Al derivar la ecuación anterior se obtiene lo siguiente

$$\dot{p}_d = \begin{bmatrix} m_1 \ddot{q}_{1d} \\ m_2 \ddot{q}_{2d} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Por otro lado, de acuerdo con el modelo matemático las trayectorias realizables satisfacen la siguiente dinámica

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_d} H_a \\ \nabla_{p_d} H_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u^* \\
 H_a &= \frac{1}{2}p_d^T M^{-1}p_d + \frac{1}{2}k(q_{1d} - q_{2d})^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector  $\dot{p}_d$  está definido como

$$\dot{p}_d = -\nabla_{q_d} H_a + G u^* = \begin{bmatrix} -k(q_{1d} - q_{2d}) + u_* \\ k(q_{1d} - q_{2d}) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

De las ecuaciones (4.1) y (4.2) se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_{1d} &= -k(q_{1d} - q_{2d}) + u^* \\ m_2 \ddot{q}_{2d} &= k(q_{1d} - q_{2d}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dado que no hay incidencia del control  $u^*$ , es necesario que siempre se satisfaga la restricción mostrada en la Ecuación (4.3).

Siguiendo lo expuesto en el Capítulo 3, se expresa la dinámica del error de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{p}_d \end{bmatrix}$$

Posteriormente se iguala con la dinámica deseada en lazo cerrado, la cual está descrita por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & -GK_{di}G^T \end{bmatrix} \nabla_{\bar{q}, \bar{p}} H_d(\bar{q}, \bar{p}) \\ H_d(\bar{q}, \bar{p}) &= \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} \bar{p} + V_d(\bar{q}) \end{aligned}$$

Y, finalmente se despeja la señal de control  $u$ .

Debido a que la matriz de inercias de la planta es constante, resulta conveniente elegir  $M_d$  constante y  $J_2 = 0$ , ver Sección (2.7). Al igualar las dinámicas del error bajo las suposiciones previas se obtiene la siguiente expresión

$$- \begin{bmatrix} k(q_1 - q_2) \\ -k(q_1 - q_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{es} - \begin{bmatrix} \dot{p}_{1d} \\ \dot{p}_{2d} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_1} \\ \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_2} \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la Ecuación (4.1), la igualdad anterior se expresa como

$$\begin{bmatrix} -k(q_1 - q_2) - m_1 \ddot{q}_{1d} \\ k(q_1 - q_2) - m_2 \ddot{q}_{2d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{es} = - \begin{bmatrix} \frac{a_1}{m_1} & \frac{a_2}{m_2} \\ \frac{a_2}{m_1} & \frac{a_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_1} \\ \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_2} \end{bmatrix}$$

siendo necesario premultiplicar ambos lados por  $G_{\perp} = [0 \ 1]$ , lo cual tiene como resultado la siguiente ecuación

$$m_2 \ddot{q}_{2d} - k(q_1 - q_2) = a_2 \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_1} + a_3 \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_2}$$

Sustituyendo la Ecuación (4.3) en la expresión anterior

$$k(q_{1d} - q_{2d}) - k(q_1 - q_2) = a_2 \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_1} + a_3 \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_2}$$

Finalmente

$$-k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) = a_2 \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_1} + a_3 \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_2} \quad (4.4)$$

Para facilitar los cálculos, es posible proponer  $M_d = I$  lo que implica  $a_2 = 0$ . Esta proposición se validará al momento de obtener el mínimo de la función de energía potencial deseada. Hecho lo anterior, la Ecuación (4.4) se reduce a

$$-k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) = \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}_2}$$

Para obtener la solución de esta ecuación en derivadas parciales, es posible utilizar algún programa de cómputo tal como lo es Maple®. Dicha solución es

$$V_d = \frac{k}{2}(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)^2 + \phi(\bar{q}_1)$$

en donde,  $\phi(\bar{q}_1)$  es una función diferenciable cualquiera.

El siguiente paso del método consiste en probar que el punto  $\bar{q} = 0$  es un mínimo de  $V_d(\bar{q})$ , para lo cual se obtiene la primera derivada de  $V_d(\bar{q})$ , y se comprueba que dicho punto sea crítico

$$\left. \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0} = \left[ \begin{array}{c} \frac{d\phi(\bar{q}_1)}{d\bar{q}_1} + k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \\ -k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \end{array} \right] \Big|_{\bar{q}=0} = \left[ \begin{array}{c} \frac{d\phi(\bar{q}_1)}{d\bar{q}_1} \Big|_{\bar{q}_1=0} \\ 0 \end{array} \right] \quad (4.5)$$

De la expresión anterior es claro que,  $\phi(\bar{q}_1)$  debe tener un punto crítico en  $\bar{q}_1 = 0$ . Si la condición anterior se cumple,  $\bar{q} = 0$  es un punto crítico de  $V_d(\bar{q})$ . Para comprobar la naturaleza de dicho punto se obtiene la matriz Hessiana de  $V_d(\bar{q})$  evaluada en  $\bar{q} = 0$ , la cual está dada por

$$\left. \frac{\partial^2 V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} \left. \frac{d^2 \phi(\bar{q}_1)}{d\bar{q}_1^2} \right|_{\bar{q}_1=0} + k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Una manera de conocer el signo de la matriz Hessiana, es a través de sus menores principales, los cuales son

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2 \phi(\bar{q}_1)}{d\bar{q}_1^2} \right|_{\bar{q}_1=0} + k \\ & k \left. \frac{d^2 \phi(\bar{q}_1)}{d\bar{q}_1^2} \right|_{\bar{q}_1=0} \end{aligned}$$

De acuerdo con el análisis anterior, una condición necesaria para que la matriz Hessiana sea positiva, y por lo tanto  $\bar{q} = 0$  sea un mínimo de  $V_d(\bar{q})$ , es que sus menores principales sean positivos. Entonces, se requiere que se cumpla las siguiente desigualdad

$$\left. \frac{d^2 \phi(\bar{q}_1)}{d\bar{q}_1^2} \right|_{\bar{q}_1=0} > 0$$

Esta condición implica que  $\phi(\bar{q}_1)$  debe tener un mínimo en  $\bar{q}_1 = 0$ .

A partir del análisis previo, se propone

$$\phi = \frac{K_c}{2} \bar{q}_1^2 \quad (4.7)$$

con  $K_c > 0$ .

Al sustituir la Ecuación (4.7) en la Ecuación (4.5) se obtiene la siguiente igualdad

$$\left. \frac{\partial V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo anterior demuestra que la función  $\phi(\bar{q}_1)$  elegida tiene un punto crítico en  $\bar{q} = 0$ . Por otro lado, al sustituir (4.7) en (4.6), se tiene el siguiente resultado

$$\left. \frac{\partial^2 V_d(\bar{q})}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} K_c + \frac{k}{a_3} & -\frac{k}{a_3} \\ -\frac{k}{a_3} & \frac{k}{a_3} \end{bmatrix}$$

Al calcular los menores principales de la matriz anterior, se obtienen las siguientes desigualdades

$$K_c + \frac{k}{a_3} > 0$$

$$\frac{k}{a_3^2} K_c > 0$$

esto quiere decir que la matriz Hessiana es positiva definida; entonces, el punto  $\bar{q} = 0$  es un mínimo de  $V_d(\bar{q})$ . Dado lo anterior, la proposición  $M_d = I$  se valida.

