

# Índice

INTRODUCCIÓN.....	4
1.1 Antecedentes.....	4
CONSIDERACIONES DE MECANICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS.....	8
1.1 Introducción.....	8
1.2 Hipótesis de los esfuerzos efectivos.....	9
1.3 Postulados Fundamentales.....	10
1.4 Postulado de independencia del sistema de referencia.....	12
1.5 Materiales simples.....	13
1.6 Restricciones impuestas por simetrías del material.....	17
MODELOS CONSTITUTIVOS EN LA GEOTECNIA.....	19
2.1 Introducción.....	19
2.2 Modelos plásticos.....	21
3.2.1 Modelos de Tresca y von Mises.....	26
3.2.2 Modelo de Mohr-Coulomb.....	28
2.2.3 Modelo de Mroz Prévost.....	29
2.2.4 Modelo de Dafalias.....	35
2.3 Modelos del estado crítico.....	40
2.3.1 La teoría del estado crítico.....	40
2.3.3 Modelo de Pender.....	48
2.3.4 Modelo de Sandler.....	54
2.4 Modelos Endocrónicos.....	57
2.4.1 La teoría endocrónica.....	57
2.4.2 Modelo de Valanis.....	58
2.4.3 Modelo de Bazant.....	63
2.5. Modelos Hipoelásticos.....	67
2.5.1 Teoría hipoelástica.....	68
2.5.2 Modelo de Kondner-Duncan.....	71
2.5.3 Modelo Octolineal.....	74

DEFORMABILIDAD DE LOS SUELOS .....	81
3.1 Introducción.....	81
3.2 Teoría de la consolidación de Terzaghi.....	84
3.3 Teoría de consolidación para materiales que exhiben el fenómeno plasto-viscoso intergranular. (Consolidación Secundaria).....	104
3.3.1 Antecedentes.....	104
3.3.2 Consideraciones Sobre la Estructura del suelo.....	109
3.3.3 Consideraciones Reológicas.....	114
CALCULO DE DEFORMACIONES EN ARCILLAS SENSITIVAS.....	123
4.1 Introducción.....	123
4.2 Ecuación general de compresibilidad.....	124
4.2.1 Consideraciones básicas.....	125
4.2.2 Ecuación general.....	126
4.3 Características de las arcillas sensitivas .....	127
4.3.1 Expresiones para la estimación de la presión crítica en arcillas sensitivas.....	128
4.4 Deformaciones .....	130
4.4.1 deformaciones a corto plazo en arcillas sensitivas.....	130
4.4.2 deformaciones a largo plazo en arcillas sensitivas.....	131
4.4.2.1 Ecuación para la Consolidación Primaria.....	132
4.4.2.2 Ecuación para la Consolidación Secundaria.....	132
4.5 Cálculo de Asentamiento de un cajón de cimentación .....	133
4.6 Comparación del Cálculo de Asentamiento de un cajón de cimentación mediante el programa de elemento finito Plaxis.....	135
CONCLUSIONES.....	143
REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA.....	146

**ECUACIONES CONSTITUTIVAS PARA EL  
CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN  
ARCILLAS SENSITIVAS**

# INTRODUCCIÓN.

## 1.1 Antecedentes.

Cuando las partículas de arcilla se sedimentan en cuerpos de agua salada, se presenta el fenómeno de floculación en el suelo, lo que da lugar a que se desarrolle cierta viscosidad intergranular (pegamento) entre las partículas. Este vínculo no suele ser muy fuerte, por lo que en ingeniería de cimentaciones ocurre que si el incremento de esfuerzos por una obra de ingeniería no rompe esta liga entre granos, el asentamiento de dicha obra será por lo general pequeño, mientras que si dicho incremento es alto, se destruye el vínculo entre partículas, por tanto, el hundimiento de la obra puede llegar a ser muy alto, del orden de varias decenas de centímetros.

Por otra parte, si la unión entre las partículas es débil (lo que ocurre frecuentemente con arcillas sensitivas), las partículas resbalan entre sí, es decir en su comportamiento esfuerzo-deformación se observan fenómenos de alta plasticidad y viscosidad que tienen que ser tomados en cuenta cuidadosamente, lo que conduce a que, además de la compresión por consolidación primaria, ocurra una compresión por consolidación secundaria. Es importante destacar que la consolidación secundaria se puede estimar en forma aproximada suponiendo que la unión va disminuyendo con el tiempo. También es importante determinar la magnitud de la presión que destruye el pegamento de las partículas, denominada presión crítica (Zeevaert, 1973).

Los suelos cohesivos totalmente saturados los podemos dividir en arcillas no sensitivas y en arcillas sensitivas. Las primeras se forman en lagos de agua dulce; debido a las fuerzas de repulsión entre las partículas éstas configuran una estructura donde los granos no se unen entre sí, constituyendo lo que se dice una estructura "dispersa" por lo tanto en arcilla no sensitivas el pegamento entre partículas es pequeño o nulo.

Por el contrario, las arcillas sensitivas se forman en cuerpos de agua salada, y por el contenido de sales en el fluido, los cationes del medio contrarrestan las cargas eléctricas que obran en las superficies de las partículas, lo que se ocasiona que estas se peguen entre sí mediante fuerzas eléctricas, dando lugar a una estructura floculenta o de castillo de naipes.

Por otra parte los ingenieros han subdividido el problema general de los suelos en dos grandes categorías:

- a) Determinación de los desplazamientos. y
- b) Determinación de las condiciones de falla.

Esta subdivisión artificial, aunque simplificadora, trae consigo muchas dificultades derivadas de la interrelación que existe entre ambos problemas.

Por muchos años, y en gran medida aún en la actualidad, una parte importante del desarrollo teórico de mecánica de suelos ha consistido en la obtención de soluciones, dentro de los límites de la elasticidad lineal clásica, de problemas cuya complejidad geométrica ha sido creciente. Además, para condiciones de falla, se desarrollaron métodos para analizar problemas de plasticidad aplicada a materiales con las propiedades de los suelos idealizados.

Lo anterior había reducido las tareas de los ingenieros de suelos a la de buscar alguna idealización de su problema real en forma tal que correspondiera a alguno cuya solución fuera conocida, y a obtener propiedades lineales o características de falla de los suelos para insertarlas en sus soluciones analíticas.

Debido a la complejidad de sus cálculos en el caso de un sólido linealmente elástico, era obvio que para materiales no lineales e hysteréticos resultara imposible lograr soluciones. Consecuentemente, los ingenieros de suelos no habían mostrado, hasta muy recientemente, interés por obtener las ecuaciones constitutivas correspondientes. En cambio desarrollaron un método para tomar en cuenta de manera aproximada las propiedades reales de los suelos, en el cual los esfuerzos en una región de suelo, debidos a una carga aplicada, se obtienen mediante la teoría elástica lineal; luego se recogen muestras de diversas partes de la zona que soporta la estructura objeto de estudio, a las que se les aplican esfuerzos iguales a los dados por la teoría elástica lineal. Se supone que los desplazamientos verticales medidos son los que ocurren en la situación real. Este método puede incurrir en errores importantes cuando la masa de suelo no se aproxima suficientemente a un medio seminfinito; por ejemplo, muros de contención, presas de tierra, etc.

Sin embargo desde hace mucho se reconoce que el comportamiento del suelo ni es linealmente elástico ni idealmente plástico, y que fenómenos tales como los asentamientos secundarios que contribuyen en forma sustancial a los asentamientos en estructuras soportadas por algunos suelos, no son tomados en cuenta cuando se supone comportamiento lineal de los suelos en consolidación. En la actualidad no hay razón para no considerar estos fenómenos, ya que el progreso en las computadoras, aunados al de métodos numéricos como el de elementos finitos, permiten el cálculo matemático de esta clase de problemas, por lo que las limitaciones que existen en el análisis se derivan de la falta de conocimientos sobre el comportamiento de los suelos en las diversas condiciones de esfuerzos. Como consecuencia, el interés en las ecuaciones constitutivas desarrollando métodos de prueba, para determinar con mayor precisión el comportamiento de los suelos, aunque todavía ha sido limitado y poco riguroso el uso que se ha hecho de los resultados de estas investigaciones en aplicaciones de campo. Es de esperarse que en los próximos años una gran parte de las investigaciones en mecánica de los suelos tenga por objeto ampliar el conocimiento de sus ecuaciones constitutivas.

La Tesis consta de 4 capítulos, además de la introducción; en el capítulo 1 se hacen consideraciones de mecánica de los medios continuos, a fin de ubicar el problema de las ecuaciones constitutivas en este marco general; en el capítulo 2 se muestra que desde el punto de vista teórico, el problema de las ecuaciones constitutivas estriba en desarrollar métodos para pasar en forma sistemática de clases de ecuaciones más amplias a otras más restringidas, sin eliminar las correspondientes al material o materiales que se consideren. Con base en ello, el estudio de las ecuaciones constitutivas se divide en:

- Comportamiento macroscópico real de los suelos
- Clasificación de tipos de comportamiento macroscópico.
- Selección y especialización de modelos reológicos.
- Desarrollo de criterios de tipo inductivo y causal para seleccionar modelos reológicos

Entre los estudios orientados a establecer criterios de tipo causal, destacan los que se ocupan de la estructura y comportamiento microscópico. Y los que intentan desarrollar métodos para incorporar esta información en las ecuaciones constitutivas.

El capítulo 3 consta de la deformabilidad de los suelos, dividiéndose éste en dos subcapítulos; escribiendo acerca de un tema muy conocido en la mecánica de suelos pero no por eso excluyente, éste es la teoría de Consolidación de Terzaghi, formando el primer subcapítulo, en el segundo subcapítulo se tratará de la teoría de consolidación secundaria o consolidación que exhiben el fenómeno plasto-viscoso intergranular.

En el capítulo 4 se determinaron las deformaciones por consolidación que se presentarían para un caso de un arcilla sensitiva, haciendo uso de una ecuación constitutiva propia del suelo, para esto se apoyo en la ecuación constitutiva propuesta por el M.I Agustín Deménegui; comparando los resultados de ésta teoría con los resultados desarrollados a partir de un análisis típico, apoyados en la teoría de la elasticidad, contra unos análisis numéricos con base en la herramienta del elemento finito.

Por último hacemos las conclusiones resultado de este trabajo.

# CONSIDERACIONES DE MECANICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS.

## 1.1 Introducción

Cuando el conocimiento de las propiedades esfuerzo-deformación de los suelos está orientado a llevar a cabo el análisis dinámico, estático y de las condiciones de falla de las estructuras en que participan, dicho análisis se formula en términos de la mecánica de los medios continuos. De acuerdo con esta teoría, el suelo se considera como medio continuo y sus propiedades esfuerzo-deformación se incorporan como ecuaciones constitutivas.

Se entiende por ecuación constitutiva una relación que permite determinar los esfuerzos cuando las deformaciones son conocidas o, inversamente, determinar las deformaciones cuando los esfuerzos son conocidos. El punto de vista adoptado en mecánica de los medios continuos en relación con las ecuaciones constitutivas es puramente fenomenológico; es decir, no interesa establecer un análisis a nivel atómico o microscópico de las causas que provocan los esfuerzos al producirse una deformación, sino tan solo conocer la magnitud y orientación de los esfuerzos debidos a las diferentes deformaciones posibles, lo cual habitualmente se logra

mediante ensayos experimentales de laboratorio que permiten ajustar los parámetros correspondientes a los diferentes tipos de ecuaciones constitutivas.

Estrictamente, desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos, los suelos deben de ser considerados como mezclas, no tanto porque sus componentes sólidos no sean homogéneos sino principalmente por la presencia de una fase líquida o gaseosa que ocupa los poros de su componente sólido. Aunque en mecánica de los medios continuos se ha desarrollado una teoría de mezclas, hasta ahora no se ha empleado en mecánica de suelos, porque está orientada a explicar los fenómenos que ocurren en mezclas químicas.

## 1.2 Hipótesis de los esfuerzos efectivos.

La carencia de una teoría de mezclas aplicable a mecánica de suelos, se suple habitualmente introduciendo los esfuerzos efectivos en los suelos.

Si  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos, entonces

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (1.2)$$

Es el tensor de esfuerzos efectivos, donde  $p$  es la presión de poro del fluido contenido en el suelo.

Una hipótesis básica en la formulación de las ecuaciones constitutivas de los suelos es la factibilidad de desacoplar las relaciones de esfuerzo-deformación de la estructura sólida respecto a la del fluido cuando las mismas se formulan en términos de los esfuerzos efectivos. Esta hipótesis se enuncia en forma más precisa al decir que los esfuerzos efectivos en el sólido quedan totalmente determinados por las deformaciones del sólido y, recíprocamente, los esfuerzos efectivos determinan las deformaciones del sólido. Evidentemente los esfuerzos efectivos pueden depender en general no solo de las deformaciones de los sólidos, sino también de la presión de poro; sin embargo hay clases de suelos que cumplen de manera satisfactoria esta hipótesis, en cualquier caso hay que tener en cuenta las limitaciones que implica, especialmente en la interpretación del trabajo experimental, ya que con frecuencia su violación puede aparecer como efecto anómalo difícil de atribuírselo a otras causas.

Cuando se adopta este punto de vista, el flujo del fluido se trata por separado. El hecho de que las ecuaciones constitutivas del sólido y del líquido se encuentren

desacopladas, no implica que las ecuaciones de movimiento del sólido y del líquido se traten en forma separada. En efecto, las teorías habituales de consolidación, en particular la de Biot (1941,1955) adoptan dicho punto de vista, a pesar de lo cual las ecuaciones de movimiento para el sólido y el fluido están acopladas. El desarrollo de cualquier teoría de consolidación incluye necesariamente tres aspectos:

- 1) La suposición de algunas propiedades de los sólidos porosos.
- 2) La suposición de algunas propiedades para los fluidos que llenan los poros del sólido.
- 3) La suposición de algunas relaciones que permitan determinar las fuerzas de interacción entre el fluido y el sólido.

La manera de formular la suposición a la que se refiere el punto 1 se logra, como ya se explicó, introduciendo los esfuerzos efectivos. En cuanto a la suposición 2, el procedimiento es similar, ya que se utiliza la ecuación de estado respectiva. Finalmente en la suposición 3, la interacción entre el fluido y el sólido se define habitualmente incorporando la ley de Darcy, aunque es posible postular una gran variedad de relaciones y, por lo mismo, las que hasta ahora representan en realidad sola una parte de las posibles.

Una vez efectuado el desacoplamiento de las ecuaciones constitutivas de los componentes principales de los suelos, se ha dedicado la mayor parte de la investigación a establecer las ecuaciones del material poroso. La forma de proceder parece estar ampliamente justificada, pues para casi todos los fines de la ingeniería la ley de Darcy es satisfactoria. Además una investigación más amplia sobre la interacción material poroso-fluido necesariamente deberá apoyarse en un mejor conocimiento del comportamiento del material poroso.

### **1.3 Postulados Fundamentales.**

Cuando se pasa a la formulación de las relaciones esfuerzo-deformación, es necesario precisar el marco de referencia en el cual las mismas deben establecerse, ya que, de otra manera, se caería en una situación demasiado indefinida que conduciría a un empleo ineficaz de los resultados experimentales, y a la posible introducción de inconsistencias en las relaciones funcionales correspondientes. Las teorías modernas de las ecuaciones constitutivas son la base para la formulación de las relaciones esfuerzo-deformación; al mismo tiempo restringen las formas posibles de la dependencia funcional entre las variables constitutivas

independientes, ya que exigen que las mismas satisfagan ciertos postulados fundamentales.

Proceder en forma sistemática, partiendo de modelos generales para restringirlos progresivamente con base en las propiedades específicas de los materiales considerados tiene importancia, ya que de esta manera se evita caer en modelos demasiados restringidos, incapaces de incorporar propiedades básicas de los suelos en estudio. En general, las ecuaciones constitutivas de un material pueden depender de la Temperatura (o alternativamente de la entropía), pero dentro de una teoría puramente mecánica es factible limitar las consideraciones a procesos isotérmicos (o alternativamente procesos isoentrópicos), lo cual es aceptable cuando la respuesta mecánica está poco influenciada por los cambios de temperatura (o en la entropía), que ocurren durante el proceso. En mecánica de suelos con frecuencia este es el caso, de ahí que este capítulo, se restrinja a fenómenos puramente mecánicos.

En mecánica de los medios continuos se adoptan tres postulados fundamentales para cualquier ecuación constitutiva de un fenómeno puramente mecánico.

1. **Principio del determinismo del esfuerzo.** El esfuerzo en cualquier punto de un cuerpo está determinado por la historia de movimiento del cuerpo.
2. **Principio de acción local.** El esfuerzo en cualquier partícula  $x$  es independiente de cualquier movimiento fuera de cualquier vecindad de  $x$ .
3. **Principio de independencia del sistema de referencia (Condición de objetividad).** Las ecuaciones constitutivas deben de ser invariantes bajo cambios del sistema de referencia.

Los dos primeros postulados parecen ser suficientemente claros para una teoría puramente mecánica. Casi todas las teorías clásicas satisfacen el primer postulado, ya que en ellas el esfuerzo en un punto está determinado por las deformaciones que ha sufrido el material en el pasado (o que sufra en el presente); por ejemplo la teoría clásica de la elasticidad o la de un fluido newtoniano. Los llamados materiales viscoelásticos y los plásticos también lo satisfacen. El principio de acción local excluye la posibilidad de incorporar acciones a distancias en las relaciones esfuerzo-deformación. Las implicaciones matemáticas del principio de independencia del sistema de referencia no son tan obvias, aunque corresponde a cualquier planteamiento de formulación en mecánica.

## 1.4 Postulado de independencia del sistema de referencia.

Tener una idea más clara del tercer postulado implicará que se tenga que introducir una notación adecuada. De esta manera dado un sistema de referencia, sea  $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t)$ , un movimiento del cuerpo, de una manera más específica, sea  $D$  la región ocupada por un cuerpo en el tiempo  $t=0$ , y  $\underline{X}$  las coordenadas de una partícula de ese cuerpo en dicho tiempo, entonces  $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t)$ , será el vector de posición de dicha partícula en el tiempo  $t$ ; además, sea  $\underline{\underline{T}}(\underline{X}, t)$ , el tensor de esfuerzos correspondiente a esa partícula en el mismo instante. A una pareja de funciones tal como  $\{\underline{x}, \underline{\underline{T}}\}$ , donde  $\underline{\underline{T}}$  es un tensor simétrico de segundo orden, se le llama proceso dinámico. La idea es que en general el movimiento de un medio continuo esta caracterizado por la posiciones de sus partículas en cada tiempo  $t$  y el tensor de esfuerzos correspondiente. En general dado un movimiento  $\underline{x}$  los esfuerzos  $\underline{\underline{T}}$  correspondientes dependerán de las propiedades esfuerzo deformación del material; por ello las ecuaciones constitutivas de éste quedan definidas cuando se especifican la colección de parejas (es decir, de procesos dinámicos) que pueden corresponder a deformaciones reales (o sea movimientos) del material. Dichas parejas se llaman procesos dinámicos admisibles para el material considerado. Obsérvese que los procesos dinámicos están limitados únicamente por las propiedades esfuerzo-deformación del material, ya que las ecuaciones de movimiento no imponen ninguna restricción, porque si  $\underline{x}$  y  $\underline{\underline{T}}$  son suficientemente derivables es posible siempre introducir fuerzas de cuerpo para satisfacer las ecuaciones de movimiento (estas fuerzas pueden definirse despejándolas de las ecuaciones de movimiento e incorporándolas en los términos restantes).

Hasta aquí se ha dejado gran libertad en la forma de definir las parejas de procesos dinámicos admisibles. Es claro, sin embargo, que hay restricciones que las mismas deben de corresponder a materiales reales. Una de ellas es el principio de independencia del sistema de referencia.

Sean  $\{\underline{x}, \underline{\underline{T}}\}$  y  $\{\underline{x}^*, \underline{\underline{T}}^*\}$  dos procesos dinámicos, se dice que  $\{\underline{x}, \underline{\underline{T}}\}$  es equivalente a  $\{\underline{x}^*, \underline{\underline{T}}^*\}$  si están relacionados por ecuaciones de la forma:

$$\underline{x}^*(\underline{X}, t^*) = \underline{c}(t) + \underline{Q}(t)\underline{x}(\underline{X}, t) \quad (1.4.1)$$

$$\underline{T}^*(\underline{X}, t^*) = \underline{Q}(t)\underline{T}(\underline{X}, t)\underline{Q}(t)^T \quad (1.4.2)$$

$$t^* = t - a \quad (1.4.3)$$

Donde  $\underline{c}(t)$  y  $\underline{Q}(t)$  son funciones del tiempo cuyos valores son vectores y tensores ortogonales, respectivamente, y  $a$  es un número real. El principio de independencia del sistema de referencia puede ahora enunciarse como:

Si el proceso dinámico  $\{\underline{x}, \underline{T}\}$  es admisible, entonces cualquier otro proceso dinámico  $\{\underline{x}^*, \underline{T}^*\}$  equivalente también lo es.

### 1.5 Materiales simples.

Dada una partícula  $\underline{X}$  fija, en las ecuaciones anteriores, se puede elegir:

$$\underline{Q}(t) \equiv \underline{1}; \quad a = 0; \quad \underline{c}(t) \equiv -\underline{x}(\underline{X}, t)$$

Para obtener:

$$\underline{x}^*(\underline{Z}, t) = \underline{x}(\underline{Z}, t) - \underline{x}(\underline{X}, t)$$

$$\underline{T}^*(\underline{Z}, t) = \underline{T}(\underline{Z}, t)$$

Para cualquier  $\underline{Z}$ . Estas ecuaciones hacen ver que los esfuerzos solo dependen de los desplazamientos relativos. Como el principio de acción local establece que los esfuerzos en un punto son independientes del movimiento fuera de una vecindad arbitrariamente pequeña de ese punto, se ocurre aproximar

$$\underline{x}(\underline{Z}, t) - \underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{F}(\underline{X}, t) * d\underline{x} \quad (1.5)$$

Donde  $\underline{F}$  es el tensor de segundo orden formado por los gradientes de los desplazamientos. Es decir en términos de componentes

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} ; i, j = 1, 2, 3$$

Consecuentemente, es plausible restringir la atención a ecuaciones constitutivas para los cuales los esfuerzos  $\underline{T}(\underline{X}, t)$ , en un punto, está determinado por la historia  $\underline{F}(\underline{X}, t)$ , ( $\tau \leq t$ ) de los gradientes de deformación. A esa clase de materiales se le llama materiales simples. Es decir:

Un material simple es aquel en el cual el tensor de esfuerzos  $\underline{T}(\underline{X}, t)$ , en cada punto  $\underline{x}$  es una funcional de los gradientes  $\underline{F}(\underline{X}, t)$ , ( $\tau \leq t$ ), de las deformaciones en ese punto.

Obsérvese que  $\underline{\tau}$  depende de  $\underline{F}$  para todo tiempo presente o pasado, pero no los valores futuros como lo requiere el principio del determinismo. Además una propiedad importante para fines experimentales, implicada por la definición de material simple, es que para determinar las relaciones esfuerzo-deformación basta considerar deformaciones homogéneas en los ensayos del material.

La mayor parte de las teorías desarrolladas hasta ahora corresponden a materiales simples, que son un caso de materiales no polares, es decir aquellos en los que no se pueden presentar pares distribuidos; estos fueron introducidos en mecánica de los medios continuos por Voigt y Cosserats. Y en 1960, Truesdell y Toupin presentaron una discusión sobre los mismos. Clases más generales de materiales multipolares han sido también tratados; al respecto Jauzemis en 1967. Sin embargo, los suelos pueden ser descritos adecuadamente como materiales simples.

Se ha dicho que toda ecuación constitutiva debe de satisfacer el principio de independencia del sistema de referencia presentado en el capítulo 1.4. Debido a su importancia, es conveniente ver las implicaciones de este principio en el caso general de un material simple, y especializar el resultado para cuando el material además es elástico.

Con este propósito conviene hacer notar que el gradiente de las deformaciones  $\underline{F}$ , por el teorema de descomposición polar (Noll, 1958; Truesdell y Noll, 1965; Malvern, 1969) puede escribirse como

$$\underline{F} = \underline{R} \bullet \underline{U} = \underline{V} \bullet \underline{R} \tag{1.5.1}$$

Donde  $\underline{\underline{R}}$  es una rotación; es decir

$$\underline{\underline{R}} \bullet \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{1}} \quad ; \quad \underline{\underline{R}} \bullet \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{1}} \quad (1.5.2)$$

O en términos de sus componentes

$$R_{im} R_{jm} = \delta_{ij} \text{ y } R_{mi} R_{mj} = \delta_{ij} \quad (1.5.3)$$

Mientras que  $\underline{\underline{U}}$  y  $\underline{\underline{V}}$  son tensores simétricos y positivos definidos. A  $\underline{\underline{U}}$  se le conoce como tensor de dilatación izquierdo y a  $\underline{\underline{V}}$  como tensor de dilatación derecho. Nótese que  $\underline{\underline{U}}$  representa una dilatación o contracción local en tres direcciones perpendiculares y similarmente  $\underline{\underline{V}}$ .

La ecuación 1.5, tiene la interpretación de que en la vecindad de un punto  $\underline{\underline{X}}$ ,

la deformación puede considerarse como la aplicación sucesiva de:

- 1) Una dilatación o contracción, en tres direcciones mutuamente perpendiculares, dada por  $\underline{\underline{U}}$ .
- 2) Una rotación de cuerpo rígido, dado por  $\underline{\underline{R}}$ .
- 3) Una traslación a  $\underline{\underline{x}}(\underline{\underline{X}}, t)$ .

Alternativamente:

- 1) Una traslación a  $\underline{\underline{x}}(\underline{\underline{X}}, t)$ .
- 2) Una rotación  $\underline{\underline{R}}$ .
- 3) Una dilatación o contracción, en tres direcciones mutuamente perpendiculares dada por  $\underline{\underline{V}}$ .

Los tensores  $\underline{\underline{R}}$ ,  $\underline{\underline{U}}$  y  $\underline{\underline{V}}$  están dados en términos de los gradientes de deformación por las ecuaciones:

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{C}}^{\frac{1}{2}} \quad (1.5.4)$$

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{B}}^{\frac{1}{2}} \quad (1.5.5)$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \bullet \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{V}}^{-1} \bullet \underline{\underline{F}} \quad (1.5.6)$$

Donde:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \bullet \underline{\underline{F}}^T \quad (1.5.7)$$

Y

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \bullet \underline{\underline{F}} \quad (1.5.8)$$

Obsérvese que  $\underline{\underline{B}}$  y  $\underline{\underline{C}}$  son matrices positivas y simétricas, por lo que tienen raíz cuadrada. Efectivamente, en este caso todos los valores propios son positivos y el tensor raíz cuadrada posee la misma base de vectores propios, con los valores propios iguales a la raíz cuadrada del tensor original.

Mediante la notación anterior es factible establecer la forma que adoptan las relaciones constitutivas para un material. Con el punto material  $\underline{\underline{X}}$  fijo conviene definir para cada  $t$  una función  $\underline{\underline{F}}^T$  que esta defina en el intervalo  $0 \leq s < \infty$ , la que está dada por:

$$\underline{\underline{F}}^T(s) = \underline{\underline{F}}(t-s) \quad (1.5.9)$$

La función  $\underline{\underline{F}}^T(s)$  es la historia de los gradientes de la deformación hasta el tiempo  $t$ . Entonces de acuerdo con el principio del determinismo el esfuerzo en ese punto es una funcional de dicha historia; es decir:

$$\tau(t) = \zeta_{s=0}^{\infty} \{ \underline{\underline{F}}^T(s) \} \quad (1.6)$$

La notación utilizada en esta ecuación quiere decir que el segundo miembro depende de todos los valores de  $\underline{\underline{F}}^T$  para  $0 \leq s < \infty$ .

El caso elástico está contenido en la ecuación (1.6); cuando un material simple es además elástico, el esfuerzo depende del valor presente de los gradientes de deformación; de acuerdo con la ecuación (1.5.9), el valor presente esta dado por

$\underline{\underline{F}}^T(0)$  y la funcional  $\zeta$  se reduce a una función que se denotara como  $\underline{\underline{g}}$ .

Consecuentemente la ecuación (1.6) puede escribirse como:

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{F}}^T(0)) = \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{F}}(t)) \quad (1.6.1)$$

Por simplicidad, en lo que sigue se omitirán los límites  $s=0$  e  $\infty$  empleado en la ecuación 1.6. Se puede probar (Truesdell y Noll, 1965) que la ecuación constitutiva dada por la ecuación 1.6. Satisface el principio de independencia del sistema de referencia si y solo si.

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \underline{\underline{R}}(t) \bullet \zeta\{\underline{\underline{U}}^t(s)\} \bullet \underline{\underline{R}}(t)^T \quad (1.6.2)$$

Donde  $\underline{\underline{U}}^t(s)$  es la función asociada a  $\underline{\underline{U}}$  en forma análoga a como se asocio  $\underline{\underline{F}}^t(s)$  a la función  $\underline{\underline{F}}$  por medio de la ecuación (1.5.9). Consecuentemente la ecuación (1.6.2) es la ecuación constitutiva más general de un material simple.

La ecuación (1.6.2) implica que solo el valor presente de la rotación  $\underline{\underline{R}}(t)$  interviene en la ecuación constitutiva, y que los valores pasados de la misma son irrelevantes. Consecuentemente, el esfuerzo que se supuso inicialmente dependía de la historia de gradientes de la deformación, solo puede depender de la historia del tensor de dilatación, el cual por ser simétrico tiene menos grados de libertad.

Para el caso elástico dado por la ecuación (1.6.1), esta implica que:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{R}} \bullet \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{U}}) \bullet \underline{\underline{R}}^T \quad (1.6.3)$$

Donde  $\underline{\underline{T}}$  representa el tensor de esfuerzos, y todas las cantidades que intervienen se refieren a valores presentes

## 1.6 Restricciones impuestas por simetrías del material.

En forma semejante como se ha visto en el inciso anterior, que la condición de independencia del sistema de referencia limita las formas que las ecuaciones constitutivas pueden tener, así también las simetrías de un material, cuando existen, imponen restricciones que reducen las clases de ecuaciones constitutivas admisibles. La ventaja que hay en el empleo de los datos experimentales son evidentes; por ejemplo, en el caso de un material elástico lineal la isotropía, que es la máxima simetría que un material puede exhibir, reduce a dos el número de parámetros que es necesario determinar experimentalmente para definir completamente la ecuación constitutiva respectiva.

En el caso de materiales elásticos no lineales, o con mayor generalidad de materiales simples, las ecuaciones constitutivas, aun en presencia de este tipo de simetrías, dependen de mayor número de parámetros, pero en cualquier caso

introducen limitaciones muy importantes en sus formas admisibles, que facilitan la determinación experimental de las ecuaciones constitutivas.

Los métodos modernos para determinar las restricciones son de dos clases:

- a) Los desarrollados por R. S. Rivlin y sus asociados.
- b) Los desarrollados por W. Noll y sus asociados.

El método que inicio Noll (1958) se presenta en forma extensa en las exposiciones de Truesdell y Noll (1965), y tiene el método de ser de gran generalidad y elegancia. Los métodos empleados en el trabajo de Rivlin y sus asociados, representan herramientas poderosas para los investigadores que trabajan en la obtención de nuevas ecuaciones constitutivas para situaciones específicas. Desgraciadamente no se dispone de una exposición completa de estos métodos, aunque Rivlin (1966) ha publicado una síntesis breve.

Como un ejemplo, y por su importancia intrínseca, conviene mencionar que para materiales elásticos (no lineales) e isotrópicos, Rivlin y Ericksen (1955) han dado la ecuación constitutiva más general.

$$T = f_0 I + f_1 B + f_2 B^2 \quad (2.6.1)$$

Donde  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  son funciones de las invariantes principales de deformación, las cuales se pueden tomar como valores propios de los tensores de dilatación. Consecuentemente, la forma tensorial de la ecuación constitutiva está completamente determinada y solamente es necesario las tres funciones escalares  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$ .

# MODELOS CONSTITUTIVOS EN LA GEOTECNIA.

## 2.1 Introducción

Sin duda alguna, a veces nos ponemos a pensar cuando resolvemos un problema de mecánica de suelos hasta donde es cierto el utilizar ecuaciones dentro del rango elástico y si éstas realmente nos están definiendo el comportamiento real del suelo ante las sollicitaciones que le está induciendo una obra; Por otra parte ante preguntas recurrentes como el medio es semiinfinito, nos pone a reflexionar que no todas las obras cumplen con este requisito por lo que nos indica, que debemos tomar ecuaciones que de cierta forma nos describa el comportamiento del suelo, más apegado a la realidad.

Para esto es necesario tocar el tema de los modelos constitutivos en la geotecnia, para darnos una idea de las posibilidades de solución de mecánica de suelos.

Cabe indicar que cada modelo es clasificado como: modelo plástico, modelo del estado crítico, modelo endocrino o hipoelástico.

Se presentarán las bases teóricas de cada modelo, así como mencionaremos el tipo de sollicitación que son capaces de simular, así se mostrarán algunas de las comparaciones teóricas experimentales de cada modelo, esto es con el fin de que se formen una idea de los resultados y grado de precisión que se debe esperar de cada uno de estos modelos, aclarando que se obtendrán resultados similares o lo más aproximado posible para cada modelo, siempre y cuando se utilicen materiales con las sollicitaciones similares de cada modelo correspondiente.

Un modelo constitutivo ideal sería aquel que reunieran tanto las características mecánicas del suelo como las características físico-químicas del suelo y que estuviera por tanto basado el modelo con estas características. De esta forma el modelo sería capaz de representar el comportamiento de cualquier material; sin embargo, las últimas investigaciones no permiten aún enfrentar los retos que exige estos modelos. Por este hecho es que los modelos se basan en modelos de carácter mecánico es decir modelos en base al comportamiento macroscópico del material. Y por tanto, son generalmente validos únicamente para cierto tipo de material estudiado y para cierto tipo de sollicitaciones.

Por lo escrito anteriormente deducimos que para atacar el modelo constitutivo de un material, es necesario hacerlo desde el punto de vista microscópico y macroscópico, ya que estas dos formas de proceder, proporcionarían los elementos necesarios para describir el comportamiento del material. La idea básica es entender la física básica del material para después formular matemáticamente el comportamiento del material estudiado.

Actualmente es conveniente utilizar modelos constitutivos que empleen modelos sencillos, que utilicen pocos parámetros, y que requieran tiempo de computo razonable; aunque por supuesto estarán restringidos a cierto clase de materiales y para cierto tipo de sollicitaciones. Tal es el caso de los modelos del estado crítico y gran parte de los modelos plásticos.

Esto no quiere decir que los modelos generalizados requieran abandonarse, ya que la evolución que tiene la tecnología, hará posible que se recurra a los modelos generales en un tiempo futuro.

## 2.2 Modelos plásticos.

La teoría del modelo plástico se idealiza a partir del estudio del comportamiento de los metales, la curva típica de tal comportamiento se muestra en la figura 2.2.1

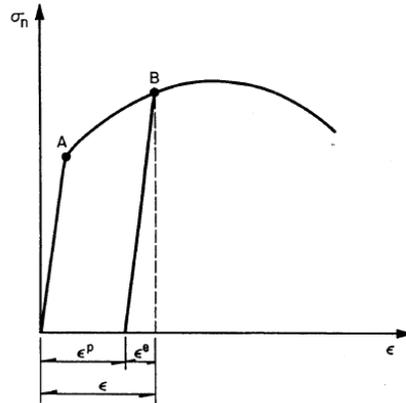


Fig. 2.2.1 Curva esfuerzo-deformación de un metal sujeto a tensión (Lade, P V, 1987)

Desde el origen hasta el punto A se comporta en forma elástica lineal. A partir del punto A como se observa cambia su deformación en forma plástica o permanente, por esta razón al punto A se le conoce como punto de fluencia. Observándose que para aumentar esta deformación del material es necesario un incremento del esfuerzo actuante, lo cual indica un endurecimiento plástico del material. Si en el punto B el material es descargado se observará una recuperación elástica del material para la cual esta sigue una trayectoria con la misma pendiente de la carga inicial. De acuerdo a lo anterior la deformación total está compuesta por una parte elástica y otra parte plástica.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.2.1)$$

Donde la parte elástica está dada por

$$\varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl} k_{kl} \quad (2.2.2)$$

Donde:

$E_{ijkl}$  es la matriz elástica.

Un aspecto importante de las deformaciones plásticas, es el hecho de que al ser irreversibles, su valor depende de la trayectoria completa de los esfuerzos aplicados.

El concepto de punto de fluencia puede generalizarse, de tal manera, que es posible considerar que en el espacio de esfuerzos, todo el conjunto de puntos de fluencia conforma una superficie llamada superficie de fluencia. Así dicha superficie establece la frontera entre el comportamiento puramente elástico, donde únicamente existen deformaciones reversibles, y el comportamiento plástico donde las deformaciones son irreversibles. La ecuación de dicha superficie puede expresarse como.

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.2.3)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  representa las seis coordenadas del estado de esfuerzos. Por otro lado, se considera que cualquier estado puede quedar dentro o sobre la superficie de fluencia pero no podrá hacerlo fuera de ella, de esta manera:

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (2.2.4)$$

A esta relación se le conoce como condición de consistencia. Esta condición trae como consecuencia que la superficie de falla puede ser considerada como la superficie de fluencia como se conoce comúnmente. Por otro lado si se requiere considerar el fenómeno de endurecimiento plástico de los materiales, entonces la superficie debe de cambiar de tamaño y/o de posición a la primera propiedad se le denomina endurecimiento isotrópico y a la segunda endurecimiento cinemático.

Hasta ahora se ha establecido que un modelo plástico necesita de:

- 1) La ecuación que establece la forma de las superficies de fluencia en el espacio de esfuerzos.
- 2) Las reglas de endurecimiento que establecen la mecánica de los cambios de tamaño o posición de las superficies de fluencia.

Para completar el modelo plástico, es necesario establecer alguna relación entre el estado de esfuerzos y la deformación plástica, para la cual se establece el concepto de flujo plástico, el cual está definido en forma similar al flujo líquido. De acuerdo a lo anterior, es posible definir un potencial plástico  $g(s_{ij})$  en cualquier punto de la superficie de fluencia, de tal manera, que la dirección del incremento del flujo esta dada por la dirección del gradiente máximo del potencial plástico en el punto donde el estado de esfuerzos hace contacto con él. Esto quiere decir que la

dirección del incremento de la deformación plástica será la perpendicular del potencial plástico en el punto de estados de esfuerzos, es decir

$$d\varepsilon^p_{ij} = \beta m_{ij} \quad (2.2.5)$$

Con

$$m_{ij} = \frac{\frac{\delta g}{\delta \sigma_{ij}}}{\left( \frac{\delta g}{\delta \sigma_{kl}} \cdot \frac{\delta g}{\delta \sigma_{kl}} \right)^{1/2}} \quad (2.2.6)$$

Siendo  $\beta$  un escalar positivo y  $m_{ij}$  el vector normal al potencial plástico. Sin embargo, dada la dificultad de establecer el valor de la función  $g$ , es común asimilarla con la superficie de la fluencia ya que esta condición asegura la unicidad y la estabilidad de la respuesta del modelo. En tal caso, se dice que la regla del flujo está asociada a la superficie de fluencia y, por tanto, el vector unitario normal a la superficie de fluencia está dado por

$$n_{ij} = \frac{\frac{\delta f}{\delta \sigma_{ij}}}{\left( \frac{\delta f}{\delta \sigma_{kl}} \cdot \frac{\delta f}{\delta \sigma_{kl}} \right)^{1/2}} \quad (2.2.7)$$

Por medio de ésta ecuación es posible establecer la dirección del incremento de la deformación plástica, pero falta establecer su magnitud. Para esto es necesario tomar los criterios de carga y descarga.

Se dice que el material se encuentra en carga cuando la dirección del incremento de esfuerzos apunta hacia afuera de la superficie de fluencia. Si apunta hacia adentro, se considerará que el material se encuentra en descarga. También se considera que entre ambos estados existe una condición intermedia conocida como carga neutra, que establece la condición de continuidad entre la carga y descarga. En el caso de la carga neutra, la dirección del incremento de esfuerzos es perpendicular al vector normal de la superficie de fluencia, es decir

$$n_{ij} d\sigma_{ij} = 0 \quad (2.2.8)$$

Por otro lado, en el caso de una carga neutra la magnitud de la deformación plástica también es nula, de tal manera que de acuerdo con la ecuación anterior puede plantearse la siguiente relación

$$\left(d\varepsilon^p_{ij} \cdot d\varepsilon^p_{ij}\right)^{1/2} = \frac{1}{H} n_{ij} d\sigma_{ij} \quad (2.2.9)$$

Donde H representa un parámetro de proporcionalidad, el cual se denomina módulo plástico y puede obtenerse a partir de algunos resultados experimentales.

Al utilizar las ecuaciones 2.2.7 y 2.2.9 se obtiene la siguiente expresión:

$$d\varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} d\sigma_{rs}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (2.2.10)$$

A partir de esta expresión y de conocer las condiciones en que se realiza el ensaye, es posible establecer el valor del incremento de la deformación plástica.

La regla del endurecimiento isotrópico del modelo puede introducirse en las ecuaciones al considerar que cuando se aplica un incremento del esfuerzo desviador  $dS_{ij}$ , el radio de la superficie de fluencia debe de crecer una cantidad  $dk$ , es decir

$$3S_{ij} dS_{ij} = 2kdk \quad (2.2.11)$$

Para el caso de endurecimiento cinemático es posible considerar el movimiento de la superficie de fluencia por medio del vector de posición  $a_{ij}$ , teniendo que

$$(S_{ij} - a_{ij}) dS_{ij} = (S_{ij} - a_{ij}) da_{ij} \quad (2.2.12)$$

Donde  $da_{ij}$  es el cambio de posición de la superficie de fluencia debido al incremento del esfuerzo desviador  $S_{ij}$ .

Hasta ahora se ha hecho referencia a una sola superficie de fluencia. Sin embargo, no es absoluto esto, lo cual hace valido a que exista más de una superficie y que cada una de ellas tenga sus propias propiedades o módulos plásticos. Si fuera este el caso el modelo se denominaría de superficies múltiples, las cuales pueden estar sujetas a las mismas reglas de endurecimiento isotrópico y/o cinemático.

Una vez establecidas las ecuaciones de las superficies de fluencia, de la regla de flujo y de las reglas de endurecimiento, es posible aplicar el modelo para simular la respuesta del suelo bajo ciertas condiciones de carga. Generalmente la trayectoria de sollicitación se introduce por pequeños incrementos y para cada incremento se calculan los nuevos módulos plásticos considerando el estado de esfuerzos del material y en tal caso el modelo se denomina incremental. Es común escribir las ecuaciones de un modelo plástico en función de los invariantes del tensor de esfuerzos; con el objetivo de que estas ecuaciones sean validas en cualquier sistema de referencia que se adopte (condición de objetividad). Cabe mencionar, que considerando que la forma de la superficie de fluencia no se ve afectada por el valor del esfuerzo medio ( $p=(s_1+s_2+s_3/3)$ ), entonces en su definición únicamente intervienen los esfuerzos desviadores cuyos invariantes no nulos son  $I_{2s}$  e  $I_{3s}$ , es decir

$$f(I_{2s}, I_{3s}) \quad (2.2.13)$$

Donde

$$I_{2s} = \frac{1}{2}(S_{ii}S_{ii} - S_{ij}S_{ij}) \text{ y } I_{3s} = \det(S_{ij}) \quad (2.2.14)$$

Y

$$S_{ij} = (\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) \quad (2.2.15)$$

La gran mayoría de los modelos constitutivos que han sido desarrollados para simular el comportamiento de los suelos están basados en la teoría de la plasticidad.

A continuación presentaremos los modelos plásticos más reconocidos.