El siguiente paso, consiste en calcular la parte del control correspondiente al moldeo energético, la cual está dada por

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} G^T \{ \nabla_q V(q) + \dot{p}_d - M_d M^{-1} \nabla_{\bar{q}} V_d(\bar{q}) \}$$

Al susituir valores, se tiene lo siguiente

$$u_{es} = k(q_1 - q_2) + m_1 \ddot{q}_{1d} - \frac{1}{m_1} [K_c \bar{q}_1 + k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)] \quad (4.8)$$

Por otro lado, la parte del control correspondiente a la inyección de amortiguamiento está dada por

$$u_{di} = -K_{di} G^T M d^{-1} \bar{p}$$

lo cual equivale a

$$u_{di} = -K_{di} \bar{p}_1 \quad (4.9)$$

Finalmente, es necesario probar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio  $\bar{q} = 0$ , para lo cual es posible utilizar  $H_d(\bar{q}, \bar{p})$  como función candidata de Lyapunov, la cual tiene la forma

$$H_d = \frac{1}{2} |\bar{p}|^2 + \frac{K_c}{2} \bar{q}_1^2 + k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)^2$$

La función anterior es positiva definida debido a que se conforma únicamente de elementos cuadráticos. Por otro lado, la derivada de dicha función es

$$\begin{aligned} \dot{H}_d &= \begin{bmatrix} \nabla_{\bar{q}} H & \nabla_{\bar{p}} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ -M^{-1} & -G K_{di} G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\bar{q}} H \\ \nabla_{\bar{p}} H \end{bmatrix} \\ &= -K_{di} \bar{p}_1^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que el punto de equilibrio en lazo cerrado es estable. Para demostrar estabilidad asintótica, es posible comprobar que el sistema es cero estado observable desde la salida  $G^T M d^{-1} \bar{p}$ , esto es

$$G^T \bar{p} = \bar{p}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\bar{p}}_1 = 0 \quad (4.10)$$

Por su parte, la dinámica del error en las posiciones en lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_1 \\ \dot{\bar{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \bar{p}_1 \\ \frac{1}{m_2} \bar{p}_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Si se sustituye la Ecuación (4.10) en (4.11), resulta claro que  $\dot{\bar{q}}_1 = 0$ , lo cual a su vez implica que  $\bar{q}_1$  es constante.

Por otro lado, al realimentar la señal de control  $u$ , la dinámica del error en los momentos en lazo cerrado está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{p}}_1 \\ \dot{\bar{p}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_1} K_c \bar{q}_1 + k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \\ k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \end{bmatrix}$$

De acuerdo con (4.10), se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{m_1} K_c \bar{q}_1 + k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \\ 0 &= k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \end{aligned}$$

Es posible representar lo anterior en una sola expresión, esto es

$$k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) = -\frac{1}{m_1} K_c \bar{q}_1 + k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)$$

Entonces

$$\frac{1}{m_1} K_c \bar{q}_1 = 0 \Rightarrow \bar{q}_1 = 0$$

Sin embargo, de acuerdo con la dinámica en lazo cerrado de  $\bar{p}_2$

$$0 = k(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)$$

Pero  $\bar{q}_1 = 0$ , entonces

$$0 = -k\bar{q}_2 \Rightarrow \bar{q}_2 = 0$$

El análisis anterior demuestra que el sistema es cero estado observable, es decir

$$G^T \bar{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y, por lo tanto, el punto de equilibrio en lazo cerrado es asintóticamente estable.

Como complemento a la teoría expuesta, se realizó una simulación del sistema propuesto. En donde, se eligieron los siguientes valores para los respectivos parámetros

$$\begin{array}{ll} m_1 = 2 & K_c = 1 \\ m_2 = 5 & K_{di} = 10 \\ k = 2 & \end{array}$$

Además, la matriz de inercias deseada se eligió  $M_d = I$  por simplicidad.

Respecto a las trayectorias deseadas, se eligió la trayectoria  $q_{2d} = \sin(0.1t)$  y a partir de ésta se obtuvieron el resto de las trayectorias deseadas, cumpliendo con la restricción descrita en la Ecuación (4.3).

Por su parte, las condiciones iniciales bajo las cuales se realizó la simulación son

$$\begin{array}{ll} \bar{q}_1(0) = 2 & \bar{p}_1(0) = 0.5 \\ \bar{q}_2(0) = 1 & \bar{p}_2(0) = -1 \end{array}$$

De esta manera, la Figura (4.2) muestra el comportamiento de los estados reales del sistema, así como las trayectorias deseadas para cada uno de los estados. La Figura (4.3) se refiere al comportamiento de los errores, en donde se aprecia que éstos convergen a cero. Finalmente en la Figura (4.4) se muestra la señal de control.