Cabe indicar que la generalidad de estos modelos plásticos utilizan superficies de fluencia cuya expresión matemática es sencilla (Por ejemplo el círculo es el más utilizado), con el fin de simplificar las ecuaciones de los modelos constitutivos. Además emplean la regla de flujo asociado a pesar de que existen evidencias experimentales que indican que dicha regla no se cumple. Hasta que no se determine con precisión la forma de la superficie y de su potencial plástico del modelo plástico no es posible esperar buenos resultados (Wroth ref. 7). También es notorio declarar que los modelos plásticos presentan graves deficiencias al tratar de simular la anisotropía de los materiales.

### 3.2.1 Modelos de Tresca y von Mises

Estos modelos son utilizados para poder establecer el estado de esfuerzos que produce el flujo plástico en los metales, y es a partir de esta teoría que se han desarrollado los modelos plásticos para los suelos.

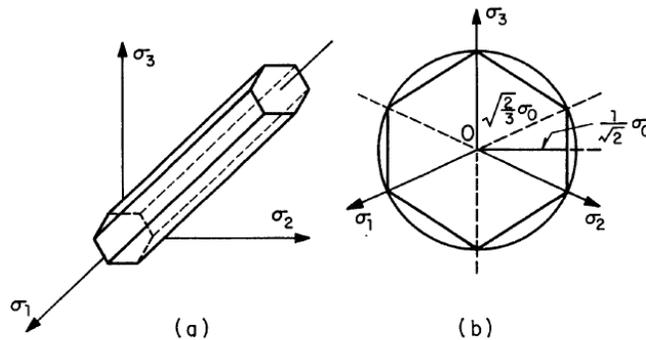
Empezando por Tresca, él dice que dicho flujo se obtiene cuando el esfuerzo cortante máximo aplicado sobre el material alcanza el valor crítico  $k$ , es decir

$$k = \text{máximo de} \begin{cases} \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| \\ \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| \\ \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \end{cases} \quad (2.2.16)$$

Ésta misma relación se puede expresar en el plano de esfuerzos desviadores como

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}k = \text{máximo de} \begin{cases} |S_1 - S_2| \\ |S_1 - S_3| \\ |S_2 - S_3| \end{cases} \quad (2.2.17)$$

De tal manera que su representación en el plano desviador es la de un hexágono, tal como lo muestra la figura 2.3.1 (b).



2.2.1.1 Criterio Plástico de Tresca (Viniestra Heberlein, 2011).

Su representación en el espacio de los esfuerzos principales es de un prisma hexagonal que tiene como eje la trisectriz tal como se señala en la figura 2.2.1.1 (a).

En términos de los invariantes del tensor desviador  $I_{2s}$  e  $I_{3s}$  esta superficie plástica puede expresarse como

$$4I_{3s}^2 - 27I_{2s}^3 - 36k^2I_{2s} + 96k^4I_{2s} - 64k^6 = 0 \quad (2.2.18)$$

El criterio Plástico de Von mises considera que la superficie es circular cuando se representa en el plano de los esfuerzos desviadores, y por tanto este criterio puede expresarse por medio de la ecuación

$$I_{2s} = k^2 \quad (2.2.19)$$

En el espacio de esfuerzos principales se representa por medio de un cilindro de radio  $k$  (fig. 2.2.1.2 (b))

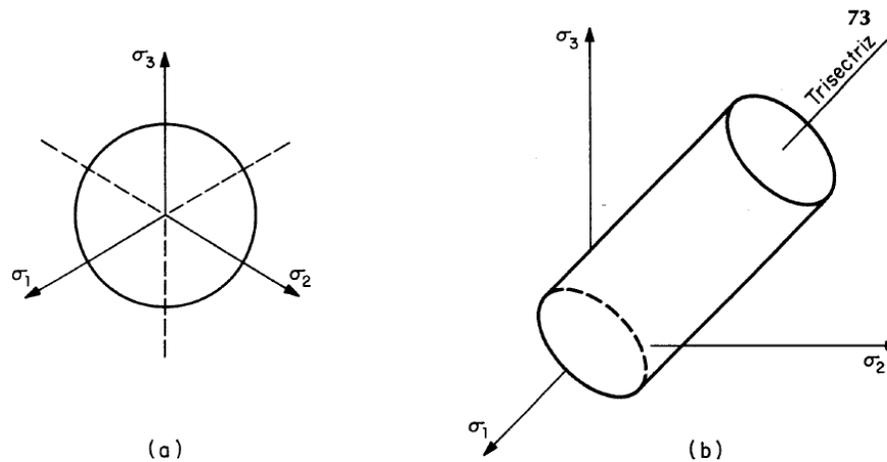


Fig. 2.2.1.2 Criterio Plástico de von Mises (Viniestra Heberlein, 2011)

En estos dos criterios se considera que el material es isótropo, es decir que posee las mismas propiedades mecánicas en cualquier dirección, esto es

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(-\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (2.2.20)$$

El criterio Plástico de Von mises ha sido ampliamente utilizado debido a la sencillez de sus expresiones y a que sus predicciones se acercan mucho a los

resultados experimentales. Este criterio sigue siendo aplicado con éxito en el caso de suelos preconsolidados donde el valor  $k$  se le denomina cohesión. Cabe indicar que este modelo está basado en el principio de la máxima energía de distorsión por unidad de volumen.

### 3.2.2 Modelo de Mohr-Coulomb

Cuando un suelo está normalmente consolidado, se ha observado que su resistencia es función tanto del esfuerzo medio aplicado como del ángulo de fricción interna del material.

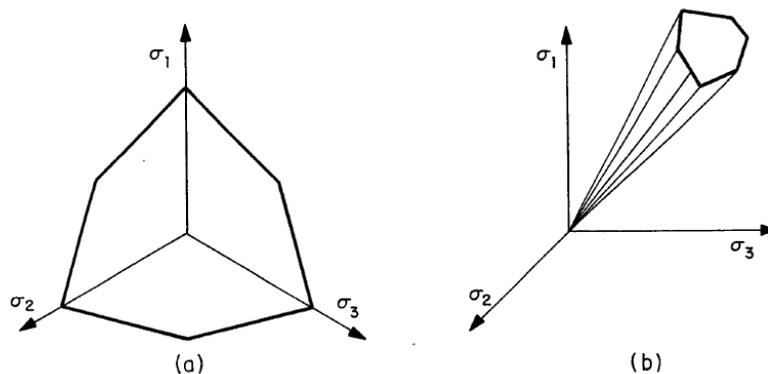
En estos casos, el criterio de Mohr-Coulomb se adapta bien al comportamiento del material a la ruptura. De tal manera que puede expresarse como

$$|\sigma_1 - \sigma_3| - (\sigma_1 + \sigma_3)\text{sen}\phi = 0$$

$$\text{O} \quad |\sigma_1 - \sigma_2| - (\sigma_1 + \sigma_2)\text{sen}\phi = 0 \quad (2.2.21)$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| - (\sigma_2 + \sigma_3)\text{sen}\phi = 0$$

Estas ecuaciones definen una pirámide hexagonal irregular cuyo vértice se localiza en el origen en el espacio de esfuerzos principales, tal como se muestra en la figura 2.2.2.1



2.2.2.1 Criterio Plástico de Mohr-Coulomb (Ismael Herrera, 1976)

Este criterio es ampliamente utilizado en geotecnia cuando se desea establecer los esfuerzos a la ruptura en una obra.

Por medio de una amplia serie de ensayos, ejecutados en pruebas verdaderamente triaxiales y utilizando diversos tipos de suelos, se ha logrado observar que la superficie de falla real para los suelos no difiere mucho de la considerada por la teoría de Mohr-Coulomb.

### 2.2.3 Modelo de Mroz Prévost

Este modelo utiliza el modelo de superficies de fluencia múltiples las cuales son de forma circulares y circunscritas entre sí en el plano desviador. Estas superficies pueden aumentar de tamaño (endurecimiento isotrópico) y desplazarse de su centro (endurecimiento cinemático). Además se emplea la regla de flujo asociada, con lo cual se completa el modelo.

Las superficies de fluencia pueden representarse por medio de la ecuación

$$3/2(S_{ij}S_{ij}) - k^2 = 0 \quad (2.2.22)$$

Siendo  $k$  el radio de la superficie de fluencia. Sin embargo, dado que las superficies de fluencia pueden desplazarse, la ecuación (3.2.22) debe expresarse como

$$3/2(S_{ij} - a_{ij})(S_{ij} - a_{ij}) - k^2 = 0 \quad (2.2.23)$$

Donde  $a_{ij}$  representa las coordenadas del centro de la superficie. Cada superficie de fluencia lleva asociada un módulo plástico  $H_i$  de valor constante.

En un material isotrópico, las superficies de fluencia se encuentran inicialmente concéntricas. Cuando se aplican los primeros incrementos de carga, el punto que representa el estado de esfuerzos del material comienza a desplazarse hacia el perímetro de la primera superficie y durante este proceso se utiliza el módulo plástico asociado a esa primera superficie. En el momento que el estado de esfuerzos rebasa la primera superficie, el módulo plástico pasa a ser de la segunda superficie y así sucesivamente. Cuando el estado de esfuerzos hace contacto con la superficie, ésta es arrastrada según la dirección del incremento de esfuerzo, de tal manera que las superficies de fluencia van quedando tangentes entre sí en un punto único de contacto, lo cual garantiza la unicidad en la respuesta del modelo.

La última superficie representa la ruptura del material, y por lo tanto, tiene un módulo plástico asociado de valor nulo. Si antes de alcanzar la ruptura se invierte la dirección de la carga, entonces se toma el módulo plástico de la primera superficie hasta que el estado de esfuerzos rebasa su perímetro, tomándose el módulo plástico de la segunda superficie y así sucesivamente. La figura 2.2.3.1 (a) muestra la posición inicial de las superficies de fluencia. En la figura 2.2.3.1 (b) se observa como las superficies de fluencia se han desplazado al efectuarse el primer semiciclo de carga en un ensaye de carga alterna. De acuerdo a la ecuación 2.2.23, cada superficie puede representarse por medio de una ecuación el tipo

$$\{3/2(S_{ij} - a_{ij}^m)(S_{ij} - a_{ij}^m)\}^{1/2} - k^m = 0 \quad (2.2.24)$$

Donde  $m$  representa el número de la superficie de fluencia. Por medio de las coordenadas del centro de cada superficie, es posible considerar la anisotropía de los materiales, puesto que al existir un comportamiento esfuerzo-deformación diferente en carga y descarga, las superficies de fluencia se encuentran inicialmente desplazadas como se muestra en la figura 2.2.3.1 (a). Por otro lado, se considera que la posición y tamaño inicial de las superficies de fluencia también toman en cuenta la historia de cargas que ha sufrido el material desde su formación.

Todas las superficies plásticas pueden trasladarse en el espacio de esfuerzos sin cambiar de forma y consecuentemente tocan y empujan a otras superficies pero sin interceptarse. Cuando el estado de esfuerzos alcanza la superficie plástica  $f_m$ , todas las superficies interiores a ella ( $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$ ), son tangentes entre sí en el punto de contacto  $M$  y en tal caso debe cumplirse la siguiente condición

$$\frac{S_{ij} - a_{ij}^m}{K^m} = \frac{S_{ij} - a_{ij}^{m-1}}{K^{m-1}} = \frac{S_{ij} - a_{ij}^o}{K^o} \quad (2.2.25)$$

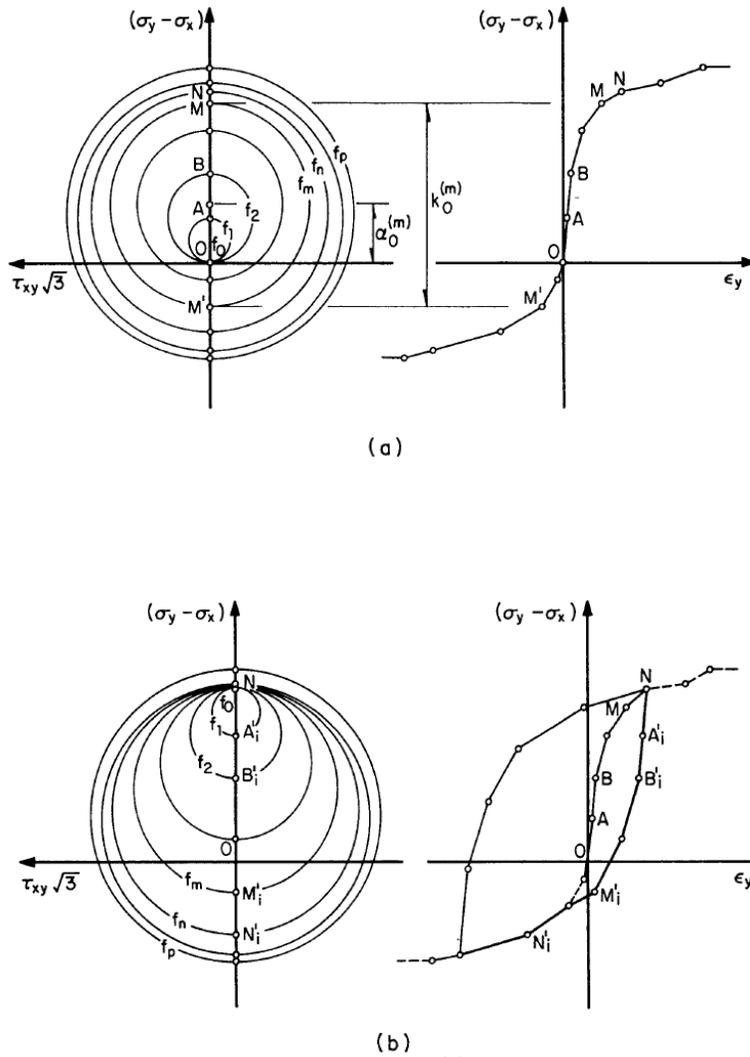


Fig. 2.2.3.1 Modelo Plástico de superficies múltiples de Mroz-Prévost (Prévost, J M, 1987)

Para completar el modelo, puede considerarse que las superficies de fluencia cambian de tamaño y que su módulo plástico asociado también puede variar por medio del valor  $\lambda$ , que es un escalar relacionado con la deformación plástica desviadora

$$\lambda = \int (2/3 de^p_{ij} de^p_{ij})^{1/2} \quad (2.2.26)$$

Donde

$$de_{ij} = d\epsilon_{ij} - 1/3 \delta_{ij} (d\epsilon_{kk}) \quad (2.2.27)$$

Las variaciones del módulo cortante asociado y del tamaño de la superficie plástica se presentan únicamente después de la primera inversión de carga y tienen por objeto considerar el efecto de la historia de cargas sobre el comportamiento del suelo.

Los parámetros del modelo se pueden determinar a partir de los resultados de dos ensayos triaxiales no drenados, uno en compresión y otro en extensión. Dichos parámetros son:

- 1) Posición y tamaño inicial de las superficies plásticas así como de sus módulos cortantes asociados
- 2) parámetros que determinan la magnitud del cambio en el tamaño de las superficies y en los valores de sus módulos asociados

Este modelo puede emplearse para simular el comportamiento de suelos bajo condiciones no drenadas y de carga alterna, aunque también se han usado en ensayos de corte simple. La sencillez de sus ecuaciones permite instrumentarlo con facilidad en programas de elementos finitos. También puede usarse para el caso de suelos preconsolidados y anisotrópicos puesto que se considera que tanto la preconsolidación como la anisotropía inicial del material quedan representadas por las posiciones iniciales de las superficies de fluencia.

En la figura 2.2.3.2 se presenta una serie de comparaciones teórico experimental para el caso de ensayos cíclicos de corte simple (a y b) y ciclos triaxiales (c y d), tanto bajo deformación controlada (a y c) como bajo esfuerzo controlado (b y d), efectuados sobre la arcilla de Dramen con un grado de preconsolidación de 4. En la figura 2.2.3.3 se muestran en forma más detallada los resultados de uno de los ensayos de corte cíclico bajo deformación controlada.

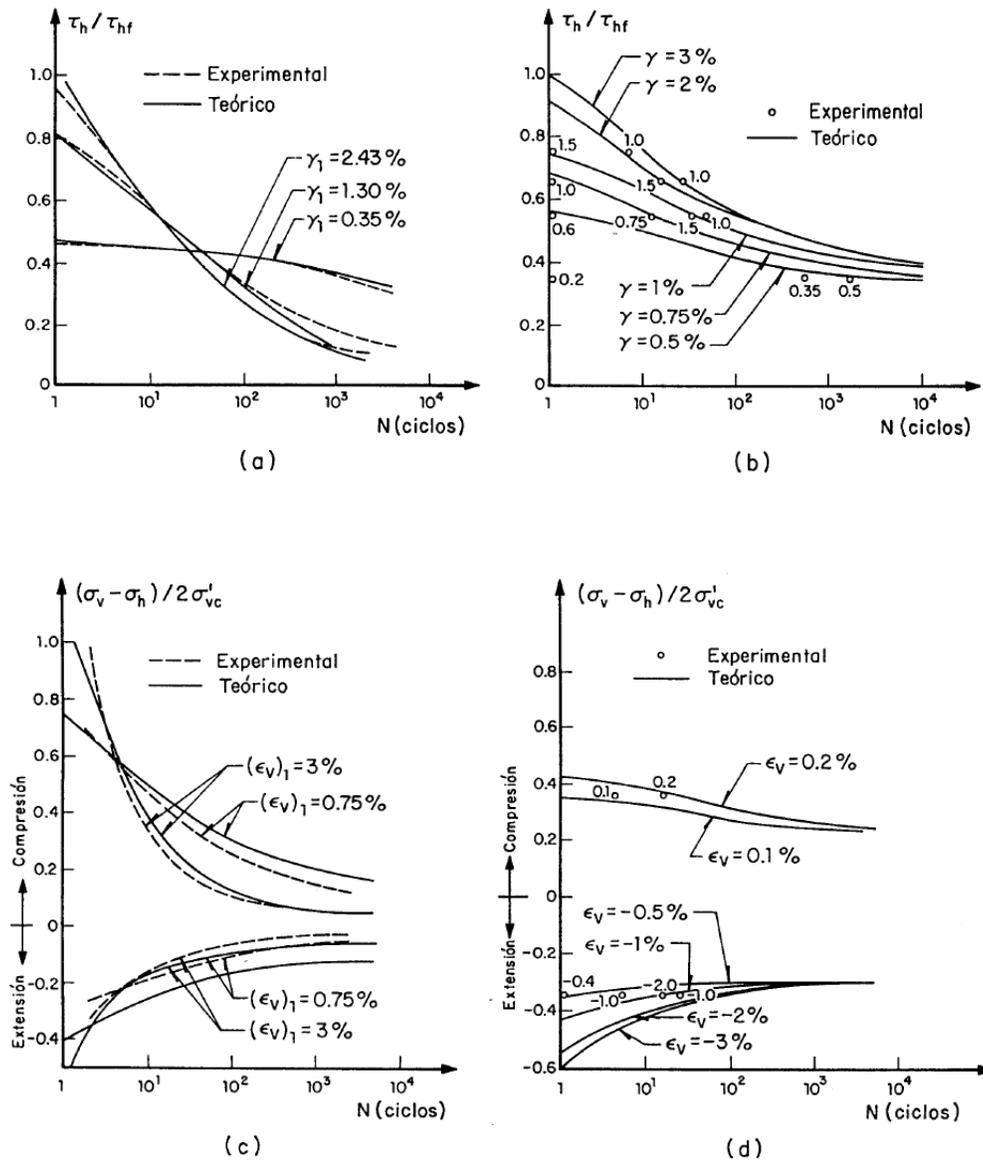


Fig. 2.2.3.2 Ensayes cíclicos de corte con: (a) deformación controlada, (b) esfuerzos controlados y cíclicos triaxiales con (c) deformación controlada y (d) esfuerzos controlados, para la arcilla de Drammen (OCR = 4) (Prévost, J H, 1975)

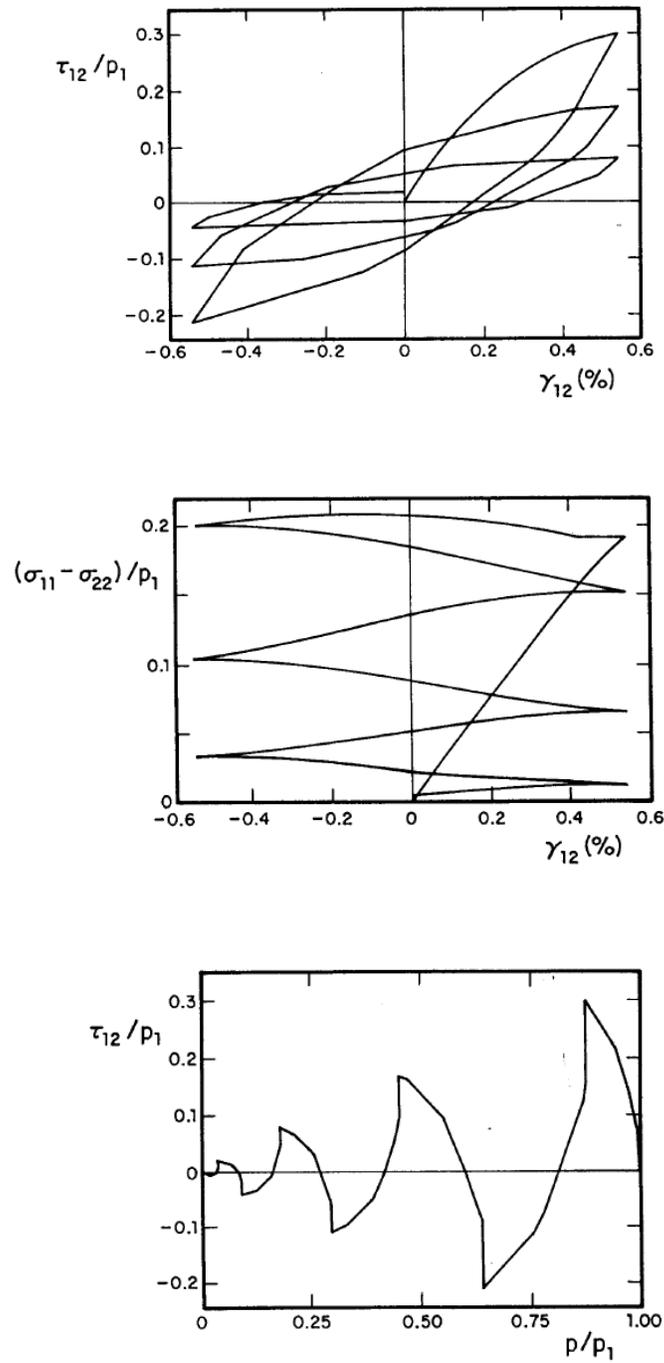


Fig. 2.2.3.3 Ensaye de corte cíclico a deformación controlada (Prévost, J H, 1979)

## 2.2.4 Modelo de Dafalias

Este modelo tiene la particularidad de establecer el valor del incremento de la deformación plástica en función no solo del valor del incremento y de la dirección del esfuerzo, sino también de toda la historia de cargas que ha sufrido el material hasta el momento actual. A este tipo específico de modelos plásticos se les ha denominado hipoplásticos y son capaces de considerar los fenómenos de anisotropía inherente e inducida, preconsolidación y viscosidad.

El modelo parte de las ecuaciones plásticas tradicionales y considera la regla de flujo asociado. Así a partir de las ecuaciones 2.2.1, 2.2.2, 2.2.7, y 2.2.10, es posible obtener la ecuación

$$\dot{\sigma} = \left( E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} L_{ab} L_{mn} E_{mnkl}}{K_p + L_{ab} E_{abrs} L_{rs}} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (2.2.28)$$

Donde

$$L_{ij} = \frac{\delta f}{\delta \sigma_{ij}}$$

Y  $K_p$  representa el módulo plástico.

A estas ecuaciones queda asociada una superficie límite, la cual representa el estado de esfuerzos de ruptura del material. Dicha superficie se representa en el plano de los invariantes anisotrópicos del tensor de esfuerzos ( $I^a, J^a$ ) por medio de dos elipses unidas por una hipérbola (fig. 2.2.4.1(a)) donde

$$I^a = \sigma_{ij} \delta^a_{ij} \quad (2.2.29)$$

$$J^a = \left( \frac{1}{2} S^a_{ij} S^a_{ij} \right)^{1/2} \quad (2.2.30)$$

Siendo

$I^a$  Primer invariante del tensor de esfuerzos anisotrópicos

$J^a$  Segundo invariante del tensor de esfuerzos desviadores, anisotrópicos

$\delta^{a_{ij}}$  vector unitario anisotrópico

$$S^{a_{ij}} = \sigma_{ij} - 1/3I^a \delta^{a_{ij}} \text{ (tensor desviador anisotrópico)} \quad (2.2.31)$$

Si

$$I = \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad (2.2.32)$$

$$J = (1/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2} \quad (2.2.33)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3I \delta_{ij} \quad (2.2.34)$$

Entonces los ejes  $I^a$  y  $J^a$  representan los valores de los invariantes del tensor de esfuerzos  $I$  y  $J$ , girados en un cierto ángulo (fig. 2.2.4.1 (b)). Por medio de este giro, es posible considerar parte de la historia de cargas aplicadas sobre el material. A esta posibilidad de giro de ejes se le ha denominado endurecimiento anisótropo, puesto que por medio de esta propiedad es posible considerar la anisotropía de los materiales. En tal caso es conveniente expresar las ecuaciones de la superficie límite por medio de los invariantes anisotrópicos del tensor de esfuerzos ( $I^a$  y  $J^a$ ). Así, por ejemplo, la ecuación de la primera elipse se escribe

$$F = (\bar{I}_0^a - I_0^a)(\bar{I}^a + \frac{R-2}{R} I_0^a) + (R-1)^2 \left[ \frac{\bar{J}^a}{N(\alpha^a)} \right]^2 = 0 \quad (2.2.35)$$

Donde

$\bar{I}^a$  y  $\bar{J}^a$  representan los valores de los variantes  $I^a$  y  $J^a$  obtenidos sobre la superficie límite por medio de un arreglo de mapeo radial (fig. 2.2.4.1).  $I_0^a$ , representa el esfuerzo máximo de consolidación, y  $N(\alpha^a)$  y  $R$  son parámetros del suelo.

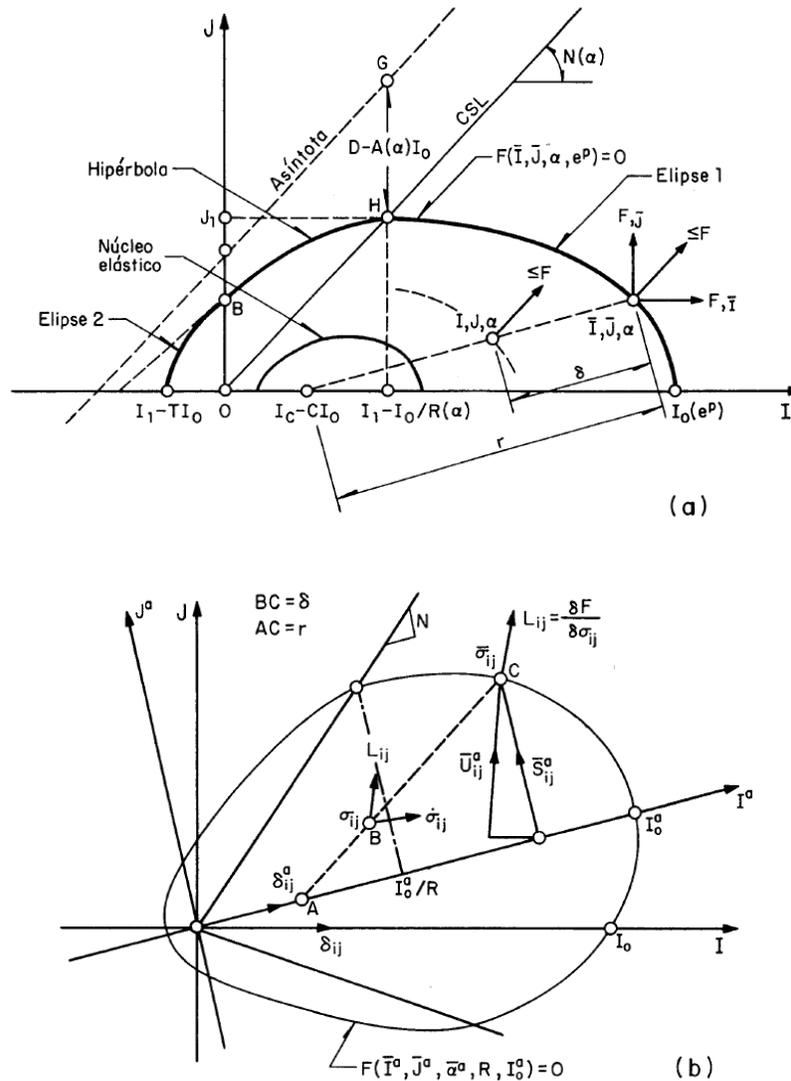


Fig. 2.2.4.1 Superficie límite y regla del mapeo radial para material

(a) Isótropo y (b) anisótropo (Dafalias y F, 1986)

En la misma forma se establecen las ecuaciones de la segunda elipse y de la hipérbola. La orientación inicial de la superficie límite depende de la historia de la consolidación del material así como de su anisotropía inherente. Si el material es inicialmente isótropo, los ejes  $I^a$  y  $J^a$  corresponden con  $I$  y  $J$  (fig. 2.2.4.1 (b)). El giro de los ejes se introduce en el modelo por medio de la ecuación

$$S_{ij}^a = \lambda^*(L) \left[ L_{ij} - 1/3(L_{pq} \delta_{pq}^a) \delta_{ij}^a \right] \quad (3.2.36)$$

Donde  $\lambda^*(L)$  es una función que controla la velocidad de rotación de la superficie límite.

Además este tipo de endurecimiento, se considera el endurecimiento isotrópico y el de distorsión, el cual genera una serie de alargamiento o ensanchamientos por medio del parámetro  $R$ , cuyo valor está dado por

$$\dot{R} = -C_3 \delta^{sa}_{ij} \delta^a_{ij} \quad (2.2.37)$$

Donde  $C_3$  es un parámetro del modelo y  $\delta^{sa}_{ij}$  la parte desviadora del tensor  $\delta^a_{ij}$ .

La mecánica del modelo es la siguiente: para cada incremento de esfuerzo se determina el nuevo estado de esfuerzos al cual queda asociado un punto en la superficie límite, por medio de la regla del mapeo radial. En función de la distancia entre el estado de esfuerzos y el punto asociado, se calcula el valor del módulo plástico  $K_p$  para ese estado de esfuerzos. Además el valor de este módulo está influido por los diferentes tipos de endurecimiento considerados, los cuales se presentan según la historia de cargas aplicadas sobre el material. Al conocer el valor del modulo plástico, es posible aplicar la ecuación 2.2.28 para calcular el valor del incremento en la deformación.

Los parámetros del modelo, para un suelo isotrópico y normalmente consolidado, pueden obtenerse a partir de dos ensayos triaxiales no drenados, uno en compresión y otro en extensión. Algunos de estos parámetros se obtienen directamente; sin embargo, solo pueden obtenerse por prueba y error, procurando que los resultados teóricos se aproximen lo mejor posible a los experimentos.

Este modelo puede simular con un buen grado de precisión el comportamiento de los suelos, tanto en condiciones drenadas como no drenadas en materiales isotrópicos o anisotrópicos, normalmente consolidados o preconsolidados y sujetos a carga monotónica o alterna.

En la figura 2.2.4.2 se muestran algunas comparaciones teórico experimental para el caso de un material arcilloso fabricado con una mezcla de caolín y bentonita, con diversos grados de preconsolidación. La figura 2.2.4.3 presenta el mismo tipo de resultados pero para un caolín puro.

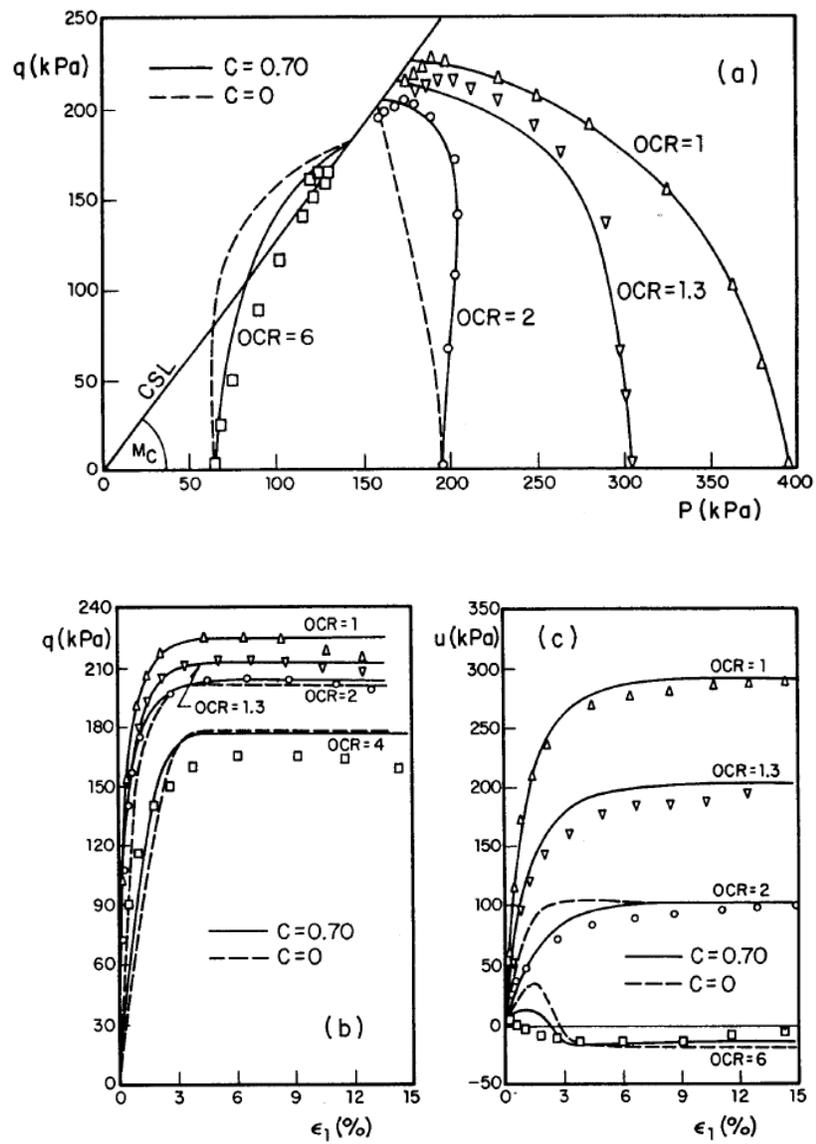


Fig. 2.2.4.2 Comparación teórico experimental para diversos ensayos triaxiales en compresión no drenada (Dafalias y F, 1987)

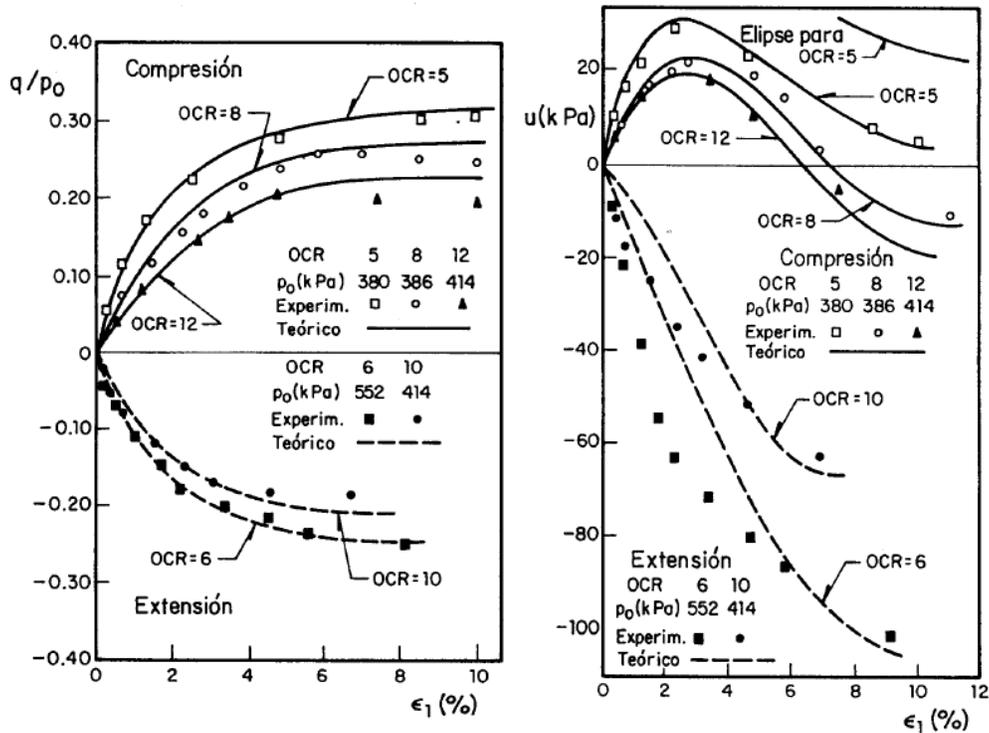


Fig. 2.2.4.3 Comparación teórico experimental para diversos ensayos triaxiales en compresión y extensión no drenada (Dafalias y F, 1986).

## 2.3 Modelos del estado crítico

### 2.3.1 La teoría del estado crítico

Esta teoría se basa en los estudios del mecanismo de la disipación de la energía dentro del esqueleto del suelo, así como de la observación del comportamiento macroscópico de los materiales.

Así por ejemplo, cuando un suelo normalmente consolidado es ensayado bajo diversas condiciones de carga, es posible obtener dos tipos de curvas características de ese material. La primera en el plano  $(p, q)$ , representa la llamada línea de falla (fig. 2.3.1.1 (a)) y la segunda en el plano  $(v, \ln p)$ , la línea de consolidación virgen isotrópica, paralela a la cual corre la línea de ruptura del material (fig. 2.3.1.1 (b)), que se produce cuando la deformación crece

indefinidamente y la relación de vacíos se mantiene aproximadamente constante, con tendencia hacia un valor asintótico.

Al agrupar las curvas 2.3.1.1 (a) y (b) es posible establecer una línea en el espacio (p, q, v), denominada línea del estado crítico, la cual se muestra con la línea gruesa en la figura 2.3.1.2 También es posible trazar una envolvente de todas las trayectorias de respuesta del material, cuya parte superior tendrá la forma mostrada en la misma figura y que se le denomina superficie límite.

De acuerdo con Schofield y Wroth, un material se encuentra en el estado crítico cuando al mantener su estado de esfuerzo constante, su deformación crece indefinidamente sin variación apreciable de su volumen.

En concordancia con las figuras 3.3.1.1 (a) y (b) es posible establecer las expresiones

$$q = Mp \quad (2.3.1)$$

$$V\lambda = V_c + \lambda \ln p \quad (2.3.2)$$

$$V_k = V + K \ln p \quad (2.3.3)$$

Donde M representa la pendiente de la línea de falla (fig. 2.3.1.1 (a)).  $V_c$  el volumen del material en el estado crítico, cuando se aplica una presión media unitaria.  $V\lambda$  y  $V_k$  el valor del volumen para una presión media unitaria y  $\lambda$  y  $k$  las pendientes de la línea de consolidación en carga y descarga, respectivamente. (fig. 2.3.1.3).

A partir de las ecuaciones de 3.3.1 hasta 3.3.3, es posible establecer la ecuación que representa la superficie de fluencia, cuando el material es ensayado a volumen constante.

$$\frac{q}{Mp} + \ln\left(\frac{P}{P_u}\right) = 1 \quad (2.3.4)$$

Donde  $P_u$  significa la intersección entre la línea del estado crítico con la superficie de fluencia. Por medio de la expresiones 2.3.2 y 2.3.3, es posible establecer la ecuación de la superficie límite, la cual está compuesta por una familia de superficies de fluencia, tal como se observa en la figura 2.3.1.2 La ecuación es

$$|q| = \frac{Mp}{\lambda - k} (V_c + \lambda + V - \lambda \ln p) \quad (2.3.5)$$

A partir de estas expresiones es factible implantar los modelos del estado crítico.

Este tipo de modelos han podido simular con sencillez el comportamiento de las arcillas normalmente consolidadas; sin embargo, han requerido continuas modificaciones para simular adecuadamente el comportamiento del material bajo carga alterna y los fenómenos de expansión.

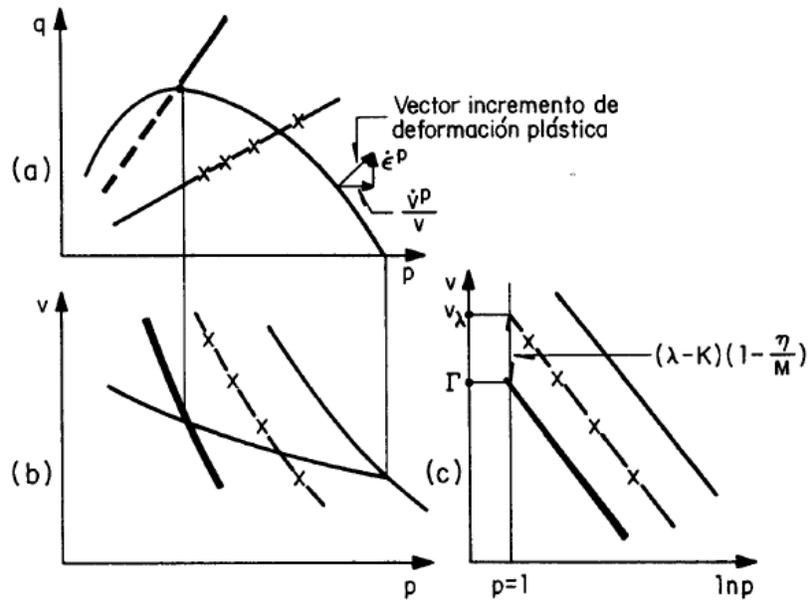


Fig. 2.3.1.1 Comportamiento Característicos de las arcillas (Schofield y Wroth, 1960)

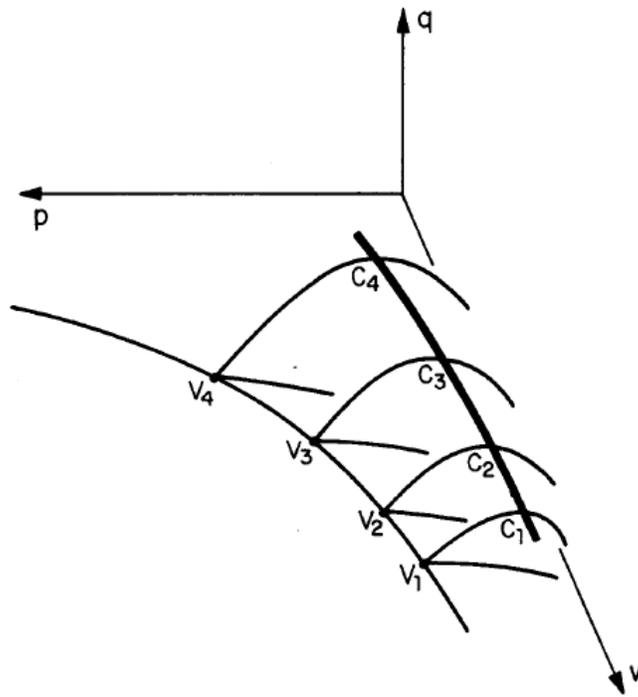


Fig. 2.3.1.2 Superficie límite en la teoría del estado crítico (Schofield y Wroth, 1960)

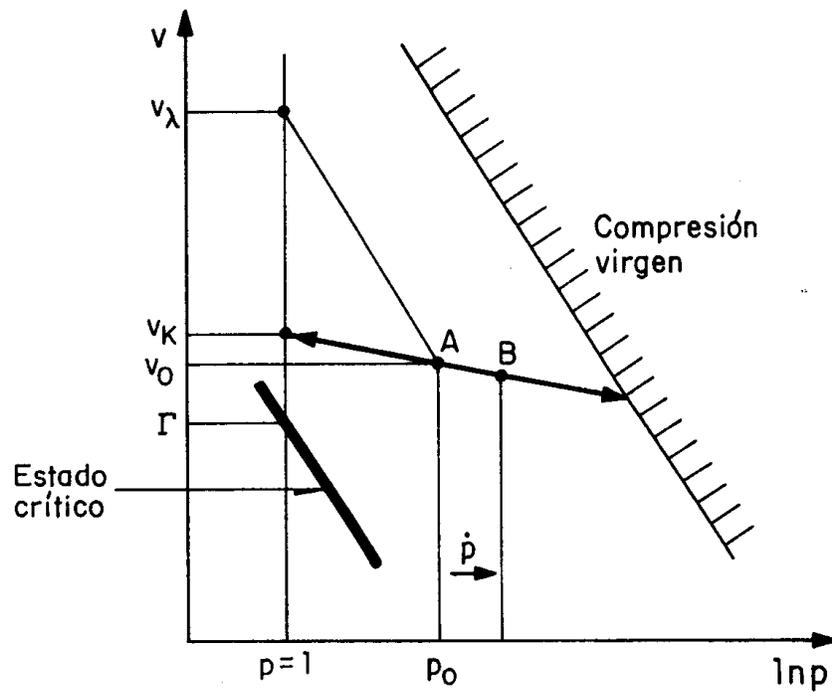


Fig. 2.3.1.3 Obtención de los parámetros  $V_\lambda$ ,  $V_\kappa$  y  $\Gamma$  del modelo (Schofield y Wroth, 1960)

### 2.3.2 Modelo de Cambrige

Este modelo, propuesto inicialmente por Roscoe, Schofield y Wroth y modificado posteriormente por Burland, parte de las ecuaciones del estado crítico a las cuales se agregan las condiciones específicas de un ensaye para obtener la respuesta teórica del material.