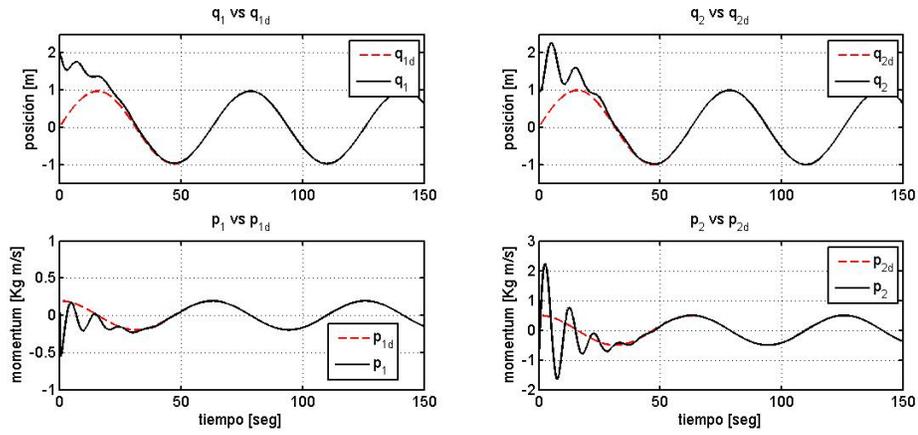


Figura 4.2: Estados deseados y reales

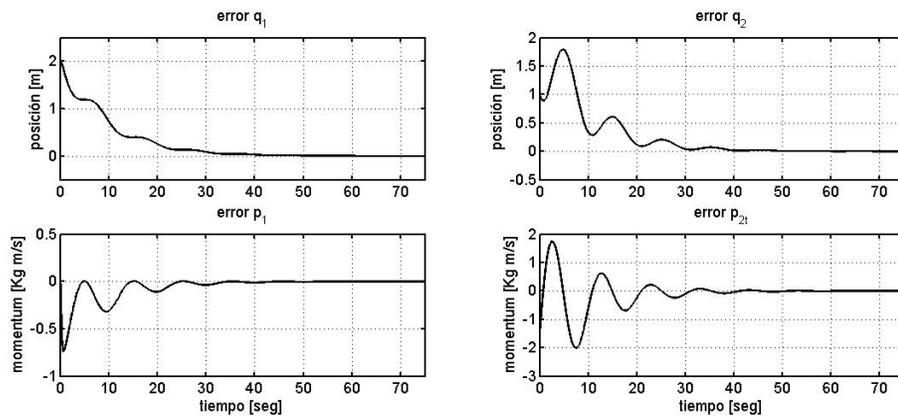


Figura 4.3: Errores

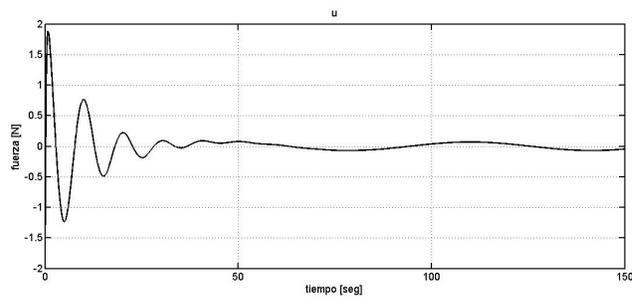


Figura 4.4: Señal de control

## 4.2. Motor síncrono de imán permanente

Suponga el modelo de un motor síncrono de imán permanente (ver [14]), dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x)\nabla_x H(x) + v \\ H(x) &= \frac{1}{2}x^T Qx; \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}I_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\ e_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \end{bmatrix} \\ F(x) &= \begin{bmatrix} -RI_2 & -n_p\mathcal{J}(x_{12} + \Phi e_1) \\ n_p(x_{12} + \Phi e_1)^T \mathcal{J}^T & 0 \end{bmatrix} \\ x &= \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Li_1 \\ Li_2 \\ J\omega \end{bmatrix}\end{aligned}$$

en donde  $J$  es el momento de inercia del motor,  $i$  es la corriente en el estator,  $L$  y  $R$  son la inductancia y la resistencia en el estator respectivamente,  $\Phi$  es el flujo magnético,  $n_p$  es la cantidad de pares de polos y  $\tau$  es el par de carga, el cual en este caso se considera constante.

De acuerdo al modelo del sistema, las trayectorias realizables deben cumplir con

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= F(x_d)Qx_d + v \\ &= \begin{bmatrix} -RI_2 & -n_p\mathcal{J}(x_{12d} + \Phi e_1) \\ n_p(x_{12d} + \Phi e_1)^T \mathcal{J}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L}I_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12d} \\ x_{3d} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \tau \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las trayectorias realizables deben cumplir la siguiente restricción

$$\dot{x}_{3d} = \frac{n_p}{L}\Phi x_{2d} + \tau$$

Por su parte, suponga que las trayectorias deseadas poseen la siguiente dinámica

$$\dot{x}_d = F(x)Qx_d + v(u^*)$$

De acuerdo con lo anterior, la dinámica del error en lazo abierto está dada por

$$\dot{\bar{x}} = F(x)Q\bar{x} + G\bar{u}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 - u_1^* \\ u_2 - u_2^* \end{bmatrix}$$

Y se desea que en lazo cerrado el sistema tenga el siguiente comportamiento

$$\dot{\bar{x}} = F_d \nabla_{\bar{x}} H_d(\bar{x}); \quad F_d = \begin{bmatrix} F_{11d} & F_{12d} \\ F_{21d} & F_{22d} \end{bmatrix}$$

con  $[F_d + F_d^T] \leq 0$ . Es posible elegir

$$H_d(\bar{x}) = \frac{1}{2} \bar{x}^T Q_d \bar{x}; \quad Q_d = Q_d^T = \begin{bmatrix} q_{12 \times 2} & 0 \\ 0 & q_{21 \times 1} \end{bmatrix} > 0$$

Observe que el argumento mínimo de  $H_d(\bar{x})$  es  $\bar{x} = 0$ .

Al igualar la dinámica en lazo abierto y la dinámica deseada, se obtiene

$$F(x)Q\bar{x} + G\bar{u} = F_d Q_d \bar{x}$$

Si se premultiplica por  $G_\perp$  surge la ecuación de emparejamiento, la cual está dada por

$$G_\perp \{F_d Q_d \bar{x} - F(x)Q\bar{x}\} = 0$$

A partir de la ecuación anterior, se plantea la siguiente igualdad

$$\frac{n_p}{L} (x_{12} + \Phi e_1)^T \mathcal{J}^T \bar{x}_{12} = F_{21d} q_1 \bar{x}_{12}$$

Se propone

$$q_1 = \begin{bmatrix} K_c \frac{n_p}{L} & 0 \\ 0 & K_c \frac{n_p}{L} \end{bmatrix} \quad F_{21d} = -F_{12d}^T = [-x_2 \quad x_1 + \Phi]$$

Asimismo, se elige

$$F_{11d} = -K R_d; \quad R_d = R_d^T > 0$$

Y  $q_2 > 0$  es un término libre.

Hecho lo anterior, el control que estabiliza el punto deseado es

$$u = (G^T G)^{-1} G^T [F_d(x) Q_d \bar{x} - F(x) Q x + \dot{x}_d]$$

Finalmente, para demostrar estabilidad, se elige  $H_d(\bar{x})$  como función candidata de Lyapunov, cuya derivada es

$$\dot{H}_d(\bar{x}) = \bar{x}^T Q_d F_d(x) Q_d \bar{x} = -K \frac{n_p^2}{L^2} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \leq 0$$

Para demostrar estabilidad asintótica, considere que

$$\dot{H}_d(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$$

De acuerdo con la dinámica en lazo cerrado

$$\dot{\bar{x}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = F_{11d} q_1 \bar{x}_{12} + F_{12d} q_2 \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \end{bmatrix} q_2 \bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_3 = 0$$

Por lo tanto, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, lo que implica a su vez que el estado real tiende a la trayectoria deseada.

Con el fin de ilustrar los resultados obtenidos, se presenta una simulación bajo los siguientes valores

$$\begin{aligned} J &= 0.012 & L &= 0.0038 & R &= 0.225 & \Phi &= 0.17 \\ n_p &= 3 & q_2 &= \frac{1}{J} & x_3(0) &= 0.6 & K &= 10 \\ K_c &= 10 & \tau &= 0.3 & x_{1d} &= 30L \cos(t) & x_{3d} &= 100J \sin(0.9t) \end{aligned}$$

En la Figura (4.5) se observa el comportamiento de los estados reales y los deseados, así como la señal de control correspondiente al actuador uno. Mientras que en la Figura (4.6) se presentan los errores de seguimiento, así como la señal de control correspondiente al segundo actuador.

### 4.3. Péndulo giroscópico

Considere el sistema mostrado en la Figura (4.7), cuya representación Hamiltoniana es la siguiente