Así, para un ensaye no drenado, en el cual  $\dot{V} = 0$ , la ecuación 2.3.5 se escribe

$$|q| = \frac{Mp}{\lambda - k} (\lambda \ln p_0 - \lambda \ln p) = \frac{Mp}{\Lambda} \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) \quad (2.3.6)$$

Cuando el ensaye se realiza en compresión por aumento del esfuerzo inicial, la ecuación 3.3.6 se transforma en

$$\frac{q}{Mp} = 1 - \exp\left(-\frac{MV_0}{K\Lambda} \varepsilon\right) \quad (2.3.7)$$

Donde  $\varepsilon$  significa la deformación axial del material. La ecuación 2.3.7 define con suficiente precisión el comportamiento en compresión no drenada de un material.

Sin embargo las ecuaciones del modelo no dan una solución única cuando se trata de simular una consolidación isotrópica, lo cual implica problemas de unicidad y continuidad del modelo. Además, muestran serias deficiencias en la simulación del comportamiento de materiales con alto grado de preconsolidación.

Actualmente, existe una versión modificada del modelo con la cual se superan algunas de las deficiencias del modelo original. En este se incorpora el criterio de falla de Hvorslev, el cual representa un caso especial del criterio de falla de Mohr-Coulomb, donde la parte cohesiva de la resistencia no es constante sino que se expresa como una función exponencial del contenido de agua del material.

El modelo considera una superficie de fluencia de forma elíptica, la cual surge de algunas consideraciones sobre la disipación plástica de la energía. La ecuación que la describe es

$$p' (p' - p'_c) + \frac{q^2}{M^2} = 0 \quad (2.3.8)$$

Donde  $P'_c$  es el esfuerzo efectivo máximo de consolidación. En esta superficie se aplica la regla de flujo asociada y, por tanto, el potencial plástico de esta zona posee la misma ecuación.

$$q \pm \frac{M}{1+\alpha} \left( p' + \frac{\alpha p'}{2} \right) = 0 \quad (2.3.9)$$

Y sobre ella se aplica una regla de flujo no asociada, de tal manera que su potencial plástico esta dado por

$$q - q_c = 0 \quad (2.3.10)$$

Donde  $q_c$  es un parámetro que depende del estado de esfuerzos. La forma de la superficie de fluencia así constituida se muestra en la figura 2.3.2.1

El comportamiento elástico del material está definido por las ecuaciones

$$\dot{P} = \frac{P'}{K^*} \varepsilon_v^e \quad (2.3.11)$$

$$\dot{q} = 3G \varepsilon^e \quad (2.3.12)$$

Donde  $\frac{P'}{K^*}$  y  $G$  representan los módulos volumétricos y de cortante, respectivamente.

Por tanto de acuerdo a las expresiones 2.3.7 a la 2.3.12 y con la ecuación de la regla de flujo asociado 2.2.10, la cual se puede escribir en la forma

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \varphi_{ij} \quad (2.3.13)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^*}{p'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2(p'-p'_c)^2(2p'-p'_c) & \frac{2q}{M^2} \\ 2(p'-p'_c)^2 \frac{2q}{M^2} & \frac{4g^2}{M^4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

Con

$$\lambda = \frac{\lambda^* - k^*}{p' p'_c (2p' - p'_c)} \quad (2.3.15)$$

Para la superficie de Hvorslev, resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^*}{p'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pm \frac{M}{1+\alpha} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad (2.3.16)$$

Donde se considera que el material se comporta como perfectamente plástico y como tal debe calcularse el valor de  $\lambda$ . Los valores de  $k^*$  y  $\lambda^*$ , representan las pendientes de las rectas de compresión virgen y de compresión, respectivamente, cuando se grafican en los ejes  $\ln p$  y  $\ln \varepsilon_v$ .

El modelo de Cambrige modificado es capaz de simular adecuadamente el comportamiento de los suelos normalmente consolidados; sin embargo, muestra graves deficiencias al aplicarse en suelos de alto grado de preconsolidación o anisotropía.

Los parámetros requeridos para el modelo son:

1. El ángulo de fricción interna del material, con el cual es posible calcular el valor de  $M$ , por medio de la relación

$$M = \frac{6 \operatorname{sen} \varphi}{3 - \operatorname{sen} \varphi} \quad (2.3.17)$$

2. Los valores de  $\lambda^*$ ,  $k^*$ , y  $V_c$ , pueden obtenerse a partir de los resultados de ensayos de consolidación y triaxiales, drenados y no drenados.
3. El módulo de cortante elástico,  $G$ , se obtiene de resultados de ensayos triaxiales. También puede obtenerse mediante la relación  $G=75C_u$ , donde  $C_u$  es la cohesión del suelo. El modulo volumétrico del suelo puede obtenerse por medio de la expresión  $B=p'/k^*$ .
4. El parámetro  $\alpha$  de la superficie de Hvorslev, que puede obtenerse de los resultados de ensayos triaxiales.

En la figuras 2.3.2.2 y 2.3.2.3 se muestran las comparaciones teórico experimentales para probetas de caolín fabricadas en el laboratorio sujetas a ensayos triaxiales

monotónicas en compresión, con grados de preconsolidación de 1 y 2, respectivamente.

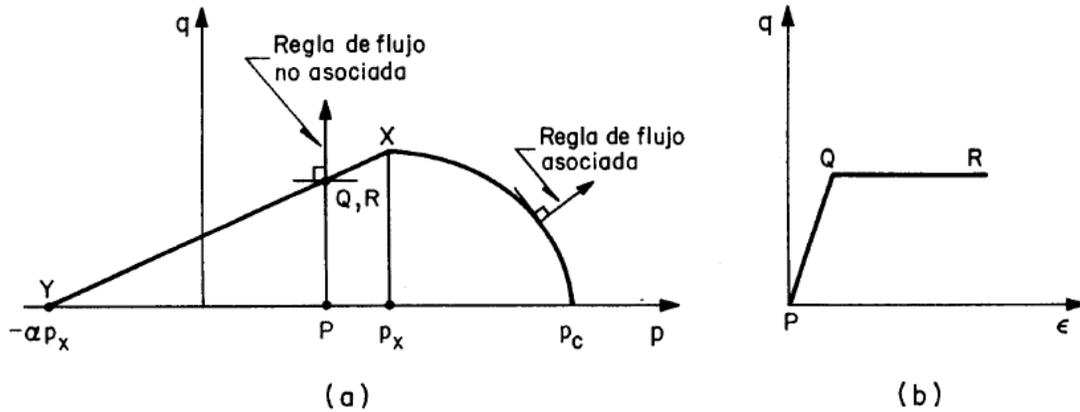


Fig. 2.3.2 1 Superficie de fluencia de Roscoe- Hvorslev (Rojas González, 1993)

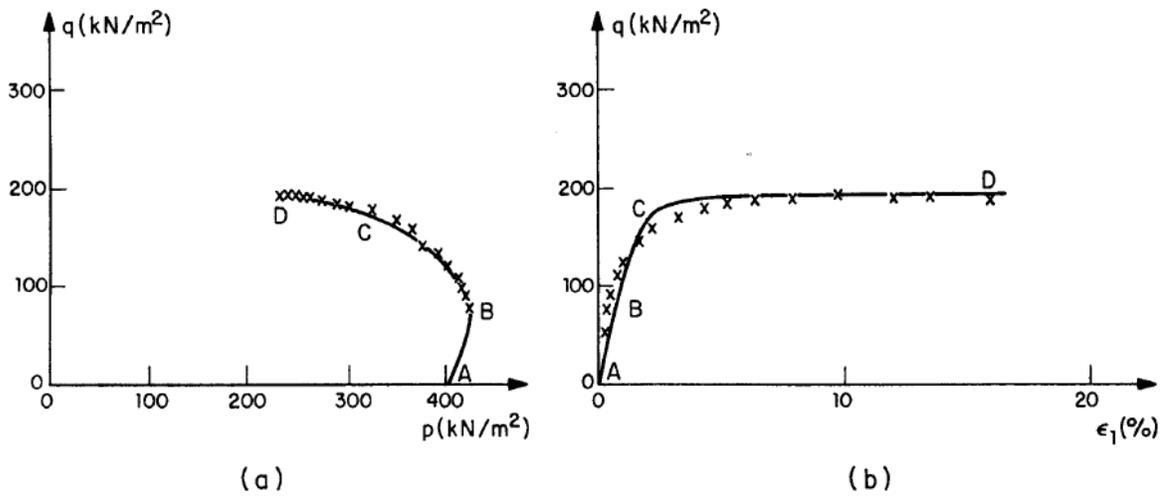


Fig. 2.3.2.2 Comparaciones Teórico experimentales para un ensaye triaxial no drenado (OCR=1) (Houlsby, 1982)

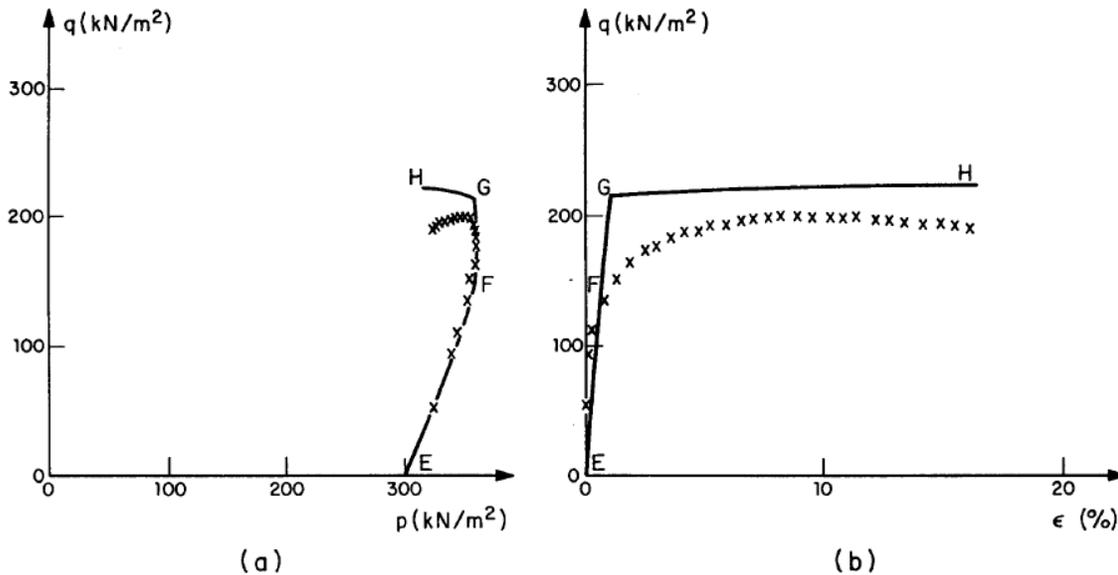


Fig. 2.3.2.3 Comparaciones teórico experimentales para un ensaye triaxial no drenado (OCR=2) (Houlsby, 1982)

### 2.3.3 Modelo de Pender

A partir de los conceptos e ideas generales del estado crítico, Pender elaboró un modelo que es capaz de simular adecuadamente el comportamiento de los suelos preconsolidados y normalmente consolidados bajo carga cíclica.

Este modelo no parte del estudio de los mecanismos de la disipación de la energía dentro del esqueleto del suelo, como lo hace el de Cambrige, sino que se basa en las funciones matemáticas que definen los siguientes tres aspectos: la superficie de fluencia, la trayectoria (en esfuerzos efectivos) de un ensaye no drenado y la relación entre los incrementos de deformación plástica desviadora y volumétrica. Además, considera que la superficie de fluencia viaja junto con el estado de esfuerzos y que el material se vuelve más resistente en cada semiciclo de carga.

Así para la superficie de fluencia establece la ecuación

$$df = p\eta \quad (2.3.17)$$

Que considera que la trayectoria de respuesta en esfuerzos efectivos durante un ensaye triaxial no drenado, es de forma parabólica, dirigida hacia el punto que representa el estado crítico (considerando la relación de vacíos que en ese momento posee el material), para el cual ha establecido la relación

$$\left( \frac{\eta - \eta_o}{AM - \eta_o} \right)^2 = \frac{P_{cs}}{P} \left( \frac{1 - \frac{P_o}{P}}{1 - \frac{P_o}{P_{cs}}} \right) \quad (2.3.18)$$

Siendo

$\eta$        $q/p$

$M$        $q/p$  en el estado crítico

$P_{cs}$       esfuerzo medio en el estado crítico para la relación de vacíos que posee el material

$P_o$  y  $\eta_o$     representan los valores de  $p$  y  $\eta$  al inicio del ensaye

$A$       es un parámetro de carga-descarga

De la misma manera, se considera que la relación entre los incrementos de la deformación desviadora y volumétrica plástica, está dada por las ecuaciones

$$\frac{de^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{(AM - \eta_o)^2}{(AM)^2 \left( \frac{P_o}{P} - 1 \right) (AM / \eta_o) - (\eta - \eta_o) P / P_{cs}} \quad (2.3.19)$$

A partir de éstas relaciones y del concepto de flujo plástico, es posible complementar el modelo, obteniéndose la relación

$$de^p = \frac{2k(P/P_{cs})(\eta - \eta_o)^{1+\xi_d\eta}}{(AM)(1+e)(2P_o/P - 1)(AM - \eta_o)^\xi - (\eta - \eta_o)P/P_{cs}} \quad (2.3.20)$$

Donde  $\xi$  representa el índice de endurecimiento cíclico definido por

$$\xi = \left( |q_p| / P_{cs} \right)^\alpha (H^\beta - 1) \quad (2.3.21)$$

Donde

$q_p$  representa el cambio en el valor de  $q$  durante el semiciclo anterior

$H$  es el número de semiciclos

$\alpha$  y  $\beta$  representan parámetros de endurecimiento

Al utilizar la ecuación 3.3.19, es posible obtener el valor de  $d\varepsilon_{pv}$ .

Cuando el modelo se introduce en un programa de elementos infinitos, es necesario invertir la expresión 2.3.20, para lo cual se obtiene una solución única. Sin embargo, se ha observado que, en algunos casos, un incremento o decremento de esfuerzos no produce ninguna deformación, lo cual no es razonable. Por tal motivo, aunque originalmente Pender no considera la existencia de un parte elástica en el comportamiento del material, se ha visto la necesidad de considerarla a fin de mejorar los resultados del modelo.

Los parámetros que requiere el modelo ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $k$ ,  $A$ ,  $v_c$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ ) pueden obtenerse a partir de los resultados de ensayos triaxiales no drenados, cíclicos y monotónicos, y de ensayos de consolidación.

De la comparación de los resultados teóricos y experimentales puede concluirse que a pesar de las consideraciones y ecuaciones de las que parte el modelo son prácticamente arbitrarias, éste es capaz de simular adecuadamente algunos aspectos del comportamiento de cargas, así como de la historia de la consolidación y el comportamiento bajo carga cíclica.

Éste modelo ha sido ampliamente utilizado para simular el comportamiento cíclico no drenado de las arcillas tanto normalmente consolidadas como preconsolidadas (hasta un grado de preconsolidación de 10)

En la figura 2.3.3.1 se muestra la comparación teórico experimental de un ensaye triaxial no drenado, sujeto a carga alterna, efectuado a una probeta de caolín normalmente consolidada.

En la figura 2.3.3.2 se comparan los resultados para una serie de cargas triaxiales cíclicos sin inversión de la carga, efectuados sobre la arcilla de Drammen, finalmente en la figura 2.3.3.3 se presentan el mismo tipo de comparaciones.

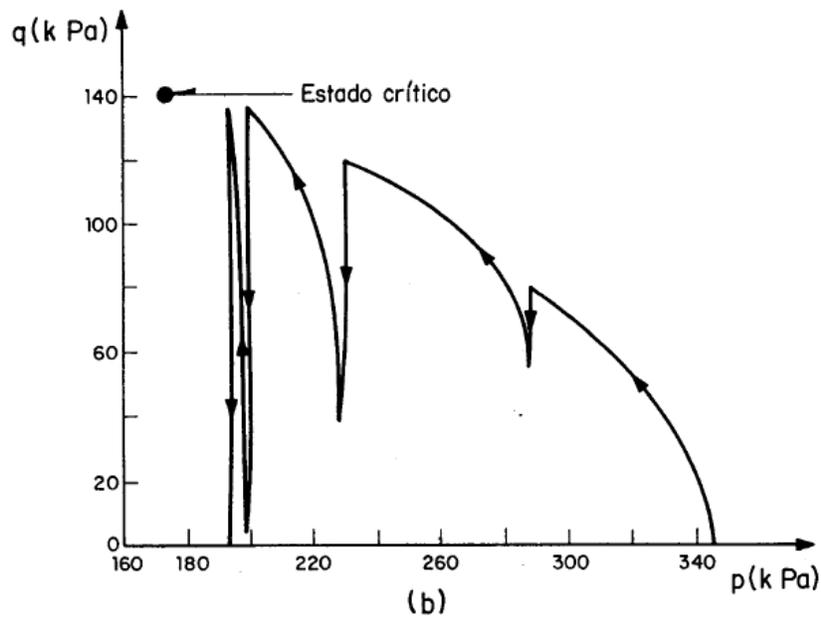
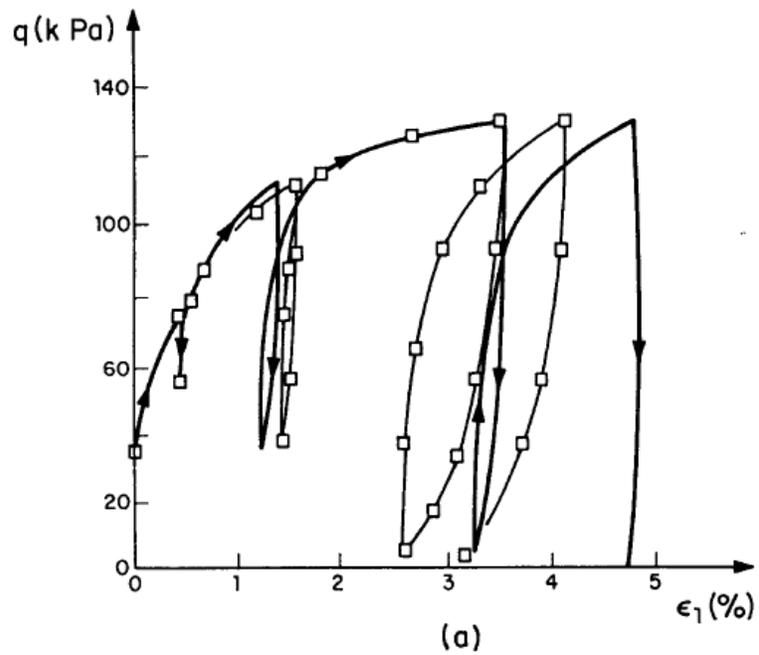


Fig. 2.3.3.1 Comparación teórico experimental para un ensaye triaxial no drenado efectuado sobre caolín (Houslby, 1982)

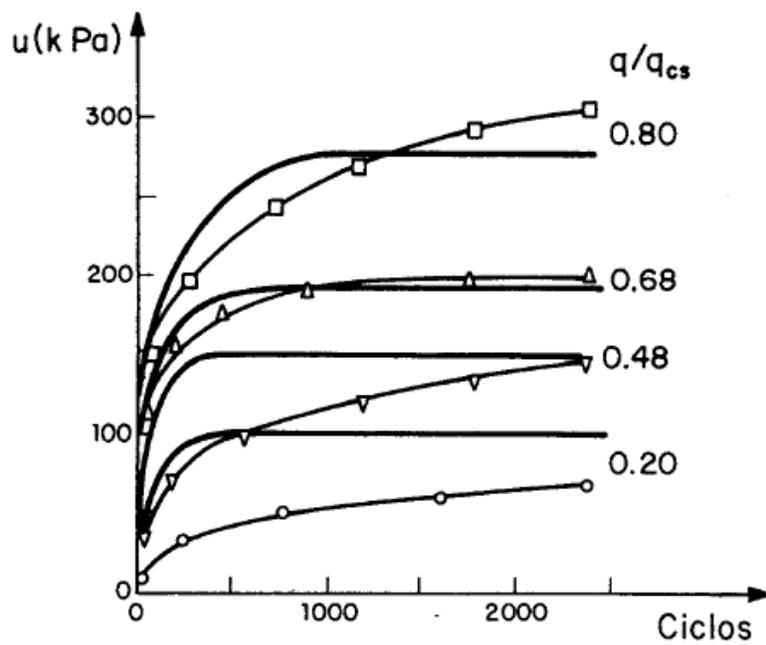
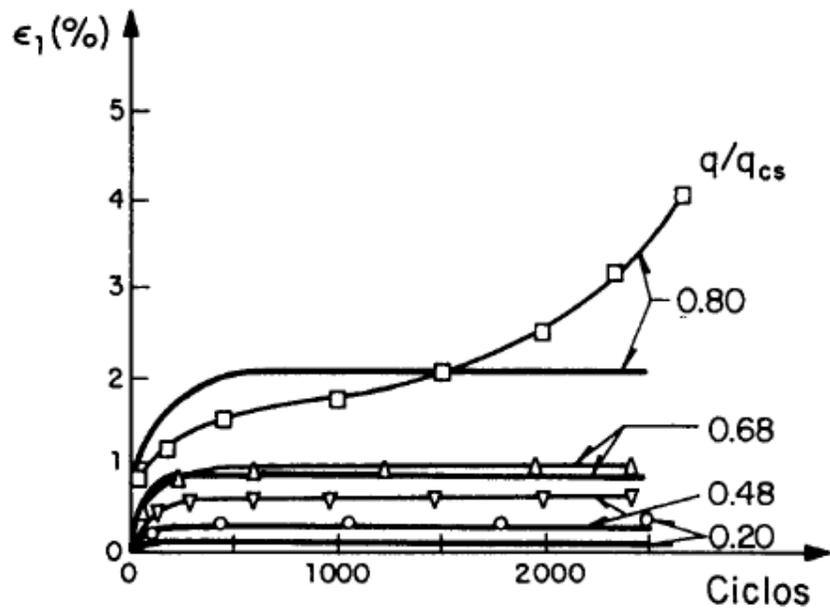


Fig. 2.3.3.2 Comparación teórico experimental para una serie de ensayos triaxiales Cíclicos no drenados efectuados sobre la arcilla de Drammen (Pender, M J, 1982).

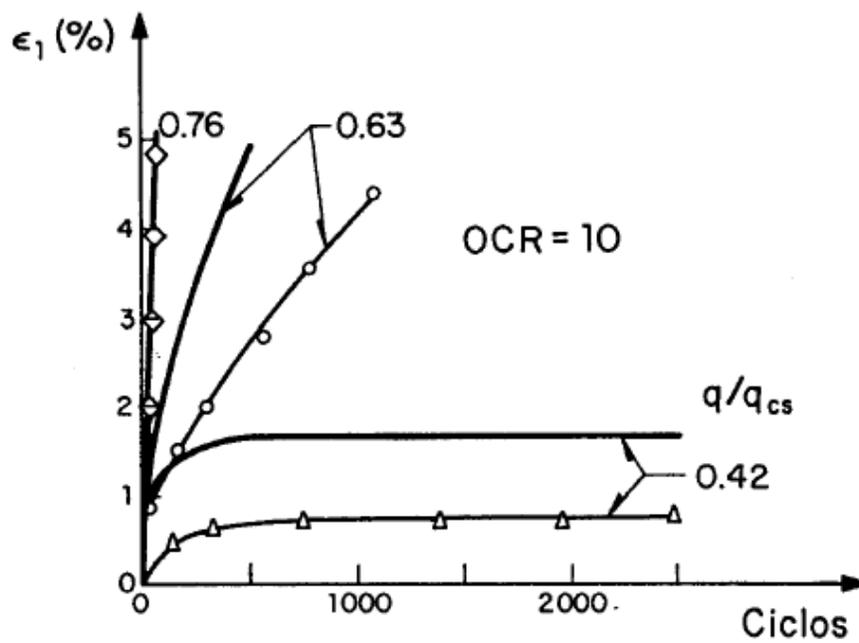
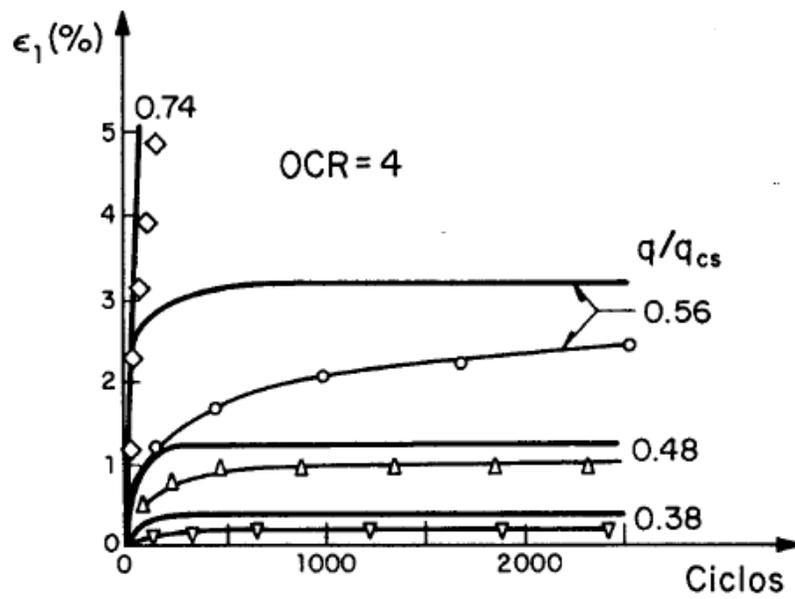


Fig. 2.3.3.3 Comparaciones teórico experimentales para una serie de ensayos cíclicos triaxiales no drenados con diversos grados de preconsolidación (Pender, M J, 1982).

### 2.3.4 Modelo de Sandler

Con objetivo de evitar los problemas de unicidad y continuidad propios de los modelos del estado crítico, se desarrollaron los modelos denominados de cubierta o “cap”, los cuales pueden simular el comportamiento del suelo bajo diferentes condiciones de carga.

La superficie de fluencia de estos modelos consiste en una envolvente de falla y una cubierta cuya posición es función de la historia de deformación volumétrica del material. Se utiliza la regla de flujo asociado con lo cual se satisfacen las condiciones de continuidad y unicidad. Por medio de las reglas de endurecimiento, el modelo es capaz de simular el comportamiento cíclico de los materiales, además de los fenómenos viscosos y aquellos ligados a la anisotropía de los materiales, Las formulaciones matemáticas de la envolvente de falla y de su cubierta dependen del tipo de material que se desea modelar.

El modelo de Sandler considera que la envolvente de falla está definida por la ecuación

$$\sqrt{J_2} = A - \frac{C}{1+3Bp} \quad (2.3.22)$$

Donde  $J_2$  representa el segundo invariante de los esfuerzos desviadores, definido como

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (2.3.23)$$

A y C son parámetros del modelo cuyo significado se muestra en la figura 3.3.4.1 4.4.1. El parámetro A representa el límite plástico de Von Mises y la diferencia A-C la cohesión del material. El parámetro B está relacionado con la pendiente de la envolvente de falla y, por tanto, está relacionado con el ángulo de fricción interna del material.

La cubierta mostrada en la figura 2.3.4.1 se considera de forma elíptica. De tal manera que su ecuación puede escribirse como

$$(P - P_A)^2 + \frac{1}{9} R^2 J^2 = (P_B - P_A)^2 \quad (2.3.24)$$

Donde  $P_A$  y  $P_B$  representan los valores de  $p$  indicados en la figura 2.3.4.1 y  $R$  es un parámetro de forma.

La mecánica del modelo puede explicarse de la siguiente manera: cuando del estado de esfuerzos ha alcanzado a la cubierta, el incremento de la deformación plástica se manifiesta tanto en la deformación volumétrica como en la distorsión (fig. 2.3.4.1). La deformación volumétrica representa una reducción en el volumen del cuerpo, lo cual provoca que la cubierta sea empujada hacia afuera aumentando así el área de la zona elástica.

Cuando el estado de esfuerzos alcanza a la envolvente de falla, el material se comporta como dilatante, es decir, que la deformación volumétrica cambia de signo, lo cual provoca que la cubierta se acerque al origen hasta el punto en el cual la deformación volumétrica se anula (fig. 2.3.4.2) y en ese momento, la cubierta no se desplaza más. Este mecanismo ha permitido evitar el comportamiento dilatante excesivo que generalmente se observa cuando se utiliza la regla de flujo asociada.

Al efectuar un ensaye triaxial no drenado, el incremento de la deformación plástica se obtiene aplicando la regla de normalidad en el punto donde se intersectan; por un lado, la trayectoria de esfuerzos, y por el otro, la cubierta, la cual va siendo empujada hacia afuera después de cada incremento de carga, tal como se observa en la figura 2.3.4.3

Los parámetros que requiere el modelo son los siguientes:  $K$  y  $G$ , módulos volumétricos y de cortante, respectivamente;  $P_c$  esfuerzo de preconsolidación;  $R$  parámetros de forma de la cubierta así como  $A$ ,  $B$  y  $C$  definidos anteriormente. Estos parámetros pueden obtenerse a partir de los resultados de ensayes triaxiales.

Este modelo fue concebido para simular el comportamiento de un gran número de materiales geológicos. Se ha utilizado con éxito en la simulación del comportamiento de arenas y con menos éxito en arcillas, cuando están sujetas a acciones axisimétricas monotónicas o de carga alterna. Con la introducción de algunas modificaciones, el modelo puede simular el comportamiento de materiales rocosos.

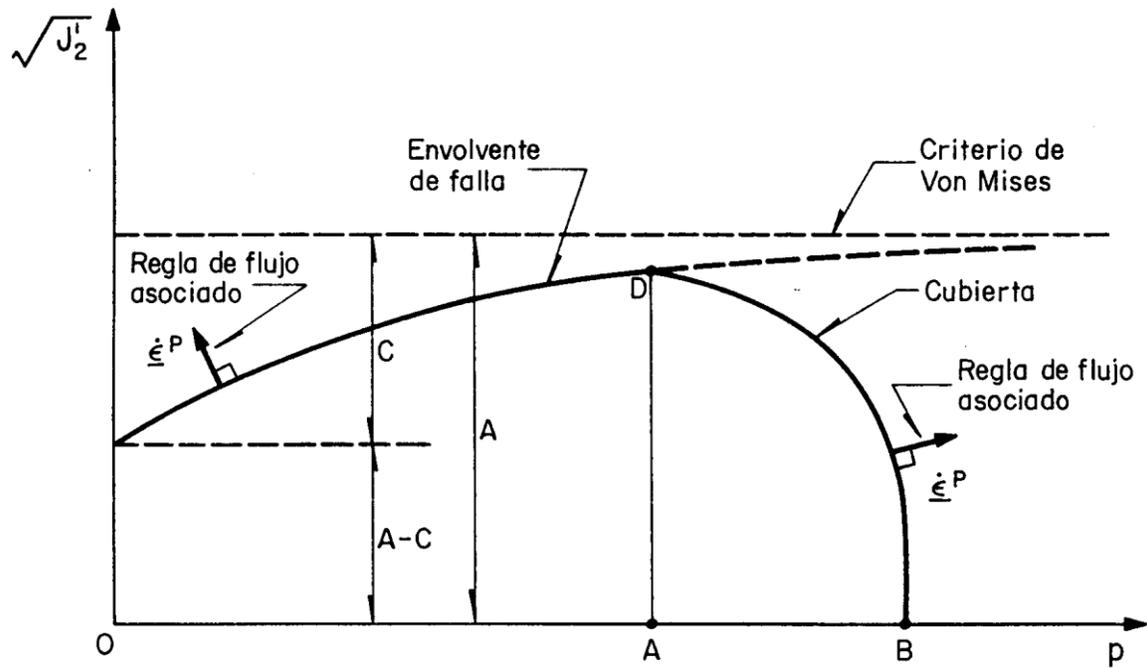


Fig. 2.3.4.1 Envolvente de falla y cubierta según el modelo de Sandler (Sandler et Al 1976)

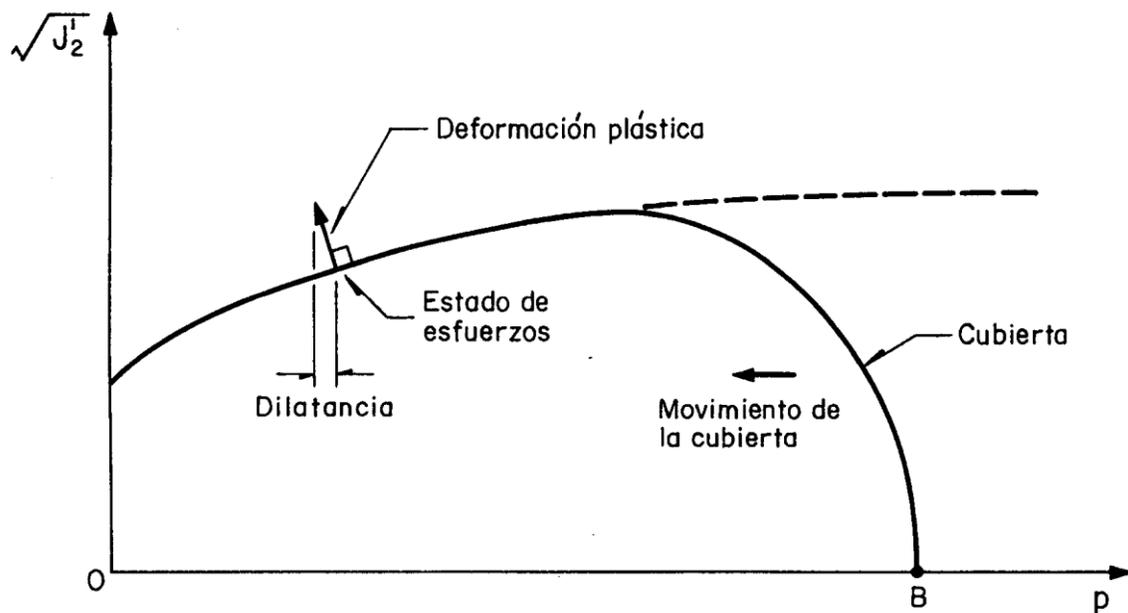


Fig. 2.3.4.2 Mecanismo de comportamiento del modelo de Sandler (Sandler et Al 1976)

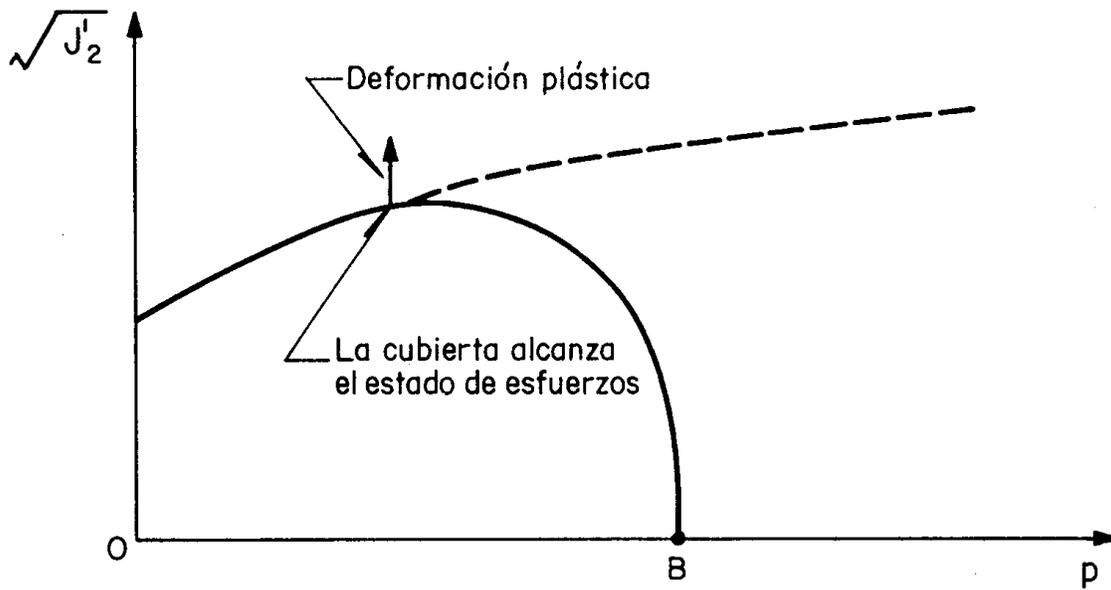


Fig. 2.3.4.3 Límite de la dilatancia (Sandler et Al 1976)

## 2.4 Modelos Endocrónicos

### 2.4.1 La teoría endocrónica

Esta teoría nace y se desarrolla con el estudio de las deformaciones inelásticas de los metales y está basada en el concepto del tiempo intrínseco,  $\tau$ , el cual es un valor adimensional definido como la longitud de la trayectoria de respuesta en el espacio de las deformaciones, es decir

$$d\tau^2 = P_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} \quad (2.4.1)$$

Donde  $P_{ijkl}$  representa las propiedades mecánicas del material. Otro concepto importante dentro de la teoría endocrónica es el de la escala del tiempo intrínseco  $z$ , que se considera como la escala natural del tiempo con respecto a la cual la memoria de la historia de la deformación del material debe ser medida, y está definida como

$$dz = \frac{d\tau}{f} \quad (2.4.2)$$

Donde  $f$  es una función de la historia de esfuerzos, relacionada con el valor de la fricción interna que posee un material.

Para materiales isotrópicos, la ecuación de su comportamiento puede ser separada en una parte desviadora y otra isotrópica. Así para la parte desviadora, se tiene

$$S_{ij} = \int_0^z \mu(z-z') \frac{\partial e_{ij}}{\partial z'} dz' \quad (2.4.3)$$

Donde  $\mu(z)$  representa el módulo de cortante, el cual puede obtenerse por medio de la serie de Dirichlet

$$\mu(z) = \lambda_0 + \sum_{r=1}^n \lambda_r \exp(-\rho_r z) \quad (2.4.4)$$

Siendo  $\lambda_0$ ,  $\lambda_r$  y  $\rho_r$  parámetros positivos. La parte isotrópica se relaciona con la historia de deformación volumétrica de una manera similar, por medio de la ecuación

$$P = 3 \int_0^z K(z-z') \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z'} dz' \quad (2.4.5)$$

Siendo  $K$  el módulo volumétrico, el cual puede obtenerse por medio de una relación similar a la ecuación 2.4.4. La relaciones 2.4.1 a 2.4.5 constituye la base de los modelos endocrónicos. Los primeros modelos de este tipo no eran capaces de simular adecuadamente el comportamiento del suelo, cuando se aplican ciclos irregulares de carga (ref. 20), ni de considerar la dilatancia de los materiales. Sin embargo, algunas modificaciones de la teoría original han permitido superar estos problemas, de tal manera que los modelos endocrónicos son herramientas de gran flexibilidad, para simular el comportamiento de los materiales sujetos a cargas cíclicas.

## 2.4.2 Modelo de Valanis

Valanis establece la siguiente relación entre el tiempo intrínseco  $\tau$  y las deformaciones plásticas

$$d\tau = \sqrt{de^p_{ij}de^p_{ji} + K|d\varepsilon^p_v|} \quad (2.4.6)$$

Donde  $d\tau$  representa el incremento del tiempo intrínseco,  $e^p_{ij}$  el tensor de deformación plástica desviadora,  $\varepsilon^p_v$  la deformación plástica volumétrica y  $K$  un factor de ponderación. De acuerdo con la ecuación 3.4.1, el incremento  $d\tau$  en carga y descarga es siempre positivo, es decir, que  $\tau$  crece continuamente conforme se ensaya un material, de tal manera que por medio de este parámetro, es posible tomar en cuenta la historia de cargas aplicada al material.

Este modelo también puede considerar algunas reglas de endurecimiento, como las presentadas en el subcapítulo 3. En este se consideran las funciones de endurecimiento isotrópico  $F_i$  y desviador  $F_d$ , dadas por

$$d\tau_i = \frac{d\tau}{dF_i} \quad (2.4.7)$$

$$d\tau_d = \frac{d\tau}{dF_d} \quad (2.4.8)$$

Donde  $d\tau_i$  y  $d\tau_d$  representan el incremento del tiempo intrínseco o cinemático respectivamente, de tal manera que el tensor de esfuerzos desviadores puede obtenerse por medio de la relación

$$S_{ij} = \int_0^{\tau_d} \theta(\tau_d - \tau') \frac{de^{\tau}_{ij}}{d\tau'} d\tau' \quad (2.4.9)$$

Donde  $\theta$  representa una función singular, que satisface la condición  $\theta(0) = \infty$  y es integrable en el intervalo de  $0 \leq Z < \infty$ . De la misma manera, el esfuerzo medio puede obtenerse por medio de la relación

$$P = \int_0^{\tau_i} \phi(\tau_i - \tau') \frac{de^p_v}{d\tau'} d\tau' \quad (2.4.10)$$

Siendo  $\phi$  una función semejante a  $\theta$ .

La función  $\theta$  se puede establecer a partir de los resultados de ensaye triaxial no drenado en carga alterna, donde es necesario obtener un ciclo estable y simétrico de la curva esfuerzo-deformación. Así, la función  $\theta$  puede expresarse como

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{d\tau}{de^p} \right)_A \quad (2.4.11)$$

Donde  $\theta$  representa la pendiente de la curva esfuerzo-deformación desviadora en el punto A.

De la misma manera, por medio de un ensaye hidrostático en carga y descarga, es posible establecer la función  $\phi$

$$\phi = p\delta(\tau) \frac{d\varepsilon_V^p}{d\tau_i} \quad (2.4.12)$$

De acuerdo con la ecuación 2.4.4, las relaciones 2.4.11 y 2.4.12 puede expresarse en forma de series de Dirichlet

$$\theta(\tau) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r e^{-\alpha_r \tau} \quad (2.4.13)$$

$$\phi(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i e^{-\beta_i \tau} \quad (2.4.14)$$

Para obtener valores suficientemente aproximados de  $\theta(\tau)$  y  $\phi(\tau)$ , se ha observado que basta con tomar los dos o tres primeros términos de la serie en las ecuaciones 2.4.13 y 2.4.14. De acuerdo con estas relaciones, es posible escribir las ecuaciones 2.4.9 y 2.4.10 en la forma

$$\underline{Q} = \sum_{r=1}^n \underline{Q}_r \quad (2.4.15)$$

$$P = \sum_{i=1}^n P_i \quad (2.4.16)$$

Donde  $\underline{Q}_r$  y  $P_i$  satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$\frac{d\underline{Q}_r}{d\tau_d} + \alpha_r \underline{Q}_r = A_r \frac{de^p}{d\tau_d} \quad (2.4.17)$$

$$\frac{dP_i}{d\tau_i} + \beta_i P_i = B_i \frac{de_V^p}{d\tau_i} \quad (2.4.18)$$

La primera ecuación representa la variación que existe entre los esfuerzos y deformaciones desviadoras con respecto al tiempo intrínseco, mientras que la segunda representa la variación del esfuerzo medio y de la deformación

volumétrica con respecto al tiempo intrínseco ( $\tau$ ) . Con estas relaciones y las ecuaciones 2.4.15 y 2.4.16 puede obtenerse

$$d\underline{S} = A d\underline{e}^p - \underline{Q} d\tau_d \quad (2.4.19)$$

$$dp = B d\varepsilon^p_v - P d\tau_i \quad (2.4.20)$$

Donde

$$A = \sum_{r=1}^n A_r \quad (2.4.21)$$

$$\underline{Q} = \sum_{r=1}^n \alpha_r Q_r \quad (2.4.22)$$

$$B = \sum_{i=1}^n B_i \quad (2.4.23)$$

$$P = \sum_{i=1}^n \beta_i P_i \quad (2.4.24)$$

Por medio de las ecuaciones 2.4.19 a 2.4.24 es posible obtener el incremento de esfuerzos  $d\underline{S}$  y  $dp$  para un incremento de deformación  $d\underline{e}^p$   $d\varepsilon^p_v$  o viceversa. Estas ecuaciones constituyen la representación incremental de las ecuaciones 2.4.9 y 2.4.10, cuya deducción se obtiene a partir de la densidad de la energía libre dada por la termodinámica. Sin embargo, es importante señalar que estas ecuaciones no pueden considerar el comportamiento dilatante de los materiales cuando sobre ellos actúa un esfuerzo medio constante. Por otro lado, se ha insistido en que este modelo viola el principio plástico de Drucker, además de presentar problemas de estabilidad y unicidad (ref. 14). No obstante, algunos autores consideran que estas deficiencias podrán ser superadas conforme continúe el desarrollo de este tipo de modelos, tal como lo propone Mroz(ref. 36), o como lo ha hecho Bazant(2.4.3).

La función  $\phi(\tau)$  y el parámetro  $\beta$  pueden obtenerse a partir de los resultados de un ensaye isotrópico no drenado. Por medio de corte a presión constante, se determinan los parámetros  $K$  y  $F_s$  además de la forma de  $\phi(\tau_d)$ . Los módulos elásticos  $\mu$  y  $K$  se pueden obtener a partir de un ensaye de compresión drenada.

Este modelo puede simular adecuadamente el comportamiento cíclico de los suelos no cohesivos cargados en una sola dirección o sujetos a corte bajo un

esfuerzo medio constante. Debido a estas limitaciones, actualmente el modelo se ha generalizado para que considere historias de carga tridimensional.

En la figura 2.4.2.1 se muestra la comparación teórico experimental para una probeta de arena sujeta a un ensaye de corte cíclico. En la figura se presenta la comparación para los ciclos 1, 2, 10 y 300.

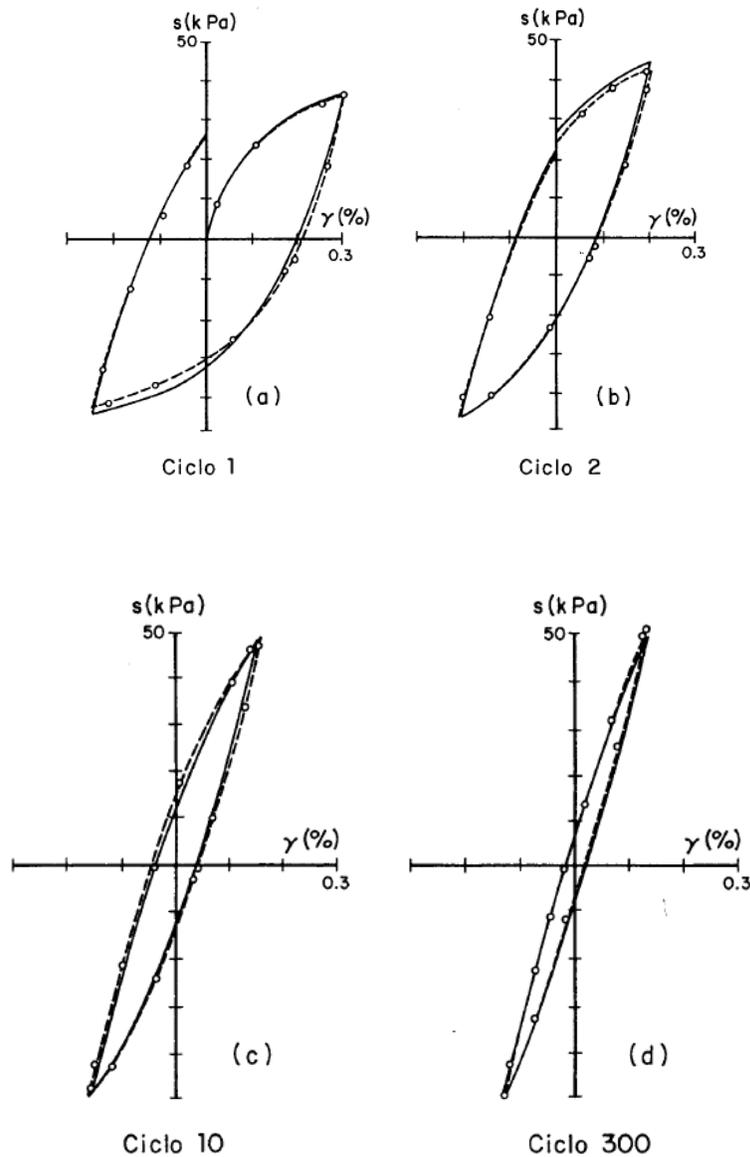


Fig. 2.4.2.1 Comparaciones teórico experimentales para un ensaye de corte cíclico con esfuerzo vertical de 192 KPa (Valanis, 1987)

### 2.4.3 Modelo de Bazant

Bazant ha introducido algunos conceptos como el de “salto” del endurecimiento cinemático y expansión Inelástica, además de considerar dos unidades endocrónicas acopladas en paralelo, así como la dependencia de los parámetros del modelo, en función de la relación de vacíos. Todos estos refinamientos han permitido que este modelo sea capaz de simular el comportamiento del suelo, tanto en ensayos de corte simple, como en triaxiales.

Aunque inicialmente la teoría se desarrolló sin considerar el concepto de superficie de fluencia, Bazant lo introduce en su modelo como un mecanismo lógico para considerar el endurecimiento de tipo cinemático, además de emplear dos unidades endocrónicas acopladas como se muestra en la figura 2.4.3.1; de tal manera, la deformación desviadora plástica total está dada por

$$S_{ij} = S_{ij}^{(1)} + S_{ij}^{(2)} \quad (2.4.25)$$

Y además

$$dS_{ij}^{(1)} = 2G_1 de_{ij} - \frac{\partial \phi_1 d\tau}{\partial S_{ij} \tau_1} \quad (2.4.26)$$

$$dS_{ij}^{(2)} = 2G_2 de_{ij} - \frac{\partial \phi_2 d\tau}{\partial S_{ij} \tau_2} \quad (2.4.27)$$

Donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son funciones que definen la superficie de fluencia,  $G_1$  y  $G_2$  módulos de cortante y  $\tau_1$  y  $\tau_2$  coeficientes del tiempo intrínseco, con d

$$d\tau = \sqrt{\frac{1}{2} de_{ij} de_{ij}} \quad (2.4.28)$$

Al considerar el endurecimiento cinemático, las funciones de la superficie de fluencia (de acuerdo a 2.2.12) puede escribirse como

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (S_{ij}^{(1)} - \alpha_{ij}^{(1)}) (S_{ij}^{(1)} - \alpha_{ij}^{(1)}) - H_1 \quad (2.4.29)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (S_{ij}^{(2)} - \alpha_{ij}^{(2)}) (S_{ij}^{(2)} - \alpha_{ij}^{(2)}) - H_2 \quad (2.4.30)$$

Donde  $H_1$  y  $H_2$  son dos parámetros del modelo que modifican la influencia de los factores desviadores del tipo Von Mises  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . De esta manera, las ecuaciones 2.4.26 y 2.4.27 puede escribirse como

$$dS_{ij}^{(1)} = 2G_1 de_{ij} - (S_{ij}^{(1)} - \alpha_{ij}^{(1)}) \frac{d\tau}{\tau_1} \quad (2.4.31)$$

$$dS_{ij}^{(2)} = 2G_2 de_{ij} - (S_{ij}^{(2)} - \alpha_{ij}^{(2)}) \frac{d\tau}{\tau_2} \quad (2.4.32)$$

Al considerar dos unidades endocrónicas, es posible simular adecuadamente el comportamiento del suelo, tanto para pequeñas como para grandes deformaciones.

Por otro lado, el concepto de salto cinemático permite modelar mejor el comportamiento esfuerzo-deformación de un material cuando se aplican ciclos irregulares de carga. El salto cinemático se produce cuando se pasa de carga a descarga o bien de descarga a recarga. En el modelo se simula cambiando bruscamente el centro de las superficies de fluencia hacia el punto del estado de esfuerzos donde se produce la inversión de la carga (puntos 1 y 2 en la figura 2.4.3.2). Por medio de este concepto, ha sido posible modelar adecuadamente la pendiente de la curva esfuerzo-deformación al producirse una inversión de carga. Además, bajo este concepto, fue factible que los modelos endocrónicos satisficieran el postulado de Drucker, el cual asegura la estabilidad y solución única del modelo.

El salto cinemático se introduce en el modelo haciendo

$$\alpha_{ij}^{(1)} = S_{ij}^{(1)}; \alpha_{ij}^{(2)} = S_{ij}^{(2)} \quad (2.4.33)$$

Después de cada inversión de carga.

El modelo requiere de 18 parámetros los cuales pueden obtenerse a partir de los resultados de los ensayos triaxiales monotónicos y bajo carga cíclica.

Por medio de dicho modelo es probable simular el comportamiento de suelos no cohesivos en condiciones drenadas ya sean ensayos triaxiales o de corte simple, obteniéndose resultados adecuados tanto en carga monotónica como cíclica.

En la figura 2.4.3.3 se muestran las comparaciones teóricos experimentales para una serie de ensayos de corte cíclico, efectuados con una arena seca sujeta a diversos esfuerzos verticales y diferentes amplitudes de los ciclos.

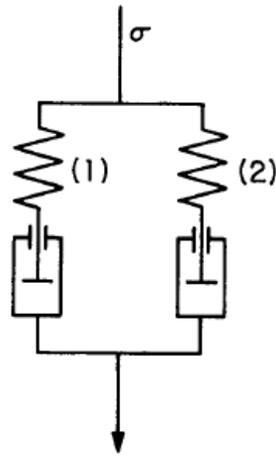


Fig. 2.4.3.1 Acoplamiento de dos unidades viscoelásticas de maxwell (Rojas González, 1993).

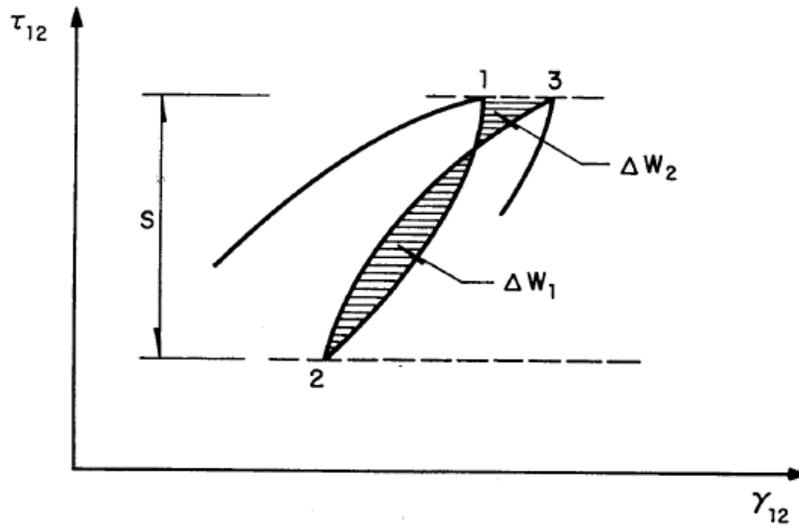
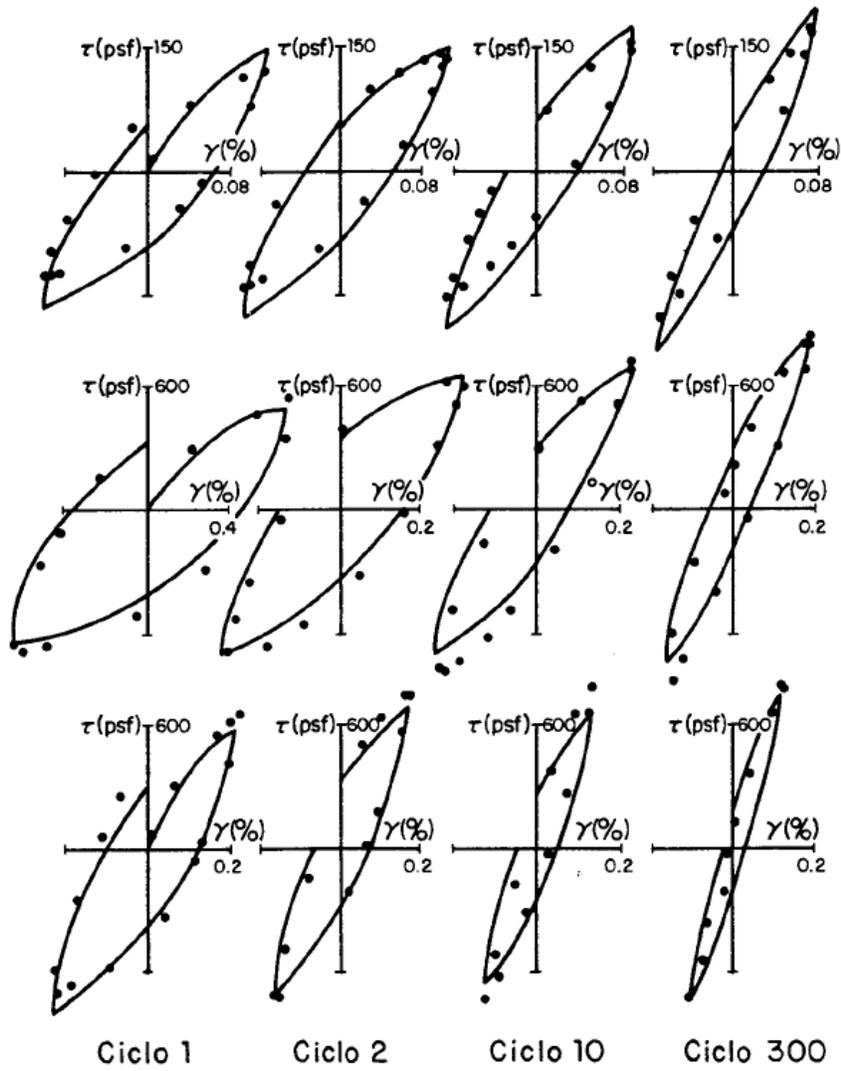


Fig. 2.4.3.2 Ensaye de carga cíclica (Rojas González, 1993).

Alta amplitud de deformación



Baja amplitud de deformación

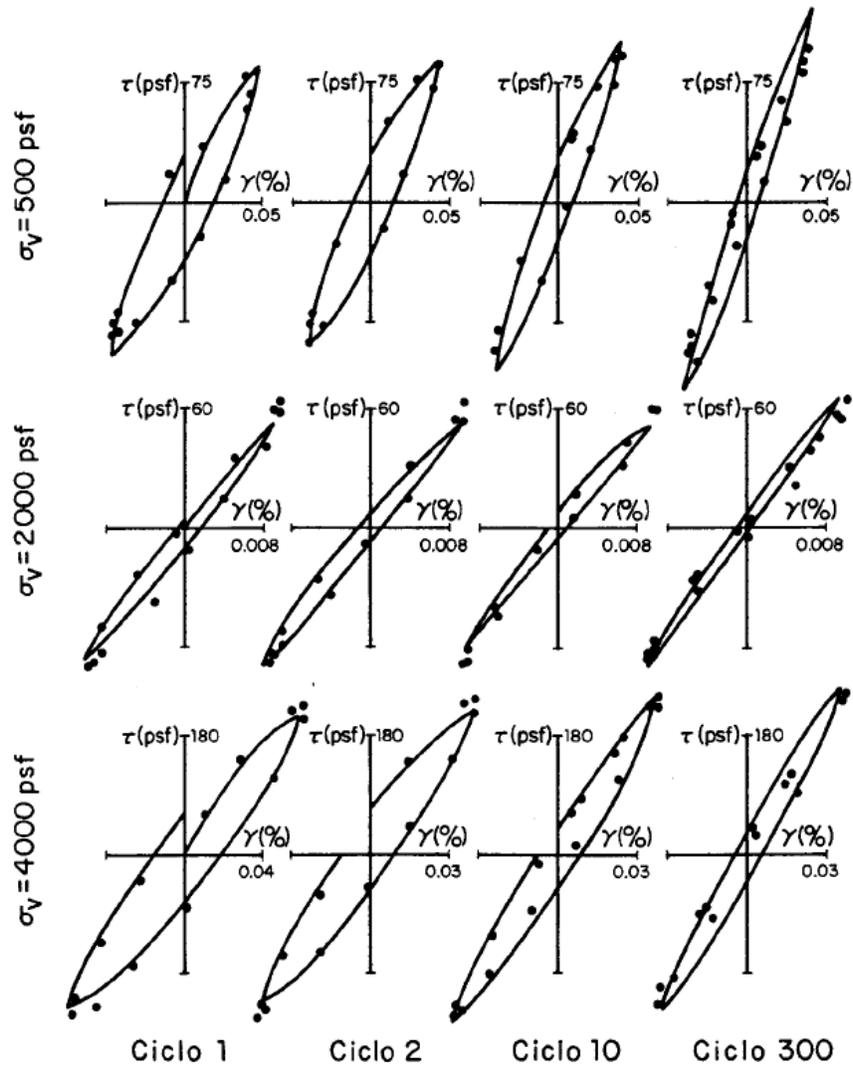


Fig. 2.4.3.3 Comparaciones teórico experimentales para una serie de ensayos de corte cíclico con diferentes esfuerzos verticales (Bazant, 1983)

## 2.5. Modelos Hipoelásticos

### 2.5.1 Teoría hipoelástica

Una forma como se pueden clasificar la mayor parte de los modelos constitutivos, es partir del número de zonas tensoriales que se evalúan. Una zona tensorial puede definirse como una región del espacio de sollicitaciones (generalmente se considera el espacio de esfuerzos) en la cual la función que liga el incremento de esfuerzos con el de las deformaciones permanece constante; es decir, que en esa región del espacio se estima que la dirección del incremento de esfuerzos no afecta la forma de la función  $G_a$  dada por

$$d\varepsilon_\alpha = G_a(\sigma_\beta) \quad (2.5.1)$$

La ecuación 2.5.1 representa la formulación general de todo modelo hipoelástico y fue establecida por Truesdell (ref. 41) a partir de la teoría de la mecánica de los medios continuos.

Dadas las irreversibilidades plásticas de los suelos,  $G_a$  deberá ser una función no lineal de tal manera que cumpla con la condición

$$-G_a(d\sigma_\beta) \neq G_a(d\sigma_\beta) \quad (2.5.2)$$

Para simplificar el desarrollo del modelo no se consideran los efectos viscosos del material, por lo cual la velocidad de aplicación de la carga no influye en su comportamiento y entonces puede escribirse

$$G_\alpha(\lambda d\sigma_\beta) = \lambda_\alpha(d\sigma_\beta) \quad (2.5.3)$$

Es decir, que la función  $G_a$  es homogénea de orden uno con respecto a  $d\sigma_\beta$  y por tanto

$$G_\alpha(d\sigma_\beta) = \frac{\partial G_\alpha(d\sigma_\gamma)}{\partial(d\sigma_\beta)} d\sigma_\beta = M_{\alpha\beta}(d\sigma_\gamma) d\sigma_\beta \quad (2.5.4)$$

Donde  $M_{\alpha\beta}$  es una función homogénea de orden cero, de manera que nuevamente puede escribirse

$$G_\alpha(d\sigma_\beta) = M_{\alpha\beta} \frac{(d\sigma_\gamma)}{|d\underline{\sigma}|} = M_{\alpha\beta}(\underline{u}) d\sigma_\beta \quad (2.5.5)$$

Es decir, que la función  $G_\alpha$  depende tanto de la dirección del incremento de esfuerzo  $\underline{u}$  como de dicho incremento

Si ahora se considera la definición de zona tensorial, puede aceptarse que en una zona  $Z$

$$\forall u \in Z \Rightarrow M(u) = M^z \quad (2.5.6)$$

Por otro lado, en la frontera entre dos zonas tensoriales, debe satisfacerse la condición de continuidad, es decir

$$\forall u \in Z_1 \cap Z_2 \quad d\varepsilon = M^{z1} d\sigma = M^{z2} d\sigma \quad (2.5.7)$$

Esta condición de continuidad se cumple, en la mayor parte de los modelos plásticos, por medio del concepto de carga neutra.

En el caso en el que el modelo constitutivo posea una sola zona tensorial, la ecuación 2.5.5 se escribe

$$d\underline{\varepsilon} = \underline{M}(\underline{u})d\underline{\sigma} = \underline{M}^1 d\underline{\sigma} \quad \forall \underline{u}, d\underline{\sigma} \quad (2.5.8)$$

En este caso pertenecen todos los modelos elásticos lineales y no lineales. Cuando se considera la existencia de dos zonas tensoriales puede hablarse de una zona de carga y otra de descarga, como en los modelos plásticos de potencial simple, donde se considera que en carga existe una matriz elastoplástica y en descarga una elástica es decir

$$d\underline{\varepsilon} = \underline{M}^{ep} d\underline{\sigma} \quad \text{en carga} \quad (2.5.9)$$

$$d\underline{\varepsilon} = \underline{M}^e d\underline{\sigma} \quad \text{en descarga} \quad (2.5.10)$$

Estos modelos pueden considerar una variación continua de los módulos plásticos del material, en función de la historia de sollicitaciones (modelo de Dafalias) o bien una variación discontinua (modelo de Prévost)

Los modelos plásticos de doble potencial (Lade) establecen la existencia de cuatro zonas tensoriales, al considerar que existen dos potenciales plásticos diferentes, uno que estima las deformaciones volumetricas irreversibles y otro las deformaciones desviadoras, es decir

$$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}^e + d\underline{\varepsilon}^p_v + d\underline{\varepsilon}^p_d \quad (2.5.11)$$

Con

$$de_v^p = \frac{\alpha}{h_v} \frac{\partial g_v}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial f_v}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\sigma} \quad , \quad de_d^p = \frac{\alpha}{h_d} \frac{\partial g_d}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial f_d}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\sigma} \quad (2.5.12)$$

Así, esta consideración aunada al criterio de carga y descarga, produce cuatro combinaciones de la matriz elastoplástica, es decir establece cuatro zonas tensoriales (fig. 2.5.1.1).

El modelo de Ishihara divide la superficie de falla de Mohr Coulomb en seis zonas tensoriales tal como lo muestra la figura 2.5.1.2, dependiendo del valor de los esfuerzos principales.

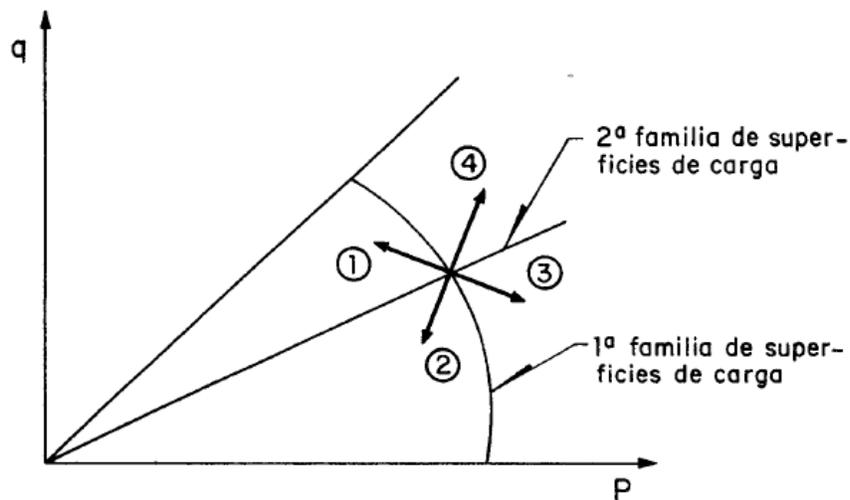


Fig. 2.5.1.1 Modelo plástico con cuatro zonas tensoriales (Rojas González, 1993).

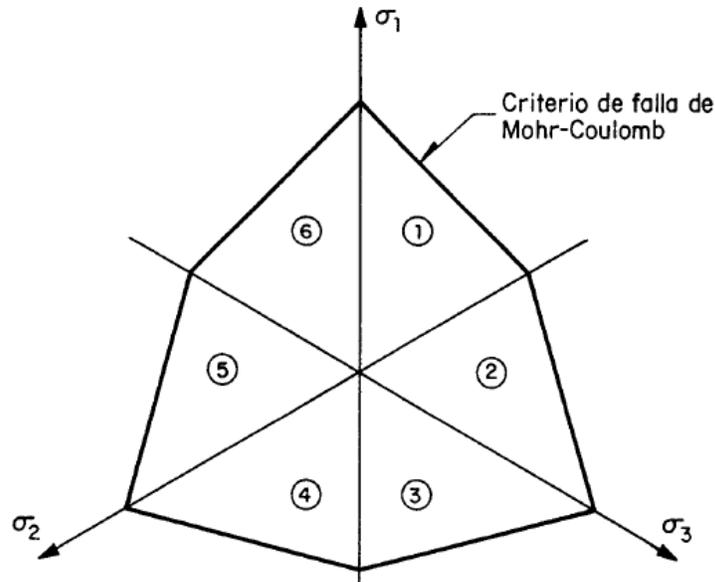


Fig. 2.5.1.2 Modelo plástico con seis zonas tensoriales (Rojas González, 1993).

Otros modelos subdividen el espacio de esfuerzos en ocho zonas al considerar que cada uno de los esfuerzos principales puede estar actuando en carga o en descarga, es decir, que las combinaciones pueden ser  $(+1,+1,+1)$ ,  $(-1,+1,+1)$ ,  $(+1,-1,+1)$ ,  $(+1,+1,-1)$ ,  $(-1,-1,+1)$ ,  $(+1,-1,-1)$ ,  $(-1,+1,-1)$  y  $(-1,-1,-1)$ . Esto sucede en el modelo llamado octolineal.

Finalmente puede considerarse el caso de los modelos que usan una infinidad de zonas tensoriales, a los cuales se les conoce como incrementales no lineales, entre los cuales se encuentran los modelos endocrónicos y del modelo octolineal generalizado.

## 2.5.2 Modelo de Kondner-Duncan

Este modelo establece una ecuación hiperbólica para definir la curva esfuerzo desviador-deformación axial, de tal manera que al derivar esa ecuación con respecto a la deformación, es posible obtener el módulo tangente o módulo de Young  $E_t$  para diferentes valores del esfuerzo desviador.

Esta relación se escribe

$$E_t = \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \text{sen} \varphi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \text{sen} \varphi} \right]^2 KP_a \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (2.5.13)$$

Donde

$R_f$  Representa la relación entre el esfuerzo desviador de pico y el desviador residual

$K$  Módulo de carga

$P_a$  Presión atmosférica

$C, \varphi$  cohesión y ángulo de fricción interna, respectivamente

El valor  $K P_a \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n$  representa el valor inicial del módulo de young. Cuando se aplica una descarga o una recarga, se considera que el módulo de young toma el valor

$$E_{ur} = K_{ur} P_a \left[ \frac{\sigma_3}{P_a} \right]^n \quad (2.5.14)$$

Donde  $K_{ur}$  representa el módulo de descarga y recarga. Por otro lado, se considera que el módulo volumétrico  $B$  está dado por la relación

$$B = K_b P_a \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^m \quad (2.5.15)$$

Donde  $K_b$  representa el módulo volumétrico del material y  $m$  es un exponente generalmente diferente de  $n$ . De acuerdo con esto y para el caso plano, el modelo puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} dG_{xx} \\ d\sigma_{yy} \\ d\sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{3b}{9b-E} \begin{pmatrix} 3b+E & 3b-E & 0 \\ 3b-E & 3b+E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} \\ d\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.5.16)$$

Como se ve, este modelo considera únicamente dos zonas tensoriales (una de carga y otra de descarga) sin ninguna etapa de transición, los cuales provocan serios problemas de continuidad. Su importancia reside en que fue uno de los primeros modelos adaptados a programas de elementos finitos, para simular el comportamiento de grandes masas de suelo, como son las cortinas de las presas de tierra.

En las figuras 2.5.2.1 y 2.5.2.2 se presentan algunos resultados teórico experimentales obtenidos para dos ensayos triaxiales drenados, efectuados en arena densa y suelta respectivamente.

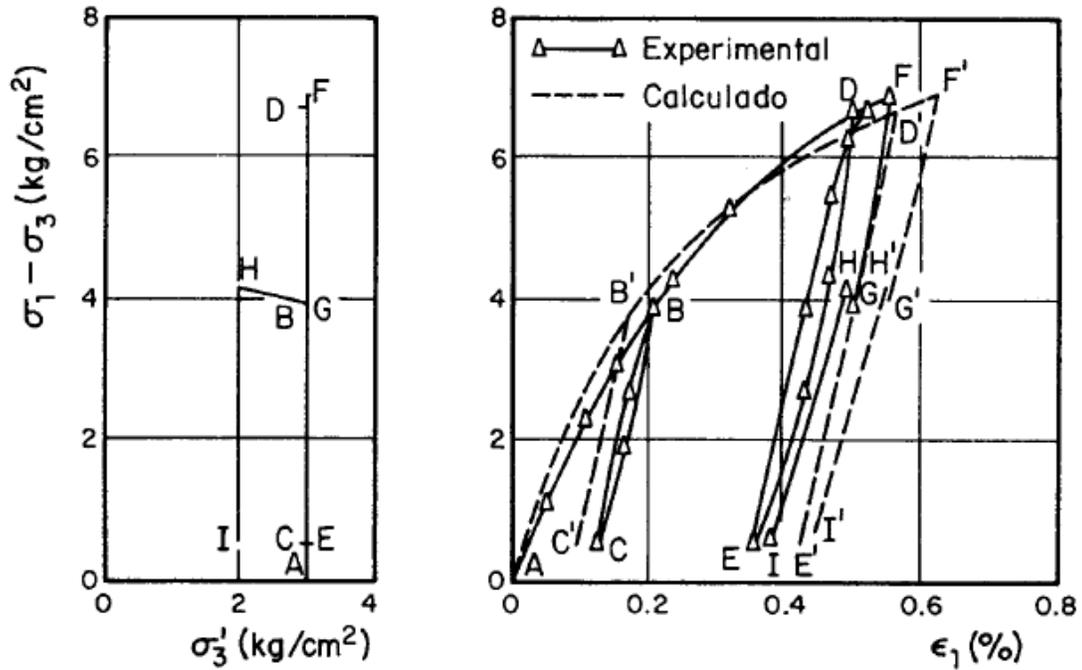


Fig. 2.5.2.1 Comparaciones teórico experimentales para una arena densa sujeta a trayectorias complejas de esfuerzos (Rojas González, 1993)

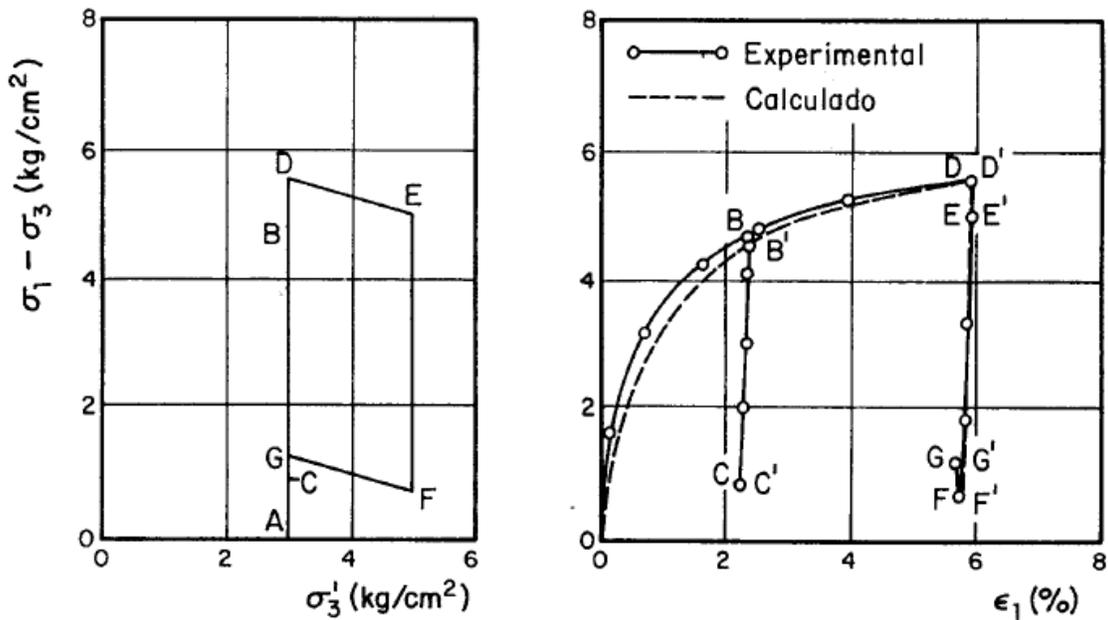


Fig. 2.5.2.1 Comparaciones teorico experimentales para una arena suelta sujeta a trayectorias complejas de esfuerzos (Rojas González, 1993).

### 2.5.3 Modelo Octolineal

Si el elemento  $M_{\alpha\beta}(u)$  de la ecuación 2.5.5 se desarrolla en serie, puede escribirse

$$M_{\alpha\beta}(u_\gamma) = M^1_{\alpha\beta} + M^2_{\alpha\beta\gamma}u_\gamma + M^3_{\alpha\beta\gamma\delta}u_\gamma u_\delta + \dots \quad (2.5.17)$$

Al despreciar los elementos de orden superior a dos y de acuerdo con la ecuación 2.5.5 la 2.5.1 puede escribirse como

$$d\varepsilon_\alpha = M^1_{\alpha\beta}d\sigma_\beta + \frac{1}{|d\sigma|} M^2_{\alpha\beta\gamma}d\sigma_\beta d\sigma_\gamma \quad (2.5.18)$$

Para poder representar la ecuación 2.5.18 en una forma sencilla, es necesario establecer las siguientes hipótesis:

- 1) Se considera que el modelo es ortotrópico, es decir que el material presenta diferentes propiedades mecánicas con respecto a tres planos

perpendiculares entre sí. Por medio de esta hipótesis es posible anular o establecer relaciones entre algunos elementos de las matrices  $M^1_{\alpha\beta}$  y  $M^2_{\alpha\beta\gamma}$ .

- 2) Se evalúa que la relación no lineal es únicamente válida para los incrementos normales de esfuerzo y deformaciones; es decir que la no linealidad no incluye a los módulos de corte. Esta condición puede expresarse como

$$M^2_{\alpha\beta\gamma} = 0, \forall \beta, \gamma \geq 4 \quad (2.5.19)$$

- 3) Finalmente, no se consideran los términos cruzados, es decir

$$M^2_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \forall \beta \neq \gamma \quad (2.5.20)$$

De acuerdo con esta hipótesis, la ecuación 2.5.18 puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{pmatrix} \frac{1}{|d\sigma|} B \begin{pmatrix} (d\sigma_{11})^2 \\ (d\sigma_{22})^2 \\ (d\sigma_{33})^2 \end{pmatrix} \quad (2.5.21)$$

Donde

$$|d\sigma| = \sqrt{d\sigma_{ij} d\sigma_{ij}} \quad (2.5.22)$$

Si se define la matriz N como

$$\underline{N} = \underline{A} + \frac{1}{|d\sigma|} \underline{B} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d\sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d\sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.5.23)$$

Entonces la ecuación 2.5.21 puede escribirse

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \underline{N} \begin{pmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.5.24)$$

- 4) Se considera que los elementos de la matriz N pueden obtenerse a partir de las derivadas de las funciones  $f^\pm$ ,  $g^\pm$ ,  $h^\pm$ , donde el signo (+) se utiliza cuando existe un incremento del esfuerzo (carga) y el (-) para un decremento (descarga). De esta manera, se pueden definir los valores de  $U^\pm_K$ ,  $V_i^\pm_K$ ,  $V^\pm_K$

los cuales representan el módulo de young en la dirección K, y las relaciones de Poisson en las direcciones j,K y l,K, respectivamente, es decir

$$U_K^\pm = \left( \frac{\partial f^\pm}{\partial \varepsilon_k} \right) \sigma_j, \sigma_l \quad (2.5.25)$$

$$V_K^{j\pm} = - \left( \frac{\partial g^\pm}{\partial \varepsilon_k} \right) \sigma_j, \sigma_l ; V_K^{l\pm} = - \left( \frac{\partial h^\pm}{\partial \varepsilon_k} \right) \sigma_j, \sigma_l \quad (2.5.26)$$

Y de acuerdo con la ecuación 2.5.24, l matriz  $\underline{N}$  para el caso de un incremento de la carga en las tres direcciones ( $\underline{N}^+$ ) puede escribirse como

$$\underline{N}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{U_1^+} & -\frac{V_2^{1+}}{U_2^+} & -\frac{V_3^{1+}}{U_3^+} \\ -\frac{V_1^{2+}}{U_1^+} & \frac{1}{U_2^+} & -\frac{V_3^{2+}}{U_3^+} \\ -\frac{V_1^{3+}}{U_1^+} & -\frac{V_2^{3+}}{U_2^+} & \frac{1}{U_3^+} \end{bmatrix} \quad (2.5.27)$$

De la misma manera puede definirse la  $N^-$ , la cual se obtiene cuando se aplica una descarga en las tres direcciones.

De acuerdo con las ecuaciones 2.5.23 6.3.7 y 2.5.27 6.3.11, es posible obtener las siguientes relaciones (ref. 26)

$$A = (\underline{N}^+ + \underline{N}^-) / 2 \quad (2.5.28)$$

$$B = (\underline{N}^+) - (\underline{N}^-) / 2 \quad (2.5.29)$$

Finalmente, al definir las funciones  $f^\pm, g^\pm, h^\pm$ , es posible calcular los valores de  $U_i^{\pm k}$  en cualquier instante. Por otro lado, la continuidad de la respuesta del modelo en sus diferentes zonas tensoriales esta garantizada por la continuidad en carga-descarga de las funciones  $f^\pm, g^\pm, h^\pm$ .

El modelo requiere de once parámetros que pueden obtenerse a partir de los resultados de dos ensayos triaxiales drenados o no drenados. Además, otro dos parámetros de forma se pueden obtener ajustando los resultados teóricos con los experimentales.

Siguiendo algunos procedimientos sencillos, es fácil generalizar el modelo para que pueda simular fenómenos como la anisotropía, la preconsolidación y la viscosidad, aunque a costa de aumentar el número de parámetros del modelo.

Puede asimismo, simular el comportamiento tanto de las arenas como de las arcillas bajo carga monotonica o alterna (ref. 26).

Uno de los inconvenientes que presenta este modelo es que la matriz  $N$  de la ecuación 2.5.24 no es simétrica, de tal manera que al introducir el modelo en programas de elementos finitos el consumo de tiempo es excesivo y por tal motivo su uso ha sido muy restringido.

Un aspecto interesante de este modelo octolineal es que fácilmente puede generalizarse a uno no lineal (ref. 27).

De las comparaciones teórico experimentales se ha encontrado que el modelo puede sufrir algunas inconsistencias cuando se tratan de simular sollicitaciones de cortante. Por otro lado, pueden surgir problemas de no convergencia para ciertos intervalos de los parámetros de los modelos (ref 35). Por último, aun al aplicar ciclos moderados de carga y descarga la trayectoria de respuesta en esfuerzos efectivos siempre se desplaza hacia el origen indicando la licuación del suelo, aun en el caso de las arcillas.

En las figuras 2.5.3.1 y 2.5.3.2 se presentan algunas comparaciones teórico experimentales para el caso de un caolín sometido a una serie de ensayos triaxiales drenados en carga monotónica y alterna. En la figura 2.5.3.3 se muestran los resultados de una serie de ensayos no drenados en carga monotónica para el mismo material.

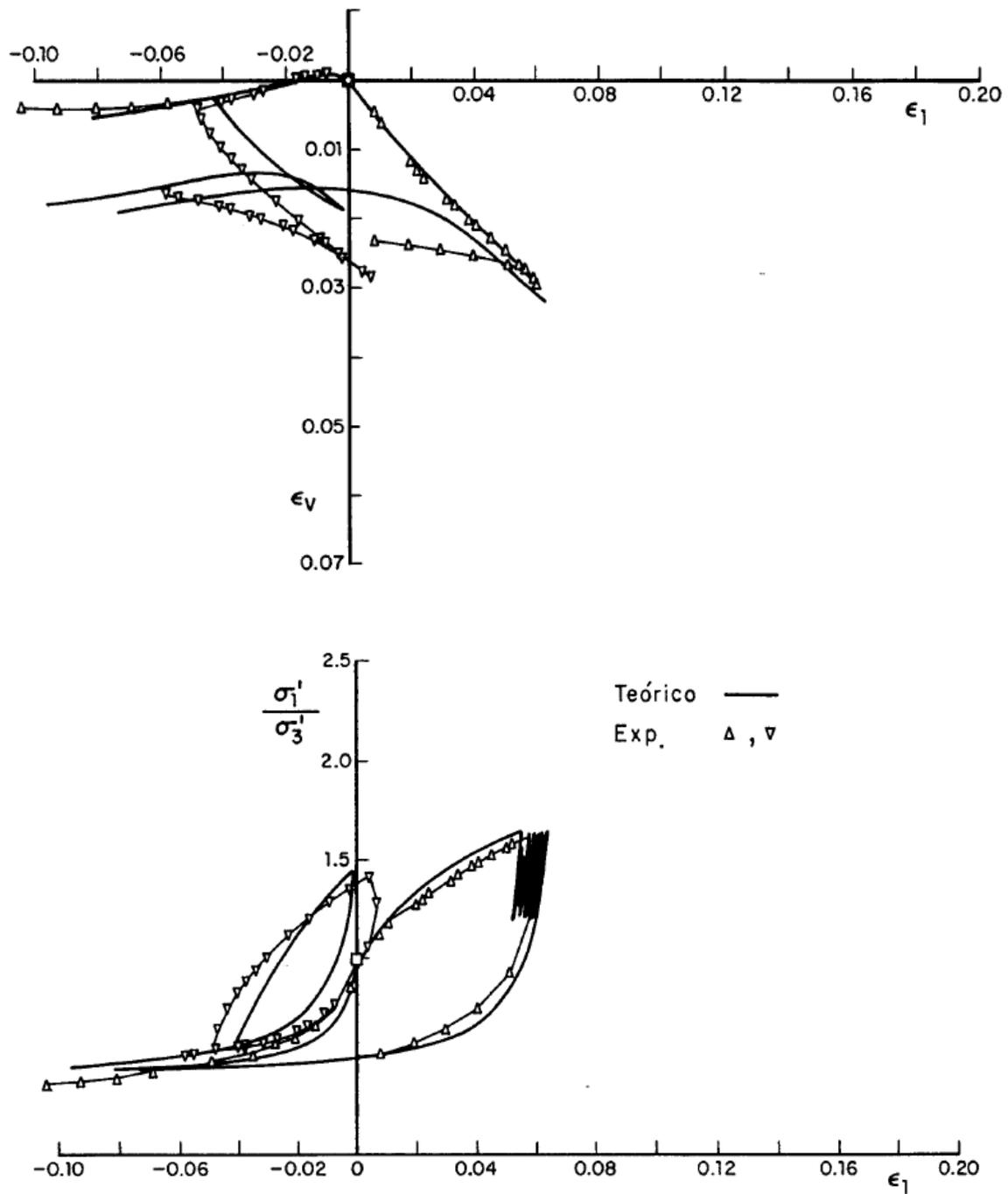


Fig. 2.5.3.1 Comparaciones teórico experimentales para una serie de ensayos triaxiales drenados monótonicos y carga alterna efectuados en un caolín (Rojas González, 1993).