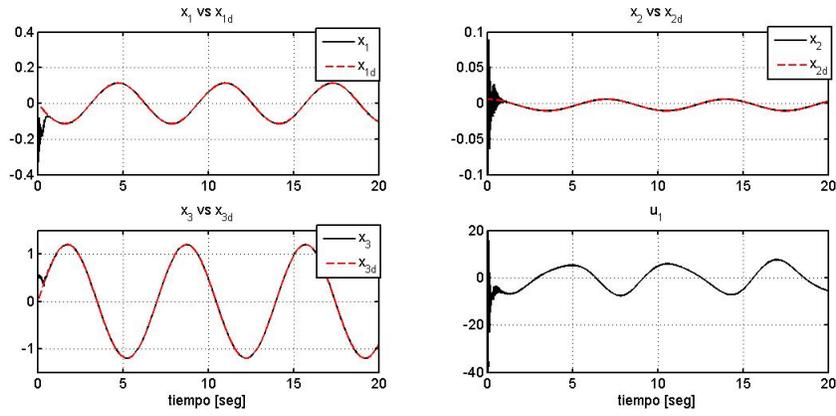


Figura 4.5: Estados reales vs deseados,  $u_1$

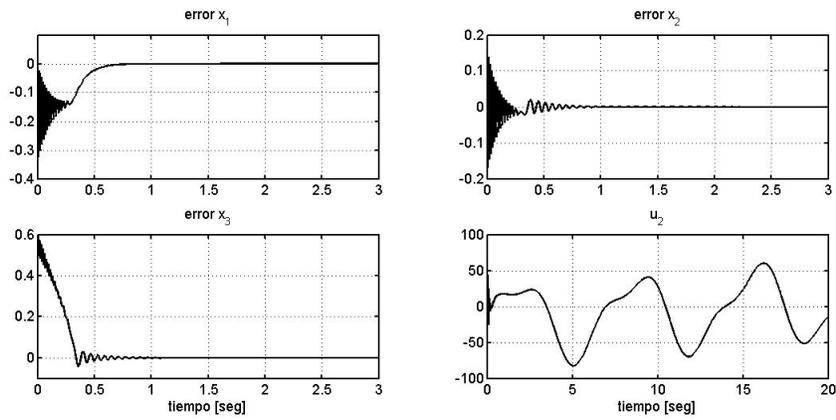


Figura 4.6: Errores de seguimiento,  $u_2$

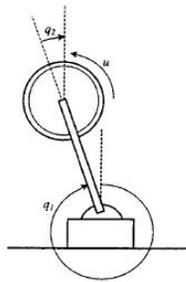


Figura 4.7: Péndulo giroscópico

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \tilde{H} \\ \nabla_p \tilde{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{G} \end{bmatrix} u$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{2} p^T \tilde{M}^{-1} p + mgl [1 + \cos(q_1)] \\ \tilde{M} &= \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix} \\ \nabla_q \tilde{H} &= \begin{bmatrix} -mgl \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{G} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para este sistema es posible hacer el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 \\ z_2 &= q_1 + q_2 \end{aligned}$$

Hecho lo anterior, la representación Hamiltoniana del sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_z H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$

en donde

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + mgl [1 + \cos(z_1)] \\ M &= \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \\ \nabla_q H &= \begin{bmatrix} -mgl \sin(z_1) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para conocer las trayectorias realizables, se parte de la siguiente definición

$$p_d = M(z) \dot{z}_d = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_{1d} \\ \dot{z}_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \dot{z}_{1d} \\ I_2 \dot{z}_{2d} \end{bmatrix}$$

Al derivar la expresión anterior respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{p}_d = \begin{bmatrix} I_1 \ddot{z}_{1d} \\ I_2 \ddot{z}_{2d} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Por otro lado, de acuerdo con la definición de trayectorias deseadas, es posible plantear la siguiente dinámica

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_d \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{z_d} H_a \\ \nabla_{p_d} H_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u^* \\ H_a = \frac{1}{2} p_d^T M^{-1} p_d + mgl [1 + \cos(z_{1d})]$$

Entonces, la dinámica de los momentos deseados es

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{1d} \\ \dot{p}_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgl \sin(z_{1d}) - u_* \\ u_* \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Al igualar las expresiones (4.12) y (4.13) se tiene

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{z}_{1d} &= mgl \sin(z_1) - u_* \\ I_2 \ddot{z}_{2d} &= u_* \end{aligned}$$

Lo anterior se puede expresar en una sola ecuación, quedando

$$I_1 \ddot{z}_{1d} = mgl \sin(z_1) - I_2 \ddot{z}_{2d} \quad (4.14)$$

Las trayectorias deseadas no deben violar dicha restricción.

Una vez conocidas la dinámica de la planta y las trayectorias deseadas, la dinámica del error se define como

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_z H - \nabla_{z_d} H_a \\ \nabla_p H - \nabla_{p_d} H_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} \bar{u}; \quad \bar{u} = u - u^*$$

Para este sistema resulta conveniente elegir  $M_d$  constante (ver Sección 2.7), y a su vez,  $J_2 = 0$ . De esta manera, se desea que en lazo cerrado la dinámica del error sea la siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & -G K_{di} G^T \end{bmatrix} \nabla_{\bar{z}, \bar{p}} H_d(\bar{z}, \bar{p}) \\ H_d(\bar{z}, \bar{p}) = \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} \bar{p} + V_d(\bar{z})$$

Al igualar las dinámicas en lazo abierto y lazo cerrado correspondientes al error en los momentos, se obtiene la siguiente expresión

$$\underbrace{\begin{bmatrix} mgl \sin(z_1) - I_1 \ddot{z}_{1d} \\ -I_2 \ddot{z}_{2d} \end{bmatrix}}_{-\nabla_z H - \dot{p}_d} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u = - \begin{bmatrix} \frac{a_1}{I_1} & \frac{a_2}{I_2} \\ \frac{a_2}{I_1} & \frac{a_3}{I_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V_d(\bar{z})}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial V_d(\bar{z})}{\partial \bar{z}_2} \end{bmatrix}$$

Posteriormente, se premultiplica por  $G_\perp = [1 \ 1]$  quedando

$$-mgl \sin(z_1) + I_1 \ddot{z}_{1d} + I_2 \ddot{z}_{2d} = \frac{(a_1 + a_2)}{I_1} \frac{\partial V_d(\bar{z})}{\partial \bar{z}_1} + \frac{(a_2 + a_3)}{I_2} \frac{\partial V_d(\bar{z})}{\partial \bar{z}_2}$$

Sin embargo, de la Ecuación (4.14) esto se reduce a

$$mgl [\sin(z_{1d}) - \sin(z_1)] = \frac{(a_1 + a_2)}{I_1} \frac{\partial V_d(\bar{z})}{\partial \bar{z}_1} + \frac{(a_2 + a_3)}{I_2} \frac{\partial V_d(\bar{z})}{\partial \bar{z}_2}$$

Es posible expresar la ecuación anterior en términos del error y las trayectorias deseadas, teniendo la siguiente ecuación de emparejamiento

$$mgl [\sin(z_{1d}) - \sin(\bar{z}_1 + z_{1d})] = \frac{(a_1 + a_2)}{I_1} \frac{\partial V_d(\bar{z})}{\partial \bar{z}_1} + \frac{(a_2 + a_3)}{I_2} \frac{\partial V_d(\bar{z})}{\partial \bar{z}_2}$$

Para el cálculo de la solución de la ecuación en derivadas parciales anterior, se puede utilizar alguna herramienta computacional, en este caso se utilizó el problema Maple<sup>®</sup>, con el cual se obtuvo la siguiente función de energía potencial deseada

$$V_d(\bar{z}, z_d) = \frac{mglI_1}{a_1 + a_2} [\bar{z}_1 \sin(z_{1d}) + \cos(\bar{z}_1 + z_{1d})] + \phi(\gamma \bar{z}_1 + \bar{z}_2, z_{1d});$$

$$\gamma = \frac{-I_1(a_3 + a_2)}{I_2(a_1 + a_2)}$$

en donde,  $\phi(\gamma \bar{z}_1 + \bar{z}_2, z_{1d})$  es una función diferenciable, en este caso se elige

$$\phi(\gamma \bar{z}_1 + \bar{z}_2, z_{1d}) = \frac{K_c}{2} (\gamma \bar{z}_1 + \bar{z}_2)^2 - \frac{mglI_1}{a_1 + a_2} \cos(z_{1d})$$

La estructura de  $\phi(\gamma\bar{z}_1 + \bar{z}_2, z_{1d})$  se elige de esta manera, para cumplir la condición  $H_d(0, 0, z_d) > 0$ , y porque se sabe que las formas cuadráticas tienen como argumento mínimo el cero.