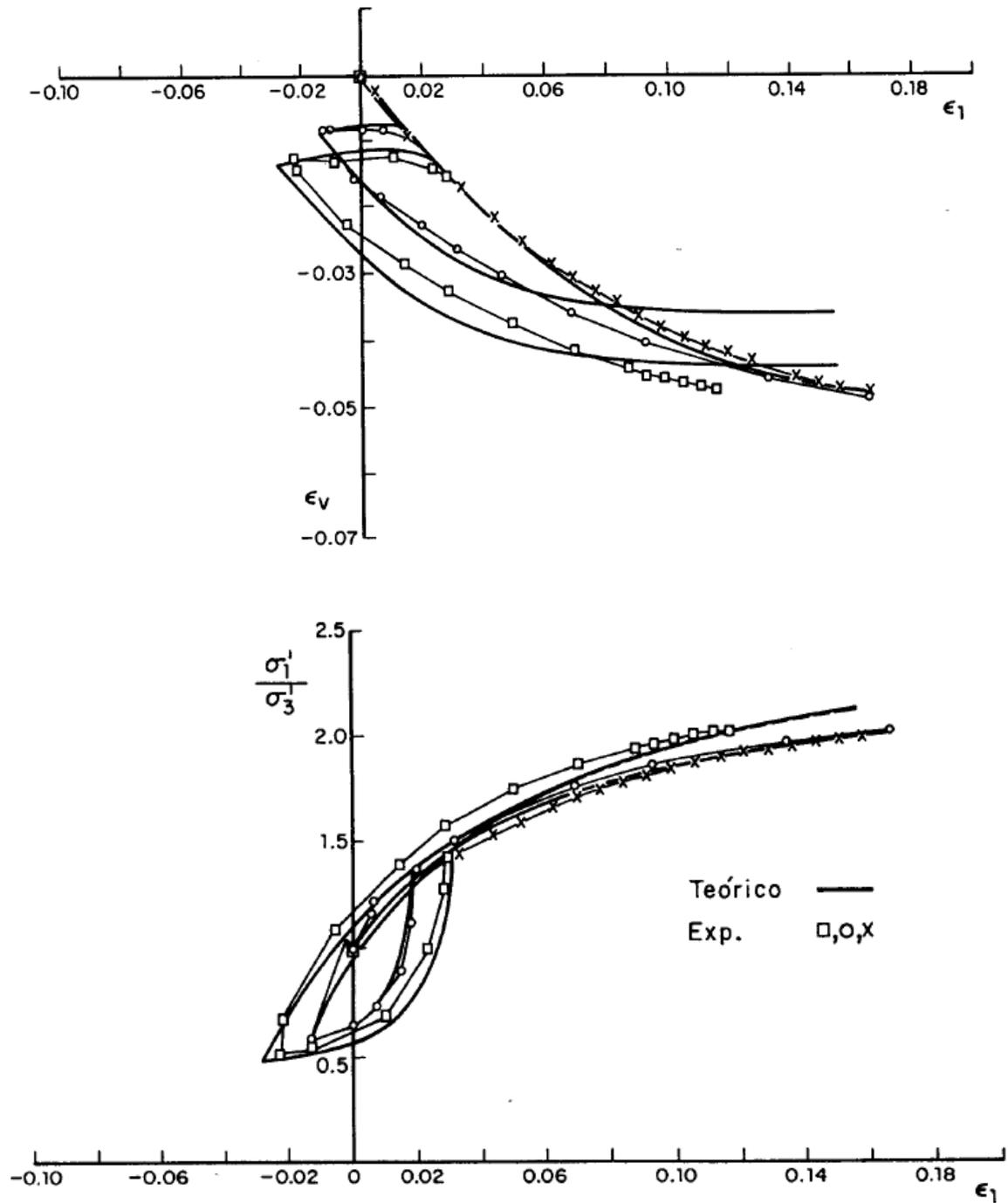


Fig. 2.5.3.2 Comparaciones teórico experimentales para una serie de ensayos triaxiales monótonico y bajo carga alterna efectuados en un caolín (Rojas González, 1993).

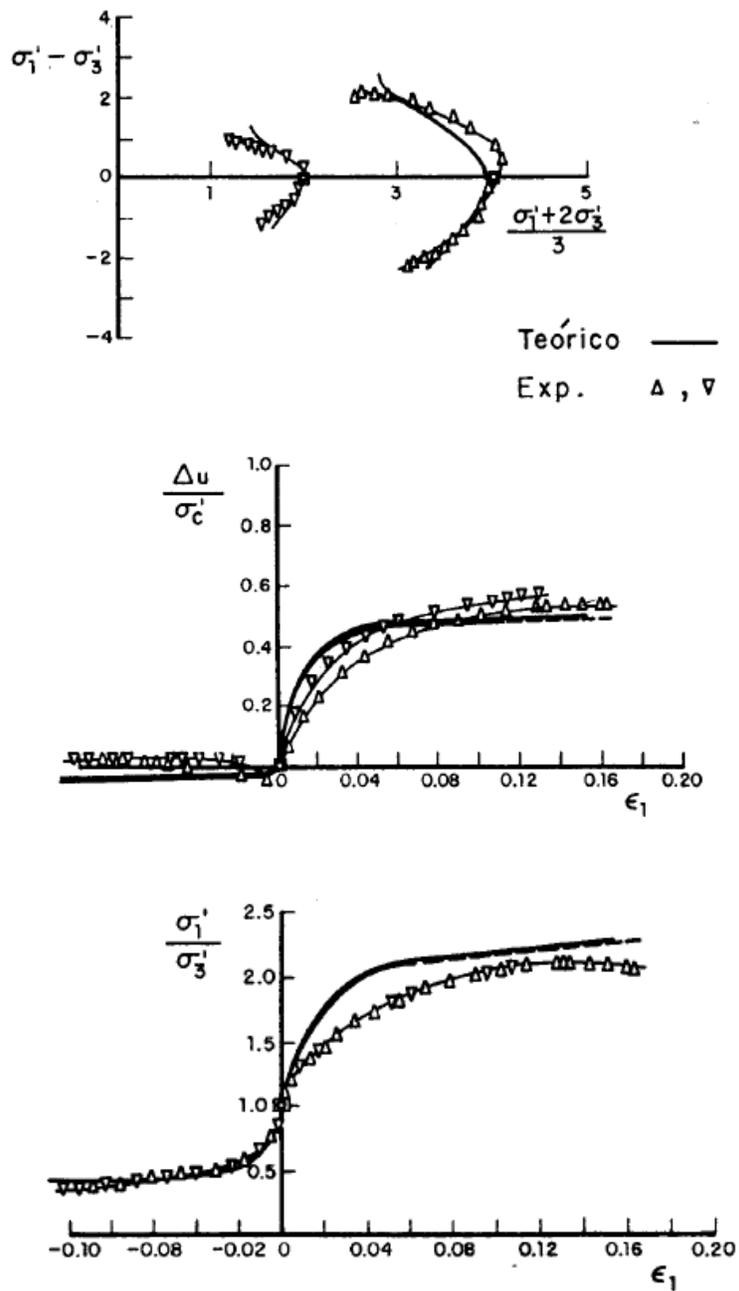


Fig. 2.5.3.3 Comparaciones teórico experimentales para una serie de ensayos triaxiales monotonicos no drenado (Rojas González, 1993).

# DEFORMABILIDAD DE LOS SUELOS.

## 3.1 Introducción.

Se ha estudiado que los materiales del subsuelo tienen además de propiedades elásticas y plásticas, propiedades de alta viscosidad y viscosidad normal, éstas últimas retardan la deformación bajo los esfuerzos aplicados. Este fenómeno es especialmente importante en los materiales finos y muy finos de baja y muy baja permeabilidad como son las arcillas, arcillas limosas y limos arcillosos.

El fenómeno de retardamiento de la deformación volumétrica, se produce cuando el material, fig. (3.1.1) se encuentra saturado y confinado, y por lo tanto no podrá existir cambio de volumen inmediato al aplicar la carga, ya que primeramente el agua gravitacional que ocupa la relación de vacíos deberá ser expulsada para que pueda existir cambio de volumen. En este caso al efectuar una prueba en el odómetro o consolidómetro, se ve que la relación de vacíos  $e_1$ , fig. (3.1.2a) no podrá reducirse a la relación de vacíos  $e_2$  en forma instantánea al aplicar el incremento de presión ( $\sigma_2 - \sigma_1$ ); será necesario que transcurra tiempo para que se verifique el cambio de relación de vacíos. De aquí se deduce que la curva de compresibilidad, podrá trazarse para cambios de relación de vacíos relacionados con períodos de tiempos iguales para los cuales se han dejado actuar los incrementos de carga. Para obtener la curva límite, los incrementos de presión deberán actuar un tiempo

suficiente para que sensiblemente ya no exista cambio de oquedad para cada uno de ellos. En las pruebas del odómetro en arcillas es la práctica común permitir 24 horas para cada incremento, fig. (3.1.2b).

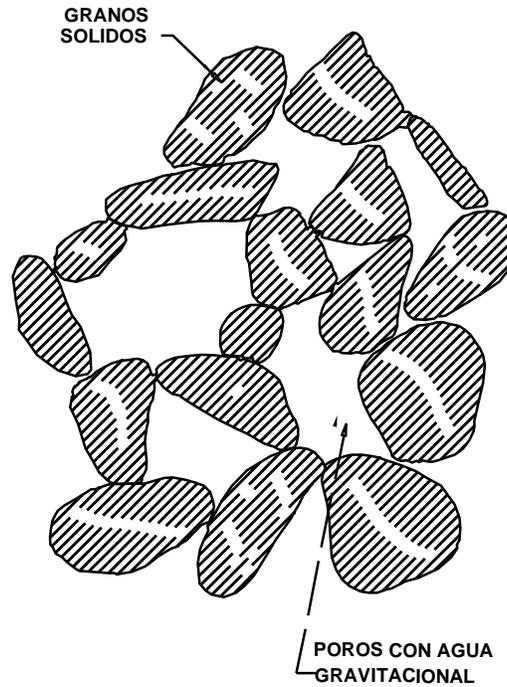


Figura 3.1.1 Material saturado y confinado (Zeevaert, 1979)

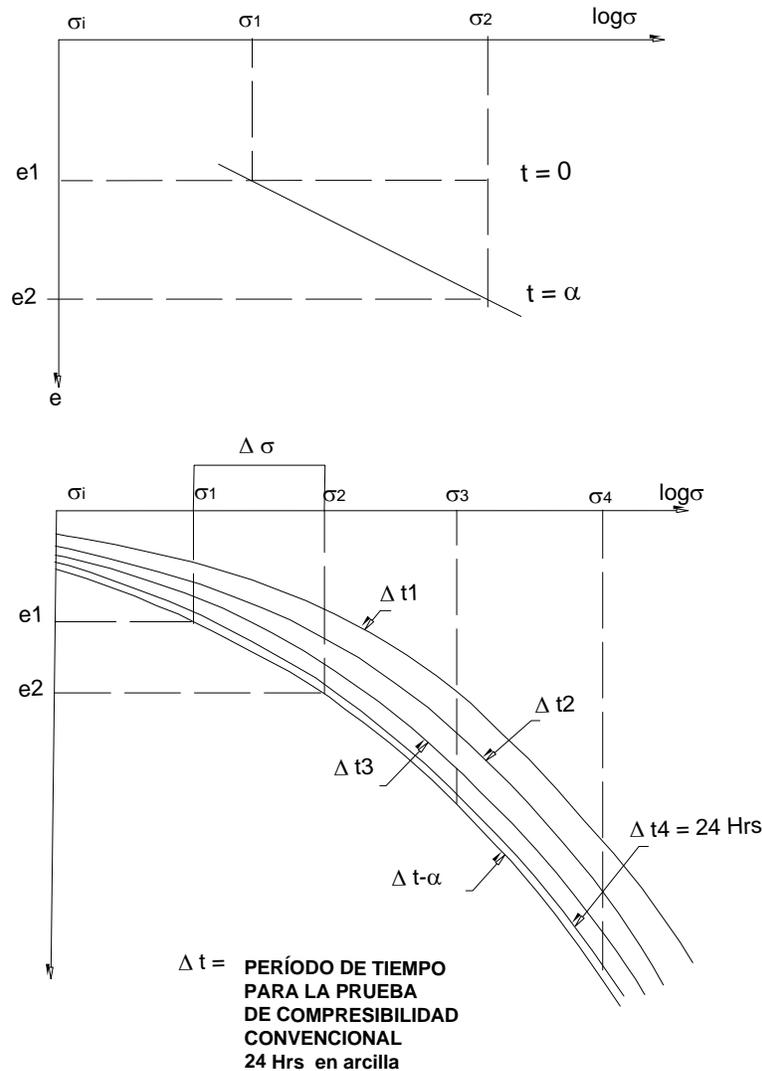


Figura 3.1.2 a) Reducción lenta de la relación de vacíos a la aplicación de la carga b) Compresibilidad de suelos impermeables (Zeevaert, 1998).

Los materiales impermeables como las arcillas requieren de tiempos muy grandes para consolidarse bajo un incremento de carga. La fig. (3.1.3) muestra en forma cualitativa curvas de consolidación para tres tipos de materiales bajo una carga sostenida. Las arenas finas por tener una permeabilidad del orden de  $10^6$  veces mayor que las arcillas se consolidan rápidamente, los limos con  $10^3$  veces más permeabilidad que las arcillas se consolidan con un rapidez intermedia.

Aparentemente la observación muestra que una vez que el agua gravitacional ha sido expulsada de los poros para lograr el cambio de relación de vacíos correspondiente a la presión aplicada, sigue efectuándose una deformación viscoso

intergranular producido por el movimiento relativo de los granos por fenómenos de alta viscosidad. Este fenómeno viscoso intergranular se tratará en especial más adelante, y se conoce como consolidación secundaria; en mecánica de suelos fue tratado desde un punto de vista reológico.

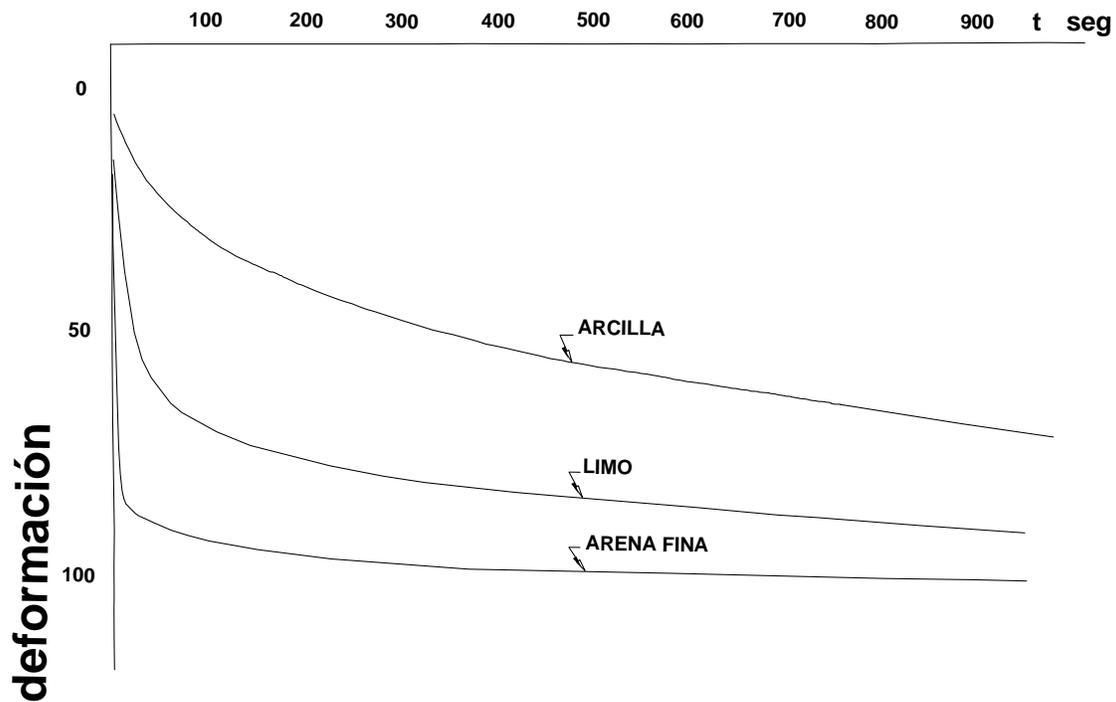


Figura 3.1.3 Curvas de Consolidación (Zeevaert, 1979).

### 3.2 Teoría de la consolidación de Terzaghi.

La teoría de consolidación encontrada por Terzaghi (1925) que se expone a continuación explica exclusivamente el fenómeno hidrodinámico que se verifica por la expulsión del agua gravitacional de un material en el cual no se observa el fenómeno de viscosidad intergranular.

La teoría de la consolidación tiene por objeto encontrar una fórmula que ligue las condiciones de esfuerzo- cambio en la relación de vacíos en cualquier punto de una masa de suelo saturado en un tiempo determinado durante el cual la masa se encuentra sometida a una carga sostenida. Un estrato en el campo se encuentra confinada lateralmente a cero deformación y por lo tanto podrá representarse por la prueba en el odómetro.

Debido a lo complejo del problema es necesario hacer hipótesis simplificadoras, y aún así, se obtendrán soluciones para casos simples y bien definidos. Sin embargo, las soluciones a que se llegue son útiles para obtener, además de una herramienta de cálculo para estos problemas, un entendimiento claro del fenómeno que permita ajustar los resultados a la evaluación de las propiedades fenomenológicas del material, y la deducción de los parámetros necesarios obtenidos en el laboratorio para la resolución de los problemas de consolidación en el campo.

Las hipótesis generales en el desarrollo de la teoría de la consolidación son las siguientes:

1. La masa del suelo es homogénea e isótropa en sentido vertical en toda su extensión.
2. El agua y los granos mismos que constituyen la estructura del suelo son incompresibles.
3. El agua de expulsión es exclusivamente el agua gravitacional y por lo tanto se puede suponer válida la ley de Darcy.
4. El cambio de la relación de vacíos tiende a un valor límite al terminarse el proceso de consolidación teórica relacionado con la expulsión del agua gravitacional.
5. Las propiedades mecánicas de deformación del material son exclusivamente las relacionadas con la elasticidad y plasticidad inmediatas, consecuentemente no son funciones del tiempo.

Para explicar la teoría de consolidación, se puede usar un modelo reológico que cumple con las hipótesis antes enunciadas, fig. (3.2.1). Este dispositivo consiste en un cilindro y pistón, la cavidad del cilindro representa los poros del material. Dentro de la cavidad se coloca un elemento resistente capaz de admitir esfuerzos y el cual representa la estructura del suelo. La llave representa la permeabilidad en la cámara.

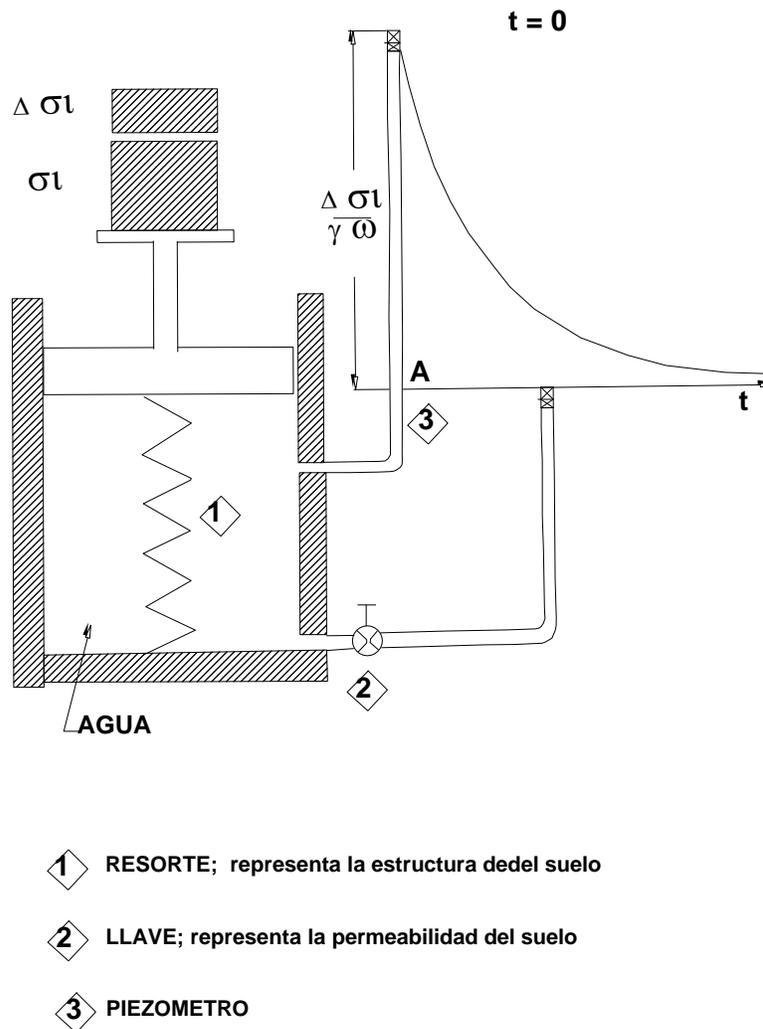


Figura 3.2.1 Modelo reológico para la explicación de la teoría de Consolidación (Zeevaert, 1998).

Imaginemos ahora que la llave se encuentra abierta y el pistón cargado. Evidentemente la carga aplicada será tomada íntegramente por el elemento resistente, por tanto, el agua dentro del cilindro estará libre de presión, la altura del agua en el piezómetro lateral instalado al cilindro estará, por el efecto de vasos comunicantes, en la posición A. Más aun, si en estas condiciones se abre o cierra la llave, el estado de carga en la cámara no se altera.

Ahora cerremos la llave y luego apliquemos un incremento de carga  $\Delta \sigma_i$ . En estas condiciones como el agua no puede salir de la cámara, el émbolo no se mueve, no

existirá cambio de volumen y necesariamente el esfuerzo aplicado  $\Delta\sigma_i$  será igual a la presión del agua en el cilindro, esto es:

$$\Delta\sigma_i = \Delta U_i \quad (3.2)$$

De donde se concluye que el piezómetro subiría a una altura (h) equivalente a

$$\frac{\Delta\sigma_i}{\gamma_w} = \frac{\Delta U_i}{\gamma_w}.$$

Si ahora se abre un poco la llave, inmediatamente el agua empezará a salir forzada por la presión hidráulica interior, y consecuentemente habrá una disminución de la relación de vacíos y una deformación del resorte o estructura del resorte. La estructura del suelo empezara a tomar carga a medida que la presión hidráulica, o exceso hidrostática provocado por la presión aplicada disminuye con el tiempo, hasta llegar un momento para el cual ya no salga más agua porque el exceso hidrostático tiende a ser muy pequeño y la carga es tomada totalmente por el elemento resistente. Se dice entonces que se ha verificado un proceso de consolidación bajo el incremento de presión aplicado  $\Delta\sigma_i$ . Nótese que al final del proceso el suelo sigue saturado, excepto que la relación de vacíos ha disminuido por el efecto de compresibilidad de la estructura del suelo. El suelo por lo tanto no ha sufrido una deshidratación o desecación; simplemente ha disminuido su contenido de agua al volverse más compacto, conservándose saturado durante todo el proceso.

Del anterior razonamiento se deduce que durante el proceso de consolidación, en cualquier tiempo, un incremento de carga tiene que ser equilibrado por esfuerzo intergranular y por la presión de exceso hidrostático en el agua, esto es:

$$\Delta\sigma_i = \Delta\bar{\sigma} + \Delta U \quad (3.2.1)$$

De donde resulta que un cambio con el tiempo en esfuerzo efectivo intergranular es igual y contrario a un cambio de presión en el exceso hidrostático, a saber:

$$\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial t} = -\frac{\partial\Delta U}{\partial t} \quad (3.2.2)$$

De las consideraciones anteriores se puede establecer el porcentaje de consolidación para un incremento de presión  $(\sigma_2 - \sigma_1)$ , esto es:

$$U\% = 100\% \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - \Delta U}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (3.2.3)$$

Para  $t=0$ ,  $\sigma_2 - \sigma_1 = \Delta U_i$  exceso hidrostático inicial. Considerando que el material tiene un coeficiente de compresibilidad volumétrica  $m_v$ , la deformación volumétrica unitaria en el punto considerado cuando  $\Delta U=0$  y la estructura del material toma la carga total será:

$$\Delta \varepsilon_v = m_v (\sigma_2 - \sigma_1) \quad (3.2.4)$$

Si llamamos  $\Delta \varepsilon_{vt}$  la deformación volumétrica unitaria en el tiempo  $t$  para el cual la estructura del material ha tomado el esfuerzo vertical ( $\Delta \sigma_i - \Delta U$ ) esto es:

$$\Delta \varepsilon_{vt} = m_v (\Delta \sigma_i - \Delta U) \quad (3.2.5)$$

Resulta que el porcentaje de consolidación también puede expresarse en términos de deformaciones volumétricas unitaria por medio de:

$$U\% = 100\% \frac{\Delta \varepsilon_{vt}}{\Delta \varepsilon_v} \quad (3.2.6)$$

Así pues, cuando después de un tiempo muy grande  $\Delta \varepsilon_{vt}$  tiende a  $\Delta \varepsilon_v$ ;  $U\%=100\%$ , el proceso de consolidación se ha efectuado totalmente para  $t \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \varepsilon_{vt} = \Delta \varepsilon_v$  y  $U\%=100\%$  y corresponde al instante de la aplicación de la carga.

De aquí la deformación volumétrica con el tiempo será:

$$\Delta \varepsilon_{vt} = \Delta \varepsilon_v \frac{U\%}{100\%} \quad (3.2.7)$$

Y el esfuerzo efectivo será:

$$\Delta \bar{\sigma}_i = \Delta \sigma_i \frac{U\%}{100\%} \quad (3.2.8)$$

Así también el módulo instantáneo de compresibilidad volumétrica será:

$$m_{vt} = m_v \frac{U\%}{100\%} \quad (3.2.9)$$

Conociendo el valor de  $U\%$  como función del tiempo se podrá valorizar  $\Delta \varepsilon_{vt}$ . Para conocer el valor de  $U\%$  será necesario conocer la forma como se disipa el exceso hidrostático  $\Delta U$  con el tiempo.

La fig. (3.2.2a) muestra un estrato de arcilla, el cual se sujeta a un incremento de esfuerzos  $\Delta \sigma$  y se requiere conocer como se disipa el exceso hidrostático en un

punto A con una profundidad Z. El depósito puede ser representado por una probeta confinada a deformación lateral nula, fig. (3.2.2b). El depósito está limitado por estratos de materiales más permeables que permiten la salida del agua y consecuentemente la consolidación del material en cuestión. En el odómetro estos estratos quedan representados por piedras porosas.

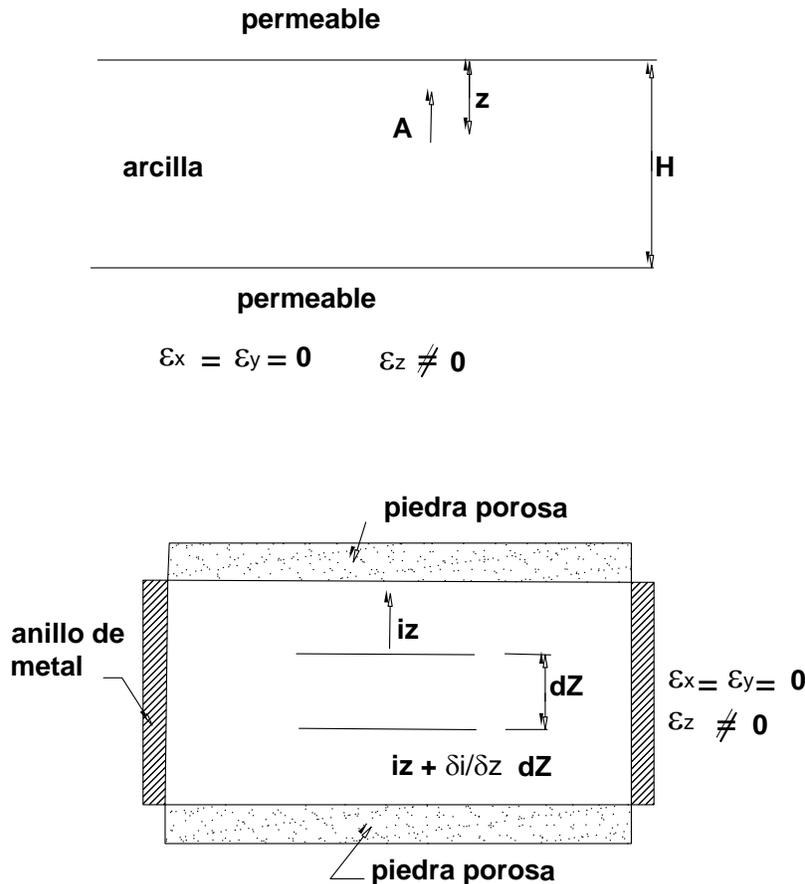


Figura 3.2.2.a) Estrato de arcilla sujeto a incremento de esfuerzo, b) Representación de probeta confinada y Condiciones hidrodinámicas de elemento dz (Zeevaert, 1998).

Al someter un elemento diferencial de espesor dz aun incremento de presión existirá un flujo de agua hacia la superficie permeable que permite la salida del agua. La fig. (3.2.2b) muestra las condiciones hidrodinámicas del elemento dz. El flujo diferencial que pasa a través del elemento por unidad de superficie será según la ley de Darcy el siguiente:

$$k_z \frac{\partial i_z}{\partial z} dz = dq \quad (3.2.10)$$

Si el elemento no cambiara de volumen  $dq$  sería nulo pero puesto que el volumen cambia al comprimirse el suelo,  $dq$  será exactamente igual al cambio de volumen por unidad de tiempo, y consecuentemente a la pérdida de agua.

$$dq = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Pero  $V=V_s+V_v$ , y puesto que el volumen de sólidos no cambia:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v_v}{\partial t}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\frac{\partial v_v}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} V_s$$

El volumen de sólidos en el elemento diferencial es:

$$V_s = \frac{1dz}{1+e_1}; \quad \frac{\partial v_v}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} \frac{dz}{1+e_1} \quad (3.2.11)$$

Por lo que sustituyendo en la ecuación (3.2.10) tendremos:

$$k_z \frac{\partial i_z}{\partial z} = \frac{1}{1+e_1} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.2.12)$$

Nótese que;

$$i_z = \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z}$$

Luego la ecuación (3.2.12) toma la forma como sigue:

$$\frac{(1+e_1)}{\gamma_w} k_z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.2.13)$$

El coeficiente de compresibilidad volumétrica unitaria  $m_v$  queda definido por:

$$m_v = - \frac{1}{1+e_1} \frac{\partial e}{\partial \sigma} \quad (3.2.14)$$

En donde  $e_1$  es la relación de vacíos inicial al empezarse el proceso. La ecuación (3.2.14) se puede escribir en la siguiente forma, ya que  $e$  y  $\bar{\sigma}$  varían con el tiempo.

$$(1 + e_1)m_v \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

Además de la condición fundamental del proceso de consolidación ecuación (3.2) esto es:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

Luego sustituyendo se obtiene:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = (1 + e_1)m_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.2.15)$$

De donde con la ecuación (3.2.13) se obtiene finalmente la ecuación diferencial que rige el fenómeno de consolidación bajo las hipótesis antes expuestas, esto es:

$$\frac{k_z}{m_v \gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

O también:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.2.16)$$

Si durante el proceso de consolidación, para un incremento de presión se supone que las propiedades mecánicas de compresibilidad e hidráulicas  $m_v$  y  $k_z$  no cambian, entonces  $C_v$  es constante y se le da el nombre de coeficiente de consolidación con unidades de  $\text{cm}^2/\text{seg}$ . La expresión (3.2.16) podrá integrarse encontrando una función:

$$U = f(z, t) \quad (3.2.17)$$

La cual al satisfacer las fronteras del problema de un estrato de espesor  $2H$  drenado por ambos lados, nos proporciona los valores del exceso hidrostático para un punto cualquiera del estrato en consolidación y para cualquier valor del tiempo.

La solución general de la ecuación diferencial (3.2.16) es como sigue:

$$U = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{1}{H} \int_0^{2H} \Delta\sigma_1(z) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2H} z dz \right] \left[ \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2H} z \right] e^{-\frac{n\pi}{4H} C_v t} \quad (3.2.18)$$

En esta expresión  $\Delta\sigma_1(z)$  representa el incremento de presión con la profundidad aplicado, y es igual al exceso hidrostático inicial para  $t=0$ , que corresponde al momento de colocar el incremento de esfuerzo  $\Delta\sigma_1$  en la superficie del estrato. Si se considera  $\Delta\sigma_1(z)$  constante con la profundidad  $z$  e igual a  $\Delta U_i$  exceso hidrostático inicial para el tiempo cero, como sucede durante la prueba de consolidación inmediata al aplicar la carga, y efectuando algunas transformaciones matemáticas en la expresión (3.2.10) se llega a lo siguiente:

$$\Delta u = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{4\Delta u_i}{(2m+1)^2 \pi^2} \left[ \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi}{2H} z \right] e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} C_v t} \quad (3.2.19)$$

El valor.

$$\frac{C_v}{H^2} t = T_v \quad (3.2.20)$$

Se le llama “factor tiempo primario” y es un número sin dimensiones.

El  $U\%$  de consolidación a la profundidad  $z$  para un estrato drenado por ambos lados, para el cual se ha incrementado el esfuerzo  $\Delta\sigma_1$  será:

$$U\% = 100\% \left[ 1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_i} \right]$$

Por consiguiente:

$$U_z\% = 100\% \left[ 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{4}{(2m+1)^2 \pi^2} \left[ \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi}{2} \frac{z}{H} \right] e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4} T_v} \right] \quad (3.2.21)$$

Como se observa, esta expresión contiene únicamente números abstractos y representa una familia de curvas. En efecto, para cada valor de  $T_v$  constante se obtendrá una curva haciendo variar  $z/H$ . A estas curvas, fig. (3.2.3) se les da el nombre de isócronas y muestran la distribución del exceso hidrostático a través del depósito a medida que transcurre el tiempo.

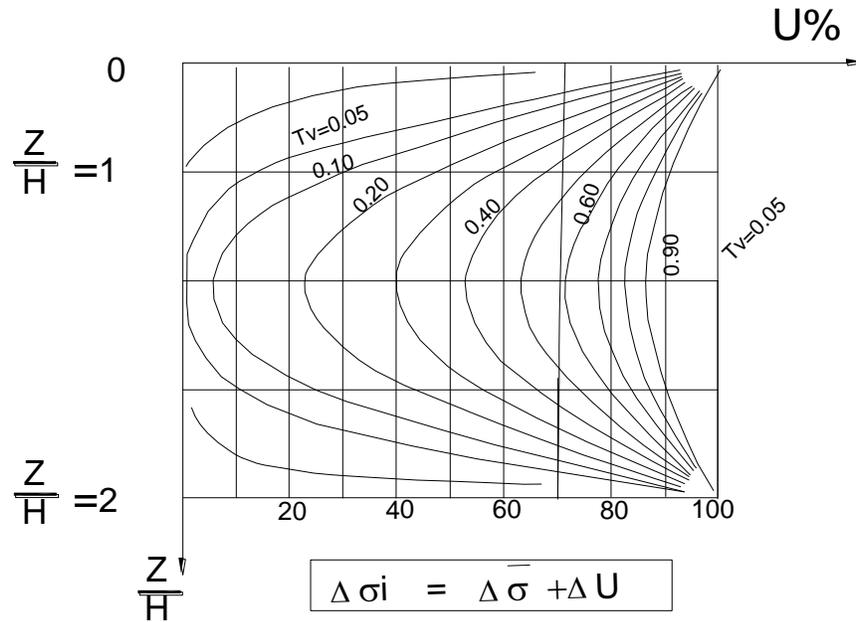


Figura 3.2.3 Curvas de isócronas (Zeevaert, 1998).

De las curvas isócronas se observa que la consolidación de un depósito de material impermeable procede más rápidamente hacia las superficies drenadas que en el centro de éste. Se puede demostrar de la ecuación (3.2.21) que para valores de  $Tv \geq 0.05$  las isócronas pueden representar con suficiente precisión por parábolas.

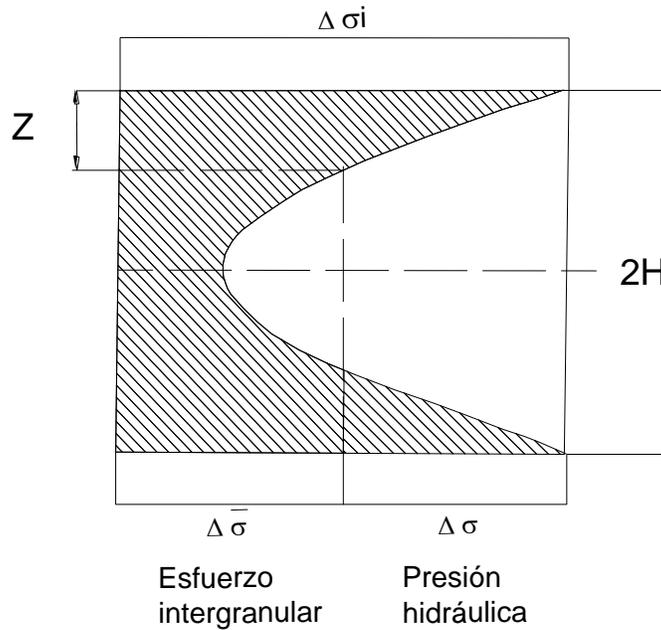


Figura 3.2.4 Distribución de esfuerzos efectivo y neutral en un estrato de arcilla drenado por ambas caras (Zeevaert, 1998).

Desde el punto de vista práctico lo que interesa conocer es el porcentaje medio de consolidación del estrato. Este valor permitirá conocer la deformación volumétrica del estrato compresible. En efecto, tomemos una isócrona cualquiera, fig. (3.2.4) correspondiente a un tiempo cualquiera  $t$ , la compresión volumétrica en el punto 0 a una profundidad  $z$  será:

$$ds = m_{vz} \cdot \Delta\bar{\sigma} \cdot dz \quad (3.2.22)$$

Y la compresión total del estrato; si  $m_{vz}$  es constante en todo su espesor, valdrá

$$s = m_{vz} \int_0^{2H} \Delta\bar{\sigma} dz \quad (3.2.23)$$

La integral representa el área sombreada de esfuerzos efectivos o intergranulares, fig. (3.2.4). Si se designa por  $\Delta\bar{\sigma}m$  el valor del incremento medio del esfuerzo intergranular para ese porcentaje de consolidación la ecuación (3.2.23) no se altera:

$$2H \cdot \Delta\bar{\sigma}m = \int_0^{2H} (\Delta\bar{\sigma}) dz$$

De donde:

$$\Delta\bar{\sigma}m = \frac{1}{2H} \int_0^{2H} (\Delta\bar{\sigma}) dz \quad (3.2.24)$$

Como  $\Delta\bar{\sigma} = \Delta\sigma_i - \Delta u$ , substituyendo,

$$\Delta\bar{\sigma}m = \frac{1}{2H} \int_0^{2H} (\Delta\sigma_i - \Delta u) dz$$

Si  $\Delta\sigma_i$  es constante a través del depósito:

$$\Delta\bar{\sigma}m = \Delta\sigma_i - \frac{1}{2H} \int_0^{2H} (\Delta u) dz$$

En donde:

$$\frac{1}{2H} \int_0^{2H} (\Delta u) dz = \Delta u_m \quad (3.2.25)$$

Representa el incremento de exceso hidrostático medio por consiguiente, se puede operar con los valores medios de los incrementos de esfuerzo: efectivo y presión hidrostática, a saber:

$$\Delta\sigma_m = \Delta\bar{\sigma}_m + \Delta u_m \quad (3.2.26)$$

De donde el porcentaje de consolidación del estrato será:

$$U\% = 100\% \left[ 1 - \frac{\Delta u_m}{\Delta\sigma_i} \right]$$

O también:

$$U\% = 100\% \left[ 1 - \frac{\int_0^{2H} (\Delta u) dz}{2H\Delta u_i} \right]$$

Sustituyendo las integrales por sus valores y efectuando los desarrollos necesarios se llega a la siguiente expresión:

$$U\% = 100\% \left[ 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{(2m+1)^2 \Pi^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \Pi^2 T_v}{4}} \right] \quad (3.2.27)$$

La expresión anterior servirá como primera aproximación en la siguiente forma:

$$U\% = 100\% \left[ 1 - \frac{8}{\Pi^2} e^{-\frac{\Pi^2 T_v}{4}} \right] \quad (3.2.28)$$

La expresión anterior servirá para calcular el % de consolidación del estrato y representa un valor medio del proceso de consolidación a través del espesor del estrato. Como se ve su valor es exclusivamente función de  $T_v$ , de aquí que puede expresarse en la siguiente forma:

$$\frac{U}{100\%} = F_1(T_v) \quad (3.2.29)$$

El porcentaje de consolidación del estrato es función del factor tiempo “ $T_v$ ”. La expresión  $F(T_v)$  se conoce como la función de Terzaghi para la consolidación teórica. Aquí se usará el índice (I) cuando dicha función representa un estrato de espesor  $2H$  drenado por ambos lados o (H) cuando esta drenado por un lado exclusivamente, pero tal que el exceso hidrostático inicial sea constante o varíe linealmente aumentando con la profundidad, ya que se verá más adelante que existen otras funciones para condiciones de esfuerzos iniciales diferentes.

La Fig. (3.2.5) muestra tres casos para los cuales la función de Terzaghi, es válida y en cuyo caso la variable independiente es:

$$T_v = \frac{C_v}{H^2} t \quad (3.2.30)$$

En el caso que el estrato se encuentre sobre el material impermeable que impida el drenado por la base, podrá usarse la misma función  $F_1(T_v)$  y utilizar el mismo factor tiempo si se designa su espesor por  $H$ .

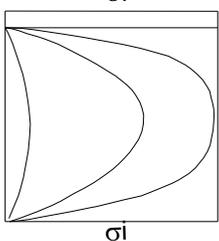
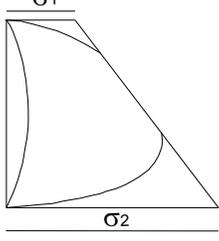
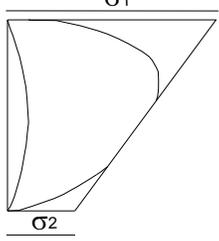
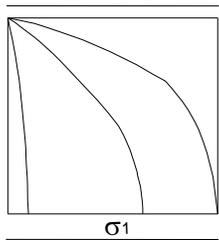
CASO		esfuerzos aplicados para $t=0$	$T_v$	$F(T_v)$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-bottom: 5px;">PERMEABLE</div> <div style="text-align: center;"> <math>2H</math>  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-top: 5px;">① PERMEABLE</div>	<div style="text-align: center;"> <math>\sigma_i</math>  </div>	CONSTANTES	$\frac{C_v}{H^2} t$	$F_1$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-bottom: 5px;">PERMEABLE</div> <div style="text-align: center;"> <math>2H</math>  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-top: 5px;">② PERMEABLE</div>	<div style="text-align: center;"> <math>\sigma_1</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math>\sigma_2</math> </div>	CRECEN CON LA PROFUNDIDAD	$\frac{C_v}{H^2} t$	$F_1$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-bottom: 5px;">PERMEABLE</div> <div style="text-align: center;"> <math>2H</math>  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-top: 5px;">③ PERMEABLE</div>	<div style="text-align: center;"> <math>\sigma_1</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math>\sigma_2</math> </div>	DECRECEN CON LA PROFUNDIDAD	$\frac{C_v}{H^2} t$	$F_1$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-bottom: 5px;">PERMEABLE</div> <div style="text-align: center;"> <math>H</math>  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-top: 5px;">④ IMPERMEABLE</div>	<div style="text-align: center;"> <math>\sigma_1</math>  </div>	CONSTANTES	$\frac{C_v}{H^2} t$	$F_1$

Figura 3.2.5 Funciones de Terzaghi validas (Zeevaert, 1998)..

En las figs. (3.2.6) y (3.2.7) se ha representado la función de consolidación gráficamente, tanto en escalas numéricas como semi-logarítmica. Se observa que la curva tiende a ser asintótica rápidamente para valores de  $T_v=1.5$  y para valores de  $T=0.1$  alcanza rápidamente  $U\%=35\%$ . Esta observación es muy importante para los razonamientos que siguen.

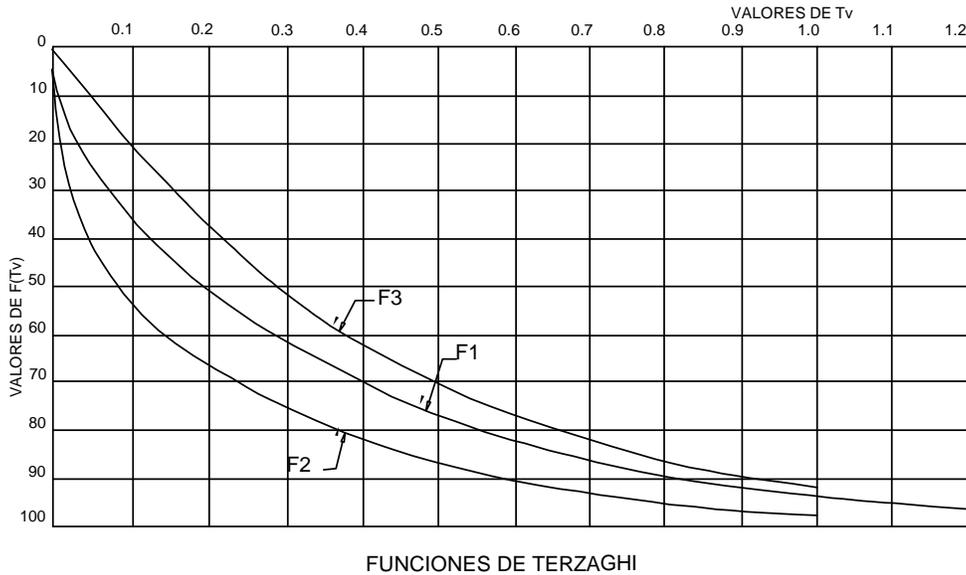


Figura 3.2.6 Funciones de consolidación gráficas numérica (Zeevaert, 1998).

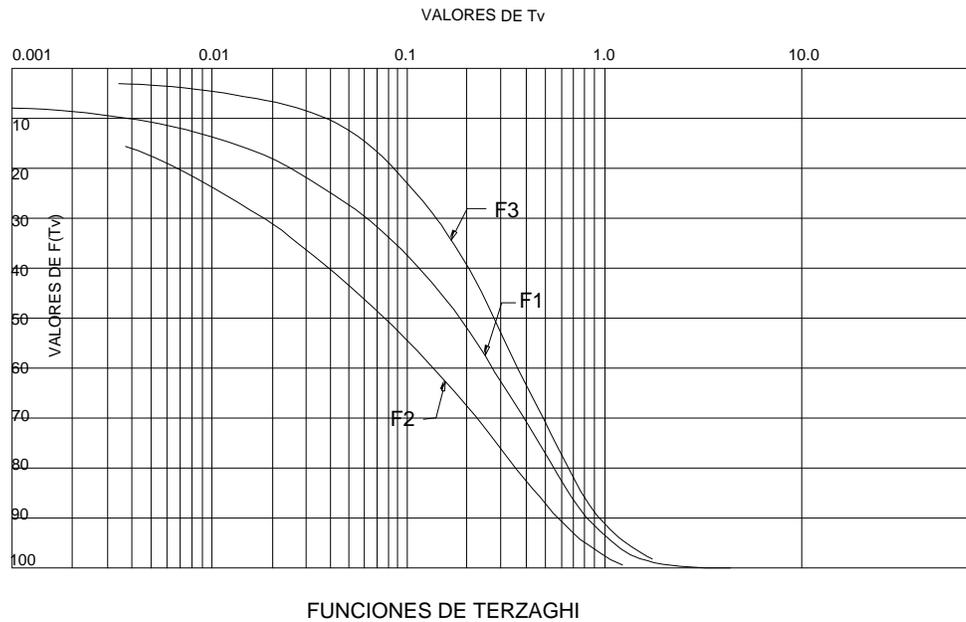


Figura 3.2.7 Funciones de consolidación gráficas logarítmica (Zeevaert, 1998).

En las graficas figs, 3.2.6 y 3.2.7, también se han representado otras dos funciones que se han denominado  $F_2(Tv)$  y  $F_3(Tv)$  éstas fueron derivadas de Terzaghi y Fröhlich, y sirven para casos en que la presión inicial aplicada al depósito de arcilla sea como muestran los casos 5 y 6 que se muestran en la Fig. (3.2.8).

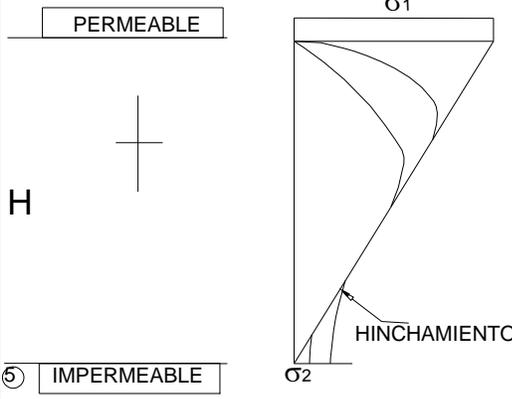
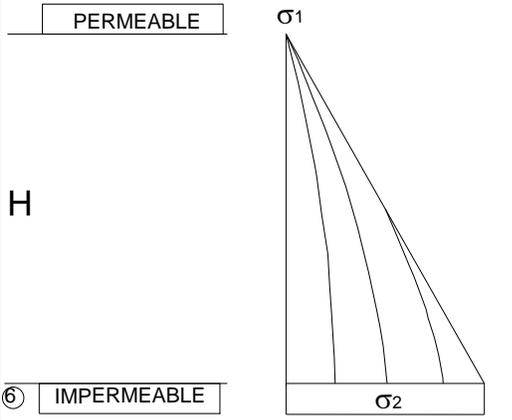
CASO		esfuerzos aplicados para t=0	Tv	F(Tv)
 <p style="text-align: center;">PERMEABLE</p> <p style="text-align: center;">H</p> <p style="text-align: center;">⑤ IMPERMEABLE</p>	$\sigma_2 = 0$ $\sigma_1 \gg \sigma_2$	$\frac{Cv}{H^2}t$	$F_2$	
 <p style="text-align: center;">PERMEABLE</p> <p style="text-align: center;">H</p> <p style="text-align: center;">⑥ IMPERMEABLE</p>	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 \gg \sigma_1$	$\frac{Cv}{H^2}t$	$F_3$	

Figura 3.2.8 Funciones  $F_2$  y  $F_3$  derivadas por Terzaghi y Fröhlich (Zeevaert, 1998).

Así pues, conociendo la función de consolidación podrá calcularse la compresión que sufre un estrato de espesor  $2H$  con el tiempo por medio de la de la ecuación (3.2.7)

$$\Delta\varepsilon_{vt} = \Delta\varepsilon_v \frac{U}{100\%} \quad (3.2.31)$$

En donde:

$$\Delta\varepsilon_{vt} = \frac{S_t}{2H} \quad , \quad \Delta\varepsilon_v = \frac{S_1}{2H}$$

Y

$$\frac{U}{100\%} = F(Tv) \quad (3.2.32)$$

Por consiguiente:

$$S_t = S_1 F(Tv) \quad (3.2.33)$$

Representa la compresión final del estrato después de haberse verificado el proceso de consolidación, esto es, cuando  $F(Tv)=1$ . En efecto, para un tiempo muy grande  $\Delta u \rightarrow 0$  y  $\Delta\sigma \rightarrow \Delta\sigma_i$ . Por consiguiente:

$$S_1 = m_v \Delta\sigma_i (2H) \quad (3.2.34)$$

El valor del porcentaje de consolidación es función exclusiva del factor tiempo primario ( $Tv$ ) de donde se deduce que si se tiene dos estratos de espesores  $2H_1$  y  $2H_2$  respectivamente, drenados igualmente, entonces para el mismo grado de consolidación los tiempos reales de consolidación estarán en la proporción.

$$\frac{Cv_1 \bullet t_1}{Cv_2 \bullet t_2} = \frac{H_1^2}{H_2^2} \quad (3.2.35)$$

Esto es, si el coeficiente medio de consolidación es igual para ambos, entonces:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{H_1^2}{H_2^2} \quad (3.2.36)$$

Por medio de esta relación importante podrán efectuarse estimaciones preliminares de la consolidación primaria cuando en la práctica se conoce el comportamiento de un estrato y sus características de drenado.

- a) Coeficiente de consolidación.

El próximo paso importante en la teoría de la consolidación es la determinación del coeficiente de consolidación.

$$C_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} \quad (3.2.37)$$

El cual depende de la propiedad hidráulica coeficiente de permeabilidad, del coeficiente de compresibilidad volumétrica unitario y del peso unitario del agua, sus unidades son cm<sup>2</sup>/seg. Conociendo estas propiedades mecánicas se puede estimar  $C_v$ . Sin embargo, existe la dificultad de poder determinar con precisión en materiales impermeables como los limos y arcillas, el coeficiente de permeabilidad. De esta dificultad resulta que la manera práctica de efectuar la determinación de  $C_v$  es por medio de pruebas de consolidación en el odómetro al momento de realizar la prueba para conocer la compresibilidad del material. La prueba del odómetro representa el caso I, Fig. 3.2.2 b) y por lo tanto se puede aplicar la  $F_1(T_v)$ , Fig. (3.2.6).

Al aplicar un incremento de presión  $\Delta\sigma$  a la probeta colocada en el odómetro, se obtiene una curva de consolidación como la que muestra la Fig. (3.2.9) de donde se observa que la deformación volumétrica no termina como indica la teoría antes expuesta, pues al llegar a su término la consolidación teórica, y en la mayoría de los casos, en las cercanías de  $T_v=1.0$  la compresión continua. El exceso hidrostático remanente es muy pequeño y la presión aplicada ha sido transmitida a la estructura del material, la cual se sigue deformando por efectos viscosos intergranulares. Al fenómeno antes expuesto se le denomina consolidación secundaria. Así pues, la consolidación teórica se verifica únicamente en la primera parte del proceso. Es de hacerse notar para estudios posteriores que la teoría de consolidación explica el fenómeno de retardamiento hidrodinámico que depende de la permeabilidad del material y del espesor del estrato.

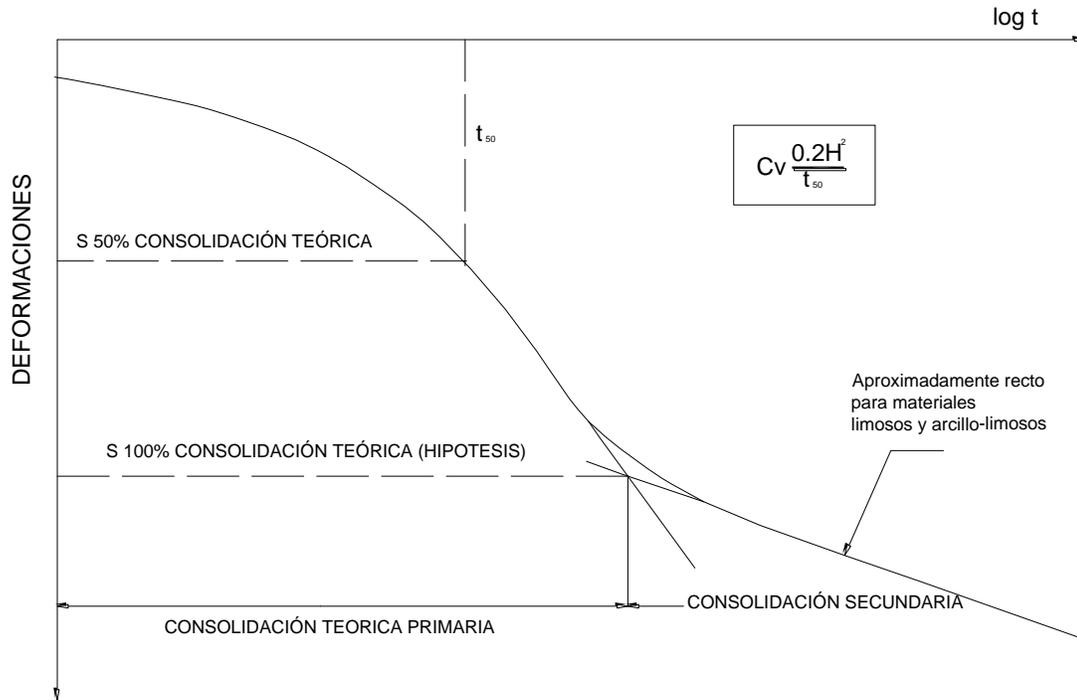


Figura 3.2.9 Funciones  $F_2$  y  $F_3$  derivadas por Terzaghi y Fröhlich (Zeevaert, 1998).

Para el cálculo de la deformación con el tiempo es necesario valorizar aproximadamente el fenómeno hidráulico de retardamiento de la compresión, para lo cual es necesario conocer el valor medio de  $C_v$ . Cuando el material es de baja compresión secundaria se puede utilizar el procedimiento propuesto por Casagrande para valorizar el coeficiente de consolidación. Este procedimiento empírico consiste en suponer, Fig. (3.2.9) que la intersección de las tangentes a la curva teórica y la compresión secundaria definen aproximadamente el 100% de consolidación teórica. Conociendo este punto se toma el valor del tiempo que correspondería a 50% de consolidación teórica para el cual  $T_v=0.197$ , en estas condiciones el valor de  $C_v$  se calcula como sigue:

$$C_v = \frac{0.2H^2}{t_{50}} \quad (3.2.38)$$

Aquí  $2H$  representa el espesor de la probeta en el momento de aplicar el incremento de presión  $\Delta\sigma$ . Los valores  $C_v$  así obtenidos se grafican contra la presión media del incremento considerado; esto es, contra:  $\sigma_0 + (1/2) \Delta\sigma$ . En el

capítulo siguiente se estudiara como obtener el valor de  $C_v$ , tomando en cuenta el fenómeno de consolidación secundaria.

Para proporcionar una idea del valor del coeficiente de consolidación para materiales arcillosos de alta y muy alta compresibilidad se expone el siguiente cálculo utilizando la expresión (3.2.37) con valores imaginarios dentro del rango probable de materiales impermeables.

	$m_{vI}$	$k$	$C_v$
compresibilidad	$\text{cm}^2/\text{Kg}$	$\text{cm}/\text{seg}$	$\text{cm}^2/\text{seg}$
Muy alta (arcilla limosa)	0.1	$10^{-8}$	$10^{-4}$
Alta (limo arcilloso)	0.05	$5 \times 10^{-7}$	$X10^{-2}$

Así pues, si un estrato es de 20m de espesor drenado por ambos lados, para alcanzar el 50% de consolidación teórica, tardaría:

$$C_v = \frac{k}{m_{vI} \gamma_w} \quad \text{y} \quad t = \frac{0.2H^2}{C_v}$$

En el primer caso                      63.5 años, y

En el segundo caso                    0.64 años

Se ve pues la importancia que tiene el poder conocer la deformación con el tiempo, ya que la compresión para 50% de consolidación teórica para un incremento de esfuerzo de  $\Delta\sigma = 0.5 \text{ Kg}/\text{cm}^2$ , sería:

$$S_t = (m_v \Delta\sigma 2H) \bullet 0.5$$

En el primer caso 50 cm en 63.5 años y, en el segundo 25 cm en 0.64 años. ¿Qué deposito sería menos deseable desde el punto de vista de hundimientos para la construcción apoyada sobre él?

b) Coeficiente de permeabilidad

De la prueba de consolidación para determinado nivel de carga  $\sigma_1$  y relación de vacíos  $e_1$ , se obtienen los valores medios de:

1.  $C_v$ : Coeficiente de consolidación.
2.  $m_{v1}$ : Coeficiente de compresibilidad volumétrica unitaria.

De los valores obtenidos se puede calcular el coeficiente medio de permeabilidad por medio de:

$$k = C_v m_{v1} \gamma_w \quad (3.2.39)$$

El valor así obtenido corresponderá a la relación de vacíos media del proceso, esto es:

$$e_m = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$$

En donde  $e_1$  es la relación de vacíos al iniciar el proceso y  $e_2$  es la relación de vacíos correspondiente a la compresión alcanzada para 100% de consolidación teórica.

### c) Validez de la Teoría de consolidación

Con frecuencia en mecánica de suelos se formula la pregunta sobre la validez de la Teoría de la consolidación, ya que la ecuación diferencial (3.2.15)

$$\frac{k}{m_v \gamma_w} \frac{\partial u^2}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Que rige el fenómeno, ha sido integrada suponiendo  $k$  y  $m_v$  constantes. Sin embargo, estos valores no pueden considerarse como estrictamente constantes durante el proceso. La interpretación se efectúa sobre la base de que los valores medios son independientes del incremento del esfuerzo efectivo aplicado y del tiempo.

Se ve que la ecuación diferencial que rige la consolidación teórica se ha supuesto correctamente que en todo momento se verifica:

$$\Delta \sigma_{total} = \Delta \bar{\sigma}_{efectiva} + \Delta u_{hidraulica}$$

De tal manera que en forma gradual durante el proceso, se aplica sobre el material el esfuerzo según la ecuación (3.2.27)

$$\Delta\bar{\sigma} = \Delta\sigma \cdot F(Tv_1)$$

Lo que implica que deberá verificarse con la misma rapidez la deformación de la estructura del suelo para que el concepto de aplicación de esfuerzo efectivo no se altere y  $F(Tv)$  sea válida. El anterior razonamiento indica que la teoría de consolidación es válida para los fenómenos elásticos-plásticos instantáneos de deformación intergranular del material, de donde se deduce también que la ecuación diferencial de Terzaghi será reversible exclusivamente en su parte elástica.

Se estudiaron los fenómenos reológicos y se expuso la importancia del fenómeno viscoso intergranular cuya deformación es función del tiempo. Por lo tanto:

$$S = f(t)H\Delta\sigma \quad (3.2.40)$$

De aquí se deduce que:

Y por consiguiente la ecuación (3.2.15) no puede integrarse fácilmente. Sin embargo de pruebas cuidadosas en materiales arcillosos de baja compresión secundaria se concluye que la teoría de consolidación responde con buena precisión hasta porcentajes de consolidación de aproximadamente 70%. La fig. (3.2.9) muestra cualitativamente el momento en que se separa la curva teórica de la curva real obtenida en el laboratorio.

### **3.3 Teoría de consolidación para materiales que exhiben el fenómeno plasto-viscoso intergranular. (Consolidación Secundaria)**

#### **3.3.1 Antecedentes.**

La compresión en función del tiempo correspondiente al fenómeno de retardamiento hidrodinámico de la deformación en suelos impermeables saturados puede estudiarse utilizando la teoría de consolidación de Terzaghi. Esta teoría supone que el suelo es un material de estructura resistente que admite esfuerzo y

que se puede comprimir hasta un valor bien definido que se calcula por medio del coeficiente de compresibilidad volumétrica.

La estructura del suelo queda representada por un elemento resistente que puede deformarse en forma inmediata a medida que el esfuerzo efectivo progresa y el cual, finalmente, recibe toda la carga, sin embargo, el agua atrapada en los poros retarda la compresión por el fenómeno exclusivamente hidrodinámico. Durante este proceso hidrodinámico de consolidación el agua de los poros toma parte de la carga aplicada.

La teoría de consolidación de Terzaghi aparentemente proporciona resultados satisfactorios en el cálculo de compresiones en función del tiempo, en depósitos de arcilla, para una parte de la primera etapa de la consolidación, durante la cual se verifica el proceso hidrodinámico. Sin embargo, cuando la compresión ya está adelantada se observa que la curva real se desvía de la teórica.

El hecho es que el comportamiento real del suelo aparece explícitamente para determinado tiempo después de haberse verificado la parte importante del proceso hidrodinámico después de la cual se observa principalmente los fenómenos viscosos- intergranulares del material. El efecto plasto-viscoso que se observa se debe principalmente al resbalamiento de los granos entre sí, buscando posiciones más estables, al verificarse el fenómeno viscoso intergranular, Fig. (3.3.1.1). Por consiguiente, el comportamiento mecánico real de la estructura del suelo es elástico-plástico y plasto-viscoso. Una fracción importante de la compresión elástica, plástica y parte del fenómeno de viscosidad intergranular, se verifica durante el proceso hidrodinámico de consolidación según la teoría de consolidación de Terzaghi y a medida que la estructura del material soporta esfuerzos efectivos. Sin embargo, después de que la compresión primaria teórica ha alcanzado un grado avanzado de consolidación, puede observarse que la compresión y consecuentemente el cambio volumétrico del material continúa. Esta compresión se conoce en mecánica de suelos como consolidación secundaria, y corresponde al comportamiento viscoso intergranular del material durante el cual se verifican fenómenos de deformación volumétrica plástico-viscosa, su magnitud decrece con el tiempo, motivando finalmente la solidificación del material bajo la carga aplicada.

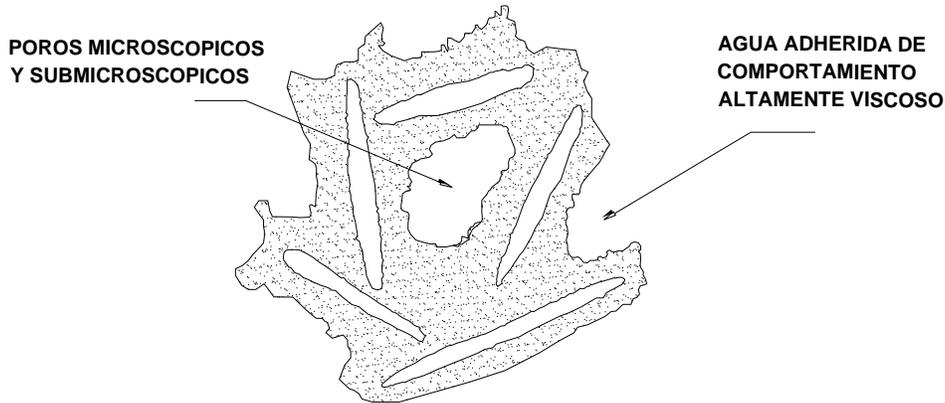


Figura 3.3.1.1 Esquema de una estructura de suelo que exhibe el fenómeno viscoso intergranular (Zeevaert, 1979).

De acuerdo con la explicación anterior, la consolidación de un depósito de arcilla puede dividirse en dos partes fundamentales que son: primero, la compresión debida al retardamiento hidrodinámico producido exclusivamente por el agua gravitacional conocida como consolidación de Terzaghi o teoría primaria de consolidación, que implica principalmente un retardamiento hidrodinámico de la deformación elasto-plástica y, segundo, la compresión que recibe el nombre de consolidación secundaria, representada por una ley fenomenológica de compresión que rige, principalmente, los fenómenos plásticos de retardamiento viscoso entre los granos. En algunos de los casos dentro de cierto rango del tiempo, esta compresión es una ley función lineal del logaritmo del tiempo. La ley logarítmica lineal fue reportada por primera vez por K.A.S. Buisman (1936) en Holanda, de observaciones en pruebas de laboratorio y en el campo. La ley fenomenológica observada para tiempos grandes después de haberse efectuado la mayor parte del proceso hidrodinámico de la consolidación teórica es la siguiente:

$$\delta_v = C_t \log \frac{t}{t_0} \quad (3.3.1)$$

Y queda representada aproximadamente por una línea recta en papel semilogarítmico. En esta expresión  $C_t$  representa la pendiente de la línea y  $t_0$  el tiempo para el cual se observa de principio la ley logarítmica lineal. La mayoría de los depósitos lacustres y marinos de arcillas, arcillas limosas, limos arcillosos y limos en general, se ajustan, tanto en el laboratorio como en el campo, con bastante aproximación a la ley fenomenológica arriba expresada.

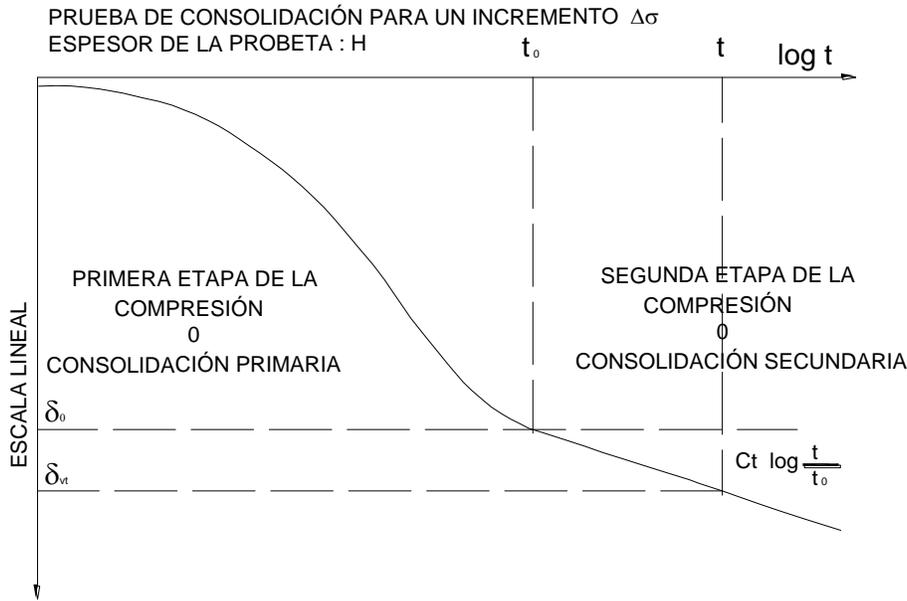


Figura 3.3.1.2 Curva de consolidación de materiales que exhiben el fenómeno de viscosidad intergranular (Zeevaert, 1998).

En la Fig. (3.3.1.2) se muestra una curva ideal de consolidación de alguno de los materiales que arriba se citan, efectuada en el odómetro. Imaginemos que el efecto secundario empieza a observarse para el tiempo  $t_0$ , en estas condiciones la compresión en la probeta para tiempos mayores que  $t_0$  queda representada por la siguiente expresión:

$$\delta_{vt} = \delta_0 + C_t \log \frac{t}{t_0} \quad (3.3.2)$$

Dividiendo por el espesor H de la probeta e incremento de presión el fenómeno, se tiene:

$$\frac{\delta_{vt}}{H\Delta\sigma} = \frac{\delta_0}{H\Delta\sigma} + \frac{C_t}{H\Delta\sigma} \log \frac{t}{t_0} \quad (3.3.3)$$

Llamando por definiciones:

$\frac{\delta_{vt}}{H\Delta\sigma} = m_v t$  ;  $\text{cm}^2 / \text{kg}$ ; coeficiente instantáneo de compresibilidad volumétrica unitaria.

$\frac{\delta_{v0}}{H\Delta\sigma} = m_{v0}$  ;  $\text{cm}^2 / \text{kg}$ ; coeficiente de compresibilidad volumétrica primaria para la compresión originada en las cercanías del quiebre de la curva de consolidación.

$\frac{Ct}{H\Delta\sigma} = m_t$  ;  $\text{cm}^2 / \text{kg}$ ; coeficiente de compresibilidad volumétrica secundaria del fenómeno viscoso- intergranular.

Según lo anterior se puede escribir:

$$m_{v,t} = m_{v0} + m_t \log \frac{t}{t_0} \quad (3.3.4)$$

Así la deformación en función del tiempo para  $t > t_0$  , será:

$$\delta_{v,t} = m_{v,t} \cdot \Delta\sigma \cdot H \quad (3.3.5)$$

La variación del valor  $m_t$  definida por la pendiente de la ley fenomenológica deberá investigarse para diferentes niveles e incrementos de esfuerzo. Durante un incremento de esfuerzo pequeño bajo el cual se está produciendo el fenómeno de compresión y cuando la ley queda definida por una línea recta en papel semi-logarítmico, el valor de  $m_t$  es constante. Sin embargo, el valor de  $m_t$  varía con el nivel de esfuerzo total aplicado como se discutirá adelante.

La Fig. (3.3.1.3) muestra en forma esquemática varias curvas de deformación contra el tiempo de materiales saturados, trazados en papel semi-logarítmicos, que se obtienen en el laboratorio donde se observa el efecto de la compresión secundaria. La curva (a) muestra el comportamiento cuando el efecto de la compresión secundaria es pequeño. La curva (b) representa un valor intermedio de  $m_t$  y la curva (c) representa un material con un retardamiento hidrodinámico o efecto del tiempo primario mínimo y muy alta compresión secundaria.

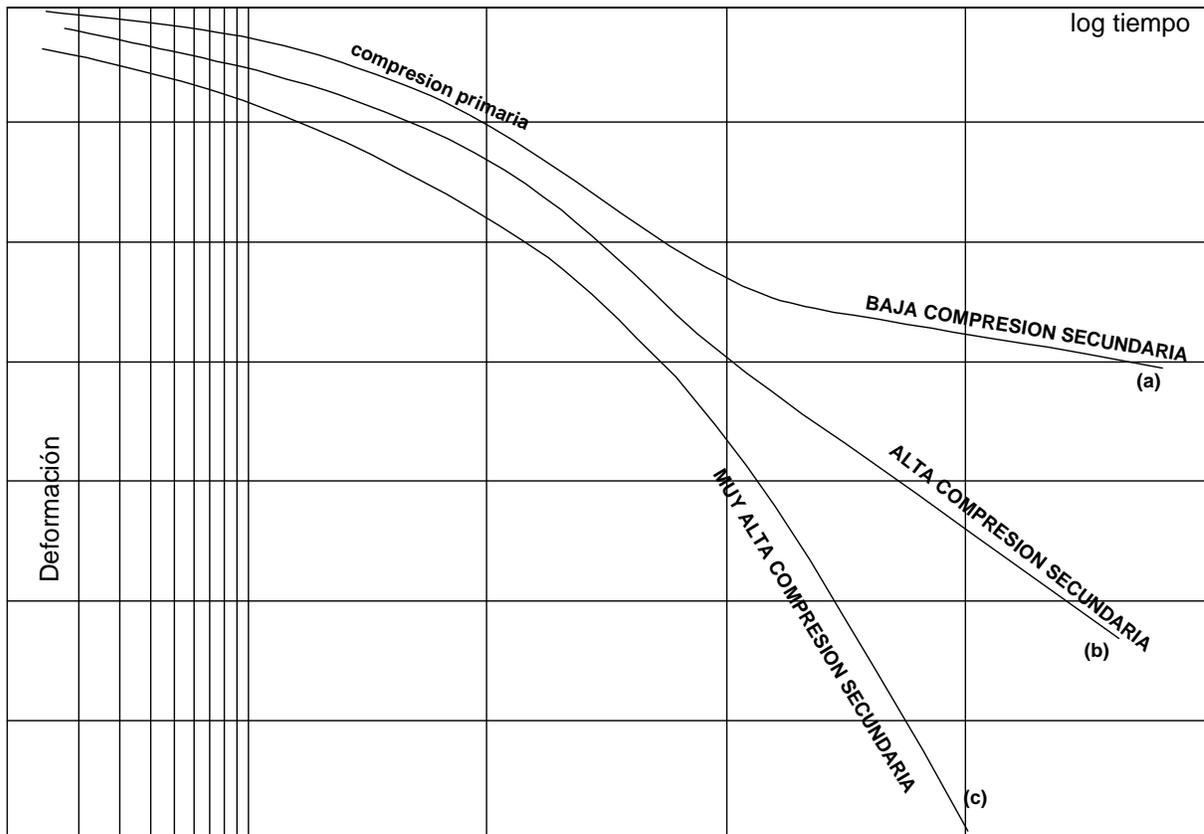


Figura 3.3.1.3 Curvas de consolidación que muestran el efecto de la compresión secundaria (viscosidad intergranular) (Zeevaert, 1979).

### 3.3.2 Consideraciones Sobre la Estructura del suelo.

De lo anterior puede concluirse que la teoría de consolidación de Terzaghi no puede explicar por sí sola el fenómeno de deformación volumétrica con el tiempo de los sedimentos impermeables. Se observa que el fenómeno hidrodinámico produce un retardamiento de las deformaciones elasto-plásticas y viscosas intergranulares y a la terminación del retardamiento hidrodinámico de los fenómenos de deformación volumétrica elasto-plástica, se hace notorio solamente el fenómeno de deformación volumétrica plasto-viscosa intergranular, la cual puede quedar aproximadamente representada por una ley logarítmica lineal, para determinado rango del tiempo. Sin embargo, las leyes expuestas anteriormente no conducen a una interpretación totalmente racional del fenómeno y por

consiguiente, podrán establecerse únicamente correlaciones semi-empíricas, que aunque en la práctica generalmente han producido resultados satisfactorios no justifican en forma explícita el comportamiento de los sedimentos impermeables. La principal dificultad es pasar de los resultados obtenidos en pequeñas probetas en el laboratorio a la interpretación de la compresión de los materiales en el campo. Consecuentemente, es necesario establecer una teoría de cálculo que permita efectuar la correlación geométrica, y la mejor interpretación de las leyes fenomenológicas observadas.

Un sedimento depositado en aguas tranquilas contiene desde el punto de vista granulométrica y mineralógica una variedad de granos, desde arena muy fina y limo hasta minerales de arcilla y coloides orgánicos. El sedimento puede contener también conchas microscópicas y diatomeas, fig. (3.3.2.1). Durante la sedimentación se forman flóculos debido a la conocida acción electrolítica que se presenta en prácticamente todos los sedimentos finos depositados en el agua. Los flóculos se forman por aglomeración de los minerales de arcilla, los cuales a su vez forman una estructura semejante de casa de naipes, la cual ha sido estudiada y reportada por varios investigadores (Lambe, Rosenqvist, Tjong-Kie). Los poros dejados en la fracción formada por flóculos de minerales de arcilla y coloides quedan llenos de agua y sus dimensiones son del orden microscópico o submicroscópico. Estos poros se llamarán en adelante poros de la estructura formados por los minerales de arcilla o simplemente poros microscópicos. Estos representan los poros de la estructura viscosa intergranular.

Los minerales de arcilla y coloides se adhieren a los granos de limo, diatomeas y conchas microscópicas forrándolos totalmente y formando granos más grandes del orden de limo fino hasta arena muy fina. La estructura formada por todos estos diferentes tipos de granos constituye la estructura porosa del esqueleto del suelo, lo cual es capaz de transmitir esfuerzos efectivos. Los poros en esta estructura se llamarán en adelante poros del esqueleto estructural del suelo o simplemente poros SS. Estos quedan llenos de agua y son más grandes que los poros formados por las aglomeraciones de minerales de arcilla y coloides como se ha descrito antes.

Durante la compresión es evidente que para que se obtenga cambio de volumen en todo el sistema de poros será necesario que el agua contenida en los poros microscópicos y submicroscópicos fluya a los poros SS y de ahí a las superficies de drenaje. Por lo tanto, la presión en los poros microscópicos tendrá que ser consistentemente igual o mayor que la de los poros SS del esqueleto estructural del suelo, con objeto de que el agua pueda fluir a estos últimos.

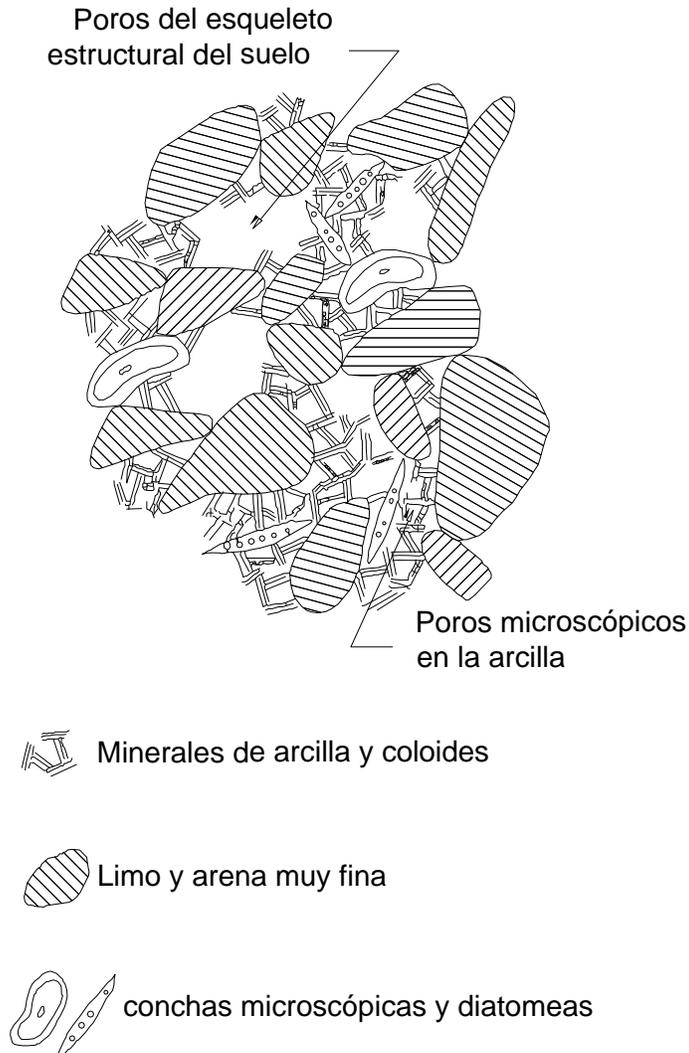


Fig. 3.3.2.1 Representación microscópica de los poros de la estructura viscosa intergranular (Zeevaert, 1998).

De consideraciones teóricas se concluye, desde el punto de vista práctico, que el suelo puede visualizarse formado de dos estructuras básicas que muestran comportamiento mecánico diferente, esto es; doblemente flocculante.

El suelo se encuentra en la naturaleza con un determinado estado de esfuerzos efectivos y presión hidráulica. Al ser colocado en el odómetro para efectuar una prueba de compresibilidad, éste es aliviado del estado de esfuerzos y presiones hidráulicas a los que estaba sometido. Al ser cargado en odómetro se obtiene la recompresión del suelo como indica la rama plana de la curva de compresibilidad Fig. (3.3.2.2). Cuando se rebasa el esfuerzo crítico de compresión confinada  $s_b$  se

observa un quiebre en la curva de compresibilidad el cual se origina por la falla interna de la estructura del suelo al alcanzarse su resistencia al esfuerzo cortante. Teóricamente, el quiebre puede valorizarse por medio de la siguiente ecuación:

$$\sigma_b = \frac{1-\nu}{1-2\nu}(2C) \quad (3.3.6)$$

En donde  $\nu$  representa el valor de la relación de Poisson en el momento del quiebre y  $C$  es la resistencia del esfuerzo cortante del suelo. El valor de  $\nu$  en el quiebre de la curva tiende a ser del orden de 0.25, o bien  $\sigma_b/2C1.5$ .

La rama inclinada de la curva de compresibilidad representa la compresión del suelo para una nueva condición estructural impuesta por el confinamiento que le proporciona el anillo del odómetro. Las deformaciones volumétricas unitarias en esta rama de la curva antes del esfuerzo crítico  $\sigma_b$ . En este tipo de suelos la rama inclinada no debe usarse para diseño si se quieren evitar fuertes desplazamientos verticales.

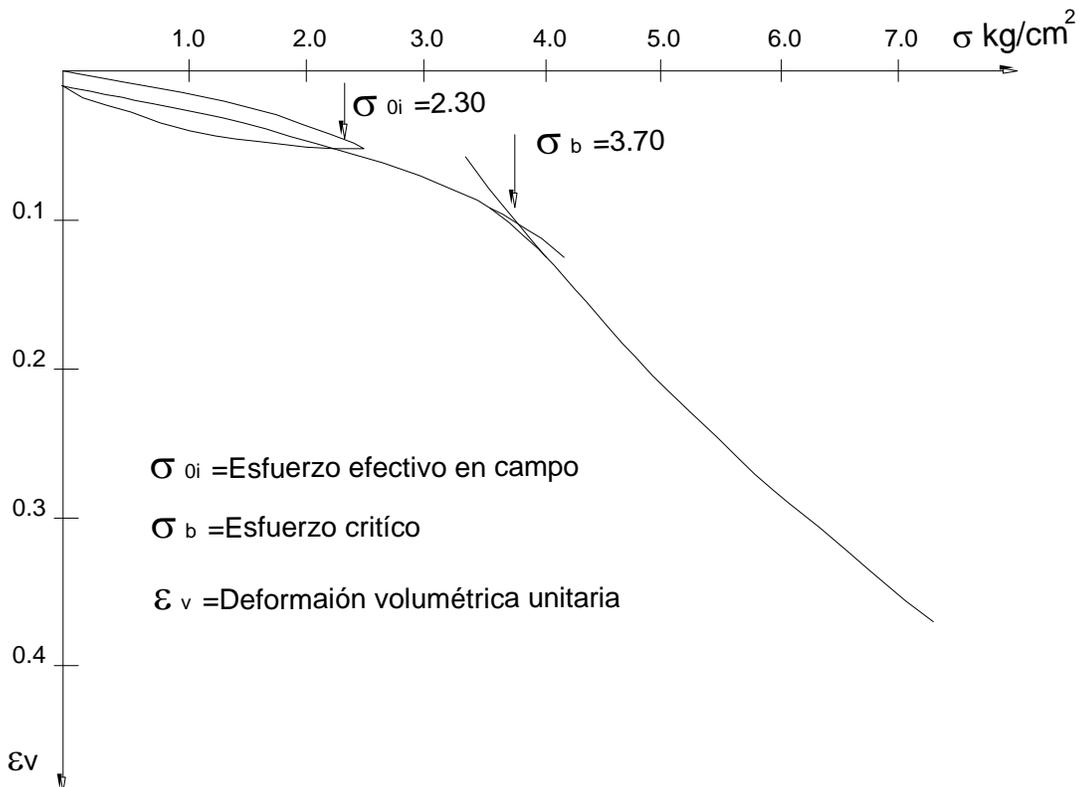


Fig. 3.3.2.2 Curva de compresibilidad (Zeevaert, 1998).

En el rango de los esfuerzos de la recompresión las curvas de consolidación muestran la configuración que indica la fig. (3.3.2.3). Dicha configuración depende del coeficiente de consolidación del suelo  $C_v$ , de la viscosidad intergranular de éste, del espesor del estrato y de las condiciones de drenado. La magnitud de la viscosidad intergranular es, sin embargo, una función importante del nivel de esfuerzos cortantes que se generan durante la prueba del odómetro.