Al sustituir el valor de  $\phi(\gamma\bar{z}_1 + \bar{z}_2, z_{1d})$  en  $V_d(\bar{z}, z_d)$

$$V_d(\bar{z}, z_d) = \frac{mglI_1}{a_1 + a_2} [\bar{z}_1 \sin(z_{1d}) + \cos(\bar{z}_1 + z_{1d}) - \cos(z_{1d})] + \frac{K_c}{2} (\gamma\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^2 \quad (4.15)$$

con  $K_c > 0$ .

Dados los cálculos previos, la función de almacenamiento de energía deseada es

$$H_d(\bar{z}, \bar{p}, z_d) = \frac{mglI_1}{a_1 + a_2} [\bar{z}_1 \sin(z_{1d}) + \cos(\bar{z}_1 + z_{1d}) - \cos(z_{1d})] + \frac{K_c}{2} (\gamma\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^2 + \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} \bar{p} \quad (4.16)$$

El siguiente paso es demostrar que el origen del sistema en lazo cerrado es un punto crítico. Para esto se evalúan las derivadas parciales de  $V_d(\bar{z}, z_d)$  en  $\bar{z} = 0$ , obteniendo

$$\left. \begin{bmatrix} \frac{\partial V_d(\bar{z}, z_d)}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial V_d(\bar{z}, z_d)}{\partial \bar{z}_2} \end{bmatrix} \right|_{\bar{z}=0} = \begin{bmatrix} \frac{mglI_1}{a_1 + a_2} [\sin(z_{1d}) - \sin(z_{1d})] \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Es claro que lo anterior se cumple para toda  $z_d$  y, por lo tanto para todo  $t$ . Por otro lado, para determinar la naturaleza del punto crítico se obtiene la matriz Hessiana de  $V_d(\bar{z}, z_d)$  evaluada en  $\bar{z} = 0$ , la cual está dada por

$$\left. \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_d(\bar{z}, z_d)}{\partial \bar{z}_1^2} \\ \frac{\partial^2 V_d(\bar{z}, z_d)}{\partial \bar{z}_2^2} \end{bmatrix} \right|_{\bar{z}=0} = \begin{bmatrix} -\frac{mglI_1}{a_1 + a_2} \cos(z_{1d}) + \gamma^2 K_c & \gamma K_c \\ \gamma K_c & K_c \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Una condición para que  $\bar{z} = 0$  sea un mínimo es que la matriz Hessiana de  $V_d(\bar{z}, z_d)$  sea positiva definida. Para que lo anterior sea cierto, deben cumplirse las siguientes condiciones

$$a_2 < 0, \quad a_1 < |a_2| \Rightarrow a_1 + a_2 < 0 \\ z_{1d} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.19)$$

La primer condición se cumple al hacer una correcta elección de  $M_d$ ; no obstante, la segunda condición tiene importantes implicaciones de localidad, ya que la matriz Hessiana deja de ser positiva definida para algunos valores de  $z_d$ . De lo anterior, se observa que las trayectorias deseadas no solamente deben cumplir con la restricción impuesta por la Ecuación (4.14), sino que además se debe satisfacer (4.19).

Una vez hecho lo anterior es posible calcular  $\bar{u}_{es}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bar{u}_{es} &= (G^T G)^{-1} G^T \{ \nabla_z H + \dot{p}_d - M_d M^{-1} \nabla_{\bar{z}} H_d \} \\ &= 2mgl(\sin(\bar{z}_1 + z_{1d}) - \sin(z_{1d})) + \dot{p}_{2d} - \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{I_2(a_1 + a_2)} K_c(\gamma \bar{z}_1 + \bar{z}_2)\end{aligned}$$

Mientras que la parte de la señal de control que corresponde a la inyección de amortiguamiento, se calcula de la siguiente manera

$$\bar{u}_{di} = -K_{di} G^T M_d^{-1} \bar{p} = -\frac{K_{di}}{a_1 a_3 - a_2^2} [-(a_2 + a_3) \bar{p}_1 + (a_1 + a_2) \bar{p}_2]$$

De acuerdo con el sistema en lazo cerrado,

$$\begin{aligned}\dot{H}_d(\bar{z}, \bar{p}, z_d) &= (\nabla_{\bar{z}, \bar{p}} H_d(\bar{z}, \bar{p}, z_d))^T \begin{bmatrix} \dot{\bar{z}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} + \frac{\partial H_d(\bar{z}, \bar{p}, z_d)}{\partial z_d} \dot{z}_d \\ &= -K_{di} \left\{ \left[ \frac{1}{a_1 a_3 - a_2^2} [-(a_2 + a_3) \bar{p}_1 + (a_1 + a_2) \bar{p}_2] \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{mgl I_1}{a_1 + a_2} \dot{z}_{1d} [\bar{z}_1 \cos(z_{1d}) - \sin(\bar{z}_1 + z_{1d}) + \sin(z_{1d})] \right\}\end{aligned}$$

Debido al término cruzado que hay en la expresión anterior, resulta sumamente complicado demostrar de forma analítica y directa que se cumple la condición

$$\dot{H}_d(\bar{z}, \bar{p}, q_d) \leq 0$$

Por esta razón, más adelante se proporciona una gráfica que comprueba dicha condición se satisface.

Para comprobar que los resultados son correctos, se realizaron simulaciones del comportamiento del sistema al cerrar el lazo de control, los valores paramétricos bajo los cuales se realizaron dichas simulaciones son los siguientes:

$$\begin{array}{lll}
K_c = 0.04 & K_{di} = 3 & I_1 = 0.1 \\
I_2 = 0.2 & m = 0.2 & l = 0.25 \\
g = 9.78 & & 
\end{array}$$

Asimismo, la matriz de inercias deseada se propuso

$$M_d = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

La cual cumple con las condiciones impuestas. En lo referente a las trayectorias deseadas, se eligió  $z_{1d} = 0.5 \sin(0.2t)$  mientras que el resto de las trayectorias se resolvieron en línea partiendo de (4.14).

La Figura (4.8) muestra el comportamiento de los estados del sistema y las trayectorias deseadas. Por otro lado, en la Figura (4.9) se observa el comportamiento de los errores de seguimiento. Finalmente la Figura (4.10) contiene las gráficas del comportamiento de la señal de control  $\bar{u}$ , así como el comportamiento de  $\dot{H}_d(\bar{z}, \bar{p}, q_d)$ , en donde se observa que dicha señal es negativa semidefinida. Estas tres figuras son el resultado de simular bajo las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{array}{ll}
z_1(0) = 6\pi & z_2(0) = -9\pi \\
p_1(0) = 0.1 & p_2(0) = -0.2
\end{array}$$

Físicamente la interpretación de cualquier múltiplo de  $2\pi$  no es otra cosa sino una vuelta completa sobre el eje fijo de un cuerpo, por lo tanto, bajo la consideración de que ni el péndulo ni la rueda tienen un tope que les impida girar con libertad un número aleatorio de veces,  $\bar{z}_1 = 2n\pi$  implica que el error de seguimiento es cero.

#### 4.4. Grúa

Suponga el sistema de la Figura (4.11), cuya representación Hamiltoniana tiene la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$

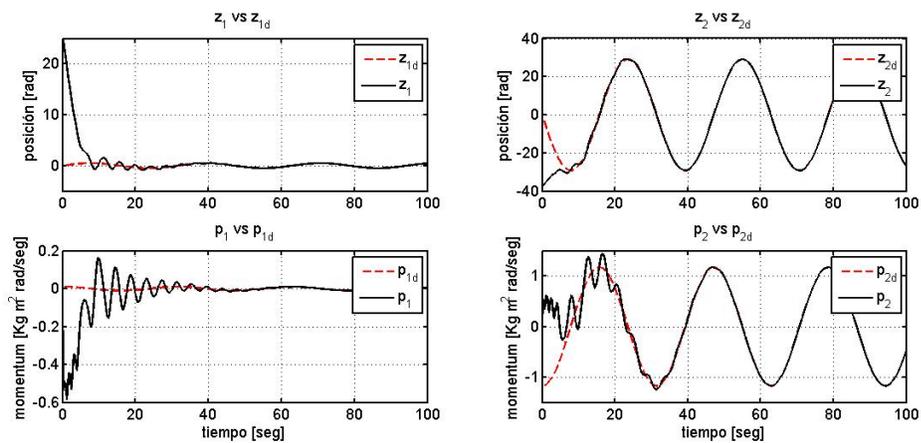


Figura 4.8: Estados reales contra deseados

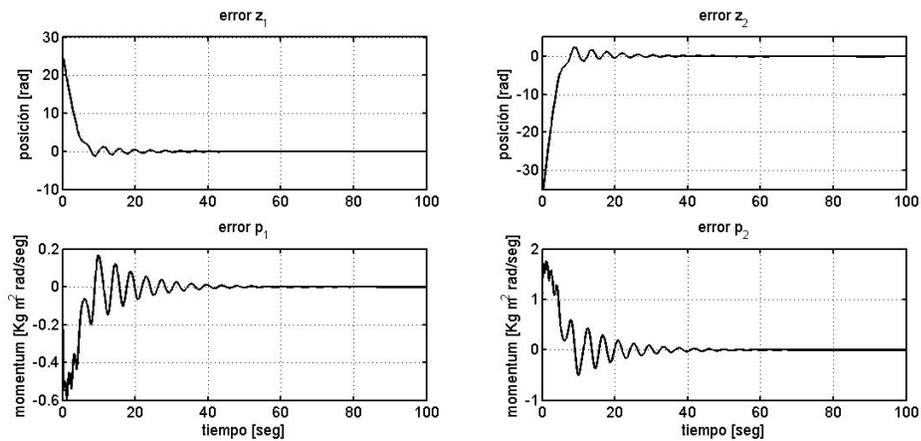


Figura 4.9: Errores de seguimiento

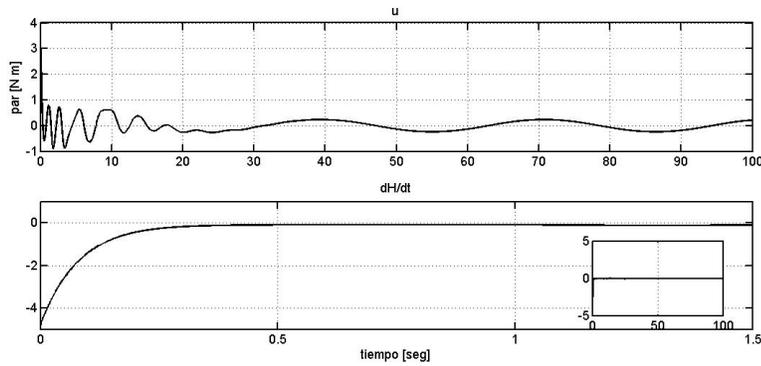
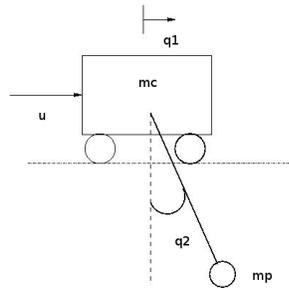
Figura 4.10: Señal de control y  $\dot{H}_d$ 

Figura 4.11: Grúa

con

$$\bar{H} = \frac{1}{2}p^T M^{-1}p + m_p g l [1 - \cos(q_1)]$$

$$M = \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l \cos(q_2) \\ m_p l \cos(q_2) & m_p l^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_q H = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l \sin(q_2) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los símbolos de Riemann de este sistema son cero, la manera de calcular dichos símbolos fue expuesta en la Sección 2.8. Debido a lo anterior, es posible asegurar que el sistema puede ser linealizado parcialmente sin la aparición de fuerzas giroscópicas.

El sistema puede ser parcialmente linealizado mediante un factor

que cumpla con  $M^{-1}(q) = \Psi(q)\Psi^T(q)$ , el cual es

$$\Psi^T(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{-\cos(q_2)}{l\gamma} \\ 0 & \frac{1}{l\sqrt{m_p}} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \sqrt{m_c + m_p \sin^2(q_2)}$$

siendo  $\Pi = \Psi(q)^T p$ .

Hecho lo anterior, la nueva dinámica del sistema está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi(q) \\ -\Psi^T(q) & 0 \end{bmatrix} \nabla_{q,\Pi} H + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T(q)G \end{bmatrix} u \quad (4.20)$$

$$H = \frac{1}{2}|\Pi|^2 + m_p g l [1 - \cos(q_2)]$$

Para obtener las trayectorias realizables se encuentra la dinámica de  $\Pi_d$ , la cual está dada por

$$\dot{\Pi}_d = -\Psi^T(q) (\nabla_q H)|_{q=q_d} + \Psi^T(q) G u^* = \begin{bmatrix} \frac{m_p g \sin(q_{2d}) \cos(q_2)}{-\sqrt{m_p} \gamma \sin(q_{2d})} \\ \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} u^* \quad (4.21)$$

Por otro lado, partiendo de la siguiente definición

$$\Pi_d = \Psi(q) M(q) \dot{q}_d$$

se tiene

$$\dot{\Pi}_d = \frac{d}{dt} (\Psi^T(q) M(q)) \dot{q}_d + (\Psi^T(q) M(q)) \ddot{q}_d =$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ \sqrt{m} \cos(q_2) & l\sqrt{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{1d} \\ \ddot{q}_{2d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{m \sin(2q_2)}{2\gamma^3} & 0 \\ -\sqrt{m} \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{1d} \\ \dot{q}_{2d} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Al igualar las ecuaciones (4.21) con (4.22), se obtiene la restricción física del sistema, la cual es

$$-g \sin(q_2) = \cos(q_2) \ddot{q}_{1d} + l \ddot{q}_{2d} - \sin(q_2) \dot{q}_{1d} \quad (4.23)$$

dicha restricción no debe ser violada para que las trayectorias  $q_d$  sean realizables.

Por su parte, la dinámica del error está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{\Pi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi \\ -\Psi^T & 0 \end{bmatrix} \nabla_{q,\Pi} H + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T G \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{\Pi}_d \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Debido a que la matriz de inercias de la planta es constante, conviene elegir una matriz de inercias deseada constante. Por simplicidad se elige  $M_d = I$ , esta elección cumple con las condiciones impuestas a  $M_d$ , no obstante, al calcular el mínimo de  $V_d$  se comprobará si esta elección es válida o no.

Se iguala la dinámica del error en  $\Pi$  con su respectiva dinámica deseada, de lo cual se tiene

$$\Psi^T G u - \Psi^T \nabla_q V - \dot{\bar{\Pi}}_d = -\Psi^T \nabla_{\bar{q}} V_d$$

Al premultiplicar por  $(\Psi^T G)_\perp = [0 \ 1]$ , se conoce la ecuación de emparejamiento de este sistema, la cual es

$$m_p g l [\sin(\bar{q}_2 + q_{2d}) - \sin(q_{2d})] = \frac{\partial V_d}{\partial \bar{q}_2}$$

La solución de esta ecuación se calcula utilizando Maple®, obteniendo la siguiente expresión

$$V_d = m_p g l [-\cos(\bar{q}_2 + q_{2d}) - \bar{q}_2 \sin(q_{2d})] + \phi(\bar{q}_1, q_{2d})$$

en donde,  $\phi(\bar{q}_1, q_{2d})$  debe tener un mínimo en  $\bar{q}_1 = 0$ . En este caso, se elige una función cuadrática en  $\bar{q}_1$  por simplicidad, además de agregar un término  $m_p g l \cos(q_{2d})$  para cumplir con la condición  $V_d(0, 0, q_{2d}) = 0$ . De esta forma, se obtiene la función de energía potencial deseada, la cual es

$$V_d = -m_p g l [\cos(\bar{q}_2 + q_{2d}) + \bar{q}_2 \sin(q_{2d}) - \cos(q_{2d})] + \frac{K_c}{2} (\bar{q}_1)^2$$

con  $K_c > 0$ .

Posteriormente, se comprueba que el origen del error es un punto crítico

$$\left. \frac{\partial V_d}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l [\sin(q_{2d}) - \sin(q_{2d})] \end{bmatrix}$$

lo cual es cero para toda  $q_{2d}$ , y por lo tanto, para todo  $t$ .

Mediante el signo de la matriz Hessiana evaluada en el punto crítico se obtiene la naturaleza del mismo

$$\left. \frac{\partial^2 V_d}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}=0} = \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ 0 & m_p g l \cos(q_{2d}) \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz Hessiana es positiva definida siempre y cuando  $q_{2d} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Debido a lo anterior, la suposición  $M_d = I$  es válida para dichos valores de  $q_{2d}$ .

De lo anterior, la función de almacenamiento de energía para el sistema en lazo cerrado es

$$H_d = -m_p g l [\cos(\bar{q}_2 + q_{2d}) + \bar{q}_2 \sin(q_{2d}) - \cos(q_{2d})] + \frac{K_c}{2} (\bar{q}_1)^2 + \frac{1}{2} |\Pi|^2$$

Hecho lo anterior,  $(u - u^*)_{es}$  se calcula de acuerdo con

$$\bar{u}_{es} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ \Psi \nabla_q V(q) + \dot{\Pi}_d - M^{-1} \nabla_{\bar{q}} V_d(\bar{q}) \right\}$$

Por otra parte, para la inyección de amortiguamiento se realiza el siguiente cálculo

$$\bar{u}_{di} = -K_{di} (\Psi^T G)^T \bar{\Pi} = -\frac{K_{di}}{\gamma} \bar{\Pi}_1$$

con  $K_{di} > 0$ .

De acuerdo con el sistema en lazo cerrado,

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(\bar{q}, \bar{\Pi}, q_d) &= (\nabla_{\bar{q}, \bar{\Pi}} H_d(\bar{q}, \bar{\Pi}, q_d))^T \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{\Pi}} \end{bmatrix} + \frac{\partial H_d(\bar{q}, \bar{\Pi}, q_d)}{\partial q_d} \dot{q}_d \\ &= -\frac{K_{di}}{\gamma^2} \bar{\Pi}_1^2 - m_p g l [-\sin(\bar{q}_2 + q_{2d}) + \bar{q}_2 \cos(q_{2d}) + \sin(q_{2d})] \dot{q}_{2d} \end{aligned}$$

La demostración analítica de la estabilidad del sistema en lazo cerrado resultan, nuevamente complicadas.

Para probar que los resultados son correctos, se realizó una simulación con los siguientes valores:

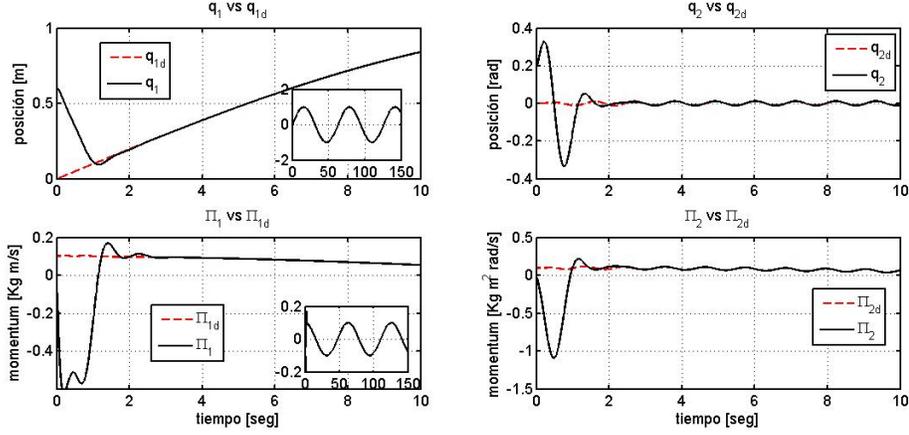


Figura 4.12: Estados deseados contra reales

$$\begin{array}{lll}
 K_c = 20 & K_{di} = 10 & g = 9.78 \\
 m_p = 1 & m_c = 1 & l = 0.3 \\
 q_{1d} = \sin(0.1t) & \Pi_1(0) = 0 & \Pi_2(0) = 0 \\
 q_1(0) = 0.6 & q_2(0) = 0.2 & 
 \end{array}$$

Para calcular el resto de las trayectorias deseadas, se resolvió en línea la Restricción (4.23), la cual es una ecuación diferencial. En la Figura (4.12) se observan los estados reales del sistema y los deseados, siendo posible apreciar que los estados reales del sistema siguen las trayectorias deseadas. Por su parte, en la Figura (4.13) se muestran los errores de seguimiento. Finalmente para realizar el análisis de estabilidad, ha sido imposible demostrar de forma analítica la condición  $\dot{H}_d \leq 0$ , por esta razón se muestra el comportamiento de dicha función en la Figura (4.14), junto con la señal de control  $u$ . Dicha figura pretende demostrar la condición de estabilidad antes mencionada.