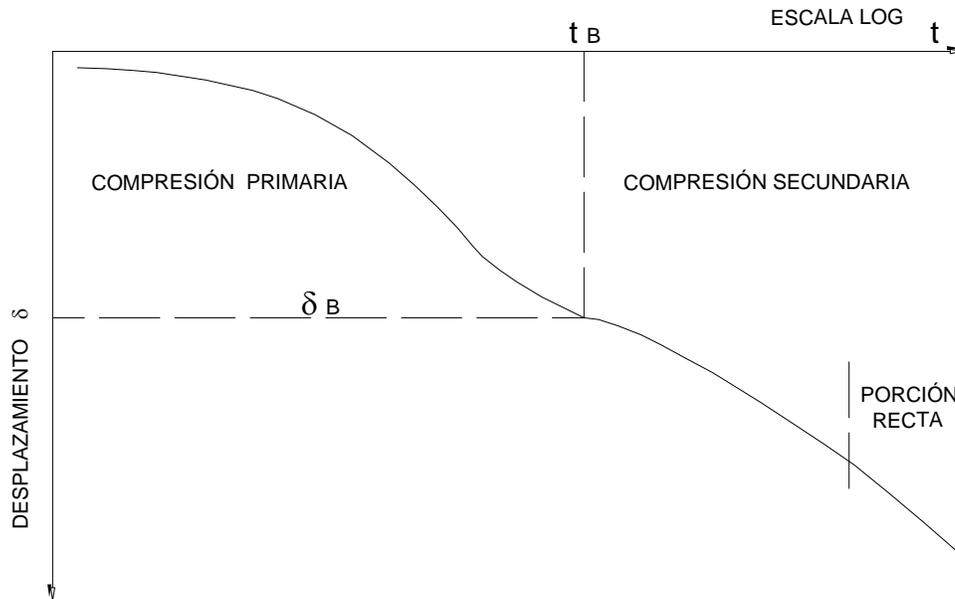


Fig. 3.3.2.3. Curva de consolidación antes del esfuerzo crítico (Zeevaert, 1998).

El objetivo del trabajo que se presenta se limita a efectuar la confrontación de los granos del orden de limos mayores que muestran un comportamiento elasto-plástico, y la parte formada por las aglomeraciones de minerales de arcilla y coloides que exhiben un comportamiento viscoso no lineal. Aun más, puede considerarse que el cambio de volumen en los poros microscópicos y submicroscópicos de la estructura viscosa intergranular principia al mismo tiempo que la carga se aplica.

Con el deseo de encontrar una mejor teoría para representar el fenómeno de deformación viscosa intergranular, Leonardo Zeevaert presentó en 1984 un mejoramiento a su teoría de consolidación que incluye una nueva interpretación del fenómeno de viscosidad intergranular.

Por consiguiente, en este capítulo se presenta una síntesis tomando en consideración un refinamiento de consideraciones físico-químicas y estructurales del suelo.

Cuando el subsuelo se encuentra altamente estratificado con intercalaciones de arena, la compresión primaria debido al fenómeno hidrodinámico de la consolidación se verifica rápidamente, mostrándose más evidente la compresión secundaria. El ingeniero de cimentaciones no puede ignorar en estos casos el fenómeno de compresión secundaria, ya que los desplazamientos diferidos por el efecto de viscosidad intergranular ocasionan hundimientos totales y diferenciales de la cimentación, pudiéndose dañar el proyecto en cuestión.

El Doctor Leonardo Zeevaert investigó durante décadas el fenómeno de viscosidad intergranular. En este trabajo se ofrece una mejor interpretación de la esta teoría, así como la determinación de los parámetros que intervienen en dicha teoría.

La teoría que se expone con los resultados de pruebas del odómetro y campo para curvas de consolidación realizadas a niveles de esfuerzos menores del esfuerzo crítico.

### **3.3.3 Consideraciones Reológicas.**

La teoría se establece por medio de dos hipótesis fundamentales, a saber:

- 1) El suelos está constituido por dos estructuras básicas, la primera está formada por granos microscópicos carentes de cohesión saturadas con agua de fluidez normal y la segunda está formada por granos microscópicos submicroscópicos que forman aglomeraciones de minerales de arcilla y saturados con agua de fluidez menor que la normal (Fig. 3.3.3.1).
- 2) La estructura floculenta formada por arcilla y coloides representa el fenómeno de deformación secular y la estructura floculenta formada con parte de granos inertes microscópicos, representa el esqueleto estructural de comportamiento elasto-plástico resistente.

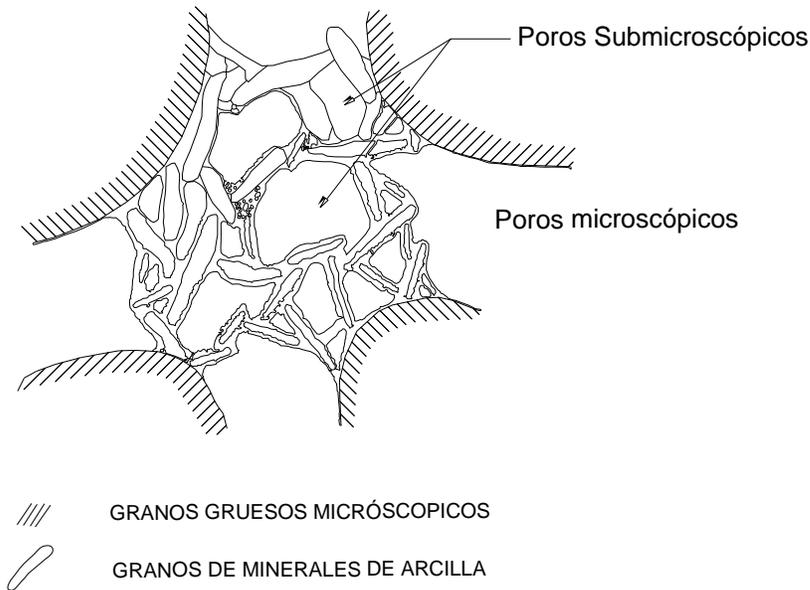


Fig. 3.3.3.1 Concepción de Aglomeración de granos sub-microscópicos (Zeevaert, 1998).

De lo anterior resulta una micro-estructura doblemente floculenta la que al someterse a un incremento de carga unitaria  $\Delta p$  se origina un cambio volumétrico de la estructura  $\Delta \varepsilon_{v1}$ , y de la secundaria. Es evidente que el cambio total por el efecto de la compresión de las estructuras consideradas será

$$\Delta \varepsilon_v = \Delta \varepsilon_{v1} + \Delta \varepsilon_{v2} \quad (3.3.7)$$

Dichos cambios volumétricos son retardados por el fenómeno hidrodinámico de la consolidación. Para analizar el fenómeno físico que se presenta usaremos dos modelos reológicos.

- a) La compresión primaria se analiza por medio del modelo de Kelvin, el cual puede ser correlacionado con el modelo reológico de Terzaghi, que implica que la compresión primaria tiende a ser finita.
- b) La compresión secundaria se analiza con un modelo propuesto por el Doctor Zeevaert denominado Unidad "Z", el cual representa el comportamiento viscoso intergranular del suelo.

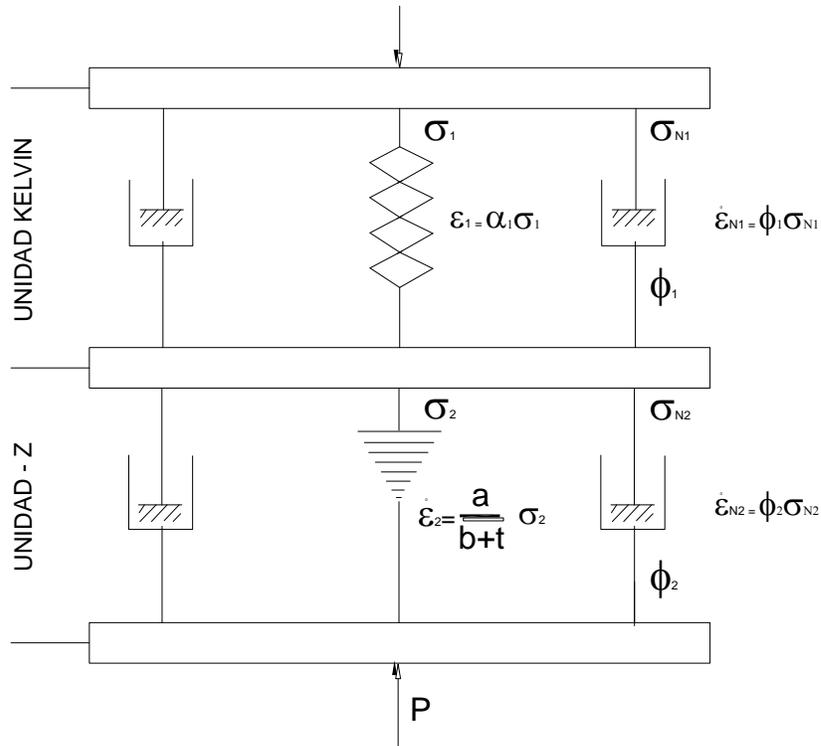


Fig. 3.3.3.2 4.20 Modelo reológico (Zeevaert, 1998).

### Modelo de Kelvin

El modelo de Kelvin queda representado por dos elementos en paralelo Fig. (3.3.3.2). Un elemento es resistente elasto-plástico capaz de tomar carga permanente al final del proceso primario, y el otro, representa un amortiguamiento Newtoniano de fluidez lineal  $\phi_1$ . Por consiguiente, se pueden establecer las siguientes condiciones de equilibrio.

$$\Delta p = \Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_{N1} \quad (3.3.8)$$

De deformación volumétrica unitaria

$$\Delta \varepsilon_{v1} = \Delta \varepsilon_1 = \Delta \varepsilon_{N1} \quad (3.3.9)$$

De esfuerzo- deformación volumétrica unitaria

$$\Delta \varepsilon_1 = \alpha_1 \Delta \sigma_1 \quad (3.3.10)$$

$$\dot{\Delta \varepsilon} = \phi_1 \Delta \sigma_{N1} \quad (3.3.11)$$

Resolviendo para el valor  $\dot{\Delta \varepsilon}_{v1}$ , se encuentra la siguiente ecuación diferencial del fenómeno primario

$$\Delta \varepsilon_{v1} + \frac{\phi_1}{\alpha_1} \dot{\Delta \varepsilon}_{v1} = \phi_1 \Delta p \quad (3.3.12)$$

Integrando se obtiene

$$\Delta \varepsilon_{v1} = \alpha_1 \Delta p (1 - e^{-\frac{\phi_1 t}{\alpha_1}}) \quad (3.3.13)$$

Para un número grande de unidades se puede escribir

$$\Delta \varepsilon_{v1} = \Delta p (\sum \alpha_1 - \sum \alpha_1 e^{-\frac{\phi_1 t}{\alpha_1}}) \quad (3.3.14)$$

Considerando que  $\sum \alpha_1 = \alpha$  representa la compresibilidad, se obtiene finalmente

$$\Delta \varepsilon_{v1} = \alpha \Delta p (1 - \sum \frac{\alpha_1}{\alpha} e^{-\frac{\phi_1 t}{\alpha_1}}) \quad (3.3.15)$$

Por otro lado, de la teoría de consolidación de Terzaghi se obtiene

$$\Delta \varepsilon_{v1} = m_v \cdot \Delta p (1 - \sum \frac{2}{M} e^{-M \cdot T_v}) \quad (3.3.16)$$

En donde  $T_v = C_v t / H^2$  es el factor tiempo primario, y  $M = (2m-1)^2 \pi^2 / 4$ .

Si comparamos las ecuaciones (3.3.15) y (3.3.16) vemos que el modelo de Kelvin y el de Terzaghi son equivalentes. Su correspondencia queda establecida por medio de las siguientes relaciones

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{2}{M} \quad \text{y} \quad \frac{\phi_1}{\alpha_1} = \frac{M C_v}{H^2}$$

De donde se obtiene

$$\alpha = m_v \quad \text{y} \quad \frac{\phi_1}{\alpha} = \frac{2 C_v}{H^2} \quad (3.3.17)$$

Del análisis anterior queda establecido para la compresión el uso de la función de Terzaghi;  $F(T_v)$ , luego podemos escribir

$$\Delta \varepsilon_{v1} = m_v \cdot \Delta p \cdot F(Tv) \quad (4.3.18)$$

Unidad -Z

La unidad -Z queda constituida por dos elementos en paralelo a semejanza del modelo de Kelvin esto es, uno Newtoniano de fluidez no lineal que representa la fluidez intergranular que disminuye con el tiempo, y el otro que representa un amortiguador Newtoniano de fluidez lineal,  $\phi_2$ , el cual retarda la deformación volumétrica unitaria de la estructura secundaria Fig. (3.3.3.2). Se establecen para esta unidad las siguientes condiciones.

De equilibrio

$$\Delta p = \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_{N2} \quad (3.3.19)$$

De deformación volumétrica unitaria

$$\Delta \varepsilon_{v2} = \Delta \varepsilon_2 = \Delta \varepsilon_{N2} \quad (3.3.20)$$

De esfuerzo-deformación volumétrica unitaria

$$\dot{\Delta \varepsilon}_2 = \frac{a}{b+t} \Delta \sigma_2 \quad (3.3.21)$$

$$\dot{\Delta \varepsilon} = \phi_2 \Delta \sigma_{N2} \quad (3.3.22)$$

Resolviendo para  $\dot{\Delta \varepsilon}_{v2}$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la unidad -Z

$$\dot{\Delta \varepsilon}_{v2} = \frac{a}{b + a/\phi_2 + t} \bullet \Delta p \quad (3.3.23)$$

Integrando y considerando que para  $t=0$ ,  $\Delta p = \Delta \sigma_{N2}$  de las ecuaciones 3.3.22 y 3.3.23 se obtiene  $b=0$ , por consiguiente

$$\Delta \varepsilon_{v2} = 2.31a \Delta p \log\left(1 + \frac{\phi_2}{a} \bullet t\right) \quad (3.3.24)$$

La ecuación 3.3.24 se puede escribir en forma conveniente como sigue

$$\Delta \varepsilon_{v2} = 2.31a \Delta p \log\left(1 + \frac{\phi_2}{a} \bullet \frac{\alpha}{\phi_1} \bullet \frac{\phi_1}{\alpha} t\right)$$

Llamemos  $2.31a=m_t$  un valor medio para el incremento sostenido de  $\Delta p$ . De las relaciones Kelvin-Terzaghi se obtiene

$$\frac{\alpha}{a} = 2.31 m_v / m_t \quad \text{y} \quad \frac{\phi_1}{\alpha} = 2C_v / H^2$$

Definiendo  $m_v / m_t = \beta$  se encuentra para la compresión volumétrica unitaria del fenómeno de viscosidad intergranular.

$$\Delta \varepsilon_{v2} = m_t \log\left(1 + \frac{4.62 \phi_2}{\beta \phi_1} T_v\right) \Delta p \quad (3.3.25)$$

En donde

$$\frac{4.62 \phi_2}{\beta \phi_1} = \xi \quad (3.3.26)$$

El valor de  $\xi$  es un parámetro adimensional que se determina de las pruebas. Nótese que  $C_v \xi / H^2 = 1/\tau$  es el inverso de un tiempo, que representa el tiempo de relajamiento de la compresión secundaria, así pues.

$$\xi = \frac{H^2}{\tau C_v} \quad \text{y} \quad T_v = \frac{C_v}{H^2} t \quad (3.3.27)$$

La ecuación 25 también se puede escribir para la prueba del odómetro.

$$\Delta \varepsilon_{v2} = m_t \log(1 + t/\tau) \Delta p \quad (3.3.28)$$

Nótese que los valores de  $\tau$  para la misma deformación volumétrica unitaria se encuentran en la siguiente proporción

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{H_1^2}{H_2^2} \quad (3.3.29)$$

Con la ecuación (3.3.18) se puede escribir en forma adimensional para deformación total volumétrica unitaria.

$$\frac{\Delta \varepsilon_v}{m_v \Delta p} = F(T_v) + \beta \log(1 + \xi T_v) \quad (3.3.30)$$

Por tanto

$$\Delta \varepsilon_v = m_v \bullet \Delta p \bullet \Omega \quad (3.3.31)$$

En donde  $\Omega$  representa la configuración de las curvas de consolidación incluyendo el fenómeno de viscosidad intergranular. En la Fig. (3.3.3.3), se ha dibujado una familia de curvas para un valor fijo de  $\beta$  haciendo variar el valor de  $\varepsilon$ . De estas configuraciones se puede juzgar la importancia de la compresión secundaria. Nótese que para  $\beta=0$ , esto es,  $m_t = 0$ , no existe la compresión secundaria, y por tanto, la curva límite sería la correspondiente a  $F(Tv)$ . A medida que  $\varepsilon$  crece para cualquier valor fijo de  $\beta$ , la curva límite de viscosidad intergranular tiende Ser una línea recta en escala semi-log, e inmediatamente después del quiebre de dicha curva Fig. (3.3.3.3). Lo anterior ocurre cuando  $\phi_2=\phi_1$  de donde resulta un valor teórico límite  $\varepsilon =5.0$ .

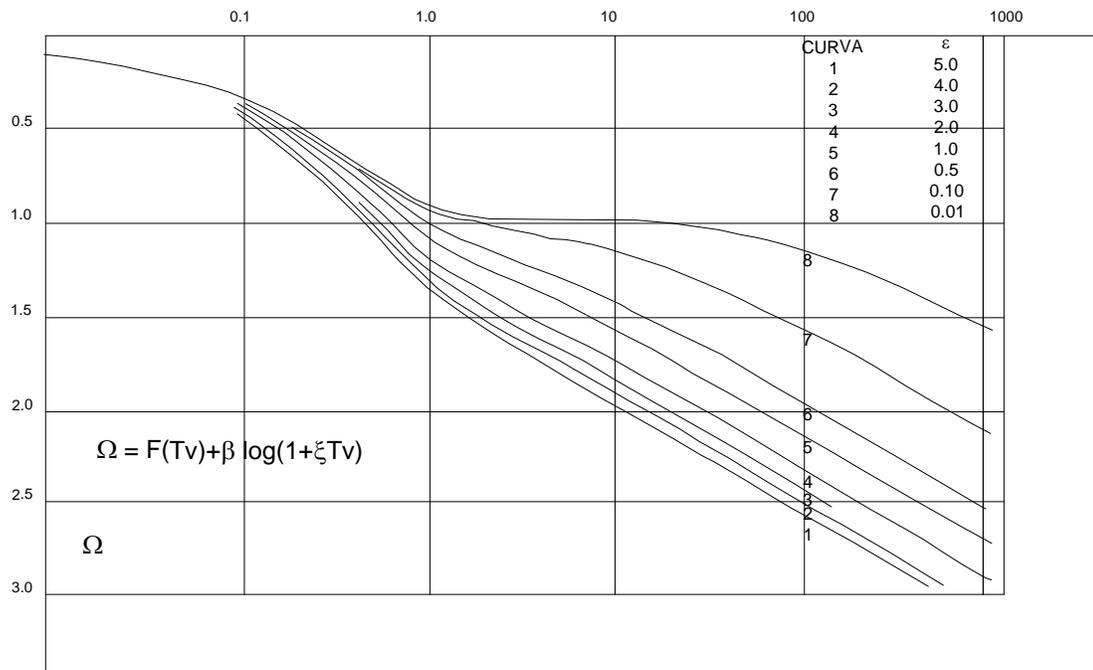


Fig. 3.3.3.3 Curvas teóricas de consolidación para  $\beta = 0.6$  (Zeevaert, 1998).

Los parámetros  $m_v$ ,  $C_v$ ,  $\beta$  y  $\xi$  son funciones del nivel de esfuerzo sobre el cual se aplica un incremento  $\Delta p$  de carga unitaria que produce el fenómeno de consolidación y pueden ser determinados de la prueba del odómetro. Los parámetros que se citan tienen el siguiente significado.

$m_v$ , coeficiente de compresibilidad volumétrica unitaria para la compresión primaria.

$C_v$ , coeficiente de consolidación del fenómeno primario.

$\beta$ , factor que mide la magnitud relativa del fenómeno viscoso intergranular.

$\varepsilon$ , factor adimensional que modifica el valor de  $T_v = C_v t / H^2$  en el fenómeno viscoso intergranular, ecuación (3.3.30)

Método de ajuste para determinar parámetros.

Para la determinación y análisis de los parámetros que intervienen en la ecuación (3.3.30), se utiliza dicha ecuación en la siguiente forma.

$$\delta = \delta_v F(T_v) + C_t \log(1 + t/\tau) \quad (3.3.31)$$

Se observa de las configuraciones de la Fig. (3.3.3.3), que para un valor de  $T_v = 2.0$ , se obtiene  $F(T_v) \approx 1$ , que corresponde aproximadamente al lugar donde la curva sufre un inflexión en su curvatura. Este punto se designa por B con coordenadas  $\delta_B, t_B$ . Además, se escoge otro punto, F, lo más alejado posible del quiebre de la curva de consolidación, esto es, al final de la zona recta en escala semi-log de la compresión secundaria, con coordenadas  $\delta_F, t_F$ . Para estos dos puntos se obtiene, según la ecuación (3.3.31)

$$\delta_B - \delta_F = 0.43 C_t \ln \frac{1 + t_B/\tau}{1 + t_F/\tau} \quad (3.3.32)$$

Resolviendo la ecuación la ecuación (3.3.27) para el valor de  $\tau$  se obtiene

$$\tau = \frac{e^a t_F - t_B}{1 - e^a} \quad (3.3.33)$$

En donde  $a = 2.31 (\delta_B - \delta_F) / C_t$

El valor de  $C_t$  se determina de la pendiente de la curva en la zona recta de la ley logarítmica para dos puntos sobre ésta.

$$C_t = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\log t_2 / t_1} \quad (3.3.34)$$

Conociendo el valor de  $\tau$  se calcula  $\delta_v$  por medio de

$$\delta_v = \delta_B - C_t \log(1 + t_B / \tau) \quad (3.3.35)$$

Como primera aproximación para el valor de  $C_v$ , se utiliza  $\delta_v/2$  encontrando en la curva un valor para  $t_{50}$ , que corresponde al 50% de compresión primaria, esto es para  $T_v=0.2$  y  $F(T_v)=0.5$ , de donde

$$C_v=0.2 H^2/t_{50} \quad (3.3.36)$$

Enseguida se calcula  $\varepsilon=H^2/\tau C_v$  y se entra en la siguiente ecuación para el 50% de consolidación.

$$\delta_{50} = \delta_v / 2 + C_t \log(1 + 0.2\varepsilon) \quad (3.3.37)$$

Con un valor de  $\delta_{50}$ , calculando de la ecuación (3.3.32), se encuentran nuevos valores de  $t_{50}$ ,  $C_v$  y  $\varepsilon$  respectivamente. Se repite el cálculo, y usando la ecuación (3.3.37) nuevamente, se encuentra un valor mejorado de  $\delta_{50}$ . Se prosigue con la iteración hasta que los valores de  $C_v$  y  $\varepsilon$  ya no cambian sustancialmente.

Los parámetros que intervienen en la ecuación (3.3.30) podrán ser calculados por medio de las expresiones que se proporcionan a continuación para un determinado nivel de esfuerzos medio de  $p + 1/2\Delta p$  correspondiente a cada una de las curvas de consolidación obtenidas en el odómetro, respectivamente.

$$m_v = \frac{\delta_v}{2H\Delta p}, \quad m_t = \frac{C_t}{2H\Delta p}, \quad \beta = \frac{m_t}{m_v} \quad (3.3.38)$$

Los valores  $C_v$  y  $\varepsilon$  serán los obtenidos anteriormente durante el método de ajuste.

# CALCULO DE DEFORMACIONES EN ARCILLAS SENSITIVAS.

## 4.1 Introducción.

Se hace la presentación de la ecuación constitutiva propuesta por el Maestro ingeniero Agustín Deméneghi Colina que se compara a través de una solución numérica mediante el programa de elemento finito Plaxis, estudiando la deformación que se presenta debajo de una cimentación superficial que se apoya en un arcilla sensitiva. Antes se realiza una breve explicación del principio de proporcionalidad natural propuesta por el Doctor Eulalio Juárez Badillo, pues es parte importante para la ecuación; se presenta las características de una arcilla sensitiva, se presenta la ecuación constitutiva para el cálculo de deformaciones en suelos en forma analítica, una vez lo anterior, se calcula la deformación del suelo con la ecuación constitutiva que se presenta y se realiza la comparación con un cálculo numérico. Después se concluye la importancia de tomar en cuenta ecuaciones propias del suelo que auxilian en el cálculo de deformaciones tomando en cuenta el comportamiento del suelo, simulando las sollicitaciones que impone una estructura de cimentación superficial. Es decir una ley de los materiales del subsuelo que además de considerar propiedades elásticas y plásticas, también

tome las propiedades plasto-viscoso intergranular, especialmente importante en los materiales arcillosos sensitivos.

## 4.2 Ecuación general de compresibilidad.

Considerando un volumen de forma cubica de materia solida al que se le aplica un esfuerzo  $\sigma$ , igual en todas direcciones. Sea  $V_0$  el volumen a presión nula y  $V$  el volumen a la presión  $\sigma$ . La teoría de la elasticidad tradicional afirma que la deformación volumétrica unitaria  $\varepsilon_v$  es proporcional al esfuerzo  $\sigma$ .

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{\sigma}{K} \quad (4.1)$$

La ec. 4.1 ha sido útil en materiales muy poco compresibles cuando se les sujeta a esfuerzos pequeños, porque toda curva puede considerarse recta si la longitud considerada es suficientemente pequeña. En gravas y arenas sujetas a altos esfuerzos y en arcillas sujetas aún a esfuerzos pequeños se observa que la ley de deformabilidad no es ni remotamente una función lineal del esfuerzo. Este hecho es lo que obligó a Karl Terzaghi a considerar una ley diferente. En efecto, al trazar las curvas de compresibilidad en gráficas semi-logarítmicas observó que se aproximaban a una recta si se trazaban las presiones  $\sigma$  en escala logarítmica y las relaciones de vacíos  $e$  como ordenadas en escala natural, postulando la ley

$$e = e_0 - C_c \log \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (4.2)$$

Por otra parte a principios del siglo veinte, Henky se esforzó por hacer ver que la forma en que mediamos deformaciones estaba mal. En efecto, consideremos una barra de plastilina de longitud de 1 m. Si la alargamos 1 m decimos que la deformación fue de 100%. Si ahora la barra de 2 m. la alargamos en una 2da operación 1 m, nuevamente, decimos que la deformación fué de 50% que, sumada a la deformación anterior, hacen un total de 150%. Por otra parte si la barra original de 1 m. Se alarga hasta 3 m, en una sola operación decimos que la deformación fue de 200%. Las longitudes finales son las mismas más no las deformaciones finales. Se observa que las deformaciones dependen de la longitud que se considera inicial. Henky en esta forma hacía ver que las deformaciones de Cauchy no son sumables, es decir, no forman grupo matemático. Henky se adhirió al concepto de

deformación natural. De esta manera, sea  $x$  la longitud instantánea de una barra. Si en el tiempo  $dt$  la barra cambia en la longitud  $dx$ , se define como la deformación infinitesimal  $d\varepsilon$  a

$$d\varepsilon = \frac{dx}{x} \quad (4.3)$$

Si ahora la ec. (4.3) se integra entre una longitud inicial  $l_0$  y una longitud final  $l$  se tendrá:

$$\varepsilon = \int \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{l_0}^l = \ln \frac{l}{l_0} \quad (4.4)$$

Aplicando la ec. 4.4 nuestro problema de la barra de plastilina se tiene que las deformaciones naturales parciales son  $\ln 2$  y  $\ln 3/2$  que sumadas dan  $\ln 3$ , igual que la deformación natural para cuando la barra se deforma de 1 a 3 m, en una sola operación.

De esta manera existe orden entre 2 variables  $X$  y  $Y$  cuando existe una relación biunívoca proporcional no lineal entre ellas, a través de un parámetro sin dimensiones y abarcando los dominios completos de ambas variables, es decir, de 0 a  $\infty$ .

### 4.2.1 Consideraciones básicas.

Sea  $V$  el volumen de materia bajo el esfuerzo isotrópico  $\sigma$ . El problema es encontrar el cambio infinitesimal de volumen  $dV$  bajo el incremento infinitesimal de presión  $d\sigma$ . La relación entre  $dV$  y  $d\sigma$  debe producir una ecuación que satisface el principio filosófico siguiente:

“La ecuación que relaciona  $V$  con  $\sigma$  puede existir únicamente a través de un parámetro adimensional  $e$ , independiente de puntos críticos, debe satisfacer las condiciones de frontera extremas, a saber:  $V=V_0$  para  $\sigma=0$  y  $V=0$  para  $\sigma=\infty$ ”

Del anterior enunciado se puede notar que el dominio real de las presiones es completo, es decir, de 0 a  $\infty$ . Sin embargo, el dominio real de los volúmenes es incompleto e inverso, solo varía de  $V_0$  a 0 cuando la presión lo hace de 0 a  $\infty$ . Para que exista orden en la relación se requiere primero encontrar una función simple de  $V$ :  $f(V)$  tal que su dominio sea completo y derecho. Es decir que  $f(V)=0$  para  $\sigma=0$  y que  $f(V)=\infty$  para que  $\sigma=\infty$ . Dicha función resulta ser:

$$f(V) = \frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \quad (4.2.1)$$

Ahora ya se está en condiciones de relacionar  $f(V)$  con  $\sigma$ . Por el principio enunciado y las consideraciones críticas mencionadas con anterioridad, la relación no puede ser otra que

$$\frac{df(V)}{f(V)} = \gamma \frac{d\sigma}{\sigma} \quad (4.2.2 \text{ 4.6})$$

Donde  $\gamma$  es una constante de proporcionalidad llamada "coeficiente de compresibilidad".

#### 4.2.2 Ecuación general.

Introduciendo la ecuación 4.2.1 5.5 en la ecuación 4.2.2 5.6

$$\frac{d\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right)}{\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}} = \gamma \frac{d\sigma}{\sigma} \quad (4.2.3)$$

Integrando entre un punto conocido  $(\sigma_1, V_1)$  y  $(\sigma, V)$

$$\ln\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right)_{V_1}^V = \gamma \ln \frac{\sigma}{\sigma_1} \quad (4.2.4)$$

Y por lo tanto

$$\frac{\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}}{\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^\gamma \quad (4.2.5)$$

Un caso particular de esta ecuación, aplicable a una fase mecánica distinta del material, es cuando el volumen  $V_0 = \infty$ . Para esto, introduciendo este valor en la ecuación 4.2.5 se obtiene.

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^\gamma \quad (4.2.6)$$

Para este caso la compresibilidad está descrita por un solo parámetro, el parámetro  $\gamma$ , que tiene que ver tanto con la forma como con la magnitud de la compresibilidad.

### 4.3 Características de las arcillas sensitivas

Los suelos cohesivos totalmente saturados los podemos dividir en arcillas no sensitivas y en arcillas sensitivas. Las primeras se forman en lagos de agua dulce; debido a las de repulsión entre las partículas éstas configuran una estructura donde los granos no se unen entre sí, constituyendo lo que se denomina una estructura “dispersa”. Por lo tanto, en arcillas no sensitivas la adherencia entre partículas es pequeña o nula.

Por el contrario, las arcillas sensitivas se forman en cuerpos de agua salada, y por el alto contenido de sales en el fluido, los cationes del medio contrarrestan las cargas eléctricas negativas que se encuentran en la superficie de las partículas, lo que ocasiona que estas se atraigan entre sí mediante fuerzas eléctricas, dando lugar a una estructura floculenta o de castillo de naipes. Si la carga producida por la cimentación en la arcilla sensitiva es de pequeña magnitud y no rompe el enlace entre los granos, el asentamiento de dicho cimiento será pequeño, lo contrario sucederá cuando la carga rompe con el vínculo entre las partículas.

En zonas alejadas de la costa la sedimentación de las partículas de arcilla se producen en cuerpos de agua tranquilas, debajo de la zona de acción de las olas. El grado de floculación puede ser considerablemente grande, debido al agua salada y al carbonato de calcio en forma de conchas o partículas microscópicas que puede acumularse. Estos suelos consisten en estratos horizontales de limo y arcilla que frecuentemente tienen una estructura sumamente floculada. En muchas líneas de costa los bancos o barras forman barreras que llegan a separar la playa del mar, formando lagunas de costa. En algunos casos las lagunas son lagos permanentes cuyas aguas suben y bajan con las mareas, pero en otros casos pueden ser marismas. Los depósitos de arcilla pueden ser potentes y tener una estructura floculada muy desarrollada (sowers and sowers, 1975).

Se ha investigado que las arcillas sensitivas pueden ser formadas por otras causas a parte de las de tipo marino. Mitchell (1993) distingue seis diferentes fenómenos

que puede dar lugar a un suelo sensitivo: estructura metaestable del suelo (por floculación de la arcilla), cementación, intemperismo, endurecimiento por tixotropía, intercambio catiónico y formación o adición de agentes dispersantes. Cuando la sensibilidad  $S_t$  es mayor que 4, el suelo se considera como muy sensitivo.

Terzaghi y Peck (1967) comentan que si una arcilla tiene un límite líquido mayor que 100% y si su contenido natural de agua a una profundidad mayor que 6 ó 9 m bajo la superficie es mayor que el límite líquido, o si se presenta un alto contenido de materia orgánica, es probable que se comporte como arcilla sensitiva (consideran los autores que estos materiales son arcillas extrasensitivas). Señalan que la arcilla de la ciudad de México, ciertas arcillas marinas del sureste de Canadá y de los países escandinavos, y varios finos con alto contenido de sustancia orgánica, son arcillas de tipo sensitivas.

Una vez que se forma un estrato de arcilla sensitiva, con el tiempo se van sedimentando sobre él otros suelos. Con el incremento de carga, y con el tiempo, las partículas sufren un asentamiento por consolidación primaria, el cual en general es de pequeña magnitud, porque los granos están unidos entre sí. Adicionalmente, las partículas del suelo se acomodan entre ellas, y debido a la naturaleza viscosa del agua que rodea a dichas partículas. Éstas resbalan unas sobre otras, dando lugar al fenómeno de consolidación secundaria.

La reducción de la relación de vacíos de la arcilla hace que se acreciente la conexión entre las partículas, lo que ocasiona un aumento de la rigidez de la masa de suelo. Este incremento del pegamento depende de la edad del depósito y de la magnitud de la carga aplicada (Bjerrum, 1973).

#### **4.3.1 Expresiones para la estimación de la presión crítica en arcillas sensitivas.**

Sea  $P_{vb}'$  la presión vertical efectiva para la cual se rompe el enlace entre las partículas, y  $P_{vo}'$  la presión vertical efectiva inicial debida a peso propio del suelo a la profundidad  $z$ . Por lo comentado anteriormente en arcillas sensitivas se cumple que  $(P_{vb}' - P_{vo}') > 0$ . A la diferencia  $(P_{vb}' - P_{vo}')$ , la podemos llamar rigidez de liga entre partículas. Cabe señalar que en las arcillas marinas de Noruega se ha encontrado que en la relación entre el esfuerzo crítico y el esfuerzo efectivo inicial es aproximadamente a 1.6  $P_{vb}' / P_{vo}' = 1.6$ .

En la arcilla de la ciudad de México la presión crítica se puede obtener a partir de la presión vertical efectiva con la expresión siguiente:

$$P_{vb}' = 1.158P_{vo}' + 25 [KPa] \quad (4.3.1)$$

Por consiguiente en ingeniería de cimentaciones conviene aplicar sobre una arcilla sensitiva un incremento de carga suficientemente bajo, de tal manera que no se rompa la unión entre las partículas. Por esta razón, en edificios de tamaño mediano se emplean con frecuencia cimentaciones compensadas, en las cuales el peso del inmueble es aproximadamente igual al peso del suelo excavado. En esta clase de cimentación se define el incremento neto de presión  $q_n$  de la siguiente manera

$$q_n = PUM - P_{vod} \quad (4.3.2)$$

Siendo:

$PUM$  = Peso unitario medio del edificio

$P_{vod}$  = Presión vertical total previamente existente al nivel de desplante del edificio.

Si  $\sigma_z$  es el incremento de esfuerzo normal vertical a la profundidad  $z$ , ocasionado por  $q_n$ , debemos buscar que en todos los puntos del subsuelo  $\sigma_z$  sea menor que la rigidez de liga ( $P_{vb}' - P_{vo}'$ ).

De esta manera el asentamiento de un edificio cimentado sobre arcilla sensitiva es función de la relación  $\sigma_z / (P_{vb}' - P_{vo}')$ .

Mediante estudios con base en mediciones en edificios construidos en Drammen Noruega, donde se observó que cuando  $\sigma_z$  es cercano o mayor que ( $P_{vb}' - P_{vo}'$ ) el hundimiento es considerable. En consecuencia para fines prácticos podemos establecer como recomendable que la relación de esfuerzos  $\sigma_z / (P_{vb}' - P_{vo}')$  sea menor que 0.65.

En la arcilla de la ciudad de México, usando la ecuación 5.11, el 65% de ( $P_{vb}' - P_{vo}'$ ), es:

$$0.65(P_{vb}' - P_{vo}') = 0.103P_{vo}' + 16.3 [KPa] \quad (4.3.3 \text{ 5.13})$$

Debemos cuidar entonces que en dicha arcilla mexicana,  $\sigma_z$  sea menor que la cantidad dada por la ecuación 4.3.3 5.13, para que los hundimientos no sean excesivos.

## 4.4 Deformaciones

### 4.4.1 deformaciones a corto plazo en arcillas sensitivas.

La deformación en un suelo cohesivo totalmente saturado es la suma de las deformaciones a corto plazo y a largo plazo.

$$\delta = \delta_v + \delta' \quad (4.4.1 \ 5.14)$$

La deformación a corto plazo, o deformación inmediata, la obtenemos planteando la siguiente ecuación constitutiva. (Deméneghi)

$$\frac{dh}{h} = - \frac{1}{A_u} \frac{(f\sigma_z / Pa)^r d(f\sigma_z / Pa)}{(P_{be} / Pa)^{sf}} \quad (4.4.2 \ 5.15)$$

Donde:

$A_u$  = módulo de deformación a corto plazo, en condiciones no drenadas.

$$P_{be} = P_{cie} + P_{co}' \quad (4.4.3 \ 5.16)$$

$$f = \frac{1 + \nu_f}{3} \left( 2 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \right)$$

$\nu_f$  =relación de Poisson para una deformación a volumen constante = 0.5

$P_a$  = Presión atmosférica = 101.3 KPa

El exponente  $r$  permite tomar la forma - Concavidad- de la curva esfuerzo-deformación unitaria, mientras que el exponente  $S_f$  considera la variación de la compresibilidad del suelo en función de la presión de confinamiento.

Integrando la ecuación 4.4.2 5.15. Al aumentar el esfuerzo de 0 a  $\sigma_z$ , el elemento disminuye su espesor de  $h_0$  a  $h_f$ . Por lo tanto, debemos integrar de  $h_0$  a  $h_f$  el primer miembro y de 0 a  $\sigma_z$  el segundo miembro:

$$\frac{h_f}{h_0} = \exp \left[ - \frac{(f\sigma_z)^{1+r}}{(1+r)A_u P_{be}^{sf} P_a^{1+r-sf}} \right] \quad (4.4.4 \ 5.17)$$

La deformación unitaria  $\varepsilon_{fz}$ , por cambio de forma, a volumen constante, es:

$$\varepsilon_{fz} = \delta_{fz} / h_0 \quad (4.4.5 \text{ 5.18})$$

$$\delta_{fz} = \varepsilon_{fz} h_0 \quad (4.4.6 \text{ 5.19})$$

Donde  $\delta_{fz}$  es la deformación vertical y  $h_0$  el espesor inicial del elemento. Así el espesor final vale

$$h_f = h_0 - \delta_{fz} \quad (4.4.7 \text{ 5.20})$$

$$h_f / h_0 = 1 - \delta_{fz} / h_0 = 1 - \varepsilon_{fz} \quad (4.4.8 \text{ 5.21})$$

Remplazando la ecuación 5.17 en la ecuación 5.21, despejando  $\varepsilon_{fz}$  y designando  $\varepsilon_u = \varepsilon_{fz}$  ( $\varepsilon_u$  = deformación unitaria no drenada, a corto plazo)

$$\varepsilon_u = 1 - \exp \left[ - \frac{(f\sigma_z)^{1+r}}{(1+r)A_U P_{be}^{sf} P_a^{1+r-sf}} \right] \quad (4.4.9 \text{ 5.22})$$

La ecuación 4.4.9 5.22 permite calcular la deformación unitaria vertical inmediata. Por cambio de forma, a volumen constante, de un elemento de suelo sujeto a los incrementos de esfuerzo  $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$ .

En arcillas sensitivas  $r \cong 0$  y  $s_f \cong 1$ .

#### 4.4.2 deformaciones a largo plazo en arcillas sensitivas.

La deformación diferida la obtenemos planteando la siguiente ecuación constitutiva:

$$\frac{dh}{h} = - \frac{1}{A'} \frac{d(\sigma_z / P_a)}{[(P_{ve} + \sigma_z) / P_a]^{s_v}} \quad (4.4.10)$$

Siendo:

$A'$  = módulo de deformación a largo plazo, en condiciones drenadas

$$P_{ve} = P_{cie} + P_{vo}' \quad (4.4.11)$$

En arcillas  $s_v \cong 1$ , remplazando en la ecuación 4.4.10 5.23

$$\frac{dh}{h} = -\frac{1}{A' P_{ve} + \sigma_z} d\sigma_z \quad (4.4.12)$$

Integrando la ecuación 4.4.12. Al aumentar el esfuerzo de 0 a  $\sigma_z$ , el elemento disminuye su espesor de  $h_0$  a  $h_f$ .

$$\frac{h_f}{h_0} = \frac{P_{ve} + \sigma_z}{P_{ve}} \quad (4.4.13)$$

$$\delta = \left[ 1 - \left( \frac{P_{ve} + \sigma_z}{P_{ve}} \right)^{(-1/A')} \right] h_0 \quad (4.4.14)$$

#### 4.4.2.1 Ecuación para la Consolidación Primaria.

La deformación al término de la consolidación primaria,  $\delta_p$  está dada por la ecuación 4.4.14 5.27

$$\delta_p = \left[ 1 - \left( \frac{P_{ve} + \sigma_z}{P_{ve}} \right)^{(-1/A')} \right] h_0 \quad (4.4.15)$$

La deformación para un tiempo t es

$$\delta = \delta_p (U / 100) \quad (4.4.16)$$

Siendo U el porcentaje de consolidación primaria, correspondiente al tiempo t.

#### 4.4.2.2 Ecuación para la Consolidación Secundaria.

La deformación por consolidación secundaria la podemos obtener en forma aproximada suponiendo que, después de que ha ocurrido el 100% de la consolidación primaria, sucede una "disminución" de la presión de confinamiento interno  $P_{cie}$ , para tomar en cuenta esta "disminución" introducimos un coeficiente  $C_s$  en las ecuaciones 4.4.11 y 4.4.14, quedando ésta de la siguiente forma.

$$\delta = \left[ 1 - \left( \frac{C_s P_{cie} + P_{vo}' + \sigma_z}{C_s P_{cie} + P_{vo}'} \right)^{(-1/A')} \right] h_0 \quad (4.4.17)$$

Siendo,

$$C_s = 1 - m \log(t - t_p) \quad (4.4.18)$$

$t_p$  = tiempo en que ocurre el 100% de la consolidación primaria;  $\log = \log_{10}$

En resumen, el cálculo de la deformación diferida lo hacemos de la siguiente manera: calculamos el tiempo en que ocurre el 100% de consolidación primaria: para esto, usamos las siguientes expresiones

$$T = \frac{C_v t}{h_e^2} \quad (4.4.19)$$

$$t = \frac{T h_e^2}{C_v} \quad (4.4.20)$$

Suponemos que la consolidación primaria termina cuando su porcentaje  $U = 95\%$ , es decir,  $t_p \cong t_{95}$ . Remplazando en la ecuación 4.4.20

$$t_p = \frac{1.127 h_e^2}{C_v} \quad (4.4.21)$$

La deformación  $\delta$  que se presenta en un cierto tiempo se determina de la siguiente manera:

Si  $t \leq t_p$ , se utiliza las ecuaciones 4.4.15 y 4.4.16

Si  $t > t_p$ , se emplean las ecuaciones 4.4.17 y 4.4.18

Para la arcilla de la ciudad de México  $A' \cong 3.12$  y  $m \cong 0.065$ .