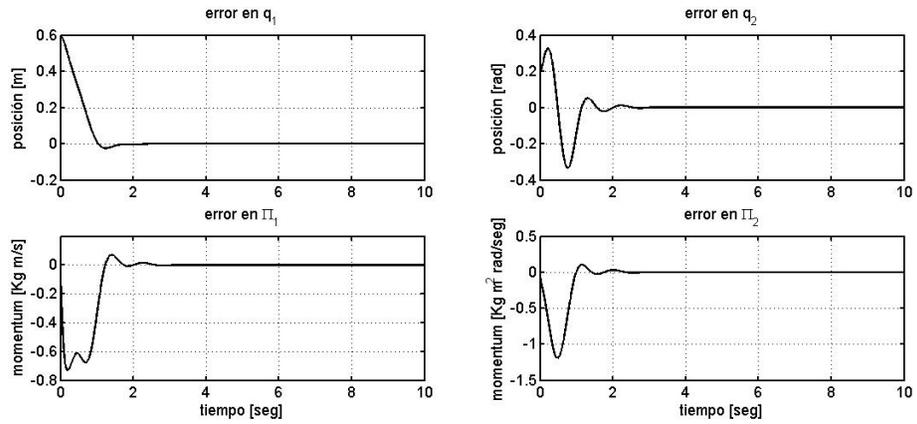
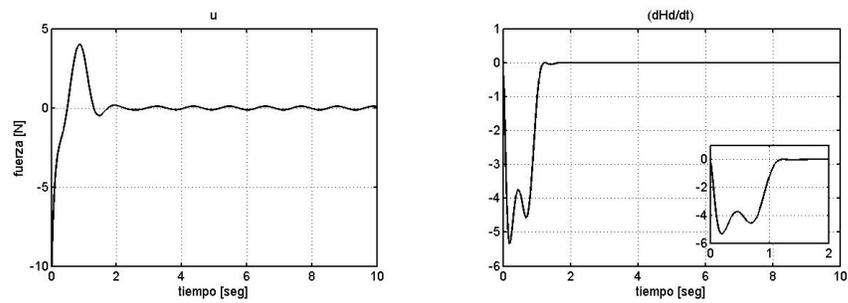


Figura 4.13: Errores

Figura 4.14: Señal de control y  $\dot{H}_d$

## Capítulo 5

# Conclusiones

A lo largo de este trabajo, se presenta una metodología clara y definida que ataca el problema de seguimiento de trayectorias utilizando IDA-PBC. Dicha metodología busca extender los resultados obtenidos para regulación, y aprovechar herramientas tales como son la linealización parcial por cambio de coordenadas, y los trabajos de simplificación de moldeo de energía para sistemas Hamiltonianos.

Se propone una forma de generar trayectorias realizables para el sistema, que además asegura la existencia de una  $V_d$  que es solución de la ecuación de emparejamiento, cumpliendo con todas las condiciones impuestas para lograr el seguimiento de trayectorias.

El algoritmo presentado, propone primero resolver la parte de la ecuación de emparejamiento que corresponde a la co-energía cinética del sistema, en donde se realiza el análisis para dos casos particulares de interés en lo referente a la co-energía cinética del sistema: matriz de inercias constante y sistemas subactuados de dos grados de libertad, cuya matriz de inercias únicamente depende de la coordenada subactuada. Posteriormente se resuelve la parte de la ecuación de emparejamiento correspondiente a la energía potencial del sistema, en donde nuevamente se presentan dos casos: sistemas cuya energía potencial tiene derivadas parciales (términos gravitacionales) no lineales, y sistemas cuyos términos gravitacionales son lineales.

Durante el desarrollo del trabajo se observa que los sistemas cuya energía potencial tiene derivadas parciales no lineales, presentan en lazo cerrado una función de almacenamiento dependiente del error y del estado deseado. Razón por la cual, para asegurar la estabilidad de estos sistemas, es necesario que el estado deseado sea acotado.

Finalmente, se ilustra la metodología a través de cuatro casos de estudio que cumplen con las características antes descritas. El primero de ellos es un sistema de dos masas unidas mediante un resorte, este sistema presenta término gravitacionales lineales y matriz de inercias constantes, siendo un ejemplo académico que pretende mostrar la aplicación de la metodología propuesta. El segundo caso de estudio es el de un motor síncrono de imán permanente con el cual se desea relacionar la teoría desarrollada con un caso práctico. Posteriormente, se exhibe un péndulo giroscópico, el cual presenta términos gravitacionales no lineales y matriz de inercias constante. Finalmente, se resuelve el caso de una grúa, en donde se utiliza la linealización parcial vía cambio de coordenadas para realizar el seguimiento de trayectorias. Todos los casos de estudio son simulados con el fin de mostrar los resultados obtenidos.

# Bibliografía

- [1] Kenji Fujimoto, Kazunori Sakurama, and Toshiharu Sugie. Trajectory tracking control of port-controlled hamiltonian systems via generalized canonical transformations. *Automatica*, 39(12):2059–2069, 2003.
- [2] Kenji Fujimoto and Toshiharu Sugie. Canonical transformation and stabilization of generalized hamiltonian systems. *Systems & Control Letters*, 42(3):217–227, 2001.
- [3] F Gomez-Estern, Romeo Ortega, Francisco R Rubio, and Javier Aracil. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via total energy shaping. In *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 2, pages 1137–1143. IEEE, 2001.
- [4] Petros A Ioannou and Jing Sun. *Robust adaptive control*. DoverPublications. com, 2012.
- [5] Hassan K Khalil and JW Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, 2002.
- [6] Romeo Ortega and Eloisa Garcia-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of Control*, 10(5):432–450, 2004.
- [7] Romeo Ortega, Zhitao Liu, and Hongye Su. Control via interconnection and damping assignment of linear time-invariant systems: a tutorial. *International Journal of Control*, 85(5):603–611, 2012.
- [8] Romeo Ortega, Mark W Spong, Fabio Gómez-Estern, and Guido Blankenstein. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment.

- Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(8):1218–1233, 2002.
- [9] Jose Guadalupe Romero, Alejandro Donaire, and Romeo Ortega. Robustifying energy shaping control of mechanical systems. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 4424–4429. IEEE, 2012.
- [10] Jose Guadalupe Romero, Ioannis Sarras, and Romeo Ortega. A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback. In *American Control Conference (ACC), 2013*, pages 4969–4974. IEEE, 2013.
- [11] Naomi B. Romero Mata. Control Basado En Pasividad Para Seguimiento De Trayectorias. Master’s thesis, FI UNAM, México, 2011.
- [12] Nicolas Rouche, Patrick Habets, Michel Laloy, and Aleksandr Michajlovič Ljapunov. *Stability theory by Liapunov’s direct method*. Springer-Verlag New York, 1977.
- [13] Arjan van der Schaft and AJ Schaft. *L2-Gain and Passivity in Nonlinear Control*. Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- [14] D Shah, G Espinosa-Pérez, R Ortega, and M Hilairret. An asymptotically stable sensorless speed controller for non-salient permanent magnet synchronous motors. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012.
- [15] Rakesh Singhal, Rupesh Patayane, and Ravi Banavar. Tracking a trajectory for a gantry crane: Comparison between ida-pbc and direct lyapunov approach. In *Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on*, pages 1788–1793. IEEE, 2006.
- [16] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall New Jersey, 1991.
- [17] Mark W Spong. Remarks on robot dynamics: canonical transformations and riemannian geometry. In *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference on*, pages 554–559. IEEE, 1992.

- [18] Aneesh Venkatraman, Romeo Ortega, Ioannis Sarras, and Arjan van der Schaft. Speed observation and position feedback stabilization of partially linearizable mechanical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(5):1059–1074, 2010.
- [19] Mathukumalli Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*, volume 42. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [20] Giuseppe Viola, Romeo Ortega, Ravi Banavar, José Ángel Acosta, and Alessandro Astolfi. Total energy shaping control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(6):1093–1099, 2007.