## 4.5 Cálculo de Asentamiento de un cajón de cimentación

Para el cajón de cimentación mostrado en la figura de abajo, calcular los asentamientos diferidos a 6 meses y a un año, después de construido el inmueble, debidos a la consolidación del estrato de arcilla sensitiva.

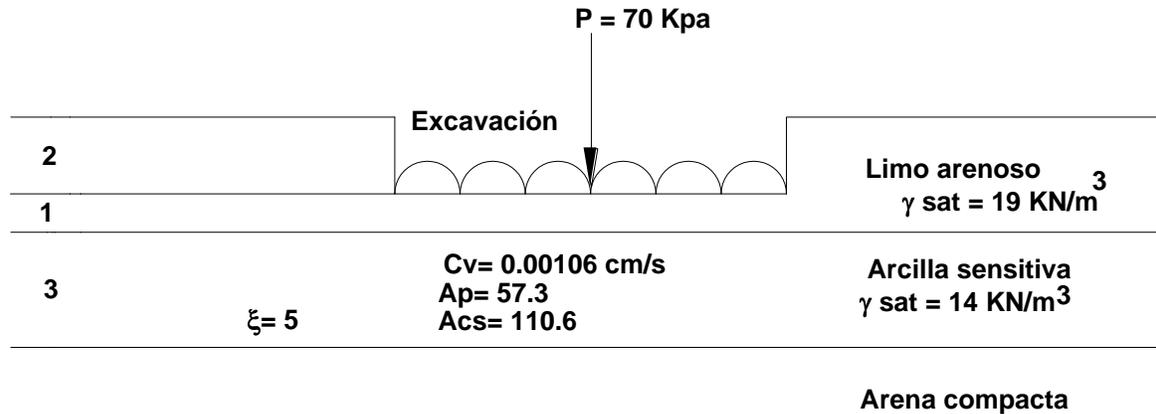


Fig. 4.5.1 Problema de un Cajón de cimentación que genera un asentamiento por consolidación de la arcilla sensitiva.

Solución:

El incremento neto de carga vale  $q_n = 70 - 19(2) = 32 \text{ KPa}$ . El incremento de esfuerzo normal vertical a la mitad del estrato es

$$\sigma_z = 30.607 \text{ KPa}$$

Tiempo igual a 6 meses

$$t = 6 \text{ meses} = 6(30)(86400) = 15\,552\,000 \text{ s}$$

Cálculo del asentamiento total por consolidación primaria.

$$\delta = [1 - \exp(-30.607/57.3(101.3))](3) = 0.0158 \text{ m} = 1.58 \text{ cm}$$

Utilizando la ecuación 4.4.19

$$T = \frac{0.00106(1555200)}{(150)^2} = 0.7327$$

$$U\% = 86.5 \%$$

Sustituyendo en la ecuación 4.4.16

$$\delta_p = \delta_{6\text{meses}} = 1.58 \left( \frac{86.5}{100} \right) = 1.36 \text{ cm}$$

Consolidación secundaria

Utilizando la ecuación 4.4.17

$$\delta = [1 - \exp(-30.607/110.6(101.3))](3) = 0.00818 \text{ m} = 0.818 \text{ cm}$$

Remplazamos

$$\delta_t = 1.58(0.865) + 0.818 \log(1 + 5(0.7327)) = 1.36 + 0.547 = 1.907 \text{ cm}$$

Para el tiempo igual a un año:

$$t = 365.25 (86400) = 31557600 \text{ s}$$

$$T = \frac{0.00106(31557600)}{(150)^2} = 1.487, U = 100\%$$

$$\delta_t = 1.58(1) + 0.818 \log(1 + 5(1.487)) = 1.58 + 0.758 = 2.34 \text{ cm}$$

#### 4.6 Comparación del Cálculo de Asentamiento de un cajón de cimentación mediante el programa de elemento finito Plaxis

A manera de que se evalué la aproximación de la ecuación constitutiva que se expuso anteriormente se determinó el asentamiento para el problema del cajón de cimentación que se calculó mediante el programa de elemento finito "Plaxis". Es importante señalar que se determinó solamente el asentamiento por consolidación primaria.

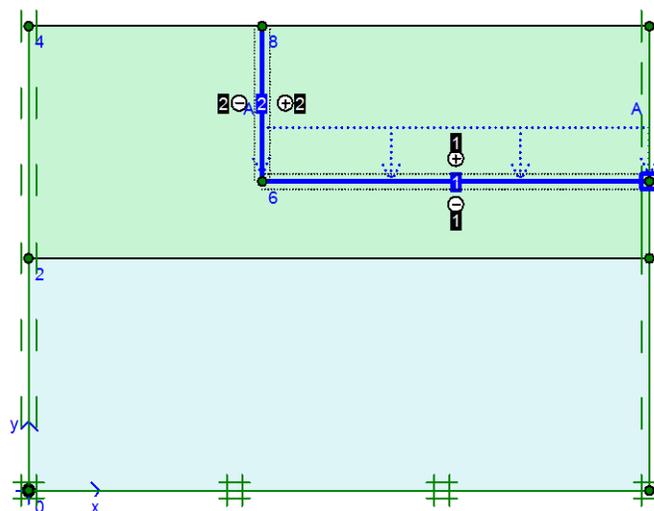


Fig. 4.6.1 Modelo geotécnico para el cálculo de asentamiento por consolidación de la arcilla sensitiva.

Para el modelo numérico se determinó que es simétrico el cajón de cimentación, por lo que se realizó el análisis solamente para la mitad de la cimentación; el modelo del suelo se considera del tipo plástico y para tal análisis efectuado se utilizó el modelo de Mohr-Coulomb. En la figura 4.6.1 se muestra el modelo numérico. Debido a las dimensiones del cajón de cimentación se considera un análisis de deformación plana

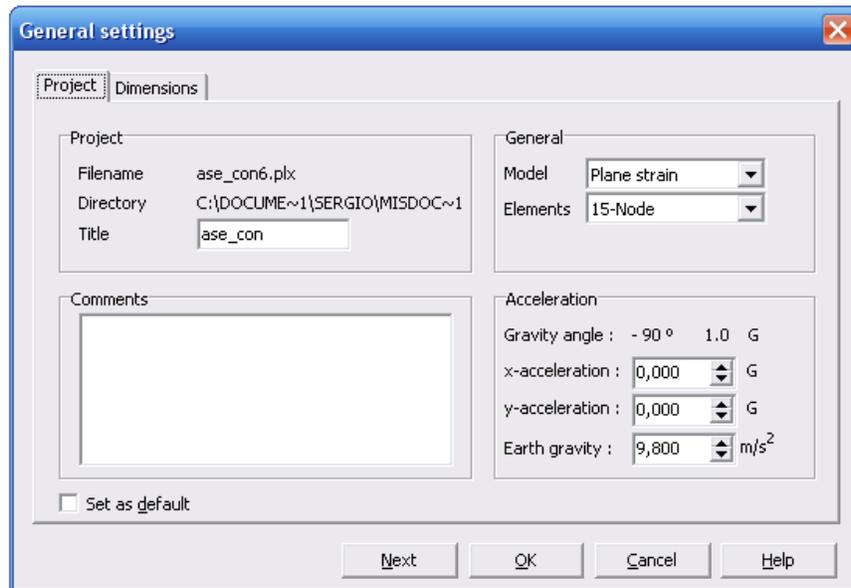


Fig. 4.6.2 Análisis de deformación plana.

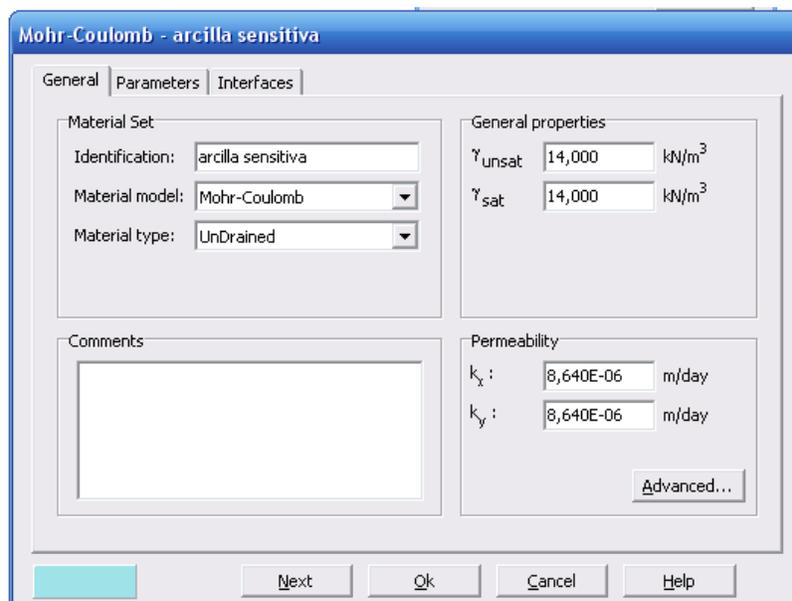


Fig. 4.6.3 Datos generales de la arcilla sensitiva.

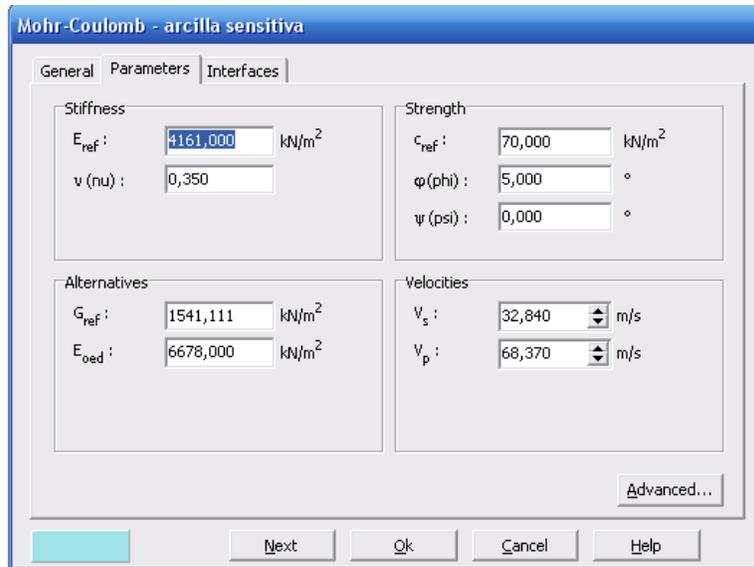


Fig. 4.6.4 Parámetros de la arcilla sensitiva

Para generar el exceso de presión de poro se considera el suelo como un material no drenado.

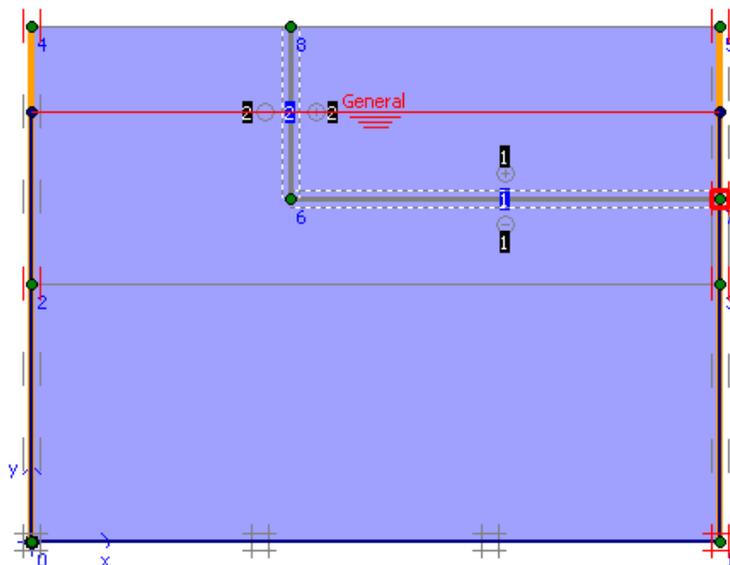


Fig. 4.6.5 Condiciones iniciales considerando que el NAF se encuentra a -1.0 m por debajo del nivel del terreno.

Como se observa en la figura 4.6.5 para generar las condiciones de saturación del suelo, primero se desactiva el cajón de cimentación y se considera la posición del nivel de agua freática (NAF).

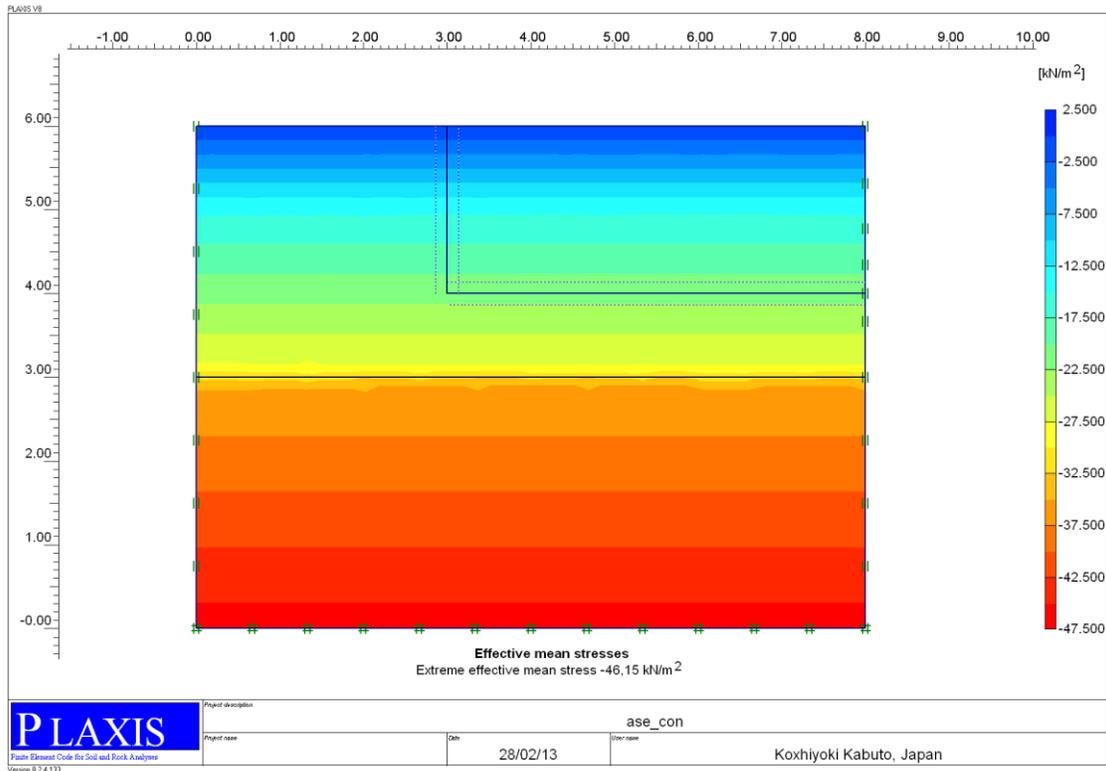


Fig. 4.6.6 Esfuerzos efectivos iniciales

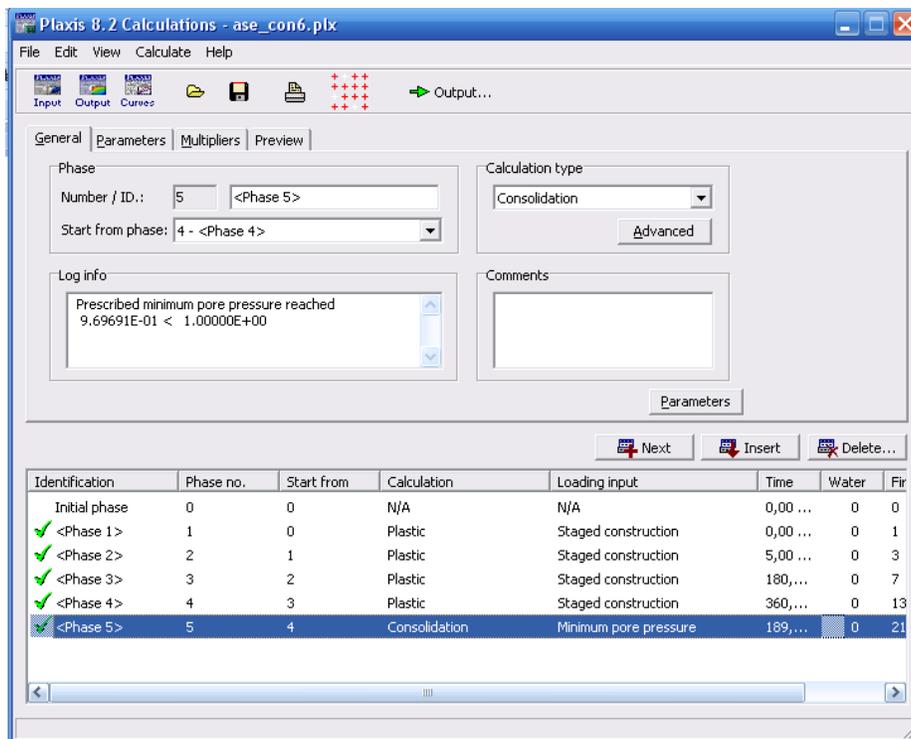


Fig. 4.6.7 Proceso de construcción para el efecto del análisis de asentamiento.

Como se aprecia en la figura 4.6.7 el tipo de cálculo que se efectuó son del tipo plástico y por último se determinó el cálculo por consolidación.

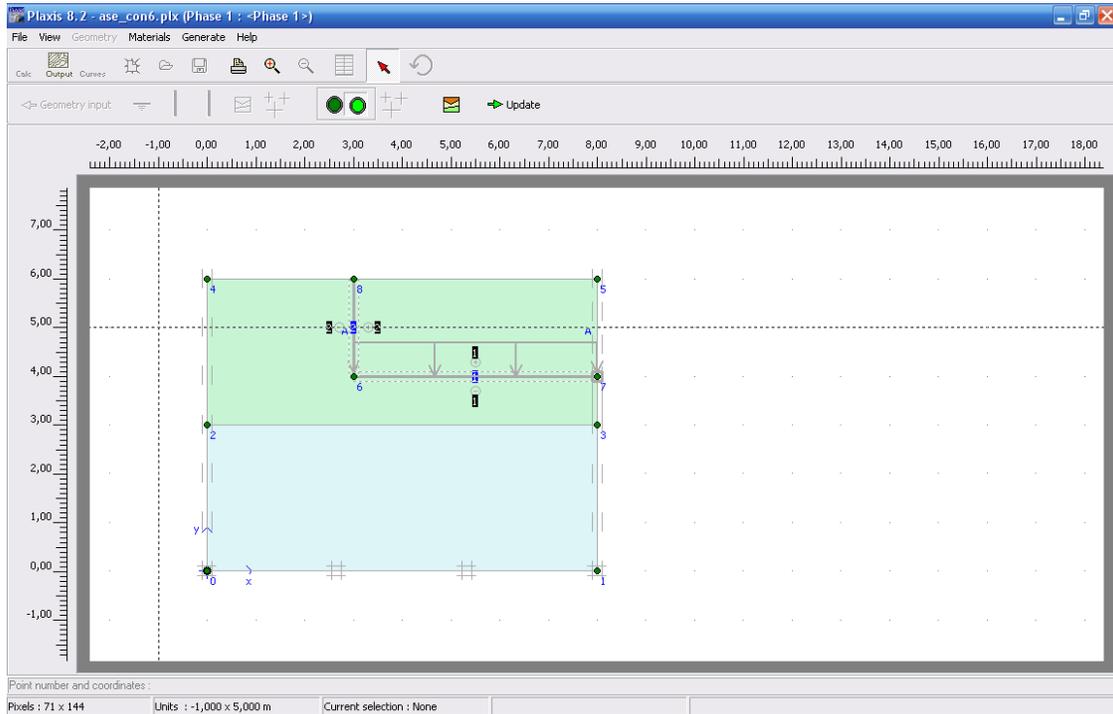


Fig. 4.6.8 Fase 1 Considerando solamente el peso propio del suelo.

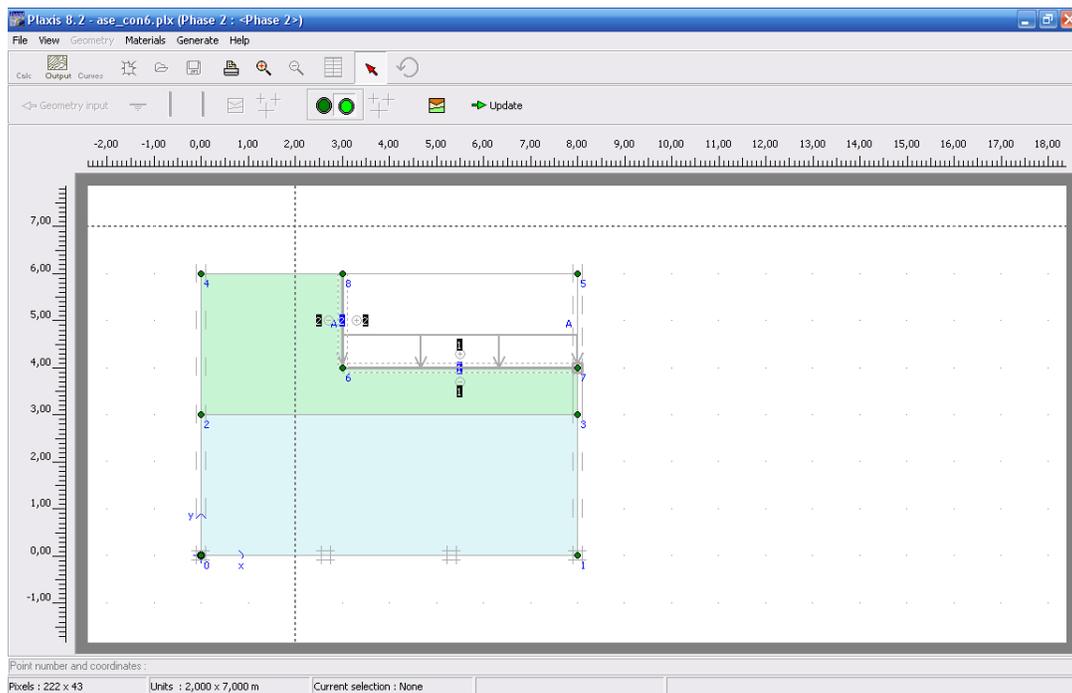


Fig. 4.6.9 Fase 2 se considera la excavación del suelo

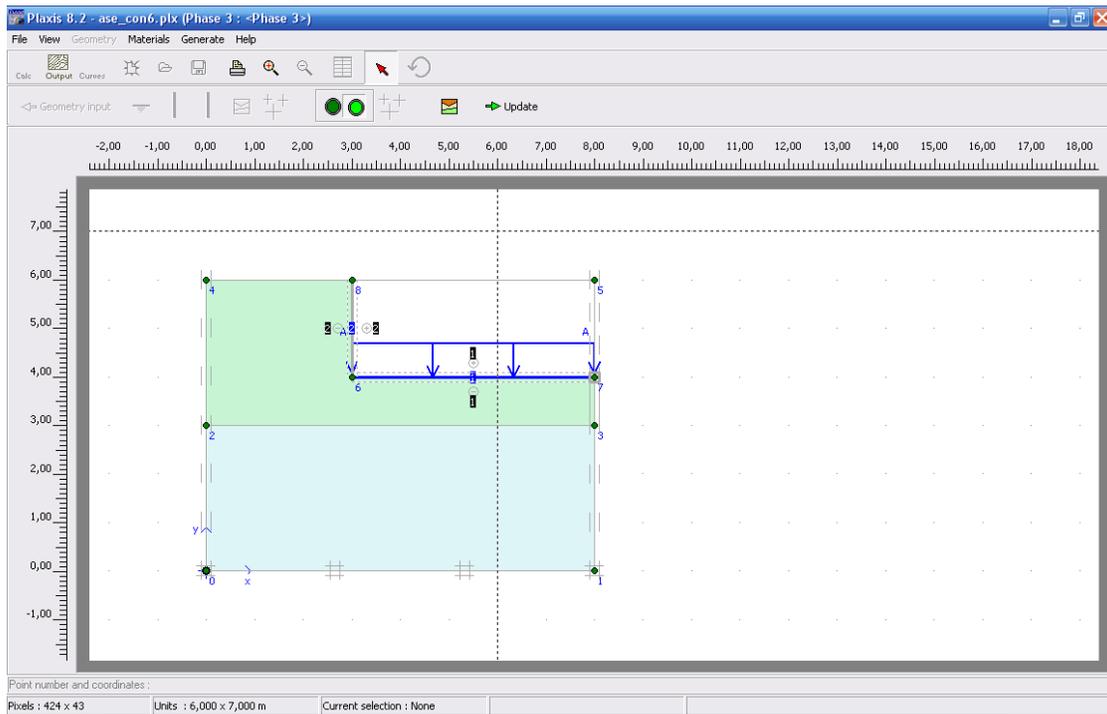


Fig. 4.6.10 Fase 3 se considera la presión neta al fondo de la excavación constituido por el peso de la estructura y el cajón de cimentación.

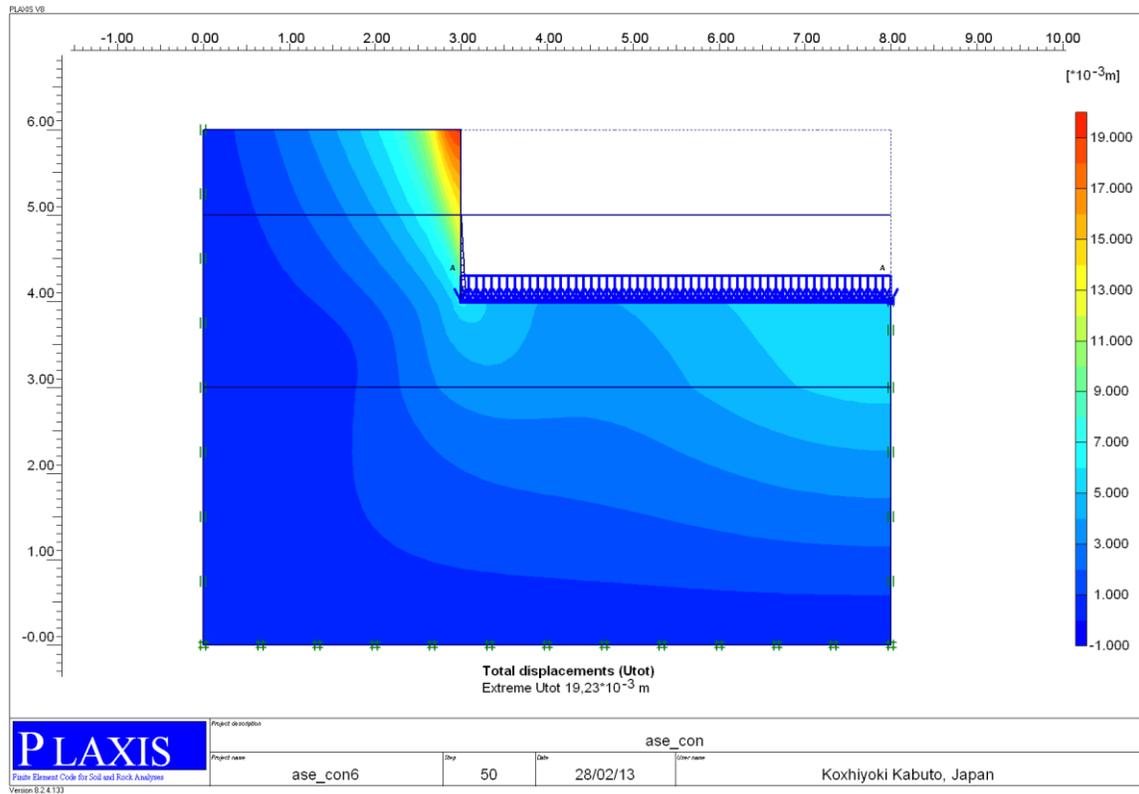


Fig. 4.6.11 Resultados del asentamiento de la estructura causada por la consolidación del estrato de arcilla sensitiva.

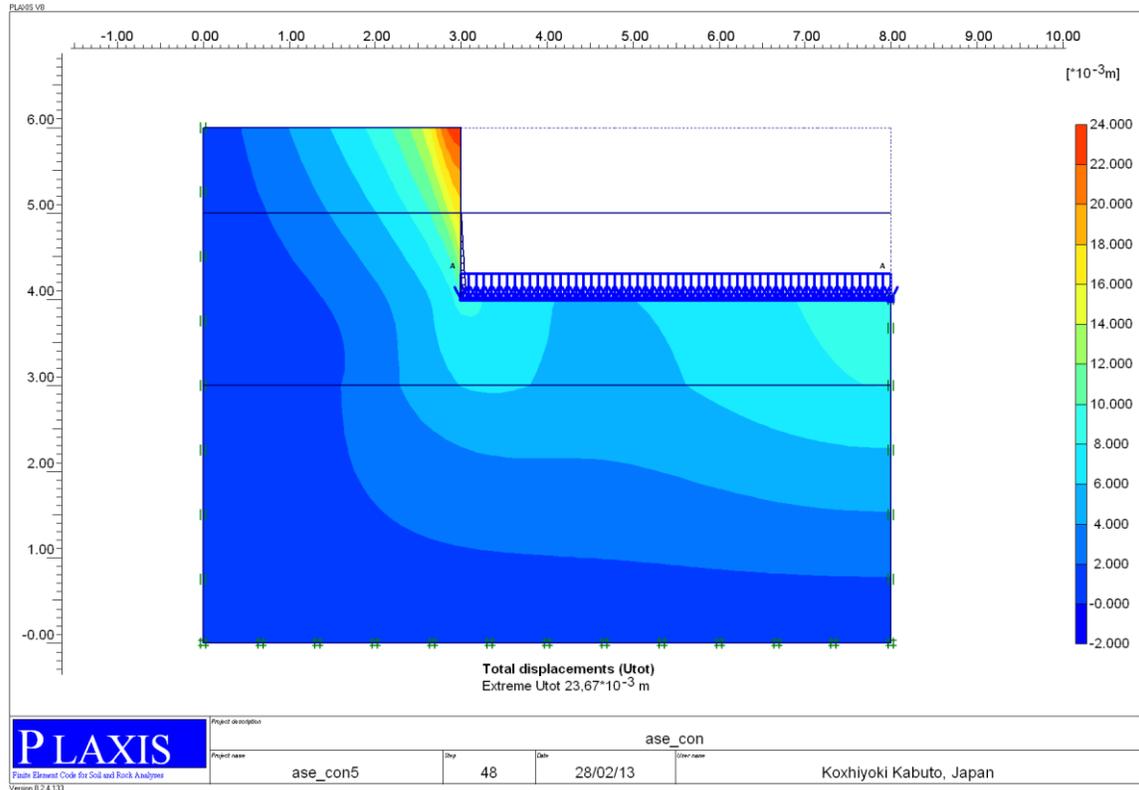


Fig. 4.6.11 Resultado del asentamiento de la estructura causada por la consolidación del estrato de arcilla sensitiva.

Como se puede apreciar en la fig 4.6.11 el asentamiento del cajón de cimentación, por consolidación primaria obtenido a partir del cálculo numérico es de 1 cm, para un tiempo de 6 meses que comparado con el obtenido analíticamente con la ecuación constitutiva propuesta y que resultado de 1.36 cm, resultan similares prácticamente.

# CONCLUSIONES.

El problema general de la formulación de las relaciones de esfuerzo-deformación en el suelo es identificar la ecuación constitutiva que le corresponde. Para utilizar eficientemente los datos experimentales es necesario contar con un marco teórico adecuado, el cual idealmente debe estar integrado por métodos que permitan pasar de ecuaciones constitutivas de tipo más general a otras más específicas; es decir, ecuaciones dependientes de un mayor número de parámetros a otras que dependan de uno menor.

En general, el proceso de particularización se lleva a cabo a través de etapas sucesivas que incorporan más información acerca de las propiedades específicas de los materiales. Puede considerarse que una primera etapa se cubre al restringir la atención a ecuaciones constitutivas que cumplen con los tres postulados fundamentales que en mecánica de los medios continuos toda relación esfuerzo-deformación debe satisfacer a) Determinismo del esfuerzo; b) el principio de acción local, y c) el principio de independencia del sistema de referencia.

En cuanto a los modelos teóricos y de las comparaciones teórico-experimentales se puede establecer que:

a) la teoría de plasticidad, la cual ha mostrado una amplia capacidad para simular el comportamiento de los sólidos, parece requerir de modificaciones importantes cuando se desea adecuarla al comportamiento de los suelos, el cual depende de su composición mineralógica, de su historia de formación y de su historia de carga.

A pesar de que la plasticidad clásica ha dado buenos resultados para simular el comportamiento de los suelos bajo ciertas condiciones, parece inevitable que los

conceptos de normalidad y de flujo asociados deberán de desecharse o modificarse para poder simular adecuadamente el comportamiento de los suelos bajo cualquier condición de sollicitación. Sin embargo, debe tenerse cuidado de no caer en los problemas de unicidad e inestabilidad que se han encontrado cuando se hace uso de reglas de flujo, es decir se requiere de la formulación de nuevos mecanismos que provengan de un amplio conocimiento del comportamiento de los suelos.

Los modelos del estado crítico han demostrado ser adecuado en la simulación del comportamiento axisimétrico de los suelos normalmente consolidados (modelo de Cambrige) o preconsolidados (modelo de Pender) además de su simplicidad y del bajo número de parámetros requeridos. Por otro lado, la derivación hacia los modelos con cubierta ha permitido cubrir un espectro más amplio del comportamiento de los suelos y le ha dado una mayor versatilidad, de tal manera que pueden cubrir los aspectos de anisotropía y carga alterna, para ciertas sollicitaciones tridimensionales. Pero, los modelos del estado crítico, al ser básicamente plásticos, no escapan a los problemas que impone el uso de reglas de flujo sean estas asociadas o no asociadas.

Los modelos endocrónicos han mostrado algunas ventajas sobre el resto de los modelos en cuanto a simular el comportamiento cíclico de los suelos; no obstante requieren de ciertas modificaciones y adecuaciones ya que presentan problemas de unicidad en la solución de propagación de ondas.

Los modelos hipoeásticos surgen de la teoría establecida por truesdell en 1955, donde establece una relación entre el tensor de velocidad de aplicación del esfuerzo y el tensor de velocidad de deformación por medio de una función tensorial. La idea básica de estos modelos es la de tratar de identificar esa función por medio de los resultados de laboratorio realizados en probetas de las cuales se conoce toda su historia de cargas. A partir de ahí, es posible determinar el comportamiento para cualquier trayectoria de sollicitación, por medio de interpretaciones con las trayectorias conocidas. Al utilizar una serie de parámetros, es posible ajustar la función tensorial al caso específico de un material.

Por otra parte se ha presentado un procedimiento no lineal para el cálculo de deformaciones en arcillas sensisitivas, que toma en cuenta la unión que existe entre las partículas y el fenómeno de deformación a largo plazo por consolidación secundaria

Se presenta una ecuación constitutiva que permite calcular deformaciones a largo plazo tanto por consolidación primaria como por consolidación secundaria. Los

módulos de deformación que se emplean son propiedades intrínsecas del suelo, los cuales no dependen de la presión de confinamiento sobre el mismo.

Se realizó la comparación de la ecuación constitutiva que determina deformaciones por consolidación primaria contra un análisis numérico de esfuerzo-deformación resultando las magnitudes de los resultados de los dos cálculos muy similares.

Con lo que respecta a los análisis numéricos muestra que se deben esperar buenos resultados cuando se realizan las pruebas de laboratorio apropiadas para obtener los parámetros correspondientes, a las solicitaciones simuladas en el programa basado en elementos finitos, cabe destacar que es importante realizar una refinación del enmallado de elementos para acercarse más a un comportamiento real. Las tendencias de los asentamientos calculados mediante las leyes constitutivas en este caso de Mohr Coulomb arrojaron resultados muy similares a la ecuación constitutiva propuesta en este trabajo.

Actualmente, un modelo constitutivo para suelos únicamente puede resultar de utilidad cuando logra satisfacer las siguientes condiciones:

- 1) su algoritmo asegura la estabilidad unicidad y continuidad de la respuesta.
- 2) Es objetiva, es decir no depende de un sistema de referencia específico.
- 3) Es capaz de considerar diversas condiciones de frontera.
- 4) Demanda cantidades razonables de memoria y tiempo de cómputo.
- 5) Requiere de un número razonable pequeño de parámetros los cuales, pueden obtenerse de los ensayos usuales de laboratorio o de campo y además tienen un significado físico.

# REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA.

- 1) 1.- Anandarajah, A M y Dafalias, y F (1986), Bounding Surface Plasticity, III Application to Anisotropic Cohesive Soils, Journal Engineering Mechanics
- 2) Ansal, A M, Bazant, Z y Krizek, R J (1980), Endocronic Model for Soils, International Symposium Soil Cyclic Transient loading, Swansea, ed Balkema, Reino Unido.
- 3) Bazant, Z P, Ansal, A M y Krizek, R J (1982), Endocronic Model for Soils, Soil Mechanics Transient and Cyclic loads, John Wiley and sons, Reino Unido.
- 4) Bazant, Z P, Krizek, R J y Schieh Ch (1983), Hysteretic Endocronic Theory for sand, Journal Engineering Mechanics, EUA.
- 5) Bjerrum, L (1967), Enginerring geology of norwegian normally-consolidated marine clays as related to settlements of buildings, Geotechnique, Reino Unido.
- 6) Burland, J B (1965), The Yielding and Dilation of clay, Geotechnique, Reino Unido.
- 7) Carter, J P, Booker, J R y Wroth, C P (1980), A Critical State Model for Cyclic loading, International Symposium Soil Under Cyclic and Transient loading, Swansea, ed Balkema, Reino Unido.
- 8) Chambon, R y Darve, F (1980), incremental Constitutive Equations for soils and applications to Cyclic loadings, Soil Under Cyclic and Transient loading, Swansea, ed Balkema, Reino Unido.

- 9) Dafalias, Y F y Hermann, L R (1986), Bounding Surface Plasticity II: Application to isotropic Cohesive Soils, Journal Engineering Mechanics, ASCE, EUA.
- 10) Dafalias, Y F y Hermann, L R (1980), A Bounding Surface Soil Plasticity Model, Soil Under Cyclic and Transient loading, Swansea, ed Balkema, Reino Unido.
- 11) Dafalias, Y F (1986), Bounding Surface Plasticity I: Mathematical Foundation and Hypoplasticity, Journal Engineering Mechanics, ASCE, EUA.
- 12) Dafalias, Y F (1987), An Anisotropic Critical State Clay Plasticity Model, Constitutive Law for Engineering Material, ed Elsevier, EUA.
- 13) Darve, F, Rojas, E, y Flavigny, E (1985), On a Constitutive Description of the Cyclic Behaviour of Clays, Proc 5<sup>th</sup> International Conference Numerical Methods Geomechanics, Nagoya, Japon
- 14) Darve, F, Rojas, E, y Flavigny, E (1986), A Class of incrementally Non-Linear Constitutive Relations and Applications to Clays, Computers and Geotechnique, Reino Unido
- 15) Darve, F y Chau, B (1987), Constitutive instabilities in incrementally Non-Linear Modeling, Constitutive Laws for Engineering Materials, ed Elsevier, Tucson, Arizona.
- 16) Deméneghi, A (2007), Cálculo de deformaciones en arcillas sensitivas, XXIII Reunión Nacional de Mecánica de suelos, Tuxtla Gutiérrez Chiapas.
- 17) Lade, P V (1987), Behavior and Plasticity theory for Metals and Frictional Materials, Constitutive laws for Engineering Materials Theory and Applications, ed Elsevier, EUA
- 18) Mendelson, A (1968), Plasticity: Theory and Application, Mac Millan Company, NewYork

- 19) Mroz, Z (1982), On Isotropic Hardening Constitutive Models in Soil Mechanics, Results of the International Workshop on Constitutive Relations for Soils, ed Balkema, Grenoble, 489-496
- 20) Nemat-Nasser, S(1984), Rate Type Relations, Results of the International Workshop on Constitutive Relations for Soils Grenoble, 471-475
- 21) Pender, M J (1978), A Model for the Behaviour of Overconsolidated Soil, Geotechnique 28(1), Reino Unido, 1-25
- 22) Pender, M J(1980), cyclic Mobility-A Critical State Model, Soils Under Cyclic and Transient Loading, ed Balkema, Swansea, Reino Unido, 325-334
- 23) Pender, M J (1982), A Model for the Cyclic Loading of Overconsolidated Soil, Soils Mechanics-Transient and Cyclic Loads, G N Pande y O C Zienkiewicz editors, John Wiley, Reino Unido
- 24) Pooroshab, H B, Holube, I y Sherborne, A N (1966), Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression: Part I, Canadian Geotechnical Journal, 3(4), Canada, 179-190
- 25) Prévost J H (1975), Mathematical Modelling of Monotonic and Cyclic Undrained Clay Behaviour, Norwegian Geotechnical Institute, Report 51412, Noruega, 1-21
- 26) Prévost J H y Höeg, K (1977), Plasticity Model for Undrained Stress- Strain Behaviour, Norwegian Geotechnical Institute, N° 118, Noruega, 27-33
- 27) Prévost J H (1978), Plasticity Theory for Soil Stress - Strain Behavior, Journal Engineering Mechanical Division, ASCE, 104(5), EUA, 1177-1194
- 28) Prévost J H (1978), Anisotropic Undrained Stress - Strain Behavior of Clays, Journal Engineering Mechanical Division, ASCE, 104(8), EUA, 1075-1090
- 29) Prévost J H (1979), Mathematical Modelling of Soil Stress- Strain- Strength Behavior, 3<sup>rd</sup> International Conference Numerical Methods in Geomechanics, Aquisgrán, Alemania, 347-362

- 30) Prévost J H (1987), Modeling the Behavior of Geomaterials, International Short Course on Constitutive Laws for Engineering Materials, Theory and Applications, Tucson, Arizona, 1-35
- 31) Rojas, E, Romo M P Hiriart, G (1988), Comportamiento Mecánico de Suelos: Leyes Constitutivas (segunda etapa), Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe Interno N°8515
- 32) Rojas, E, Romo M P Hiriart, G (1989), Modelo Constitutivo para Simular el comportamiento de la arcilla del Valle de México, Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, N°522
- 33) Sandler, I S y Rubin, D (1987), The Consequences of Non Associated Plasticity in Dynamic Problems, Constitutive Laws for Engineering Materials, Theory and Applications, ed Elsevier, Tucson, Arizona
- 34) Sandler, I S DiMaggio, F L y Baladi, G Y (1976), Generalized Cap Model For Geological Materials, Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE, 102(7), EUA, 683-699
- 35) Shofield, A y Wroth, P (1960), -critical State Soil Mechanics, McGra Hill, Ltd, Reino Unido
- 36) Truesdell, C y Noll, W (1965), The Non-Linear Fields Theories of Mechanics, Handbook of Physics, vol III (3), ed Springer, Berlín
- 37) Scott, R F (1984), Plasticity and Constitutive Relations in Soil Mechanics, Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE,111(5), EUA, 563-605
- 38) Valanis, K C y Read, H C (1982), A New Endochronic Plasticity Model for Soils, Soil Mechanics- Transient and Cyclic Loads, John Wiley & Sons, Ltd, EUA
- 39) Valanis, K C y Read, H E (1987), Endochronic Plasticity Basic Equations and Applications, International Short Course on Constitutive Laws for Engineering Materials, Universidad de Arizona, Tucson, Arizona
- 40) Viniegra Heberlein Fermín (2011), Mecánica de los cuerpos deformables.

Zeevaert, L (1973), Foundation Engineering for Difficult subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold.